



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**EĞRİSEL BİR BÖLGEDE STOKES AKIŞ PROBLEMİNİN
ANALİTİK ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zehra DEHRİ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Halis BİLGİL

AKSARAY, 2019

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 172342612 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi **Zehra DEHRİ** tarafından hazırlanan "**EĞRİSEL BİR BÖLGEDE STOKES AKIŞ PROBLEMİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Halis BİLGİL

Aksaray Üniversitesi

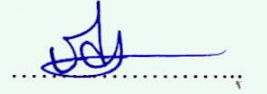
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.



Üye: Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU

Erciyes Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.



Üye: Doç. Dr. Ayhan ERCİYES

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.



Tez Savunma Tarihi: 04 /04 / 2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Doç. Dr. Mehmet Ali HİNİS

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinallliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.



Zehra DEHRİ

TEŞEKKÜR

“Eğrisel Bir Bölgede Stokes Akış Probleminin Analitik Çözümü” konulu tez çalışmasının seçiminde, yürütülmesinde, sonuçlandırılmasında ve sonuçlarının değerlendirilmesinde değerli zamanını feda ederek her konuda yardımcı olan, değerli hocam Sayın Doç. Dr. Halis BİLGİL’e ve bütün hayatım boyunca desteklerini esirgemeyen kıymetli aileme ve eşime teşekkürlerimi borç bilirim.

Zehra DEHRİ

AKSARAY, 2019

İÇİNDEKİLER	
TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
1. GİRİŞ	1
1.1 Temel Kavramlar	1
1.2 Stokes Akış	2
1.3 Sıfırdan Farklı Reynolds Sayılı Akış (Navier-Stokes Akış, $Re \neq 0$)	4
1.4 Reynolds Sayısı	5
1.5 Lokal Akış Analizi	6
1.6 Tezin Ana Hatları	6
2. İKİ SERBEST YÜZEYLİ KAPAKLA SÜRÜLEN KAVİTEDE AKIŞ PROBLEMİ	8
2.1 Problemin Sınır Şartları	8
3. TEK KAPAKLA SÜRÜLEN KAVİTEDE STOKES AKIŞ	15
3.1 Yönetici Denklem ve Sınır Şartları	15
3.2 Seri Çözüm Metodu	16
3.3 Bir Yarı Sonsuz Bölge için Biortogonal Seri Çözümü	16
3.4 Bir Dikdörtgensel Bölge için Biortogonal Seri Çözümü	24
3.5 Katsayıların Belirlenmesi	25
4. EĞRİSEL BİR BÖLGEDE STOKES AKIŞ PROBLEMİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ	30
4.1 Formülasyon	30
4.2 Bölgelerin Arakesitinde Eşleştirme	37
4.3 Biortogonal seri çözümü	51
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	56
KAYNAKLAR	59
ÖZGEÇMİŞ	62

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EĞRİSEL BİR BÖLGEDE STOKES AKIŞ PROBLEMİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ

Zehra DEHRİ

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Halis BİLGİL

ÖZET

Bu tez çalışmasında endüstrinin birçok alanında kullanılan bazı kavite akış problemlerinden bazıları ele alındı. Dikdörtgensel, sektörel ve eğrisel bölgelerde iki boyutlu Stokes akış problemlerinin analitik çözümü verildi.

Tez beş bölümden oluşmakta olup birinci bölümde tez çalışmasında kullanılacak temel kavramlar, denklemler ve tanımlar verildi.

İkinci bölümde, bir ya da iki duvarının hareketli ve karşılıklı yan duvarların birer serbest yüzey olduğu dikdörtgensel bölgedeki akış probleminin çözümü analiz edildi.

Üçüncü bölümde kapalı dikdörtgensel bölgedeki Stokes akış probleminin analitik çözüm mekanizması verildi.

Dördüncü bölümde ise eğrisel bir bölgedeki akışı yöneten kısmi diferansiyel denklem verilen sınır koşulları altında çözüldü. Böylece eğrisel bir bölgedeki akış hareketi için bilgiler elde edildi.

Beşinci ve son bölümde elde edilen bulgular ve öneriler verildi.

Anahtar Kelimeler: Stokes Akış, Akış Fonksiyonu, Analitik Çözüm, Kavite Biortagonallik

Nisan, 2019; 62 sayfa

M.Sc. THESIS

STOKES FLOW IN CURVED CHANNELS

Zehra DEHRİ

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Doç. Dr. Halis BİLGİL

ABSTRACT

In this study, some of cavity flow problems which are used in many areas of the industry are discussed. Two-dimensional Stokes flow in rectangular, sectorial and curved shaped cavity are considered.

The thesis consists of five sections. In the first section, general concepts, equations and definitions which will be used in thesis, are introduced.

In the second section, flow structures are analyzed in a rectangular cavity formed by a pair free surface and one or two moving lids.

In the third section, analytical solution mechanism of Stokes flow problem in a closed rectangular region is given.

In the fourth section, the governing partial differential equations for the flow in a curved region were solved under given boundary conditions. Thus, information was obtained for flow movement in a curved region.

In the fifth and last section, the conclusions and recommendations were given.

Keywords: Stokes flow, Stream function, Analytical solution, Cavity, Biorthogonality

April, 2019; 62 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. İki serbest yüzeyli kapakla sürülen kavitede akış.....	8
Şekil 3.1. Tek kapakla sürülen kavitede Stokes akış.....	16
Şekil 4.1. Akış olayının gerçekleştiği eğrisel bölge.....	31
Şekil 5.1. $r_1 = 1, r_2 = 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{4}$ için akış çizgileri.....	57



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 5.1. $r_1 = 1, r_2 = 2$ için 26 λ_n öz değerleri.....	56
---	----



SİMGELER VE KISALTMALAR

L	Uzunluk
$N-S$	Navier-Stokes Denklem Sistemi
P	Basınç
Re	Reynolds Sayısı
V	Hız
ρ	Yoğunluk
ν	Kinematik Viskozite
μ	Mutlak Viskozite
n	Vektör



1. GİRİŞ

1.1 Temel Kavramlar

Akışkanlar doğada ve endüstrinin birçok üretim alanında yer alır. Bunlardan bazıları tabaka akışları, seramik imalatı, polimer işletimi, ısı ve kütle transferi, akciğerlerdeki havanın dolaşımı, mürekkep püskürtmeli yazıcılar, bazı aerodinamik uygulamalar, damarlardaki kan akışı, kurutma sistemleri ve bazı jeofizik uygulamalar olarak verilebilir [1-5]. Akış olayının gerçekleştiği bölgeye kavite adı verilir. Kavitenin geometrisine bağlı olarak akış yapıları sade ya da oldukça karmaşık hal alabilmektedir. Kavite geometrisin karmaşık olduğu durumlarda akış probleminin çözümü için nümerik yöntemlere ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu tez çalışmasında üzerinde duracağımız analitik çözüm ve sonuçları, kendi ilgi alanına ek olarak kompleks akış davranışı sergileyen geometrilerin çözümleri için kullanılacak nümerik algoritmaların doğruluğunu test etmeye yardımcı olan ideal bir araç olacaktır.

Dinamik akışkanlar alanındaki hesaplamalarda, kavite akışları en çok çalışılan problemlerdendir. Basit geometrisi olmasına rağmen, kavite akışı Reynolds sayısına bağlı olarak, kavitelerin köşe bölgelerinde akışkanın dönerek yeni çoklu zıt halkaları ortaya çıkartmasıyla oldukça çeşitli akış yapıları gösterir. Bu akış yapılarının durumu akışın kullanılacağı teknolojik önem arz eden çalışmalar için belirleyici rol oynayacaktır. Örneğin ısı dağılımının ele alınacağı bir akış probleminde kavite içerisindeki akışın mümkün olduğunca az girdaplı (eddy) olması daha istenen bir durumdur. Bunun için kavite ve sınır koşullarının ne şekilde seçilmesi gerektiğine karar vermek bu çalışmanın amaçlarından biridir.

En çok karşılaşılan kavite akış problemleri, düzgün dört duvar tarafından sınırlandırılan dikdörtgensel veya iç içe girmiş, iki daire arasında kalan sektörel kavitelerle sınırlandırılan akışkanın, karşılıklı iki duvar veya tek duvarın hareketi ile oluşturduğu akışlardır. Bu akış problemlerinin düzgün geometrileri vardır ve analitik olarak çözüleceği gibi nümerik yöntemlerle de çözülebilmektedir. Aynı zamanda bu çeşit akış problemleri nümerik methodların (spektral ve çoklu grid methodu, sonlu

elemanlar, sonlu farklar. . . v.s.) test edilmesi için "benchmark" problemi olarak ifade edilir ve sayısal hesaplamalar yapan birçok araştırmacının ilgi alanına girer.

Farklı geometrik yapıya sahip kaviterler dikkate alınarak kavite geometrisinin akış yapısına olan etkisi için bir çok çalışma yapılmıştır. Bu alanda yapılmış, en önemli çalışmalardan bazıları şöyledir: Kare, yamuk ve üçgen şeklindeki kaviterlerdeki kararlı viskoz akış problemini inceleyerek kavite geometrisinin akış yapıları üzerindeki etkilerini McQuain vd.,[6] tarafından gösterildi. Kavitenin geometrisinin dikdörtgenden farklı olması durumunda (üçgen ya da yamuk gibi), farklı ve ilginç akış yapılarıyla karşılaşmıştır. Liu ve Joseph kenarlarından bir ısı kaynağıyla ısıtılan daire dilimi şeklindeki bir kavitede Stokes akış problemini (ısı akışı) çözmek için değişkenlere ayırma yöntemine benzer bir yöntem geliştirdiler [7]. Özalp vd., [8] üstü açık dikdörtgensel, üçgensel ve yarım dairesel kaviterlerdeki akış problemini deneysel olarak incelediler ve kavitenin görünüm oranlarının, akış yapılarına etkilerini araştırdılar. L şeklindeki kaviterlerdeki akış yapıları ve eddy oluşum mekanizmaları hem dinamik sistemler hem de nümerik yöntemler kullanılarak Deliceoğlu ve Aydın tarafından elde edildi [9,10].

1.2 Stokes Akış

Kaviterlerdeki Stokes akış problemi için yönetici denklem biharmonik denklem olup,

$$\nabla^4 \Psi = 0 \quad (1.1)$$

şeklindeir. Burada Ψ bilinmeyen akış fonksiyonu olarak adlandırılır. Bu denklem akış bölgesinin geometrik yapısına göre kartezyen, silindirik. . . v.b. koordinatlarda ifade edilebilir. Dikdörtgensel kaviterlerde Stokes akış problemi için biharmonik denklem kartezyen koordinatlarda alınırken, kutupsal koordinatlarla ifade edilebilen kaviterlerde biharmonik denklemin kutupsal formda alınması daha uygundur. Stokes akış problemi üzerine yaklaşık 160 yıldır çalışmalar yapılmasına rağmen analitik çözümü sadece düzgün geometriler için elde edilebildi. Bunun en önemli nedeni ise kavite sınır koşullarının matematiksel ifadesinde karşılaşılan problemlerdir. Stokes, akışkan içerisindeki bir küreden geçen akışı düşündü ve basınç ile hız alanlarına karar verdi. [11]. Daha sonra Stokes akış problemi birçok araştırmacı tarafından çeşitli problemlerle ele alındı. Oberbeck Stokes akış problemini bir elipsoid için ele aldı [12].

Jeffrey [13] ise dönen iki silindir arasında kalan iki boyutlu sonlu bir bölge için biharmonik denklemi çözerek ilk "akış çizgisi" resmini elde eden araştırmacı oldu.

Yarı sonsuz şeritsel bir bölgede biharmonik denklemi çözmek için ilk çalışma Smith [14] tarafından yapıldı. Smith bir algoritma geliştirdi ve biortagonallik şartları adı altında bazı şartlar ortaya koydu. Bu şartlar analitik çözümün bölgenin sınırları üzerindeki data'lara yeterince yakınsamasını garanti etmeyi amaçladı. Smith'in bu çözümü daha sonra kenarları ısıtılmış dikdörtgensel bir kavite içerisindeki Stokes akışı analiz etmek için Joseph ve Sturges [15] tarafından kullanıldı ve Smith'in sınır data'ları üzerindeki biorthogonality şartlarının pratik uygulamalar için oldukça sınırlı olduğu görüldü. Bunun üzerine Joseph ve Sturges [16] ,Smith'in türettiği analitik seri çözümünü biraz daha geliştirerek daha geniş, bir alanda kullanılabilir hale getirdiler. Bu gelişmiş yöntem bu güne kadar sayısız çalışmada kullanılmasına rağmen, Stokes akış problemini çözmek için geliştirilen bu method tam anlamıyla sınırsız bir uygulanabilirliğe sahip değildi. Çünkü çözüm algoritmasında biortagonallik özelliğinin nasıl elde edileceğine dair genel bir ifade yoktu. Khuri [17] yaptığı çalışmada Joseph ve Sturges tarafından geliştirilen analitik çözüm methodunu bütün uygulamalarda kullanılabilecek hale getirdi. Bu çalışmayla biortagonallik şartları özel bir Stokes akış problemi için sınırlı olmaktan çıktı. Khuri geliştirdiği bu biortagonallik şartlarını ilk olarak sektörel kavite içerisindeki Stokes akış probleminin analitik çözümünü bularak gösterirken daha sonraları küresel, dikdörtgensel ve kama şeklindeki (wedge-shaped) geometriler içerisindeki Stokes akış için biortagonallik şartlarını elde etti [18-20]. Bu çözüm yöntemi kullanılarak sektörel bir kavite içerisindeki Stokes akış yapıları, çatallanmalar (bifurcations) kavitenin farklı görünüm ve kapak hızı oranlarına bağlı olarak detaylı olarak ortaya kondu [21,22].

Kavite geometrisinin değişmesi ile Stokes akış probleminin çözümünde de bir takım farklılıklar görüleceğini bu çalışmalar gösterdi. Geometrinin değişmesi en çok biortagonallik şartının elde edilmesi kısmında farklı ve karmaşık durumlar ortaya çıkardı. Bu zor ve karmaşık problem Khuri tarafından yapılan çalışmalarla daha kolay hale getirildi [17].

Burggraf tarafından yüksekliği $2H$ ve genişliği $2L$ olan dikdörtgensel kaviteler içerisindeki Stokes akış probleminin ilk nümerik çözümü yapıldı [23]. Bu problemde

görünüm oranı $A = H/L$ olarak alındı. Burggraf sonlu farklar methodunu uygulayarak karesel bir kavite içerisindeki Stokes akış problemini çözdü. Pan ve Acrivos $A \in [0.25, 0.5]$ görünüm oranına sahip kaviteler içerisindeki kapakla sürülen akış problemi için sonlu farklar methodunu kullanarak detaylı bir nümerik çözüm elde etti [24]. Çalışmaları sonunda görüldü ki $A < 1$ için kavitenin içerisinde tek bir eddy (girdap) oluşurken görünüm oranı olan A nın değeri büyüdüğünde kavite içerisindeki eddy sayısı arttı. Aynı zamanda onların çalışmalarında A nın bütün değerleri için hareketsiz duvarların oluşturduğu köşelerde küçük köşe eddy lerinin varlığı gözlemlendi ki bu köşe eddylerinin varlığı zaten Moffat tarafından bildirilmişti [25].

Harper ve Wake sonsuz genişlikte ve tek kapakla sürülen dikdörtgensel kavitelerdeki akış yapılarını bir öz fonksiyon çözümüyle elde etti ve hareketli kapaktan uzaklaştıkça daha cansız eddylerden oluşan eddy serisinin meydana geldiğini gösterdi [26].

Yukarıda bazıları verilen çalışmalar daha çok nümerik ve analitik çözümler üzerine olup bu çözümlerin grafikleri çizilerek akış yapıları görselleştirilmiştir. Buna rağmen akış bölgesinin çok ince olması ya da akış çizgilerinin çok cansız olması (fonksiyon değerinin sıfıra çok yakın olması) durumunda akış yapılarını görmek mümkün olamamaktadır. Bu durumda bazı teorik metodlar geliştirilmiş olup bunlardan en önemlilerinden biri Brøns ve Hartnack tarafından geliştirilen normal form ve dinamik sistemler yardımıyla akış yapılarının belirlenmesi yöntemidir [27]. Bu yöntem kullanılarak dikdörtgensel kavilerdeki mümkün olan bütün akış yapıları ortaya konmuştur [28-36].

1.3 Sıfırdan Farklı Reynolds Sayılı Akış (Navier-Stokes Akış, $Re \neq 0$)

Navier-Stokes denklem sistemi (N-S), ismini Cladue-Louis Navier ve George Gabriel Stokes 'tan almış olan, akışkanların hareketini tanımlamaya yarayan denklemlerden oluşmaktadır. Akışkanın sürekli olduğu yani akışkanın tamamının aynı özellikte olduğu ve içinde farklı biçimlerin bulunmadığı kabul edilir.

Navier-Stokes denklemleri akışkan içerisindeki birim kütleye etki eden momentum değişimlerinin, sürtünme kayıplarına sebep olan viskoz kuvvetlerin ve basınç değişimlerinin toplamına eşit olduğunun doğruluğunu ortaya koymaktadır. Bu viskoz kuvvetler (sürtünmeye benzer) moleküller arası etkileşimlerden meydana gelmekte ve

akışkanın akmaya ne kadar dirençli olduğunu göstermektedir. Sonuç olarak, Navier-Stokes denklemlerinin, verilen akışkanın herhangi bir bölgesindeki kuvvetler dengesinin dinamik ifadesi olduğu söylenebilir.

Bu denklemler, hava akımları ve okyanus akıntılarının, galaksideki yıldız hareketlerinin, elektrik üretiminin, hava durumu tahminlerinin ve kavitelerdeki akışın modellenmesinde ve hesaplanmasında sıkça kullanılırlar.

İki boyutlu N-S denklemleri ve süreklilik denkleminin genel şekli aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \vartheta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \vartheta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0\end{aligned}\tag{1.2}$$

Burada u ve v sırasıyla x ve y yönlerindeki hız bileşenleri, ρ yoğunluk, P basınç ve ϑ kinematik viskozitedir.

1.4 Reynolds Sayısı

Reynolds sayısı, bir borudan akarken laminar veya türbülanslı akış modelinin türünü belirlemek için kullanılan boyutsuz bir sayıdır. Reynolds sayısı, atalet kuvvetlerinin viskozite kuvvetlerine oranı ile tanımlanır. Reynolds sayısı ismini, İngiliz fizikçi Osborne Reynold'dan almıştır. Reynolds sayısı aşağıdaki formülle bulunur:

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{V L}{\vartheta} = \frac{\text{eylemsizlik kuvvetleri}}{\text{viskozite kuvvetleri}}\tag{1.3}$$

Burada ρ akışkanın yoğunluğu, ϑ akışkanın kinematik viskozitesi, V akışkanın hızı, L uzunluk (akışın gerçekleştiği borunun çapı) ve μ akışkanın mutlak viskozitedir.

Eğer Reynolds sayısı yüksek ise borudan geçen akışın türbülanslı olduğu söylenir. Reynolds sayısı düşük ise, akışın laminar olduğu söylenir. Laminar akış, akışkanın düzenli yollarda düzgün bir şekilde hareket ettiği akış türüdür. Tersine, türbülanslı akış pürüzsüz değildir ve çok fazla düzensizdir.

1.5 Lokal Akış Analizi

Kapalı bir bölgedeki viskoz akışların ($Re=0$) akış fonksiyonunu elde etmek için biharmonik denklemin analitik çözümünü elde etmek gerekir. Bu analitik çözüm bölgenin sınırları üzerindeki şartları tam olarak sağladığı takdirde geçerli bir çözümdür. Tabi bu her zaman mümkün olmayabilir. Böyle durumlarda ise bölgenin içerisindeki özel bir noktada ya da lokal bir bölgede çözüm yapılması daha uygun olacaktır. Çünkü köşe eddy 'lerinin olduğu bölgelerde çoğunlukla akış çizgilerinin akış fonksiyonu değerleri oldukça küçüktür ve bu bölgelerde ayrıntılı bir çalışma yapmak zor olabilir. Sadece bu bölgeye ait bir çözüm geliştirilerek bölge daha net olarak taranır.

Durgun (kritik) noktalar civarındaki akış hakkında daha net bilgi edinmek amacıyla Jeffrey ve Sherwood sonsuz bir seri olarak ifade edilen akış fonksiyonu için lokal bir analiz uyguladı [37]. Bu durgun noktalar ya bir center (merkez) noktası ya da bir saddle (düğüm, eyer) noktasıdır. Onlar aynı zamanda bir ya da daha fazla akış çizgisinin sert bir duvar üzerindeki birleşim noktası olarak bilinen ayırma noktaları civarındaki akış çizgileri üzerinde çalıştılar. Düzgün sabit bir duvar üzerindeki iki saddle noktası arasındaki bağlantı Bakker tarafından analiz edildi [38].

Durgun nokta civarında hız vektörlerinin genişletilmesine dayanan ve dinamik sistemler yardımıyla, bu noktanın topolojik yapısını karar verilen, ayrıca bu durgun nokta civarındaki akış yapılarını ve muhtemel çatallanmaları (bifurcations) belirlemeye yarayan yöntem Brons ve Hartnack tarafından geliştirildi [27].

1.6 Tezin Ana Hatları

Kavite akış problemleri üzerine yapılan çalışmaların birçoğu dikdörtgensel kaviteler üzerine yapılmıştır. Kavite geometrisinin daha karmaşık olması nedeniyle halkasal yada daha kompleks yapıya sahip kavitelerdeki akış problemleri üzerinde daha az sayıda çalışmaların olduğu gözlemlendi. Bu çalışmada dikdörtgensel kavitelerdeki akış problemleri ile giriş yaparak sektörel ve eğrisel bir bölgede Stokes akış probleminin analitik çözümü incelenmiştir.

Tezin ikinci bölümünde, bir ya da iki duvarının hareketli ve karşılıklı yan duvarların birer serbest yüzey olduğu dikdörtgensel bölgedeki akış probleminin çözümü analiz edildi.

Tezin üçüncü bölümünde dört tarafı kapalı dikdörtgensel bölgedeki Stokes akış probleminin analitik çözüm mekanizması verildi.

Dördüncü bölümde ise eğrisel bir bölgedeki akışı yöneten kısmi diferansiyel denklem verilen sınır koşulları altında çözüldü. Böylece eğrisel bir bölgedeki akış hareketi için bilgiler elde edildi.

Tezin beşinci bölümünde elde edilen bulgular ve öneriler verildi.



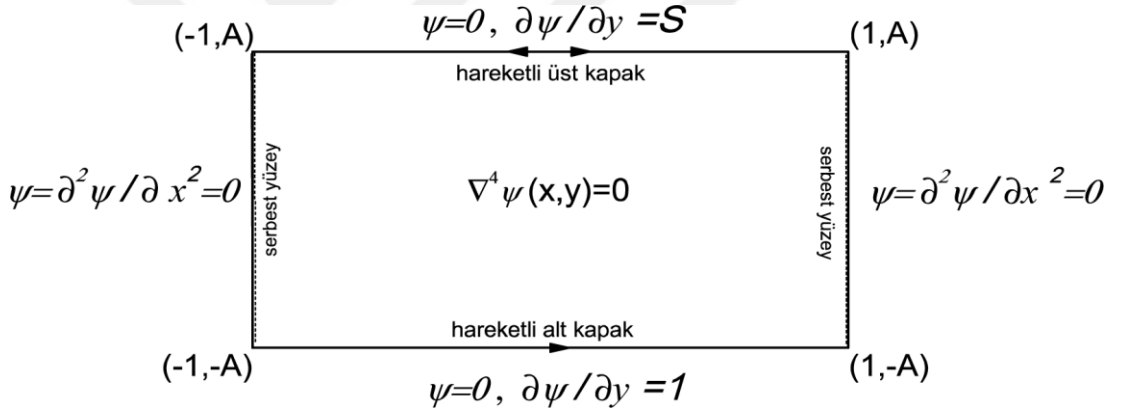
2. İKİ SERBEST YÜZEYLİ KAPAKLA SÜRÜLEN KAVİTEDE AKIŞ PROBLEMİ

Bir ya da iki duvarının hareketli ve karşılıklı yan duvarların birer serbest yüzey olduğu dikdörtgensel bölgedeki akış probleminin yönetici denklemi:

$$\nabla^4 \Psi = 0$$

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} = 0 \quad (2.1)$$

şeklindedir. Bu denklem biharmonik denklem olarak bilinir. Burada Ψ ise akışı yöneten fonksiyondur. Serbest yüzey denmesindeki kasıt hava-sıvı arayüzeyi anlamındadır.



Şekil 2.1. İki serbest yüzeyli kapakla sürülen kavitede akış.

Akış bölgesi ve sınır koşulları Şekil 2.1 de verilmiştir.

2.1 Problemin Sınır Şartları

Akış probleminin sınır koşulları;

$$\psi(1, y) = \psi(-1, y) = 0 \quad (2.2)$$

$$\Psi(x, A) = \Psi(x, -A) = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, A) = S \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, -A) = 1 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0 \quad (x = \pm 1) \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0 \quad (x = \pm 1) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad (x = \pm 1) \quad (2.8)$$

olarak yazılabilir.

$$\Psi(x, y) = X(x) Y(y) \quad (2.9)$$

şeklinde çözüm arayacağız. Verilen biharmonik denklemde yerine yazıldığı takdirde,

$$X^{iv}Y + 2X^{ii}Y^{ii} + X Y^{iv} = 0 \quad (2.10)$$

elde edilir.

Yalnız Y 'ye göre denklem elde edip çözüme gitmek için

$$X^{ii} = -cX \quad (2.11)$$

şeklinde seçilir. (2.2) şartından,

$$X(1) = X(-1) = 0 \quad (2.12)$$

$$X_n(x) = \cos(\lambda x) \quad (2.13)$$

$$X_n(x) = \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x \quad (2.14)$$

bulunur $\left(\lambda_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, n = 1, 2, 3 \dots\right)$.

(2.14)'ü (2.10) denkleminde yerine yazarsak

$$\lambda_n^4 Y - 2\lambda_n^2 Y'' + Y'''' = 0 \quad (2.15)$$

olur. Sabit katsayılı lineer adi diferansiyel denklemdir. $Y = e^{ay}$ şeklinde çözüm aranır,sa,

$$\lambda_n^4 - 2\lambda_n^2 a^2 + a^4 = 0 \Rightarrow (a^2 - \lambda_n^2)^2 = 0 \Rightarrow a_{1,2} = \pm \lambda_n$$

$$a_{3,4} = \pm \lambda_n$$

bulunur. Katlı kök söz konusu olup genel çözüm

$$Y = y (A_n e^{\lambda_n y} + B_n e^{-\lambda_n y}) + C_n e^{\lambda_n y} + D_n e^{-\lambda_n y} \quad (2.16)$$

şeklinde elde edilir. (2.14) ve (2.16) dan,

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \{y[A_n e^{\lambda_n y} + B_n e^{-\lambda_n y}] + C_n e^{\lambda_n y} + D_n e^{-\lambda_n y}\} \cos(\lambda_n x) \quad (2.17)$$

bulunur.(2.3) şartından $y = A$ ise

$$A (A_n e^{\lambda_n A} + B_n e^{-\lambda_n A}) + C_n e^{\lambda_n A} + D_n e^{-\lambda_n A} = 0$$

$$D_n = -A(A_n e^{2\lambda_n A} + B_n) - C_n e^{2\lambda_n A} \quad (2.18)$$

olup,

$$\begin{aligned} \Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \{y[A_n e^{\lambda_n y} + B_n e^{-\lambda_n y}] + C_n e^{\lambda_n y} (1 - e^{2\lambda_n(A-y)}) \\ - A (A_n e^{\lambda_n(2A-y)} + B_n e^{-\lambda_n y})\} \cos(\lambda_n x) \end{aligned} \quad (2.19a)$$

olur. Sadelik açısından $C_n = E_n - A A_n$ şeklinde yazılırsa,

$$\begin{aligned} \Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \{y(A_n e^{\lambda_n y} + B_n e^{-\lambda_n y}) + E_n (1 - e^{2\lambda_n(A-y)}) e^{\lambda_n y} \\ - A A_n e^{\lambda_n y} + A A_n e^{2\lambda_n(A-y)} - A A_n e^{\lambda_n(2A-y)} \\ - A B_n e^{\lambda_n y}\} \cos(\lambda_n y) \end{aligned} \quad (2.19b)$$

olur ve düzenlenirse,

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (y-A)(A_n e^{\lambda_n y} + B_n e^{-\lambda_n y}) + E_n e^{\lambda_n y} (1 - e^{2\lambda_n(A-y)}) \right\} \cos(\lambda_n x) \quad (2.20)$$

bulunur. $\Psi(x, -A) = 0$ sınır koşulundan,

$$E_n = -A \frac{(A_n e^{-2\lambda_n A} + B_n)}{\sinh(2\lambda_n A)} \quad (2.21)$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (y-A)[A_n e^{\lambda_n y} + B_n e^{-\lambda_n y}] \right. \\ \left. - A \frac{(A_n e^{-2\lambda_n A} + B_n)}{\sinh(2\lambda_n A)} e^{\lambda_n y} (1 - e^{2\lambda_n(A-y)}) \right\} \cos(\lambda_n x) \end{aligned} \quad (2.22)$$

olarak yazılır.

$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, A) = S$ ve $\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, -A) = 1$ olup ortogonallik şartı olan

$$\int_{-c}^c \cos \frac{n\pi x}{c} \cos \frac{m\pi x}{c} dx = c \delta_{mn}$$

ifadesi kullanılarak,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-A)(A_n e^{\lambda_n y} + B_n e^{-\lambda_n y}) \right. \\ + (y-A)\lambda_n (A_n e^{\lambda_n y} + B_n e^{-\lambda_n y}) \\ - \left(A \frac{(A_n e^{-2\lambda_n A} + B_n)}{\sinh(2\lambda_n A)} \right) [(\lambda_n e^{\lambda_n y})(1 - e^{2\lambda_n(A-y)}) \\ \left. + e^{\lambda_n y} (2\lambda_n e^{2\lambda_n(A-y)})] \right\} \cos(\lambda_n x) \end{aligned} \quad (2.23a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, A) = \int_{-1}^1 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-A)[A_n e^{\lambda_n A} + B_n e^{-\lambda_n A}] \right. \\ \left. - A \frac{(A_n e^{-2\lambda_n A} + B_n)}{\sinh 2\lambda_n A} (e^{\lambda_n A})(2\lambda_n) \right\} \cos \lambda_n x = S \end{aligned} \quad (2.23b)$$

yazılabilir.

$$\int_{-1}^1 \cos(\lambda_n x) \cdot \cos(\lambda_m x) = 1 \quad (2.24)$$

ve

$$\int_{-1}^1 S \cos(\lambda_m x) dx = S \left[\frac{\sin(\lambda_m x)}{\lambda_m} \Big|_{-1}^1 \right] = \frac{2S}{\lambda_n} (-1)^{n+1} \quad (2.25)$$

olacağından,

$$(-A)[A_n e^{\lambda_n A} + B_n e^{-\lambda_n A}] - 2A \frac{(A_n e^{-2\lambda_n A} + B_n)}{\sinh(2\lambda_n A)} e^{\lambda_n A} \lambda_n = \frac{2S}{\lambda_n} (-1)^{n+1} \quad (2.26a)$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse,

$$A_n \left(-A e^{\lambda_n A} - \frac{2\lambda_n A e^{-2\lambda_n A}}{\sinh(2\lambda_n A)} \right) + B_n \left((-A e^{-\lambda_n A} - \frac{2A\lambda_n e^{\lambda_n A}}{\sinh(2\lambda_n A)}) \right) = \frac{2S}{\lambda_n} (-1)^{n+1} \quad (2.26b)$$

olur.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, -A) = 1$$

olduğundan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-A) \left(A_n e^{-\lambda_n A} + B_n e^{\lambda_n A} + (-2A)(\lambda_n)(A_n e^{-\lambda_n A} - B_n e^{\lambda_n A}) \right. \right. \\ \left. \left. - A \frac{(A_n e^{-2\lambda_n A} + B_n)}{\sinh(2\lambda_n A)} [\lambda_n e^{-\lambda_n A} (1 - e^{4\lambda_n A}) \right. \right. \\ \left. \left. + e^{-\lambda_n A} (2\lambda_n e^{4\lambda_n A}) \right] \right\} \cos(\lambda_n x) = 1$$

olup,

$$\int_{-1}^1 \cos \lambda_m x \, dx = \frac{2}{\lambda_n} (-1)^{n+1} \quad (2.27)$$

elde edilir. Son denklem,

$$\begin{aligned}
& A_n \left[-Ae^{-\lambda_n A} - 2A\lambda_n e^{-\lambda_n A} - \frac{Ae^{-2\lambda_n A}}{\sinh(2\lambda_n A)} (\lambda_n (e^{-\lambda_n A} + e^{3\lambda_n A})) \right] \\
& + B_n \left[-Ae^{\lambda_n A} + 2A\lambda_n e^{\lambda_n A} - \frac{A}{\sinh(2\lambda_n A)} (\lambda_n (e^{-\lambda_n A} + 3e^{\lambda_n A})) \right] = \frac{2}{\lambda_n} (-1)^{n+1} \quad (2.28)
\end{aligned}$$

olur ve (2.28) düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& A_n \left[-Ae^{-\lambda_n A} - A\lambda_n e^{-\lambda_n A} \left(2 + \frac{e^{-\lambda_n A} (e^{-\lambda_n A} + e^{3\lambda_n A})}{\sinh(2\lambda_n A)} \right) \right] \\
& + B_n \left[-Ae^{\lambda_n A} + A\lambda_n e^{\lambda_n A} \left(2 - \frac{e^{-2\lambda_n A} + e^{2\lambda_n A}}{\sinh(2\lambda_n A)} \right) \right] = \frac{2(-1)^{n+1}}{\lambda_n} \quad (2.29)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenerek,

$$A_n \left[-Ae^{-\lambda_n A} - \frac{2\lambda_n A e^{\lambda_n A}}{\sinh(2\lambda_n A)} \right] + B_n \left[-Ae^{\lambda_n A} - \frac{2\lambda_n A e^{-\lambda_n A}}{\sinh(2\lambda_n A)} \right] = \frac{2(-1)^{n+1}}{\lambda_n} \quad (2.30)$$

elde edilir ve (2.26b) ve (2.30) dan A_n ve B_n katsayıları çözülecektir.

$$\begin{aligned}
& A_n \left[-Ae^{\lambda_n A} - \frac{2\lambda_n A e^{-\lambda_n A}}{\sinh(2\lambda_n A)} \right] + B_n \left[-Ae^{-\lambda_n A} - \frac{2\lambda_n A e^{\lambda_n A}}{\sinh(2\lambda_n A)} \right] = \frac{2S(-1)^{n+1}}{\lambda_n} \\
& A_n \left[-Ae^{-\lambda_n A} - \frac{2\lambda_n A e^{\lambda_n A}}{\sinh(2\lambda_n A)} \right] + B_n \left[-Ae^{\lambda_n A} - \frac{2\lambda_n A e^{-\lambda_n A}}{\sinh(2\lambda_n A)} \right] = \frac{2(-1)^{n+1}}{\lambda_n}
\end{aligned}$$

olacağından,

$$\begin{aligned}
K &= -Ae^{\lambda_n A} & M &= -Ae^{-\lambda_n A} \\
L &= \frac{-2\lambda_n A e^{-\lambda_n A}}{\sinh(2\lambda_n A)} & N &= \frac{-2\lambda_n A e^{\lambda_n A}}{\sinh(2\lambda_n A)}
\end{aligned}$$

olursa yukarıdaki denklemler sırasıyla,

$$\begin{aligned}
A_n[K + L] + B_n[M + N] &= \frac{2S(-1)^{n+1}}{\lambda_n} \\
A_n[M + N] + B_n[K + L] &= \frac{2(-1)^{n+1}}{\lambda_n}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır ve buradan A_n ve B_n katsayıları;

$$A_n = \frac{-\frac{2(-1)^{n+1}}{\lambda_n} [(K+L)S - (M+N)]}{(K+L)^2 - (M+N)^2}$$

$$B_n = \frac{\frac{2(-1)^{n+1}}{\lambda_n} [(K+L) - (M+N)S]}{(K+L)^2 - (M+N)^2}$$

$$(K+L)^2 - (M+N)^2 = 2A^2 \sinh(2\lambda_n A) - \frac{4A^2 \lambda_n^2}{\sinh(2\lambda_n A)}$$

olup,

$$A_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n} \left[\frac{\left(-e^{\lambda_n A} - \frac{2\lambda_n e^{-\lambda_n A}}{\sinh(2\lambda_n A)} \right) S + \left(e^{-\lambda_n A} + \frac{2\lambda_n e^{\lambda_n A}}{\sinh(2\lambda_n A)} \right)}{A \left(\sinh(2\lambda_n A) - \frac{2\lambda_n^2}{\sinh(2\lambda_n A)} \right)} \right] \quad (2.31)$$

$$B_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n} \left[\frac{\left(-e^{\lambda_n A} - \frac{2\lambda_n e^{-\lambda_n A}}{\sinh(2\lambda_n A)} \right) + \left(e^{-\lambda_n A} + \frac{2\lambda_n e^{\lambda_n A}}{\sinh(2\lambda_n A)} \right) S}{A \left(\sinh(2\lambda_n A) - \frac{2\lambda_n^2}{\sinh(2\lambda_n A)} \right)} \right] \quad (2.32)$$

şeklinde bulunur.

Bulunan A_n ve B_n ler Ψ akış fonksiyonunda yerlerine yazılır ve böylece bölge içerisindeki her bir (x,y) noktasına karşılık gelen Ψ fonksiyonunun değeri elde edilir. A_n ve B_n in hesaplanmasında ve Ψ nın değerinin elde edilmesinde Fortran algoritma dili kullanıldı. Elde edilen sonuçlar ise Origin Pro 9.1 çizim programı ile çizildi. Toplamın indisi $n=30$ için kısıtlanarak yeterince yakınsama sağlandı. Çözümün yakınsaması, sınır şartlarının sağlanıp sağlanmamasına göre değerlendirildi.

3. TEK KAPAKLA SÜRÜLEN KAVİTEDE STOKES AKIŞ

Bu bölümde amacımız kapalı bir dikdörtgensel bölgenin üst kapağının hareket ettirilmesiyle içerideki akışkanın hareketini irdelemektir. Bu problem genellikle çeşitli nümerik çözüm metodlarının test edilmesi için bir ölçüt olarak kullanılmaktadır. Burada Joseph ve Sturges (1978 yılında) analitik çözüm metodu üzerinde durulacaktır. Akış fonksiyonları Papkovich-Fadle öz fonksiyonlarının bir serisi olarak ifade edilmektedir. Gerçekte sert duvarlar ve bir yarı sonsuz bölge için biortagonal seri çözümü ilk olarak Smith (1952 yılında) ve Joseph ve Sturges (1978 yılında) tarafından elde edildi. Daha sonra bu metod dikdörtgensel bir kavite için uygulandı. Joseph ve Sturges (1978 yılında)'ın bu metodu görünüm oranları (A) değiştirilerek akış yapısını incelemekte kullanılır.

3.1 Yönetici Denklem ve Sınır Şartları

Üç sabit ve bir hareketli kapaktan oluşan bir bölge içindeki akış, biharmonik denklem,

$$\nabla^4 \Psi = 0 \quad (3.1)$$

tarafından yönetilir. Akış fonksiyonu daha önce belirttiğimiz gibi sınırlar üzerinde sabit olup sıfır alınır. Yani sınırlar üzerindeki iki nokta arasındaki birim akış 0 olarak alındı. Buna göre sınır koşulları,

$$\psi(1, y) = \psi(-1, y) = 0 \quad (3.2)$$

$$\psi(x, A) = \psi(x, -A) = 0 \quad (3.3)$$

şeklinde yazılır. x yönündeki ve y yönündeki hız bileşenleri sırasıyla,

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (3.4)$$

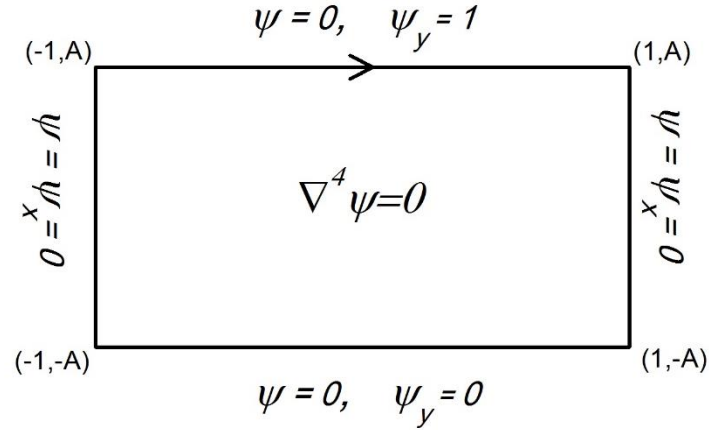
ve

$$v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (3.5)$$

olduğundan no-slip şartları üst kapak ve 3 sabit duvar için

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, A) = 1, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, -A) = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x}(\pm 1, y) = 0 \quad (3.6)$$

olarak yazılır.



Şekil 3.1. Tek kapakla sürülen kavitede stokes akış.

Akış bölgesi ve sınır koşulları Şekil 3.1 de verilmiştir.

3.2 Seri Çözüm Metodu

Tek hareketli kapağa sahip dikdörtgensel bölge için Joseph ve Sturges'ın çözüm metodunu tanıtmadan önce Smith tarafından yarı sonsuz bölge için elde edilen çözüm temel olarak verilecektir.

3.3 Bir Yarı Sonsuz Bölge için Biortogonal Seri Çözümü

Smith [15] yan kenarları boyunca sıkıştırılmış bir yarı sonsuz şerit boyunca akışı yöneten biharmonik denklemin çözümü için bir metot geliştirdi. Reelde böyle bir bölge ve uygulaması mümkün görünmemekte ancak bu hayali bölge, geliştirilen çözüm mekanizmasını tarif edebilmek için seçilmiştir.

Yarı sonsuz bölge olan,

$$y > 0, \quad -1 \leq x \leq 1$$

içerisinde çözülen biharmonik denklem aşağıdaki sınır şartlarına tabi tutuluyor:

$$\Psi(\pm 1, y) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(\pm 1, y) = 0 \quad (3.7)$$

Smith değişkenlerine ayırma metodunu kullanarak bu problemi çözmeye çalıştı.

$$\psi(1, y) = \phi(x) \cdot \mu(y) \quad (3.8)$$

$y \rightarrow \infty$ iken $\Psi \rightarrow 0$ olması için $\mu(y) \sim e^{-S_n y}$ şeklinde olması gerektiği düşünülerek,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \sum_{S_n} C_n \cdot \phi_1^{(n)}(x, S_n) e^{-S_n y} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \sum_{S_n} C_n \cdot \phi_2^{(n)}(x, S_n) e^{-S_n y}$$

olarak seçilir. $S_n > 0$ öz değerler ve $\phi_1^{(n)}(x, S_n)$, $\phi_2^{(n)}(x, S_n)$ fonksiyonları öz fonksiyonlardır. $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}$ nin integrallenmesiyle,

$$\Psi = \sum_{S_n} C_n \cdot \phi_1^{(n)}(x, S_n) \frac{e^{-S_n y}}{S_n^2} \quad (3.10)$$

elde edilir. Problem C_n katsayılarının, $\phi_1^{(n)}(x, S_n)$ öz fonksiyonlarının ve S_n öz değerlerinin bulunmasına indirgenmiştir. Bağdaşabilirlik bağıntısından,

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^2 \partial x^2} = \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (3.11)$$

olduğu düşünülerek ve (3.9) dan yararlanarak,

$$\frac{\partial^2 \phi_1^{(n)}}{\partial x^2} - S_n^2 \phi_2^{(n)} = 0 \quad (3.12)$$

olduğu kolayca görülür. Biharmonik denklem;

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} = 0$$

olup (3.9) dan,

$$C_n \frac{\partial^2 \phi_2^{(n)}}{\partial x^2} e^{-S_n y} + 2 C_n \frac{\partial^2 \phi_1^{(n)}}{\partial x^2} e^{-S_n y} + C_n \phi_1^{(n)} S_n^2 e^{-S_n y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \phi_2^{(n)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1^{(n)}}{\partial x^2} + S_n^2 (\phi_1^{(n)} + \phi_2^{(n)}) = 0 \quad (3.13)$$

olup (3.12) den,

$$\frac{\partial^2 \phi_2^{(n)}}{\partial x^2} + S_n^2 (2 \phi_2^{(n)} + \phi_1^{(n)}) = 0 \quad (3.14)$$

elde edilir. Ya da daha basitçe,

$$\nabla^4 \psi = \nabla^2 (\nabla^2 \psi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[\sum_{S_n} C_n (\phi_1^{(n)} + \phi_2^{(n)}) e^{-S_n y} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \phi_1^{(n)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2^{(n)}}{\partial x^2} + S_n^2 (\phi_1^{(n)} + \phi_2^{(n)}) = 0$$

elde edilir.

$$\frac{\partial^2 \phi_1^{(n)}}{\partial x^2} = S_n^2 \phi_2^{(n)}$$

olduğundan,

$$\frac{\partial^2 \phi_2^{(n)}}{\partial x^2} + S_n^2 (\phi_1^{(n)} + 2 \phi_2^{(n)}) = 0$$

olur. (3.12) ve (3.14) matris formunda yazılırsa,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{bmatrix} + S_n^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.15)$$

olur. (3.7) ve (3.10) dan faydalanılarak

$$\phi_1^{(n)} = \frac{\partial \phi_1^{(n)}}{\partial x} = 0, x = \pm 1 \quad (3.16)$$

yazılabilir. (3.12) de $\phi_2^{(n)}$ çekilip (3.13) de yerine yazılırsa,

$$\phi_2^{(n)} = \frac{\partial^2 \phi_1^{(n)}}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{S_n^2}$$

ise (3.13) den,

$$\frac{\partial^4 \phi_1^{(n)}}{\partial x^4} \cdot \frac{1}{S_n^2} + \frac{\partial^2 \phi_1^{(n)}}{\partial x^2} + S_n^2 (\phi_1^{(n)} + \frac{\partial^2 \phi_1^{(n)}}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{S_n^2}) = 0$$

$$\frac{\partial^4 \phi_1^{(n)}}{\partial x^4} + 2 S_n^2 \frac{\partial^2 \phi_1^{(n)}}{\partial x^2} + S_n^4 \phi_1^{(n)} = 0 \quad (3.17)$$

olur. Bu sabit katsayılı lineer denklem çözülecektir. Karakteristik denklemi,

$$a^4 + 2 S_n^2 a^2 + S_n^4 = 0$$

şeklindedir.

$$a^2 = k$$

için,

$$k^2 + 2 S_n^2 k + S_n^4 = 0$$

olur. Buradan denklem çözülürse

$$k_{1,2} = -S_n^2$$

bulunur. $a = \pm\sqrt{k}$ olduğundan

$$a_1 = a_2 = i.S_n \quad \text{ve} \quad a_3 = a_4 = -i.S_n$$

olur. Böylece çözüm,

$$\phi_1^{(n)} = c_1 e^{i.S_n x} + c_2 x e^{i.S_n x} + c_3 e^{-i.S_n x} + c_4 x e^{-i.S_n x}$$

$$\begin{aligned} \phi_1^{(n)} &= c_1 (\cos(S_n x) + i \sin(S_n x)) + c_2 x (\cos(S_n x) + i \sin(S_n x)) \\ &\quad + c_3 (\cos(S_n x) - i \sin(S_n x)) + c_4 x (\cos(S_n x) - i \sin(S_n x)) \\ &= (c_1 + c_3) \cos(S_n x) + (c_1 - c_3) i \sin(S_n x) + (c_2 + c_4) x \cos(S_n x) \\ &\quad + (c_2 - c_4) x i \sin(S_n x) \\ &= A \cos(S_n x) + B \sin(S_n x) + C x \cos(S_n x) + D x \sin(S_n x) \end{aligned}$$

olur. A, B, C, D katsayıları bulunmalıdır. (3.16) dan faydalanılır. $\phi_1^{(n)}$ çift fonksiyonlardır. Çünkü bölge y eksenine göre simetriktr. Bu durumda $B = C = 0$ alınarak

$$\phi_1^{(n)} = A \cos(S_n x) + D x \sin(S_n x) \quad (3.18)$$

şeklinde yazılır. Böylece bulunması gereken katsayılar sadece A ve D dir.

(3.16) dan ,

$$A \cos(S_n) + D \sin(S_n) = 0$$

$$A \cos(S_n) = -D \sin(S_n) \quad (3.19)$$

olur. $\phi_1^{(n)}$ in türevini alırsak,

$$\frac{\partial \phi_1^{(n)}}{\partial x} = -AS_n \sin(S_n x) + D \sin(S_n x) + D S_n x \cos(S_n x)$$

olup yine (3.16) dan,

$$0 = -AS_n \sin(S_n) + D \sin(S_n) + D S_n \cos(S_n)$$

$$(AS_n - D) \sin(S_n) = D S_n \cos(S_n) \quad (3.20)$$

olur. (3.19) ve (3.20) den,

$$A = S_n \sin(S_n) , \quad D = -S_n \cos(S_n)$$

olup yerine konursa

$$\phi_1^{(n)}(x, S_n) = S_n \sin(S_n) \cos(S_n x) - S_n x \cos(S_n) \sin(S_n x) \quad (3.21)$$

elde edilir. (3.21) ve (3.12) den,

$$\frac{\partial \phi_1^{(n)}}{\partial x} = -S_n^2 \sin(S_n) \sin(S_n x) - S_n \cos(S_n) \sin(S_n x) - S_n^2 x \cos(S_n) \cos(S_n x)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_1^{(n)}}{\partial x^2} = -S_n^3 \sin(S_n) \cos(S_n x) - S_n^2 \cos(S_n) \cos(S_n x)$$

$$-S_n^2 \cos(S_n) \cos(S_n x) + S_n^3 x \cos(S_n) \sin(S_n x)$$

olup,

$$\phi_2^{(n)}(x, S_n) = -(S_n \sin S_n + 2 \cos S_n) \cos(S_n x) + S_n x \cos S_n \sin(S_n x) \quad (3.22)$$

elde edilir. Bulunan bu $\phi_1^{(n)}$ ve $\phi_2^{(n)}$ fonksiyonlarına Papkovich-Faddler öz fonksiyonları adı verilir.

Bundan sonraki adımda bir biortagonallik özelliği türetilcek ve C_n katsayılarının belirlenmesi mümkün olacaktır. Bunu yapmak için kullanılacak olan genelleştirilmiş Wronksion W şöyle tanımlanır:

$$W = \begin{bmatrix} \psi_1^{(m)}, \psi_2^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1^{(n)}}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_2^{(n)}}{\partial x} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1^{(m)}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_2^{(m)}}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$W_1 = \psi_1^{(m)} \frac{\partial \phi_1^{(n)}}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1^{(m)}}{\partial x} \phi_1^{(n)}$$

$$W_2 = \psi_2^{(m)} \frac{\partial \phi_2^{(n)}}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2^{(m)}}{\partial x} \phi_2^{(n)}$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_1^{(m)}}{\partial x} \frac{\partial \phi_1^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \phi_1^{(n)}}{\partial x^2} \psi_1^{(m)} - \frac{\partial^2 \psi_1^{(m)}}{\partial x^2} \phi_1^{(n)} - \frac{\partial \phi_1^{(n)}}{\partial x} \frac{\partial \psi_1^{(m)}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = \psi_1^{(m)} \frac{\partial^2 \phi_1^{(n)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_1^{(m)}}{\partial x^2} \phi_1^{(n)}$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial x} = \psi_2^{(m)} \frac{\partial^2 \phi_2^{(n)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_2^{(m)}}{\partial x^2} \phi_2^{(n)}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \begin{bmatrix} \psi_1^{(m)}, \psi_2^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi_1^{(n)}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \phi_2^{(n)}}{\partial x^2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \psi_1^{(m)}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \psi_2^{(m)}}{\partial x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

olup, (3.15) ve (3.24) den

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} = & - \left\{ S_n^2 \begin{bmatrix} \psi_1^{(m)}, \psi_2^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \psi_1^{(m)}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \psi_2^{(m)}}{\partial x^2} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.25)$$

olur. (3.15) için adjoint denklemi

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{bmatrix} \psi_1^{(m)}, \psi_2^{(m)} \end{bmatrix} + S_m^2 \begin{bmatrix} \psi_1^{(m)}, \psi_2^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.26)$$

olarak tanımlanır. Eğer W , $\phi_1^{(n)} = \frac{\partial \phi_1^{(n)}}{\partial x} = 0$ olduğunda yok oluyorsa,

$$\psi_2^{(m)} = \frac{\partial \psi_2^{(m)}}{\partial x} = 0$$

olmalıdır. (3.16) için adjoint sınır şartları

$$\psi_2^{(m)} = \frac{\partial \psi_2^{(m)}}{\partial x} = 0, \quad x = \pm 1 \quad (3.27)$$

bulunur.

Eğer $[\psi_1^{(m)}, \psi_2^{(m)}]$, (3.26) nın bir öz vektörü ise benzer şekilde S_n^2 ye tekabül eden (3.16) sınır şartları ile (3.15) in bir öz vektörü $\{\phi_1^{(n)}, \phi_2^{(n)}\}$ dir.

son olarak,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= - \left\{ S_n^2 [\psi_1^{(m)}, \psi_2^{(m)}] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \left[\frac{\partial^2 \psi_1^{(m)}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \psi_2^{(m)}}{\partial x^2} \right] \right\} \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial^2 \psi_1^{(m)}}{\partial x^2} + S_m^2 \psi_2^{(m)} &= 0 \text{ ve } \frac{\partial^2 \psi_2^{(m)}}{\partial x^2} + S_m^2 (2\psi_2^{(m)} - \psi_1^{(m)}) = 0 \end{aligned}$$

denklemlerinden faydalananarak,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= - \left\{ S_n^2 [\psi_1^{(m)}, \psi_2^{(m)}] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + [-S_m^2 \psi_2^{(m)}, -S_m^2 (2\psi_2^{(m)} - \psi_1^{(m)})] \right\} \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{bmatrix} \\ &= - \left\{ [S_n^2 \psi_2^{(m)}, (2\psi_2^{(m)} - \psi_1^{(m)}) S_n^2] + [-S_m^2 \psi_2^{(m)}, -S_m^2 (2\psi_2^{(m)} - \right. \\ &\quad \left. - \psi_1^{(m)})] \right\} \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{bmatrix} \\ &= - \left\{ (S_n^2 - S_m^2) \psi_2^{(m)}, (S_n^2 - S_m^2) (2\psi_2^{(m)} - \psi_1^{(m)}) \right\} \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{bmatrix} \\ &= (S_m^2 - S_n^2) [\psi_1^{(m)}, \psi_2^{(m)}] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{bmatrix} = \frac{\partial W}{\partial x} \quad (3.28) \end{aligned}$$

yazılabilir. (3.16) ve (3.27) sınır şartlarını kullanarak integrallersek

$$\int_{-1}^1 (S_m^2 - S_n^2) [\psi_1^{(m)}, \psi_2^{(m)}] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{bmatrix} dx = W \quad (3.29)$$

olur.

$x = \pm 1$ için $W = 0$ olur. Ayrıca

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial W}{\partial x} = W(1) - W(-1) = 0$$

dır.

$S_m^2 \neq S_n^2$ ise

$$\int_{-1}^1 [\psi_1^{(m)}, \psi_2^{(m)}] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{bmatrix} dx = 0 \quad (3.30)$$

olur. Bu bir biortagonallik bağıntısıdır. Burada $\psi_1^{(n)}(x, S_n)$, $\psi_2^{(n)}(x, S_n)$ öz fonksiyonları (3.26) denkleminde hesaplanabilir ve

$$\psi_1^{(n)}(x, S_n) = (S_n \sin S_n - 2 \cos S_n) \cos(S_n x) - S_n x \cos(S_n) \sin(S_n x) \quad (3.31)$$

$$\psi_2^{(n)}(x, S_n) = S_n \sin S_n \cos(S_n x) - S_n x \cos S_n \sin(S_n x) = \phi_1^{(n)} \quad (3.32)$$

olarak yazılabilirler. S_n parametresi (3.16) şartlarından bulunabilir. Böylece S_n için özdeğer denklemi

$$\sin(2S_n) = -2 S_n \quad (3.33)$$

olarak bulunur.

Bu öz değerlerin çözümleri birinci çeyrek daire içinde kompleks köklerdir. Robbins ve Smith 1948 yılında sabit bir Newton iterasyon yöntemi kullanarak (3.33) ün ilk 10 kökünün bir tablosunu oluşturdu. (S_n) in büyük değerleri için (3.33) ün n . kökü yaklaşık olarak

$$2 S_n \approx 2n + 1,5\pi + i \log(4n + 3)\pi \quad (3.34)$$

dir. Burada,

$$S_n = u_n + iv_n \quad (3.35)$$

şeklindedir. İki değişkenli fonksiyonlar için Newton iterasyon metodu kullanılır [40].

3.4 Bir Dikdörtgensel Bölge için Biortogonal Seri Çözümü

Joseph ve Sturges (1978) tek hareketli kapaklı bir dikdörtgensel bölge (kavite) içindeki Stokes akış için Smith'in tekniğini geliştirdiler. Bu problemin çözümü,

$$\Psi = \sum_{-\infty}^{\infty} \{A_n e^{S_n(y-A)} + B_n e^{-S_n(y+A)}\} \frac{\phi_1^{(n)}(x, S_n)}{S_n^2} \quad (3.36)$$

şeklindedir. Burada $\phi_1^{(n)}(x, S_n)$ bir Papkovich-Fadle öz fonksiyonu, S_n ler (3.33) ün kökleri (öz değerler) ve A bölgenin yükseklik ile genişlik uzunluklarının oranıdır. (3.33) den kolayca $S_n = \overline{S_{-n}}$ olduğu ve bu kullanılarak $\phi_1^{-n}(x) = \overline{\phi_1^n(x)}$ olduğu görülür. Buradaki üst çizgi kompleks eşleniği ifade eder. Akış fonksiyonu reel olduğundan, $A_{-n} = \overline{A_n}$, $B_{-n} = \overline{B_n}$ dir. Yani,

$$\sin S_n = -S_n$$

olmak üzere,

$$\sin \overline{S_n} = \sin(\overline{u + iv}) = \sin(u - iv) = \sin u \cdot \cos iv + \cos u \cdot \sin(-iv) .$$

$$\cos iv = \frac{e^{-v} + e^v}{2} = \cosh v$$

$$\sin iv = \frac{e^{-v} - e^v}{2i} = i \frac{e^v - e^{-v}}{2} = i \sinh v$$

olup,

$$\overline{\sin S_n} = \sin \overline{S_n} \quad (3.37)$$

olacaktır. Bu aşağıda açık olarak verilmiştir.

$$\begin{aligned} \overline{\sin S_n} &= \overline{\sin(u + iv)} = \overline{\sin u \cdot \cos iv + \cos u \cdot \sin iv} \\ &= \overline{\sin u \cdot \cosh v + i \cos u \cdot \sinh v} \\ &= \sin u \cdot \cosh v - i \cos u \cdot \sinh v = \sin u \cdot \cos iv - \cos u \cdot \sin iv \\ &= \sin(u - iv) = \sin \overline{S_n} \end{aligned}$$

olur. $S_n = \overline{-S_n}$ olduğu gösterilecektir. Bu doğru ise (3.33) de S_n yerine $\overline{-S_n}$ yazılırsa eşitlik sağlanmalıdır. Buradan yola çıkarak,

$$\sin(\overline{-S_n}) = -(\overline{-S_n}) = -\overline{(-u - iv)} = u + iv \text{ olmalı. } \sin(\overline{-S_n}) = \overline{S_n}$$

$$\sin(\overline{-S_n}) = \sin(u + iv) = -\sin u \cdot \cos hv + i \sin hv \cos u$$

$$= -[\sin u \cdot \cos hv - i \sin hv \cos u] = -[\overline{\sin S_n}] = \overline{S_n} \text{ olur. Yani}$$

$$S_n = \overline{-S_n} \quad (3.38)$$

dir.

$\phi_1^{-n}(x) = \overline{\phi_1^n}(x)$ olduğunu da gösterelim.

$$\begin{aligned} \overline{\phi_1^{(n)}} &= \overline{S_n} \cdot \overline{\sin(S_n)} \cdot \overline{\cos(S_n x)} - \overline{S_n x} \cdot \overline{\cos(S_n)} \cdot \overline{\sin(S_n x)} \\ &= S_{-n} \sin(\overline{S_n}) \cos(\overline{S_n x}) - S_{-n} x \cos(\overline{S_n}) \sin(\overline{S_n x}) \\ &= S_{-n} \sin(S_{-n}) \cos(S_{-n} x) - S_{-n} x \cos(S_{-n}) \sin(S_{-n} x) = \phi_1^{-n} \end{aligned}$$

3.5 Katsayıların Belirlenmesi

Alt ve üst kapak için (3.6) sınır şartlarından A_n ve B_n in bulunması açısından (3.6) ve (3.3) den

$$V_1 = 1 = \sum_{-\infty}^{\infty} (A_n - B_n \exp(-2S_n A)) \frac{\phi_1^{(n)}}{S_n} \quad (3.39)$$

$$0 = \sum_{-\infty}^{\infty} (A_n + B_n \exp(-2S_n A)) \frac{\phi_1^{(n)}}{S_n^2} \quad (3.40)$$

$$V_2 = 0 = \sum_{-\infty}^{\infty} (A_n \exp(-2S_n A) - B_n) \frac{\phi_1^{(n)}}{S_n} \quad (3.41)$$

$$0 = \sum_{-\infty}^{\infty} (A_n \exp(-2S_n A) + B_n) \frac{\phi_1^{(n)}}{S_n^2} \quad (3.42)$$

olur. Burada V_1 ve V_2 sırasıyla üst ve alt kapakların hızlarını gösterir. A_n ve B_n i bulmak için (3.30) biortagonallik bağıntısı (3.39)-(3.42) denklemlerine uygulanır. (3.30) Biortagonallik bağıntısı tekrar yazılırsa,

$$\int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \psi_1^{(m)} & \psi_2^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{bmatrix} dx = 0$$

$$\int_{-1}^1 \phi_1^{(n)} \psi_2^{(m)} + \phi_2^{(n)} (2\psi_2^{(m)} - \psi_1^{(m)}) dx = 0$$

şeklindeydi.

Şimdi (3.40) ın iki defa x 'e göre türevi alınır ve

$$\frac{\partial^2 \phi_1^{(n)}}{\partial x^2} = S_n^2 \phi_2^{(n)}(x)$$

bağıntısı kullanılırsa $\phi_1^{(n)}$ elimine edilir. Yani (3.40) dan,

$$0 = \sum_{-\infty}^{\infty} (A_n + B_n e^{-2S_n A}) \frac{\partial^2 \phi_1^{(n)}}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{S_n^2} \quad (3.43)$$

$$0 = \sum_{-\infty}^{\infty} (A_n + B_n e^{-2S_n A}) \phi_2^{(n)}(x)$$

elde edilir. (3.39)'a $(A_n + B_n e^{-2S_n A}) \phi_1^{(n)}$ terimini ekleyip çıkararak

$$1 = \sum_{-\infty}^{\infty} (A_n + B_n e^{-2S_n A} - A_n - B_n e^{-2S_n A} + \frac{A_n}{S_n} - \frac{B_n}{S_n} e^{-2S_n A}) \phi_1^{(n)} \quad (3.44)$$

olup (3.43) ve (3.44) yardımıyla,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ (A_n + B_n e^{-2S_n A}) \begin{pmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{pmatrix} + \left[A_n \frac{(1 - S_n)}{S_n} - B_n e^{-2S_n A} \frac{(1 + S_n)}{S_n} \right] \begin{pmatrix} \phi_1^{(n)} \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.45)$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.42) nin iki kere türevlenerek (3.41) ile birlikte düşünülmesiyle,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ (A_n e^{-2S_n A} + B_n) \begin{pmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{pmatrix} + \left[A_n e^{-2S_n A} \frac{(1 - S_n)}{S_n} - B_n \frac{(1 + S_n)}{S_n} \right] \begin{pmatrix} \phi_1^{(n)} \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.46)$$

olur.

$$\int_{-1}^1 [\psi_1^L, \psi_2^L] \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} dx$$

operatörü (3.45) ve (3.46) uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 [\psi_1^L, \psi_2^L] \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dx &= \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ (A_n + B_n e^{-2S_n A}) \overbrace{\int_{-1}^1 [\psi_1^L, \psi_2^L] \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{pmatrix} dx}^{K_L} \right\} \\ &+ \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_n \left(\frac{1-S_n}{S_n} \right) - B_n e^{-2S_n A} \frac{(1+S_n)}{S_n} \right\} \overbrace{\int_{-1}^1 [\psi_1^L, \psi_2^L] \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^{(n)} \\ 0 \end{pmatrix} dx}^{M_{L,N}} \end{aligned} \quad (3.47)$$

olur.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 [\psi_1^L, \psi_2^L] \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dx &= \sum_{-\infty}^{\infty} \{ (A_n + B_n e^{-2S_n A}) K_L \} \\ &+ \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_n \left(\frac{1-S_n}{S_n} \right) - B_n e^{-2S_n A} \frac{(1+S_n)}{S_n} \right\} M_{L,N} \end{aligned}$$

olarak yazılır.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 [\psi_1^L, \psi_2^L] \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dx &= \int_{-1}^1 \psi_2^L dx \\ &= \int_{-1}^1 S_L \sin(S_L) \cos(S_L x) - S_L x \cos(S_L) \sin(S_L x) dx \\ &= 2\sin^2(S_L) - S_L \cos(S_L) \left(\frac{-x \cos(S_L x)}{S_L} + \frac{\sin(S_L x)}{S_L^2} \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= 2\sin^2(S_L) - S_L \cos(S_L) \left(\frac{-2 \cos(S_L)}{S_L} + \frac{2\sin(S_L)}{S_L^2} \right) \\ &= 2\sin^2(S_L) - \frac{\cos(S_L)}{S_L} (-2 S_L \cos(S_L) + 2 \sin(S_L)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sin^2(S_L) + 2 \cos^2(S_L) - \frac{1}{S_L} \overbrace{(\sin S_L)}^{-2S_L} \\
&= 4
\end{aligned}$$

olur.

K_L ve $M_{L,N}$ de benzer şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned}
K_L &= \int_{-1}^1 [\psi_1^L, \psi_2^L] \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{pmatrix} dx \\
&= \int_{-1}^1 (\psi_2^L, -\psi_1^L + 2\psi_2^L) \begin{pmatrix} \phi_1^{(n)} \\ \phi_2^{(n)} \end{pmatrix} dx \\
&= \int_{-1}^1 \psi_2^L \phi_1^{(n)} + (-\psi_1^L \phi_2^{(n)} + 2\psi_2^L \phi_2^{(n)}) dx = -4\cos^4 S_L
\end{aligned}$$

$$\phi_1^{(n)} = \psi_2^{(n)} = S_n \sin(S_n) \cos(S_n x) - S_n x \cos(S_n) \sin(S_n x)$$

$$\phi_2^{(n)} = -(S_n \sin(S_n) + 2\cos(S_n)) \cos(S_n x) + S_n x \cos(S_n) \sin(S_n x)$$

$$\psi_1^{(n)} = (S_n \sin(S_n) - 2\cos(S_n)) \cos(S_n x) - S_n x \cos(S_n) \sin(S_n x)$$

$$\begin{aligned}
M_{L,N} &= \int_{-1}^1 \psi_2^L \phi_1^{(n)} dx \\
&= S_L S_n \left\{ 2\cos(S_L) \cos(S_n) \left[\frac{\sin(S_L + S_n)}{(S_L + S_n)^3} - \frac{\sin(S_L - S_n)}{(S_L - S_n)^3} \right] + (1 + \cos(S_L \right. \\
&\quad \left. - S_n) \cos(S_L + S_n)) \left[\frac{1}{(S_L + S_n)^2} - \frac{1}{(S_L - S_n)^2} \right] \right\} \\
&\quad (L \neq n)
\end{aligned}$$

Eğer $L = n$ ise

$$M_{LL} = -\cos^2 S_L \left(\frac{2}{3} S_L^2 + \cos^2 S_L \right)$$

bulunur. Sonuç olarak elde

$$(A_L + B_L e^{-2S_L A})K_L + \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_n \left(\frac{1 - S_n}{S_n} \right) - B_n e^{-2S_L A} \frac{(1 + S_n)}{S_n} \right\} M_{L,N} = 4 \quad (3.48)$$

$$(A_L e^{-2S_L A} + B_L)K_L + \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[A_n e^{-2S_L A} \left(\frac{1 - S_n}{S_n} \right) - B_n \frac{(1 + S_n)}{S_n} \right] M_{L,N} \right\} = 0 \quad (3.49)$$

şeklinde iki denklem var ve A_n ile B_n bulunması gereken katsayılarıdır. Gauss-Eleminasyon metodu ile bulunurlar. Bulunan A_n ve B_n ler, akış fonksiyonunda yerlerine yazılır ve böylece çözüm elde edilmiş olur.

4. EĞRİSEL BİR BÖLGEDE STOKES AKIŞ PROBLEMİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ

4.1 Formülasyon

Bu bölümde sıkıştırılamaz viskoz akışkanla dolu eğrisel bir bölgedeki akış problemi analitik olarak çözüldü (Şekil 4.1). Akış basınç farkıyla gerçekleşmekte olup yönetici denklem olan biharmonik denklem,

$$\nabla^4 \Psi = 0 \quad (4.1)$$

şeklindedir. Sınır şartları ise

$$\Psi = 0 \quad \Gamma_1 \text{'de} \quad \Psi = 1 \quad \Gamma_2 \text{'de} \quad (4.2)$$

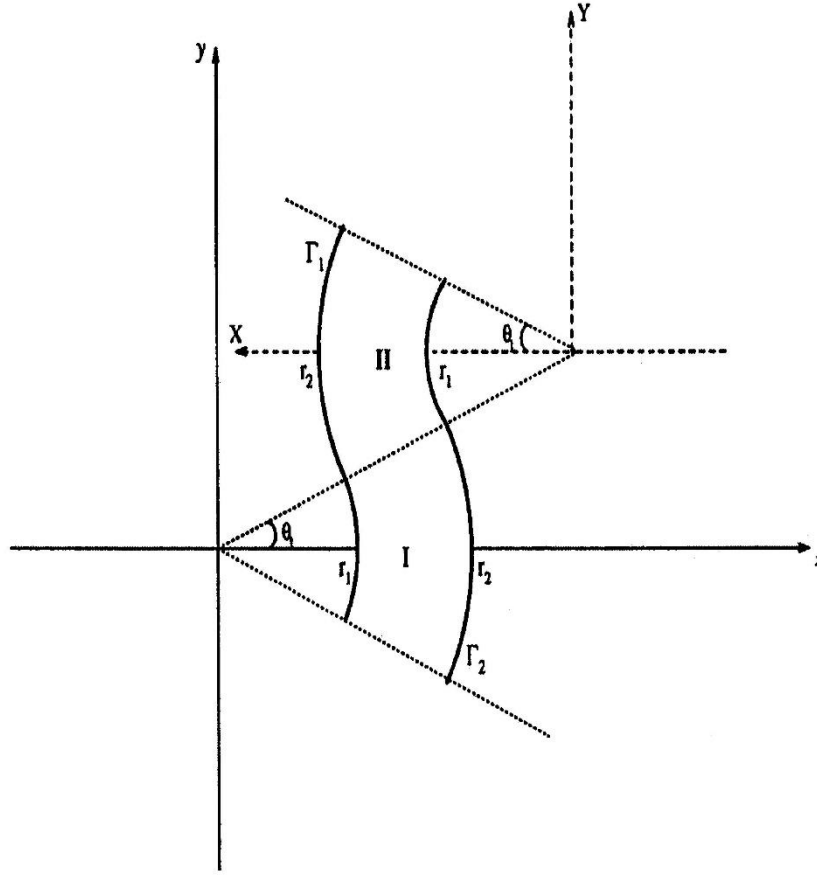
$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0 \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \text{'de} \quad (4.3)$$

şeklindedir. Burada Ψ akış fonksiyonu ve n sınırlara normal bir vektördür. (4.2) ve (4.3) denklemlerine “no-slip” şartları uygulanır.

Ψ 'nın türevleri, hız bileşenlerini verir.

$$v_\theta = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad , \quad v_r = \frac{-1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (4.4)$$

v_r ve v_θ sırasıyla açısıl ve yarıçap yönlerindeki hız bileşenleridir. Sırasıyla I ve II alt bölgelerindeki (4.1)-(4.3) denklemlerin Ψ_I ve Ψ_{II} çözümleri aşağıdaki denklemleri ve sınır koşullarını sağlar:



Şekil 4.1. Akış olayının gerçekleştiği eğrisel bölge [39].

$$\nabla^4 \Psi_I(r, \theta) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \Psi_I(r, \theta) = 0 \quad (4.5)$$

$$\Psi_I(r_1, \theta) = \Psi_I(r_2, \theta) - 1 = \frac{\partial \Psi_I}{\partial r}(r_1, \theta) = \frac{\partial \Psi_I}{\partial r}(r_2, \theta) = 0 \quad (4.6)$$

$$\nabla^4 \Psi_{II}(r', \theta') = \left(\frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} + \frac{1}{r'^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta'^2} \right)^2 \Psi_{II}(r', \theta') = 0 \quad (4.7)$$

$$\Psi_{II}(r_1, \theta') - 1 = \Psi_{II}(r_2, \theta') = \frac{\partial \Psi_{II}}{\partial r'}(r_1, \theta') = \frac{\partial \Psi_{II}}{\partial r'}(r_2, \theta') = 0 \quad (4.8)$$

$$\Psi_I(r, \theta) = \Psi_0(r) + \sum_{-\infty}^{\infty} E_n \cos(\lambda_n \theta) \phi_1^{(n)}(r) \quad (4.9)$$

serisi (4.5) ve (4.6) denklemlerini,

$$\Psi_{II}(r', \theta') = \hat{\Psi}_0(r') + \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \cos(\lambda_n \theta') \phi_1^{(n)}(r) \quad (4.10)$$

ise (4.7) ve (4.8) denklemlerini sağlayan çözümler olarak alındı.

(4.9) da verilen $\Psi_I(r, \theta)$ çözümünün, $\sin(\lambda_n \theta)$ ve $\cos(\lambda_n \theta)$ terimlerinin doğrusal bir kombinasyonu olarak ifade edilmesi gerekir. Ancak I. bölge θ ya göre simetrik olduğu için çözüm çift fonksiyonlarla ifade edilir. Bu nedenle çözümde $\sin(\lambda_n \theta)$ terimi yer almadı. Benzer durum (4.10) da verilen $\Psi_{II}(r', \theta')$ çözümü için de geçerlidir.

(4.9) da $\Psi_0(r)$ fonksiyonu (4.6) da verilen sınır şartlarını ve (4.5) i sağlar.

Ψ_0 'ın (4.5) i sağlaması gerektiğinden,

$$\begin{aligned} \nabla^4 \Psi_0(r, \theta) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \Psi_0(r) = 0 \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \Psi_0(r) = 0 \end{aligned}$$

ya da,

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3}{\partial \theta^2 \partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4}{\partial \theta^2 \partial r} + \frac{4}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \Psi_0(r) = 0$$

elde edilir. Ψ_0 sadece r ye bağlı olduğu için θ ya bağlı türevler sıfır olacak ve böylece

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Psi_0(r) = 0$$

elde edilir. Düzenlenirse,

$$\Psi_0^{iv} + \frac{2}{r} \Psi_0^{iii} - \frac{1}{r^2} \Psi_0^{ii} + \frac{1}{r^3} \Psi_0^i = 0$$

ve r^4 ile çarpılırsa,

$$r^4 \Psi_0^{iv} + 2 r^3 \Psi_0^{iii} - r^2 \Psi_0^{ii} + r \Psi_0^i = 0 \quad (4.11)$$

Cauchy-Euler diferansiyel denklemi elde edilir.

$$r = e^t$$

dönüşümü yapılarak yukarıdaki denklem,

$$[D.(D-1).(D-2).(D-3) + 2(D.(D-1)(D-2)) - (D.(D-1)) + D] \Psi(t) = 0$$

şeklinde yazılır ve genel çözümü,

$$\Psi_0(r) = a_n + b_n \ln r + c_n r^2 + d_n r^2 \ln r \quad (4.12)$$

olarak bulunur. Ψ_0 verilen sınır koşullarını sağlamak zorundadır. Yani,

$$\Psi_0(r_1, \theta) = \Psi_0(r_2, \theta) - 1 = \frac{\partial \Psi_0}{\partial r}(r_1, \theta) = \frac{\partial \Psi_0}{\partial r}(r_2, \theta) = 0$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} 0 &= a_n + b_n \ln r_1 + c_n r_1^2 + d_n r_1^2 \ln r_1 \\ 1 &= a_n + b_n \ln r_2 + c_n r_2^2 + d_n r_2^2 \ln r_2 \\ 0 &= b_n \frac{1}{r_1} + 2 c_n r_1 + d_n (2r_1 \ln r_1 + r_1) \\ 0 &= b_n \frac{1}{r_2} + 2 c_n r_2 + d_n (2r_2 \ln r_2 + r_2) \end{aligned} \quad (4.13)$$

olacağı açıktır. Bu denklem sistemi çözülerek,

$$a_n = \frac{r_1^4 - r_1^2 \cdot r_2^2 - 4r_1^2 r_2^2 (\ln r_1)^2 + 2r_1^2 r_2^2 \ln r_1 - 2r_1^2 r_2^2 \ln r_2 + 4r_1^2 r_2^2 (\ln r_1)(\ln r_2)}{r_1^4 + r_2^4 - 2r_1^2 r_2^2 - 4r_1^2 r_2^2 (\ln r_1)^2 - 4r_1^2 r_2^2 (\ln r_2)^2 + 8r_1^2 r_2^2 (\ln r_1)(\ln r_2)} \quad (4.14)$$

$$b_n = \frac{4r_1^2 r_2^2 \ln r_1 - 4r_1^2 r_2^2 \ln r_2}{r_1^4 + r_2^4 - 2r_1^2 r_2^2 - 4r_1^2 r_2^2 (\ln r_1)^2 - 4r_1^2 r_2^2 (\ln r_2)^2 + 8r_1^2 r_2^2 (\ln r_1)(\ln r_2)} \quad (4.15)$$

$$c_n = \frac{-r_1^2 + r_2^2 - 2r_1^2 \ln r_1 + 2r_2^2 \ln r_2}{r_1^4 + r_2^4 - 2r_1^2 r_2^2 - 4r_1^2 r_2^2 (\ln r_1)^2 - 4r_1^2 r_2^2 (\ln r_2)^2 + 8r_1^2 r_2^2 (\ln r_1)(\ln r_2)} \quad (4.16)$$

$$d_n = \frac{2r_1^2 - 2r_2^2}{r_1^4 + r_2^4 - 2r_1^2 r_2^2 - 4r_1^2 r_2^2 (\ln r_1)^2 - 4r_1^2 r_2^2 (\ln r_2)^2 + 8r_1^2 r_2^2 (\ln r_1)(\ln r_2)} \quad (4.17)$$

elde edilir.

Payda düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
& r_1^4 + r_2^4 - 2r_1^2 r_2^2 - 4r_1^2 r_2^2 (\ln r_1)^2 - 4r_1^2 r_2^2 (\ln r_2)^2 + 8r_1^2 r_2^2 (\ln r_1)(\ln r_2) \\
& = (r_2^2 - r_1^2)^2 - (2r_1 \cdot r_2 \cdot \ln r_1 + 2r_1 \cdot r_2 \cdot \ln r_2)^2 \\
& = (r_2^2 - r_1^2)^2 - (2r_1 \cdot r_2 (\ln r_1 - \ln r_2))^2 \\
& = (r_2^2 - r_1^2)^2 - 4r_1^2 r_2^2 \log^2(r_2/r_1)
\end{aligned}$$

olur.

$\Psi_0(r)$ denkleminde a_n, b_n, c_n ve d_n yerine yazılırsa;

$$\Psi_0(r) = \frac{1}{[(r_2^2 - r_1^2)^2 - 4r_1^2 r_2^2 \log^2(r_2/r_1)]} \left\{ (2r_2^2 \log r_2 - 2r_1^2 \log r_1 + r_2^2 - r_1^2) (r^2 - r_1^2) - 4r_1^2 r_2^2 \log \frac{r_2}{r_1} \log \frac{r}{r_1} - 2(r_2^2 - r_1^2)(r^2 \log r - r_1^2 \log r_1) \right\} \quad (4.18)$$

elde edilir. $\Psi_0(r)$ ve $\hat{\Psi}_0(r')$ (4.8) deki sınır şartlarını ve (4.7) yi sağlar. Böylece

$$\begin{aligned}
\nabla^4 \Psi_{II}(r', \theta') &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} + \frac{1}{r'^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta'^2} \right)^2 \Psi_{II}(r', \theta') = 0 \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} + \frac{1}{r'^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta'^2} \right)^2 \hat{\Psi}_0(r') = 0 \\
\hat{\Psi}_0(r') &= a_n' + b_n' \ln r' + c_n' r'^2 + d_n' r'^2 \ln r' \quad (4.19)
\end{aligned}$$

$\hat{\Psi}_0(r')$ için sınır şartları;

$$\Psi_{II}(r_1, \theta') - 1 = \Psi_{II}(r_2, \theta') = \frac{\partial \Psi_{II}}{\partial r'}(r_1, \theta') = \frac{\partial \Psi_{II}}{\partial r'}(r_2, \theta') = 0$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
1 &= a_n' + b_n' \ln r_1' + c_n' r_1'^2 + d_n' r_1'^2 \ln r_1' \\
0 &= a_n' + b_n' \ln r_2' + c_n' r_2'^2 + d_n' r_2'^2 \ln r_2' \\
0 &= b_n' \frac{1}{r_1'} + 2c_n' r_1' + d_n' (2r_1' \ln r_1' + r_1') \\
0 &= b_n' \frac{1}{r_2'} + 2c_n' r_2' + d_n' (2r_2' \ln r_2' + r_2') = 0
\end{aligned} \quad (4.20)$$

Denklem sistemi çözülürse;

$$a_n' = \frac{r_2'^4 - r_1'^2 r_2'^2 - 2r_1'^2 r_2'^2 \ln r_1' - 4r_1'^2 r_2'^2 (\ln r_2')^2 + 2r_1'^2 r_2'^2 \ln r_2' + 4r_1'^2 r_2'^2 \ln r_1' \ln r_2'}{r_1'^4 + r_2'^4 - 2r_1'^2 r_2'^2 - 4r_1'^2 r_2'^2 (\ln r_1')^2 - 4r_1'^2 r_2'^2 (\ln r_2')^2 + 8r_1'^2 r_2'^2 \ln r_1' \ln r_2'} \quad (4.21)$$

$$b_n' = \frac{-4r_1'^2 r_2'^2 \ln r_1' + 4r_1'^2 r_2'^2 \ln r_2'}{r_1'^4 + r_2'^4 - 2r_1'^2 r_2'^2 - 4r_1'^2 r_2'^2 (\ln r_1')^2 - 4r_1'^2 r_2'^2 (\ln r_2')^2 + 8r_1'^2 r_2'^2 \ln r_1' \ln r_2'} \quad (4.22)$$

$$c_n' = \frac{r_1'^2 - r_2'^2 + 2r_1'^2 \ln r_1' + 2r_2'^2 \ln r_2'}{r_1'^4 + r_2'^4 - 2r_1'^2 r_2'^2 - 4r_1'^2 r_2'^2 (\ln r_1')^2 - 4r_1'^2 r_2'^2 (\ln r_2')^2 + 8r_1'^2 r_2'^2 \ln r_1' \ln r_2'} \quad (4.23)$$

$$d_n' = \frac{-2r_1'^2 + 2r_2'^2}{r_1'^4 + r_2'^4 - 2r_1'^2 r_2'^2 - 4r_1'^2 r_2'^2 (\ln r_1')^2 - 4r_1'^2 r_2'^2 (\ln r_2')^2 + 8r_1'^2 r_2'^2 \ln r_1' \ln r_2'} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} b_n' &= -b_n \\ c_n' &= -c_n \\ d_n' &= -d_n \end{aligned} \quad (4.25)$$

elde edilir.

$$\hat{\Psi}_0(r') = a_n' + b_n' \ln r' + c_n' r'^2 + d_n' r'^2 \ln r'$$

$$\hat{\Psi}_0(r') = a_n' - b_n \ln r' - c_n r'^2 - d_n r'^2 \ln r'$$

olup,

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_0(r') + \Psi_0(r') &= a_n' - b_n \ln r' - c_n r'^2 - d_n r'^2 \ln r' \\ &+ a_n + b_n \ln r' + c_n r'^2 + d_n r'^2 \ln r' \end{aligned} \quad (4.26)$$

elde edilir. Böylece,

$$\hat{\Psi}_0(r') + \Psi_0(r') = a_n' + a_n \quad (4.27)$$

olur.

$$a_n' + a_n =$$

$$\frac{r_2'^4 - r_1'^2 r_2'^2 - 2r_1'^2 r_2'^2 \ln r_1' - 4r_1'^2 r_2'^2 (\ln r_2')^2 + 2r_1'^2 r_2'^2 \ln r_2' + 4r_1'^2 \ln r_1' r_2'^2 \ln r_2'}{r_1'^4 + r_2'^4 - 2r_1'^2 r_2'^2 - 4r_1'^2 r_2'^2 (\ln r_1')^2 - 4r_1'^2 r_2'^2 (\ln r_2')^2 + 8r_1'^2 r_2'^2 \ln r_1' \ln r_2'}$$

$$+ \frac{r_1^4 - r_1'^2 r_2'^2 - 4r_1'^2 r_2'^2 (\ln r_1)^2 + 2r_1'^2 r_2'^2 \ln r_1 - 2r_1'^2 r_2'^2 \ln r_2 + 4r_1'^2 r_2'^2 (\ln r_1)(\ln r_2)}{r_1^4 + r_2^4 - 2r_1'^2 r_2'^2 - 4r_1'^2 r_2'^2 (\ln r_1)^2 - 4r_1'^2 r_2'^2 (\ln r_2)^2 + 8r_1'^2 r_2'^2 (\ln r_1)(\ln r_2)}$$

$$a_n' + a_n = \frac{(r_2^2 - r_1^2)^2 - 4r_1^2 r_2^2 \log^2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(r_2^2 - r_1^2)^2 - 4r_1^2 r_2^2 \log^2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = 1 \quad (4.28)$$

olacağından,

$$\hat{\Psi}_0(r') + \Psi_0(r') = 1$$

yada

$$\hat{\Psi}_0(r') = 1 - \Psi_0(r') \quad (4.29)$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$\phi_1^{(n)}(r) = a_n r^{\lambda_n} + b_n r^{-\lambda_n} + c_n r^{2-\lambda_n} + d_n r^{2+\lambda_n} \quad (4.30)$$

a_n, b_n, c_n, d_n katsayıları ve karşılık gelen λ_n özdeğerleri bulundu [40].

$$\sin \widehat{\lambda_n} = \pm b \widehat{\lambda_n}, \quad (4.31)$$

$$\widehat{\lambda_n} = \left(i \log \frac{r_1}{r_2}\right) \lambda_n; \quad b = \frac{1}{2 \log(r_1/r_2)} \left(\frac{r_1}{r_2} - \frac{r_1}{r_2}\right) \quad (4.32)$$

Bu özdeğerler karmaşık λ düzleminde simetrik olarak yerleştirilmiştir.

$$\lambda_{-n} = \overline{\lambda_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (4.33)$$

dır.

Burada üst çizgi karmaşık eşleniği ifade eder.

$$\phi_1^{(-n)}(r) = \overline{\phi_1^{(n)}(r)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (4.34)$$

Ayrıca λ_n lerin durumundan dolayı

$$E_{-n} = \overline{E_n} ; \quad F_{-n} = \overline{F_n} \quad (4.35)$$

olacaktır.

4.2 Bölgelerin Arakesitinde Eşleştirme

I. ve II. bölgedeki çözümler kesişim bölgesinde birbirine yakınsar. (4.9) ve (4.10) da verilen iki çözüm eşleştirilecektir. Akış fonksiyonunun ve ilk üç kısmi türevinin, I. bölge ve II. bölge arasındaki $\theta = \theta_1$ ve $\theta' = -\theta_1$ deki arayüz boyunca sürekli olması sağlanır. Akış fonksiyonları C^3 süreklidir. Kesişim çizgisi boyunca θ ya göre ilk üç türev birbirine eşittir [20,21].

$$\Psi_I(r, \theta_1) = \Psi_{II}(r', -\theta_1) \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial \Psi_I}{\partial \theta}(r, \theta_1) = \frac{\partial \Psi_{II}}{\partial \theta}(r', -\theta_1) \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_I}{\partial \theta^2}(r, \theta_1) = \frac{\partial^2 \Psi_{II}}{\partial \theta^2}(r', -\theta_1) \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial^3 \Psi_I}{\partial \theta^3}(r, \theta_1) = \frac{\partial^3 \Psi_{II}}{\partial \theta^3}(r', -\theta_1) \quad (4.39)$$

Burada

$$r_1 \leq r, r' \leq r_2$$

dır.

(4.36) - (4.39) denklemlerinin hesaplanmasına geçmeden önce ara yüz boyunca kısmi türevlerde kullanılacak eşitlikler elde edilmelidir. Şekil 4.1'den,

$$y = Y + (r_1 + r_2)\sin \theta_1, \quad x = -X + (r_1 + r_2)\cos \theta_1 \quad (4.40)$$

veya kutupsal koordinatlarda

$$\begin{aligned} r \sin \theta &= r' \sin \theta' + (r_1 + r_2) \sin \theta_1, \\ r \cos \theta &= -r' \cos \theta' + (r_1 + r_2) \cos \theta_1 \end{aligned} \quad (4.41)$$

olduğu açıktır.

(4.41) de bulunan her iki denklemin θ ya göre türevini alırsak,

$$\begin{aligned} r \cos \theta &= \sin \theta' \frac{\partial r'}{\partial \theta} + r' \cos \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \\ -r \sin \theta &= -\cos \theta' \frac{\partial r'}{\partial \theta} + r' \sin \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (4.42)$$

I ve II. bölgelerin ara yüzünde ($\theta = \theta_1$; $\theta' = -\theta_1$) denklem (4.42)

$$\begin{aligned} r \cos \theta_1 &= -\sin \theta_1 \frac{\partial r'}{\partial \theta} + r' \cos \theta_1 \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \\ -r \sin \theta_1 &= -\cos \theta_1 \frac{\partial r'}{\partial \theta} - r' \sin \theta_1 \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (4.43)$$

şeklinde yazılabilir.

Birinci denklemi $\sin \theta_1$ ile ikinci denklemi $\cos \theta_1$ ile çarpıp taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned} r \sin \theta_1 \cos \theta_1 - r \sin \theta_1 \cos \theta_1 &= -\sin^2 \theta_1 \frac{\partial r'}{\partial \theta} - \cos^2 \theta_1 \frac{\partial r'}{\partial \theta} \\ &+ r' \cos \theta_1 \sin \theta_1 \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} - r' \cos \theta_1 \sin \theta_1 \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$(\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) \frac{\partial r'}{\partial \theta} = 0$$

ve

$$\frac{\partial r'}{\partial \theta} = 0$$

bulunur. Benzer şekilde birinci denklemi $\sin \theta_1$ ile ikinci denklemi $-\cos \theta_1$ ile çarpıp taraf tarafa toplanırsa,

$$r \sin \theta_1 \cos \theta_1 + r \sin \theta_1 \cos \theta_1 = r' \cos \theta_1 \sin \theta_1 \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} + r' \cos \theta_1 \sin \theta_1 \frac{\partial \theta'}{\partial \theta}$$

olup,

$$2 r \sin \theta_1 \cos \theta_1 = 2 r' \cos \theta_1 \sin \theta_1 \frac{\partial \theta'}{\partial \theta}$$

buradan,

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} = \frac{r}{r'}$$

elde edilir.

O halde (4.43) deki iki denklemin $\frac{\partial \theta'}{\partial \theta}$ ve $\frac{\partial r'}{\partial \theta}$ için çözümü

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} = \frac{r}{r'} ; \quad \frac{\partial r'}{\partial \theta} = 0 \quad (4.44)$$

(4.42) denkleminin her iki tarafını da θ ya göre türevi alınıp (4.44) denklemini dikkate alarak, I ve II bölgelerinin ara yüzleri arasındaki denklemler,

$$\begin{aligned} r \cos \theta &= \sin \theta' \frac{\partial r'}{\partial \theta} + r' \cos \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \\ -r \sin \theta &= -\cos \theta' \frac{\partial r'}{\partial \theta} + r' \sin \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \end{aligned}$$

olduğundan $\theta = \theta_1$ ve $\theta' = -\theta_1$ için birinci denklemin türevi

$$\begin{aligned} -r \sin \theta &= \frac{d \sin \theta'}{d\theta} \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial r'}{\partial \theta} + \sin \theta' \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} + r' \frac{d \cos \theta'}{d\theta} \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} + r' \cos \theta' \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \theta^2} \\ &= \sin \theta' \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} - r' (\sin \theta') \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^2 + r' \cos \theta' \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \theta^2} \\ -r \sin \theta &= \sin \theta' \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} + r' \cos \theta' \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \theta^2} - r' \sin \theta' \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^2 \end{aligned}$$

şeklindedir. $\theta = \theta_1$ ve $\theta' = -\theta_1$ için

$$-r \sin \theta_1 = -\sin \theta_1 \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} + r' \cos \theta_1 \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \theta^2} + r' \sin \theta_1 \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^2$$

elde edilir.

Benzer şekilde (4.42) de bulunan ikinci denklemin türevi;

$$-r \cos \theta = \frac{d(-\cos \theta')}{d\theta} \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial r'}{\partial \theta} - \cos \theta' \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} + r' \frac{d \sin \theta'}{d\theta} \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} + r' \sin \theta' \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \theta^2}$$

$$-r \cos \theta = -\cos \theta' \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} + r' \sin \theta' \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \theta^2} + r' \cos \theta' \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^2$$

şeklindedir. $\theta = \theta_1$ ve $\theta' = -\theta_1$ için

$$-r \cos \theta_1 = -\cos \theta_1 \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} - r' \sin \theta_1 \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \theta^2} + r' \cos \theta_1 \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^2$$

olur.

Bu durumda,

$$\begin{aligned} -r \sin \theta_1 &= -\sin \theta_1 \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} + r' \cos \theta_1 \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \theta^2} + r' \sin \theta_1 \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^2 \\ -r \cos \theta_1 &= -\cos \theta_1 \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} - r' \sin \theta_1 \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \theta^2} + r' \cos \theta_1 \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.45)$$

elde edilir. Bu denklemde birinci denklem $\frac{\cos \theta_1}{r'}$ ile ikinci denklem de $\frac{-\sin \theta_1}{r'}$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned} \frac{-r \sin \theta_1 \cos \theta_1 + r \sin \theta_1 \cos \theta_1}{r'} &= \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_1}{r'} \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} + \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_1}{r'} \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} \\ &+ (\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \theta^2} + \sin \theta_1 \cos \theta_1 \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^2 - \sin \theta_1 \cos \theta_1 \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$(\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \theta^2} = 0$$

ve

$$\frac{\partial^2 \theta'}{\partial \theta^2} = 0$$

bulunur.

Benzer şekilde birinci denklemi $\sin \theta_1$ ile ikinci denklemi de $\cos \theta_1$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$-r \sin^2 \theta_1 - r \cos^2 \theta_1 = (-\sin^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_1) \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} + r' (\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) \left(\frac{r}{r'}\right)^2$$

olup buradan

$$-r = -\frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} + r' \left(\frac{r}{r'}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} = r \left(1 + \frac{r}{r'}\right)$$

bulunur.

O halde (4.45) deki iki denklemin $\frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2}$ ve $\frac{\partial^2 \theta'}{\partial \theta^2}$ için çözümü

$$\frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} = r \left(1 + \frac{r}{r'}\right); \quad \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \theta^2} = 0 \quad (4.46)$$

şeklindedir.

(4.42) denkleminin her iki tarafını da θ ya göre iki kez türevi alınıp (4.44) ve (4.46) denklemlerini dikkate alarak, I ve II bölgelerinin ara yüzleri arasındaki denklemler,

$$r \cos \theta = \sin \theta' \frac{\partial r'}{\partial \theta} + r' \cos \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial \theta}$$

denklemini için birinci türev

$$-r \sin \theta = \cos \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial r'}{\partial \theta} + \sin \theta' \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} - r' \sin \theta' \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta}\right)^2 + r' \cos \theta' \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \theta^2}$$

şeklindedir. Bu ifadenin ikinci türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} -r \cos \theta &= \left(\cos \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial \theta}\right)' \frac{\partial r'}{\partial \theta} + \cos \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} + \cos \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} + \sin \theta' \frac{\partial^3 r'}{\partial \theta^3} \\ &\quad - r' \cos \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta}\right)^2 - r' \sin \theta' \left[\left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta}\right)^2\right]' - r' \sin \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \theta^2} \\ &\quad + r' \cos \theta' \frac{\partial^3 \theta'}{\partial \theta^3} \end{aligned}$$

olur. Bu ifade düzenlenirse,

$$-r \cos \theta = \sin \theta' \frac{\partial^3 r'}{\partial \theta^3} + 3 \cos \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} + r' \cos \theta' \frac{\partial^3 \theta'}{\partial \theta^3} - r' \cos \theta' \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^3$$

olur. ($\theta = \theta_1$ ve $\theta' = -\theta_1$) için

$$\begin{aligned} -r \cos \theta_1 &= -\sin \theta_1 \frac{\partial^3 r'}{\partial \theta^3} + 3 \cos \theta_1 \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} + r' \cos \theta_1 \frac{\partial^3 \theta'}{\partial \theta^3} \\ &\quad - r' \cos \theta_1 \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^3 \end{aligned}$$

şeklinde olur. Benzer şekilde

$$-r \sin \theta = -\cos \theta' \frac{\partial r'}{\partial \theta} + r' \sin \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial \theta}$$

denklemini için birinci türev;

$$-r \cos \theta = \sin \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial r'}{\partial \theta} - \cos \theta' \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} + r' \sin \theta' \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \theta^2} + r' \cos \theta' \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^2$$

şeklinde dir. Bu ifadenin ikinci türevi alınır,

$$\begin{aligned} r \sin \theta &= \left(\sin \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)' \frac{\partial r'}{\partial \theta} + \sin \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} + \sin \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} - \cos \theta' \frac{\partial^3 r'}{\partial \theta^3} \\ &\quad - r' \sin \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^2 + r' \cos \theta' \left[\left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^2 \right]' + r' \cos \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \theta^2} \\ &\quad + r' \sin \theta' \frac{\partial^3 \theta'}{\partial \theta^3} \end{aligned}$$

olur. Bu ifade düzenlenirse,

$$r \sin \theta = -\cos \theta' \frac{\partial^3 r'}{\partial \theta^3} + 3 \sin \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} + r' \sin \theta' \frac{\partial^3 \theta'}{\partial \theta^3} - r' \sin \theta' \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^3$$

olur. $\theta = \theta_1$ ve $\theta' = -\theta_1$ için

$$r \sin \theta_1 = -\cos \theta_1 \frac{\partial^3 r'}{\partial \theta^3} - 3 \sin \theta_1 \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} - r' \sin \theta_1 \frac{\partial^3 \theta'}{\partial \theta^3} + r' \sin \theta_1 \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^3$$

Buradan,

$$\begin{aligned}
-r \cos \theta_1 &= -\sin \theta_1 \frac{\partial^3 r'}{\partial \theta^3} + 3 \cos \theta_1 \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} + r' \cos \theta_1 \frac{\partial^3 \theta'}{\partial \theta^3} \\
&\quad - r' \cos \theta_1 \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^3 \\
r \sin \theta_1 &= -\cos \theta_1 \frac{\partial^3 r'}{\partial \theta^3} - 3 \sin \theta_1 \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} - r' \sin \theta_1 \frac{\partial^3 \theta'}{\partial \theta^3} \\
&\quad - r' \sin \theta_1 \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^3
\end{aligned} \tag{4.47}$$

elde edilir. Birinci denklem $\sin \theta_1$ ile ikinci denklem $\cos \theta_1$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$0 = -(\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) \frac{\partial^3 r'}{\partial \theta^3}$$

elde edilir ve buradan,

$$\frac{\partial^3 r'}{\partial \theta^3} = 0$$

olarak bulunur.

Birinci denklem $\cos \theta_1$ ile ikinci denklem $-\sin \theta_1$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned}
-r(\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) &= 3(\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} + r'(\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) \frac{\partial^3 \theta'}{\partial \theta^3} \\
&\quad - r'(\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^3
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.44) ve (4.46) denklemlerini kullanarak,

$$\begin{aligned}
-r &= 3 \frac{r}{r'} \cdot r \left(1 + \frac{r}{r'} \right) + r' \frac{\partial^3 \theta'}{\partial \theta^3} - r' \left(\frac{r}{r'} \right)^3 \\
-r &= \frac{3r^2 r' + 3r^3}{r'^2} + r' \frac{\partial^3 \theta'}{\partial \theta^3} - \frac{r^3}{r'^2} \\
-r + \frac{r^3}{r'^2} - \frac{3r^2 r' + 3r^3}{r'^2} &= r' \frac{\partial^3 \theta'}{\partial \theta^3}
\end{aligned}$$

$$-r - \frac{2r^3}{r'^2} - \frac{3r^2}{r'} = r' \frac{\partial^3 \theta'}{\partial \theta^3}$$

$$-\frac{r}{r'} - \frac{2r^3}{r'^3} - \frac{3r^2}{r'^2} = \frac{\partial^3 \theta'}{\partial \theta^3}$$

$$\frac{\partial^3 \theta'}{\partial \theta^3} = - \left(\frac{r}{r'} \right) - 3 \left(\frac{r}{r'} \right)^2 - 2 \left(\frac{r}{r'} \right)^3$$

bulunur.

(4.47) deki iki denklemin (4.44) ve (4.46) dan yararlanarak $\frac{\partial^3 \theta'}{\partial \theta^3}$ ve $\frac{\partial^3 r'}{\partial \theta^3}$ için çözümü

$$\frac{\partial^3 \theta'}{\partial \theta^3} = - \left(\frac{r}{r'} \right) - 3 \left(\frac{r}{r'} \right)^2 - 2 \left(\frac{r}{r'} \right)^3 ; \quad \frac{\partial^3 r'}{\partial \theta^3} = 0 \quad (4.48)$$

şeklinde olur.

O halde (4.44), (4.46) ve (4.48) denklemlerinden ara yüz boyunca $\theta = \theta_1$ ve $\theta' = -\theta_1$ olan kısmi türevlerin aşağıdaki değerleri bulunur:

$$\frac{\partial r'}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^3 r'}{\partial \theta^3} = 0$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} = \frac{r}{r'}$$

$$\frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} = r \left(1 + \frac{r}{r'} \right)$$

$$\frac{\partial^3 \theta'}{\partial \theta^3} = - \left(\frac{r}{r'} \right) - 3 \left(\frac{r}{r'} \right)^2 - 2 \left(\frac{r}{r'} \right)^3 \quad (4.49)$$

$$F = \cos(\lambda_n \theta') \phi(r') \quad (4.50)$$

fonksiyonu göz önüne alınsın.

Ara yüz boyunca zincir kuralı kullanarak ilk üç kısmi F türevini hesaplanırsa,

birinci türevi,

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -\lambda_n \sin(\lambda_n \theta') \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \phi(r') + \cos(\lambda_n \theta') \phi'(r') \frac{\partial r'}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \lambda_n \sin(\lambda_n \theta_1) \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \phi(r')$$

İkinci türevi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} &= \left[-\lambda_n \sin(\lambda_n \theta') \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right]' \phi(r') + \left[-\lambda_n \sin(\lambda_n \theta') \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right] \phi'(r') \frac{\partial r'}{\partial \theta} \\ &\quad + \left[\cos(\lambda_n \theta') \frac{\partial r'}{\partial \theta} \right]' \phi'(r') + \left[\cos(\lambda_n \theta') \frac{\partial r'}{\partial \theta} \right] [\phi'(r')] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} &= -\lambda_n^2 \cos(\lambda_n \theta') \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^2 \phi(r') - \lambda_n \sin(\lambda_n \theta') \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \theta^2} \phi(r') \\ &\quad - \lambda_n \sin(\lambda_n \theta') \frac{\partial r'}{\partial \theta} \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \phi'(r') - \lambda_n \sin(\lambda_n \theta') \frac{\partial r'}{\partial \theta} \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \phi'(r') \\ &\quad + \cos(\lambda_n \theta') \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} \phi'(r') + \left[\cos(\lambda_n \theta') \frac{\partial r'}{\partial \theta} \right] [\phi'(r')] \end{aligned}$$

olur. Düzenlenirse,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = -\lambda_n^2 \cos(\lambda_n \theta') \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^2 \phi(r') + \cos(\lambda_n \theta') \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} \phi'(r')$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = -\lambda_n^2 \cos(\lambda_n \theta_1) \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^2 \phi(r') + \cos(\lambda_n \theta_1) \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} \phi'(r')$$

elde edilir.

Benzer şekilde üçüncü türevi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 F}{\partial \theta^3} &= \left(\lambda_n^3 \sin(\lambda_n \theta') \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^3 - \lambda_n^2 \cos(\lambda_n \theta') \left[\left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^2 \right]' \right) \phi(r') \\ &\quad - \left(\lambda_n^2 \cos(\lambda_n \theta') \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \theta^2} + \lambda_n \sin(\lambda_n \theta') \frac{\partial^3 \theta'}{\partial \theta^3} \right) \phi(r') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[-\lambda_n^2 \cos(\lambda_n \theta') \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^2 - \lambda_n \sin(\lambda_n \theta') \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right] \frac{\partial r'}{\partial \theta} \phi'(r') \\
& - \lambda_n \sin(\lambda_n \theta') \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} \phi'(r') \\
& - \lambda_n \sin(\lambda_n \theta') \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} \phi'(r') + \cos(\lambda_n \theta') \frac{\partial^3 r'}{\partial \theta^3} \phi'(r') \\
& + \left(-\lambda_n \sin(\lambda_n \theta') \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial r'}{\partial \theta} + \cos(\lambda_n \theta') \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} \right) [\phi'(r')] \\
& + \left[(-\lambda_n \sin(\lambda_n \theta'))' \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} - \lambda_n \sin(\lambda_n \theta') \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)' \right] \frac{\partial r'}{\partial \theta} \\
& - \lambda_n \sin(\lambda_n \theta') \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} \phi'(r')
\end{aligned}$$

olur. Düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 F}{\partial \theta^3} &= \lambda_n^3 \sin(\lambda_n \theta') \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^3 \phi(r') - \lambda_n \sin(\lambda_n \theta') \frac{\partial^3 \theta'}{\partial \theta^3} \phi(r') \\
& - 3 \lambda_n \sin(\lambda_n \theta') \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} \phi'(r') \\
\frac{\partial^3 F}{\partial \theta^3} &= -\lambda_n \sin(\lambda_n \theta_1) \phi(r') \left[\lambda_n^2 \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^3 - \frac{\partial^3 \theta'}{\partial \theta^3} \right] \\
& + 3 \lambda_n \sin(\lambda_n \theta_1) \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} \phi'(r')
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \theta} &= \lambda_n \sin(\lambda_n \theta_1) \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \phi(r') \\
\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} &= -\lambda_n^2 \cos(\lambda_n \theta_1) \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^2 \phi(r') + \cos(\lambda_n \theta_1) \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} \phi'(r') \\
\frac{\partial^3 F}{\partial \theta^3} &= -\lambda_n \sin(\lambda_n \theta_1) \phi(r') \left[\lambda_n^2 \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^3 - \frac{\partial^3 \theta'}{\partial \theta^3} \right]
\end{aligned} \tag{4.51}$$

$$+ 3\lambda_n \sin(\lambda_n \theta_1) \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} \phi'(r')$$

olur. Benzer şekilde

$$G = \phi(r') \quad (4.52)$$

fonksiyonumuz daha sonra, F 'de $\lambda_n = 0$ için ve (4.28) kullanılması, I ve II bölgeleri arasındaki ara yüzde aşağıdaki kısmi türevlerin elde edilmesine yol açar.

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} \phi'(r')$$

$$\frac{\partial^3 G}{\partial \theta^3} = 0 \quad (4.53)$$

(4.40) dan faydalananarak,

$$\begin{aligned} r'^2 &= X^2 + Y^2 \\ &= [x - (r_1 + r_2) \cos \theta_1]^2 + [y - (r_1 + r_2) \sin \theta_1]^2 \\ &= x^2 + (r_1 + r_2)^2 \cos^2 \theta_1 - 2x(r_1 + r_2) \cos \theta_1 + y^2 \\ &\quad + (r_1 + r_2)^2 \sin^2 \theta_1 - 2y(r_1 + r_2) \sin \theta_1 \\ &= x^2 + y^2 - 2(r_1 + r_2)[x \cos \theta_1 - y \sin \theta_1] + (r_1 + r_2)^2 \\ &= x^2 + y^2 - 2(r_1 + r_2)[r \cos \theta \cdot \cos \theta_1 - r \sin \theta \sin \theta_1] + (r_1 + r_2)^2 \\ r'^2 &= r^2 - 2r(r_1 + r_2) \cos(\theta - \theta_1) + (r_1 + r_2)^2 \end{aligned} \quad (4.54)$$

elde edilir. Özellikle, ara yüzde

$$r' = (r_1 + r_2) - r \quad (4.55)$$

(4.9) - (4.10) da verilen öz fonksiyon genişlemelerini eşleşme koşullarına (4.36) - (4.39) değiştirerek ve (4.51), (4.53) ve (4.55) denklemlerinden faydalananarak aşağıdaki eşleşme denklemlerini elde edilir:

$$\Psi_I(r, \theta) = \Psi_0(r) + \sum_{-\infty}^{\infty} E_n \cos(\lambda_n \theta) \phi_1^{(n)}(r)$$

$$\Psi_{II}(r', \theta') = \hat{\Psi}_0(r') + \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \cos(\lambda_n \theta') \phi_1^{(n)}(r')$$

denklemleri önce

$$\Psi_I(r, \theta_1) = \Psi_{II}(r', -\theta_1)$$

denkleminde yerine konulursa;

$$\begin{aligned} \Psi_0(r) + \sum_{-\infty}^{\infty} E_n \cos(\lambda_n \theta) \phi_1^{(n)}(r) &= \hat{\Psi}_0(r') + \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \cos(\lambda_n \theta') \phi_1^{(n)}(r') \\ 0 &= (\Psi_0(r) - \hat{\Psi}_0(r'))|_{\theta=\theta_1} \\ &+ \sum_{-\infty}^{\infty} E_n \cos(\lambda_n \theta_1) \phi_1^{(n)}(r) - \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \cos(\lambda_n \theta_1) \phi_1^{(n)}(r') \end{aligned} \quad (4.56)$$

denklemini elde edilir. Benzer şekilde (4.9) ve (4.10) denklemleri

$$\frac{\partial \Psi_I}{\partial \theta}(r, \theta_1) = \frac{\partial \Psi_{II}}{\partial \theta}(r', -\theta_1)$$

denklemini için çözülürse;

$$\begin{aligned} & - \sum_{-\infty}^{\infty} E_n \lambda_n \sin(\lambda_n \theta) \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \phi_1^{(n)}(r) + \sum_{-\infty}^{\infty} E_n \cos(\lambda_n \theta) \phi_1'^{(n)}(r) \frac{\partial r}{\partial \theta} \\ &= - \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \lambda_n \sin(\lambda_n \theta') \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \phi_1^{(n)}(r') + \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \cos(\lambda_n \theta') \phi_1'^{(n)}(r') \frac{\partial r'}{\partial \theta} \end{aligned}$$

böylece,

$$0 = - \sum_{-\infty}^{\infty} E_n \lambda_n \sin(\lambda_n \theta_1) \phi_1^{(n)}(r) - \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \lambda_n \sin(\lambda_n \theta_1) \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \phi_1^{(n)}(r') \quad (4.57)$$

denklemini elde edilir. Benzer şekilde (4.9) ve (4.10) denklemleri

$$\frac{\partial^2 \Psi_I}{\partial \theta^2}(r, \theta_1) = \frac{\partial^2 \Psi_{II}}{\partial \theta^2}(r', -\theta_1)$$

denklemini için çözülürse;

$$\begin{aligned}
& - \sum_{-\infty}^{\infty} E_n \lambda_n^2 \cos(\lambda_n \theta) \phi_1^{(n)}(r) - \sum_{-\infty}^{\infty} E_n \lambda_n \sin(\lambda_n \theta) \phi_1^{(n)}(r) \frac{\partial r}{\partial \theta} \\
& - \sum_{-\infty}^{\infty} E_n \lambda_n \sin(\lambda_n \theta) \phi_1^{(n)}(r) \frac{\partial r}{\partial \theta} + \sum_{-\infty}^{\infty} E_n \cos(\lambda_n \theta) \frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2} \phi_1^{(n)}(r) \\
& = - \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \lambda_n^2 \cos(\lambda_n \theta') \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^2 \phi_1^{(n)}(r') - \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \lambda_n \sin(\lambda_n \theta') \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \theta^2} \phi_1^{(n)}(r') \\
& - \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \lambda_n \sin(\lambda_n \theta') \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial r'}{\partial \theta} \phi_1^{(n)}(r') + \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \cos(\lambda_n \theta') \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} \phi_1^{(n)}(r')
\end{aligned}$$

elde edilir. Düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
0 = & - \left(\frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} \Psi_0'(r') \right) |_{\theta = \theta_1} - \sum_{-\infty}^{\infty} E_n \lambda_n^2 \cos(\lambda_n \theta_1) \phi_1^{(n)}(r) \\
& - \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \cos(\lambda_n \theta_1) \left[\frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} \phi_1^{(n)}(r') - \lambda_n^2 \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^2 \phi_1^{(n)}(r') \right] \quad (4.58)
\end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Benzer şekilde (4.9) ve (4.10) denklemleri

$$\frac{\partial^3 \Psi_I}{\partial \theta^3}(r, \theta_1) = \frac{\partial^3 \Psi_{II}}{\partial \theta^3}(r', -\theta_1)$$

denklemini için çözülürse;

$$\begin{aligned}
& \sum_{-\infty}^{\infty} E_n \lambda_n^3 \sin(\lambda_n \theta) \phi_1^{(n)}(r) - \sum_{-\infty}^{\infty} E_n \lambda_n^2 \cos(\lambda_n \theta) \phi_1^{(n)}(r) \\
& - \sum_{-\infty}^{\infty} E_n \lambda_n^2 \cos(\lambda_n \theta) \frac{\partial r}{\partial \theta} \phi_1^{(n)}(r) - \sum_{-\infty}^{\infty} E_n \lambda_n \sin(\lambda_n \theta) \frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2} \phi_1^{(n)}(r) \\
& - \sum_{-\infty}^{\infty} E_n \lambda_n^2 \cos(\lambda_n \theta) \frac{\partial r}{\partial \theta} \phi_1^{(n)}(r) - \sum_{-\infty}^{\infty} E_n \lambda_n \sin(\lambda_n \theta) \frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2} \phi_1^{(n)}(r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{-\infty}^{\infty} E_n \lambda_n \sin(\lambda_n \theta) \frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2} \phi_1^{(n)}(r) + \sum_{-\infty}^{\infty} E_n \cos(\lambda_n \theta) \frac{\partial^3 r}{\partial \theta^3} \phi_1^{(n)}(r) \\
& = \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \lambda_n^3 \sin(\lambda_n \theta') \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^3 \phi_1^{(n)}(r') \\
& - \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \lambda_n^2 \cos(\lambda_n \theta') \left[\left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^2 \right]' \phi_1^{(n)}(r') \\
& - \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \lambda_n^2 \cos(\lambda_n \theta') \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \theta^2} \phi_1^{(n)}(r') - \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \lambda_n \sin(\lambda_n \theta') \frac{\partial^3 \theta'}{\partial \theta^3} \phi_1^{(n)}(r') \\
& - \left[\sum_{-\infty}^{\infty} F_n \lambda_n \sin(\lambda_n \theta') \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right]' \frac{\partial r'}{\partial \theta} \phi_1^{(n)}(r') \\
& - \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \lambda_n \sin(\lambda_n \theta') \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} \phi_1^{(n)}(r') \\
& - \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \lambda_n \sin(\lambda_n \theta') \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} \phi_1^{(n)}(r) + \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \cos(\lambda_n \theta') \frac{\partial^3 r'}{\partial \theta^3} \phi_1^{(n)}(r')
\end{aligned}$$

olur. Düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
0 = & \sum_{-\infty}^{\infty} E_n \lambda_n^3 \sin(\lambda_n \theta_1) \phi_1^{(n)}(r) \\
& + \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \lambda_n \sin(\lambda_n \theta_1) \left[\phi_1^{(n)}(r') \left\{ \lambda_n^2 \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^3 - \frac{\partial^3 \theta'}{\partial \theta^3} \right\} \right. \\
& \quad \left. - 3 \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} \phi_1^{(n)}(r') \right]
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Bir sonraki bölümde, E_n ve F_n katkısının Papkovich-Fadde özfunksiyonları tarafından sağlanan biortagonallik koşulları kullanılarak nasıl belirlendiği gösterilecektir.

4.3 Biortagonal seri çözümü

(4.56) - (4.59) 'da verilen eşleştirme koşullarına ayrıntılı olarak Khuri [18]' den türetilmiş bir sektörel kavite için biortagonallik koşulunun uygulanmasıyla E_n ve F_n katsayıları bulunabilir. Biortagonallik özelliği,

$$\int_{r_1}^{r_2} [\psi_1^{(m)}(r), \psi_2^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)}(r) \\ \phi_2^{(n)}(r) \end{bmatrix} dr = P_n^* \delta_{mn} \quad (4.60)$$

$$\phi_2^{(n)}(r) = r \phi_1''^{(n)}(r) - \frac{\mu_n}{2r} \phi_1^{(n)}(r)$$

$$\Psi_1^{(m)}(r) = \phi_2^{(m)}(r), \quad \Psi_2^{(m)}(r) = \phi_1^{(m)}(r) \quad (4.61)$$

olup burada,

$$\mu_n = 1 + 2\lambda_n^2$$

ve

$$B(r) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2r^2} & 0 \\ \frac{3}{2r^3} & \frac{1}{2r^2} \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Biortagonallik koşulunun uygulanmasına hazırlamak için, önce (4.56) - (4.59) da verilen eşleşme koşulları vektör şeklinde ifade edilmelidir. (4.61) den

$$\phi_2^{(n)}(r) = r \phi_1''^{(n)}(r) - \frac{1 + 2\lambda_n^2}{2r} \phi_1^{(n)}(r)$$

$$\phi_2^{(n)}(r) = r \phi_1''^{(n)}(r) - \frac{1}{2r} \phi_1^{(n)}(r) - \frac{\lambda_n^2}{r} \phi_1^{(n)}(r)$$

$$-\frac{1}{r} \lambda_n^2 \phi_1^{(n)}(r) = \phi_2^{(n)}(r) - r \phi_1''^{(n)}(r) + \frac{1}{2r} \phi_1^{(n)}(r)$$

dir. Bunun yerine (4.58) denklemini koyup, daha sonra (4.56) ve (4.58) denklemleri gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} [\Psi_0(r) - \hat{\Psi}_0(r')]_{\theta=\theta_1} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} \hat{\Psi}'_0(r') \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{-\infty}^{\infty} E_n \cos(\lambda_n \theta_1) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2r} \phi_1^{(n)}(r) - r \phi_1''^{(n)}(r) \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \cos(\lambda_n \theta_1) \begin{pmatrix} -\phi_1^{(n)}(r') \\ \frac{1}{r} \lambda_n^2 \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta}\right)^2 \phi_1^{(n)}(r') - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} \phi_1'^{(n)}(r') \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{-\infty}^{\infty} E_n \cos(\lambda_n \theta_1) \begin{pmatrix} \phi_1^{(n)}(r) \\ \phi_2^{(n)}(r) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.62}$$

burada,

$$\int_{r_1}^{r_2} [\psi_1^{(m)}(r), \psi_2^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} dr$$

operatörü (4.62) denklemin her iki tarafına uygulanırsa,

$$V_{mn} = \int_{r_1}^{r_2} [\psi_1^{(m)}(r), \psi_2^{(m)}(r)] B(r) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2r} \phi_1^{(n)}(r) - r \phi_1''^{(n)}(r) \end{pmatrix} dr \tag{4.63}$$

$$W_{mn} = \int_{r_1}^{r_2} [\psi_1^{(m)}(r), \psi_2^{(m)}(r)] B(r) \begin{pmatrix} -\phi_1^{(n)}(r') \\ \frac{1}{r} \lambda_n^2 \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta}\right)^2 \phi_1^{(n)}(r') - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} \phi_1'^{(n)}(r') \end{pmatrix} dr \tag{4.64}$$

$$Q_{mn} = \int_{r_1}^{r_2} [\psi_1^{(m)}(r), \psi_2^{(m)}(r)] B(r) \begin{pmatrix} [\Psi_0(r) - \hat{\Psi}_0(r')]_{\theta=\theta_1} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} \hat{\Psi}'_0(r') \end{pmatrix} dr \tag{4.65}$$

ve daha sonra, biortogonalite koşulu kullanılarak,

$$\begin{aligned}
0 &= Q_m + E_m \cos(\lambda_m \theta_1) P_m^* + \sum_{-\infty}^{\infty} E_n V_{mn} \cos(\lambda_n \theta_1) \\
&+ \sum_{-\infty}^{\infty} F_n W_{mn} \cos(\lambda_n \theta_1)
\end{aligned} \tag{4.66}$$

elde edilir. Daha sonra (4.57) ve (4.59) denklemleri birleştirilir. (4.49) ve (4.55) e göre

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} = \frac{r}{r'} \quad , \quad r' = (r_1 + r_2) - r$$

olduğundan,

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} = \frac{r}{r'} = \frac{(r_1 + r_2) - r'}{r'} = \frac{r_1 + r_2}{r'} - \frac{r'}{r'}$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} = \frac{r}{r'} = \frac{r_1 + r_2}{r'} - 1 \quad (4.67)$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$\frac{\partial^3 \theta'}{\partial \theta^3} = - \left(\frac{r}{r'} \right) - 3 \left(\frac{r}{r'} \right)^2 - 2 \left(\frac{r}{r'} \right)^3, \quad \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} = \frac{r}{r'}$$

olduğundan

$$\lambda_n^2 \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^3 - \frac{\partial^3 \theta'}{\partial \theta^3} = \lambda_n^2 \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^3 + \left(\frac{r}{r'} \right) + 3 \left(\frac{r}{r'} \right)^2 + 2 \left(\frac{r}{r'} \right)^3$$

$$\lambda_n^2 \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^3 - \frac{\partial^3 \theta'}{\partial \theta^3} = \lambda_n^2 \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^3 + \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right) + 3 \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^3$$

$$\lambda_n^2 \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^3 - \frac{\partial^3 \theta'}{\partial \theta^3} = (\lambda_n^2 + 2) \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^3 + 3 \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)$$

olur. Bu nedenle, (4.59) denklemi aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir.

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_n^3 E_n \sin(\lambda_n \theta_1) \phi_1^{(n)}(r) - 3 \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_n F_n \sin(\lambda_n \theta_1) \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial^2 r'}{\partial \theta^2} \phi_1^{(n)}(r') \\ & + \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_n F_n \sin(\lambda_n \theta_1) \phi_1^{(n)}(r') \left\{ \left[(\lambda_n^2 + 2) \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^3 + 3 \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{r_1 + r_2}{r'} \right] - 1 \right\} \end{aligned} \quad (4.68)$$

Eğer (4.57) denklemi $(\partial\theta'/\partial\theta)^2$ ile bölünürse, (4.57) ve (4.59) yı veya eşdeğerde (4.68) eşleştirilebilir.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \sum_{-\infty}^{\infty} E_n \lambda_n \sin(\lambda_n \theta_1) \begin{pmatrix} \lambda_n^2 \phi_1^{(n)}(r) \\ -\left(\frac{\partial\theta'}{\partial\theta}\right)^{-2} \phi_1^{(n)}(r) \end{pmatrix} \\
&- \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_n F_n \sin(\lambda_n \theta_1) \begin{pmatrix} \phi_1^{(n)}(r') \\ \phi_2^{(n)}(r') \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \lambda_n \sin(\lambda_n \theta_1) \\
&\left\{ \begin{pmatrix} \phi_1^{(n)}(r') \left[(\lambda_n^2 + 2) \left(\frac{\partial\theta'}{\partial\theta}\right)^3 + 3 \left(\frac{\partial\theta'}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{(r_1 + r_2)}{r'} \right] \\ \phi_2^{(n)}(r') - \left(\frac{\partial\theta'}{\partial\theta}\right)^{-1} \phi_1^{(n)}(r') \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \begin{pmatrix} -3 \frac{\partial\theta'}{\partial\theta} \frac{\partial^2 r'}{\partial\theta^2} \phi_1^{(n)}(r') \\ 0 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned} \tag{4.69}$$

(4.69) denkleminin her iki tarafına

$$\int_{r_1}^{r_2} [\psi_1^{(m)}(r'), \psi_2^{(m)}(r')] B(r') \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} dr'$$

operatörü uygulanırsa,

$$R_{mn} = \int_{r_1}^{r_2} [\psi_1^{(m)}(r'), \psi_2^{(m)}(r')] B(r') \phi_1^{(n)}(r) \begin{pmatrix} \lambda_n^2 \\ -\left(\frac{\partial\theta'}{\partial\theta}\right)^{-2} \end{pmatrix} dr' \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned}
S_{mn} &= \int_{r_1}^{r_2} [\psi_1^{(m)}(r'), \psi_2^{(m)}(r')] B(r') \left\{ \begin{pmatrix} -3 \frac{\partial\theta'}{\partial\theta} \frac{\partial^2 r'}{\partial\theta^2} \phi_1^{(n)}(r') \\ 0 \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \begin{pmatrix} \phi_1^{(n)}(r') \left[(\lambda_n^2 + 2) \left(\frac{\partial\theta'}{\partial\theta}\right)^3 + 3 \left(\frac{\partial\theta'}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{r_1 + r_2}{r'} \right] \\ \phi_2^{(n)}(r') - \left(\frac{\partial\theta'}{\partial\theta}\right)^{-1} \phi_1^{(n)}(r') \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned} \tag{4.71}$$

$$\begin{aligned}
0 = & -\lambda_m F_m \sin (\lambda_m \theta_1) P_m^* + \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_n E_n R_{mn} \sin (\lambda_n \theta_1) \\
& + \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_n F_n S_{mn} \sin (\lambda_n \theta_1)
\end{aligned} \tag{4.72}$$

elde edilir.

(4.66) ve (4.72) den E_n ve F_n katsayıları için çözülecek denklem sistemleri,

$$\begin{aligned}
0 = & Q_m + E_m \cos (\lambda_m \theta_1) P_m^* + \sum_{-\infty}^{\infty} E_n V_{mn} \cos (\lambda_n \theta_1) \\
& + \sum_{-\infty}^{\infty} F_n W_{mn} \cos (\lambda_n \theta_1) \\
0 = & -\lambda_m F_m \sin (\lambda_m \theta_1) P_m^* + \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_n E_n R_{mn} \sin (\lambda_n \theta_1) \\
& + \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_n F_n S_{mn} \sin (\lambda_n \theta_1)
\end{aligned} \tag{4.73}$$

olarak elde edildi. Bu denklem sisteminden E_n , F_n katsayıları Gauss-Eliminasyon yöntemi ya da eşdeğer yöntemlerle hesaplanabilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında mühendislik ve fen alanında sıkça karşılaşılan kavite akış problemi incelendi. Eğrisel bölge ele alınmış olup kavitenin geometrisi gereği çözümler kutupsal koordinatlarda bulundu.

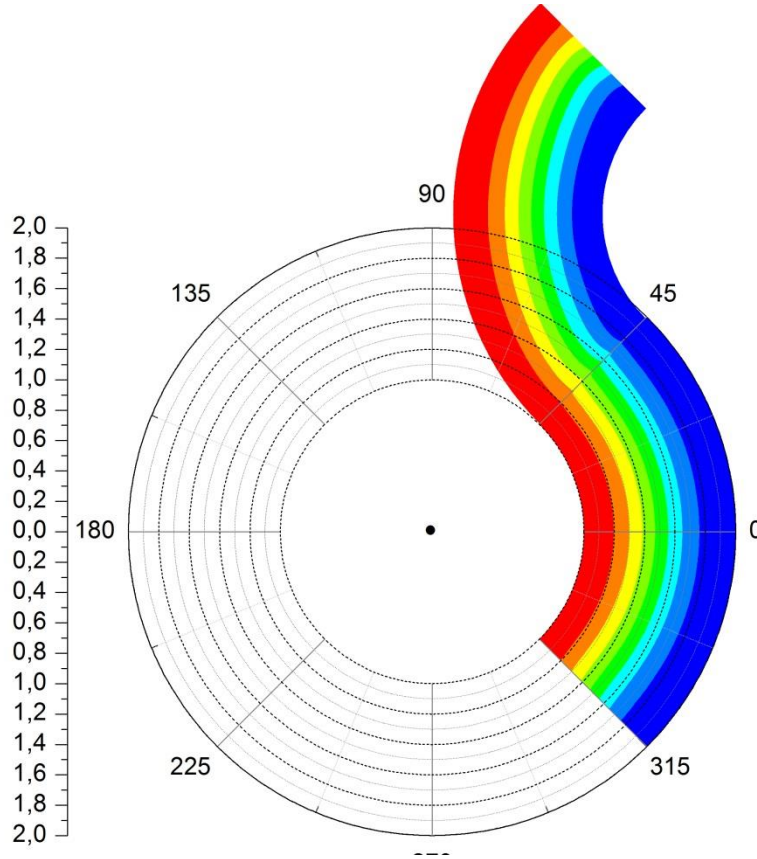
Akış bölgesinin (sektörel kavite) görünüm oranları olan r_1 , r_2 ve θ 'nın çeşitli değerlerinde stokes akış problemi ele alındı. Çizelge 5.1 de $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ için ilk 26 λ_n öz değerleri hesaplandı.

Çizelge 5.1. $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ için 26 λ_n öz değerleri.

n	λ_n karmaşık kökler
1	3.370703254 + 6.054102744 i
2	4.112343180 + 10.802931474 i
3	4.593078513 + 15.444885446 i
4	4.951563568 + 20.045543966 i
5	5.238022153 + 24.625199349 i
6	5.476764440 + 29.192525396 i
7	5.681498446 + 33.751926784 i
8	5.860740743 + 38.305901960 i
9	6.020153718 + 42.855983209 i
10	6.163696600 + 47.403166826 i
11	6.294247926 + 51.948130806 i
12	6.413966841 + 56.491353726 i
13	6.524514778 + 61.033183727 i
14	6.627197730 + 65.573880523 i
15	6.723061006 + 70.113642063 i
16	6.812954353 + 74.652622031 i
17	6.897577913 + 79.190941676 i
18	6.977515421 + 83.728698023 i
19	7.053258673 + 88.265969687 i
20	7.125225878 + 92.802821085 i
21	7.193775648 + 97.339305529 i
22	7.259217815 + 101.875467545 i
23	7.321821895 + 106.411344626 i
24	7.381823795 + 110.946968584 i
25	7.439431179 + 115.482366591 i
26	7.494827805 + 120.017562008 i

r_1 , r_2 ve θ 'nın değiştirilmesiyle çıkış yapılarındaki çatallanmalar, yeni eddy'lerin doğması ve gelişmesi gibi olaylar incelendi ancak kavitenin sınırlarında hareket olmadığı için akış yapısında bir farklılık gözlenmedi. Kavite kapalı olmadığı için girdap ve çatallanma gözlenmedi.

Kavite iki ayrı bölge olarak düşünülerek her bir bölgedeki çözüm ayrı ayrı elde edildi. Ancak bu çözümlerin ara kesit çizgisi üzerinde birbirine yakınsaması gerektiği için, bazı teorik bilgiler kullanılarak bu yakınsama yeterince sağlanmıştır.



Şekil 5.1. $r_1 = 1, r_2 = 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{4}$ için akış çizgileri.

Elde edilen çözüm $r_1 = 1, r_2 = 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{4}$ için Şekil 5.1. de gösterilmiştir. Kavite görünüm oranları olan r_1, r_2 ve θ 'nın farklı değerleri için de benzer akış yapıları çizdirilebilir ancak kavitenin sınırlarında hareket olmadığı için akış yapısında bir farklılık gözlenmeyecektir. Yukarıdaki şekilde her bir renk akış fonksiyonunun farklı seviyeleri için akış şeklini göstermektedir. Akış basınç farkıyla oluşmakta olup kavite kapalı olmadığı için girdap ya da çatallanma gözlenmedi.

Problemin teorik çözümü elle yapılmış olup sonuç dataları FORTRAN programlama dilinde hazırlanan program ve alt programlar yardımıyla elde edildi. Elde edilen datalar ORIGINPRO çizim programı ile görselleştirildi.

Bu çalışmada asıl amaçlanan, problemin teorik çözümünü detaylı olarak elde etmek olup sonuca başarılı bir şekilde ulaşılmıştır. Sonraki çalışma olarak ise kavite sınırlarına hareket vererek farklı akış yapıları ve girdaplar, çatallanmalar gözlenebilir. Bu problem doğada bir çok uygulamaya uyarlanabilir.

Bunlara damardaki kan akışı, eğrisel kanalda su akışı, ısı ve kütle transferi gibi problemler örnek verilebilir.

Ek olarak bu tez çalışmasında Stokes akış problemi incelenmiş olup Reynolds sayısının ihmal edilebilecek kadar küçük olduğu durum incelendi. Sıfırdan farklı Reynolds sayılı akış problemi ise lineer olmayan Navier-Stokes denklemleri tarafından yönetilmekte olup bu tür problemler ise ancak güçlü nümerik yöntemlerle elde edilebilir. Reynolds sayısının farklı durumlarında çok ilginç akış yapılarının gözlenebileceği tahmin edilmekte olup sonraki çalışma olarak önerilebilir.

KAYNAKLAR

1. Gaskell, P. H., Savage, M.D., Summers, J.L. ve Thompson, H.M., 1995. Modeling and analysis of meniscus roll coating , J. Fluid Mech., 298, 113-137.
2. Shankar, P.N. ve Deshpande, M.D., 2000. Fluid mechanics in the driven cavity, Ann. Rev. Fluid Mech., 136, 93-136.
3. Higgins, B.G., 1982. Dynamics of coating, adhesion and wetting, Status Report Project 3328, The Institute of Paper Chem.
4. Hellebrand, H., 1996. Tape casting in materials science and technology—processing of ceramics, Part I, Vol. 17 A, ed R.J. Brook. VCH, Weinheim, 189-260.
5. Scholle, M., Haas, A., Aksel, N., Thompson, H.M, Hewson, R.W., ve Gaskell, P.H., 2009. The effect of locally induced flow structure on global heat transfer for plane laminar shear flow, International Journal of Heat and Fluid Flow 30,2, 175-185.
6. Mcquain, W.D., Ribbens, C.J., Wang, C.Y. ve Watson, L.T., 1994. Steady viscos flow in a trapezoidal cavity, Comput. Fluids, 23, 613-626.
7. Liu, C.H. ve Joseph, D.D., 1977. Stokes flow in wedge-shaped trenches, J. Fluid Mech., 80, 443-463.
8. Ozalp, C., Pinarbasi A., ve Sahin, B., 2010. Experimental measurement of flow past cavities of different shapes, Experimental Thermal and Fluid Science 34, 505-515.
9. Deliceoğlu, A., Aydın, S.H., 2013. Flow bifurcation and eddy genesis in an L-Shaped cavity, Comput. Fluids, 73, 24-46.
10. Deliceoğlu, A., Aydın, S.H., 2014. Topological flow structures in an L-Shaped cavity with horizontal motion of the upper lid, Journal of Computational and Applied Mathematics, 259, 937-943.
11. Stokes, G.G., 1847. On the theory of oscillatory Waves, Trans. Camb. Phil. Soc. 8,5, Cambridge Press.
12. Oberbeck, A., 1976. Ueber stationäre flüssigkeitsbewegungen mit berücksichtigung der inneren reibung, J. Reine Angew. Maths., 81, 62-80.
13. Jeffrey, G.B., 1992. On water waves near the shore, Proc. Roy. Soc., (A), 102, 161.
14. Smith, R.C.T., 1952. The bending of a semi-infinite strip, Austral. J. Sci. Res., 5, 227-237.

15. Joseph, D.D. ve Sturges, L., 1975. The free surface on a liquid filling a trench heated from its side, *J.Fluid Mech.*, 69, 565-589.
16. Joseph, D.D. ve Sturges, L.,1978. The convergence of biorthogonal series for biharmonic and stokes flow edge problems: Part ii, *Siam., J.Appl.Math.*,34, 7-27.
17. Khuri, S.A., 1996. Biorthogonal series solution of stokes flow problems in sectorial regions, *Siam.,J. Appl. Math.*, 56,1,19-39.
18. Khuri,S.A., 2000. Biorthogonality condition for Axisymmetric stokes flow in spherical geometries, *Journal .Math. Sci.*, 23, 711-715.
19. Khuri,S.A., 1997. Biorthogonality condition for stokes flow in rectangular regions, *Intern. J. Computer Math.*, Vol. 70, 411 -415.
20. Khuri,S.A., 10 January 2003. Biorthogonality condition for creeping flow in wedge-shaped trenches, *Applied Mathematics And Computation*, V.134 N.1, P.141-145.
21. Gürcan, F. ve Bilgil, H., 2013. Bifurcations and eddy genesis of Stokes flow within a sectorial cavity, *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, vol. 39, 42-51.
22. Gürcan, F., ve Bilgil, H. 2015. Bifurcations and eddy genesis of stokes flow within a sectorial cavity: Co-Moving Lids, *Eur.J.Mech.B Fluids* <http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechflu.2015.02.008>.
23. Burggraf, O., 1996. Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows, *J. Fluid Mech.*, 113-151.
24. Pan, F. ve Acrivos, A.,1967. Steady flows in rectangular cavities, *J. Fluid Mech.*, 28, 643-655.
25. Moffat, H.K., 1964. Viscous and resistive eddies near a sharp corner, *J. Fluid Mech.*, 18, 1-18.
26. Harper, J.F. ve Wake, G.C.,1983. Stokes flow between parallel plates due to transversely moving end wall, *J.Appl.Math.*,30,141-149.
27. Brøns, M. ve Hartnack, J.N., 1999. Streamline topologies near simple degenerate critical points in two dimensional flow away from boundaries, *Phys. Fluids* 11, 314-324.
28. Gurcan, F., Deliceoglu, A. ve Bakker, P.G., 2005. Streamline topologies near a non-simple degenerate critical point close to a stationary wall using normal forms. , *J. Fluid Mechanics*, 539, 299-311.

29. Gurcan, F. ve Deliceoglu, A., 2005. Streamline topologies near non-simple degenerate points in two Dimensional flows with double symmetric away from boundaries and an application. , 17,9, Art No:093106, Physics of Fluids.
30. Gurcan, F., ve Deliceoglu, A., 2006. Saddle connections near degenerate critical points of Stokes flow within cavities., Applied Mathematics And Computation, 172,2,1133-1144.
31. Gurcan, F., 2005. Streamline topologies near a Stationary wall of stokes flow in a cavity., Applied Mathematics And Computation, 165, 329-345.
32. Gurcan, F., 2003. Streamline topologies in stokes flow within lid-driven cavities, Theoretical And Computational Fluid Dynamics, Vol.17, No:(1) 19-30.
33. Gurcan, F., Wilson,M.C.T. ve Savage, M.D., 2006. Eddies genesis and transformation of stokes flow in double-lid-driven cavity Part 2: Deep Cavities, İ Proc. Of The İnstn . Mech. Eng. Part-C: J. Mec. Eng. Sci., Vol.220, No:12, pp. 1765-1774.
34. Gurcan, F.,1996. Phd Thesis, University Of Leeds.
35. Gurcan, F., Gaskell, P.H., Savage, M.D. ve Wilson, M., 2003. Eddy genesis and transformation of stokes flow in a double-lid-driven cavity, Proc. of The Instn. Mech. Eng. Part-C: Journal of Mechanical Engineering Science, 217, 3, 353-364.
36. Gaskell, P.H., Savage, M.D. ve Wilson, M., 1997. Flow structures in a half-filled annulus Between Rotating co-axial cylinders, Journal of Fluid Mechanics 337:263-282.
37. Jeffrey, D.J. ve Sherwood, J.D., 1980. Streamline patterns and eddies in low reynolds number flow, J.Fluid Mech., 96,315-334.
38. Bakker, P.G.,1989. Bifurcation in flow patterns, Thesis, Tecnical University of Delft, Netherlands.
39. Khuri, S.A., 2006. Journal of computational and applied mathematics 187,171-191.
40. Bilgil, H., 2010. Sektörel kavitelerdeki 2-D Navier-Stokes denkleminin çözüm hareketlerinin çatallanmaları, Doktora Tezi, Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kayseri

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Zehra DEHRİ

E-posta adresi : z.dehri@aksaray.edu.tr

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, 2000-2004

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, 2019

