



**EKLİ SIERPİNSKİ ÜÇGENİ ÜZERİNDE
İÇSEL METRİĞİN FORMÜLE EDİLMESİ**

Yüksek Lisans Tezi

ASLIHAN İKLİM ŞEN

Eskişehir 2020

EKLİ SIERPİNSKİ ÜÇGENİ ÜZERİNDE İÇSEL METRİĞİN
FORMÜLE EDİLMESİ

ASLIHAN İKLİM ŞEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Geometri Yüksek Lisans Programı

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mustafa SALTAN

Eskişehir

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Temmuz 2020

ÖZET

EKLİ SIERPİNSKİ ÜÇGENİ ÜZERİNDE İÇSEL METRİĞİN FORMÜLE EDİLMESİ

ASLIHAN İKLİM ŞEN

Matematik Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Temmuz, 2020

Danışman : Doç. Dr. Mustafa SALTAN

Doğayla olan ilişkisinden dolayı bir çok bilim dalında uygulama alanı olan fraktalların en önemli özelliklerinden biri kendine benzerliktir. Bu özelliği sayesinde özellikle bazı klasik fraktaller üzerinde içsel metrikler noktalarının kod temsilleri yardımıyla ilginç formüller ile ifade edilebilmektedir. Son zamanlarda Sierpinski üçgeni, Kutu fraktal, Sierpinski tetrahedron ve mod-3 Sierpinski üçgeni gibi kendine benzer kümeler üzerindeki içsel metrikler noktaların kod temsillerinin kullanarak formüle edilmiştir.

Bu tezde, ekli Sierpinski üçgeni üzerindeki içsel metrik noktalarının kod temsilleri yardımıyla inşa edilecektir. Bu fraktalın literatürdeki içsel metrik formülü verilen diğer fraktallardan farkı, ilgili yinelemeli fonksiyon sisteminin büzülme katsayılarının farklı olmasıdır. Bu özelliği ile kod temsilleri yardımıyla içsel metriği formüle edilen ilk teorik çalışmadır. Ayrıca bu içsel metrik formülünü kullanarak ekli Sierpinski üçgeninin bazı geometrik özellikleri verilmekte ve Sierpinski üçgenin geometrik özellikleriyle karşılaştırılmaktadır. Son olarak, bu formülü kullanarak ekli Sierpinski üçgeninin bazı topolojik kümeleri noktaların kod temsilleri ile elde edilmektedir.

Anahtar Sözcükler: Ekli Sierpinski üçgeni, İçsel metrik, Kod temsilleri, Sierpinski üçgeni.

ABSTRACT

THE FORMULIZATION OF THE INTRINSIC METRIC ON THE ADDED SIERPINSKI TRIANGLE

ASLIHAN İKLİM ŞEN

Mathematics Department

Anadolu University, Graduate School of Sciences, July, 2020

Advisor : Assoc. Prof. Dr. Mustafa SALTAN

Due to its relationship with nature, one of the most important features of fractals, that have applications in many disciplines, is self-similarity. Thanks to this feature, especially on some classical fractals, the intrinsic metric can be described with the help of code representations of points. Recently, intrinsic metrics are formulated on self-similar sets such as the Sierpinski triangle, box fractal, Sierpinski tetrahedron and mod-3 Sierpinski triangle via the code representations.

In this thesis, the intrinsic metric on the added Sierpinski triangle will be constructed by using the code representation of the points. The difference between this fractal and the other fractals given the intrinsic metric formulas in the literature formulas is that the contraction coefficients of the related iterative function systems are different. With this feature, it is the first theoretical study that formulates the intrinsic metric with the help of code representations. In addition, using this intrinsic metric formula, some geometric properties of the added Sierpinski triangle are given and compared with the related geometric properties of the Sierpinski triangle. Finally, using this formula, some topological sets are obtained by the code representations of points on the added Sierpinski triangle.

Keywords: The added Sierpinski triangle, Intrinsic metric, Code representation, Sierpinski triangle.

TEŞEKKÜR

Tüm çalışma dönemim boyunca her türlü ilgi, alaka ve desteği için çok değerli danışman hocam sayın Doç. Dr. Mustafa SALTAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tez yazım sürecinde maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme ve sevgili arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak bu tez çalışmasının büyük bir kısmını oluşturan 118F356 numaralı TÜBİTAK-1002 Hızlı destek projesindeki desteklerinden dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na özel teşekkürlerimi sunarım.

Aslıhan İklim ŞEN

Temmuz 2020

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmamın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Aslıhan İklim ŞEN

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xii
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER	4
2.1. Metrik Uzaylar	4
2.2. Hausdorff Metrik	5
2.3. Yinelemeli Fonksiyon Sistemleri	6
2.4. Fraktal Boyut	10
2.4.1. Moran denklemi	10
2.5. İçsel Metrik Uzaylar	12
3. Ekli Sierpinski Üçgeninin İnşası	17
3.1. Ekli Sierpinski Üçgeninin Kodlama Süreci	18
4. EKLI SIERPINSKI ÜZERİNDEKİ İÇSEL METRİĞİN İNŞASI .	24
4.1. 1.Durum	25

4.1.1. $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktasından geçen en kısa yollar	25
4.1.2. $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})$ doğru parçasından geçen en kısa yollar	31
4.1.3. $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ doğru parçasından geçen en kısa yollar	35
4.2. 2.Durum	42
4.2.1. $\tilde{S}_{\sigma 0} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktasından geçen en kısa yollar	42
4.2.2. $(\tilde{S}_{\sigma 0} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})$ doğru parçasından geçen en kısa yollar	44
4.2.3. $(\tilde{S}_{\sigma 0} \cap \tilde{S}_{\sigma a'_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma a'_k})$ doğru parçasından geçen en kısa yollar	46
5. EKLI SIERPINSKI ÜÇGENİ ÜZERİNDE BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLER VE TOPOLOJİK KOD KÜMELERİ	55
5.1. Ekli Sierpinski Üçgenin Bazı Geometrik Özellikleri.....	55
5.2. Ekli Sierpinski Üçgenin Bazı Açık ve Kapalı Kümelerin Kod Temsili ile Gösterimi	59
KAYNAKÇA.....	73
ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1. Sierpinski halısı	1
Şekil 1.2. Vicsek fraktalı	2
Şekil 1.3. Koch eğrisi	2
Şekil 2.1. Klasik Sierpinski üçgeni inşası	9
Şekil 2.2. Sierpinski üçgeni (sol) ve 3 küçük kopyasının birleşimi olarak ifade edilebilen Sierpinski üçgeni (sağ)	9
Şekil 2.3. Klasik Sierpinski üçgenin S_0, S_1 ve S_2 kod kümeleri	14
Şekil 2.4. Sırasıyla $(S_{\sigma a_k} \cap S_{\sigma c_k})(S_{\sigma b_k} \cap S_{\sigma c_k})$ kenarından ve $(S_{\sigma a_k} \cap S_{\sigma b_k})$ noktasından geçen en kısa yollar	16
Şekil 3.1. Ekli Sierpinski üçgeninin inşası	17
Şekil 3.2. Ekli Sierpinski üçgeninin kodlaması	19
Şekil 3.3. Ekli Sierpinski üçgeninin $\tilde{S}_\sigma$ alt üçgeninin kodlaması	19
Şekil 3.4. Ekli Sierpinski üçgeni üzerindeki üç kodlu noktaların bazıları .	22
Şekil 4.1. A ile B noktaları arasındaki en kısa uzaklıkları gösteren sırasıyla $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktasından geçen bazı en kısa yollar, $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})$ ve $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ doğru parçalarından geçen bazı en kısa yollar	25
Şekil 4.2. A ile B noktaları arasındaki $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktasından geçen en kısa yollardan biri	26
Şekil 4.3. A ile $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktaları arasındaki en kısa iki farklı yol	27
Şekil 4.4. B ile $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktaları arasındaki en kısa iki farklı yol	28
Şekil 4.5. A ile B noktaları arasındaki $\tilde{S}_1 \cap \tilde{S}_2$ noktasından geçen en kısa yollardan biri	30
Şekil 4.6. A ile B arasındaki $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})$ doğru parçasından geçen en kısa yollardan biri	31
Şekil 4.7. A ile B noktaları arasındaki $(\tilde{S}_1 \cap \tilde{S}_3)(\tilde{S}_2 \cap \tilde{S}_3)$ doğru parçasından geçen en kısa yollardan biri	35

Şekil 4.8. A ile B noktaları arasındaki $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ doğru parçasından geçen en kısa yollardan biri.....	36
Şekil 4.9. A ile B noktaları arasındaki $(\tilde{S}_1 \cap \tilde{S}_0)(\tilde{S}_2 \cap \tilde{S}_0)$ doğru parçasından geçen en kısa yollardan biri.....	41
Şekil 4.10. A ile B noktaları arasındaki en kısa uzaklıkları gösteren sırasıyla $\tilde{S}_{\sigma 0} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktasından geçen, $(\tilde{S}_{\sigma 0} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})$ ve $(\tilde{S}_{\sigma 0} \cap \tilde{S}_{\sigma a'_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma a'_k})$ doğru parçalarından geçen en kısa yollar	42
Şekil 4.11. A ile B noktaları arasındaki $\tilde{S}_{\sigma 0} \cap \tilde{S}_{\sigma 2}$ noktasından geçen en kısa yollardan biri	44
Şekil 4.12. A ile B noktaları arasındaki $(\tilde{S}_{\sigma 0} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})$ doğru parçasından geçen en kısa yollardan biri.....	45
Şekil 4.13. A ile B noktaları arasındaki $(\tilde{S}_{\sigma 0} \cap \tilde{S}_{\sigma 3})(\tilde{S}_{\sigma 2} \cap \tilde{S}_{\sigma 3})$ doğru parçasından geçen en kısa yollardan biri.....	46
Şekil 4.14. A ile B noktaları arasındaki $(\tilde{S}_{\sigma 0} \cap \tilde{S}_{\sigma a'_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma a'_k})$ doğru parçasından geçen en kısa yollardan biri.....	47
Şekil 4.15. A ile B noktaları arasındaki $(\tilde{S}_{\sigma 0} \cap \tilde{S}_{\sigma 1})(\tilde{S}_{\sigma 1} \cap \tilde{S}_{\sigma 2})$ doğru parçasından geçen en kısa yollardan biri.....	48
Şekil 4.16. A ile B noktaları arasındaki 1.durumda belirtilen noktalardan geçen bazı kısa yollar.....	54
Şekil 5.1. X noktasını sırasıyla A, B, C köşe noktalarına olan en kısa yolların bazıları	58
Şekil 5.2. $\sigma 000 \dots$ noktasını sırasıyla A, B, C köşe noktalarına olan en kısa yolların bazıları.....	59
Şekil 5.3. Sırasıyla P, Q, R merkezli $\frac{1}{2^{n-1}}$ yarıçaplı yuvar yüzeyleri ($n = 1, 2, 3$)	62
Şekil 5.4. P merkezli $\frac{1}{2^{n-1}}$ yarıçaplı kapalı yuvarları($n = 1, 2, 3$)	63
Şekil 5.5. O_σ merkezli $\frac{1}{2^{n+t+k}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{k+t}}$ yarıçaplı yuvar yüzeyleri.....	68
Şekil 5.6. O_σ merkezli ve sırasıyla $\frac{1}{2^{n+t+k}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{k+t}}$ yarıçaplı kapalı yuvarlar $n = 0, 1, 2, 3$	69

Şekil 5.7.	$0111\dots$ merkezli $\frac{1}{2^n}$ yarıçaplı yuvar yüzeyleri ($n = 1, 2, 3$)	70
Şekil 5.8.	$0111\dots$ merkezli $\frac{1}{2^n}$ yarıçaplı kapalı yuvarlar ($n = 1, 2, 3$)	71
Şekil 5.9.	$\sigma 01222\dots$ merkezli $\frac{1}{2^{n+t+k}}$ yarıçaplı yuvar yüzeyleri ($n = 0, 1, 2, 3$)	72
Şekil 5.10.	$\sigma 01222\dots$ merkezli $\frac{1}{2^{n+t+k}}$ yarıçaplı kapalı yuvarlar ($n = 0, 1, 2, 3$)	72



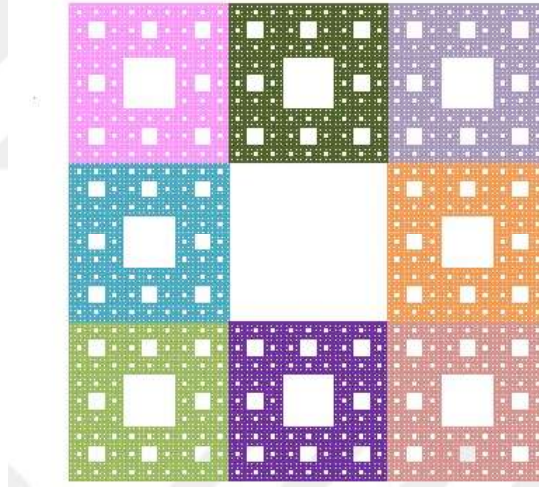
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

- $\mathcal{H}(X)$: X in boş kümeden farklı kompakt alt kümelerinin uzayı
YFS : Yinelemeli fonksiyon sistemi
 S : Sierpinski Üçgeni
 $\tilde{S}$: Ekli Sierpinski Üçgeni
 $SG(3)$: Mod-3 Sierpinski Üçgeni



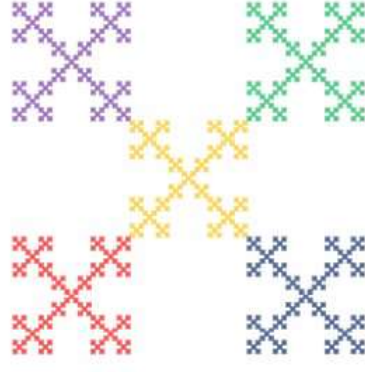
1. GİRİŞ

Fraktal geometri son yılların popüler araştırma konularından biridir. Özellikle doğa ile ilgili örnekleriyle karşımıza çıkmaktadır. Bu örnekler Öklid geometrisindeki doğru, kare, üçgen, daire gibi düzgün şekiller değildir. Bulutlar, dağlar, kıyı şeritleri, şelaleler, mağaraların içi, yıldırım, brokoli, eğrelti otu, kan damarları gibi bir çok değişik fraktal modelleri coğrafya, fizik, kimya, biyoloji ve tıp gibi bir çok farklı bilim dalında incelenmektedir. Bu fraktallerin ortak özellikleri kendine benzerliktir. Yani, bazı küçük parçalarında şeklin tamamı görülebilmektedir. Ayrıca her küçük parçasında şeklin kendisini gördüğümüz tam kendine benzer fraktaller matematikte dikkat çeken konularından biridir. Cantor kümesi, Sierpinski üçgeni, Sierpinski halısı, Menger süngeri, Koch eğrisi tam kendine benzer olan klasik fraktallerdir.



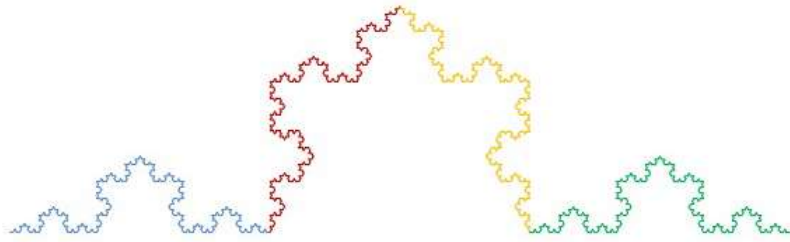
Şekil 1.1. *Sierpinski halısı*

1982’de Mandelbrot tarafından fraktal kavramı ilk kez kullanılabildi kadar bu kümeler farklı matematiksel problemlerin çözümünde model olarak tanımlanmıştır. Bu fraktalleri inşa etmenin L-sistemleri, yinelemeli fonksiyon sistemleri (YFS) ve escape-time algoritmaları gibi farklı yolları vardır. Özellikle YFS’nin teorik kısmı ilk olarak Hutchinson ve Barnsley tarafından verilmiştir [2]. Ayrıca, Fraktal boyut (kutu sayma boyut) kavramının teorik alt yapısı tanımlanmıştır ve bu kavram günümüzde düzgün olmayan nesnelerin sınıflandırılmasında kullanılmaktadır.



Şekil 1.2. *Vicsek fraktalı*

Son yılların ilginç çalışma alanlarından biri ise verilen bir kümenin yapısını yansıtan içsel metriği tanımlamaktır. Örneğin, karesel bir bölge üzerinde verilen farklı A ve B noktaları arasında sonsuz sayıda yol tanımlanabilir. Fakat bu iki nokta arasındaki en kısa yolun uzunluğu Öklid metriği ile elde edilir. Ama günlük hayatta her zaman bu metriği kullanmak mümkün değildir. Yani, A şehrindeki bir evden B şehrindeki bir eve araba ile gidebilmek için binaların içinden, dağların tepesinden gidilemeyeceğinden araçların geçebileceği mümkün yolların kullanılması gerekir. Kabul edilebilir yolların uzunluğunun infimumu bize bu yapı üzerindeki içsel metriği verir.



Şekil 1.3. *Koch eğrisi*

Fraktallerin üzerindeki noktalar ilişkili YFS ile kodlanabilirler. Böylece farklı fraktaller üzerindeki noktalar farklı kod temsillerine sahiptirler. Özellikle tam kendine benzer fraktal kümelerin kod kümeleri üzerindeki içsel metrikler ilginç formüller ile tanımlamaktadır. Literatürde [5-7],[9],[13],[24],[26] gibi çalışmalarda fraktaller üzerine içsel metriklerle ilgili araştırmalar olsada son zamanlara kadar fraktallerin noktalarının kod temsilleri kullanılarak inşa edilen içsel metriklerle ilgili yeterince çalışma yoktur. 2018'den itibaren bu konu üzerindeki araştırmalar artmaya başlamıştır.[21]'de Sierpinski üçgeninin kod kümesi üzerinde tanımladığı içsel metrik ayrıntılı olarak incelenmiştir. [19]'da Sierpinski üçgeninin noktalarının kod temsillerinin jeodeziklerinin sayısına göre sınıflandırılmasında bu metrikten yararlanılmıştır.

[22]'de bu içsel metrik formülü kullanılarak Sierpinski üçgenin bazı noktalarının kod temsilleriyle ifade edilmiştir. [23]'de ikizkenar dik ve çeşitkenar Sierpinski üçgeni üzerinde içsel metrik formülü inşa edilmiş ve bazı geometrik özellikleri bu formülleri kullanarak karşılaştırılmıştır.[20]'de içsel metrik formülü kullanılarak Sierpinski üçgeni üzerinde tanımlanan dinamik sistemin kaotikliği gösterilmiştir. [1]'de Sierpinski tetrahedron üzerinde içsel metrik formülü verilmekte ve bu metrik formülü kullanılarak Devaney anlamında kaotikliği gösterilmektedir. [16]'de kutu fraktal üzerinde ve [15]'de $SG(3)$ üzerinde içsel metrik formülleri ve bu fraktalın bazı geometrik özellikleri araştırılmaktadır. [12]'de ise Sierpinski pervanesi ve komşu Sierpinski üçgeni üzerinde içsel metrik formülü inşa edilmektedir.

Karmaşık fraktaller için kod metriğini tanımlamak her ne kadar zor olsada, farklı fraktaller üzerinde de içsel metriği tanımlamak bu yapının geometrik ve topolojik özelliklerini incelemek ve bunları karşılaştırmak için son derece önemlidir. Bu çalışmada farklı bir fraktal olan ekli Sierpinski üçgeni üzerinde içsel metrik tanımlanmıştır. Ekli Sierpinski üçgenin diğer fraktallerden en büyük farklı yinelemeli fonksiyon sistemindeki büzülme katsayılarının aynı olmamasıdır. Bu nedenle diğer fraktaller için tanımlanan içsel metriklerden ekli Sierpinski üçgeni için tanımlanan içsel metrik daha karmaşık bir hal almaktadır. Bunun için öncelikle gerekli olan tanım ve teoremler verildikten sonra olası her durum ayrı ayrı incelenip en son Teorem 4.7 olarak ifade edilecektir. Ardından tanımlanan içsel metrik yardımıyla bazı geometriksel özelliklere ve topolojik kod kümelerine yer verilecektir.

2. ÖN BİLGİLER

Ekli Sierpinski üçgenini inşa etmek için öncelikle bazı tanımlara, teoremlere ve kavramlara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu bölümde sırasıyla bu ifadelere yer verilecektir.

2.1. Metrik Uzaylar

Tanım 2.1. X boştan farklı bir küme olmak üzere $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu fonksiyona X üzerinde bir **metriktir** denir.

$$i) \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$ii) \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) = d(y, x)$$

$$iii) \forall x, y, z \in X \text{ için } d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

(X, d) ikilisine **metrik uzay** denir [2].

Tanım 2.2. (X, d) bir metrik uzay olmak üzere (x_n) , X uzayında bir dizi olsun. Eğer keyfi $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde $n \geq N_\epsilon$ için $d(x_n, x) < \epsilon$ olacak şekilde bir $N_\epsilon > 0$ doğal sayısı varsa (x_n) dizisine **yakınsak dizi** denir. Ayrıca (x_n) dizisi x noktasına yakınsıyor veya (x_n) dizisinin limiti x noktasıdır denir [2].

Tanım 2.3. (X, d) bir metrik uzayı ve X içinde bir (x_n) dizisi verilsin. Keyfi $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde $n, m \geq N_\epsilon$ için $d(x_n, x_m) < \epsilon$ olacak şekilde $N_\epsilon > 0$ doğal sayısı varsa (x_n) dizisine **Cauchy dizisi** denir [2].

Tanım 2.4. (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu metrik uzaya **tam metrik uzay** denir [2].

Tanım 2.5. (X, d) metrik uzay ve $S \subset X$ olsun. Eğer S içindeki her dizinin S de yakınsak bir alt dizisi varsa S alt kümesine X in **kompakt alt kümesi** denir [2].

Tanım 2.6. Bir X kümesi üzerinde $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu verilsin. $f(x^*) = x^*$ olacak şekilde bir x^* noktası var ise bu noktaya f fonksiyonun **sabit noktası** denir [11].

Tanım 2.7. (X, d) metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde bir $0 \leq k < 1$ gerçel sayısı var ise f fonksiyonuna bir **büzülme dönüşümü**, k sayısına da **büzülme katsayısı** denir [2].

Tanım 2.8. (X, d) bir metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) = kd(x, y)$$

olacak şekilde bir $0 \leq k < 1$ gerçel sayısı var ise f fonksiyonuna bir **benzerlik dönüşümü** denir [2].

Teorem 2.9. (Sabit Nokta Teoremi) (X, d) bir tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda $f(x^*) = x^*$ olacak şekilde bir $x^* \in X$ sabit noktası vardır ve tektir. Keyfi $x_0 \in X$ için

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), \dots, f^n(x_0), \dots$$

dizisi x^* sabit noktasına yakınsar [2].

2.2. Hausdorff Metrik

(X, d) bir metrik uzay olmak üzere, X in boş kümeden farklı kompakt alt kümelerinin uzayını $\mathcal{H}(X)$ ile gösterilsin.

$$\mathcal{H}(X) = \{A | A \subset X, A \neq \emptyset \text{ ve } A \text{ kompakt}\}$$

olsun. Böylece $\mathcal{H}(X)$ kümesi üzerinde bir metrik aşağıda ifade edilen kümeler arasındaki uzaklıklar yardımıyla tanımlanabilir. $x \in X$ ve $A \in \mathcal{H}(X)$ olmak üzere bir x noktasının A kümesine uzaklığı

$$d(x, A) = \min\{d(x, y) | y \in A\}$$

olarak tanımlanır. Bu tanım yardımıyla X in kompakt alt kümeleri arasındaki uzaklık için $A, B \in \mathcal{H}(X)$ olsun. Bu durumda A kümesinin B kümesine olan uzaklığı

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \max\{d(x, B) | x \in A\} \\ &= \max\{\min\{d(x, y) | y \in B\} | x \in A\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. $\mathcal{H}(X)$ kümesinin iki elemanı arasındaki uzaklık olarak tanımlanan bu fonksiyon $\mathcal{H}(X)$ üzerinde bir metrik değildir. Çünkü $d(A, B) = d(B, A)$ simetri özelliğini sağlamaz. Bu durumu düzeltmek için aşağıdaki tanım yapılarak $\mathcal{H}(X)$ üzerinde metrik özelliklerini sağlayan fonksiyon yazılmış olur.

Tanım 2.10. (X, d) bir tam metrik uzay ve $A, B \in \mathcal{H}(X)$ olmak üzere

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$$

değerine A ile B kümeleri arasındaki **Hausdorff uzaklığı** denir. Böylece $(\mathcal{H}(X), h)$ bir metrik uzaydır, denir [2].

Teorem 2.11. (X, d) tam bir metrik uzay ise $(\mathcal{H}(X), h)$ de tam metrik uzaydır [2].

Teorem 2.12. (Cantor Arakesit Teoremi) N_i ($i \in \mathbb{N}$), $\mathbb{R}^n$ de boş olmayan ve kompakt kümelerden oluşan bir dizi olsun. Eğer her $(i \in \mathbb{N})$ için $N_i \supseteq N_{i+1}$ ise

$$\bigcap_{(i \in \mathbb{N})} N_i \neq \emptyset$$

şeklinde dir. Bu kompakt kümelerin çapları $i \rightarrow \infty$ için sıfıra gidiyor ise bu kesişim kümesi tek noktadan oluşur.

2.3. Yinelemeli Fonksiyon Sistemleri

(X, d) bir metrik uzay olmak üzere $f : X \rightarrow X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda bir $A \in \mathcal{H}(X)$ için

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

tanımlansın. f fonksiyonun sürekliliğinden bu küme $\mathcal{H}(X)$ kümesinin bir elemanıdır. Böylece (X, d) metrik uzayı üzerinde verilen bir f büzülme dönüşümü yardımıyla $(\mathcal{H}(X), h)$ metrik uzayı üzerinde bir büzülme dönüşümü tanımlanabilir.

Teorem 2.13. (X, d) bir metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ büzülme katsayısı k olan bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda $A \in \mathcal{H}(X)$ için

$$f : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$$

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

olarak tanımlanan f dönüşümü de $(\mathcal{H}(X), h)$ uzayında büzülme katsayısı k olan bir büzülme dönüşümüdür [2].

Teorem 2.14. (X, d) bir metrik uzay olmak üzere $\{f_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ dönüşümleri $(\mathcal{H}(X), h)$ uzayında büzülme katsayıları sırasıyla k_i olan büzülme dönüşümleri olsun. Bu durumda $A \in \mathcal{H}(X)$ için

$$F : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$$

$$F(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \dots \cup f_n(A) = \bigcup_{i=1}^n f_i(A)$$

olarak tanımlanan F dönüşümü büzülme katsayısı

$$k = \max\{k_i | i = 1, 2, \dots, n\}$$

olan bir büzülme dönüşümüdür [2].

Tanım 2.15. (X, d) bir metrik uzay olmak üzere $\{f_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ dönüşümleri büzülme katsayıları sırasıyla $k_1, k_2, \dots, k_n$ olan büzülme dönüşümleri olsunlar. Bu durumda $\{X; f_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ sistemine **yinelemeli fonksiyon sistemi** denir ve kısaca **YFS** ile gösterilir [2].

Teorem 2.16. (X, d) bir tam metrik uzay ve $\{X; f_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ yinelemeli fonksiyon sistemi ve

$$F : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$$

$$F(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \dots \cup f_n(A) = \bigcup_{i=1}^n f_i(A)$$

olarak tanımlanan F dönüşümü verilsin. Bu durumda F dönüşümünün

$$A = F(A) = \bigcup_{i=1}^n f_i(A)$$

olacak şekilde tek bir $A \in \mathcal{H}(X)$ sabit noktası vardır. Ayrıca bu sabit nokta herhangi bir $B \in \mathcal{H}(X)$ için,

$$B, F(B), F^2(B), \dots,$$

dizisinin limiti olarak

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(B)$$

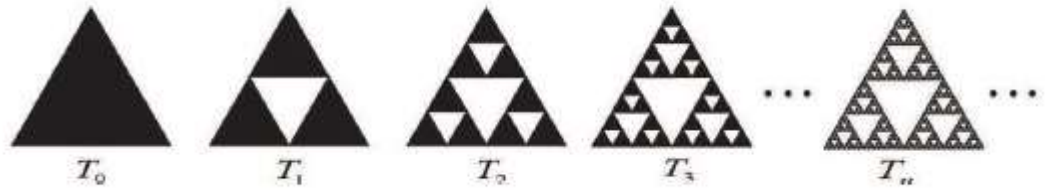
şeklinde elde edilir [2].

Tanım 2.17. $\{X; f_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ şeklindeki bir YFS'nin sabit nokta teoremi ile yukarıdaki gibi tek türlü belirlediği kompakt kümeye yani $F(A) = \mathcal{A} \in \mathcal{H}(X)$ sabit noktasına ilgili yinelemeli fonksiyon sisteminin **atraktörü** denir [2].

Sonuç olarak bir tam metrik uzay ve üzerinde sonlu tane büzülme dönüşümü verildiğinde, bu büzülme dönüşümlerinin sabit noktası atraktörü vermektedir.

Örnek 2.18. (Sierpinski Üçgeni)

Sierpinski üçgeni (S), 1915 yılında adını aldığı Polonyalı Matematikçi Waclaw Sierpinski tarafından farklı bir matematiksel probleme çözüm olarak tanımlanmış ve Mandelbrot tarafından fraktal kavramı kullanıldıktan sonra klasik fraktallerin en tipik örneklerinden biri haline gelmiştir. Başlangıç olarak kenar uzunluğu bir birim olan eşkenar üçgen alınır. 1. adımda her bir kenar iki eş parçaya bölünür ve bu kenarlar birleştirilip 4 tane eşkenar üçgen elde edilir. Ortadaki eşkenar üçgenin içi atılır. İkinci ve diğer adımlarda da, kalan üçgenler için aynı süreç gerçekleştirilir. Her bir adımda elde edilen üçgenlerin kesişimi klasik Sierpinski üçgeni olarak adlandırılır.

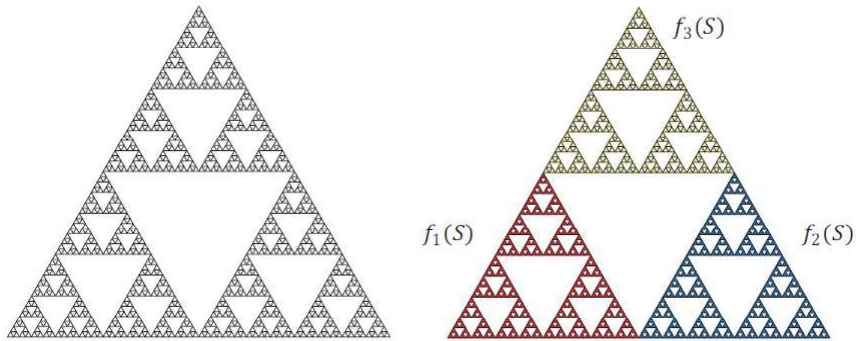


Şekil 2.1. *Klasik Sierpinski üçgeni inşası*

$(\mathbb{R}^2, d_{std})$ tam metrik uzayı üzerinde tanımlı $f_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ($i = 1, 2, 3$) olmak üzere,

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right) \\ f_2(x, y) &= \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2} \right) \\ f_3(x, y) &= \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \end{aligned}$$

büzülme dönüşümlerinden oluşan $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3\}$ yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörüdür (Bkz. Şekil 2.2).



Şekil 2.2. *Sierpinski üçgeni (sol) ve 3 küçük kopyasının birleşimi olarak ifade edilebilen Sierpinski üçgeni (sağ)*

Burada önemli olan bir nokta, ilgili sabit noktayı bulmak için herhangi bir kompakt kümeden başlayıp F dönüşümü yardımıyla bu kompakt kümenin iterasyonları ile limit durumunda elde edilecek küme tekliği ve varlığı bilinen sabit nokta olacaktır.

Fraktal geometrinin klasik modellerinden olan Cantor kümesi, Menger süngeri,

Sierpinski halısı vb. kümeler bir yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olarak ifade edilebilmektedir.

2.4. Fraktal Boyut

Tanım 2.19. (X, d) bir metrik uzay ve $A \in \mathcal{H}(X)$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $N(A, \varepsilon)$, A yı örtmek için gerekli olan ε uzunluklu kapalı kutuların minimum sayısı olmak üzere eğer;

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(N(A, \varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)} \right\}$$

limiti varsa bu limit değerine A nın **fraktal boyutu** denir [2].

Bazı özel durumlarda fraktalların boyutlarını daha kolay hesaplamak için aşağıda tanımlanan Moran denklemi kullanılır.

2.4.1. Moran denklemi

Tanım 2.20. $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$ yinelemeli fonksiyon sistemi verilsin.

- $\forall i = \{1, 2, \dots, N\}$ için $f_i(U) \subseteq U$
- $\forall i \neq j$ için $f_i(U) \cap f_j(U) = \emptyset$

koşullarını sağlayan bir $U \subseteq X$ açık kümesi varsa ilgili yinelemeli fonksiyon sistemi **açık küme koşulunu sağlar** denir.

Fraktal boyutu veren $D = \frac{\log(N)}{\log 1/k}$ (Burada k büzülme katsayısıdır) tüm parçaları aynı büzülme katsayısına sahip fraktallarda uygulanabilir. Fakat üzerinde çalışılan fraktal parçaları farklı büzülme katsayısına sahip ve YFS leri açık küme koşulunu sağlayan bir fraktal olsun. Büzülme katsayıları $k_1, k_2, k_3, \dots, k_N$ olan N parçaya bölünsün. Bu durumda fraktal boyut formülünü genelleştirmek için her bir büzülme katsayısı diğerlerinden ayırt edilecek şekilde yazılmalıdır.

$$D = \frac{\log(N)}{\log 1/k}$$

ifadesi

$$D \log(1/k) = \log(N)$$

$$(1/k)^D = N$$

$$1 = N.k^D$$

şeklinde yazılabilir. Böylece fraktal her bölündüğünde yeni her kopya için k yı veren

$$1 = k^D + k^D + k^D + \dots + k^D$$

ifadesini elde ederiz. Her bir k büzülme katsayısı için k_i yi alırsak fraktal boyut

$$1 = k_1^D + k_2^D + k_3^D + \dots + k_N^D$$

ifadesi sağlanır. Bu ifadeye **Moran denklemi** denir. Her k_i , $0 < k_i < 1$ olduğu sürece, Moran Denkleminin çözümü tektir ve bu çözüm fraktal boyuttur.

Çözümün tekliği için: $0 < k_1 < 1 \dots 0 < k_N < 1$ için

$$1 = k_1^D + k_2^D + k_3^D + \dots + k_N^D$$

ifadesinin çözümünün tek olduğunu göstermek için

$$f(D) = k_1^D + k_2^D + k_3^D + \dots + k_N^D$$

fonksiyonunu ele alalım.

$$f(0) = k_1^0 + k_2^0 + k_3^0 + \dots + k_N^0 = 1 + \dots + 1 = N$$

olduğu görülür. $D \rightarrow \infty$ iken $f(D) \rightarrow 0$ olur. Çünkü her $0 < k_i < 1$ için $D \rightarrow \infty$ iken $k_i^D \rightarrow 0$ olur. Ayrıca $f(D)$ sürekli ve azalan olduğu görülür. Çünkü;

$$f'(D) = k_1^D \ln(k_1) + k_2^D \ln(k_2) + k_3^D \ln(k_3) + \dots + k_N^D \ln(k_N)$$

dir. Böylece birebir bir fonksiyon olup $y = 1$ doğrusunu tek noktada keser.

$0 < k_i < 1$ olduğundan $\ln(k_i) < 0$ ve $f'(D) < 0$ dir.

Teorem 2.21. $\{X; f_1, f_2, \dots, f_n\}$ yinelemeli fonksiyon sistemi açık küme koşulunu sağlasın. $f_i : X \rightarrow X$ ($i = 1, 2, \dots, n$) dönüşümleri büzülme katsayıları k_i olan benzerlik dönüşümleri ve A kümesi de bu sistemin atraktörü olsun. Bu durumda A nın fraktal boyutu

$$\sum_{i=1}^n k_i^D = 1$$

denkleminin tek gerçel çözümü olan D sayıdır.

Örnek 2.22. Büzülme katsayısı $1/2$ olan 3 büzülme dönüşümünün belirlediği yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olan Sierpinski Üçgeni açık küme koşulunu sağladığından,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^D + \left(\frac{1}{2}\right)^D + \left(\frac{1}{2}\right)^D = 1$$

olup Sierpinski Üçgenin fraktal boyutu $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ olarak Moran denkleminde kolayca hesaplanır.

2.5. İçsel Metrik Uzaylar

Fraktallar üzerindeki içsel metriklerle ilgili tanımlar verilmiştir (Daha detaylı bilgi için Bkz.[4]).

Tanım 2.23. X boştan farklı bir küme olsun. $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ ve $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$ koşulunu sağlayan sürekli dönüşümü x **ten y ye bir yol** olarak adlandırılır.

Tanım 2.24. (X, d) bir metrik uzay ve $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ ve X de bir yol olsun. $[0, 1]$ aralığının bir $0 = c_0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n = 1$ bölüntüsü için $\sum_{i=1}^n d(\alpha(c_{i-1}), \alpha(c_i))$ toplamı verilsin. Bu toplamın $[0, 1]$ aralığındaki tüm bölüntüleri üzerinden supremum değerine α nın uzunluğu denir ve $L_d(\alpha)$ olarak gösterilir .

Tanım 2.25. (X, d) bir metrik uzay olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(x, y) = \inf \{L_d(\alpha) | \alpha : [0, 1] \rightarrow X, \alpha(0) = x, \alpha(1) = y\}$$

eşitliğini sağlıyorsa (X, d) uzayına **içsel metrik uzay** denir. Eğer her $x, y \in X$ için x ile y yi birleştiren ve $d(x, y) = L_d(\alpha)$ koşunu sağlayan bir α yolu var ise (X, d) uzayına **kesin içsel metrik uzay** denir.

Tanım 2.26. (X, d) bir metrik uzay ve $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ bir yol olsun. Eğer her $t \in [0, 1]$ için

$$L(\alpha, t) = t.L_d(\alpha)$$

eşitliği sağlanıyorsa α ya **doğal yol** denir.

Tanım 2.27. Eğer bir doğal yolun uzunluğu başlangıç ve bitiş noktaları arasındaki uzaklığa eşit ise bu yola **jeodezik** denir.

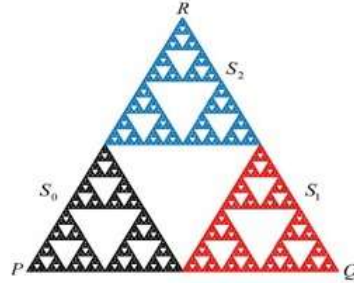
Örnek 2.28. $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ kümesi içsel metrik uzaydır ancak kesin içsel metrik uzay değildir. $(-1, 0)$ ve $(1, 0)$ noktalarının içsel metriğe göre aralarındaki uzaklık 2 dir. Ancak uzunluğu 2 olan bir yol bulunmamaktadır. Bu nedenle kesin içsel metrik uzay değildir .

Örnek 2.29. (Sierpinski Üçgeni Üzerindeki İçsel Metrik)

Örnek 2.18. de, Sierpinski üçgeninin yinelemeli fonksiyon sisteminin büzülmeleri verilmektedir. Sierpinski Üçgeni üzerinde içsel metrik inşası için öncelikle üçgen üzerinde alınan bir noktanın kod temsilinin nasıl yapıldığı ifade edililecektir. Bunun için alt sol üçgeni S_0 , alt sağ üçgeni S_1 ve üstteki üçgeni S_2 olarak gösterilsin. Bu durumda $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ olur (Bkz. Şekil 2.3). Benzer argümanları kullanarak Sierpinski üçgeninin $S_{a_1}, S_{a_1a_2}, S_{a_1a_2a_3}, \dots, S_{a_1a_2a_3\dots a_n}, \dots$ alt üçgenleri için $S_{a_1} \supset S_{a_1a_2} \supset S_{a_1a_2a_3} \supset \dots \supset S_{a_1a_2a_3\dots a_n} \supset \dots$ olur. Cantor Arakesit teoreminden dolayı;

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_{a_1a_2a_3\dots a_n} = \{A\}$$

olacak şekilde $A \in S$ noktası vardır. A noktasının kod temsili $a_n \in \{0, 1, 2\}$ olmak üzere $a_1a_2a_3 \dots a_n \dots$ ile belirtilir. Sierpinski üçgeni üzerinde bir noktanın ya bir ya da iki farklı kod gösterimi vardır. Bunun nedeni ise aynı seviyede kesişen iki üçgen olmasıdır. Yani; $i, j = 0, 1, 2$ ve $i \neq j$ için $f_i(S) \cap f_j(S)$ tek elemanlı olduğundan Cantor Ara Kesit Teoremi gereğince bu noktanın birbirinden farklı iki kod temsili vardır. Eğer S üzerindeki bir nokta aynı seviyedeki iki alt üçgenin arakesiti değilse bu noktanın bir tek kod temsili vardır.



Şekil 2.3. Klasik Sierpinski üçgenin S_0, S_1 ve S_2 kod kümeleri

$f_0(S) = S_0, f_1(S) = S_1$ ve $f_2(S) = S_2$ olarak ifade edilirse iki kod temsiline sahip noktalar, $s_i \in \{0, 1, 2\}$ için $\sigma = s_1 s_2 \dots s_{n-1}$ olmak üzere aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$\sigma 0111 \dots \equiv \sigma 1000 \dots$$

$$\sigma 1222 \dots \equiv \sigma 2111 \dots$$

$$\sigma 0222 \dots \equiv \sigma 2000 \dots$$

Diğer taraftan bu fraktal $\sigma 000 \dots, \sigma 111 \dots, \sigma 222, \dots, \sigma 020202 \dots$ veya $\sigma 1202012021 \dots$ gibi tekrarsız formlar tek kod temsiline noktalara sahiptir. Sierpinski üçgeninin kod kümeleri $s_i \in \{0, 1, 2\}$ için $\sigma = s_1 s_2 \dots s_{n-1}$ olmak üzere

$$S_{\sigma a_n} = \{\sigma a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots : a_i \in \{0, 1, 2\}\}$$

olarak ifade edilir.

Fraktallerin yapısından dolayı içsel metrikler bu kümeler üzerinde ilginç kod formülleri ortaya çıkarmaktadır. Bu kümenin noktalarının kod temsilleri kullanılarak açık olarak formüle edilen içsel metrik, [22]'de aşağıdaki gibi formüle edilmiştir.

Teorem 2.30. $i = 1, 2, 3, \dots, k-1$ için $a_i = b_i$ ve $a_k \neq b_k$ ($a_i, b_i \in \{0, 1, 2\}$) olmak üzere $a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots$ ve $b_1 b_2 \dots b_{k-1} b_k b_{k+1} \dots$ Sierpinski üçgeninin sırasıyla A ve B noktalarının kod temsilleri olsun. $a_k \neq c_k \neq b_k$, $c_k \in \{0, 1, 2\}$ ve,

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & a_i = b_k \\ 1, & a_i \neq b_k \end{cases}$$

$$\beta_i = \begin{cases} 0, & b_i = a_k \\ 1, & b_i \neq a_k \end{cases}$$

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & a_i = c_k \\ 1, & a_i \neq c_k \end{cases}$$

$$\delta_i = \begin{cases} 0, & b_i = c_k \\ 1, & b_i \neq c_k \end{cases}$$

olmak üzere, S üzerindeki içsel metrik;

$$d(A, B) = \min \left\{ \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i}, \frac{1}{2^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\gamma_i + \delta_i}{2^i} \right\}$$

şeklinde ifade edilir. $\sigma = a_1 a_2 \dots a_{k-1}$ olmak üzere,

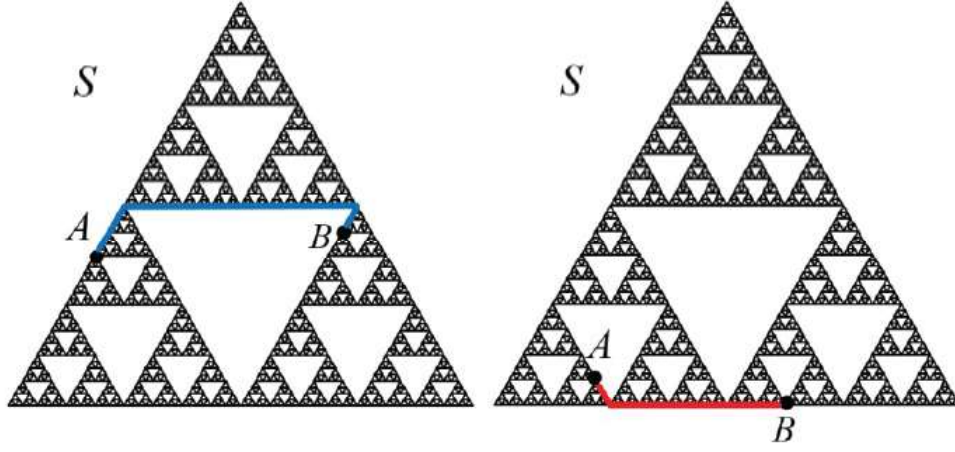
$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i}$$

değeri $S_{\sigma a_k} \cap S_{\sigma b_k}$ noktasından geçen en kısa yolun uzunluğu,

$$\frac{1}{2^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\gamma_i + \delta_i}{2^i}$$

değeri ise $S_{\sigma c_k}$ alt üçgeninin $(S_{\sigma a_k} \cap S_{\sigma c_k})(S_{\sigma b_k} \cap S_{\sigma c_k})$ kenarından geçen en kısa yolların uzunluğunu ifade etmektedir. Burada $\frac{1}{2^k}$ değeri ise $(S_{\sigma a_k} \cap S_{\sigma c_k})(S_{\sigma b_k} \cap S_{\sigma c_k})$ kenarının uzunluğudur.

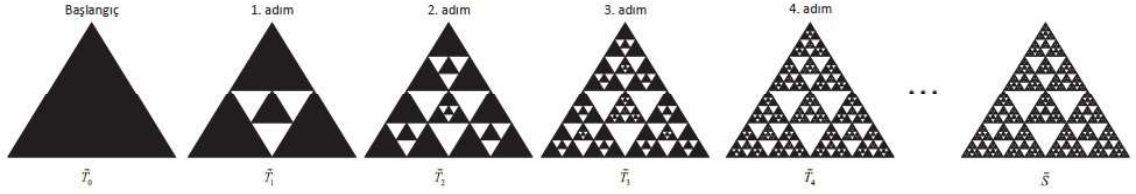
Bu teorem yardımıyla Sierpinski üçgeninin bir çok geometrik özelliğini ispatlamak daha basit hale gelmektedir. Ayrıca Sierpinski üçgenin jeodezikleri sınıflandırılmıştır [23].



Şekil 2.4. *Sırasıyla $(S_{\sigma a_k} \cap S_{\sigma c_k})(S_{\sigma b_k} \cap S_{\sigma c_k})$ kenarından ve $(S_{\sigma a_k} \cap S_{\sigma b_k})$ noktasından geçen en kısa yollar*

3. Ekli Sierpinski Üçgeninin İnşası

Ekli Sierpinski üçgenin inşası Sierpinski üçgeninin inşasına benzerdir. Sierpinski üçgeninin inşasında ilk adımda orta kısma bir üçgen daha eklenmesi ve kalan üçgenler için bu sürecin tekrar edilmesi ile oluşan bir fraktaldır.



Şekil 3.1. Ekli Sierpinski üçgeninin inşası

Yani; Şekil 3.1’de görüldüğü gibi, başlangıçta $\tilde{T}_0$ ile adlandırılan içi dolu ve kenarları 1 br olan eşkenar üçgen alınır. Birinci adım için kenarların orta noktaları birleştirilir ve ortada oluşan eşkenar üçgenin içi atılır. Atılan boşluğa, Şekil 3.1’de görüldüğü gibi, en baştaki üçgenin dörtte biri oranında küçültülmüş hali eklenir ve yeni oluşan yapı $\tilde{T}_1$ ile adlandırılır. İkinci adım için oluşan dört üçgene ilk adım uygulanır ve yeni oluşan yapı $\tilde{T}_2$ ile adlandırılır. Bu adımlara devam edilerek oluşan şekil ekli Sierpinski üçgeni olarak tanımlanır ve $\tilde{S}$ ile gösterilir. Yani,

$$\tilde{S} = \bigcap_{i=0}^{\infty} \tilde{T}_i$$

dir.

Yukarıda tanımlanan ekli Sierpinski inşasına ek olarak diğer bir yol ise yinelemeli fonksiyon sistemiyle ekli Sierpinski Üçgenini elde etmektir. Yinelemeli fonksiyon sistemlerinin Bölüm 2’de atraktörü ekli Sierpinski üçgeni olan YFS ;

$$\begin{aligned} f_0(x, y) &= \left(\frac{x}{4} + \frac{3}{8}, \frac{y}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \\ f_1(x, y) &= \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right) \\ f_2(x, y) &= \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2} \right) \\ f_3(x, y) &= \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda sırasıyla $1/4, 1/2, 1/2$ ve $1/2$ büzülme katsayısına sahip $\{\tilde{S}; f_0, f_1, f_2, f_3\}$

yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü ekli Sierpinski üçgenidir. Yani;

$$\tilde{S} = \bigcup_{i=0}^3 f_i(\tilde{S})$$

olur. Ekli Sierpinski üçgenin ilgili YFS si açık küme koşulunu sağladığından fraktal boyutu için Moran denklemi kullanılarak hesap yapılabilir. Bunu için r_i ler büzülme katsayıları olmak üzere;

$$\sum_{i=0}^3 r_i^s = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} = 1$$

olacak şekilde bu denklemdeki s hesaplanırsa ekli Sierpinski üçgenin fraktal boyutu

$$s = \frac{\ln\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)}{\ln 2} \cong 1.723$$

olarak bulunur.

3.1. Ekli Sierpinski Üçgeninin Kodlama Süreci

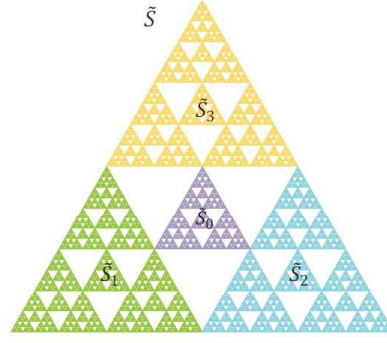
Bu bölümde, ekli Sierpinski üçgeni üzerindeki bir noktanın kod temsilinin nasıl yapıldığı irdelenip bu kod gösterimi yardımıyla kod kümelerinin nasıl oluştuğu gösterilecektir. Ekli Sierpinski üçgenini sol alt üçgeni $\tilde{S}_1$ (yeşil renk) ile, sağ alt üçgeni $\tilde{S}_2$ (mavi renk) ile, üst üçgeni $\tilde{S}_3$ (sarı renk) ile, ortadaki üçgen ise $\tilde{S}_0$ (mor renk) ile belirtilsin (Bkz. Şekil 3.2). Bu kodlamalar yardımıyla ekli Sierpinski üçgeni

$$\tilde{S} = \tilde{S}_0 \cup \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2 \cup \tilde{S}_3$$

olarak ifade edilir.

Benzer şekilde, $a_1 \in \{0, 1, 2, 3\}$ olmak üzere ekli Sierpinski üçgeninin $\tilde{S}_{a_1}$ alt üçgeninin sol alt üçgeni $\tilde{S}_{a_10}$ ile, sağ alt üçgeni $\tilde{S}_{a_12}$ ile, üst üçgeni $\tilde{S}_{a_13}$ ile, ortadaki üçgen ise $\tilde{S}_{a_10}$ ile belirtilsin. Bu kodlamalar yardımıyla ekli Sierpinski üçgeninin $\tilde{S}_{a_1}$ alt üçgeni;

$$\tilde{S}_{a_1} = \tilde{S}_{a_10} \cup \tilde{S}_{a_11} \cup \tilde{S}_{a_12} \cup \tilde{S}_{a_13}$$



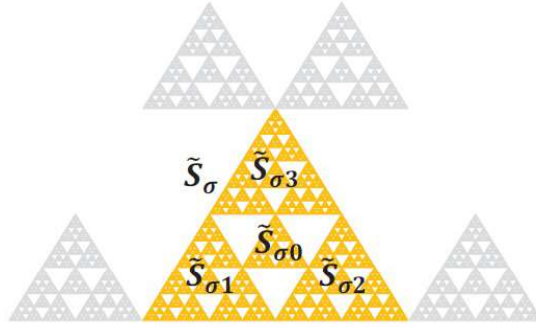
Şekil 3.2. Ekli Sierpinski üçgeninin kodlaması

olarak elde edilir.

$i = 0, 1, 2, \dots, k-1$ için $a_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ve $\sigma = a_1 a_2 \dots a_{k-1}$ olsun. Genel olarak ekli Sierpinski üçgeninin $\tilde{S}_\sigma$ alt üçgeninin sol alt üçgeni $\tilde{S}_{\sigma 1}$ ile, sağ alt üçgeni $\tilde{S}_{\sigma 2}$ ile, üst üçgeni $\tilde{S}_{\sigma 3}$ ile, ortadaki üçgen ise $\tilde{S}_{\sigma 0}$ ile belirtilsin. Bu kodlamalar yardımıyla ekli Sierpinski üçgeninin $\tilde{S}_\sigma$ alt üçgeni;

$$\tilde{S}_\sigma = \tilde{S}_{\sigma 0} \cup \tilde{S}_{\sigma 1} \cup \tilde{S}_{\sigma 2} \cup \tilde{S}_{\sigma 3}$$

olur (Bkz. Şekil 3.3).



Şekil 3.3. Ekli Sierpinski üçgeninin $\tilde{S}_\sigma$ alt üçgeninin kodlaması

Bu inşadan görüldüğü gibi, ekli Sierpinski üçgeninin $\tilde{S}_{a_1}, \tilde{S}_{a_1 a_2}, \tilde{S}_{a_1 a_2 a_3}, \dots, \tilde{S}_{a_1 a_2 a_3 \dots a_k}, \dots$ alt üçgenleri için $\tilde{S}_{a_1} \supset \tilde{S}_{a_1 a_2} \supset \tilde{S}_{a_1 a_2 a_3} \supset \dots \supset \tilde{S}_{a_1 a_2 a_3 \dots a_k} \supset \dots$ olur. Cantor Arakesit teoreminden dolayı;

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \tilde{S}_{a_1 a_2 a_3 \dots a_k} = \{A\}$$

olacak şekilde $A \in \tilde{S}$ noktası vardır. A noktasının kod temsili $a_1 a_2 a_3 \dots a_k \dots$ ile belirtilir.

Ekli Sierpinski üçgeni üzerinde alınan bir nokta tek kodlu, iki kodlu veya üç kodlu gösterime sahiptir. Ekli Sierpinski'nin klasik Sierpinski'den bir farkıda burada üç kodlu gösterime sahip noktalar varken klasik Sierpinski'de en fazla iki kod gösterimine sahip noktalar vardır. Noktaların kaç farklı kod gösterimine sahip olduğunu söylemek için noktanın ait olduğu aynı seviyedeki alt üçgenlerin kesişim sayısına bakılması gerekir. Bu üçgenlerin kesişim noktaları ileride içsel metriğin tanımlanmasında büyük rol alacağı için bu kodlamalar çok önemli yere sahiptir.

Yardımcı Teorem 3.1. *Şimdi, $\tilde{S}$ üzerindeki bir noktanın ya bir tek kod temsili ya iki kod temsili ya da üç kod temsili vardır.*

Kanıt. Öncelikle bir noktanın üç farklı kod temsili olduğu gösterilsin.

i) A noktası aynı seviyedeki $\tilde{S}_\sigma$ alt üçgenlerinin kesişim noktası olsun. Yani $\sigma = a_1 a_2 \dots a_{k-1}$ ve $a_k \in \{1, 2, 3\}$ olmak üzere

$$\tilde{S}_{\sigma 0} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k} = \{A\}$$

olsun.

- $a_k = 1$ olsun. Bu durumda

$$\tilde{S}_{\sigma 0} \cap \tilde{S}_{\sigma 1} = \tilde{S}_{\sigma 0} \cap (\tilde{S}_{\sigma 12} \cap \tilde{S}_{\sigma 13}) = \{A\}$$

olduğu gözönüne alınırsa,

$$\tilde{S}_{\sigma 0}, \tilde{S}_{\sigma 01}, \tilde{S}_{\sigma 011}, \dots, \tilde{S}_{\sigma 011\dots 1}, \dots$$

$$\tilde{S}_{\sigma 1}, \tilde{S}_{\sigma 13}, \tilde{S}_{\sigma 132}, \dots, \tilde{S}_{\sigma 1322\dots 2}, \dots$$

$$\tilde{S}_{\sigma 1}, \tilde{S}_{\sigma 12}, \tilde{S}_{\sigma 123}, \dots, \tilde{S}_{\sigma 1233\dots 3}, \dots$$

Cantor arakesit teoremi gereğince içiçe geçmiş küme dizilerinin belirttiği nokta A dır. Yani, A noktasının kod temsilleri sırasıyla $\sigma 0111\dots$, $\sigma 13222\dots$ ve $\sigma 12333\dots$ olur. $A = V_\sigma$ olduğu görülür (Bkz. Şekil 3.4).

- $a_k = 2$ olsun.

$$\tilde{S}_{\sigma 0} \cap \tilde{S}_{\sigma 2} = \tilde{S}_{\sigma 0} \cap (\tilde{S}_{\sigma 21} \cap \tilde{S}_{\sigma 23}) = \{A\}$$

olduğu gözönüne alınırsa,

$$\tilde{S}_{\sigma 0}, \tilde{S}_{\sigma 02}, \tilde{S}_{\sigma 022}, \dots, \tilde{S}_{\sigma 022\dots 2}, \dots$$

$$\tilde{S}_{\sigma 2}, \tilde{S}_{\sigma 21}, \tilde{S}_{\sigma 213}, \dots, \tilde{S}_{\sigma 2133\dots 3}, \dots$$

$$\tilde{S}_{\sigma 2}, \tilde{S}_{\sigma 23}, \tilde{S}_{\sigma 231}, \dots, \tilde{S}_{\sigma 2311\dots 1}, \dots$$

Cantor arakesit teoremi gereğince içiçe geçmiş küme dizilerinin belirttiği nokta A dır. Yani, A noktasının kod temsilleri sırasıyla $\sigma 0222\dots$, $\sigma 21333\dots$ ve $\sigma 23111\dots$ olur. $A = W_\sigma$ olduğu görülür (Bkz. Şekil 3.4).

- $a_k = 3$ olsun.

$$\tilde{S}_{\sigma 0} \cap \tilde{S}_{\sigma 3} = \tilde{S}_{\sigma 0} \cap (\tilde{S}_{\sigma 31} \cap \tilde{S}_{\sigma 32}) = \{A\}$$

olduğu gözönüne alınırsa,

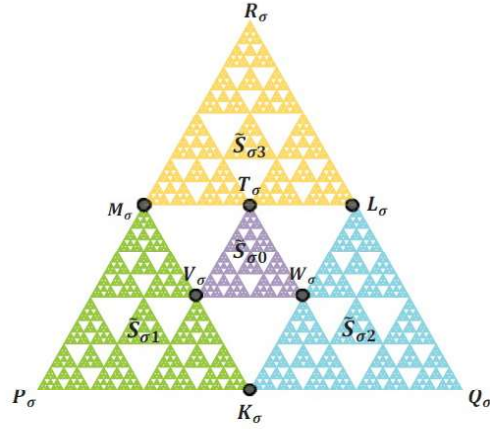
$$\tilde{S}_{\sigma 0}, \tilde{S}_{\sigma 03}, \tilde{S}_{\sigma 033}, \dots, \tilde{S}_{\sigma 033\dots 3}, \dots$$

$$\tilde{S}_{\sigma 3}, \tilde{S}_{\sigma 31}, \tilde{S}_{\sigma 312}, \dots, \tilde{S}_{\sigma 3122\dots 2}, \dots$$

$$\tilde{S}_{\sigma 3}, \tilde{S}_{\sigma 32}, \tilde{S}_{\sigma 321}, \dots, \tilde{S}_{\sigma 3211\dots 1}, \dots$$

Cantor arakesit teoremi gereğince içiçe geçmiş küme dizilerinin belirttiği nokta A dır. Yani, A noktasının kod temsilleri sırasıyla $\sigma 0333\dots$, $\sigma 31222\dots$ ve $\sigma 32111\dots$ olur. $A = T_\sigma$ olduğu görülür (Bkz. Şekil 3.4). Böylece $\tilde{S}_{\sigma 0}$ a ait T_σ , V_σ ve W_σ noktaların üç farklı kod temsili vardır.

ii) $A \in \tilde{S}$ noktası aynı seviyedeki farklı iki alt üçgenin kesişim noktası ise, A noktasının iki kod temsili vardır. Yani A , $\tilde{S}_{\sigma 1} \cap \tilde{S}_{\sigma 2}$, $\tilde{S}_{\sigma 1} \cap \tilde{S}_{\sigma 3}$ veya $\tilde{S}_{\sigma 2} \cap \tilde{S}_{\sigma 3}$ kesişim noktasıysa iki farklı kod gösterimi vardır. Eğer bu ifade genellenirse



Şekil 3.4. Ekli Sierpinski üçgeni üzerindeki üç kodlu noktaların bazıları

$a_k, b_k \in \{1, 2, 3\}$ ve $a_k \neq b_k$ olmak üzere

$$\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k} = \{A\}$$

yazılır. Böylece A noktasının kod temsilleri

$$\tilde{S}_{\sigma a_k}, \tilde{S}_{\sigma a_k b_k}, \tilde{S}_{\sigma a_k b_k b_k}, \dots, \tilde{S}_{\sigma a_k b_k b_k \dots b_k}$$

$$\tilde{S}_{\sigma b_k}, \tilde{S}_{\sigma b_k a_k}, \tilde{S}_{\sigma b_k a_k a_k}, \dots, \tilde{S}_{\sigma b_k a_k a_k \dots a_k}$$

içice geçmiş küme dizileri olarak ifade edilebilir. Cantor arakesit teoremi gereğince A noktasının kod temsilleri $\sigma a_k b_k b_k \dots$ ve $\sigma a_k b_k b_k \dots$ olup iki farklı kod temsili yapılmış olur. M_σ , L_σ ve K_σ noktaları iki farklı kod temsiline sahiptir (Bkz. Şekil 3.4).

iii) $A \in \tilde{S}$ noktası aynı seviyedeki farklı üçgenlerin kesişim noktası değilse, A noktasının bir tek kod temsili vardır. Yani durum **i** ve durum **ii**'de gösterilen kod temsillerinden farklıdır. Örnek vermek gerekirse $\tilde{S}$ nin P, Q, R noktalarıyla $1212\dots$ ve $0123012\dots$ gibi bir çok nokta ve kendini yenilemeyen formdaki noktaların herbirinin tek bir kod temsili vardır.

Sonuç olarak $\tilde{S}_\sigma$ alt üçgenlerinin kod kümeleri

$$\tilde{S}_\sigma = \{\sigma a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots \mid a_i \in \{0, 1, 2, 3\}, i = k, k+1, k+2, \dots\}$$

olarak ifade edilir.



4. EKLI SIERPINSKI ÜZERİNDEKİ İÇSEL METRİĞİN İNŞASI

Ekli Sierpinski Üçgeni üzerindeki içsel metriğin kod temsilleri yardımıyla inşası için öncelikle bazı ifadelerin tanımlarına ihtiyaç vardır. Bu nedenle ilk olarak her bir yol hesabında kullanılacak olan genel kullanımların hangi anlamlara geldikleri ifade edilecektir.

A ve B , ekli Sierpinski üçgeni üzerinde farklı iki nokta ve $a_i, b_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ olmak üzere bu noktaların kod temsilleri sırasıyla;

$a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots$ ve $b_1 b_2 \dots b_{k-1} b_k b_{k+1} \dots$ olsun. Ayrıca

$$k = \min\{i \mid a_i \neq b_i\} \quad \text{ve} \quad \sigma = a_1 a_2 \dots a_{k-1}$$

olarak kabul edilsin. İlişkili sistemde iki farklı büzülme katsayısı olup özellikle ekli Sierpinski üçgeninin noktasının her bir adımda ortadaki üçgenlerin içinde bulunduğunu ifade eden $a_i = 0$ ve $i < k$ olacak şekildeki i lerin sayısının belirlenmesi en kısa yolun hesabı için çok önemlidir. Bu yüzden,

$$\kappa = \{i \mid a_i = b_i = 0, i < k\}$$

olmak üzere bu kümenin eleman sayısına t denilsin. Yani $s(\kappa) = t$ olsun.

A noktasının B noktasına olan uzaklığı hesaplanırken önemli olan bir diğer durum ise $a_i = 0$ ve $i > k$ olacak şekildeki i lerin sayısıdır. Sırası ile ilgili küme;

$$\begin{aligned} M &= \{i + 1 \mid a_i = 0, i > k\} \\ &= \{m_1, m_2, m_3, \dots\} \quad \text{ve} \quad m_1 < m_2 < m_3 < \dots \end{aligned}$$

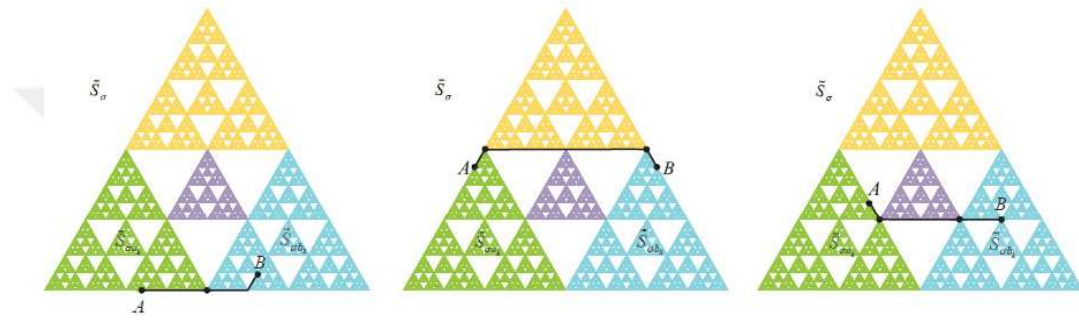
olarak ifade edilsin. Benzer şekilde B noktasının A noktasına olan uzaklığı hesaplanırken $b_i = 0$ ve $i > k$ olacak şekilde i lerin sayısı da bir o kadar önemlidir. Sırası ile ilgili kümeyi;

$$\begin{aligned} L &= \{i + 1 \mid b_i = 0, i > k\} \\ &= \{l_1, l_2, l_3, \dots\} \quad \text{ve} \quad l_1 < l_2 < l_3 < \dots \end{aligned}$$

olarak ifade edilsin.

4.1. 1.Durum

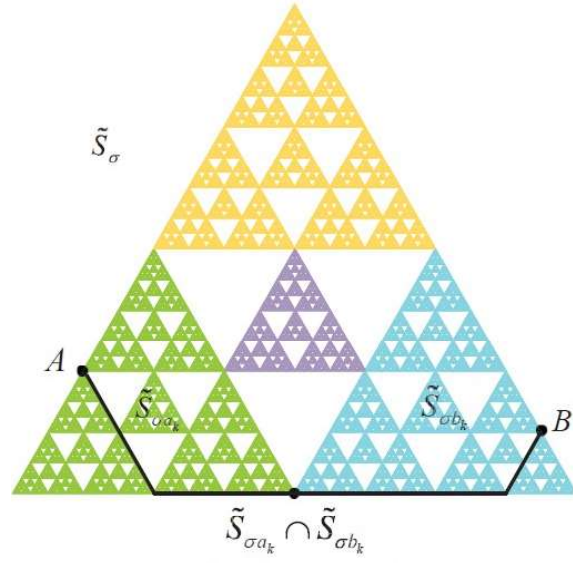
$a_k \neq 0$ ve $b_k \neq 0$ olsun. Bu durumda A ile B noktası arasındaki en kısa yollar $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktasından veya $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})$ doğru parçasından veya $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ doğru parçasından geçer. Böylece bu üç farklı durumda belirtilen nokta ve doğrulardan geçen en kısa yolların uzunluğu hesaplanarak bulunan uzunlukların minimumunu uzunlukta olan yol en kısa yol olarak alınır.



Şekil 4.1. A ile B noktaları arasındaki en kısa uzaklıkları gösteren sırasıyla $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktasından geçen bazı en kısa yollar, $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})$ ve $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ doğru parçalarından geçen bazı en kısa yollar

4.1.1. $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktasından geçen en kısa yollar

$\sigma = a_1 a_2 \dots a_{k-1}$ olmak üzere $A \in \tilde{S}_{\sigma a_k}$ ve $B \in \tilde{S}_{\sigma b_k}$ olduğundan A ile B arasındaki en kısa yollardan biri bu iki alt üçgenin kesişimi olan $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktasından geçebilir. Bu yüzden ilk olarak A noktasının $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktasına olan en kısa yolun uzunluğu bulunur. Ardından B noktasının $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktasına olan en kısa yolun uzunluğu bulunur. Bulunan iki uzaklığın toplamı A ile B noktaları arasındaki en kısa yollardan birisini verir.



Şekil 4.2. A ile B noktaları arasındaki $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktasından geçen en kısa yollardan biri

A nın $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ ya olan uzaklığı hesaplanırken, $a_i = 0$ ve $i > k$ olacak şekildeki i lerin sayısı ve sırası ile ilgili kümeyi;

$$\begin{aligned} M &= \{i + 1 \mid a_i = 0, i > k\} \\ &= \{m_1, m_2, m_3, \dots\} \quad \text{ve} \quad m_1 < m_2 < m_3 < \dots \end{aligned}$$

olacak şekilde tanımlandığından ve

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & a_i = b_k \\ 1, & a_i \neq b_k \end{cases}$$

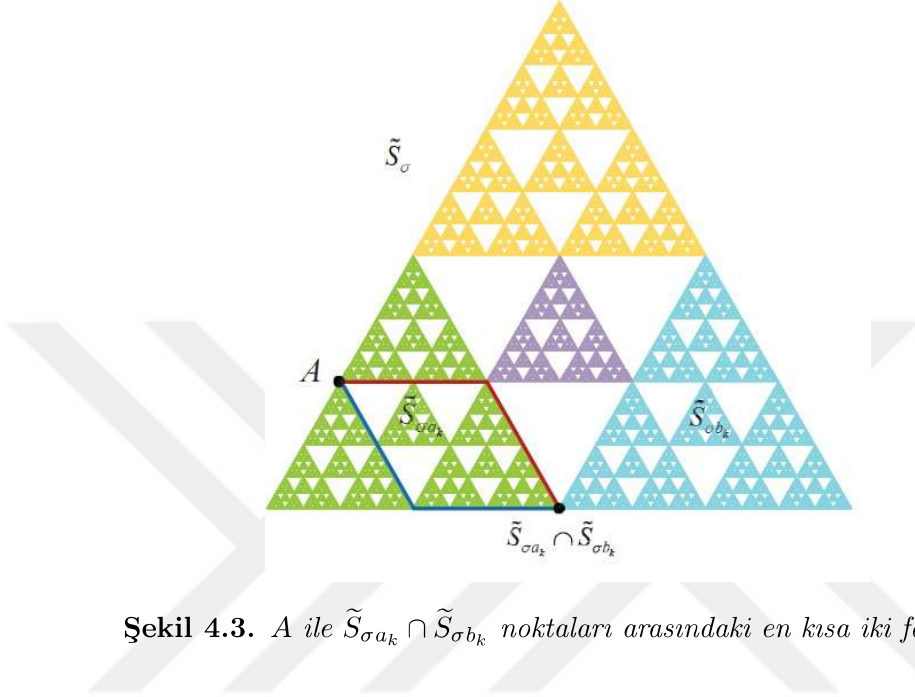
olmak üzere, A nın $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ ya olan uzaklığı;

$$\mathcal{A} = \sum_{i=k+1}^{m_1-1} \frac{\alpha_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\alpha_i}{2^{i+t}} + \dots + \frac{1}{2^r} \sum_{i=m_r}^{m_{r+1}-1} \frac{\alpha_i}{2^{i+t}} + \dots$$

olacak şekilde formüle edilir. Eğer $M = \emptyset$ ise bu uzaklık,

$$\mathcal{A} = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{2^{i+t}}$$

olur. Aşağıda verilen şekilde, A ile $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktası arasındaki en kısa uzaklığı veren yolun tek olmadığı gözlemlenir. Bu ise ekli Sierpinski üçgenin jeodezikleriyle ilgilidir.



Şekil 4.3. A ile $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktaları arasındaki en kısa iki farklı yol

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} L &= \{i+1 \mid b_i = 0, i > k\} \\ &= \{l_1, l_2, l_3, \dots\} \quad \text{ve} \quad l_1 < l_2 < l_3 < \dots \end{aligned}$$

ve

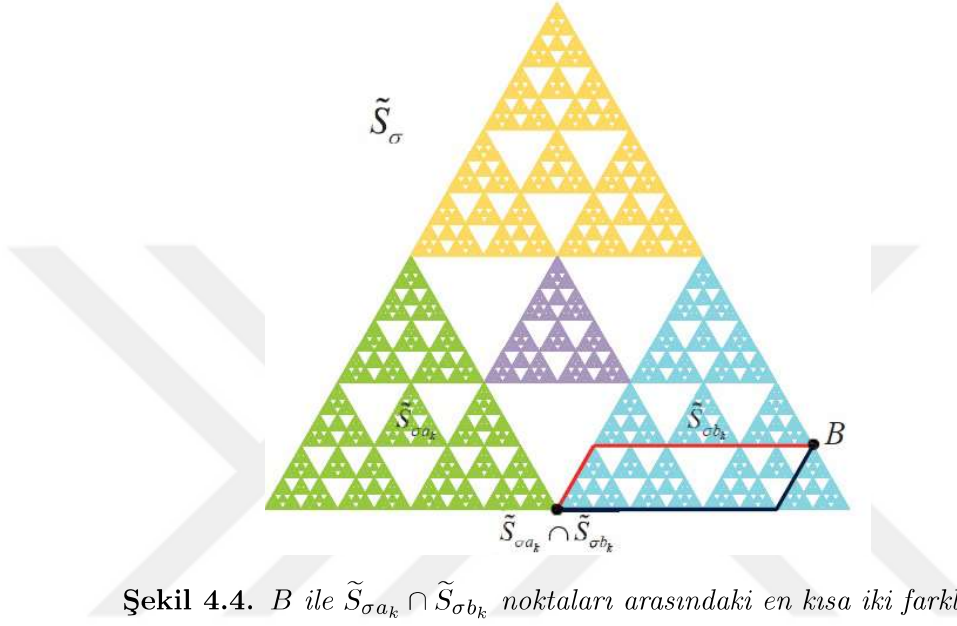
$$\beta_i = \begin{cases} 0, & b_i = a_k \\ 1, & b_i \neq a_k \end{cases}$$

olmak üzere, B nin $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ ya olan uzaklığı hesaplanırken

$$\mathcal{B} = \sum_{i=k+1}^{l_1-1} \frac{\beta_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=l_1}^{l_2-1} \frac{\beta_i}{2^{i+t}} + \dots + \frac{1}{2^p} \sum_{i=l_p}^{l_{p+1}-1} \frac{\beta_i}{2^{i+t}} + \dots$$

olarak formüle edilir. Eğer $L = \emptyset$ ise bu uzaklık,

$$\mathcal{B} = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\beta_i}{2^{i+t}}$$



Şekil 4.4. B ile $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktaları arasındaki en kısa iki farklı yol

Böylece, $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktasından geçen A ile B arasındaki en kısa uzaklık $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ olarak bulunur. Yani $M = L = \emptyset$ ise

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^{i+t}}$$

olur.

Yol Gösterme: A ile B ekli Sierpinski üçgeni üzerinde sırasıyla kod temsilleri $a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots$ ve $b_1 b_2 \dots b_{k-1} b_k b_{k+1} \dots$ olan noktalar olsunlar. $a_k \neq b_k$ olduğu kabul edilsin. Özel olarak, A ile B arasındaki en kısa yollardan biri $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k} = \{X\}$ noktasından geçer. $a_k = 1$ ve $b_k = 2$ olarak alınsın (Diğer durumlar ve B noktasının X noktasına uzaklığının hesabı için benzer adımlar izlenir).

Eğer $a_{k+1} = 1$ veya 0 veya 3 ise A ile $\tilde{S}_{\sigma 1} \cap \tilde{S}_{\sigma 2} = \{X\}$ noktası arasındaki en kısa yollardan biri sırasıyla $\tilde{S}_{\sigma 11} \cap \tilde{S}_{\sigma 12}$, $\tilde{S}_{\sigma 10} \cap \tilde{S}_{\sigma 12}$ veya $\tilde{S}_{\sigma 13} \cap \tilde{S}_{\sigma 12}$ noktalarından birinden geçmelidir. Bu noktaların kod gösterimleri sırasıyla $\sigma 11222 \dots =$

$\sigma 12111 \dots, \sigma 10222 \dots = \sigma 12133 \dots = \sigma 123111 \dots, \sigma 13222 \dots = \sigma 12333 \dots$ olur. Ayrıca X noktasının kod gösterimleri ise $\sigma 1222 \dots = \sigma 2111 \dots$ dir.

Eğer A noktası bu kesişim ($\tilde{S}_{\sigma 11} \cap \tilde{S}_{\sigma 12}$, $\tilde{S}_{\sigma 10} \cap \tilde{S}_{\sigma 12}$ veya $\tilde{S}_{\sigma 13} \cap \tilde{S}_{\sigma 12}$) noktalarından biriye A ile X aralarındaki uzaklık $\frac{1}{2^{k+t+1}}$ olur. Eğer A noktasının kod gösterimi bu kesişimlerden biri değil ve $a_{k+1} = 2$ ise A ile X arasındaki uzaklık $\frac{1}{2^{k+t+1}}$ den daha az olur. Eğer A noktasının kod gösterimi bu kesişimlerden biri değil ve $a_{k+1} = 0$ veya 1 veya 3 ise A ile X arasındaki uzaklık $\frac{1}{2^{k+t+1}}$ den fazla olur.

Şimdi A noktası için $a_k = 1$ ve $a_{k+1} = 1$ olsun. Bu durumda A ile X arasındaki en kısa yollardan biri $\tilde{S}_{\sigma 11} \cap \tilde{S}_{\sigma 12}$ noktasından geçer. Eğer $a_{k+2} = 1$ veya 0 veya 3 ise A ile $\tilde{S}_{\sigma 11} \cap \tilde{S}_{\sigma 12}$ noktası arasındaki en kısa yollar sırasıyla $\tilde{S}_{\sigma 111} \cap \tilde{S}_{\sigma 112}$, $\tilde{S}_{\sigma 110} \cap \tilde{S}_{\sigma 112}$ veya $\tilde{S}_{\sigma 113} \cap \tilde{S}_{\sigma 112}$ noktalarından geçebilir. Bu noktaların kod gösterimleri sırasıyla $\sigma 111222 \dots = \sigma 112111 \dots, \sigma 110222 \dots = \sigma 112133 \dots = \sigma 1123111 \dots, \sigma 113222 \dots = \sigma 112333 \dots$ olur. Ayrıca $\tilde{S}_{\sigma 11} \cap \tilde{S}_{\sigma 12}$ noktasının kod gösterimi $\sigma 11222 \dots = \sigma 12111 \dots$ dir.

Eğer A noktası bu kesişim ($\tilde{S}_{\sigma 111} \cap \tilde{S}_{\sigma 112}$, $\tilde{S}_{\sigma 110} \cap \tilde{S}_{\sigma 112}$ veya $\tilde{S}_{\sigma 113} \cap \tilde{S}_{\sigma 112}$) noktalarından biriye aralarındaki uzaklık $\frac{1}{2^{k+t+1}} + \frac{1}{2^{k+t+2}}$ olur. Eğer A noktasının kod gösterimi bu kesişimlerden biri değil ve $a_{k+2} = 2$ ise A ile X arasındaki uzaklık $\frac{1}{2^{k+t+1}} + \frac{1}{2^{k+t+2}}$ den daha az olur. Eğer A noktasının kod gösterimi bu kesişimlerden biri değil ve $a_{k+2} = 0$ veya 1 veya 3 ise A ile X arasındaki uzaklık $\frac{1}{2^{k+t+1}} + \frac{1}{2^{k+t+2}}$ den fazla olur.

Uyarı: Eğer $a_{k+1} = 0$ (aynı şekilde $a_i = 0, i > k$) ise ekli Sierpinski üçgenin büzülme katsayıları birbirinden farklı olduğundan gelen her bir 0 kod için toplam uzaklıklar 0 lı terim için $\frac{1}{2}$ çarpanı alır. Genel durum için ilgili formül elde edilir.

Örnek 4.1. $12122222 \dots$ ve $2233333 \dots$ ekli Sierpinski üçgeni üzerinde sırasıyla A ve B noktalarının kod temsilleri olsunlar. Burada, $S_{\sigma a_k} \cap S_{\sigma b_k}$ noktasından geçen A ile B arasındaki en kısa yol yukarıda verilen formüller kullanarak hesaplanacaktır.

Ayrıca $a_k = 1$ ve $b_k = 2$ olduğundan $k = 1$ dir. $A \in \tilde{S}_1$ ile $B \in \tilde{S}_2$ noktalarının sırasıyla $\tilde{S}_1 \cap \tilde{S}_2$ kesişim noktasına olan uzaklıkları hesaplanmalıdır. A nın $\tilde{S}_1 \cap \tilde{S}_2$ e uzaklığı için;

$$\kappa = \emptyset \quad \text{ve} \quad M = \emptyset$$

ve

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & a_i = b_k \\ 1, & a_i \neq b_k \end{cases}$$

olduğundan;

$$\mathcal{A} = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{2^{i+t}} = \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{0}{2^5} \dots = \frac{1}{2^3} \text{ elde edilir.}$$

B 'nin $\tilde{S}_1 \cap \tilde{S}_2$ e uzaklığı için;

$$\kappa = \emptyset \quad \text{ve} \quad L = \emptyset$$

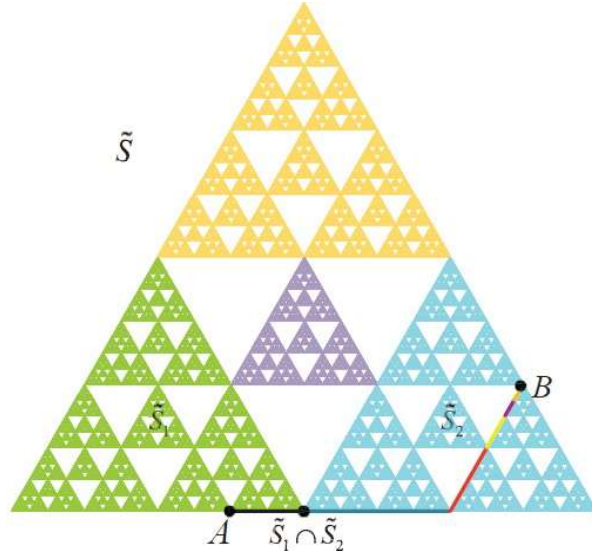
ve

$$\beta_i = \begin{cases} 0, & b_i = a_k \\ 1, & b_i \neq a_k \end{cases}$$

olduğundan ;

$$\mathcal{B} = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\beta_i}{2^{i+t}} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} \dots = \frac{1}{2} \text{ elde edilir.}$$

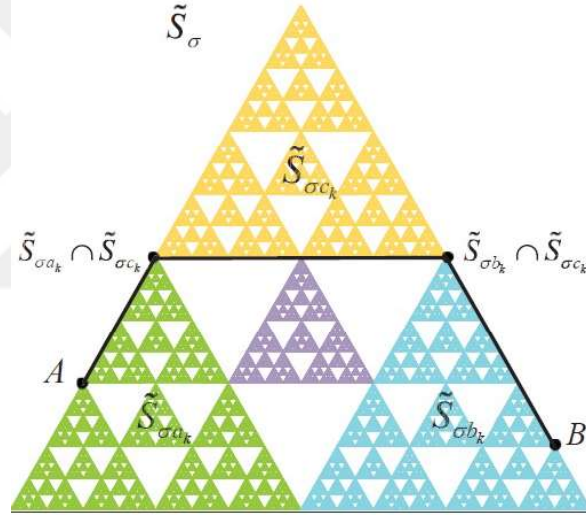
Böylece, bu iki nokta arasındaki uzaklık $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$ olur.



Şekil 4.5. A ile B noktaları arasındaki $\tilde{S}_1 \cap \tilde{S}_2$ noktasından geçen en kısa yollardan biri

4.1.2. $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})$ doğru parçasından geçen en kısa yollar

$\sigma = a_1 a_2 \dots a_{k-1}$ olmak üzere $A \in \tilde{S}_{\sigma a_k}$ ve $B \in \tilde{S}_{\sigma b_k}$ olduğundan A ile B arasındaki en kısa yollardan biri bu iki alt üçgen ile kesişen diğer üçgenin oluşturduğu yol olabilir. Burada $c_k \neq a_k, c_k \neq b_k$ ve $c_k \in \{1, 2, 3\}$ olmak üzere diğer üçgen $\tilde{S}_{\sigma c_k}$ olarak adlandırılabilir. Bu durumda A ve B noktaları arasındaki en kısa yolların uzunluğunu hesaplamak için A noktasının $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k}$ noktasına olan en kısa yolların uzunluğu hesaplanır. B noktasının $\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k}$ noktasına olan en kısa yolların uzunluğu bulunur. Ayrıca $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k}$ ile $\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k}$ noktaları arasındaki doğru parçasının uzunluğu $\frac{1}{2^{k+t}}$ ile hesaplanır. Böylece A ile B arasındaki en kısa yolların uzunluğu yukarıda elde edilen bu üç uzunluğun toplamı ile elde edilir.



Şekil 4.6. A ile B arasındaki $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})$ doğru parçasından geçen en kısa yollardan biri

A nın $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k}$ ya olan uzaklığını hesaplarken, $a_i = 0$ ve $i > k$ olacak şekilde i lerin sayısı ve sırası ile ilgili kümeyi;

$$\begin{aligned} M &= \{i + 1 \mid a_i = 0, i > k\} \\ &= \{m_1, m_2, m_3, \dots\} \text{ ve } m_1 < m_2 < m_3 < \dots \end{aligned}$$

olacak şekilde tanımlayalım. Bu durumda,

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & a_i = c_k \\ 1, & a_i \neq c_k \end{cases}$$

olmak üzere A nın $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k}$ ya olan uzaklığı;

$$\mathcal{A}' = \sum_{i=k+1}^{m_1-1} \frac{\gamma_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\gamma_i}{2^{i+t}} + \cdots + \frac{1}{2^r} \sum_{i=m_r}^{m_{r+1}-1} \frac{\gamma_i}{2^{i+t}} + \cdots$$

olarak elde edilir. Eğer $M = \emptyset$ ise bu uzaklık,

$$\mathcal{A}' = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\gamma_i}{2^{i+t}}$$

olur.

Benzer şekilde B nin $\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k}$ ya olan uzaklığı;

$$\begin{aligned} L &= \{i+1 \mid b_i = 0, i > k\} \\ &= \{l_1, l_2, l_3, \dots\} \quad \text{ve} \quad l_1 < l_2 < l_3 < \dots \end{aligned}$$

ve

$$\delta_i = \begin{cases} 0, & b_i = c_k \\ 1, & b_i \neq c_k \end{cases}$$

olmak üzere,

$$\mathcal{B}' = \sum_{i=k+1}^{l_1-1} \frac{\delta_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=l_1}^{l_2-1} \frac{\delta_i}{2^{i+t}} + \cdots + \frac{1}{2^p} \sum_{i=l_p}^{l_{p+1}-1} \frac{\delta_i}{2^{i+t}} + \cdots$$

olarak formüle edilir. Eğer $L = \emptyset$ ise bu uzaklık,

$$\mathcal{B}' = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\delta_i}{2^{i+t}}$$

olarak elde edilir. Böylece, $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})$ doğru parçasından geçen A ile

B arasındaki en kısa yolların uzunluğu $\mathcal{A}' + \mathcal{B}' + \frac{1}{2^{t+k}}$ olarak bulunur.

Yol Gösterme: A ile B ekli Sierpinski üçgeni üzerinde sırasıyla kod temsilleri sırasıyla $a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots$ ve $b_1 b_2 \dots b_{k-1} b_k b_{k+1} \dots$ olan noktalar olsunlar. Kabul edilsin ki $a_k \neq b_k, c_k \neq b_k, a_k \neq c_k$ ve $c_k \in \{1, 2, 3\}$ olsun. Böylece A ile B arasındaki en kısa yollardan birinin hesabı A noktasıyla $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k}$ noktası arasında olan en kısa yolun uzunluğu ile B noktasıyla $\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k}$ noktası arasında olan en kısa yolun uzunluğuna eklenen $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k}$ ve $\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k}$ noktaları arasındaki doğru parçasının uzunluğunun toplamı ile elde edilir. Şimdi $a_k = 1$ ve $b_k = 2$ olarak alınsın. Bu durumda $c_k = 3$ olarak alınmalıdır (Diğer durumlar ve B noktasının uzaklığı için benzer adımlar izlenir).

Eğer $a_{k+1} = 1$ veya 0 veya 2 ise A ile $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k} = \{X\}$ (yani $\tilde{S}_{\sigma 1} \cap \tilde{S}_{\sigma 3} = \{X\}$) noktası arasındaki en kısa yollardan biri sırasıyla $\tilde{S}_{\sigma 11} \cap \tilde{S}_{\sigma 13}$, $\tilde{S}_{\sigma 10} \cap \tilde{S}_{\sigma 13}$ veya $\tilde{S}_{\sigma 12} \cap \tilde{S}_{\sigma 13}$ noktalarından birinden geçmelidir. Bu noktaların kod gösterimleri sırasıyla $\sigma 11333 \dots = \sigma 13111 \dots, \sigma 10333 \dots = \sigma 132111 \dots = \sigma 131222 \dots, \sigma 13222 \dots = \sigma 12333 \dots$ olur. Ayrıca X noktasının kod gösterimleri ise $\sigma 1333 \dots = \sigma 3111 \dots$ dir.

Eğer A noktası bu kesişim ($\tilde{S}_{\sigma 11} \cap \tilde{S}_{\sigma 13}$, $\tilde{S}_{\sigma 10} \cap \tilde{S}_{\sigma 13}$ veya $\tilde{S}_{\sigma 13} \cap \tilde{S}_{\sigma 12}$) noktalarından biriye aralarındaki uzaklık $\frac{1}{2^{k+t+1}}$ olur. Eğer A noktasının kod gösterimi bu kesişimlerden biri değil ve $a_{k+1} = 3$ ise A ile X arasındaki uzaklık $\frac{1}{2^{k+t+1}}$ den daha az olur. Eğer A noktasının kod gösterimi bu kesişimlerden biri değil ve $a_{k+1} = 0$ veya 1 veya 2 ise A ile X arasındaki uzaklık $\frac{1}{2^{k+t+1}}$ den fazla olur.

Şimdi A noktası için $a_k = 1$ ve $a_{k+1} = 1$ olsun. Bu durumda A ile X arasındaki en kısa uzaklıklardan biri $\tilde{S}_{\sigma 11} \cap \tilde{S}_{\sigma 13}$ noktasından geçebilir. Eğer $a_{k+2} = 1$ veya 0 veya 3 ise A ile $\tilde{S}_{\sigma 11} \cap \tilde{S}_{\sigma 13}$ noktası arasındaki en kısa yollar sırasıyla $\tilde{S}_{\sigma 111} \cap \tilde{S}_{\sigma 113}$, $\tilde{S}_{\sigma 110} \cap \tilde{S}_{\sigma 113}$ veya $\tilde{S}_{\sigma 113} \cap \tilde{S}_{\sigma 112}$ noktalarından geçebilir. Bu noktaların kod gösterimleri sırasıyla $\sigma 111333 \dots = \sigma 113111 \dots, \sigma 110333 \dots = \sigma 1132111 \dots = \sigma 1131222 \dots, \sigma 113222 \dots = \sigma 112333 \dots$ olur. Ayrıca $\tilde{S}_{\sigma 11} \cap \tilde{S}_{\sigma 13}$ kod gösterimi için $\sigma 11333 \dots = \sigma 13111 \dots$ yazılır.

Eğer A noktası bu kesişim ($\tilde{S}_{\sigma 111} \cap \tilde{S}_{\sigma 113}$, $\tilde{S}_{\sigma 110} \cap \tilde{S}_{\sigma 113}$ veya $\tilde{S}_{\sigma 113} \cap \tilde{S}_{\sigma 112}$) noktalarından biriye aralarındaki uzaklık $\frac{1}{2^{k+t+1}} + \frac{1}{2^{k+t+2}}$ olur. Eğer A noktasının kod gösterimi bu kesişimlerden biri değil ve $a_{k+2} = 3$ ise A ile X arasındaki uzaklık

$\frac{1}{2^{k+t+1}} + \frac{1}{2^{k+t+2}}$ den daha az olur. Eğer A noktasının kod gösterimi bu kesişimlerden biri değil ve $a_{k+2} = 0$ veya 1 veya 2 ise A ile X arasındaki uzaklık $\frac{1}{2^{k+t+1}} + \frac{1}{2^{k+t+2}}$ den fazla olur.

Uyarı: Eğer $a_{k+1} = 0$ (aynı şekilde $a_i = 0, i > k$) ise ekli Sierpinski üçgenin büzülme katsayıları birbirinden farklı olduğundan gelen her bir 0 kod için toplam uzaklıklar 0 lı terim sayısı kadar $\frac{1}{2}$ çarpanı alır. Genel durum için ilgili formül elde edilir.

Örnek 4.2. 12122222... ve 2233333... ekli Sierpinski üçgeni üzerinde sırasıyla A ve B noktalarının kod temsilleri olsunlar. Burada, $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})$ doğru parçasından geçen A ile B arasındaki en kısa yolların uzunluğu yukarıda verilen formüller kullanarak hesaplanacaktır.

$A \in \tilde{S}_1$ ile $B \in \tilde{S}_2$ noktaları için $c_k = 3$ olur. Böylece A noktasının $\tilde{S}_{\sigma 1} \cap \tilde{S}_{\sigma 3}$ noktasına uzaklığı ve B noktasının $\tilde{S}_{\sigma 2} \cap \tilde{S}_{\sigma 3}$ noktasına uzaklığı hesaplanmalıdır. $k = 1, a_k = 1, b_k = 2$ olduğundan $c_k = 3$ olur. Dolayısıyla A noktasıyla $\tilde{S}_{\sigma 1} \cap \tilde{S}_{\sigma 3}$ noktası arasındaki en kısa yolların uzunluğu için;

$$\kappa = \emptyset \quad \text{ve} \quad M = \emptyset$$

ve

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & a_i = c_k \\ 1, & a_i \neq c_k \end{cases}$$

olduğundan;

$$\mathcal{A}' = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\gamma_i}{2^{i+t}} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} \dots = \frac{1}{2} \text{ elde edilir.}$$

B nin $\tilde{S}_2 \cap \tilde{S}_3$ e uzaklığı için;

$$\kappa = \emptyset \quad \text{ve} \quad L = \emptyset$$

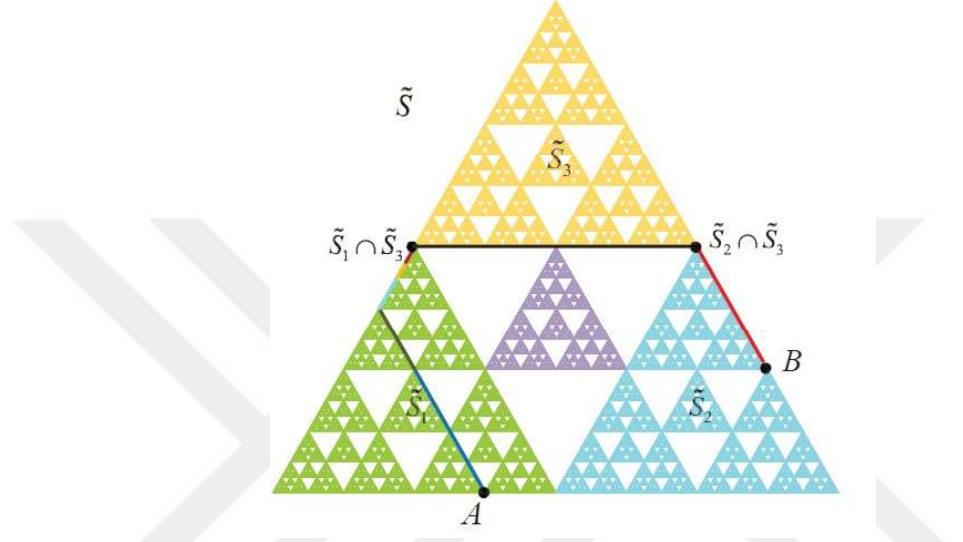
ve

$$\delta_i = \begin{cases} 0, & b_i = c_k \\ 1, & b_i \neq c_k \end{cases}$$

olduğundan ;

$$\mathcal{B}' = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\delta_i}{2^{i+t}} = \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{0}{2^5} \dots = \frac{1}{2^2} \text{ elde edilir.}$$

Böylece, bu iki nokta arasındaki uzaklık $\mathcal{A}' + \mathcal{B}' + \frac{1}{2^{t+k}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$ olur.

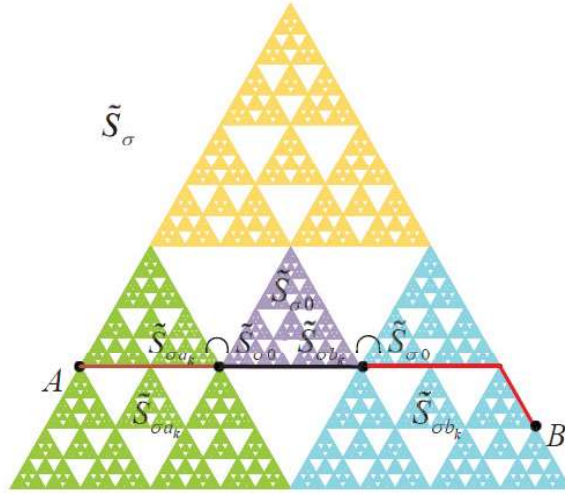


Şekil 4.7. A ile B noktaları arasındaki $(\tilde{S}_1 \cap \tilde{S}_3)(\tilde{S}_2 \cap \tilde{S}_3)$ doğru parçasından geçen en kısa yollardan biri

4.1.3. $(\tilde{S}_{\sigma_{a_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})(\tilde{S}_{\sigma_{b_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})$ doğru parçasından geçen en kısa yollar

$\sigma = a_1 a_2 \dots a_{k-1}$ olmak üzere $A \in \tilde{S}_{\sigma_{a_k}}$ ve $B \in \tilde{S}_{\sigma_{b_k}}$ olduğundan A ile B arasındaki en kısa yollardan biri $(\tilde{S}_{\sigma_{a_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})(\tilde{S}_{\sigma_{b_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})$ doğru parçasından geçen en kısa yol olabilir. Bu durumda A ve B noktaları arasındaki en kısa yollardan biri için A noktasının $\tilde{S}_{\sigma_{a_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_0}$ noktasına uzaklığı bulunur. B noktasının $\tilde{S}_{\sigma_{b_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_0}$ noktasına uzaklığı bulunur ve $(\tilde{S}_{\sigma_{a_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})(\tilde{S}_{\sigma_{b_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})$ doğru parçasının uzunluğu $\frac{1}{2^{t+k+1}}$ olarak hesaplanır. Böylece A ile B arasındaki en kısa yollardan biri yukarıda bulunan uzaklıkların toplamı ile elde edilir.

A nın $\tilde{S}_{\sigma_{a_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_0}$ noktasına olan uzaklığını hesaplarken, $a_i = 0$ ve $i > k$ olacak



Şekil 4.8. A ile B noktaları arasındaki $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ doğru parçasından geçen en kısa yollardan biri

şekildeki i lerin sayısı ve sırası ile ilgili kümeyi;

$$\begin{aligned} M &= \{i + 1 \mid a_i = 0, i > k\} \\ &= \{m_1, m_2, m_3, \dots\} \quad \text{ve} \quad m_1 < m_2 < m_3 < \dots \end{aligned}$$

olacak şekilde tanımlayalım.

Bu uzaklık için σa_k ve σa_{k+1} in durumlarını ayrı ayrı incelenmelidir. Bu yüzden A noktasının $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ noktasına uzaklığı için üç farklı hesap gerekir. Bu durumda;

1. $a_{k+1} \neq a_k$ ve $a_{k+1} \neq 0$ olsun.

Bu durumda $a_\mu \neq a_{k+1}$, $a_\mu \neq a_k$ ve $a_\mu \neq 0$ olmak üzere;

$$\varphi_i = \begin{cases} 0, & a_i = a_\mu \\ 1, & d.d. \end{cases}$$

olarak hesaplanır.

$$\mathcal{A}'' = \sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \dots + \frac{1}{2^r} \sum_{i=m_r}^{m_{r+1}-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \dots$$

2. $a_{k+1} = 0$ için

$$r = \min\{i \mid a_i \neq 0, a_i \neq a_k, i \geq k+2\}$$

$$\varphi_i = \begin{cases} 0, & a_i = a_r \\ 1, & d.d. \end{cases}$$

olmak üzere

$$\mathcal{A}'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{k+t+1}} + \sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \cdots + \frac{1}{2^r} \sum_{i=m_r}^{m_{r+1}-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \cdots \right)$$

olarak hesaplanır. Eğer

$$\{i \mid a_i \neq 0, a_i \neq a_k, i \geq k+2\} = \emptyset$$

ise $i = k+2, k+3, \dots$ için $\varphi_i = 1$ olur.

3. Bu durum için biri diğerinin özel hali olmak üzere üç farklı hesap yapmak gerekir.

a) $a_k = a_{k+1} = \dots = a_{s-1} \neq a_s \neq 0$ ve $s > k+1$ olmak üzere

$$r = \min\{i \mid a_i \neq 0, a_i \neq a_k, i > s\}$$

olarak tanımlansın. Böylece, $i \neq s$ için

$$\varphi_i = \begin{cases} 0, & a_i = a_r \\ 1, & d.d. \end{cases}$$

ve $i = s$ ise $\varphi_s = 0$ olur. Eğer

$$\{i \mid a_i \neq 0, a_i \neq a_k, i > s\} = \emptyset$$

ise $i \neq s$ için $\varphi_i = 1$ ve $i = s$ için $\varphi_s = 0$ elde edilir.

b) $a_k = a_{k+1} = \dots = a_{s-1}$ ve $a_s = 0$ ve $s > k + 1$ olmak üzere

$$r = \min\{i \mid a_i \neq 0, a_i \neq a_k, i \geq k + 2\}$$

ve $i \neq s$ için

$$\varphi_i = \begin{cases} 0, & a_i = a_r \\ 1, & d.d. \end{cases}$$

elde edilir. Ayrıca $i = s$ ise $\varphi_s = \frac{1}{2}$ olur. Eğer

$$\{i \mid a_i \neq 0, a_i \neq a_k, i \geq k + 2\} = \emptyset$$

ise $i \neq s$ için $\varphi_i = 1$ ve $i = s$ için $\varphi_s = \frac{1}{2}$ olarak elde edilir.

c) $a_k = a_{k+1} = \dots = a_i = \dots$ ve $i = k + 2, k + 3, k + 4, \dots$ ise $\varphi_i = 1$ olur.

Böylece A nın $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ a olan uzaklığı

$$\mathcal{A}'' = \frac{1}{2^{k+t+1}} + \sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \dots + \frac{1}{2^r} \sum_{i=m_r}^{m_{r+1}-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \dots$$

olarak hesaplanır.

B nın $\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ ya olan uzaklığını hesaplariken, $b_i = 0$ ve $i > k$ olacak şekildeki i lerin sayısı ve sırası ile ilgili kümeyi;

$$\begin{aligned} L &= \{i + 1 \mid b_i = 0, i > k\} \\ &= \{l_1, l_2, l_3, \dots\} \text{ ve } l_1 < l_2 < l_3 < \dots \end{aligned}$$

olacak şekilde tanımlayalım. Bu uzaklık için σ_{b_k} ve $\sigma_{b_{k+1}}$ in durumlarını ayrı ayrı incelenmelidir. Bu yüzden B noktasının $\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ noktasına uzaklığı için üç farklı hesap gerekir. Bu durumda;

1. $b_k \neq b_{k+1}$ ve $b_{k+1} \neq 0$ olsun.

Bu durumda $b_\mu \neq b_{k+1}$, $b_\mu \neq b_k$ ve $b_\mu \neq 0$ olmak üzere;

$$\psi_i = \begin{cases} 0, & b_i = b_\mu \\ 1, & d.d. \end{cases}$$

olarak hesaplanır.

$$\mathcal{B}'' = \sum_{i=k+2}^{l_1-1} \frac{\psi_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=l_1}^{l_2-1} \frac{\psi_i}{2^{i+t}} + \cdots + \frac{1}{2^r} \sum_{i=l_r}^{l_{r+1}-1} \frac{\psi_i}{2^{i+t}} + \cdots$$

2. $b_{k+1} = 0$

$$r = \min\{i \mid b_i \neq 0, b_i \neq b_k, i \geq k+2\}$$

$$\psi_i = \begin{cases} 0, & b_i = b_r \\ 1, & d.d. \end{cases}$$

olmak üzere

$$\mathcal{B}'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{k+t+1}} + \sum_{i=k+2}^{l_1-1} \frac{\psi_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=l_1}^{l_2-1} \frac{\psi_i}{2^{i+t}} + \cdots + \frac{1}{2^r} \sum_{i=l_r}^{l_{r+1}-1} \frac{\psi_i}{2^{i+t}} + \cdots \right)$$

hesaplanır. Eğer

$$\{i \mid b_i \neq 0, b_i \neq b_k, i \geq k+2\} = \emptyset$$

ve $i = k+2, k+3, \dots$ ise $\psi_i = 1$ olur.

3. Bu durum için biri diğerinin özel hali olmak üzere üç farklı hesap yapmak gerekir.

a) $b_k = b_{k+1} = \dots = b_{s-1} \neq b_s \neq 0$ ve $s > k+1$ olmak üzere

$$r = \min\{i \mid b_i \neq 0, b_i \neq b_k, i > s\}$$

olarak tanımlansın. $i \neq s$ için

$$\psi_i = \begin{cases} 0, & b_i = b_r \\ 1, & d.d. \end{cases}$$

elde edilir. Ayrıca $i = s$ ise $\psi_s = 0$ olur. Eğer,

$$\{i \mid b_i \neq 0, b_i \neq b_k, i > s\} = \emptyset$$

ise $i \neq s$ için $\psi_i = 1$ ve $i = s$ için $\psi_i = 0$ olur.

b) $b_k = b_{k+1} = \dots = b_{s-1}$ ve $b_s = 0$ ve $s > k + 1$ olmak üzere

$$r = \min\{i \mid b_i \neq 0, b_i \neq b_k, i \geq k + 2\}$$

ve $i \neq s$

$$\psi_i = \begin{cases} 0, & b_i = b_r \\ 1, & d.d. \end{cases}$$

elde edilir. Ayrıca $i = s$ ise $\psi_s = \frac{1}{2}$ olur. Eğer

$$\{i \mid b_i \neq 0, b_i \neq b_k, i \geq k + 2\} = \emptyset$$

ise $i \neq s$ için $\psi_i = 1$ ve $i = s$ için $\psi_s = \frac{1}{2}$ olarak elde edilir.

c) $b_k = b_{k+1} = \dots = b_i = \dots$ ve $i = k + 2, k + 3, k + 4, \dots$ ise $\psi_i = 1$ olur.

Böylece B nın $\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ a olan uzaklığı

$$\mathcal{B}'' = \frac{1}{2^{k+t+1}} + \sum_{i=k+2}^{l_1-1} \frac{\psi_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=l_1}^{l_2-1} \frac{\psi_i}{2^{i+t}} + \dots + \frac{1}{2^r} \sum_{i=m_r}^{l_{r+1}-1} \frac{\psi_i}{2^{i+t}} + \dots$$

olarak hesaplanır.

Böylece, $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ ve $\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ noktalarından geçen A ile B arasındaki en kısa uzaklık $\mathcal{A}'' + \mathcal{B}'' + \frac{1}{2^{t+k+1}}$ olarak bulunur.

Örnek 4.3. 12122222... ve 2233333... ekli Sierpinski üçgeni üzerinde sırasıyla A ve B noktalarının kod temsilleri olsunlar. Burada, $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ doğru parçasından geçen A ile B arasındaki en kısa yolların uzunluğu yukarıda verilen formüller kullanarak hesaplanacaktır.

$A \in \tilde{S}_1$ ile $B \in \tilde{S}_2$ noktaları için A noktasının $\tilde{S}_{\sigma 1} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ noktasına uzaklığı ve B noktasının $\tilde{S}_{\sigma 2} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ noktasına uzaklığı hesaplanmalıdır. $k = 1, a_k = 1, b_k = 2$ olur.

Dolayısıyla A noktasının $\tilde{S}_{\sigma 1} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ noktasına uzaklığı için;

$a_k \neq a_{k+1}$ ve $a_{k+1} \neq 0$ ise 1.durumdaki hesaplama yapılmalıdır. Bu durumda $a_\mu = 3$ olmalıdır. Böylece;

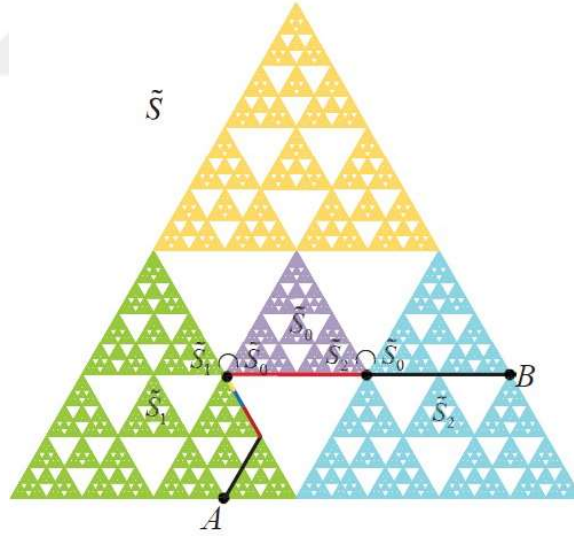
$$\mathcal{A}'' = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \dots = \frac{1}{2^2}$$

B noktasının $\tilde{S}_{\sigma 2} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ noktasına uzaklığı için; $b_k = b_{k+1}$ olduğundan 3-b şıkkı ile hesaplaması yapılmalıdır. Bu hesaba göre $s = 3$ ve $r = 3$ olduğundan

$$\mathcal{B}'' = \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{0}{2^6} + \dots = \frac{1}{2^2}$$

olarak hesaplanır.

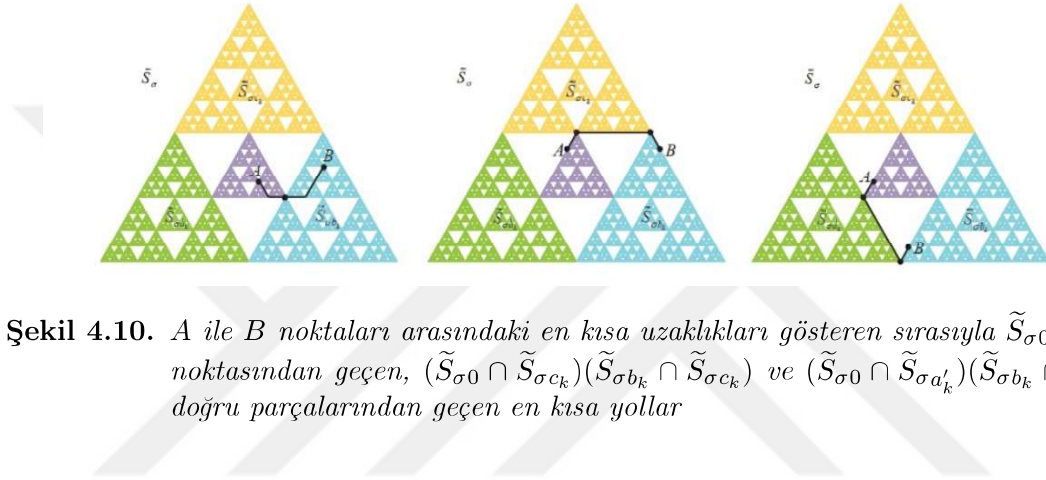
Bu iki toplama $\frac{1}{2^2}$ eklenerek iki nokta arasındaki en kısa yollardan biri bulunmuş olur.



Şekil 4.9. A ile B noktaları arasındaki $(\tilde{S}_1 \cap \tilde{S}_0)(\tilde{S}_2 \cap \tilde{S}_0)$ doğru parçasından geçen en kısa yollardan biri

4.2. 2.Durum

$a_k = 0$ ve $b_k \neq 0$ (veya $a_k \neq 0$ ve $b_k = 0$) olsun. Burada $A \in \tilde{S}_{\sigma_0}$ ve $B \in \tilde{S}_{\sigma b_k}$ olmak üzere bu iki nokta arasındaki en kısa yolları üç farklı şekilde bulunabilir. Bu durumda A ile B noktası arasındaki yol $\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktasından veya $\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k}$ noktasından veya $\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma b'_k}$ doğrusundan geçer. Böylece bu üç farklı yolun uzunluğu hesaplanarak bu yolların uzunluklarından en kısa yol için minimum değerli olan yol uzunluğu alınır.



Şekil 4.10. A ile B noktaları arasındaki en kısa uzaklıkları gösteren sırasıyla $\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktasından geçen, $(\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})$ ve $(\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma a'_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma a'_k})$ doğru parçalarından geçen en kısa yollar

4.2.1. $\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktasından geçen en kısa yollar

$\sigma = a_1 a_2 \dots a_{k-1}$ olmak üzere $A \in \tilde{S}_{\sigma_0}$ ve $B \in \tilde{S}_{\sigma b_k}$ olduğundan A ile B arasındaki en kısa yollardan biri bu iki üçgenin kesişimi olan $\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktasından geçebilir. Bu yüzden ilk olarak A noktasının $\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktasına olan en kısa yolların uzunluğu hesaplanır. Ardından B noktasının $\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktasına olan en kısa yolların uzunluğu bulunur ve bu iki uzaklık toplanır. Bu durumda B noktası ile $\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktası arasındaki en kısa yol uzunluğu 1. Durum $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})$ doğru parçasından geçen en kısa yol hesabında uygun $\mathcal{B}''$ değeri kullanılarak bulunur. Buna ek olarak A noktası ile $\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktası arasındaki en kısa yol

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & a_i = b_k \\ 1, & a_i \neq b_k \end{cases}$$

olmak üzere A nın $\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma_{b_k}}$ ya olan uzaklığı;

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+1}^{m_1-1} \frac{\alpha_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\alpha_i}{2^{i+t}} + \cdots + \frac{1}{2^r} \sum_{i=m_r}^{m_{r+1}-1} \frac{\alpha_i}{2^{i+t}} + \cdots \right) = \frac{1}{2} \mathcal{A}$$

olarak elde dilir. Böylece $\mathcal{B}''$ ile $\frac{1}{2} \mathcal{A}$ uzunluklarının toplamı $\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma_{b_k}}$ noktasından geçen A ile B noktası arasındaki en kısa yolu verir.

Örnek 4.4. 022333... ve 2233333... Ekli Sierpinski üçgeni üzerinde sırasıyla A ve B noktalarının kod temsilleri olsunlar. Burada, $\tilde{S}_{\sigma_{b_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_0}$ noktasından geçen A ile B arasındaki en kısa yolun uzunluğu yukarıda verilen formüller kullanarak hesaplanacaktır.

$A \in \tilde{S}_0$ ile $B \in \tilde{S}_2$ noktaları için A ve B noktalarının $\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma_2}$ noktasına olan uzaklıkları hesaplanmalıdır. $k = 1, a_k = 0, b_k = 2$ olur. Dolayısıyla A noktasının $\tilde{S}_0 \cap \tilde{S}_2$ noktasına uzaklığı için;

$$\frac{1}{2} \mathcal{A} = \frac{1}{2} \left(\frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots \right) = \frac{1}{2^4}$$

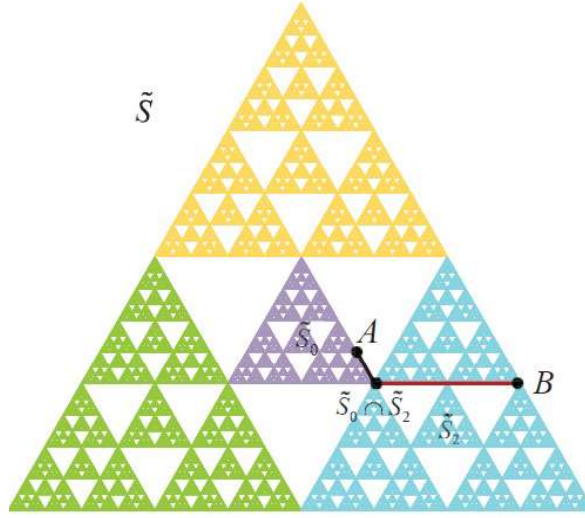
B noktasının $\tilde{S}_0 \cap \tilde{S}_2$ noktasına uzaklığı için 1.Durum $(\tilde{S}_{\sigma_{a_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})(\tilde{S}_{\sigma_{b_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_0})$ doğru parçasından geçen en kısa yol hesabında 3-a şıkkı kullanılmalıdır. Böylece

$$\mathcal{B}'' = \frac{1}{2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{0}{2^6} + \cdots = \frac{1}{2^2}$$

olur ve

$$\frac{1}{2} \mathcal{A} + \mathcal{B}'' = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{16}$$

elde edilir.



Şekil 4.11. A ile B noktaları arasındaki $\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma_2}$ noktasından geçen en kısa yollardan biri

4.2.2. $(\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma_{c_k}})(\tilde{S}_{\sigma_{b_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_{c_k}})$ doğru parçasından geçen en kısa yollar

$\sigma = a_1 a_2 \dots a_{k-1}$ olmak üzere $A \in \tilde{S}_{\sigma_0}$ ve $B \in \tilde{S}_{\sigma_{b_k}}$ olduğundan A ile B arasındaki en kısa yollardan biri bu iki üçgene daha yakın olan bir diğer üçgenden geçebilir. Bunun için $c_k \in \{1, 2, 3\}$ ve $c_k \neq b_k$ olmak üzere A noktasının $\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma_{c_k}}$ noktasına olan en kısa yolların uzunluğu B noktasının $\tilde{S}_{\sigma_{b_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_{c_k}}$ noktasına olan en kısa yolların uzunluğu ve $\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma_{c_k}}$ ile $\tilde{S}_{\sigma_{b_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_{c_k}}$ noktalarının oluşturduğu doğru parçasının uzunluğu eklenerek 2.Yol oluşturulur. Öncelikle A noktası ile $\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma_{c_k}}$ noktası arasındaki en kısa yolun uzunluğunu hesaplamak için

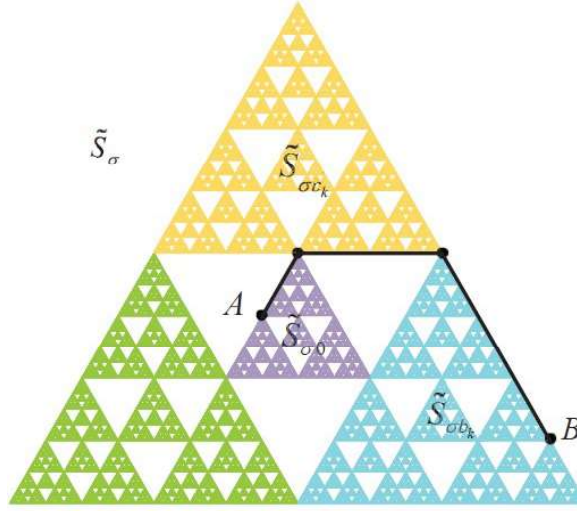
$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & a_i = c_k \\ 1, & a_i \neq c_k \end{cases}$$

olmak üzere

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+1}^{m_1-1} \frac{\gamma_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\gamma_i}{2^{i+t}} + \dots + \frac{1}{2^r} \sum_{i=m_r}^{m_{r+1}-1} \frac{\gamma_i}{2^{i+t}} + \dots \right) = \frac{1}{2} \mathcal{A}'$$

olarak elde edilir.

Ayrıca B noktası ile $\tilde{S}_{\sigma_{b_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_{c_k}}$ noktası arasındaki en kısa yolun uzunluğunu bulmak için 1.Durum $(\tilde{S}_{\sigma_{a_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_{c_k}})(\tilde{S}_{\sigma_{b_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_{c_k}})$ doğru parçasından geçen en kısa yol



Şekil 4.12. A ile B noktaları arasındaki $(\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma_{c_k}})(\tilde{S}_{\sigma_{b_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_{c_k}})$ doğru parçasından geçen en kısa yollardan biri

için kullanılan uzaklık formülü kullanılır. Böylece bulunan iki uzaklık ve $(\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma_{c_k}})(\tilde{S}_{\sigma_{b_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_{c_k}})$ doğru parçasının uzunluğunun toplamı A ile B noktaları arasındaki en kısa uzaklığı verir. Yani $\frac{1}{2}\mathcal{A}' + \mathcal{B}' + \frac{1}{2^{t+k+1}}$ olur.

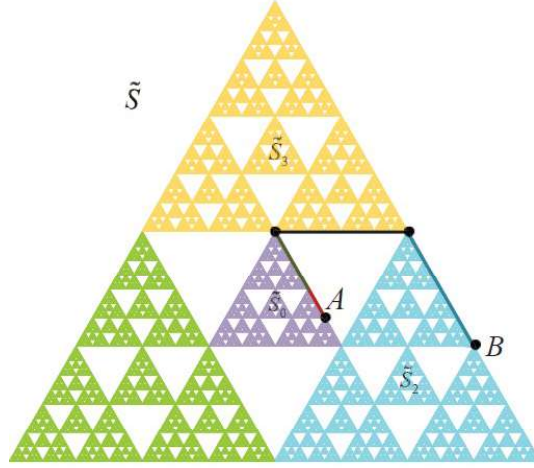
Örnek 4.5. 022333... ve 223333... ekli Sierpinski üçgeni üzerinde sırasıyla A ve B noktalarının kod temsilleri olsunlar. Burada, $\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma_{c_k}}$ ve $\tilde{S}_{\sigma_{b_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_{c_k}}$ noktalarından geçen A ile B arasındaki en kısa yol için yukarıda verilen formüller kullanarak hesaplanacaktır. $k = 1, a_k = 0, b_k = 2$ dolayısıyla $c_k = 3$ olarak alınsın. Bu durumda A noktasının $\tilde{S}_0 \cap \tilde{S}_3$ noktasına olan uzaklığı için;

$$\frac{1}{2}\mathcal{A}' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \dots\right) = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}$$

B noktasının $\tilde{S}_0 \cap \tilde{S}_3$ noktasına olan uzaklığı için;

$$\mathcal{B}' = \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{0}{2^6} + \dots = \frac{1}{2^2}$$

olarak bulunur. Hesaplanan bu iki uzaklığa $\frac{1}{2^2}$ eklenerek en kısa yollardan birinin uzunluğu bulunmuş olur.



Şekil 4.13. A ile B noktaları arasındaki $(\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma_3})(\tilde{S}_{\sigma_2} \cap \tilde{S}_{\sigma_3})$ doğru parçasından geçen en kısa yollardan biri

4.2.3. $(\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma_{a'_k}})(\tilde{S}_{\sigma_{b_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_{a'_k}})$ doğru parçasından geçen en kısa yollar

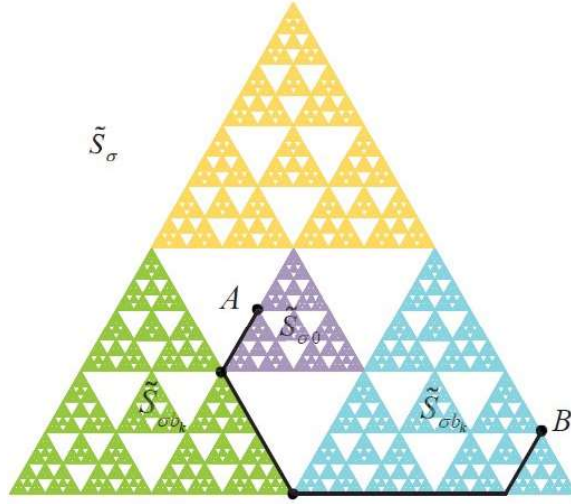
$\sigma = a_1 a_2 \dots a_{k-1}$ olmak üzere $A \in \tilde{S}_{\sigma_0}$ ve $B \in \tilde{S}_{\sigma_{b_k}}$ olduğundan A ile B arasındaki en kısa yollardan biri $a'_k \neq b_k$, $a'_k \neq c_k$ ve $a'_k \in \{1, 2, 3\}$ olmak üzere $(\tilde{S}_{\sigma_{b_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_{a'_k}})(\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma_{a'_k}})$ doğrusundan geçebilir. Bu durumda B noktası ile $\tilde{S}_{\sigma_{b_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_{a'_k}}$ noktası arasındaki en kısa yolun uzaklığı 1. Durum $\tilde{S}_{\sigma_{a_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_{b_k}}$ noktasından geçen en kısa yol hesabıyla bulunabilir (a_k yerine a'_k alınabilir). Ayrıca A noktası ile $\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma_{a'_k}}$ noktası

$$\alpha'_i = \begin{cases} 0, & a_i = a'_k \\ 1, & a_i \neq a'_k \end{cases}$$

olmak üzere;

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+1}^{m_1-1} \frac{\alpha'_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\alpha'_i}{2^{i+t}} + \dots + \frac{1}{2^r} \sum_{i=m_r}^{m_{r+1}-1} \frac{\alpha'_i}{2^{i+t}} + \dots \right)$$

olarak hesaplanır. $(\tilde{S}_{\sigma_{b_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_{a'_k}})(\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma_{a'_k}})$ doğrusundan geçen A ile B arasındaki en kısa yollardan biri $\mathcal{C} + \mathcal{B} + \frac{1}{2^{t+k+1}}$ olarak bulunur.



Şekil 4.14. A ile B noktaları arasındaki $(\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma_{a'_k}})(\tilde{S}_{\sigma_{b_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_{a'_k}})$ doğru parçasından geçen en kısa yollardan biri

Örnek 4.6. $022333\dots$ ve $2233333\dots$ Ekli Sierpinski üçgeni üzerinde sırasıyla A ve B noktalarının kod temsilleri olsunlar. Burada, $\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma_{a'_k}}$ ve $\tilde{S}_{\sigma_{b_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_{a'_k}}$ noktalarından geçen A ile B arasındaki en kısa yolun uzaklığı için yukarıda verilen formüller kullanarak hesaplanacaktır.

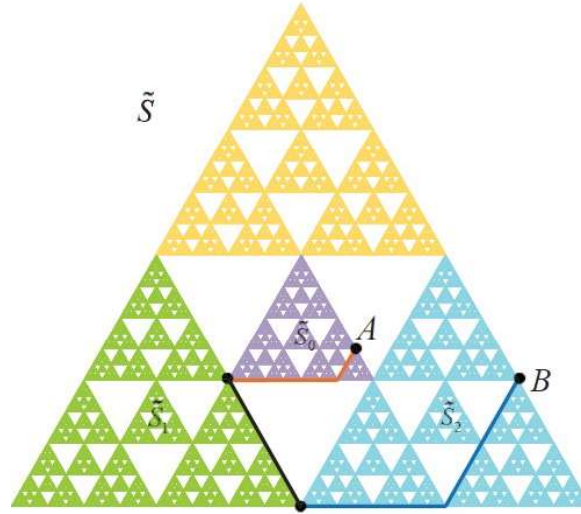
$k = 1, a_k = 0, b_k = 2$ dolayısıyla $a'_k = 1$ olarak alınsın. Bu durumda A noktasının $\tilde{S}_0 \cap \tilde{S}_1$ noktasına uzaklığı için;

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots) = \frac{1}{2^2}$$

B noktasının $\tilde{S}_0 \cap \tilde{S}_3$ noktasına uzaklığı için;

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \dots = \frac{1}{2}$$

olarak bulunur. Hesaplanan bu iki uzaklığa $\frac{1}{2^2}$ eklenerek en kısa yollardan biri bulunmuş olur.



Şekil 4.15. A ile B noktaları arasındaki $(\tilde{S}_{\sigma_0} \cap \tilde{S}_{\sigma_1})(\tilde{S}_{\sigma_1} \cap \tilde{S}_{\sigma_2})$ doğru parçasından geçen en kısa yollardan biri

Teorem 4.7. $i = 1, 2, 3, \dots, k_i$ için $a_i = b_i$, $a_k \neq b_k$ ve $a_i, b_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ olmak üzere Ekli Sierpinski üçgeni üzerindeki A ve B noktalarının kod temsilleri $a_1 a_2 a_{k-1} \dots a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots$ ve $b_1 b_2 b_{k-1} \dots b_k b_{k+1} b_{k+2} \dots$ olsun. Eğer $a_k \neq 0 \neq b_k$ ise A ile B noktaları arasındaki içsel metrik formülü

$$d(A, B) = \min\{\mathcal{A} + \mathcal{B}, \frac{1}{2^{k+t}} + \mathcal{A}' + \mathcal{B}', \frac{1}{2^{k+t+1}} + \mathcal{A}'' + \mathcal{B}''\}$$

olur. Eğer $a_k = 0$, $b_k \neq 0$ ise bu formül

$$d(A, B) = \min\{\mathcal{B}'' + \frac{1}{2}\mathcal{A}, \frac{1}{2^{k+t+1}} + \mathcal{A}' + \frac{1}{2}\mathcal{B}', \frac{1}{2^{k+t+1}} + \mathcal{C} + \mathcal{B}\}$$

olarak elde edilir. ($a_k \neq 0$, $b_k = 0$ ise bu formül

$d(A, B) = \min\{\mathcal{A}'' + \frac{1}{2}\mathcal{B}, \frac{1}{2^{k+t+1}} + \mathcal{B}' + \frac{1}{2}\mathcal{A}', \frac{1}{2^{k+t+1}} + \mathcal{A} + \mathcal{C}\}$ toplamına dönüşür.)

Kanıt. Bütün durumların ispatı yapmak çok uzun ve ispatları birbirine benzer olduğu için bazı özel durumların ispatını yapılacaktır. Öncelikle A ve B noktalarının $i < k$ için $\tilde{S}_{a_1 a_2 \dots a_i}$ aynı alt üçgeninde olduğuna dikkat edilmelidir. Eğer $i = 1, 2, 3, \dots, k-1$ için $a_i \neq 0$ ise bu noktalar arasındaki en kısa yolların uzunluğu $\frac{1}{2^{k-1}}$ den küçük ya da $\frac{1}{2^{k-1}}$ değerine eşit olur. Ancak $\tilde{S}_0$ alt üçgenin kenar uzunluğu $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2$ ve $\tilde{S}_3$ alt üçgenlerinin kenar uzunluğunun yarısı kadardır. Örneğin, $\tilde{S}_{123}$ alt üçgenin kenar

uzunluğu, $\tilde{S}_{000}$ alt üçgenin kenar uzunluğunun sekiz katıdır. $\{i|a_i = b_i = 0, i < k\}$ kümesinin elaman sayısı t ise yukarıda bahsedilen en kısa uzaklık $\frac{1}{2^{k+t-1}}$ den küçük yada eşit olmalıdır.

$\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktasından geçen ve $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma c_k})$ doğrusundan geçen en kısa yollar için özel durumlar seçilerek yol göstermesi yapılmıştı. Şimdi daha karmaşık olan $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ doğrusundan geçen en kısa yol için ispat yapılacaktır. Diğer tüm yollar için benzer adımlar izlenir.

i) $a_{k+1} \neq a_k$ ve $a_{k+1} \neq 0$ olsun. Öncelikle A ile $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ noktaları arasındaki en kısa uzaklığı hesaplayalım. Bunun için $i \geq k+2$ için $a_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ olmak üzere tek türlü belirlenen öyle bir a_μ sayısı vardır ki; $a_\mu \neq a_k, a_\mu \neq a_{k+1}$ ve $a_\mu \neq 0$ koşullarını sağlar. Eğer $a_\mu \neq a_{k+2}$ ise A noktası $\tilde{S}_{\sigma a_k a_{k+1} a_\mu}$ alt üçgeni tarafından içerilmez veya $A = \tilde{S}_{\sigma a_k a_{k+1} a_{k+2}} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k a_{k+1} a_\mu}$. Dolayısıyla en kısa yollar $\tilde{S}_{\sigma a_k a_{k+1} a_{k+2}} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k a_{k+1} a_\mu}$ noktasından geçmelidir. (yani, A noktası $\tilde{S}_{\sigma a_k a_{k+1} a_\mu}$ üçgeninde değilse en kısa uzaklık $\frac{1}{2^{k+t+2}}$ den büyük olur). Eğer $A = \tilde{S}_{\sigma a_k a_{k+1} a_{k+2}} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k a_{k+1} a_\mu}$ ise A ile $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ arasındaki en kısa uzaklık $\frac{1}{2^{k+t+2}}$ ye eşit olur. Eğer A noktası $\tilde{S}_{\sigma a_k a_{k+1} a_\mu}$ üçgeninde (bu ise $a_\mu = a_{k+2}$ olmasıdır) ve $A \neq \tilde{S}_{\sigma a_k a_{k+1} a_{k+2}} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k a_{k+1} a_\mu}$ ise bu uzaklık $\frac{1}{2^{k+t+2}}$ den küçük olur. Eğer $M = \emptyset$ ise ve benzer metot diğer adımlar içinde uygulanırsa

$$\varphi_i = \begin{cases} 0, & a_i = a_\mu \\ 1, & d.d. \end{cases}$$

olmak üzere A ile $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ noktaları arasındaki en kısa yolların uzunluğu

$$\mathcal{A}'' = \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}}$$

olarak hesaplanır. Eğer $M \neq \emptyset$ ise hesaplamalar biraz karmaşık olur. $i \in \{k+2, k+3, k+4, \dots\}$ için $a_i = 0$ olsun.

$$M = \{i+1|a_i = 0, i > k\} = \{m_1, m_2, m_3, \dots\}$$

kümesi için $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$ sıralaması sağlansın. Bu durumda A noktası $\tilde{S}_{\sigma a_k \dots a_{m_1-1} a_{m_1}}$ alt üçgenindedir. Bu durumda $(\tilde{S}_{\sigma a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{m_1-1}} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots a_\mu})$

ile $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ noktaları arasındaki uzaklık

$$\sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}}$$

olarak elde edilir. Ancak $\tilde{S}_{\sigma a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{m_1-2} 0}$ alt üçgenin kenar uzunluğu $\tilde{S}_{\sigma a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{m_1-2} 1}$, $\tilde{S}_{\sigma a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{m_1-2} 2}$ ve $\tilde{S}_{\sigma a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{m_1-2} 3}$ alt üçgenlerinin kenar uzunluğunun yarısı kadardır. Bu durumda $(\tilde{S}_{\sigma a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{m_1} \dots a_{m_2-1}} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{m_2-2} a_\mu})$ ile $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ noktaları arasındaki yolların en kısa uzunluğu

$$\sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}}$$

olarak elde edilir. Eğer böyle devam edilirse A ile $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ noktaları arasındaki en kısa uzaklık

$$\mathcal{A}'' = \sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \dots + \frac{1}{2^r} \sum_{i=m_r}^{m_{r+1}-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \dots$$

olarak bulunur.

ii) $a_{k+1} \neq a_k$ ve $a_{k+1} = 0$ olsun. Bu durumda A ile $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ noktaları arasındaki en kısa uzaklık eğer varsa sıfır ve a_k dan farklı ilk terim tarafından belirlenir. Eğer

$$r = \min\{i | a_i \neq 0, a_i \neq a_k, i \geq k+2\}$$

ise en kısa yollardan biri $(\tilde{S}_{\sigma a_k 0} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k a_r})$ noktasından geçmelidir. $(\tilde{S}_{\sigma a_k 0} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k a_r})$ ile $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ arasındaki en kısa uzaklığın $\frac{1}{2^{k+t+2}}$ olduğuna dikkat edilmelidir. Burada $a_{k+1} = 0$ olduğundan $m_1 = k+2$ olur ve böylece M boş küme olamaz.

A noktası $\tilde{S}_{\sigma a_k 0 a_r}$ üçgeninde olmasın. Bu durumda $a_{k+2} \neq a_r$ dir. Dolayısıyla en kısa yol $\tilde{S}_{\sigma a_k 0 a_{k+2}} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k 0 a_r}$ noktasından geçer ve $(\tilde{S}_{\sigma a_k 0 a_{k+2}} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k 0 a_r})$ ile $(\tilde{S}_{\sigma a_k 0} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k a_r})$ noktaları arasındaki en kısa uzaklık $\frac{1}{2^{k+t+3}}$ den büyük olur. Eğer $A = \tilde{S}_{\sigma a_k 0 a_{k+2}} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k 0 a_r}$ ise A ile $(\tilde{S}_{\sigma a_k 0} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k a_r})$ noktaları arasındaki en kısa uzaklık $\frac{1}{2^{k+t+3}}$ ye eşit olur. Eğer $A, \tilde{S}_{\sigma a_k a_{k+1} a_r} (a_{k+2} = a_r)$ alt üçgenin içindeyse bu uzaklık $\frac{1}{2^{k+t+3}}$ dan daha

az olur. Benzer işlemler diğer adımlar içinde devam ettirilirse

$$\varphi_i = \begin{cases} 0, & a_i = a_r \\ 1, & d.d. \end{cases}$$

olmak üzere A ile $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ noktaları arasındaki en kısa uzaklık

$$\mathcal{A}'' = \frac{1}{2^{k+t+2}} + \sum_{i=k+2}^{m_2-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_2}^{m_3-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \cdots + \frac{1}{2^r} \sum_{i=m_r}^{m_{r+1}-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \cdots$$

olarak bulunur. Eğer

$$\min\{i \mid a_i \neq 0, a_i \neq a_k, i \geq k+2\} = \emptyset$$

ise A ile $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0}$ noktaları arasındaki en kısa uzaklığın hesabı için her adımda en kısa yolların geçtiği ilgili alt üçgenlerin kenar uzunlukları eklenir. Bu durumda $i = k+2, k+3, k+4, \dots$ olmak üzere $\varphi_i = 1$ olarak elde edilir.

iii) a, b ve c durumlarında kesinlikle bilinen $a_k = a_{k+1}$ dir. Dolayısıyla A ile $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ noktaları arasındaki en kısa uzaklık için üç farklı seçenek vardır. Yani, $a_l \neq a_k$ ve $a_l \in \{0, 1, 2, 3\}$ olmak üzere en kısa yollar $(\tilde{S}_{\sigma a_k a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k a_l})$ noktasından geçer. $(\tilde{S}_{\sigma a_k a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k a_l})$ ve $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ noktaları arasındaki en kısa uzaklık $\frac{1}{2^{k+t+1}}$ olduğuna dikkat edilmelidir. Eğer $a_k = a_{k+1} = a_{k+2}$ ise en kısa yol $(\tilde{S}_{\sigma a_k a_k a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k a_k a_l})$ noktasından geçer. Böylece $(\tilde{S}_{\sigma a_k a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k a_l})$ ile $(\tilde{S}_{\sigma a_k a_k a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k a_k a_l})$ arasındaki en kısa uzaklık $\frac{1}{2^{k+t+2}}$ olur.

Eğer $a_{k+2} = a_s \neq a_k$ ise yine iki farklı durum vardır ve en kısa yol $(\tilde{S}_{\sigma a_k a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k a_s})$ veya $(\tilde{S}_{\sigma a_k a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k 0})$ noktalarından birinden geçer. En kısa yolların geçtiği ve ek bir uzunluk üretmediği yerlerde s indeksi noktaların sayısını azaltır. Buna ek olarak, a_k ve 0 dan farklı ve $i > s$ olacak şekilde ilk a_r terimi en kısa yolun hangi noktadan geçeceğini belirler. Eğer $a_r = a_s$ ise en kısa yol $(\tilde{S}_{\sigma a_k a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k a_s})$ noktasından geçer veya $a_r \neq a_s$ ise $(\tilde{S}_{\sigma a_k a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k 0})$ noktasından geçer. Benzer şekilde r indeksi en kısa yolların geçtiği noktaları belirler ve ek bir uzunluk oluşturmaz. Genel durumda, $a_k = a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_{s-1} \neq a_s \neq 0 (s > k+1)$ benzer yol takip edilir. M kümesi boştan farklı küme olarak alınırsa A ile $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ noktaları arasındaki en

kısa yolların uzunluğu

$$r = \min\{i \mid a_i \neq 0, a_i \neq a_k, i > s\}$$

olmak üzere $i \neq s$ için

$$\varphi_i = \begin{cases} 0, & a_i = a_r \\ 1, & d.d. \end{cases}$$

ve $i = s$ ise $\varphi_s = 0$ iken

$$\mathcal{A}'' = \frac{1}{2^{k+t+1}} + \sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \cdots + \frac{1}{2^r} \sum_{i=m_r}^{m_{r+1}-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \cdots$$

olarak hesaplanır. Eğer,

$$\{i \mid a_i \neq 0, a_i \neq a_k, i \geq k+2\} = \emptyset$$

ise $i \neq s$ için $\varphi_i = 1$ ve $i = s$ için $\varphi_s = 0$ elde edilir.

$a_{k+2} = a_s = 0$ olsun. Öncelikle, A ile $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ noktaları arasındaki en kısa yollar A ile $(\tilde{S}_{\sigma a_k a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k 0})$ noktasından geçer. $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ noktası ile $(\tilde{S}_{\sigma a_k a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k 0})$ noktası arasındaki en kısa uzaklığın $\frac{1}{2^{k+t+1}}$ olduğu aşıkardır. Ancak hala iki farklı seçenek vardır ve en kısa yol $a_l \neq a_k$ ve $a_l \in \{1, 2, 3\}$ olmak üzere $(\tilde{S}_{\sigma a_k a_k 0} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k a_k a_l})$ noktasından geçer. $(\tilde{S}_{\sigma a_k a_k 0} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k a_k a_l})$ ile $(\tilde{S}_{\sigma a_k a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k 0})$ noktaları arasındaki en kısa uzaklık $\frac{1}{2^{k+t+3}}$ olur. Bu durumda, a_k ve 0 dan farklı ve $i > s$ için ilk a_r terimi en kısa yolun hangi noktadan geçeceğini belirler. Böylece en kısa yol $(\tilde{S}_{\sigma a_k a_k 0} \cap \tilde{S}_{\sigma a_k a_k a_r})$ noktasından geçmelidir. Buna ek olarak, r indeksi en kısa yolun geçtiği noktayı belirler ve ek bir uzunluk oluşturmaz. Bu durum genelleştirilirse, $a_k = a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_{s-1}$ ve $a_s = 0$ ($s > k+1$) iken $i \neq s$ için

$$\varphi_i = \begin{cases} 0, & a_i = a_r \\ 1, & d.d. \end{cases}$$

ve $i = s$ için $\varphi_s = \frac{1}{2}$ olmak üzere

$$\mathcal{A}'' = \frac{1}{2^{k+t+1}} + \sum_{i=k+2}^{m_1-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \cdots + \frac{1}{2^r} \sum_{i=m_r}^{m_{r+1}-1} \frac{\varphi_i}{2^{i+t}} + \cdots$$

elde edilir . Eğer,

$$\{i \mid a_i \neq 0, a_i \neq a_k, \quad i \geq k+2\} = \emptyset$$

ise $i \neq s$ için $\varphi_i = 1$ ve $i = s$ için $\varphi_s = \frac{1}{2}$ olarak hesaplanır. $a_k = a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots$ durumunda, her adımda en kısa yolun geçtiği alt üçgenin kenar uzunluğu eklenmelidir. Dolayısıyla $i = k+2, k+3, \dots$ için $\varphi_i = 1$ elde edilir. $\square$

Örnek 4.8. *A noktasının kod temsili 1023111... ve B noktasının kod temsili 200333... olmak üzere bu iki nokta arasındaki en kısa uzaklık bulunsun. Öncelikle $k = \min\{i \mid a_i \neq b_i\}$ ve $a_1 \neq b_1$ olduğundan $k = 1$ olarak elde edilir. Ayrıca $\{i \mid a_i = b_i = 0, i < k\} = \emptyset$ olduğundan $t = 0$ olur. Buna ek olarak,*

$$M = \{i+1 \mid a_i = 0, i > 1\} = \{3\}$$

$$L = \{i+1 \mid b_i = 0, i > 1\} = \{3, 4\}$$

olup $m_1 = 3, l_1 = 3$ ve $l_2 = 4$ olarak bulunur. $a_1 \neq 0 \neq b_1$ olduğundan 1.Durumdaki yollar geçerli olur. Böylece $\tilde{S}_{\sigma_{a_k}} \cap \tilde{S}_{\sigma_{b_k}}$ dan geçen yollar için ilgili formüller kullanılarak aşağıdaki hesaplamalar yapılır.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \cdots \right) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} = \frac{5}{16}$$

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \cdots \right) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} = \frac{11}{32}$$

Böylece $\tilde{S}_{a_k} \cap \tilde{S}_{b_k}$ noktasından geçen en kısa yolların uzunluğu

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \frac{5}{16} + \frac{11}{32} = \frac{21}{32}$$

olur (Bkz. Şekil 4.16'da mavi yol). $c_k = 3$ için $(\tilde{S}_{a_k} \cap \tilde{S}_{c_k})(\tilde{S}_{b_k} \cap \tilde{S}_{c_k})$ noktasından

geçen en kısa yollar ile ilgili formüller kullanılarak aşağıdaki hesaplamalar yapılır:

$$\mathcal{A}' = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \dots \right) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} = \frac{11}{32}$$

$$\mathcal{B}' = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} \left(\frac{0}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{0}{2^6} + \dots \right) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} = \frac{5}{16}$$

Böylece, $(\tilde{S}_{a_k} \cap \tilde{S}_{c_k})(\tilde{S}_{b_k} \cap \tilde{S}_{c_k})$ noktasından geçen en kısa yolların uzunluğu

$$\frac{1}{2} + \mathcal{A}' + \mathcal{B}' = \frac{1}{2} + \frac{11}{32} + \frac{5}{16} = \frac{37}{32}$$

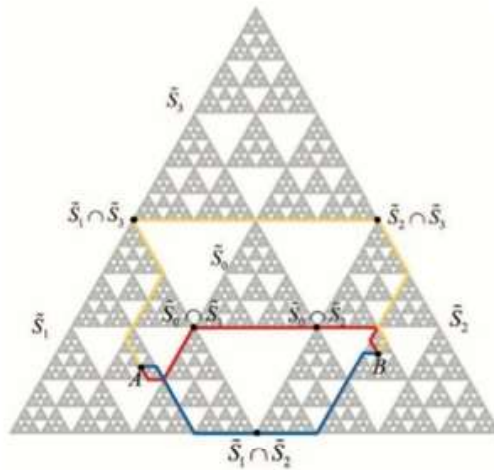
olur (Bkz. Şekil 4.16'da sarı yol). $\mathcal{A}''$ ve $\mathcal{B}''$ nü hesaplamak için r , sırasıyla 3 ve 4 olarak alınır. Bu durumda $a_r = 2$ ve $b_r = 3$ olarak elde edilir. $(\tilde{S}_{a_k} \cap \tilde{S}_0)(\tilde{S}_{b_k} \cap \tilde{S}_0)$ geçen en kısa yol için verilen ilgili formülden,

$$\frac{1}{2^2} + \mathcal{A}'' + \mathcal{B}'' = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{5}{8}$$

olarak bulunur (Bkz. Şekil 4.16'da kırmızı yol).

$$d(A, B) = \min \left\{ \frac{21}{32}, \frac{37}{32}, \frac{5}{8} \right\} = \frac{5}{8}$$

olup, en kısa yol kırmızı ile gösterilmiştir.



Şekil 4.16. A ile B noktaları arasındaki 1.durumda belirtilen noktalardan geçen bazı kısa yollar

5. EKLI SIERPİNSKİ ÜÇGENİ ÜZERİNDE BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLER VE TOPOLOJİK KÜMELERİ

5.1. Ekli Sierpinski Üçgenin Bazı Geometrik Özellikleri

$a_i, b_i, c_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ve $\sigma = a_1 a_2 \dots a_{k-1}$ olmak üzere A, B ve C noktalarının kod temsilleri sırasıyla $\sigma a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots, \sigma b_k b_{k+1} b_{k+2} \dots, \sigma c_k c_{k+1} c_{k+2} \dots$ olsun. Ayrıca A noktası $\tilde{S}_\sigma$ nin bir köşe noktası ise kod temsili $a_k \in \{1, 2, 3\}$ olmak üzere $\sigma a_k a_k a_k \dots$ olur.

Önerme 5.1. A ve B $\tilde{S}_\sigma$ üzerinde keyfi noktalar olsun. Bu durumda $d(A, B) \leq \frac{1}{2^{k+t-1}}$ olur. Ayrıca, eğer $a_k = 0$ veya $b_k = 0$ ise $d(A, B) \leq \frac{3}{2^{k+t+1}}$ olur.

Kanıt. $a_k \neq 0$ ve $b_k \neq 0$ olmak üzere A ve B , $\tilde{S}_\sigma$ üzerinde keyfi iki nokta olsun. $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ maksimum değerini elde etmek için $a_k \neq b_k$ ve $i = k+1, k+2 \dots$ için $\alpha_i = \beta_i = 1$ ve $M = L = \emptyset$ olmalıdır. 1.Durum $\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktasından geçen en kısa yol için olan formül kullanılarak $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \frac{1}{2^{k+t}} + \frac{1}{2^{k+t}} = \frac{1}{2^{k+t-1}}$ olarak bulunur. Böylece Teorem 4.7'deki ilk formülden

$$d(A, B) = \min\left\{\frac{1}{2^{k+t-1}}, \frac{1}{2^{k+t}} + \mathcal{A}' + \mathcal{B}', \frac{1}{2^{k+t+1}} + \mathcal{A}'' + \mathcal{B}''\right\}$$

olup $d(A, B) \leq \frac{1}{2^{k+t-1}}$ elde edilir.

$a_k \neq 0$ ve $b_k = 0$ olsun (Diğer durumlar benzer şekilde yapılır). $\mathcal{A}'' + \frac{1}{2}\mathcal{B}$ toplamının maksimum değerini elde etmek için $a_k \neq b_k$ ve $i = k+1, k+2 \dots$ için $\varphi_i = \beta_i = 1$ ve $M = L = \emptyset$ olmalıdır. $\mathcal{A}''$ nin maksimum değeri için 1.Durum $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ doğrusundan geçen en kısa yol için 3-c de verilen formül kullanılarak

$$\mathcal{A}'' = \frac{1}{2^{k+t+1}} + \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{1}{2^{i+t}} = \frac{1}{2^{k+t+1}} + \frac{1}{2^{k+t+1}} = \frac{1}{2^{k+t}}$$

elde edilir. 2.Durum da $\tilde{S}_{\sigma 0} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k}$ noktasından geçen en kısa yol için verilen formülden

$$\frac{1}{2}\mathcal{B} = \frac{1}{2} \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{1}{2^{i+t}} = \frac{1}{2^{k+t+1}}$$

olarak hesaplanır. Böylece $\mathcal{A}'' + \frac{1}{2}\mathcal{B} = \frac{1}{2^{k+t+1}} + \frac{1}{2^{k+t+1}} = \frac{2}{2^{k+t+1}}$ olarak bulunur. Böylece

Teorem 4.7'deki ilk formülden

$$d(A, B) = \min\left\{\frac{3}{2^{k+t+1}}, \frac{1}{2^{k+t+1}} + \frac{1}{2}\mathcal{B}' + \mathcal{A}', \frac{1}{2^{k+t+1}} + \mathcal{A} + \mathcal{C}\right\}$$

olup $d(A, B) \leq \frac{3}{2^{k+t+1}}$ elde edilir. $\square$

Yardımcı Teorem 5.2. $A \tilde{S}_\sigma$ nın bir köşe noktası ve $B \tilde{S}_\sigma$ nın keyfi bir noktası olsun. Bu durumda A ile B noktalarının kod gösterimleri , $a_k \in \{1, 2, 3\}$, $b_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ve $a_k \neq b_k$ olmak üzere sırasıyla $\sigma a_k a_k a_k \dots$ ve $\sigma b_k b_{k+1} b_{k+2} \dots$ olsun.

a) Eğer $b_k \neq 0$ ise $d(A, B) = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ dir.

b) Eğer $b_k = 0$ ise $d(A, B) = \mathcal{A}'' + \frac{1}{2}\mathcal{B}$ dir.

Kanıt. **a)** Önerme 5.1.'den $d(A, B) \leq \frac{1}{2^{k+t-1}}$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca $i = k + 1, k + 2, \dots$ için $a_i = a_k$ olduğundan $\gamma_i = 1$ olarak elde edilir. Böylece

$$\mathcal{A}' = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+t}} = \frac{1}{2^{k+t}}$$

olarak hesaplanır ve

$$\frac{1}{2^{k+t}} + \mathcal{A}' + \mathcal{B}' = \frac{1}{2^{k+t}} + \frac{1}{2^{k+t}} + \mathcal{B}' = \frac{1}{2^{k+t-1}} + \mathcal{B}' \geq d(A, B)$$

olur. Ayrıca

$$\mathcal{A} = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+t}} = \frac{1}{2^{k+t}} = \mathcal{A}'' = \frac{1}{2^{k+t+1}} + \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{1}{2^{i+t}}$$

elde edilir. Şimdi sırasıyla karşılaştırma yaparak $\mathcal{B}$ ve $\mathcal{B}''$ hesaplınsın. $b_{k+1} = a_k$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $\beta_{k+1} = 0$ olur. Böylece

$$\mathcal{B} = \sum_{i=k+2}^{l_1-1} \frac{\beta_i}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=l_1}^{l_2-1} \frac{\beta_i}{2^{i+t}} + \dots + \frac{1}{2^p} \sum_{i=l_p}^{l_{p+1}-1} \frac{\beta_i}{2^{i+t}} + \dots \leq \frac{1}{2^{k+t+1}}$$

ve

$$\mathcal{B} \leq \frac{1}{2^{k+t+1}} + \mathcal{B}''$$

olur. Sonuç olarak, $\mathcal{A} + \mathcal{B} \leq \frac{1}{2^{k+t+1}} + \mathcal{A}'' + \mathcal{B}''$ elde edilir. $b_{k+1} = 0$ ve $b_{k+1} = b_k$ içinde benzer durumlar geçerlidir. Eğer $b_{k+1} = c_k$ ise $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \frac{1}{2^{k+t+1}} + \mathcal{A}'' + \mathcal{B}''$ olur. Çünkü, b_μ, a_k ya eşit olup $i = k + 2, k + 3, k + 4, \dots$ için $\beta_i = \theta_i$ olur.

b) Önerme 5.1.'den $\mathcal{A}'' + \frac{1}{2}\mathcal{B} \leq \frac{3}{2^{k+t+1}}$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca $i = k+1, k+2, k+3, k+4, \dots$ için $\alpha_i = \gamma_i$ olur. Bu durumda $\mathcal{A} = \mathcal{A}' = \frac{1}{2^{k+t}}$ olur. Bu ise

$$\frac{1}{2^{k+t+1}} + \mathcal{A}' + \frac{1}{2}\mathcal{B}' \geq \frac{3}{2^{k+t+1}} \quad \text{ve} \quad \frac{1}{2^{k+t+1}} + \mathcal{A} + \frac{1}{2}\mathcal{C} \geq \frac{3}{2^{k+t+1}}$$

olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Önerme 5.3. A, B ve C , $\tilde{S}_\sigma$ nın köşe noktaları olsun. Eğer X $\tilde{S}_\sigma$ nın keyfi bir noktası ise

$$d(A, X) + d(B, X) + d(C, X) = \frac{1}{2^{k+t-2}}$$

olur.

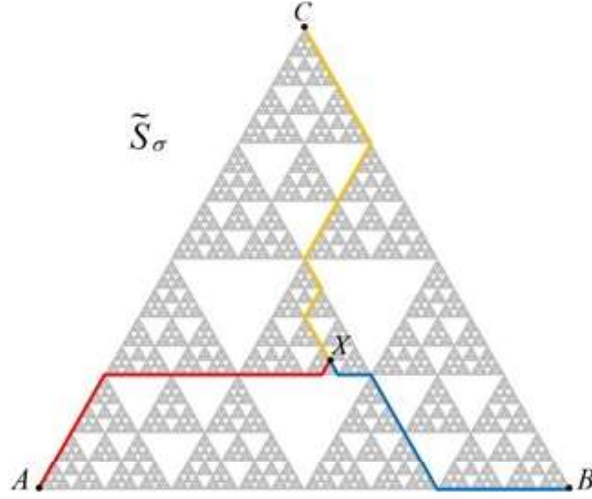
Kanıt. $i = k, k+1, k+2, k+3, \dots$ için $x_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ olmak üzere X noktasının kod temsili $\sigma x_k x_{k+1} x_{k+2} \dots$ olsun. $x_k = 0$ ve $x_k \neq 0$ olmak üzere iki farklı durum vardır. İlk durum için ispat yapılacaktır (diğer durum benzer şekilde yapılır). A, B ve C , $\tilde{S}_\sigma$ nın köşe noktaları olduğundan Yardımcı Teorem 5.2.-(b) kullanılır. A, B ve C noktaları için $i = k+1, k+2, k+3, \dots$ için $a_i = a_k, b_i = b_k$ ve $c_i = c_k$ olduğundan $d(A, X), d(B, X)$ ve $d(C, X)$ deki her bir $\mathcal{A}'$, $\frac{1}{2^{t+k}}$ değerine eşittir. Bu üç uzaklık toplanırsa $\frac{3}{2^{k+t}}$ elde edilir. Şimdi, $d(A, X), d(B, X)$ ve $d(C, X)$ deki $\mathcal{B}$ değerlerini hesaplayalım. x_{k+1} in a_k, b_k, c_k ve 0 değerlerinden birini alacağı açıktır. $i \geq k+1$ olsun. Eğer $x_i = 0$ ise $d(A, X), d(B, X)$ ve $d(C, X)$ deki her bir $\mathcal{B}$ nin hesabında $\beta_i = 1$ olur. Eğer $x_i = a_k$ ise $d(A, X)$ için $\mathcal{B}$ nin hesabında $\beta_i = 0$ ve her bir $d(B, X)$ ve $d(C, X)$ için $\mathcal{B}$ nin hesabında $\beta_i = 1$ olarak alınır. Böylece, eğer $x_i \neq 0$ ise $d(A, X), d(B, X)$ ve $d(C, X)$ için $\mathcal{B}$ nin hesabında bir tane $\beta_i = 0$ olup, diğer iki $\beta_i = 1$ olarak bulunur. Böylece, her durumda $d(A, X), d(B, X)$ ve $d(C, X)$ için $\mathcal{B}$ değerlerinin toplamı

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{k+t}} + \frac{1}{2^{k+t+1}} + \frac{1}{2^{k+t+2}} + \dots \right) = \frac{1}{2^{k+t}}$$

formuna dönüşür ve

$$d(A, X) + d(B, X) + d(C, X) = \frac{3}{2^{k+t}} + \frac{1}{2^{k+t}} = \frac{1}{2^{k+t-2}}$$

elde edilir. $\square$



Şekil 5.1. X noktasını sırasıyla A, B, C köşe noktalarına olan en kısa yolların bazıları

Uyarı 5.4. C noktasının kod temsili $000 \dots$ olsun. Şekil 3.1’de verilen $\tilde{T}_0$ başlangıç kümesi için C noktası $\tilde{T}_0$ ’ın ağırlık merkezi olur.

Önerme 5.5. $\tilde{S}_\sigma$ ’nin köşe noktaları ile kod temsili $\sigma 000 \dots$ olan nokta arasındaki uzaklık $\frac{1}{3 \cdot 2^{t+k-2}}$ olur.

Kanıt. A , $\tilde{S}_\sigma$ ’nin köşe noktası olmak üzere $a_k \in \{1, 2, 3\}$ için A ’nın kod temsili $\sigma a_k a_k a_k \dots$ ’dir. A ile bu nokta arasındaki en kısa uzaklığı bulmak için Yardımcı Teorem 5.2.’de verilen $d(A, B) = \mathcal{A}'' + \frac{1}{2}\mathcal{B}$ formülünü kullanılmalıdır. $a_k = a_{k+1} = a_{k+2} = \dots$ olduğundan $\mathcal{A}''$ aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\mathcal{A}'' = \frac{1}{2^{k+t+1}} + \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{1}{2^{i+t}} = \frac{1}{2^{k+t+1}} + \frac{1}{2^{k+t+1}} = \frac{1}{2^{k+t}}$$

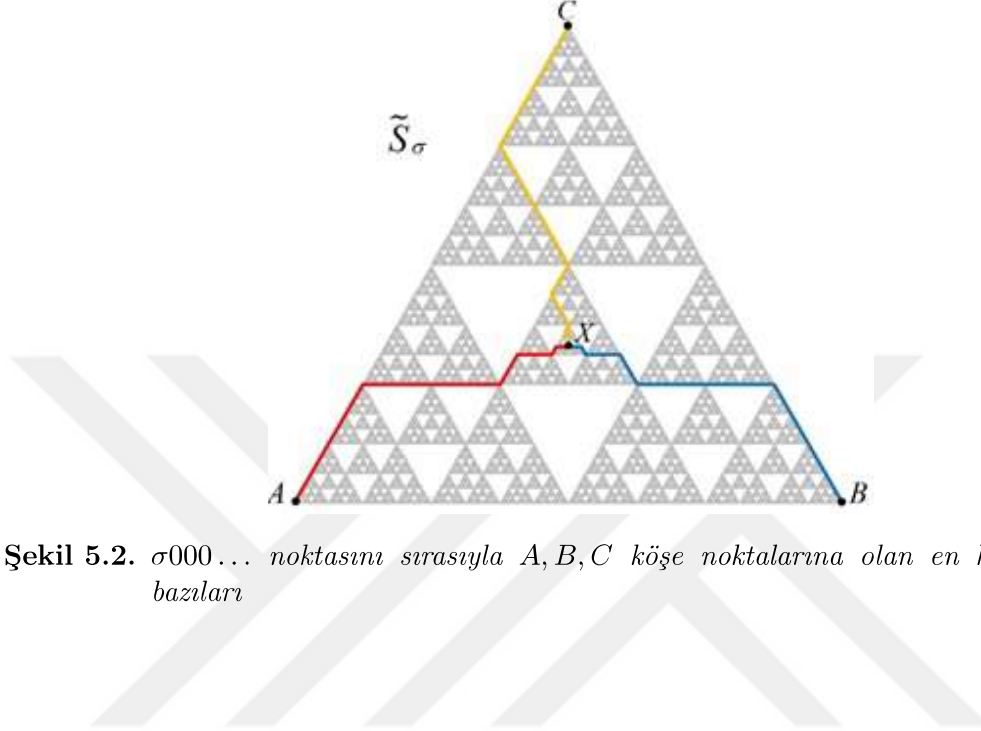
Ayrıca $i = k+1, k+2, k+3, \dots$ için $\beta_i = 1$ ve $l_i = i+1$ olduğundan $\frac{1}{2}\mathcal{B}$ aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathcal{B} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k+1}^{k+1} \frac{1}{2^{i+t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=k+2}^{k+2} \frac{1}{2^{i+t}} + \dots + \frac{1}{2^r} \sum_{i=k+r+1}^{k+r+1} \frac{1}{2^{i+t}} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{k+t+1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{2^{k+t+2}} + \dots + \frac{1}{2^r} \frac{1}{2^{k+r+t+1}} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2^{k+t+2}} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{2^{k+t}} \end{aligned}$$

Böylece

$$d(A, B) = \mathcal{A}'' + \frac{1}{2}\mathcal{B} = \frac{1}{2^{k+t}} + \frac{1}{3} \frac{1}{2^{k+t}} = \frac{1}{3} \frac{1}{2^{k+t-2}}$$

elde edilir. □



Şekil 5.2. $\sigma 000 \dots$ noktasını sırasıyla A, B, C köşe noktalarına olan en kısa yolların bazıları

5.2. Ekli Sierpinski Üçgenin Bazı Açık ve Kapalı Kümelerin Kod Temsili ile Gösterimi

Bu bölümde, Ekli Sierpinski üçgeni üzerinde tanımlanan içsel metrik formülü kullanılarak bazı ilginç kapalı kümeler ve yuvar yüzeyleri (çemberleri) kodlar ile ifade edilecektir.

Teorem 5.6. P, Q ve R kod temsilleri sırasıyla $111 \dots$, $222 \dots$ ve $333 \dots$ olan $\tilde{S}$ nin köşe noktaları olsunlar. Bu durumda, P, R, Q merkezli $\frac{1}{2^{n-1}}$ yarıçaplı yuvar yüzeyleri ($n = 1, 2, 3, \dots$) sırasıyla,

$$S\left(P, \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \{111 \dots 1x_n x_{n+1} x_{n+2} \dots \mid x_{n+i} \in \{2, 3\}, i = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$S\left(Q, \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \{222 \dots 2x_n x_{n+1} x_{n+2} \dots \mid x_{n+i} \in \{1, 3\}, i = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$S\left(R, \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \{333 \dots 3x_n x_{n+1} x_{n+2} \dots \mid x_{n+i} \in \{1, 2\}, i = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

kod kümeleri ile belirlenir.

Kanıt. P noktasının kod temsili $111\dots$ dir. $d(X, 111\dots) = \frac{1}{2^{n-1}}$ i sağlayan $X \in \tilde{S}$ noktalarının $x_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ için $x_1x_2, \dots, x_{n-1}x_nx_{n+1}\dots$ olacak şekilde kod temsilleri araştırılacaktır. Açık olarak ilk $n - 2$ terim birbirine kesinlikle eşit olmalıdır. Yani $i = 1, 2, 3, \dots, n - 2$ için $x_i = 1$ olmalıdır. Böylece;

$$X = 111\dots 1x_{n-1}x_nx_{n+1}\dots$$

olarak elde edilir. Eğer $x_{n-1} \neq 1$ ve $x_{n-1} \in \{2, 3\}$ ise;

$$\mathcal{B} = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\beta_i}{2^i} = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots = \frac{1}{2^{n-1}}$$

elde edilir.

$$d(X, 111\dots) = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i} = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\alpha_i}{2^i} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

olacağından

$$\sum_{i=n}^{\infty} \frac{\alpha_i}{2^i} = 0$$

olmalıdır. Bu ise $i = n, n + 1, n + 2, \dots$ için $x_i = 1$ olması durumunda gerçekleşir. Bu eşitliği sağlayan $X \in \tilde{S}$ nin kod sunumları $x_{n-1} \neq 1$ olması durumunda ($n \geq 2$)

$$X \in \{111\dots 211\dots, 111\dots 311\dots\}$$

olmalıdır.

$x_{n-2} \neq 1$ olamayacağına dikkat edilmelidir. Eğer olsaydı

$$\mathcal{B} = \sum_{i=n-1}^{\infty} \frac{\beta_i}{2^i} = \sum_{i=n-1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots = \frac{1}{2^{n-2}}$$

olup $d(X, 111\dots) \geq \frac{1}{2^{n-2}}$ olurdu.

$i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ için $x_i = 1$ ve $x_n \neq 1$ ve $x_n \in \{2, 3\}$ ise;

$$\mathcal{B} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\beta_i}{2^i} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+3}} + \dots = \frac{1}{2^n}$$

olur.

$$d(X, 111 \dots) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{2^i} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

olup buradan da

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{2^i} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

elde edilir. Bu durum ise $i = n + 1, n + 2, n + 3, \dots$ için $x_i \neq 1$ olması durumunda mümkündür.

Böylece

$$X \in \{111 \dots x_n x_{n+1} x_{n+2} \dots \mid x_i \in \{2, 3\}, i = n, n + 1, n + 2, \dots\}$$

olması demektir.

$i = 1, 2, 3, \dots, n - 2$ için $x_i = 1$ ve $x_{n-1} = 0$ ise ($n \geq 2$)

$$d(X, 111 \dots) = \mathcal{A}'' + \frac{1}{2}\mathcal{B}$$

formülü ile hesaplanır. A ve X in kod temsilleri sırasıyla

$$A = 111 \dots 111 \dots$$

$$X = 111 \dots 10x_n x_{n+1} x_{n+2} \dots$$

olduğundan dolayı

$$\mathcal{A}'' = \frac{1}{2^{n+1}} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots = \frac{1}{2^{n-1}}$$

ve buradan da

$$d(X, 111 \dots) = \mathcal{A}'' + \frac{1}{2}\mathcal{B} = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2}\mathcal{B} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

olarak hesaplanır. Böylece, $\frac{1}{2}\mathcal{B} = 0$ olmalıdır. Bu ise $i = n, n + 1, n + 2, n + 3, \dots$ için $x_i = 1$ durumunda gerçekleşir. Sonuç olarak, $d(X, 111 \dots) = \frac{1}{2^{n-1}}$ i sağlayan X noktasının kod temsillerinden biri $111 \dots 1011 \dots$ olur. $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ için

$x_i = 1$ ve $x_n = 0$ ise ($n \geq 2$)

$$\mathcal{A}'' = \frac{1}{2^{n+1}} + \sum_{i=n+2}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+3}} + \dots = \frac{1}{2^n}$$

olduğundan,

$$d(X, 111\dots) = \mathcal{A}'' + \frac{1}{2}\mathcal{B} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\mathcal{B} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

elde edilir. Yani, $\frac{1}{2}\mathcal{B} = \frac{1}{2^{n-2}}$ olmalıdır. Bu ise $i = n, n+1, n+2, n+3, \dots$ için $x_i \neq 1$ olsa bile

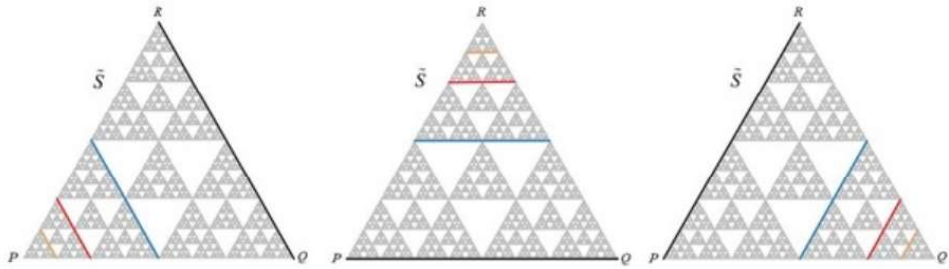
$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}$$

olup, bu eşitliğin sağlanması imkansızdır. Böylece, kod temsilleri $11\dots 1011\dots, 11\dots 1211\dots$ ve $111\dots 1311\dots$ olan noktaların farklı kod temsilleri sırasıyla $11\dots 11233\dots, 11\dots 11222\dots$, ve $111\dots 11333\dots$ olduğundan,

$11\dots 1011\dots, 11\dots 1211\dots, 111\dots 1311\dots \in \{111\dots x_n x_{n+1} x_{n+2} \dots \mid x_{n+i} \in \{2, 3\}, i = 0, 1, 2, \dots\}$ elde edilir ve sonuç olarak

$$S\left(111\dots, \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \{111\dots 1x_n x_{n+1} x_{n+2} \dots \mid x_{n+i} \in \{2, 3\}, i = 0, 1, 2, \dots\}$$

olarak hesaplanır. Diğer durumlarda, benzer şekilde yapılacağından ispat tamamlanır.



Şekil 5.3. Sırasıyla P, Q, R merkezli $\frac{1}{2^{n-1}}$ yarıçaplı yuvar yüzeyleri ($n = 1, 2, 3$)

Sonuç 5.7. P, Q ve R kod temsilleri sırasıyla $111\dots, 222\dots$ ve $333\dots$ olan $\tilde{S}$ nin köşe noktaları olsunlar. Bu durumda, P, R, Q merkezli $\frac{1}{2^{n-1}}$ yarıçaplı kapalı diskler

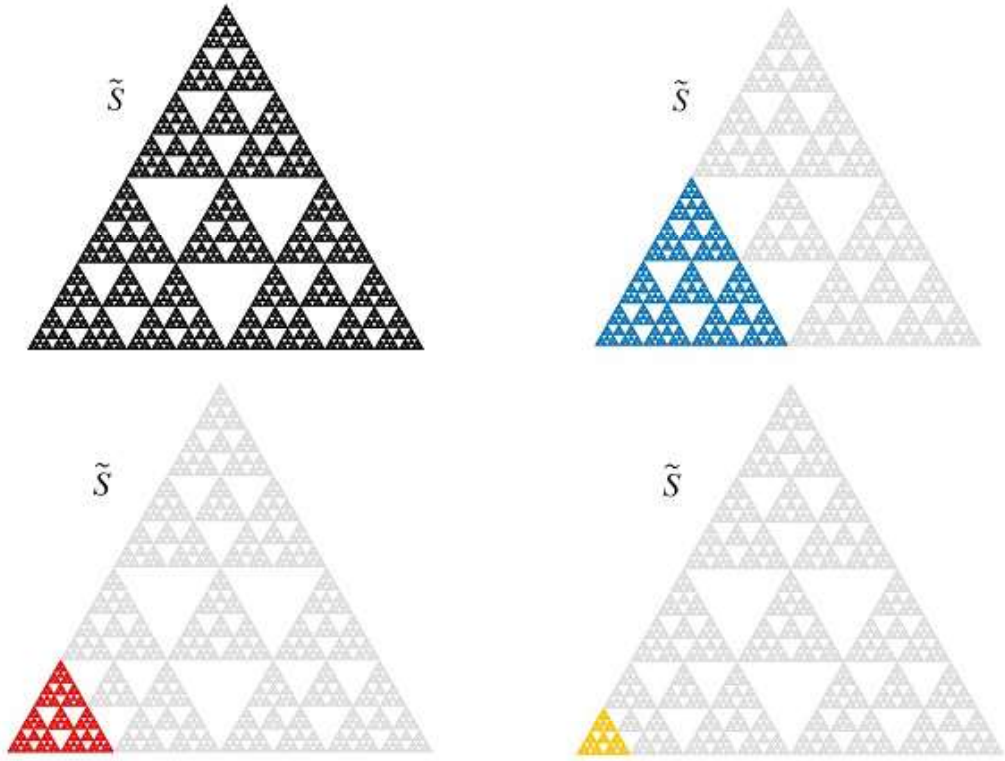
$(n = 1, 2, 3, \dots)$ sırasıyla,

$$D\left(P, \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \{111 \dots 1x_n x_{n+1} x_{n+2} \dots | x_{n+i} \in \{0, 1, 2, 3\}, i = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$D\left(Q, \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \{222 \dots 2x_n x_{n+1} x_{n+2} \dots | x_{n+i} \in \{0, 1, 2, 3\}, i = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$D\left(R, \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \{333 \dots 3x_n x_{n+1} x_{n+2} \dots | x_{n+i} \in \{0, 1, 2, 3\}, i = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

kod kümeleri ile belirlenir.



Şekil 5.4. P merkezli $\frac{1}{2^{n-1}}$ yarıçaplı kapalı yuvarları ($n = 1, 2, 3$)

□

Yardımcı Teorem 5.8. $a_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ve $a_k \neq 0$ olmak üzere A , $\tilde{S}_\sigma$ nın kod temsili $\sigma a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots$ olan keyfi bir noktası ve $O_\sigma, \tilde{S}_\sigma$ nın kod temsili $\sigma 000 \dots$ olan noktası olsun. Bu durumda $d(A, B) = \mathcal{A}'' + \frac{1}{2}\mathcal{B}$ olur.

Kanıt. Açık olarak, 2.Durumda verilen formüller kullanılarak,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathcal{B} = \frac{1}{2}\mathcal{B}' = C &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{k+t+1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{2^{k+t+2}} + \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^{k+t+3}} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2^{k+t+2}} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} \dots \right) = \frac{1}{3 \cdot 2^{k+t}}\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, 1. Durum $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ doğru parçasından geçen en kısa yol için verilen her koşulda $i = k+2, k+3, k+4, \dots$ için $\varphi_i = 1$ olsa bile $\mathcal{A}''$ nün maksimum değeri;

$$\mathcal{A}'' = \frac{1}{2^{k+t+2}} + \frac{1}{2^{k+t+3}} + \frac{1}{2^{k+t+4}} + \frac{1}{2^{k+t+5}} + \dots = \frac{1}{2^{k+t+1}}$$

olarak hesaplanır. Böylece,

$$\mathcal{A}'' + \frac{1}{2}\mathcal{B} \leq \frac{1}{2^{k+t+1}} + \mathcal{A}' + \frac{1}{2}\mathcal{B}' \quad \text{ve} \quad \mathcal{A}'' + \frac{1}{2}\mathcal{B} \leq \frac{1}{2^{k+t+1}} + \mathcal{A} + \mathcal{C}$$

olup, istenilen elde edilir. □

Teorem 5.9. $O_\sigma, \tilde{S}$ nın kod temsili $\sigma 000 \dots$ olan noktası olsun. Bu durumda, O_σ merkezli $\frac{1}{2^{n+t+k}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{k+t}}$ yarıçaplı yuvar yüzeyleri; $n = 0$ için,

$$S\left(O_\sigma, \frac{1}{2^{t+k}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{k+t}}\right) = \{\sigma 111 \dots, \sigma 222 \dots, \sigma 333 \dots\}$$

$n = 1$ için, $x_k \neq x_{k+1}$ ve $x_k \neq 0 \neq x_{k+1}$ olmak üzere

$$S\left(O_\sigma, \frac{1}{2^{t+k+1}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{k+t}}\right) = \{\sigma x_k x_{k+1} x_{k+2} x_{k+3} \dots \mid x_{k+i} \in \{x_k, x_{k+1}\}, i = 2, 3, \dots\}$$

$$\cup \{\sigma x_k 0 x_k x_k \dots \mid x_k \neq 0\}$$

$n = 2, 3, 4, \dots$ için, $x_k \neq x_{k+1}, x_k \neq 0 \neq x_{k+1}$ ve $x_\mu \neq x_k$ ve $x_\mu \neq x_{k+1}$ olmak üzere

$$S\left(O_\sigma, \frac{1}{2^{t+k+n}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{k+t}}\right) = \{\sigma x_k x_{k+1} x_\mu x_{k+3} x_{k+4} \dots \mid x_{k+i} \in \{x_k, x_{k+1}\}, i = 3, 4, \dots\}$$

Kanıt. Öncelikle, $n = 0$ için, O_σ merkezli $\frac{1}{2^{t+k}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{k+t}}$ yarıçaplı yuvar yüzeyinin kod

kümesini belirleyelim.

$$X = \sigma x_k x_{k+1} x_{k+2} \dots x_{n-1} x_n x_{n+1} \dots$$

$$O_\sigma = \sigma 000 \dots 000 \dots$$

olsun. Yardımcı Teorem 5.8 'den, X ve O_σ noktaları arasındaki en kısa yolların uzunluğu

$$d(X, O_\sigma) = \mathcal{A}'' + \frac{1}{2}\mathcal{B}$$

formülü ile hesaplanır.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathcal{B} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{k+t+1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{2^{k+t+2}} + \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^{k+t+3}} + \frac{1}{2^3} \frac{1}{2^{k+t+4}} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2^{k+t+2}} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots \right) = \frac{1}{3 \cdot 2^{k+t}} \end{aligned}$$

olduğundan dolayı,

$$d(X, O_\sigma) = \mathcal{A}'' + \frac{1}{2}\mathcal{B} = \mathcal{A}'' + \frac{1}{3 \cdot 2^{k+t}} = \frac{1}{2^{t+k}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{k+t}}$$

den

$$\mathcal{A}'' = \frac{1}{2^{t+k}}$$

elde edilir. Bu eşitliği elde etmek için, metrik formülünde 1.Durum $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ doğru parçasından geçen en kısa yoldaki 1 ve 2 koşullarını kullanmak imkansızdır ve sadece bu eşitlik 1.Durum $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ doğru parçasından geçen en kısa yol 3-c koşulu ile sağlanır. Yani; $i = k, k+1, k+2, \dots$ için $\varphi_i = 1$ olması ile mümkündür. Bu ise $x_i \in \{1, 2, 3\}$ iken $x_k = x_{k+1} = \dots = x_{k+r} = \dots$ olması ile mümkündür. Böylece,

$$S\left(O_\sigma, \frac{1}{2^{t+k}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{k+t}}\right) = \{\sigma 111 \dots, \sigma 222 \dots, \sigma 333 \dots\}$$

olur.

Şimdi, $n = 1$ için, O_σ merkezli $\frac{1}{2^{t+k+1}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{k+t}}$ yarıçaplı yuvar yüzeyinin kod kümesini

belirlenecektir. Yarıçapın toplamdaki $\frac{1}{3 \cdot 2^{k+t}}$ değeri değişmediğinden ilk duruma benzer işlemler yapılarak,

$$\mathcal{A}'' = \frac{1}{2^{t+k+1}}$$

elde edilir. 1.Durum $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ doğru parçasından geçen en kısa yol 1 de, $i = k+2, k+3, k+4, \dots$ için $\varphi_i = 1$ ve $M = \emptyset$ olması ile mümkündür. Yani; $x_k \neq x_{k+1}, x_k \neq 0 \neq x_{k+1}$ ve $x_\mu \neq x_k$ ve $x_\mu \neq x_{k+1}$ olmak üzere, $i = k+2, k+3, \dots$ için $x_i \neq x_\mu$ olmasını gerektirir. Böylece;

$$X \in \{\sigma x_k x_{k+1} x_{k+2} x_{k+3} \dots | x_{k+i} \in x_k, x_{k+1}\}, i = 2, 3, \dots\}$$

elde edilir.

$$\mathcal{A}'' = \frac{1}{2^{t+k+1}}$$

eşitliği 1.Durum $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ doğru parçasından geçen en kısa yol için (2 de) ise $x_{k+1} = 0$ olmak üzere $i = k+2, k+3, k+4, \dots$ için $\varphi_i = 1$ ve $M = \{k+2\}$ olması ile mümkündür. Bu ise $i = k+2, k+3, \dots$ için $x_i = x_k$ olmasını gerektirir. Böylece,

$$X \in \{\sigma x_k 0 x_k x_k \dots | x_k \in \{1, 2, 3\}\}$$

olur.

$$\mathcal{A}'' = \frac{1}{2^{t+k+1}}$$

eşitliği 1.Durum $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ doğru parçasından geçen en kısa yol 3 de sadece a koşulunda sağlanabilir. $i = k+2, k+3, k+4, \dots$ için $\varphi_i = 0$ olması gerekir. Böylece, $x_k = x_{k+1}$ olmak üzere, $i = k+2, k+3, \dots$ için $x_i = x_{k+2}, (x_{k+2} \neq x_k$ ve $x_{k+2} \neq 0)$

$$X \in \{\sigma x_k x_k x_{k+2} x_{k+2} x_{k+2} \dots | x_k, x_{k+2} \in \{1, 2, 3\}\}$$

olur (bu kümede bulunan noktaların kod temsillerinin 1.Durum $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ doğru parçasından geçen en kısa yol 1 de elde edilen kümedeki noktaların farklı kod temsilleridir) yada $x_{k+3} \neq x_{k+2}, x_{k+3} \neq x_k$ ve $x_{k+3} \neq 0, (x_{k+2} \neq x_k$ ve

$x_{k+2} \neq 0$) olmak üzere , $i = k + 3, k + 4, \dots$ için $x_i = x_{k+3}$ elde edilir. Böylece,

$$X \in \{\sigma x_k x_k x_{k+2} x_{k+3} x_{k+3} x_{k+3} \dots | x_k, x_{k+2}, x_{k+3} \in \{1, 2, 3\}\}$$

elde edilir (bu kümede bulunan noktaların kod temsillerinin 1.Durum $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ doğru parçasından geçen en kısa yol 2 de elde edilen kümedeki noktaların farklı kod temsilleridir). Bütün durumlardan elde edilen noktaların kod temsilleri kümesi,

$$S\left(O_\sigma, \frac{1}{2^{t+k+1}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{k+t}}\right) = \{\sigma x_k x_{k+1} x_{k+2} x_{k+3} \dots | x_{k+i} \in \{x_k, x_{k+1}\}, i = 2, 3, \dots\}$$

$$\cup \{\sigma x_k 0 x_k x_k \dots | x_k \neq 0\}$$

olarak elde edilir.

Son olarak, $n = 2, 3, 4, \dots$ için O_σ merkezli $\frac{1}{2^{t+k+n}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{k+t}}$ yarıçaplı yuvar yüzeyinin kod kümesini belirleyelim. Yarıçapın toplamdaki $\frac{1}{3 \cdot 2^{k+t}}$ değeri aynı kaldığından ilk iki duruma benzer işlemler yapılarak,

$$\mathcal{A}'' = \frac{1}{2^{t+k+n}}$$

elde edilir. 1.Durum $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ doğru parçasından geçen en kısa yol 3 de $\mathcal{A}''$ değerinin hesabında toplamın içinde $\frac{1}{2^{t+k+1}}$ olduğundan $n \geq 2$ için buradaki formüller kullanılamaz. 1.Durum $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ doğru parçasından geçen en kısa yol 1 de bu eşitliğin sağlanması, $\varphi_{k+2} = 0$ ve $i = k + 3, k + 4, \dots$ için $\varphi_i = 1$ olması ile mümkündür. Yani; $x_k \neq x_{k+1}, x_k \neq 0 \neq x_{k+1}$ ve $x_\mu \neq x_k$ ve $x_\mu \neq x_{k+1}$ olmak üzere, $x_{k+2} = x_\mu$ ve $i = k + 3, k + 4, \dots$ için $x_i \neq x_\mu$ olmasını gerektirir. Böylece;

$$X \in \{\sigma x_k x_{k+1} x_\mu x_{k+3} x_{k+4} \dots | x_{k+i} \in \{x_k, x_{k+1}\}, i = 3, 4, \dots\}$$

elde edilir.

$$\mathcal{A}'' = \frac{1}{2^{t+k+n}}$$

eşitliği 1.Durum $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ doğru parçasından geçen en kısa yol 2 de ise $x_{k+1} = 0$ olmak üzere $i = k + 2, k + 3, k + 4, \dots$ için $\varphi_i = 0$ olması ile mümkündür.

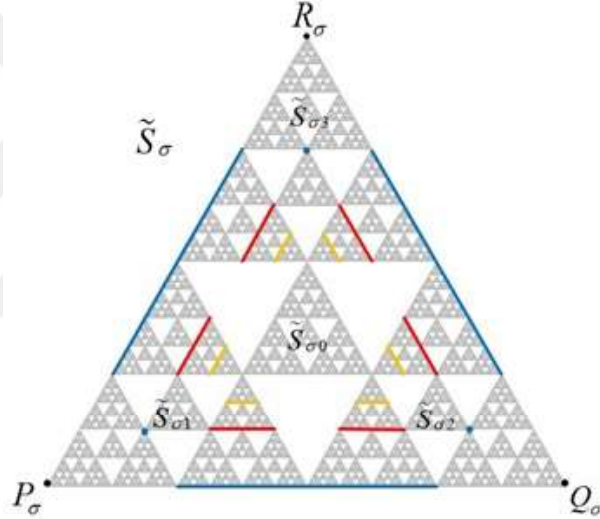
Bu ise $i = k + 2, k + 3, \dots$ için $x_i \neq x_k$ olmasını gerektirir. Böylece,

$$X \in \{\sigma x_k 0 x_{k+2} x_{k+2} x_{k+2} \dots | x_{k+2} \neq x_k, x_{k+2} \in \{1, 2, 3\}\}$$

olur (bu kümede bulunan noktaların kod temsillerinin 1.Durum $(\tilde{S}_{\sigma a_k} \cap \tilde{S}_{\sigma b_k})(\tilde{S}_{\sigma b_k} \cap \tilde{S}_{\sigma 0})$ doğru parçasından geçen en kısa yol 1 de elde edilen kümedeki noktaların farklı kod temsilleridir). Böylece, $n = 2, 3, 4, \dots$ için

$$S\left(O_\sigma, \frac{1}{2^{t+k+1}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{k+t}}\right) = \{\sigma x_k x_{k+1} x_{k+2} x_{k+3} x_{k+4} \dots | x_{k+i} \in \{x_k, x_{k+1}\}, i = 3, 4, \dots\}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □



Şekil 5.5. O_σ merkezli $\frac{1}{2^{n+t+k}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{k+t}}$ yarıçaplı yuvar yüzeyleri

Sonuç 5.10. O_σ merkezli $\frac{1}{2^{n+t+k}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{k+t}}$ yarıçaplı kapalı diskler;

$n = 0$ için,

$$D\left(O_\sigma, \frac{1}{2^{t+k}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{k+t}}\right) = \{\sigma x_k x_{k+1} x_{k+2} x_{k+3} \dots | x_{k+i} \in \{0, 1, 2, 3\}, i = 0, 1, 2, \dots\} = \tilde{S}_\sigma$$

$n = 1$ için, $x_k \neq x_{k+1}$ olmak üzere,

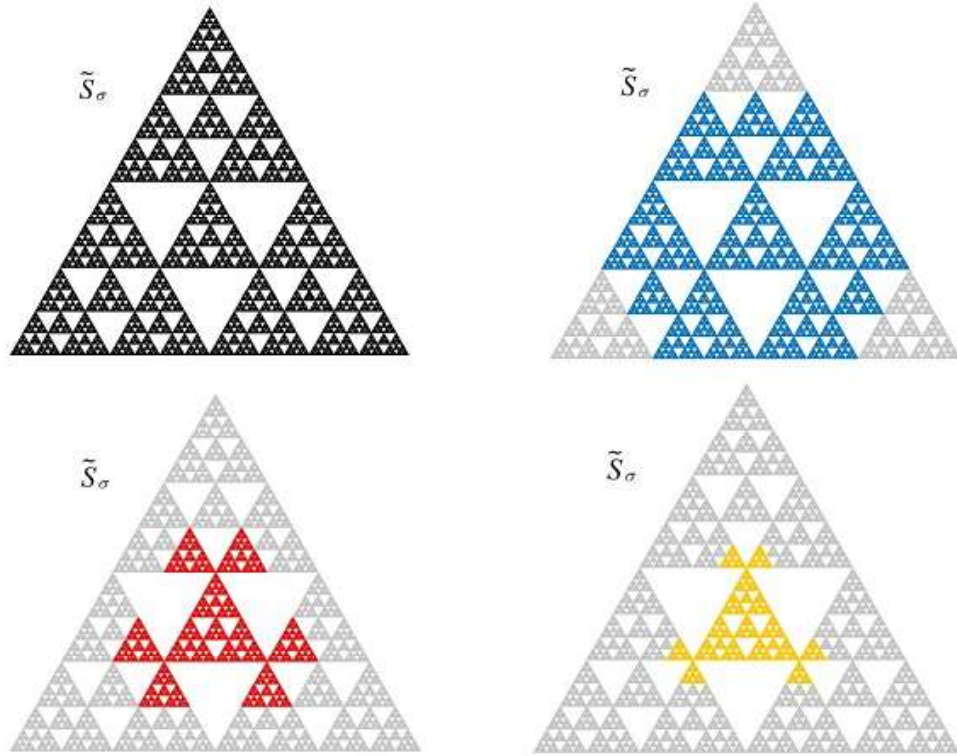
$$D\left(O_\sigma, \frac{1}{2^{t+k}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{k+t}}\right) = \{\sigma x_k x_{k+1} x_{k+2} x_{k+3} \dots | x_{k+i} \in \{0, 1, 2, 3\}, i = 0, 1, 2, \dots\}$$

$n = 2, 3, 4, \dots$ için $x_k \neq x_{k+1}$ ve $x_\mu \neq x_k$ ve $x_\mu \neq x_{k+1}$ olmak üzere

$$D\left(O_\sigma, \frac{1}{2^{t+k+n}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{k+t}}\right) = \{\sigma x_k x_{k+1} x_\mu x_{k+3} x_{k+4} \dots | x_{k+i} \in \{0, 1, 2, 3\}, i = 3, 4, \dots\}$$

$$\cup \{\sigma 0 x_{k+1} x_{k+2} x_{k+3} \dots | x_{k+i} \in \{0, 1, 2, 3\}, i = 1, 2, 3, \dots\}$$

kod kümeleri ile belirlenir.



Şekil 5.6. O_σ merkezli ve sırasıyla $\frac{1}{2^{n+t+k}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{k+t}}$ yarıçaplı kapalı yuvarlar $n = 0, 1, 2, 3$

Teorem 5.11. A ; kod temsillerinden biri 0111... olan $\tilde{S}$ nın bir noktası olsun. Bu durumda, A merkezli $\frac{1}{2^n}$ ($n = 1, 2, 3 \dots$) yarıçaplı yuvar yüzeyleri, $n = 1$ için

$$S\left(A, \frac{1}{2^n}\right) = \{30333 \dots, 31333 \dots, 111 \dots, 21222 \dots, 20222 \dots\}$$

$$\cup \{23x_3x_4x_5 \dots | x_i \in \{2, 3\}, i = 3, 4, 5, \dots\} \cup \{32x_3x_4x_5 \dots | x_i \in \{2, 3\}, i = 3, 4, 5, \dots\}$$

$n = 2$ için;

$$S\left(A, \frac{1}{2^n}\right) = \{10111\dots\} \cup \{13x_3x_4x_5\dots | x_i \in \{1, 3\}, i = 3, 4, 5, \dots\}$$

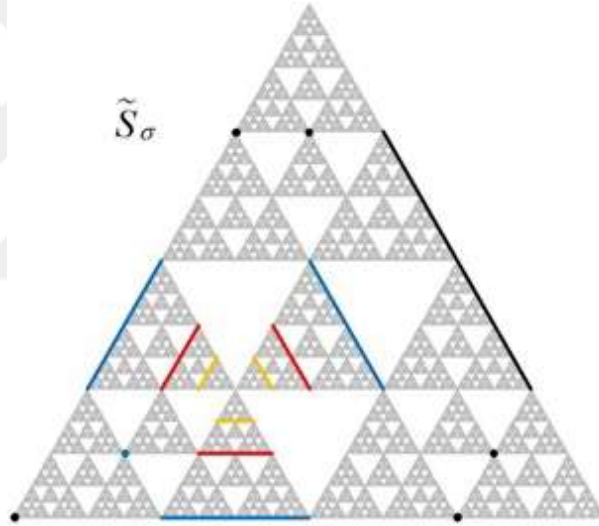
$$\cup \{12x_3x_4x_5\dots | x_i \in \{1, 3\}, i = 3, 4, 5, \dots\} \cup \{0x_2x_3x_4x_5\dots | x_i \in \{2, 3\}, i = 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$n = 3, 4, 5, \dots$ için;

$$S\left(A, \frac{1}{2^n}\right) = \{13x_3x_4x_5\dots | x_i \in \{1, 3\}, i = 3, 4, 5, \dots\} \cup$$

$$\{12x_3x_4x_5\dots | x_i \in \{1, 3\}, i = 3, 4, 5, \dots\} \cup \{0x_2x_3x_4x_5\dots | x_i \in \{2, 3\}, i = 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

kod kümeleri ile belirlenir.



Şekil 5.7. 0111... merkezli $\frac{1}{2^n}$ yarıçaplı yuvar yüzeyleri ($n = 1, 2, 3$)

Sonuç 5.12. A ; kod temsillerinden biri 0111... olan $\tilde{S}$ nın bir noktası olsun. Bu durumda, A merkezli $\frac{1}{2^n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) yarıçaplı kapalı yuvarlar,

$n = 1$ için;

$$D\left(A, \frac{1}{2^n}\right) = \{x_1x_2x_3\dots | x_i \in \{0, 1, 2, 3\}, i = 1, 2, 3, \dots \text{ ve } x_1 = x_2 \text{ iken } x_1 \notin \{1, 2\}\}$$

$n = 2$ için;

$$D\left(A, \frac{1}{2^n}\right) = \{0x_2x_3x_4\dots | x_i \in \{0, 1, 2, 3\}, i = 2, 3, 4, \dots\} \cup$$

$$\{10x_3x_4x_5\dots|x_i \in \{0,1,2,3\}, i = 3,4,5,\dots\} \cup \{12x_3x_4x_5\dots|x_i \in \{0,1,2,3\}, i = 3,4,5,\dots\}$$

$$\cup \{13x_3x_4x_5\dots|x_i \in \{0,1,2,3\}, i = 3,4,5,\dots\}$$

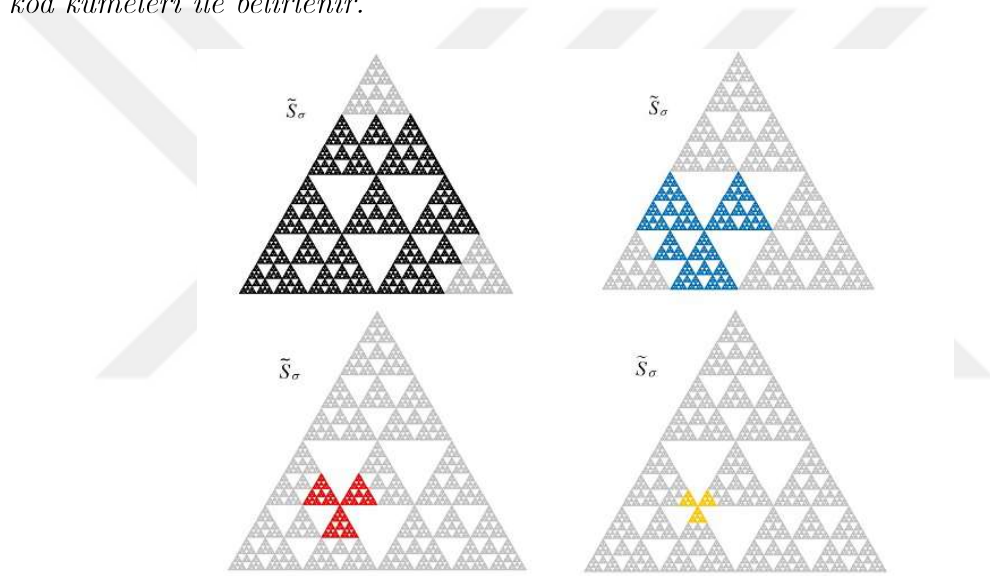
$n = 3,4,5,\dots$ için;

$$D\left(A, \frac{1}{2^n}\right) = \{01111x_3x_4\dots x_nx_{n+1}x_{n+2}\dots|x_i \in \{0,1,2,3\}, i = 2,3,4,\dots\} \cup$$

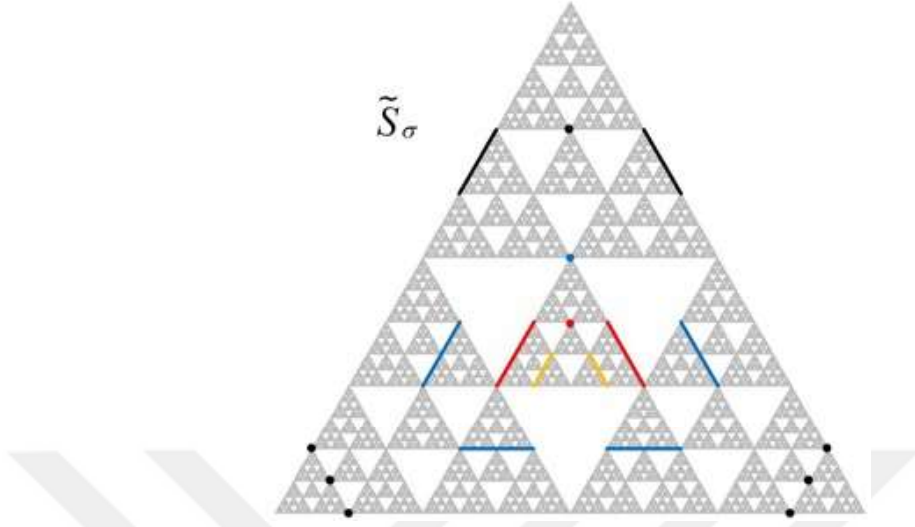
$$\{12333\dots x_nx_{n+1}x_{n+2}\dots|x_i \in \{0,1,2,3\}, i = 3,4,5,\dots\} \cup$$

$$\{1322x_3x_4x_5\dots|x_i \in \{0,1,2,3\}, i = 3,4,5,\dots\}$$

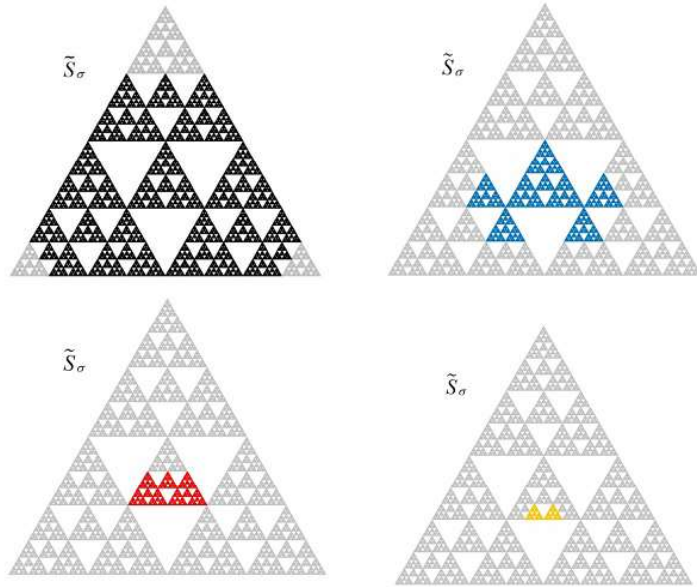
kod kümeleri ile belirlenir.



Şekil 5.8. $0111\dots$ merkezli $\frac{1}{2^n}$ yarıçaplı kapalı yuvarlar ($n = 1,2,3$)



Şekil 5.9. $\sigma 01222 \dots$ merkezli $\frac{1}{2^{n+t+k}}$ yarıçaplı yuvar yüzeyleri ($n = 0, 1, 2, 3$)



Şekil 5.10. $\sigma 01222 \dots$ merkezli $\frac{1}{2^{n+t+k}}$ yarıçaplı kapalı yuvarlar ($n = 0, 1, 2, 3$)

KAYNAKÇA

- [1] Aslan, N. ,Saltan , M. and Demir, B. (2019). The İntrinsic metric formula and a chaotic dynamical system on the code set of the Sierpinski tetrahedron. *Chaos, Solitions and Fractals* ;123;422-428.
- [2] Barnsley, M.F. (1988). *Fractals everywhere*. San Diego,CA,USA : Academic Press.
- [3] Barnsley, M.F. (2006). *Superfractals*. New York ,NY,USA: Cambridge University Press.
- [4] Burago, D., Burago, Y. and Ivanov, S. (2001). *A Course in Metric Geometry*. Providence, RI, USA : AMS.
- [5] Cristea,LL. (2005). A Geometric property of the Sierpinski carpet.*Quaestiones Mathematicae* ; 28 ;251-262.
- [6] Cristea,LL. and Steinsky,B. (2013).Distances in Sierpinski graphs and on the Sierpinski gasket.*Aequationes Mathematicae* ;85 ,201-219.
- [7] Denker, M. and Sato,H. (2013).Sierpinski gasket as a Martin boundary II (the intrinsic metric).*Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*; 35,769-794.
- [8] Falconer, K. (2003). *Fractal geometry*. Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ.
- [9] Grabner, P. and Tichy, RF. (1998).Equidistribution and Brownian motion on the Sierpinski gasket.*Monatshefte für Mathematik*; 125,147-164.
- [10] Gu,J., Ye,Q. and Xi, L. (2019). Geodesics of higher-dimensional Sierpinski gasket. *Fractals*; 27(4);195009. doi:10.1142/S0218348X1950049X.
- [11] Gulick, D. (1988). *Encounters with Chaos and Fractals*. Boston,MA,USA : Academic Press.

- [12] Güneri, M. and Saltan, M. (2019). Intrinsic metric formulas on some self-similar sets via code representation. *Fractal and Fractional*; 3 (1); 1-13.
- [13] Hinz, A.M. and Schief, A. (1990). The average distance on the Sierpinski gasket. *Probability Theory and Related Fields*; 87, 129-138.
- [14] Mandelbrot, B.B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. San Francisco, CA, USA : W.H. Freeman and Company.
- [15] Özdemir, Y. (2019). The intrinsic metric and geodesic on the Sierpinski gasket $SG(3)$. *Turkish Journal of Mathematics*; 43, 2741-2754. doi:10.3906/mat-1907-18.
- [16] Özdemir, Y., Saltan, M. and Demir, B. (2018). The intrinsic metric on the box fractal. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*; 45(5); 1269-1281. doi:10.1007/s41980-018-00197-w.
- [17] Romik, D. (2006). Shortest paths in the Tower of Hanoi graph and finite automata. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*; 20, 610-622.
- [18] Saltan, M. (2018). Some interesting code sets of the Sierpinski triangle equipped with the intrinsic metric. *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*; 57(4); 152-160.
- [19] Saltan, M. (2018). Intrinsic metrics on Sierpinski-like triangles and their geometric properties. *Symmetry*; 10(6); 204.
- [20] Saltan, M. (2019). The relation between binary tree and the Sierpinski triangle which is equipped with the intrinsic metric. *Eskişehir Technical University Journal of Science and Technology B- Theoretical Science*; 7(1); 1-12.
- [21] Saltan, M., Aslan, N. and Demir, B. (2019). A discrete chaotic dynamical system on the Sierpinski gasket. *Turkish Journal of Mathematics*; 43 (1); 361-372.
- [22] Saltan, M., Özdemir, Y. and Demir, B. (2018). An explicit formula of the intrinsic metric on the Sierpinski gasket via code representation. *Turkish Journal of Mathematics*; 52; 716-725.

- [23] Saltan,M., Özdemir,Y. and Demir, B. (2018). Geodesics of the Sierpinski gasket.*Fractals*; 26 (3);1850024.
- [24] Strichartz,RZ. (1999). Isoperimetric estimates on Sierpinski gasket type fractals.*Transactions of the American Mathematical Society*;351 ;1705-1752.
- [25] Şen, A.İ and Saltan,M. (2019). The formulization of the intrinsic metric on the added Sierpinski triangle by using the code representations.*Turkish Journal of Mathematics*, 356-377.
- [26] Zhang, Z., Zhou, S., Chen , L., Yin, M. and Guan, J. (2008). The exact solution of the mean geodesic distance for Vicsek fractals.*Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*;41;485102.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : ASLIHAN İKLİM ŞEN
Yabancı Dil : İNGİLİZCE
Doğum Yeri ve Yılı : İSTANBUL - 1993
E-Posta : aslihaniklicinar@eskisehir.edu.tr

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2017-2020, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Geometri Bilim Dalı, Yüksek Lisans
- 2015-2017, Öğrenci İşçi, Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Lisans
- 2011-2017, Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Lisans

Yayınları ve Bilimsel/Sanatsal Faaliyetleri:

- 2018, Poster Bildiri, A Classification according to the Adresses of Points of Some Fractals, the International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM'18), Gelişim University, 20-24 June, İstanbul, Türkiye.
- 2019, Özet Bildiri, On the Construction of Intrinsic Metric on the Added Sierpinski Triangle, International Conference on Mathematics , 'An İstanbul Meeting for World Mathematicians', Fatih Sulatn Mehmet University, 3-5 July, İstanbul, Türkiye.
- 2019, Saltan, M., Şen, A.İ. (2019). The formulization of the intrinsic metric on the added Sierpinski triangle by using the code representations. Turkish Journal of Mathematics, 356-377.

Ödülleri:

- 2017, Fen Fakültesi Matematik Bölüm Birinciliği, Anadolu Üniversitesi.