

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Esmâ ARAS SAMİ

EKSPONANSİYEL m -KONVEKS FONKSİYONLAR SINIFI İÇİN
ÇEŞİTLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER
YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ

Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

AĞRI – 2023

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EKSPONANSİYEL m -KONVEKS FONKSİYONLAR SINIFI İÇİN ÇEŞİTLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Jüri: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

Doç. Dr. Abdullah ERGÜN

Bu tezde, üstel tipli konveks fonksiyonlar incelenmiş ve yeni bir fonksiyon sınıfı olarak eksponansiyel m -konveks fonksiyonlar ortaya konmuştur. Bu tanımdan yola çıkarak çeşitli integral eşitsizlikler elde edilmiştir. Birinci kısım Giriş bölümünde konveks fonksiyonların tarihinden ve eksponansiyel konveks ile farklı türden eksponansiyel konveks fonksiyon sınıfları ile ilgili yapılan çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir. İkinci kısım Kuramsal Temeller bölümünde konveks fonksiyonlar, eksponansiyel konveks, eksponansiyel m -konveks fonksiyon tanımları ve çeşitli integral eşitsizliklerin tanımlarına yer verilmiştir. Üçüncü kısım Materyal ve Yöntem bölümünde eksponansiyel konveks ve eksponansiyel m -konveks fonksiyon sınıfları ile ilgili lemmalar ve bunlardan yola çıkılarak daha önce ispatlanmış teoremlere yer verilmiştir. Dördüncü kısım Araştırma Bulguları bölümünde yeni bir eksponansiyel m -konveks fonksiyon tanımı verilmiş olup, bununla ilgili çeşitli integral eşitsizlikler içeren teorem ve ispatlarına yer verilmiştir.

2023, 60 sayfa

Anahtar Kelimeler: Eşitsizlikler, konveks fonksiyon, m -konveks fonksiyon, eksponansiyel konveks fonksiyon, eksponansiyel m -konveks fonksiyon.

ABSTRACT
MASTER'S THESIS
VARIOUS INTEGRAL INEQUALITIES FOR THE EXPONENTIALLY
 m -CONVEX FUNCTION CLASS

Jury: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

Doç. Dr. Abdullah ERGÜN

In this thesis, exponential convex functions are examined and exponential m -convex functions are introduced as a new class of functions. Based on this definition, various integral inequalities are obtained. In the first part, Introduction, some information is given about the history of convex functions and the studies on exponential convex and different types of exponential convex function classes. In the second part, Theoretical Fundamentals, definitions of convex functions, exponential convex, exponential m -convex functions and various integral inequalities are given. In the third part, Materials and Methods, lemmas related to exponential convex and exponential m -convex function classes and theorems that have been proven previously. In the fourth section, Research Findings, a new exponential m -convex function definition is given, and its theorems and proofs containing various integral inequalities are given.

2023, 60 pages

Key Words: Inequalities, convex function, m -convex function, exponentially convex function, exponentially m -convex function.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum bu çalışma Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Yüksek Lisans tez çalışmamın başlangıcından bu yana, bu alanda çalışmamı destekleyen, bütün enerjisi ve engin birikimiyle beni motive eden, çalışmalarımda eşsiz katkıları bulunan, bana bilimsel çalışma ve düşünme yeteneğini aşılayan saygıdeğer danışman hocam,

Sayın Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR'e;

teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Hayatımda ihtiyaç duyduğum her anımda yanımda olan ve desteklerini, yardımlarını esirgemeyen aileme; özellikle babam Zeki ARAS'a ve eğitim hayatımda büyük katkıları olan abim Mehmet Nuri ARAS'a teşekkürlerimi sunarım.

Tez yazım aşamasında bana her konuda yardımcı olan sevgili eşim Mehmet SAMİ'ye ve hayatıma renk katan, tez dönemi boyunca negatif yönde etkisi olmasına rağmen bana güç veren biricik oğlum Ali Zakir SAMİ'ye teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim-Öğretim hayatım boyunca bana emek veren bütün öğretmenlerime teşekkür ederim.

Temmuz 2023

Esmâ ARAS SAMİ

İçindekiler

ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	3
2.1. Genel Kavramlar.....	3
2.2. Pozitif Reel Sayılar için bazı özel ortalamalar	7
3. MATERYAL VE YÖNTEM	11
3.1. Eksponansiyel Konveks Fonksiyonlarla İlgili İntegral Eşitsizlikler İçeren Bazı Teoremler	11
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	30
4.1. Yeni eksponansiyel m -konveks fonksiyonu ve çeşitli integral eşitsizlikler	30
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	50
Kaynakça	51
ÖZGEÇMİŞ	53

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}_+$	: Pozitif Reel Sayılar Kümesi
I	: $\mathbb{R}$ 'de Bir Aralık
I°	: I 'nın İçi
$\epsilon^1[a, b]$	: $[a, b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
ζ''	: ζ Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi
$J_{u+}^\phi f(\alpha)$	: α mertebeden sağ taraflı Riemann-Liouville Kesirli İntegral
$J_{u-}^\phi f(\alpha)$	: α mertebeden sol taraflı Riemann-Liouville Kesirli İntegral
${}^{CF}D^\alpha f(\sigma_1)$	: α mertebeden Caputo-Fabrizio Kesirli Türev
${}^{CF}_{\rho_1}I^\alpha f(\sigma_1)$	: α mertebeden Caputo-Fabrizio Kesirli İntegral
${}^{ABC}_{\rho_1}D^\alpha_{\sigma_1} f(\sigma_1)$	: α mertebeden Caputo Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli Tü-
	rev
${}^{ABR}_{\rho_1}D^\alpha_{\sigma_1} f(\sigma_1)$	: α mertebeden Riemann Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli
	Türev
${}^{CPC}_0D^\beta_\theta f(\theta)$	: Orantılı Caputo-Hibrit Kesirli Operatör
${}^{AB}_aI^\alpha \{f(t)\}$	: α mertebeden Atangana-Baleanu Kesirli İntegral

1. GİRİŞ

Matematik insanlık tarihi kadar eski ve insanlık için diğer bilimlere hizmet eden, problemler ortaya koyan ve bu problemlere çözümler sunan bir araçtır. Eşitsizlikler de matematiğin her alanında, fizik ve mühendislik alanlarında incelenmiş ve kullanılmıştır. Birçok araştırmacı eşitsizlikler üzerine çalışmalar yapmıştır ve her geçen gün ortaya yeni integral eşitsizlikler konmaktadır.

20. yüzyılın başlarından günümüze kadar, bu alandaki araştırmacılar, çeşitli konveks fonksiyon tanımları ve bunlarla ilişkili integral eşitsizlikleri keşfetmişlerdir. Bu çalışmada eksponansiyel konveks ve eksponansiyel m -konveks fonksiyonlar ile ilgili tanım, teorem ve eşitsizliklere yer verilecektir. Bunlarla ilgili yapılan bazı araştırmaya ve çalışmalar şunlardır:

Üstel tipli konvekslikte kullanılan üstel fonksiyon tanımını ilk kez ortaya İsviçreli matematikçi ve fizikçi Leonhard Euler koymuştur.

"Hermite-Hadamard Inequalities for Exponentially Convex Functions" adlı makalede yeni bir eksponansiyel konveks fonksiyon tanımı ortaya konmuştur ve Hermite-Hadamard eşitsizliğini kullanarak integral eşitsizlikler elde edilmiştir (Awan et al., 2018).

"Fractional Exponentially m -Convex Functions and Inequalities" başlıklı çalışmada yeni bir eksponansiyel m -konveks fonksiyonu tanıtılmıştır. Bu konveks fonksiyon sınıfı için bazı yeni Hermite-Hadamard eşitsizlikleri, Riemann-Liouville kesirli integralleri aracılığı ile elde edilmiştir (Noor et al., 2019).

"Fractional integrals inequalities for exponentially m -convex functions" adlı çalışmada eksponansiyel m -konveks fonksiyonlarla genelleştirilmiş kesirli integral operatörlerin sınırlarını araştırılmıştır. Ayrıca aynı çalışmada, Hadamard tipi eşitsizlikler analiz edilmiş ve yeni sonuçlar ortaya konmuştur (Mehmood and Farid, 2020).

"Fractional Integral Inequalities via Atangana-Baleanu Operators for Convex and Concave Functions" adlı çalışmada Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri kullanılarak yeni eşitsizlikler Power-mean, Hölder ve Young gibi klasik eşitsizlikler yardımıyla ortaya konmuştur (Akdemir et al., 2021).

"Novel Approaches for Differentiable Convex Functions via the Proportional Caputo-Hybrid Operators" adlı çalışmada yazarlar eşitsizlik teorisi ve kesirli analiz arasındaki ilişkiyi inşa etmişlerdir. Yeni kesirli operatörler sayesinde ve orantılı Caputo-Hybrid operatöre da-

yalı olarak, diferansiyellenebilen konveks fonksiyonlar için yeni yaklaşımlar içeren integral eşitsizlikler ortaya koymuşlardır (Gürbüz et al., 2022).

Bu tez çalışması kapsamında (Awan et al., 2018) de yer alan eksponansiyel konveks fonksiyon tanımından yola çıkarak yeni bir eksponansiyel m - konveks fonksiyon tanımı inşa edilecektir. (Akdemir et al., 2021) ve (Gürbüz et al., 2022) makalelerinden yola çıkarak yeni eksponansiyel m - tanımı, Atangana-Baleanu ve Caputo-Hybrid kesirli integral operatörler kullanarak Power-Mean, Hölder ve Young eşitsizliklerinden faydalanmak suretiyle yeni integral eşitsizlikler verilecektir.



2. KURAMSAL TEMELLER

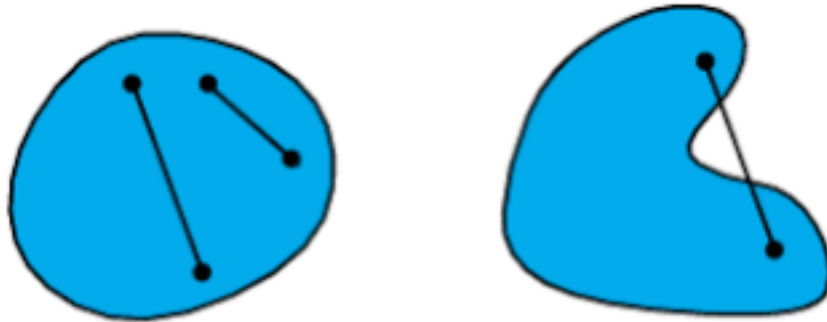
2.1. Genel Kavramlar

Çalışmanın bu kısmında konveks fonksiyonlar ile ilgili bazı tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 2.1 (Konveks Küme): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $\rho, \sigma \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L : z = t\rho + (1 - t)\sigma, \quad 0 \leq t \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = t\rho + (1 - t)\sigma$ eşitliğindeki ρ ve σ 'nin katsayıları için $t + (1 - t) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $t, 1 - t$ yerine $t + k = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan t, k reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları ρ ve σ olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir (Pečarić and Tong, 1992).



Şekil 2.1. Konveks Küme ve Konveks Olmayan Küme

Eşitsizlik teorisi için büyük önem taşıyan ve özellikle bu alanda sıklıkla kullanılan konvekslik kavramından birçok bilim adamı büyük ölçüde yararlanmaktadır. Konveks fonksiyonların tanımını aşağıdaki gibi verilmektedir:

Tanım 2.2 (J-konveks fonksiyon): $P, \mathbb{R}'$ 'de bir aralık olsun. Bütün $\rho, \sigma \in P$ için

$$\Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \leq \frac{\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma)}{2}$$

koşulunu gerçekleştiren Λ fonksiyonuna P üzerinde Jensen anlamında konveks veya J - konveks fonksiyon denir (Mitrinovic and Vasic, 1970).

Tanım 2.3 (Konveks fonksiyon): $I \subset \mathbb{R}$ 'de bir aralık $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $\rho, \sigma \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için,

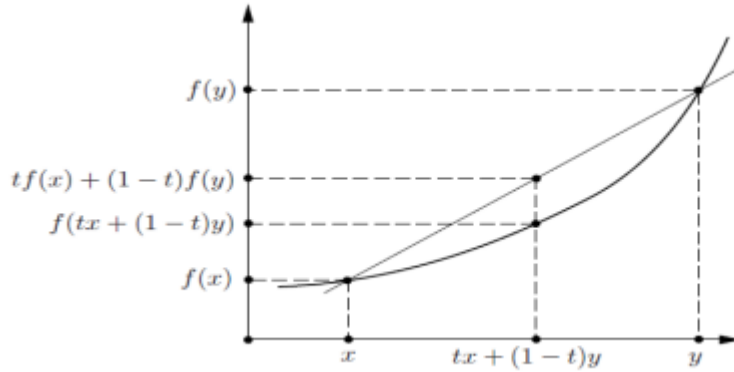
$$f(t\rho + (1-t)\sigma) \leq tf(\rho) + (1-t)f(\sigma)$$

şartını sağlayan f fonksiyona konveks fonksiyon denir (Pečarić and Tong, 1992).

Eğer $t \in (0, 1)$ aralığında alınırsa bu durumda

$$f(t\rho + (1-t)\sigma) < tf(\rho) + (1-t)f(\sigma)$$

olur. Bu f fonksiyonuna da strictly konveks fonksiyon denir. $-f$ konveks (strictly konveks) ise bu takdirde f 'ye konkav (strictly konkav) denir.



Şekil 2.2. Aralık üzerinde konveks fonksiyon

Konveks fonksiyonlar ve eşitsizlikler üzerine literatürde birçok çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmalardan bazıları (Mitrinovic et al., 2013), (Dragomir et al., 1999), (Alomari and Darus, 2008), (Alomari and Darus, 2009), (Akdemir and Ozdemir, 2010), (İşcan, 2019), (Ozdemir et al., 2011) ve (Toader, 1988) şeklinde sıralanabilir.

Tanım 2.4 (m-konveks fonksiyon): $f : [0, k] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $k > 0$ olsun. Her $\rho, \sigma \in [0, k]$, $m, t \in [0, 1]$ için

$$f(t\rho + m(1-t)\sigma) \leq tf(\rho) + m(1-t)f(\sigma)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna m -konveks fonksiyon denir. $f(0) \leq 0$ şartını sağlayan $[0, k]$ aralığında tanımlı tüm m -konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(k)$ ile gösterilir (Toder, 1988).

Tanım 2.5 (Üstel tipli konveks fonksiyon): $A : I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon, her $\rho, \sigma \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$A(t\rho + (1-t)\sigma) \leq (e^t - 1)A(\rho) + (e^{1-t} - 1)A(\sigma)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa A 'ya üstel tipli konveks fonksiyon denir (Kadakal and İşcan, 2020).

Tanım 2.6 (Ekspansiyel konveks fonksiyon): $f : P \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon $\rho, \sigma \in P, t \in [0, 1]$ için,

$$e^{f((1-t)\rho + t\sigma)} \leq [(1-t)e^{f(\rho)} + te^{f(\sigma)}]$$

funksiyonu ekspansiyel konvektir (Noor et al., 2019).

Tanım 2.7 (Ekspansiyel m -konveks fonksiyon): $f : P \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon $\rho, \sigma \in P, t \in [0, 1]$ ve $m \in (0, 1]$ için,

$$e^{f((1-t)\rho + mt\sigma)} \leq [(1-t)e^{f(\rho)} + mte^{f(\sigma)}]$$

funksiyonuna ekspansiyel m -konveks fonksiyon denir (Noor et al., 2019).

Burada $n = \frac{1}{2}$ alınırsa,

$$e^{f(\frac{\rho+m\sigma}{2})} \leq \frac{e^{f(\rho)} + me^{f(\sigma)}}{2}$$

elde edilir. Bu da Jensen anlamında ekspansiyel m -konveks fonksiyon olarak adlandırılır.

Tanım 2.8 (Ekspansiyel konveks fonksiyon): $f : K \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\rho, \sigma \in I, t \in [0, 1]$ ve $\alpha \in R$ için

$$f((1-t)\rho + t\sigma) \leq (1-t)\frac{f(\rho)}{e^{\alpha\rho}} + t\frac{f(\sigma)}{e^{\alpha\sigma}}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa ekspansiyel konveks fonksiyondur (Awan et al., 2018).

Tanım 2.9 (Beta fonksiyonu):

$$\beta(t, k) = \int_0^1 a^{t-1}(1-a)^{k-1} da, \quad t, k > 0$$

şeklinde. Bu eşitlik Euler tipli Beta fonksiyonu ya da birinci eşit Euler integrali olarak adlandırılır. Beta fonksiyonu,

$$(1) \beta(t, k) = \beta(k, t)$$

$$(2) \beta(t+1, k) = \frac{t}{t+k} \beta(t, k)$$

özelliklerini sağlar (Marshall et al., 2007).

Tanım 2.10 (Gama fonksiyonu):

$$\Gamma(\phi) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\phi-1} dt.$$

şeklinde tanımlıdır (Marshall et al., 2007).

Teorem 2.1 (Young Eşitsizliği): $\theta, k > 0$ için $[0, k]$ üzerinde tanımlı reel değerli, sürekli ve artan fonksiyon olsun. $\theta(0) = 0, \rho \in [0, k]$, ve $\sigma \in [0, \theta(k)]$ için Young eşitsizliği aşağıdaki gibidir:

$$\int_0^\rho \theta(x) dx + \int_0^\sigma \theta^{-1}(x) dx \geq \rho\sigma.$$

Burada θ^{-1}, θ fonksiyonunun tersidir. Eğer $\theta(\sigma) = \theta(\rho)$ ise eşitsizlik eşitliğe dönüşür.

θ kuvvet fonksiyonu olan $\theta(w) = w^{p-1}$ seçilirse:

$$\frac{\rho^p}{p} + \left(\frac{p-1}{p} \right) \sigma^{p/p-1} \geq \rho\sigma,$$

benzer şekilde;

$$\frac{\rho^p}{p} + \frac{\sigma^q}{q} \geq \rho\sigma,$$

dir. Burada $\rho, \sigma \geq 0, p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir (Mitrinovic et al., 2013).

Teorem 2.2 (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. θ_1 ve $\theta_2, [\rho, \sigma]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|\theta_1|^p$ ve $|\theta_2|^q, [\rho, \sigma]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_\rho^\sigma |\theta_1(\phi)\theta_2(\phi)| d\phi \leq \left(\int_\rho^\sigma |\theta_1(\phi)|^p d\phi \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\rho^\sigma |\theta_2(\phi)|^q d\phi \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği gerçekleşir (Mitrinovic et al., 2013).

Ayrıca; Power mean eşitsizliği, Hölder eşitsizliğinin bir sonucudur ve şu şekilde ifade edilir:

Sonuç 2.1 (Power Mean Eşitsizliği): $q \leq 1$ olsun. θ_1 ve $\theta_2, [\rho, \sigma]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|\theta_1|$ ve $|\theta_2|^q, [\rho, \sigma]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_{\rho}^{\sigma} |\theta_1(\phi)\theta_2(\phi)|d\phi \leq \left(\int_{\rho}^{\sigma} |\theta_1(\phi)|d\phi \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\rho}^{\sigma} |\theta_1(\phi)||\theta_2(\phi)|^qd\phi \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Reel sayılarda bir diğer temel eşitsizlik de üçgen eşitsizliğidir.

Teorem 2.3 (Üçgen Eşitsizliği): Herhangi ρ, σ reel sayıları için

$$|\rho + \sigma| \leq |\rho| + |\sigma|,$$

$$||\rho| - |\sigma|| \leq |\rho - \sigma|,$$

$$||\rho| - |\sigma|| \leq |\rho + \sigma|,$$

ve tümevarım metoduyla

$$|\rho + \dots + \rho_n| \leq |\rho| + \dots + |\rho_n|$$

eşitsizlikleri gerçekleşir (Mitrinovic et al., 2013).

Teorem 2.4 (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): $\theta, [\rho, \sigma]$ aralığında sürekli gerçekteğerli fonksiyon olsun.

$$\left| \int_{\rho}^{\sigma} \theta(\phi)d\phi \right| \leq \int_{\rho}^{\sigma} |\theta(\phi)|d\phi \quad (\rho < \sigma)$$

eşitsizliği gerçekleşir (Mitrinovic et al., 2013).

2.2. Pozitif Reel Sayılar için bazı özel ortalamalar

$\rho, \sigma \in \mathbb{R}$ olmak üzere

(1) Aritmetik ortalama:

$$\Omega = \Omega(\rho, \sigma) = \frac{\rho + \sigma}{2},$$

(2) Geometrik ortalama:

$$\Lambda = \Lambda(\rho, \sigma) = \sqrt{\rho\sigma},$$

(3) Harmonik ortalama:

$$\Delta = \Delta(\rho, \sigma) = \frac{2\rho\sigma}{\rho + \sigma},$$

(4) Logaritmik ortalama:

$$\Phi = \Phi(\rho, \sigma) = \begin{cases} \rho, & \rho = \sigma \\ \frac{\sigma - \rho}{\ln \sigma - \ln \rho}, & \rho \neq \sigma \end{cases} \quad (2.1)$$

(5) İdentrik ortalama:

$$\Psi = \Psi(\rho, \sigma) = \begin{cases} \rho, & \rho = \sigma \\ \frac{1}{e} \left(\frac{\sigma^\sigma}{\rho^\rho} \right)^{\frac{1}{\sigma - \rho}}, & \rho \neq \sigma \end{cases}$$

(6) p -Logaritmik ortalama:

$$\Phi_p = \Phi_p(\rho, \sigma) = \begin{cases} \rho, & \rho = \sigma \\ \left[\frac{\sigma^{p+1} - \rho^{p+1}}{(p+1)(\sigma - \rho)} \right]^{\frac{1}{p}}, & \rho \neq \sigma \end{cases}$$

geçerlidir.

Bu özel ortalamalar arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$\Delta \leq \Lambda \leq \Phi \leq \Psi \leq \Omega.$$

Tanım 2.11 (Riemann-Liouville Kesirli Mertebeden İntegral): $\phi > 0$ olmak üzere $\theta - 1 < \phi \leq \theta, \theta \in \mathbb{N}$, ve $1 < \alpha < \beta$. f fonksiyonunun ϕ mertebesinden sağ ve sol taraflı Riemann-Liouville kesirli integralleri şu şekilde verilir.

$$J_{u+}^\phi f(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\phi)} \int_u^\alpha (\alpha - t)^{\phi-1} f(t) dt, \quad (2.2)$$

$$J_{\beta-}^\phi f(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\phi)} \int_\alpha^\beta (t - \alpha)^{\phi-1} f(t) dt,$$

Tanım 2.12 $f \in \varepsilon^1(0, \rho_2), \rho_2 > \rho_1, \alpha \in [0, 1]$ olmak üzere yeni Caputo kesirli türevi şu şekilde tanımlanır:

$${}^{CF}D^\alpha f(\sigma_1) = \frac{M(\alpha)}{1 - \alpha} \int_{\rho_1}^{\sigma_1} f'(\mu) \exp \left[-\frac{\alpha}{1 - \alpha} (\sigma_1 - \mu) \right] d\mu, \quad (2.3)$$

ve burada $M(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonudur (Caputo and Fabrizio, 2015).

Bu yeni kesirli türev operatörüne bağlı olarak, Caputo-Fabrizio kesirli integral operatörü aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.13 $f \in \varepsilon^1(0, \rho_2), \rho_2 > \rho_1, \alpha \in [0, 1]$ olmak üzere Caputo-Fabrizio sağ ve sol taraflı kesirli integralleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$({}^{CF}I_{\rho_1}^\alpha)(\sigma_1) = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(\sigma_1) + \frac{\alpha}{B(\alpha)}\int_{\rho_1}^{\sigma_1}f(y)dy, \quad (2.4)$$

ve

$$({}^{CF}I_{\rho_2}^\alpha)(\sigma_1) = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(\sigma_1) + \frac{\alpha}{B(\alpha)}\int_{\sigma_1}^{\rho_2}f(y)dy, \quad (2.5)$$

burada $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonudur (Caputo and Fabrizio, 2015).

Tanım 2.14 $f \in \Lambda^1(\rho_1, \rho_2), \rho_2 > \rho_1, \alpha \in [0, 1]$ olmak üzere yeni kesirli türev tanımı şu şekilde verilir (Atangana and Baleanu, 2016):

$${}^{ABC}D_{\rho_1}^\alpha[f(\sigma_1)] = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\int_{\rho_1}^{\sigma_1}f'(x)E_\alpha\left[-\alpha\frac{(\sigma_1-x)^\alpha}{1-\alpha}\right]dx. \quad (2.6)$$

Tanım 2.15 $f \in \Lambda^1(\rho_1, \rho_2), \rho_2 > \rho_1, \alpha \in [0, 1]$ olmak üzere yeni kesirli türev tanımı şu şekilde verilir (Atangana and Baleanu, 2016):

$${}^{ABR}D_{\rho_1}^\alpha[f(\sigma_1)] = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\frac{d}{d\sigma_1}\int_{\rho_1}^{\sigma_1}f(x)E_\alpha\left[-\alpha\frac{(\sigma_1-x)^\alpha}{1-\alpha}\right]dx. \quad (2.7)$$

Tanım 2.16 $b > a, \alpha \in [0, 1]$ olmak üzere $f \in L^1(a, b)$ fonksiyonunun Atangana-Baleanu kesirli integral operatörü:

$${}^{AB}I_a^\alpha\{f(t)\} = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_a^tf(y)(t-y)^{\alpha-1}dy$$

şeklinde tanımlanır (Atangana and Baleanu, 2016).

Tanım 2.17 $\beta > 0$ ve $\beta \notin 1, 2, 3, \dots, \gamma = [\beta] + 1, f \in AC^\gamma[\rho, \sigma]$, n . türevi kesinlikle sürekli olan fonksiyonların uzayı olsun. β mertebeden sol taraflı ve sağ taraflı kesirli türevler aşağıdaki gibi tanımlanır (Caputo, 1967):

$$\left({}^C D_{\rho^+}^\beta f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma - \beta)} \int_{\rho}^x \frac{f^\gamma(\theta)}{(x - \theta)^{\beta - \gamma + 1}} d\theta \quad (x > \rho) \quad (2.8)$$

ve

$$\left({}^C D_{\sigma^-}^\beta f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma - \beta)} \int_x^{\sigma} \frac{f^\gamma(\theta)}{(\theta - x)^{\beta - \gamma + 1}} d\theta \quad (x < \sigma). \quad (2.9)$$

Tanımında hem türev hem de integral operatör kısımlarını içeren yerel olmayan ve tekil bir operatör olarak öne sürülen ve Riemann-Liouville integrali ile Caputo türev operatörlerinin basit bir lineer birleşimi olan orantılı Caputo hibrit operatörü aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.18 $\Lambda : I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{I^\circ}$ üzerinde diferansiyellenebilen fonksiyon olsun. Ayrıca Λ ve Λ' I 'da yerel L^1 fonksiyonları olsun. Orantılı Caputo-hibrit operatörü şu şekilde tanımlanabilir:

$${}^{CPC} D_{\theta}^\beta f(\theta) = \frac{1}{1 - \beta} \int_0^\theta (K_1(\beta) f(\gamma) + K_0(\beta) f'(\gamma)) (\theta - \gamma)^{-\beta} d\gamma \quad (2.10)$$

burada $\beta \in [0, 1]$ ve K_0 ile K_1 aşağıdaki şartları sağlayan uygun fonksiyonlardır (Baleanu et al., 2020).

$$\begin{cases} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} K_0(\alpha) = 0; \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} K_0(\alpha) = 1; K_0(\alpha) \neq 0, \alpha \in (0, 1]; \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} K_1(\alpha) = 0; \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} K_1(\alpha) = 1; K_1(\alpha) \neq 0, \alpha \in [0, 1). \end{cases} \quad (2.11)$$

3. MATERİYAL VE YÖNTEM

3.1. Ekspansiyel Konveks Fonksiyonlarla İlgili İntegral Eşitsizlikler İçeren Bazı Teoremler

Çalışmanın bu bölümünde konveks ve ekspansiyel konveks fonksiyonlar ile ilgili bazı lemmalar, teoremler ve bunlara bağlı olarak daha önce ispatlanmış bazı teoremlere yer verilecektir.

Teorem 3.1 *I $\mathbb{R}$ 'de bir aralık, $\rho, \sigma \in I$ ve $\rho < \sigma$ olmak üzere $g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde*

$$g\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \leq \frac{1}{\sigma - \rho} \int_{\rho}^{\sigma} g(x) dx \leq \frac{g(\rho) + g(\sigma)}{2} \quad (3.1)$$

eşitsizlik gerçekleşir. Konveks fonksiyonlar için (3.1) literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinmektedir (Pečarić and Tong, 1992).

Teorem 3.2 *$g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $m \in (0, 1]$ olmak üzere m -konveks fonksiyon olsun. Eğer $0 \leq \rho < \sigma$ ve $g \in L_1[\rho m, \sigma]$ ise bu takdirde;*

$$\frac{1}{m+1} \left[\int_{\rho}^{m\sigma} g(x) dx + \frac{m\sigma - \rho}{\sigma - m\rho} \int_{m\rho}^{\sigma} g(x) dx \right] \leq (m\sigma - \rho) \frac{g(\rho) + g(\sigma)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir (Dragomir, 2001).

Teorem 3.3 *$p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer Λ ve $g, [\rho, \sigma]$ aralığında tanımlı reel fonksiyon $|\Lambda|^p$ ve $|g|^q, [\rho, \sigma]$ integrallenebilen fonksiyon ise*

$$\begin{aligned}
\int_{\rho}^{\sigma} |\Lambda(x)g(x)|dx &\leq \frac{1}{\sigma - \rho} \left| \left(\int_{\rho}^{\sigma} (\sigma - x) |\Lambda(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\rho}^{\sigma} (\sigma - \rho) |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad + \left. \left(\int_{\rho}^{\sigma} (x - \rho) |\Lambda(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\rho}^{\sigma} (x - \rho) |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right| \\
&\leq \left(\int_{\rho}^{\sigma} |\Lambda(x)|^p dx \right) \left(\int_{\rho}^{\sigma} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Akdemir et al., 2022).

Sonuç 3.1 Her negatif olmayan konveks fonksiyon aynı zamanda üstel tipli konveks fonksiyondur (Kadikal et al., 2019).

Örnek 3.1 $\Lambda : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ için $\Lambda(x) = -\ln x$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında konveks bir fonksiyon olmasına rağmen sadece $(0, 1]$ aralığında üstel tipli konveks bir fonksiyondur.

Sonuç 3.2 Her üstel tipli konveks fonksiyon $h(\gamma) = e^{\gamma} - 1$ için bir h -konveks fonksiyondur (Kadikal and İşcan, 2020).

Teorem 3.4 Eğer $\Lambda : \phi \rightarrow \xi$ konveks bir fonksiyon $g : \xi \rightarrow \mathbb{R}$ üstel tipli azalmayan konveks bir fonksiyon ise $g \circ \Lambda : \phi \rightarrow \mathbb{R}$ üstel tipli konveks bir fonksiyondur (Kadikal and İşcan, 2020).

Lemma 3.1 $\Lambda : \phi^{\circ} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ϕ° üzerinde diferansiyellenebilen bir dönüşüm olsun. $\rho, \sigma \in \phi^{\circ}$ ve $\rho < \sigma$ olmak üzere $\Lambda' \in L[\rho, \sigma]$ ise

$$\frac{\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma)}{2} - \frac{1}{\sigma - \rho} \int_{\rho}^{\sigma} \Lambda(x) dx = \frac{\rho - \sigma}{2} \int_0^1 (1 - 2\gamma) \Lambda'(\gamma\rho + (1 - \gamma)\sigma) d\gamma$$

eşitliği geçerlidir (Dragomir and Agarwal, 1998).

Teorem 3.5 $\Lambda : \phi \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ϕ° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\rho, \sigma \in \phi^{\circ}$ ve $\rho < \sigma$ olsun. $\Lambda' \in L[\rho, \sigma]$ olmak üzere eğer $|\Lambda'|, [\rho, \sigma]$ üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\left| \frac{\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma)}{2} - \frac{1}{\sigma - \rho} \int_{\rho}^{\sigma} \Lambda(x) dx \right| \leq (\sigma - \rho) \left(4\sqrt{e} - e - \frac{7}{2} \right) \Omega(|\Lambda'(\rho)|, |\Lambda'(\sigma)|)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\gamma \in [0, 1]$ ve $\Omega(\beta, \theta), \beta$ ile θ 'nın aritmetik ortalamasıdır (Kadalkal and İşcan, 2020).

Lemma 3.2 $\rho, \sigma \in \phi$ ve $\rho < \sigma$ olmak üzere $\Lambda : \phi^\circ \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, ϕ° üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $\Lambda'' \in L[\rho, \sigma]$ ise

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma - \rho} \int_{\rho}^{\sigma} \Lambda(x) dx - \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \\ &= \frac{(\sigma - \rho)^2}{16} \left[\int_0^1 \gamma^2 \Lambda''\left(\gamma \frac{\rho + \sigma}{2} + (1 - \gamma)\rho\right) d\gamma + \int_0^1 (\gamma - 1)^2 \Lambda''\left(\gamma\sigma + (1 - \gamma)\frac{\rho + \sigma}{2}\right) d\gamma \right] \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir (Ciurdariu, 2012).

Teorem 3.6 $\rho, \sigma \in \phi$ ve $\rho < \sigma$ olmak üzere $\Lambda : \phi \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\phi^\circ \subset \mathbb{R}$ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $\Lambda'' \in L[\rho, \sigma]$ için eğer $|\Lambda''|, [\rho, \sigma]$ üzerinde üstel tipli fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\sigma - \rho} \int_{\rho}^{\sigma} \Lambda(x) dx - \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right| \\ &= \frac{(\sigma - \rho)^2}{8} \left[\left(e - \frac{7}{3}\right) \left| \Lambda''\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right| + \left(e - \frac{8}{3}\right) |\Lambda''(\rho)| + \left(e - \frac{8}{3}\right) |\Lambda''(\sigma)| \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Tirtirau, 2020a).

Teorem 3.7 $\rho, \sigma \in \phi^\circ$, $\rho < \sigma$, $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $\Lambda : \phi \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\phi^\circ \subset \mathbb{R}$ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $\Lambda'' \in L[\rho, \sigma]$ için eğer $|\Lambda''|^q, [\rho, \sigma]$ üzerinde üstel tipli fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\sigma - \rho} \int_{\rho}^{\sigma} \Lambda(x) dx - \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right| \\ &\leq \frac{(\sigma - \rho)^2}{16} \frac{(e - 2)^{\frac{1}{q}}}{(2p + 1)^{\frac{1}{p}}} \left[\Omega^{\frac{1}{q}} \left(\left| \Lambda''\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right|^q, |\Lambda''(\rho)|^q \right) + \Omega^{\frac{1}{q}} \left(|\Lambda''(\sigma)|^q, \left| \Lambda''\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right|^q \right) \right]. \end{aligned}$$

Burada $\Omega(\beta, \theta), \beta$ ile θ 'nın aritmetik ortalamasıdır (Tirtirau, 2020b).

Lemma 3.3 $\Lambda : \phi^\circ \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $\rho, \sigma \in \phi^\circ, \rho < \sigma$ ve $\Lambda' \in L[\rho, \sigma]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \frac{\Lambda(\sqrt{\rho\sigma}) + \Lambda\left(\frac{\rho+\sigma}{2}\right)}{2} - \frac{2}{(\sqrt{\sigma} - \sqrt{\rho})^2} \int_{\sqrt{\rho\sigma}}^{\frac{\rho+\sigma}{2}} \Lambda(x) dx \\ &= \frac{(\sqrt{\sigma} - \sqrt{\rho})^2}{4} \int_0^1 (1 - 2\gamma) \Lambda' \left(\gamma\sqrt{\rho\sigma} + (1 - \gamma)\frac{\rho + \sigma}{2} \right) d\gamma \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir (Awan et al., 2020).

Teorem 3.8 $\Lambda : \phi \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ϕ° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $\rho, \sigma \in \phi^\circ, \rho < \sigma$ ve $\Lambda' \in L[\rho, \sigma]$ olmak üzere eğer $|\Lambda'|, [\rho, \sigma]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Lambda(\sqrt{\rho\sigma}) + \Lambda\left(\frac{\rho+\sigma}{2}\right)}{2} - \frac{2}{(\sqrt{\sigma} - \sqrt{\rho})^2} \int_{\sqrt{\rho\sigma}}^{\frac{\rho+\sigma}{2}} \Lambda(x) dx \right| \\ &= \frac{(\sqrt{\sigma} - \sqrt{\rho})^2}{2} \left(4\sqrt{e} - e - \frac{7}{2} \right) \Omega \left(|\Lambda'(\sqrt{\rho\sigma})|, \left| \Lambda' \left(\frac{\rho + \sigma}{2} \right) \right| \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\gamma \in [0, 1]$ ve $\Omega(\beta, \theta)$ ise β ile θ 'nın aritmetik ortalamasıdır (Yıldız and Yergöz, 2023).

Teorem 3.9 $\Lambda : \phi \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ϕ° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $\rho, \sigma \in \phi^\circ, \rho < \sigma$ ve $\Lambda' \in L[\rho, \sigma]$ olmak üzere eğer $|\Lambda'|^q, [\rho, \sigma]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Lambda(\sqrt{\rho\sigma}) + \Lambda\left(\frac{\rho+\sigma}{2}\right)}{2} - \frac{2}{(\sqrt{\sigma} - \sqrt{\rho})^2} \int_{\sqrt{\rho\sigma}}^{\frac{\rho+\sigma}{2}} \Lambda(x) dx \right| \\ &\leq \frac{(\sqrt{\sigma} - \sqrt{\rho})^2}{2^{2-\frac{1}{q}}} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} (e - 2)^{\frac{1}{q}} \Omega^{\frac{1}{q}} \left(|\Lambda'(\sqrt{\rho\sigma})|^q, \left| \Lambda' \left(\frac{\rho + \sigma}{2} \right) \right|^q \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\gamma \in [0, 1], p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve Ω ise aritmetik ortalamadır (Yıldız and Yergöz, 2023).

Teorem 3.10 $\Lambda : \phi \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, ϕ° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $\rho, \sigma \in \phi^\circ, \rho < \sigma$ ve $\Lambda' \in L[\rho, \sigma]$ olsun. Eğer $|\Lambda'|^q, [\rho, \sigma]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Lambda(\sqrt{\rho\sigma}) + \Lambda\left(\frac{\rho+\sigma}{2}\right)}{2} - \frac{2}{(\sqrt{\sigma} - \sqrt{\rho})^2} \int_{\sqrt{\rho\sigma}}^{\frac{\rho+\sigma}{2}} \Lambda(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(\sqrt{\sigma} - \sqrt{\rho})^2}{4^{2-\frac{1}{q}}} \\ & \times \left[\left(\left(10\sqrt{e} - 3e - \frac{33}{4}\right) |\Lambda'(\sqrt{\rho\sigma})|^q + \left(2e - 6\sqrt{e} + \frac{19}{4}\right) \left| \Lambda'\left(\frac{\rho+\sigma}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \left. + \left(\left(2e - 6\sqrt{e} + \frac{19}{4}\right) |\Lambda'(\sqrt{\rho\sigma})|^q + \left(10\sqrt{e} - 3e - \frac{33}{4}\right) \left| \Lambda'\left(\frac{\rho+\sigma}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $q \geq 1$ ve $\gamma \in [0, 1]$ 'dir (Yıldız and Yergöz, 2023).

Lemma 3.4 $\Lambda : \phi \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ϕ° üzerinde diferansiyellenebilen bir dönüşüm $\rho, \sigma \in \phi, \rho < \sigma$ olsun. Eğer $\Lambda' \in L[\rho, \sigma]$ ise

$$\Lambda(x) - \frac{1}{\sigma - \rho} \int_{\rho}^{\sigma} \Lambda(\theta) d\theta = (\sigma - \rho) \int_0^1 p(\gamma) \Lambda'(\gamma\rho + (1 - \gamma)\sigma) d\gamma$$

eşitliği geçerlidir. Her $\gamma \in [0, 1]$ için

$$p(\gamma) = \begin{cases} \gamma, & \gamma \in \left[0, \frac{\sigma-x}{\sigma-\rho}\right] \\ \gamma - 1, & \gamma \in \left(\frac{\sigma-x}{\sigma-\rho}, 1\right] \end{cases}$$

dir. Burada $x \in [\rho, \sigma]$ 'dir (Alomari and Darus, 2010).

Teorem 3.11 $\Lambda : \phi \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, ϕ° üzerinde diferansiyellenebilen bir dönüşüm olmak üzere $\rho, \sigma \in \phi, \rho < \sigma$ ve $\Lambda' \in L[\rho, \sigma]$ olsun. Eğer $|\Lambda'|^q, [\rho, \sigma]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
& \left| \Lambda(x) - \frac{1}{\sigma - \rho} \int_{\rho}^{\sigma} \Lambda(\theta) d\theta \right| \\
& \leq \frac{1}{(\sigma - \rho)^{\frac{1}{p}} (p+1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ (\sigma - x)^{1+\frac{1}{p}} \left(\left(e^{\frac{\sigma-x}{\sigma-\rho}} - \frac{\sigma-x}{\sigma-\rho} - 1 \right) |\Lambda'(\rho)|^q \right. \right. \\
& + \left. \left(e - e^{\frac{x-\rho}{\sigma-\rho}} - \frac{\sigma-x}{\sigma-\rho} \right) |\Lambda'(\sigma)|^q \right)^{\frac{1}{q}} + (x - \rho)^{\frac{p+1}{p}} \\
& \times \left. \left(\left(e - e^{\frac{\sigma-x}{\sigma-\rho}} - \frac{x-\rho}{\sigma-\rho} \right) |\Lambda'(\rho)|^q + \left(e^{\frac{x-\rho}{\sigma-\rho}} - \frac{x-\rho}{\sigma-\rho} - 1 \right) |\Lambda'(\sigma)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $x \in [\rho, \sigma]$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir (Yıldız and Yergöz, 2023).

Teorem 3.12 $\Lambda : \phi \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, ϕ° üzerinde diferansiyellenebilen bir dönüşüm olmak üzere $\rho, \sigma \in \phi$, $\rho < \sigma$ ve $\Lambda' \in L[\rho, \sigma]$ olsun. Eğer $|\Lambda'|^q, [\rho, \sigma]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
& \left| \Lambda(x) - \frac{1}{\sigma - \rho} \int_{\rho}^{\sigma} \Lambda(\theta) d\theta \right| \\
& \leq \frac{(\sigma - \rho)^2}{\sigma - x} \left\{ \left(\frac{1}{(p+1)(p+2)} \left(\frac{\sigma-x}{\sigma-\rho} \right)^{p+2} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(e^{\frac{\sigma-x}{\sigma-\rho}} - \frac{(\sigma-x)^2}{2(\sigma-\rho)^2} + \frac{\rho-2\sigma+x}{\sigma-\rho} \right) |\Lambda'(\rho)|^q \right. \right. \\
& + \left. \left(e^{\frac{x-\rho}{\sigma-\rho}} - \frac{(\sigma-x)^2}{2(\sigma-\rho)^2} - \frac{e(x-\rho)}{\sigma-\rho} \right) |\Lambda'(\sigma)|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{1}{(p+2)} \left(\frac{\sigma-x}{\sigma-\rho} \right)^{p+2} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left. \left(\left(1 - \frac{(\sigma-x)^2}{2(\sigma-\rho)^2} - \frac{(x-\rho)e^{\frac{\sigma-x}{\sigma-\rho}}}{\sigma-\rho} \right) |\Lambda'(\rho)|^q + \left(e - \frac{(\sigma-x)^2}{2(\sigma-\rho)^2} + \frac{(\rho-2\sigma+x)e^{\frac{x-\rho}{\sigma-\rho}}}{\sigma-\rho} \right) |\Lambda'(\sigma)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
& + \frac{(\sigma - \rho)^2}{x - \rho} \left\{ \left(\frac{1}{(p+2)} \left(\frac{x-\rho}{\sigma-\rho} \right)^{p+2} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(e - e^{\frac{\sigma-x}{\sigma-\rho}} - \frac{(x-\rho)(e^{\frac{\sigma-x}{\sigma-\rho}} + 1)}{\sigma-\rho} - \frac{(x-\rho)(\rho-2\sigma+x)}{2(\sigma-\rho)^2} \right) |\Lambda'(\rho)|^q \right. \right. \\
& + \left. \left(\frac{1}{2} - \frac{(\sigma-x)e^{\frac{x-\rho}{\sigma-\rho}}}{\sigma-\rho} + \frac{(\sigma-x)(\sigma-2\rho+x)}{2(\sigma-\rho)^2} \right) |\Lambda'(\sigma)|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{1}{(p+1)(p+2)} \left(\frac{x-\rho}{\sigma-\rho} \right)^{p+2} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left. \left(\left(e^{\frac{\sigma-x}{\sigma-\rho}} - \frac{(\sigma-x)^2}{2(\sigma-\rho)^2} - \frac{(\sigma-x)(e-1)}{\sigma-\rho} - \frac{1}{2} \right) |\Lambda'(\rho)|^q \right. \right. \\
& + \left. \left. \left(e^{\frac{x-\rho}{\sigma-\rho}} - \frac{1}{2} - \frac{(\sigma+x)^2 + 4\rho(\rho-\sigma-x)}{2(\sigma-\rho)^2} \right) |\Lambda'(\sigma)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $x \in [\rho, \sigma]$ ve $p > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir (Yıldız and Yergöz, 2023).

Lemma 3.5 $\Lambda : \phi^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, ϕ° üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $\rho, \sigma \in \phi^\circ$, $\rho < \sigma$, $n \in \mathbb{N}$ ve $i \in 1, 2, \dots, n-1$ olmak üzere eğer

$\Lambda'' \in L[\rho, \sigma]$ ise

$$\begin{aligned}
& I_n(\Lambda_n, [\rho, \sigma]) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2n} \left[\Lambda \left(\frac{(n-i)\rho + i\sigma}{n} \right) + \Lambda \left(\frac{(n-i-1)\rho + (i+1)\sigma}{n} \right) \right] - \frac{1}{\sigma - \rho} \int_{\rho}^{\sigma} \Lambda(x) dx \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\sigma - \rho)^2}{2n^3} \times \left[\int_0^1 \gamma(1-\gamma) \Lambda'' \left(\gamma \frac{(n-i)\rho + i\sigma}{n} + (1-\gamma) \frac{(n-i-1)\rho + (i+1)\sigma}{n} \right) d\gamma \right]
\end{aligned}$$

dir (Yıldız and Yergöz, 2023).

Teorem 3.13 $\Lambda : \phi \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, ϕ° üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir dönüşüm olmak üzere $\rho, \sigma \in \phi^\circ, \rho < \sigma$ ve $\Lambda'' \in L[\rho, \sigma]$ olsun. Eğer $|\Lambda''|, [\rho, \sigma]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
& |I_n(\Lambda_n, [\rho, \sigma])| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\sigma - \rho)^2}{n^3} \left(\frac{17}{6} - e \right) \\
&\times \Omega \left(\left| \Lambda'' \left(\frac{(n-i)\rho + i\sigma}{n} \right) \right|, \left| \Lambda'' \left(\frac{(n-i-1)\rho + (i+1)\sigma}{n} \right) \right| \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\gamma \in [0, 1]$ ve $\Omega(\beta, \theta)$ ise β ile θ 'nın aritmetik ortalamasıdır (Yıldız and Yergöz, 2023).

Teorem 3.14 $\Lambda : \phi \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, ϕ° üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon olmak üzere $\rho, \sigma \in \phi^\circ, \rho < \sigma$ ve $\Lambda'' \in L[\rho, \sigma]$ olsun. Eğer $|\Lambda''|^q, [\rho, \sigma]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
& |I_n(\Lambda_n, [\rho, \sigma])| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\sigma - \rho)^2}{2^{1-\frac{1}{q}} n^3} \varsigma^{\frac{1}{p}}(p+1, p+1) (e-2)^{\frac{1}{q}} \\
&\times \Omega^{\frac{1}{q}} \left(\left| \Lambda'' \left(\frac{(n-i)\rho + i\sigma}{n} \right) \right|^q + \left| \Lambda'' \left(\frac{(n-i-1)\rho + (i+1)\sigma}{n} \right) \right|^q \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\gamma \in [0, 1]$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve Ω ise aritmetik ortalamadır (Yıldız and Yergöz, 2023).

Teorem 3.15 $\Lambda : \phi \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, ϕ° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olmak üzere $\rho, \sigma \in \phi^\circ$, $\rho < \sigma$ ve $\Lambda'' \in L[\rho, \sigma]$ olsun. Eğer $|\Lambda''|^q, [\rho, \sigma]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & |I_n(\Lambda_n, [\rho, \sigma])| \\ & \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\sigma - \rho)^2}{12^{1-\frac{1}{q}} n^3} \left(\frac{17}{6} - e \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \times \Omega^{\frac{1}{q}} \left(\left| \Lambda'' \left(\frac{(n-i)\rho + i\sigma}{n} \right) \right|^q + \left| \Lambda'' \left(\frac{(n-i-1)\rho + (i+1)\sigma}{n} \right) \right|^q \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\gamma \in [0, 1]$ ve $q \geq 1$ 'dir (Yıldız and Yergöz, 2023).

Lemma 3.6 $\Lambda : \phi \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, ϕ° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\rho, \sigma \in \phi$, $\rho < \sigma$ olsun. Eğer $\Lambda' \in L[\rho, \sigma]$ ve $\psi, \xi \in \mathbb{R}$ ise

$$\begin{aligned} & \frac{\psi \Lambda(\rho) + \xi \Lambda(\sigma)}{2} + \frac{2 - \psi - \xi}{2} \Lambda \left(\frac{\rho + \sigma}{2} \right) - \frac{1}{\sigma - \rho} \int_{\rho}^{\sigma} \Lambda(x) dx \\ & = \frac{\sigma - \rho}{4} \int_0^1 \left[(1 - \psi - \gamma) \Lambda' \left(\gamma \rho + (1 - \gamma) \frac{\rho + \sigma}{2} \right) + (\xi - \gamma) \Lambda' \left(\gamma \frac{\rho + \sigma}{2} + (1 - \gamma) \sigma \right) \right] d\gamma \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir (Xi and Qi, 2012).

Teorem 3.16 $\Lambda : \phi \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, ϕ° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\rho, \sigma \in \phi^\circ$, $\rho < \sigma$ olsun. $0 \leq \psi, \xi \leq 1$ ve $\Lambda' \in L[\rho, \sigma]$ olmak üzere eğer $|\Lambda'|, [\rho, \sigma]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\psi\Lambda(\rho) + \xi\Lambda(\sigma)}{2} + \frac{2 - \psi - \xi}{2} \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) - \frac{1}{\sigma - \rho} \int_{\rho}^{\sigma} \Lambda(x) dx \right| \\
& \leq \frac{\sigma - \rho}{4} \left\{ \left(-\psi^2 + (e + 2)\psi + 2e^{1-\psi} - e - \frac{5}{2} \right) |\Lambda'(\rho)| \right. \\
& + \left(-\frac{1}{2}[\psi^2 + (\psi - 1)^2 + \xi^2 + (\xi - 1)^2] + 2(e^{\psi} + e^{\xi}) - e(\psi + \xi) - \psi - \xi - 2 \right) \\
& \times \left. \left| \Lambda'\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right| + \left(-\xi^2 + (e + 2)\xi + 2e^{1-\xi} - e - \frac{5}{2} \right) |\Lambda'(\sigma)| \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Yıldız and Yergöz, 2023).

Teorem 3.17 $\Lambda : \phi \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, ϕ° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\rho, \sigma \in \phi^\circ, \rho < \sigma$ olsun. $0 \leq \psi, \xi \leq 1$ ve $\Lambda' \in L[\rho, \sigma]$ olmak üzere eğer $|\Lambda'|^q, [\rho, \sigma]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\psi\Lambda(\rho) + \xi\Lambda(\sigma)}{2} + \frac{2 - \psi - \xi}{2} \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) - \frac{1}{\sigma - \rho} \int_{\rho}^{\sigma} \Lambda(x) dx \right| \\
& \leq \frac{(\sigma - \rho)(e - 2)^{\frac{1}{q}}}{4(p + 1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ (\psi^{p+1} + (1 - \psi)^{p+1})^{\frac{1}{p}} \left(|\Lambda'(\rho)|^q + \left| \Lambda'\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + \left. (\xi^{p+1} + (1 - \xi)^{p+1})^{\frac{1}{p}} \left(\left| \Lambda'\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right|^q + |\Lambda'(\sigma)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir (Yıldız and Yergöz, 2023).

Teorem 3.18 $\Lambda : \phi \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilen eksponansiyel konveks fonksiyon olsun, bu takdirde

$$\Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \leq \frac{1}{\sigma - \rho} \int_{\rho}^{\sigma} \frac{\Lambda(\beta)}{e^{\alpha\beta}} d\beta \leq \frac{e^{-\alpha\rho}\Lambda(\rho) + e^{-\alpha\sigma}\Lambda(\sigma)}{2}.$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $[\rho, \sigma] \in \Lambda$ dir (Awan et al., 2018).

Teorem 3.19 $\Lambda : \phi = [\rho, \sigma] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, ϕ° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olmak üzere, burada ϕ°, ϕ 'nin içidir. Eğer $|\Lambda'|$ eksponansiyel konveks fonksiyon ise

$$\left| \frac{\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma)}{2} - \frac{1}{\sigma - \rho} \int_{\rho}^{\sigma} \Lambda(\beta) d\beta \right| \leq \frac{\sigma - \rho}{8} \left[\left| \frac{\Lambda'(\rho)}{e^{\alpha_1 \rho}} \right| + \left| \frac{\Lambda'(\sigma)}{e^{\alpha_1 \sigma}} \right| \right].$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ şeklindedir (Awan et al., 2018).

Teorem 3.20 $\Lambda : \phi = [\rho, \sigma] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, ϕ° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olmak üzere, burada ϕ°, ϕ 'nin içidir. Eğer $|\Lambda'|^q$ ekspanansiyel konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma)}{2} - \frac{1}{\sigma - \rho} \int_{\rho}^{\sigma} \Lambda(\beta) d\beta \right| \\ & \leq \frac{\sigma - \rho}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{1}{2} \left\{ \left| \frac{\Lambda'(\rho)}{e^{\alpha_1 \rho}} \right|^{\frac{p}{p-1}} + \left| \frac{\Lambda'(\sigma)}{e^{\alpha_1 \sigma}} \right|^{\frac{p}{p-1}} \right\} \right]^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ dir (Awan et al., 2018).

Teorem 3.21 $\Lambda : \phi = [\rho, \sigma] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, ϕ° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olmak üzere, burada ϕ°, ϕ 'nin içidir. Eğer $|\Lambda'|^q$ ekspanansiyel konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma)}{2} - \frac{1}{\sigma - \rho} \int_{\rho}^{\sigma} \Lambda(\beta) d\beta \right| \\ & \leq \frac{\sigma - \rho}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{1}{4} \left\{ \left| \frac{\Lambda'(\rho)}{e^{\alpha_1 \rho}} \right|^q + \left| \frac{\Lambda'(\sigma)}{e^{\alpha_1 \sigma}} \right|^q \right\} \right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ dir (Awan et al., 2018).

Teorem 3.22 $\Lambda : \phi \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ekspanansiyel konveks fonksiyon ve $m \in (0, 1]$. Eğer $\Lambda \in L[\rho, m\sigma]$ ise

$$\begin{aligned} e^{\Lambda(\frac{\rho+m\sigma}{2})} & \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(m\sigma-\rho)^\alpha} \left\{ J_{(\rho)_+}^\alpha e^{\Lambda(m\sigma)} + m^{\alpha+1} J_{(\sigma)_-}^\alpha e^{\Lambda(\frac{\rho}{m})} \right\} \\ & \leq \frac{\alpha[e^{\Lambda(\rho)} + m^2 e^{\Lambda(\frac{\sigma}{m})}] + [m e^{\Lambda(\sigma)} + m e^{\Lambda(\frac{\rho}{m})}]}{\alpha(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\alpha > 0$ şeklindedir (Awan et al., 2018).

Teorem 3.23 $\Lambda, g : \phi \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eksponansiyel m -konveks fonksiyon ve $m \in (0, 1]$. Eğer $\Lambda g \in L[\rho, m\sigma]$ ise

$$\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(m\sigma - \rho)^\alpha} \{J_{m\sigma-}^\alpha e^{\Lambda(\rho)} + J_{\rho+}^\alpha\} \leq \frac{e^{\Lambda(\rho)} + me^{g(\sigma)} + \alpha(me^{\Lambda(\sigma)} + e^{g(\rho)})}{\alpha(\alpha + 1)}.$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\alpha > 0$ şeklindedir (Noor et al., 2019).

Teorem 3.24 $\alpha > 0, \Lambda : \phi \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eksponansiyel konveks fonksiyon ve $m \in (0, 1]$. Eğer $\Lambda \in L[\rho, m\sigma]$ ise

$$\begin{aligned} e^{\Lambda(\frac{\rho+m\sigma}{2})} &\leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha + 1)}{(m\sigma - \rho)^\alpha} \left[J_{(\frac{\rho+m\sigma}{2})+}^\alpha e^{\Lambda(m\sigma)} + m^{\alpha+1} J_{(\frac{\rho+m\sigma}{2m})-}^\alpha e^{\Lambda(\frac{\rho}{m})} \right] \\ &\leq \frac{\alpha}{4(\alpha + 1)} \left[e^{\Lambda(\rho)} - m^2 e^{\Lambda(\frac{\rho}{m^2})} \right] + \frac{m}{2} \left[e^{\Lambda(\sigma)} + me^{\Lambda(\frac{\rho}{m^2})} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Noor et al., 2019).

Lemma 3.7 $\alpha > 0, \Lambda : \phi \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, ϕ° üzerinde diferansiyellenebilen eksponansiyel m -konveks fonksiyon olmak üzere, burada ϕ°, ϕ 'nin içidir ve $m \in (0, 1]$ şeklindedir. Eğer $|\Lambda'| \in L[\rho, m\sigma]$ m -konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned} &\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha + 1)}{(m\sigma - \rho)^\alpha} \left[J_{(\frac{\rho+m\sigma}{2})+}^\alpha e^{\Lambda(m\sigma)} + m^{\alpha+1} J_{(\frac{\rho+m\sigma}{2m})-}^\alpha e^{\Lambda(\frac{\rho}{m})} \right] - \frac{1}{2} \left[e^{\Lambda(\frac{\rho+m\sigma}{2})} + me^{\Lambda(\frac{\rho+m\sigma}{2m})} \right] \\ &= \frac{m\sigma - \rho}{4} \left[\int_0^1 \theta^\alpha e^{\Lambda(\frac{\theta}{2}\rho + m\frac{2-\theta}{2}\sigma)} \Lambda'(\frac{\theta}{2}\rho + m\frac{2-\theta}{2}\sigma) d\theta \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 \theta^\alpha e^{\Lambda(\frac{2-\theta}{2m}\rho + \frac{\theta}{2}\sigma)} \Lambda'(\frac{2-\theta}{2m}\rho + \frac{\theta}{2}\sigma) d\theta \right]. \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir (Noor et al., 2019).

Teorem 3.25 $\alpha > 0, \Lambda : \phi \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, ϕ° üzerinde diferansiyellenebilen eksponansiyel m -konveks fonksiyon olmak üzere, burada ϕ°, ϕ 'nin içidir ve $m \in (0, 1]$ şeklindedir. Eğer $|\Lambda'| \in L[\rho, m\sigma]$ m -konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(m\sigma-\rho)^\alpha} \left[J_{(\frac{\rho+m\sigma}{2})_+}^\alpha e^{\Lambda(m\sigma)} + m^{\alpha+1} J_{(\frac{\rho+m\sigma}{2m})_-}^\alpha e^{\Lambda(\frac{\rho}{m})} \right] - \frac{1}{2} \left[e^{\Lambda(\frac{\rho+m\sigma}{2})} + m e^{\Lambda(\frac{\rho+m\sigma}{2m})} \right] \right| \\
& \leq \frac{m\sigma-\rho}{4} \left\{ \frac{1}{4(\alpha+3)} \left\{ |e^{\Lambda(\rho)} \Lambda'(\rho)| + |e^{\Lambda(\sigma)} \Lambda'(\sigma)| \right\} \right. \\
& + \frac{m^2(\alpha^2+7\alpha+14)}{4(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} \left\{ |e^{\Lambda(\sigma)} \Lambda'(\sigma)| + |e^{\Lambda(\frac{\rho}{m^2})} \Lambda'(\frac{\rho}{m^2})| \right\} \\
& \left. + \frac{m(\alpha+4)}{((\alpha+2)(\alpha+3))} \left\{ \Delta_1(\rho, \sigma) + \Delta_2(\frac{\rho}{m^2}, \sigma) \right\} \right\},
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada

$$\Delta_1(\rho, \sigma) = |e^{\Lambda(\rho)} \Lambda'(\sigma)| + |e^{\Lambda(\sigma)} \Lambda'(\rho)|,$$

ve

$$\Delta_2(\frac{\rho}{m^2}, \sigma) = |e^{\Lambda(\frac{\rho}{m^2})} \Lambda'(\sigma)| + |e^{\Lambda(\sigma)} \Lambda'(\frac{\rho}{m^2})|.$$

şeklindedir (Noor et al., 2019).

Teorem 3.26 $\alpha > 0, \Lambda : \phi \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, ϕ° üzerinde diferansiyellenebilen eksponansiyel m -konveks fonksiyon olmak üzere, burada ϕ°, ϕ 'nin içidir ve $m \in (0, 1]$ şeklindedir. Eğer $|\Lambda'| \in L[\rho, m\sigma]$ ϕ üzerinde m -konveks fonksiyon ve $p^{-1} + q^{-1} = 1, q > 1$ ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(m\sigma-\rho)^\alpha} \left[J_{(\frac{\rho+m\sigma}{2})_+}^\alpha e^{\Lambda(m\sigma)} + m^{\alpha+1} J_{(\frac{\rho+m\sigma}{2m})_-}^\alpha e^{\Lambda(\frac{\rho}{m})} \right] - \frac{1}{2} \left[e^{\Lambda(\frac{\rho+m\sigma}{2})} + m e^{\Lambda(\frac{\rho+m\sigma}{2m})} \right] \right| \\
& \leq \frac{m\sigma-\rho}{4(\alpha+1)^{\frac{1}{p}}} \left[\left\{ \frac{1}{4(\alpha+3)} |e^{\Lambda(\rho)} \Lambda'(\rho)|^q + \frac{m^2(\alpha^2+7\alpha+14)}{4(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} + |e^{\Lambda(\sigma)} \Lambda'(\sigma)|^q \right. \right. \\
& + \frac{m(\alpha+4)}{(\alpha+2)(\alpha+3)} \Delta_3(\rho, \sigma) \left. \right\}^{\frac{1}{q}} + \left\{ \frac{m^2(\alpha^2+7\alpha+14)}{4(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} |e^{\Lambda(\frac{\rho}{m^2})} \Lambda'(\frac{\rho}{m^2})|^q \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{4(\alpha+3)} |e^{\Lambda(\sigma)} \Lambda'(\sigma)|^q + \frac{m(\alpha+4)}{(\alpha+2)(\alpha+3)} \Delta_4(\frac{\rho}{m^2}, \sigma) \right\}^{\frac{1}{q}} \right],
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada

$$\Delta_3(\rho, \sigma) = |e^{\Lambda(\rho)} \Lambda'(\rho)|^q + |e^{\Lambda(\sigma)} \Lambda'(\sigma)|^q,$$

ve

$$\Delta_4\left(\frac{\rho}{m^2}, \sigma\right) = |e^{\Lambda(\frac{\rho}{m^2})} \Lambda'(\frac{\rho}{m^2})|^q + |e^{\Lambda(\sigma)} \Lambda'(\sigma)|^q.$$

şeklindedir (Noor et al., 2019).

Teorem 3.27 $\alpha > 0, \Lambda : \phi \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, ϕ° üzerinde diferansiyellenebilen eksponansiyel m -konveks fonksiyon olmak üzere, burada ϕ°, ϕ 'nin içidir ve $m \in (0, 1]$ şeklindedir. Eğer $|\Lambda'| \in L[\rho, m\sigma]$ ϕ üzerinde m -konveks fonksiyon ve $p^{-1} + q^{-1} = 1, q > 1$ ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(m\sigma - \rho)^\alpha} \left[J_{(\frac{\rho+m\sigma}{2})_+}^\alpha e^{\Lambda(m\sigma)} + m^{\alpha+1} J_{(\frac{\rho+m\sigma}{2m})_-}^\alpha e^{\Lambda(\frac{\rho}{m})} \right] - \frac{1}{2} \left[e^{\Lambda(\frac{\rho+m\sigma}{2})} + m e^{\Lambda(\frac{\rho+m\sigma}{2m})} \right] \right| \\ & \leq \frac{m\sigma - \rho}{4(p\alpha + 1)^{\frac{1}{p}}} \left[\left\{ \frac{|e^{\Lambda(\rho)} \Lambda'(\rho)|^q + 7m^2 |e^{\Lambda(\sigma)} \Lambda'(\sigma)|^q + 2m \Delta_3(\rho, \sigma)}{12} \right\}^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left\{ \frac{7m^2 |e^{\Lambda(\frac{\rho}{m^2})} \Lambda'(\frac{\rho}{m^2})|^q + |e^{\Lambda(\sigma)} \Lambda'(\sigma)|^q + 2m \Delta_4(\frac{\rho}{m^2}, \sigma)}{12} \right\}^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Noor et al., 2019).

Teorem 3.28 $\Omega, \Lambda : [\rho, \sigma] \rightarrow \mathbb{R}$ Ω diferansiyellenebilen ve $\Lambda \in [\rho, \sigma], \rho < \sigma$ olacak şekilde iki fonksiyon olsun. Λ eksponansiyel m -konveks ve $\Omega, [\rho, \sigma]$ üzerinde kesin artan, $\Omega' \in L_1[\rho, \sigma]$ olsun. Bu takdirde $u \in [\rho, \sigma]$ ve $\epsilon, \tau \geq k$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir (Noor et al., 2019).

$$\begin{aligned} & k \left(\Gamma_k(\epsilon) \Delta_{\Omega, \rho^+}^{\epsilon, k} e^{\Lambda(u)} + \Gamma_k(\tau) \Delta_{\Omega, \sigma^-}^{\tau, k} e^{\Lambda(u)} \right) \\ & \leq \frac{(\Omega(u)) - \Omega(\rho)}{u - \rho} \left[(u - \rho) (m e^{\Lambda(\frac{u}{m})} \Omega(u) - e^{\Lambda(\rho)} \Omega(\rho)) \right. \\ & \quad - (m e^{\Lambda(\frac{u}{m})} - e^{\Lambda(\rho)}) \int_{\rho}^u \Omega(\Delta) d\Delta \Big] + \frac{(\Omega(\sigma) - \Omega(u))}{\sigma - u} \left[(\sigma - u) (e^{\Lambda(\sigma)} \Omega(\sigma) - m e^{\Lambda(\frac{u}{m})} \Omega(u)) \right. \\ & \quad \left. - (e^{\Lambda(\sigma)} - m e^{\Lambda(\frac{u}{m})}) \int_u^{\sigma} \Omega(\Delta) d\Delta \right]. \end{aligned}$$

Lemma 3.8 $\Lambda : [\rho, \sigma] \rightarrow \mathbb{R}$ eksponansiyel m -konveks fonksiyon olsun. Eğer $e^{\Lambda(\Delta)} = e^{\Lambda(\frac{\rho+\sigma-\Delta}{m})}$ ise $\Delta \in [\rho, \sigma]$ ve $m \in (0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir (Mehmood and Farid, 2020)

$$e^{\Lambda(\frac{\rho+\sigma}{2})} \leq \frac{1}{2}(m+1)e^{\Lambda(\Delta)}.$$

Teorem 3.29 $\Omega, \Lambda : [\rho, \sigma] \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ Ω diferansiyellenebilen ve $\Lambda \in L_1[\rho, \sigma]$, $\rho < \sigma$ olacak şekilde iki fonksiyon olsun. Λ eksponansiyel m -konveks, $e^{\Lambda(\Delta)} = e^{\Lambda(\frac{\rho+\sigma-\Delta}{m})}$ ve $\Omega, [\rho, \sigma]$ üzerinde kesin artan ve $\Omega' \in L_1[\rho, \sigma]$ olsun. Bu takdirde $\Delta \in [\rho, \sigma]$ ve $\epsilon, v, k > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir (Mehmood and Farid, 2020):

$$\begin{aligned} & \frac{2k}{m+1} e^{\Lambda(\frac{\rho+\sigma}{2})} \left[\frac{(\Omega(\sigma) - \Omega(\rho))^{\frac{\epsilon}{k}+1}}{\epsilon+k} + \frac{(\Omega(\sigma) - \Omega(\rho))^{\frac{\tau}{k}+1}}{\tau+k} \right] \\ & \leq k \left(\Gamma_k(\epsilon+k) \Delta_{\Omega, \sigma^-}^{\epsilon+k, k} e^{\Lambda(\rho)} + \Gamma_k(\tau+k) \Delta_{\Omega, \rho^+}^{\tau+k, k} e^{\Lambda(\sigma)} \right) \\ & \leq \frac{(\Omega(\sigma) - \Omega(\rho))^{\frac{\epsilon}{k}} + (\Omega(\sigma) - \Omega(\rho))^{\frac{\tau}{k}}}{(\sigma - \rho)} \left[(\sigma - \rho) \left(e^{\Lambda(\sigma)} \Omega(\sigma) - m e^{\Lambda(\frac{\rho}{m})} \Omega(\rho) \right) \right. \\ & \quad \left. - \left(e^{\Lambda(\sigma)} - m e^{\Omega(\frac{\rho}{m})} \right) \int_{\rho}^{\sigma} \Omega(\Delta) d\Delta \right] \end{aligned}$$

Lemma 3.9 $\Lambda : [\rho, \sigma] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı (ρ, σ) üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $\rho < \sigma$ olsun. Bu takdirde Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}
& \frac{2(\sigma - \rho)^\alpha + (1 - \alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma) + 2\Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \\
& - \frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[{}^{AB}I_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^\alpha \Lambda(\rho) + {}_\rho^{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right. \\
& \left. + {}_{(\frac{\rho+\sigma}{2})}^{AB}I^\alpha \Lambda(\sigma) + {}^\sigma{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \\
& = \int_0^1 ((1 - \theta)^\alpha - \theta^\alpha) \Lambda'\left(\frac{1 + \theta}{2}\rho + \frac{1 - \theta}{2}\sigma\right) d\theta \\
& + \int_0^1 (\theta^\alpha - (1 - \theta)^\alpha) \Lambda'\left(\frac{1 + \theta}{2}\sigma + \frac{1 - \theta}{2}\rho\right) d\theta
\end{aligned}$$

Burada $\alpha, \theta \in [0, 1]$, $\Gamma(\alpha)$ Gama fonksiyonu ve $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonudur (Akdemir et al., 2021).

Teorem 3.30 $\Lambda : [\rho, \sigma] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı (ρ, σ) üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olup $\rho < \sigma$ ve $\Lambda' \in L_1[\rho, \sigma]$. Eğer $|\Lambda'|$ konveks fonksiyon ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2(\sigma - \rho)^\alpha + (1 - \alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma) + 2\Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \right. \\
& - \frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[{}^{AB}I_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^\alpha \Lambda(\rho) + {}_\rho^{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right. \\
& \left. \left. + {}_{(\frac{\rho+\sigma}{2})}^{AB}I^\alpha \Lambda(\sigma) + {}^\sigma{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \right| \\
& \leq \frac{2 \left[|\Lambda'(\rho)| + |\Lambda'(\sigma)| \right]}{\alpha + 1}
\end{aligned}$$

Burada $\alpha \in [0, 1]$ ve $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonudur (Akdemir et al., 2021).

Teorem 3.31 $\Lambda : [\rho, \sigma] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı (ρ, σ) üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olup $\rho < \sigma$ ve $\Lambda' \in L_1[\rho, \sigma]$. Eğer $|\Lambda'|^q$ konveks fonksiyon ise Atangana-Baleanu kesirli integral

operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2(\sigma - \rho)^\alpha + (1 - \alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma) + 2\Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \right. \\
& - \frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[{}^{AB}I_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^\alpha \Lambda(\rho) + {}_\rho^{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right. \\
& + \left. \left. {}_{(\frac{\rho+\sigma}{2})}^{AB}I^\alpha \Lambda(\sigma) + {}^\sigma{AB}I_\sigma^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \right| \\
& \leq \frac{2}{(\alpha p + 1)^{\frac{1}{p}}} \left[\left(\frac{3|\Lambda'(\rho)|^q + |\Lambda'(\sigma)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|\Lambda'(\sigma)|^q + |\Lambda'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\alpha \in [0, 1]$, $q > 1$, ve $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonudur (Akdemir et al., 2021).

Teorem 3.32 $\Lambda : [\rho, \sigma] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı (ρ, σ) üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olup $\rho < \sigma$ ve $\Lambda' \in L_1[\rho, \sigma]$. Eğer $|\Lambda'|^q$ konveks fonksiyon ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2(\sigma - \rho)^\alpha + (1 - \alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma) + 2\Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \right. \\
& - \frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[{}^{AB}I_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^\alpha \Lambda(\rho) + {}_\rho^{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) + {}_{(\frac{\rho+\sigma}{2})}^{AB}I^\alpha \Lambda(\sigma) + {}^\sigma{AB}I_\sigma^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \Big| \\
& \leq \left(\frac{1}{\alpha + 1} \right)^{1 - (\frac{1}{q})} \left[\left(\frac{\alpha + 3}{2(\alpha + 1)(\alpha + 2)} |\Lambda'(\rho)|^q + \frac{1}{2(\alpha + 2)} |\Lambda'(\sigma)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + \left(\frac{2\alpha + 3}{2(\alpha + 1)(\alpha + 2)} |\Lambda'(\rho)|^q + \frac{1}{2(\alpha + 1)(\alpha + 2)} |\Lambda'(\sigma)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\frac{2\alpha + 3}{2(\alpha + 1)(\alpha + 2)} |\Lambda'(\sigma)|^q + \frac{1}{2(\alpha + 1)(\alpha + 2)} |\Lambda'(\rho)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left. \left(\frac{\alpha + 3}{2(\alpha + 1)(\alpha + 2)} |\Lambda'(\sigma)|^q + \frac{1}{2(\alpha + 2)} |\Lambda'(\rho)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

Burada $\alpha \in [0, 1]$, $q \geq 1$ ve $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonudur (Akdemir et al., 2021).

Teorem 3.33 $\Lambda : [\rho, \sigma] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı (ρ, σ) üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olup $\rho < \sigma$ ve $\Lambda' \in L_1[\rho, \sigma]$. Eğer $|\Lambda'|^q$ konveks fonksiyon ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2(\sigma - \rho)^\alpha + (1 - \alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma) + 2\Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \right. \\ & - \frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[{}^{AB}I_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^\alpha \Lambda(\rho) + {}^{AB}I_\rho^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) + {}^{AB}I_{\left(\frac{\rho+\sigma}{2}\right)}^\alpha \Lambda(\sigma) + {}^{AB}I_\sigma^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \Big| \\ & \leq \frac{4}{p(\alpha p + 1)} + \frac{2 \left[|\Lambda'(\rho)|^q + |\Lambda'(\sigma)|^q \right]}{q} \end{aligned}$$

Burada $p^{-1} + q^{-1} = 1, \alpha \in [0, 1], q > 1$ ve $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonudur (Akdemir et al., 2021).

Lemma 3.10 $\Lambda : \phi \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ϕ° üzerinde iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Ayrıca Λ ve Λ' , ϕ üzerinde L^1 lokal fonksiyonlar olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & K_1(\alpha) \int_0^1 \theta^{1-\alpha} \Lambda'(\theta\rho + (1-\theta)x) d\theta + K_0(\alpha) \int_0^1 \theta^{1-\alpha} \Lambda''(\theta\rho + (1-\theta)x) d\theta \\ & + K_1(\alpha) \int_0^1 \theta^{1-\alpha} \Lambda'(\theta x + (1-\theta)\sigma) d\theta + K_0(\alpha) \int_0^1 \theta^{1-\alpha} \Lambda''(\theta x + (1-\theta)\sigma) d\theta \\ & = -\frac{K_1(\alpha)\Lambda(\rho) + K_0(\alpha)\Lambda'(\rho)}{x - \rho} - \frac{K_1(\alpha)\Lambda(x) + K_0(\alpha)\Lambda'(x)}{\sigma - x} \\ & + \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_x^\alpha \Lambda(x)}{(x - \rho)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_\sigma^\alpha \Lambda(\sigma)}{(\sigma - x)^{2-\alpha}} \right) \end{aligned}$$

Burada $\alpha \in [0, 1], \rho < x < \sigma$ ve K_0 ile K_1 (2.11) deki koşulları sağlayan fonksiyonlardır (Gürbüz et al., 2022).

Teorem 3.34 $\Lambda : \phi \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ϕ° üzerinde iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Ayrıca Λ ve Λ' , ϕ üzerinde L^1 lokal fonksiyonlar olsun. Eğer Λ' ve Λ'' , ϕ üzerinde konveks fonksiyonlar ise, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\Lambda(\rho) + K_0(\alpha)\Lambda'(\rho)}{x - \rho} - \frac{K_1(\alpha)\Lambda(x) + K_0(\alpha)\Lambda'(x)}{\sigma - x} \right| \\
& + \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_x^\alpha \Lambda(x)}{(x - \rho)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_\sigma^\alpha \Lambda(\sigma)}{(\sigma - x)^{2-\alpha}} \right) \Big| \\
& \leq \frac{K_1(\alpha)|\Lambda'(\rho)| + K_0(\alpha)|\Lambda''(\rho)|}{(3 - \alpha)} + \frac{K_1(\alpha)|\Lambda'(\sigma)| + K_0(\alpha)|\Lambda''(\sigma)|}{(3 - \alpha)(2 - \alpha)} \\
& + \frac{K_1(\alpha)|\Lambda'(x)| + K_0(\alpha)|\Lambda''(x)|}{(2 - \alpha)}
\end{aligned}$$

Burada $\alpha \in [0, 1]$, $\rho < x < \sigma$ ve K_1 ile K_0 (2.11) deki koşulları sağlayan fonksiyonlardır (Gürbüz et al., 2022).

Teorem 3.35 $\Lambda : \phi \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ϕ° üzerinde iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Ayrıca Λ ve Λ' , ϕ üzerinde L^1 lokal fonksiyonlar olsun. Eğer $|\Lambda'|^q$ ve $|\Lambda''|^q$, ϕ üzerinde konveks fonksiyonlar ise, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\Lambda(\rho) + K_0(\alpha)\Lambda'(\rho)}{x - \rho} - \frac{K_1(\alpha)\Lambda(x) + K_0(\alpha)\Lambda'(x)}{\sigma - x} \right| \\
& + \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_x^\alpha \Lambda(x)}{(x - \rho)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_\sigma^\alpha \Lambda(\sigma)}{(\sigma - x)^{2-\alpha}} \right) \Big| \\
& \leq \frac{1}{((1 - \alpha)p + 1)^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{q}}} \left[K_1(\alpha) (|\Lambda'(\rho)|^q + |\Lambda'(x)|^q)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + K_0(\alpha) (|\Lambda''(\rho)|^q + |\Lambda''(x)|^q)^{\frac{1}{q}} \\
& + K_1(\alpha) (|\Lambda'(x)|^q + |\Lambda'(\sigma)|^q)^{\frac{1}{q}} \\
& \left. + K_0(\alpha) (|\Lambda''(x)|^q + |\Lambda''(\sigma)|^q)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

Burada $\alpha \in [0, 1]$, $\rho < x < \sigma$, $p, q > 1$ olup $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve K_1 ile K_0 (2.11) deki koşulları sağlayan fonksiyonlardır (Gürbüz et al., 2022).

Teorem 3.36 $\Lambda : \phi \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ϕ° üzerinde iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Ayrıca Λ ve Λ' , ϕ üzerinde L^1 lokal fonksiyonlar olsun. Eğer $|\Lambda'|^q$ ve $|\Lambda''|^q$, ϕ üzerinde konveks fonksiyonlar ise, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left| -\frac{K_1(\alpha)\Lambda(\rho) + K_0(\alpha)\Lambda'(\rho)}{x - \rho} - \frac{K_1(\alpha)\Lambda(x) + K_0(\alpha)\Lambda'(x)}{\sigma - x} \right. \\ & + \left. \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_x^\alpha \Lambda(x)}{(x - \rho)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_\sigma^\alpha \Lambda(\sigma)}{(\sigma - x)^{2-\alpha}} \right) \right| \times (2 - \alpha)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \leq \left\{ K_1(\alpha) \left(\frac{|\Lambda'(\rho)|^q}{(3 - \alpha)} + \frac{|\Lambda'(x)|^q}{(2 - \alpha)(3 - \alpha)} \right)^{\frac{1}{q}} + K_0(\alpha) \left(\frac{|\Lambda''(\rho)|^q}{(3 - \alpha)} + \frac{|\Lambda''(x)|^q}{(2 - \alpha)(3 - \alpha)} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & + \left. K_1(\alpha) \left(\frac{|\Lambda'(x)|^q}{(3 - \alpha)} + \frac{|\Lambda'(\sigma)|^q}{(2 - \alpha)(3 - \alpha)} \right)^{\frac{1}{q}} + K_0(\alpha) \left(\frac{|\Lambda''(x)|^q}{(3 - \alpha)} + \frac{|\Lambda''(\sigma)|^q}{(2 - \alpha)(3 - \alpha)} \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

Burada $\alpha \in [0, 1], \rho < x < \sigma, p, q \geq 1$ olup ve K_1 ile K_0 (2.11) deki koşulları sağlayan fonksiyonlardır (Gürbüz et al., 2022).

Teorem 3.37 $\Lambda : \phi \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ϕ° üzerinde iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Ayrıca Λ ve Λ' , ϕ üzerinde L^1 lokal fonksiyonlar olsun. Eğer $|\Lambda'|^q$ ve $|\Lambda''|^q$, ϕ üzerinde konveks fonksiyonlar ise, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left| -\frac{K_1(\alpha)\Lambda(\rho) + K_0(\alpha)\Lambda'(\rho)}{x - \rho} - \frac{K_1(\alpha)\Lambda(x) + K_0(\alpha)\Lambda'(x)}{\sigma - x} \right. \\ & + \left. \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_x^\alpha \Lambda(x)}{(x - \rho)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_\sigma^\alpha \Lambda(\sigma)}{(\sigma - x)^{2-\alpha}} \right) \right| \\ & \leq \frac{2(K_1(\alpha) + K_0(\alpha))}{p^2(1 - \alpha) + p} + \frac{K_1(\alpha)}{2q} \left(|\Lambda'(\rho)|^q + 2|\Lambda'(x)|^q + |\Lambda'(\sigma)|^q \right) \\ & + \frac{K_0(\alpha)}{2q} \left(|\Lambda''(\rho)|^q + 2|\Lambda''(x)|^q + |\Lambda''(\sigma)|^q \right) \end{aligned}$$

Burada $\alpha \in [0, 1], \rho < x < \sigma, q > 1$ olup $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve K_1 ile K_0 (2.11) deki koşulları sağlayan fonksiyonlardır (Gürbüz et al., 2022).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Yeni eksponansiyel m -konveks fonksiyonu ve çeşitli integral eşitsizlikler

Bu bölümde, yeni bir eksponansiyel m konvekslik sınıfı tanımlanacak ve bu sınıf için yeni integral eşitsizlikleri elde edilecektir.

Tanım 4.1 (*Eksponansiyel m -Konveks Fonksiyon*): $\Lambda : \phi \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eksponansiyel m -konveks fonksiyon ise,

$$\Lambda(\theta\sigma + (1-\theta)\rho) \leq \theta \frac{\Lambda(\sigma)}{e^{\alpha_1\sigma}} + m(1-\theta) \frac{\Lambda\left(\frac{\rho}{m}\right)}{e^{\alpha_1\frac{\rho}{m}}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\rho, \sigma \in \phi, \theta \in [0, 1]$ ve $\alpha_1 \in \mathbb{R}, m \in (0, 1]$ şeklindedir.

Teorem 4.1 $\Lambda : [\rho, \sigma] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı (ρ, σ) üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olup $\rho < \sigma$ ve $\Lambda' \in L_1[\rho, \sigma]$ verilsin. Eğer $|\Lambda'|$ eksponansiyel m -konveks fonksiyon ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2(\sigma - \rho)^\alpha + (1 - \alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma) + 2\Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \right. \\ & - \frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[{}^{AB}I_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^\alpha \Lambda(\rho) + {}_\rho^{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) + {}_{(\frac{\rho+\sigma}{2})}^{AB}I^\alpha \Lambda(\sigma) + {}^\sigma I_\sigma^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \Big| \\ & \leq \frac{2 \left[\frac{|\Lambda'(\rho)|}{e^{\alpha_1\rho}} + \frac{m|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|}{e^{\alpha_1\frac{\sigma}{m}}} + \frac{|\Lambda'(\sigma)|}{e^{\alpha_1\sigma}} + \frac{m|\Lambda'(\frac{\rho}{m})|}{e^{\alpha_1\frac{\rho}{m}}} \right]}{\alpha + 1} \end{aligned}$$

Burada $\alpha \in [0, 1], \alpha_1 \in \mathbb{R}, m \in (0, 1]$ ve $\Gamma(\alpha)$ Euler Gama fonksiyonu, $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonudur.

İspat Lemma 3.9 kullanılarak ve mutlak değeri yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2(\sigma - \rho)^\alpha + (1 - \alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma) + 2\Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \right. \\
& - \frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[{}^{AB}I_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^\alpha \Lambda(\rho) + {}_\rho^{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) + {}_{(\frac{\rho+\sigma}{2})}^{AB}I^\alpha \Lambda(\sigma) + {}^\sigma I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \Big| \\
& \leq \int_0^1 (1 - \theta)^\alpha \left| \Lambda'\left(\frac{1 + \theta}{2}\rho + \frac{1 - \theta}{2}\sigma\right) \right| d\theta + \int_0^1 (\theta)^\alpha \left| \Lambda'\left(\frac{1 + \theta}{2}\rho + \frac{1 - \theta}{2}\sigma\right) \right| d\theta \\
& + \int_0^1 (\theta)^\alpha \left| \Lambda'\left(\frac{1 + \theta}{2}\sigma + \frac{1 - \theta}{2}\rho\right) \right| d\theta + \int_0^1 (1 - \theta)^\alpha \left| \Lambda'\left(\frac{1 + \theta}{2}\sigma + \frac{1 - \theta}{2}\rho\right) \right| d\theta
\end{aligned}$$

yazılır. Eksponansiyel m -konveks fonksiyon tanımı dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2(\sigma - \rho)^\alpha + (1 - \alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma) + 2\Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \right. \\
& - \frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[{}^{AB}I_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^\alpha \Lambda(\rho) + {}_\rho^{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) + {}_{(\frac{\rho+\sigma}{2})}^{AB}I^\alpha \Lambda(\sigma) + {}^\sigma I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \Big| \\
& \leq \int_0^1 (1 - \theta)^\alpha \left[\left(\frac{1 + \theta}{2}\right) \frac{|\Lambda'(\rho)|}{e^{\alpha_1 \rho}} + m \left(\frac{1 - \theta}{2}\right) \frac{|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right] d\theta \\
& + \int_0^1 (\theta)^\alpha \left[\left(\frac{1 + \theta}{2}\right) \frac{|\Lambda'(\rho)|}{e^{\alpha_1 \rho}} + m \left(\frac{1 - \theta}{2}\right) \frac{|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right] d\theta \\
& + \int_0^1 (\theta)^\alpha \left[\left(\frac{1 + \theta}{2}\right) \frac{|\Lambda'(\sigma)|}{e^{\alpha_1 \sigma}} + m \left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{|\Lambda'(\frac{\rho}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{\rho}{m}}} \right] d\theta \\
& + \int_0^1 (1 - \theta)^\alpha \left[\left(\frac{1 + \theta}{2}\right) \frac{|\Lambda'(\sigma)|}{e^{\alpha_1 \sigma}} + m \left(\frac{1 - \theta}{2}\right) \frac{|\Lambda'(\frac{\rho}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{\rho}{m}}} \right] d\theta
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli integral hesaplamaları yapılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2(\sigma - \rho)^\alpha + (1 - \alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma) + 2\Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \right. \\
& - \frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[{}^{AB}I_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^\alpha \Lambda(\rho) + {}_\rho^{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) + {}_{(\frac{\rho+\sigma}{2})}^{AB}I^\alpha \Lambda(\sigma) + {}^\sigma_{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \Big| \\
& \leq \frac{2 \left[\frac{|\Lambda'(\rho)|}{e^{\alpha_1 \rho}} + \frac{m|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} + \frac{|\Lambda'(\sigma)|}{e^{\alpha_1 \sigma}} + \frac{m|\Lambda'(\frac{\rho}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{\rho}{m}}} \right]}{\alpha + 1}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.2 $\Lambda : [\rho, \sigma] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı (ρ, σ) üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olup $\rho < \sigma$ ve $\Lambda' \in L_1[\rho, \sigma]$ verilsin. Eğer $|\Lambda'|^q$ eksponansiyel m -konveks fonksiyon ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2(\sigma - \rho)^\alpha + (1 - \alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma) + 2\Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \right. \\
& - \frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[{}^{AB}I_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^\alpha \Lambda(\rho) + {}_\rho^{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) + {}_{(\frac{\rho+\sigma}{2})}^{AB}I^\alpha \Lambda(\sigma) + {}^\sigma_{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \Big| \\
& \leq \frac{2}{(\alpha p + 1)^{\frac{1}{p}}} \left[\left(\frac{3|\Lambda'(\rho)|^q}{4e^{\alpha_1 \rho}} + \frac{m|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|^q}{4e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|\Lambda'(\sigma)|^q}{4e^{\alpha_1 \sigma}} + \frac{m|\Lambda'(\frac{\rho}{m})|^q}{4e^{\alpha_1 \frac{\rho}{m}}} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

Burada $\alpha \in [0, 1]$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $m \in (0, 1]$ ve $\Gamma(\alpha)$ Euler Gama fonksiyonu, $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonudur.

İspat Lemma 3.9 kullanılarak ve mutlak değer yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2(\sigma - \rho)^\alpha + (1 - \alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma) + 2\Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \right. \\
& - \frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[{}^{AB}I_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^\alpha \Lambda(\rho) + {}_\rho^{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) + {}_{(\frac{\rho+\sigma}{2})}^{AB}I^\alpha \Lambda(\sigma) + {}^{AB}I_\sigma^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \Big| \\
& \leq \int_0^1 (1 - \theta)^\alpha \left| \Lambda'\left(\frac{1 + \theta}{2}\rho + \frac{1 - \theta}{2}\sigma\right) \right| d\theta + \int_0^1 (\theta)^\alpha \left| \Lambda'\left(\frac{1 + \theta}{2}\rho + \frac{1 - \theta}{2}\sigma\right) \right| d\theta \\
& + \int_0^1 (\theta)^\alpha \left| \Lambda'\left(\frac{1 + \theta}{2}\sigma + \frac{1 - \theta}{2}\rho\right) \right| d\theta + \int_0^1 (1 - \theta)^\alpha \left| \Lambda'\left(\frac{1 + \theta}{2}\sigma + \frac{1 - \theta}{2}\rho\right) \right| d\theta
\end{aligned}$$

yazılır. Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2(\sigma - \rho)^\alpha + (1 - \alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma) + 2\Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \right. \\
& - \frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[{}^{AB}I_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^\alpha \Lambda(\rho) + {}_\rho^{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) + {}_{(\frac{\rho+\sigma}{2})}^{AB}I^\alpha \Lambda(\sigma) + {}^{AB}I_\sigma^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \Big| \\
& \leq \left(\int_0^1 (1 - \theta)^{\alpha p} d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| \Lambda'\left(\frac{1 + \theta}{2}\rho + \frac{1 - \theta}{2}\sigma\right) \right|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_0^1 (\theta)^{\alpha p} d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| \Lambda'\left(\frac{1 + \theta}{2}\rho + \frac{1 - \theta}{2}\sigma\right) \right|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_0^1 (\theta)^{\alpha p} d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| \Lambda'\left(\frac{1 + \theta}{2}\sigma + \frac{1 - \theta}{2}\rho\right) \right|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_0^1 (1 - \theta)^{\alpha p} d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| \Lambda'\left(\frac{1 + \theta}{2}\sigma + \frac{1 - \theta}{2}\rho\right) \right|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $|\Lambda'|^q$ fonksiyonunun eksponansiyel m -konveks oluşu dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2(\sigma - \rho)^\alpha + (1 - \alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma) + 2\Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \right. \\
& - \frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[{}^{AB}I_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^\alpha \Lambda(\rho) + {}_\rho^{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) + {}_{(\frac{\rho+\sigma}{2})}^{AB}I^\alpha \Lambda(\sigma) + {}^{AB}I_\sigma^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \Big| \\
& \leq \left(\int_0^1 (1 - \theta)^{\alpha p} d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left[\left(\frac{1 + \theta}{2} \right) \frac{|\Lambda'(\rho)|^q}{e^{\alpha_1 \rho}} + m \left(\frac{1 - \theta}{2} \right) \frac{|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right] d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_0^1 (\theta)^{\alpha p} d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left[\left(\frac{1 + \theta}{2} \right) \frac{|\Lambda'(\rho)|^q}{e^{\alpha_1 \rho}} + m \left(\frac{1 - \theta}{2} \right) \frac{|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right] d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_0^1 (\theta)^{\alpha p} d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left[\left(\frac{1 + \theta}{2} \right) \frac{|\Lambda'(\sigma)|^q}{e^{\alpha_1 \sigma}} + m \left(\frac{1 - \theta}{2} \right) \frac{|\Lambda'(\frac{\rho}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{\rho}{m}}} \right] d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_0^1 (1 - \theta)^{\alpha p} d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left[\left(\frac{1 + \theta}{2} \right) \frac{|\Lambda'(\sigma)|^q}{e^{\alpha_1 \sigma}} + m \left(\frac{1 - \theta}{2} \right) \frac{|\Lambda'(\frac{\rho}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{\rho}{m}}} \right] d\theta \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

bulunur. Gerekli integral hesaplamalar yapılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2(\sigma - \rho)^\alpha + (1 - \alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma) + 2\Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \right. \\
& - \frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[{}^{AB}I_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^\alpha \Lambda(\rho) + {}_\rho^{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) + {}_{(\frac{\rho+\sigma}{2})}^{AB}I^\alpha \Lambda(\sigma) + {}^{AB}I_\sigma^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \Big| \\
& \leq \frac{2}{(\alpha p + 1)^{\frac{1}{p}}} \left[\left(\frac{3|\Lambda'(\rho)|^q}{4e^{\alpha_1 \rho}} + \frac{m|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|^q}{4e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|\Lambda'(\sigma)|^q}{4e^{\alpha_1 \sigma}} + \frac{m|\Lambda'(\frac{\rho}{m})|^q}{4e^{\alpha_1 \frac{\rho}{m}}} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.3 $\Lambda : [\rho, \sigma] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı (ρ, σ) üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olup $\rho < \sigma$ ve $\Lambda' \in L_1[\rho, \sigma]$ verilsin. Eğer $|\Lambda'|^q$ eksponansiyel m -konveks fonksiyon ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2(\sigma - \rho)^\alpha + (1 - \alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma) + 2\Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \right. \\
& - \frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[{}^{AB}I_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^\alpha \Lambda(\rho) + {}_\rho^{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) + {}_{(\frac{\rho+\sigma}{2})}^{AB}I^\alpha \Lambda(\sigma) + {}^{AB}I_\sigma^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \Big| \\
& \leq \left(\frac{1}{\alpha + 1} \right)^{1 - (\frac{1}{q})} \left[\left(\frac{\alpha + 3}{2(\alpha + 1)(\alpha + 2)} \frac{|\Lambda'(\rho)|^q}{e^{\alpha_1 \rho}} + \frac{1}{2(\alpha + 2)} \frac{m|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + \left(\frac{2\alpha + 3}{2(\alpha + 1)(\alpha + 2)} \frac{|\Lambda'(\rho)|^q}{e^{\alpha_1 \rho}} + \frac{1}{2(\alpha + 1)(\alpha + 2)} \frac{m|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\frac{2\alpha + 3}{2(\alpha + 1)(\alpha + 2)} \frac{|\Lambda'(\sigma)|^q}{e^{\alpha_1 \sigma}} + \frac{1}{2(\alpha + 1)(\alpha + 2)} \frac{m|\Lambda'(\frac{\rho}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\rho}{m}}} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \left. + \left(\frac{\alpha + 3}{2(\alpha + 1)(\alpha + 2)} \frac{|\Lambda'(\sigma)|^q}{e^{\alpha_1 \sigma}} + \frac{1}{2(\alpha + 2)} \frac{m|\Lambda'(\frac{\rho}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\rho}{m}}} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

Burada $\alpha \in [0, 1]$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $m \in (0, 1]$ ve $\Gamma(\alpha)$ Euler Gama fonksiyonu, $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonudur.

İspat Lemma 3.9 kullanılarak ve mutlak değer yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2(\sigma - \rho)^\alpha + (1 - \alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma) + 2\Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \right. \\
& - \frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[{}^{AB}I_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^\alpha \Lambda(\rho) + {}_\rho^{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) + {}_{(\frac{\rho+\sigma}{2})}^{AB}I^\alpha \Lambda(\sigma) + {}^{AB}I_\sigma^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \Big| \\
& \leq \int_0^1 (1 - \theta)^\alpha \left| \Lambda'\left(\frac{1 + \theta}{2}\rho + \frac{1 - \theta}{2}\sigma\right) \right| d\theta + \int_0^1 (\theta)^\alpha \left| \Lambda'\left(\frac{1 + \theta}{2}\rho + \frac{1 - \theta}{2}\sigma\right) \right| d\theta \\
& + \int_0^1 (\theta)^\alpha \left| \Lambda'\left(\frac{1 + \theta}{2}\sigma + \frac{1 - \theta}{2}\rho\right) \right| d\theta + \int_0^1 (1 - \theta)^\alpha \left| \Lambda'\left(\frac{1 + \theta}{2}\sigma + \frac{1 - \theta}{2}\rho\right) \right| d\theta
\end{aligned}$$

yazılır. Power-mean eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2(\sigma - \rho)^\alpha + (1 - \alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma) + 2\Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \right. \\
& - \frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[{}^{AB}I_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^\alpha \Lambda(\rho) + {}_\rho^{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) + {}_{(\frac{\rho+\sigma}{2})}^{AB}I^\alpha \Lambda(\sigma) + {}^\sigma{}^{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \Big| \\
& \leq \left(\int_0^1 (1 - \theta)^\alpha d\theta \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1 - \theta)^\alpha \left| \Lambda'\left(\frac{1 + \theta}{2}\rho + \frac{1 - \theta}{2}\sigma\right) \right|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_0^1 (\theta)^\alpha d\theta \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \theta^\alpha \left| \Lambda'\left(\frac{1 + \theta}{2}\rho + \frac{1 - \theta}{2}\sigma\right) \right|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_0^1 (\theta)^\alpha d\theta \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \theta^\alpha \left| \Lambda'\left(\frac{1 + \theta}{2}\sigma + \frac{1 - \theta}{2}\rho\right) \right|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_0^1 (1 - \theta)^\alpha d\theta \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1 - \theta)^\alpha \left| \Lambda'\left(\frac{1 + \theta}{2}\sigma + \frac{1 - \theta}{2}\rho\right) \right|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $|\Lambda'|^q$ fonksiyonunun eksponansiyel m -konveks oluşu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2(\sigma - \rho)^\alpha + (1 - \alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma) + 2\Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \right. \\
& - \frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[{}^{AB}I_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^\alpha \Lambda(\rho) + {}_\rho^{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) + {}_{(\frac{\rho+\sigma}{2})}^{AB}I^\alpha \Lambda(\sigma) + {}^\sigma{}^{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \Big| \\
& \leq \left(\int_0^1 (1 - \theta)^\alpha d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1 - \theta)^\alpha \left[\left(\frac{1 + \theta}{2} \right) \frac{|\Lambda'(\rho)|^q}{e^{\alpha_1 \rho}} + m \left(\frac{1 - \theta}{2} \right) \frac{|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right] d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_0^1 (\theta)^\alpha d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \theta^\alpha \left[\left(\frac{1 + \theta}{2} \right) \frac{|\Lambda'(\rho)|^q}{e^{\alpha_1 \rho}} + m \left(\frac{1 - \theta}{2} \right) \frac{|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right] d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_0^1 (\theta)^\alpha d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \theta^\alpha \left[\left(\frac{1 + \theta}{2} \right) \frac{|\Lambda'(\sigma)|^q}{e^{\alpha_1 \sigma}} + m \left(\frac{1 - \theta}{2} \right) \frac{|\Lambda'(\frac{\rho}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{\rho}{m}}} \right] d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_0^1 (1 - \theta)^\alpha d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1 - \theta)^\alpha \left[\left(\frac{1 + \theta}{2} \right) \frac{|\Lambda'(\sigma)|^q}{e^{\alpha_1 \sigma}} + m \left(\frac{1 - \theta}{2} \right) \frac{|\Lambda'(\frac{\rho}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{\rho}{m}}} \right] d\theta \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

yazılır. Gerekli integral hesaplamalar yapılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2(\sigma - \rho)^\alpha + (1 - \alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma) + 2\Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \right. \\
& - \frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[{}^{AB}I_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^\alpha \Lambda(\rho) + {}_\rho^{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) + {}_{(\frac{\rho+\sigma}{2})}^{AB}I^\alpha \Lambda(\sigma) + {}^\sigma{}^{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \Big| \\
& \leq \left(\frac{1}{\alpha + 1} \right)^{1-(\frac{1}{q})} \left[\left(\frac{\alpha + 3}{2(\alpha + 1)(\alpha + 2)} \frac{|\Lambda'(\rho)|^q}{e^{\alpha_1 \rho}} + \frac{1}{2(\alpha + 2)} \frac{m|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + \left(\frac{2\alpha + 3}{2(\alpha + 1)(\alpha + 2)} \frac{|\Lambda'(\rho)|^q}{e^{\alpha_1 \rho}} + \frac{1}{2(\alpha + 1)(\alpha + 2)} \frac{m|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\frac{2\alpha + 3}{2(\alpha + 1)(\alpha + 2)} \frac{|\Lambda'(\sigma)|^q}{e^{\alpha_1 \sigma}} + \frac{1}{2(\alpha + 1)(\alpha + 2)} \frac{m|\Lambda'(\frac{\rho}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\rho}{m}}} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \left. + \left(\frac{\alpha + 3}{2(\alpha + 1)(\alpha + 2)} \frac{|\Lambda'(\sigma)|^q}{e^{\alpha_1 \sigma}} + \frac{1}{2(\alpha + 2)} \frac{m|\Lambda'(\frac{\rho}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\rho}{m}}} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4 $\Lambda : [\rho, \sigma] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı (ρ, σ) üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olup $\rho < \sigma$ ve $\Lambda' \in L_1[\rho, \sigma]$ verilsin. Eğer $|\Lambda'|^q$ eksponansiyel m -konveks fonksiyon ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2(\sigma - \rho)^\alpha + (1 - \alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma) + 2\Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \right. \\ & - \frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[{}^{AB}I_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^\alpha \Lambda(\rho) + {}_\rho^{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) + {}_{(\frac{\rho+\sigma}{2})}^{AB}I^\alpha \Lambda(\sigma) + {}^\sigma_{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \Big| \\ & \leq \frac{4}{p(\alpha p + 1)} + \frac{2 \left[\left(\frac{3|\Lambda'(\rho)|^q}{e^{\alpha_1 \rho}} + \frac{m|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right) + \left(\frac{3|\Lambda'(\sigma)|^q}{e^{\alpha_1 \sigma}} + \frac{m|\Lambda'(\frac{\rho}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\rho}{m}}} \right) \right]}{4q} \end{aligned}$$

Burada $\alpha \in [0, 1]$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $m \in (0, 1]$ ve $\Gamma(\alpha)$ Euler Gama fonksiyonu, $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonudur.

İspat Lemma 3.9 kullanılarak ve mutlak değer yardımıyla

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2(\sigma - \rho)^\alpha + (1 - \alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma) + 2\Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \right. \\ & - \frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[{}^{AB}I_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^\alpha \Lambda(\rho) + {}_\rho^{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) + {}_{(\frac{\rho+\sigma}{2})}^{AB}I^\alpha \Lambda(\sigma) + {}^\sigma_{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \Big| \\ & \leq \int_0^1 (1 - \theta)^\alpha \left| \Lambda'\left(\frac{1+\theta}{2}\rho + \frac{1-\theta}{2}\sigma\right) \right| d\theta + \int_0^1 (\theta)^\alpha \left| \Lambda'\left(\frac{1+\theta}{2}\rho + \frac{1-\theta}{2}\sigma\right) \right| d\theta \\ & + \int_0^1 (\theta)^\alpha \left| \Lambda'\left(\frac{1+\theta}{2}\sigma + \frac{1-\theta}{2}\rho\right) \right| d\theta + \int_0^1 (1 - \theta)^\alpha \left| \Lambda'\left(\frac{1+\theta}{2}\sigma + \frac{1-\theta}{2}\rho\right) \right| d\theta \end{aligned}$$

yazılır. Young eşitsizliği $(xy \leq (1/p)x^p + (1/q)y^q)$ kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2(\sigma - \rho)^\alpha + (1 - \alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma) + 2\Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \right. \\
& - \frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[{}^{AB}I_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^\alpha \Lambda(\rho) + {}_\rho^{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) + {}_{(\frac{\rho+\sigma}{2})}^{AB}I^\alpha \Lambda(\sigma) + {}^\sigma{}^{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \Big| \\
& \leq \left(\int_0^1 (1 - \theta)^\alpha d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1 - \theta)^\alpha \left| \Lambda'\left(\frac{1+\theta}{2}\rho + \frac{1-\theta}{2}\sigma\right) \right|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_0^1 (\theta)^\alpha d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \theta^\alpha \left| \Lambda'\left(\frac{1+\theta}{2}\rho + \frac{1-\theta}{2}\sigma\right) \right|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_0^1 (\theta)^\alpha d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \theta^\alpha \left| \Lambda'\left(\frac{1+\theta}{2}\sigma + \frac{1-\theta}{2}\rho\right) \right|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_0^1 (1 - \theta)^\alpha d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1 - \theta)^\alpha \left| \Lambda'\left(\frac{1+\theta}{2}\sigma + \frac{1-\theta}{2}\rho\right) \right|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

bulunur. $|\Lambda'|^q$ fonksiyonunun eksponansiyel m -konveks oluşu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2(\sigma - \rho)^\alpha + (1 - \alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma) + 2\Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \right. \\
& - \frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[{}^{AB}I_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^\alpha \Lambda(\rho) + {}_\rho^{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) + {}_{(\frac{\rho+\sigma}{2})}^{AB}I^\alpha \Lambda(\sigma) + {}^\sigma{}^{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \Big| \\
& \leq \frac{1}{p} \int_0^1 (1 - \theta)^{\alpha p} d\theta + \frac{1}{q} \int_0^1 \left[\left(\frac{1+\theta}{2}\right) \frac{|\Lambda'(\rho)|^q}{e^{\alpha_1 \rho}} + m \left(\frac{1-\theta}{2}\right) \frac{|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right] d\theta \\
& + \frac{1}{p} \int_0^1 (\theta)^{\alpha p} d\theta + \frac{1}{q} \int_0^1 \left[\left(\frac{1+\theta}{2}\right) \frac{|\Lambda'(\rho)|^q}{e^{\alpha_1 \rho}} + m \left(\frac{1-\theta}{2}\right) \frac{|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right] d\theta \\
& + \frac{1}{p} \int_0^1 (\theta)^{\alpha p} d\theta + \frac{1}{q} \int_0^1 \left[\left(\frac{1+\theta}{2}\right) \frac{|\Lambda'(\sigma)|^q}{e^{\alpha_1 \sigma}} + m \left(\frac{1-\theta}{2}\right) \frac{|\Lambda'(\frac{\rho}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\rho}{m}}} \right] d\theta \\
& + \frac{1}{p} \int_0^1 (1 - \theta)^{\alpha p} d\theta + \frac{1}{q} \int_0^1 \left[\left(\frac{1+\theta}{2}\right) \frac{|\Lambda'(\sigma)|^q}{e^{\alpha_1 \sigma}} + m \left(\frac{1-\theta}{2}\right) \frac{|\Lambda'(\frac{\rho}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\rho}{m}}} \right] d\theta
\end{aligned}$$

yazılır. Gerekli integral hesaplamalar yapılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2(\sigma - \rho)^\alpha + (1 - \alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[\Lambda(\rho) + \Lambda(\sigma) + 2\Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \right. \\
& - \frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(\sigma - \rho)^{\alpha+1}} \left[{}^{AB}I_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^\alpha \Lambda(\rho) + {}_\rho^{AB}I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) + {}_{(\frac{\rho+\sigma}{2})}^{AB}I^\alpha \Lambda(\sigma) + {}^\sigma I^\alpha \Lambda\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) \right] \left. \right| \\
& \leq \frac{4}{p(\alpha p + 1)} + \frac{2 \left[\left(\frac{3|\Lambda'(\rho)|^q}{e^{\alpha_1 \rho}} + \frac{m|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right) + \left(\frac{3|\Lambda'(\sigma)|^q}{e^{\alpha_1 \sigma}} + \frac{m|\Lambda'(\frac{\rho}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\rho}{m}}} \right) \right]}{4q}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.5 $\Lambda : \phi \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ϕ° üzerinde iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Ayrıca Λ ve Λ' , ϕ üzerinde L^1 lokal fonksiyonlar olsun. Eğer Λ' ve Λ'' , ϕ üzerinde eksponansiyel m -konveks fonksiyonlar ise, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\Lambda(\rho) + K_0(\alpha)\Lambda'(\rho)}{x - \rho} - \frac{K_1(\alpha)\Lambda(x) + K_0(\alpha)\Lambda'(x)}{\sigma - x} \right. \\
& + \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{\rho}{(x - \rho)^{2-\alpha}} D_x^\alpha \Lambda(x) + \frac{\sigma}{(\sigma - x)^{2-\alpha}} D_\sigma^\alpha \Lambda(\sigma) \right) \left. \right| \\
& \leq \frac{K_1(\alpha) \frac{|\Lambda'(\rho)|}{e^{\alpha_1 \rho}} + K_0(\alpha) \frac{|\Lambda''(\rho)|}{e^{\alpha_1 \rho}}}{(3 - \alpha)} + \frac{K_1(\alpha) \frac{|\Lambda'(x)|}{e^{\alpha_1 x}} + K_0(\alpha) \frac{|\Lambda''(x)|}{e^{\alpha_1 x}}}{(3 - \alpha)} \\
& + \frac{K_1(\alpha) \frac{m|\Lambda'(\frac{x}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{x}{m}}} + K_0(\alpha) \frac{m|\Lambda''(\frac{x}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{x}{m}}}}{(2 - \alpha)(3 - \alpha)} + \frac{K_1(\alpha) \frac{m|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} + K_0(\alpha) \frac{m|\Lambda''(\frac{\sigma}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}}}{(2 - \alpha)(3 - \alpha)}
\end{aligned}$$

Burada $\alpha \in [0, 1]$, $\rho < x < \sigma$, $m \in (0, 1]$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$ ve K_0 ile K_1 (2.11) koşulları karşılayan fonksiyonlardır.

İspat Lemma 3.10 kullanılarak ve mutlak değer yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\Lambda(\rho) + K_0(\alpha)\Lambda'(\rho)}{x - \rho} - \frac{K_1(\alpha)\Lambda(x) + K_0(\alpha)\Lambda'(x)}{\sigma - x} \right. \\
& + \left. \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_x^\alpha \Lambda(x)}{(x - \rho)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_\sigma^\alpha \Lambda(\sigma)}{(\sigma - x)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
& \leq K_1(\alpha) \int_0^1 \theta^{1-\alpha} |\Lambda'(\theta\rho + (1 - \theta)x)| d\theta + K_0(\alpha) \int_0^1 \theta^{1-\alpha} |\Lambda''(\theta\rho + (1 - \theta)x)| d\theta \\
& + K_1(\alpha) \int_0^1 \theta^{1-\alpha} |\Lambda'(\theta x + (1 - \theta)\sigma)| d\theta + K_0(\alpha) \int_0^1 \theta^{1-\alpha} |\Lambda''(\theta x + (1 - \theta)\sigma)| d\theta
\end{aligned}$$

yazılır. Λ' ve Λ'' fonksiyonlarının eksponansiyel m -konveks oluşu kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\Lambda(\rho) + K_0(\alpha)\Lambda'(\rho)}{x - \rho} - \frac{K_1(\alpha)\Lambda(x) + K_0(\alpha)\Lambda'(x)}{\sigma - x} \right. \\
& + \left. \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_x^\alpha \Lambda(x)}{(x - \rho)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_\sigma^\alpha \Lambda(\sigma)}{(\sigma - x)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
& \leq K_1(\alpha) \int_0^1 \theta^{1-\alpha} \left(\theta \frac{|\Lambda'(\rho)|}{e^{\alpha_1 \rho}} + m(1 - \theta) \frac{|\Lambda'(\frac{x}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{x}{m}}} \right) d\theta \\
& + K_0(\alpha) \int_0^1 \theta^{1-\alpha} \left(\theta \frac{|\Lambda''(\rho)|}{e^{\alpha_1 \rho}} + m(1 - \theta) \frac{|\Lambda''(\frac{x}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{x}{m}}} \right) d\theta \\
& + K_1(\alpha) \int_0^1 \theta^{1-\alpha} \left(\theta \frac{|\Lambda'(x)|}{e^{\alpha_1 x}} + m(1 - \theta) \frac{|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right) d\theta \\
& + K_0(\alpha) \int_0^1 \theta^{1-\alpha} \left(\theta \frac{|\Lambda''(x)|}{e^{\alpha_1 x}} + m(1 - \theta) \frac{|\Lambda''(\frac{\sigma}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right) d\theta
\end{aligned}$$

yazılır. Gerekli integral hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\Lambda(\rho) + K_0(\alpha)\Lambda'(\rho)}{x - \rho} - \frac{K_1(\alpha)\Lambda(x) + K_0(\alpha)\Lambda'(x)}{\sigma - x} \right. \\
& + \left. \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_x^\alpha \Lambda(x)}{(x - \rho)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_\sigma^\alpha \Lambda(\sigma)}{(\sigma - x)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
& \leq \frac{K_1(\alpha) \frac{|\Lambda'(\rho)|}{e^{\alpha_1 \rho}} + K_0(\alpha) \frac{|\Lambda''(\rho)|}{e^{\alpha_1 \rho}}}{(3 - \alpha)} + \frac{K_1(\alpha) \frac{|\Lambda'(x)|}{e^{\alpha_1 x}} + K_0(\alpha) \frac{|\Lambda''(x)|}{e^{\alpha_1 x}}}{(3 - \alpha)} \\
& + \frac{K_1(\alpha) \frac{m|\Lambda'(\frac{x}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{x}{m}}} + K_0(\alpha) \frac{m|\Lambda''(\frac{x}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{x}{m}}}}{(2 - \alpha)(3 - \alpha)} + \frac{K_1(\alpha) \frac{m|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} + K_0(\alpha) \frac{m|\Lambda''(\frac{\sigma}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}}}{(2 - \alpha)(3 - \alpha)}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.6 $\Lambda : \phi \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ϕ° üzerinde iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Ayrıca Λ ve Λ' , ϕ üzerinde L^1 lokal fonksiyonlar olsun. Eğer $|\Lambda'|^q$ ve $|\Lambda''|^q$, ϕ üzerinde eksponansiyel m -konveks fonksiyonlar ise, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.:

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\Lambda(\rho) + K_0(\alpha)\Lambda'(\rho)}{x - \rho} - \frac{K_1(\alpha)\Lambda(x) + K_0(\alpha)\Lambda'(x)}{\sigma - x} \right. \\
& + \left. \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_x^\alpha \Lambda(x)}{(x - \rho)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_\sigma^\alpha \Lambda(\sigma)}{(\sigma - x)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
& \leq \frac{1}{((1 - \alpha)p + 1)^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{q}}} \left[K_1(\alpha) \left(\frac{|\Lambda'(\rho)|^q}{e^{\alpha_1 \rho}} + \frac{m|\Lambda'(\frac{x}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{x}{m}}} \right)^{\frac{1}{q}} + K_0(\alpha) \left(\frac{|\Lambda''(\rho)|^q}{e^{\alpha_1 \rho}} + \frac{m|\Lambda''(\frac{x}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{x}{m}}} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + \left. K_1(\alpha) \left(\frac{|\Lambda'(x)|^q}{e^{\alpha_1 x}} + \frac{m|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right)^{\frac{1}{q}} + K_0(\alpha) \left(\frac{|\Lambda''(x)|^q}{e^{\alpha_1 x}} + \frac{m|\Lambda''(\frac{\sigma}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

Burada $\alpha \in [0, 1]$, $\rho < x < \sigma$, $m \in (0, 1]$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$ ve K_0 ile K_1 (2.11) deki koşulları karşılayan fonksiyonlardır.

İspat Lemma 3.10 kullanılarak ve mutlak değer yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\Lambda(\rho) + K_0(\alpha)\Lambda'(\rho)}{x - \rho} - \frac{K_1(\alpha)\Lambda(x) + K_0(\alpha)\Lambda'(x)}{\sigma - x} \right. \\
& + \left. \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_x^\alpha \Lambda(x)}{(x - \rho)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_\sigma^\alpha \Lambda(\sigma)}{(\sigma - x)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
& \leq K_1(\alpha) \int_0^1 \theta^{1-\alpha} |\Lambda'(\theta\rho + (1 - \theta)x)| d\theta + K_0(\alpha) \int_0^1 \theta^{1-\alpha} |\Lambda''(\theta\rho + (1 - \theta)x)| d\theta \\
& + K_1(\alpha) \int_0^1 \theta^{1-\alpha} |\Lambda'(\theta x + (1 - \theta)\sigma)| d\theta + K_0(\alpha) \int_0^1 \theta^{1-\alpha} |\Lambda''(\theta x + (1 - \theta)\sigma)| d\theta
\end{aligned}$$

yazılır. Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\Lambda(\rho) + K_0(\alpha)\Lambda'(\rho)}{x - \rho} - \frac{K_1(\alpha)\Lambda(x) + K_0(\alpha)\Lambda'(x)}{\sigma - x} \right. \\
& + \left. \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_x^\alpha \Lambda(x)}{(x - \rho)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_\sigma^\alpha \Lambda(\sigma)}{(\sigma - x)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
& \leq K_1(\alpha) \left[\left(\int_0^1 \theta^{(1-\alpha)p} d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |\Lambda'(\theta\rho + (1 - \theta)x)|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& + K_0(\alpha) \left[\left(\int_0^1 \theta^{(1-\alpha)p} d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |\Lambda''(\theta\rho + (1 - \theta)x)|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& + K_1(\alpha) \left[\left(\int_0^1 \theta^{(1-\alpha)p} d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |\Lambda'(\theta x + (1 - \theta)\sigma)|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& + K_0(\alpha) \left[\left(\int_0^1 \theta^{(1-\alpha)p} d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |\Lambda''(\theta x + (1 - \theta)\sigma)|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. $|\Lambda'|^q$ and $|\Lambda''|^q$ fonksiyonlarının eksponansiyel m -konveks oluşu kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\Lambda(\rho) + K_0(\alpha)\Lambda'(\rho)}{x - \rho} - \frac{K_1(\alpha)\Lambda(x) + K_0(\alpha)\Lambda'(x)}{\sigma - x} \right| \\
& + \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{\rho^{CPC} D_x^\alpha \Lambda(x)}{(x - \rho)^{2-\alpha}} + \frac{x^{CPC} D_\sigma^\alpha \Lambda(\sigma)}{(\sigma - x)^{2-\alpha}} \right) \Big| \\
& \leq \frac{1}{((1 - \alpha)p + 1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ K_1(\alpha) \left(\int_0^1 \left(\theta \frac{|\Lambda'(\rho)|^q}{e^{\alpha_1 \rho}} + m(1 - \theta) \frac{|\Lambda'(\frac{x}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{x}{m}}} \right) d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + K_0(\alpha) \left(\int_0^1 \left(\theta \frac{|\Lambda''(\rho)|^q}{e^{\alpha_1 \rho}} + m(1 - \theta) \frac{|\Lambda''(\frac{x}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{x}{m}}} \right) d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + K_1(\alpha) \left(\int_0^1 \left(\theta \frac{|\Lambda'(x)|^q}{e^{\alpha_1 x}} + m(1 - \theta) \frac{|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right) d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \left. + K_0(\alpha) \left(\int_0^1 \left(\theta \frac{|\Lambda''(x)|^q}{e^{\alpha_1 x}} + m(1 - \theta) \frac{|\Lambda''(\frac{\sigma}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right) d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli integral hesaplamalar yapılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\Lambda(\rho) + K_0(\alpha)\Lambda'(\rho)}{x - \rho} - \frac{K_1(\alpha)\Lambda(x) + K_0(\alpha)\Lambda'(x)}{\sigma - x} \right| \\
& + \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{\rho^{CPC} D_x^\alpha \Lambda(x)}{(x - \rho)^{2-\alpha}} + \frac{x^{CPC} D_\sigma^\alpha \Lambda(\sigma)}{(\sigma - x)^{2-\alpha}} \right) \Big| \\
& \leq \frac{1}{((1 - \alpha)p + 1)^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{q}}} \left[K_1(\alpha) \left(\frac{|\Lambda'(\rho)|^q}{e^{\alpha_1 \rho}} + \frac{m|\Lambda'(\frac{x}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{x}{m}}} \right)^{\frac{1}{q}} + K_0(\alpha) \left(\frac{|\Lambda''(\rho)|^q}{e^{\alpha_1 \rho}} + \frac{m|\Lambda''(\frac{x}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{x}{m}}} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + K_1(\alpha) \left(\frac{|\Lambda'(x)|^q}{e^{\alpha_1 x}} + \frac{m|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right)^{\frac{1}{q}} + K_0(\alpha) \left(\frac{|\Lambda''(x)|^q}{e^{\alpha_1 x}} + \frac{m|\Lambda''(\frac{\sigma}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.7 $\Lambda : \phi \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ϕ° üzerinde iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Ayrıca Λ ve Λ' , ϕ üzerinde L^1 lokal fonksiyonlar olsun. Eğer $|\Lambda'|^q$ ve $|\Lambda''|^q$, ϕ üzerinde eksponansiyel m -konveks fonksiyonlar ise, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\Lambda(\rho) + K_0(\alpha)\Lambda'(\rho)}{x - \rho} - \frac{K_1(\alpha)\Lambda(x) + K_0(\alpha)\Lambda'(x)}{\sigma - x} \right. \\
& + \left. \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_x^\alpha \Lambda(x)}{(x - \rho)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_\sigma^\alpha \Lambda(\sigma)}{(\sigma - x)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
& \leq \left\{ K_1(\alpha) \left(\frac{|\Lambda'(\rho)|^q}{e^{\alpha_1 \rho}} + \frac{m|\Lambda'(\frac{x}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{x}{m}}} \right)^{\frac{1}{q}} + K_0(\alpha) \left(\frac{|\Lambda''(\rho)|^q}{(3 - \alpha)} + \frac{m|\Lambda''(\frac{x}{m})|^q}{(2 - \alpha)(3 - \alpha)} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + \left. K_1(\alpha) \left(\frac{|\Lambda'(x)|^q}{e^{\alpha_1 x}} + \frac{m|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right)^{\frac{1}{q}} + K_0(\alpha) \left(\frac{|\Lambda''(x)|^q}{(3 - \alpha)} + \frac{m|\Lambda''(\frac{\sigma}{m})|^q}{(2 - \alpha)(3 - \alpha)} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

Burada $\alpha \in [0, 1]$, $\rho < x < \sigma$, $m \in (0, 1]$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$ ve K_0 ile K_1 (2.11) deki koşulları karşılayan fonksiyonlardır.

İspat Lemma 3.10 kullanılarak ve mutlak değer yardımıyla,

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\Lambda(\rho) + K_0(\alpha)\Lambda'(\rho)}{x - \rho} - \frac{K_1(\alpha)\Lambda(x) + K_0(\alpha)\Lambda'(x)}{\sigma - x} \right. \\
& + \left. \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_x^\alpha \Lambda(x)}{(x - \rho)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_\sigma^\alpha \Lambda(\sigma)}{(\sigma - x)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
& \leq K_1(\alpha) \int_0^1 \theta^{1-\alpha} |\Lambda'(\theta\rho + (1 - \theta)x)| d\theta + K_0(\alpha) \int_0^1 \theta^{1-\alpha} |\Lambda''(\theta\rho + (1 - \theta)x)| d\theta \\
& + K_1(\alpha) \int_0^1 \theta^{1-\alpha} |\Lambda'(\theta x + (1 - \theta)\sigma)| d\theta + K_0(\alpha) \int_0^1 \theta^{1-\alpha} |\Lambda''(\theta x + (1 - \theta)\sigma)| d\theta
\end{aligned}$$

yazılır. Power-mean eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\Lambda(\rho) + K_0(\alpha)\Lambda'(\rho)}{x - \rho} - \frac{K_1(\alpha)\Lambda(x) + K_0(\alpha)\Lambda'(x)}{\sigma - x} \right| \\
& + \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_x^\alpha \Lambda(x)}{(x - \rho)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_\sigma^\alpha \Lambda(\sigma)}{(\sigma - x)^{2-\alpha}} \right) \Big| \\
& \leq K_1(\alpha) \left[\left(\int_0^1 \theta^{(1-\alpha)} d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \theta^{1-\alpha} |\Lambda'(\theta\rho + (1-\theta)x|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& + K_0(\alpha) \left[\left(\int_0^1 \theta^{(1-\alpha)} d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \theta^{1-\alpha} |\Lambda''(\theta\rho + (1-\theta)x|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& + K_1(\alpha) \left[\left(\int_0^1 \theta^{(1-\alpha)} d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \theta^{1-\alpha} |\Lambda'(\theta x + (1-\theta)\sigma|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& + K_0(\alpha) \left[\left(\int_0^1 \theta^{(1-\alpha)} d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \theta^{1-\alpha} |\Lambda''(\theta x + (1-\theta)\sigma|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

yazılır. $|\Lambda'|^q$ ve $|\Lambda''|^q$ fonksiyonlarının eksponansiyel m -konveks oluşu kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\Lambda(\rho) + K_0(\alpha)\Lambda'(\rho)}{x - \rho} - \frac{K_1(\alpha)\Lambda(x) + K_0(\alpha)\Lambda'(x)}{\sigma - x} \right| \\
& + \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_x^\alpha \Lambda(x)}{(x - \rho)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_\sigma^\alpha \Lambda(\sigma)}{(\sigma - x)^{2-\alpha}} \right) \Big| \\
& \leq \frac{1}{((2 - \alpha))^{1-\frac{1}{q}}} \left\{ K_1(\alpha) \left(\int_0^1 \theta^{1-\alpha} \left(\theta \frac{|\Lambda'(\rho)|^q}{e^{\alpha_1 \rho}} + m(1-\theta) \frac{|\Lambda'(\frac{x}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{x}{m}}} \right) d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + K_0(\alpha) \left(\int_0^1 \theta^{1-\alpha} \left(\theta \frac{|\Lambda''(\rho)|^q}{e^{\alpha_1 \rho}} + m(1-\theta) \frac{|\Lambda''(\frac{x}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{x}{m}}} \right) d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + K_1(\alpha) \left(\int_0^1 \theta^{1-\alpha} \left(\theta \frac{|\Lambda'(x)|^q}{e^{\alpha_1 x}} + m(1-\theta) \frac{|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right) d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \left. + K_0(\alpha) \left(\int_0^1 \theta^{1-\alpha} \left(\theta \frac{|\Lambda''(x)|^q}{e^{\alpha_1 x}} + m(1-\theta) \frac{|\Lambda''(\frac{\sigma}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right) d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli integral hesaplamalar yapılrırsa

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\Lambda(\rho) + K_0(\alpha)\Lambda'(\rho)}{x - \rho} - \frac{K_1(\alpha)\Lambda(x) + K_0(\alpha)\Lambda'(x)}{\sigma - x} \right. \\
& + \left. \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{\rho^{CPC} D_x^\alpha \Lambda(x)}{(x - \rho)^{2-\alpha}} + \frac{x^{CPC} D_\sigma^\alpha \Lambda(\sigma)}{(\sigma - x)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
& \leq \left\{ K_1(\alpha) \left(\frac{|\Lambda'(\rho)|^q + \frac{m|\Lambda'(\frac{x}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{x}{m}}}}{3 - \alpha} + \frac{m|\Lambda'(\frac{x}{m})|^q}{(2 - \alpha)(3 - \alpha)} \right)^{\frac{1}{q}} + K_0(\alpha) \left(\frac{|\Lambda''(\rho)|^q + \frac{m|\Lambda''(\frac{x}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{x}{m}}}}{(3 - \alpha)} + \frac{m|\Lambda''(\frac{x}{m})|^q}{(2 - \alpha)(3 - \alpha)} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + \left. K_1(\alpha) \left(\frac{|\Lambda'(x)|^q + \frac{m|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}}}{(3 - \alpha)} + \frac{m|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|^q}{(2 - \alpha)(3 - \alpha)} \right)^{\frac{1}{q}} + K_0(\alpha) \left(\frac{|\Lambda''(x)|^q + \frac{m|\Lambda''(\frac{\sigma}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}}}{(3 - \alpha)} + \frac{m|\Lambda''(\frac{\sigma}{m})|^q}{(2 - \alpha)(3 - \alpha)} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.8 $\Lambda : \phi \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ϕ° üzerinde iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Ayrıca Λ ve Λ' , ϕ üzerinde L^1 lokal fonksiyonlar olsun. Eğer $|\Lambda'|^q$ ve $|\Lambda''|^q$, ϕ üzerinde eksponansiyel m -konveks fonksiyonlar ise, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\Lambda(\rho) + K_0(\alpha)\Lambda'(\rho)}{x - \rho} - \frac{K_1(\alpha)\Lambda(x) + K_0(\alpha)\Lambda'(x)}{\sigma - x} \right. \\
& + \left. \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{\rho^{CPC} D_x^\alpha \Lambda(x)}{(x - \rho)^{2-\alpha}} + \frac{x^{CPC} D_\sigma^\alpha \Lambda(\sigma)}{(\sigma - x)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
& \leq \frac{2(K - 1(\alpha) + K_0(\alpha))}{p^2(1 - \alpha) + p} + \frac{K_1(\alpha)}{2q} \left(\frac{|\Lambda'(\rho)|}{e^{\alpha_1 \rho}} + \frac{|\Lambda'(x)|}{e^{\alpha_1 x}} + \frac{m|\Lambda'(\frac{x}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{x}{m}}} + \frac{m|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right) \\
& + \frac{K_0(\alpha)}{2q} \left(\frac{|\Lambda''(\rho)|}{e^{\alpha_1 \rho}} + \frac{|\Lambda''(x)|}{e^{\alpha_1 x}} + \frac{m|\Lambda''(\frac{x}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{x}{m}}} + \frac{m|\Lambda''(\frac{\sigma}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right)
\end{aligned}$$

Burada $\alpha \in [0, 1]$, $\rho < x < \sigma$, $m \in (0, 1]$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve K_0 ile K_1 (2.11) deki koşulları karşılayan fonksiyonlardır.

İspat Lemma 3.10 kullanılarak ve mutlak değer yardımıyla,

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\Lambda(\rho) + K_0(\alpha)\Lambda'(\rho)}{x - \rho} - \frac{K_1(\alpha)\Lambda(x) + K_0(\alpha)\Lambda'(x)}{\sigma - x} \right. \\
& + \left. \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_x^\alpha \Lambda(x)}{(x - \rho)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_\sigma^\alpha \Lambda(\sigma)}{(\sigma - x)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
& \leq K_1(\alpha) \int_0^1 \theta^{1-\alpha} |\Lambda'(\theta\rho + (1 - \theta)x)| d\theta + K_0(\alpha) \int_0^1 \theta^{1-\alpha} |\Lambda''(\theta\rho + (1 - \theta)x)| d\theta \\
& + K_1(\alpha) \int_0^1 \theta^{1-\alpha} |\Lambda'(\theta x + (1 - \theta)\sigma)| d\theta + K_0(\alpha) \int_0^1 \theta^{1-\alpha} |\Lambda''(\theta x + (1 - \theta)\sigma)| d\theta
\end{aligned}$$

yazılır. Young eşitsizliği ($xy \leq (1/p)x^p + (1/q)y^q$) uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\Lambda(\rho) + K_0(\alpha)\Lambda'(\rho)}{x - \rho} - \frac{K_1(\alpha)\Lambda(x) + K_0(\alpha)\Lambda'(x)}{\sigma - x} \right. \\
& + \left. \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_x^\alpha \Lambda(x)}{(x - \rho)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_\sigma^\alpha \Lambda(\sigma)}{(\sigma - x)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
& \leq K_1(\alpha) \left[\frac{1}{p} \int_0^1 \theta^{p(1-\alpha)} d\theta + \frac{1}{q} \int_0^1 |\Lambda'(\theta\rho + (1 - \theta)x)|^q d\theta \right] \\
& + K_0(\alpha) \left[\frac{1}{p} \int_0^1 \theta^{p(1-\alpha)} d\theta + \frac{1}{q} \int_0^1 |\Lambda''(\theta\rho + (1 - \theta)x)|^q d\theta \right] \\
& + K_1(\alpha) \left[\frac{1}{p} \int_0^1 \theta^{p(1-\alpha)} d\theta + \frac{1}{q} \int_0^1 |\Lambda'(\theta x + (1 - \theta)\sigma)|^q d\theta \right] \\
& + K_0(\alpha) \left[\frac{1}{p} \int_0^1 \theta^{p(1-\alpha)} d\theta + \frac{1}{q} \int_0^1 |\Lambda''(\theta x + (1 - \theta)\sigma)|^q d\theta \right]
\end{aligned}$$

yazılır. $|\Lambda'|^q$ ve $|\Lambda''|^q$ fonksiyonlarının eksponansiyel m -konveks oluşu kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\Lambda(\rho) + K_0(\alpha)\Lambda'(\rho)}{x - \rho} - \frac{K_1(\alpha)\Lambda(x) + K_0(\alpha)\Lambda'(x)}{\sigma - x} \right. \\
& + \left. \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{\rho^{CPC} D_x^\alpha \Lambda(x)}{(x - \rho)^{2-\alpha}} + \frac{x^{CPC} D_\sigma^\alpha \Lambda(\sigma)}{(\sigma - x)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
& \leq K_1(\alpha) \left[\frac{1}{p^2(1 - \alpha) + p} + \frac{1}{q} \int_0^1 \left(\theta \frac{|\Lambda'(\rho)|^q}{e^{\alpha_1 \rho}} + m(1 - \theta) \frac{|\Lambda'(\frac{x}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{x}{m}}} \right) d\theta \right] \\
& + K_0(\alpha) \left[\frac{1}{p^2(1 - \alpha) + p} + \frac{1}{q} \int_0^1 \left(\theta \frac{|\Lambda''(\rho)|^q}{e^{\alpha_1 \rho}} + m(1 - \theta) \frac{|\Lambda''(\frac{x}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{x}{m}}} \right) d\theta \right] \\
& + K_1(\alpha) \left[\frac{1}{p^2(1 - \alpha) + p} + \frac{1}{q} \int_0^1 \left(\theta \frac{|\Lambda'(x)|^q}{e^{\alpha_1 x}} + m(1 - \theta) \frac{|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right) d\theta \right] \\
& + K_0(\alpha) \left[\frac{1}{p^2(1 - \alpha) + p} + \frac{1}{q} \int_0^1 \left(\theta \frac{|\Lambda''(x)|^q}{e^{\alpha_1 x}} + m(1 - \theta) \frac{|\Lambda''(\frac{\sigma}{m})|^q}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right) d\theta \right].
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli integral hesaplamalar yapılırsa ,

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\Lambda(\rho) + K_0(\alpha)\Lambda'(\rho)}{x - \rho} - \frac{K_1(\alpha)\Lambda(x) + K_0(\alpha)\Lambda'(x)}{\sigma - x} \right. \\
& + \left. \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{\rho^{CPC} D_x^\alpha \Lambda(x)}{(x - \rho)^{2-\alpha}} + \frac{x^{CPC} D_\sigma^\alpha \Lambda(\sigma)}{(\sigma - x)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
& \leq \frac{2(K - 1(\alpha) + K_0(\alpha))}{p^2(1 - \alpha) + p} + \frac{K_1(\alpha)}{2q} \left(\frac{|\Lambda'(\rho)|}{e^{\alpha_1 \rho}} + \frac{|\Lambda'(x)|}{e^{\alpha_1 x}} + \frac{m|\Lambda'(\frac{x}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{x}{m}}} + \frac{m|\Lambda'(\frac{\sigma}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right) \\
& + \frac{K_0(\alpha)}{2q} \left(\frac{|\Lambda''(\rho)|}{e^{\alpha_1 \rho}} + \frac{|\Lambda''(x)|}{e^{\alpha_1 x}} + \frac{m|\Lambda''(\frac{x}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{x}{m}}} + \frac{m|\Lambda''(\frac{\sigma}{m})|}{e^{\alpha_1 \frac{\sigma}{m}}} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Çalışmanın dördüncü bölümü olan Araştırma Bulguları kısmında, eksponansiyel m -konveks fonksiyon sınıfı ve iyi bilinen eşitsizlikler olan Hölder, Young ve Power-Mean eşitsizlikleri kullanılarak elde edilmiş eksponansiyel m -konveks fonksiyon sınıfı için yeni integral eşitsizlikler verilmiştir. Bulunan sonuçların bazı özel durumları, literatürde bulunan önceki çalışmaların sonuçlarını içermektedir.

Bu tez çalışmasında verilen lemmalar veya onlara benzer yeni lemmalar kurularak eksponansiyel konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikleri elde edilebilir.

Kaynakça

- Akdemir, A., Nazik, M., and Özdemir, M. (2022). Simpson's type inequalities s -convex functions in the fourth sense. *Abstract Book of COIA 2022*, page 57.
- Akdemir, A. and Ozdemir, M. (2010). Some Hadamard-type inequalities for co-ordinated P -convex functions and Godunova-Levin functions. 1309(1):7–15.
- Akdemir, A. O., Karaoğlu, A., Ragusa, M. A., and Set, E. (2021). Fractional integral inequalities via atangana-baleanu operators for convex and concave functions. *Journal of Function Spaces*, 2021:1–10.
- Alomari, M. and Darus, M. (2008). Co-ordinated s -convex function in the first sense with some Hadamard-type inequalities. *Int. J. Contemp. Math. Sci*, 3(32):1557–1567.
- Alomari, M. and Darus, M. (2009). On the Hadamard's inequality for log-convex functions on the coordinates. *Journal of Inequalities and Applications*, 2009:1–13.
- Alomari, M. and Darus, M. (2010). Some Ostrowski type inequalities for quasi-convex functions with applications to special means. *RGMIA Res. Rep. Coll*, 13(2):6.
- Atangana, A. and Baleanu, D. (2016). New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and application to heat transfer model. *Thermal Science*, 20(2):763–769.
- Awan, M., Noor, M., and Noor, K. (2018). Hermite-hadamard inequalities for exponentially convex functions. *Appl. Math. Inf. Sci*, 12(2):405–409.
- Awan, M., Talib, S., Chu, Y., Noor, M., and Noor, K. (2020). Some new refinements of Hermite–Hadamard-type inequalities involving ψ_k -Riemann–Liouville fractional integrals and applications. *Mathematical Problems in Engineering*, 2020:1–10.
- Baleanu, D., Fernandez, A., and Akgül, A. (2020). On a fractional operator combining proportional and classical differintegrals. *Mathematics*, 8(3):360.
- Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation whose q is almost frequency indepen-

dent—ii. *Geophysical Journal International*, 13(5):529–539.

Caputo, M. and Fabrizio, M. (2015). A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progress in Fractional Differentiation & Applications*, 1(2):73–85.

Ciurdariu, L. (2012). On some Hermite-Hadamard type inequalities for functions whose power of absolute value of derivatives are (α, m) -convex. *Int. J. of Math. Anal*, 6(48):2361–2383.

Dragomir, S. (2001). On the Hadamard's inequality for convex functions on the co-ordinates in a rectangle from the plane. *Taiwanese Journal of Mathematics*, pages 775–788.

Dragomir, S. and Agarwal, R. (1998). Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula. *Applied Mathematics Letters*, 11(5):91–95.

Dragomir, S., Agarwal, R., and Barnett, N. (1999). Inequalities for Beta and Gamma functions via some classical and new integral inequalities. *RGMIA research report collection*, 2(3).

Gürbüz, M., Akdemir, A., and Dokuyucu, M. (2022). Novel approaches for differentiable convex functions via the proportional Caputo-Hybrid operators. *Fractal and Fractional*, 6(5):258.

İşcan, I. (2019). New refinements for integral and sum forms of Hölder inequality. *Journal of Inequalities and Applications*, 2019(1):1–11.

Kadakal, M. and İşcan, I. (2020). Exponential type convexity and some related inequalities. *Journal of Inequalities and Applications*, 2020:1–9.

Kadakal, M., İşcan, I., Kadakal, H., and Bekar, K. (2019). On improvements of some integral inequalities. *Researchgate*, DOI, 10:13140.

Marshall, A. W., Olkin, I., Marshall, A. W., and Olkin, I. (2007). Gamma and beta functions. *Life Distributions: Structure of Nonparametric, Semiparametric, and Parametric Families*, pages 717–727.

- Mehmood, S. and Farid, G. (2020). Fractional integrals inequalities for exponentially (m) -convex functions. *Open Journal of Mathematical Sciences*, 4(1):78–85.
- Mitrinovic, D. and Vasic, P. (1970). *Analytic inequalities*, volume 1. Springer.
- Mitrinovic, D. S., Pecaric, J., and Fink, A. M. (2013). *Classical and new inequalities in analysis*, volume 61. Springer Science & Business Media.
- Noor, M., Noor, K., and Rashid, S. (2019). Fractional exponentially m -convex functions and inequalities. *International Journal of Analysis and Applications*, 17(3):464–478.
- Ozdemir, M., Set, E., and Sarıkaya, M. (2011). Some new Hadamard type inequalities for co-ordinated m -convex and (α, m) -convex functions. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 40(2):219–229.
- Pečarić, J. and Tong, Y. (1992). *Convex functions, partial orderings, and statistical applications*. Academic press.
- Tirtirau, L. (2020a). Several new Hermite-Hadamard type inequalities for exponential type convex functions. *Int. J. Math. Anal*, 14:267–279.
- Tirtirau, L. (2020b). Some Hermite-Hadamard type inequalities for exponential convex functions. *Appl. Math. Sci*, 14(7):337–348.
- Toader, G. (1988). On a generalization of the convexity. *Mathematica*, 30(53):83–87.
- Xi, B. and Qi, F. (2012). Some integral inequalities of Hermite-Hadamard type for convex functions with applications to means. *Journal of Function Spaces and Applications*, 2012.
- Yıldız, C. and Yergöz, A. (2023). An investigation into inequalities obtained through the new lemma for exponential type convex functions. *Filomat*, 37(15):5149–5163.

