



ELASTİK ŞERİT VE TABAKA İÇİN TEMAS PROBLEMİ

Hüseyin OĞUZ

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Şubat – 2016

ELASTİK ŞERİT VE TABAKA İÇİN TEMAS PROBLEMİ

Hüseyin OĞUZ

Dumlupınar Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliği Uyarınca

Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında

DOKTORA TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman : Prof. Dr. Elçin YUSUFOĞLU

Şubat - 2016

KABUL ve ONAY SAYFASI

Hüseyin Oğuz'un DOKTORA tezi olarak hazırladığı Elastik Şerit ve Tabaka İçin Temas Problemi başlıklı bu çalışma, jürimizce Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

19 /02/2016

Üye : Prof. Dr. Abdullah AVEY,

Üye : Prof. Dr. Elçin YUSUFOĞLU,

Üye : Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

Üye : Doç. Dr. Ali DENİZ,

Üye : Yrd. Doç. Dr. Sedat PAK

Fen Bilimleri Enstitüsün Yönetim Kurulu'nun/...../..... gün ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hasan GÖÇMEZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Bu tezin hazırlanmasında Akademik kurallara riayet ettiğimizi, özgün bir çalışma olduğunu ve yapılan tez çalışmasının bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olduğunu, çalışma kapsamında teze ait olmayan veriler için kaynak gösterildiğini ve kaynaklar dizininde belirtildiğini, Yüksek Öğretim Kurulu tarafından kullanılmak üzere önerilen ve Dumlupınar Üniversitesi tarafından kullanılan İntihal Programı ile tarandığını ve benzerlik oranının %10 çıktığını beyan ederiz. Aykırı bir durum ortaya çıktığı takdirde tüm hukuki sonuçlara razı olduğumuzu taahhüt ederiz.

Prof. Dr. Elçin YUSUFOĞLU

İmza

Hüseyin OĞUZ

İmza

ELASTİK ŞERİT VE TABAKA İÇİN TEMAS PROBLEMİ

Hüseyin OĞUZ

Matematik, Doktora Tezi, 2016

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Elçin YUSUFOĞLU

ÖZET

Tez çalışmasında rijit panç sistemi ile etkileşime maruz kalan ortotropik elastik bir şerit için sürtünmeli temas problemi ele alınmıştır.

Tez çalışması dört bölüm ve kaynaklar dizini kısımlarından oluşmaktadır.

Birinci bölümde, temas problemlerinin tarihsel gelişimi ve bugüne kadar yapılmış çalışmalara ek olarak elastisite teorisinin temel denklemler ve bağıntıları ile singüler integral denklemlerin çözümüne ait genel bilgiler bulunmaktadır.

İkinci bölümde teze konu olan temas problemi tanımlanmış ve ele alınan problemde, verilen sınır koşulları altında, elastisite teorisinin temel bağıntıları kullanılarak integral denklem sistemi türetilmiştir.

Üçüncü bölümde söz konusu integral denklem sistemi, Gauss Jacobi Kuadratur Sıralama metodu ve Seri metodu yardımıyla çözümü incelenmiştir.

Dördüncü bölümde homojen, ortotrop elastik şerit için sürtünmeli temas problemi sayısal olarak incelenmiştir. Panç sistemi altındaki başınc dağılımı, elastik şeridin geometrik ve mekanik özelliklerine bağlı olarak irdelenmiş, sonuçlar tablo ve grafiklerle sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Fourier Dönüşümü, Gauss Jacobi Kuadratur Sıralama Metodu, Ortotrop Malzeme, Seri Metodu, Singüler İntegral Denklemler, Temas problemi.

CONTACT PROBLEM FOR ELASTIC STRIP AND LAYER

Hüseyin OĞUZ

Mathematic, PhD. Thesis, 2016

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Elçin YUSUFOĞLU

SUMMARY

In this thesis, the frictional contact problem for an elastic strip under a rigid punch system is considered.

This study consists of forth chapters with results and references sections.

In the first chapter, the basic equaitons of the elasticity theory and the general informations belonging to the solution of singular integral equations, in addition to the historical development and significant works of contact problem is considered.

In the second chapter, the contact problem is described. The integral equation system are derived from the contact problem by using the basic equations of elasticity theory and the given boundary conditions.

In the third chapter, the singular integral equation is solved with the help of Gauss Jacobi Quadrature Collocation Method and Series Method.

In the forth chapter, the frictional contact problem for an homogenous and orthotrop elastic layer are investigated numerically. The pressure distribution under the punch system due to the geometrical and mechanical properties of elastic layer are examined and the results are shown in the table and tabular form

Keywords: Fourier Transform, Gauss Jacobi Quadrature Collocation Method, Orthotrop Material, Series Method, Singular Integral Equations, Contact problems,

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans ve Doktora eğitim hayatımın her aşamasında, bilgisini, sevgisini, desteğini benden esirgemeyen, bana güvenip her zaman sabırla destek olan, çok sevdiğim ve değer verdiğim, saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Elçin YUSUFOĞLU' na ve eşi Reyhan YUSUFOĞLU' na..

Doktora tez sürecim boyunca bana mihmandarlık yapmayı kabul edip beni onurlandıran ve değerli görüşleri ile yol gösteren çok kıymetli hocalarım Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU' na ve Prof. Dr. Abdullah AVEY' e..

Bu yaşıma kadar şefkat ve sevgisini bana her zaman hissettiren, bana güvenen, benimle gurur duyan, ve benim halim ile hallenen, çok değerli annem Sıddıka OĞUZ' a, babam Mustafa OĞUZ' a ve kardeşim Burak OĞUZ' a...

Sıkıntılı süreçlerden geçerken ümitsizliğe düştüğüm anlarda sevgilerini, desteklerini, dualarını ve yardımlarını her zaman hissettiğim çok değer verdiğim Gülsüm YORMAZ' a ve Fatih AKBEY' e..

Lisansüstü eğitim hayatım boyunca dostluklarını benden esirgemeyen Dr. İlker TURHAN' a ve Dr. Cansu KESKİN' e sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	v
SUMMARY	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
ÇİZELGELER DİZİNİ	xii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xiii
1.GİRİŞ	1
1.1. Elastisite Teorisinin Tarihsel Gelişimi	1
1.2. Temas Problemlerinin Tarihsel Gelişimi	3
1.3. Singüler İntegral Denklemler Hakkında Literatür Bilgileri	9
2. DÜZLEM TEMAS PROBLEMİ	12
2.1. Düzlem Temas Problemi Hakkında Genel Bilgi	12
2.2. Düzlem Temas Probleminin İfadesi	13
2.3. Problemin Tanımı ve Sınır Şartları	14
2.4. Elastisite Teorisinin Temel Denklemleri	15
2.5. İntegral Denklemin Elde Edilmesi	16
2.6. İntegral Denklemin Çekirdeğinin Özellikleri	30
2.7. Cauchy Tip Singular İntegral Denkleme İndirgeme	31
2.8. İntegral Denklemin Boyutsuzlaştırılması	33

İÇİNDEKİLER(devam)

Sayfa

3. İNTEGRAL DENKLEMİN ÇÖZÜMÜNDE KULLANILACAK YÖNTEMLER...	35
3.1. Seri Yöntemi	35
3.1.1. N=1 durumu	35
3.1.2. N=2 durumu	38
3.2. Gauss Quadrature Yöntemi	49
4. NÜMERİK HESAPLAMALAR VE SONUÇLAR	55
4.1. N=1 Durumu	55
4.2. N=2 Durumu	69
KAYNAKLAR DİZİNİ	85
ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1. Temas Probleminin Geometrisi	14
4.1. $\lambda = 1$, $\varepsilon = 0$ ve farklı $\frac{E_1}{E_2}$ değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi	60
4.2. $\lambda = 1$, $\varepsilon = 0.1$ ve farklı $\frac{E_1}{E_2}$ değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi	60
4.3. $\lambda = 1$, $\varepsilon = 0.2$ ve farklı $\frac{E_1}{E_2}$ değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi	61
4.4. $\lambda = 2$, $\varepsilon = 0$ ve farklı $\frac{E_1}{E_2}$ değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi	61
4.5. $\lambda = 2$, $\varepsilon = 0.1$ ve farklı $\frac{E_1}{E_2}$ değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi	62
4.6. $\lambda = 2$, $\varepsilon = 0.2$ ve farklı $\frac{E_1}{E_2}$ değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi	62
4.7. $\frac{E_1}{E_2} = 0.25$, $\lambda = 0.5$ ve farklı ε değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi	63
4.8. $\frac{E_1}{E_2} = 0.25$, $\lambda = 8$ ve farklı ε değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi	63
4.9. $\frac{E_1}{E_2} = 20$, $\lambda = 0.5$ ve farklı ε değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi	64
4.10. $\frac{E_1}{E_2} = 20$, $\lambda = 8$ ve farklı ε değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi	64
4.11. $\frac{E_1}{E_2} = 0.25$, $\varepsilon = 0$ ve farklı λ değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.	65
4.12. $\frac{E_1}{E_2} = 0.25$, $\varepsilon = 0.2$ ve farklı λ değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.	65
4.13. $\frac{E_1}{E_2} = 5$, $\varepsilon = 0$ ve farklı λ değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.	66
4.14. $\frac{E_1}{E_2} = 5$, $\varepsilon = 0.2$ ve farklı λ değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.	66
4.15. $\frac{E_1}{E_2} = 20$, $\varepsilon = 0$ ve farklı λ değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.	67
4.16. $\frac{E_1}{E_2} = 20$, $\varepsilon = 0.2$ ve farklı λ değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.	67

ŞEKİLLER DİZİNİ(devam)

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
4.17. $\lambda = 1, \varepsilon = 0$ ve $\frac{E_1}{E_2}$ nin farklı değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.	76
4.18. $\lambda = 1, \varepsilon = 0.1$ ve $\frac{E_1}{E_2}$ nin farklı değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.	76
4.19. $\lambda = 8, \varepsilon = 0.2$ ve $\frac{E_1}{E_2}$ nin farklı değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.	77
4.20. $\lambda = 8, \varepsilon = 0$ ve $\frac{E_1}{E_2}$ nin farklı değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.	77
4.21. $\lambda = 8, \varepsilon = 0.1$ ve $\frac{E_1}{E_2}$ nin farklı değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.	78
4.22. $\lambda = 8, \varepsilon = 0.2$ ve $\frac{E_1}{E_2}$ nin farklı değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.	78
4.23. $\frac{E_1}{E_2} = 0.25, \lambda = 1$ ve farklı ε değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.	79
4.24. $\frac{E_1}{E_2} = 20, \lambda = 1$ ve farklı ε değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.	79
4.25. $\frac{E_1}{E_2} = 0.25, \lambda = 8$ ve farklı ε değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.	80
4.26. $\frac{E_1}{E_2} = 20, \lambda = 8$ ve farklı ε değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.	80
4.27. $\frac{E_1}{E_2} = 0.25, \varepsilon = 0$ ve farklı λ değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.	81
4.28. $\frac{E_1}{E_2} = 0.25, \varepsilon = 0.2$ ve farklı λ değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.	81
4.29. $\frac{E_1}{E_2} = 5, \varepsilon = 0$ ve farklı λ değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.	82
4.30. $\frac{E_1}{E_2} = 5, \varepsilon = 0.2$ ve farklı λ değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.	82
4.31. $\frac{E_1}{E_2} = 20, \varepsilon = 0$ ve farklı λ değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.	83
4.32. $\frac{E_1}{E_2} = 20, \varepsilon = 0.2$ ve farklı λ değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.	83

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
4.1.	Ortotropik Özellik, Bağlı Kalınlık ve Sürtünme Katsayılarına Bağlı Farklı Noktalardaki Basınç Değerleri.....57
4.2.	İki Panç için Ortotropik Özellik, Bağlı Kalınlık ve Sürtünme Katsayılarına Bağlı Farklı Noktalardaki Basınç Değerleri.....70



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

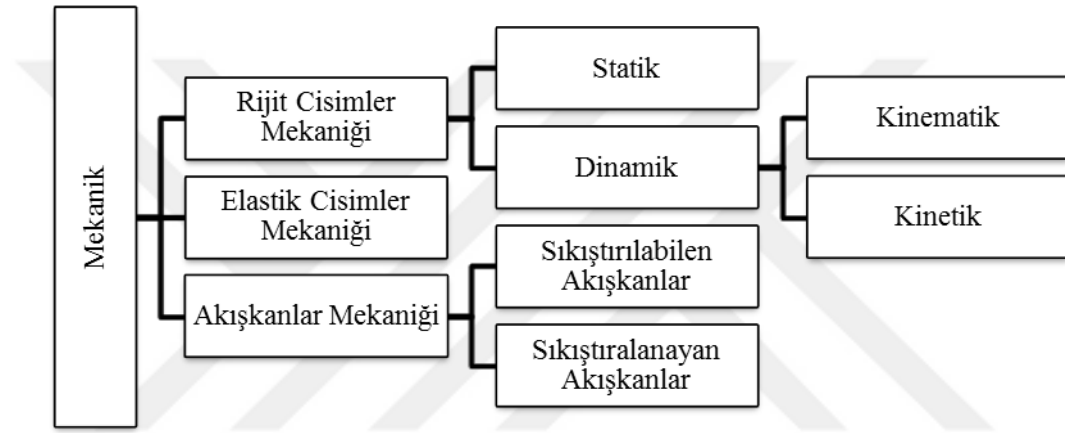
<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
x, y	Kartezyen koordinatlar
u, v	x, y doğrultusundaki yer değiştirme bileşenleri
σ_x, σ_y	Normal gerilme bileşenleri
τ_{xy}	Kayma gerilme bileşeni
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	x, y doğrultusundaki şekil değiştirme bileşenleri
γ_{xy}	Kayma şekil değiştirme bileşeni
$h_i(x)$	i. pançın alt bölgesinin geometrik şekli
δ_i	P kuvveti etkisiyle pançın y eksenin negatif yönü boyunca yer değiştirmesi
ω_i	i. pançın elastik şerit ile olan temas bölgesi
ω_*	Pançların elastik şerit ile olan temas bölgelerinin tümleyeni
P	Pança etki eden dikey kuvvet
Q	Pança etki eden yatay kuvvet
h	Elastik şeridin kalınlığı
ν	Poisson oranı
G	Kayma modülü
E	Elastisite modülü
$U(x, y)$	Airy gerilme fonksiyonu
$H(x)$	Heaviside fonksiyonu
$D(x)$	Dirac fonksiyonu

Not: Bu listede belirtilmeyen semboller kullanıldıkları yerlerde belirtilmiştir.

1.GİRİŞ

1.1. Elastisite Teorisinin Tarihsel Gelişimi

Mekanik bilimi, çeşitli kuvvetlerin etkisi altındaki cisimlerin hareket ve denge şartlarını inceleyen ve gözlemler sonucu elde edilen çıkarımları başlangıç olarak ele alıp, olayı tanımlayan etkenler arasındaki değişmez bağıntıları bulmaya çalışır. Mekanik bilimini ele aldığı konulara göre aşağıdaki gibi sınıflandırmak mümkündür.



Bu sınıflandırmayı

- **Teorik Mekanik**
- **Uygulamalı Mekanik**

Biçiminde yapmak mümkündür. Teorik mekanik uygulamada karşılaşılan problemleri eşit titizlikle inceler. Uygulamalı mekanik ise problemlere yaklaşık da olsa çözümler bulmaya çalışır. Önemli olan problemin uygulanabilmesi için gerekli şartlara yeterli yakınsaklığın sağlanmasıdır. Teorik mekaniğe, elastisite teorisi örnek verebiliriz. Uygulamalı mekaniğe ise en güzel örnek mukavemettir.

Elastisite teorisi cisimlerin, kuvvet karşısındaki tepkilerini inceler. Eğer cisim şekil değiştirmeye sebep olan kuvvetin etkisi ortadan kalktığında ilk şekline dönme özelliğine sahipse ona elastik cisim denir. Bütün cisimler, cismin bünye karakteristikleri ile belirlenmiş belli sınırları geçmemek şartıyla elastiklik özelliğe sahiptir. Bu elastik özellik kuvvet ve şekil değiştirmeleri birbirine bağlayan bağıntılarla ifade edilir. Bu bağıntılar arasında Hooke kanununun genelleştirilmesinden ortaya çıkan kanunun önemi büyüktür. Hooke kanunu cisimlerin çekme kuvvetleriyle meydana gelen uzamaların orantılı olduğunu ifade eder.

1680 de Mariotte tarafından Hooke kanunu ile aynı bir kanun keşfedilmiş ve kirişlerin mukavemetinin araştırılmasında kullanılmıştır. Mariotte bir konsol kirişin boylamasına liflerinin bazılarının uzaması ve diğerlerinin de ksalmasından dolayı eğilmeye mukavemet ettiği sonucuna varmıştır. Mariotte' un liflerdeki kuvvet dağılışı hakkındaki tahminleri doğru olmakla beraber kirişin ekseninin aldığı şekli incelemeyi içine almıyordu.

Böyle bir inceleme Jacob Bernoulli tarafından 1705 yılında yapılmıştır. Denklemi elastik eğrinin her noktadaki eğriliğinin bu noktadan geçen kesite etki eden eğilme momentiyile orantılı olduğunu ifade eder. Kirişin eğilmesinde yapılan işin eğriliğin karesinin elastik eğri boyunca alınan integraliyle orantılı olduğu bu sonuçtan kolayca çıkar. Bu sıralarda sistematik bir şekle sokulmakta olan minimum prensiplerinin şiddetle taraftarı olan Bernoulli bir mektubunda Euler'e elastik eğri denkleminin, kirişin eğilmesinde yapılan işi gösteren integrali minimum kılmakla çıkması gerektiğini bildirdi.

İlerleyen zamanlarda Euler, Bernoulli'nin bahsettiği denklemi çıkarmıştır. Euler'in elastisitedeki çalışmaları elastik eğriyi incelemekle kaldı ve kiriş kesitlerindeki gerilme dağılımı ile ilgilenmedi. Çekme ve gerilmeye maruz kalan kirişlerde kuvvet dağılışının incelenmesi Coulomb (1736-1806) ile başlamıştır. İnce tellerin burulmaya mukavemetini ilk inceleyen de Coulomb olmuştur. Hooke kanununun ortaya çıkmasını takip eden 150 yıllık zaman içerisinde elastisitenin gelişmesi özel problemlerin çözümlerinin sentezinden çıkıyordu.

Elastik cisimlerin denge ve titreşim denklemlerini çıkarmak için ilk çalışmaları yapan kişi ise Navier'dir. (1785–1836). Bu tarih elastisitenin matematik teorisinin başlangıcıdır.. Navier izotrop bir elastik cismin içindeki yer değiştirme bileşenleri için üç diferansiyel denklemlerle bir takım çıkardı. Bu denklemlerin şekli doğrudur. Fakat basit tesir betimlemesinden dolayı Navier denklemleri yalnız bir elastik sabit içerirler. Navier cismin yüzeyindeki denge denklemlerini de elde etti.

Navier'in çalışmaları, Cauchy'nin dikkatini çekmiştir. Cauchy şekil değiştirebilen cismin bir iç noktasındaki gerilme halinin dokuz fonksiyonlu bir takımla tamamen tayin edildiğinin göstermiştir. Gerilme halini karakterize eden fonksiyonlar Cauchy denklemlerinden yok edilerek Navier denklemleriyle aynı yapıda fakat bir elastik sabit yerine iki tane içeren üç diferansiyel denklemlerle bir takıma varılır. Bu önemli sonuçlar 1822 de Cauchy tarafından Paris Akademisine takdim edilmiştir. Cauchy yaptığı çalışmalar ile lineer elastisite teorisine bugünkü şeklini vermiştir.

George Green (1739–1841) de elastik enerjinin korunumu prensibini ortaya koymuştur. Saint–Venant (1797–1886) tarafından silindirlerin eğilme ve burulma problemleri incelenmiştir. İnce kabuk ve plakaların incelenmesi ise G. Kirchhoff ile başlamıştır. (1824 – 1887).

Son yıllardaki çalışmalar ise çözümlerin varlığı problemleri ve sınır değer problemi sınıflarının integrasyonu ile ilgilidir. Düzlem elastisitedeki esas problemlerin kesin bir çözümü N.I.Muskhelishvili ve Rus matematikçiler tarafından verilmiş, lineer olmayan elastisite teorisinin kurulmasında önemli adımlar atılmıştır.

1.2. Temas Problemlerinin Tarihsel Gelişimi

Temas mekaniği ve sürtünme fiziği, mühendislik bilimlerinin en temel disiplinleri arasındadırlar. Günlük yaşantımızda sayılamayacak derecede çok uygulama ile karşımıza çıkan bu kavramlar yaşantımızın emniyeti, kolaylığı ve enerjinin tasarrufunun sağlanması açısından çok büyük önem arz etmektedirler. Eğer temas ve sürtünme olmasaydı herhangi bir enstrümanı çalmak, uçakla seyahat edebilmek, yolda yürüyebilmek ve hatta bu satırları yazmak mümkün olmayacaktı.

Yapıların zeminle durumlarından tutun da insan eklemlerinin davranışına, aracınızın yol ile temas halindeki lastiklerine kadar çok geniş bir uygulama sahasında temas problemlerine rastlamak mümkündür. Temas ve sürtünmenin yardımı ile örneğin vida aracılığıyla kuvvetin bir noktadan diğerine iletilebilmesi sağlanabilirken, aynı şekilde elektrik ve ısınin da transferi mümkün olabilmekte aksine materyale yapılacak bir kaplama ile akımın iletilmesinin önüne de geçilebilmektedir. Bunların hepsi yaşantımızı daha yaşanır kılabilmek için kullandığımız basit temas problemi uygulamalarıdır. Yaşamımızın her anında temas ve sürtünmeye ihtiyacımız olmasına karşın çoğunlukla mühendislik yapıları ile mekanik sistemlerde bu durumu problem olarak görüyor ve çözümler arıyoruz.

Pek çok yapısal ve mekanik sistemin elemanları birbirleri ile temas halindedirler. Bu temasın karakteri, cisimlerde meydana gelen deformasyon, cisimlerin gerilmeleri birbirlerine iletüş biçimleri, temas bölgelerinin uzunluğunun ve bu bölgelerdeki gerilme dağılımının davranışında önemli rol oynamaktadır. Temas problemini kabaca cisimlerin hareket ve deformasyonlarını, sınır şartları temas ve deformasyonla belirlenen bir kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi olarak da tanımlayabiliriz.

Karşılaşılan temas problemlerinin çözümünde elementer teorisinin tüm ihtiyaçları karşılayamayışı, elastisite teorisine olan ihtiyacı daha da artırmaktadır. Çünkü elastisite teorisi, elementer teoriye göre daha kesin sonuçlar vermektedir. Son zamanlarda bilgisayar

teknolojisinin hızlı ilerleyişi, sayısal çözüm yöntemlerinin gelişmesini tetiklemiş buna ek olarak elastisite teorisi yardımıyla temas problemlerinin çözümü yoğunluk kazanmış ve önemli çalışmalar ortaya konmuştur.

Şimdi temas problemlerinin tarihsel süreci ve bu konu hakkında yapılan bazı çalışmalardan kısaca bahsedelim.

Temas problemleri ile ilgili çalışmaların sanayi devrimi sonrasında gözle görülür miktarda arttığı gözlemlenmektedir. Temas problemleri, insan gücünün yerini makinaların aldığı, mekanik sistemlerin giderek arttığı sanayileşme devrinde maddenin deformasyon sürecini açıklamada esas model olduğundan, üzerinde çalışılan bir problem oldu.

Temas problemi çalışmalarının Heinrich Hertz tarafından 1882 yılında yazılan “ On the contact of elastic solids ” isimli makalesi ile başladığını söylemek yanlış olmaz. Hertz yazmış olduğu makalede iki elastik cismin dengesi, temas gerilimi ve deformasyonu ilgili denklemler türetmiştir. Hertz makalesinde elastik iki cismin birbirine temas etmesi durumunda temas bölgesinin eliptik olduğunu kabul etmiş, şekil değiştirme ve gerilme durumlarını incelemiş ve sonuçları rijit düzleme temas eden farklı geometrilere sahip problemlere tatbik etmiştir. Bu nedenle temas problemleri “ Hertz temas problemleri ” olarak da anılmaktadır (İnan, 1969). Hertz’in çalışmaları günümüz elastisite problemlerinin çözümü için de önemli bir yer tutmaktadır.

Temas problemlerine dair önemli çalışmalar 1900 lerin ikinci yarısından itibaren özellikle Rus matematikçileri tarafından yapılmıştır. 1924 yılında Beliaev’in eliptik temas bölge civarındaki basınç dağılımı ile ilgili çalışması, 1946 yılında Hetenyi’nin elastik zemine oturan tabakayla ilgili çalışması ve 1949 yılında Shtaerman’ın yayınladığı çalışma bu konuda atılmış önemli adımlar olarak sayılabilirler. 1951 yılında Sneddon’un integral dönüşüm tekniğini elastisite teorisinde kullanmaya başlaması ve Muskhelishvili, tarafından geliştirilen kompleks değişkenler yönteminin de etkisiyle temas problemleri üzerine yapılan çalışmalar giderek artmaya başlamıştır.

Yine bu dönemde 1950’li yıllara kadar olan temas problemi literatür ve çözüm yöntemleri Galin’in 1953 yılında yayınlamış olduğu “ Contact problems in the theory of elasticity ” isimle eserde toplanmıştır. Rus matematikçilerin yapmış olduğu çalışmalar ile ilgili ayrıntılı bilgiler ise Galin 1976’daki çalışmasında bulunmaktadır.

Sürtünmesiz rijit bir cisimle temas halindeki elastik lineer bir cismin denge problemine dair denklemler Signorini (1959) tarafından türetilmiştir. Fichera (1964) ise Signori problemleri sınıfının ilk çözümlerini yaptı. Bu çözümler simetrik bilineer formla ifade edilmiş problemlere de uygulanabilmekteydi.

İntegral denklemlerin temas problemlerinin çözümünde uygulanmasına dair metotlar ise Ufliand (1965) tarafından verilmiştir. 1968 yılında Bentall ve Johnson elastik bir şerit için dönen temas problemi üzerine çalışma sunmuşlardır.

Wietsman (1969) elastik yarı düzlem üzerine tekil yük ile bastırılan plak için temas problemini incelemiştir. Bu incelemeler sonucu elastik yarı düzlem ve yarı sonsuz elastik yarı uzay arasındaki temas yarıçapı için yaklaşık çözümler vermiştir.

Pu ve Hussain (1970) elde edilen çözümde, elastik düzlemin rijitliğinin sonsuzlu durumunu irdelemiş ve bu durumda değme uzunluğunun sıfır olacağını ve bunun da fiziksel olarak mümkün olmadığını belirtmişlerdir. Problemin çözümü için varyasyonel yöntem kullanarak önceki çalışmadan farklı sonuçlara ulaşmışlardır.

Dhaliwal (1970) rijit bir blok ile bastırılan yarı sonsuz düzlem problemini incelemiştir. Karışık sınır değer problemi bir integral denkleme indirgenmiş ve sayısal yöntemlerle integral denklem çözülmüştür. Rijit pançın farklı geometrik formlara sahip olma durumuna göre çözümler elde edilmiştir.

Tuba ve Chan (1971) elastik cisimler için temas problemlerinin çözümünü sonlu elemanlar metodunu kullanarak incelemiştir.

Conway (1971) iki silindir ile bastırılan ve silindirler arasından yatay olarak çekilen tabakanın sürtünmeli temas problemi ile ilgilenmiş ve sürtünmenin normal temas gerilmesine etkisinin çok az miktarda olduğu sonucuna varmıştır.

Chen ve Engel (1972) elastik yarı düzlemle sınırlandırılmış çok tabakalı düzlemin gerilme analizini, farklı taban kalınlıkları ve taban geometrileri için incelemiştir.

Keer (1972) yayılı yük ile yüklenmiş elastik düzleme oturan sonsuz uzunluktaki elastik şeridin temas problemini incelemiş, integral dönüşüm teknikleri kullanılarak düzlem gerilme problemi ve dönele simetrik problem olarak çözümler bulmuşlardır. Elastik kama için şerit ve çatlak problemleri ise Erdoğan ve Gupta (1973) tarafından çözülmüştür.

Yarı sonsuz düzleme oturan, elastik tabakaya rijit bir panç aracılığıyla yük aktarılan asimetrik çift sürtünmesiz temas problemi de Civelek ve Erdoğan (1974) tarafından verilmiştir. Erdoğan ve Ratwani (1974) iki elastik çeyrek düzleme yük ile bastırılan elastik tabakanın sürtünmesiz temas problemini ele almışlardır. Problemin çözümünde Fourier ve Melin dönüşümleri kullanılmış, temas kenarlarında meydana gelen singüleriteler bulunarak integral denklem çözülmüş ve yayılı yükün çeşitli halleri için temas gerilmesi elde edilmiştir.

Spence (1975) dönel simetrik pançla bastırılan elastik yarı düzlemin sürtünmeli temasının, Coulomb sürtünme kanununa göre karışık sınır değer problemi şeklinde ifadesini çıkarmıştır. Rijit iki temel tarafından tutulmuş, sürtünmesiz olarak kayabilen, iki elastik tabaka tarafından sıkıştırılan rijit silindirin şekil değiştirme problemi Gladwell (1977) tarafından ele alınmış ve problemin çözümünde Chebyshev polinomlarından faydalanılmıştır.

Geçit ve Erdoğan (1978) asimetrik yükleme altındaki elastik şeridin sürtünmesiz temas problemini ele almışlardır.

Agarwal (1978) yarı sonsuz silindirlerin dönel simetrik temas problemini incelemiştir. İntegral dönüşüm teknikleri ile problem lineer denklem takımına indirgenerek çözülmüştür. Farklı malzeme karakteristikleri için silindirlerin ara yüzeylerindeki normal ve kayma gerilmeleri elde edilmiştir.

Bakırtaş (1980) rijit bir panç ile yarı sonsuz düzlem arasındaki sınır değer problemini Fourier dönüşüm tekniğini kullanarak singüler integral denkleme indirgemiş ve gerilme dağılımını incelemiştir. Comninou, Dunders ve Schmueser (1980) yarı sonsuz düzlemle aynı malzeme özelliklerine sahip elastik tabakanın sürtünmeli temas problemini ele almışlardır. Bu çalışmada düzgün yayılı yük ile düzleme etki edilirken, tekil yük ile de kaldırılan tabakanın, düzlemle yapışık kaldığı ve kaydığı bölgeler bulunarak sürtünmenin gerilmelere etki incelenmiştir.

Hung ve Saxce (1980) tarafından elastik cisimleri sürtünmesi temas problemi matematiksel programlama tekniği ile çözülmüştür. Piston çubuk problemi sonlu elemanlar algoritmasıyla modellenmiş ve temas bölgesindeki gerilme dağılımları incelenmiştir.

Adams ve Zied (1984) elastik yarı düzlem üzerinde sabit hızla hareket eden elastik yarı sonsuz şerit problemini ele almışlardır. Araştırmacılar düzlem elastisite teorisini kullanarak ara yüzeydeki temas gerilmesi dağılımını farklı malzeme seçimleri için elde etmişlerdir.

Fabrikant ve Sankar (1984) homojenliği derinliği ile değişen elastik yarı düzlem probleminin çözümünü araştırdılar.

Nour – Ornid ve Wriggers (1986) temas probleminin çözümü için mevcut şartlara bazı kısıtlamalar konmasının yararlılığını göstermişlerdir. Temas problemini sonlu elemanlar metoduyla modelleyerek, iki basamaklı algoritma aracılığıyla lineer olmayan probleminden, lineer bir temas problemi elde etmişlerdir.

Chaudhary ve Bathe (1986) Lagrange çarpanları tekniğini kullanarak birden fazla üç boyutlu cismin aralarındaki temasın analizini ifade eden bir çözüm metodu geliştirmişlerdir.

Geçit (1986) yarı sonsuz silindir ile elastik yarı düzleme bastırılan tabakanın temas problemini incelemiştir. İntegral dönüşüm tekniği kullanılarak yer değiştirme ve gerilmeler Bessel fonksiyonları ifade edilmiştir. Geçit ve Gökpınar (1985) rijit dairesel bir mesnete oturan elastik bir tabakanın temas problemini ele almışlardır. Tabaka ile mesnet arasında sürtünme olmadığı ve temas yüzeyleri boyunca sadece basınç gerilmelerinin aktarıldığı farzedilmiştir.

Laboda ve Tauchert (1985) tarafından zemine sabitlenmiş sonsuz uzunluktaki ortotropik tabakaya sonlu ucuyla oturan yarı sonsuz ortotropik tabakanın temas problemi incelenmiştir. Fabrikant (1986) simetri ekseninin herhangi bir noktasına tekil yük etki eden izotrop yarı sonsuz ortam ile üzerine etkiyen rijit blok arasındaki temas durumunu ele almıştır.

King (1987) elastik izotrop yarı sonsuz bir düzleme üçgen, dörtgen ve silindirik pançlar aracılığıyla yük aktarılması problemini incelemiştir.

Nowell ve Hill (1988) simetrik silindirler ile ince elastik bir şeridin temas problemini inceleyip farklı yüklenme durumları için yüzey gerilmelerini hesaplamışlardır. Çok tabakalı elastik bir cismin rijit bir yüzeye uygulanması durumunda ortaya çıkacak olan temas problemi sonlu elemanlar metodu kullanılarak Komopoulos (1988) tarafından çözülmüş, farklı kalınlıklar için alt yüzeyde meydana gelen basınç dağılımları incelenmiştir.

Klarbing ve Björkman (1988) sürtünmeli temas problemlerinin nümerik çözümlerini inceleyip üç boyutlu pançın temasına dair bir de uygulama sunmuşlardır. Shield ve Bogy (1988) elastik yarı sonsuz tabakaya bastırılmış düz dişlinin çok bölgeli temas problemini incelemişlerdir.

Blaibel ve Geçit (1989) serbest kenarları sınırlı yarı sonsuz şeridin eğilme problemini ele almışlardır. Problem integral dönüşüm tekniği yardımıyla çözülmüştür.

Çakıroğlu ve Erdöl (1989) elastik zemine oturan malzeme sabitleri ve yükseklikleri farklı iki tabakanın üst üste konmasıyla oluşan bileşik tabaka problemini çözmüşlerdir.

Sabin ve Kaloni (1989) elastik bir zemin üzerinde düşey eksen çevresinde dönen rijit bir cismin temas problemini sürtünmeyi de hesaba katarak incelemişlerdir. Blok altındaki temas gerilmesi, batma derinliği ve cismi döndürmek için gerekli momentle ilgili sonuçlara ulaşmışlardır.

Dempsey, Zhao ve Minnetyan (1991) Winkler temeli tarafından mesnetlenmiş tabaka ile rijit silindirik bir cismin temas problemini ele almışlar, giriş ve çarpılma teorilerini kullanarak temas gerilme dağılımını elde etmişlerdir.

Choi ve Thangjitham (1991) anizotrop elastik yarı düzlemde, yüzeysel yüklerin etkisi sonucunda oluşacak gerilme dağılımlarını incelemişlerdir. Çözüm için integral dönüşüm tekniği ve rijitlik matrisi kullanılmış ve farklı karakteristikteki malzemeler için normal ve kayma gerilmeleri elde edilmiştir. Zhong ve Mackerle (1992) statik temas problemleri için sonlu elemanlar yöntemini incelemişlerdir. Urquart ve Pinders (1994) ise dikdörtgen pançla etkileşim halinde bulunan çok tabakalı elastik yarı düzlemde temas problemini incelemişlerdir.

Yüzeyine panç aracılığıyla yük aktarılan, gerilme etkisinde bırakılmış ortotropik yarı düzlem problemi Bjarnehed (1991) tarafından ele alınmıştır.

Noor ve Tirmizi (1991) ise bazı temas problemlerinin çözümünü varyasyonel eşitsizlikler yardımıyla ortaya koymuşlardır. Jaffar (1993) sürtünmesiz rijit panç aracılığıyla yüklenmiş ve rijit düzleme oturan elastik tabakanın deformasyonlarını Chebyshev polinomları yardımıyla belirlemiştir.

Ioakimidia ve Anatasselos (1991) ise Muskhelishvili'nin kompleks değişkenler metodunu gözden geçirerek Mathematica programlama dili yardımıyla, fonksiyonel denklemler için yaklaşık bir çözüm yolu ortaya koymuşlardır.

Pindera ve Lane (1993) izotrop, ortotrop ve monoklinik tabakaların herhangi bir sırada düzenlendiği çok tabakalı temas problemi için bir çözüm yöntemi geliştirmişler bununla ilgili örnekler sunmuşlardır. Fan ve Keer (1994) anizotropik ortamda iki boyutlu temas problemini araştırmışlardır.

Birinci ve Erdöl (1999) basit mesnet üzerine değen ağırlıksız iki tabakadan oluşan bileşik tabakada temas problemini incelemişlerdir. Bileřiř tabaka dairesel ve dörtgensel pańç aracılığıyla mesnetlere bastırılmış ve her iki pańç için temas uzunlukları ve temas gerilmeleri elde edilmiştir.

Kahya, Birinci ve Erdöl (2001) dairesel, parabolik ve dikdörtgen olarak alınan farklı pańç geometrileri için rijit bir temele oturan elastik tabakanın temas problemini kütle kuvvetleri ve sürtünmeyi ihmal ederek çözmüşlerdir. Çömez (2003) tarafından rijit bir pańç ile bastırılmış ve tabanda tam olarak bağlı ağırlıksız çift şerit problemi çözülmüştür.

Ke ve Wang (2006) fonksiyonel derecelendirilmiş elastik bir tabaka ile kaplanmış yarı düzlemin sürekli temas problemini integral dönüşüm teknikleri ve transfer matris yöntemi ile incelemişlerdir. Ma ve Korsunsky (2004) ise ince bir tabakayla kaplanmış düzleme elastik pańç etki etmesi durumunda oluşan temas problemi için airy gerilme fonksiyonları yardımıyla çözüm geliştirmişlerdir.

Altınpulluk (2012) rijit bir parabolik pańç ile bastırılan h kalınlıklı izotrop homojen elastik şerit için için sürtünmeli bir temas problemi ele alınmış, ortaya çıkan basıncın bağlı kalınlığa bağlı ifadesi bulunmuş, temas bölgesinin uzunluğunun belirlenmesi için bir ardışık yaklaşımlar tekniği kullanılmıştır.

Parlar (2013) rijit iki pańç ile bastırılan h kalınlıklı ortotrop homojen elastik şerit için sürtünmesiz bir temas problemi ele alınmış, ortaya çıkan integral denklem Gauss Jacobi kuadratür yöntemiyle çözülmüştür.

1.3. Singüler İntegral Denklemler Hakkında Literatür Bilgileri

Mühendislik uygulamalarına ait özellikle mekanik alanının alt dallarından olan elastik cisimler mekaniği ve akışkanlar mekaniğine konu olan pek çok problem singüler integral denkleme dönüştürülebilmektedir. Bu nedenle singüler integral denklemlerin çözümüne dair çalışmalar matematikte önemli yer tutmaktadır.

Singüler integral denklemler teorisi başlangıçta matematikçiler tarafından gereken ilgiyi görmemiştir. Hilbert ve Poincare tarafından temelleri atılan teoriye olan ilgi 20. yy'nin ikinci yarısından sonra giderek artmıştır. Riemann - Hilbert sınır değer problemlerinin incelenmesinde bu teorinin göz önüne alınmasıyla teorinin önemi daha da iyi anlaşılmıştır. Bu sebepten dolayı Rus matematikçi Muskhelishvili (1958) singüler integral denklemler teorisini bu sınır değer

problemi ile ilişkilendirmiştir. Bu çalışmasında sadece bir boyutlu integral denklemleri inceleyen Muskhelishvili, problemin çözümünde temel çözüm aracı olarak Cauchy esas değer anlamında integral kullanılmıştır.

İntegral denklemlerin analitik çözümünü elde etmek için pek çok metot geliştirilmiştir. Bu konuda çalışma yapan önemli bilim adamları, Tricomi (1985), Popov (1982) ve Green (1969) dir. İntegral denklemleri analitik olarak çözmenin zor olması nümerik çözüm yöntemlerinin geliştirilmesine vesile olmuştur.

Miller ve Keer (1985) cauchy çekirdekli singüler integral denklemler için çözümler türetmişlerdir. Gerasoulis (1982) singüler integral denklemlerin çözümü için parçalı kuadrik polinomları kullanmıştır.

Venturino (1992) galerkin metodu yardımıyla ikinci tip cauchy çekirdekli singüler integral denklemlerin çözümünü elde etmiştir.

Erdoğan (1969) ortogonal polinomların özelliklerini kullanarak singüler integral denklemler sisteminin yaklaşık çözümünü elde etmiştir. Burada bilinmeyen fonksiyonun singüleritesinin temel özellikleri korunmuştur. Birinci çeşit integral denklemler sisteminde temel çözüm birinci ve ikinci çeşit Chebyshev polinomlarının ağırlık fonksiyonlarıdır. Yaklaşık çözüm temel bilinmeyen fonksiyonun singüler davranışlarını ifade eden fonksiyon olarak ifade edilip bilinmeyen katsayılı uygun bir ortogonal polinomlar serisi ile çarpılmıştır.

Hsiao ve Wendland (1977) birinci çeşit singüler integral denklem sınıfı için sonlu elemanlar yaklaşımını incelemişlerdir. Bu integral denklemler iki bağımsız değişkenli hiper eliptik diferansiyel denklemler için Dirichlet problemlerinden çıkarılmaktadır.

Bukhari (2005) dinamik elastik problemlerde ortaya çıkan logaritmik çekirdekli ikinci çeşit Fredholm tür integral denklemler Chebyshev polinomları yardımıyla nümerik olarak çözülmüştür.

Ioakimidis (1982) integral aralığı boyunca singüler logaritmik bir çekirdeğe sahip singüler integral denklemin nümerik çözümü ile ilgili bir metot vermiştir. Bu yöntem integral denklemleri Cauchy çekirdekli singüler integral denklemlere denkleştirmeye dayanmaktadır. Nümerik çözüm yöntemi ise uygun nümerik integrasyon kuralları kullanarak denklemleri lineer denklemler sistemine indirgemeye dayanır. İki şekilde verilen bu yöntem birbirinden biraz farklı nümerik sonuçlar vermektedir.

Aliev ve Mohammad (2000) birinci ve ikinci çeşit singüler çekirdekli Fredholm tipi integral denklemlerin regülerleştirme için bir metot vermiştir. Poincaré-Bertrand formülleri uygulanarak bu gibi integral denklemler en zayıf singüler çekirdekli ikinci çeşit Fredholm integral denklem haline dönüştürülmüştür. Singüler integral denklemin regülerizasyonunun denklemin operatörünün sabit çekirdek için sınırsız olduğu durumda mümkün olduğunu varsaymışlardır.

Banerjea ve Sarkar (2006) çekirdeği iki ayrık sonlu aralıkta olan logaritmik çekirdekli bir singüler integral denklemin çözümü için teorik bir metot vermiştir. Fakat integral denklemini sağlayan bilinmeyen fonksiyonlar ile bilinen fonksiyonun sonlu aralığın sıfırdan farklı uç noktalarında sınırlılık durumu dikkate alınmamıştır.

2. DÜZLEM TEMAS PROBLEMİ

2.1. Düzlem Temas Problemi Hakkında Genel Bilgi

Elastik cisimler teorisi kuvvete maruz kalan cisimlerin, bu kuvvetle olan münasebetlerini inceleyen bir alandır. Bir cisim şekil değiştirmesine sebep olan etki ortadan kaldırıldığında ilk haline dönebilme özelliğine sahipse bu cisim elastik cisim olarak nitelendirilmektedir. Elastiklik özelliğine, cismin sahip olduğu bünye karakteristikleriyle belirlenmiş bazı sınırları geçmemek şartıyla tüm cisimler sahiptir. Cisimlerin kendilerine etkiyen kuvvete vermiş olduğu tepki noktadan noktaya ve yönden yöne değişebilmektedir. Eğer cisimlerin mekanik özellikleri noktadan ve yönden bağımsız olarak aynı ise bu tür cisimlere izotrop, eksenlerde birbirinden bağımsız ve farklı özellikler gösteriyorsa bu tür cisimlere ortotrop özelliğe sahiptir denir.

Temas problemleri, temas bölgelerinde gerçekleşen sürtünmenin dikkate alındığı ve ihmal edildiği durumlar için farklı şekillerde incelenmektedir. Bu çalışmada n tane rijit panç ile bastırılan, alt yüzeyi sabitlenmiş elastik bir katman için sürtünmenin hesaba katıldığı bir temas problemi incelenecektir. Problemden h kalınlığındaki homojen ve ortotrop elastik katmana, n tane pançtan oluşan rijit bir panç sistemi etki etmektedir. İnceleyeceğimiz cisme z eksenini doğrultusuna dik kesitlerin gerilme, şekil değiştirme durumunun aynı olduğu varsayılmaktadır. Bu sebeple bir düzlem elastisite problemi söz konusu olacaktır. Temas esnasında elastik katman ile panç sisteminden oluşan sistemin dengede olduğu ve kuvvetin etkisine maruz kaldığında pançların dönmediği varsayılmaktadır.

Temas probleminin çözümünde elastisite teorisinin temel denklemleri, sınır koşulları ve integral dönüşüm tekniği kullanılarak, ortotrop elastik katmanın panç sistemi etkisi altındaki temas bölgelerinde oluşan basınç dağılımı fonksiyonlarını belirlemek için bir denklem sistemi ve Gauss Jacobi Kuadratur formülü kullanılarak bu denklem sisteminin sayısal çözümü sunulmaktadır.

2.2. Düzlem Temas Probleminin İfadesi

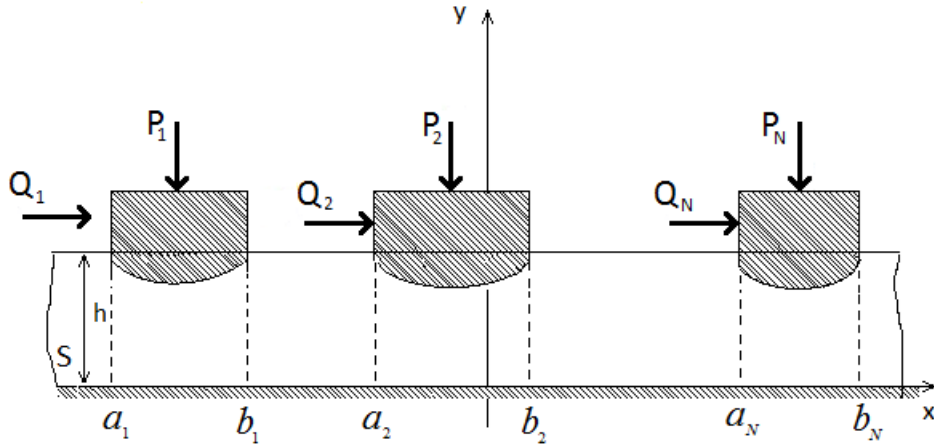
Yukarıda da bahsedildiği gibi bu çalışmamızda temas bölgelerinde meydana gelen sürtünmenin hesaba katıldığı bir temas problemi inceleyeceğiz.

Kalınlığı h olan sonsuz elastik bir katman $S = \{(x, y) | -\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq h\}$ bölgesini işgal etmiş olsun. Ortotrop katmanın x ve y yönündeki elastik modülleri sırasıyla E_1 ve E_2 dir. Bu modüller Young modülleri olarak bilinmektedir. Poisson oranları ise ν_{ij} $i, j = 1, 2, 3$ dür. $i = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere temas bölgelerini göstermiş olsun. i . sırada yer alan pançın temas bölgesi $\omega_i = [a_i, b_i]$ olsun. Burada $i \neq j$ olmak üzere $\omega_i \cap \omega_j \neq \emptyset$ varsayılmaktadır. Bu durumda $\omega = \bigcup_{i=1}^n \omega_i$ yüzey bölgesi, rijit panç sistemi ile elastik katman arasındaki temas alanı olacaktır. ω_* ise elastik katmanın $y = h$ sınır boyu için ω 'ya göre tümleyeni olsun. Pançların alt tabanlarının geometrileri ise sırasıyla $h_1(x)$, $h_2(x)$... $h_N(x)$ ile tanımlanmış olsunlar. Pançlara düşeyde etkiyen kuvvetler $p_i(x)$ $i = 1, 2, \dots, N$ ve yatayda etkiyen kuvvetler ise $q_i(x)$ $i = 1, 2, \dots, N$ dir.

Teorik olarak temas problemleri elastisite teorisinin karışık sınır değer problemi olarak incelenmektedir.

2.3. Problemin Tanımı ve Sınır Şartları

İnceleyeceğimiz problemde kalınlığı h olan S şeridi $y=0$ tabanı boyu zemine sabitlenmiştir. Pançların her birine $i=1,2,...,N$ düşeyde P_i , yatayda ise Q_i etki etmektedir. Problemin şematik gösterimi Şekil 1.1 de verilmiştir.



Şekil.1.1. Temas Problemin Geometrisi.

İlgili sınır şartları ise aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$v(x,0) = 0 \quad , \quad |x| < \infty \quad (1)$$

$$\tau_{xy}(x,0) = 0 \quad , \quad |x| < \infty \quad (2)$$

$$\sigma_y(x,h) = \tilde{p}(x) \quad , \quad |x| < \infty \quad (3)$$

$$\tau_{xy}(x,h) = \tilde{q}(x) \quad , \quad |x| < \infty \quad (4)$$

$$v(x,h) = -\delta_i(x) \quad , \quad x \in [a_i, b_i], \quad i=1,2,...,N \quad (5)$$

$$\delta_i(x) = \delta_i - h_i(x) \quad , \quad x \in [a_i, b_i], \quad i=1,2,...,N \quad (6)$$

İlave olarak $|x| \rightarrow \infty$ iken gerilmeler 0 olacaktır.

Burada v , y eksenini boyunca negatif yönde yer değiştirmeyi, τ_{xy} ve σ_y sırasıyla teğetsel ve normal gerilmeleri, δ_i , P_i kuvvetinin etkisiyle pançın y ekseninin negatif yönü boyunca yer değiştirmesini ve $h_i(x)$, pançın alt bölgesinin geometrik şeklini tanımlayan bir fonksiyon ifade etmektedir. İlaveten $\tilde{p}(x)$ ve $\tilde{q}(x)$ aşağıdaki gibi tanımlanacaktır.

$$\tilde{p}(x) = \begin{cases} -p_i(x), & x \in [a_i, b_i] \equiv \omega_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ 0 & x \in R / \bigcup_{i=1}^N \omega_i \equiv \omega_* \end{cases} \quad (7)$$

$$\tilde{q}(x) = \begin{cases} q_i(x), & x \in [a_i, b_i] \equiv \omega_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ 0 & x \in R / \bigcup_{i=1}^N \omega_i \equiv \omega_* \end{cases} \quad (8)$$

2.4. Elastisite Teorisinin Temel Denklemleri

Bu bölümde sınır şartları ile belirlenmiş temas probleminin çözümünde kullanacağımız elastisite teorisinin temel denklemlerini vereceğiz.

G teğetsel modülünü göstermek üzere ve ν Poisson oranını göstermek üzere, bünye ve şekil değiştirmeler, gerilmeler cinsinden aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\varepsilon_x = \frac{1 - \nu_{31}\nu_{13}}{E_1} \sigma_x - \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2} \sigma_y \quad (9)$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}}{E_1} \sigma_x + \frac{1 - \nu_{32}\nu_{23}}{E_2} \sigma_y \quad (10)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{12}} \quad (11)$$

Bilindiği üzere ortotrop cisimler için aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad (12)$$

$$\frac{\nu_{32}\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}\nu_{23}}{E_2} \quad (13)$$

Deformasyon bileşkeleri ile yer değıştirme bileşkeleri arasındaki bağıntılar aşağıdaki verilmiştir.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (14)$$

Dengede olan bir cisim için kütle kuvvetlerinin olmadığı durumda x ve y dik koordinat sisteminde gerilmelerin herhangi bir nokta civarındaki değışimlerine ait denge denklemleri aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (16)$$

Deformasyon uygunluk denklemleri ise aşağıdaki eşitlik ile ifade edilir.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (17)$$

2.5. İntegral Denklemin Elde Edilmesi

Önceki bölümde vermiş olduğumuz denklemler elastisite teorisinin temel denklemleri olarak bilinmektedir ve integral denklemin elde edilmesinde kullanılacaktır. Gerilimin normal ve kayma bileşenleri $U(x, y)$ Airy gerilme fonksiyonu aracılığıyla aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (18)$$

Bu bağıntılar sınır şartlarındaki bilinmeyen sayısının azaltılmasında önemli rol oynamaktadır. Buradaki U Airy fonksiyonunu Fourier dönüşümü yardımıyla aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U^*(y, \xi) e^{-i\xi x} d\xi \quad (19)$$

Bu dönüşümün Ters Fouier dönüşümü ise şu şekilde verilmektedir.

$$U^*(y, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y) e^{i\xi x} dx \quad (20)$$

(18) denklemini (9), (10) ve (11) denklemlerinde yerine yazalım.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1 - \nu_{31}\nu_{13}}{E_1} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}}{E_1} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{1 - \nu_{32}\nu_{23}}{E_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{xy} &= -\frac{1}{G_{12}} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (21)$$

eşitliklerini elde ederiz. Notasyonu basitleştirmek için,

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{1 - \nu_{31}\nu_{13}}{E_1}, \quad s_{22} = \frac{1 - \nu_{32}\nu_{23}}{E_2}, \quad s_{66} = \frac{1}{G_{12}}. \\ -s_{21} &= -s_{12} = \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{21}}{E_2} + \frac{\nu_{31}\nu_{23}}{E_2} \Rightarrow \frac{\nu_{12}}{E_1} + \frac{\nu_{32}\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1}. \end{aligned} \quad (22)$$

eşitliklerini kabul edelim. Bu durumda (17) denklemi aşağıdaki şekle dönüşecektir.

$$\frac{\partial}{\partial y^2} \left(s_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + s_{12} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(s_{21} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + s_{22} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) = 2s_{66} \left(-\frac{\partial U}{\partial x \partial y} \right) \quad (23)$$

(23) eşitliğinde gerekli düzenlemeleri yaparsak ,

$$\frac{\partial^4 U}{\partial y^4} + \frac{2s_{12} + 2s_{66}}{s_{11}} \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{s_{22}}{s_{11}} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} = 0 \quad (24)$$

eşitliğini elde ederiz. İfadeyi sadeleştirmek için aşağıdaki eşitlikleri kabul edelim.

$$A = \frac{s_{12} + s_{66}}{s_{11}} \quad (25)$$

$$B = \frac{s_{22}}{s_{11}} \quad (26)$$

kabulü sonrası (24) denklemini aşağıdaki şekilde yazalım.

$$\frac{\partial^4 U}{\partial y^4} + 2A \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 y^2} + B \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} = 0 \quad (27)$$

(22) denklemindeki eşitlikleri A ve B de dikkate alırsak

$$A = \frac{E_1 [E_2 - G_{12} (\nu_{21} + \nu_{31} \nu_{23})]}{G_{12} E_2 (1 - \nu_{31} \nu_{13})} \quad (28)$$

$$B = \frac{E_1 (1 - \nu_{32} \nu_{23})}{E_2 (1 - \nu_{31} \nu_{13})} \quad (29)$$

eşitliklerini elde ederiz.

(19) denklemini ile verilen Airy gerilme fonksiyonunu (27) denkleminde yerine yazalım.

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2A \frac{\partial^4}{\partial x^2 y^2} + B \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right] \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U^*(y, \xi) e^{-i\xi x} d\xi \right) = 0 \quad (30)$$

veya

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2A \frac{\partial^4}{\partial x^2 y^2} + B \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) [U^*(y, \xi) e^{-i\xi x} d\xi] = 0 \quad (31)$$

eşitliğini elde ederiz.

$$D^2 U^*(y, \xi) = \frac{\partial^2 U^*(y, \xi)}{\partial y^2}, \quad D^4 U^*(y, \xi) = \frac{\partial^4 U^*(y, \xi)}{\partial y^4} \quad (32)$$

olmak üzere (31) denklemini aşağıdaki biçimde ifade edebiliriz.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[D^4 + 2A(-i\xi)^2 D^2 + B(-i\xi)^4 \right] U^*(y, \xi) e^{-i\xi x} d\xi = 0 \quad (33)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[D^4 - 2A\xi^2 D^2 + B\xi^4 \right] U^*(y, \xi) e^{-i\xi x} d\xi = 0 \quad (34)$$

(34) denkleminde, Ters Fourier dönüşümü gereği,

$$(D^4 - 2A\xi^2 D^2 + B\xi^4)U^*(y, \xi) = 0 \quad (35)$$

yazabiliriz. (35) denkleminin karakteristik denklemi

$$m^4 - 2A\xi^2 m^2 + B\xi^4 = 0 \quad (36)$$

şeklindedir. Karakteristik denklemin kökleri

$$m_1 = \sqrt{A + \sqrt{A^2 - B}}\xi, \quad m_2 = -m_1, \quad m_3 = \sqrt{A - \sqrt{A^2 - B}}\xi, \quad m_4 = -m_3 \quad (37)$$

olarak yazılabilir.

(35) denkleminin genel çözümü aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

$$U^*(y, \xi) = c_1 \sinh(m_1 \xi y) + c_2 \cosh(m_1 \xi y) + c_3 \sinh(m_2 \xi y) + c_4 \cosh(m_2 \xi y) \quad (38)$$

(38) denklemini (19) ile verilen eşitlikte yerine yazarsak,

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[c_1 \sinh(m_1 \xi y) + c_2 \cosh(m_1 \xi y) + c_3 \sinh(m_2 \xi y) + c_4 \cosh(m_2 \xi y) \right] e^{-i\xi x} d\xi \quad (39)$$

denklemini elde ederiz.

(14) ile verilen şekil değiştirme ve yer değiştirme bağıntıları kullanılarak $v = \int \varepsilon_y dy$ yazılabilmektedir. (18),(21) ve (22) de verilen eşitlikleri dikkate alırsak,

$$v = \int (s_{21}\sigma_x + s_{22}\sigma_y) dy \quad (40)$$

elde ederiz.

(18) de verilen eşitlikler yardımıyla,

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[c_1 (m_1 \xi)^2 \sinh(m_1 \xi y) + c_2 (m_1 \xi)^2 \cosh(m_1 \xi y) + c_3 (m_2 \xi)^2 \sinh(m_2 \xi y) + c_4 (m_2 \xi)^2 \cosh(m_2 \xi y) \right] e^{-i\xi x} d\xi \quad (41)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -\xi^2 \left[c_1 \sinh(m_1 \xi y) + c_2 \cosh(m_1 \xi y) + c_3 \sinh(m_2 \xi y) + c_4 \cosh(m_2 \xi y) \right] e^{-i\xi x} d\xi \quad (42)$$

ifadelerini yazabiliriz.

(41) ve (42) eşitliklerini (40) denkleminde yerine yazalım.

$$v = \frac{s_{12}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \left\{ \int \left[c_1 (m_1)^2 \sinh(m_1 \xi y) + c_2 (m_1)^2 \cosh(m_1 \xi y) \right. \right. \\ \left. \left. + c_3 (m_2)^2 \sinh(m_2 \xi y) + c_4 (m_2)^2 \cosh(m_2 \xi y) \right] dy \right\} e^{-i\xi x} d\xi \\ - \frac{s_{22}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \left\{ \int \left[c_1 \sinh(m_1 \xi y) + c_2 \cosh(m_1 \xi y) \right. \right. \\ \left. \left. + c_3 \sinh(m_2 \xi y) + c_4 \cosh(m_2 \xi y) \right] dy \right\} e^{-i\xi x} d\xi \quad (43)$$

(43) denklemi; integrasyon işlemi ve gerekli sadeleştirmeler sonrası aşağıdaki biçime dönüşecektir.

$$v = \frac{s_{12}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 e^{-i\xi x} \left[\frac{c_1 (m_1)^2}{m_1 \xi} \cosh(m_1 \xi y) + \frac{c_2 (m_1)^2}{m_1 \xi} \sinh(m_1 \xi y) \right. \\ \left. + \frac{c_3 (m_2)^2}{m_2 \xi} \cosh(m_2 \xi y) + \frac{c_4 (m_2)^2}{m_2 \xi} \sinh(m_2 \xi y) \right] d\xi \\ - \frac{s_{22}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 e^{-i\xi x} \left[\frac{c_1}{m_1 \xi} \cosh(m_1 \xi y) + \frac{c_2}{m_1 \xi} \sinh(m_1 \xi y) \right. \\ \left. + \frac{c_3}{m_2 \xi} \cosh(m_2 \xi y) + \frac{c_4}{m_2 \xi} \sinh(m_2 \xi y) \right] d\xi \quad (44)$$

veya

$$v = \frac{s_{12}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi e^{-i\xi x} \left[c_1 m_1 \cosh(m_1 \xi y) + c_2 m_1 \sinh(m_1 \xi y) \right. \\ \left. + c_3 m_2 \cosh(m_2 \xi y) + c_4 m_2 \sinh(m_2 \xi y) \right] d\xi \\ - \frac{s_{22}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi e^{-i\xi x} \left[\frac{c_1}{m_1} \cosh(m_1 \xi y) + \frac{c_2}{m_1} \sinh(m_1 \xi y) \right. \\ \left. + \frac{c_3}{m_2} \cosh(m_2 \xi y) + \frac{c_4}{m_2} \sinh(m_2 \xi y) \right] d\xi \quad (45)$$

Şimdi de problemin çözümünde dikkate alınacak olan sınır koşullarını uygulayalım.

(1) eşitliği ile verilen sınır şartı gereği $v(x, 0) = 0$ dır. (45) denkleminde $y = 0$ kabul edersek

$$v(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_{21} (c_1 m_1 + c_3 m_2) \xi e^{-i\xi x} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -s_{22} \left(\frac{c_1}{m_1} + \frac{c_3}{m_2} \right) \xi e^{-i\xi x} d\xi = 0 \quad (46)$$

elde ederiz ve gerekli düzenlemeler sonrasında (46) eşitliği aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$v(x,0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[s_{21}(c_1 m_1 + c_3 m_2) - s_{22} \left(\frac{c_1}{m_1} + \frac{c_3}{m_2} \right) \right] \xi e^{-i\xi x} d\xi = 0 \quad (47)$$

Ters Fourier dönüşümü gereği,

$$s_{21}(c_1 m_1 + c_3 m_2) - s_{22} \left(\frac{c_1}{m_1} + \frac{c_3}{m_2} \right) = 0 \quad (48)$$

yazılabilir.

(48) eşitliğini bilinmeyen katsayılar parantezinde şu şekilde ifade edebiliriz:

$$c_1 \left(s_{21} m_1 - \frac{s_{22}}{m_1} \right) + c_3 \left(s_{21} m_2 - \frac{s_{22}}{m_2} \right) = 0 \quad (49)$$

Şimdi de (2) eşitliği ile verilen sınır şartını irdeleyelim. (18) ve (39) denklemlerini kullanarak aşağıdaki ifadeleri yazmak mümkündür.

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[c_1 \sinh(m_1 \xi y) + c_2 \cosh(m_1 \xi y) + c_3 \sinh(m_2 \xi y) + c_4 \cosh(m_2 \xi y) \right] e^{-i\xi x} d\xi \right) \quad (50)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -i\xi e^{-i\xi x} \left[c_1 m_1 \xi \cosh(m_1 \xi y) + c_2 m_1 \xi \sinh(m_1 \xi y) + c_3 m_2 \xi \cosh(m_2 \xi y) + c_4 m_2 \xi \sinh(m_2 \xi y) \right] d\xi \quad (51)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\xi^2 e^{-i\xi x} \left[c_1 m_1 \cosh(m_1 \xi y) + c_2 m_1 \sinh(m_1 \xi y) + c_3 m_2 \cosh(m_2 \xi y) + c_4 m_2 \sinh(m_2 \xi y) \right] d\xi \quad (52)$$

Sınır şartı gereği $\tau_{xy}(x, 0) = 0$ dir. $y = 0$ kabul edersek,

$$\tau_{xy}(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\xi^2 e^{-i\xi x} (c_1 m_1 + c_3 m_2) d\xi \quad (53)$$

Ters Fourier dönüşümü gereği,

$$c_1 m_1 + c_3 m_2 = 0 \quad (54)$$

bulunur.

Şimdi de $\sigma_y(x, y)$ yi hesaplayalım. (18) denkleminde,

$$\sigma_y(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[c_1 \sinh(m_1 \xi y) + c_2 \cosh(m_1 \xi y) + c_3 \sinh(m_2 \xi y) + c_4 \cosh(m_2 \xi y) \right] e^{-i\xi x} d\xi \right) \quad (55)$$

$$\sigma_y(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -\xi^2 \left[c_1 \sinh(m_1 \xi y) + c_2 \cosh(m_1 \xi y) + c_3 \sinh(m_2 \xi y) + c_4 \cosh(m_2 \xi y) \right] e^{-i\xi x} d\xi \quad (56)$$

elde ederiz.

(3) denklemi ile verilen sınır şartı gereği, $\sigma_y(x, h) = \tilde{p}(x)$ idi. Bu eşitlik neticesinde aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\tilde{p}(x) = \sigma_y(x, h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -\xi^2 \left[c_1 \sinh(m_1 \xi y) + c_2 \cosh(m_1 \xi y) + c_3 \sinh(m_2 \xi y) + c_4 \cosh(m_2 \xi y) \right] e^{-i\xi x} d\xi \quad (57)$$

Ters Fourier dönüşümü gereği,

$$-\xi^2 \left[c_1 \sinh(m_1 \xi y) + c_2 \cosh(m_1 \xi y) + c_3 \sinh(m_2 \xi y) + c_4 \cosh(m_2 \xi y) \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}(x) e^{i\xi x} dx \quad (58)$$

yazılabilir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}(\tau) e^{i\xi \tau} d\tau = Q(\xi) \quad (59)$$

kabulü yardımıyla (58) denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$c_1 \sinh(m_1 \xi y) + c_2 \cosh(m_1 \xi y) + c_3 \sinh(m_2 \xi y) + c_4 \cosh(m_2 \xi y) = -\frac{1}{\xi^2} Q(\xi) \quad (60)$$

(4) denkleminde belirtilen sınır şartı $\tau_{xy}(x, h) = \tilde{q}(x)$ ile ifade edilmişti. (52) denklemini kullanarak,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\xi^2 \left[c_1 m_1 \cosh(m_1 \xi h) + c_2 m_1 \sinh(m_1 \xi h) + c_3 m_2 \cosh(m_2 \xi h) + c_4 m_2 \sinh(m_2 \xi h) \right] e^{-i\xi x} d\xi = \tilde{q}(x) \quad (61)$$

yazabiliriz. (61) eşitliğini şu şekilde ifade edebiliriz:

$$i\xi^2 \begin{bmatrix} c_1 m_1 \cosh(m_1 \xi h) + c_2 m_1 \sinh(m_1 \xi h) \\ + c_3 m_2 \cosh(m_2 \xi h) + c_4 m_2 \sinh(m_2 \xi h) \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(x) e^{i\xi x} dx \quad (62)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(\tau) e^{i\xi \tau} d\tau = T(\xi) \quad (63)$$

kabul yardımıyla, (62) denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$c_1 m_1 \cosh(m_1 \xi h) + c_2 m_1 \sinh(m_1 \xi h) + c_3 m_2 \cosh(m_2 \xi h) + c_4 m_2 \sinh(m_2 \xi h) = -\frac{i}{\xi^2} T(\xi) \quad (64)$$

Böylece (39) daki bilinmeyen c_1 c_2 c_3 ve c_4 katsayılarını bulmak için (1), (2), (3) ve (4) ile ifade edilen sınır koşulları kullanılarak, sırasıyla (49), (54), (60) ve (64) denklemleri elde edildi. Görüldüğü üzere bu denklemler c_1 c_2 c_3 ve c_4 katsayıları cinsinden bir lineer denklem sistemi oluşturmaktadır. Ayrıca (49) ve (54) denklemleri yalnızca c_1 ve c_3 e bağlı olup homojen sistem oluşturmaktadır. Denklem sisteminin çözümünden $c_1 = c_3 = 0$ elde edilebilmektedir. Bu durumu (60) ve (64) denklemlerinde dikkate alırsak c_2 ve c_4 cinsinden aşağıdaki denklem sistemi elde edilecektir.

$$\begin{bmatrix} \cosh m_1 \xi h & \cosh m_2 \xi h \\ m_1 \sinh m_1 \xi h & m_2 \sinh m_2 \xi h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\xi^2} Q(\xi) \\ -\frac{i}{\xi^2} T(\xi) \end{bmatrix} \quad (65)$$

(65) ile verilen denklem sistemini çözelim. Burada,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cosh m_1 \xi h & \cosh m_2 \xi h \\ m_1 \sinh m_1 \xi h & m_2 \sinh m_2 \xi h \end{vmatrix} = m_2 \sinh m_2 \xi h \cosh m_1 \xi h - m_1 \sinh m_1 \xi h \cosh m_2 \xi h \quad (66)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\xi^2} Q(\xi) & \cosh m_2 \xi h \\ -\frac{i}{\xi^2} T(\xi) & m_2 \sinh m_2 \xi h \end{vmatrix} = \frac{1}{\xi^2} [-Q(\xi) m_2 \sinh m_2 \xi h + iT(\xi) \cosh m_2 \xi h] \quad (67)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} \cosh m_1 \xi h & -\frac{1}{\xi^2} Q(\xi) \\ m_1 \sinh m_1 \xi h & -\frac{i}{\xi^2} T(\xi) \end{vmatrix} = \frac{-1}{\xi^2} [-Q(\xi) m_1 \sinh m_1 \xi h + iT(\xi) \cosh m_1 \xi h] \quad (68)$$

olmak üzere, c_2 ve c_4 katsayılarını hesaplırsak,

$$c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{\xi^2} \frac{-Q(\xi) m_2 \sinh m_2 \xi h + iT(\xi) \cosh m_2 \xi h}{m_2 \sinh m_2 \xi h \cosh m_1 \xi h - m_1 \sinh m_1 \xi h \cosh m_2 \xi h} \quad (69)$$

$$c_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{-1}{\xi^2} \frac{-Q(\xi) m_1 \sinh m_1 \xi h + iT(\xi) \cosh m_1 \xi h}{m_2 \sinh m_2 \xi h \cosh m_1 \xi h - m_1 \sinh m_1 \xi h \cosh m_2 \xi h} \quad (70)$$

elde ederiz. $c_1 = c_3 = 0$ değerlerini (39) denkleminde dikkate alırsak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [c_2 \cosh(m_1 \xi y) + c_4 \cosh(m_2 \xi y)] e^{-i\xi x} d\xi \quad (71)$$

(71) denkleminde c_2 ve c_4 katsayılarını yerlerine yazarsak,

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\Delta \xi^2} (-Q(\xi) m_2 \sinh m_2 \xi h + iT(\xi) \cosh m_2 \xi h) \cosh m_1 \xi y - \frac{1}{\Delta \xi^2} (-Q(\xi) m_1 \sinh m_1 \xi h + iT(\xi) \cosh m_1 \xi h) \cosh m_2 \xi y \right] e^{-i\xi x} d\xi \quad (72)$$

elde ederiz. (72) denklemini gerekli düzenlemeler sonrası aşağıdaki gibi ifade etmek mümkündür.

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \left[\frac{-Q(\xi)}{\Delta \xi^2} (m_2 \sinh m_2 \xi h \cosh m_1 \xi y - m_1 \sinh m_1 \xi h \cosh m_2 \xi y) + \frac{iT(\xi)}{\Delta \xi^2} (\cosh m_2 \xi h \cosh m_1 \xi y - \cosh m_1 \xi h \cosh m_2 \xi y) \right] d\xi \quad (73)$$

Yine c_1 c_2 c_3 ve c_4 katsayılarını (45) de verilen eşitlikte yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
v = & \frac{s_{12}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi e^{-i\xi x} \left[\frac{1}{\xi^2} \left(\frac{-Q(\xi)m_2 \sinh m_2 \xi h + iT(\xi) \cosh m_2 \xi h}{\Delta} \right) m_1 \sinh m_1 \xi y \right. \\
& \left. - \frac{1}{\xi^2} \left(\frac{-Q(\xi)m_1 \sinh m_1 \xi h + iT(\xi) \cosh m_1 \xi h}{\Delta} \right) m_2 \sinh m_2 \xi y \right] d\xi \\
& - \frac{s_{22}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi e^{-i\xi x} \left[\frac{1}{m_1} \frac{1}{\xi^2} \left(\frac{-Q(\xi)m_2 \sinh m_2 \xi h + iT(\xi) \cosh m_2 \xi h}{\Delta} \right) \sinh m_1 \xi y \right. \\
& \left. + \frac{1}{m_2} \frac{1}{\xi^2} \left(\frac{-Q(\xi)m_1 \sinh m_1 \xi h + iT(\xi) \cosh m_1 \xi h}{\Delta} \right) \sinh m_2 \xi y \right] d\xi
\end{aligned} \quad (74)$$

elde ederiz. (74) eşitliğini düzenlersek,

$$\begin{aligned}
v = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\xi)}{\Delta \xi} \left[s_{21} m_1 m_2 (\sinh m_1 \xi h \sinh m_2 \xi y - \sinh m_2 \xi h \sinh m_1 \xi y) \right. \\
& \left. - s_{22} \left(\frac{m_1}{m_2} \sinh m_1 \xi h \sinh m_2 \xi y - \frac{m_2}{m_1} \sinh m_2 \xi h \sinh m_1 \xi y \right) \right] e^{-i\xi x} d\xi \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{iT(\xi)}{\Delta \xi} \left[s_{21} (-m_1 \cosh m_2 \xi h \sinh m_1 \xi y + m_2 \cosh m_1 \xi h \sinh m_2 \xi y) \right. \\
& \left. - s_{22} \left(\frac{-1}{m_1} \cosh m_2 \xi h \sinh m_1 \xi y + \frac{1}{m_2} \cosh m_1 \xi h \sinh m_2 \xi y \right) \right] e^{-i\xi x} d\xi
\end{aligned} \quad (75)$$

elde ederiz. Şimdi de $y = h$ sınır boyu $v(x, y)$ yi hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
v(x, h) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\xi)}{\Delta \xi} \left[s_{21} m_1 m_2 (\sinh m_1 \xi h \sinh m_2 \xi h - \sinh m_2 \xi h \sinh m_1 \xi h) \right. \\
& \left. - s_{22} \left(\frac{m_1}{m_2} \sinh m_1 \xi h \sinh m_2 \xi h - \frac{m_2}{m_1} \sinh m_2 \xi h \sinh m_1 \xi h \right) \right] e^{-i\xi x} d\xi \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{iT(\xi)}{\Delta \xi} \left[s_{21} (-m_1 \cosh m_2 \xi h \sinh m_1 \xi h + m_2 \cosh m_1 \xi h \sinh m_2 \xi h) \right. \\
& \left. - s_{22} \left(\frac{-1}{m_1} \cosh m_2 \xi h \sinh m_1 \xi h + \frac{1}{m_2} \cosh m_1 \xi h \sinh m_2 \xi h \right) \right] e^{-i\xi x} d\xi
\end{aligned} \quad (76)$$

(76) eşitliğini düzenlersek ,

$$v(x, h) = \frac{s_{22}}{2\pi} \left(\frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{Q(\xi)}{\xi} \left[\frac{m_2 - m_1}{m_2 \coth m_1 \xi h - m_1 \coth m_2 \xi h} \right] - \frac{T(\xi)}{\xi} \left[\frac{s_{22} (m_1 + m_2)}{s_{21} + \frac{s_{22}}{m_1 m_2} \frac{m_2 \coth m_2 \xi h - m_1 \coth m_1 \xi h}{m_2 \coth m_1 \xi h - m_1 \coth m_2 \xi h}} \right] \right] e^{-i\xi x} d\xi \quad (77)$$

elde ederiz.

(77) denklemini daha kompakt yazabilmek adına,

$$L_1(\xi h) = \frac{m_2 - m_1}{(m_2 \coth m_1 \xi h - m_1 \coth m_2 \xi h)} \quad (78)$$

$$L_2(\xi h) = \frac{m_1 m_2}{s_{22}(m_1 + m_2)} \left(s_{21} + \frac{s_{22}}{m_1 m_2} \frac{m_2 \coth m_2 \xi h - m_1 \coth m_1 \xi h}{m_2 \coth m_1 \xi h - m_1 \coth m_2 \xi h} \right) \quad (79)$$

kabul edersek bu durumda (77) denklemi

$$v(x, h) = \frac{s_{22}}{2\pi} \frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{L_1(\xi h)}{\xi} Q(\xi) - i \frac{L_2(\xi h)}{\xi} T(\xi) \right] e^{-i\xi x} d\xi \quad (80)$$

biçiminde ifade edilebilecektir. (78) ve (79) eşitliklerinden görüldüğü üzere $L_1(\xi h)$ tek,

$L_2(\xi h)$ ise çift bir fonksiyondur. (59) ve (63) ifadelerini (80) eşitliğinde yerine yazarsak,

$$v(x, h) = \frac{s_{22}}{2\pi} \frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{L_1(\xi h)}{\xi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}(\tau) e^{i\xi\tau} d\tau \right) - i \frac{L_2(\xi h)}{\xi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(\tau) e^{i\xi\tau} d\tau \right) \right] e^{-i\xi x} d\xi \quad (81)$$

elde ederiz. (81) eşitliğini düzenlersek,

$$v(x, h) = \frac{s_{22}}{2\pi} \frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}(\tau) \left[\frac{L_1(\xi h)}{\xi} e^{i\xi\tau} d\xi \right] d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(\tau) \left[\frac{iL_2(\xi h)}{\xi} e^{-i\xi(x-\tau)} d\xi \right] d\tau \right\} \quad (82)$$

bulunacaktır.

$$\xi h = u \Rightarrow \xi = \frac{u}{h} \Rightarrow d\xi = \frac{1}{h} du \quad (83)$$

olsun. Bu durumda (82) eşitliği

$$v(x, h) = \frac{s_{22}}{2\pi} \frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_1(u)}{u} e^{-iu\left(\frac{x-\tau}{h}\right)} du \right] d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_2(u)}{u} i e^{-iu\left(\frac{x-\tau}{h}\right)} du \right] d\tau \right\} \quad (84)$$

şekline dönüşür.

Aşağıdaki bilinen eşitlikler yardımıyla,

$$e^{-iu\left(\frac{x-\tau}{h}\right)} = \cos u\left(\frac{x-\tau}{h}\right) - i \sin u\left(\frac{x-\tau}{h}\right)u \quad (85)$$

$$ie^{-iu\left(\frac{x-\tau}{h}\right)} = i \cos u\left(\frac{x-\tau}{h}\right) + \sin u\left(\frac{x-\tau}{h}\right)u \quad (86)$$

(84) eşitliği aşağıdaki biçimde ifade edilecektir.

$$v(x, h) = \frac{s_{22}}{2\pi} \frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_1(u)}{u} \left(\cos u\left(\frac{x-\tau}{h}\right) - i \sin u\left(\frac{x-\tau}{h}\right)u \right) du \right] d\tau \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_2(u)}{u} \left(i \cos u\left(\frac{x-\tau}{h}\right) + \sin u\left(\frac{x-\tau}{h}\right)u \right) du \right] d\tau \right\} \quad (87)$$

$L_1(u)$ in tek, $L_2(u)$ nin ise çift bir fonksiyon olduğunu hatırlarsak,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_1(u)}{u} \sin u\left(\frac{x-\tau}{h}\right) du \equiv 0 \quad (88)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_2(u)}{u} \cos u\left(\frac{x-\tau}{h}\right) du \equiv 0 \quad (89)$$

olacağı açıktır. O halde aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_1(u)}{u} \cos u\left(\frac{x-\tau}{h}\right) du \equiv 2 \int_0^{\infty} \frac{L_1(u)}{u} \cos u\left(\frac{x-\tau}{h}\right) du \quad (90)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_2(u)}{u} \sin u\left(\frac{x-\tau}{h}\right) du \equiv 2 \int_0^{\infty} \frac{L_2(u)}{u} \sin u\left(\frac{x-\tau}{h}\right) du \quad (91)$$

Bu durumda $v(x, h)$ aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$v(x, h) = \frac{s_{22}}{\pi} \frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}(\tau) \left[\int_0^{\infty} \frac{L_1(u)}{u} \cos u\left(\frac{x-\tau}{h}\right) du \right] d\tau \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(\tau) \left[\int_0^{\infty} \frac{L_2(u)}{u} \sin u\left(\frac{x-\tau}{h}\right) du \right] d\tau \right\} \quad (92)$$

$$K_1\left(\frac{x-\tau}{h}\right) = \int_0^\infty \frac{L_1(u)}{u} \cos\left(u \frac{x-\tau}{h}\right) du \quad (93)$$

$$K_2\left(\frac{x-\tau}{h}\right) = \int_0^\infty \frac{L_2(u)}{u} \sin\left(u \frac{x-\tau}{h}\right) du \quad (94)$$

(93) ve (92) notasyonlarını kabul edersek (92) eşitliği,

$$v(x, h) = \frac{s_{22}}{\pi} \frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2} \left\{ \int_{-\infty}^\infty K_1\left(\frac{x-\tau}{h}\right) \tilde{p}(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^\infty K_2\left(\frac{x-\tau}{h}\right) \tilde{q}(\tau) d\tau \right\} \quad (95)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\theta = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{s_{22}} \quad (96)$$

olmak üzere; (95) eşitliğini

$$v(x, h) = \frac{1}{\theta \pi} \int_{-\infty}^\infty K_1\left(\frac{x-\tau}{h}\right) \tilde{p}(\tau) d\tau - \frac{1}{\theta \pi} \int_{-\infty}^\infty K_2\left(\frac{x-\tau}{h}\right) \tilde{q}(\tau) d\tau \quad (97)$$

biçiminde gösterebiliriz.

$\delta(x)$ pançların temas bölgelerindeki levhaya girişlerinin geometrisini ifade eder.

$$\delta(x) = \begin{cases} \delta_i(x), & x \in [a_i, b_i] \\ 0, & x \in R / \bigcup_{i=1}^N [a_i, b_i] \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (98)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

(5) denkleminde verilen sınır şart gereği $v(x, h) = -\delta(x)$ dir.

(7) ve (8) ifadeleri ile verilen sınır şartlarını (98) denkleminde kullanırsak, Bu durumda $x \in [a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \dots, N$ için,

$$\sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^\infty K_1\left(\frac{x-\tau}{h}\right) p_j(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^\infty K_2\left(\frac{x-\tau}{h}\right) q_j(\tau) d\tau = \theta \pi \delta_i(x) \quad (99)$$

elde ederiz.

$K_1(t)$ nin çift, $K_2(t)$ nin tek bir fonksiyon olduğunu gözönüne alırsak (99) eşitliğinden aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} K_1\left(\frac{\tau-x}{h}\right) p_j(\tau) d\tau - \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} K_2\left(\frac{\tau-x}{h}\right) q_j(\tau) d\tau = \theta \pi \delta_i(x) \quad (100)$$

ε sürtünme katsayısını göstermek üzere;

$$q_j(\tau) = \varepsilon p_j(\tau) \quad (101)$$

yazmak mümkündür. (101) bağıntısını, (100) eşitliğinde yerine yazarsak,

$$\sum_{j=1}^N \int_{a_j}^{b_j} K_1\left(\frac{\tau-x}{h}\right) p_j(\tau) d\tau - \varepsilon \sum_{j=1}^N \int_{a_j}^{b_j} K_2\left(\frac{\tau-x}{h}\right) p_j(\tau) d\tau = \pi \theta \delta_i(x) \quad (102)$$

$$\sum_{j=1}^N \int_{a_j}^{b_j} p_j(\tau) \left[K_1\left(\frac{\tau-x}{h}\right) - \varepsilon K_2\left(\frac{\tau-x}{h}\right) \right] d\tau = \pi \theta \delta_i(x) \quad (103)$$

elde ederiz.

$$K(t) = K_1(t) - \varepsilon K_2(t) \quad (104)$$

kabulü sonrası (104) denklemini aşağıdaki şekle dönüşecektir.

$$\sum_{j=1}^N \int_{a_j}^{b_j} K\left(\frac{\tau-x}{h}\right) p_j(\tau) d\tau = \theta \pi \delta_i(x) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (105)$$

2.6. İntegral Denklemin Çekirdeğinin Özellikleri

(105) integral denkleminin çekirdeği (93), (94) ve (104) ile tanımlanmaktadır. $K_1(t)$ çekirdeği t 'nin bir çift fonksiyonudur ve aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 2.1 :

$$K_1(t) = \int_0^{\infty} \frac{L(u)}{u} \cos ut du \text{ şeklinde tanımlı } K_1(t) \text{ fonksiyonu } \forall t \in (-\infty, +\infty) \text{ için}$$

$$F_1(t) = -\int_0^{\infty} \frac{[1 - L(u)] \cos ut - e^{-u}}{u} du, \quad (106)$$

olmak üzere

$$K_1(t) = -\ln|t| + F_1(t), \quad (107)$$

şeklinde yazılabilir.

İspat: İspatı mevcuttur (Vorovich, 1974).

Teorem 2.2 :

$$K_2(t) = \int_0^{\infty} \frac{L(u)}{u} \sin ut du \text{ şeklinde tanımlı } K_2(t) \text{ fonksiyonu } \forall t \in (-\infty, +\infty) \text{ için}$$

$$F_2(t) = -\int_0^{\infty} \frac{[1 - L_2(u)] \sin ut}{u} du, \quad (108)$$

olmak üzere

$$K_2(t) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(t) + F_2(t), \quad (109)$$

şeklinde yazılabilir.

İspat: İspatı mevcuttur (Vorovich, 1974).

(107) ve (109) eşitliklerini (104) de belirtilen çekirdeğin ifadesinde yerine yazar ve

$$F(t) = F_1(t) - \varepsilon F_2(t) \quad (110)$$

olduğunu kabul edersek aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$K(t) = -\ln(t) - \frac{\varepsilon}{2} \pi \operatorname{sgn} t + [F(t)] \quad (111)$$

2.7. Cauchy Tip Singular İntegral Denkleme İndirgeme

Bu bölümde, çekirdek için bir önceki kısımda verilen özellikler kullanılarak bir Cauchy tip singular integral denklemler türetilecektir

(105) elde edilen integral denklemde (111) eşitliğini kullanırsak, $x \in [a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \dots, N$ için

$$\sum_{j=1}^N \int_{a_j}^{b_j} p_j(\tau) \left[-\ln \left(\frac{\tau-x}{h} \right) - \varepsilon \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \left(\frac{\tau-x}{h} \right) \right] d\tau + \sum_{j=1}^N \int_{a_j}^{b_j} F \left(\frac{\tau-x}{h} \right) p_j(\tau) d\tau = \theta \pi \delta_i(x) \quad (112)$$

eşitliği elde edilecektir. Her iki tarafın türevini alalım. $x \in [a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \dots, N$ olduğu için

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \int_{a_j}^{b_j} \frac{p_j(\tau)}{\tau-x} d\tau - \varepsilon \frac{\pi}{2} \int_{a_i}^{b_i} p_i(\tau) \left[\frac{d}{dx} \operatorname{sgn} \left(\frac{\tau-x}{h} \right) \right] d\tau \\ & + \sum_{j=1}^N \int_{a_j}^{b_j} p_j(\tau) \left[\frac{d}{dx} F \left(\frac{\tau-x}{h} \right) \right] d\tau = \theta \pi \delta_i'(x) \end{aligned} \quad (113)$$

eşitliğini elde ederiz.

$D(x)$, Dirac fonksiyonu ve $H(x)$ Heaviside olmak üzere aşağıdaki bağıntılar bilinmektedir.

$$\operatorname{sgn}(x) = 2H(x) - 1 \quad (114)$$

$$\frac{d}{dx} H(x) = D(x) \Rightarrow \frac{d}{dx} (\operatorname{sgn} x) = 2D(x) \quad (115)$$

(113) eşitliğinde (114) ve (115) denklemleri ile verilen bağıntılar kullanıldığında,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \int_{a_j}^{b_j} \frac{p_j(\tau)}{\tau-x} d\tau + \varepsilon \pi \int_{a_i}^{b_i} p_i(\tau) D(\tau-x) d\tau \\ & - \frac{1}{h} \sum_{j=1}^N \int_{a_j}^{b_j} p_j(\tau) \left[\int_0^\infty [1-L_1(u)] \sin \left(u \frac{\tau-x}{h} \right) du \right. \\ & \left. + \varepsilon \int_0^\infty [1-L_2(u)] \cos \left(u \frac{\tau-x}{h} \right) du \right] d\tau = \theta \pi \delta_i'(x) \end{aligned} \quad (116)$$

olacaktır.

Dirac fonksiyonunun özelliği ve $x \in [a_i, b_i]$ olduğundan dolayı

$$\int_{a_i}^{b_i} p_i(\tau) D(\tau - x) = p_i(x) \quad (117)$$

eşitliği yazılabilir.

(117) ifadesi ile verilen bağıntıyı (116) eşitliğinde kullanırsak,

$$\varepsilon \pi p_i(x) + \sum_{j=1}^N \int_{a_j}^{b_j} \frac{p_j(\tau)}{\tau - x} d\tau - \frac{1}{h} \sum_{j=1}^N \int_{a_j}^{b_j} p_j(\tau) \left[\int_0^\infty [1 - L_1(u)] \sin\left(u \frac{\tau - x}{h}\right) du + \varepsilon \int_0^\infty [1 - L_2(u)] \cos\left(u \frac{\tau - x}{h}\right) du \right] d\tau = \theta \pi \delta'_i(x) \quad (118)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $x \in [a_i, b_i]$ ve $\tau \in [a_j, b_j]$ dir. $t = \frac{\tau - x}{h}$ olmak üzere aşağıdaki ötelemeyi kabul edelim.

$$M_{ij}(t) = -\frac{1}{\pi} \left[\int_0^\infty [1 - L_1(u)] \sin(ut) du + \varepsilon \int_0^\infty [1 - L_2(u)] \cos(ut) du \right] \quad (119)$$

(118) eşitliği (119) yardımıyla,

$$\varepsilon p_i(x) + \sum_{j=1}^N \frac{1}{\pi} \int_{a_j}^{b_j} \frac{p_j(\tau)}{\tau - x} d\tau + \frac{1}{h} \sum_{j=1}^N \int_{a_j}^{b_j} p_j(\tau) M_{ij}\left(\frac{\tau - x}{h}\right) d\tau = \theta \delta'_i(x) \quad (120)$$

biçiminde yazılabilir.

İntegral denklemin şeklini aşağıdaki şekilde değiştirelim.

$$\varepsilon p_i(x) + \frac{1}{\pi} \int_{a_i}^{b_i} \frac{p_i(\tau)}{\tau - x} d\tau + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{\pi} \int_{a_j}^{b_j} \frac{p_j(\tau)}{\tau - x} d\tau + \frac{1}{h} \sum_{j=1}^N \int_{a_j}^{b_j} M_{ij}\left(\frac{\tau - x}{h}\right) p_j(\tau) d\tau = \theta \delta'_i(x) \quad (121)$$

Burada $x \in [a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \dots, N$ dir. Ek koşul olarak,

$$\int_{a_i}^{b_i} p_i(\tau) d\tau = P_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (122)$$

denklemleri kullanılacaktır.

2.8. İntegral Denklemin Boyutsuzlaştırılması

Bu kısımda (121) denklemi boyutsuzlaştırılacaktır.

$$x \in [a_i, b_i] \quad \text{için} \quad x = \eta(t) = \frac{b_i - a_i}{2} t + \frac{b_i + a_i}{2} = r_i t + s_i \quad (123)$$

$$\tau \in [a_j, b_j] \quad \text{için} \quad \tau = \eta(z) = \frac{b_j - a_j}{2} z + \frac{b_j + a_j}{2} = r_j z + s_j \quad (124)$$

kabul edelim. Burada

$$r_i = \frac{b_i - a_i}{2}, \quad s_i = \frac{b_i + a_i}{2} \quad (125)$$

kabul edildi. Bu durumda $x_i \in [a_i, b_i]$, $\tau \in [a_j, b_j]$ olmak üzere

$$\tau - x = \begin{cases} r_j z - r_i t + s_j - s_i & i \neq j \\ r_i (z - t) & i = j \end{cases} \quad (126)$$

yazılabilir.

(123) ve (124) denklemlerini (121) ve (122) denklemlerinde yerine yazarsak,

$$\frac{h}{r_j} = \lambda_j \quad \text{olmak üzere} \quad (127)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon p_i(\eta(t)) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p_i(\eta(z))}{z - t} dz + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1_j} \frac{p_j(\eta(z))}{z - \frac{r_i}{r_j} t + \frac{s_j - s_i}{r_j}} dz \\ + \frac{1}{\lambda_j} \sum_{j=1}^N \int_{-1}^1 M_{ij} \left(\frac{z - \frac{r_i}{r_j} t + \frac{s_j - s_i}{r_j}}{\lambda_j} \right) p_j(\eta(z)) dz = \theta \delta'_i(\eta(t)) \end{aligned} \quad (128)$$

yazılabilir.

Şimdi de

$$p_i(\eta(t)) = \varphi_i(t) \quad (129)$$

$$\theta \delta'_i(\eta(t)) = f_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (130)$$

kabul edelim. O halde (127) denklemi,

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \varphi_i(t) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_i(z)}{z-t} dz + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_j(z)}{z - \frac{r_i}{r_j} t + \frac{s_j - s_i}{r_j}} dz \\
& + \frac{1}{\lambda_j} \sum_{j=1}^N \int_{-1}^1 M_{ij} \left(\frac{z - \frac{r_i}{r_j} t + \frac{s_j - s_i}{r_j}}{\lambda_j} \right) \varphi_j(z) dz = f_i(t)
\end{aligned} \tag{131}$$

şeklini alacaktır. (122) ek koşulları ise

$$\int_{-1}^1 \varphi_j(z) dz = \frac{P_j}{r_j} \quad j = 1, 2, \dots, n \tag{132}$$

şeklini alacaktır.

3. İNTEGRAL DENKLEMİN ÇÖZÜMÜNDE KULLANILACAK YÖNTEMLER

3.1. Seri Yöntemi

Büyük λ lar için geçerli olan seri yöntemini $N=1$ ve $N=2$ durumlarına uygulayalım.

3.1.1. N=1 durumu

$\lambda = \frac{h}{r}$ olsun. (131) denklemi bu durumda aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\varepsilon \phi(t) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi(z)}{z-t} dz + \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^1 M\left(\frac{z-t}{\lambda}\right) \phi(z) dz = f(t) \quad (133)$$

Burada (119) da ifade edilen kabul sonrası

$$M(t) = -\frac{1}{\pi} \left[\int_0^\infty [1-L_1(u)] \sin ut du + \varepsilon \int_0^\infty [1-L_2(u)] \cos ut du \right] \quad (134)$$

olmaktadır. $\sin ut$ ve $\cos ut$ fonksiyonları için Taylor formülü kullanılacak olursa, $M(t)$ fonksiyonu

$$M(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i t^i \quad (135)$$

şeklinde kuvvet serisi biçiminde gösterilebilir.

Burada $\gamma_{2i} = \varepsilon \beta_i$, $\gamma_{2i-1} = \alpha_i$ dir.

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{(-1)^i}{(2i-1)!} \int_0^\infty [1-L_1(u)] u^{2i-1} du \\ \beta_i &= \frac{(-1)^{i+1}}{(2i)!} \int_0^\infty [1-L_2(u)] u^{2i} du \end{aligned} \quad (136)$$

(133) nin her iki tarafını $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ ile çarpalım.

$$\varepsilon \varepsilon_1 \phi(t) + \frac{\varepsilon_1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi(z)}{z-t} dz + \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \int_{-1}^1 M\left(\frac{z-t}{\lambda}\right) \phi(z) dz = \varepsilon_1 f(t) \quad (137)$$

$\kappa = +1$ indisine karşılık gelen Cauchy tip karakteristik denklemin çözüm formülünü [67] bak. kullanırsak

$$\begin{aligned} \phi(t) = & \varepsilon \varepsilon_1 \left[\varepsilon_1 f(t) - \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \int_{-1}^1 M\left(\frac{z-t}{\lambda}\right) \phi(z) dz \right] \\ & - \frac{\varepsilon_1}{\pi X(t)} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \left[P^* + \varepsilon_1 f(\tau) - \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \int_{-1}^1 M\left(\frac{z-\tau}{\lambda}\right) \phi(z) dz \right] \end{aligned} \quad (138)$$

elde ederiz.

$$\varepsilon \varepsilon_1^2 = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} = \varepsilon_0 \quad (139)$$

kabul edelim. Bu durumda $\phi(t)$ nin ifadesi

$$\begin{aligned} \phi(t) = & \varepsilon_0 f(t) - \frac{\varepsilon_0}{\lambda} \int_{-1}^1 M\left(\frac{z-t}{\lambda}\right) \phi(z) dz \\ & - \frac{\varepsilon_1}{\pi X(t)} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \left[P^* + \varepsilon_1 f(\tau) - \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \int_{-1}^1 M\left(\frac{z-\tau}{\lambda}\right) \phi(z) dz \right] \end{aligned} \quad (140)$$

şeklinde yazılabilecektir. Burada

$$P^* = \int_{-1}^1 \phi(t) dt = \frac{\varepsilon_0}{\ln \lambda + D} \left\{ \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{X(-t)} dt + \Phi \right\} \quad (141)$$

$$\Phi = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dt}{X(-t)} \int_{-1}^1 Q(\xi) M\left(\frac{\xi-t}{\lambda}\right) d\xi \quad (142)$$

$$X(t) = (1+t)^{\frac{1}{2}+\gamma} (1-t)^{\frac{1}{2}-\gamma} \quad (143)$$

$$D = - \left(\ln 2 + C + \psi\left(\frac{1}{2} + \gamma\right) / 2 + \psi\left(\frac{1}{2} - \gamma\right) / 2 \right) \quad (144)$$

$\gamma = \frac{1}{\pi} \arctan \varepsilon$, C - Euler sabiti ve $\psi(t)$ de Eulerin ψ fonksiyonudur. (140) denkleminin

çözümü,

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_n(t)}{\lambda^n} \quad (145)$$

şeklinde bulunacaktır.

(145) denklemini (140) denkleminde yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
\phi_0(t) + \frac{\phi_1(t)}{\lambda} + \dots + \frac{\phi_n(t)}{\lambda^n} + \dots = \varepsilon_0 f(t) \\
- \frac{\varepsilon_0}{\pi \lambda} \int_{-1}^1 \left[\left[\gamma_0 + \gamma_1 \frac{z-t}{\lambda} + \dots + \gamma_n \left(\frac{z-t}{\lambda} \right)^n + \dots \right] \cdot \right. \\
\left. \left[\phi_0(z) + \frac{\phi_1(z)}{\lambda} + \dots + \frac{\phi_n(z)}{\lambda^n} + \dots \right] \right] dz \\
- \frac{\varepsilon_1}{\pi X(t)} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \left[P^* + \varepsilon_1 f(\tau) - \frac{\varepsilon_1}{\pi \lambda} \int_{-1}^1 \left[\left[\gamma_0 + \gamma_1 \frac{z-\tau}{\lambda} + \dots + \gamma_n \left(\frac{z-\tau}{\lambda} \right)^n + \dots \right] \cdot \right. \right. \\
\left. \left. \left[\phi_0(z) + \frac{\phi_1(z)}{\lambda} + \dots + \frac{\phi_n(z)}{\lambda^n} + \dots \right] \right] dz \right]
\end{aligned} \tag{146}$$

λ nın aynı dereceden kuvvetlerine ait katsayıları eşitlersek aşağıdaki bağıntılar elde edilecektir.

$$\phi_0(t) = \varepsilon_0 f(t) - \frac{\varepsilon_1}{\pi X(t)} \int_{-1}^1 (P^* + \varepsilon_1 f(\tau)) \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \tag{147}$$

$$\phi_1(t) = -\frac{\varepsilon_0}{\pi} \gamma_0 \int_{-1}^1 \phi_0(z) dz + \frac{\varepsilon_1^2 \gamma_0}{\pi^2 X(t)} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \int_{-1}^1 \phi_0(z) dz \tag{148}$$

$$N_0 = \int_{-1}^1 \phi_0(z) dz \tag{149}$$

olmak üzere aşağıdaki eşitlikler elde edilecektir.

$$\phi_1(t) = -\frac{\varepsilon_0}{\pi} \gamma_0 N_0 + \frac{\varepsilon_1^2 \gamma_0 N_0}{\pi^2 X(t)} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \tag{150}$$

$$\begin{aligned}
\phi_n(t) &= -\frac{\varepsilon_0}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\gamma_{n-1} (z-t)^{n-1} \phi_0(z) + \gamma_{n-2} (z-t)^{n-2} \phi_1(z) + \dots + \gamma_0 \phi_{n-1}(z) \right] dz \\
&- \frac{\varepsilon_1^2}{\pi^2 X(t)} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \int_{-1}^1 \left[\gamma_{n-1} (z-\tau)^{n-1} \phi_0(z) + \gamma_{n-2} (z-\tau)^{n-2} \phi_1(z) + \dots + \gamma_0 \phi_{n-1}(z) \right] dz \\
&= -\frac{\varepsilon_0}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \gamma_{n-1-m} \int_{-1}^1 \phi_m(z) (z-t)^{n-1-m} dz \\
&+ \frac{\varepsilon_1^2}{\pi^2 X(t)} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \int_{-1}^1 \gamma_{n-1-m} \phi_m(z) (z-\tau)^{n-1-m} dz
\end{aligned} \tag{151}$$

Böylece $N = 1$ durumuna karşılık gelen (133) integral denkleminin çözümü (140) integral denklemine indirgenerek, bu çözüm büyük λ lar durumunda (145) serisi şeklinde bulundu.

Bu seride $\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_n(t), \dots$ terimleri sırasıyla (147), (148) ve (151) yardımıyla belirlenebilir.

3.1.2. N=2 durumu

Temas bölgesi $\omega = [-b, -a] \cup [a, b]$ olsun. $\lambda = \frac{2h}{b-a}$ kabul edelim. Bu durumda (131) integral denklem sistemi,

$$\begin{aligned} \varepsilon \varphi_1(t) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(z)}{z-t} dz + \frac{1}{\lambda \pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_2(z)}{\frac{z-t}{\lambda} + \frac{s_2-s_1}{h}} dz + \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{11} \left(\frac{z-t}{\lambda} \right) \varphi_1(z) dz \\ + \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{12} \left(\frac{z-t}{\lambda} + \frac{s_2-s_1}{h} \right) \varphi_2(z) dz = f_1(t), \end{aligned} \quad (152)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \varphi_2(t) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_2(z)}{z-t} dz + \frac{1}{\pi \lambda} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(z)}{\frac{z-t}{\lambda} + \frac{s_1-s_2}{h}} dz + \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{21} \left(\frac{z-t}{\lambda} + \frac{s_1-s_2}{h} \right) \varphi_1(z) dz \\ + \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{22} \left(\frac{z-t}{\lambda} \right) \varphi_2(z) dz = f_2(t), \end{aligned} \quad (153)$$

şeklinde yazılabilecektir.

Ek Koşullar ise

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \varphi_1(z) dz &= \frac{P}{r} \\ \int_{-1}^1 \varphi_2(z) dz &= \frac{P}{r} \end{aligned} \quad (154)$$

şekline dönüşecektir. Aşağıdaki ötelemeleri kabul edelim.

$$\begin{aligned} \frac{s_2-s_1}{h} &= \eta \\ \frac{1}{\frac{z-t}{\lambda} + \frac{s_2-s_1}{h}} &= M_{10} \left(\frac{z-t}{\lambda} + \eta \right), \\ \frac{1}{\frac{z-t}{\lambda} + \frac{s_1-s_2}{h}} &= M_{20} \left(\frac{z-t}{\lambda} - \eta \right) \end{aligned} \quad (155)$$

(152) deki denklemlerin her iki tarafını $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ ile çarpalım. Bu durumda aşağıdaki eşitlik elde edilecektir.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \varepsilon \varphi_1(t) + \frac{\varepsilon_1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(z)}{z-t} dz &= \varepsilon_1 f_1(t) - \frac{\varepsilon_1}{\pi \lambda} \int_{-1}^1 M_{10} \left(\frac{z-t}{\lambda} + \eta \right) \varphi_2(z) dz - \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{11} \left(\frac{z-t}{\lambda} \right) \varphi_1(z) dz \\ &- \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{12} \left(\frac{z-t}{\lambda} + \eta \right) \varphi_2(z) dz. \end{aligned} \quad (156)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \varepsilon \varphi_2(t) + \frac{\varepsilon_1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_2(z)}{z-t} dz &= \varepsilon_1 f_2(t) - \frac{\varepsilon_1}{\pi \lambda} \int_{-1}^1 M_{20} \left(\frac{z-t}{\lambda} - \eta \right) \varphi_1(z) dz \\ &- \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{21} \left(\frac{z-t}{\lambda} - \eta \right) \varphi_1(z) dz - \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{22} \left(\frac{z-t}{\lambda} \right) \varphi_2(z) dz. \end{aligned} \quad (157)$$

2.çeşit Cauchy tip singular integral denklemin $\kappa = +1$ indisine karşılık gelen çözümü için bilinen formülü [65] uygularsak,

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) = \varepsilon_1 \varepsilon &\left[\begin{aligned} &\varepsilon_1 f_1(t) - \frac{\varepsilon_1}{\pi \lambda} \int_{-1}^1 M_{10} \left(\frac{z-t}{\lambda} + \eta \right) \varphi_2(z) dz - \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{11} \left(\frac{z-t}{\lambda} \right) \varphi_1(z) dz \\ &- \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{12} \left(\frac{z-t}{\lambda} + \eta \right) \varphi_2(z) dz \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (158)$$

$$\begin{aligned} &- \frac{\varepsilon_1}{\pi X(t)} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \left[\begin{aligned} &p_1^* + \varepsilon_1 f_1(\tau) - \frac{\varepsilon_1}{\lambda \pi} \int_{-1}^1 M_{10} \left(\frac{z-\tau}{\lambda} + \eta \right) \varphi_2(z) dz \\ &- \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{11} \left(\frac{z-\tau}{\lambda} \right) \varphi_1(z) dz - \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{12} \left(\frac{z-\tau}{\lambda} + \eta \right) \varphi_2(z) dz \end{aligned} \right] \\ \\ \varphi_2(t) = \varepsilon_1 \varepsilon &\left[\begin{aligned} &\varepsilon_1 f_2(t) - \frac{\varepsilon_1}{\pi \lambda} \int_{-1}^1 M_{20} \left(\frac{z-t}{\lambda} - \eta \right) \varphi_1(z) dz - \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{21} \left(\frac{z-t}{\lambda} - \eta \right) \varphi_1(z) dz \\ &- \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{22} \left(\frac{z-t}{\lambda} \right) \varphi_2(z) dz \end{aligned} \right] \\ \\ &- \frac{\varepsilon_1}{\pi X(t)} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \left[\begin{aligned} &p_2^* + \varepsilon_1 f_2(\tau) - \frac{\varepsilon_1}{\pi \lambda} \int_{-1}^1 M_{20} \left(\frac{z-\tau}{\lambda} - \eta \right) \varphi_1(z) dz \\ &- \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{21} \left(\frac{z-\tau}{\lambda} - \eta \right) \varphi_1(z) dz - \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{22} \left(\frac{z-\tau}{\lambda} \right) \varphi_2(z) dz \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (159)$$

Şimdi de aşağıdaki ötelemeyi kabul edelim

$$\varepsilon \varepsilon_1^2 = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} = \varepsilon_0 \quad (160)$$

Bu durumda (158) ve (159) sistemi,

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) = & \varepsilon_0 f_1(t) - \frac{\varepsilon_0}{\pi \lambda} \int_{-1}^1 M_{20} \left(\frac{z-t}{\lambda} + \eta \right) \varphi_2(z) dz - \frac{\varepsilon_0}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{11} \left(\frac{z-t}{\lambda} \right) \varphi_1(z) dz \\ & - \frac{\varepsilon_0}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{12} \left(\frac{z-t}{\lambda} + \eta \right) \varphi_2(z) dz \\ & - \frac{\varepsilon_1}{\pi X(t)} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \left[\begin{aligned} & p_1^* + \varepsilon_1 f_1(\tau) - \frac{\varepsilon_1}{\pi \lambda} \int_{-1}^1 M_{20} \left(\frac{z-\tau}{\lambda} + \eta \right) \varphi_2(z) dz \\ & - \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{11} \left(\frac{z-\tau}{\lambda} \right) \varphi_1(z) dz - \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{12} \left(\frac{z-\tau}{\lambda} + \eta \right) \varphi_2(z) dz \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (161)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) = & \varepsilon_0 f_2(t) - \frac{\varepsilon_0}{\pi \lambda} \int_{-1}^1 M_{20} \left(\frac{z-t}{\lambda} - \eta \right) \varphi_1(z) dz - \frac{\varepsilon_0}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{21} \left(\frac{z-t}{\lambda} - \eta \right) \varphi_1(z) dz \\ & - \frac{\varepsilon_0}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{22} \left(\frac{z-t}{\lambda} \right) \varphi_2(z) dz \\ & - \frac{\varepsilon_1}{\pi X(t)} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \left[\begin{aligned} & p_2^* + \varepsilon_1 f_2(\tau) - \frac{\varepsilon_1}{\lambda \pi} \int_{-1}^1 M_{20} \left(\frac{z-\tau}{\lambda} - \eta \right) \varphi_1(z) dz \\ & - \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{21} \left(\frac{z-\tau}{\lambda} - \eta \right) \varphi_1(z) dz - \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{22} \left(\frac{z-\tau}{\lambda} \right) \varphi_2(z) dz \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (162)$$

şekline dönüşecektir. (161) sistemini çözmek için [81] kaynağında tarif edilen ve büyük λ ler için geçerli olan seri şeklinde çözüm yöntemi uygulanacaktır.

Buradan hareketle,

$$\varphi_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(1)}(t)}{\lambda^n}, \quad \varphi_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(2)}(t)}{\lambda^n} \quad t \in [-1, 1] \quad (163)$$

şeklinde kabul edilecektir.

(163) ifadesini (161) dekleminde yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
& \varphi_0^{(1)}(t) + \frac{\varphi_1^{(1)}(t)}{\lambda} + \frac{\varphi_2^{(1)}(t)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\varphi_n^{(1)}(t)}{\lambda^n} + \dots = \varepsilon_0 f_1(t) \\
& - \frac{\varepsilon_0}{\lambda \pi} \int_{-1}^1 M_{10} \left(\frac{z-t}{\lambda} + \eta \right) \left[\varphi_0^{(2)}(z) + \frac{\varphi_1^{(2)}(z)}{\lambda} + \frac{\varphi_2^{(2)}(z)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\varphi_n^{(2)}(z)}{\lambda^n} + \dots \right] dz \\
& - \frac{\varepsilon_0}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{11} \left(\frac{z-t}{\lambda} \right) \left[\varphi_0^{(1)}(z) + \frac{\varphi_1^{(1)}(z)}{\lambda} + \frac{\varphi_2^{(1)}(z)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\varphi_n^{(1)}(z)}{\lambda^n} + \dots \right] dz \\
& - \frac{\varepsilon_0}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{12} \left(\frac{z-t}{\lambda} - \eta \right) \left[\varphi_0^{(2)}(z) + \frac{\varphi_1^{(2)}(z)}{\lambda} + \frac{\varphi_2^{(2)}(z)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\varphi_n^{(2)}(z)}{\lambda^n} + \dots \right] dz \\
& - \frac{\varepsilon_1}{\pi X(t)} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \left[\begin{aligned} & p_1^* + \varepsilon_1 f_2(\tau) \\ & - \frac{\varepsilon_1}{\lambda \pi} \int_{-1}^1 M_{10} \left(\frac{z-\tau}{\lambda} + \eta \right) \left[\varphi_0^{(2)}(z) + \frac{\varphi_1^{(2)}(z)}{\lambda} + \frac{\varphi_2^{(2)}(z)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\varphi_n^{(2)}(z)}{\lambda^n} + \dots \right] dz \\ & - \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{11} \left(\frac{z-\tau}{\lambda} \right) \left[\varphi_0^{(1)}(z) + \frac{\varphi_1^{(1)}(z)}{\lambda} + \frac{\varphi_2^{(1)}(z)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\varphi_n^{(1)}(z)}{\lambda^n} + \dots \right] dz \\ & - \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{12} \left(\frac{z-\tau}{\lambda} - \eta \right) \left[\varphi_0^{(2)}(z) + \frac{\varphi_1^{(2)}(z)}{\lambda} + \frac{\varphi_2^{(2)}(z)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\varphi_n^{(2)}(z)}{\lambda^n} + \dots \right] dz \end{aligned} \right] dz
\end{aligned} \tag{164}$$

$$\begin{aligned}
& \varphi_0^{(2)}(t) + \frac{\varphi_1^{(2)}(t)}{\lambda} + \frac{\varphi_2^{(2)}(t)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\varphi_n^{(2)}(t)}{\lambda^n} + \dots = \varepsilon_0 f_2(t) \\
& - \frac{\varepsilon_0}{\lambda \pi} \int_{-1}^1 M_{20} \left(\frac{z-t}{\lambda} - \eta \right) \left[\varphi_0^{(1)}(z) + \frac{\varphi_1^{(1)}(z)}{\lambda} + \frac{\varphi_2^{(1)}(z)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\varphi_n^{(1)}(z)}{\lambda^n} + \dots \right] dz \\
& - \frac{\varepsilon_0}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{21} \left(\frac{z-t}{\lambda} - \eta \right) \left[\varphi_0^{(1)}(z) + \frac{\varphi_1^{(1)}(z)}{\lambda} + \frac{\varphi_2^{(1)}(z)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\varphi_n^{(1)}(z)}{\lambda^n} + \dots \right] dz \\
& - \frac{\varepsilon_0}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{22} \left(\frac{z-t}{\lambda} \right) \left[\varphi_0^{(2)}(z) + \frac{\varphi_1^{(2)}(z)}{\lambda} + \frac{\varphi_2^{(2)}(z)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\varphi_n^{(2)}(z)}{\lambda^n} + \dots \right] dz \\
& - \frac{\varepsilon_1}{\pi X(t)} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \left[\begin{aligned} & p_2^* + \varepsilon_1 f_2(\tau) \\ & - \frac{\varepsilon_1}{\lambda \pi} \int_{-1}^1 M_{20} \left(\frac{z-\tau}{\lambda} - \eta \right) \left[\varphi_0^{(1)}(z) + \frac{\varphi_1^{(1)}(z)}{\lambda} + \frac{\varphi_2^{(1)}(z)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\varphi_n^{(1)}(z)}{\lambda^n} + \dots \right] dz \\ & - \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{21} \left(\frac{z-\tau}{\lambda} - \eta \right) \left[\varphi_0^{(1)}(z) + \frac{\varphi_1^{(1)}(z)}{\lambda} + \frac{\varphi_2^{(1)}(z)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\varphi_n^{(1)}(z)}{\lambda^n} + \dots \right] dz \\ & - \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \int_{-1}^1 M_{22} \left(\frac{z-\tau}{\lambda} \right) \left[\varphi_0^{(2)}(z) + \frac{\varphi_1^{(2)}(z)}{\lambda} + \frac{\varphi_2^{(2)}(z)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\varphi_n^{(2)}(z)}{\lambda^n} + \dots \right] dz \end{aligned} \right] dz
\end{aligned} \tag{165}$$

elde edilecektir.

$$\int_0^\infty [1-L_1(u)] \sin\left(\frac{\tau-x}{h}\right) du + \varepsilon \int_0^\infty [1-L_2(u)] \cos\left(\frac{\tau-x}{h}\right) du = -\pi M_{ij}\left(\frac{\tau-x}{h}\right) \quad (166)$$

$$-\pi M_1(t) = \int_0^\infty [1-L_1(u)] \sin(ut) du = \int_0^\infty [1-L_1(u)] \left[\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n u^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] du = \sum_1^\infty b_i t^{2i-1} \quad (167)$$

$$b_i = \frac{(-1)^i}{(2i-1)!} \int_0^\infty [1-L_1(u)] u^{2i-1} du, \quad i \geq 1 \quad (168)$$

$$-\pi M_2(t) = \int_0^\infty [1-L_2(u)] \cos(ut) du = \int_0^\infty [1-L_2(u)] \left[\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n u^{2n} t^{2n}}{(2n)!} \right] du = \sum_{i=0}^\infty d_i t^{2i} \quad (169)$$

$$d_i = \frac{(-1)^i}{(2i)!} \int_0^\infty [1-L_2(u)] u^{2i} du, \quad i \geq 0 \quad (170)$$

$$c_{2i} = d_i \varepsilon \quad c_{2i-1} = b_i \text{ kabul edersek}$$

$$-\pi M_{ij}(t) = \sum_{i=0}^\infty c_i t^i \quad (171)$$

olacaktır.

$$M_{11}\left(\frac{z-t}{\lambda}\right) = -\frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^\infty c_{11i} \left(\frac{z-t}{\lambda}\right)^i, \quad (172)$$

$$\begin{aligned} M_{12}\left(\frac{z-t}{\lambda} + \eta\right) &= -\frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^\infty c_{12i} \left(\frac{z-t}{\lambda} + \eta\right)^i = -\frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^\infty c_{12i} \sum_{k=0}^i c_i^k \left(\frac{z-t}{\lambda}\right)^k \eta^{i-k} \\ &= -\frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^\infty \left(\frac{z-t}{\eta\lambda}\right)^i \sum_{k=i}^\infty c_{12k} c_k^i \eta^k \end{aligned} \quad (173)$$

$$M_{21}\left(\frac{z-t}{\lambda} - \eta\right) = -\frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^\infty c_{21i} \left(\frac{z-t}{\lambda} - \eta\right)^i = -\frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^\infty \left(\frac{z-t}{\eta\lambda}\right)^i \sum_{k=0}^i c_{21k} c_k^i (-1)^k \eta^k \quad (174)$$

$$M_{22}\left(\frac{z-t}{\lambda}\right) = -\frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^\infty c_{22i} \left(\frac{z-t}{\lambda}\right)^i, \quad (175)$$

$$M_{10}\left(\frac{z-t}{\lambda} + \eta\right) = \frac{1}{\frac{z-t}{\lambda} + \eta} = -\frac{1}{\eta} \sum_{i=0}^\infty (-1)^i \left(\frac{z-t}{\lambda\eta}\right)^i, \quad (176)$$

$$M_{20}\left(\frac{z-t}{\lambda} - \eta\right) = \frac{1}{\frac{z-t}{\lambda} - \eta} = -\frac{1}{\eta} \sum_{i=0}^\infty \left(\frac{z-t}{\lambda\eta}\right)^i, \quad (177)$$

$$\text{Burada } c_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!} \text{ dir.} \quad (178)$$

(172-177) denklemlerini (165) de yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
& \varphi_0^{(1)}(t) + \frac{\varphi_1^{(1)}(t)}{\lambda} + \frac{\varphi_2^{(1)}(t)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\varphi_n^{(1)}(t)}{\lambda^n} = \varepsilon_0 f_1(t) \\
& - \frac{\varepsilon_0}{\lambda \pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\eta} \left\{ \left[1 - \frac{z-t}{\lambda \eta} + \left(\frac{z-t}{\lambda \eta} \right)^2 - \dots + (-1)^n \left(\frac{z-t}{\lambda \eta} \right)^n + \dots \right] \cdot \right. \\
& \left. \left[\varphi_0^{(2)}(z) + \frac{\varphi_1^{(2)}(z)}{\lambda} + \frac{\varphi_2^{(2)}(z)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\varphi_n^{(2)}(z)}{\lambda^n} + \dots \right] \right\} dz \\
& + \frac{\varepsilon_0}{\lambda \pi} \int_{-1}^1 \left\{ \left[c_{110} + c_{111} \frac{z-t}{\lambda} + c_{112} \left(\frac{z-t}{\lambda} \right)^2 + \dots + c_{11n} \left(\frac{z-t}{\lambda} \right)^n + \dots \right] \cdot \right. \\
& \left. \left[\varphi_0^{(1)}(z) + \frac{\varphi_1^{(1)}(z)}{\lambda} + \frac{\varphi_2^{(1)}(z)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\varphi_n^{(1)}(z)}{\lambda^n} + \dots \right] \right\} dz \\
& + \frac{\varepsilon_0}{\lambda \pi} \int_{-1}^1 \left\{ \left[\sum_{k=0}^{\infty} c_{12k} c_k^0 \eta^k + \frac{z-t}{\eta \lambda} \sum_{k=1}^{\infty} c_{12k} c_k^1 \eta^k + \left(\frac{z-t}{\eta \lambda} \right)^2 \sum_{k=2}^{\infty} c_{12k} c_k^2 \eta^k \right. \right. \\
& \left. \left. + \dots + \left(\frac{z-t}{\eta \lambda} \right)^n \sum_{k=n}^{\infty} c_{12k} c_k^2 \eta^k + \dots \right] \cdot \right. \\
& \left. \left[\varphi_0^{(2)}(z) + \frac{\varphi_1^{(2)}(z)}{\lambda} + \frac{\varphi_2^{(2)}(z)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\varphi_n^{(2)}(z)}{\lambda^n} + \dots \right] \right\} dz \tag{179} \\
& - \frac{\varepsilon_1}{\pi X(t)} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau - t} d\tau \left[\begin{aligned} & p_1^* + \varepsilon_1 f_1(\tau) \\ & - \frac{\varepsilon_1}{\lambda \pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\eta} \left[1 - \frac{z-\tau}{\lambda \eta} + \left(\frac{z-\tau}{\lambda \eta} \right)^2 - \dots + \left(-\frac{z-\tau}{\lambda \eta} \right)^n + \dots \right] \cdot \\ & \left[\varphi_0^{(2)}(z) + \frac{\varphi_1^{(2)}(z)}{\lambda} + \frac{\varphi_2^{(2)}(z)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\varphi_n^{(2)}(z)}{\lambda^n} + \dots \right] \\ & + \frac{\varepsilon_1}{\lambda \pi} \int_{-1}^1 \left[c_{110} + c_{111} \frac{z-\tau}{\lambda} + c_{112} \left(\frac{z-\tau}{\lambda} \right)^2 + \dots + c_{11n} \left(\frac{z-\tau}{\lambda} \right)^n + \dots \right] \cdot \\ & \left[\varphi_0^{(1)}(z) + \frac{\varphi_1^{(1)}(z)}{\lambda} + \frac{\varphi_2^{(1)}(z)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\varphi_n^{(1)}(z)}{\lambda^n} + \dots \right] \\ & + \frac{\varepsilon_1}{\lambda \pi} \int_{-1}^1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} c_{12k} c_k^0 \eta^k + \frac{z-\tau}{\eta \lambda} \sum_{k=1}^{\infty} c_{12k} c_k^1 \eta^k + \left(\frac{z-\tau}{\eta \lambda} \right)^2 \sum_{k=2}^{\infty} c_{12k} c_k^2 \eta^k \right. \\ & \left. + \dots + \left(\frac{z-\tau}{\eta \lambda} \right)^n \sum_{k=n}^{\infty} c_{12k} c_k^2 \eta^k + \dots \right] \cdot \\ & \left[\varphi_0^{(2)}(z) + \frac{\varphi_1^{(2)}(z)}{\lambda} + \frac{\varphi_2^{(2)}(z)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\varphi_n^{(2)}(z)}{\lambda^n} + \dots \right] \end{aligned} \right] dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varphi_0^{(2)}(t) + \frac{\varphi_1^{(2)}(t)}{\lambda} + \frac{\varphi_2^{(2)}(t)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\varphi_n^{(2)}(t)}{\lambda^n} + \dots = \varepsilon_0 f_2(t) \\
& - \frac{\varepsilon_0}{\lambda\pi} \int_{-1}^1 -\frac{1}{\eta} \left\{ \left[1 + \frac{z-t}{\lambda\eta} + \left(\frac{z-t}{\lambda\eta} \right)^2 - \dots + \left(\frac{z-t}{\lambda\eta} \right)^n + \dots \right] \cdot \right. \\
& \left. \left[\varphi_0^{(1)}(z) + \frac{\varphi_1^{(1)}(z)}{\lambda} + \frac{\varphi_2^{(1)}(z)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\varphi_n^{(1)}(z)}{\lambda^n} \right] \right\} dz \\
& + \frac{\varepsilon_0}{\lambda\pi} \int_{-1}^1 \left\{ \left[\sum_{k=0}^{\infty} c_{21k} c_k^0 (-\eta)^k + \frac{z-t}{\eta\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} c_{21k} c_k^1 (-\eta)^k + \left(\frac{z-t}{\eta\lambda} \right)^2 \sum_{k=2}^{\infty} c_{21k} c_k^2 (-\eta)^k \right. \right. \\
& \left. \left. + \dots + \left(\frac{z-t}{\eta\lambda} \right)^n \sum_{k=2}^{\infty} c_{21k} c_k^n (-\eta)^k + \dots \right] \cdot \right. \\
& \left. \left[\varphi_0^{(1)}(z) + \frac{\varphi_1^{(1)}(z)}{\lambda} + \frac{\varphi_2^{(1)}(z)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\varphi_n^{(1)}(z)}{\lambda^n} + \dots \right] \right\} dz \\
& + \frac{\varepsilon_0}{\pi\lambda} \int_{-1}^1 \left\{ \left[c_{220} + c_{221} \frac{z-t}{\eta\lambda} + c_{222} \left(\frac{z-t}{\eta\lambda} \right)^2 + \dots + c_{22n} \left(\frac{z-t}{\eta\lambda} \right)^n + \dots \right] \cdot \right. \\
& \left. \left[\varphi_0^{(2)}(z) + \frac{\varphi_1^{(2)}(z)}{\lambda} + \frac{\varphi_2^{(2)}(z)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\varphi_n^{(2)}(z)}{\lambda^n} + \dots \right] \right\} dz \tag{180} \\
& - \frac{\varepsilon_1}{\pi X(t)} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \left[\begin{aligned} & p_2^* + \varepsilon_1 f_2(\tau) \\ & - \frac{\varepsilon_1}{\lambda\pi} \int_{-1}^1 \left\{ \left[-\frac{1}{\eta} \left(1 + \frac{z-\tau}{\lambda\eta} + \left(\frac{z-\tau}{\lambda\eta} \right)^2 + \dots + \left(\frac{z-\tau}{\lambda\eta} \right)^n + \dots \right) \right] \cdot \right. \\ & \left. \left[\varphi_0^{(1)}(z) + \frac{\varphi_1^{(1)}(z)}{\lambda} + \frac{\varphi_2^{(1)}(z)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\varphi_n^{(1)}(z)}{\lambda^n} + \dots \right] \right\} dz \\ & + \frac{\varepsilon_1}{\lambda\pi} \int_{-1}^1 \left\{ \left[\sum_{k=0}^{\infty} c_{21k} c_k^0 (-\eta)^k + \frac{z-\tau}{\eta\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} c_{21k} c_k^1 (-\eta)^k \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{z-\tau}{\eta\lambda} \right)^2 \sum_{k=2}^{\infty} c_{21k} c_k^2 (-\eta)^k + \dots \right] \cdot \right. \\ & \left. \left[\varphi_0^{(1)}(z) + \frac{\varphi_1^{(1)}(z)}{\lambda} + \frac{\varphi_2^{(1)}(z)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\varphi_n^{(1)}(z)}{\lambda^n} + \dots \right] \right\} dz \\ & + \frac{\varepsilon_1}{\lambda\pi} \int_{-1}^1 \left\{ \left[c_{220} + c_{221} \frac{z-\tau}{\lambda} + c_{222} \left(\frac{z-\tau}{\lambda} \right)^2 + \dots + c_{22n} \left(\frac{z-\tau}{\lambda} \right)^n \right] \cdot \right. \\ & \left. \left[\dots + \left(\frac{z-\tau}{\eta\lambda} \right)^n \sum_{k=n}^{\infty} c_{21k} c_k^n (-\eta)^k + \dots \right] \right\} dz \\ & \left. \left[\varphi_0^{(2)}(z) + \frac{\varphi_1^{(2)}(z)}{\lambda} + \frac{\varphi_2^{(2)}(z)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\varphi_n^{(2)}(z)}{\lambda^n} + \dots \right] \right\} dz \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

λ nın aynı dereceden kuvvetlerinin katsayılarını eşitleyecek olursak $\varphi_0^{(1)}(t), \varphi_0^{(2)}(t), \varphi_1^{(1)}(t)$

$\varphi_1^{(2)}(t), \varphi_2^{(1)}(t)$ ve $\varphi_2^{(2)}(t)$ ifadeleri aşağıdaki şekilde bulunabilir.

$$\varphi_0^{(1)}(t) = \varepsilon_0 f_1(t) - \frac{\varepsilon_1 p_1^*}{\pi X(t)} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{(\varepsilon_1)^2}{\pi X(t)} \int_{-1}^1 \frac{f_1(\tau) X(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (181)$$

$$\varphi_0^{(2)}(t) = \varepsilon_0 f_2(t) - \frac{\varepsilon_1 p_2^*}{\pi X(t)} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{(\varepsilon_1)^2}{\pi X(t)} \int_{-1}^1 \frac{f_2(\tau) X(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (182)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(1)}(t) = & -\frac{\varepsilon_0}{\pi \eta} \int_{-1}^1 \varphi_0^{(2)}(z) dz + \frac{\varepsilon_0}{\pi} c_{110} \int_{-1}^1 \varphi_0^{(1)}(z) dz + \frac{\varepsilon_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} c_{12k} c_k^0 \eta^k \int_{-1}^1 \varphi_0^{(2)}(z) dz \\ & + \frac{(\varepsilon_1)^2}{\pi^2 X(t) \eta} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau - t} d\tau \int_{-1}^1 \varphi_0^{(2)}(z) dz - \frac{(\varepsilon_1)^2}{\pi^2 X(t)} c_{110} \int_{-1}^1 \varphi_0^{(1)}(z) dz \\ & - \frac{(\varepsilon_1)^2}{\pi^2 X(t)} \sum_{k=0}^{\infty} c_{12k} c_k^0 \eta^k \int_{-1}^1 \varphi_0^{(2)}(z) dz \end{aligned} \quad (183)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(2)}(t) = & -\frac{\varepsilon_0}{\pi \eta} \int_{-1}^1 \varphi_0^{(1)}(z) dz + \frac{\varepsilon_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} c_{21k} c_k^0 (-1)^k \eta^k \int_{-1}^1 \varphi_0^{(1)}(z) dz + \frac{\varepsilon_0}{\pi} c_{220} \int_{-1}^1 \varphi_0^{(2)}(z) dz \\ & - \frac{(\varepsilon_1)^2}{\pi^2 X(t) \eta} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau - t} d\tau \int_{-1}^1 \varphi_0^{(1)}(z) dz \\ & - \frac{(\varepsilon_1)^2}{\pi^2 X(t)} \sum_{k=0}^{\infty} c_{21k} c_k^0 (-\eta)^k \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau - t} d\tau \int_{-1}^1 \varphi_0^{(1)}(z) dz \\ & - \frac{(\varepsilon_1)^2}{\pi^2 X(t)} c_{220} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau - t} d\tau \int_{-1}^1 \varphi_0^{(2)}(z) dz \end{aligned} \quad (184)$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2^{(1)}(t) = & -\frac{\varepsilon_0}{\pi\eta} \int_{-1}^1 \left[-\frac{z-t}{\eta} \varphi_0^{(2)}(z) + \varphi_1^{(2)}(z) \right] dz \\
& + \frac{\varepsilon_0}{\pi} \int_{-1}^1 \left[c_{111}(z-t) \varphi_0^{(1)}(z) + c_{110} \varphi_1^{(1)}(z) \right] dz \\
& + \frac{\varepsilon_0}{\pi} \int_{-1}^1 \left[-\frac{z-t}{\eta} \sum_{k=1}^{\infty} c_{12k} c_k^1 \eta^k \varphi_0^{(2)}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} c_{12k} c_k^0 \eta^k \varphi_1^{(2)}(z) \right] dz \\
& + \frac{(\varepsilon_1)^2}{\pi^2 X(t) \eta} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \int_{-1}^1 \left[-\frac{z-\tau}{\eta} \varphi_0^{(2)}(z) + \varphi_1^{(2)}(z) \right] dz \\
& - \frac{(\varepsilon_1)^2}{\pi^2 X(t)} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \int_{-1}^1 \left[c_{111}(z-\tau) \varphi_0^{(1)}(z) + c_{110} \varphi_1^{(1)}(z) \right] dz \\
& - \frac{(\varepsilon_1)^2}{\pi^2 X(t)} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \int_{-1}^1 \left[\frac{z-\tau}{\eta} \sum_{k=1}^{\infty} c_{12k} c_k^1 \eta^k \varphi_0^{(2)}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} c_{12k} c_k^0 \eta^k \varphi_1^{(2)}(z) \right] dz
\end{aligned} \tag{185}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2^{(2)}(t) = & \frac{\varepsilon_0}{\pi\eta} \int_{-1}^1 \left[\frac{z-t}{\eta} \varphi_0^{(1)}(z) + \varphi_1^{(1)}(z) \right] dz \\
& + \frac{\varepsilon_0}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{z-t}{\eta} \sum_{k=1}^{\infty} c_{21k} c_k^1 (-\eta)^k \varphi_0^{(1)}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} c_{21k} c_k^0 (-\eta)^k \varphi_1^{(1)}(z) \right] dz \\
& + \frac{\varepsilon_0}{\pi} \int_{-1}^1 \left[c_{221}(z-t) \varphi_0^{(2)}(z) + c_{220} \varphi_1^{(2)}(z) \right] dz \\
& - \frac{(\varepsilon_1)^2}{\pi^2 X(t) \eta} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \int_{-1}^1 \left[\frac{z-\tau}{\eta} \varphi_0^{(1)}(z) + \varphi_1^{(1)}(z) \right] dz \\
& - \frac{(\varepsilon_1)^2}{\pi^2 X(t)} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \int_{-1}^1 \left[\frac{z-\tau}{\eta} \sum_{k=1}^{\infty} c_{21k} c_k^1 (-\eta)^k \varphi_0^{(1)}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} c_{21k} c_k^0 (-\eta)^k \varphi_1^{(1)}(z) \right] dz \\
& - \frac{\varepsilon_1}{\pi^2 X(t)} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \int_{-1}^1 \left[c_{221}(z-\tau) \varphi_0^{(2)}(z) + c_{220} \varphi_1^{(2)}(z) \right] dz
\end{aligned} \tag{186}$$

ifadeyi genelleştirirsek,

$$\begin{aligned}
\varphi_n^{(1)}(t) = & -\frac{\varepsilon_0}{\pi\eta} \int_{-1}^1 \left[\varphi_0^{(2)}(z) \left(-\frac{z-t}{\eta} \right)^{n-1} + \varphi_1^{(2)}(z) \left(-\frac{z-t}{\eta} \right)^{n-2} + \dots + \varphi_{n-1}^{(2)}(z) \right] dz \\
& + \frac{\varepsilon_0}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\varphi_0^{(1)}(z) c_{11n-1} (z-t)^{n-1} + \varphi_1^{(1)}(z) c_{11n-2} (z-t)^{n-2} + \dots + \varphi_{n-1}^{(1)}(z) c_{110} \right] dz \\
& + \frac{\varepsilon_0}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\varphi_0^{(2)}(z) \left(\frac{z-t}{\eta} \right)^{n-1} \sum_{k=n-1}^{\infty} c_{12k} c_k^{n-1} \eta^k + \varphi_1^{(2)}(z) \left(\frac{z-t}{\eta} \right)^{n-2} \sum_{k=n-2}^{\infty} c_{12k} c_k^{n-2} \eta^k \right. \\
& \left. + \dots + \varphi_{n-1}^{(2)}(z) \sum_{k=0}^{\infty} c_{12k} c_k^0 \eta^k \right] dz \quad (187) \\
& + \frac{(\varepsilon_1)^2}{\pi^2 X(t) \eta} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \int_{-1}^1 \left[\varphi_0^{(2)}(z) \left(-\frac{z-\tau}{\eta} \right)^{n-1} + \varphi_1^{(2)}(z) \left(-\frac{z-\tau}{\eta} \right)^{n-2} \right. \\
& \left. + \dots + \varphi_{n-1}^{(2)}(z) \right] dz \\
& - \frac{(\varepsilon_1)^2}{\pi^2 X(t)} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \int_{-1}^1 \left[\varphi_0^{(1)}(z) c_{11n-1} (z-\tau)^{n-1} + \varphi_1^{(1)}(z) c_{11n-2} (z-\tau)^{n-2} + \dots + \right. \\
& \left. \varphi_{n-1}^{(1)}(z) c_{110} \right] dz \\
& - \frac{(\varepsilon_1)^2}{\pi^2 X(t)} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \int_{-1}^1 \left[\varphi_0^{(2)}(z) \left(\frac{z-\tau}{\eta} \right)^{n-1} \sum_{k=n-1}^{\infty} c_{12k} c_k^{n-1} \eta^k + \right. \\
& \left. \varphi_1^{(2)}(z) \left(\frac{z-\tau}{\eta} \right)^{n-2} \sum_{k=n-2}^{\infty} \left(c_{12k} c_k^{n-2} \eta^k + \dots + \varphi_{n-1}^{(2)}(z) \sum_{k=0}^{\infty} c_{12k} c_k^0 \eta^k \right) \right] dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_n^{(2)}(t) = & -\frac{\varepsilon_0}{\pi\eta} \int_{-1}^1 \left[\varphi_0^{(1)}(z) \left(\frac{z-t}{\eta} \right)^{n-1} + \varphi_1^{(1)}(z) \left(\frac{z-t}{\eta} \right)^{n-2} + \dots + \varphi_{n-1}^{(1)}(z) \right] dz \\
& + \frac{\varepsilon_0}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\varphi_0^{(1)}(z) \left(\frac{z-t}{\eta} \right)^{n-1} \sum_{k=n-1}^{\infty} c_{21k} c_k^{n-1} (-\eta)^k \right. \\
& \left. + \varphi_1^{(1)}(z) \left(\frac{z-t}{\eta} \right)^{n-2} \sum_{k=n-2}^{\infty} c_{21k} c_k^{n-2} (-\eta)^k + \dots + \varphi_{n-1}^{(1)}(z) \sum_{k=0}^{\infty} c_{21k} c_k^0 (-\eta)^k \right] dz \\
& + \frac{\varepsilon_0}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\varphi_0^{(2)}(z) c_{22n-1} (z-t)^{n-1} + \varphi_1^{(2)}(z) c_{22n-2} (z-t)^{n-2} + \dots + \varphi_{n-1}^{(2)}(z) c_{220} \right] dz \quad (188) \\
& - \frac{(\varepsilon_1)^2}{\pi^2 X(t) \eta} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \int_{-1}^1 \left[\varphi_0^{(1)}(z) \left(\frac{z-\tau}{\eta} \right)^{n-1} + \varphi_1^{(1)}(z) \left(\frac{z-\tau}{\eta} \right)^{n-2} + \dots + \varphi_{n-1}^{(1)}(z) \right] dz - \\
& - \frac{(\varepsilon_1)^2}{\pi^2 X(t)} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \int_{-1}^1 \left[\varphi_0^{(1)}(z) \left(\frac{z-\tau}{\eta} \right)^{n-1} \sum_{k=n-1}^{\infty} c_{21k} c_k^{n-1} (-\eta)^k + \right. \\
& \left. \varphi_1^{(1)}(z) \left(\frac{z-\tau}{\eta} \right)^{n-2} \sum_{k=n-2}^{\infty} c_{21k} c_k^{n-2} (-\eta)^k + \dots + \right. \\
& \left. \varphi_{n-1}^{(1)}(z) \sum_{k=0}^{\infty} c_{21k} c_k^0 (-\eta)^k \right] dz \\
& - \frac{(\varepsilon_1)^2}{\pi^2 X(t)} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \int_{-1}^1 \left[\varphi_0^{(2)}(z) c_{22n-1} \left(\frac{z-\tau}{\eta} \right)^{n-1} + \varphi_1^{(2)}(z) c_{22n-2} \left(\frac{z-\tau}{\eta} \right)^{n-2} + \dots + \right. \\
& \left. \varphi_{n-1}^{(2)}(z) c_{220} \right] dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_n^{(1)}(t) = & -\frac{\varepsilon_0}{\pi\eta} \int_{-1}^1 \left[\sum_{m=0}^{n-1} \varphi_m^{(2)}(z) \left(-\frac{z-t}{\eta} \right)^{n-1-m} \right] dz + \frac{\varepsilon_0}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\sum_{m=0}^{n-1} \varphi_m^{(1)}(z) c_{11n-1-m} (z-t)^{n-1-m} \right] dz \\
& + \frac{\varepsilon_0}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\sum_{m=0}^{n-1} \varphi_m^{(2)}(z) \left(\frac{z-t}{\eta} \right)^{n-1-m} \sum_{k=n-1-m}^{\infty} c_{12k} c_k^{n-1-m} \eta^k \right] dz \\
& + \frac{(\varepsilon_1)^2}{\pi^2 X(t) \eta} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \int_{-1}^1 \left[\sum_{m=0}^{n-1} \varphi_m^{(2)}(z) \left(-\frac{z-\tau}{\eta} \right)^{n-1-m} \right] dz \quad (189) \\
& - \frac{(\varepsilon_1)^2}{\pi^2 X(t)} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \int_{-1}^1 \left[\sum_{m=0}^{n-1} \varphi_m^{(1)}(z) c_{11n-1-m} (z-\tau)^{n-1-m} \right] dz \\
& - \frac{(\varepsilon_1)^2}{\pi^2 X(t)} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \int_{-1}^1 \left[\sum_{m=0}^{n-1} \varphi_m^{(2)}(z) \left(\frac{z-\tau}{\eta} \right)^{n-1-m} \sum_{k=n-1-m}^{\infty} c_{12k} c_k^{n-1-m} \eta^k \right] dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_n^{(2)}(t) = & \frac{\varepsilon_0}{\pi\eta} \int_{-1}^1 \left[\sum_{m=0}^{n-1} \varphi_m^{(1)}(z) \left(\frac{z-t}{\eta} \right)^{n-1-m} \right] dz \\
& + \frac{\varepsilon_0}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\sum_{m=0}^{n-1} \varphi_m^{(1)}(z) \left(\frac{z-t}{\eta} \right)^{n-1-m} \sum_{k=n-1-m}^{\infty} c_{21k} c_k^{n-1-m} (-\eta)^k \right] dz \\
& + \frac{\varepsilon_0}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\sum_{m=0}^{n-1} \varphi_m^{(2)}(z) c_{22n-1-m} (z-t)^{n-1-m} \right] dz \\
& - \frac{(\varepsilon_1)^2}{\pi^2 X(t) \eta} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \int_{-1}^1 \left[\sum_{m=0}^{n-1} \varphi_m^{(n-1)}(z) \left(\frac{z-\tau}{\eta} \right)^{n-1-m} \right] dz \\
& - \frac{(\varepsilon_1)^2}{\pi^2 X(t)} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \int_{-1}^1 \left[\sum_{m=0}^{n-1} \varphi_m^{(1)}(z) \left(\frac{z-\tau}{\eta} \right)^{n-1-m} \sum_{k=n-1-m}^{\infty} c_{21k} c_k^{n-1-m} (-\eta)^k \right] dz \\
& - \frac{(\varepsilon_1)^2}{\pi^2 X(t)} \int_{-1}^1 \frac{X(\tau)}{\tau-t} d\tau \int_{-1}^1 \left[\sum_{m=0}^{n-1} \varphi_m^{(2)}(z) c_{22n-1-m} \left(\frac{z-\tau}{\eta} \right)^{n-1-m} \right] dz
\end{aligned} \tag{190}$$

elde edilecektir.

3.2. Gauss Quadrature Yöntemi

Bu kısımda (131) denklem sisteminin bir nümerik çözüm yöntemi geliştirilecektir. Bu nedenle düşey ve yatay kuvvetler etkisi altında N tane pançın elastik katmana basıncından ortaya çıkan düzlemsel temas problemi konu edilecektir.

Pançların her iki ucu da elastik şeride girdiği için, bu pançların oluşturdukları basınçlar uç kısımlarda sonsuz olmalıdır. Bu durumda çözümü

$j = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere

$$\varphi_j(t) = \omega(t) \cdot g_j(t), \quad \omega(t) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \tag{191}$$

şeklinde bulacağız. İndis teorisinden bilindiği üzere

$-(\alpha + \beta) = \kappa$ indis değeri incelenen durum için 1 eşit olmalıdır.

$$-(\alpha + \beta) = 1 \tag{192}$$

Ayrıca basıncın uçlarda sonsuz olabilmesi için $-1 < \alpha, \beta < 0$ olmalıdır.

Yine indis teorisi gereği α sayısı

$$\varepsilon + \cot \pi\alpha = 0 \tag{193}$$

denkleminde,

$$\alpha = -\frac{1}{\pi} \arctan \varepsilon \quad (194)$$

$$\beta = -1 - \alpha = -1 + \frac{1}{\pi} \arccot \varepsilon \quad (195)$$

şeklinde bulunacaktır.

(191) denklemini (131) denkleminde yerine yazalım. Aşağıdaki eşitlik elde edilecektir.

$$\begin{aligned} \varepsilon \omega(t) g_i(t) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega(z) g_i(z)}{z-t} dz + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\omega(z) g_j(z)}{z - \frac{r_i}{r_j} t + \frac{s_i - s_j}{r_j}} dz \\ + \frac{1}{\lambda_j} \sum_{j=1}^N M_{ij} \left(\frac{z - \frac{r_i}{r_j} t + \frac{s_i - s_j}{r_j}}{\lambda_j} \right) \omega(z) g_j(z) dz = f_i(t) \end{aligned} \quad (196)$$

Bilinmeyen $g_i(t)$, $i=1,2,\dots,N$ fonksiyonları yerine onların Lagrange interpolasyon polinomlarını bulmaya çalışacağız. z_m , $m=1,2,\dots,n$ interpolasyon düğüm noktalarını n . dereceden Jacobi polinomlarının $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ sıfırları şeklinde seçelim. Uygun Lagrange interpolasyon polinomları

$$g_i(t) \approx g_{in}(t) = \sum_{m=1}^n \frac{g_{im} P_n^{(\alpha,\beta)}(t)}{(t-z_m) P_n^{(\alpha,\beta)}(z_m)} \quad i=1,2,\dots,N \quad (197)$$

şeklinde ele alınacaktır.

Burada $g_{im} = g_{in}(z_m)$, $m=1,2,\dots,n$ kabul edildi.

$$\begin{aligned} \varepsilon \omega(t) \sum_{m=1}^n \frac{g_{im}}{P_n^{(\alpha,\beta)}(z_m)} \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(t)}{t-z_m} + \sum_{m=1}^n \frac{g_{im}}{P_n^{(\alpha,\beta)}(z_m)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega(z) P_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{z-z_m} dz \\ + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sum_{m=1}^n \frac{g_{jnm}}{P_n^{(\alpha,\beta)}(z_m)} \int_{-1}^1 \frac{\omega(z) P_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{z - \frac{r_i}{r_j} t + \frac{s_i - s_j}{r_j}} dz \\ + \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} \sum_{m=1}^n \frac{g_{jnm}}{P_n^{(\alpha,\beta)}(z_m)} \int_{-1}^1 M_{ij} \left(\frac{z - \frac{r_i}{r_j} t + \frac{s_i - s_j}{r_j}}{\lambda_j} \right) \omega(z) \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{z-z_m} dz = f_i(t) \end{aligned} \quad (198)$$

(198) denkleminde

$$\frac{1}{(z-t)(z-z_m)} = \frac{1}{t-z_m} \left(\frac{1}{z-t} + \frac{1}{z-z_m} \right) \quad (199)$$

özdeşliğini kullanalım.

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^n \frac{g_{inm}}{P_n^{(\alpha,\beta)}(z_m)} \left[\varepsilon \omega(t) \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(t)}{t-z_m} + \frac{1}{t-z_m} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega(z) P_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{z-t} dz - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega(z) P_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{z-z_m} dz \right) \right] \\ & + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sum_{m=1}^n \frac{g_{jnm}}{P_n^{(\alpha,\beta)}(z_m)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega(z)}{z - \frac{r_i}{r_j} t + \frac{s_i - s_j}{r_j}} \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{z-z_m} dz \\ & + \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} \sum_{m=1}^n \frac{g_{jnm}}{P_n^{(\alpha,\beta)}(z_m)} \int_{-1}^1 M_{ij} \left(\frac{z - \frac{r_i}{r_j} t + \frac{s_i - s_j}{r_j}}{\lambda_j} \right) \omega(z) \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{z-z_m} dz = f_i(t) \end{aligned} \quad (200)$$

Bilindiği üzere

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega(z) P_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{z-t} dz = -\varepsilon \omega(t) P_n^{(\alpha,\beta)}(t) - \frac{1}{2 \sin(\alpha\pi)} P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(t) \quad (201)$$

doğrudur. [21]

Bu ifadeyi (200) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^n \frac{g_{inm}}{P_n^{(\alpha,\beta)}(z_m)} \frac{1}{t-z_m} \left[\varepsilon \omega(t) P_n^{(\alpha,\beta)}(t) - \varepsilon \omega(t) P_n^{(\alpha,\beta)}(t) - \frac{1}{2 \sin(\alpha\pi)} P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(t) \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon \omega(z_m) P_n^{(\alpha,\beta)}(z_m) + \frac{1}{2 \sin(\alpha\pi)} P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(z_m) \right] \\ & + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sum_{m=1}^n \frac{g_{jnm}}{P_n^{(\alpha,\beta)}(z_m)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega(z)}{z - \frac{r_i}{r_j} t + \frac{s_i - s_j}{r_j}} \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{z-z_m} dz \\ & + \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} \sum_{m=1}^n \frac{g_{jnm}}{P_n^{(\alpha,\beta)}(z_m)} \int_{-1}^1 M_{ij} \left(\frac{z - \frac{r_i}{r_j} t + \frac{s_i - s_j}{r_j}}{\lambda_j} \right) \omega(z) \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{z-z_m} dz = f_i(t) \end{aligned} \quad (202)$$

elde ederiz.

Diğer taraftan

$P_n^{(\alpha,\beta)}(z_m) = 0 \quad m = 1, 2, \dots, n$ olduğu için (202) denklemi aşağıdaki hale dönüşecektir.

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^n \frac{g_{inm}}{P_n^{(\alpha,\beta)}(z_m)} \frac{1}{t - z_m} \frac{1}{2 \sin(\alpha\pi)} \left[-P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(t) + P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(z_m) \right] + \\ & \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^n \frac{g_{jnm}}{P_n^{(\alpha,\beta)}(z_m)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega(z)}{z - \frac{r_i}{r_j}t + \frac{s_i - s_j}{r_j}} \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{z - z_m} dz + \\ & \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^n \frac{g_{jnm}}{P_n^{(\alpha,\beta)}(z_m)} \frac{1}{\lambda_j} \int_{-1}^1 M_{ij} \left(\frac{z - \frac{r_i}{r_j}t + \frac{s_i - s_j}{r_j}}{\lambda_j} \right) \omega(z) \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{z - z_m} dz = f_i(t) \end{aligned} \quad (203)$$

Yukarıdaki denklemleri her $i = 1, 2, \dots, N$ için $t = t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ noktalarında sağlatalım. Ayrıca $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ noktalarını $P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(t_k) = 0$ şeklinde seçelim. O halde sonuncu denklem,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2 \sin(\alpha\pi)} \sum_{m=1}^n \frac{g_{inm}}{P_n^{(\alpha,\beta)}(z_m)} \frac{1}{t_k - z_m} \left[P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(z_m) \right] + \\ & \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{g_{jnm}}{P_n^{(\alpha,\beta)}(z_m)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega(z)}{z - \frac{r_i}{r_j}t_k + \frac{s_i - s_j}{r_j}} \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{z - z_m} dz + \\ & \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^n \frac{g_{jnm}}{P_n^{(\alpha,\beta)}(z_m)} \frac{1}{\lambda_j} \int_{-1}^1 M_{ij} \left(\frac{z - \frac{r_i}{r_j}t_k + \frac{s_i - s_j}{r_j}}{\lambda_j} \right) \omega(z) \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{z - z_m} dz = f_i(t_k) \end{aligned} \quad (204)$$

haline dönüşecektir.

$$a_{nm} = \frac{1}{P_n^{(\alpha,\beta)}(z_m)} \int_{-1}^1 \frac{\omega(z) P_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{z - z_m} dz \quad (205)$$

kabul edelim. Aşıkardır ki

$$a_{nm} = -\frac{\pi}{2 \sin \alpha\pi} \frac{P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(z_m)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(z_m)} \quad (206)$$

eşitliğinde sağlanmaktadır.

(205) veya (206) ötelemelerini (204) de yerine yazarsak,

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n \frac{g_{im} a_{nm}}{t_k - z_m} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{g_{jnm} a_{nm}}{z_m - \frac{r_i}{r_j} t_k + \frac{s_j - s_i}{r_j}} + \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^N g_{jnm} a_{nm} M_{ij}(z_m, t_k) = f_i(t_k) \quad (207)$$

elde edilecektir.

$$M_{ij}(z_m, t_k) = \frac{1}{\lambda_j} M_{ij} \left[\frac{z_m - \frac{r_i}{r_j} t_k + \frac{s_j - s_i}{r_j}}{\lambda_j} \right] \quad (208)$$

notasyonu kullanıldı. Böylece

$$\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n \left[\frac{g_{im}}{t_k - z_m} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{g_{jnm}}{z_m - \frac{r_i}{r_j} t_k + \frac{s_j - s_i}{r_j}} \right] a_{nm} + \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^N g_{jnm} a_{nm} M_{ij}(z_m, t_k) = f_i(t_k) \quad (209)$$

veya

$$\sum_{m=1}^n \left(\sum_{j=1}^N \frac{g_{jnm}}{z_m - \frac{r_i}{r_j} t_k + \frac{s_j - s_i}{r_j}} \right) a_{nm} + \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^N \pi M_{ij}(z_m, t_k) g_{jnm} a_{nm} = \pi f_i(t_k) \quad (210)$$

elde edilecektir. Toplam sırasını değiştirirsek

$$\sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^n \left[\frac{1}{z_m - \frac{r_i}{r_j} t_k + \frac{s_j - s_i}{r_j}} + \pi M_{ij}(z_m, t_k) \right] a_{nm} g_{jnm} = \pi f_i(t_k) \quad (211)$$

$$i = 1, 2, \dots, N \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

bulunacaktır. (211) den görüldüğü gibi denklem sayısı $N.(n-1)$, bilinmeyen sayısı $N.n$ ve eksik kalan denklem sayısı ise N dir.

$j = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere j . panç için statik koşul

$$\sum_{m=1}^n a_{nm} g_{jnm} = P_j^* \quad (212)$$

şeklinde olup toplamda N tane ek koşul vardır. Dolayısıyla bilinmeyen sayısı ile denklem sayısı aynı olup $N.n$ 'e eşittir.

Seçilen n sayısına göre bu lineer denklem sisteminden bilinmeyen g_{jnm} ler ($j=1,2,...,N$, $m=1,2,...,n$) bulunup (197) denkleminde yerine yazılacak olursa $g_1(t)$, $g_2(t)$,..., $g_N(t)$ fonksiyonları, daha sonra da (191) denklemi yardımıyla $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$,..., $\varphi_N(t)$ fonksiyonları belirlenebilir. Bir başka deyişle, (131) integral denklem sisteminin çözümü bulunabilir.

4. NÜMERİK HESAPLAMALAR VE SONUÇLAR

Bu kısımda, Gauss-Jacobi kuadratur yönteminin uygulanmasıyla ortaya çıkan (211) ve (212) denklemler sistemi, $N=1$ ve $N=2$ durumlarına karşılık gelen panç sistemi, katman temas problemleri için ele alınacaktır.

Düz tabanlı panç sistemini inceleyelim. Bu durumda (130) gereği (211) denkleminin sağ tarafı sıfır olacaktır. Ayrıca pançların genişlikleri ve pançlara etki eden düşey kuvvetlerin aynı olduğu varsayılacaktır. Bu durumda $r_1 = r_2 = \dots = r_N = r$ ve $P_1 = P_2 = \dots = P_N = P$ kabul edilecektir. Böylece (211) ve (212) sistemi aşağıdaki şekle dönüşmüş olacaktır.

$$\sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^n \left[\frac{1}{z_m - t_k + \frac{s_j - s_i}{r}} + \pi M_{ij}(z_m, t_k) \right] a_{nm} g_{jnm} = 0 \quad (213)$$

$$\sum_{m=1}^n a_{nm} g_{jnm} = 1 \quad (214)$$

(129) yerine

$$\varphi_i(t) = \frac{r}{P} P_i(\eta(t)) \quad (215)$$

kabul edip (191) ve (197) denklemlerini de dikkate alalım.

4.1. N=1 Durumu

$N=1$ durumu incelendiğinde (213) ve (214) denklemleri

$$\sum_{m=1}^n \left[\frac{1}{z_m - t_k} + \pi M(z_m, t_k) \right] a_{nm} g_{jnm} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (216)$$

$$\sum_{m=1}^n a_{nm} g_{nm} = 1 \quad (217)$$

şekline dönüşecektir. Hesaplamalarda pançın, ileri derecede ortotrop bir materyal olan Bor-Epoksi malzemesinden yapılmış elastik bir katmana temas ettiği varsayılmıştır. İlgili malzeme için hesaplamalarda kullanılan elastik sabitler aşağıdaki gibidir.

$$E_1 = 30.10^6 \text{ psi}, E_2 = 3.10^6 \text{ psi}, G_{12} = (1,5).10 \text{ psi}, \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = \nu_{32} = 0.25 \text{ dir. } \frac{E_1}{E_2}, \lambda$$

ve ε nin farklı değerleri için panç altında oluşan basınç dağılımında en küçük basınca karşılık gelen t_* apsisi ve en küçük basınç değerleri, ayrıca sırasıyla $t = -0.95$ ve $t = 0.95$ apsilerine karşılık gelen basınç değerleri q_{11} ve q_{12} değerleri çizelge 4.1 de verilmiştir.

Çizelge 4.1. Ortotropik Özellik, Bağlı Kalınlık ve Sürtünme Katsayılarına Bağlı Farklı Noktalardaki Basınç değerleri.

E_1/E_2	λ	ε	t_*	$\varphi(t_*)$	q_{11}	q_{12}
0.25	1	0	0	0,347729	0,928092	0,928092
		0.1	0,236664	0,336704	1,170905	0,723872
		0.2	0,402872	0,303931	1,444713	0,514021
0.25	2	0	0	0,330572	0,988396	0,988396
		0.1	0,132304	0,321649	1,244413	0,767013
		0.2	0,317430	0,300283	1,521653	0,575754
0.25	4	0	0	0,321163	1,012320	1,012320
		0.1	0,104581	0,314008	1,267719	0,783772
		0.2	0,236856	0,293979	1,526220	0,598453
0.25	8	0	0	0,318752	1,018282	1,018282
		0.1	0,109738	0,311573	1,272946	0,790084
		0.2	0,232840	0,291778	1,537710	0,598278
0.5	1	0	0	0,348185	0,933987	0,933987
		0.1	0,265860	0,336197	1,178374	0,729695
		0.2	0,428832	0,302097	1,456402	0,513847
0.5	2	0	0	0,328896	0,993135	0,993135
		0.1	0,127667	0,319897	1,251357	0,770789
		0.2	0,310861	0,299127	1,532100	0,577698
0.5	4	0	0	0,320443	1,014072	1,014072
		0.1	0,102109	0,313278	1,270514	0,784527
		0.2	0,232066	0,293342	1,528587	0,599522
0.5	8	0	0	0,318620	1,018613	1,018613
		0.1	0,109962	0,311388	1,273636	0,790024
		0.2	0,231723	0,291588	1,538478	0,597970

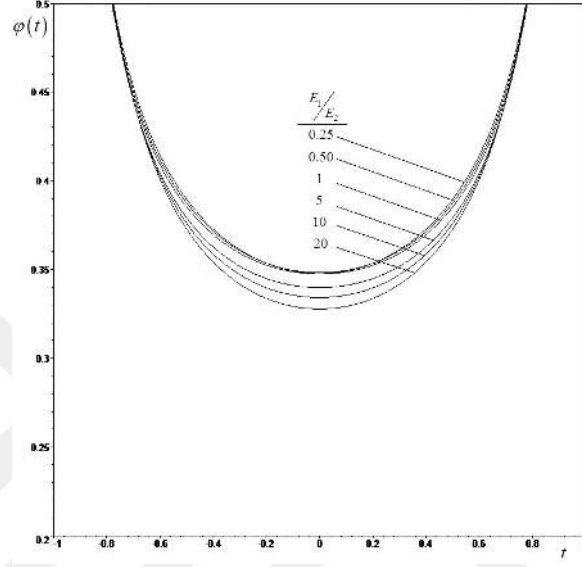
Çizelge 4.1. Ortotropik Özellik, Bağlı Kalınlık ve Sürtünme Katsayılarına Bağlı Farklı Noktalardaki Basınç değerleri (devamı).

E_1/E_2	λ	ε	t_*	$\varphi(t_*)$	q_{11}	q_{12}
1	1	0	0	0,347452	0,941496	0,941496
		0.1	0,284327	0,334974	1,186600	0,737381
		0.2	0,439907	0,300668	1,467388	0,516492
1	2	0	0	0,326948	0,998089	0,998089
		0.1	0,121185	0,317943	1,258037	0,774986
		0.2	0,299810	0,297900	1,541526	0,580285
1	4	0	0	0,319848	1,015532	1,015532
		0.1	0,100077	0,312675	1,272794	0,785194
		0.2	0,228154	0,292821	1,530459	0,600471
1	8	0	0	0,318523	1,018859	1,018859
		0.1	0,110156	0,311247	1,274161	0,789961
		0.2	0,230824	0,291444	1,539046	0,597714
5	1	0	0	0,339782	0,966391	0,966391
		0.1	0,271040	0,328842	1,211009	0,763079
		0.2	0,401555	0,297949	1,494419	0,532820
5	2	0	0	0,322507	1,008899	1,008899
		0.1	0,109340	0,313569	1,271468	0,784673
		0.2	0,271140	0,295113	1,559161	0,587085
5	4	0	0	0,318915	1,017859	1,017859
		0.1	0,096833	0,311728	1,276393	0,786278
		0.2	0,222005	0,292015	1,533251	0,602094
5	8	0	0	0,318388	1,019204	1,019204
		0.1	0,110507	0,311038	1,274936	0,789822
		0.2	0,229376	0,291231	1,539851	0,597277

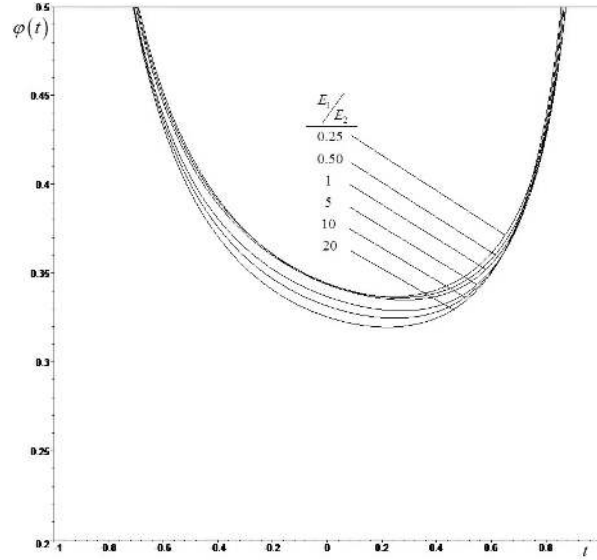
Çizelge 4.1. Ortotropik Özellik, Bağlı Kalınlık ve Sürtünme Katsayılarına Bağlı Farklı Noktalardaki Basınç değerleri (devamı).

E_1/E_2	λ	ε	t_*	$\varphi(t_*)$	q_{11}	q_{12}
10	1	0	0	0,334171	0,980296	0,980296
		0.1	0,246702	0,324650	1,224093	0,777363
		0.2	0,361769	0,296126	1,507489	0,543910
10	2	0	0	0,320941	1,012750	1,012750
		0.1	0,105404	0,312033	1,275095	0,788246
		0.2	0,261131	0,294091	1,564774	0,589781
10	4	0	0	0,318667	1,018491	1,018491
		0.1	0,959505	0,311475	1,277365	0,786573
		0.2	0,220369	0,291788	1,533968	0,602557
10	8	0	0	0,318355	1,019289	1,019289
		0.1	0,110612	0,310984	1,275136	0,789776
		0.2	0,228974	0,291176	1,540050	0,597151
20	1	0	0	0,327723	0,995828	0,995828
		0.1	0,218960	0,319621	1,238583	0,793198
		0.2	0,316883	0,293430	1,521355	0,557238
20	2	0	0	0,319647	1,015982	1,015982
		0.1	0,102392	0,310775	1,279655	0,791283
		0.2	0,253063	0,293228	1,569088	0,592178
20	4	0	0	0,318483	1,018961	1,018961
		0.1	0,095345	0,311289	1,278061	0,786819
		0.2	0,219226	0,291628	1,534506	0,602903
20	8	0	0	0,318331	1,019351	1,019351
		0.1	0,110675	0,310947	1,275273	0,789750
		0.2	0,228710	0,2911390	1,540189	0,597073

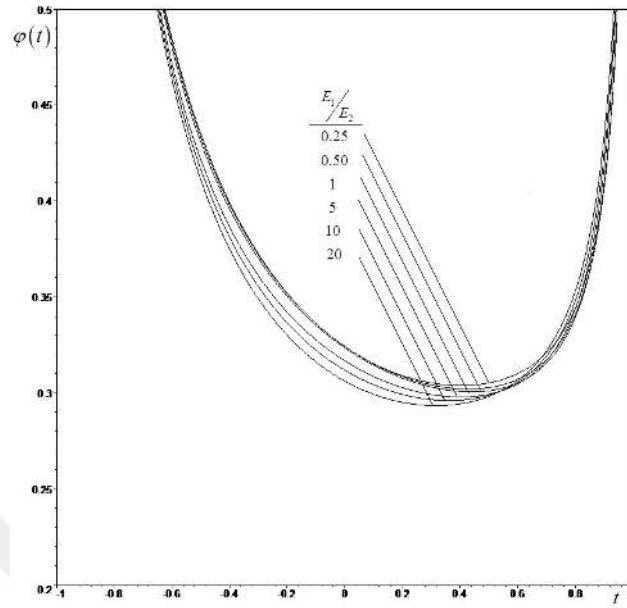
Şekil 4.1. - 4.6. da farklı kalınlık, sürtünme katsayıları ve E_1/E_2 nin farklı değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi verilmiştir.



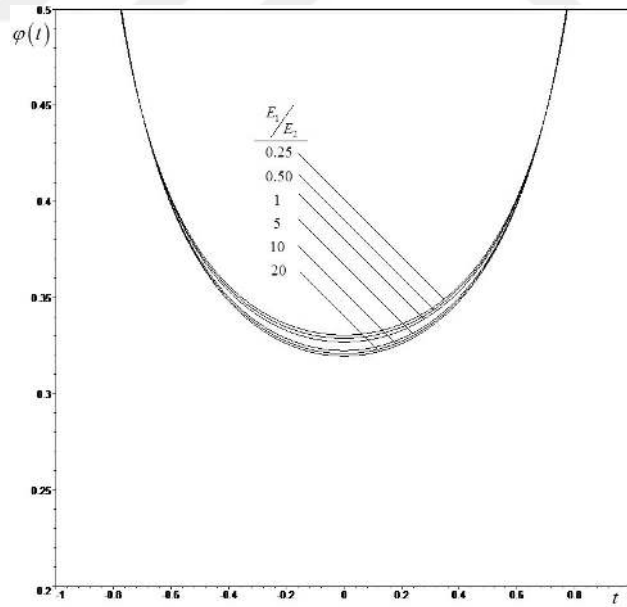
Şekil 4.1. $\lambda = 1$, $\varepsilon = 0$ ve farklı E_1/E_2 değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.



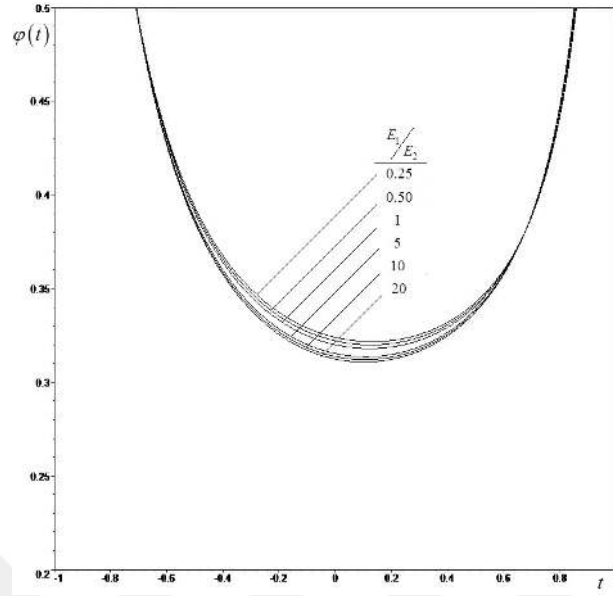
Şekil 4.2. $\lambda = 1$, $\varepsilon = 0.1$ ve farklı E_1/E_2 değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.



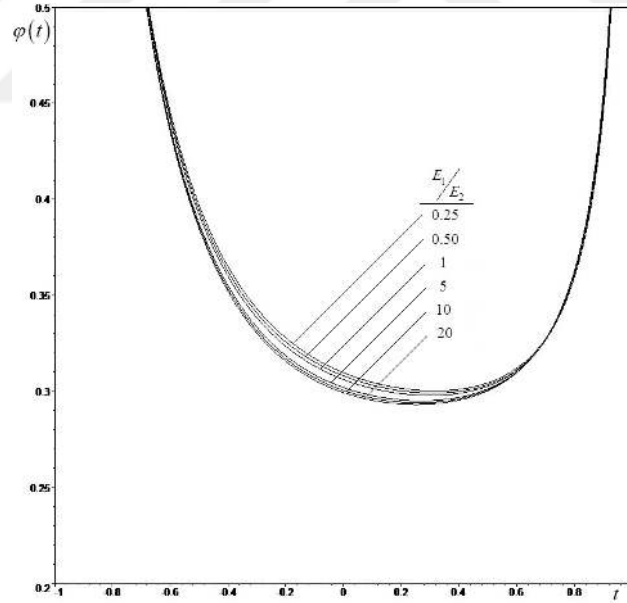
Şekil 4.3. $\lambda = 1$, $\varepsilon = 0.2$ ve farklı E_1/E_2 değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.



Şekil 4.4. $\lambda = 2$, $\varepsilon = 0$ ve farklı E_1/E_2 değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.

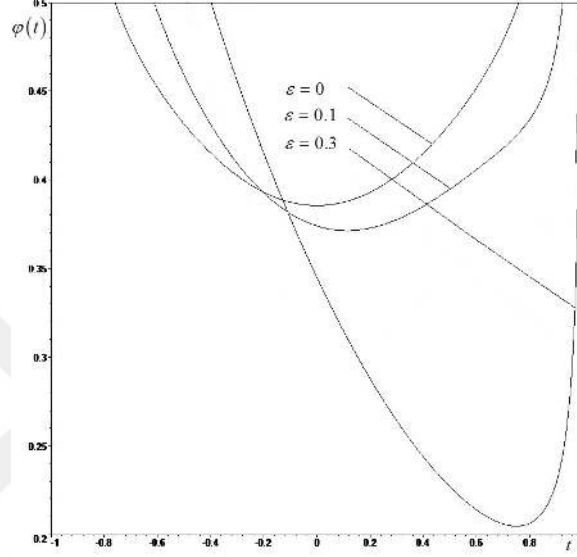


Şekil 4.5. $\lambda = 2$, $\varepsilon = 0.1$ ve farklı E_1/E_2 değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.

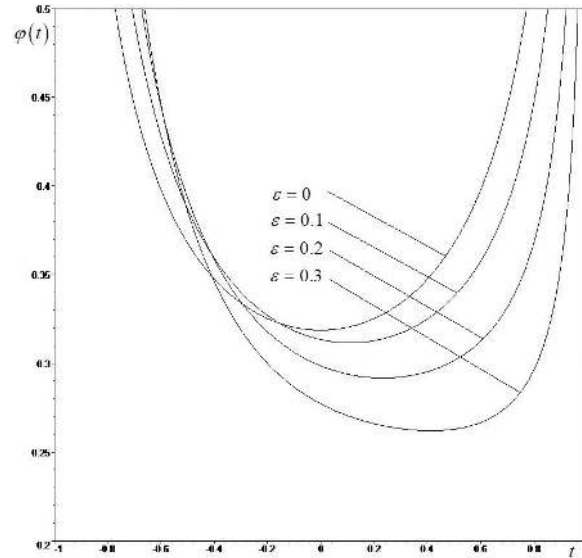


Şekil 4.6. $\lambda = 2$, $\varepsilon = 0.2$ ve farklı E_1/E_2 değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.

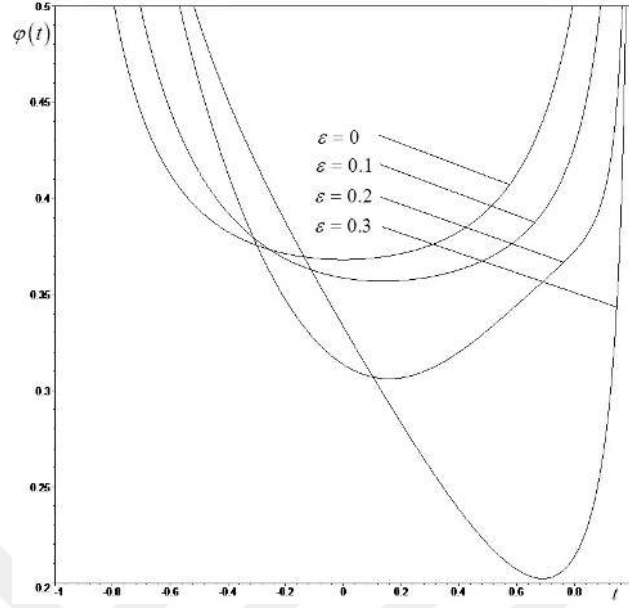
Şekil 4.7. – 4.10. da farklı E_1/E_2 , bağıl kalınlıklar ve farklı sürtünme katsayıları için basıncın temas bölgesi boyu değişimi verilmiştir.



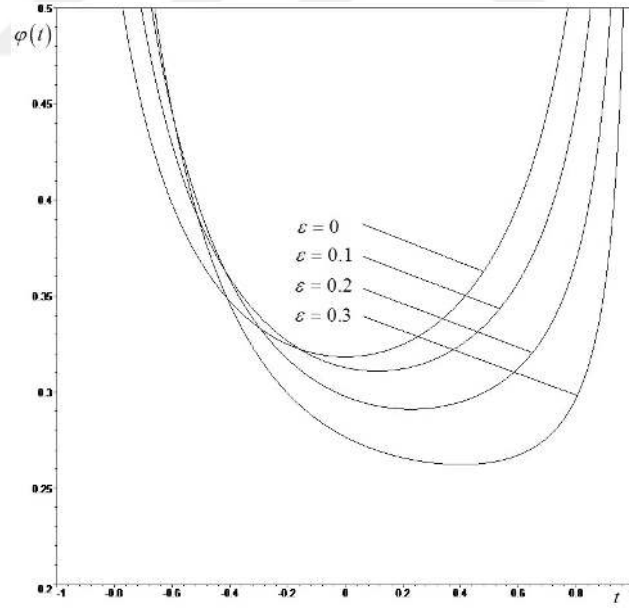
Şekil 4.7. $E_1/E_2 = 0.25$, $\lambda = 0.5$ ve farklı ε değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.



Şekil 4.8. $E_1/E_2 = 20$, $\lambda = 0.5$ ve farklı ε değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.

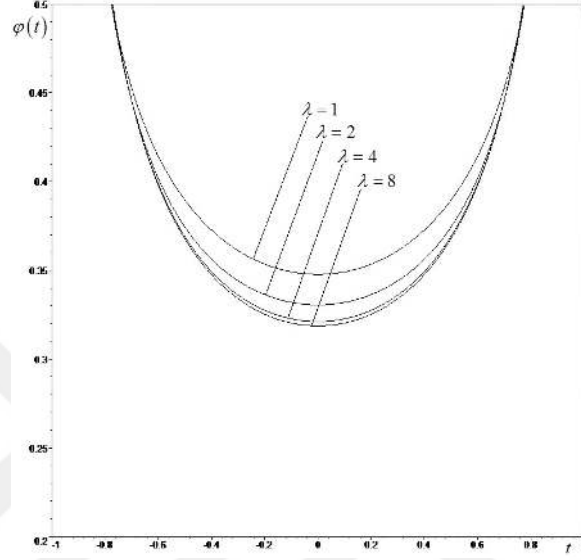


Şekil 4.9. $\frac{E_1}{E_2} = 0.25$, $\lambda = 8$ ve farklı ε değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.

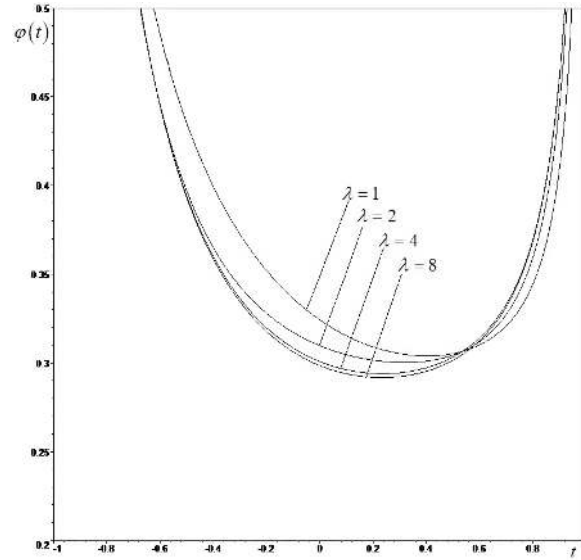


Şekil 4.10. $\frac{E_1}{E_2} = 20$, $\lambda = 0.5$ ve farklı ε değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.

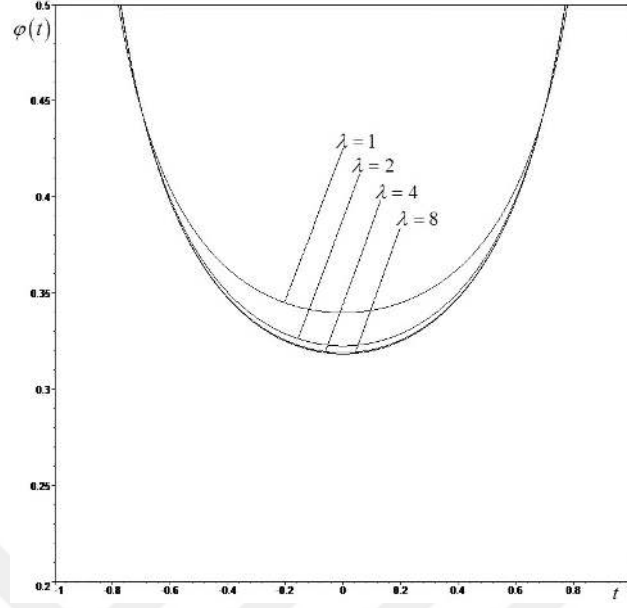
Şekil 4.11. – 4.16. da farklı E_1/E_2 , sürtünme katsayıları ve farklı bağıl kalınlıklar için basıncın temas bölgesi boyu değişimi verilmiştir.



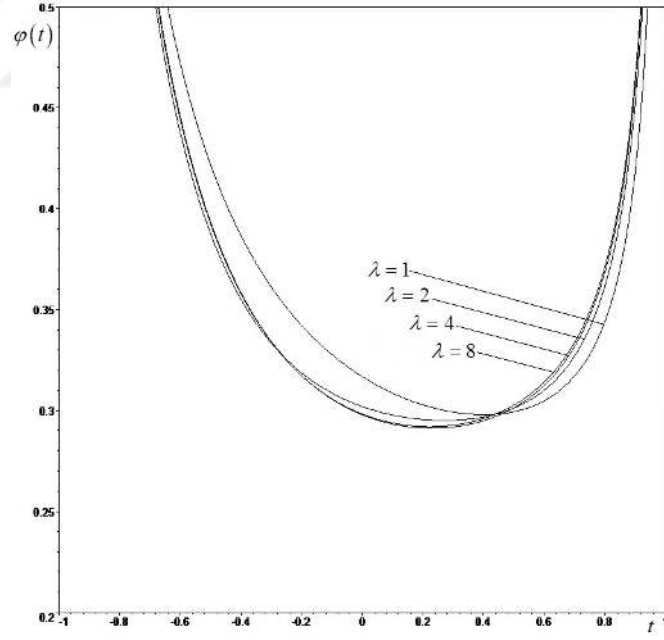
Şekil 4.11. $E_1/E_2 = 0.25$, $\varepsilon = 0$ ve farklı λ değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.



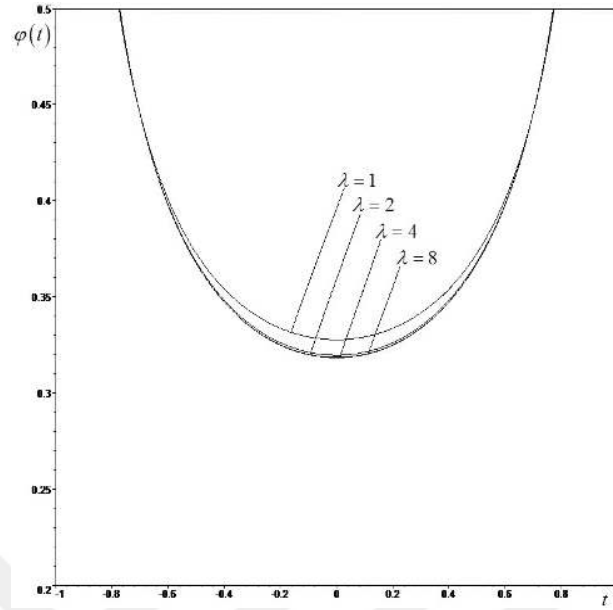
Şekil 4.12. $E_1/E_2 = 0.25$, $\varepsilon = 0.2$ ve farklı λ değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.



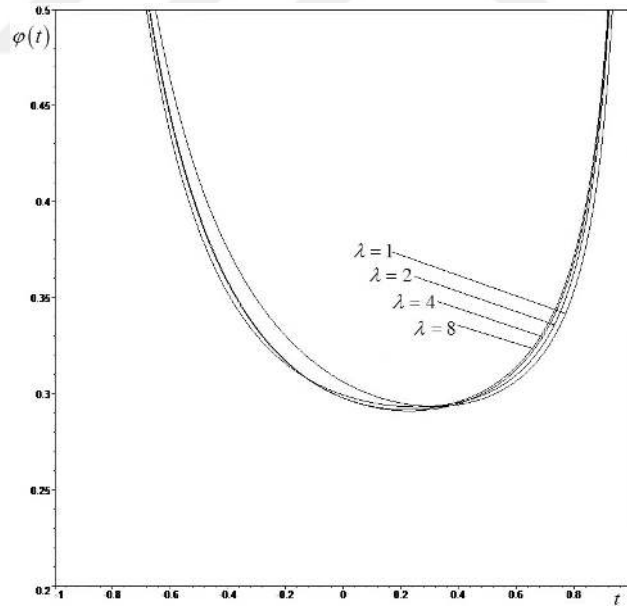
Şekil 4.13. $\frac{E_1}{E_2} = 5$, $\varepsilon = 0$ ve farklı λ değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.



Şekil 4.14. $\frac{E_1}{E_2} = 5$, $\varepsilon = 0.2$ ve farklı λ değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.



Şekil 4.15. $\frac{E_1}{E_2} = 20$, $\varepsilon = 0$ ve farklı λ değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.



Şekil 4.16. $\frac{E_1}{E_2} = 20$, $\varepsilon = 0.2$ ve farklı λ değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.

Çizelge 4.1 den görüldüğü üzere,

- 1- Aynı ortotrop malzemedan yapılmış şeritte ($\frac{E_1}{E_2} = \text{sabit durumu}$) sürtünmesiz temas durumunda ($\varepsilon = 0$) en küçük basınç değeri, pançın simetri eksenine karşılık gelen apsiste, yani $t_k = 0$ da gerçekleşir iken, basınç grafiği de simetrik bir eğri olmaktadır. Ayrıca aynı sürtünme katsayılı ($\varepsilon = \text{sabit}$) şeritler durumunda, şeridin kalınlığı arttıkça şeridin, pançın baskısına direnci artmaktadır.
- 2- Elastik şeritte ($\frac{E_1}{E_2} = \text{sabit}$) sürtünme katsayısı (ε) arttıkça en küçük panç basıncına karşılık gelen t_* apsisi simetri ekseninden sağa kayar iken, en küçük basınç değeri $\phi(t_*)$ de azalmaktadır. Bu arada temasın sol ucuna yakın noktadaki basınç değeri q_{11} artar iken, temasın sağ ucuna yakın basınç değerleri q_{12} azalmaktadır. Ayrıca aynı ε değerleri için şeridin kalınlığı arttıkça olarak en küçük basınç değeri de azalmaktadır.
- 3- Şeridi x eksen yönündeki ortotrop özellikleri arttıkça, yani $\frac{E_1}{E_2} > 1$ olmak üzere, $\frac{E_1}{E_2}$ değeri arttıkça, sürtünmeli temas durumunda en küçük basınca karşılık gelen t_* değeri orijine ($t_k = 0$) sağdan yaklaşır iken bu değerlere karşılık gelen en küçük basınç değerleri de azalmaktadır.

4.2. N=2 Durumu

N=2 durumu ele alındığında (213) ve (214) denklemleri

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^n \left[\frac{1}{z_m - t_k + \frac{s_j - s_i}{r}} + \pi M_{ij}(z_m, t_k) \right] a_{nm} g_{jnm} = 0 \quad (218)$$

$$\sum_{m=1}^n a_{nm} g_{jnm} = 1 \quad j = 1, 2 \quad (219)$$

şekline dönüşecektir. İncelenen durum için pançlar $[-3, -1] \cup [1, 3]$ aralığında olduğu varsayılmıştır. E_1/E_2 , λ ve ε nin farklı değerleri için pançların altında oluşan basınç dağılımında en küçük basınçlara karşılık gelen t_{1*} ve t_{2*} apsisleri ve en küçük basınç değerleri, ayrıca sırasıyla $t = -0.95$ ve $t = 0.95$ apsislerine karşılık gelen basınç değerleri q_{11} , q_{12} ve q_{21} , q_{22} değerleri çizelge 4.2 de verilmiştir.

Çizelge 4.2. İki Panç İçin Ortotropik Özellik, Bağlı Kalınlık ve Sürtünme Katsayılarına Bağlı Farklı Noktalardaki Basınç değerleri.

E_1/E_2	λ	ε	t_{1*} t_{2*}	$\varphi_1(t_*)$ $\varphi_2(t_*)$	q_{11} q_{12}	q_{21} q_{22}
0.25	1	0	-1,733968	0,273517	1,554785	0,832148
			1,773962	0,273517	0,832148	1,554785
		0.1	-1,820201	0,258770	1,893576	1,115467
			1,790128	0,271955	0,578257	1,205693
		0.2	-1,416172	0,222889	2,134976	1,354012
			1,792504	0,277015	0,460855	1,042480
0.25	2	0	-1,797185	0,260214	1,543961	0,750211
			1,797185	0,260214	0,750211	1,543961
		0.1	-1,695001	0,240895	1,823518	0,987892
			1,853099	0,281159	0,526377	1,213367
		0.2	-1,589009	0,204566	2,040397	1,202920
			1,970159	0,262312	0,362793	0,995022
0.25	4	0	-1,646090	0,277001	1,491133	0,634961
			1,646090	0,277001	0,634961	1,491133
		0.1	-1,462164	0,232469	1,773244	0,875070
			1,803773	0,303383	0,448188	1,227263
		0.2	-1,258671	0,159541	2,1512248	1,230667
			1,886943	0,304686	0,247503	0,888217
0.25	8	0	-1,614394	0,292686	1,406863	0,636025
			1,614394	0,292686	0,636025	1,406863
		0.1	-1,404388	0,257822	1,699421	0,868863
			1,682489	0,309995	0,449433	1,148279
		0.2	-1,274029	0,183519	2,031211	1,167953
			1,801320	0,324747	0,295932	0,915319

Çizelge 4.2. İki Panç İçin Ortotropik Özellik, Bağlı Kalınlık ve Sürtünme Katsayılarına Bağlı Farklı Noktalardaki Basınç değerleri (devamı).

E_1/E_2	λ	ε	t_{1*} t_{2*}	$\varphi_1(t_*)$ $\varphi_2(t_*)$	q_{11} q_{12}	q_{21} q_{22}
0.5	1	0	-1,795419	0,266918	1,558128	0,817597
			1,795419	0,266918	0,817597	1,558128
		0.1	-1,900368	0,250323	1,900592	1,101102
			1,812849	0,263353	0,561380	1,200161
		0.2	-1,458042	0,224946	2,128962	1,328340
			1,815260	0,269990	0,458867	1,061565
0.5	2	0	-1,764038	0,263937	1,531989	0,716197
			1,764038	0,263937	0,716197	1,531989
		0.1	-1,650361	0,241744	1,800286	0,942240
			1,827125	0,289253	0,500276	1,201636
		0.2	-1,538200	0,201440	1,998573	1,139181
			1,966935	0,268616	0,341196	0,996976
0.5	4	0	-1,616537	0,280868	1,473085	0,620524
			1,616537	0,280868	0,620524	1,473085
		0.1	-1,440418	0,233267	1,742695	0,849936
			1,783502	0,310130	0,445372	1,223106
		0.2	-1,248563	0,155051	2,127992	1,209997
			1,877690	0,312450	0,241994	0,877073
0.5	8	0	-1,631181	0,297548	1,377973	0,653337
			1,631181	0,297548	0,653337	1,377973
		0.1	-1,420795	0,267426	1,657393	0,875916
			1,677446	0,312379	0,475091	1,134760
		0.2	-1,287938	0,193348	1,984202	1,168979
			1,781951	0,328397	0,324646	0,914555

Çizelge 4.2. İki Panç İçin Ortotropik Özellik, Bağlı Kalınlık ve Sürtünme Katsayılarına Bağlı Farklı Noktalardaki Basınç değerleri (devamı).

E_1/E_2	λ	ε	t_{1*} t_{2*}	$\varphi_1(t_*)$ $\varphi_2(t_*)$	q_{11} q_{12}	q_{21} q_{22}
1	1	0	-1,818119	0,261090	1,556680	0,797078
			1,818119	0,261090	0,797078	1,556680
		0.1	1,907087	0,242588	1,903758	1,080881
			1,823269	0,256766	0,539479	1,189994
		0.2	-1,509647	0,224582	2,122941	1,300079
			1,826076	0,264138	0,449887	1,073329
1	2	0	-1,718332	0,269254	1,517511	0,680030
			1,718332	0,269254	0,680030	1,517511
		0.1	-1,590061	0,242795	1,777070	0,896079
			1,791436	0,299163	0,472411	1,187376
		0.2	-1,468249	0,196846	1,961513	1,078505
			1,9633991	0,277921	0,316247	0,993746
1	4	0	-1,603309	0,284973	1,450982	0,617960
			1,603309	0,284973	0,617960	1,450982
		0.1	-1,433975	0,236162	1,709568	0,838564
			1,776409	0,315600	0,452292	1,213520
		0.2	-1,246815	0,155265	2,100502	1,202710
			1,878307	0,318256	0,245256	0,862913
1	8	0	-1,651137	0,302276	1,348849	0,672245
			1,651137	0,302276	0,672245	1,348849
		0.1	-1,439677	0,276632	1,616936	0,886707
			1,677405	0,314907	0,500635	1,118822
		0.2	-1,300655	0,202797	1,939196	1,175118
			1,769948	0,331515	0,352508	0,909802

Çizelge 4.2. İki Panç İçin Ortotropik Özellik, Bağlı Kalınlık ve Sürtünme Katsayılarına Bağlı Farklı Noktalardaki Basınç değerleri (devamı).

E_1/E_2	λ	ε	t_{1*} t_{2*}	$\varphi_1(t_*)$ $\varphi_2(t_*)$	q_{11} q_{12}	q_{21} q_{22}
5	1	0	-1,763881	0,263627	1,532600	0,715281
			1,763881	0,263627	0,715281	1,532600
		0.1	-1,838776	0,240420	1,891340	0,995504
			1,800454	0,262188	0,461987	1,148454
		0.2	-1,452542	0,216822	2,101587	1,206780
			1,794710	0,268004	0,395370	1,072321
5	2	0	-1,611807	0,280697	1,474484	0,617197
			1,611807	0,280697	0,617197	1,474484
		0.1	-1,470369	0,244539	1,719768	0,815834
			1,701871	0,319818	0,426727	1,146651
		0.2	-1,345061	0,185100	1,885236	0,972971
			1,964892	0,300247	0,272804	0,971040
5	4	0	-1,631234	0,297628	1,377528	0,653479
			1,6331234	0,297628	0,653479	1,377528
		0.1	-1,459094	0,251317	1,614252	0,859800
			1,831597	0,325482	0,502223	1,165672
		0.2	-1,262997	0,172114	2,011515	1,232363
			1,940571	0,325972	0,281811	0,814731
5	8	0	-1,694650	0,311252	1,290252	0,711030
			1,694650	0,311252	0,711030	1,290252
		0.1	-1,481159	0,293728	1,538879	0,912870
			1,683418	0,320359	0,549943	1,082704
		0.2	-1,322368	0,220181	1,853046	1,194607
			2,201337	0,338638	0,405364	0,893074

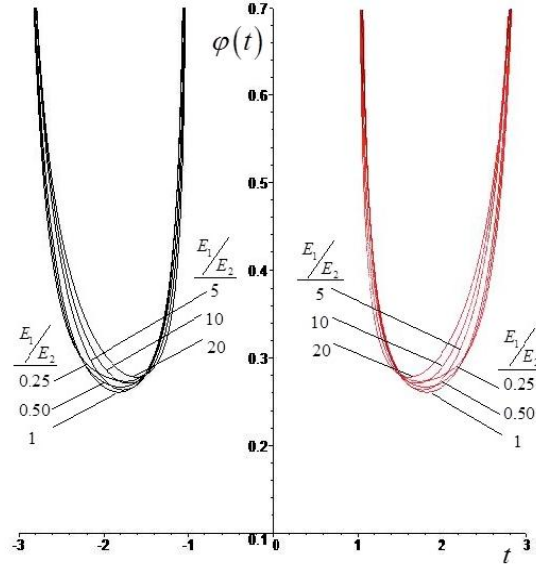
Çizelge 4.2. İki Panç İçin Ortotropik Özellik, Bağlı Kalınlık ve Sürtünme Katsayılarına Bağlı Farklı Noktalardaki Basınç değerleri (devamı).

E_1/E_2	λ	ε	t_{1*} t_{2*}	$\varphi_1(t_*)$ $\varphi_2(t_*)$	q_{11} q_{12}	q_{21} q_{22}
10	1	0	-1,695294	0,271127	1,513258	0,663500
			1,695294	0,271127	0,663500	1,513258
		0.1	-1,766075	0,245686	1,877313	0,939460
			1,771926	0,274039	0,415765	1,122653
		0.2	-1,368939	0,208317	2,088640	1,151709
			1,758219	0,278192	0,356363	1,059078
10	2	0	-1,597383	0,286178	1,444476	0,616003
			1,597383	0,286178	0,616003	1,444476
		0.1	1,457318	0,249068	1,683940	0,809633
			1,690324	0,326676	0,429289	1,120596
		0.2	-1,336629	0,187519	1,844245	0,957792
			1,974497	0,306589	0,275371	0,951499
10	4	0	-1,659281	0,304044	1,337678	0,679678
			1,659281	0,304044	0,679678	1,337678
		0.1	-1,478211	0,259974	1,566810	0,882252
			1,882214	0,328829	0,531814	1,135209
		0.2	-1,273876	0,183366	1,964869	1,258262
			2,005012	0,327459	0,304243	0,787841
10	8	0	-1,709087	0,314025	1,271204	0,723438
			1,709087	0,314025	0,723438	1,271204
		0.1	-1,495398	0,298887	1,514205	0,921900
			1,686167	0,322232	0,565231	1,070090
		0.2	-1,273876	0,227727	1,825982	1,202014
			2,005012	0,340052	0,421614	0,886043

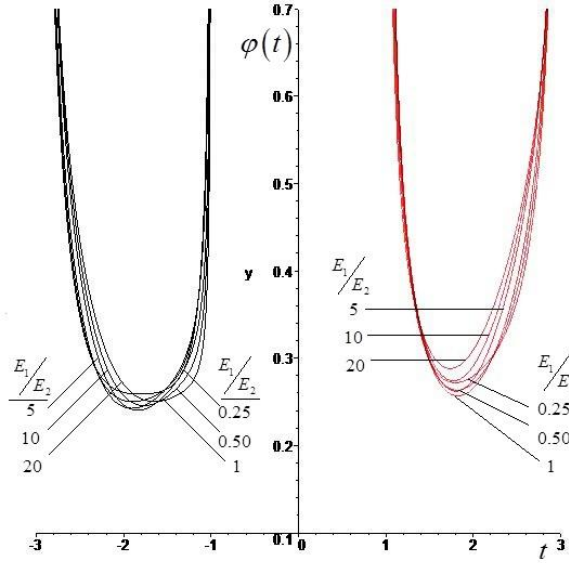
Çizelge 4.2. İki Panç İçin Ortotropik Özellik, Bağlı Kalınlık ve Sürtünme Katsayılarına Bağlı Farklı Noktalardaki Basınç değerleri (devamı).

E_1/E_2	λ	ε	t_{1*} t_{2*}	$\varphi_1(t_*)$ $\varphi_2(t_*)$	q_{11} q_{12}	q_{21} q_{22}
20	1	0	-1,606455	0,278290	1,488731	0,610173
			1,606455	0,278290	0,610173	1,488731
		0.1	-1,650272	0,250381	1,858012	0,880864
			1,736498	0,288125	0,369160	1,092604
		0.2	-1,303183	0,196318	2,073279	1,095780
			1,714264	0,290530	0,315200	1,037537
20	2	0	-1,618658	0,294829	1,394442	0,641741
			1,618658	0,294829	0,641741	1,394442
		0.1	-1,475327	0,259889	1,627083	0,832469
			1,719011	0,333784	0,454222	1,078908
		0.2	-1,359694	0,199902	1,783085	0,973144
			1,997708	0,310278	0,299965	0,916446
20	4	0	-1,690526	0,310402	1,295987	0,707378
			1,690526	0,310402	0,707378	1,295987
		0.1	-1,497827	0,268747	1,519190	0,907660
			1,938922	0,331524	0,561344	1,101265
		0.2	-1,284943	0,195062	1,917264	1,286663
			2,099167	0,327778	0,326891	0,759131
20	8	0	-1,720628	0,316194	1,255977	0,733227
			1,720628	0,316194	0,733227	1,255977
		0.1	-1,507137	0,302789	1,494968	0,929459
			1,689317	0,323819	0,576889	1,059347
		0.2	-1,332923	0,229447	1,804862	1,208443
			2,318373	0,338103	0,433848	0,879184

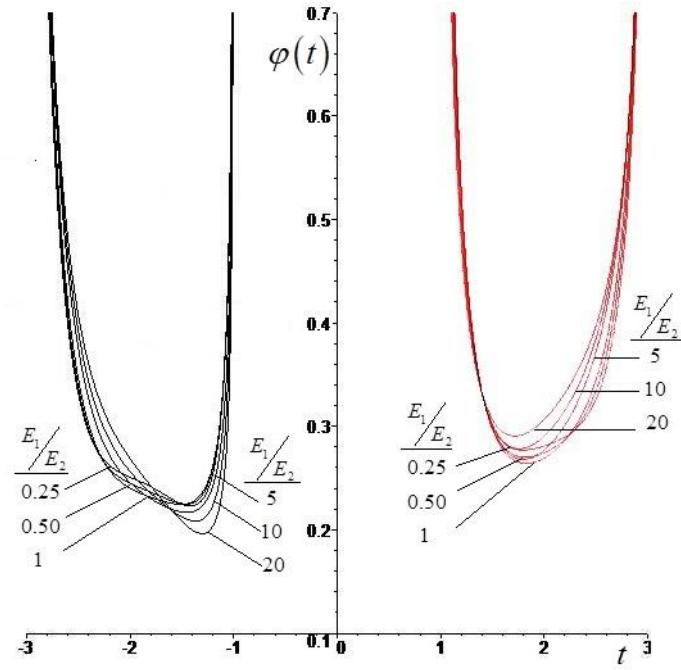
Şekil 4.17 – 4.22 de farklı kalınlık, sürtünme katsayıları ve E_1/E_2 nin farklı değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi verilmiştir.



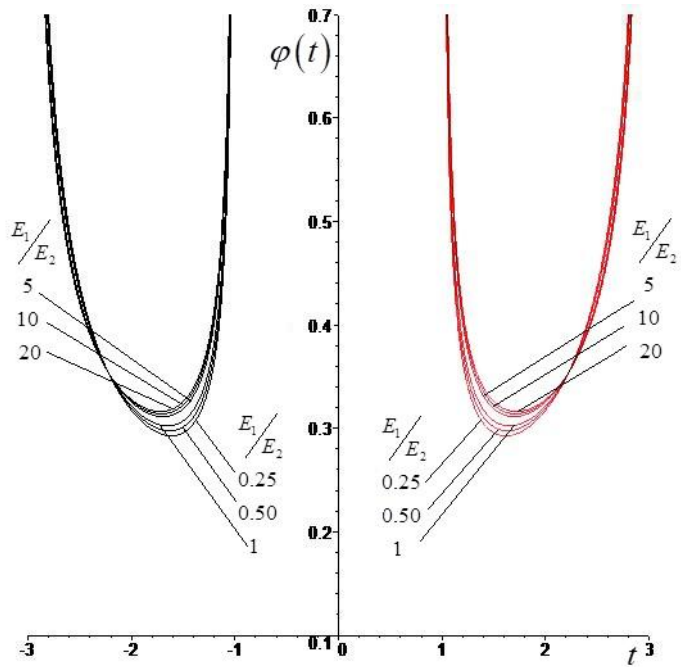
Şekil 4.17. $\lambda = 1$, $\varepsilon = 0$ ve E_1/E_2 nin farklı değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.



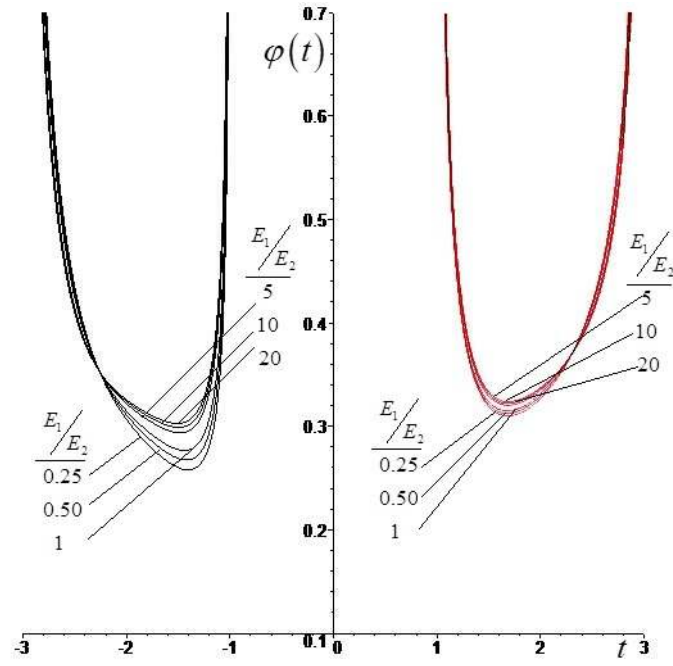
Şekil 4.18. $\lambda = 1$, $\varepsilon = 0.1$ ve E_1/E_2 nin farklı değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.



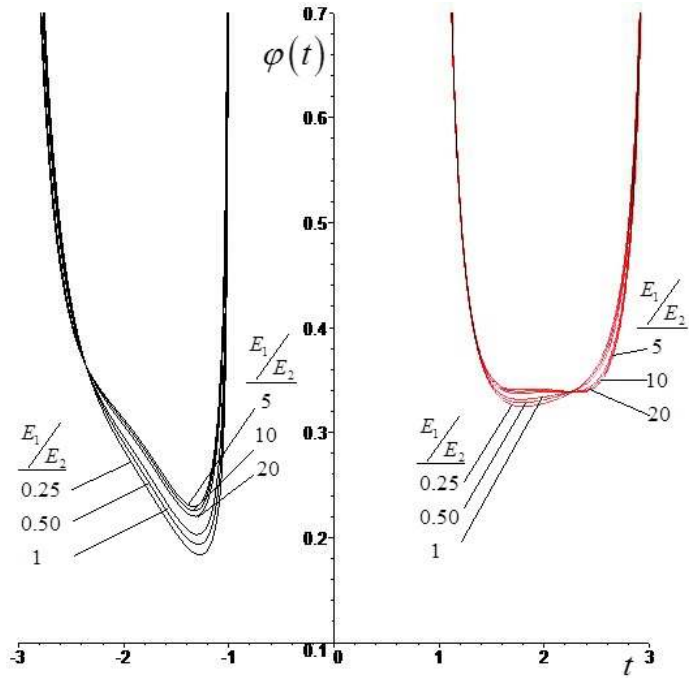
Şekil 4.19. $\lambda = 1$, $\varepsilon = 0.2$ ve E_1/E_2 nin farklı değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.



Şekil 4.20. $\lambda = 8$, $\varepsilon = 0$ ve E_1/E_2 nin farklı değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.

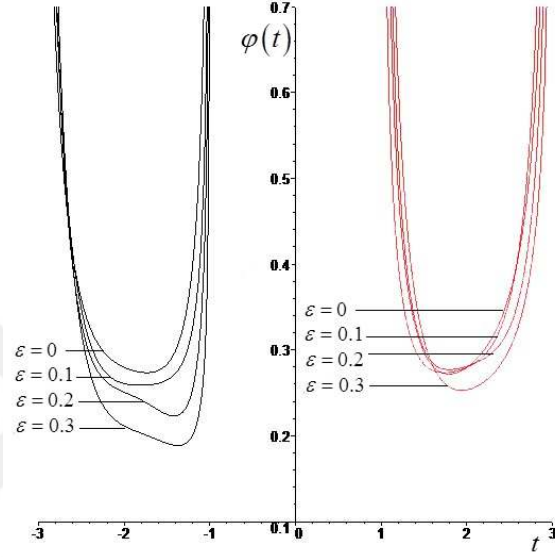


Şekil 4.21. $\lambda = 8$, $\varepsilon = 0.1$ ve E_1/E_2 nin farklı değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.

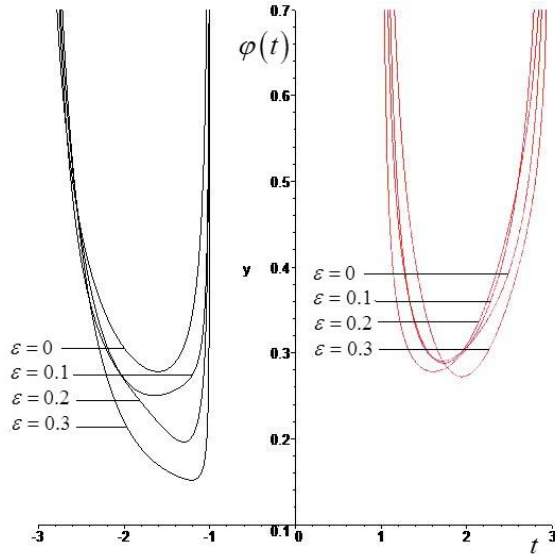


Şekil 4.22. $\lambda = 8$, $\varepsilon = 0.2$ ve E_1/E_2 nin farklı değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.

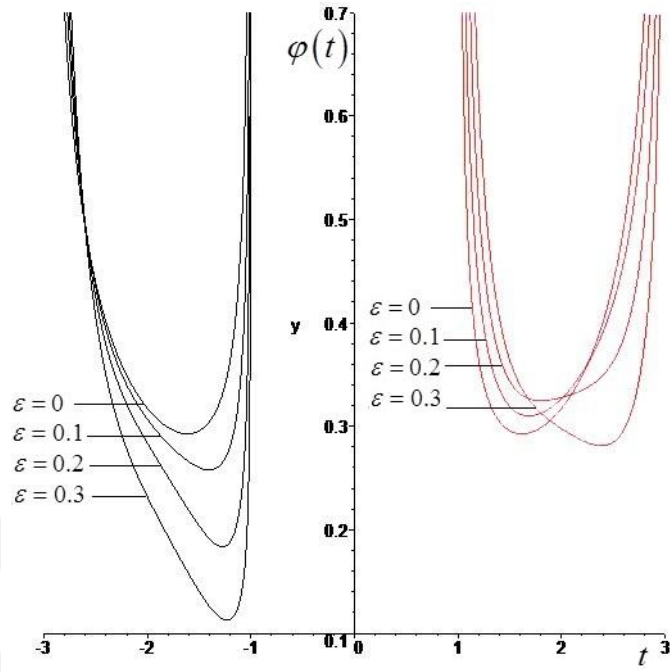
Şekil 4.23. – 4.24. de farklı E_1/E_2 , bağıl kalınlıklar ve sürtünme katsayısı değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi verilmiştir.



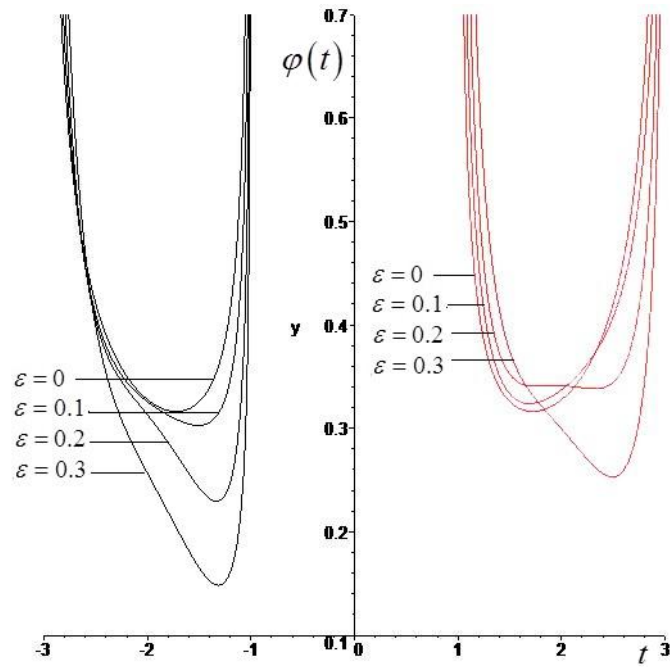
Şekil 4.23. $E_1/E_2 = 0.25$, $\lambda = 1$ ve farklı ε değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.



Şekil 4.24. $E_1/E_2 = 20$, $\lambda = 1$ ve farklı ε değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.

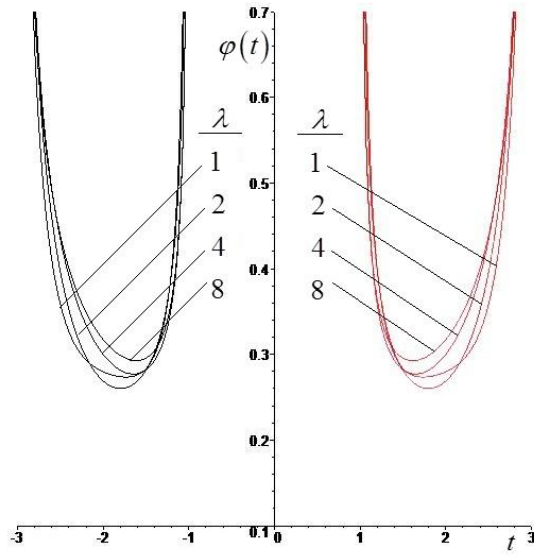


Şekil 4.25. $\frac{E_1}{E_2} = 0.25$, $\lambda = 8$ ve farklı ε değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.

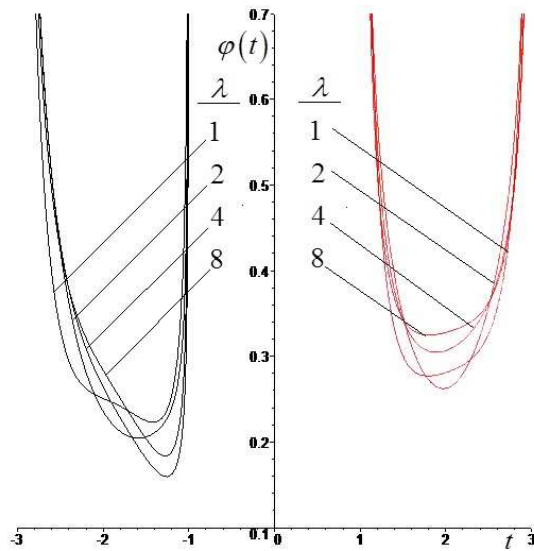


Şekil 4.26. $\frac{E_1}{E_2} = 20$, $\lambda = 8$ ve farklı ε değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.

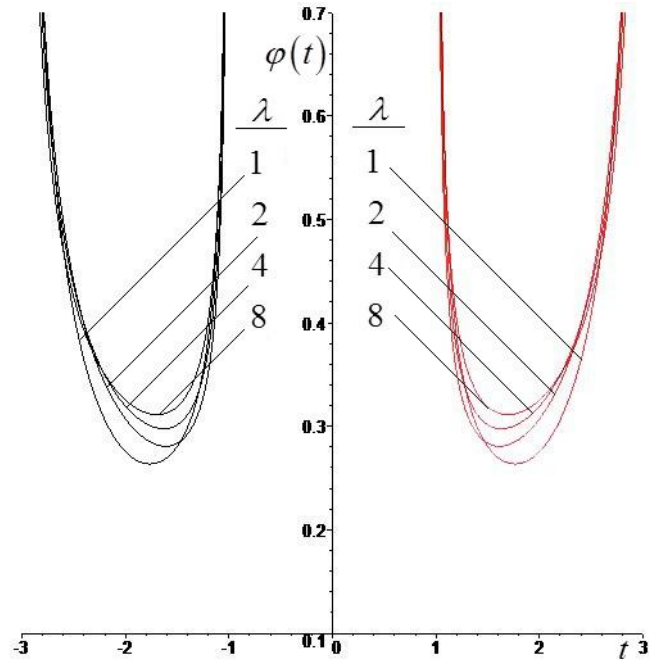
Şekil 4.27 - 4.32 de farklı $\frac{E_1}{E_2}$, sürtünme katsayıları ve farklı bağl kalınlık değeri için basıncın temas bölgesi boyu değışimi verilmiştir.



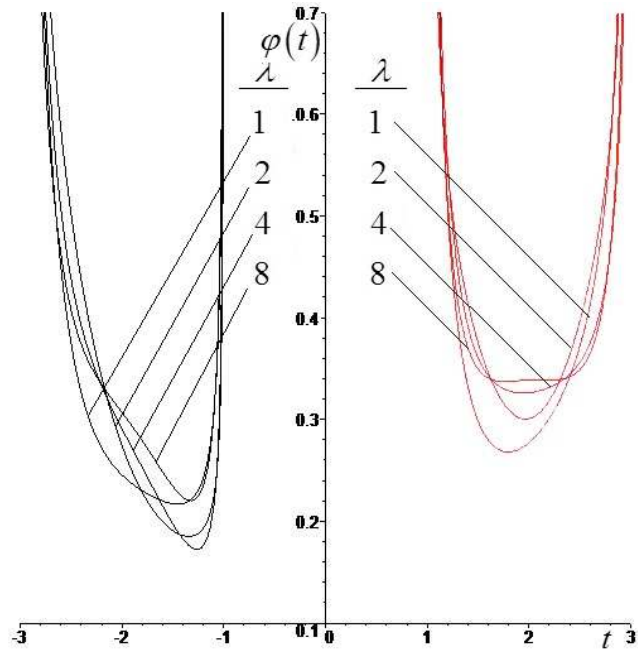
Şekil 4.27. $\frac{E_1}{E_2} = 0.25$, $\varepsilon = 0$ ve farklı λ değeri için basıncın temas bölgesi boyu değışimi.



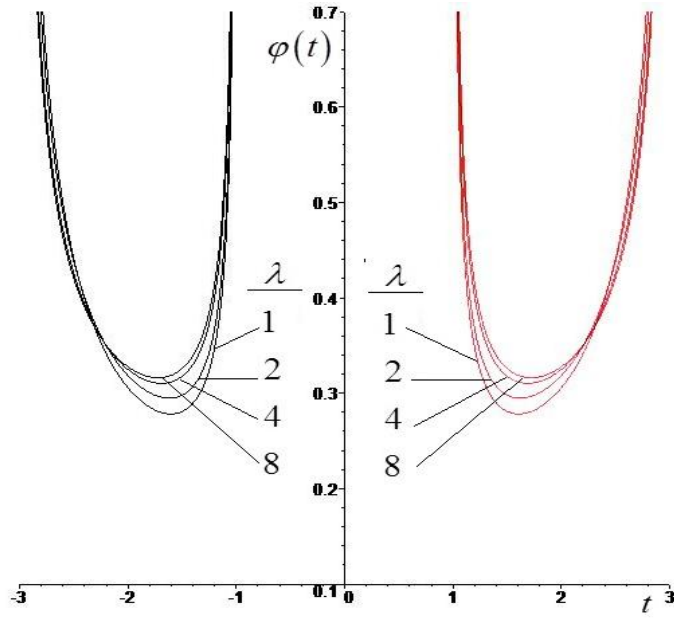
Şekil 4.28. $\frac{E_1}{E_2} = 0.25$, $\varepsilon = 0.2$ ve farklı λ değeri için basıncın temas bölgesi boyu değışimi.



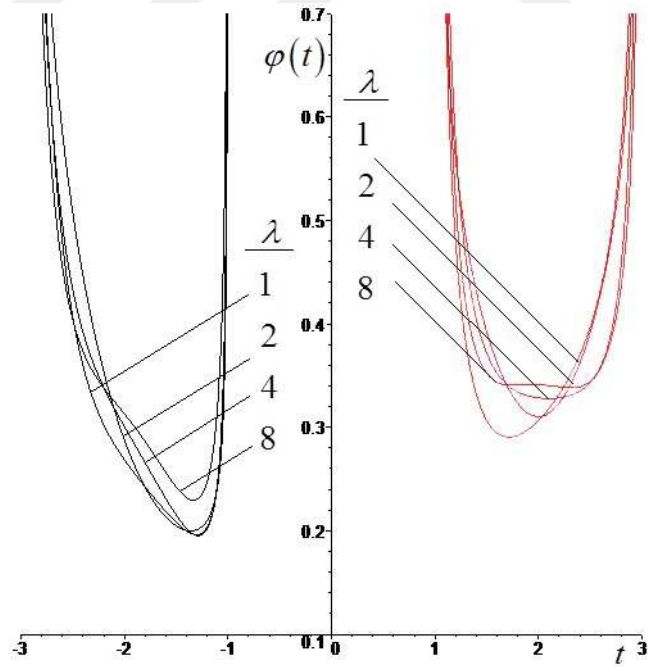
Şekil 4.29. $\frac{E_1}{E_2} = 5$, $\varepsilon = 0$ ve farklı λ değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.



Şekil 4.30. $\frac{E_1}{E_2} = 5$, $\varepsilon = 0.2$ ve farklı λ değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.



Şekil 4.31. $\frac{E_1}{E_2} = 20$, $\varepsilon = 0$ ve farklı λ değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.



Şekil 4.32. $\frac{E_1}{E_2} = 20$, $\varepsilon = 0.2$ ve farklı λ değerleri için basıncın temas bölgesi boyu değişimi.

Çizelge 4.2. ve grafiklerden de görüldüğü üzere

- 1- Sürtünmesiz temas durumunda temas bölgeleri boyu basınç dağılım eğrileri y eksenine göre birbirlerine simetrik eğrilerdir. Büyük bağıl kalınlıklı şeritler durumunda, bağıl kalınlık arttıkça $\lambda > 1$ en küçük basınç değeri de artmaktadır. Ayrıca aynı kalınlığa sahip şeritler için x eksenini yönündeki ortotrop özelliği arttıkça en küçük basınçlar da artmaktadır.
- 2- Sürtünmesi temastan sürtünmeli temasa geçtiğimizde en küçük basınçlara karşılık gelen t_* apsisleri, sürtünme katsayısı arttıkça soldaki pançın temas bölgesinde sağa doğru kayar iken sağdaki pançın temas bölgesinde sağa doğru kaymaktadır.
- 3- Sürtünmeli temas durumunda sağdaki panç altında kalan bölgedeki basınç miktarı, soldaki basınç altında kalan temas bölgesindeki basınç miktarından doğal olarak çok olmaktadır. Bu durum pançlara etki eden yatay kuvvetlerin yönleri esas alındığında kolayca anlaşılmaktadır.

Yukarıdaki incelemeler düz tabanlı ve eşit genişlikli pançlar için yapıldı. Yatay ve düşey kuvvetlerin aynı olduğu varsayıldı. Fakat önerilen algoritma, farklı genişlikli pançlar ve düz tabanlı olmayan pançlar için, yatay ve düşey kuvvetlere de bağlı olarak olası tüm temas problemleri için geçerli olmaktadır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Adams, G.G. ve Zeid, İ., (1984), An Elastic Punch Moving Across the Surface of a Semi Infinite Solid Journal of Aplied Mechanics 45, 89-94.
- Agarval, V. K., (1978), Axisymmetric Solution of the End-Problem for a Semi-Infinite Elastic Circular Cylinder and its Application Joined Dissimilar Cylinders under Uniform Tension International Journal of Engineering Science 16, 985-998.
- Aliev, N., Mohammad, S., (2000), Hindawi Publishing Corp., 26, 123-128.
- Altınpulluk, İ., (2012), Elastik Şerit İçin Sürtünmeli Temas Probleminin Bir Asimptotik Çözümü Yüksek Lisans Tezi, D.P.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Kütahya.
- Bakirtas, I., (1980), The Problem of a Rigid Puch on a Non- Homogeneous Elastic Half Space, International Journal of Engineering Science 18 597-610.
- Banerjea, S., Sarkar, C., (2006), On A Singular Integral Equation with Log Kernel and its Application, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2006,1-12.
- Beliaev, N. M., (1924), Engineering construction and structural mechanics, (Leningrad) 27-108.
- Bentall, R.H. ve Johnson, K.L., (1968), An Elastic Strip in Plane Rolling Contact, International Journal of Mechanical Science 10, 637-663.
- Birinci A. Ve Erdöl, R., (1999), Frictionless Contact Between a Rigid Stamp and an Elastic Layered Composite Resting on Simple Supports, Structual Engineering and Mechanics 12,1 17-34
- Bjarnehed, H.L., (1991), Rigid Punch on Stressed Orthotropic Half-Plane with Partial Slip, Journal of Aplied Mechanics, 58 128-133.
- Blaibel, A.F. ve Geçit, M.R., (1989), Bending of a Semi-Infinite Elastic Strip Bonded to an Infinite Strip, International Journal of Engineering Science,27,7,793-807.
- Bukhari, A.F K., (2005), On Dynamic Problem and Integral Equation, , Applied Mathematics and Computation, 160, 51-63.
- Chan S.K., Tuba, I.S., (1971), A Finite Element Method for Contact Problems of Solid Bodies- Part I. Theory and Validation, International Journal of Mechanical Science 13, 615-639.
- Chaudhary, A.B., Bathe K.J.İ (1986), A Solution Method for Static and Dynamic Analysis of Three Dimensional Contact Problems with Friction, Computers and Structures, 24,6, 855-873

KAYNAKLAR DİZİNİ(devam)

- Chen, W. H. Ve Engel, P.A., (1972), Impact and Contact Stress Analysis in Multilayered Media, International Journal of Solids and Structures 8, 1257-1281
- Choi, H.J., Thangjitham, S., (1991), Stres Analysis of Multilayered Anisotropic Elastic Media, ASME Journal of Applied Mechanics, 58,382-387
- Civelek, M.B., Erdoğan, F., (1974), The Axisymmetric Double Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer, International Journal of Solids and Structures . 10 639-659.
- Comninou, M., Schmueser, D., Dundurs, J., (1980), Frictional Slip between a Layer and a Substrate caused by a Normal Load, International Journal of Engineering Science, 18, 131-137
- Conway, H. D., (1971), The Effect of Friction on Normal Contact Stresses , ASME Journal of Applied Mechanics 38, 1094-1095
- Çakıroğlu. F.L. ve Erdöl, R., (1989), Elastik Zeminde Oturan Bileşik Şeritte Sürekli Temas Problemi, 6. Ulusal Mekanik Kongresi, Bursa, Bildiriler Kitabı, Cilt I, 243-248
- Çömez, İ., 2003. Rijit Bir Panç İle Bastırılmış ve Tabanda Tam Olarak Bağlı Ağırlıksız Çift Şerit Problemi , Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Dempsey, J.P., Zhao,Z.G., Li, H, (1991), Axisymmetric Indentation of an Elastic Layer Supported by a Winkler Foundation, Internation Journal of Solids and Stuctures 27,173-87
- Dhaliwal, R.S., (1970), Punch Problem for an Elastic Layer Overlying an Elastic Foundation, International Journal of Engineering Science 8, 273-288.
- Erdoğan, F., (1969), Approximate Solutions of Systems of Singular Integral Equations, Society for Industrial and Applied Mathematics, 17, 1041-1059.
- Erdoğan, F., Gupta, G.D., (1973), Contact and Crack Problems for an Elastic Wedge, International Journal of Applied Merhanics 60663-639
- Erdoğan, F., Ratwani, M., (1974), The Contact Problem for an Elastic Layer Supported by two Elastic Quarter planes, ASME Journal of Aplied Mechanics, 41, 673-677.
- Fabrikant, V.I. VE Sankar, T.S., (1984), On Contact Problems in an Inhomogeneous Half Space , International Journal of Solids and Struntures 20, 2, 159-166.
- Fabrikant, V.L, Sankar, T.S., (1986), Concentrated Force Underneath a Punch Bonded to a Transversely Isotropic Half-Space, International Journal of Engineering Science 24,1 111-117

KAYNAKLAR DİZİNİ(devam)

- Fan, H, Keer, L.M, (1994), Two-Dimensional Contact on an Anisotropic Elastic Half-Space
Journal of Applied Mechanics 61 250-255
- Fichera, G.,(1964), Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problem adi Signorini con ambigue condizioni al contorno (Elastostatic problems with unilateral constraints: the Signorini problem with ambigunous boundary conditions), Memorie della Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, 8 7 (2): 91-140.
- Galin , L. A., (1953), Contact Problems in the Theory of Elasticity, Moscow (In Russian)
- Galin L. A., (1976), Development of the Theory of Contact Problems in the USSR, Nauka, Moskow.
- Geçit M.R. ve Erdoğan, F., (1978), Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer Under Axisymmetric Loading, International Journal of Solids and Structures, 14,771-785.
- Geçit, M.R. ve Gökpinar, S., (1985), Frictionless Contact Between an Elastic Layer and a Rigid Rounded Support, The Arabian Journal Science and Engineering 10,3,245-251
- Geçit, M.R., (1986), The Axisymmetric Double Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer Indented by an Elastic Cylinder, International Journal of Engineering Science 24. 1571-1584
- Gerasoulis, A., (1982), TheUse of Piecewise Quadratic Polynomial for the Solution of Singular Integral Equations of Cauchy Type, Comput. Math. Appl, 1, 15-22.
- Giadwell, G.M.L., (1977), The Contact Problem for a Rigid Cylinder Pressed Between Two Elastic Layers, Journal of Applied Mechanics 36-40
- Green, C.D., (1969), Integral Equation Methods, Thomas Nelson & Sons Ltd. London.
- Hetenyi, M., (1946), Beams on Elastic Foundation University of Michigan Press, Micgihan
- Hetz.H., (1882), Uber die Berührung Fester Elastischer Körper (on she contact of elastie solids). J. Reine and angewandte mathematic, 92,156-171.
- Hsiao, G. C. Ve Deleware, N., (1977), A Finite Element Method for Some Integral Equations of the first kind, Journal of Mathematical Analysis Application, 58, 449-481.
- Hung, D.N.İ Saxce, G. D., (1980), Frictionless Contact of Elastic Bodies by Finite Element Method and Mathematical Programming Technique, Computers and Structures, 11, 55-67.

KAYNAKLAR DİZİNİ(devam)

- Iokimidis, N. I., (1982), On the Quadreture Methods for the Numerical Solution of Singular Integral equations, journal of Computational and Applied Mathematics. 8, 81-86.
- Iokimidis, N.I., Anastasselos, G.T., (1991) Solution of Plane Elasticity Problems with Mathamatica, Computers and Structures 55, 513-236
- İnan, M. , (1969), Düzleme Elastisite Teorisi, İ.T.Ü. Yayınları, İstanbul,
- Jaffar, M.J., (1993), Determination of Surface Deformation of a Bonded Elastic Layer Indented by a Rigid Cylinder Using the Chebyshev Series Method Wear. 170 291-294
- Kahya , V., Birinci A.ve Erdöl R., (2001), Frictionless Contact Problem Between an Elastic Layer Bonded to a Rigid Support and a Rigid Stamp, Mathematical&Compuational Applications, 6, 13-22
- Ke, L.L., Wang Y.S., (2006), Two-dimensional Contact Mechanics of Functionally Graded Materials with Arbitrary Spaital Variations of Material Properties, International Journal of Solids and Structures, 43 , 5779-5798
- Keer L.M., Dundurs, J. Ve Tsai, K.C., (1972), Problems Involving of a Receding Contact Between a Layer and a Half Space , ASME Journal of a Applied Mechanics, 39, 1115-1120.
- King, R.B., (1987), Elastic Analysis of Some Punch Problems for a Layered Medium, International Journal of solids and Structures 23, 12 1657-1664
- Klarbring, A., Björkman, G., (1988), A Mathematical Programming Approach to Contact Problems with Friction and Varying Contact Surface,_Computers and Structures,30.1185-1198.
- Komvopoulos, K., (1988), Finite Element Analysis of a Layered Elastic Solid in Normal Contact with a Rigid Surface, Journal of Tribology 110 477-485
- Laboda, V.V. ve Tauchert, T.R., (1985), The Elastic Contact Problem for Dissimilar Orthotropic Semi-Infinite and Infinite Strips, International Journal of Engineering Scienne, 23,12,1337-1349
- Ma, L.F. ve Korsunsky, A. M., (2004), Fundamental Formulation for Frictional Contant Problems of Coated System, International Journal of Solids and Structures, 41,11-12, 2837-2854

KAYNAKLAR DİZİNİ(devam)

Miller, G. R., Keer, L. M., (1985), A Numerical Technique for the Solution of Singular Integral Equations of the second kind, Quart.Appl math., 42, 455-465.

Muskhelishvili, N.I. (1958), Singular Integral Equations, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen

Muskhelishvili, N.I., (1953), Some Basic Problems of mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff, Groningen.

Noor, M.A., Tirmizi, S. I. A., (1991), Numerical Methods for a Class of Contact Problems, International Journal of Engineering Science 29, 4 513-521.

Nour-Ornid, B., Wriggers (1986), A Two-level Iteration Method for Solution of Contact Problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 54, 131-144.

Nowell, D., Hills, D.A., (1988), Contact Problems Incorporating Elastic Layers, International Journal of Solids and Structures 24, 1 105-115

Parlar, H.F., (2013), Ortotrop Malzemedden Yapılmış Elastik Katman ve Panç Sistemi Arasındaki Sürtünmesiz Temas Probleminin Sayısal Bir Çözümü , Yüksek Lisans Tezi, D.P.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Kütahya.

Pindere, M.J.İ Lane M.S.İ., (1993), Frictionless Contact of Layered Half-Planes, Part I : Analysis, Journal of Applied Mechanica 60 633-639.

Popov, G.Y., (1982), Contact Problems for a Linearly Deformable Base, Vishcha Shkola, Kiev-Odessa(Russian).

Pu, S.L., Hussain, M.A., (1970), Note on the Unbonded Contact Between Plates and an Elastic Half Space , ASME Journal of Applied Mechanics, 37, 859-861

Sabin , G.C.W ve Kaloni, P.N., (1989), Contact Problem of a Rigid Indenter with Rotational Friction Second Order Elasticity, International Journal of Engineering Science,27,3 203-217.

Shield, T.W., Bogy, D.B., (1988), Multiple Region Contact Solutions for a Flat Indenter on a Layered Elastic Half Space: Plane Strain Case, Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME,56,251-262.

Shtaerman, I. Y ., (1949), Contact Problems Of The Theory of Elasticity,Gostekhizdat, Moscow Leningrad.

KAYNAKLAR DİZİNİ(devam)

Signorini, Antonio (1959), “Questioni di elasticita non linearizzata e semilinearizzata(Issues in non linear and semilinear elasticity)”, Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni, 5 18: 95-139

Sneddon I.N., 151 . Fourier Transforms, McGraq-Hill, New York.

Spence D.A., (1975), The Hertz Contact Problem with Finite Friction, Journal of Elasticity,5, 297-319

Tricomi, F. G., (1985), Integral Equations, Dover Publications Inc, New York.

Uffliand, I.S, (1965), Survey of Articles on the Application of Integral Transforms in the Theory of Elasticity, North Carolina State College Translate Series, Raleigh, North Carolina.

Urquhart, E.E. Pindera, M.J., (1994), Incipient Separation Between a Frictionless Flat Punch and an Anisotropic Multilayered Half Plane, International Journal of Solids and Structures, 31,18 2448-2461.

Venturino, E., (1992), The Galekin Method for Singular Integral Equations revisited, J. Comput. Appl .Math., 40, 91-103.

Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A., (1974), Nonclassical Mixed Problems of the theory of Elasticity, Nauka,Moscow

Weitsman, Y., (1969), On The Unbonded Contact Between Plates and An Elastic Half Space, ASME Journal of Applied Mechanics, 36, 198-202.

Zhong, Z., Mackerle , J ., (1992), Static Contact Problems A Review, Engineering Computations, 9 , 3 37.

ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında Afyonkarahisar ilinde doğdu. 2003 yılında başladığı Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünden 2007 yılında mezun oldu. 2008 yılında askerlik görevini Tekirdağ ilinde yedek subay olarak tamamladı. 2008 yılında Dumlupınar Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalında lisansüstü eğitime başladı ve 2010 yılında lisansüstü eğitimini tamamladı. 2009 yılında Afyonkarahisar ili, İscehisar ilçesi, Cevizli Köyü İlköğretim Okulu'nda bir yıl görev yaptı. 2010 yılında Dumlupınar Üniversitesi Hisarcık Meslek Yüksekokulu'nda öğretim görevlisi olarak göreve başladı. Halen burada görev yapmaya devam etmektedir.