

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

**ELASTİK YARI SONSUZ DÜZLEME OTURAN VE RİJİT İKİ BLOK İLE
YÜKLÜ İKİ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ TABAKANIN SÜREKLİ
TEMAS PROBLEMİ**

YÜKSEK LİSANS

Furkan Atakan KAYA

ARALIK-2024

GÜMÜŞHANE



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

**ELASTİK YARI SONSUZ DÜZLEME OTURAN VE RİJİT İKİ BLOK İLE
YÜKLÜ İKİ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ TABAKANIN SÜREKLİ
TEMAS PROBLEMİ**

**CONTINUOUS CONTACT PROBLEM OF TWO FUNCTIONALLY GRADED
LAYERS RESTING ON AN ELASTIC HALF PLANE AND LOADED BY TWO
RIGID BLOCKS**

YÜKSEK LİSANS

Furkan Atakan KAYA

**ARALIK-2024
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

**ELASTİK YARI SONSUZ DÜZLEME OTURAN VE RİJİT İKİ BLOK İLE
YÜKLÜ İKİ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ TABAKANIN SÜREKLİ
TEMAS PROBLEMİ**

**CONTINUOUS CONTACT PROBLEM OF TWO FUNCTIONALLY GRADED
LAYERS RESTING ON AN ELASTIC HALF PLANE AND LOADED BY TWO
RIGID BLOCKS**

YÜKSEK LİSANS

Furkan Atakan KAYA

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Yusuf KAYA

**ARALIK-2024
GÜMÜŞHANE**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Elastik Yarı Sonsuz Düzleme Oturan ve Rijit İki Blok İle Yüklü İki Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakanın Sürekli Temas Problemi**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğum intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

19/12/2024

.....
Furkan Atakan KAYA

TEŞEKKÜR

Bu çalışma, Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Ana bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak hazırlanmıştır. “Elastik Yarı Sonsuz Düzleme Oturan ve Rijit İki Blok İle Yüklü İki Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakanın Sürekli Temas Problemi” isimli tez çalışmasını bana öneren ve yüksek lisans sürem boyunca yaptığım çalışmaları özenle takip eden, bilgi birikimi, deneyimi ve hoşgörüsünü esirgemeyen, bana her konuda yol gösteren, öğrencisi olmaktan ve kendisi ile çalışmaktan onur duyduğum kıymetli tez danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Yusuf KAYA’ya teşekkürlerimi sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca bana emeği geçen tüm hocalarımı saygıyla anar, kendilerine minnettar olduğumu belirtmek isterim. Çalışmamın tüm aşamasında bilgi ve birikimlerinden faydalandığım değerli hocalarım Sn. Doç. Dr. Onur ARAZ, Dr. Öğr. Üyesi Pınar BORA ve Sn. Doç. Dr. Alper POLAT’a teşekkür ederim.

Çalışmam esnasında her ihtiyacım olduğunda benden yardımını esirgemeyen, hayatımda olduğu için kendimi şanslı hissettiğim Hatice KARAMAN’a yakın arkadaşlarım olan Ahmet DABAĞ, Sırrı Samet ÇAKIR ve Hüseyin Çağatay YALÇIN’a ayrıca Fatih KAYA, Muhammed Taha POLAT’a ve Gümüşhane Belediyesi İmar ve Şehircilik Müdürlüğü çalışanlarına teşekkür ederim.

Tüm hayatım boyunca olduğu gibi bana yüksek lisans tezi çalışmam esnasında da maddi ve manevi destek olan annem Hatice KAYA, babam Hikmet KAYA’ya, kardeşlerim Nisanur KAYA ve Muhammed Taha KAYA’ya tüm kalbimle teşekkür ederim.

Furkan Atakan KAYA
GÜMÜŞHANE – 2024

ÖZET

Bu çalışmada, elastik yarı sonsuz düzlem üzerinde yer alan ve iki düz rijit blok ile yüklenen iki fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) tabakanın sürekli temas probleminin çözümü, elastisite teorisi temel alınarak gerçekleştirilmiştir. Üst FD tabakanın üst yüzeyi, genişlikleri $(b-a)$ ve $(d-c)$ olan iki rijit düz blok tarafından P ve Q dış yüklerine maruz bırakılmıştır. Alt FD tabaka ise elastik yarı sonsuz düzleme dayanmakta olup, bu yapı üzerinden analiz yapılmıştır. Çalışmanın ilk bölümünde, temas problemlerine dair literatür taraması gerçekleştirilmiş ve elastisite teorisi ile integral dönüşüm yöntemleri kullanılarak FD tabakalara ve elastik yarı sonsuz düzleme ilişkin genel matematiksel ifadeler türetilmiştir. İkinci bölümde ise sürekli temas durumu ele alınmış, problem için gerekli sınır koşulları detaylandırılmıştır. Ardından, rijit bloklar ile üst FD tabaka arasındaki düşey yer değiştirme fonksiyonunun türevlerinin sıfıra eşit olduğu durumu sağlayan iki integral denklem oluşturulmuştur. Bu denklemler, uygun bir şekilde Gauss-Chebyshev integrasyon yöntemiyle çözüme kavuşturulmuştur. Sürekli temas durumunda, rijit blokların altındaki temas gerilmeleri, tabakalarda oluşan iç gerilmeler, alt yüzeyde meydana gelen ilk ayrılma yükü ve ayrılma mesafeleri ayrıntılı bir şekilde değerlendirilmiştir. Son bölümde, ANSYS Mechanical APDL yazılımı kullanılarak, sonlu elemanlar yöntemi (SEM) ile sayısal analizler gerçekleştirilmiştir. Analitik çözümler, SEM sonuçları ve literatürdeki ilgili çalışmalar karşılaştırılmış; bulgular tablo ve grafiklerle sunulularak detaylı biçimde yorumlanmıştır. Çalışmanın sonunda, analitik ve sayısal çözümlerin yanı sıra literatürdeki sonuçlarla yüksek bir uyum gösterdiği gözlemlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Elastik yarı sonsuz düzlem, Elastisite teorisi, Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabaka, Sonlu elemanlar yöntemi, Sürekli temas

SUMMARY

In this study, the solution of the continuous contact problem of two functionally graded (FG) layers resting on an elastic half plane and loaded by means of two flat rigid blocks is solved using the theory of elasticity. The upper FG layer is loaded with two rigid flat blocks with widths $(b-a)$ and $(d-c)$ on its upper surface and external loads P and Q . The lower FG layer is resting on an elastic half plane. In the first section, studies in the literature related to contact problems were investigated, and with the help of elasticity theory and integral transformation techniques, general equations of FG layers and elastic half plane were obtained. In the second section, the continuous contact case is considered and the boundary conditions related to the problem are determined. Then, two integral equations are obtained by using the condition that the derivative of the vertical displacement function between the rigid blocks and the upper FG layer is equal to zero. These equations are solved by appropriate Gauss-Chebyshev integration methods. In addition, for the continuous contact case, the contact stresses formed under the blocks, the stresses formed in the layers, the initial separation load that will cause separation on the lower surfaces of the layers and the separation distances are investigated. In the last section, numerical solutions were made with the finite element method (FEM) for the problem by means of ANSYS Mechanical APDL package program. In the last part of the study, the analytical solutions obtained were compared with the SEM solution and similar studies in the literature, the results were presented with graphs and tables, and the findings were discussed in detail. It was seen that the analytical and SEM solutions and the findings in the literature were quite compatible with each other.

Keywords: Elastic half plane, Elasticity theory, Functionally graded layer, Finite element method, Continuous contact.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
TABLolar DİZİNİ	X
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	XII
EKLER DİZİNİ.....	XIV
KISALTMALAR VE SEMBOLLER DİZİNİ.....	XV
1.GENEL BİLGİLER	1
1.1.Giriş.....	1
1.1.1.Literatür Taraması.....	3
1.1.2.Çalışmanın Amacı ve Kapsamı.....	11
1.2.Genel Denklemlerin Elde Edilmesi.....	13
1.2.1.Kütle Kuvvetlerinin Bulunmaması Durumunda Genel Denklemlerin Elde Edilmesi	13
1.2.1.1.Birinci Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakaya ait Genel Denklemlerin Elde Edilmesi	13
1.2.1.2.İkinci Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabaka İçin Genel Denklemlerin Elde Edilmesi	20
1.2.1.3.Elastik Yarı Sonsuz Düzlem İçin Genel Denklemlerin Elde Edilmesi.....	27
1.3.Kütle Kuvvetlerinin Bulunması Durumunda Özel Çözümlerin Elde Edilmesi	34
1.3.1.Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabaka İçin Özel Çözümlerin Elde Edilmesi	34
1.3.2.İkinci Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabaka İçin Özel Çözümlerin Elde Edilmesi	39
2.YAPILAN ÇALIŞMALAR	44
2.1.Problemin Tanımı	44
2.2.Sürekli Temas Durumu	45
2.2.1.Problemin Sınır Şartları	45
2.2.2.Katsayıların Belirlenmesi.....	46
2.2.3.İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi.....	47

2.2.4.İntegral Denklemlerinin Sayısal Çözümü	49
2.2.5.Tabaka Alt Yüzeylerinde Meydana Gelen İlk Ayrılma Yükleri ve İlk Ayrılma Uzaklıklarının Belirlenmesi.....	52
2.3.Sonlu Elemanlar Yöntemi	55
2.3.1.Sonlu Elemanlar Yönteminin Tarihsel Gelişim Süreci.....	58
3.BULGULAR VE İRDELEME	63
3.1.Sürekli Temas Problemi.....	63
3.1.1.Rijit Bloklar Altındaki Temas Gerilmelerinin İrdelenmesi	63
3.1.2.Normal ve Kayma Gerilmelerinin İrdelenmesi.....	67
3.1.2.1. σ_y Normal Gerilmesinin İrdelenmesi	68
3.1.2.1.1.Tabaka Ara Yüzeylerindeki İlk Ayrılma Yükleri ve Uzaklıklarının Belirlenmesi.....	68
3.2.Sonlu Elemanlar Yöntemini Esas Alan ANSYS Programından Elde Edilen Çözümlerle Analitik Çözümlerin Karşılaştırılması.....	80
4.SONUÇLAR VE ÖNERİLER	90
KAYNAKLAR	93
EKLER.....	97
ÖZGEÇMİŞ	103

TABLolar DİZİNİ

Tablo 1. Üst tabakanın rijitlik parametresine göre tabaka ara yüzeylerindeki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri	69
Tablo 2. Üst tabakanın rijitlik parametresine göre alt tabakanın altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri	70
Tablo 3. Alt tabakanın rijitlik parametresine göre tabaka ara yüzeylerindeki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri	71
Tablo 4. Alt tabakanın rijitlik parametresine göre alt tabakanın altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri	71
Tablo 5. Çeşitli $\beta_1 h_1$ değerleri için tabakalar arasındaki gerilmelerin literatürle kıyaslanması	72
Tablo 6. Çeşitli $\beta_1 h_1$ değerleri için alt FD tabakanın altındaki gerilmelerin literatürle kıyaslanması	72
Tablo 7. Farklı blok mesafelerine göre tabaka ara yüzeylerindeki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri.....	73
Tablo 8. Farklı blok mesafelerine göre alt tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri.....	73
Tablo 9. Çeşitli bloklar arası mesafe değerleri için tabaka ara yüzeylerindeki gerilmelerin literatürle kıyaslanması	74
Tablo 10. Çeşitli bloklar arası mesafe değerleri için alt FD tabakanın altındaki gerilmelerin literatürle kıyaslanması	74
Tablo 11. Farklı blok genişliklerine göre tabaka ara yüzeylerindeki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri	74
Tablo 12. Farklı blok genişliklerine göre alt tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri.....	75
Tablo 13. Farklı yük oranlarına göre tabaka ara yüzeylerindeki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri.....	75
Tablo 14. Farklı yük oranlarına göre alt tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri.....	76
Tablo 15. Farklı kayma modülü oranlarına göre tabaka ara yüzeylerindeki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri	76
Tablo 16. Farklı kayma modülü oranlarına göre alt tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri	77

Tablo 17. Üst tabakanın yoğunluk parametresine göre tabaka ara yüzeylerindeki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri	78
Tablo 18. Üst tabakanın yoğunluk parametresine göre alt tabakanın altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri	79
Tablo 19. Alt tabakanın yoğunluk parametresine göre alt tabakanın altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri	79
Tablo 20. Farklı rijitlik parametrelerine ait üst tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafelerinin SEM kıyası.....	81
Tablo 21. Farklı rijitlik parametrelerine ait alt tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafelerinin SEM kıyası.....	82
Tablo 22. Üst tabakanın farklı yoğunluk parametrelerine ait üst tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafelerinin SEM kıyası	83
Tablo 23. Üst tabakanın farklı yoğunluk parametrelerine ait alt tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafelerinin SEM kıyası	84
Tablo 24. Alt tabakanın farklı yoğunluk parametrelerine ait üst tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafelerinin SEM kıyası	85
Tablo 25. Alt tabakanın farklı yoğunluk parametrelerine ait alt tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafelerinin SEM kıyası	85
Tablo 26. Alt tabakanın farklı rijitlik parametrelerine ait üst tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafelerinin SEM kıyası	86
Tablo 27. Alt tabakanın farklı rijitlik parametrelerine ait alt tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafelerinin SEM kıyası	87
Tablo 28. Farklı yük oranlarına ait üst tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafelerinin SEM kıyası	88
Tablo 29. Farklı yük oranlarına ait alt tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafelerinin SEM kıyası.....	89

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Problemin geometrisi	44
Şekil 2. Sonlu eleman yönteminde eleman tipleri.....	57
Şekil 3. Daire çevresinin sonlu elemanlar yöntemiyle belirleme yaklaşımı	58
Şekil 4. Probleme ait sonlu elemanlar modeli.....	61
Şekil 5. Ağlara bölme (Mesh) işlemi	61
Şekil 6. Problemin algoritması.....	62
Şekil 7. Yük oranına göre blok altındaki gerilmeler	64
Şekil 8. Blok genişliğine göre blok altındaki gerilmeler.....	65
Şekil 9. Birinci tabakanın rijitlik parametresi değişimine göre blok altındaki gerilmeler	65
Şekil 10. İkinci tabakanın rijitlik parametresi değişimine göre blok altındaki gerilmeler	66
Şekil 11. Bloklar arası mesafenin değişimine göre blok altındaki gerilmeler	66
Şekil 12. Tabakalar arası kayma modülü değişimine göre blok altındaki gerilmeler.....	67
Şekil 13. Elastik yarı sonsuz düzlem ile alt FD tabaka arayüzüne göre kayma modülü değişimine göre blok altındaki gerilmeler	67
Şekil 14. Üst FD tabakanın rijitlik parametresine göre tabaka ara yüzeyindeki σ_y gerilmesi	69
Şekil 15. Üst FD tabakanın rijitlik parametresine göre alt FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem ara yüzeyindeki σ_y gerilmesi	70
Şekil 16. Alt FD tabakanın rijitlik parametresine göre tabaka ara yüzeyindeki σ_y gerilmesi	70
Şekil 17. Alt FD tabakanın rijitlik parametresine göre alt FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem ara yüzeyindeki σ_y gerilmesi	71
Şekil 18. Gerilmelerin literatürle kıyaslanması.....	72
Şekil 19. Farklı blok mesafelerine göre ilk tabaka altındaki σ_y gerilmesi	73
Şekil 20. Farklı blok mesafelerine göre ikinci tabaka altındaki σ_y gerilmesi	73
Şekil 21. Farklı blok genişliklerine ait ilk tabaka altındaki σ_y gerilmeleri	74
Şekil 22. Farklı blok genişliklerine ait ikinci tabaka altındaki σ_y gerilmeleri	75
Şekil 23. Farklı yüklerle yüklenmiş bloklara ait ikinci tabaka altındaki σ_y gerilmeleri .	75
Şekil 24. Farklı yüklerle yüklenmiş bloklara ait ikinci tabaka altındaki σ_y gerilmeleri .	76
Şekil 25. Farklı kayma modülü oranlarına ait ilk tabaka altındaki gerilmeler.....	76

Şekil 26. Farklı kayma modülü oranlarına ait alt tabaka altındaki gerilmeler	77
Şekil 27. Farklı kayma modülü oranlarına ait ilk tabaka altındaki gerilmeler	77
Şekil 28. Farklı kayma modülü oranlarına ait alt tabaka altındaki gerilmeler	78
Şekil 29. Üst tabakanın yoğunluk parametresine göre tabaka ara yüzeylerindeki σ_y gerilmesi	78
Şekil 30. Üst tabakanın yoğunluk parametresine göre alt tabakanın altındaki σ_y gerilmesi	79
Şekil 31. Alt tabakanın yoğunluk parametresine göre alt tabakanın altındaki σ_y gerilmesi	79
Şekil 32. Rijitlik parametresine ait bloklar altındaki gerilme değişiminin sonlu elemanlar yöntemi ile kıyası	81
Şekil 33. Rijitlik parametresine ait birinci tabaka gerilme değişiminin sonlu elemanlar yöntemi ile kıyası	81
Şekil 34. Rijitlik parametresine ait ikinci tabaka gerilme değişiminin sonlu elemanlar yöntemi ile kıyası	82
Şekil 35. Üst tabakanın farklı yoğunluk parametrelerine ait üst tabaka altındaki gerilme değişiminin sonlu elemanlar yöntemi ile kıyası	83
Şekil 36. Üst tabakanın farklı yoğunluk parametrelerine ait alt tabaka altındaki gerilme değişiminin sonlu elemanlar yöntemi ile kıyası	84
Şekil 37. Alt tabakanın farklı yoğunluk parametrelerine ait üst tabaka altındaki gerilme değişiminin sonlu elemanlar yöntemi ile kıyası	85
Şekil 38. Alt tabakanın farklı rijitlik parametrelerine ait üst tabaka gerilme değişiminin sonlu elemanlar yöntemi ile kıyası	86
Şekil 39. Alt tabakanın farklı rijitlik parametrelerine ait tabaka altındaki gerilme değişiminin sonlu elemanlar yöntemi ile kıyası	87
Şekil 40. Farklı yük oranlarına ait üst tabaka altındaki gerilme değişiminin sonlu elemanlar yöntemi ile kıyası	88
Şekil 41. Farklı yük oranlarına ait alt tabaka gerilme değişiminin sonlu elemanlar yöntemi ile kıyası	89
Şekil 42. Sonlu elemanlar yöntemi analizinin analiz sonucu gerilme dağılışı	89

EKLER DİZİNİ

Ek 1. Tezde Kullanılan Katsayılar	97
---	----



KISALTMALAR VE SEMBOLLER DİZİNİ

a	: Birinci bloğun başlangıç noktasının y eksenine olan uzaklığı
b	: Birinci bloğun bitiş noktasının y eksenine olan uzaklığı
c	: İkinci bloğun başlangıç noktasının y eksenine olan uzaklığı
d	: İkinci bloğun bitiş noktasının y eksenine uzaklığı
E	: Elastisite modülü (MPa)
FDM	: Fonksiyel derecelendirilmiş malzeme
g	: Yerçekimi ivmesi
h	: Tabakaların toplam yüksekliği
h_1	: Üst FD tabakanın yüksekliği
h_2	: Alt FD tabakanın yüksekliği
P	: Birinci bloğa uygulanan tekil kuvvet
$p(x)$	: Birinci blok altındaki temas gerilmesi fonksiyonu
Q	: İkinci bloğa uygulanan tekil kuvvet
$q(x)$	: İkinci blok altındaki temas gerilmesi fonksiyonu
u	: x doğrultusundaki yer değiştirme bileşeni
v	: y doğrultusundaki yer değiştirme bileşeni
x, y	: Kartezyen koordinatlar
X, Y, Z	: Kütle kuvveti bileşenleri
x_{cr1}	: Üst FD tabaka ile alt FD tabaka ara yüzeyindeki ilk ayrılma uzaklığı
x_{cr2}	: Alt FD tabaka ile alt homojen yarım düzlem ara yüzeyindeki ilk ayrılma uzaklığı
∂	: Türev operatörü
∇^2	: Laplace operatörü
β_1	: Üst FD tabaka için rijitlik parametresi
β_2	: Alt FD tabaka için rijitlik parametresi
γ_1	: Üst FD tabaka için yoğunluk parametresi
γ_2	: Alt FD tabaka için yoğunluk parametresi
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	: x, y, z doğrultularındaki uzama şekil değiştirme bileşenleri
κ_1	: Üst FD tabakaya ait Kolosov sabiti
κ_2	: Alt FD tabakaya ait Kolosov sabiti
κ_3	: Elastik yarı sonsuz düzleme ait Kolosov sabiti
λ_{cr1}	: Üst FD tabaka ile alt FD tabaka ara yüzeyindeki kritik yük faktörü

λ_{cr2}	: Alt FD tabaka ile elastik yarım düzlem ara yüzeyindeki kritik yük faktörü
μ_0	: Üst FD tabakanın üst yüzeyine ait kayma modülü
$\mu_1(y)$	: Üst FD tabakaya ait kayma modülü fonksiyonu
μ_2	: Alt FD tabakanın üst yüzeyine ait kayma modülü
$\mu_3(y)$	: Alt FD tabakaya ait kayma modülü fonksiyonu
μ_4	: Elastik yarı sonsuz düzleme ait kayma modülü
ρ_0	: Üst FD tabakanın üst yüzeyinin yoğunluğu
$\rho_1(y)$	: Üst FD tabakanın yoğunluk fonksiyonu
ρ_2	: Alt FD tabakanın üst yüzeyinin yoğunluğu
$\rho_1(y)$	: Alt FD tabakanın yoğunluk fonksiyonu
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	: x, y, z doğrultularındaki normal gerilme bileşenleri
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	: Kayma gerilmesi bileşenleri
ν	: Poisson oranı
ϕ, ψ	: Ters Fourier dönüşüm fonksiyonları
$\omega(x)$	: Homojen tabaka ile rijit düzlem ara yüzeyindeki ayrılmanın eğimini veren fonksiyon

Not : Bu listede yer almayan bazı semboller, metin içerisinde uygun olan yerlerde tanımlanmıştır.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM), malzeme bilimindeki en önemli yeniliklerden biri olarak, mühendislik uygulamalarında geniş bir potansiyel sunmaktadır. Bu malzemeler, geleneksel homojen malzemelere kıyasla, farklı bölgelerde farklı malzeme özellikleri sağlayarak, yapıların performansını optimize eder. FDM'lerin temel prensibi, doğadaki tabakalı yapıları taklit ederek, malzeme özelliklerini kademeli bir şekilde değiştirerek daha verimli ve fonksiyonel yapıların elde edilmesidir. Bu fikir, yüzyıllardır doğada gözlemlenen, örneğin ağaç dokusundaki sert ve yumuşak bölgelerin bir arada bulunması gibi tabakalı yapıları model alır. Ancak, modern mühendislikte FDM'lerin sistematik olarak kullanılması, 20. yüzyılın sonlarına doğru malzeme bilimi ve üretim teknolojilerindeki devrimsel gelişmelerle mümkün olmuştur.

İlk olarak, 20. yüzyılın son çeyreğinde, özellikle havacılık ve uzay endüstrilerindeki malzeme gereksinimleri, FDM'lerin gelişimine büyük bir ivme kazandırmıştır. Yüksek ısı ve mekanik performans gereksinimlerini karşılamak için, FDM'ler, her bölgede farklı özellikler gösteren malzemelerin birleştirilmesi ile tasarlanmış yapıların oluşturulmasına olanak sağlamıştır. Bu malzemelerin, uçak kanatları, roket motorları ve uzay aracı bileşenlerinde kullanılması, hem dayanıklılığı artırmış hem de ağırlık verimliliği sağlamıştır. FDM'lerin gelişmesinde, aynı zamanda bilgisayar destekli tasarım (CAD) ve üretim (CAM) teknolojilerinin de büyük katkısı olmuştur. Bu gelişmeler, malzeme mikro yapılarının daha hassas bir şekilde tasarlanabilmesine ve üretilbilmesine olanak tanımıştır.

Havacılık ve uzay endüstrisinin dışında, otomotiv ve biyomedikal alanlar da FDM'lerin en önemli kullanım alanlarından biri olmuştur. Otomotiv endüstrisinde, fren diskleri, motor parçaları ve şasi gibi bileşenlerde, malzeme özelliklerinin kademeli olarak değiştirilmesi, sürtünme, aşınma ve termal özelliklerin optimize edilmesini sağlamıştır. Biyomedikal alanda ise, FDM'ler, kişiye özel implantlar ve protezlerin üretiminde kullanılmaktadır. Bu tür uygulamalarda, malzeme özelliklerinin farklı bölgelerde farklı olması, biyolojik doku ile uyumu artırır ve implantın ömrünü uzatır.

Temas mekaniği, mühendislik disiplinlerinde yüzeyler arasındaki etkileşimleri, sürtünmeyi, gerilme dağılımını ve deformasyonları inceleyen bir alandır. Bu alanın kökenleri, 19. yüzyılın sonlarına kadar gider. Temas mekaniği, ilk kez 1823'te Henri-Marie Dupin tarafından, iki sert yüzey arasındaki temas problemleri üzerine yapılan çalışmalarla tanımlanmaya başlanmıştır. Ancak, gerçek anlamda mühendislik uygulamalarına ilk ciddi katkılar, 20. yüzyılda K.L. Johnson'ın "Contact Mechanics" (1985) adlı eseriyle başlamıştır. Johnson, temas mekaniksel sorunları matematiksel olarak modelleyerek, bu alanı mühendislik bilimlerinin ayrılmaz bir parçası haline getirmiştir. Özellikle, malzeme bilimi, otomotiv mühendisliği, havacılık ve inşaat mühendisliği gibi birçok alanda, temas mekaniği analizlerinin önemi giderek artmıştır.

Son yıllarda, yapay zeka ve makine öğrenmesi gibi ileri teknolojilerin gelişmesiyle, FDM'lerin tasarım ve üretimi daha özelleştirilebilir hale gelmiştir. Bu teknolojiler sayesinde, malzeme mikro yapıları daha hızlı ve hassas bir şekilde optimize edilebilir. Temas mekaniği bu süreçte önemli bir rol oynar; çünkü karmaşık geometrilere sahip yapıların güvenilirliğini, dayanıklılığını ve ömrünü tahmin etmek için gereklidir. Yapay zeka algoritmaları, FDM'lerin temas mekanikleri analizlerini daha doğru ve verimli hale getirerek, malzeme tasarımını iyileştirir.

FDM'lerin inşaat mühendisliği alanındaki potansiyeli de giderek artmaktadır. İnşaat mühendisliğinde, yapılar üzerinde uygulanan yükler ve bu yüklerin dağılımı, güvenlik ve dayanıklılık açısından büyük önem taşır. FDM'ler, inşaat sektöründe, özellikle yüksek performanslı betonlar, prefabrik yapılar, köprüler ve bina bileşenleri gibi uygulamalarda kullanılmaktadır. Bu malzemeler, inşaat yapılarına daha düşük ağırlık, yüksek dayanıklılık ve daha iyi ısı yalıtımı gibi avantajlar sunabilir. Temas mekaniği, bu alanda, yapı elemanlarının birbirleriyle olan etkileşimlerini, gerilme dağılımlarını ve aşınmayı inceleyerek, inşaat mühendislerinin daha güvenli ve verimli tasarımlar yapmalarına yardımcı olur. Ayrıca, yapısal elemanların birbirleriyle temas ettiği bölgelerde oluşan streslerin doğru bir şekilde modellenmesi, inşaat mühendislerinin olası yapısal hasarları önceden tahmin etmelerini sağlar.

Sonuç olarak, FDM'ler mühendislik dünyasında geniş bir uygulama yelpazesi sunar ve bu malzemelerin gelişimi, özellikle bilgisayar destekli tasarım ve yapay zeka teknolojileriyle daha da hızlanmaktadır. Temas mekaniği analizleri, bu malzemelerin performansını daha iyi anlamak ve optimize etmek için kritik bir araçtır. FDM'lerin havacılıktan otomotive, biyomedikal alandan inşaat mühendisliğine kadar birçok sektörde sunduğu avantajlar, mühendislik tasarımlarını geleceğe taşımaktadır. Bu zamana kadar yapılmış olan literatür taraması, farklı yükler altındaki homojen

tabakaların temas problemlerinin, ayrılmalı, sürekli ve süreksiz temas durumları dahil olmak üzere kapsamlı bir şekilde incelendiğini göstermektedir. Ancak, elastik yarı sonsuz düzlem üzerindeki iki farklı yükün uygulandığı, fonksiyonel derecelendirilmiş bir tabakanın analitik ve sayısal yöntemlerle incelendiği bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu çalışmanın sonuçlarının, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin davranışının anlaşılması ve mühendislik uygulamalarındaki kullanımı açısından önemli bir ölçüde katma değer sağlayacağı düşünülmektedir.

1.1.1. Literatür Taraması

Elastik cisimlerin temas mekaniği alanındaki ilk önemli çalışmalardan biri, 1882 tarihinde Hertz tarafından yapılmıştır. Hertz, "Elastik Tabakaların Teması" isimli seminal çalışmasında, birbirleri ile temas halinde olan iki elastik cisim arasındaki etkileşimi matematiksel bir modelle ifade etmiştir. Çalışmasında, temas yüzeyinin eliptik bir şekil aldığını varsayarak, temas gerilmeleri ve deformasyonlar için analitik çözümler sunmuştur.

Weitsman, 1969 yılında yaptığı çalışmada, elastik bir levhanın esnek bir zemine oturtulması durumunda, levha ile zemin arasındaki temas yüzeyinin ne kadar geniş olacağını hesaplamak için bir model geliştirmiştir.

Temas mekaniği alanındaki önemli çalışmalardan biri olan Chen ve Engel'in 1972 tarihli makalesi, rijit bir blok ile elastik bir yarı sonsuz düzlem arasındaki etkileşimi ele almaktadır. Çalışmada, farklı geometrilere sahip bloklar için analitik çözümler sunularak, temas bölgesindeki gerilme ve deformasyonlar incelenmiştir.

Spence, 1979 yılında, elastik bir yarı sonsuz düzlem üzerindeki dönel simetrik bir yükün neden olduğu sürtünmeli temas problemine analitik bir çözüm sunmuştur. Çalışmada, Coulomb sürtünme yasası temel alınarak, problem karmaşık bir sınır değer problemi olarak formüle edilmiştir.

Loboda ve Tauchert, 1985 yılındaki çalışmalarında, ortotropik bir sonsuz tabakaya dayandırılmış ve uçlarından simetrik olarak yüklenmiş yarı sonsuz bir ortotropik tabakanın gerilme durumunu analiz etmişlerdir. Problemi çözmek için Fourier dönüşümleri kullanarak tekil integral denklem formuna indirgeme yapmışlar ve farklı yükleme koşulları ile malzeme parametreleri için temas gerilmelerini sayısal olarak elde etmişlerdir.

Geçit, 1986 yılında gerçekleştirdiği çalışmasında, elastik bir yarı sonsuz düzleme etki eden eksenel simetrik elastik yarı sonsuz dairesel bir silindirin temas problemini incelemiştir. Bu çalışmada, temas yüzeyi boyunca sürtünmenin ihmal edildiği ve çekme

gerilmelerinin aktarılmadığı varsayılmıştır. Araştırmanın sonucunda, çeşitli malzeme özelliklerine ve çeşitli geometrik parametreler için temas gerilmeleri ve temas mesafeleri sayısal yöntemlerle hesaplanmıştır.

Adıbelli vd.2009 yılında gerçekleştirdiği çalışmada elastik bir yarı uzay üzerindeki çift tabakalı bir sistemin sürtünmesiz temas problemini sonlu elemanlar yöntemi ile çözmüşlerdir. Çalışmada, malzeme parametreleri, yükleme koşulları ve geometrik boyutların temas yüzeyi ve temas gerilmeleri üzerindeki etkileri incelenmiş ve elde edilen sonuçlar grafikler halinde sunulmuştur.

Bussetta vd. 2012 yılında gerçekleştirdikleri çalışmada sonlu elemanlar yöntemi ile çözülen temas problemlerinde sıklıkla kullanılan dört farklı temas algoritması üzerinde karşılaştırmalı bir çalışma gerçekleştirmişlerdir.

Yaylacı 2013 yılında gerçekleştirdiği bu çalışmada iki elastik çeyrek düzlem üzerindeki iki tabakalı bir sistemin ayrılmalı temas problemini, elastisite teorisinin temel denklemleri ve integral dönüşümleri yardımıyla analitik olarak çözmüştür. 2014 yılında ise Elde edilen analitik çözüm, ANSYS sonlu elemanlar paketi ile yapılan sayısal analizler ile doğrulanmıştır.

Abhilash ve Murthy, 2014 yılında gerçekleştirdikleri çalışmada, farklı özelliklere sahip bir malzemeden yapılmış bir tabakanın üzerine konulan bir nesnenin (blok) bu tabaka ile olan etkileşimini bilgisayar simülasyonları ile incelemişlerdir. Bu çalışmada, öncelikle nesnenin çok sert olduğu varsayılmış, daha sonra ise nesnenin de deforme olabileceği durumu ele alınmıştır.

Adıyaman vd. 2015 yılında gerçekleştirdikleri çalışmada, homojen ve izotropik elastik bir tabakanın, iki elastik çeyrek düzlem üzerine yerleştirildiği ve üst yüzeyine bir rijit blok ile tekil bir yükün yanı sıra simetrik iki yayılı yükün uygulandığı bir sürtünmesiz temas problemini elastisite teorisi çerçevesinde çözmüştür. Aynı problemin sonlu elemanlar analizi, ANSYS yazılımı kullanılarak gerçekleştirilmiş ve analitik çözümle uyumlu sonuçlar elde edilmiştir.

Alina vd. 2018 yılında gerçekleştirdikleri çalışmada izotrop bir yarım düzlem üzerine yerleştirilmiş ortotrop bir tabakanın, rijit bir panç tarafından yükleme altında sürtünmeli temas davranışını incelemişlerdir. Çalışmada, temas yüzeylerinde oluşan gerilme dağılımlarının, malzemenin rijitlik oranı ve kayma parametrelerinden önemli ölçüde etkilendiği, ancak Poisson oranının etkisinin daha az belirgin olduğu sonucuna varılmıştır.

Balcı vd. 2018 yılında gerçekleştirdikleri çalışmada, dinamik yükleme altında elastik bir kaplamanın rijit bir düzlem ile temas ettiği problemin analitik ve sayısal

çözümlerini sunmaktadır. Elastodinamik denklemlerin dönüşüm ve sayısallaştırma yöntemleriyle çözülmesiyle elde edilen sonuçlar, parametrik bir analizle değerlendirilmiştir. Sonuçlar, yüksek hızlarda elastodinamik etkilerin önemini vurgulayarak, bu tür problemlerde elastostatik teorisinin yetersiz kaldığını göstermektedir.

Bora ve Özşahin, 2019 yılında gerçekleştirdikleri çalışmada, iki tabakalı bir sistemin elastik yarı sonsuz bir ortam üzerindeki etkileşimini incelemişlerdir. Sistem, iki rijit blok tarafından yüklenmiş ve tüm yüzeylerin sürtünmesiz olduğu varsayılmıştır. Araştırmacılar, öncelikle elastisite teorisinden ve integral dönüşümlerinden yararlanarak problemin analitik çözümünü elde etmişlerdir. Bu çözümde, tüm arayüzlerdeki ayrılma yükleri, ayrılma mesafeleri ve normal gerilmeler gibi kritik parametreler belirlenmiştir. Daha sonra, problemin sayısal çözümü için sonlu elemanlar yöntemi kullanılmış ve ANSYS yazılımı ile modelleme gerçekleştirilmiştir. Elde edilen analitik ve sayısal sonuçlar karşılaştırılarak, problemin daha iyi anlaşılması hedeflenmiştir.

Chen ve Yue 2019 yılında yaptıkları bu çalışmada, farklı elastik özelliklere sahip Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme kaplamalarla takviye edilmiş iki elastik küre arasındaki sürtünmesiz temas problemi analiz etmişlerdir. Kaplama kalınlığının ve temas alanının küre yarıçapına göre küçük olduğu varsayılmış ve malzeme heterojenliği radyal yönde modellenmiştir. Problem, birden çok tabakalı elastik yarı sonsuz düzlem modeli ile çözümlenmiş ve temas kuvveti ile gerilme için analitik çözümler elde etmişlerdir. Sonuçlar, kesme modülü ve Poisson oranındaki dereceli değişimlerin temas kuvveti, gerilme ve temas alanı üzerinde önemli etkilerinin olduğunu ortaya koymuşlardır.

Balcı 2020 yılında yaptığı bu çalışmada rijit düzleme oturan sonlu kalınlıkta fonksiyonel dereceli bir tabaka ile hareketli bir blok arasındaki sürtünmeli temas mekanizmasını incelemektedir. Rijit blok, düz veya yarı dairesel profillere sahip olup, fonksiyonel dereceli tabakanın üzerinde sabit bir hızda hareket etmektedir. Parametrik analizler, blok hızı, malzeme heterojenliği ve sürtünme katsayısının, rijit düzleme oturan sonlu kalınlıktaki fonksiyonel dereceli tabakanın temas gerilmeleri üzerindeki etkilerini gözlemlemek amacıyla yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar, özellikle ince yumuşama tabakalarında, blok hızındaki değişimlere karşı çok daha hassas gerilmeler olduğunu ortaya koymuştur.

Şengül Şabano, 2020 yılında gerçekleştirdiği çalışmasında, elastik yarı sonsuz düzlem üzerine yerleştirilen ve düzgün bir şekilde yayılmış yüklerle yüklenen, yükseklikleri ve malzeme özellikleri birbirinden farklı iki tabakanın ayrılmalı teması

problemini analitik bir yaklaşımla incelemiştir. Bu çalışma sonucunda, tabakalar arasındaki temas gerilmeleri ve temas uzunlukları ile alt tabaka ve elastik yarım düzlem arasındaki temas gerilmeleri hesaplanmıştır.

Arslan, 2020 yılında gerçekleştirdiği bu çalışmada, iki boyutlu olarak FD malzemeden üretilmiş bir yarı sonsuz ortam ile keyfi şekilli bir rijit cisim arasındaki temas problemini incelemiştir. Çalışmada, temas yüzeylerindeki sürtünme etkileri de göz önüne alınarak, problem hem Fourier integral dönüşümü gibi analitik yöntemlerle hem de sonlu elemanlar yöntemi gibi sayısal yöntemlerle çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar, FD malzemelerin özel yapısı sayesinde temas tepkilerinin etkin bir şekilde kontrol edilebileceğini göstermiştir.

Vatulyan ve Plotnikov 2021 yılında yaptıkları bu çalışmada, düzgün bir yüzey ile heterojen elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki temas problemini düzlemsel bir formülasyonla irdemişlerdir. Yer değiştirme vektörünün bileşenleri ve gerilme tensörünün dönüşüm elemanları için Fourier dönüşümü kullanılarak oluşturmuşlardır. Bilinmeyen temas bölgesine sahip bir temas probleminin integral denklem çözümünü oluşturmak için sınır eleman yöntemi temelli bir hesaplama şeması sunmuşlardır. Çeşitli heterojenlik yasaları için temas problemi çözümleri elde etmişlerdir.

Yaylacı, vd. 2021 yılında yaptıkları çalışmada, fonksiyonel derecelendirilmiş ve homojen tabakalardan oluşan ve Winkler elastik temeli üzerine oturan iki tabakalı bir sistemin sürtünmesiz temas problemini incelemişlerdir. Çalışmada problemi analitik olarak elastisite teorisi ve integral dönüşüm teknikleriyle çözmüş, Sonlu elemanlar yöntemi çözümü ANSYS yazılımı ile gerçekleştirmiş, MLP yöntemi ise yapay sinir ağı kullanılarak farklı problem parametreleri için uygulamışlardır.

Cao ve diğerleri (2021), rijit bir blok ile fonksiyonel derecelendirilmiş bir elastik tabaka ve ortotropik bir alt tabakanın etkileşimini inceleyen çalışmalarında, sürtünmeli ayrılma temas problemini detaylı bir şekilde analiz etmişlerdir. Uyguladıkları yayılı yükün sol tarafa uygulanması durumunda, sol taraftaki ayrılma bölgesinin sınırının, sürtünme katsayısı ile doğrusal olarak arttığını gözlemlemişlerdir. Ancak sağ taraftaki ayrılma bölgesi için bu durumun tam tersi olduğu tespit edilmiştir. İlginç bir şekilde, her iki temas yüzeyinde oluşan basınç değerlerinin sürtünme katsayısından çok az etkilendiği belirtilmiştir.

Bora ve Özşahin 2022 yılında yaptıkları çalışmada, literatürdeki çalışmalardan farklı olarak, düz iki rijit blok tarafından yüklenmiş elastik yarı düzleme yerleştirilmiş iki homojen tabakaya için süreksiz temas problemini analitik olarak çözmüşlerdir. Süreksizliklerin, bloklar arası mesafe, blok genişliği ve yük oranları gibi çeşitli

parametreler üzerindeki etkileri detaylı bir şekilde analiz edilmiş ve bunlara ek olarak ayrılmalar esnasında oluşan kabarma miktarlarını belirlemişler ve elde ettikleri sonuçları ANSYS paket programı kullanılarak Sonlu Elemanlar Yöntemi ile karşılaştırılarak doğrulamışlardır.

Polat ve Kaya 2022 yılında yaptıkları bu çalışmada iki farklı fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) tabakadan oluşan ve rijit bir düzlem üzerindeki iki rijit blok tarafından yüklü bir sistemin süreksiz temas problemini, sonlu elemanlar yöntemi (SEM) ile incelemişlerdir. Çalışmada, tabakaların üst ve alt yüzeylerindeki malzemelerin metal veya seramik olduğu farklı senaryolar için ayrı ayrı analizler gerçekleştirilmiştir.

Karabulut ve Çömez 2023 yılında yaptıkları bu çalışmada, fonksiyonel derecelendirilmiş ortotropik bir tabakanın homojen ve izotrop bir tabaka üzerinde sürekli ve süreksiz temas problemleri incelemişlerdir. Rijit bir blok ile yüklenen fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın elastisite teorisi ve Fourier integral dönüşümleri kullanılarak analitik çözümü yapılmış, problemler tekil integral denklemlerine dönüştürülmüş ve Gauss-Chebyshev yöntemiyle çözmüşlerdir. Sonlu elemanlar yöntemiyle yapılan analizler, kritik yük, başlangıç ayrılma mesafesi, temas uzunlukları ve temas gerilme dağılımlarını değerlendirmişlerdir. Elde edilen sonuçlar, fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaların temas mekaniği üzerindeki malzeme özellikleri ve yükleme etkilerini ortaya koymaktadırlar.

Kaya ve Polat 2023 yılında yaptıkları çalışmada, fonksiyonel dereceli bir tabakanın elastik iki çeyrek düzlem arasında oluşan sürtünmesiz temas problemini sonlu elemanlar yöntemi yardımı ile analiz etmişlerdir. Rijit dairesel panç aracılığıyla tabakaya uygulanan yükler ve ağırlık etkisini dikkate almışlardır. Problemin modeli ANSYS yazılımında oluşturulmuş, ancak Fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın malzeme özellikleri ve ağ yapısının tanımlanması için özel bir makro geliştirmişlerdir. Çalışmada, rijitlik parametresi, yoğunluk parametresi ve dış yüklerin temas gerilmelerine, normal gerilmelere ve derinlik boyunca gerilmelere etkilerini detaylı olarak incelemişlerdir.

Bu çalışma (Balcı ve Arslan, 2023), ortotropik gradyanlı bir yarı düzlem ile hareketli, düz profilli bir rijit çekiç arasındaki dinamik sürtünmeli temas mekaniği için analitik bir teori geliştirmektedir. Çekiç, ortotropik gradyanlı yarı düzlem üzerinde sabit alt-ses hızında hareket ederken, temas gerilmeleri elastodinamik teori kullanılarak çözülmüştür. Yönetici denklemler, Galilean ve Fourier dönüşümleri ile analitik olarak çözülmüş ve bilinmeyen fonksiyonlar yüzey sınır koşulları dikkate alınarak

belirlenmiştir. Temas gerilmesi sonuçları, sonlu elemanlar analizi ve literatürdeki analitik sonuçlarla karşılaştırılmış ve başarılı bir uyum sağlanmıştır. Çalışma, yüksek hızda kayma koşullarında elastodinamik teorisinin daha doğru temas gerilmesi tahminleri yapmak için kritik öneme sahip olduğunu vurgulamaktadır. (2023)

Lamura vd. 2023 yılında yaptıkları bu çalışmada, iki çark arasındaki temasın eşdeğer plastik gerilme (PEEQ) üzerindeki etkilerini incelemek için sonlu elemanlar yöntemini kullanarak bir analiz gerçekleştirmişlerdir. Çalışmada, çap oranları 1 ile 5 arasında değişen iki yarım küre modeliyle temas problemi ele alınmıştır. Sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilen sonuçlar, çap oranı ve sürtünme katsayısının PEEQ üzerindeki önemli etkilerini ortaya koymuştur. Bu çalışma, temas mekaniği ve sonlu elemanlar yönteminin, malzeme davranışları ve temas gerilmeleri üzerindeki etkilerini anlamada önemli bir araç olduğunu vurgulamaktadırlar.

Adıyaman vd. 2023 yılında yaptıkları bu çalışmada, yerçekimi etkisi altında fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemlerini incelemişlerdir. Tabakanın kayma modülü ve yoğunluğunun üstel olarak değiştiği, Poisson oranının ise sabit olduğu varsayılmıştır. Sürekli temas durumunda, kritik yük, ayrılma mesafesi ve temas basınçları analitik yöntemlerle elde etmişlerdir. Süreksiz temas için, tekil integral denklem sayısal yöntemlerle çözülmüş ve heterojenlik parametrelerinin ve yüklemenin etkileri incelemişlerdir. Sonuçlar, tabakanın üst kısmındaki sertliğin artması ve yoğunluğun azalmasının maksimum basınçları düşürüp ayrılma mesafelerini artırdığını göstermişlerdir.

Kaya vd. 2023 yılında yaptıkları bu çalışmada fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin tabakalar arasındaki süreksiz temas durumu için bir polinom regresyon tahmin modeli sunmuşlardır. Problem, ANSYS paket programı yardımıyla sonlu elemanlar çözümü ile çözülmüştür. Fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka özellikleri, programda bir makro kullanılarak içeri aktarılmıştır. Yoğunluk ve sertlik, katman derinliği boyunca değişmektedir. Bu parametreleri farklı değerleri için süreksiz temas problemlerinde ayrılma bölgesinin uzunluğu bulunmuştur. Sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilen veri seti programa aktarılmış ve uygun bir tahmin algoritması oluşturulmuştur. Sertlik, yoğunluk ve dış yük parametreleri ayrılma bölgesini önemli ölçüde etkilemiştir.

Çömez ve El-Borgi 2023 yılında yaptıkları çalışmada Elastik yarısonsuz düzleme oturan elastik tabakaya ait sürtünmeli temas problemi rijit dairesel blok ve rijit dikdörtgen blok için ayrı ayrı incelenmiştir.

Yaylacı vd. 2023 yılında yaptıkları bu çalışmada Mühendislik yapıları ve sistemlerinde farklı malzemelerin bir araya gelerek oluşturduğu temas yüzeyleri, yapıların dayanımı ve işlevselliği açısından büyük önem taşımaktadır. Bu çalışmada, malzeme özellikleri boyunca sürekli bir değişim gösteren özel bir malzeme türü olan fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin, farklı yüzeylerle temas ettiği durumlar incelenmiştir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin, geleneksel homojen malzemelere göre daha karmaşık bir yapıya sahip olması nedeniyle, temas davranışlarının analizi daha zorlu bir süreçtir. Bu çalışmada, hem matematiksel yöntemler (analitik çözüm) hem de bilgisayar destekli simülasyonlar (sonlu elemanlar yöntemi) kullanılarak, bir Fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın bir yüzeye temas ettiği durumu detaylı olarak modellenmiştir.

Polat, 2023 yılında yaptığı bu çalışmada elastik bir tabaka üzerindeki iki dairesel pançın oluşturduğu temas problemine sayısal bir çözüm sunmuştur. ANSYS sonlu elemanlar yazılımı ve özel geliştirilen bir sayısal algoritma (DSA) kullanarak elde edilen sonuçlar, temas uzunluklarının tahmini konusunda oldukça yakın değerler elde edilmiştir.

Yaylacı vd. 2023 yılında yaptıkları bu çalışmada, fonksiyonel derecelendirilmiş bir tabakanın temas problemini incelemek için analitik ve nümerik yöntemlerin karşılaştırmalı bir analizini sunmuşlardır. Problem, yarı sonsuz düzleme yerleştirilen ve yayılı yük ile yüklenmiş FD tabaka içermektedir. Analitik çözümde Gauss-Jacobi integrasyon formülü kullanmışlar ve integral denklemleri çözerek gerilme değerlerini elde etmişlerdir. Daha sonra aynı problemin sayısal çözümü için ise ANSYS paket programı kullanarak yaklaşık çözümleri elde etmişler ve analitik çözüm ile sonlu elemanlar çözümü sonuçlarını karşılaştırmışlardır. Çalışma sonucunda, sonlu elemanlar yönteminden (FEM) elde edilen temas alanı ve temas gerilmesinin analitik sonuçlara yakın sonuçlar elde etmişlerdir.

Oğuz vd. 2024 yılında yaptıkları bu çalışmada Fonksiyonel derecelendirilmiş ortotropik bir tabaka homojen ortotropik ara tabaka ve homojen izotropik yarı düzlem sistemi üzerine sürtünmeli temas problemini ele almışlardır. Alt tabaka ve yarı düzlem tamamen birbirine bağılıken, üst ve alt tabaka arasında gerileyen temas meydana gelmektedir. Sürtünme katsayısı, heterojenlik parametresi, çökme yükü, uç yarıçapı, üst katman kalınlığı gibi bazı parametrelerin temas alanları ve temas gerilmeleri üzerindeki etkileri, parametrik analiz sonuçlarıyla sunmuşlardır.

Karabulut vd. 2024 yılında yaptıkları bu çalışmada fonksiyonel derecelendirilmiş ortotropik bir tabaka için sürtünmeli hareketli temas modelini geliştirmektedirler.

Fonksiyonel derecelendirilmiş ortotropik tabaka, izotropik bir yarı düzleme tamamen bağlanmıştır. Blok sabit hızla sağa-sola doğru hareket ve bu hareket sonucu temas bölgesinde bir kayma gerilmesi oluşur. Gerekli sınır koşulları kullanılarak, hareketli temas problemi Cauchy tipi bir tekil integral denklemine indirgenmiştir; bu denklemin bilinmeyenleri temas gerilmesi ve temas genişliğidir. Elde edilen tekil integral denklemi, Gauss–Jacobi integrasyon formülü ile çözmüşlerdir. Parametreler ve malzeme özelliklerinin temas genişliği, temas gerilmesi ve düzlem içi gerilme üzerindeki etkileri grafiksel olarak sunulmuş ve detaylı sayısal yorumlar vermişlerdir.

Wei ve Zhang 2024 yılında yaptıkları bu çalışmada, fonksiyonel dereceli malzemeler ile güçlendirilmiş elastik kiriş yapılarının temas analizi için Hertz yer değiştirme varsayımı uygulamışlardır. Model, kiriş deformasyonlarını dikkate alarak, temas sertliği (yüzey pürüzlülüğü) ve basıncını daha doğru bir şekilde hesaplamayı sağlamaktadır. Çift basit mesnetli ve ankastre kirişlerde, temas basıncı ve sertliği ile yapısal deformasyon arasındaki etkileşimleri sayısal olarak çözmüşler ve fonksiyonel dereceli malzeme ile kaplanmış kirişlerin etkilerini incelemişlerdir.

Öner ve Al-Qado, 2024 yılında gerçekleştirdikleri çalışmada, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş (FD) ortotropik bir tabakanın rijit bir düzlem üzerindeki temas problemlerine yer çekimi etkilerini de dahil ederek yeni bir bakış açısı getirmişlerdir. İki yüzeyin birbirine sürtünmeden temas ettiği bir durum düşünülerek, bu durumun matematiksel olarak modellenmesi ve çözülmesi gerçekleştirilmiştir. Bu çözümde, temas yüzeyindeki basınç dağılımını bulmak için özel bir matematiksel denklem oluşturulmuş ve bu denklemin çözümü için yaklaşık bir yöntem kullanılmıştır. Çalışmada, temas gerilmeleri, kritik ayrılma yükü ve ilk ayrılma noktası gibi önemli parametreler belirlenerek, FD malzemelerin bu tür problemlerdeki davranışları daha iyi anlaşılmıştır.

Öner ve Al-Qado, 2024 yılında yaptıkları çalışmada, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş (FD) ortotropik malzemelerin rijit silindirik bir blok altında elastik deformasyonunu, analitik olarak incelemişlerdir. Yaptıkları çalışmada FD tabaka, alt yüzeyinde rijit bir düzlem üzerine yerleştirilmiş ve malzeme özellikleri derinlik boyunca değişen bir ortam olarak modellenmiştir. Problem, tekil integral denklemleri yöntemi ile formüle edilmiş ve sayısal çözümü Gauss-Chebyshev integrasyon tekniği ile gerçekleştirilmiştir. Çalışma sonucunda, temas genişliği, temas basınçları ve gerilme dağılımları üzerindeki çeşitli parametrelerin etkilerini incelemişlerdir.

Yazıcıoğlu vd. yaptıkları çalışmada, biri Pasternak temeli üzerinde duran fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme olmak üzere iki elastik katmanın sürtünmesiz

geri çekilen temas problemi ele alınmıştır. Homojen elastik katmana dairesel rijit bir blok vasıtasıyla dış yük uygulanmış ve fonksiyonel derecelendirilmiş katman bir Pasternak temeli üzerinde durmaktadır. Yerçekimi kuvvetlerinin etkisi ihmal edilmiş olup, ara yüzler boyunca yalnızca basınçlı normal çekişler iletilebilir. Tabaka için yer değiştirme ve gerilme ifadeleri elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniği kullanılarak elde edilmiştir. Bu problemde gerekli sınır koşulları uygulanarak, temas gerilmeleri ve temas uzunlukları bilinmeyen iki farklı integral denkleme indirgenmişlerdir. Elde ettikleri bu denklemler sistemi, uygun Gauss Chebyshev formülleri yardımıyla sayısal olarak çözmüşlerdir.

1.1.2. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

Yapılan çalışmada, farklı özelliklere sahip iki fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) tabakanın, elastik bir yarı sonsuz ortam üzerindeki sürekli temas problemi incelenmiştir. Farklı büyüklükteki yükler altında, tabakaların rijit düzlem bloklar aracılığıyla etkileşimi, sürtünmesiz temas koşulu altında ele alınmıştır. Elastik bir cismin davranışını anlamak için kullanılan temel fiziksel yasalar, bu problemin matematiksel olarak ifade edilmesinde kullanılmıştır. Bu yasalar, cismin dengede kalmasını, şekil değiştirmesi ve bu şekil değişiminin sürekli olmasını sağlar. Bu model, Fourier integral dönüşümü gibi analitik yöntemler ile çözülerek, sistemdeki gerilme ve yer değiştirme dağılımları belirlenmiştir.

Buna ek olarak, bloklar ile FD tabaka arasında oluşan düşey yer değiştirme fonksiyonu türevini değerinin sıfıra eşitleyen bir koşul uygulanarak problem, tekil integral denklemlerine indirgenmiştir. Böylelikle problem daha basit ve çözülebilir bir hale getirilmiştir. Ardından, uygun Gauss-Chebyshev integrasyon teknikleri kullanılarak bu integral denklemler sayısal olarak çözülmüştür. Bu sayısal çözüm, MATLAB dilinde yazılmış bir bilgisayar programı aracılığıyla gerçekleştirilmiştir. Ayrıca, aynı problem ANSYS Mechanical APDL paket programı ile sonlu elemanlar yöntemi (SEM) kullanılarak alternatif bir çözümle analiz edilmiştir.

Çalışmanın ilk bölümünde, temas problemlerinin tarihsel gelişimi incelenmiş ve fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM) hakkında bilgiler verilerek bu malzemelerin mühendislik uygulamalarındaki kullanım alanlarına yer verilmiştir. Burada, özellikle FDM'lerin, malzeme özelliklerinin belirli bölgelerde kademeli olarak değişebilmesi sayesinde, geleneksel malzemelere göre çok daha verimli ve performans odaklı çözümler sunduğu vurgulanmıştır. Ardından, problemde kullanılan çözüm yöntemine dair kısa bir açıklama yapılmış ve elastisite teorisinin temel denklemleri ile

integral dönüşüm tekniklerinin nasıl kullanıldığına dair bilgiler verilmiştir. Bu sayede, elastik yarı sonsuz düzlem üzerinde iki fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka için genel ifadeler olarak gerilme ve yer değiştirme denklemleri elde edilmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümünde, problem daha derinlemesine incelenerek sürekli temas durumu üzerinde durulmuştur. Gerilme ve yer değiştirmelerle ilgili diferansiyel denklemler, problemin sınır şartlarına uygun hale getirilerek bir denklem sistemi oluşturulmuştur. Bu denklem sistemi, çözümü gereken on adet bilinmeyen içermektedir. Bu denklem sistemi, özellikle blokların altındaki temas gerilmelerini belirlemeye yönelik geliştirilmiş bir model sunmaktadır. Bloklar ve üst fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) tabaka arasındaki düşey yer değiştirme fonksiyonlarının türevlerinin sıfır olduğu koşul kullanılarak, ifade tekil integral denklemlerine dönüştürülmüş ve bu denklemler, sayısal çözüm için uygun bir formata getirilmiştir. Sonrasında, Gauss-Chebyshev integrasyon yöntemleri ile sayısal çözüme ulaşılmış ve blokların altındaki boyutsuz temas gerilmeleri hesaplanmıştır. Hesaplama sonuçları, iki FD tabaka arasındaki yüzeylerde ve ayrıca alt FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin arasında kalan yüzeylerdeki normal gerilme dağılımlarını içermektedir. Ayrıca, x eksenı boyunca tabakalar arası, y eksenı boyunca ise bloklar altındaki, bloklar arasındaki ve bloklar yakınlarındaki normal gerilme ile kayma gerilmesi değişimleri ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. İki farklı elastik tabaka ve alttaki elastik yarı düzlem arasındaki ara yüzeylerde, ilk ayrılmanın meydana geldiği yükler ve bu ayrılmanın başlayacağı mesafeler belirlenmiştir. Ayrılma bölgelerindeki düşey yer değiştirme ve gerilme dağılımları detaylı bir şekilde incelenmiştir. Ayrıca, sistemin rijitlik ve yoğunluk özelliklerini ifade eden boyutsuz parametreler (blok genişliği, blokların arasındaki uzaklık, tabaka yükseklikleri oranı ve yük oranı gibi) farklı değerler için incelenerek, bloklar altındaki temas gerilmesi, tabakalar arasındaki ve ara yüzeydeki normal ve kayma gerilme dağılımları ayrıntılı olarak analiz edilmiştir. Bu bölümde, analitik çözüm sonucu elde edilmiş olan sonuçları, sonlu elemanlar yönteminden yararlanarak yapılan analizlerin sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Ayrıca, alt FD tabakanın rijitlik parametresi sıfıra indirildiğinde, homojen yarı sonsuz düzlemin rijitliğinin artırılmasıyla elde edilen temas problemi, literatürdeki benzer çalışmalarla kıyaslanmış ve elde edilmiş olan veriler grafik ve tablolar halinde sunulmuştur.

Üçüncü kısımda ise, bu çalışmanın sonuçları ve gelecekteki çalışmalar için öneriler sunulmuştur.

1.2. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Bu kısımda elastisite teorisinden faydalanılarak, rijit bir düzlem üzerinde yer alan ve rijit iki düz blok ile yüklenen, farklı malzeme özelliklerine sahip olan iki tabakaya ilişkin temas probleminin çözümüne yönelik genel yer değiştirme ve gerilme ifadeleri elde edilecektir. Bu çalışmada, tabakaların farklı malzeme özelliklerinin temas yüzeyindeki etkileri ayrıntılı olarak incelenecek ve elastisite teorisi çerçevesinde analitik çözümler sunulacaktır.

1.2.1. Kütle Kuvvetlerinin Bulunmaması Durumunda Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

1.2.1.1. Birinci Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakaya ait Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

İki boyutu olan bir ortamda, σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilme bileşenleri altında ve kütsel kuvvetlerin etkisi göz ardı edildiğinde, denge koşulları aşağıdaki diferansiyel denklemlerle ifade edilebilir

$$\frac{\partial \sigma_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{1xy}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{1xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{1y}}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

Bu denklemlerde yer alan gerilmeyi ifade eden bileşenler, denge denklemlerini ve yer değiştirme-şekil değiştirme ilişkileri arasındaki bağıntılar yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$\sigma_{1x} = \frac{\mu_1(y)}{(\kappa_1 - 1)} \left[(\kappa_1 + 1) \frac{\partial u_1}{\partial x} + (3 - \kappa_1) \frac{\partial v_1}{\partial y} \right] \quad (3)$$

$$\sigma_{1y} = \frac{\mu_1(y)}{(\kappa_1 - 1)} \left[(3 - \kappa_1) \frac{\partial u_1}{\partial x} + (\kappa_1 + 1) \frac{\partial v_1}{\partial y} \right] \quad (4)$$

$$\tau_{1xy} = \mu_1(y) \left[\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right] \quad (5)$$

İncelenen denklemlerdeki "1" indisi, fonksiyonel derecelendirilmiş tabakayı temsil ederken, "h" indisi ise kütle kuvvetlerinin ihmal edildiği homojen bir tabaka için elde edilen çözümü ifade etmektedir. Elastik ortam için oluşturulan denklemleri ve yer-şekil değiştirme bağıntıları kullanılarak, gerilme bileşenleri aşağıdaki formda ifade edilebilir:

$$(\sigma_x)_{1h} = \frac{\mu_1(y)}{(\kappa_1 - 1)} \left[(\kappa_1 + 1) \frac{\partial u_{1h}}{\partial x} + (3 - \kappa_1) \frac{\partial v_{1h}}{\partial y} \right] \quad (6)$$

$$(\sigma_y)_{1h} = \frac{\mu_1(y)}{(\kappa_1 - 1)} \left[(3 - \kappa_1) \frac{\partial u_{1h}}{\partial x} + (\kappa_1 + 1) \frac{\partial v_{1h}}{\partial y} \right] \quad (7)$$

$$(\tau_{xy})_{1h} = \mu_1(y) \left[\frac{\partial u_{1h}}{\partial y} + \frac{\partial v_{1h}}{\partial x} \right] \quad (8)$$

Yukarıdaki denklemlerde kullanılan u , v sembolleri, sırasıyla x ve y yönlerindeki yer değiştirmeleri temsil etmektedir. κ (Kolosov sabiti) ise malzemenin elastik özelliklerini yansıtan bir parametre olup, düzlem şekil değiştirme ve düzlem gerilme durumları için farklı değerler alır. Burada, Poisson oranı (ν) sabit kabul edilerek, düzlem şekil değiştirme hali $\kappa = 3-4\nu$ ve düzlem gerilme hali ise $\kappa = \frac{(3-\nu)}{(1+\nu)}$ olarak tanımlanır. Ayrıca, $\mu_1(y)$ ile gösterilen kayma modülü, fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın kalınlık yönündeki değişkenliğini ifade eder ve bu çözümleme sürecinde, Poisson oranının (ν) sabit olup değişmediği varsayılmaktadır. Ayrıca, $\mu_1(y)$ fonksiyonu, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılan tabakanın kayma modülünü temsil etmektedir ve bu fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\mu_1(y) = \mu_0 e^{\beta_1 y} \quad (9)$$

Bu ifade de μ_0 , fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın üst yüzeyinde bulunan ($y=0$) başlangıç kayma modülünü, β ise tabaka boyunca malzemenin rijitlik özelliklerinin değişim oranını belirleyen bir parametre olarak tanımlanmıştır.

(6), (7) ve (8) olarak numaralandırılan denklemlerinde gerekli türev işlemleri yapıp, elde edilen ifadeler (4) ve (5) olarak numaralandırılan ifadelerde ilgili yerlere yazılması halinde, Navier denklemleri olarak bilinen diferansiyel denklemler sistemi elde edilir.

$$(\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 u_{1h}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v_{1h}}{\partial x \partial y} + (\kappa_1 - 1) \frac{\partial^2 u_{1h}}{\partial y^2} + \beta (\kappa_1 - 1) \frac{\partial u_{1h}}{\partial y} + \beta (\kappa_1 - 1) \frac{\partial v_{1h}}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

$$(\kappa_1 - 1) \frac{\partial^2 v_{1h}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_{1h}}{\partial x \partial y} + (\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 v_{1h}}{\partial y^2} + \beta (3 - \kappa_1) \frac{\partial u_{1h}}{\partial x} + \beta (\kappa_1 + 1) \frac{\partial v_{1h}}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

Navier denklemleri, elastik ortamlardaki gerilme ve şekil değiştirme ilişkilerini ifade eden bir takım kısmi türevli diferansiyel denklemdir. Bu denklemlerin analitik çözümü genellikle karmaşık ve zorlayıcıdır. Çalışmada, bu zorluğu aşmak için yer değiştirme alanında bir dönüşüm uygulanmıştır. Buna göre, yer değiştirme bileşenleri, uygun şekilde seçilmiş yardımcı fonksiyonlar cinsinden ifade edilmiştir. Bu yardımcı fonksiyonların Fourier dönüşümü alındığında, elde edilen denklem sistemi, kısmi türevli diferansiyel denklemlerden, daha basit bir yapıya sahip adi diferansiyel denklemlere indirgenmiştir. Bu sayede, problemin çözümü önemli ölçüde kolaylaşmıştır.

$$u_{1h}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(\xi, y) e^{i\xi x} d\xi \quad (12)$$

$$v_{1h}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\xi, y) e^{i\xi x} d\xi \quad (13)$$

(12) ve (13) olarak numaralandırılan ifadelerin ters Fourier dönüşümlerini alınırsa:

$$\phi_1(\xi, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_{1h}(x, y) e^{-i\xi x} d\xi \quad (14)$$

$$\psi_1(\xi, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v_{1h}(x, y) e^{-i\xi x} d\xi \quad (15)$$

denklemleri elde edilir. Bu ifadeler, ξ dönüşüm değişkenine bağlı olarak elde edilir. Burada, elde edilen $\phi_1(\xi, y)$ ve $\psi_1(\xi, y)$ fonksiyon ifadeleri $u_{1h}(x, y)$ ve $v_{1h}(x, y)$ yer değiştirme fonksiyonlarının ters Fourier dönüşümü olarak ifade edilmiştir. Bu fonksiyonları belirlemek amacıyla, (10) ve (11) olarak numaralandırılmış denklemler $e^{-i\xi x}$ ile çarpılır ve x değişkeni için $(-\infty, \infty)$ aralığında integralleri alınarak çözüme ulaşılır. Bu işlem, çözüm sürecini daha sistematik ve kolay çözülebilir hale getirir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[(\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 u_{1h}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v_{1h}}{\partial x \partial y} + (\kappa_1 - 1) \frac{\partial^2 u_{1h}}{\partial y^2} + \beta(\kappa_1 - 1) \frac{\partial u_{1h}}{\partial y} + \beta(\kappa_1 - 1) \frac{\partial v_{1h}}{\partial x} \right] e^{-i\zeta x} dx = 0 \quad (16)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[(\kappa_1 - 1) \frac{\partial^2 v_{1h}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_{1h}}{\partial x \partial y} + (\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 v_{1h}}{\partial y^2} + \beta(3 - \kappa_1) \frac{\partial u_{1h}}{\partial x} + \beta(\kappa_1 + 1) \frac{\partial v_{1h}}{\partial y} \right] e^{-i\zeta x} dx = 0 \quad (17)$$

denklem sistemi elde edilir. İntegral içindeki ifadeler ayrı ayrı çözülürse:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u_{1h}}{\partial x^2} e^{-i\zeta x} dx = i^2 \zeta^2 \phi_1 \quad (18)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 v_{1h}}{\partial x \partial y} e^{-i\zeta x} dx = i \zeta \psi_1' \quad (19)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u_{1h}}{\partial y^2} e^{-i\zeta x} dx = \phi_1'' \quad (20)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_{1h}}{\partial y} e^{-i\zeta x} dx = \phi_1' \quad (21)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v_{1h}}{\partial x} e^{-i\zeta x} dx = i \zeta \psi_1 \quad (22)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 v_{1h}}{\partial x^2} e^{-i\zeta x} dx = i^2 \zeta^2 \psi_1 \quad (23)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u_{1h}}{\partial x \partial y} e^{-i\zeta x} dx = i \zeta \phi_1' \quad (24)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 v_{1h}}{\partial y^2} e^{-i\zeta x} dx = \psi_1'' \quad (25)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_{1h}}{\partial x} e^{-i\zeta x} dx = i \zeta \phi_1 \quad (26)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v_{1h}}{\partial y} e^{-i\zeta x} dx = \psi_1' \quad (27)$$

(18-27) olarak numaralandırılan ifadeler (16) ve (17) numaralandırılmış denklem takımlarında ilgili yerlere yazılıp ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\left[(\kappa_1 - 1)\phi'' + \beta(\kappa_1 - 1)\phi' + (\kappa_1 + 1)i^2\xi^2\phi + 2i\xi\psi_1' + \beta(\kappa_1 - 1)i\xi\psi_1 \right] = 0 \quad (28)$$

$$\left[(\kappa_1 + 1)\psi_1'' + \beta(\kappa_1 + 1)\psi_1' + (\kappa_1 - 1)i^2\xi^2\psi_1 + 2i\xi\phi' + \beta(3 - \kappa_1)i\xi\phi \right] = 0 \quad (29)$$

şeklinde diferansiyel denklem sistemi elde edilmiş olur.

(28) ve (29) olarak numaralandırılmış denklemlerin birlikte değerlendirilmesi, bir kısmi türevli diferansiyel denklem takımı oluşturduğu görülmektedir (Apatay, 2010). Bu denklemler sistemini çözmek için;

$$\phi_1 = y_1 \quad (a)$$

$$\psi_1 = y_2 \quad (b)$$

$$\phi_1' = y_3 \quad (c)$$

$$\psi_1' = y_4 \quad (d)$$

(30 a-d)

Problem, ilgili fiziksel büyüklüklerin matematiksel tanımları kullanılarak bir denklem sistemi halinde ifade edilmiş ve bu denklem sistemi, matris gösterimi ile $y = ay$ şeklinde kompakt bir şekilde yazılabilir.

(28) ve (29) numaralı denklemler ϕ_1'' ve ψ_1'' cinsinden yazılırsa;

$$\phi_1'' = -\beta\phi_1' - \frac{(\kappa_1 + 1)}{(\kappa_1 - 1)}i^2\xi^2\phi_1 - \frac{2i\xi}{(\kappa_1 - 1)}\psi_1' - \beta i\xi\psi_1 \quad (31)$$

$$\psi_1'' = -\beta\psi_1' - \frac{(\kappa_1 - 1)}{(\kappa_1 + 1)}i^2\xi^2\psi_1 - \frac{2i\xi}{(\kappa_1 + 1)}\phi_1' - \beta\frac{(3 - \kappa_1)}{(\kappa_1 + 1)}i\xi\phi_1 \quad (32)$$

(31) ve (32) numaralı denklemler yeniden düzenlenerek farklı bir biçimde ifade edilecek olunursa;

$$\dot{y}_3 = -\frac{(\kappa_1 + 1)}{(\kappa_1 - 1)}i^2\xi^2y_1 - \beta i\xi y_2 - \beta y_3 - \frac{2i\xi}{(\kappa_1 - 1)}y_4 \quad (33)$$

$$\dot{y}_4 = -\beta\frac{(3 - \kappa_1)}{(\kappa_1 + 1)}i\xi y_1 - \frac{(\kappa_1 - 1)}{(\kappa_1 + 1)}i^2\xi^2y_2 - \frac{2i\xi}{(\kappa_1 + 1)}y_3 - \beta y_4 \quad (34)$$

şeklinde ifadeler elde edilmiş olunur. $y_1 = \frac{d\phi_1}{dy}$ ve $y_2 = \frac{d\psi_1}{dy}$ olduğundan, elde edilen ifadelerin matris formunda yazılışı:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ y_1 \\ \dot{y}_2 \\ y_2 \\ \dot{y}_3 \\ y_3 \\ \dot{y}_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(\kappa_1+1)}{(\kappa_1-1)}\xi^2 & -\beta i\xi & -\beta & \frac{-2i\xi}{(\kappa_1-1)} \\ \frac{(3-\kappa_1)}{(\kappa_1+1)}\beta i\xi & \frac{(\kappa_1-1)}{(\kappa_1+1)}\xi^2 & \frac{-2i\xi}{(\kappa_1+1)} & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Burada;

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(\kappa_1+1)}{(\kappa_1-1)}\xi^2 & -\beta i\xi & -\beta & \frac{-2i\xi}{(\kappa_1-1)} \\ \frac{(3-\kappa_1)}{(\kappa_1+1)}\beta i\xi & \frac{(\kappa_1-1)}{(\kappa_1+1)}\xi^2 & \frac{-2i\xi}{(\kappa_1+1)} & -\beta \end{bmatrix} \quad (36)$$

şeklinde tanımlandığında, $|\varepsilon - sI| = 0$ eşitliği kullanılarak ilgili hesaplamalar yapıldığında

$$\left[s^4 + 2\beta s^3 + (\beta^2 - 2\xi^2)s^2 - 2\beta\xi^2 s + \xi^4 + \xi^2\beta^2 \frac{(3-\kappa_1)}{(\kappa_1+1)} \right] = 0 \quad (37)$$

halini alan diferansiyel denklem sisteminin karakteristik denklemi belirlenir. Elde edilen karakteristik denklemin kökleri kullanılarak, sistemin genel çözümünün e^{sy} formunda olduğu sonucuna varılır.

$$\phi_1 = \sum_{j=1}^4 A_j e^{s_j y} \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (38)$$

$$\psi_1 = \sum_{j=1}^4 A_j n_j e^{s_j y} \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (39)$$

olarak ifade edildiğinde, (38) ve (39) numaralı ifadeler diferansiyel denklemlerde yerine konularak, elde edilen denklem sistemi için analitik çözüm elde edilir.

$$n_j = \frac{(\kappa_1 - 3)\beta i \xi - 2i \xi s_j}{(\kappa_1 - 1)i^2 \xi^2 + (\kappa_1 + 1)(s_j^2 + \beta s_j)} \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (40)$$

denklemini elde edilir. Bu karakteristik denklemin kökleri ise;

$$s_1 = -\frac{1}{2} \left(\beta - \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 - 4|\xi||\beta|i \sqrt{\frac{(3-\kappa_1)}{(\kappa_1+1)}}} \right) \quad (41)$$

$$s_2 = -\frac{1}{2} \left(\beta - \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 + 4|\xi||\beta|i \sqrt{\frac{(3-\kappa_1)}{(\kappa_1+1)}}} \right) \quad (42)$$

$$s_3 = -\frac{1}{2} \left(\beta + \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 + 4|\xi||\beta|i \sqrt{\frac{(3-\kappa_1)}{(\kappa_1+1)}}} \right) \quad (43)$$

$$s_4 = -\frac{1}{2} \left(\beta + \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 - 4|\xi||\beta|i \sqrt{\frac{(3-\kappa_1)}{(\kappa_1+1)}}} \right) \quad (44)$$

Bu ifadeler $\phi_1(\xi, y)$ ve $\psi_1(\xi, y)$ fonksiyonlarının (12) ve (13) olarak numaralandırılmış ifadelerde yerine yazılmasıyla elde edilir. Bu fonksiyonlar, fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka için yer değiştirme ifadelerini, kütle kuvvetlerinin sıfır olduğu durumda, aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$u_{1h}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j e^{s_j y + i \xi x} d\xi \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (45)$$

$$v_{1h}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j n_j e^{s_j y + i \xi x} d\xi \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (46)$$

Yukarıda elde edilen eşitliklerdeki A_j ($j=1,2,3,4$) katsayıları, probleme özgü sınır şartlarından elde edilir. (45) ve (46) olarak numaralandırılmış denklemler, (6) ve (8) olarak numaralandırılmış ifadelerde yerine konulduğunda, FD tabakasının kütle kuvvetlerinin ihmal edildiği durumda gerilmelere ait ifadeleri aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$(\sigma_x)_{1_h}(x,y) = \frac{\mu_1(y)}{(\kappa_1-1)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 \left[i\xi(\kappa_1+1) + s_j n_j (3-\kappa_1) \right] A_j e^{s_j y + i\xi x} d\xi \quad (47)$$

$$(\sigma_y)_{1_h}(x,y) = \frac{\mu_1(y)}{(\kappa_1-1)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 \left[i\xi(3-\kappa_1) + s_j n_j (\kappa_1+1) \right] A_j e^{s_j y + i\xi x} d\xi \quad (48)$$

$$(\tau_{xy})_{1_h}(x,y) = \mu_1(y) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 \left[s_j + i\xi n_j \right] A_j e^{s_j y + i\xi x} d\xi \quad (49)$$

1.2.1.2. İkinci Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabaka İçin Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

İki boyutlu bir gerilme durumu için σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilme bileşenleri ile ifade edilen denge denklemleri, kütle kuvvetlerinin etkilerinin göz ardı edilmesi durumunda şeklinde formüle edilebilir.

$$\frac{\partial \sigma_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{2xy}}{\partial y} = 0 \quad (50)$$

$$\frac{\partial \tau_{2xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{2y}}{\partial y} = 0 \quad (51)$$

Bu denklemlerde yer alan gerilme bileşenleri, denge denklemleri ve yer değiştirme-şekil değiştirme ilişkileri kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$\sigma_{2x} = \frac{\mu_2(y)}{(\kappa_2-1)} \left[(\kappa_2+1) \frac{\partial u_2}{\partial x} + (3-\kappa_2) \frac{\partial v_2}{\partial y} \right] \quad (52)$$

$$\sigma_{2y} = \frac{\mu_2(y)}{(\kappa_2-1)} \left[(3-\kappa_2) \frac{\partial u_2}{\partial x} + (\kappa_2+1) \frac{\partial v_2}{\partial y} \right] \quad (53)$$

$$\tau_{2xy} = \mu_2(y) \left[\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right] \quad (54)$$

İlgili denklemlerdeki u , v sırasıyla x ve y eksenleri boyunca meydana gelen yer değiştirmeleri ifade eder. Malzeme sabiti κ , düzlem şekil değiştirme ve düzlem gerilme durumlarında Poisson oranı (ν) cinsinden $\kappa = 3 - 4\nu$ ve $\kappa = \frac{(3-\nu)}{(1+\nu)}$ olarak belirlenir

Malzemenin kayma davranışını tanımlayan $\mu_2(y)$ parametresi, şu matematiksel ifade ile verilir;

$$\mu_3(y) = \mu_2 e^{\beta_2 y} \quad (55)$$

(52), (53) ve (54) olarak numaralandırılmış ifadelerin gerekli türevleri alınıp (50) ve (51) olarak numaralandırılmış denklem takımlarında yerlerine yazılırsa;

$$(\kappa_2 + 1) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} + (\kappa_2 - 1) \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \beta_2 (\kappa_2 - 1) \frac{\partial u_2}{\partial y} + \beta_2 (\kappa_2 - 1) \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0 \quad (56)$$

$$(\kappa_2 - 1) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + (\kappa_2 + 1) \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + \beta_2 (3 - \kappa_2) \frac{\partial u_2}{\partial x} + \beta_2 (\kappa_2 + 1) \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \quad (57)$$

Kısmi türevli diferansiyel denklemler olan Navier denklemlerinin çözümü, genellikle karmaşık hesaplamalar gerektirir. Bu nedenle, problem çözümünü kolaylaştırmak amacıyla, yer değiştirme alanındaki $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ fonksiyonları Fourier dönüşümü yardımıyla dönüştürülür. Böylece, elde edilen diferansiyel denklem sistemi, daha kolay çözülebilir bir forma getirilir.

$$u_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(\xi, y) e^{i\xi x} d\xi \quad (58)$$

$$v_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2(\xi, y) e^{i\xi x} d\xi \quad (59)$$

(58) ve (59) numaralı denklemlerin ters dönüşüm işlemleri yapılırsa;

$$\phi_2(\xi, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_2(x, y) e^{-i\xi x} dx \quad (60)$$

$$\psi_2(\xi, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v_2(x, y) e^{-i\xi x} dx \quad (61)$$

ξ dönüşüm değişkeni ile birlikte, $\phi(\xi, y)$ ve $\psi(\xi, y)$ fonksiyonları, $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümünün ters dönüşümü ile elde edilen yeni fonksiyonlardır.

Denklemlere Fourier dönüşümü uygulayabilmek için, her iki taraf $e^{-i\xi x}$ ile çarpılır ve $(-\infty, \infty)$ aralığında integral işlemi yapılırsa;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[(\kappa_2 + 1) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} + (\kappa_2 - 1) \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \beta_2 (\kappa_2 - 1) \frac{\partial u_2}{\partial y} + \beta_2 (\kappa_2 - 1) \frac{\partial v_2}{\partial x} \right] e^{-i\xi x} dx = 0 \quad (62)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[(\kappa_2 - 1) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + (\kappa_2 + 1) \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + \beta_2 (3 - \kappa_2) \frac{\partial u_2}{\partial x} + \beta_2 (\kappa_2 + 1) \frac{\partial v_2}{\partial y} \right] e^{-i\xi x} dx = 0 \quad (63)$$

Denklemindeki integrallerin her birine uygulanan integrasyon işlemi sonucunda, aşağıdaki bağıntılar elde edilir;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} e^{-i\zeta x} dx = i^2 \zeta^2 \phi_2 \quad (64)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} e^{-i\zeta x} dx = i \zeta \psi_2 ' \quad (65)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} e^{-i\zeta x} dx = \phi_2 '' \quad (66)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_2}{\partial y} e^{-i\zeta x} dx = \phi_2 ' \quad (67)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v_2}{\partial x} e^{-i\zeta x} dx = i \zeta \psi_2 \quad (68)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} e^{-i\zeta x} dx = i^2 \zeta^2 \psi_2 \quad (69)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} e^{-i\zeta x} dx = i \zeta \phi_2 ' \quad (70)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} e^{-i\zeta x} dx = \psi_2 '' \quad (71)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_2}{\partial x} e^{-i\zeta x} dx = i \zeta \phi_2 \quad (72)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v_2}{\partial y} e^{-i\zeta x} dx = \psi_2 ' \quad (73)$$

(64)-(73) ifadeleri (62) ve (63) olarak numaralandırılmış ifadelerde yerine yazılıp ve ilgili düzenlemelerin yapılmasıyla;

$$\left[(\kappa_2 - 1)\phi_2'' + \beta_2(\kappa_2 - 1)\phi_2' + (\kappa_2 + 1)i^2\xi^2\phi_2 + 2i\xi\psi_2' + \beta_2(\kappa_2 - 1)i\xi\psi_2 \right] = 0 \quad (74)$$

$$\left[(\kappa_2 + 1)\psi_2'' + \beta_2(\kappa_2 + 1)\psi_2' + (\kappa_2 - 1)i^2\xi^2\psi_2 + 2i\xi\phi_2' + \beta_2(3 - \kappa_2)i\xi\phi_2 \right] = 0 \quad (75)$$

halinde diferansiyel denklem sistemi elde edilmiş olur.

(74) ve (75) denklemleriyle ifade edilen diferansiyel denklem sisteminin analitik çözümü, çeşitli matematiksel teknikler kullanılarak elde edilebilir

$$\phi_2 = y_1$$

$$\psi_2 = y_2$$

$$\frac{d\phi_2}{dy} = y_3$$

$$\frac{d\psi_2}{dy} = y_4$$

Denklemler, matris formunda yazıldığında daha kolay incelenebilir ve çözülebilir (74) olarak numaralandırılmış denklemde ϕ_2'' yalnız bırakılırsa;

$$\phi_2'' = -\beta_2\phi_2' - \frac{(\kappa_2 + 1)}{(\kappa_2 - 1)}i^2\xi^2\phi_2 - \frac{2i\xi}{(\kappa_2 - 1)}\psi_2' - \beta_2i\xi\psi_2 \quad (76)$$

(75) numaralı denklemde ψ_2'' yalnız bırakılırsa;

$$\psi_2'' = -\beta_2\psi_2' - \frac{(\kappa_2 - 1)}{(\kappa_2 + 1)}i^2\xi^2\psi_2 - \frac{2i\xi}{(\kappa_2 + 1)}\phi_2' - \beta_1\frac{(3 - \kappa_2)}{(\kappa_2 + 1)}i\xi\phi_2 \quad (77)$$

(76) ve (77) numaralı denklemler düzenlenirse;

$$\dot{y}_3 = -\frac{(\kappa_2 + 1)}{(\kappa_2 - 1)} i^2 \xi^2 y_1 - \beta_2 i \xi y_2 - \beta_2 y_3 - \frac{2i\xi}{(\kappa_2 - 1)} y_4 \quad (78)$$

$$\dot{y}_4 = -\beta_2 \frac{(3 - \kappa_2)}{(\kappa_2 + 1)} i \xi y_1 - \frac{(\kappa_2 - 1)}{(\kappa_2 + 1)} i^2 \xi^2 y_2 - \frac{2i\xi}{(\kappa_2 + 1)} y_3 - \beta_2 y_4 \quad (79)$$

şeklinde denklem takımı elde edilir. $\dot{y}_1 = \frac{d\phi_2}{dy}$ ve $\dot{y}_2 = \frac{d\psi_2}{dy}$ olacağından, elde edilen denklem takımı aşağıdaki matris formunda yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(\kappa_2 + 1)}{(\kappa_2 - 1)} \xi^2 & -\beta_2 i \xi & -\beta_2 & \frac{-2i\xi}{(\kappa_2 - 1)} \\ \frac{(3 - \kappa_2)}{(\kappa_2 + 1)} \beta_2 i \xi & \frac{(\kappa_2 - 1)}{(\kappa_2 + 1)} \xi^2 & \frac{-2i\xi}{(\kappa_2 + 1)} & -\beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (80)$$

Burada;

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(\kappa_2 + 1)}{(\kappa_2 - 1)} \xi^2 & -\beta_2 i \xi & -\beta_2 & \frac{-2i\xi}{(\kappa_2 - 1)} \\ \frac{(3 - \kappa_2)}{(\kappa_2 + 1)} \beta_2 i \xi & \frac{(\kappa_2 - 1)}{(\kappa_2 + 1)} \xi^2 & \frac{-2i\xi}{(\kappa_2 + 1)} & -\beta_2 \end{bmatrix} \quad (81)$$

olarak tanımlanırsa; $|a - \Omega I| = 0$ yazılır ve ilgili düzenlemeler yapılırsa;

$$\left[\Omega^4 + 2\beta_2 \Omega^3 + (\beta_2^2 - 2\xi^2) \Omega^2 - 2\beta_2 \xi^2 \Omega + \xi^4 + \xi^2 \beta_2^2 \frac{(3 - \kappa_2)}{(\kappa_2 + 1)} \right] = 0 \quad (82)$$

Çözümün $e^{\Omega y}$ şeklinde olduğu kabulüyle, sistemin karakteristik denklemi kullanılarak bir çözüm yöntemi geliştirilir

$$\phi_2 = \sum_{j=1}^4 B_j e^{\Omega_j y} \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (83)$$

$$\psi_2 = \sum_{j=1}^4 B_j \varpi_j e^{\Omega_j y} \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (84)$$

halini alır. (83) ve (84) olarak numaralandırılan nolu ifadelerin gerekli türevler alınıp (74) ve (75) numaralı denklemlerde yerine yazılır ve çözüm yapılırsa;

$$\varpi_j = \frac{(\kappa_2 - 3)\beta_2 i \xi - 2i \xi \Omega_j}{(\kappa_2 - 1)i^2 \xi^2 + (\kappa_2 + 1)(\Omega_j^2 + \beta_2 \Omega_j)} \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (85)$$

$$\Omega_1 = -\frac{1}{2} \left(\beta_2 - \sqrt{4\xi^2 + \beta_2^2 - 4|\xi||\beta_2| i \sqrt{\frac{(3-\kappa_2)}{(\kappa_2+1)}}} \right) \quad (86)$$

$$\Omega_2 = -\frac{1}{2} \left(\beta_2 - \sqrt{4\xi^2 + \beta_2^2 + 4|\xi||\beta_2| i \sqrt{\frac{(3-\kappa_2)}{(\kappa_2+1)}}} \right) \quad (87)$$

$$\Omega_3 = -\frac{1}{2} \left(\beta_2 + \sqrt{4\xi^2 + \beta_2^2 + 4|\xi||\beta_2| i \sqrt{\frac{(3-\kappa_2)}{(\kappa_2+1)}}} \right) \quad (88)$$

$$\Omega_4 = -\frac{1}{2} \left(\beta_2 + \sqrt{4\xi^2 + \beta_2^2 - 4|\xi||\beta_2| i \sqrt{\frac{(3-\kappa_2)}{(\kappa_2+1)}}} \right) \quad (89)$$

$\phi(\xi, y)$ ve $\psi(\xi, y)$ ifadeleri sırasıyla (58) ve (59) numaralı ifadelerdeki uygun yerlere yerleştirildiğinde, kütle kuvvetlerinin etkisi göz ardı edilen fonksiyonel derecelendirilmiş bir tabakada meydana gelen yer değiştirmeler, aşağıdaki matematiksel ifade ile verilir:

$$u_{2h}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 B_j e^{\Omega_j y + i\xi x} d\xi \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (90)$$

$$v_{2h}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 B_j \varpi_j e^{\Omega_j y + i\xi x} d\xi \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (91)$$

Bu denklemlerde ifade edilen B_j ($j=1,2,3,4$) ifadeleri bilinmeyen katsayılar olup probleme ilişkin sınır şartları kullanılarak elde edileceklerdir. (90) ve (91) olarak numaralandırılmış ifadeler (52-54) olarak numaralandırılmış ifadelerde ilgili yerlere yazılırsa, FD tabakadaki kütle kuvvetlerinin ihmal edilmesi durumunda gerilme ifadeleri aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\sigma_{x_{2h}}(x, y) = \frac{\mu_2(y)}{(\kappa_2 - 1)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 [i\xi(\kappa_2 + 1) + \Omega_j \varpi_j (3 - \kappa_2)] B_j e^{\Omega_j y + i\xi x} d\xi \quad (92)$$

$$\sigma_{y_{2h}}(x, y) = \frac{\mu_2(y)}{(\kappa_2 - 1)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 [i\xi(3 - \kappa_2) + \Omega_j \varpi_j (\kappa_2 + 1)] B_j e^{\Omega_j y + i\xi x} d\xi \quad (93)$$

$$\tau_{xy_{2h}}(x, y) = \mu_2(y) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 [\Omega_j + i\xi \varpi_j] B_j e^{\Omega_j y + i\xi x} d\xi \quad (94)$$

(90-91) ifadelerinde geçen h indisi FD tabakanın kütle kuvvetlerinin ihmal edilmesi durumundaki çözümü ifade etmektedir.

1.2.1.3. Elastik Yarı Sonsuz Düzlem İçin Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Bu başlıkta, düzlem gerilme durumu altında, kütle kuvvetlerinin etkisi ihmal edilerek elde edilen denge denklemleri, homojen ve izotropik bir elastik yarı sonsuz düzlem için aşağıdaki diferansiyel denklemlerle ifade edilir

$$\frac{\partial \sigma_{3x}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{3xy}}{\partial y} = 0 \quad (95)$$

$$\frac{\partial \tau_{3yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{3y}}{\partial y} = 0 \quad (96)$$

Gerilme ifadeleri ise:

$$\sigma_{3x} = \lambda e + 2\mu_4 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \quad (97)$$

$$\sigma_{3y} = \lambda e + 2\mu_4 \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} \right) \quad (98)$$

$$\tau_{3xy} = \mu_4 \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) \quad (99)$$

Verilen eşitliklerde geçen hacimsel gerilme modülü e , Lamé sabitleri λ ve μ cinsinden ifade edilen bir elastik sabittir. Lamé sabitleri, izotrop bir ortamın elastik özelliklerini tam olarak karakterize eden malzeme sabitleridir ve aşağıdaki ilişkilerle tanımlanırlar.

$$e = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial v_3}{\partial y} \right) \quad (100)$$

$$D = \left(\frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right) \quad (101)$$

$$\mu_4 = \left(\frac{E}{2(1+\nu)} \right) \quad (102)$$

Bu ifadelerde geçen E modülü, malzemenin elastik deformasyona karşı gösterdiği direnci ifade eden Elastisite modülünü, ν ise malzemenin Poisson oranını temsil eder. Gerilme bileşenleri, (97-99) numaralı denge denklemlerinde yerine yazıldığında ve gerekli matematiksel işlemler yapıldığında, klasik elastisite teorisinin temel denklemlerinden biri olan Navier denklemleri aşağıdaki formda elde edilir

$$(\lambda + \mu_4) \left(\frac{\partial e}{\partial x} \right) + \mu_4 \nabla^2 u_3 = 0 \quad (103)$$

$$(\lambda + \mu_4) \left(\frac{\partial e}{\partial y} \right) + \mu_4 \nabla^2 v_3 = 0 \quad (104)$$

İki boyutlu problemlerde, Laplace operatörü Δ , skaler bir fonksiyonun ikinci mertebeden kısmi türevlerinin toplamı olarak ifade edilir ve bu denklemlerde sıklıkla kullanılır.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (105)$$

Navier denklemlerinin oluşturduğu kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi, analitik çözüm için genellikle karmaşıklık yaratır. Bu nedenle, u_3 ve v_3 yer değiştirme bileşenlerinin Fourier dönüşümü yardımıyla, problem uzayından frekans uzayına taşınarak, çözümü daha uygun bir hale getiren bir adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

$$u_3(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_3(\xi, y) e^{i\xi x} d\xi \quad (106)$$

$$v_3(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_3(\xi, y) e^{i\xi x} d\xi \quad (107)$$

şeklinde yazılır. Bu ifadelerin ters Fourier dönüşümleri:

$$\phi_3(\xi, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_3(x, y) e^{-i\xi x} dx \quad (108)$$

$$\psi_3(\xi, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_3(x, y) e^{-i\xi x} dx \quad (109)$$

şeklini alır. Bilinmeyen katsayılar olan $\phi_3(\xi, y)$ ve $\psi_3(\xi, y)$ 'nin değerlerini belirlemek amacıyla, (108) ve (109) numaralı denklemler sırasıyla $e^{-i\xi x}$ ile çarpılarak, belirli bir integral aralığında integral alınır.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mu_4 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \right) + (\tilde{\lambda} + \mu_4) \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y} \right) \right] e^{-i\xi x} dx = 0 \quad (110)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mu_4 \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} \right) + (\tilde{\lambda} + \mu_2) \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} \right) \right] e^{-i\xi x} dx = 0 \quad (111)$$

halini alır. Yer değiştirme bileşenleri u ve v nin (110) ve (111) nolu denklemlerden elde edilen türevleri, problemin çözümünde kullanılacak diğer denklemlerde yerine konulur.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} e^{-i\xi x} dx = -\xi^2 \phi_3 \quad (112)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} e^{-i\xi x} dx = \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial y^2} \quad (113)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y} e^{-i\xi x} dx = i\xi \frac{\partial \psi_3}{\partial y} \quad (114)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} e^{-i\xi x} dx = -\xi^2 \psi_3 \quad (115)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} e^{-i\xi x} dx = \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y^2} \quad (116)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial y} e^{-i\xi x} dx = i\xi \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \quad (117)$$

(112)-(117) olarak numaralandırılan denklemlerinden elde edilen u ve v'nin türevlerini içeren ifadeler, (110) ve (111) olarak numaralandırılan denklemlerde yerine konularak denklem sistemi tamamlanır.

$$-(\tilde{\lambda} + 2\mu_4) \xi^2 \phi_3 + \mu_4 \phi_3'' + (\tilde{\lambda} + \mu_4) i\xi \psi_3' = 0 \quad (118)$$

$$(\tilde{\lambda} + 2\mu_4) \psi'' - \xi^2 \mu_4 \psi_3 + (\tilde{\lambda} + \mu_4) i\xi \phi_3' = 0 \quad (119)$$

Elde edilen bu adi diferansiyel denklem sistemi, problemin çözümü için sayısal veya analitik yöntemlerle incelenebilir. Çözüm, u ve v yer değiştirme fonksiyonlarının zamana ve konuma göre değişimini verir.

$$\phi_3 = y_1 \quad \text{ve} \quad \psi_3 = y_2 \quad (120)$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial y} = y_3 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial \psi_3}{\partial y} = y_4 \quad (121)$$

İle tanımlayarak (118) ve (119) olarak numaralandırılan ifadeler:

$$\frac{\xi^2 (D + 2\mu_4)}{\mu_4} y_1 - \frac{i\xi (D + \mu_4)}{\mu_4} y_4 = \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial y^2} = \dot{y}_3 \quad (122)$$

$$\frac{\xi^2 \mu_4}{(D + 2\mu_4)} y_2 - \frac{i\xi (D + \mu_4)}{(D + 2\mu_4)} y_3 = \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y^2} = \dot{y}_4 \quad (123)$$

Bu ifadeler $\dot{y} = by$, lineer cebirdeki matris gösterimi ile daha genel bir yapıya kavuşturulur. Bu sayede, çözüm yöntemleri daha kolay uygulanabilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(D+2\mu_4)\xi^2}{\mu_2} & 0 & 0 & \frac{i\xi(D+\mu_4)}{\mu} \\ 0 & \frac{\xi^2 \mu_4}{(D+2\mu_4)} & -\frac{i\xi(D+\mu_4)}{(D+2\mu_4)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (124)$$

Burada;

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(D+2\mu_4)\xi^2}{\mu_4} & 0 & 0 & -\frac{i\xi(D+\mu_4)}{\mu} \\ 0 & \frac{\xi^2 \mu_2}{(D+2\mu_4)} & -\frac{i\xi(D+\mu_4)}{(D+2\mu_4)} & 0 \end{bmatrix} \quad (125)$$

halini alır ve $|b - kI| = 0$ ifadesi yerine yazılırsa karakteristik denklem;

$$k^4 - 2\xi^2 k^2 + \xi^4 = 0 \quad (126)$$

Karakteristik denklemin kökleri $k_1 = k_2 = |\xi|$ ve $k_3 = k_4 = -|\xi|$ olarak belirlendiğinde, homojen ikinci dereceden lineer adi diferansiyel denklemin temel çözüm kümesi oluşur. Bu durumda, genel çözüm, bu temel çözümlerin lineer kombinasyonu olarak ifade edilir.

$$\psi_3(\xi, y) = [C_1 + C_2 y] e^{-|\xi| y} + [C_3 + C_4 y] e^{|\xi| y} \quad (127)$$

(108) numaralı denklemde $\phi_3(\xi, y)$ değişkenine göre birinci mertebeden türev alındığında elde edilen ifade, (106) numaralı denklem takımında yer almasına uygun hale getirilerek, $\phi_3(\xi, y)$ 'nin birinci ve $\phi_3''(\xi, y)$ ikinci mertebeden türevlerini içeren yeni bir denklem elde edilir. Bu yeni denklem, daha sonra gerekli yerlerde tekrar türev alınarak istenilen forma getirilir.

$$\phi_3(\xi, y) = \left\{ \left(-i C_1 \frac{|\xi|}{\xi} e^{-|\xi| y} \right) + \left[i C_2 \left(\frac{\kappa_3}{\xi} - y \frac{|\xi|}{\xi} \right) e^{-|\xi| y} \right] + \left(i C_3 \frac{|\xi|}{\xi} e^{|\xi| y} \right) + \left[i C_4 \left(\frac{\kappa_3}{\xi} + y \frac{|\xi|}{\xi} \right) e^{|\xi| y} \right] \right\} \quad (128)$$

olarak bulunur. (110) ve (111) numaralı ifadeler, x ve y yönlerindeki yer değiştirmeleri belirlemek için birer başlangıç noktası olarak kabul edilir. Bu ifadelerdeki değişkenlere uygun değerler atanarak, x ve y yönlerindeki hareketler matematiksel olarak ifade edilir.

$$u_3(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ i e^{-|\xi| y} \left[-C_1 \frac{|\xi|}{\xi} + C_2 \left(\frac{\kappa_3}{\xi} - \frac{|\xi|}{\xi} y \right) \right] + i e^{|\xi| y} \left[C_3 \frac{|\xi|}{\xi} + C_4 \left(\frac{\kappa_3}{\xi} + \frac{|\xi|}{\xi} y \right) \right] \right\} e^{i \xi x} d\xi \quad (129)$$

$$v_3(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ e^{-|\xi| y} [C_1 + C_2 y] + e^{|\xi| y} [C_3 + C_4 y] \right\} e^{i \xi x} d\xi \quad (130)$$

halinde yazılabilir. Elastik yarım düzlemde, düşey eksen üzerindeki yer değiştirmelerin sıfır olduğu sınır şartı göz önüne alındığında, genel çözümdeki C_1 ve C_2 sabitleri sıfıra eşitlenir. Kütsel kuvvetlerin etkisi ihmal edildiğinde, yer değiştirme ve gerilme ifadeleri, sadece yüzey yüklerinin etkisiyle belirlenen basitleştirilmiş bir forma indirgenir.

$$u_3(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[C_3 \frac{|\xi|}{\xi} + C_4 \left(\frac{\kappa_3}{\xi} + \frac{|\xi|}{\xi} y \right) \right] i e^{k|y+i\xi x} d\xi \quad (131)$$

$$v_3(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [C_3 + C_4 y] e^{k|y+i\xi x} d\xi \quad (132)$$

$$\sigma_{3x} = -\frac{\mu_4}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ 2C_3 |\xi| + C_4 [(\kappa_3 + 3) + 2|\xi|y] \right\} e^{k|y+i\xi x} d\xi \quad (133)$$

$$\sigma_{3y} = \frac{\mu_4}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ 2C_3 |\xi| + C_4 [(\kappa_3 - 1) + 2|\xi|y] \right\} e^{k|y+i\xi x} d\xi \quad (134)$$

$$\tau_{3xy} = \frac{i\mu_4}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ 2\xi C_3 + C_4 \left[(\kappa_3 + 1) \frac{|\xi|}{\xi} + 2\xi y \right] \right\} e^{k|y+i\xi x} d\xi \quad (135)$$

Gerilme ve yer deşiştirmelere ait bu denklemlerde bulunan C_3 ve C_4 bilinmeyen katsayılarıdır ve probleme ait sınır şartları kullanılarak bulunacaktır. Ayrıca elastik yarı sonsuz düzleme ait olan ifadeler 3 indisi ile gösterilmiştir.

1.3. Kütle Kuvvetlerinin Bulunması Durumunda Özel Çözümlerin Elde Edilmesi

1.3.1. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabaka İçin Özel Çözümlerin Elde Edilmesi

Bu bölümde, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış bir tabakanın, kütle kuvvetleri etkisi altındaki genel denklemleri türetilmiştir. Özel olarak, tabaka üzerindeki kütle kuvvetlerinin x yönünde sıfır, y yönünde ise yerçekimi ivmesi g ile yoğunluk $\rho_1(y)$ 'nin çarpımı şeklinde olduğu kabul edilmiştir. Burada, $\rho_1(y)$, y koordinatına göre değişen bir fonksiyon olarak tanımlanmış olup, malzemenin yoğunluğunu ifade eder.

$$\rho_1(y) = \rho_0 e^{\gamma y} \quad (136)$$

(136) olarak numaralandırılan ifadede, ρ_0 fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın üst yüzeyindeki başlangıç yoğunluğunu, γ_1 ise yoğunluğun derinlik boyunca değişim hızını gösteren bir parametre olarak tanımlanmıştır. Bu durumda, σ_x , σ_y ve τ_{xy} gibi düzlem gerilme bileşenleri göz önüne alındığında, kütle kuvvetlerinin etkisi altında olan fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka için denge denklemleri sistemi elde edilir.

$$\frac{\partial \sigma_{1x\delta}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{1xy\delta}}{\partial y} + X = 0 \quad (137)$$

$$\frac{\partial \tau_{1xy\delta}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{1y\delta}}{\partial y} + Y = 0 \quad (138)$$

Denge denklemlerinde yer alan δ ile gösterilen çözüm, kütle kuvvetlerinin neden olduğu özel bir durumdur. Fonksiyonel Derecelendirilmiş tabakada, gerilme durumu, yer değiştirme alanının türevleri cinsinden, elastisite teorisi denklemleri yardımıyla belirlenir.

$$\sigma_{1x\delta} = \frac{\mu_1(\gamma)}{(\kappa_1 - 1)} \left[(\kappa_1 + 1) \frac{\partial u_{1\delta}}{\partial x} + (3 - \kappa_1) \frac{\partial v_{1\delta}}{\partial y} \right] \quad (139)$$

$$\sigma_{1y\delta} = \frac{\mu_1(\gamma)}{(\kappa_1 - 1)} \left[(3 - \kappa_1) \frac{\partial u_{1\delta}}{\partial x} + (\kappa_1 + 1) \frac{\partial v_{1\delta}}{\partial y} \right] \quad (140)$$

$$\tau_{1xy\delta} = \mu_1(\gamma) \left[\frac{\partial u_{1\delta}}{\partial y} + \frac{\partial v_{1\delta}}{\partial x} \right] \quad (141)$$

(139-141) ifadeleri (137, 138) denklem takımlarında ilgili yerlere yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki Navier denklemleri elde edilmiş olunur:

$$(\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} + (\kappa_1 - 1) \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \beta_1 (\kappa_1 - 1) \frac{\partial u_1}{\partial y} + \beta_1 (\kappa_1 - 1) \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \quad (142)$$

$$(\kappa_1 - 1) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + (\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + \beta_1 (3 - \kappa_1) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \beta_1 (\kappa_1 + 1) \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\rho_1 g (\kappa_1 - 1)}{\mu_1 e^{\beta_1 \gamma}} \quad (143)$$

Yer değiştirme ifadeleri $u_{1\delta} = u_{1\delta}(x)$ ve $v_{1\delta} = v_{1\delta}(y)$ olarak alınır ve gerekli olan turevleri alindoğnda, (142) olarak numaralandırılan denklem takımından:

$$(\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 u_{1\delta}}{\partial x^2} = 0 \quad (144)$$

$$\frac{\partial u_{1\delta}}{\partial x} = L_1 \quad (145)$$

$$u_{1\delta}(x) = L_1 x + L_2 \quad (146)$$

(143) numaralı denklemden,

$$(\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 v_{1\delta}}{\partial y^2} + \beta_1 (3 - \kappa_1) \frac{\partial u_{1\delta}}{\partial x} + \beta_1 (\kappa_1 + 1) \frac{\partial v_{1\delta}}{\partial y} = \frac{\rho_0 g (\kappa_1 - 1) e^{(\gamma_1 - \beta_1)y}}{\mu_1} \quad (147)$$

ifadesi elde edilir. (147) numaralı diferansiyel denklemin çözölmesi durumunda;

$$v_{1\delta}(y) = \frac{(e^{\beta_1 y} \beta_1 (\beta_1 - \gamma_1) \gamma_1 (\kappa_1 - 3) \mu_1 L_1 - (\beta_1 - \gamma_1) \gamma_1 (\kappa_1 + 1) \mu_1 M_1 + \beta_1 (e^{\beta_1 y} (\beta_1 - \gamma_1) \gamma_1 (\kappa_1 + 1) \mu_1 M_2 - e^{\gamma_1 y} g (\kappa_1 - 1) \rho_0))}{\beta_1 e^{\beta_1 y} (\beta_1 - \gamma_1) \gamma_1 (\kappa_1 + 1) \mu_1} \quad (148)$$

Bu ifadeler elde edilir. u ve v yer değiştirme fonksiyonlarında yer alan L_1 , L_2 , M_1 ve M_2 ifadeleri bilinmeyen katsayılardır. Kütle kuvveti $\rho_0 g e^{\gamma_1 y}$ ve kalınlık olarak h ile ifade edilen FD tabaka için, x doğrultusu tabakanın üst yüzeyinden geçmek üzere, aşağıdaki gibi tanımlanan sınır koşullarıyla çözüm yapılacaktır:

$$u_1(0) = 0 \quad (149)$$

$$v_1(-h) = 0 \quad (150)$$

$$\sigma_{1y} = \int_{y'}^0 -\rho_0 g e^{\gamma_1 y} dy \quad (151)$$

$$\int_{-h}^0 \sigma_x dy = 0 \quad (152)$$

(149-152) denklemlerinden yararlanılarak L_1 , L_2 , M_1 ve M_2 katsayıları aşağıda gösterildiği gibidir:

$$L_1 = \frac{e^{(\beta_1 - \gamma_1)h} \beta_1 \rho_0 g h^2 (3 - \kappa_1) (1 + e^{\gamma_1 h} (\gamma_1 h - 1))}{8 \gamma_1^2 \mu_1 (e^{\beta_1 h} - 1)} \quad (153)$$

$$L_2 = 0 \quad (154)$$

$$M_1 = -\frac{\rho_0 g (\kappa_1 - 1)}{\gamma_1 \mu_1 (\kappa_1 + 1)} \quad (155)$$

$$M_2 = \frac{\rho_0 g \{AA + BB - CC\}}{8 \gamma_1 \mu_1 (\kappa_1 + 1)} \quad (156)$$

(156) nolu ifadede geçen eşitlikler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:
Bulunan katsayılar yerlerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa;

$$AA = \frac{\beta_1 h e^{h(\beta_1 - \gamma_1)} (1 + e^{\gamma_1 h} (h \gamma_1 - 1)) (\kappa_1 - 3)^2}{\gamma_1 (e^{\beta_1 h} - 1)} \quad (157)$$

$$BB = \frac{8 e^{\beta_1 h} (\kappa_1 - 1)}{\beta_1} \quad (158)$$

$$CC = \frac{8 e^{h(\beta_1 - \gamma_1)} (\kappa_1 - 1)}{\beta_1 - \gamma_1} \quad (159)$$

Bu ifadeler (146) ve (148) numaralı denklemlerde yerine konulduğunda, kütle kuvvetlerinin etkisi altında bulunan fonksiyonel derecelendirilmiş tabakada meydana gelen yer değiştirmelerin analitik ifadeleri elde edilir.

$$u_{1_o} = \frac{e^{(\beta_1 - \gamma_1)h} \beta_1 \rho_0 g e^{\beta_1 h} (\kappa_1 - 3) (1 + e^{\gamma_1 h} (\gamma_1 h - 1))}{8 \gamma_1^2 \mu_1 (e^{\beta_1 h} - 1)} x \quad (160)$$

$$v_{1_o} = \frac{\rho_0 g \beta_1 \left\{ \mu_0 \left[\frac{e^{(\beta_1 - \gamma_1)h} \beta_1 (1 + e^{\gamma_1 h} (\gamma_1 h - 1)) (3 - \kappa_1)^2}{\gamma_1 (e^{\beta_1 h} - 1)} \right] + \left[\frac{8 e^{\beta_1 h} (\kappa_1 - 1)}{\beta_1} \right] - \left[\frac{8 e^{(\beta_1 - \gamma_1)h} (\kappa_1 - 1)}{\beta_1 - \gamma_1} \right] \right\}}{8 \gamma_1 \mu_0 (\kappa_1 + 1)} \quad (161)$$

$$+ \frac{\left[\frac{-e^{(\beta_1 - \gamma_1)h} g \beta_1 \rho_0 (\kappa_1 - 3) (1 + e^{\gamma_1 h} (\gamma_1 h - 1))}{8 \gamma_1^2 \mu_0 (e^{\beta_1 h} - 1)} \right] + \left[\frac{\rho_0 g (\kappa_1 - 1) e^{-\beta_1 y}}{\beta_1} \right] - \left[\frac{\rho_0 g (\kappa_1 - 1) e^{\gamma_1 (h - y)}}{\beta_1 - \gamma_1} \right]}{\gamma_1 \mu_0 (\kappa_1 + 1)}$$

Yer değiştirme ifadelerine ait denklemlerin turevlerinin alınıp (139-141) olarak numarlandırılmış denklemlerde yerine yazılması ile sadece ktle kuvvetlerinin etkisi altına FD tabakaya ait gerilme ifadeleri;

$$\sigma_{x_{1o}} = \frac{\rho_0 g (\kappa_1 - 3) [e^{\beta_1 y + h(\beta_1 - \gamma_1)} \beta_1 + \gamma_1 - e^{\beta_1 h} \gamma_1 - e^{\gamma_1 y} \gamma_1 + e^{\beta_1 h + \gamma_1 y} \gamma_1 + e^{\beta_1 (h + y)} \beta_1 (\gamma_1 h - 1)]}{\gamma_1^2 (\kappa_1 + 1) (e^{\beta_1 h} - 1)} \quad (162)$$

$$\sigma_{y_{1o}} = \frac{\rho_0 g (e^{\gamma_1 y} - 1)}{\gamma_1} \quad (163)$$

$$\tau_{1xy_{2o}} = 0 \quad (164)$$

şeklinde ifade edilir. Denklemlerdeki '1' indisi, fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın genel cözümüne ait terimleri ifade ederken, 'ö' indisi, ktle kuvvetlerinin etkisiyle elde edilen özel cözümüne ait terimleri gösterir. Bu sayede, tabakanın toplam yer değiştirme ve gerilme durumu, genel cözüm ve özel cözümün toplamı olarak ifade edilebilir.

Tabakanın tam olarak nasıl deforme olduğu, iki farklı durumun bir araya gelmesiyle bulunur: Birincisi, tabakanın kendi yapısından kaynaklanan deformasyon, ikincisi ise üzerine etki eden yüklerin neden olduğu deformasyon.

$$u_{1g}(x, y) = u_{1h}(x, y) + u_{1o}(x, y) \quad (165)$$

$$v_{1g}(x, y) = v_{1h}(x, y) + v_{1o}(x, y) \quad (166)$$

$$\sigma_{1xg}(x, y) = \sigma_{1xh}(x, y) + \sigma_{1xo}(x, y) \quad (167)$$

$$\sigma_{1y\xi}(x,y) = \sigma_{1yh}(x,y) + \sigma_{1y\phi}(x,y) \quad (168)$$

$$\tau_{1y\xi}(x,y) = \tau_{1yh}(x,y) + \tau_{1y\phi}(x,y) \quad (169)$$

şeklinde yazılabilir. Denklemlerdeki h indisi, sistemin homojen durumunu ifade eden çözüm ile kütle kuvvetlerinin etkisi altındaki özel durumu ifade eden çözümün toplamı şeklinde ifade edilen genel çözümü gösterir.

1.3.2. İkinci Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabaka İçin Özel Çözümlerin Elde Edilmesi

Fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sadece kütle kuvvetleri etkisi altındaki çözümü incelenirken, basitleştirme amacıyla X koordinatının sıfır olduğu ve $Y = -\rho_2(y)g$ olduğu noktalarda etki eden kütle kuvvetlerinin ihmal edildiği kabul edilmiştir.

Bu ifadede kullanılan g harfi yer çekimi ivmesini, $\rho_2(y)$ ise fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın kalınlık doğrultusunda değişen yoğunluk fonksiyonunu temsil eder. Bu yoğunluk fonksiyonu, tabakanın her bir noktasındaki yoğunluğunu belirlemek için kullanılan matematiksel bir ifadedir.

$$\rho_2(y) = \rho_3 e^{\gamma y} \quad (170)$$

(170) olarak numaralandırılan ifadede geçen ρ_3 , FD tabakanın üst yüzeyindeki yoğunluk değerini ifade ederken, γ değeri ise denklemde oluşan değişimi ifade eden bir parametre olup sıfırdan farklıdır.

Düzlem gerilme durumu için, kütle kuvvetlerinin etkisi göz ardı edildiğinde, σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilme bileşenleri arasındaki ilişkiyi veren denge denklemleri aşağıdaki şekilde ifade edilebilir;

$$\frac{\partial \sigma_{2x\delta}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{2xy\delta}}{\partial y} + X = 0 \quad (171)$$

$$\frac{\partial \tau_{2xy\delta}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{2y\delta}}{\partial y} + Y = 0 \quad (172)$$

Bu denklemlerde yer alan δ indisi, kütle kuvvetlerinin etkisi göz önünde bulundurulduğunda elde edilen özel çözümü temsil eder. Fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) tabaka için gerilme bileşenleri, yer değiştirme ilişkileri yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\sigma_{2x\delta} = \frac{\mu_2(y)}{(\kappa_2 - 1)} \left[(\kappa_2 + 1) \frac{\partial u_{2\delta}}{\partial x} + (3 - \kappa_2) \frac{\partial v_{2\delta}}{\partial y} \right] \quad (173)$$

$$\sigma_{2y\delta} = \frac{\mu_2(y)}{(\kappa_2 - 1)} \left[(3 - \kappa_2) \frac{\partial u_{2\delta}}{\partial x} + (\kappa_2 + 1) \frac{\partial v_{2\delta}}{\partial y} \right] \quad (174)$$

$$\tau_{2xy\delta} = \mu_2(y) \left[\frac{\partial u_{2\delta}}{\partial y} + \frac{\partial v_{2\delta}}{\partial x} \right] \quad (175)$$

(173-175) ifadeleri (171-172) denklemlerinde yerlerine yazılır ve düzenlenirse;

$$(\kappa_2 + 1) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} + (\kappa_2 - 1) \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \beta_2 (\kappa_2 - 1) \frac{\partial u_2}{\partial y} + \beta_2 (\kappa_2 - 1) \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0 \quad (176)$$

$$(\kappa_2 - 1) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + (\kappa_2 + 1) \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + \beta_2 (3 - \kappa_2) \frac{\partial u_2}{\partial x} + \beta_2 (\kappa_2 + 1) \frac{\partial v_2}{\partial y} = \frac{\rho_3 g (\kappa_2 - 1)}{\mu_3 e^{\beta_3 y}} \quad (177)$$

Yer değiştirme ifadeleri $u_{2\delta} = u_{2\delta}(x)$ ve $v_{2\delta} = v_{2\delta}(y)$ olarak kabul edilirse, numaralı denklemden,

$$(\kappa_2 + 1) \frac{\partial^2 u_{2\delta}}{\partial x^2} = 0 \quad (178)$$

$$\frac{\partial u_{2\delta}}{\partial x} = L_3 \quad (179)$$

$$u_{1\delta}(x) = L_3 x + L_4 \quad (180)$$

(177) numaralı denklemden,

$$(\kappa_2 + 1) \frac{\partial^2 v_{2\delta}}{\partial y^2} + \beta_2 (3 - \kappa_2) \frac{\partial u_{2\delta}}{\partial x} + \beta_2 (\kappa_2 + 1) \frac{\partial v_{2\delta}}{\partial y} = \frac{\rho_3 g (\kappa_2 - 1) e^{(\gamma_1 - \beta_2)y}}{\mu_3} \quad (181)$$

(181) diferansiyel denklem çözülürse;

$$v_{2\delta}(y) = \frac{(e^{\beta_2 y} y \beta_2 (\beta_2 - \gamma_2) \gamma_2 (\kappa_2 - 3) \mu_3 L_3 - (\beta_2 - \gamma_2) \gamma_2 (\kappa_2 + 1) \mu_3 M_3 + \beta_2 (e^{\beta_2 y} (\beta_2 - \gamma_2) \gamma_2 (\kappa_2 + 1) \mu_3 M_4 - e^{2\beta_2 y} g (\kappa_2 - 1) \rho_3))}{\beta_2 e^{\beta_2 y} (\beta_2 - \gamma_2) \gamma_2 (\kappa_2 + 1) \mu_3} \quad (182)$$

olarak elde edilir. Yer değiştirme alanının genel çözümü, L_3 , L_4 , M_3 ve M_4 gibi belirlenmemiş sabitleri içeren bir formda elde edilmiştir. FD tabakanın üst yüzeyinde verilen sınır koşulları altında, kütle kuvveti $\rho_3 g e^{\gamma_2 y}$ ve kalınlığı h bu sabitler belirlenerek özel çözüm elde edilecektir.

$$u_2(0) = 0 \quad (183)$$

$$v_2(-h) = 0 \quad (184)$$

$$\sigma_{2y} = \int_y^0 -\rho_3 g e^{\gamma_2 y} dy \quad (185)$$

$$\int_{-h}^0 \sigma_x dy = 0 \quad (186)$$

(183-186) denklemlerinden yararlanılarak L_3 , L_4 , M_3 ve M_4 katsayıları aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$L_3 = \frac{e^{(\beta_2 - \gamma_2)h} \beta_2 \rho_3 g h^2 (3 - \kappa_2) (1 + e^{\gamma_2 h} (\gamma_2 h - 1))}{8 \gamma_2^2 \mu_3 (e^{\beta_2 h} - 1)} \quad (187)$$

$$L_4 = 0 \quad (188)$$

$$M_3 = -\frac{\rho_3 g (\kappa_2 - 1)}{\gamma_2 \mu_3 (\kappa_2 + 1)} \quad (189)$$

$$M_4 = \frac{\rho_3 g \{DD + EE - FF\}}{8 \gamma_2 \mu_3 (\kappa_2 + 1)} \quad (190)$$

(190) nolu ifadede geçen DD, EE ve FF ifadeleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:
Bulunan katsayılar yerlerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa;

$$DD = \frac{\beta_2 h e^{h(\beta_2 - \gamma_2)} (1 + e^{\gamma_2 h} (h \gamma_2 - 1)) (\kappa_2 - 3)^2}{\gamma_2 (e^{\beta_2 h} - 1)} \quad (191)$$

$$EE = \frac{8 e^{\beta_2 h} (\kappa_2 - 1)}{\beta_2} \quad (192)$$

$$FF = \frac{8 e^{h(\beta_2 - \gamma_2)} (\kappa_2 - 1)}{\beta_2 - \gamma_2} \quad (193)$$

$$u_{2_v} = \frac{e^{(\beta_2 - \gamma_2)h} \beta_2 \rho_3 g e^{\beta_2 h} (\kappa_2 - 3) (1 + e^{\gamma_2 h} (\gamma_2 h - 1))}{8 \gamma_2^2 \mu_3 (e^{\beta_2 h} - 1)} x \quad (194)$$

$$\begin{aligned} \iota_{2_v} = & \frac{\rho_3 g \beta_2 \left\{ \mu_3 \left[\frac{e^{(\beta_2 - \gamma_2)h} h \beta_2 (1 + e^{\gamma_2 h} (\gamma_2 h - 1)) (3 - \kappa_2)^2}{\gamma_2 (e^{\beta_2 h} - 1)} \right] + \left[\frac{8 e^{\beta_2 h} (\kappa_2 - 1)}{\beta_2} \right] - \left[\frac{8 e^{(\beta_2 - \gamma_2)h} (\kappa_2 - 1)}{\beta_2 - \gamma_2} \right] \right\}}{8 \gamma_2 \mu_3 (\kappa_2 + 1)} \\ & + \frac{\left[\frac{-e^{(\beta_2 - \gamma_2)h} g \beta_2 \rho_3 (\kappa_2 - 3) (1 + e^{\gamma_2 h} (\gamma_2 h - 1))}{8 \gamma_2^2 \mu_3 (e^{\beta_2 h} - 1)} \right] + \left[\frac{\rho_3 g (\kappa_2 - 1) e^{-\beta_2 y}}{\beta_2} \right] - \left[\frac{\rho_3 g (\kappa_2 - 1) e^{y(\gamma_2 - \beta_2)}}{\beta_2 - \gamma_2} \right]}{\gamma_2 \mu_3 (\kappa_2 + 1)} \end{aligned} \quad (195)$$

Yer değiştirme ifadelerine ait denklemlerin türevleri alınıp (173-175) olarak numaralandırılmış ifadelerde yerine yazılırsa sadece kütle kuvveti etkisi altına FD tabakaya ait gerilme ifadeleri;

$$\sigma_{x_{2\delta}} = \frac{\rho_3 g (\kappa_2 - 3) \left[e^{\beta_2 y + h(\beta_2 - \gamma_2)} \beta_2 + \gamma_2 - e^{\beta_2 h} \gamma_2 - e^{\gamma_2 y} \gamma_2 + e^{\beta_2 h + \gamma_2 y} \gamma_2 + e^{\beta_2 (h+y)} \beta_2 (\gamma_2 h - 1) \right]}{\gamma_2^2 (\kappa_2 + 1) (e^{\beta_2 h} - 1)} \quad (196)$$

$$\sigma_{2y_{\delta}} = \frac{\rho_3 g (e^{\gamma_2 y} - 1)}{\gamma_2} \quad (197)$$

$$\tau_{2xy_{2\delta}} = 0 \quad (198)$$

halini alır. Problemde, 1 ile homojen çözüm, δ ile ise kütle kuvvetleri nedeniyle oluşan özel çözüm ifade edilmektedir. Bu iki çözümün toplamı, problemin genel çözümünü verir.

Sonuçta elde ettiğimiz yer değiştirme ve gerilmeler, temel durumdaki değerler ile dış kuvvetlerin etkisiyle oluşan ek değerlerin toplamıdır.

$$u_{2g}(x, y) = u_{2h}(x, y) + u_{2\delta}(x, y) \quad (199)$$

$$v_{2g}(x, y) = v_{2h}(x, y) + v_{2\delta}(x, y) \quad (200)$$

$$\sigma_{2xg}(x, y) = \sigma_{2xh}(x, y) + \sigma_{2x\delta}(x, y) \quad (201)$$

$$\sigma_{2yg}(x, y) = \sigma_{2yh}(x, y) + \sigma_{2y\delta}(x, y) \quad (202)$$

$$\tau_{2xyg}(x, y) = \tau_{2xyh}(x, y) + \tau_{2xy\delta}(x, y) \quad (203)$$

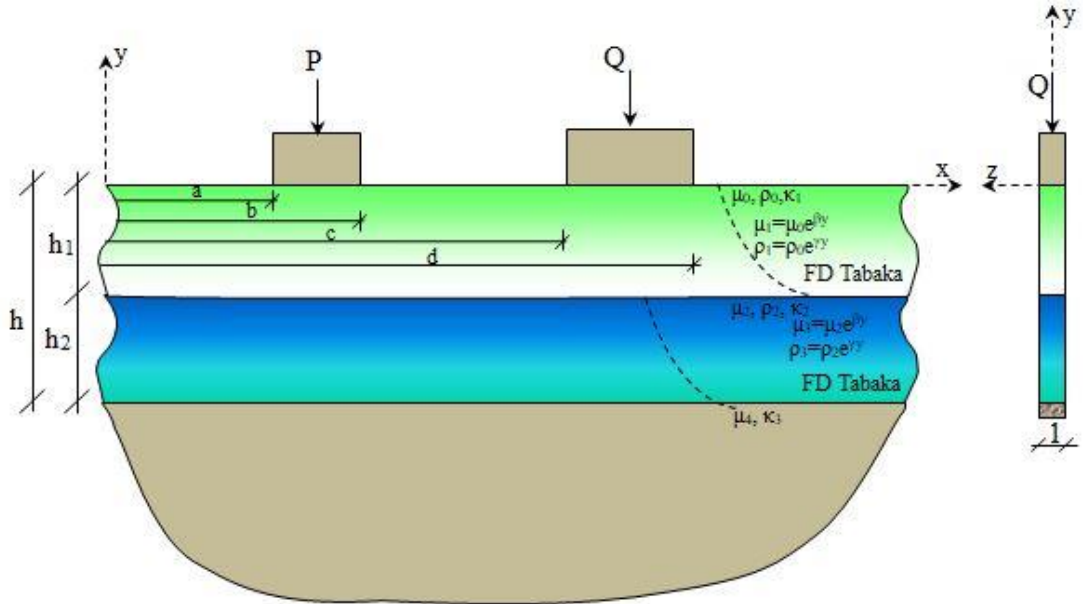
Yukarıda verilmiş olan denklem sisteminde, h indisi, kütle kuvvetlerinin etkisi göz ardı edildiği varsayımı altında elde edilen homojen çözümü temsil ederken, δ indisi ise kütle kuvvetlerinin etkisi de dahil edilerek bulunmuş olan özel çözümü ifade etmektedir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Problemin Tanımı

Fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaların rijit bloklarla temas halinde olduğu bir sistemde, kütle kuvvetlerinin etkisi altında oluşan gerilme ve şekil değiştirme durumu, elastisite teorisinin denklemleri ve integral dönüşümler yardımıyla incelenmiştir. Sürtünmesiz temas koşulu altında, rijit bloklarla FD tabakalar arasında (a, b) ve (c, d) aralıklarında temas olduğu kabul edilmiştir

Tabakalar ve Elastik yarı sonsuz düzlem, x doğrultusu boyunca $(-\infty, +\infty)$ aralığı arasında uzanır. Problem, düzlem durumunda inceleneceği için z doğrultusu boyunca kalınlık birim olarak ifade edilmiştir. Problemde yer alan h_1 ve h_2 ifadeleri, sırasıyla üst fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ve alt fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaların yüksekliğini; h harfi iki fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) tabakanın toplam boyunu, g harfi yerçekimi ivmesini, ρ_i ($i=1,2$) ise sırasıyla birinci ve ikinci tabakaların yoğunluklarını temsil etmektedir. Ayrıca, β_i ve γ_i ($i=1,2$) katsayıları, FD tabakaların rijitlik ve yoğunluk özelliklerinin derinlik boyunca değişimi hakkında bilgi veren parametrelerdir.



Şekil 1. Problemin geometrisi

2.2. Sürekli Temas Durumu

2.2.1. Problemin Sınır Şartları

$u(x,y)$ ve $v(x,y)$ yer değiştirme bileşenlerini, $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$ ve $\tau_{xy}(x,y)$ Şekil 1'deki çizimde gösterilen duruma göre, problem için gerekli olan koşullar belirlenmiştir.

$$(\sigma_y)_1(x,0) = \begin{cases} -p(x) & a < x < b \\ -q(x) & c < x < d \\ 0 & -\infty < x < a, b < x < c, d < x < \infty \end{cases} \quad (201)$$

$$(\tau_{xy})_1(x,0) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (202)$$

$$(\tau_{xy})_1(x,-h_1) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (203)$$

$$(\tau_{xy})_2(x,-h_1) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (204)$$

$$(\tau_{xy})_2(x,-h) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (205)$$

$$(\sigma_y)_1(x,-h_1) - (\sigma_y)_2(x,-h_1) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (206)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_2(x,-h_1) - v_1(x,-h_1)] \quad -\infty < x < \infty \quad (207)$$

$$(\tau_{xy})_3(x,-h) = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (208)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_2(x,-h) - v_3(x,-h)] = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (209)$$

$$(\sigma_y)_2(x,-h) = (\sigma_y)_3(x,-h) \quad -\infty < x < \infty \quad (210)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x,0)] = 0 \quad a < x < b \quad (211)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x,0)] = 0 \quad c < x < d \quad (212)$$

Probleme ilişkin denge şartları ise;

$$\int_a^b p(x) dx = P \quad (216a)$$

$$\int_c^d q(x) dx = Q \quad (216b)$$

halinde ifade edilip, $p(x)$ ve $q(x)$, rijit bloklarla FD tabaka arasındaki bilinmeyen temas gerilmelerini ifade etmektedir.

2.2.2. Katsayıların Belirlenmesi

(204-213) numaralı sınır şartları, FD ve homojen tabakaların gerilme ve yer değiştirme çözümlerine uygulanarak bir sınır değer problemi oluşturulmuştur. Bu problemin çözümü, A_1 'den C_2 'ye kadar on adet bilinmeyen içeren cebirsel bir denklem sistemine indirgenmiştir.

$$(\sigma_y)_1(x, 0) = \frac{\mu_0}{(\kappa_1 - 1)} \sum_{j=1}^4 \left[i\xi(3 - \kappa_1) + s_j n_j (\kappa_1 + 1) \right] A_j = \int_a^b -p(t) e^{-i\xi t} dt + \int_c^d -q(t) e^{-i\xi t} dt \quad (217)$$

$$\sum_{j=1}^4 [s_j + i\xi n_j] A_j = 0 \quad (218)$$

$$\sum_{j=1}^4 [s_j + i\xi n_j] A_j e^{-s_j h} = 0 \quad (219)$$

$$\sum_{j=1}^4 [\Omega_j + i\xi \varpi_j] B_j e^{-\Omega_j h} = 0 \quad (220)$$

$$\sum_{j=1}^4 [\Omega_j + i\xi \varpi_j] B_j e^{-\Omega_j h} = 0 \quad (221)$$

$$\frac{\mu_0}{(\kappa_1 - 1)} \sum_{j=1}^4 E_j A_j e^{-h_1(s_j + \beta_1)} - \frac{\mu_3}{(\kappa_2 - 1)} \sum_{j=1}^4 T_j B_j e^{-h_1(\Omega_j + \beta_2)} = 0 \quad (222)$$

$$\sum_{j=1}^4 i\xi n_j A_j e^{-s_j h} - \sum_{j=1}^4 i\xi \varpi_j B_j e^{-\Omega_j h} = 0 \quad (223)$$

$$e^{-\frac{\xi}{h}} \left\{ 2\xi C_3 + \left[\frac{|\xi|}{\xi} (\kappa_3 + 1) - 2\xi h \right] C_4 \right\} = 0 \quad (224)$$

$$\sum_{j=1}^4 i\xi \varpi_j B_j e^{-\Omega_j h} - i\xi \left\{ (C_3 - C_4 h) e^{-\frac{\xi}{h}} \right\} = 0 \quad (225)$$

$$\frac{\mu_3}{(\kappa_2 - 1)} \sum_{j=1}^4 T_j B_j e^{-h(\Omega_j + \beta_2)} - \mu_4 e^{-\frac{\xi}{h}} \left[2|\xi| C_3 + ((\kappa_3 - 1) - 2|\xi| h) C_4 \right] = 0 \quad (226)$$

On bilinmeyeni olan on denklem takımından $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4, C_1$ ve C_2 eklerdeki şekilde ifade edilmiştir:

Probleme ilişkin denge şartları olarak;

$$\int_a^b p(t) dt = P' \quad (233a)$$

$$\int_c^d q(t) dt = Q' \quad (233b)$$

ifadeleri yazılabilir.

2.2.3. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi

Rijit olan blokların altındaki $p(x)$ ve $q(x)$ temas gerilmeleri yayılışları, önceki bölümlerde bilinmeyen olarak belirtilmiştir. Bu gerilme yayılışlarını belirlemek amacıyla, (214) ve (215) numaralı sınır koşulları kullanılacaktır. Bu eşitlikler, $y=0$ düzleminde, $(a < x < b)$ ve $(c < x < d)$ aralığında sıfır değerini alır. (214) ve (215) numaralı sınır koşulları aşağıda açık bir şekilde ifade edilmiştir:

$$\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\xi \sum_{j=1}^4 A_j n_j e^{i\xi y + i\xi x} d\xi = 0 \quad a < x < b \quad (234)$$

$$\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\xi \sum_{j=1}^4 A_j n_j e^{i\xi y + i\xi x} d\xi = 0 \quad c < x < d \quad (235)$$

Yukarıdaki denklemlerde gereken işlemlerin yapılmasının ardından, integralin sınırları 0'dan ∞ 'a gidecek şekilde düzenlenir ve denklemlerde ifade edilen üstel denklemler için gerekli dönüşümlerin yapılması halinde yukarıdaki iki ifade de;

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} = & 2P' \int_0^{\infty} \left(\xi A_1 n_1 e^{i\xi y} + \xi A_2 n_2 e^{i\xi y} + \xi A_3 n_3 e^{i\xi y} + \xi A_4 n_4 e^{i\xi y} \right) i \left[\cos \xi(t-x) - i \sin \xi(t-x) \right] d\xi \\ & + 2Q' \int_0^{\infty} \left(\xi A_1 n_1 e^{i\xi y} + \xi A_2 n_2 e^{i\xi y} + \xi A_3 n_3 e^{i\xi y} + \xi A_4 n_4 e^{i\xi y} \right) i \left[\cos \xi(t-x) - i \sin \xi(t-x) \right] d\xi \end{aligned} \quad (236)$$

şeklinde ifade edilebilir. (234) ve (235) olarak numaralandırılmış denklemler, x değişkeni açısından birbirinden ayrılmaktadır. (235) olarak numaralandırılmış denklemden $(a < x < b)$, (234) olarak numaralandırılmış denklemden ise $(c < x < d)$ aralıkları söz konusudur.

Yukarıdaki eşitlikler üzerinde gereken düzenlemeler ve gereken sadeleştirmelerin yapılması durumunda, (234) ve (235) olarak numaralandırılmış ifadelerin ikisi de aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} = & -2 \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_a^b p(t) dt \int_0^\infty (\xi A_1 n_1 e^{\xi_1 y} + \xi A_2 n_2 e^{\xi_2 y} + \xi A_3 n_3 e^{\xi_3 y} + \xi A_4 n_4 e^{\xi_4 y}) [\sin \xi(t-x)] d\xi \\ & -2 \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_c^d q(t) dt \int_0^\infty (\xi A_1 n_1 e^{\xi_1 y} + \xi A_2 n_2 e^{\xi_2 y} + \xi A_3 n_3 e^{\xi_3 y} + \xi A_4 n_4 e^{\xi_4 y}) [\sin \xi(t-x)] d\xi \quad (237) \end{aligned}$$

(237) numaralı denkleme bakıldığında, $y \rightarrow 0$ limitine yaklaşırken, pay ile paydayı böldüğümüzde temas gerilmelerinin düzgün bir şekilde elde edilmesini engelleyen bir tekil terim ortaya çıkmaktadır. Bu durumu ortadan kaldırmak için, oluşan tekil terim, (237) numaralı integral denklemindeki çekirdekten çıkarılmalı ve kapalı integraller eklenerek denkleme dahil edilmelidir. Ardından, limit işlemi gerçekleştirilebilir.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_a^b p(t_1) dt_1 \left[k_1^*(x_1, t_1) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \frac{1}{(t_1 - x_1)} \right] \\ & -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_c^d q(t_2) dt_2 \left[k_1^*(x_1, t_2) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \frac{1}{(t_2 - x_1)} \right] = 0 \quad a < x < b \end{aligned} \quad (240)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_a^b p(t_1) dt_1 \left[k_1^*(x_2, t_1) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \frac{1}{(t_1 - x_2)} \right] \\ & -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_0} \int_c^d q(t_2) dt_2 \left[k_1^*(x_2, t_2) + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \frac{1}{(t_2 - x_2)} \right] = 0 \quad c < x < d \end{aligned} \quad (241)$$

bulunan singüler terim şu şekilde ifade edilebilir:

$$SING1 = \int_0^\infty e^{-\xi y} \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) [\sin \xi(t-x)] d\xi \quad (238)$$

Halinde ifade edilebilir. (238) olarak numaralandırılan ifadenin kapalı integrali, integral dönüşüm tablolarından yardım alınarak belirlenmesinin ardından $y \rightarrow 0$ limitine geçilmelidir. Tekil terimin kapalı integrali;

$$SING1 = \int_0^{\infty} e^{-\xi y} [\sin \xi(t-x)] d\xi = \frac{t-x}{y^2 + (t-x)^2} \quad (239)$$

şeklinde ifade edilir. İlgili sadeleştirme işlemleri yapıldıktan sonra (234) ve (235) olarak numaralandırılmış denklem takımları tekrardan düzenlendiğinde integral denklemleri aşağıdaki şekilde ifade edilir:

İfadelerde bulunan $k_1^*(x,t)$ çekirdeği aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

$$k_1(x,t) = \xi (A_1 n_1 + A_2 n_2 + A_3 n_3 + A_4 n_4) \quad (242)$$

$$k_1^*(x,t) = \int_0^{\infty} \left(k_1(x,t) - \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \sin \xi(t-x) \right) d\xi \quad (243)$$

2.2.4. İntegral Denklemlerinin Sayısal Çözümü

Problemin analitik çözümünün zorluğu nedeniyle, $\xi=z/h_1$ dönüşümü ile integral denklemler boyutsuzlaştırılmış ve $(a < x_1 < b)$, $(c < x_2 < d)$ aralıklarında tanımlanan boyutsuz parametreler kullanılarak sayısal çözüme daha uygun bir hale getirilmiştir.

$$x_1 = \frac{b-a}{2} r_1 + \frac{b+a}{2} \quad t_1 = \frac{b-a}{2} s_1 + \frac{b+a}{2} \quad (244)$$

$$x_2 = \frac{d-c}{2} r_2 + \frac{d+c}{2} \quad t_2 = \frac{d-c}{2} s_2 + \frac{d+c}{2} \quad (245)$$

$$g_1(s_1) = \frac{p \left(\frac{b-a}{2} s_1 + \frac{b+a}{2} \right)}{P/h} \quad g_2(s_2) = \frac{q \left(\frac{b-a}{2} s_1 + \frac{b+a}{2} \right)}{P/h} \quad (246)$$

Elde edilmiş olan boyutsuz büyüklükler (240) ve (241) nolu integral ifadelerinde ilgili yerlere yazılması halinde;

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_1(s_1) \frac{b-a}{2h_1} ds_1 + \left[m_1(r_1, s_1) + \left(\frac{\kappa_1+1}{4} \right) \frac{1}{\frac{b-a}{2}(s_1-r_1)} \right] \\
& -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_2(s_2) \frac{d-c}{2h_1} ds_2 + \left[m_2(r_1, s_2) + \left(\frac{\kappa_1+1}{4} \right) \frac{1}{\left[\frac{d-c}{2}s_2 + \frac{d+c}{2} \right] - \left[\frac{b-a}{2}r_1 + \frac{b+a}{2} \right]} \right] = 0 \quad (247)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_1(s_1) \frac{b-a}{2h_1} ds_1 + \left[m_3(r_2, s_1) + \left(\frac{\kappa_1+1}{4} \right) \frac{1}{\left[\frac{b-a}{2}s_1 + \frac{b+a}{2} \right] - \left[\frac{d-c}{2}r_2 + \frac{d+c}{2} \right]} \right] \\
& -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_2(s_2) \frac{d-c}{2h_1} ds_2 + \left[m_4(r_2, s_2) + \left(\frac{\kappa_1+1}{4} \right) \frac{1}{\frac{d-c}{2}(s_2-r_2)} \right] = 0 \quad (248)
\end{aligned}$$

eşitlikler şu şekilde elde edilir. Rijit bloğun alt yüzeyindeki boyutsuz temas gerilmesi $\alpha_i(s_i)$, fonksiyonu, $s_i = \pm 1$ noktalarında bir kutup noktasına sahiptir. Bu singüler davranış nedeniyle, integral denkleminin çözümünde Cauchy tipi bir integral denklemi olarak ele alınması gerekmektedir. Bu nedenle, indeks değeri +1 olarak seçilmiştir.

$$\alpha_i(s_i) = G_i(s_i) [1 - s_i^2]^{-1/2} \quad (-1 < s_i < 1) \quad (i=1,2) \quad (249)$$

olarak ifade edilebilir (Erdoğan ve Gupta, 1972). Gerekli Gauss Chebyshev integrasyon formülünün kullanılması halinde ise (247) ve (248) olarak numarlandırılmış denklemler;

$$\begin{aligned}
& -\sum_{i=1}^n W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h_1} \left[m_1(r_{1j}, s_{1i}) + \left(\frac{\kappa_1+1}{4} \right) \frac{1}{\frac{b-a}{2}(s_{1i}-r_{1j})} \right] \\
& -\sum_{i=1}^n W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h_1} \left[m_2(r_{1j}, s_{2i}) + \left(\frac{\kappa_1+1}{4} \right) \frac{1}{\left[\frac{d-c}{2}s_{2i} + \frac{d+c}{2} \right] - \left[\frac{b-a}{2}r_{1j} + \frac{b+a}{2} \right]} \right] = 0 \\
& \quad (j=1, \dots, n-1) \quad (250)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sum_{i=1}^n W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h_1} \left[m_3(r_{2j}, s_{1i}) + \left(\frac{\kappa_1+1}{4} \right) \frac{1}{\left[\frac{b-a}{2}s_{1i} + \frac{b+a}{2} \right] - \left[\frac{d-c}{2}r_{2j} + \frac{d+c}{2} \right]} \right] \\
& -\sum_{i=1}^n W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h_1} \left[m_4(r_{2j}, s_{2i}) + \left(\frac{\kappa_1+1}{4} \right) \frac{1}{\frac{d-c}{2}(s_{2i}-r_{2j})} \right] \quad (j=1, \dots, n-1) \quad (251)
\end{aligned}$$

Halini alır. (250) ve (251) olarak numaralandırılmış ifadelerde bulunan m_i ($i=1,2,3,4$) ifadeleri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned}
m_1(r_1, s_1) &= k_1 * (x_1, t_1); & m_2(r_1, s_2) &= k_1 * (x_1, t_2); \\
m_3(r_2, s_1) &= k_1 * (x_2, t_1); & m_4(r_2, s_2) &= k_1 * (x_2, t_2);
\end{aligned} \quad (252)$$

Probleme ilişkin denge denklemleri;

$$\int_a^b p(t_1) dt_1 = P \quad (a)$$

$$\int_c^d q(t_2) dt_2 = Q \quad (b) \quad (253 \text{ a-b})$$

şeklindedir. Bu koşullarda (246) olarak numaralandırılmış boyutsuz olarak tanımlanan büyüklükler yazılırsa;

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_1(s_1) \frac{b-a}{2h_1} ds_1 = 1 \quad (a)$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \alpha_2(s_2) \frac{d-c}{2h_1} ds_2 = \frac{Q}{P} \quad (b) \quad (253 \text{ a-b})$$

halini alır.

Gerekli Gauss Chebyshev integrasyon formülleri yardımıyla denge denklemleri;

$$\sum_{i=1}^n \pi W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h_1} = 1 \quad (a)$$

$$\sum_{i=1}^n \pi W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h_1} = \frac{Q}{P} \quad (b) \quad (254 \text{ a-b})$$

Halini alır. Bu ifadelerde;

$$W_1 = W_n = \frac{1}{2n-2} \quad W_i = \frac{1}{n-1} \quad (i=2, \dots, n-1) \quad (255)$$

$$s_{1i} = s_{2i} = \cos\left(\frac{i-1}{n-1} \pi\right) \quad (i=1, \dots, n) \quad (256)$$

$$r_{1i} = r_{2i} = \cos\left(\frac{2j-1}{2n-2} \pi\right) \quad (j=1, \dots, n-1) \quad (257)$$

bu şekilde, (250), (251) ve (254) olarak numaralandırılmış ifadelerden $2n$ bilinmeyi bulan $2n$ denklem takımı elde edilmiş olunur. Rijit bloklar üzerindeki temas gerilmelerinin dağılımını veren $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları, kurulan denklem sisteminin çözümüyle belirlenerek problemin tam çözümü elde edilir.

2.2.5. Tabaka Alt Yüzeylerinde Meydana Gelen İlk Ayrılma Yükleri ve İlk Ayrılma Uzaklıklarının Belirlenmesi

Tabakalar arasındaki ve taban yüzeyindeki normal gerilme dağılımı $\sigma_y(x,y)$, yapının ayrılma davranışını anlamak için kritik öneme sahiptir. Özellikle, ilk ayrılma yükü ve ayrılma noktasının belirlenmesinde bu gerilme dağılımının detaylı incelenmesi gerekmektedir. Bu amaçla, temas yüzeylerindeki boyutsuzlaştırılmış normal gerilme değerleri olan $(\sigma_y)_1(x, -h_1)/P/h_1$ ve $(\sigma_y)_2(x, -h)/P/h_1$ 'in belirlenmesi çalışmanın temel hedeflerindendir. İlk olarak, birinci ve ikinci fonksiyonel derecelendirilmiş tabakalar arasındaki etkileşimi modellemek için (146) numaralı denklemde, daha önce hesaplanan A_i katsayıları ve kütle kuvvetleri için elde edilen özel çözüm yerleştirilerek, bu bölgedeki gerilme dağılımı elde edilir.

$$\begin{aligned}
(\sigma_y)_1(x, y) = & 2P \frac{e^{\beta y}}{(\kappa_1 - 1)} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 \left[i \xi (3 - \kappa_1) + s_j n_j (\kappa_1 + 1) \right] A_j e^{s_j y} [\cos \xi (t - x)] d\xi + \\
& 2Q \frac{e^{\beta y}}{(\kappa_1 - 1)} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 \left[i \xi (3 - \kappa_1) + s_j n_j (\kappa_1 + 1) \right] A_j e^{s_j y} [\cos \xi (t - x)] d\xi + \frac{\rho_0 g (e^{\gamma y} - 1)}{\gamma} \quad (258)
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. İlk ayrılma yükü ve mesafesinin belirlenmesi amacıyla, $y = -h_1$ düzlemi üzerinde $\xi = z/h_1$ boyutsuz değişkeni kullanılarak bir boyutsuzlaştırma işlemi gerçekleştirilmiştir.

$$\begin{aligned}
\frac{(\sigma_y)_1(x, -h_1)}{P/h_1} = & \frac{(e^{-\gamma h_1} - 1)}{\gamma h_1} \frac{1}{\lambda_1} - \sum_{j=1}^4 W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h_1} m_5(r_{1j}, s_{1i}) \\
& - \sum_{j=1}^4 W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h_1} m_6(r_{2j}, s_{2i}), \\
& (-1 < r_1, r_2 < 1) \quad (259)
\end{aligned}$$

şeklinde. FD tabaka ile elastik yarı düzlem arasındaki etkileşimin analizi kapsamında, temas yüzeyindeki normal gerilme dağılımı $(\sigma_y)_1(x, -h_1)/P/h_1$ parametresi ile ifade edilmektedir. Bu parametreyi elde etmek için, problemin genel çözümünde yer alan Bi katsayıları ve elastik yarı sonsuz düzlem için bulunan özel çözüm (141 numaralı denklem) kullanılarak, ilgili diferansiyel denklem çözülür.

$$\begin{aligned}
\frac{(\sigma_y)_2(x, -h)}{P/h_1} = & \frac{h_1 \left[\frac{\rho_0 (e^{-\gamma h_1} - 1)}{\gamma} + \rho_2 (-h + h_1) \right]}{\rho_0 h_1^2 + \rho_2 h_2^2} \frac{1}{\lambda_2} - \sum_{j=1}^4 W_i G_1(s_{1i}) \frac{b-a}{2h_1} m_7(r_{1j}, s_{1i}) \\
& - \sum_{j=1}^4 W_i G_2(s_{2i}) \frac{d-c}{2h_1} m_8(r_{2j}, s_{2i}), \\
& (-1 < r_1, r_2 < 1) \quad (260)
\end{aligned}$$

Halini alır. Yukarıda ki denklemde bulunan λ_1 , birinci Fonksiyonel tabakaya ait, λ_2 ise ikinci FD tabakaya ait yük faktörleri olup aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\lambda_1 = \frac{P_1}{\rho_0 g h_1^2} \text{ ve} \quad (261)$$

$$\lambda_2 = \frac{P_2}{\rho_0 g h_1^2 + \rho_2 g h_2^2} \quad (262)$$

(259) ve (260) olarak numaralandırılmış ifadelerde bulunan m_5, m_6, m_7, m_8 ifadelerinin değerleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} m_5(r_1, s_1) &= k_2(x_1, t_1) \\ m_6(r_2, s_2) &= k_2(x_2, t_2) \\ m_7(r_1, s_1) &= k_3(x_1, t_1) \\ m_8(r_2, s_2) &= k_3(x_2, t_2) \end{aligned} \quad (263)$$

(259) ve (260) olarak numaralandırılmış denklemleri kökleri sırasıyla;

$$k_2(x_2, t_2) = \frac{e^{\beta_1 y}}{(\kappa_1 - 1)} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 \left[i\xi (3 - \kappa_1) + s_j n_j (\kappa_1 + 1) \right] A_j e^{s_j y} [\cos \xi(t - x)] d\xi \quad (264)$$

$$k_3(x_2, t_2) = \frac{e^{\beta_2 y}}{(\kappa_2 - 1)} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 \left[i\xi (3 - \kappa_2) + \Omega_j \varpi_j (\kappa_2 + 1) \right] B_j e^{\Omega_j y} [\cos \xi(t - x)] d\xi \quad (265)$$

şeklinde ifade edilmiştir.

Yük faktörü λ_1 'in kritik değer olan λ_{cr1} 'i aşması durumunda, tabakalar arasında ayrılma meydana gelerek sürekli temas koşulu bozulur ve problem süreksiz temas karakterine bürünür. Bu nedenle, sürekli temasın sağlanması için λ_1 'in 0 ile λ_{cr1} arasında olması gerekmektedir. $\lambda_1 > \lambda_{cr1}$ olduğunda ise, problem süreksiz temas koşullarına göre incelenmelidir.

Tabakalar arasındaki etkileşimin sonucu olarak ortaya çıkan (259) denkleminin kökleri, sistemin kritik durumunu belirler. Bu durumda, x değişkeni kritik ayrılma mesafesi (x_{cr1}) ve λ parametresi kritik yük faktörü (λ_{cr1}) olarak adlandırılır.

$$\lambda_{cr1} = \frac{P_{cr1}}{\rho_0 g h_1^2} \quad (266)$$

Elastik yarı sonsuz düzlem ile fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka arasındaki arayüzeyde, λ_2 yük faktörü kritik değer olan (λ_{cr2}) 'yi aştığında süreksizlik oluşur ve problem süreksiz temas koşullarına dönüşür. Bu durum, (260) numaralı denklemin sıfıra eşitlenmesi ile matematiksel olarak ifade edilir. Bu denklem sisteminin çözümü, ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri hakkında bilgi verir. Bu durumda tabakalar arasındaki koşula benzer olarak x mesafesi, ilk ayrılma mesafesi (x_{cr2}) ayrılmaya sebep olacak sınır yük etkisi de kritik yük faktörü (λ_{cr2}) olarak tanımlanır.

$$\lambda_{cr2} = \frac{P_{cr2}}{\rho_0 g h_1^2 + \rho_2 g h_2^2} \quad (267)$$

Yük faktörü, kritik değer olan λ_{cr2} 'yi aştığında, elastik yarı sonsuz düzlem ile fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ara yüzeyinde kopmalar oluşacağı için, problem süreklilik koşullarını sağlamayan süreksiz bir temas problemi haline dönüşür.

2.3. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEM), mühendislik disiplinlerinde karmaşık yapıların analizini gerçekleştirmek ve tasarım süreçlerini optimize etmek için kritik bir öneme sahip sayısal bir analiz yöntemidir. SEM'in temel prensibi, büyük ve karmaşık bir yapıyı, daha küçük ve yönetilebilir parçalara, yani sonlu elemanlara ayırarak, bu elemanların her biri için uygun matematiksel modeller geliştirmektir. Bu yaklaşım, mühendislik problemlerinin çözümünde daha doğru ve detaylı sonuçlar elde edilmesini sağlar.

SEM, özellikle yapı mühendisliği, mekanik, termal analiz, akışkanlar dinamiği ve elektromanyetik alanlar gibi çok çeşitli mühendislik uygulamalarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu yöntemin başarısı, büyük ölçüde bilgisayar teknolojilerinin gelişimine bağlıdır. Günümüzde ANSYS, Abaqus, NASTRAN ve COMSOL gibi gelişmiş mühendislik yazılımları, mühendislerin karmaşık problemleri etkin bir şekilde çözmelerine olanak tanımaktadır. Bu yazılımlar, geometri oluşturma, malzeme özellikleri tanımlama, ağ oluşturma (meshing), yük ve sınır koşullarını belirleme, çözümleme ve sonuçların analiz edilmesi gibi kapsamlı bir süreç sunarak, SEM'in mühendislik uygulamalarında daha yaygın ve etkili bir şekilde kullanılmasını sağlamaktadır.

SEM'in mühendislik alanındaki uygulama yelpazesi her geçen gün daha da genişlemektedir. İnşaat mühendisliği özelinde, bu yöntem köprüler, binalar ve altyapı projeleri gibi büyük ölçekli yapıların dayanıklılığını ve stabilitesini değerlendirmek için

kritik bir rol oynamaktadır. SEM, yapıların maruz kalabileceği çeşitli yükler, rüzgar, deprem ve zemin hareketleri gibi çevresel etkilerin detaylı bir analizini yaparak, bu yapıların güvenliğini sağlamak adına mühendislik çözümleri sunar. Örneğin, köprülerde trafik yüklerinin ve çevresel etkilerin oluşturduğu stres dağılımlarını analiz etmek, binaların deprem yükleri altındaki davranışlarını incelemek, viyadüklerin stabilitesini değerlendirmek gibi uygulamalar SEM'in inşaat mühendisliği alanındaki önemli kullanım alanlarından bazılarıdır. Ayrıca, zemin-yapı etkileşimleri, temellerin davranışı ve yapıların zemin üzerindeki oturması gibi daha spesifik problemler de SEM ile incelenerek, yapıların uzun ömürlü ve güvenli bir şekilde tasarlanmasına yardımcı olunur.

Sonlu elemanlar yöntemi, inşaat mühendisliğinde olduğu kadar, otomotiv ve havacılık endüstrilerinde de araçların güvenilirliği ve dayanıklılığı gibi kritik unsurların analiz edilmesinde tercih edilmektedir. Isı transferi problemlerinde SEM, elektronik cihazların soğutma sistemlerinden enerji santrallerine kadar çeşitli alanlarda malzemelerin ısıl davranışlarını incelemeye olanak tanır. Bu analizler, özellikle yüksek sıcaklıklarda çalışan bileşenlerin güvenilirliği ve ömrü açısından önemlidir. Akışkanlar dinamiği alanında ise SEM, akışkan hareketlerinin ve bu hareketlerin yapı üzerindeki etkilerinin analiz edilmesini sağlar. Boru sistemleri, hava kanalları ve havacılık uygulamaları gibi alanlarda akışkan-yapısal etkileşim analizleri de SEM yardımıyla gerçekleştirilebilir. Elektromanyetik alan analizlerinde ise, anten tasarımları ve elektromanyetik uyumluluk gibi konular SEM ile detaylı bir şekilde incelenir. Bu analizler, telekomünikasyon, savunma sanayi ve medikal cihazlar gibi sektörlerde kritik öneme sahiptir.

SEM, malzeme bilimi ve ileri malzemeler alanında da önemli bir yer tutmaktadır. Kompozit malzemeler gibi mühendislik uygulamalarında yaygın olarak kullanılan malzemelerin mekanik davranışlarının analizi, SEM aracılığıyla gerçekleştirilir. Ayrıca, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM) gibi özellikleri belirli bir düzlem boyunca değişen yenilikçi malzemelerin termal ve mekanik analizleri de SEM yardımıyla yapılır. Bu analizler, özellikle bu malzemelerin sıcaklık ve mekanik yükler altındaki performanslarının değerlendirilmesi açısından kritik öneme sahiptir.

Tıp ve diş hekimliği alanında da SEM, biyomekanik analizler ve implant tasarımları gibi konularda kullanılır. Diş hekimliğinde, diş modelleri üzerinde uygulanan kuvvetlerin kemik dokusunda yarattığı gerilmelerin analizi, ortodontik tedavilerin ve protez tasarımlarının daha hassas ve doğru bir şekilde gerçekleştirilmesine olanak tanır. Benzer şekilde, ortopedi, kalp ve damar cerrahisi gibi

tıbbi alanlarda implantların ve protezlerin biyomekanik davranışları SEM ile analiz edilir, bu da tıbbi cihazların performansının iyileştirilmesini sağlar.

SEM'in avantajları arasında, karmaşık geometrilerin ve sınır koşullarının doğru bir şekilde modellenenilmesi, yüksek hassasiyet ve doğruluk sağlaması ve doğrusal olmayan malzeme davranışlarının simüle edilebilmesi yer alır. Bununla birlikte, SEM'in başarılı bir şekilde uygulanabilmesi, problemin doğru tanımlanmasına, uygun eleman tipinin seçilmesine, malzeme özelliklerinin doğru bir şekilde tanımlanmasına ve ağ oluşturma sürecinin dikkatli bir şekilde yönetilmesine bağlıdır. Aksi takdirde, mesh bağımlılığı, yüksek maliyetli hazırlık süreçleri ve doğrusal olmayan modelleme zorlukları gibi dezavantajlar ortaya çıkabilir.

Sonuç olarak, Sonlu Elemanlar Yöntemi, modern mühendislik uygulamalarında vazgeçilmez bir araç haline gelmiştir. Bilgisayar teknolojilerinin gelişimi ile birlikte SEM, mühendislik problemlerine hızlı ve güvenilir çözümler sunmakta ve farklı mühendislik disiplinlerinde geniş bir uygulama yelpazesine hitap etmektedir. SEM, karmaşık mühendislik sorunlarının çözümünde sunduğu esneklik ve hassasiyet ile, mühendislik analizleri ve tasarımlarının vazgeçilmez bir bileşeni olarak önemini korumaktadır.

Boyut	Eleman Derecesi	Eleman Şekli	Eleman Tipi
1-D (Eğri)	Lineer		Kiriş
	Kuadratik		Kiriş
	Kübik		Kiriş
2-D (Alan)	Lineer		Kabuk
	Kuadratik		
	Kübik		
3-D (Hacim)	Lineer		
	Kuadratik		

Şekil 2. Sonlu eleman yönteminde eleman tipleri

Sonlu elemanlar metodu, çoklu malzeme içeren ve geometrik olarak karmaşık sistemlerin sayısal analizinde yaygın olarak kullanılan bir yöntemdir. Eğimli sınırları

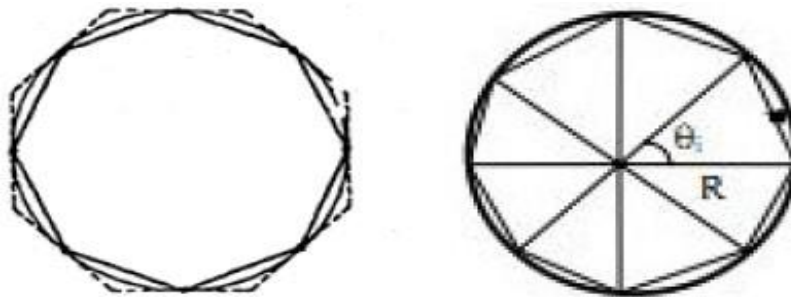
olan bölgeler, eğrisel elemanlarla temsil edilerek gerçekçi modeller oluşturulur. Eleman boyutlandırma esnekliği sayesinde, kritik bölgelerde yüksek çözünürlük elde edilirken, hesaplama maliyeti düşürülür (Yıldız, 2011).

2.3.1. Sonlu Elemanlar Yönteminin Tarihsel Gelişim Süreci

Bu yöntemin tarihsel gelişiminde, karmaşık geometrilerin daha basit geometrik bölgelere ayrıştırılması fikrinin önemli bir rol oynadığı görülmektedir. Bu yaklaşım, antik çağlardan beri geometri problemlerinin çözümünde kullanılan bir stratejidir. Örneğin, çemberin çevresinin hesaplanması için kullanılan çokgen yaklaşımı, sonlu elemanlar yöntemindeki sonlu eleman kavramının ilk örneklerinden biri olarak kabul edilebilir (Erhan, 2011; Güven ve Madenci, 2006).

Sonlu Elemanlar Yönteminin modern anlamdaki ortaya çıkışı, 1943 yılına dayanmaktadır. Bu dönemde Courant, üçgensel bölgelerde parçasal sürekli fonksiyonlar kullanarak yöntemin ilk matematiksel temellerini atmıştır. 1950'li yıllarda Boeing'in uçak kanatlarını modelleme çalışmaları kapsamında üçgen elemanlar kullanması, yöntemin mühendislik uygulamalarında kullanılabilirliğini göstermesi açısından önemli bir dönüm noktası olmuştur. 1956 yılında Turner, Clough, Martin ve Topp tarafından gerçekleştirilen çalışmalar ise yöntemin modern biçimini kazanmasını sağlamış ve perçinli bağlantılara sahip uçak yapılarının analizinde başarıyla uygulanmıştır (Erhan, 2011; Erken, 2009).

Sonlu Elemanlar Yönteminin tarihsel gelişimi, iki temel aşamada ele alınabilir: birincisi teorik altyapının oluşturulması, ikincisi ise yöntemin mühendislik problemlerine etkin bir şekilde uygulanabilir hale getirilmesidir. Eski matematikçiler, bir dairenin çevresini hesaplama amacıyla daireyi, Şekil 5'te görüldüğü üzere, bir çokgenle temsil ederek problemi daha basit bir forma dönüştürmüşlerdir. Bu yaklaşım, daha karmaşık geometrik şekillerin analizinde de kullanılan temel bir kavram olarak yöntem tarihinde önemli bir yer tutmaktadır.



Şekil 3. Daire çevresinin sonlu elemanlar yöntemiyle belirleme yaklaşımı

Bu yaklaşımda, çokgenin her bir kenarı, sonlu elemanlar yöntemindeki bir elemana karşılık gelir. Bu basit örnek, sonlu elemanlar yönteminin temel yapı taşlarından ikisi olan eleman ve düğüm kavramlarını açıkça ortaya koymaktadır. Birincisi, içte ve dışta çizilen çokgenlerin çevre uzunlukları, dairenin gerçek çevresinin sırasıyla üst ve alt sınırlarını oluşturarak bir yaklaşım aralığı sunar. İkinci olarak, çokgenin kenar sayısının artırılmasıyla bu yaklaşım aralığı daralır ve elde edilen yaklaşık çözüm, gerçek çözüme daha da yaklaşır. Bu durum, sonlu elemanlar yönteminde çözünürlüğün (mesh refinement) arttırılmasıyla daha doğru sonuçlar elde edilmesi prensibinin basit bir gösterimidir (Erhan, 2011, Güven ve Madenci, 2006).

Sonlu elemanlar yönteminin modern temelleri, 1943 yılında Courant tarafından üçgensel bölgelere dayalı parçalara ayrılmış sürekli fonksiyonlar üzerine yapılan çalışmalara dayanmaktadır. Bu çığır açan çalışma, yöntemin matematiksel altyapısını oluşturmuştur. 1950'lerde Boeing Havacılık'ın uçak kanatlarını modellemek için üçgensel elemanları kullanmasıyla, sonlu elemanlar yönteminin mühendislik uygulamalarına ilk önemli adımı atılmıştır. Bu dönemde, yöntem özellikle havacılık sektöründe yapısal analizlerde kullanılmaya başlanmıştır. Nihayetinde, 1956 tarihinde Turner, Clough, Martin ve Topp tarafından yapılan çalışmalarla, günümüzde kullanılan SEM'in temel ilkeleri ortaya konmuş ve özellikle havacılık endüstrisinde perçinli bağlantılı yapılar gibi spesifik problemlere uygulanmıştır (Erhan, 2011, Erken, 2009).

"Bilgisayar teknolojilerindeki hızlı gelişmeler, sonlu elemanlar yönteminin etkinliğini ve yaygınlığını önemli ölçüde artırmıştır. Özellikle, günümüzün yüksek performanslı bilgisayarları sayesinde karmaşık mühendislik problemleri daha kısa sürede ve daha yüksek doğrulukta çözülebilmektedir. Bu sayede, geçmişte aylar süren analizler artık çok daha kısa sürede tamamlanabilmekte ve gerçekçi sonuçlar elde edilebilmektedir (Erhan, 2011; Erken, 2009).

Bilgisayar teknolojilerindeki bu hızlı evrim, sonlu elemanlar analizine yönelik çok sayıda ticari yazılımın geliştirilmesini sağlamıştır. ABAQUS, ADINA, ALGOR, ANSYS, LINFLOW, LS-DYNA ve NASTRAN gibi yazılımlar, farklı mühendislik disiplinlerindeki geniş bir yelpazedeki problemlerin çözümünde kullanılmaktadır. Bu çalışmada, sonlu elemanlar analizleri için yaygın olarak kullanılan ANSYS programının MECHANICAL APDL versiyonu tercih edilmiştir.

"Önceki bölümde analitik olarak çözülen elastik yarı sonsuz düzlem üzerindeki iki fonksiyonel gradyan (FG) tabaka ve iki blok sisteminin temas problemi, bu bölümde sayısal olarak incelenmiştir. Sonlu elemanlar yöntemi (SEY) temelli bir analiz için

ANSYS yazılımı kullanılmıştır. İlk olarak, problemin geometrik modeli ANSYS ortamında oluşturulmuştur. İki boyutlu ve statik bir problem olduğu göz önüne alındığında, PLANE183 eleman tipi seçilmiştir. Bu eleman tipi, sekiz düğüm noktası ve dönme serbestliği olmayan bir düzlem elemanıdır. Malzeme özellikleri, ANSYS'in standart malzeme tanımlama özelliği kullanılarak homojen malzemeler için girilmiştir. FG malzemelerin tanımlanması için ise literatürde mevcut bir makroya başvurulmuştur (Polat vd., 2019).

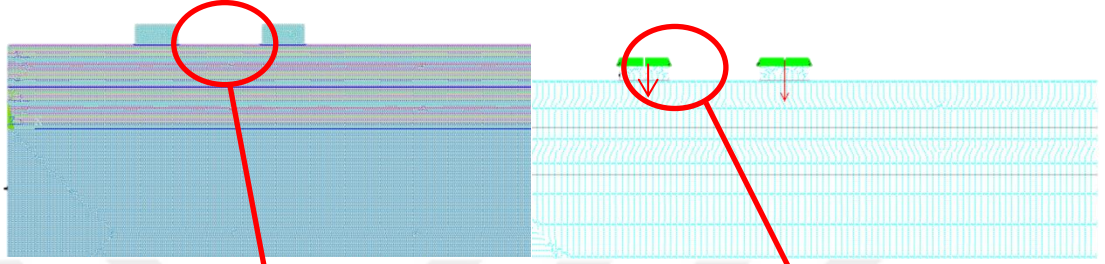
Problem geometrisine uygun malzeme özelliklerinin atanmasının ardından, model üzerinde ağ oluşturma (meshing) işlemi gerçekleştirilmiştir. Bu süreçte, her türlü geometriye uyum sağlayabilen serbest üçgen ağ (Free Triangular Mesh) yöntemi tercih edilmiştir. Çalışma kapsamında, 196.889 düğüm içeren serbest üçgen ağ yapısı kullanılmıştır. Ayrıca, FD tabakanın ağlara bölme işleminin optimize edilmesi amacıyla ilgili programa bir makro ilavesi yapılmıştır. Literatürde yer alan mevcut bir makro kodu bu süreçte temel alınmış olup, kullanılan kodun bir bölümü aşağıda sunulmuştur (Polat vd., 2019).

```
*do, j, 1, ele_numb_y, 1
y_coord = length_e_y*(j)
*use, mat_fgm_pol, y_coord
mp, ex, cntr, E_fgm
mp, prxy, cntr, nu_fgm
mp, dens, cntr, den_fgm
esel, r, cent, x, 0, lngt_lyr
emodif, all, mat, counter
esel, all
```

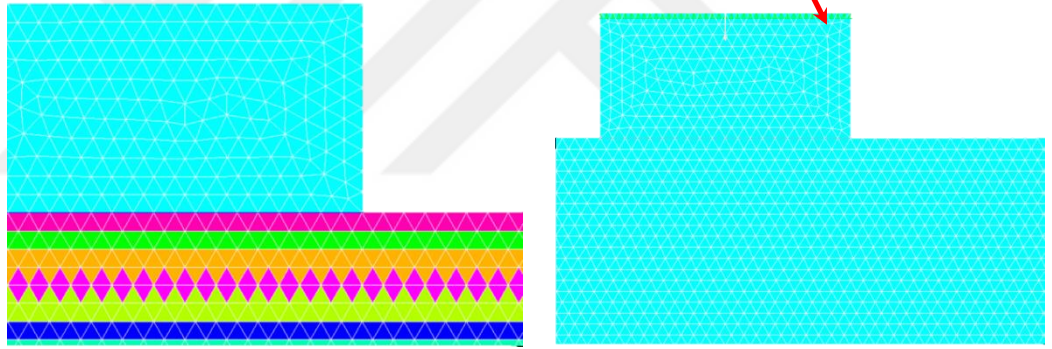
Sonlu elemanlar modeli oluşturulduktan sonra, rijit bloklar ile diğer bileşenler arasındaki etkileşimi simüle etmek amacıyla COUPLING komutu kullanılarak temas çiftleri tanımlanmıştır. Bu çalışmada, yüzey-yüzey temas modelinin kullanılması sayesinde, düğüm noktalarının tam olarak üst üste gelmemesi durumunda dahi analiz gerçekleştirilebilmiştir. Modelde, rijit bloklar, fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem arasında çeşitli temas durumları bulunmaktadır. Her bir temas çifti için, hedef yüzey TARGE169 elemanı ile, temas yüzeyi ise CONTA172 elemanı kullanılarak modellenmiştir. Elastisite modülü daha düşük olan yüzey her zaman temas yüzeyi olarak belirlenmiştir. Bu elemanlar, üç düğüm noktalı PLANE183 elemanlarının düğüm noktaları ile uyumludur.

Sonlu elemanlar analizi kapsamında, farklı malzemelerin etkileşimini modellemek için Augmented Lagrangian yöntemi temel alınmıştır. Bu yöntem, temas koşullarının

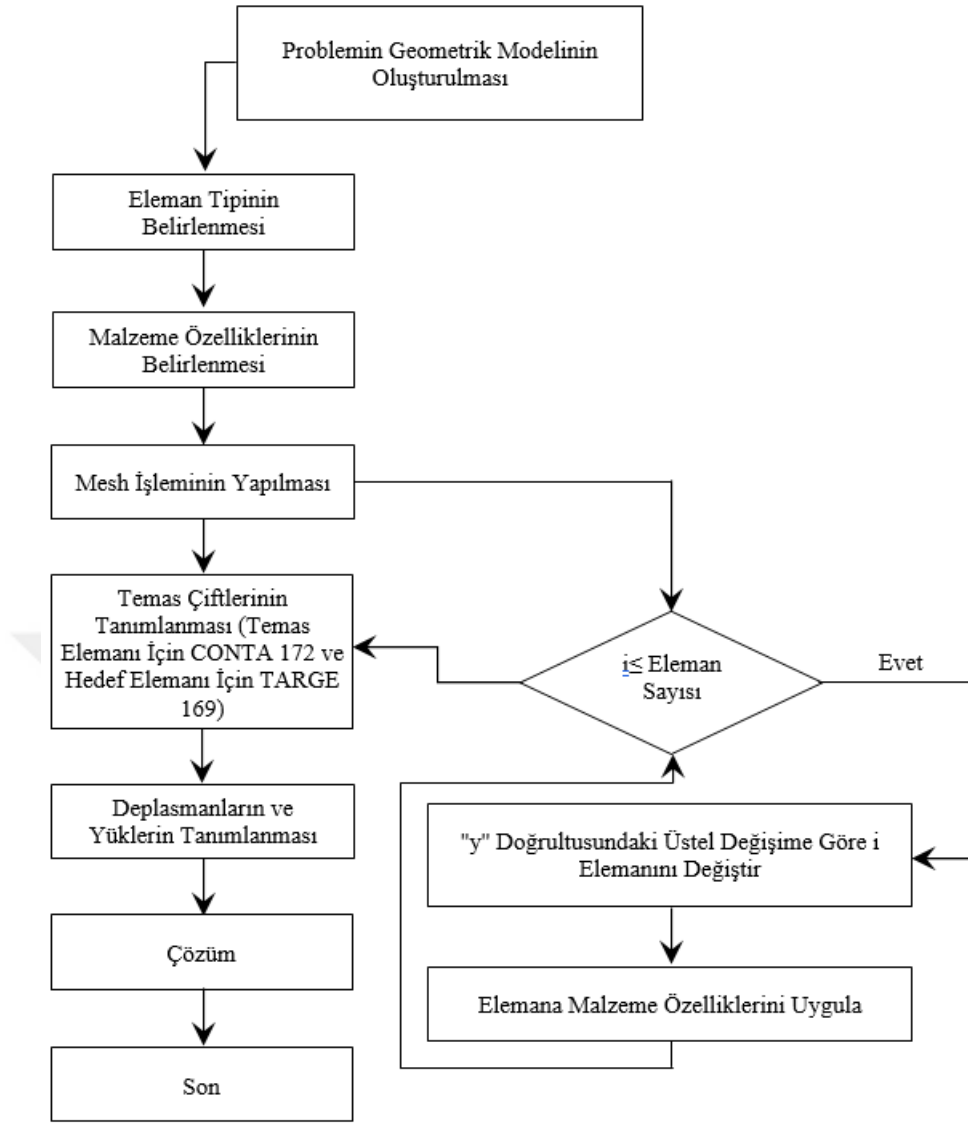
daha doğru ve etkili bir şekilde tanımlanmasını sağlar. Modelde, temas çiftleri oluşturulduktan sonra, yapıya dış yükler uygulanmış ve gerekli sınır koşulları belirlenmiştir. Sayısal çözüm, sonlu elemanlar yöntemine dayalı olarak gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar, Şekil 4 ve Şekil 5'de görselleştirilmiş, çözüm algoritması ise Şekil 6'da ayrıntılı olarak sunulmuştur.



Şekil 4. Probleme ait sonlu elemanlar modeli



Şekil 5. Ağlara bölme (Mesh) işlemi



Şekil 6. Problemin algoritması

3. BULGULAR VE İRDELEME

3.1. Sürekli Temas Problemi

Çalışmada, elastik yarı sonsuz düzlem üzerindeki iki fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın, rijit bloklarla etkileşimi sonucu oluşan temas problemi, çeşitli boyutsuz parametreler altında sayısal olarak incelenmiştir. Bloklar altındaki temas gerilmeleri, tabaka içlerindeki gerilme dağılımları ve ara yüzeylerde oluşan normal gerilmelerin derinlik doğrultusundaki değişimleri grafiklerle sunulmuştur. Ayrıca, ara yüzeylerde ayrılmanın başladığı kritik yükler ve ayrılma noktaları belirlenerek, sistemin mekanik davranışı hakkında detaylı bir analiz yapılmıştır.

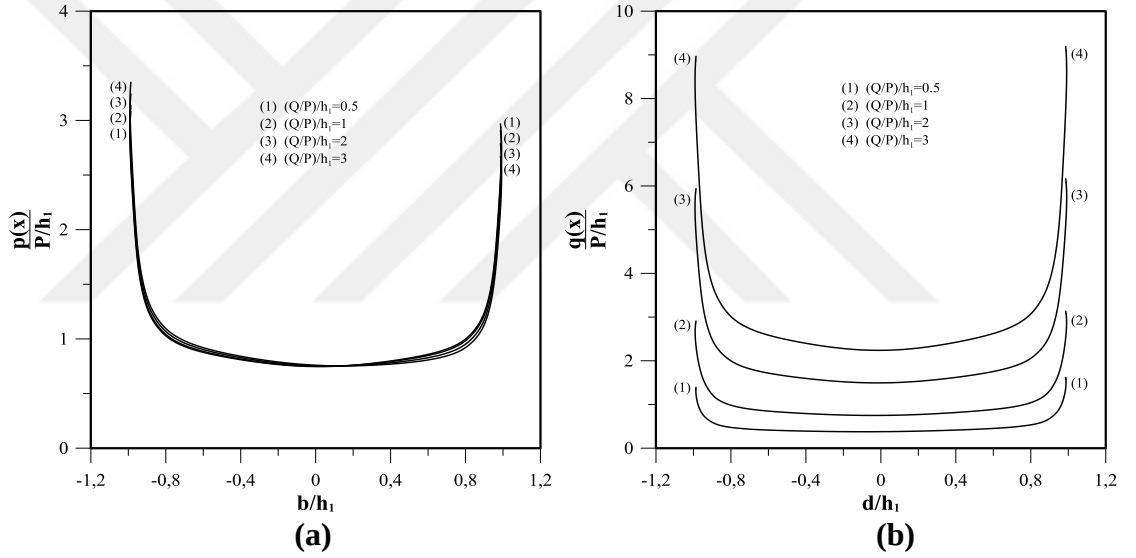
3.1.1. Rijit Bloklar Altındaki Temas Gerilmelerinin İrdelenmesi

Çalışmada, boyutsuz parametrelerin çeşitli kombinasyonları altında, iki rijit bloğun fonksiyonel derecelendirilmiş tabakalar üzerindeki etkileşimi sonucu oluşan temas gerilmeleri incelenmiştir. Şekil 7'de sunulan sonuçlara göre, yük oranındaki artış, temas yüzeylerindeki gerilme dağılımını önemli ölçüde etkilemektedir. Özellikle, bloklarla temas yüzeylerinin kenar bölgelerinde ve orta kısımlarında gerilme artışlarının olduğu görülmektedir. Ayrıca, temas gerilmelerinin rijit blok merkezine doğru azaldığı, ancak blok kenarlarında sonsuza gittiği gözlemlenmiştir. Bu durum, rijit blok kenarlarının gerilmeye yönelik olarak tekil nokta olarak davranmasından kaynaklanmaktadır. Şekil 8 incelendiğinde, blok genişliğinin artması durumunda kuvvet daha geniş bir alana yayıldığı için blok altında oluşan gerilme değerinin azaldığı görülmüştür. Aynı zamanda blok genişliğinin artması durumunda blokların birbiri ile etkileşimi azalmaktadır.

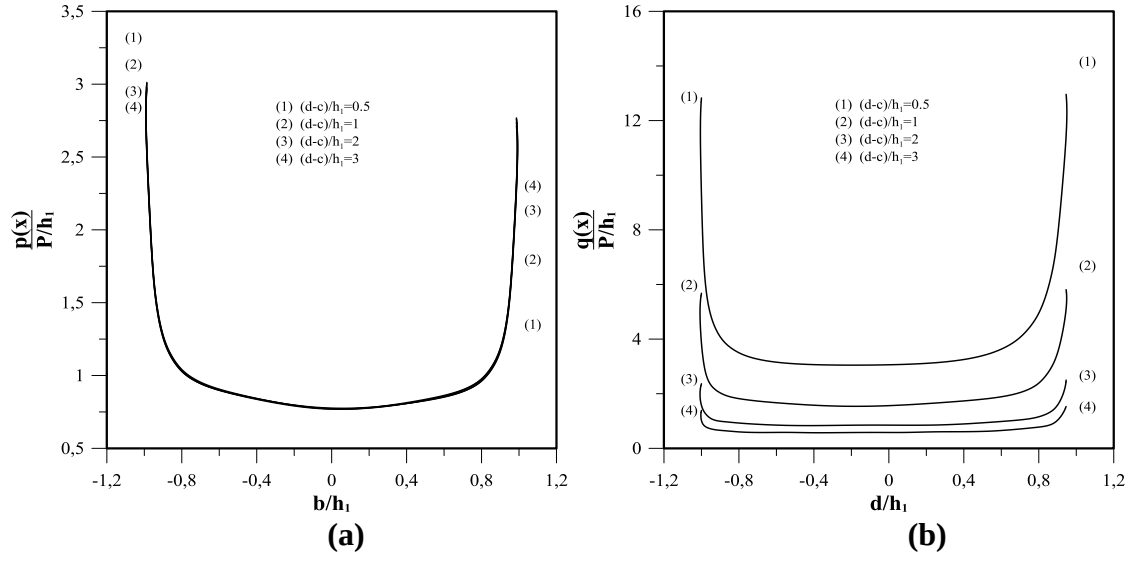
Şekil 10 ise ikinci blok için farklı genişlik değerlerinde blok altındaki boyutsuz temas gerilme dağılımını göstermektedir.

Şekil 9 ve Şekil 10, sırasıyla birinci ve ikinci tabakada, malzemenin rijitliğinin derinlik boyunca değişiminin, bloklar altındaki gerilme dağılımı nasıl değiştirdiğini göstermektedir. Malzemenin üst yüzeyinin daha rijit olması, bloklarla temas yüzeylerindeki gerilmelerin artmasına neden olmaktadır. Diğer bir deyişle malzemenin rijitliği üst yüzeyden alt yüzeye doğru arttıkça blok altında meydana gelen gerilmeler artmaktadır.

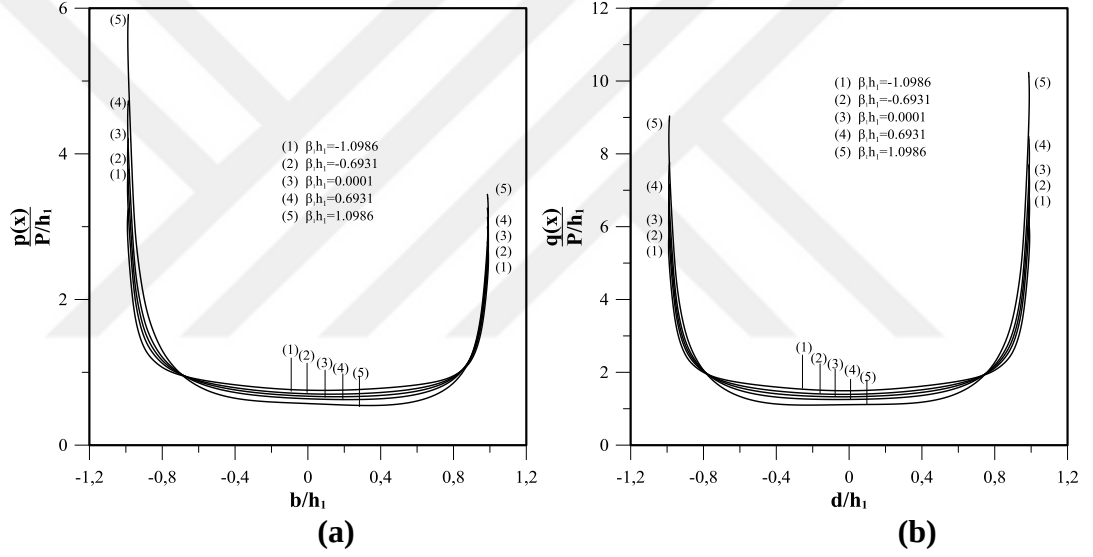
Şekil 11, farklı bloklar arası mesafe değerleri için $((c-b)/h_1)$ blok altlarında oluşan boyutsuz temas gerilmesi dağılımlarını göstermektedir. Şekilden de anlaşılacağı üzere, bloklar birbirlerinden uzaklaştıkça, blokların dış kenarlarında ve merkez bölgelerinde oluşacak olan gerilme değerlerinde azalma gözlenmektedir. Ancak bloklar arasındaki mesafenin artmasıyla, blokların birbirine yakın olan kenarlarında, yani birinci bloğun sağ kenarı ve ikinci bloğun sol kenarlarında, bloklar arası etkileşimin azalması nedeniyle daha yüksek gerilme değerleri oluşmaktadır. Şekil 12 ve Şekil 13 sırasıyla FD tabakaların ara yüzeyindeki ve alt FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arayüzündeki kayma modülü oranlarının blok altı gerilmelerine etkisini göstermektedir. Her iki şekilde de görüldüğü gibi üst tabakanın kayma modülü alt tabakanın üst yüzeyinden fazla olması durumunda blok ortasında gerilmeler artarken, blok kenarlarında azalmalar meydana gelmektedir.



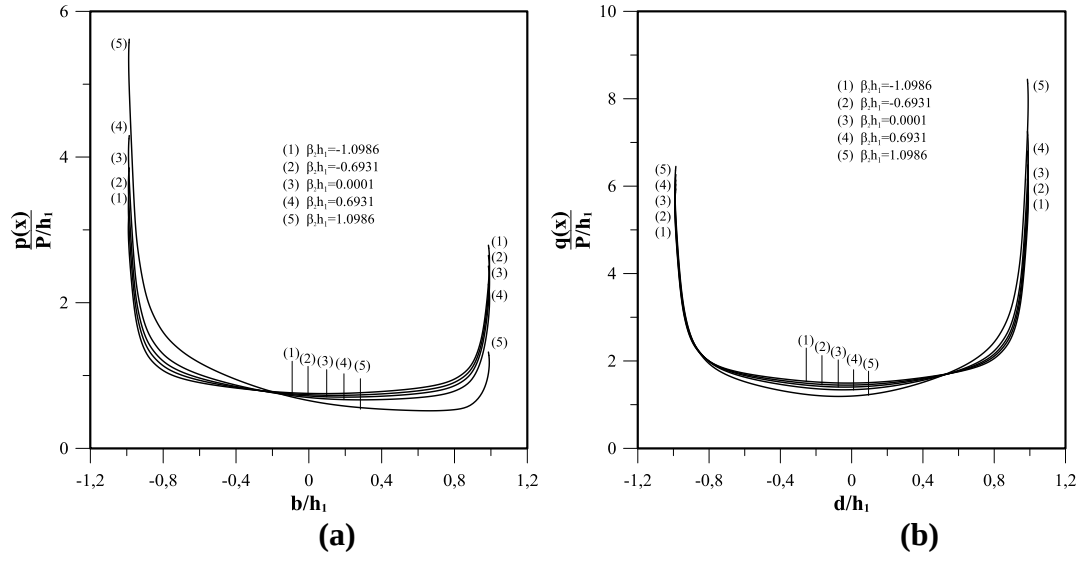
Şekil 7. Yük oranına göre blok altındaki gerilmeler



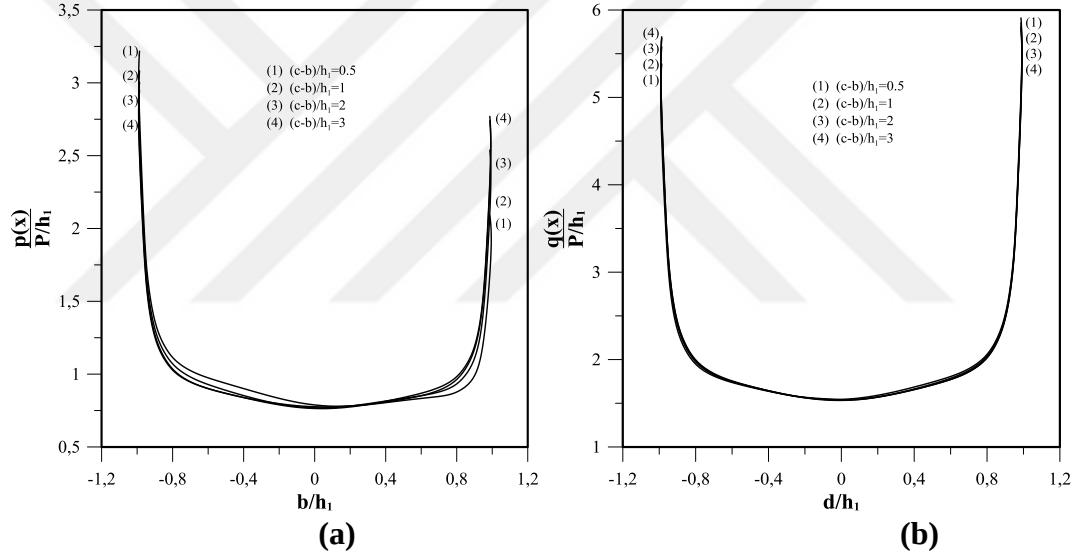
Şekil 8. Blok genişliğine göre blok altındaki gerilmeler



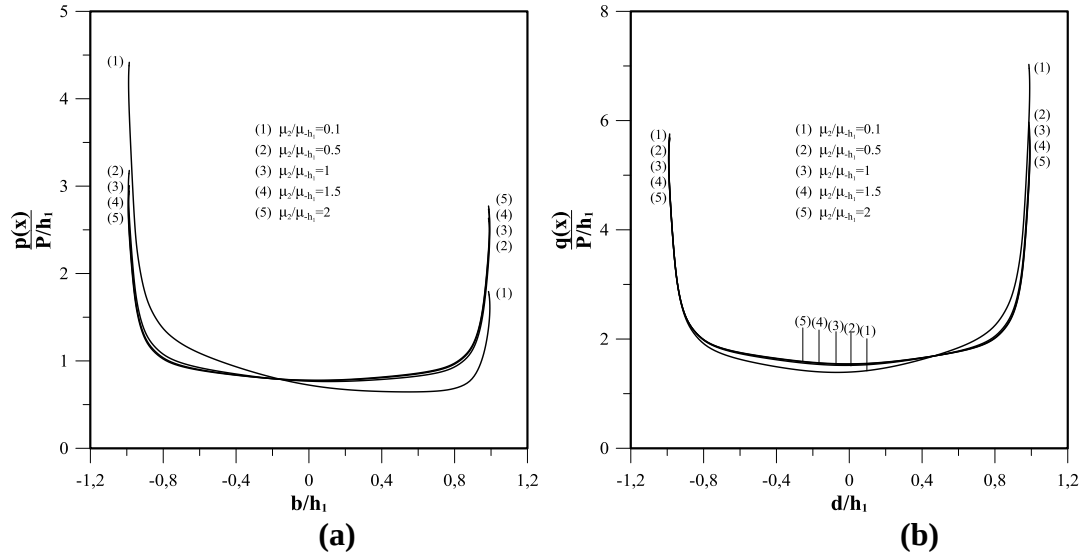
Şekil 9. Birinci tabakanın rijitlik parametresi değişimine göre blok altındaki gerilmeler



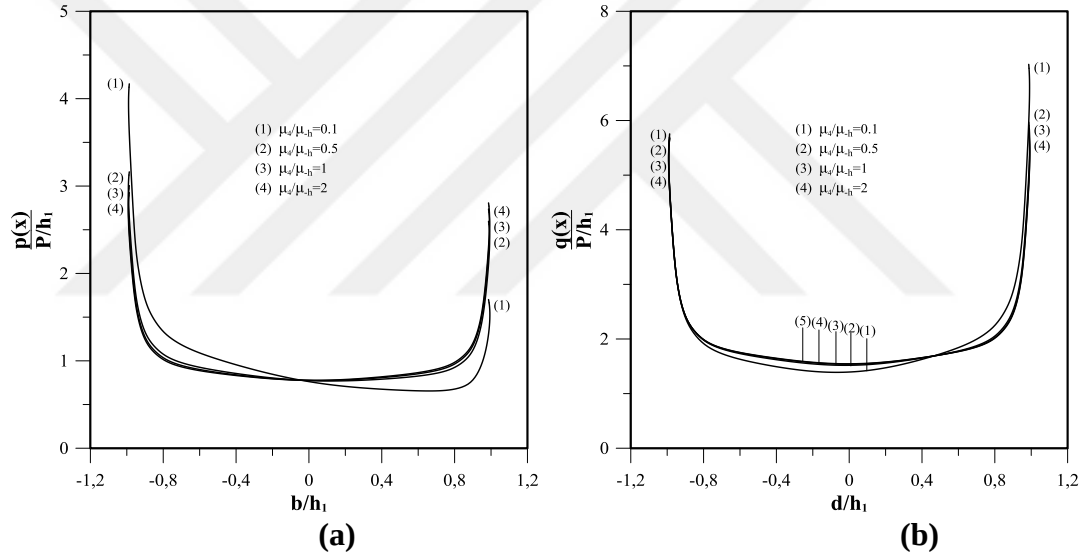
Şekil 10. İkinci tabakanın rijitlik parametresi değişimine göre blok altındaki gerilmeler



Şekil 11. Bloklar arası mesafenin değişimine göre blok altındaki gerilmeler



Şekil 12. Tabakalar arası kayma modülü değişimine göre blok altındaki gerilmeler



Şekil 13. Elastik yarı sonsuz düzlem ile alt FD tabaka arayüzeyine göre kayma modülü değişimine göre blok altındaki gerilmeler

3.1.2. Normal ve Kayma Gerilmelerinin İrdelenmesi

Çalışmada, fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaların ve elastik yarı sonsuz düzlemin etkileşiminden kaynaklanan gerilme alanı, çeşitli boyutsuz parametreler altında sayısal olarak analiz edilmiştir. Özellikle, tabakalar içindeki normal ve kayma gerilmelerinin derinlik doğrultusundaki değişimi, grafikler ve tablolar yardımıyla sunulmuştur. Elde edilen sonuçlar, sistemin mekanik davranışı hakkında önemli bilgiler sağlamaktadır.

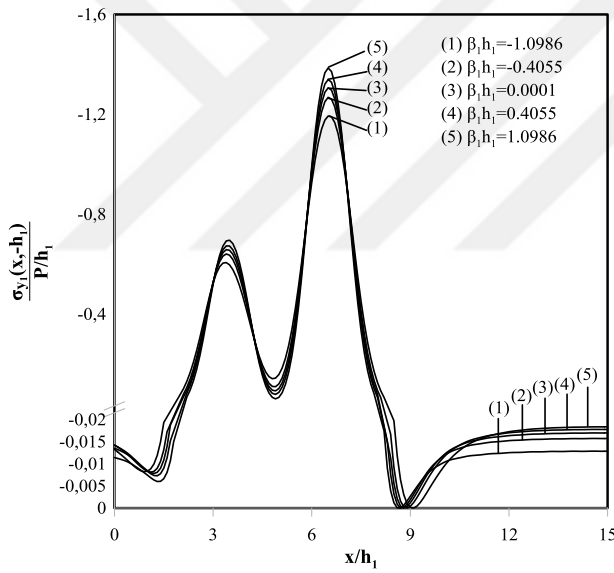
3.1.2.1. σ_y Normal Gerilmesinin İrdelenmesi

3.1.2.1.1. Tabaka Ara Yüzeylerindeki İlk Ayrılma Yükleri ve Uzaklıklarının Belirlenmesi

Şekil 14a ve 14b’de sunulan sonuçlar, farklı rijitlik parametreleri ($\beta_1 h_1$) altında, iki fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın alt yüzeylerindeki normal gerilme dağılımlarını göstermektedir. Tablo 1a ve 1b’de ise, bu sistemde meydana gelen ilk ayrılma yükleri ve ayrılma noktalarının konumları verilmiştir. Analiz sonuçlarına göre, ikinci bloğun uyguladığı yükün daha büyük olması durumunda, tabakanın üst yüzeyinin rijitliğinin artması (pozitif $\beta_1 h_1$ değerleri), ayrılma noktasının bloklardan daha uzak bir konuma kaymasına neden olurken, ilk ayrılma yükünü azaltmaktadır. Tersine, tabakanın alt yüzeyinin daha rijit olması (negatif $\beta_1 h_1$ değerleri), ayrılma noktasının bloklara daha yakın bir konuma kaymasına ve ilk ayrılma yükünün artmasına neden olmaktadır. Bu sonuçlar, malzemenin rijitlik profilinin, sistemin dayanım karakteristikleri üzerindeki önemli etkisini göstermektedir. Bu çalışmada, elastik yarı sonsuz düzlemin rijitliğinin artırılmasıyla elde edilen sonuçlar, literatürdeki (Kaya, 2020) çalışmayla karşılaştırılmıştır. Şekil 23’te sunulan normalize edilmiş temas gerilme dağılımları ve Tablo 2’de verilen ilk ayrılma yükleri ile uzaklıkları, bu karşılaştırma için kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlara göre, elastik yarı sonsuz düzlemin rijitliğinin artırılmasıyla elde edilen gerilme dağılımları, literatürdeki rijit düzlem varsayımıyla elde edilen sonuçlarla oldukça uyumludur. Benzer şekilde, ilk ayrılma yükleri ve uzaklıkları da literatürdeki çalışmayla tutarlılık göstermektedir. Bu bulgu, elastik yarı sonsuz düzlemin rijitliği yeterince büyük olduğunda, rijit düzlem varsayımının kabul edilebilir bir yaklaşım olduğunu desteklemektedir.

Şekil 18a ve 18b’de sunulan sonuçlar, ikinci bloğun genişliğinin $(d-c)/h_1$ oranı ile değişimi durumunda, iki fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın alt yüzeylerindeki normal gerilme dağılımlarını göstermektedir. Tablo 5a ve 5b’de ise, bu sistemde meydana gelen ilk ayrılma yükleri ve ayrılma noktalarının konumları verilmiştir. Analiz sonuçlarına göre, ikinci bloğun genişliğinin artması, ikinci blok altındaki gerilmeleri azaltırken, birinci blok altındaki gerilmeleri önemli ölçüde etkilememektedir. Ayrıca, ikinci bloğun genişliğinin artması, ilk ayrılma noktasının bloklardan daha uzak bir konuma kaymasına ve ilk ayrılma yükünün artmasına neden olmaktadır. Bu durum, ikinci bloğun genişliğinin, sistemin dayanım karakteristikleri üzerindeki önemli etkisini göstermektedir.

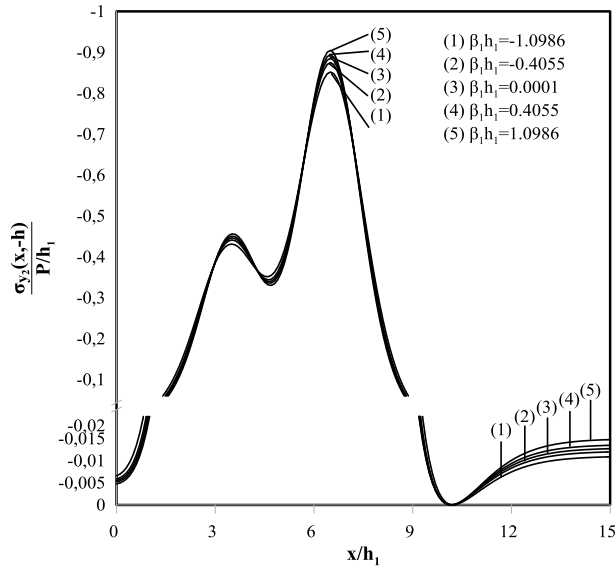
Şekil 29a ve 29b'de sunulan sonuçlar, fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) tabakaların yoğunluk parametresi (γh_1) alt yüzeylerindeki normal gerilme dağılımları üzerindeki etkisini göstermektedir. Yoğunluk parametresinin artması, yani tabakanın yoğunluğunun derinlikle azalması, her iki tabakadaki gerilme değerlerinin artmasına neden olmaktadır. Tablo 8a ve 8b'de verilen ilk ayrılma yükleri ve uzaklıkları ise, yoğunluk gradyanının ayrılma davranışı üzerindeki etkisini açıklamaktadır. Yoğunluk gradyanının artması, ilk ayrılma yükünü azaltırken, ayrılma noktasının konumunu etkilememektedir. Tablo 9a ve 9b'de ise, hem rijitlik hem de yoğunluk gradyanlarının birlikte etkisi incelenmiştir. Hem rijitlik ($\beta_1 h_1$) hem de yoğunluk (γh_1) parametrelerinin azalması, yani tabakanın hem rijitliğinin hem de yoğunluğunun derinlikle artması, ilk ayrılma yükünü artırırken, ayrılma noktasını başlangıç noktasına yaklaştırmaktadır. Bu sonuçlar, malzemenin yoğunluk profilinin, sistemin dayanım karakteristikleri üzerindeki önemli etkisini göstermektedir.



Şekil 14. Üst FD tabakanın rijitlik parametresine göre tabaka ara yüzeyindeki σ_y gerilmesi

Tablo 1. Üst tabakanın rijitlik parametresine göre tabaka ara yüzeylerindeki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri

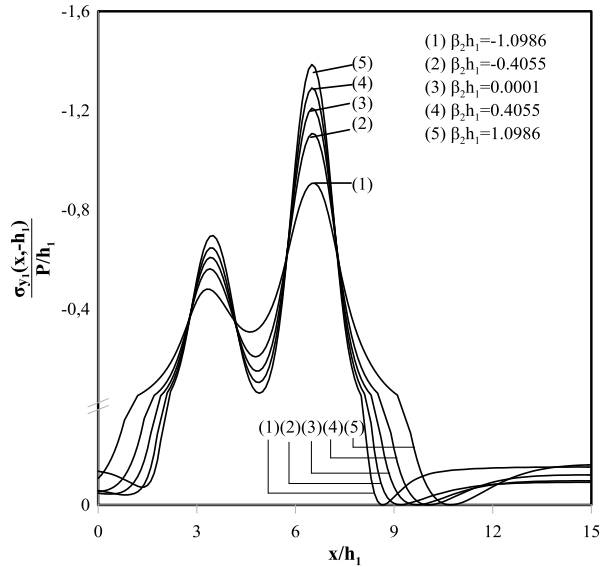
$\beta_1 h_1$	x_{cr}/h_1	λ_{cr1}
1.0986	9.10	29.36
0.4055	8.90	30.37
0.0001	8.80	31.78
-0.4055	8.75	34.32
-1.0986	8.70	42.01



Şekil 15. Üst FD tabakanın rijitlik parametresine göre alt FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem ara yüzündeki σ_y gerilmesi

Tablo 2. Üst tabakanın rijitlik parametresine göre alt tabakanın altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri

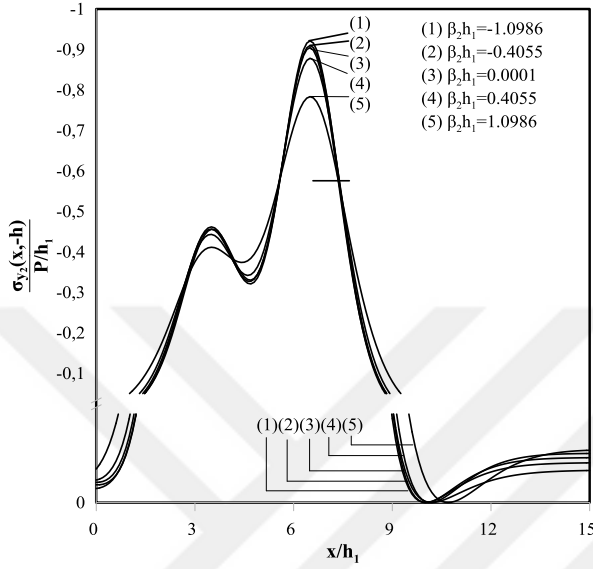
$\beta_1 h_1$	x_{cr}/h_1	λ_{cr2}
1.0986	10.20	72.95
0.4055	10.20	79.96
0.0001	10.20	84.77
-0.4055	10.20	89.94
-1.0986	10.20	99.15



Şekil 16. Alt FD tabakanın rijitlik parametresine göre tabaka ara yüzündeki σ_y gerilmesi

Tablo 3. Alt tabakanın rijitlik parametresine göre tabaka ara yüzeylerindeki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri

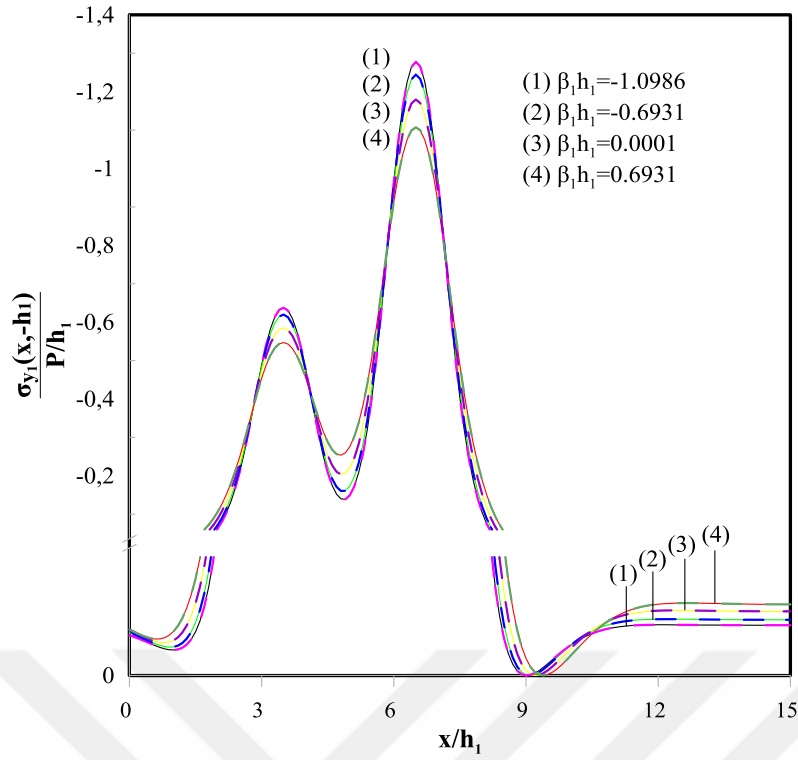
$\beta_2 h_1$	x_{cr}/h_1	λ_{cr1}
1.0986	10.70	39.60
0.4055	10.10	53.01
0.0001	9.70	66.13
-0.4055	9.20	70.39
-1.0986	8.70	72.04



Şekil 17. Alt FD tabakanın rijitlik parametresine göre alt FD tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem ara yüzeyindeki σ_y gerilmesi

Tablo 4. Alt tabakanın rijitlik parametresine göre alt tabakanın altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri

$\beta_2 h_1$	x_{cr}/h_1	λ_{cr2}
1.0986	10.70	60.83
0.4055	10.20	64.84
0.0001	10	70.96
-0.4055	10	80.12
-1.0986	9.80	99.15



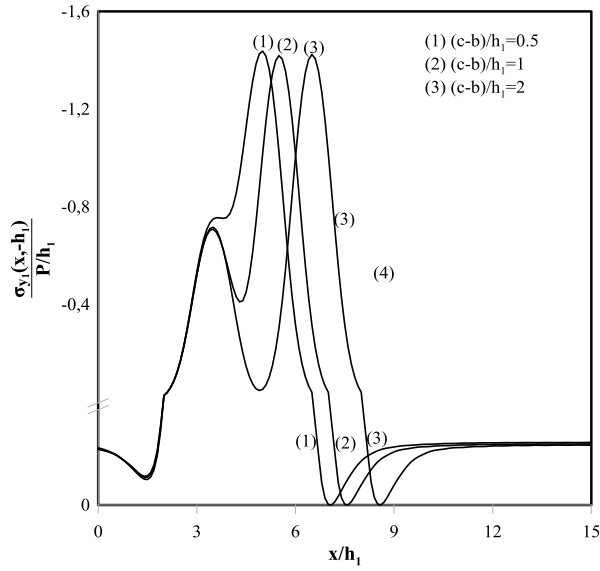
Şekil 18. Gerilmelerin literatürle kıyaslanması

Tablo 5. Çeşitli $\beta_1 h_1$ değerleri için tabakalar arasındaki gerilmelerin literatürle kıyaslanması

βh_1	λ_{cr} Kaya (2020)	Bu çalışma	Kaya (2020) x_{cr}	Bu çalışma
0.6931	72.0956	72.21	9.3857	9.40
0.0001	79.8485	80.06	9.2188	9.20
-0.6931	91.9492	90.35	9.0793	9.10
-1.0986	101.9368	100.32	9.0111	9.00

Tablo 6. Çeşitli $\beta_1 h_1$ değerleri için alt FD tabakanın altındaki gerilmelerin literatürle kıyaslanması

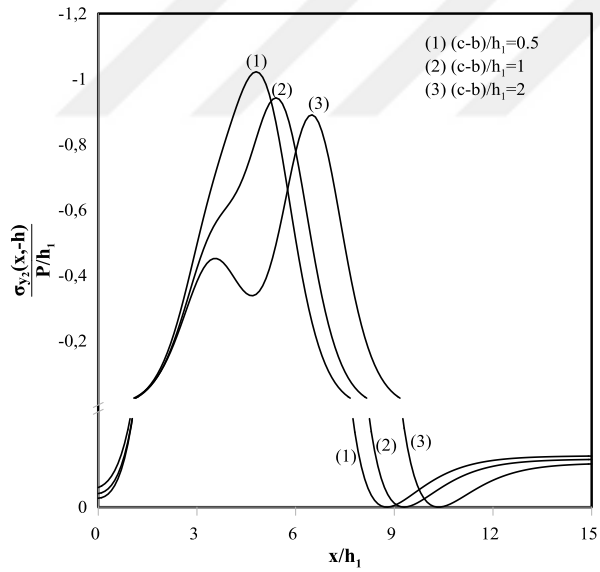
βh_1	λ_{cr} Kaya (2020)	Bu çalışma	Kaya (2020) x_{cr}	Bu çalışma
0.6931	43.0175	42.61	9.435	9.40
0.001	44.2647	43.99	9.283	9.30
-0.6931	46.3724	46.21	9.162	9.15
-1.0986	48.0678	47.97	9.106	9.10



Şekil 19. Farklı blok mesafelerine göre ilk tabaka altındaki σ_y gerilmesi

Tablo 7. Farklı blok mesafelerine göre tabaka ara yüzelerindeki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri

$(c-b).h_1$	x_{cr}/h_1	λ_{cr1}
0.5	7.10	38.24
1	7.60	39.20
2	8.60	39.89



Şekil 20. Farklı blok mesafelerine göre ikinci tabaka altındaki σ_y gerilmesi

Tablo 8. Farklı blok mesafelerine göre alt tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri

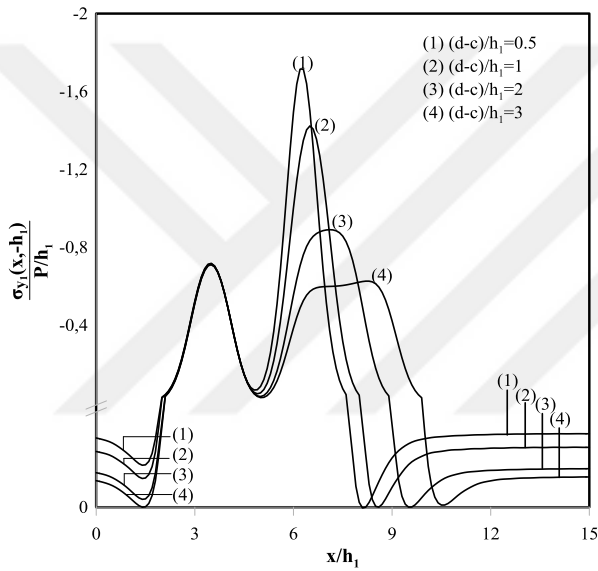
$(c-b).h_1$	x_{cr}/h_1	λ_{cr2}
0.5	8.80	93.49
1	9.30	100.19
2	10.30	110.40

Tablo 9. Çeşitli bloklar arası mesafe değerleri için tabaka ara yüzeylerindeki gerilmelerin literatürle kıyaslanması

$(c-b)/h_1$	Kaya (2020) x_{cr}	Bu çalışma	λ_{cr} Kaya (2020)	Bu çalışma
0.5	7.8179	7.80	250.02	254.4956
1	8.3243	8.30	259.36	261.1503
2	9.3288	9.35	266.30	263.8332

Tablo 10. Çeşitli bloklar arası mesafe değerleri için alt FD tabakanın altındaki gerilmelerin literatürle kıyaslanması

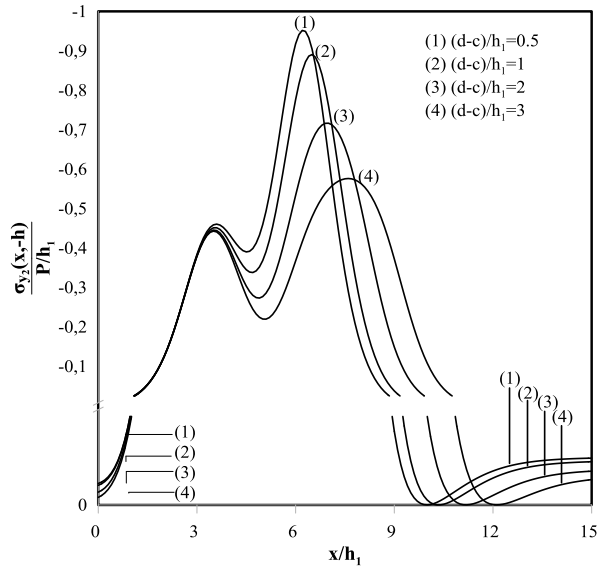
$(c-b)/h_1$	Kaya (2020) x_{cr}	Bu çalışma	λ_{cr} Kaya (2020)	Bu çalışma
0.5	7.9315	7.90	87.02	87.2379
1	8.4402	8.40	89.10	89.4399
2	9.4438	9.40	89.90	89.7972



Şekil 21. Farklı blok genişliklerine ait ilk tabaka altındaki σ_y gerilmeleri

Tablo 11. Farklı blok genişliklerine göre tabaka ara yüzeylerindeki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri

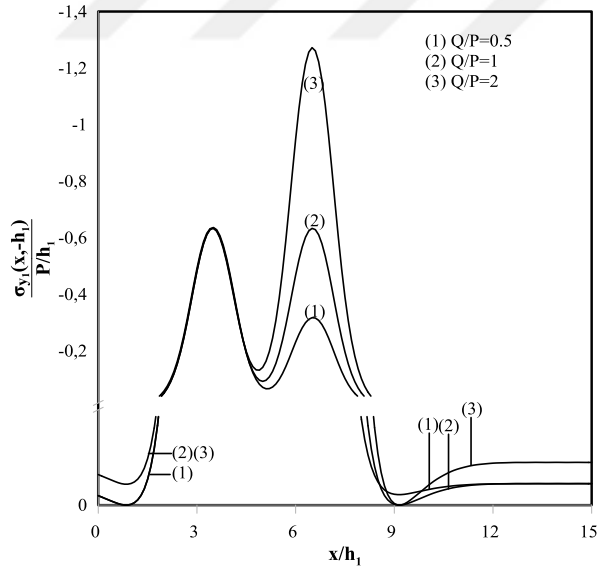
$(d-c)h_1$	x_{cr}/h_1	λ_{cr1}
0.5	8.10	32.16
1	8.60	39.89
2	9.50	62.09
3	10.50	84.94



Şekil 22. Farklı blok genişliklerine alt tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri

Tablo 12. Farklı blok genişliklerine göre alt tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri

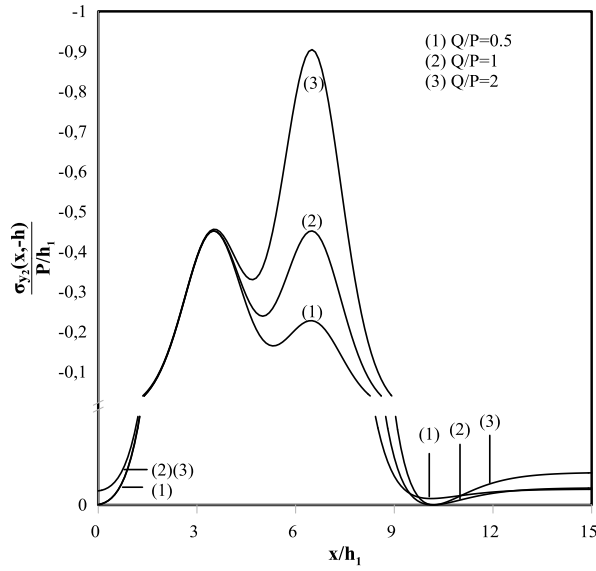
$(d-c)/h_1$	x_{cr}/h_1	λ_{cr2}
0.5	10	101.93
1	10.30	110.40
2	11.20	141.08
3	12.10	187.56



Şekil 23. Farklı yüklerle yüklenmiş bloklara ait ikinci tabaka altındaki σ_y gerilmeleri

Tablo 13. Farklı yük oranlarına göre tabaka ara yüzeylerindeki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri

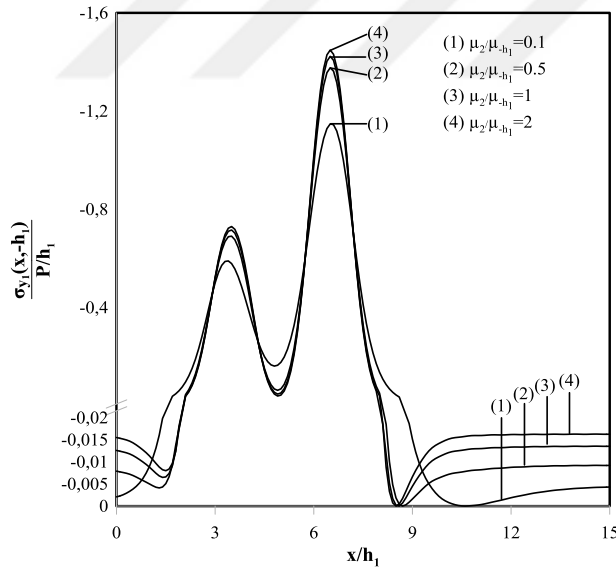
Q/P	x_{cr}/h_1	λ_{cr1}
0.5	0.80	74.69
1	9.20	74.14
2	9.20	37.31



Şekil 24. Farklı yüklerle yüklenmiş bloklara ait ikinci tabaka altındaki σ_y gerilmeleri

Tablo 14. Farklı yük oranlarına göre alt tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri

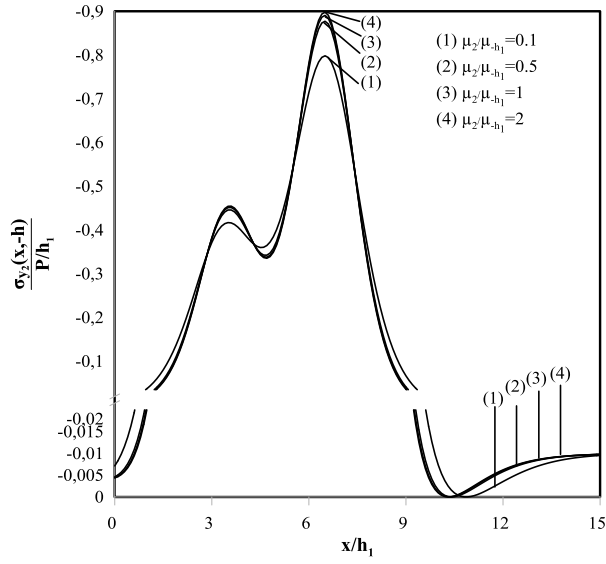
Q/P	x_{cr}/h_1	λ_{cr2}
0.5	0	204.26
1	10.20	189.18
2	10.20	99.15



Şekil 25. Farklı kayma modülü oranlarına ait ilk tabaka altındaki gerilmeler

Tablo 15. Farklı kayma modülü oranlarına göre tabaka ara yüzeylerindeki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri

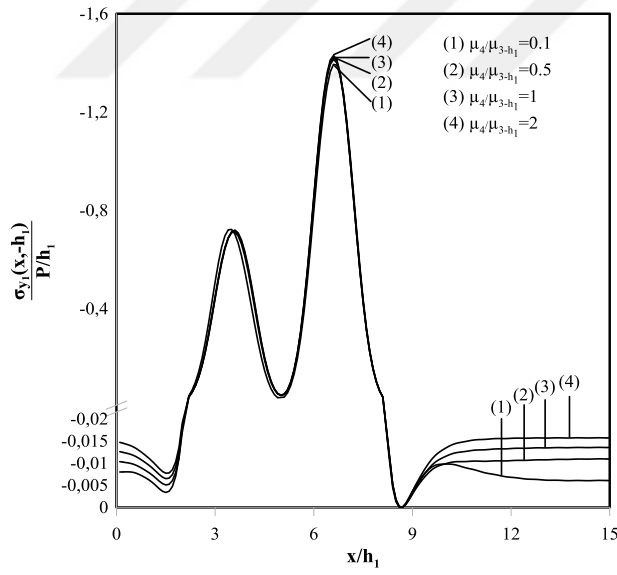
μ_2/μ_{-h_1}	x_{cr}/h_1	λ_{cr1}
0.1	10.60	124.85
0.5	8.70	58.65
1	8.60	39.89
2	8.50	33.20



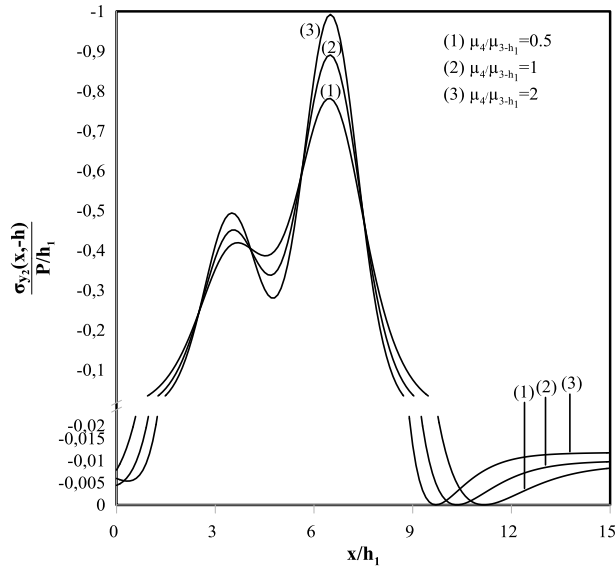
Şekil 26. Farklı kayma modülü oranlarına ait alt tabaka altındaki gerilmeler

Tablo 16. Farklı kayma modülü oranlarına göre alt tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri

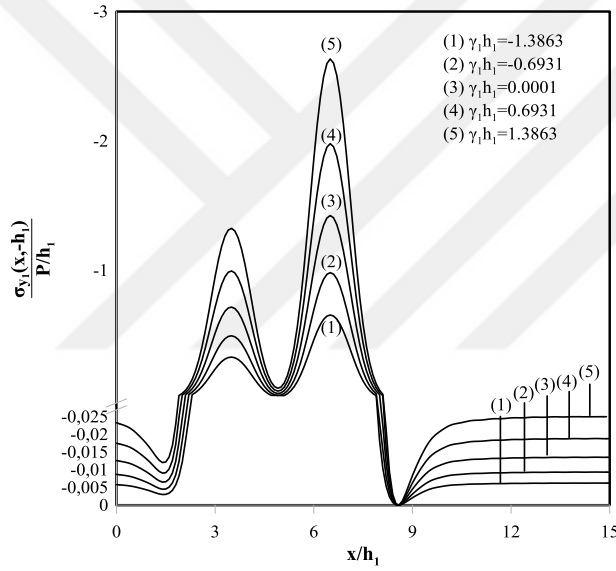
μ_2/μ_{h1}	x_{cr}/h_1	λ_{cr2}
0.1	10.90	112.64
0.5	10.40	110.94
1	10.30	110.59
2	10.30	110.43



Şekil 27. Farklı kayma modülü oranlarına ait ilk tabaka altındaki gerilmeler



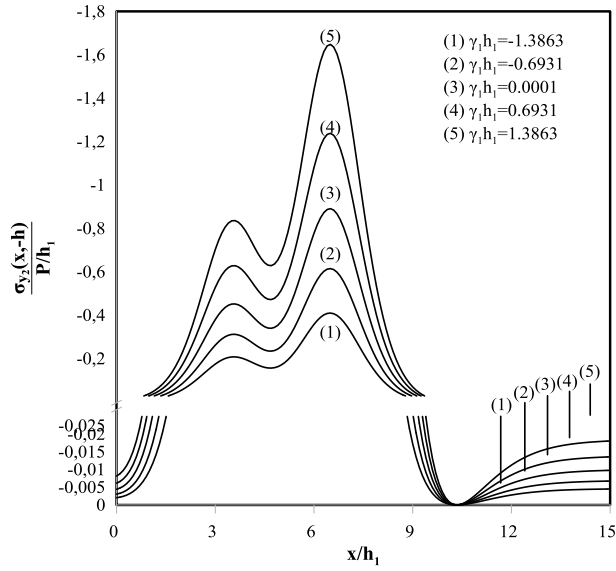
Şekil 28. Farklı kayma modülü oranlarına ait alt tabaka altındaki gerilmeler



Şekil 29. Üst tabakanın yoğunluk parametresine göre tabaka ara yüzeylerindeki σ_y gerilmesi

Tablo 17. Üst tabakanın yoğunluk parametresine göre tabaka ara yüzeylerindeki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri

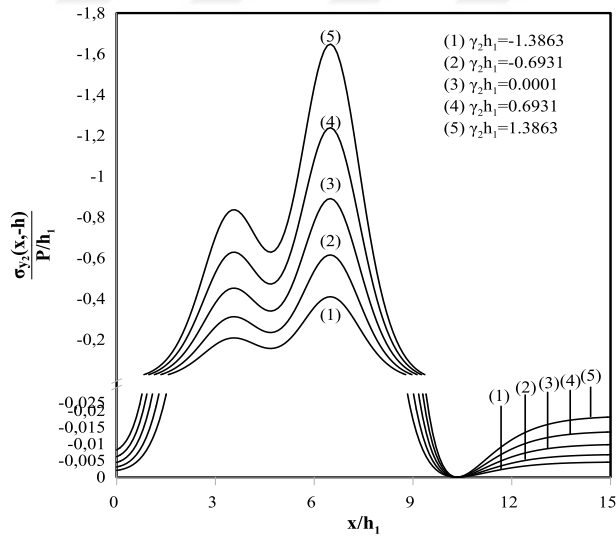
$\gamma_1 h_1$	x_{cr}/h_1	λ_{cr1}
1.3863	8.60	39.92
0.6931	8.60	53.26
0.001	8.60	73.83
-0.6931	8.60	106.61
-1.3863	8.60	159.97



Şekil 30. Üst tabakanın yoğunluk parametresine göre alt tabakanın altındaki σ_y gerilmesi

Tablo 18. Üst tabakanın yoğunluk parametresine göre alt tabakanın altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri

$\gamma_1 h_1$	x_{cr}/h_1	λ_{cr2}
1.3863	10.30	110.34
0.6931	10.30	128.81
0.001	10.30	157.29
-0.6931	10.30	202.66
-1.3863	10.30	276.53



Şekil 31. Alt tabakanın yoğunluk parametresine göre alt tabakanın altındaki σ_y gerilmesi

Tablo 19. Alt tabakanın yoğunluk parametresine göre alt tabakanın altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafeleri

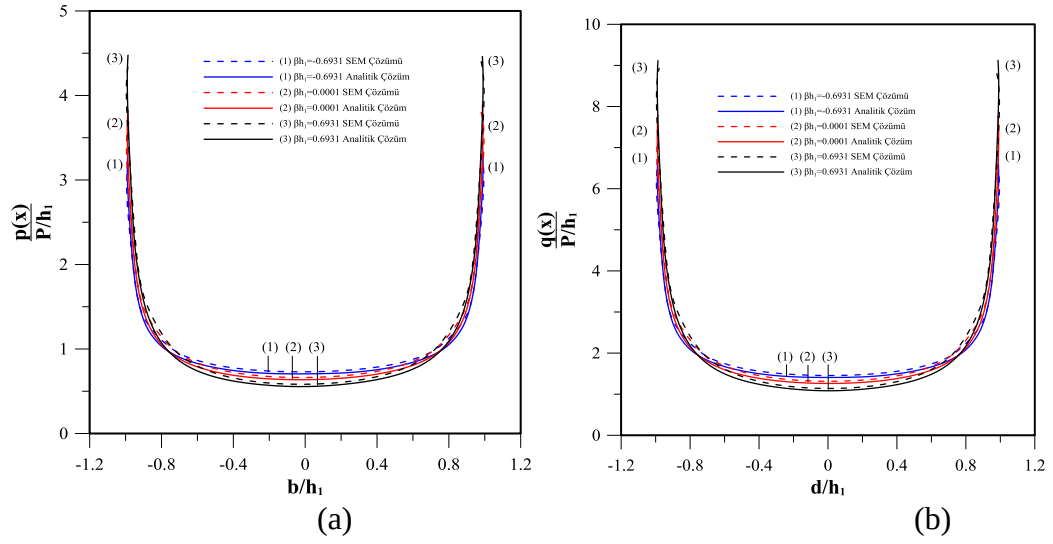
$\gamma_2 h_1$	x_{cr}/h_1	λ_{cr2}
1.3863	10.30	110.34
0.6931	10.30	128.81
0.001	10.30	157.29
-0.6931	10.30	202.66
-1.3863	10.30	276.53

3.2. Sonlu Elemanlar Yöntemini Esas Alan ANSYS Programından Elde Edilen Çözümler ile Analitik Çözümlerin Karşılaştırılması

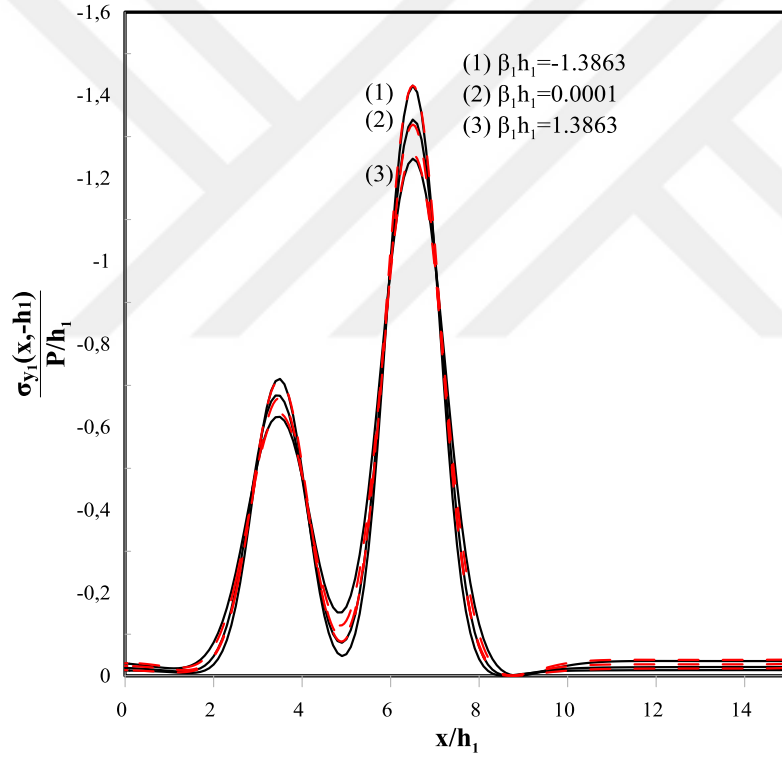
Yapılan çalışmada, elastik yarım sonsuz bir ortam üzerine yerleştirilmiş, farklı malzeme özelliklerine sahip iki fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaya uygulanan rijit blok yükleri altında oluşan sürekli temas problemi, Sonlu Elemanlar Yöntemi ile sayısal olarak incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar, bağımsız sayısal çözümlerle karşılaştırılarak doğrulanmıştır. Analizler sırasında farklı normalize edilmiş parametreler kullanılarak blok altındaki temas gerilmeleri, üst ve alt fonksiyonel derecelendirilmiş tabakalar ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ara yüzeylerde oluşan normal gerilme dağılımları, boyutsuz hale getirilmiş $\sigma_y(x,y)/P/h_1$ parametresi ile incelenmiştir. Ayrıca, ilk ayrılma yüklerin, ayrılmanın gerçekleştiği mesafeler, sürekli temasın bozulduğu durumda gerilme dağılımındaki değişimler ve ayrılma bölgelerinin sınırları belirlenmiştir. Bu sonuçlar tablo ve grafikler şeklinde sunularak analitik yöntemlerden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Analiz sürecinde kütle kuvvetleri hesaba katılmış, ancak yüzeyler arasındaki sürtünme göz ardı edilmiştir.

Şekil 32 birinci ve ikinci blokların altında oluşan temas gerilmelerini farklı rijitlik parametreleri için göstermekte ve bu sonuçlar analitik çözümlerle kıyaslanmaktadır. βh_1 parametresindeki değişimin, üst ve alt fonksiyonel derecelendirilmiş tabakalar ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ara yüzeylerde oluşan normal gerilme dağılımları $\sigma_{y1}(x,y)/P/h_1$ ve $\sigma_{y2}(x,y)/P/h_1$ üzerindeki etkileri, Şekil 33 ve 34 ile görselleştirilmiştir. Benzer şekilde yoğunluk parametreleri için Şekil 35, 36 ve Şekil 37, alt tabakanın rijitlik parametresi değişimi Şekil 38 ve Şekil 39 ve son olarak yük oranları için gerilme dağılımları da Şekil 40 ve Şekil 41’de verilmektedir. Şekil 42’de ise bloklar ve tabakalar altında meydana gelen gerilme yayılışlarının sonlu eleman analizi görülmektedir.

Ek olarak, tablo 20 ve 26 rijitlik parametresine bağlı olarak üst FD tabaka ile alt FD tabaka ve tablo 21 ve 27 alt Fonksiyonel Derecelendirilmiş tabaka ile elastik yarım düzlem arasında oluşan ilk ayrılma yükleri ile bu ayrılmaların gerçekleştiği mesafeleri detaylı bir şekilde göstermektedir. Tablo 22, Tablo 23, Tablo 24 ve Tablo 25’te ise yoğunluk parametrelerine göre, Tablo 28 ve Tablo 29’da yük oranlarına göre tabaka ara yüzeylerindeki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları verilmektedir.



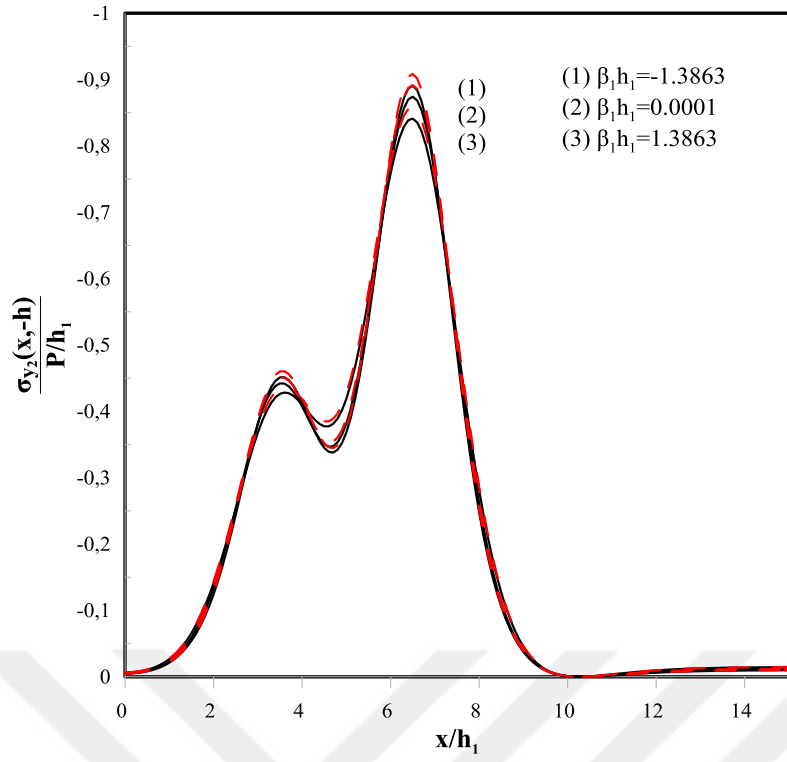
Şekil 32. Rijitlik parametresine ait bloklar altındaki gerilme değişiminin sonlu elemanlar yöntemi ile kıyası



Şekil 33. Rijitlik parametresine ait birinci tabaka gerilme değişiminin sonlu elemanlar yöntemi ile kıyası

Tablo 20. Farklı rijitlik parametrelerine ait üst tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafelerinin SEM kıyası

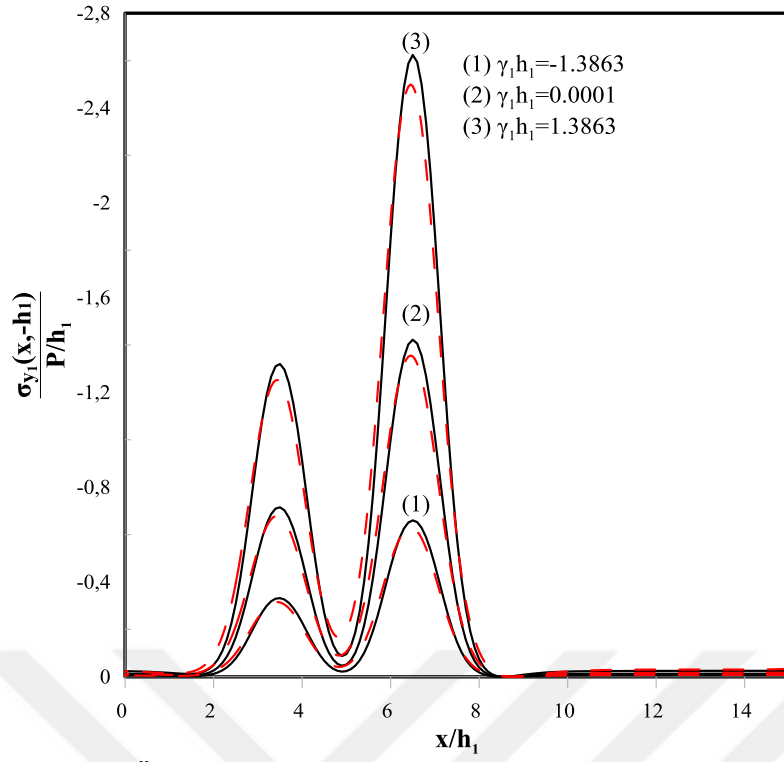
λ_{cr1}			X_{cr}	
$\beta_1 h_1$	SEM Sonuçları	Bu çalışma	SEM Sonuçları	Analitik Çözüm
1.3863	59.90	61.25	8.80	8.90
0.0001	96.96	102.75	8.70	8.70
-1.3863	148.73	159.84	8.65	8.60



Şekil 34. Rijitlik parametresine ait ikinci tabaka gerilme değişiminin sonlu elemanlar yöntemi ile kıyası

Tablo 21. Farklı rijitlik parametrelerine ait alt tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafelerinin SEM kıyası

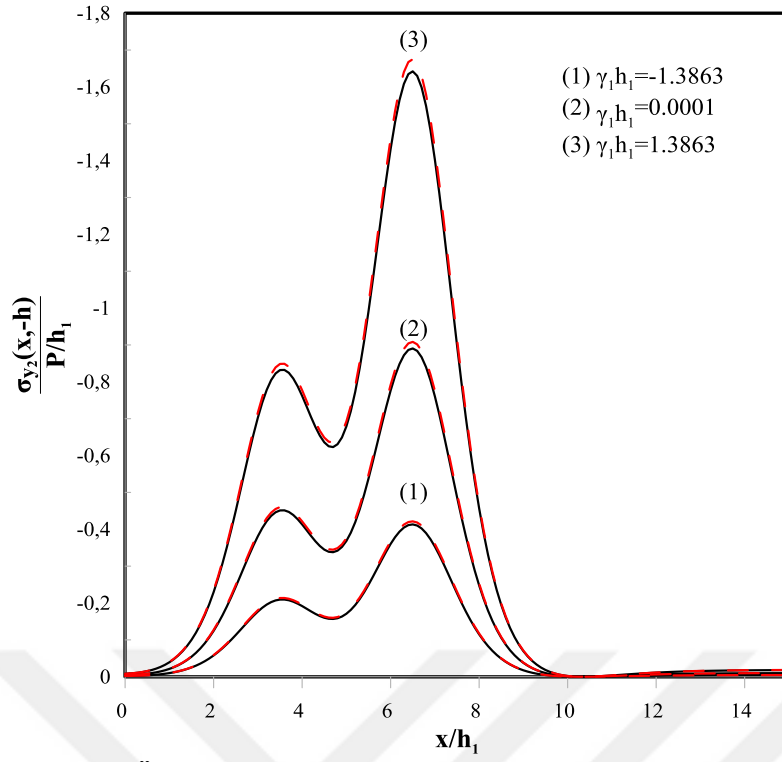
$\beta_1 h_1$	λ_{cr2}		X_{cr}	
	SEM Sonuçları	Analitik Çözüm	SEM Sonuçları	Analitik Çözüm
1.3863	142.72	134.70	9.90	10.40
0.0001	171.56	180.77	9.50	9.60
-1.3863	238.17	234.65	9.40	9.40



Şekil 35. Üst tabakanın farklı yoğunluk parametrelerine ait üst tabaka altındaki gerilme değişiminin sonlu elemanlar yöntemi ile kıyası

Tablo 22. Üst tabakanın farklı yoğunluk parametrelerine ait üst tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafelerinin SEM kıyası

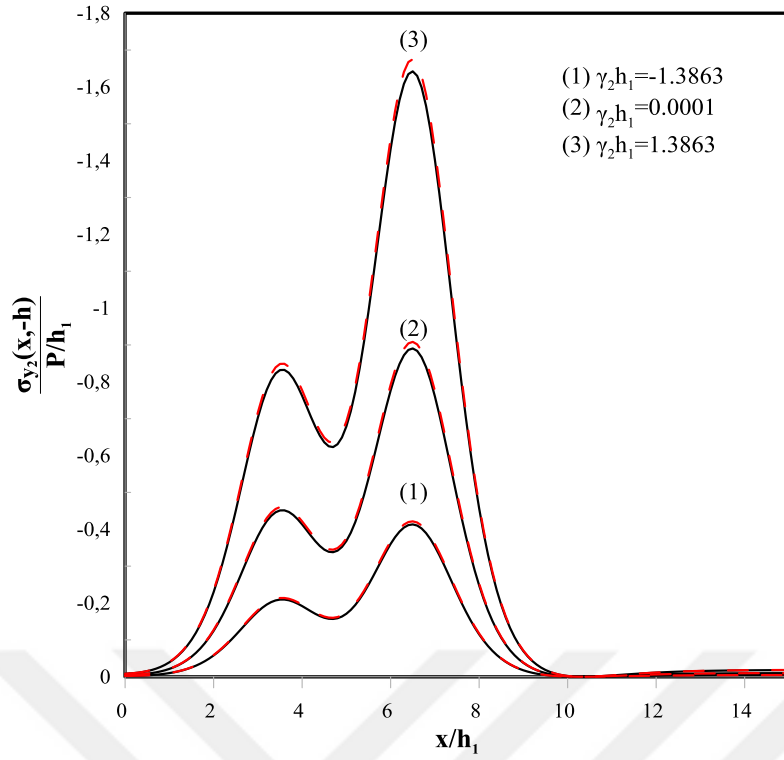
$\gamma_1 h_1$	λ_{cr1}		x_{cr}	
	SEM Sonuçları	Analitik Çözüm	SEM Sonuçları	Analitik Çözüm
1.3863	42.66	40.46	8.75	8.70
0.0001	70.24	73.77	8.75	8.70
-1.3863	132.23	142.94	8.75	8.70



Şekil 36. Üst tabakanın farklı yoğunluk parametrelerine ait alt tabaka altındaki gerilme değişiminin sonlu elemanlar yöntemi ile kıyası

Tablo 23. Üst tabakanın farklı yoğunluk parametrelerine ait alt tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafelerinin SEM kıyası

$\gamma_2 h_1$	λ_{cr2}		X_{cr}	
	SEM Sonuçları	Analitik Çözüm	SEM Sonuçları	Analitik Çözüm
1.3863	150.82	138.34	9.45	9.40
0.0001	175.42	161.82	9.45	9.40
-1.3863	238.17	234.65	9.45	9.40



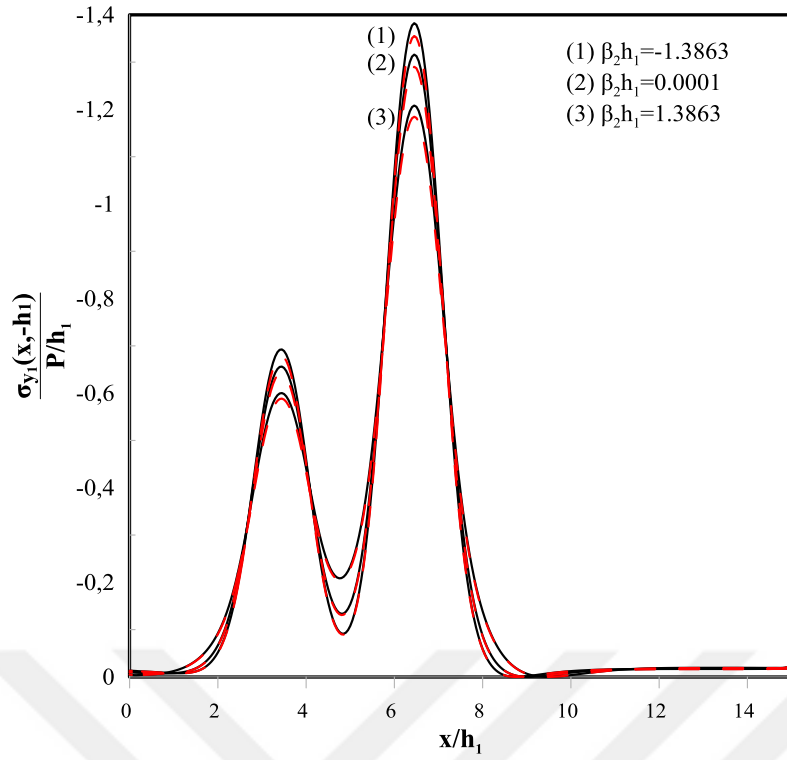
Şekil 37. Alt tabakanın farklı yoğunluk parametrelerine ait üst tabaka altındaki gerilme değişiminin sonlu elemanlar yöntemi ile kıyası

Tablo 24. Alt tabakanın farklı yoğunluk parametrelerine ait üst tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafelerinin SEM kıyası

$\gamma_2 h_1$	λ_{cr2}		x_{cr}	
	SEM Sonuçları	Analitik Çözüm	SEM Sonuçları	Analitik Çözüm
1.3863	132.23	142.94	8.75	8.70
0.0001	132.23	142.94	8.75	8.70
-1.3863	132.23	142.94	8.75	8.70

Tablo 25. Alt tabakanın farklı yoğunluk parametrelerine ait alt tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafelerinin SEM kıyası

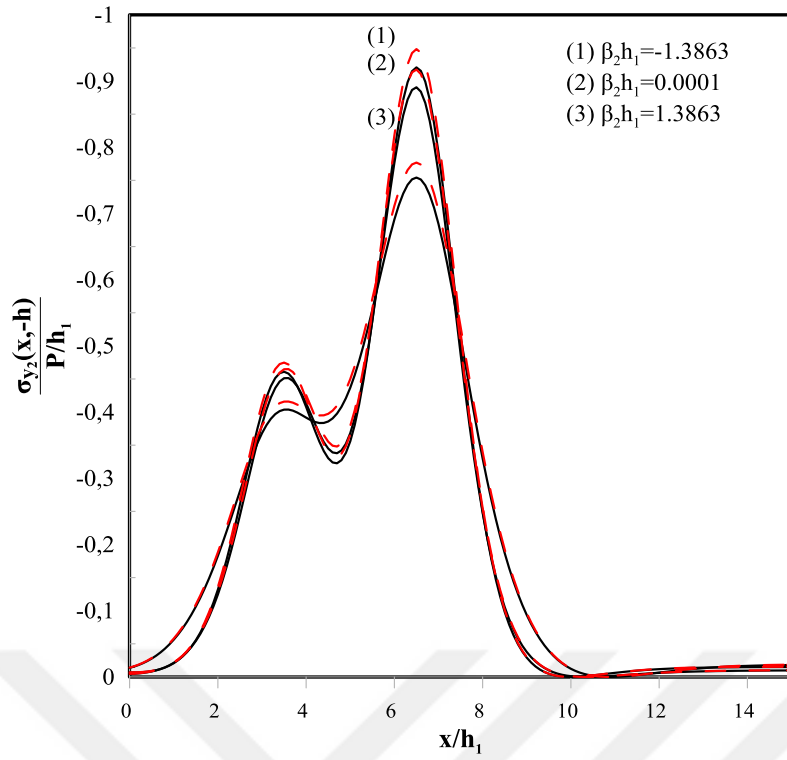
$\gamma_2 h_1$	λ_{cr2}		x_{cr}	
	SEM Sonuçları	Analitik Çözüm	SEM Sonuçları	Analitik Çözüm
1.3863	150.82	138.34	9.45	9.40
0.0001	175.42	161.82	9.45	9.40
-1.3863	238.17	234.65	9.45	9.40



Şekil 38. Alt tabakanın farklı rijitlik parametrelerine ait üst tabaka gerilme değişiminin sonlu elemanlar yöntemi ile kıyası

Tablo 26. Alt tabakanın farklı rijitlik parametrelerine ait üst tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafelerinin SEM kıyası

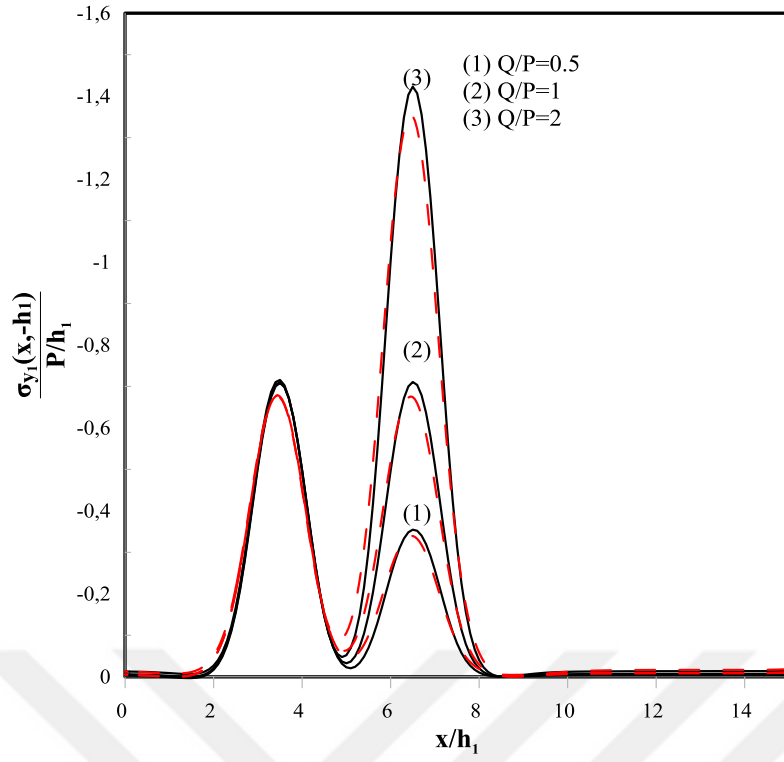
B_2h_1	λ_{cr1}		x_{cr}	
	SEM Sonuçları	Analitik Çözüm	SEM Sonuçları	Analitik Çözüm
1.3863	76.96	80.22	9.05	9.20
0.0001	130.80	129.80	8.75	8.95
-1.3863	148.73	159.84	8.65	8.60



Şekil 39. Alt tabakanın farklı rijitlik parametrelerine ait tabaka altındaki gerilme değişiminin sonlu elemanlar yöntemi ile kıyası

Tablo 27. Alt tabakanın farklı rijitlik parametrelerine ait tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafelerinin SEM kıyası

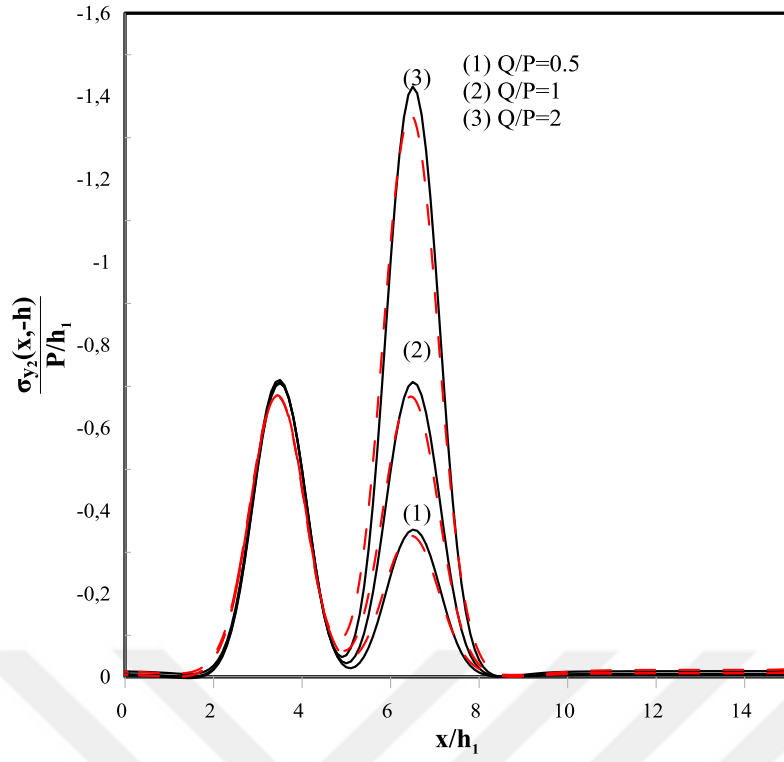
$B_2 h_1$	λ_{cr2}		X_{cr}	
	SEM Sonuçları	Analitik Çözüm	SEM Sonuçları	Analitik Çözüm
1.3863	137.80	149.80	9.90	10.30
0.0001	167.23	180.22	9.75	9.70
-1.3863	238.17	234.65	9.40	9.40



Şekil 40. Farklı yük oranlarına ait üst tabaka altındaki gerilme değişiminin sonlu elemanlar yöntemi ile kıyası

Tablo 28. Farklı yük oranlarına ait üst tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafelerinin SEM kıyası

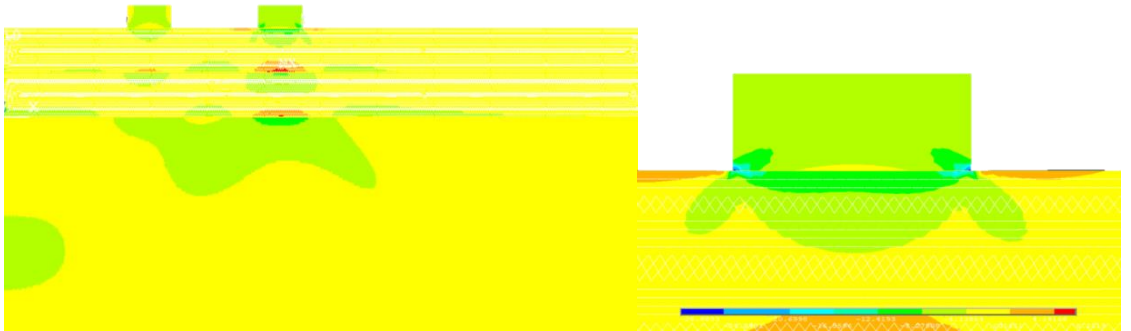
Q/P	λ_{cr1}		x_{cr}	
	SEM Sonuçları	Analitik Çözüm	SEM Sonuçları	Analitik Çözüm
0.5	325.42	320.69	1.30	1.40
1	312.29	315.31	8.70	8.60
2	162.17	159.83	8.70	8.60



Şekil 41. Farklı yük oranlarına ait alt tabaka gerilme değişiminin sonlu elemanlar yöntemi ile kıyası

Tablo 29. Farklı yük oranlarına ait alt tabaka altındaki ilk ayrılma yükleri ve mesafelerinin SEM kıyası

Q/P	λ_{cr2}		X_{cr}	
	SEM Sonuçları	Analitik Çözüm	SEM Sonuçları	Analitik Çözüm
0.5	502.20	493.116	0	0
1	430.41	418.86	9.40	9.40
2	238.17	234.65	9.40	9.40



Şekil 42. Sonlu elemanlar yöntemi analizinin analiz sonucu gerilme dağılışı

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Farklı malzeme özelliklerine sahip fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaların, rijit bloklar aracılığıyla yüklendiği elastik yarı sonsuz bir düzlem üzerindeki etkileşimi, sürekli temas koşulu altında sayısal olarak modellenmiştir. FD tabakaların elastisite modülü ve yoğunluğunun derinlik boyunca üstel bir fonksiyonla değiştiği varsayılmış ve kütle kuvvetleri modele dahil edilmiştir. Problemin simetrik olmadığı durumlar göz önünde bulundurularak, farklı yükleme senaryoları, blok genişlikleri ve blok açıklıkları için analizler gerçekleştirilmiştir. Çözüm süreci iki aşamada ele alınmıştır.

Çalışmanın ilk aşamasında, sistemin sürekli temas halinde olduğu durumlar için, yük faktörünün kritik yük faktörüne eşit veya daha küçük olduğu ($\lambda \leq \lambda_{cr}$) tüm değerleri için teker teker analizler yapılmıştır. Bu kapsamda, çeşitli boyutsuz parametreler için blok altı gerilmeleri, tabaka alt yüzeyindeki normal gerilmeler ile ayrılmanın meydana geleceği kritik yük faktörleri ve ilk ayrılmanın meydana geleceği uzaklıklar hesaplanmıştır. Blok altındaki gerilmelerin analizinde, ayrılmanın oluşmayacağı gerilme dağılımları elde edilmiştir. Ayrıca, FD tabakaların arasındaki ve alt FD tabaka ile elastik yarı düzlem ara yüzeyindeki kritik yük değerleri ile bu yüklerin ayrılma mesafesi üzerindeki etkileri detaylı olarak incelenmiştir. İncelemede yükleme koşulları, FD tabakalara ait rijitlik ve yoğunluk parametreleri, blok genişlikleri ve bloklar arası mesafeler gibi boyutsuz büyüklüklerin etkileri değerlendirilmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümünde, problem sonlu elemanlar analizi ile incelenmiş ve elde edilen sonuçlar, analitik çözümle doğrulanmıştır. Sayısal analizler ANSYS Mechanical APDL yazılımı kullanılarak gerçekleştirilmiş olup, FD malzemelere özgü özelliklerin tanımlanabilmesi amacıyla özel bir makro geliştirilmiştir. Analiz sonuçları grafiksel ve sayısal olarak sunulurken, analitik ve sayısal yöntemlerin uyumu ortaya konulmuştur.

Çalışmanın sonuçları, ele alınan farklı parametrelerin sistemin gerilme dağılımları ve kritik yük değerleri üzerindeki etkilerini açıkça göstermiştir. Ayrıca, analitik ve sayısal yöntemlerle elde edilen sonuçlar arasındaki uyum, önerilen yaklaşımın doğruluğunu ve güvenilirliğini kanıtlamaktadır. Fonksiyonel derecelendirilmiş üst tabakanın rijitlik parametresi $\beta_1 h_1$ ve alt tabakanın rijitlik parametresi $\beta_2 h_1$ azaldıkça, blokların orta bölgelerindeki temas gerilmelerinde artış gözlenirken, köşe noktalarındaki gerilme değerlerinde azalma olduğu tespit edilmiştir. Bloklar arası mesafenin $(c-b)/h_1$ parametresine bağlı olarak yapılan analizlerde, bloklar arasındaki mesafenin

azalmasıyla, bloklarının köşelerindeki gerilme dağılımında belirgin değişimler gözlemlenmiştir. Özellikle, bloklar birbirine yaklaştıkça, bloklarının uzak köşelerindeki gerilme değerlerinde azalma ve yakın köşelerinde ise minimum gerilme değerlerinin olduğu tespit edilmiştir. Ancak, bloklar arasındaki mesafenin kritik bir değerin altına düşmesiyle, bu etkileşimin azalması sonucu, bloklarının uçlarındaki gerilme değerleri birbirine yaklaşmıştır.

Yük oranı (Q/P) düşürüldüğünde ve blok genişlikleri $(d-c)/h_1$ arttırıldığında, bloklar altındaki gerilme değerlerinde azalma gözlemlenmiştir. Fakat (Q/P) düşürülmesi ve $(d-c)/h_1$ arttırılması durumunda belli değerlerden sonra bu parametrenin birinci blok altındaki gerilme dağılımında belirgin bir değişikliğe neden olmadığı tespit edilmiştir.

Fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) tabakaların ara yüzeylerinde ve alt yüzeylerindeki gerilme dağılımları, çeşitli boyutsuz parametreler altında $\sigma_y(x,y)/P/h_1$ gerilme analizi ile incelenmiş ve ilk ayrılma yükleri ile ayrılma mesafeleri belirlenmiştir. Bloklar arası mesafenin artmasıyla, yani $(c-b)/h_1$ oranının yükselmesiyle, ilk ayrılmanın daha uzak bir noktada gerçekleştiği ve ilk ayrılma yüklerinin arttığı gözlemlenmiştir. Rijitlik parametresi (βh_1) değerlerinin azalması, yani tabakaların rijitliğinin derinlikle artması, her iki tabaka için de ilk ayrılma yüklerini artırırken, ilk ayrılma mesafelerini azaltmıştır. Benzer şekilde, blok genişliğinin $((d-c)/h_1)$ azalması, hem ilk ayrılma yüklerinde hem de ilk ayrılma mesafelerinde azalmalara neden olmuştur.

Çalışmada, fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaların alt yüzeylerindeki gerilme dağılımları, farklı boyutsuz parametreler altında sayısal olarak incelenmiştir. Tabaka derinliği boyunca artan rijitliğin, gerilme dağılımı üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar, rijitliğin artmasının, bloklar arasındaki kesitteki gerilmelerin artmasına ve bloklarının orta noktasındaki gerilmelerin azalmasına neden olduğunu göstermiştir. Ayrıca, farklı yüzeylerdeki gerilmelerin uyum içinde olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca tabakalara ait yoğunluk parametrelerinin azalması yani yoğunluğun tabaka altına doğru artması durumunda tabakalarda ayrılma meydana gelmesi için gereken yükün arttığı belirlenmiş olup, ayrılmanın meydana geleceği uzaklıklarda bir değişiklik olmadığı tespit edilmiştir.

Bu çalışmada, analitik çözümlerden elde edilen sonuçların doğruluğunu ve tutarlılığını değerlendirmek amacıyla sonlu elemanlar yöntemi (SEM) kullanılarak ek analizler gerçekleştirilmiştir. Bu kapsamda, ANSYS Mechanical APDL yazılımı tercih edilmiş ve FD malzemenin özelliklerinin modellenmesi için daha önce geliştirilmiş bir makrodan faydalanılmıştır. SEM ile gerçekleştirilen analizlerde, normal gerilmeler ve

temas gerilmelerinin problemin tanımında belirtilen sınır koşullarını sağladığı tespit edilmiştir. SEM ile elde edilmiş olan temas gerilmeleri, normal gerilmeler, ilk ayrılma mesafeleri ve ayrılma bölgeleri sonuçlarının, analitik çözümlerle yapılan karşılaştırmalar neticesinde oldukça iyi bir uyum içinde olduğu görülmüştür. Bu bulgu, sayısal yöntemin problemin çözümünde güvenilir bir yaklaşım olduğunu göstermektedir. Bu bulgular, temas problemlerinin çözümünde, daha kısa sürede sonuçlar sunabilen sonlu elemanlar yönteminin etkili bir alternatif olabileceğini ortaya koymaktadır.

Fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) malzemelerin, üretim zorlukları ve yüksek maliyetleri nedeniyle endüstriyel uygulamalarda sınırlı bir kullanım alanı bulunmaktadır. Ancak, teknolojinin gelişmesiyle birlikte FD malzemelerin üretimi daha yaygınlaşacak ve maliyetleri düşecektir. Bu çalışmada, iki tabakalı bir sistemde bir tabakayı FD malzeme olarak kullanmanın, blok yükleri altındaki gerilme dağılımını iyileştirdiği gözlemlenmiştir. Elde edilen sonuçlar, FD malzemelerin inşaat, makine ve benzeri sektörlerde, özellikle de yüklere maruz kalan yüzeylerde ve dolgu tabakalarında kullanılmasının, yapısal bütünlüğü artırarak ömrü uzatabileceğini göstermektedir. FD malzemelerin kullanımıyla, yüzeyler arasındaki temas etkileşimleri azaltılarak gerilme konsantrasyonları önlenecek ve böylece ayrılma gibi hasar mekanizmaları geciktirilecektir.

KAYNAKLAR

- Abhilash, M. N., and Murthy, H. (2014). Finite element analysis of 2-D elastic contacts involving FGMs. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 15(3), 253-257.
- Adıbelli, H., Çömez, İ., and Erdöl, R. (2009). Rijit panç ile bastırılmış elastik yarım düzleme oturmuş ağırlıksız çift şeritte değme problemi, XVI. Ulusal Mekanik Kongresi, 22-26 Haziran 2009, Kayseri-Türkiye, s. 71-82.
- Adıyaman, G., Öner, E., Yaylacı, M., and Birinci, A. (2023). A study on the contact problem of a layer consisting of functionally graded material (FGM) in the presence of body force. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 18(1), 125-141.
- Adıyaman, G., Öner, E., Yaylacı, M., and Birinci, A. (2023). The contact problem of a functionally graded layer under the effect of gravity. *ZAMM- Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 103(11), e202200560.
- Adıyaman, G., Yaylacı, M., and Birinci, A. (2015). Analytical and finite element solution of a receding contact problem. *Structural Engineering and Mechanics*, 54(1), 69-85.
- Alinia, Y., Hosseini-Nasab, M., and Güler, M. (2018). The sliding contact problem for an orthotropic coating bonded to an isotropic substrate. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 70, 156-171.
- Balci, M. N. (2020). The effect of punch speed on frictional contact mechanics of finite-thickness graded layer resting on the rigid foundation. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 42(6), 343.
- Balci, M. N., and Arslan, O. (2023). Dynamic frictional contact mechanics between a functionally graded orthotropic medium and a moving flat punch. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 237(1), 53-75.
- Bora, P., and Özşahin, T. Ş. (2019). Elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan iki tabakanın analitik yöntem ve sonlu elemanlar yöntemi ile sürekli temas problemi analizi. *International Journal of Innovative Engineering Applications*, 3(2), 39-47.

- Bora, P., and Özşahin, T. Ş. (2022). Discontinuous contact problem of elastic two layers loaded with two rigid rectangular blocks. *International Journal of Pure and Applied Sciences*, 8(2), 266-278.
- Bussetta, P., Marceau, D., and Ponthot, J. P. (2012). The adapted augmented Lagrangian method: A new method for the resolution of the mechanical frictional contact problem. *Computational Mechanics*, 49, 259-275.
- Cao, R., Li, L., Li, X., and Mi, C. (2021). On the frictional receding contact between a graded layer and an orthotropic substrate indented by a rigid flat-ended stamp. *Mechanics of Materials*, 158, 103847.
- Chen, W. T., and Engel, P. A. (1972). Impact and contact stress analysis in multilayered media. *International Journal of Solids and Structure*, 8, 1257-1281.
- Chen, X. W., and Yue, Z. Q. (2019). Contact mechanics of two elastic spheres reinforced by functionally graded materials (FGM) thin coatings. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 109, 57-69.
- Çömez, İ., and El-Borgi, S. (2023). Frictional contact problem of a coated half plane pressed by a rigid punch with coupled stress elasticity. *Archive of Applied Mechanics*, 93(9), 3533-3552.
- Çömez, İ. (2009). *Rijit dairesel bir pançla bastırılan elastik tabaka ve yarım düzlemin sürtünmeli değme problemi. Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.*
- Danny Pratama Lamura, M., Imam Ammarullah, M., Hidayat, T., Izzur Maula, M., Jamari, J., and Bayuseno, A. P. (2023).
- Diameter ratio and friction coefficient effect on equivalent plastic strain (PEEQ) during contact between two brass solids. *Cogent Engineering*, 10(1), 2218691.
- Erdogan, F., and Gupta, G. D. (1972). On the numerical solution of singular integral equations. *Quarterly Journal of Applied Mathematics*, 29, 525-534.
- Erhan, E. E. (2011). Kiriş elemanlardan oluşan bir yapının sonlu eleman analizi. *Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.*
- Erken, B. (2009). *Kafes kirişli portal kren ana kirişinin sonlu elemanlar yöntemiyle analizi ve modellenmesi. Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 15-20.*
- Eyüboğlu, A. (2019). *Winkler temele oturan ve rijit dairesel blok aracılığıyla yüklenen biri fonksiyonel derecelendirilmiş iki tabakanın temas problemi. Yüksek Lisans Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.*

- Geçit, M. R. (1986). Axisymmetric contact problem for a semi infinite cylinder and half space. *International Journal of Engineering Sciences*, 24(8), 1245-1256.
- Güven, İ., and Madenci, E. (2006). *The finite element method and applications in engineering using ANSYS*. Springer, Arizona.
- Hertz, H. (1894). *Gesammelte Werke von Heinrich Hertz*. JA Barth.
- Karabulut, P. M., and Çömez, İ. (2023). Continuous and discontinuous contact problem of a functionally graded orthotropic layer indented by a rigid cylindrical punch: Analytical and finite element approaches. *ZAMM- Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 103(6), e202200427.
- Karabulut, P. M., Çetinkaya, İ. T., Oğuz, H., and Çömez, İ. (2024). Moving contact problem of a functionally graded orthotropic coated half plane. *Acta Mechanica*, 1-16.
- Kaya, F., and Polat, A. (2023). Stress analysis of the contact problem in a functionally graded layer loaded with a distributed load and two rigid circular punches resting on an elastic two quarter planes. *Forces in Mechanics*, 11, 100203.
- Keer, L. M., and Chantaramungkorn, K. (1972). Loss of contact between an elastic layer and half-space. *Journal of Elasticity*, 2(3), 191-197.
- Liu, Z. X., Yan, J., and Mi, C. W. (2018). On the receding contact between a two-layer inhomogeneous laminate and a half-plane. *Structural Engineering and Mechanics*, 66(3), 329-341.
- Loboda, V. V., and Tauchert, T. R. (1985). The elastic contact problem for dissimilar orthotropic semi-infinite and infinite strips. *International Journal of Engineering Sciences*, 23(12), 1337-1349.
- Oğuz, H., Turhan Çetinkaya, İ., and Çömez, İ. (2024). Frictional receding contact problem of a functionally graded orthotropic layer/orthotropic interlayer/isotropic half plane system. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 19(4), 651-667.
- Polat, A. (2019). *Elastik yarım düzleme oturan ve iki rijit blok aracılığıyla yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın temas problemi. Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.*
- Sneddon, I. N. (1951). *Fourier transforms*. MacGraw-Hill, New York.
- Spence, D. A. (1975). The Hertz contact problem with finite friction. *Journal of Elasticity*, 5, 297-319.

- Su, J., Ke, L. L., El-Borgi, S., Xiang, Y., and Wang, Y. S. (2018). An effective method for the sliding frictional contact of conducting cylindrical punch on FGPMs. *International Journal of Solids and Structures*, 141-142, 127-136.
- Yaylacı, M., and Birinci, A. (2013). The receding contact problem of two elastic layers supported by two elastic quarter planes. *Structural Engineering and Mechanics*, 48(2), 241-255.
- Yazıcıoğlu, A., Birinci, A., and Adıyaman, G. (2024). A receding contact problem of two layers one of functionally graded, loaded by circular rigid block and resting on a Pasternak foundation. *Turkish Journal of Civil Engineering*, 35(5).



EKLER

Ek 1. Tezde Kullanılan Katsayılar

$$\begin{aligned}
 \Lambda = & (F_{11} * (F_{22} * F_{33} - F_{23} * F_{32}) - F_{12} * (F_{21} * F_{33} - F_{23} * F_{31}) + F_{13} * (F_{21} * F_{32} - F_{22} * F_{31})) * \\
 & ((F_{45} * F_{56} - F_{46} * F_{55}) * ((F_{64} * F_{77} - F_{67} * F_{74}) * (F_{118}) - ((F_{64} * F_{78} - F_{68} * F_{74}) * (F_{117}))) - \\
 & (F_{45} * F_{57} - F_{47} * F_{55}) * ((F_{64} * F_{76} - F_{66} * F_{74}) * (F_{118}) - ((F_{64} * F_{78} - F_{68} * F_{74}) * (F_{116}))) + \\
 & (F_{45} * F_{58} - F_{48} * F_{55}) * ((F_{64} * F_{76} - F_{66} * F_{74}) * (F_{117}) - ((F_{64} * F_{77} - F_{67} * F_{74}) * (F_{116}))) + \\
 & (F_{46} * F_{57} - F_{47} * F_{56}) * ((F_{64} * F_{75} - F_{65} * F_{74}) * (F_{118}) - ((F_{64} * F_{78} - F_{68} * F_{74}) * (F_{115}))) - \\
 & (F_{46} * F_{58} - F_{48} * F_{56}) * ((F_{64} * F_{75} - F_{65} * F_{74}) * (F_{117}) - ((F_{64} * F_{77} - F_{67} * F_{74}) * (F_{115}))) + \\
 & (F_{47} * F_{58} - F_{48} * F_{57}) * ((F_{64} * F_{75} - F_{65} * F_{74}) * (F_{116}) - ((F_{64} * F_{76} - F_{66} * F_{74}) * (F_{115}))) + \\
 & (F_{11} * (F_{22} * F_{34} - F_{24} * F_{32}) - F_{12} * (F_{21} * F_{34} - F_{24} * F_{31}) + F_{14} * (F_{21} * F_{32} - F_{22} * F_{31})) * \\
 & ((-F_{45} * F_{56} + F_{46} * F_{55}) * ((F_{63} * F_{77} - F_{67} * F_{73}) * (F_{118}) - ((F_{63} * F_{78} - F_{68} * F_{73}) * (F_{117}))) + \\
 & (F_{45} * F_{57} - F_{47} * F_{55}) * ((F_{63} * F_{76} - F_{66} * F_{73}) * (F_{118}) - ((F_{63} * F_{78} - F_{68} * F_{73}) * (F_{116}))) - \\
 & (F_{45} * F_{58} - F_{48} * F_{55}) * ((F_{63} * F_{76} - F_{66} * F_{73}) * (F_{117}) - ((F_{63} * F_{77} - F_{67} * F_{73}) * (F_{116}))) - \\
 & (F_{46} * F_{57} - F_{47} * F_{56}) * ((F_{63} * F_{75} - F_{65} * F_{73}) * (F_{118}) - ((F_{63} * F_{78} - F_{68} * F_{73}) * (F_{115}))) + \\
 & (F_{46} * F_{58} - F_{48} * F_{56}) * ((F_{63} * F_{75} - F_{65} * F_{73}) * (F_{117}) - ((F_{63} * F_{77} - F_{67} * F_{73}) * (F_{115}))) - \\
 & (F_{47} * F_{58} - F_{48} * F_{57}) * ((F_{63} * F_{75} - F_{65} * F_{73}) * (F_{116}) - ((F_{63} * F_{76} - F_{66} * F_{73}) * (F_{115}))) + \\
 & (F_{11} * (F_{23} * F_{34} - F_{24} * F_{33}) - F_{13} * (F_{21} * F_{34} - F_{24} * F_{31}) + F_{14} * (F_{21} * F_{33} - F_{23} * F_{31})) * \\
 & ((F_{45} * F_{56} - F_{46} * F_{55}) * ((F_{62} * F_{77} - F_{67} * F_{72}) * (F_{118}) - ((F_{62} * F_{78} - F_{68} * F_{72}) * (F_{117}))) - \\
 & (F_{45} * F_{57} - F_{47} * F_{55}) * ((F_{62} * F_{76} - F_{66} * F_{72}) * (F_{118}) - ((F_{62} * F_{78} - F_{68} * F_{72}) * (F_{116}))) + \\
 & (F_{45} * F_{58} - F_{48} * F_{55}) * ((F_{62} * F_{76} - F_{66} * F_{72}) * (F_{117}) - ((F_{62} * F_{77} - F_{67} * F_{72}) * (F_{116}))) + \\
 & (F_{46} * F_{57} - F_{47} * F_{56}) * ((F_{62} * F_{75} - F_{65} * F_{72}) * (F_{118}) - ((F_{62} * F_{78} - F_{68} * F_{72}) * (F_{115}))) - \\
 & (F_{46} * F_{58} - F_{48} * F_{56}) * ((F_{62} * F_{75} - F_{65} * F_{72}) * (F_{117}) - ((F_{62} * F_{77} - F_{67} * F_{72}) * (F_{115}))) + \\
 & (F_{47} * F_{58} - F_{48} * F_{57}) * ((F_{62} * F_{75} - F_{65} * F_{72}) * (F_{116}) - ((F_{62} * F_{76} - F_{66} * F_{72}) * (F_{115}))) + \\
 & (F_{12} * (F_{23} * F_{34} - F_{24} * F_{33}) - F_{13} * (F_{22} * F_{34} - F_{24} * F_{32}) + F_{14} * (F_{22} * F_{33} - F_{23} * F_{32})) * \\
 & ((-F_{45} * F_{56} + F_{46} * F_{55}) * ((F_{61} * F_{77} - F_{67} * F_{71}) * (F_{118}) - ((F_{61} * F_{78} - F_{68} * F_{71}) * (F_{117}))) + \\
 & (F_{45} * F_{57} - F_{47} * F_{55}) * ((F_{61} * F_{76} - F_{66} * F_{71}) * (F_{118}) - ((F_{61} * F_{78} - F_{68} * F_{71}) * (F_{116}))) - \\
 & (F_{45} * F_{58} - F_{48} * F_{55}) * ((F_{61} * F_{76} - F_{66} * F_{71}) * (F_{117}) - ((F_{61} * F_{77} - F_{67} * F_{71}) * (F_{116}))) - \\
 & (F_{46} * F_{57} - F_{47} * F_{56}) * ((F_{61} * F_{75} - F_{65} * F_{71}) * (F_{118}) - ((F_{61} * F_{78} - F_{68} * F_{71}) * (F_{115}))) + \\
 & (F_{46} * F_{58} - F_{48} * F_{56}) * ((F_{61} * F_{75} - F_{65} * F_{71}) * (F_{117}) - ((F_{61} * F_{77} - F_{67} * F_{71}) * (F_{115}))) - \\
 & (F_{47} * F_{58} - F_{48} * F_{57}) * ((F_{61} * F_{75} - F_{65} * F_{71}) * (F_{116}) - ((F_{61} * F_{76} - F_{66} * F_{71}) * (F_{115})))
 \end{aligned}$$

[illegible]

$$B_1 = -(P+Q)^* \left[\begin{aligned} & \left((F_{46} * F_{57} - F_{47} * F_{56}) * (F_{98} * F_{109} * F_{810} - F_{99} * F_{108} * F_{810}) + \right. \\ & (F_{46} * F_{58} - F_{48} * F_{56}) * (F_{99} * F_{107} * F_{810} - F_{97} * F_{109} * F_{810}) + \\ & (F_{47} * F_{58} - F_{48} * F_{57}) * (F_{96} * F_{109} * F_{810} - F_{99} * F_{106} * F_{810}) + \\ & (F_{46} * F_{57} - F_{47} * F_{56}) * (F_{89} * F_{108} * F_{910} - F_{89} * F_{98} * F_{1010}) + \\ & (F_{46} * F_{58} - F_{48} * F_{56}) * (F_{89} * F_{97} * F_{1010} - F_{89} * F_{107} * F_{910}) + \\ & \left. (F_{47} * F_{58} - F_{48} * F_{57}) * (F_{89} * F_{106} * F_{910} - F_{89} * F_{96} * F_{1010}) \right) \end{aligned} \right] * \\ \left[\begin{aligned} & (F_{21} * F_{32} - F_{22} * F_{31}) * (F_{63} * F_{74} - F_{64} * F_{73}) + (F_{21} * F_{33} - F_{23} * F_{31}) * (F_{64} * F_{72} - F_{62} * F_{74}) + \\ & (F_{21} * F_{34} - F_{24} * F_{31}) * (F_{62} * F_{73} - F_{63} * F_{72}) + (F_{22} * F_{33} - F_{23} * F_{32}) * (F_{61} * F_{74} - F_{64} * F_{71}) + \\ & (F_{22} * F_{34} - F_{24} * F_{32}) * (F_{63} * F_{71} - F_{61} * F_{73}) + (F_{23} * F_{34} - F_{24} * F_{33}) * (F_{61} * F_{72} - F_{62} * F_{71}) \end{aligned} \right] / \Lambda$$

$$B_2 = (P+Q)^* \left[\begin{aligned} & \left((F_{45} * F_{57} - F_{47} * F_{55}) * (F_{98} * F_{109} * F_{810} - F_{99} * F_{108} * F_{810}) + \right. \\ & (F_{45} * F_{58} - F_{48} * F_{55}) * (F_{99} * F_{107} * F_{810} - F_{97} * F_{109} * F_{810}) + \\ & (F_{47} * F_{58} - F_{48} * F_{57}) * (F_{95} * F_{109} * F_{810} - F_{99} * F_{105} * F_{810}) + \\ & (F_{45} * F_{57} - F_{47} * F_{55}) * (F_{89} * F_{108} * F_{910} - F_{89} * F_{98} * F_{1010}) + \\ & (F_{45} * F_{58} - F_{48} * F_{55}) * (F_{89} * F_{97} * F_{1010} - F_{89} * F_{107} * F_{910}) + \\ & \left. (F_{47} * F_{58} - F_{48} * F_{57}) * (F_{89} * F_{105} * F_{910} - F_{89} * F_{95} * F_{1010}) \right) \end{aligned} \right] * \\ \left[\begin{aligned} & (F_{21} * F_{32} - F_{22} * F_{31}) * (F_{63} * F_{74} - F_{64} * F_{73}) + (F_{21} * F_{33} - F_{23} * F_{31}) * (F_{64} * F_{72} - F_{62} * F_{74}) + \\ & (F_{21} * F_{34} - F_{24} * F_{31}) * (F_{62} * F_{73} - F_{63} * F_{72}) + (F_{22} * F_{33} - F_{23} * F_{32}) * (F_{61} * F_{74} - F_{64} * F_{71}) + \\ & (F_{22} * F_{34} - F_{24} * F_{32}) * (F_{63} * F_{71} - F_{61} * F_{73}) + (F_{23} * F_{34} - F_{24} * F_{33}) * (F_{61} * F_{72} - F_{62} * F_{71}) \end{aligned} \right] / \Lambda$$

$$B_3 = -(P+Q)^* \left[\begin{aligned} & \left((F_{45} * F_{56} - F_{46} * F_{55}) * (F_{98} * F_{109} * F_{810} - F_{99} * F_{108} * F_{810}) + \right. \\ & (F_{45} * F_{58} - F_{48} * F_{55}) * (F_{99} * F_{106} * F_{810} - F_{96} * F_{109} * F_{810}) + \\ & (F_{46} * F_{58} - F_{48} * F_{56}) * (F_{95} * F_{109} * F_{810} - F_{99} * F_{105} * F_{810}) + \\ & (F_{45} * F_{56} - F_{46} * F_{55}) * (F_{89} * F_{108} * F_{910} - F_{89} * F_{98} * F_{1010}) + \\ & (F_{45} * F_{58} - F_{48} * F_{55}) * (F_{89} * F_{96} * F_{1010} - F_{89} * F_{106} * F_{910}) + \\ & \left. (F_{46} * F_{58} - F_{48} * F_{56}) * (F_{89} * F_{105} * F_{910} - F_{89} * F_{95} * F_{1010}) \right) \end{aligned} \right] * \\ \left[\begin{aligned} & (F_{21} * F_{32} - F_{22} * F_{31}) * (F_{63} * F_{74} - F_{64} * F_{73}) + (F_{21} * F_{33} - F_{23} * F_{31}) * (F_{64} * F_{72} - F_{62} * F_{74}) + \\ & (F_{21} * F_{34} - F_{24} * F_{31}) * (F_{62} * F_{73} - F_{63} * F_{72}) + (F_{22} * F_{33} - F_{23} * F_{32}) * (F_{61} * F_{74} - F_{64} * F_{71}) + \\ & (F_{22} * F_{34} - F_{24} * F_{32}) * (F_{63} * F_{71} - F_{61} * F_{73}) + (F_{23} * F_{34} - F_{24} * F_{33}) * (F_{61} * F_{72} - F_{62} * F_{71}) \end{aligned} \right] / \Lambda$$

$$B_4 = (P+Q) * \left[\begin{aligned} & (F_{45} * F_{56} - F_{46} * F_{55}) * (F_{97} * F_{109} * F_{810} - F_{99} * F_{107} * F_{810}) + \\ & (F_{45} * F_{57} - F_{47} * F_{55}) * (F_{99} * F_{106} * F_{810} - F_{96} * F_{109} * F_{810}) + \\ & (F_{46} * F_{57} - F_{47} * F_{56}) * (F_{95} * F_{109} * F_{810} - F_{99} * F_{105} * F_{810}) + \\ & (F_{45} * F_{56} - F_{46} * F_{55}) * (F_{89} * F_{107} * F_{910} - F_{89} * F_{97} * F_{1010}) + \\ & (F_{45} * F_{57} - F_{47} * F_{55}) * (F_{89} * F_{96} * F_{1010} - F_{89} * F_{106} * F_{910}) + \\ & (F_{46} * F_{57} - F_{47} * F_{56}) * (F_{89} * F_{105} * F_{910} - F_{89} * F_{95} * F_{1010}) \end{aligned} \right] * \\ \left[\begin{aligned} & (F_{21} * F_{32} - F_{22} * F_{31}) * (F_{63} * F_{74} - F_{64} * F_{73}) + (F_{21} * F_{33} - F_{23} * F_{31}) * (F_{64} * F_{72} - F_{62} * F_{74}) + \\ & (F_{21} * F_{34} - F_{24} * F_{31}) * (F_{62} * F_{73} - F_{63} * F_{72}) + (F_{22} * F_{33} - F_{23} * F_{32}) * (F_{61} * F_{74} - F_{64} * F_{71}) + \\ & (F_{22} * F_{34} - F_{24} * F_{32}) * (F_{63} * F_{71} - F_{61} * F_{73}) + (F_{23} * F_{34} - F_{24} * F_{33}) * (F_{61} * F_{72} - F_{62} * F_{71}) \end{aligned} \right] / \Lambda$$

$$C_1 = -F_{810} * (P+Q) * \left[\begin{aligned} & (F_{21} * F_{32} * (F_{63} * F_{74} - F_{64} * F_{73}) + F_{21} * F_{33} * (F_{64} * F_{72} - F_{62} * F_{74}) + \\ & F_{21} * F_{34} * (F_{62} * F_{73} - F_{63} * F_{72}) + F_{22} * F_{31} * (F_{64} * F_{73} - F_{63} * F_{74}) + \\ & F_{22} * F_{33} * (F_{61} * F_{74} - F_{64} * F_{71}) + F_{22} * F_{34} * (F_{63} * F_{71} - F_{61} * F_{73}) + \\ & F_{23} * F_{31} * (F_{62} * F_{74} - F_{64} * F_{72}) + F_{23} * F_{32} * (F_{64} * F_{71} - F_{61} * F_{74}) + \\ & F_{23} * F_{34} * (F_{61} * F_{72} - F_{62} * F_{71}) + F_{24} * F_{31} * (F_{63} * F_{72} - F_{62} * F_{73}) + \\ & F_{24} * F_{32} * (F_{61} * F_{73} - F_{63} * F_{71}) + F_{24} * F_{33} * (F_{62} * F_{71} - F_{61} * F_{72}) \end{aligned} \right] * \\ \left[\begin{aligned} & (F_{45} * F_{56} * (F_{97} * F_{108} - F_{98} * F_{107}) + F_{45} * F_{57} * (F_{98} * F_{106} - F_{96} * F_{108}) + \\ & F_{45} * F_{58} * (F_{96} * F_{107} - F_{97} * F_{106}) + F_{46} * F_{55} * (F_{98} * F_{107} - F_{97} * F_{108}) + \\ & F_{46} * F_{57} * (F_{95} * F_{108} - F_{98} * F_{105}) + F_{46} * F_{58} * (F_{97} * F_{105} - F_{95} * F_{107}) + \\ & F_{47} * F_{55} * (F_{96} * F_{108} - F_{98} * F_{106}) + F_{47} * F_{56} * (F_{98} * F_{105} - F_{95} * F_{108}) + \\ & F_{47} * F_{58} * (F_{95} * F_{106} - F_{96} * F_{105}) + F_{48} * F_{55} * (F_{97} * F_{106} - F_{96} * F_{107}) + \\ & F_{48} * F_{56} * (F_{95} * F_{107} - F_{97} * F_{105}) + F_{48} * F_{57} * (F_{96} * F_{105} - F_{95} * F_{106}) \end{aligned} \right] / \Lambda$$

$$C_2 = F_{89} * (P+Q) * \left[\begin{aligned} & (F_{21} * F_{32} - F_{22} * F_{31}) * (F_{63} * F_{74} - F_{64} * F_{73}) + \\ & (F_{23} * F_{31} - F_{21} * F_{33}) * (F_{62} * F_{74} - F_{64} * F_{72}) + \\ & (F_{21} * F_{34} - F_{24} * F_{31}) * (F_{62} * F_{73} - F_{63} * F_{72}) + \\ & (F_{22} * F_{33} - F_{23} * F_{32}) * (F_{61} * F_{74} - F_{64} * F_{71}) + \\ & (F_{23} * F_{34} - F_{24} * F_{33}) * (F_{61} * F_{72} - F_{62} * F_{71}) + \\ & (F_{24} * F_{32} - F_{22} * F_{34}) * (F_{61} * F_{73} - F_{63} * F_{71}) \end{aligned} \right] * \\ \left[\begin{aligned} & (F_{45} * F_{56} - F_{46} * F_{55}) * (F_{97} * F_{108} - F_{98} * F_{107}) + \\ & (F_{47} * F_{55} - F_{45} * F_{57}) * (F_{96} * F_{108} - F_{98} * F_{106}) + \\ & (F_{45} * F_{58} - F_{48} * F_{55}) * (F_{96} * F_{107} - F_{97} * F_{106}) + \\ & (F_{46} * F_{57} - F_{47} * F_{56}) * (F_{95} * F_{108} - F_{98} * F_{105}) + \\ & (F_{48} * F_{56} - F_{46} * F_{58}) * (F_{95} * F_{107} - F_{97} * F_{105}) + \\ & (F_{47} * F_{58} - F_{48} * F_{57}) * (F_{95} * F_{106} - F_{96} * F_{105}) \end{aligned} \right] / \Lambda$$

$$\begin{aligned}
F_{118} &= F_{98} * F_{109} * F_{810} - F_{99} * F_{108} * F_{810} + F_{89} * F_{108} * F_{910} - F_{89} * F_{98} * F_{1010} \\
F_{117} &= F_{97} * F_{109} * F_{810} - F_{99} * F_{107} * F_{810} + F_{89} * F_{107} * F_{910} - F_{89} * F_{97} * F_{1010} \\
F_{116} &= F_{96} * F_{109} * F_{810} - F_{99} * F_{106} * F_{810} + F_{89} * F_{106} * F_{910} - F_{89} * F_{96} * F_{1010} \\
F_{115} &= F_{95} * F_{109} * F_{810} - F_{99} * F_{105} * F_{810} + F_{89} * F_{105} * F_{910} - F_{89} * F_{95} * F_{1010}
\end{aligned}$$

$$F_{11} = E_1 / (\kappa_1 - 1); F_{12} = E_2 / (\kappa_1 - 1); F_{13} = E_3 / (\kappa_1 - 1); F_{14} = E_4 / (\kappa_1 - 1)$$

$$F_{21} = D_1; F_{22} = D_2; F_{23} = D_3; F_{24} = D_4$$

$$F_{31} = D_1 * e^{-s_1 * h_1}; F_{32} = D_2 * e^{-s_2 * h_1}; F_{33} = D_3 * e^{-s_3 * h_1}; F_{34} = D_4 * e^{-s_4 * h_1}$$

$$F_{45} = H_1 * e^{-\varpi_1 * h_1}; F_{46} = H_2 * e^{-\varpi_2 * h_1}; F_{47} = H_3 * e^{-\varpi_3 * h_1}; F_{48} = H_4 * e^{-\varpi_4 * h_1}$$

$$F_{55} = H_1 * e^{-\varpi_1 * h}; F_{56} = H_2 * e^{-\varpi_2 * h}; F_{57} = H_3 * e^{-\varpi_3 * h}; F_{58} = H_4 * e^{-\varpi_4 * h}$$

$$m=\frac{\mu_2}{\mu_0}$$

$$\begin{aligned}
E_j &= \left[i \xi (3 - \kappa_1) + s_j n_j (\kappa_1 + 1) \right] \\
T_j &= \left[i \xi (3 - \kappa_2) + \varpi_j \Omega_j (\kappa_2 + 1) \right]
\end{aligned}$$

$$D_j=\left[s_j+i\xi n_j\right]$$

$$-\frac{1}{\mu_0}\int\limits_a^{\mathfrak{b}}p(t)e^{-i\mathfrak{z}t}dt=P^{\mathfrak{t}}$$

$$-\frac{1}{\mu_0}\int\limits_c^d q(t)e^{-i\mathfrak{z}t}dt=Q^{\mathfrak{t}}$$

Gerilme ve ilk ayrılma yüklerinin bulunması için kullanılan parametre değerleri

Değişim	β_1	β_2	γ_1	γ_2	Q/P	(c-b)/h ₁	(d-c)/h ₁	μ_2/μ_{-h1}	μ_4/μ_{-h}
β_1		-1.0986	1.3863	1.3863	2	2	1	1	1
β_2	-1.0986		1.3863	1.3863	2	2	1	1	1
γ_1	-1.3863	-1.3863		1.3863	2	2	1	1	1
γ_2	-1.3863	-1.3863	1.3863		2	2	1	1	1
Q/P	-1.0986	-1.0986	1.3863	1.3863		2	1	1	1
(c-b)/h ₁	-1.3863	-1.3863	1.3863	1.3863	2		1	1	1
(d-c)/h ₁	-1.3863	-1.3863	1.3863	1.3863	2	2		1	1
μ_2/μ_{-h1}	-1.3863	-1.3863	1.3863	1.3863	2	2	1		1
μ_4/μ_{-h}	-1.3863	-1.3863	1.3863	1.3863	2	2	1	1	

ÖZGEÇMİŞ

Furkan Atakan KAYA, ilk ve orta öğrenimini Gümüşhane Yusuf Çiftçioğlu İlköğretim Okulunda tamamlamıştır. Ardından, 2013-2015 yılları arasında Gümüşhane Mareşal Çakmak Anadolu Öğretmen Lisesi, 2015-2017 yılları arasında Gümüşhane Bahçeşehir Anadolu Lisesi'nde öğrenim görmüştür. 2021 yılında Gümüşhane Üniversitesi Mühendislik Fakültesi'nde İnşaat Mühendisliği ve Harita Mühendisliği bölümlerinden çift ana dal programı ile mezun olan KAYA, aynı yıl içerisinde Gümüşhane Belediyesi İmar ve Şehircilik Müdürlüğü'nde göreve başlamıştır. Halen belediyede görevine devam eden KAYA, 2022 yılında Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Ana bilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başlamıştır. KAYA'nın yabancı dili İngilizce'dir.