

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**ELASTİK YARI SONSUZ DÜZLEME OTURAN VE YAYILI YÜK İLE
YÜKLENEN FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ İKİ TABAKANIN
TEMAS PROBLEMİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bahar ŞENGÜL ŞABANO

**TEMMUZ 2020
TRABZON**



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORCID : - - -

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce

Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : / /

Tezin Savunma Tarihi : / /

Tez Danışmanı :

ORCID : - - -

Trabzon

ÖNSÖZ

Bu çalışma Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır.

Tez hazırlama sürecimde bilgi ve deneyimlerinden faydalandığım, öğrencisi olmak bir şeref kaynağı olan danışman Hocam Sayın Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ'ye “Elastik yarı sonsuz düzleme oturan ve yayılı yük ile yüklenen fonksiyonel derecelendirilmiş iki tabakanın temas problemi” isimli tez çalışmasını bana önerdiği için minnet ve şükranlarımı sunarım.

Tez çalışmam boyunca bilgi ve birikimlerinden faydalandığım Sayın Prof. Dr. Talat Şükrü ÖZŞAHİN'e, Sayın Prof. Dr. Volkan KAHYA'ya ve Sayın Prof. Dr. Ahmetcan ALTUNIŞIK' a teşekkür ederim.

Çalışmalarım esnasında bilgi ve tecrübeleri ile bana yol gösteren Sayın Dr. Öğr. Üyesi Gökhan ADIYAMAN'a ayrıca şükranlarımı sunmak isterim.

Lisans öğrenimim boyunca umutsuzluğa düştüğüm her anda elimden tutan ve bu çalışmaya başlamam ve devam etmem konusunda her daim yanımda olan eşim İnşaat Mühendisi Mert ŞABANO'ya şükranlarımı bir borç bilirim.

Öğrenim hayatım sürecinde maddi ve manevi destekleriyle bana her daim yol gösteren annem ve babam Gülşen ve Kani ŞENGÜL, yengem ve abim İnşaat Mühendisleri Mesude ve Eser ŞENGÜL'e, varlığıyla bana moral veren yeğenim Rüzgar'a sonsuz teşekkürlerimi sunar, çalışmamın ülkemize faydalı olmasını temenni ederim.

Bahar ŞENGÜL ŞABANO

Trabzon 2020

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan “Elastik Yarı Sonsuz Düzleme Oturan ve Yayılı Yük İle Yüklenen Fonksiyonel Derecelendirilmiş İki Tabakanın Temas Problemi” başlıklı bu tezin Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim. 14/07/2020

Bahar ŞENGÜL ŞABANO

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	IV
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	V
İÇİNDEKİLER.....	VI
ÖZET	VIII
SUMMARY	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ	X
TABLolar DİZİNİ.....	XII
SEMBOLLER DİZİNİ	XIII
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş	1
1.2. Temas Problemlerinin Tarihsel Gelişimi	1
1.2.1. Yarı Sonsuz Düzleme Oturan Tabakalar ile İlgili Çalışmalar	2
1.2.2. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakalı Ortamlara İlişkin Temas Problemleri ile İlgili Çalışmalar	4
1.3. Çalışmanın Kapsamı ve Amacı	6
1.4. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi	6
1.4.1. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabaka İçin Genel Denklemlerin Elde Edilmesi	6
1.4.2. Elastik Yarı Sonsuz Düzlem İçin Genel Denklemlerin Elde Edilmesi.....	11
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	17
2.1. Problemin Tanımı	17
2.2. Problemin Çözümü	18
2.3. Kullanılacak Denklemler	18
2.4. Probleme İlişkin Sınır Şartları	19
2.5. Katsayıların Belirlenmesi	20
2.6. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi	23
2.6.1. Birinci İntegral Denklemin Elde Edilmesi	23

2.6.2. İkinci İntegral Denklemin Elde Edilmesi	27
2.7. İntegral Denklemlerin Boyutsuzlaştırılması	29
2.8. İntegral Denklemlerin Sayısal Çözümü	32
3. BULGULAR VE İRDELEME	35
3.1. Giriş	35
3.2. Temas Uzunlukları ve Temas Gerilmelerine İlişkin Bulgular	35
4. SONUÇLAR	56
5. KAYNAKLAR	57
ÖZGEÇMİŞ	



ÖZET

ELASTİK YARI SONSUZ DÜZLEME OTURAN VE YAYILI YÜK İLE YÜKLENEN FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ İKİ TABAKANIN TEMAS PROBLEMİ

Bahar ŞENGÜL ŞABANO

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ
2020, 60 Sayfa

Bu çalışmada, düzgün yayılı yüke maruz, elastik yarı sonsuz düzleme oturan malzeme özellikleri ve yükseklikleri farklı, fonksiyonel derecelendirilmiş iki tabakanın sürtünmesiz temas problemi Elastisite Teorisine göre incelenmiştir. Tabakaların ağırlıkları ihmal edilmiş ve Poisson oranlarının değişmediği kabul edilmiştir.

Birinci bölümde, temas problemlerine ilişkin yapılan araştırmalar kısaca sıralanmıştır. Ayrıca fonksiyonel derecelendirilmiş tabakalar ve elastik yarı sonsuz düzlem için genel denklemler oluşturulmuştur. Bunun için elastisitenin genel denklemleri ve integral dönüşüm teknikleri kullanılmıştır. İkinci bölümde, incelenen problem ve sınır şartları tanımlanmış, probleme ilişkin sınır şartlarında elde edilen gerilmeler ve yer değiştirmeler yerlerine yazılmıştır. Problem tabakalar arası temas yüzeylerindeki gerilmeler ve temas uzunluklarının bilinmeyen olduğu iki integral denklemden oluşan bir integral denklem sistemine indirgenmiştir. Sonrasında integral denklem sisteminin çözümü Gauss- Chebshev integrasyon formülasyonu kullanılarak gerçekleştirilmiş ve bilinmeyen temas gerilmeleri ile temas uzunlukları elde edilmiştir. Üçüncü bölümde, probleme ilişkin çeşitli boyutsuz büyüklükler için sayısal uygulama yapılmıştır. Düzgün yayılı yük altındaki tabakalar arasındaki temas gerilmeleri ile temas uzunlukları; farklı malzeme özellikleri, tabaka yükseklikleri için hesaplanmıştır. Hesaplanan bu büyüklükler, tablolar ve grafikler yardımıyla irdelenmiştir. Dördüncü bölümde, bu çalışmadan elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Temas Problemi, Elastisite Teorisi, Temas Gerilmesi, Temas Uzunluğu, Gauss-Chebsyhev İntegrasyon Formülasyonu, Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabaka, İntegral Denklem

Master Thesis

SUMMARY

CONTACT PROBLEM OF TWO FUNCTIONALLY GRADED LAYERS OF ELASTIC SEMI-INFINITE DISTRIBUTED LOAD

Bahar ŞENGÜL ŞABANO

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Science
Department of Civil Engineering
Supervisor: Prof.Dr. Ahmet BİRİNCİ
2020, 60 page

In this study, the frictionless contact problem of two functionally graded layers with different heights and properties of elastic semi-infinite plane exposed to uniform distributed load was investigated according to the Theory of Elasticity. The weights of the layers were omitted and it was thought that the Poisson ratios did not change.

In the first chapter, the studies on the contact problems are summarized. In addition, general equations are obtained for functionally graded layers and elastic semi-infinite plane. For this, general equations of elasticity and integral transformation techniques are used. In second chapter, the problems and boundary conditions are defined and boundary conditions are applied to the obtained stress and displacement expressions. The problem is reduced to a system with two integral equations where the stresses on the plane contact surfaces between layers are unknown. Then the solution of the integral equation system was realized by using Gauss-Chebyshev integration formulation and the contact lengths were obtained with unknown contact stresses. In the third part, numerical application of the problem for various dimensionless magnitudes is made. Contact stresses and contact lengths between layers under uniformly distributed load; different material properties were calculated for layer heights. The results are analyzed with the help of tables and graphs. In the fourth chapter, the results obtained from this study are given.

Keywords : Contact Problem, Theory of Elasticity, Contact Stress , contact length, Gauss-Chebyshev Integration Formulation, Functionally Graded Layer, Integration Formulation

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1.	Problemin geometri ve yükleme durumu.....	17
Şekil 2.	Çeşitli (μ_{02}/μ_3) Değerleri İçin Fonksiyonel Derecelendirilmiş 1. Tabaka ile Fonksiyonel Derecelendirilmiş 2. Tabaka Arasındaki Temas Uzunluğunun (b/h_2) , $\beta_1 = \beta_2$ ile Değişimi $(K_1 = K_2 = K_3 = 2, h_1 = h_2 = 1, a/h_2 = 1)$	36
Şekil 3.	Çeşitli (μ_{02}/μ_3) Değerleri İçin Fonksiyonel Derecelendirilmiş 2. Tabaka ile Yarı Sonsuz Düzlem Arasındaki Temas Uzunluğunun (c/h_2) , $\beta_1 = \beta_2$ ile Değişimi $(K_1 = K_2 = K_3 = 2, h_1 = h_2 = 1, a/h_2 = 1)$	37
Şekil 4.	Çeşitli β_1, β_2 Değerleri İçin Fonksiyonel Derecelendirilmiş 1. Tabaka ile Fonksiyonel Derecelendirilmiş 2. Tabaka Arasındaki Temas Uzunluğunun (b/h_2) Değişimi $(K_1 = K_2 = K_3 = 2, h_1/h_2 = 1, a/h_2 = 1, \mu_{01} = \mu_{02} = \mu_3 = 100)$	39
Şekil 5.	Çeşitli β_1, β_2 Değerleri İçin Fonksiyonel Derecelendirilmiş 2. Tabaka ile Yarı Sonsuz Düzlem Arasındaki Temas Uzunluğunun (c/h_2) Değişimi $(K_1 = K_2 = K_3 = 2, h_1/h_2 = 1, a/h_2 = 1, \mu_{01} = \mu_{02} = \mu_3 = 100)$	39
Şekil 6.	Çeşitli Yayılı Yük Genişliği Değerleri İçin Fonksiyonel Derecelendirilmiş 1. Tabaka ile Fonksiyonel Derecelendirilmiş 2. Tabaka Arası Yarı Temas Uzunluğunun (b/h_2) h_1/h_2 ile Değişimi $(K_1 = K_2 = K_3 = 2, \mu_{01} = \mu_{02} = \mu_3 = 100, \beta_1 = \beta_2 = 1)$	40
Şekil 7.	Çeşitli Yayılı Yük Genişliği Değerleri İçin Fonksiyonel Derecelendirilmiş 2. Tabaka ile Yarı Sonsuz Düzlem Arasındaki Yarı Temas Uzunluğunun (c/h_2) h_1/h_2 ile Değişimi $(K_1 = K_2 = K_3 = 2, \mu_{01} = \mu_{02} = \mu_3 = 100, \beta_1 = \beta_2 = 1)$	41
Şekil 8.	Çeşitli (μ_{02}/μ_3) kayma modülü oranları ve $(\beta_1 = \beta_2)$ rijitlik parametreleri için $p_1(x)/p_0$ temas gerilme yayılışları $(K_1 = K_2 = K_3 = 2, h_1 = h_2 = 1, a/h_2 = 1)$	43
Şekil 9.	Çeşitli (μ_{02}/μ_3) kayma modülü oranları ve $(\beta_1 = \beta_2)$ rijitlik parametreleri için $p_2(x)/p_0$ temas gerilme yayılışları $(K_1 = K_2 = K_3 = 2, h_1 = h_2 = 1, a/h_2 = 1)$	44
Şekil 10.	Çeşitli (μ_{02}/μ_3) kayma modülü oranları ve $(\beta_1 = \beta_2)$ rijitlik parametreleri için $p_1(x)/p_0$ temas gerilme yayılışları $(K_1 = K_2 = K_3 = 2, h_1 = h_2 = 1, a/h_2 = 1)$	46

Şekil 11. Çeşitli (μ_{02}/μ_3) kayma modülü oranları ve $(\beta_1 = \beta_2)$ rijitlik parametreleri için $p_2(x)/p_0$ temas gerilme yayılışları ($K_1 = K_2 = K_3 = 2, h_1 = h_2 = 1, a/h_2 = 1$).....	47
Şekil 12. Çeşitli β_1, β_2 Değerleri İçin $p_1(x)/p_0$ Temas Gerilme Yayılışları ($K_1 = K_2 = K_3 = 2, \mu_{01} = \mu_{02} = \mu_3 = 100, a/h_2 = 1, p_0 = 1, h_1/h_2 = 1$).....	49
Şekil 13. Çeşitli β_1, β_2 Değerleri İçin $p_2(x)/p_0$ Temas Gerilme Yayılışları ($K_1 = K_2 = K_3 = 2, \mu_{01} = \mu_{02} = \mu_3 = 100, a/h_2 = 1, p_0 = 1, h_1/h_2 = 1$).....	50
Şekil 14. Çeşitli β_1, β_2 Değerleri İçin $p_1(x)/p_0$ Temas Gerilme Yayılışları ($K_1 = K_2 = K_3 = 2, \mu_{01} = \mu_{02} = \mu_3 = 100, a/h_2 = 1, p_0 = 1, h_1/h_2 = 1$).....	52
Şekil 15. Çeşitli β_1, β_2 Değerleri İçin $p_2(x)/p_0$ Temas Gerilme Yayılışları ($K_1 = K_2 = K_3 = 2, \mu_{01} = \mu_{02} = \mu_3 = 100, a/h_2 = 1, p_0 = 1, h_1/h_2 = 1$).....	53
Şekil 16. Çeşitli Yayılı Yük Genişliği ve Tabakaların Yükseklik Oranı Değerleri İçin $p_1(x)/p_0$ Temas Gerilme Yayılışları ($K_1 = K_2 = K_3 = 2, \mu_{01} = \mu_{02} = \mu_3 = 100, \beta_1 = \beta_2 = 1$)	54
Şekil 17. Çeşitli Yayılı Yük Genişliği ve Tabakaların Yükseklik Oranı Değerleri İçin $p_2(x)/p_0$ Temas Gerilme Yayılışları ($K_1 = K_2 = K_3 = 2, \mu_{01} = \mu_{02} = \mu_3 = 100, \beta_1 = \beta_2 = 1$)	55

TABLolar DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1. Çeşitli (μ_{02}/μ_3) Değerleri İçin Temas Uzunluklarının $\beta_1 = \beta_2$ ile Değişimi ($K_1 = K_2 = K_3 = 2, h_1 = h_2 = 1, a/h_2 = 1$).....	36
Tablo 2. Çeşitli β_1, β_2 Değerleri İçin Fonksiyonel Derecelendirilmiş 1. Tabaka ile Fonksiyonel Derecelendirilmiş 2. Tabaka Arasındaki Temas Uzunluğunun (b/h_2) Değişimi ($K_1 = K_2 = K_3 = 2, \mu_{01} = \mu_{02} = \mu_3 = 100, a/h_2 = 1, p_0 = 1, h_1/h_2 = 1$).....	38
Tablo 3. Çeşitli β_1, β_2 Değerleri İçin Fonksiyonel Derecelendirilmiş 2. Tabaka ile Yarı Sonsuz Düzlem Arasındaki Temas Uzunluğunun (c/h_2) Değişimi ($K_1 = K_2 = K_3 = 2, \mu_{01} = \mu_{02} = \mu_3 = 100, a/h_2 = 1, p_0 = 1, h_1/h_2 = 1$).....	38
Tablo 4. Çeşitli Yayılı Yük Genişliği Değerleri İçin Yarı Temas Uzunluklarının h_1/h_2 ile Değişimi ($K_1 = K_2 = K_3 = 2, \mu_{01} = \mu_{02} = \mu_3 = 100, \beta_1 = \beta_2 = 1$).....	40

SEMBOLLER DİZİNİ

a	: Yayılı yük yarı temas uzunluğu
b, c	: Tabakalar arasındaki yarı temas uzunlukları
p_0	: Yayılı yük
u, v, w	: Sırasıyla x,y,z doğrultularındaki yer değiştirme bileşenleri
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	: x,y,z doğrultularındaki uzama şekil değiştirmeleri
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	: Kayma şekil değiştirme bileşenleri
$p_1(x), p_2(x)$	: Tabakalar arasındaki temas gerilmeleri
β_1, β_2	: Rijitlik parametreleri
$\mu_1(y)$	: Fonksiyonel Derecelendirilmiş 1. tabakanın kayma modülü
$\mu_2(y)$	: Fonksiyonel Derecelendirilmiş 2. tabakanın kayma modülü
μ_3	: Yarı sonsuz düzlemin kayma modülü
K_1, K_2, K_3	: Fonksiyonel Derecelendirilmiş tabakalar ve homojen tabakanın malzeme sabitleri
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	: x,y,z doğrultularındaki normal gerilme bileşenleri
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	: Kayma gerilmesi bileşenleri
ϕ, ψ	: Fonksiyonel Derecelendirilmiş tabakalar için Ters Fourier Dönüşüm Fonksiyonları
λ	: Lamé sabiti
h_1, h_2	: Fonksiyonel Derecelendirilmiş tabakaların yükseklikleri
h	: Tabakaların toplam yüksekliği

Not: Bu listede verilmeyen bazı semboller metin içerisinde kullanıldıkları yerlerde tanımlanmıştır.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Temas problemleri, çeşitli mühendislik branşlarında geniş bir uygulama alanına sahiptir. Özellikle temas içeren sistemler yapı ve makine elemanları üzerinde oldukça geniş bir yer teşkil etmektedir. Malzemede meydana gelen temas bölgelerindeki gerilme dağılımlarının, temasın karakter ve uzunluğunun bilinmesi; malzemenin üretimi ve tasarımı için kolaylık sağlamaktadır. Bilgisayar teknolojisi ve sayısal çözüm yöntemlerinin gelişmesi ile birlikte temas problemleri üzerine yapılan çalışmalar son yıllarda artmıştır.

Mühendislik problemlerinin çözümünde temel yöntemlerden biri olan Elastisite Teorisi; yer değiştirme, gerilme, şekil değiştirme problemlerinin çözümünde ve elemanter metotlarının yeterli olmadığı pek çok durumda önemli bir uygulama alanına sahiptir. Ayrıca ifadeleri uzun ve karışık olmasına rağmen elemanter teoriye göre daha kesin sonuçlar vermektedir. Özellikle işaret değiştiren gerilmelere maruz yapılarda içeriye girik köşelerdeki yüksek gerilme yığılmaları sonucunda ortaya çıkan çatlaklarda, kiriş ve millerin enkesitlerindeki ani değişim sonucu ortaya çıkan gerilmelerin belirlenmesinde ve kirişlerde tekil yük ve mesnetlere yakın bölgelerdeki gerilmelerin incelenmesinde Elastisite Teorisini kullanmak uygun olmaktadır(Birinci, 1998).

Üstün mekanik özellikleriyle çeşitli endüstrilerde yaygın olan kompozit malzemeler mekanik uyumsuzluklara neden olabildiğinden fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme ortaya çıkmıştır. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler sürekli yapılarıyla malzemenin bir yüzeyinden diğer yüzeyine fonksiyonel olarak değişmektedirler. Bu varyasyon, diğer malzemelerde meydana gelen gerilme yığılmalarının Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemede en aza indirgenmesini sağlamaktadır.

1.2. Temas Problemlerinin Tarihsel Gelişimi

Temas mekaniğinin konusu Heinrich Hertz tarafından 1882 yılında yazılan “On The Contact of Elastic Solids” makalesi temel alınarak oluşturulmuştur. (Johsnon, 1985). Birçok araştırmaya ışık tutan Hertz’ in çalışması tam elastik cisimler ve sürtünmesiz yüzeyler için geçerlidir ve temas bölgesinin eliptik olduğunu kabul eden Hertz iki elastik

cismin dengesini incelemiştir. İlk çalışması Hertz tarafından yapılan temas problemleri literatüre ‘‘Hertz Değme Problemi’’ olarak geçmiştir (İnan, 1969).

Özellikle integral dönüşüm tekniklerinin Sneddon tarafından elastisite teorisinde kullanılması (Sneddon, 1951) ve kompleks değişkenler yönteminin Muskhelishvili tarafından geliştirilmesi (Muskhelishvili, 1953) temas problemleri üzerine yapılan çalışmaların artmasını sağlamıştır.

20. yüzyılın ilk yarısının sonlarına kadar olan temas problemi ile ilgili çalışmaların tarihçesi ve çözüm yöntemleri Galin’ in ‘‘Contact Problems in the Theory of Elasticity’’ eserinde detaylarıyla verilmiştir (Galin, 1961). Bu probleme integral dönüşüm tekniklerinin uygulanması ise Uffliand’ ın eserinde anlatılmıştır. Mühendisliğin çeşitli uygulama alanlarında incelenen temas problemleri elastisite teorisi ile çözüme kavuşmuştur.

1.2.1. Yarı Sonsuz Düzleme Oturan Tabakalar ile İlgili Çalışmalar

Weitsman (1969), elastik plak-elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki sürekli teması incelemiştir. Bu çalışmada düzlem ve plak arasındaki temas bölgesinin uzunluğunu hesaplamayı amaçlamıştır.

Keer vd. (1972), temas problemini yayılı yük ile yüklenmiş ve elastik yarım düzleme oturan elastik bir tabakanın sürtünmesiz hali için ele almışlardır. Bu çalışmada, temas alanları ve temas gerilmeleri incelenerek simetrik olmayan düzlem temas problemi çözülmüştür.

Civelek ve Erdoğan (1974), çift temas problemini sonlu bölgede elastik bir tabakanın rijit ve elastik bloklar aracılığı ile yüklenmesi ve elastik yarım düzlem üzerine oturması durumunda incelemiştir. Problemi bir singüler integral denkleme indirgemiş ve çeşitli blok profilleri için integral denklemini sayısal olarak çözerek blok altındaki temas gerilme yayılımı ile blok-elastik tabaka, elastik tabaka-yarım düzlem arası temas alanlarını belirlemiştir.

Spence (1975), temas problemini dikdörtgen veya eğrisel profillerdeki dönel simetrik blok aracılığı ile yüklenen yarı sonsuz düzlemi sürtünmeli hali için araştırmıştır. Karışık sınır değer problemi olarak ele alınan problemin formülasyonunda sürtünme Coulomb kanununa göre incelenmiştir.

Adams (1978), temas problemini sabit hızla hareket eden tekil bir yük ile yüklenen elastik tabakanın elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturması durumunda incelemiştir. Problem çeşitli malzeme kombinasyonları altında Fredholm integral denklemlerine indirgenerek çözüme kavuşturulmuştur.

Geçit (1980), düzgün yayılı yük ile yüklenen sonsuz uzunluktaki tabakanın temas problemini elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturması halinde sürtünmesiz olarak incelemiştir. Sürekli ve süreksiz temas durumlarının tek tek ele alındığı problemde, kütle kuvvetleri de dikkate alınmıştır.

Sabin ve Koloni (1989), düşey bir eksen etrafında dönen rijit bir cismin temas problemini elastik yarım düzlemde oturması halinde elastisite teorisi yardımı ile sürtünmeyi de ihmal etmeyerek çözmüşlerdir.

Çakıroğlu ve Çakıroğlu (1991), üstten yayılı bir yüke maruz elastik bir tabaka ile elastik yarım sistem arasındaki sürekli ve süreksiz temas problemini ele almışlardır. Çözümde; Değişik malzeme özellikleri ve tabaka kalınlığı, yükün düzgün yayılı veya bir fonksiyona bağlı olarak değişmesi durumları için temas bölgesindeki gerilme dağılımları ve ilk ayrılma uzaklıkları incelenmiştir.

Elsharkawy (1999), sürtünmeli temas problemini elastik yarım düzlemde değişik sayıda ince elastik tabakalarla kaplanmış haliyle incelemiştir. Çeşitli sürtünme katsayıları için gerilme dağılımları, iki elastik tabaka ile kaplı elastik yarım düzlemin rijit eğrisel bir pança bastırılması sonucu belirlenmiş ve temas gerilmesine yüzey kaplamasının etkisi gösterilmiştir.

Çömez (2009), sürtünmeli temas problemini rijit dairesel panç vasıtası ile yüklenen, homojen, izotrop, elastik bir tabaka-yarım düzlem arasında elastisite teorisi ile integral dönüşüm tekniği kullanarak çözüme ulaşmıştır. h yüksekliğindeki homojen ve izotrop tabakanın üst yüzeyinden düşey ve yatay tekil yükleri ileten rijit panç etki ettirilmiş ve kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir.

Öner (2013), sürekli temas problemini elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan rijit dairesel bir panç aracılığı ile yüklenmiş elastikiyetleri ve yükseklikleri farklı iki elastik tabaka arasında elastisite teorisini kullanarak çözmüştür. Tabakalar arasında ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında oluşan ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları hesaplanmıştır.

1.2.2. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakalı Ortamlara İlişkin Temas Problemleri ile İlgili Çalışmalar

Giannakopoulos ve Suresh (1997a, 1997b), fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerde sürtünme olmadığı kabulü ile düz, konik ve küresel batıcı uçlarla yüklenmiş şekli ile eksenel simetrik temas gerilmelerini çözmüşlerdir.

Erdoğan ve Dağ (2000), temas ve yüzey çatlağı problemini yarı sonsuz fonksiyonel derecelendirilmiş düzlemdeki hali ile herhangi bir profile sahip sürtünmeli rijit zımba etkisi durumunda ele almışlardır.

Güler (2000), temas problemini fonksiyonel derecelendirilmiş kaplamanın homojen gövde üzerindeki durumu için çözüme ulaştırmıştır. Bu çalışmada, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin derinlik boyunca üstel bir fonksiyona bağlı değişen bir kayma modülüne sahip olduğu kabulü yapılmıştır.

Borgi vd. (2006), temas problemini fonksiyonel derecelendirilmiş-homojen tabakalar arasında ayrılmalı hali ile incelemişlerdir. Çalışma kapsamında, yayılı yük ile yüklenen fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaya dair temas gerilmeleri ile ayrılma uzaklıklarını elde etmişlerdir.

Ke ve Yang (2008), elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan rijit silindirik bir blok ile yüklenen homojen bir tabaka ile kaplı ve fonksiyonel derecelendirilmiş bir tabakanın iki boyutlu temas problemini ele almışlardır. Ele alınan bu problemde, kayma modülüne ve fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın kalınlığına bağlı olarak temas gerilmelerinin ve alanlarının büyük ölçüde değiştiği saptanmıştır.

Rhimi (2009), eksenel simetrik temas problemini elastik yarım düzlem-fonksiyonel derecelendirilmiş yarım düzlem için çözmüşlerdir. Temas uzunlukları ve gerilmeleri Henkel dönüşüm teknikleri yardımı ile tekil integral denklem elde edilerek hesaplanmıştır.

Elloumi vd. (2010), izotropik, homojen olmayan, fonksiyonel derecelendirilen yarım düzlem ile normal yüke maruz bırakılan blok arasındaki doğrusal olmayan kayma temasını incelemişlerdir. Çalışma kapsamında, derecelendirilmiş ortamın homojen olmayan bir izotropik malzeme olduğu, kayma modülünün üstel olarak değiştiği ve sabit bir Poisson oranına sahip olduğu kabulü yapılmıştır.

Yıldırım vd. (2011), periyodik çatlak problemini fonksiyonel derecelendirilmiş yarım düzlemde analitik bir şekilde ele almışlardır. Bu çalışma kapsamında; elastisite modülü, termal genleşme katsayısı ve iletim katsayısının derinlik doğrultusunda üstel fonksiyon olarak değiştiği hesaba katılmıştır.

Taşkiner ve Özşahin (2013), fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme içeren yapışık olan veya olmayan temas problemleri çözümünde yarı analitik bir algoritma oluşturmuşlardır. Bu çalışma ile temas genişliğinin ve yüzey basıncının saptanmasını amaçlamışlardır.

Gao ve Gün (2014), sürtünmeli, izotropik, lineer elastik ve homojen olmayan fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeli temas problemlerini çözebilmek amacıyla kuadratik sınır eleman formülasyonunu oluşturmuşlardır. Bu çalışmada; fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin sabit Poisson oranına sahip olduğu ve elastisite modülünün küresel koordinatlarda üstel olarak değiştiği kabulü yapılmıştır.

Kulchytsky vd. (2015), üç boyutlu temas problemini yayılı yük ile yüklenen fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ile kaplanan yarı sonsuz düzlem için analitik olarak çözmüşlerdir. Bu çalışma kapsamında, fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka için kayma modülünün üstel bir şekilde yüksekliğe bağlı olarak değiştiği, Poisson oranının da sabit olduğu kabulü yapılmıştır.

Adıyaman vd. (2016), ayrılmalı temas problemini fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka için iki homojen çeyrek düzlem üzerine oturması durumunda analitik olarak irdemişlerdir. Problem Gauss-Jacobi integrasyon yöntemi kullanılarak çözülmüştür.

Öner vd. (2017), sürekli ve süreksiz temas problemini elastik yarım düzleme oturan ve rijit bir blok aracılığı ile yüklenen fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka için çözmüşlerdir. Problem elastisite teorisi ile çözülmüş ve söz konusu fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın kayma modülü ile yoğunluğunun tabaka yüksekliğine bağlı olarak üstel bir fonksiyon ile değiştiği göz önüne alınmıştır. Çözüm için elastik yarım düzlemin kütle kuvveti ihmal edilirken fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanınki hesaba katılmıştır.

Su vd. (2017), temas problemini rijit dairesel bir blokla yüklenen fonksiyonel derecelendirilmiş piezoelektrik malzemeyle kaplı elastik yarım düzlemin eksenel burulma hali ile ele almışlardır. Temas gerilmeleri ve yer değiştirmeler tekil integral denkleme indirgenmiş sistem ile bulunmuştur. Bu indirgeme için Henkel integral dönüşüm tekniği kullanılmıştır.

Çömez vd. (2018), temas problemini rijit bir silindirik blok aracılığı ile yüklenen ve iki rijit silindirik blok ile desteklenen ve fonksiyonel derecelendirilen tabakada analitik olarak irdemişlerdir. Çalışma kapsamında temas gerilmelerini ve uzunluklarını çeşitli blok aralıkları ve yarıçapları için farklı yüklemeler yaparak incelemişlerdir.

1.3. Çalışmanın Kapsamı ve Amacı

Bu çalışmada, düzgün yayılı yüke maruz, elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan malzeme özellikleri ve yükseklikleri farklı, fonksiyonel derecelendirilmiş iki tabakanın sürtünmesiz teması Elastisite Teorisine göre araştırılmıştır. Tabakaların ağırlıkları ihmal edilmiş ve Poisson oranlarının değişmediği kabul edilmiştir.

Çalışmadaki amaç, tabakalar arasındaki temas uzunluklarının ve gerilmelerinin farklı malzeme özellikleri altında belirlenmesidir. Kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir.

Temas probleminin çözümü için elastisite teorisi yardımıyla elde edilen Navier denklemlerine integral dönüşüm teknikleri uygulanmıştır. Problem iki integral denklemden meydana gelen integral denklem sistemine indirgenerek Gauss-Chebyshev integrasyon formülasyonunun da kullanılmasıyla çözülmüştür.

1.4. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Bu bölümde, elastisite teorisinden faydalanılarak fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ve elastik yarı sonsuz tabaka için gerilme ve yer değiştirme bileşenlerinin genel denklemleri elde edilmektedir.

1.4.1. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakalar için Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Kütle kuvvetleri ihmal edildiği düzlem halde fonksiyonel derecelendirilmiş tabakalar için denge denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

Burada; σ_x , σ_y ve τ_{yx} fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaya ilişkin gerilme bileşenleridir.

(1-2) ifadelerindeki gerilme bileşenleri; yer değiştirme-şekil değiştirme ve bünye denklemleri bağıntıları kullanılarak (3-5) ifadelerindeki gibi elde edilebilir:

$$\sigma_x = \frac{\mu(y)}{K-1} \left[(K+1) \frac{\partial u}{\partial x} + (3-K) \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad (3)$$

$$\sigma_y = \frac{\mu(y)}{K-1} \left[(3-K) \frac{\partial u}{\partial x} + (K+1) \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad (4)$$

$$\tau_{xy} = \mu(y) \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (5)$$

(3-5) eşitliklerinde geçen u ve v sırasıyla fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaların x ve y doğrultusundaki yer değiştirmelerini göstermektedir. $\mu(y)$ ise kayma modülünü göstermektedir, fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaya aittir ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\mu(y) = \mu_0 e^{\beta y} \quad (6)$$

Burada μ_0 , fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaların alt yüzeylerindeki kayma modülüdür. β ise rijitlik parametresini göstermektedir ve tabakanın derinliği boyunca değişmektedir. Denklem sistemlerindeki K bir malzeme sabiti olup düzlem şekil değiştirme halinde $K = 3 - \nu$ olmaktadır. Poisson oranının (ν) sabit olduğu kabulü yapılmıştır.

(3-5) denklemleri ile verilen gerilme ifadelerinin gerekli türevleri alınarak (1-2) denge denklemlerinde ilgili yerlere yazıldığında, aşağıdaki Navier denklemleri elde edilir:

$$(K+1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (K-1) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \beta(K-1) \frac{\partial u}{\partial y} + \beta(K-1) \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

$$(K-1) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (K+1) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \beta(3-K) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta(K+1) \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

Fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın; yükleme durumu, malzeme özellikleri ve geometrisi y eksenine göre simetrik olması nedeniyle u v yer değiştirme bileşenleri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$u(x, y) = -u(-x, y) \quad (9)$$

$$v(x, y) = v(-x, y) \quad (10)$$

Çözümün kolaylaştırılması için Navier denklemleri adi diferansiyel denklemlere dönüştürülür ve bunun için $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ yer değiştirmeleri, bilinmeyen $\emptyset(\xi, y)$ ve $\varphi(\xi, y)$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümleri olarak tanımlandığında aşağıda olduğu gibi yazılabilir:

$$u(x, y) = F_s[\emptyset(\xi, y); \xi \rightarrow x] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \emptyset(\xi, y) \sin \xi x d\xi \quad (11)$$

$$v(x, y) = F_c[\varphi(\xi, y); \xi \rightarrow x] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varphi(\xi, y) \cos \xi x d\xi \quad (12)$$

(11-12) ifadelerinin ters Fourier dönüşümleri ise,

$$\emptyset(\xi, y) = F_s^{-1}[u_1(x, y); x \rightarrow \xi] = \int_0^\infty u(x, y) \sin(\xi x) dx \quad (13)$$

$$\varphi(\xi, y) = F_c^{-1}[v_1(x, y); x \rightarrow \xi] = \int_0^\infty v(x, y) \cos(\xi x) dx \quad (14)$$

şeklinde bulunur. ξ dönüşüm değişkenini göstermek üzere bilinmeyen $\emptyset(\xi, y)$ ve $\varphi(\xi, y)$ fonksiyonlarının bulunabilmesi için (7) denklemi $\sin \xi x d\xi$ ve (8) denklemi $\cos \xi x d\xi$ ile çarpılıp $(0, \infty)$ aralığında integre edilirse aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\int_0^\infty \left[(K+1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (K-1) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \beta(K-1) \frac{\partial u}{\partial y} + \beta(K-1) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \sin(\xi x) dx = 0 \quad (15)$$

$$\int_0^\infty \left[(K-1) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (K+1) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \beta(3-K) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta(K+1) \frac{\partial v}{\partial y} \right] \cos(\xi x) dx = 0 \quad (16)$$

Bu denklemlerde, $u = u(x, y)$ ve $v = v(x, y)$ şeklindedir ve (15-16) deklemlerinde yerlerine yazılabilmeleri için u ve v 'nin bazı türevlerinin Fourier dönüşümleri alınır. Bu dönüşümler aşağıdaki gibidir;

$$F_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; x \rightarrow \xi \right] = -\xi^2 \emptyset \quad (17)$$

$$F_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; x \rightarrow \xi \right] = \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial y^2} \quad (18)$$

$$F_s \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}; x \rightarrow \xi \right] = -\xi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (19)$$

$$F_c \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}; x \rightarrow \xi \right] = -\xi^2 \varphi \quad (20)$$

$$F_c \left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}; x \rightarrow \xi \right] = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad (21)$$

$$F_c \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; x \rightarrow \xi \right] = \xi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (22)$$

Elde edilen bu eşitlikler aşağıdaki sınır şartlarından yola çıkılarak yazılmıştır:

$$u(0, y) = u(\infty, y) = v(\infty, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 0 \quad (23)$$

(17-22) ifadeleri (15-16) denklemlerinde yerlerine yazılıp düzenlenirse;

$$-(K+1)\xi^2 \varphi + (K-1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2\xi \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \beta(K-1) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \xi \varphi \right] = 0 \quad (24)$$

$$-(K-1)\xi^2 \varphi + (K+1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2\xi \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \beta \left[(3-K)\xi \varphi + (K+1) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = 0 \quad (25)$$

şeklinde elde edilen adi diferansiyel denklem takımı, (24-25) denklemleri $\dot{y} = \mathcal{U}y + ky$ formunda bir diferansiyel denklem sistemidir (Apatay, 2010). Denklem sisteminin çözümünde;

$$\varphi = y_1 \text{ ve}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = y_3 \quad (26)$$

$$\varphi = y_2 \text{ ve}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = y_4 \quad (27)$$

tanımlamaları yapılır. Diferansiyel denklem sistemi $\dot{y} = \mathcal{U}y$ şeklinde yazılarak matris formatında düzenlenebilir:

$$\begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K+1}{K-1} \xi^2 & \beta \xi & -\beta & \frac{2\xi}{K-1} \\ -\frac{\beta \xi (3-K)}{K+1} & \frac{(K-1)}{K+1} \xi^2 & -\frac{2\xi}{K+1} & -\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} \quad (28)$$

Burada;

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K+1}{K-1}\xi^2 & \beta\xi & -\beta & \frac{2\xi}{K-1} \\ -\frac{\beta\xi(3-K)}{K+1} & \frac{(K-1)}{K+1}\xi^2 & -\frac{2\xi}{K+1} & -\beta \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır ve $|\mathcal{U} - nI| = 0$ yazıldığında;

$$n^4 + 2\beta n^3 + (\beta^2 - 2\xi^2)n^2 - 2\xi^2\beta n + \frac{\xi^2(3\beta^2 + \xi^2 + (\xi^2 - \beta^2)K)}{K+1} = 0 \quad (29)$$

karakteristik denklemi elde edilmiş olur. Bu diferansiyel denklem sisteminde çözümün e^{ny} olduğu kabulü yapılırsa;

$$\emptyset = \sum_{j=1}^4 A_j e^{n_j y} \quad (30)$$

$$\varphi = \sum_{j=1}^4 A_j m_j e^{n_j y} \quad (31)$$

ifadeleri elde edilir. (30-31) ifadeleri, (24-25) denklemlerinde yerlerine yazılırsa;

$$m_j = \frac{(3\beta + 2n_j - \beta K)[n_j(\beta + n_j)(K+1) - \xi^2(K+3)]}{\xi[4\xi^2 - \beta^2(K-3)(K+1)]}, \quad (j = 1, \dots, 4) \quad (32)$$

ifadesi elde edilir. Karakteristik denkleme ait kökler;

$$n_1 = -\frac{1}{2} \left(\beta + \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 - 4\xi\beta i \sqrt{\frac{3-K}{K+1}}} \right) \quad (33)$$

$$n_2 = -\frac{1}{2} \left(\beta - \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 - 4\xi\beta i \sqrt{\frac{3-K}{K+1}}} \right) \quad (34)$$

$$n_3 = -\frac{1}{2} \left(\beta + \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 + 4\xi\beta i \sqrt{\frac{3-K}{K+1}}} \right) \quad (35)$$

$$n_4 = -\frac{1}{2} \left(\beta - \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 + 4\xi\beta i \sqrt{\frac{3-K}{K+1}}} \right) \quad (36)$$

olarak elde edilir. (30-31) ifadelerinde tanımlanan $\emptyset(\xi, y)$ ve $\varphi(\xi, y)$ fonksiyonları sırasıyla (11-12) denklemlerinde yerlerine yazılırsa; fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaya ilişkin yer değıştirmeler aşğıdaki şekilde bulunur:

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 A_j e^{n_j y} \sin(\xi x) d\xi \quad (37)$$

$$v(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 A_j m_j e^{n_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (38)$$

Bu denklemlerde geçen $A_j (j = 1, \dots, 4)$ büyüklükleri sabit katsayılar olup probleme ilişkin sınır şartları kullanılarak elde edileceklerdir.

(37-38) ifadeleri (3-5) denklemlerinde yerlerine yazılırlar ise, fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaya ait gerilme bileşenleri aşğıdaki gibi elde edilir:

$$\sigma_x = \frac{2\mu_0 e^{\beta y}}{\pi(K-1)} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 A_j [(3-K)m_j n_j + \xi(K+1)] e^{n_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (39)$$

$$\sigma_y = \frac{2\mu_0 e^{\beta y}}{\pi(K-1)} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 A_j C_j e^{n_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (40)$$

$$\tau_{xy} = \frac{2\mu_0 e^{\beta y}}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 A_j D_j e^{n_j y} \sin(\xi x) d\xi \quad (41)$$

Burada;

$$C_j = [(K+1)m_j n_j + \xi(3-K)] \quad (j = 1, \dots, 4) \quad (42)$$

$$D_j = n_j - \xi m_j \quad (j = 1, \dots, 4) \quad (43)$$

şeklindedir.

1.4.2. Elastik Yarı Sonsuz Düzlem için Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Kütle kuvvetleri ihmal edildiğı düzlem halde elastik yarı düzlem için denge denklemleri aşğıdaki gibidir:

$$\frac{\partial \sigma_{3x}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{3xy}}{\partial y} = 0 \quad (44)$$

$$\frac{\partial \tau_{3xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{3y}}{\partial y} = 0 \quad (45)$$

Bu ifadelerdeki σ_{3x} , σ_{3y} ve τ_{3xy} gerilme bileşenleri; yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntıları ve bünye denklemleri kullanılarak (46-48)' deki gibi elde edilebilir:

$$\sigma_{3x} = \lambda_3 e_3 + 2\mu_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} \quad (46)$$

$$\sigma_{3y} = \lambda_3 e_3 + 2\mu_3 \frac{\partial v_3}{\partial y} \quad (47)$$

$$\tau_{3xy} = \mu_3 \left(\frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) \quad (48)$$

Burada 3 alt indisi elastik yarım düzlemi ifade etmektedir. Bu ifadelerde geçen;

$$e_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial v_3}{\partial y} \quad (49)$$

$$\lambda_3 = \frac{v_3 E_3}{(1+v_3)(1-2v_3)} \quad (50)$$

$$\mu_3 = \frac{E_3}{2(1+v_3)} \quad (51)$$

şeklindedir. Bu eşitliklerde geçen e_3 , λ_3 , E_3 ve v_3 sırasıyla elastik yarım düzleme ilişkin hacim değiştirme oranını, Lamé sabitini, elastisite modülünü, Poisson oranını göstermektedir. (46-48) denklemlerinin gerekli türevleri alınıp (44-45) denge denklemlerinde yerlerine yazılırsa Navier denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$(\lambda_3 + \mu_3) \frac{\partial e_3}{\partial x} + \mu_3 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (52)$$

$$(\lambda_3 + \mu_3) \frac{\partial e_3}{\partial y} + \mu_3 \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (53)$$

Elastik yarım düzlemin yükleme durumu, malzeme özellikleri ve geometrisi y eksenine göre simetrik olduğundan yer değiştirme bileşenleri aşağıdaki eşitlikleri sağlamalıdır:

$$u_3(x, y) = -u_3(-x, y) \quad (54)$$

$$v_3(x, y) = v_3(-x, y) \quad (55)$$

Çözümün kolaylaştırılması için Navier denklemleri, adi diferansiyel denklemlere dönüştürülür ve bunun için $u_3(x, y)$ ve $v_3(x, y)$ yer değiştirmeleri, bilinmeyen $\phi_3(\xi, y)$ ve $\varphi_3(\xi, y)$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümleri olarak tanımlandığında aşağıdaki gibi yazılabilirler:

$$u_3(x, y) = F_s[\phi_3(\xi, y); \xi \rightarrow x] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \phi_3(\xi, y) \sin \xi x d\xi \quad (56)$$

$$v_3(x, y) = F_c[\varphi_3(\xi, y); \xi \rightarrow x] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varphi_3(\xi, y) \cos \xi x d\xi \quad (57)$$

Bu eşitliklerin ters Fourier dönüşümleri;

$$\phi_3(\xi, y) = F_s^{-1}[u_3(x, y); x \rightarrow \xi] = \int_0^\infty u_3(x, y) \sin(\xi x) dx \quad (58)$$

$$\varphi_3(\xi, y) = F_c^{-1}[v_3(x, y); x \rightarrow \xi] = \int_0^\infty v_3(x, y) \cos(\xi x) dx \quad (59)$$

şeklinde elde edilir. Bilinmeyen $\phi_3(\xi, y)$ ve $\varphi_3(\xi, y)$ fonksiyonlarının belirlenebilmesi için (52) denklemi $\sin \xi x d\xi$ ve (53) denklemi $\cos \xi x d\xi$ ile çarpılıp $(0, \infty)$ aralığında integre edilirse aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\int_0^\infty \left[\mu_3 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \right) + (\lambda_3 + \mu_3) \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y} \right) \right] \sin(\xi x) dx = 0 \quad (60)$$

$$\int_0^\infty \left[\mu_3 \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} \right) + (\lambda_3 + \mu_3) \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} \right) \right] \cos(\xi x) dx = 0 \quad (61)$$

(60-61) deklemlerinde yerlerine yazılabilmeleri için u_3 ve v_3 'ün gerekli türevlerinin Fourier dönüşümleri alınır. Bu dönüşümler aşağıdaki gibidir:

$$F_s \left[\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}; x \rightarrow \xi \right] = -\xi^2 \phi_3 \quad (62)$$

$$F_s \left[\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}; x \rightarrow \xi \right] = \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial y^2} \quad (63)$$

$$F_s \left[\frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y}; x \rightarrow \xi \right] = -\xi \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \quad (64)$$

$$F_c \left[\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2}; x \rightarrow \xi \right] = -\xi^2 \varphi_3 \quad (65)$$

$$F_c \left[\frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2}; x \rightarrow \xi \right] = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} \quad (66)$$

$$F_c \left[\frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial y}; x \rightarrow \xi \right] = \xi \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \quad (67)$$

Kısmi integrasyon kullanılarak elde edilen bu eşitlikler aşağıdaki sınır şartlarını sağlarlar:

$$u_3(0, y) = u_3(\infty, y) = v_3(\infty, y) = \frac{\partial u_3(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v_3(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v_3(x, y)}{\partial x} = 0 \quad (68)$$

(62-67) ifadeleri (52-53) denklemlerinde yerlerine yazılırsa;

$$-(\lambda + 2\mu_3)\xi^2 \varphi_3 + \mu_3 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} - (\lambda + \mu_3)\xi \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = 0 \quad (69)$$

$$(\lambda + 2\mu_3) \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} - \mu_3 \xi^2 \varphi_3 + (\lambda + \mu_3)\xi \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = 0 \quad (70)$$

şeklinde elde edilen adi diferansiyel takımında, (69) ifadesinin y' ye göre bir kez, (70) ifadesinin y' ye göre iki kez türevi alınırsa;

$$-(\lambda + 2\mu_3)\xi^2 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} + \mu_3 \frac{\partial^4 \varphi_3}{\partial y^4} - (\lambda + \mu_3)\xi \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial y^3} = 0 \quad (71)$$

$$(\lambda + 2\mu_3) \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial y^3} - \xi^2 \mu_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} + (\lambda + \mu_3)\xi \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} = 0 \quad (72)$$

elde edilir. (71) ifadesinden $\frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial y^3}$ çekilip (72) denkleminde yerine yazılırsa;

$$(\lambda + 2\mu_3) \frac{1}{\xi(\lambda_3 + \mu_3)} \left[\mu_3 \frac{\partial^4 \varphi_3}{\partial y^4} - (\lambda_3 + 2\mu_3)\xi^2 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} - \xi^2 \mu_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} + (\lambda_3 + \mu_3)\xi \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (73)$$

elde edilir. Bu denklemden de $\frac{\partial \varphi_3}{\partial y}$ çekilip (69) ifadesinde yerine yazılırsa;

$$\frac{\partial^4 \varphi_3}{\partial y^4} - 2\xi^2 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} + \xi^4 \varphi_3 = 0 \quad (74)$$

şeklinde ϕ_3 'e göre dördüncü mertebeden, sabit katsayılı, lineer ve homojen bir diferansiyel denklem olarak elde edilir.

Bu diferansiyel denklemin çözümünün $\phi_3 = e^{by}$ olduğu kabul edilir ve (74) denkleminde yerine yazılırsa;

$$b^4 - 2\xi^2 b^2 + \xi^4 = 0 \quad (75)$$

şeklinde bir karakteristik denklem elde edilir. Bu denklemin kökleri $b_1 = b_2 = \xi$ ve $b_3 = b_4 = -\xi$ olarak belirlenir. (72) ifadesindeki diferansiyel denklemin genel çözümü ise aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\phi_3(\xi, y) = (B_1 + B_2 y)e^{-\xi y} + (B_3 + B_4 y)e^{\xi y} \quad (76)$$

$\phi_3(\xi, y)$ bilinmeyen fonksiyonunun çözümü için (69) denkleminin y 'ye göre türevi alınıp $\frac{\partial^2 \phi_3}{\partial y^2}$ ifadesi çekilerek (70) denkleminde yerine yazılırsa, $\phi_3(\xi, y)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\phi_3(\xi, y) = \left[B_1 + \left(\frac{K_3}{\xi} + y \right) B_2 \right] e^{-\xi y} + \left[-B_3 + \left(\frac{K_3}{\xi} - y \right) B_4 \right] e^{\xi y} \quad (77)$$

$\phi_3(\xi, y)$ ve $\varphi_3(\xi, y)$ fonksiyonları sırasıyla (56) ve (57) denklemlerinde yerlerine yazılır ve elastik yarı sonsuz düzlem için gerilme ve yer değiştirmelerin $y \rightarrow -\infty$ için sıfır olması şartı kullanılırsa; yarı sonsuz düzlem için yer değiştirme bileşenleri (Kütle kuvvetsiz halde);

$$u_3(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[(B_1 + B_2 y) e^{\xi y} \right] \sin(\xi x) d\xi \quad (78)$$

$$v_3(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\left[-B_1 + \left(\frac{K_3}{\xi} - y \right) B_2 \right] e^{\xi y} \right] \cos(\xi x) d\xi \quad (79)$$

şeklinde elde edilir. Burada $B_i (i = 1, 2)$ bilinmeyen katsayılardır ve probleme ilişkin sınır şartları yardımıyla bulunacaktır.

$u_3(x, y)$ ve $v_3(x, y)$ yer değiştirme bileşenlerinin gerekli türevleri alınıp (46-48) bağıntılarında yerlerine yazılırsa elastik yarı sonsuz düzleme ait gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{1}{2\mu_3} \sigma_{3x}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\xi(B_1 + B_2 y) + \left(\frac{3-K_3}{2} \right) B_2 \right] e^{\xi y} \cos(\xi x) d\xi \quad (80)$$

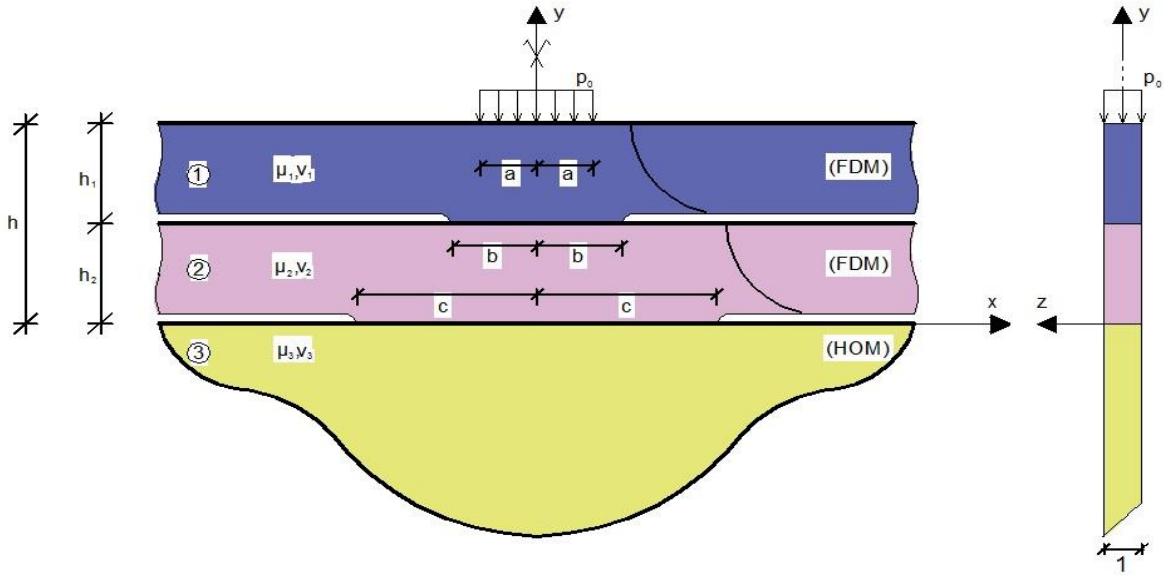
$$\frac{1}{2\mu_3} \sigma_{3y}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[-\xi(B_1 + B_2 y) + \left(\frac{1+K_3}{2} \right) B_2 \right] e^{\xi y} \cos(\xi x) d\xi \quad (81)$$

$$\frac{1}{2\mu_3} \tau_{3xy}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\xi(B_1 + B_2 y) + \left(\frac{1-K_3}{2} \right) B_2 \right] e^{\xi y} \sin(\xi x) d\xi \quad (82)$$

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Problemin Tanımı

Bu bölümde, elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturmuş, farklı malzeme özellikleri ve yükseklikleri olan fonksiyonel derecelendirilmiş iki tabakanın sürtünmesiz temas problemi elastisite teorisinden yararlanılarak incelenmiştir. Sistem düzgün yayılı yük ile yüklenmiş olup kayma modülleri üstel bir fonksiyona bağlı olarak değişen fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaların kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir. Temas yüzeylerinde sürtünmenin olmadığı kabul edilmiştir. Şekil-1’ de problemin geometrisi ve yükleme durumu verilmektedir.



Şekil 1. Problemin geometrisi ve yükleme durumu

Şekilde görüldüğü gibi, 1 nolu tabaka üst yüzeyinden $(-a, a)$ aralığında simetrik düzgün yayılı yük etkisi altındadır. $(-b, b)$ aralığında 1 nolu tabaka ile 2 nolu tabaka, $(-c, c)$ aralığında ise 2 nolu tabaka ile yarı sonsuz düzlem temas halindedir. Problemde 1 ve 2 nolu tabakalar fonksiyonel derecelendirilmiş olup yarı sonsuz tabaka ise homojendir. h_1 ve

h_2 sırasıyla 1 ve 2 nolu tabakaların yüksekliklerini göstermektedir. $[0, \infty)$ aralığında yapılan hesaplarda sistemin y eksenine göre simetrik olması etkili olmuştur.

2.2. Problemin Çözümü

Çözümde elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniği kullanılmıştır. Tabakalar için Fourier dönüşümleri uygulanıp sınır şartlarının kullanılması ile problemin çözümü bilinmeyen temas uzunluklarının ve gerilmelerinin olduğu iki integral denkleme indirgenmiştir. Bu integral denklem sisteminin sayısal çözümü denge denklemlerini de sağlamak şartı ile Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu yardımı ile yapılmış olup temas uzunlukları ve gerilmeleri bulunmuştur.

2.3. Kullanılacak Denklemler

Problemde 1 ve 2 nolu tabakalar fonksiyonel derecelendirilmiş olduğundan bu tabakaların kayma modülleri (83) ve (84) denklemlerinde gösterildiği gibi üstel fonksiyona bağlı olarak değişmektedir. 3 nolu tabaka homojen olduğundan kayma modülü μ_3 olmak üzere sabit bir değer olarak hesaba katılmıştır.

$$\mu_1(y) = \mu_{01} e^{\beta_1(y-h_2)} \quad (83)$$

$$\mu_2(y) = \mu_{02} e^{\beta_2 y} \quad (84)$$

Fonksiyonel derecelendirilmiş tabakalar için kullanılacak yer değiştirme ve gerilme bağıntıları (85-99)' daki gibi yazılabilir:

1 Nolu Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabaka İçin:

$$u_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 A_j e^{n_j y} \sin(\xi x) d\xi \quad (85)$$

$$v_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 A_j m_j e^{n_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (86)$$

$$\sigma_{1x}(x, y) = \frac{2\mu_1(y)}{\pi(K_1-1)} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 A_j [(3 - K_1)m_j n_j + \xi(K_1 + 1)] e^{n_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (87)$$

$$\sigma_{1y}(x, y) = \frac{2\mu_1(y)}{\pi(K_1-1)} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 A_j C_j e^{n_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (88)$$

$$\tau_{1xy}(x, y) = \frac{2\mu_1(y)}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 A_j D_j e^{n_j y} \sin(\xi x) d\xi \quad (89)$$

2 Nolu Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabaka İçin:

$$u_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=5}^8 A_j e^{n_j y} \sin(\xi x) d\xi \quad (90)$$

$$v_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=5}^8 A_j m_j e^{n_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (91)$$

$$\sigma_{2x}(x, y) = \frac{2\mu_2(y)}{\pi(K_2-1)} \int_0^\infty \sum_{j=5}^8 A_j [(3 - K_2)m_j n_j + \xi(K_2 + 1)] e^{n_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (92)$$

$$\sigma_{2y}(x, y) = \frac{2\mu_2(y)}{\pi(K_2-1)} \int_0^\infty \sum_{j=5}^8 A_j C_j e^{n_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (93)$$

$$\tau_{2xy}(x, y) = \frac{2\mu_2(y)}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=5}^8 A_j D_j e^{n_j y} \sin(\xi x) d\xi \quad (94)$$

Elastik yarı sonsuz düzlem için yer değiştirme ve gerilme bağıntıları ise:

$$u_3(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [(B_1 + B_2 y) e^{\xi y}] \sin(\xi x) d\xi \quad (95)$$

$$v_3(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[-B_1 + \left(\frac{K_3}{\xi} - y \right) B_2 \right] e^{\xi y} \cos(\xi x) d\xi \quad (96)$$

$$\frac{1}{2\mu_3} \sigma_{3x}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\xi(B_1 + B_2 y) + \left(\frac{3-K_3}{2} \right) B_2 \right] e^{\xi y} \cos(\xi x) d\xi \quad (97)$$

$$\frac{1}{2\mu_3} \sigma_{3y}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[-\xi(B_1 + B_2 y) + \left(\frac{1+K_3}{2} \right) B_2 \right] e^{\xi y} \cos(\xi x) d\xi \quad (98)$$

$$\frac{1}{2\mu_3} \tau_{3xy}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\xi(B_1 + B_2 y) + \left(\frac{1-K_3}{2} \right) B_2 \right] e^{\xi y} \sin(\xi x) d\xi \quad (99)$$

şeklinde ifade edilebilir.

2.4. Probleme İlişkin Sınır Şartları

Gerilme bileşenleri; $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$, $\tau_{xy}(x, y)$ ve yer değiştirme bileşenleri $u(x, y)$, $v(x, y)$ olmak üzere probleme ilişkin sınır şartları aşağıdaki gibi yazılır:

$$\sigma_{1y}(x, h) = \begin{cases} -p_0 & (0 \leq x < a) \\ 0 & (a \leq x < \infty) \end{cases} \quad (100)$$

$$\tau_{1xy}(x, h) = 0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (101)$$

$$\sigma_{2y}(x, h_2) = \begin{cases} -p_1(x) & (0 \leq x < b) \\ 0 & (b \leq x < \infty) \end{cases} \quad (102)$$

$$\tau_{1xy}(x, h_2) = 0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (103)$$

$$\tau_{2xy}(x, h_2) = 0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (104)$$

$$\sigma_{1y}(x, h_2) = \sigma_{2y}(x, h_2), \quad (0 \leq x < \infty) \quad (105)$$

$$\sigma_{2y}(x, 0) = \begin{cases} -p_2(x) & (0 \leq x < c) \\ 0 & (c \leq x < \infty) \end{cases} \quad (106)$$

$$\tau_{2xy}(x, 0) = 0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (107)$$

$$\tau_{3xy}(x, 0) = 0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (108)$$

$$\sigma_{2y}(x, 0) = \sigma_{3y}(x, 0), \quad (0 \leq x < \infty) \quad (109)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, h_2) - v_2(x, h_2)] = 0, \quad (0 \leq x < b) \quad (110)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_2(x, 0) - v_3(x, 0)] = 0, \quad (0 \leq x < c) \quad (111)$$

Problem ilişkin denge şartları ise;

$$\int_{-b}^b p_1(x) dx = 2ap_0, \quad (112)$$

$$\int_{-c}^c p_2(x) dx = 2ap_0, \quad (113)$$

şeklinde yazılabilir.

Bu ifadelerde geçen; p_0 yayılı yükün şiddeti, $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ ise sırasıyla 1 ve 2 nolu tabakalar ile 2 nolu ve elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki bilinmeyen temas gerilmelerini göstermektedir. $2a$ yayılı yükün genişliğini, b ve c ise sırasıyla 1 ve 2 nolu tabakalar ile 2 nolu tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki yarı temas uzunluklarını ifade etmektedir.

Yukarıda verilmiş olan sınır şartlarından; (100-109) ifadeleriyle verilenler gerilme ve yer değiştirme bağıntılarındaki bilinmeyen katsayıların bulunmasında, (110) ve (111) ifadeleriyle verilenler ise integral denklemlerin elde edilmesinde kullanılacaktır.

2.5. Katsayıların Belirlenmesi

(85-99) denklemleri ile verilen gerilme ve yer değiştirme ifadeleri, (100-109) denklemlerindeki sınır şartlarında yerlerine yazılır ve ters Fourier dönüşümlerinin alınır; $(A_j = 1, \dots, 8), (B_j = 1, 2)$ katsayılarını içeren 10 bilinmeyenli 10 cebrik denklem aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\sum_{j=1}^4 A_j C_j e^{n_j h} = -\frac{(K_1-1)}{\mu_{01} e^{\beta_1 h_1}} \int_0^a p_0 \cos \xi x d\xi \quad (114)$$

$$\sum_{j=1}^4 A_j D_j e^{n_j h} = 0 \quad (115)$$

$$\sum_{j=5}^8 A_j C_j e^{n_j h_2} = -\frac{(K_2-1)}{\mu_{02} e^{\beta_2 h_2}} \int_0^b p_1(x) \cos \xi x d\xi \quad (116)$$

$$\sum_{j=1}^4 A_j D_j e^{n_j h_2} = 0 \quad (117)$$

$$\sum_{j=5}^8 A_j D_j e^{n_j h_2} = 0 \quad (118)$$

$$\frac{\mu_{01}}{(K_1-1)} \sum_{j=1}^4 A_j C_j e^{n_j h_2} - \frac{\mu_{02} e^{\beta_2 h_2}}{(K_2-1)} \sum_{j=5}^8 A_j C_j e^{n_j h_2} = 0 \quad (119)$$

$$\sum_{j=5}^8 A_j C_j = -\frac{(K_2-1)}{\mu_{02}} \int_0^c p_2(x) \cos \xi x d\xi \quad (120)$$

$$\sum_{j=5}^8 A_j D_j = 0 \quad (121)$$

$$\xi B_1 + \frac{1-K_3}{2} B_2 = 0 \quad (122)$$

$$\frac{\mu_{02}}{(K_2-1)} \sum_{j=5}^8 A_j C_j - 2\mu_3 \left(-\xi B_1 + \frac{1+K_3}{2} B_2 \right) = 0 \quad (123)$$

Bu denklem sisteminin ortak çözümü sonucunda $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, B_1, B_2$ katsayıları aşağıdaki gibi bulunurlar:

$$\begin{aligned} A_1 = & \frac{p_0(K_1-1)}{e^{\beta_1 h_1} \Delta_1} [e^{hn_3} e^{h_2(n_2+n_4)} (C_4 D_2 D_3 - C_2 D_3 D_4) \\ & + e^{hn_4} e^{h_2(n_2+n_3)} (C_2 D_3 D_4 - C_3 D_2 D_4) + e^{hn_2} e^{h_2(n_3+n_4)} (C_3 D_2 D_4 - C_4 D_2 D_3)] \\ & + \frac{p_1(K_1-1)}{\Delta_1} [e^{h(n_2+n_3)} e^{h_2 n_4} (C_2 D_3 D_4 - C_3 D_2 D_4) \\ & + e^{h(n_2+n_4)} e^{h_2 n_3} (C_4 D_2 D_3 - C_2 D_3 D_4) + e^{h(n_3+n_4)} e^{h_2 n_2} (C_3 D_2 D_4 - C_4 D_2 D_3)] \quad (124) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 = & \frac{p_0(K_1-1)}{e^{\beta_1 h_1} \Delta_1} [e^{hn_3} e^{h_2(n_1+n_4)} (C_1 D_3 D_4 - C_4 D_1 D_3) \\ & + e^{hn_4} e^{h_2(n_1+n_3)} (C_3 D_1 D_4 - C_1 D_3 D_4) + e^{hn_1} e^{h_2(n_3+n_4)} (C_4 D_1 D_3 - C_3 D_1 D_4)] \\ & + \frac{p_1(K_1-1)}{\Delta_1} [e^{h(n_1+n_3)} e^{h_2 n_4} (C_3 D_1 D_4 - C_1 D_3 D_4) \\ & + e^{h(n_1+n_4)} e^{h_2 n_3} (C_1 D_3 D_4 - C_4 D_1 D_3) + e^{h(n_3+n_4)} e^{h_2 n_1} (C_4 D_1 D_3 - C_3 D_1 D_4)] \quad (125) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 = & \frac{p_0(K_1-1)}{e^{\beta_1 h_1} \Delta_1} [e^{hn_2} e^{h_2(n_1+n_4)} (C_4 D_1 D_2 - C_1 D_2 D_4) \\ & + e^{hn_4} e^{h_2(n_1+n_2)} (C_1 D_2 D_4 - C_2 D_1 D_4) + e^{hn_1} e^{h_2(n_2+n_4)} (C_2 D_1 D_4 - C_4 D_1 D_2)] \\ & + \frac{p_1(K_1-1)}{\Delta_1} [e^{h(n_1+n_2)} e^{h_2 n_4} (C_1 D_2 D_4 - C_2 D_1 D_4) \\ & + e^{h(n_1+n_4)} e^{h_2 n_2} (C_4 D_1 D_2 - C_1 D_2 D_4) + e^{h(n_2+n_4)} e^{h_2 n_1} (C_2 D_1 D_4 - C_4 D_1 D_2)] \quad (126) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4 = & \frac{p_0(K_1-1)}{e^{\beta_1 h_1 \Delta_1}} [e^{h n_2} e^{h_2(n_1+n_3)} (C_1 D_2 D_3 - C_3 D_1 D_2) \\
& + e^{h n_3} e^{h_2(n_1+n_2)} (C_2 D_1 D_3 - C_1 D_2 D_3) + e^{h n_1} e^{h_2(n_2+n_3)} (C_3 D_1 D_2 - C_2 D_1 D_3)] \\
& + \frac{p_1(K_1-1)}{\Delta_1} [e^{h(n_1+n_2)} e^{h_2 n_3} (C_2 D_1 D_3 - C_1 D_2 D_3) \\
& + e^{h(n_1+n_3)} e^{h_2 n_2} (C_1 D_2 D_3 - C_3 D_1 D_2) + e^{h(n_2+n_3)} e^{h_2 n_1} (C_3 D_1 D_2 - C_2 D_1 D_3)], \quad (127)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_5 = & \frac{p_1(K_2-1)}{e^{\beta_2 h_2 \Delta_2}} [e^{h_2 n_6} (C_8 D_6 D_7 - C_7 D_6 D_8) \\
& + e^{h_2 n_7} (C_6 D_7 D_8 - C_8 D_6 D_7) + e^{h_2 n_8} (C_7 D_6 D_8 - C_6 D_7 D_8)] \\
& + \frac{p_2(K_2-1)}{\Delta_2} [e^{h_2(n_6+n_7)} (C_7 D_6 D_8 - C_6 D_7 D_8) \\
& + e^{h_2(n_6+n_8)} (C_6 D_7 D_8 - C_8 D_6 D_7) + e^{h_2(n_7+n_8)} (C_8 D_6 D_7 - C_7 D_6 D_8)] \quad , (128)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_6 = & \frac{p_1(K_2-1)}{e^{\beta_2 h_2 \Delta_2}} [e^{h_2 n_5} (C_7 D_5 D_8 - C_8 D_5 D_7) \\
& + e^{h_2 n_7} (C_8 D_5 D_7 - C_5 D_7 D_8) + e^{h_2 n_8} (C_5 D_7 D_8 - C_7 D_5 D_8)] \\
& + \frac{p_2(K_2-1)}{\Delta_2} [e^{h_2(n_5+n_7)} (C_5 D_7 D_8 - C_7 D_5 D_8) \\
& + e^{h_2(n_5+n_8)} (C_8 D_5 D_7 - C_5 D_7 D_8) + e^{h_2(n_7+n_8)} (C_7 D_5 D_8 - C_8 D_5 D_7)], \quad (129)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_7 = & \frac{p_1(K_2-1)}{e^{\beta_2 h_2 \Delta_2}} [e^{h_2 n_5} (C_8 D_5 D_6 - C_6 D_5 D_8) \\
& + e^{h_2 n_6} (C_5 D_6 D_8 - C_8 D_5 D_6) + e^{h_2 n_8} (C_6 D_5 D_8 - C_5 D_6 D_8)] \\
& + \frac{p_2(K_2-1)}{\Delta_2} [e^{h_2(n_5+n_6)} (C_6 D_5 D_8 - C_5 D_6 D_8) \\
& + e^{h_2(n_5+n_8)} (C_5 D_6 D_8 - C_8 D_5 D_6) + e^{h_2(n_6+n_8)} (C_8 D_5 D_6 - C_6 D_5 D_8)] \quad (130)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_8 = & \frac{p_1(K_2-1)}{e^{\beta_2 h_2 \Delta_2}} [e^{h_2 n_5} (C_6 D_5 D_7 - C_7 D_5 D_6) \\
& + e^{h_2 n_6} (C_7 D_5 D_6 - C_5 D_6 D_7) + e^{h_2 n_7} (C_5 D_6 D_7 - C_6 D_5 D_7)] \\
& + \frac{p_2(K_2-1)}{\Delta_2} [e^{h_2(n_5+n_6)} (C_5 D_6 D_7 - C_6 D_5 D_7) \\
& + e^{h_2(n_5+n_7)} (C_7 D_5 D_6 - C_5 D_6 D_7) + e^{h_2(n_6+n_7)} (C_6 D_5 D_7 - C_7 D_5 D_6)] \quad (131)
\end{aligned}$$

$$B_1 = -\frac{p_2(K_3-1)}{4\xi\mu_3} \quad (132)$$

$$B_2 = -\frac{p_2}{2\mu_3} \quad (133)$$

Bu ifadelerde geçen $p_0(\xi)$, $p_1(\xi)$, $p_2(\xi)$, Δ_1 ve Δ_2 büyüklükleri ise aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$p_0(\xi) = p_0 \sin(\xi a) \quad (134)$$

$$p_1(\xi) = \int_0^b p_1(t_1) \cos(\xi x) d\xi \quad (135)$$

$$p_2(\xi) = \int_0^c p_2(t_2) \cos(\xi x) d\xi \quad (136)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & \mu_{01} [e^{h(n_1+n_3)} e^{h_2(n_2+n_4)} (C_1 C_2 D_3 D_4 - C_1 C_4 D_2 D_3 - C_2 C_3 D_1 D_4 + C_3 C_4 D_1 D_2) \\ & + e^{h(n_1+n_4)} e^{h_2(n_2+n_3)} (-C_1 C_2 D_3 D_4 - C_1 C_3 D_2 D_4 + C_2 C_4 D_1 D_3 - C_3 C_4 D_1 D_2) \\ & + e^{h(n_2+n_3)} e^{h_2(n_1+n_4)} (-C_1 C_2 D_3 D_4 + C_1 C_3 D_2 D_4 + C_2 C_4 D_1 D_3 - C_3 C_4 D_1 D_2) \\ & + e^{h(n_2+n_4)} e^{h_2(n_1+n_3)} (C_1 C_2 D_3 D_4 - C_1 C_4 D_2 D_3 - C_2 C_3 D_1 D_4 - C_3 C_4 D_1 D_2) \\ & + e^{h(n_1+n_2)} e^{h_2(n_3+n_4)} (-C_1 C_3 D_2 D_4 + C_1 C_4 D_2 D_3 + C_2 C_3 D_1 D_4 - C_2 C_4 D_1 D_3) \\ & + e^{h(n_3+n_4)} e^{h_2(n_1+n_2)} (-C_1 C_3 D_2 D_4 + C_1 C_4 D_2 D_3 + C_2 C_3 D_1 D_4 - C_2 C_4 D_1 D_3)] \quad (137) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 = & \mu_{02} [e^{h_2(n_5+n_6)} (C_5 C_7 D_6 D_8 - C_5 C_8 D_6 D_7 - C_6 C_7 D_5 D_8 + C_6 C_8 D_5 D_7) \\ & + e^{h_2(n_5+n_7)} (-C_5 C_6 D_7 D_8 + C_5 C_8 D_6 D_7 + C_6 C_7 D_5 D_8 - C_7 C_8 D_5 D_6) \\ & + e^{h_2(n_5+n_8)} (C_5 C_6 D_7 D_8 - C_5 C_7 D_6 D_8 - C_6 C_8 D_5 D_7 + C_7 C_8 D_5 D_6) \\ & + e^{h_2(n_6+n_7)} (C_5 C_6 D_7 D_8 - C_5 C_7 D_6 D_8 - C_6 C_8 D_5 D_7 + C_7 C_8 D_5 D_6) \\ & + e^{h_2(n_6+n_8)} (-C_5 C_6 D_7 D_8 + C_5 C_8 D_6 D_7 + C_6 C_7 D_5 D_8 - C_7 C_8 D_5 D_6) \\ & + e^{h_2(n_7+n_8)} (C_5 C_7 D_6 D_8 - C_5 C_8 D_6 D_7 - C_6 C_7 D_5 D_8 + C_6 C_8 D_5 D_7)] \quad (138) \end{aligned}$$

2.6. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi

b ve c yarı temas uzunlukları ile $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ temas gerilmelerini elde etmek amacıyla, katsayılar belirlenirken kullanılmayan (110-111) sınır şartlarından faydalanılarak elde edilen iki integral denklemden oluşan sistemden yararlanılacaktır.

2.6.1. Birinci İntegral Denklemin Elde Edilmesi

Birinci integral denklemi elde etmek için (110) sınır şartından faydalanılacaktır. Bu sınır şartı;

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, h_2) - v_2(x, h_2)] = 0 \quad (139)$$

şeklindedir. (86) ifadesinden yararlanılıp, hesaplanan A_1, A_2, A_3, A_4 katsayılarının yukarıdaki sınır şartında yerlerine yazılması ve gerekli düzenlemelerin yapılması sonucunda;

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, h_2)] = p_0 R_1(x_1) + \frac{2}{\pi} \int_0^b p_1(t_1) R_2(x_1, t_1) dt_1 \quad (140)$$

ifadesi elde edilir. Burada;

$$R_1(x_1) = \int_0^\infty -\frac{\xi(K_1-1)}{\Delta_1 e^{\beta_1 h_1}} A_{j0} m_j e^{n_j h_2} \sin(\xi a) \sin(\xi x) d\xi \quad (141)$$

$$R_2(x_1, t_1) = \int_0^\infty -\frac{\xi(K_1-1)}{\Delta_1} A_{j1} m_j e^{n_j h_2} \cos(\xi t_1) \sin(\xi x_1) d\xi \quad (142)$$

olarak tanımlanabilir.

$y \rightarrow h_2$ limitine geçildiğinde (140) denkleminde yer alan $R_2(x_1, t_1)$ ifadesinin çekirdeğinin yakınsaması bozulmaktadır. Yani ξ 'nin büyük değerleri için integralin çekirdeğini oluşturan fonksiyon sifıra yakınsamamaktadır. Çekirdeğin yakınsamasını bozan singüler terim aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$ST1 = \frac{1}{\mu_{01}} \int_0^\infty -\frac{K_1+1}{4} \cos(\xi t_1) \sin(\xi x_1) d\xi \quad (143)$$

Singüler terimin kapalı integrali, integral dönüşüm tabloları yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{1}{\mu_{01}} \int_0^\infty -\frac{K_1+1}{4} \cos(\xi t_1) \sin(\xi x_1) d\xi = -\frac{1}{\mu_{01}} \frac{K_1+1}{8} \left(\frac{1}{t_1+x_1} - \frac{1}{t_1-x_1} \right), \quad (144)$$

Singüler terim $R_2(x_1, t_1)$ çekirdeğinden çıkartılır ve bu terimin kapalı integrali ifadeye eklenirse, (140) denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\frac{\partial}{\partial x} v_1(x, h_2) = p_0 R_1(x_1) + \frac{2}{\pi} \int_0^b p_1(t_1) R_2^*(x_1, t_1) dt_1 \quad (145)$$

Burada;

$$R_2^*(x_1, t_1) = \int_0^\infty -\frac{\xi(K_1-1)}{\Delta_1} (A_{j1} m_j e^{n_j h_2} - ST1) \cos(\xi t_1) \sin(\xi x_1) d\xi$$

$$+ \left[-\frac{1}{\mu_{01}} \frac{K_1+1}{8} \left(\frac{1}{t_1+x_1} - \frac{1}{t_1-x_1} \right) \right], \quad (146)$$

şeklinde tanımlanabilir.

(91) ifadesinden yararlanılarak, hesaplanan A_5, A_6, A_7, A_8 katsayılarının yukarıdaki sınır şartında yerlerine yazılması ve gerekli düzenlemelerinde yapılmasıyla;

$$\frac{\partial}{\partial x} v_2(x, h_2) = \frac{2}{\pi} \int_0^b p_1(t_1) R_3(x_1, t_1) dt_1 + \frac{2}{\pi} \int_0^c p_2(t_2) R_4(x_1, t_2) dt_2 \quad (147)$$

ifadesi elde edilir. Burada,

$$R_3(x_1, t_1) = \int_0^\infty -\frac{\xi(K_2-1)}{\Delta_2 e^{\beta_2 h_2}} A_{j1} m_j e^{n_j h_2} \cos(\xi t_1) \sin(\xi x_1) d\xi \quad (148)$$

$$R_4(x_1, t_2) = \int_0^\infty -\frac{\xi(K_2-1)}{\Delta_2} A_{j2} m_j e^{n_j h_2} \cos(\xi t_2) \sin(\xi x_1) d\xi \quad (149)$$

şeklinde tanımlanabilir.

$y \rightarrow h_2$ limitine geçilirken (147) denkleminde yer alan $R_3(x_1, t_1)$ ifadesinin çekirdeğinin yakınsaması bozulmaktadır. Çekirdeğin yakınsamasını bozan singüler terim aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$ST2 = \frac{1}{\mu_{02} e^{\beta_2 h_2}} \int_0^\infty \frac{K_2+1}{4} \cos(\xi t_1) \sin(\xi x_1) d\xi \quad (150)$$

Singüler terimin kapalı integrali, integral dönüşüm tabloları yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{1}{\mu_{02} e^{\beta_2 h_2}} \int_0^\infty \frac{K_2+1}{4} \cos(\xi t_1) \sin(\xi x_1) d\xi = \frac{1}{\mu_{02} e^{\beta_2 h_2}} \frac{K_2+1}{8} \left(\frac{1}{t_1+x_1} - \frac{1}{t_1-x_1} \right), \quad (151)$$

Singüler terim $R_3(x_1, t_1)$ çekirdeğinden çıkartılır ve bu terimin kapalı integrali ifadeye eklenirse, (147) denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\frac{\partial}{\partial x} v_2(x, h_2) = \frac{2}{\pi} \int_0^b p_1(t_1) R_3^*(x_1, t_1) dt_1 + \frac{2}{\pi} \int_0^c p_2(t_2) R_4(x_1, t_2) dt_2 \quad (152)$$

Burada;

$$R_3^*(x_1, t_1) = \int_0^\infty -\frac{\xi(K_2-1)}{\Delta_2 e^{\beta_2 h_2}} (A_{j1} m_j e^{n_j h_2} - ST2) \cos(\xi t_1) \sin(\xi x_1) d\xi \\ + \left[\frac{1}{\mu_{02} e^{\beta_2 h_2}} \frac{K_2+1}{8} \left(\frac{1}{t_1+x_1} - \frac{1}{t_1-x_1} \right) \right], \quad (153)$$

şeklinde tanımlanabilir.

Elde edilen $\partial v_1(x, h_2)/\partial x$ ve $\partial v_2(x, h_2)/\partial x$ ifadeleri (139) denkleminde yerlerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılır ise birinci integral denklem aşağıdaki gibi elde edilmiş olur:

$$p_0 R_1(x_1) + \frac{2}{\pi} \int_0^b [R_2^*(x_1, t_1) - R_3^*(x_1, t_1) \\ - \left(\frac{K_1+1}{8\mu_{01}} + \frac{K_2+1}{8\mu_{02} e^{\beta_2 h_2}} \right) \left(\frac{1}{t_1+x_1} - \frac{1}{t_1-x_1} \right)] p_1(t_1) dt_1 \\ - \frac{2}{\pi} \int_0^c R_4(x_1, t_2) p_2(t_2) dt_2 = 0 \quad (154)$$

Simetri nedeniyle;

$$p_1(t_1) = p_1(-t_1) \quad (155)$$

$$p_2(t_2) = p_2(-t_2) \quad (156)$$

olduğu göz önüne alınırsa (154) integral denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$p_0 R_1(x_1) + \frac{2}{\pi} \int_{-b}^b [R_2^*(x_1, t_1) + R_3^*(x_1, t_1) \\ + \left(\frac{K_1+1}{8\mu_{01}} + \frac{K_2+1}{8\mu_{02} e^{\beta_2 h_2}} \right) \left(\frac{1}{t_1-x_1} \right)] p_1(t_1) dt_1 \\ + \frac{2}{\pi} \int_{-c}^c R_4(x_1, t_2) p_2(t_2) dt_2 = 0 \quad (157)$$

Burada;

$$R_1(x_1) = \int_0^\infty -\frac{\xi(K_1-1)}{\Delta_1 e^{\beta_1 h_1}} \sum_{j=1}^4 A_{j0} m_j e^{n_j h_2} \sin(\xi a) \sin(\xi x) d\xi, \quad (158)$$

$$R_2^*(x_1, t_1) = \int_0^\infty \left[\frac{\xi(K_1-1)}{2\Delta_1} \left(\sum_{j=1}^4 A_{j1} m_j e^{n_j h_2} \right) - \frac{K_1+1}{8\mu_{01}} \right] \sin \xi (t_1 - x_1) d\xi, \quad (159)$$

$$R_3^*(x_1, t_1) = \int_0^\infty \left[\frac{\xi(K_2-1)}{2\Delta_2 e^{\beta_2 h_2}} \left(\sum_{j=5}^8 A_{j1} m_j e^{n_j h_2} \right) + \frac{K_2+1}{8\mu_{02} e^{\beta_2 h_2}} \right] \sin \xi(t_1 - x_1) d\xi, \quad (160)$$

$$R_4(x_1, t_2) = \int_0^\infty \frac{\xi(K_2-1)}{2\Delta_2} \sum_{j=5}^8 A_{j2} m_j e^{n_j h_2} \sin \xi(t_2 - x_1) d\xi \quad (161)$$

şeklindedir.

2.6.2. İkinci İntegral Denklemin Elde Edilmesi

İkinci integral denklemi elde etmek için (111) sınır şartından faydalanılacaktır. Bu sınır şartı;

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_2(x, 0) - v_3(x, 0)] = 0 \quad (162)$$

şeklindedir.

(91) ifadesinden yararlanılıp, hesaplanan A_5, A_6, A_7, A_8 katsayıları yerlerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılır ise;

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_2(x, 0)] = \frac{2}{\pi} \int_0^b p_1(t_1) Z_1(x_2, t_1) dt_1 + \frac{2}{\pi} \int_0^c p_2(t_2) Z_2(x_2, t_2) dt_2 \quad (163)$$

ifadesi elde edilir. Burada;

$$Z_1(x_2, t_1) = \int_0^\infty -\frac{\xi(K_2-1)}{\Delta_2 e^{\beta_2 h_2}} A_{j1} m_j \cos(\xi t_1) \sin(\xi x_2) dt_1 \quad (164)$$

$$Z_2(x_2, t_2) = \int_0^\infty -\frac{\xi(K_2-1)}{\Delta_2} A_{j2} m_j \cos(\xi t_2) \sin(\xi x_2) dt_2 \quad (165)$$

şeklinde tanımlanabilir.

$y \rightarrow h_2$ limitine geçilirken (163) denkleminde yer alan $Z_2(x_2, t_2)$ ifadesinin çekirdeğinin yakınsaması bozulmaktadır. Çekirdeğin yakınsamasını bozan singüler terim aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$ST3 = \frac{1}{\mu_{02}} \int_0^\infty -\frac{K_2+1}{4} \cos(\xi t_2) \sin(\xi x_2) d\xi \quad (166)$$

Singüler terimin kapalı integrali, integral dönüşüm tabloları yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{1}{\mu_{02}} \int_0^\infty -\frac{K_2+1}{4} \cos(\xi t_2) \sin(\xi x_2) d\xi = -\frac{1}{\mu_{02}} \frac{K_2+1}{8} \left(\frac{1}{t_2+x_2} - \frac{1}{t_2-x_2} \right), \quad (167)$$

Singüler terim $Z_2(x_2, t_2)$ çekirdeğinden çıkartılır ve bu terimin kapalı integrali ifadeye eklenirse, (163) denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_2(x, 0)] = \frac{2}{\pi} \int_0^b p_1(t_1) Z_1(x_2, t_1) dt_1 + \frac{2}{\pi} \int_0^c p_2(t_2) Z_2^*(x_2, t_2) dt_2 \quad (168)$$

Burada;

$$Z_2^*(x_2, t_2) = \int_0^\infty -\frac{\xi(K_2-1)}{\Delta_2} (A_{j2} m_j - ST3) \cos(\xi t_2) \sin(\xi x_2) d\xi \\ + \left[-\frac{1}{\mu_{02}} \frac{K_2+1}{8} \left(\frac{1}{t_2+x_2} - \frac{1}{t_2-x_2} \right) \right], \quad (169)$$

şeklinde tanımlanabilir.

(96) ifadesinden yararlanılıp, hesaplanan B_1 , B_2 katsayıları yerlerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılır ise;

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_3(x, 0)] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(-B_1 + \frac{K_3}{\xi} B_2 \right) (-\xi) \sin(\xi x) d\xi \quad (170)$$

elde edilir.

Elde edilen $\partial v_2(x, h_2)/\partial x$ ve $\partial v_3(x, h_2)/\partial x$ ifadeleri (162) denkleminde yerlerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılır ise birinci integral denklem aşağıdaki gibi elde edilmiş olur:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^b p_1(t_1) Z_1(x_2, t_1) dt_1 \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^c \left[Z_2^*(x_2, t_2) - \left(\frac{K_2+1}{8\mu_{02}} - \frac{(K_3+1)}{4\mu_3} \right) \left(\frac{1}{t_2+x_2} - \frac{1}{t_2-x_2} \right) \right] p_2(t_2) dt_2 = 0, \quad (171)$$

Simetri nedeniyle;

$$p_1(t_1) = p_1(-t_1) \quad (172)$$

$$p_2(t_2) = p_2(-t_2) \quad (173)$$

olduğu düşünülerek (171) integral denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_{-b}^b p_1(t_1) Z_1(x_2, t_1) dt_1 \\ & + \frac{2}{\pi} \int_{-c}^c \left[Z_2^*(x_2, t_2) + \left(\frac{K_2+1}{8\mu_{02}} + \frac{(K_3+1)}{4\mu_3} \right) \left(\frac{1}{t_2-x_2} \right) \right] p_2(t_2) dt_2 = 0, \end{aligned} \quad (174)$$

Burada;

$$Z_1(x_2, t_1) = \int_0^\infty \frac{\xi(K_2-1)}{2\Delta_2 e^{\beta_2 h_2}} \sum_{j=5}^8 A_{j1} m_j \sin \xi(t_1 - x_2) d\xi, \quad (175)$$

$$Z_2^*(x_2, t_2) = \int_0^\infty \left[\frac{\xi(K_2-1)}{2\Delta_2} \left(\sum_{j=5}^8 A_{j2} m_j \right) - \frac{K_2+1}{8\mu_{02}} \right] \sin \xi(t_2 - x_2) d\xi, \quad (176)$$

şeklindedir.

2.7. İntegral Denklemlerin Boyutsuzlaştırılması

Sayısal çözümünün yapılabilmesi için (177-182)' deki değişken dönüşümleri yapılarak boyutsuz büyüklükler tanımlanabilir:

$$x_1 = bs_1 \quad x_2 = cs_2 \quad (177)$$

$$t_1 = br_1 \quad t_2 = cr_2 \quad (178)$$

$$dt_1 = bdr_1 \quad dt_2 = cdr_2 \quad (179)$$

$$z = \xi h_2 \quad dz = d\xi h_2 \quad (180)$$

$$g_1(r_1) = \frac{p_1(br_1)}{p_0} \quad (181)$$

$$g_2(r_2) = \frac{p_2(cr_2)}{p_0} \quad (182)$$

Burada $g_1(r_1)$ ve $g_2(r_2)$ boyutsuz büyüklükleri tabakalar arasındaki bilinmeyen temas gerilmelerini göstermektedir.

Tanımlanan bu boyutsuz büyüklükler birinci integral denklem (157) denkleminde yerine yazılarak düzenlenir ise;

$$\begin{aligned}
R_1(s_1) + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \left[R_2^*(s_1, r_1) + R_3^*(s_1, r_1) + \left(\frac{K_1+1}{8\mu_{01}} + \frac{K_2+1}{8\mu_{02}e^{\beta_2 h_2}} \right) \left(\frac{1}{r_1-s_1} \right) \right] g_1(r_1) dr_1 \\
+ \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 R_4^*(s_1, r_2) g_2(r_2) dr_2 = 0
\end{aligned} \tag{183}$$

olarak elde edilir.

Burada;

$$\begin{aligned}
R_1(s_1) = \int_0^\infty -\frac{\frac{z}{h_2}(K_1-1)}{\Delta_1 e^{\beta_1 h_1}} [e^{hn_3} e^{h_2(n_1+n_2+n_4)} (m_1(C_4 D_2 D_3 - C_2 D_3 D_4) \\
+ m_2(C_1 D_3 D_4 - C_4 D_1 D_3) + m_4(C_2 D_1 D_3 - C_1 D_2 D_3)) \\
+ e^{hn_4} e^{h_2(n_1+n_2+n_3)} (m_1(C_2 D_3 D_4 - C_3 D_2 D_4) + m_2(C_3 D_1 D_4 - C_1 D_3 D_4) \\
+ m_3(C_1 D_2 D_4 - C_2 D_1 D_4)) \\
+ e^{hn_2} e^{h_2(n_1+n_3+n_4)} (m_1(C_3 D_2 D_4 - C_4 D_2 D_3) + m_3(C_4 D_1 D_2 - C_1 D_2 D_4) \\
+ m_4(C_1 D_2 D_3 - C_3 D_1 D_2)) \\
+ e^{hn_1} e^{h_2(n_2+n_3+n_4)} (m_2(C_4 D_1 D_3 - C_3 D_1 D_4) + m_3(C_2 D_1 D_4 - C_4 D_1 D_2) \\
+ m_4(C_1 D_2 D_3 - C_3 D_1 D_2))] \sin\left(\frac{z}{h_2}(a-s_1)\right) dz
\end{aligned} \tag{184}$$

$$\begin{aligned}
R_2^*(s_1, r_1) = \int_0^\infty \frac{\frac{z}{h_2}(K_1-1)}{2\Delta_1} [e^{h(n_2+n_3)} e^{h_2(n_1+n_4)} (m_1(C_2 D_3 D_4 - C_3 D_2 D_4) \\
+ m_4(C_3 D_1 D_2 - C_2 D_1 D_3)) \\
+ e^{h(n_2+n_4)} e^{h_2(n_1+n_3)} (m_1(C_4 D_2 D_3 - C_2 D_3 D_4) + m_3(C_2 D_1 D_4 - C_4 D_1 D_2)) \\
+ e^{h(n_3+n_4)} e^{h_2(n_1+n_2)} (m_1(C_3 D_2 D_4 - C_4 D_2 D_3) + m_2(C_4 D_1 D_3 - C_3 D_1 D_4)) \\
+ e^{h(n_1+n_3)} e^{h_2(n_2+n_4)} (m_2(C_3 D_1 D_4 - C_1 D_3 D_4) + m_4(C_1 D_2 D_3 - C_3 D_1 D_2)) \\
+ e^{h(n_1+n_4)} e^{h_2(n_2+n_3)} (m_2(C_1 D_3 D_4 - C_4 D_1 D_3) + m_3(C_4 D_1 D_2 - C_1 D_2 D_4)) \\
+ e^{h(n_1+n_2)} e^{h_2(n_3+n_4)} (m_3(C_1 D_2 D_4 - C_2 D_1 D_4) + m_4(C_2 D_1 D_3 - C_1 D_2 D_3)) \\
- \frac{K_1+1}{8\mu_{01}}] \sin\left(\frac{z}{h_2}(br_1 - bs_1)\right) dz
\end{aligned} \tag{185}$$

$$\begin{aligned}
R_3^*(s_1, r_1) = \int_0^\infty \frac{\frac{z}{h_2}(K_2-1)}{2\Delta_2 e^{\beta_2 h_2}} [e^{h_2(n_5+n_6)} (m_5(C_8 D_6 D_7 - C_7 D_6 D_8) + m_6(C_7 D_5 D_8 - \\
C_8 D_5 D_7)) \\
+ e^{h_2(n_5+n_7)} (m_5(C_6 D_7 D_8 - C_8 D_6 D_7) + m_7(C_8 D_5 D_6 - C_6 D_5 D_8)) \\
+ e^{h_2(n_5+n_8)} (m_5(C_7 D_6 D_8 - C_6 D_7 D_8) + m_8(C_6 D_5 D_7 - C_7 D_5 D_6)) \\
+ e^{h_2(n_6+n_7)} (m_6(C_8 D_5 D_7 - C_5 D_7 D_8) + m_7(C_5 D_6 D_8 - C_8 D_5 D_6))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +e^{h_2(n_6+n_8)}(m_6(C_5D_7D_8 - C_7D_5D_8) + m_8(C_7D_5D_6 - C_5D_6D_7)) \\
& +e^{h_2(n_7+n_8)}(m_7(C_6D_5D_8 - C_5D_6D_8) + m_8(C_5D_6D_7 - C_6D_5D_7)) \\
& +\frac{K_2+1}{8\mu_{02}e^{\beta_2h_2}}]\sin\left(\frac{z}{h_2}(br_1 - bs_1)\right)dz
\end{aligned} \tag{186}$$

$$\begin{aligned}
R_4(s_1, r_2) = \int_0^\infty \frac{\frac{z}{h_2}(K_2-1)}{2\Delta_2} [e^{h_2(n_5+n_6+n_7)}(m_5(C_7D_6D_8 - C_6D_7D_8) + m_6(C_5D_7D_8 - \\
C_7D_5D_8) + m_7(C_6D_5D_8 - C_5D_6D_8)) \\
+e^{h_2(n_5+n_6+n_8)}(m_5(C_6D_7D_8 - C_8D_6D_7) + m_6(C_8D_5D_7 - C_5D_7D_8) + \\
m_8(C_5D_6D_7 - C_6D_5D_7)) \\
+e^{h_2(n_5+n_7+n_8)}(m_5(C_8D_6D_7 - C_7D_6D_8) + m_7(C_5D_6D_8 - C_8D_5D_6) + \\
m_8(C_7D_5D_6 - C_5D_6D_7)) \\
+e^{h_2(n_6+n_7+n_8)}(m_6(C_7D_5D_8 - C_8D_5D_7) + m_7(C_8D_5D_6 - C_6D_5D_8) + \\
m_8(C_6D_5D_7 - C_7D_5D_6))] \sin\left(\frac{z}{h_2}(cr_2 - bs_1)\right)dz
\end{aligned} \tag{187}$$

şeklinde tanımlanabilir.

Tanımlanan bu boyutsuz büyüklükler ikinci integral denklem (174)'da yerlerine yazılarak düzenlenir ise;

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 Z_1(s_2, r_1) g_1(r_1) dr_1 + \\
& \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \left[Z_2^*(s_2, r_2) + \left(\frac{K_2+1}{8\mu_{02}e^{\beta_2h_2}} + \frac{K_3+1}{4\mu_3} \right) \left(\frac{1}{r_2-s_2} \right) \right] g_2(r_2) dr_2 = 0
\end{aligned} \tag{188}$$

olarak elde edilir.

Burada;

$$\begin{aligned}
Z_1(s_2, r_1) = \int_0^\infty \frac{\frac{z}{h_2}(K_2-1)}{2\Delta_2e^{\beta_2h_2}} [e^{h_2n_5}(m_6(C_7D_5D_8 - C_8D_5D_7) + m_7(C_8D_5D_6 - \\
C_6D_5D_8) + m_8(C_6D_5D_7 - C_7D_5D_6)) \\
+e^{h_2n_6}(m_5(C_8D_6D_7 - C_7D_6D_8) + m_7(C_5D_6D_8 - C_8D_5D_6) + \\
m_8(C_7D_5D_6 - C_5D_6D_7))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +e^{h_2 n_7} (m_5(C_6 D_7 D_8 - C_8 D_6 D_7) + m_6(C_8 D_5 D_7 - C_5 D_7 D_8) + \\
& m_8(C_5 D_6 D_7 - C_6 D_5 D_7)) \\
& +e^{h_2 n_8} (m_5(C_7 D_6 D_8 - C_6 D_7 D_8) + m_6(C_5 D_7 D_8 - C_7 D_5 D_8) + \\
& m_7(C_6 D_5 D_8 - C_5 D_6 D_8)) \sin\left(\frac{z}{h_2}(br_1 - cs_2)\right) dz
\end{aligned} \tag{189}$$

$$\begin{aligned}
Z_2^*(s_2, r_2) = \int_0^\infty \frac{\frac{z}{h_2}(K_2-1)}{2\Delta_2} [e^{h_2(n_6+n_7)} (m_5(C_7 D_6 D_8 - C_6 D_7 D_8) + m_8(C_6 D_5 D_7 - \\
C_7 D_5 D_6)) \\
+e^{h_2(n_6+n_8)} (m_5(C_6 D_7 D_8 - C_8 D_6 D_7) + m_7(C_8 D_5 D_6 - C_6 D_5 D_8)) \\
+e^{h_2(n_7+n_8)} (m_5(C_8 D_6 D_7 - C_7 D_6 D_8) + m_6(C_7 D_5 D_8 - C_8 D_5 D_7)) \\
+e^{h_2(n_5+n_7)} (m_6(C_5 D_7 D_8 - C_7 D_5 D_8) + m_8(C_7 D_5 D_6 - C_5 D_6 D_7)) \\
+e^{h_2(n_5+n_8)} (m_6(C_8 D_5 D_7 - C_5 D_7 D_8) + m_7(C_5 D_6 D_8 - C_8 D_5 D_6)) \\
+e^{h_2(n_5+n_6)} (m_7(C_6 D_5 D_8 - C_5 D_6 D_8) + m_8(C_5 D_6 D_7 - C_6 D_5 D_7)) \\
- \frac{K_2+1}{8\mu_{02}}] \sin\left(\frac{z}{h_2}(cr_2 - cs_2)\right) dz,
\end{aligned} \tag{190}$$

şeklinde tanımlanabilir.

Boyutsuz büyüklükler denge şartlarında yerlerine yazılır ise;

$$\frac{b}{2a} \int_{-1}^1 g_1(r_1) dr_1 = 1 \tag{191}$$

$$\frac{c}{2a} \int_{-1}^1 g_2(r_2) dr_2 = 1 \tag{192}$$

elde edilir.

2.8. İntegral Denklemlerin Sayısal Çözümü

(183) ve (188) integral denklem sistemi, Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu ile çözülecektir.

İntegral denklem sisteminin sayısal çözümü;

$$g(r) = w(r)G(r) \tag{193}$$

$$w(r) = (1-r)^\alpha(1+r)^\beta, \quad -1 < r < 1 \tag{194}$$

şeklinde aranabilir.

Söz konusu integral denklemlerde; temas gerilmeleri temasın başladığı ve bittiği noktalarda sıfır olduğundan, integral denklemlerin indisi (-1)'dir. Bu sebeple Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonları, Gauss-Chebyshev integrasyon formülasyonlarına dönüşür ve $\alpha = \beta = 0,5$ olur. Bu durumda;

$$g_1(r_{1i}) = w_1(r_{1i})G_1(r_{1i}), \quad (i = 1, \dots, N) \quad (195)$$

$$w_1(r_{1i}) = (1 - r_{1i}^2)^{0,5}, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (196)$$

$$g_2(r_{2i}) = w_2(r_{2i})G_2(r_{2i}), \quad (i = 1, \dots, N) \quad (197)$$

$$w_2(r_{2i}) = (1 - r_{2i}^2)^{0,5}, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (198)$$

olur.

Bu ifadeler integral denklemlerde ve denge şartlarında yerlerine yazılır ise, integral denklemler temas gerilmelerinin ve uzunluklarının bilinmeyen olduğu denklem takımına indirgenmiş olur. Bu denklemler aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n w_i^n G(r_i) R_1(s_k) + \sum_{i=1}^n w_{1i}^n G_1(r_{1i}) \left(\frac{b}{h_2} (R_2^*(s_{1k}, r_{1k}) + R_3^*(s_{1k}, r_{1k})) + \right. \\ & \left. \left(\frac{K_1+1}{8\mu_{01}e^{\beta_1 h_2}} + \frac{K_2+1}{8\mu_{02}e^{\beta_2 h_2}} \right) \left(\frac{1}{r_{1k}-s_{1k}} \right) \right) + \frac{c}{h_2} \sum_{i=1}^n w_{2i}^n G_2(r_{2i}) R_4(s_{1k}, r_{2k}) = 0, \\ & (k = 1, \dots, N + 1), \end{aligned} \quad (199)$$

$$\frac{b}{2a} \sum_{i=1}^n w_{1i}^n G_1(r_{1i}) = 1, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (200)$$

$$\begin{aligned} & \frac{b}{h_2} \sum_{i=1}^n w_{1i}^n G_1(r_{1i}) Z_1(s_{2k}, r_{1k}) + \sum_{i=1}^n w_{2i}^n G_2(r_{2i}) \left(\frac{c}{h_2} Z_2^*(s_{2k}, r_{2k}) + \left(\frac{K_2+1}{8\mu_{02}e^{\beta_2 h_2}} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{K_3+1}{4\mu_3} \right) \frac{1}{r_{2k}-s_{2k}} \right) = 0, \quad (k = 1, \dots, N + 1), \end{aligned} \quad (201)$$

$$\frac{c}{2a} \sum_{i=1}^n w_{2i}^n G_2(r_{2i}) = 1, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (202)$$

Bu ifadelerde;

$$r_{1i} = \cos\left(\frac{i\pi}{N+1}\right), \quad (i = 1, \dots, N) \quad (203)$$

$$s_{1k} = \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{2k-1}{N+1}\right), \quad (k = 1, \dots, N+1) \quad (204)$$

$$w_i^n = \pi \left(\frac{1-r_i^2}{N+1} \right), \quad (i = 1, \dots, N) \quad (205)$$

olarak tanımlanmaktadır.

Elde edilen lineer denklem sisteminde $2N$ tane olan $G_1(r_{1i})$ ve $G_2(r_{2i})$ ifadeleri bilinmeyen temas gerilmeleridir. Buradan elde edilecek lineer denklem sistemi $2N+2$ denklemden oluşmaktadır. Birinci integral denklemdeki $\left(\frac{N}{2} + 1\right)$. denklem ile ikinci integral denklemdeki $\left(\frac{N}{2} + 1\right)$. denklem otomatik olarak sağlanmakta olup denklem sisteminden çıkartıldığında $2n$ bilinmeyenli $2N$ denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Sistemin çözümü sonucunda temas uzunlukları ve gerilmeleri hesaplanabilir.

3. BULGULAR VE İRDELEME

3.1. Giriş

Bu bölümde, 2. bölümde elde edilen formülasyonlar yardımı ile, boyutsuz büyüklüklerin çeşitli değerleri için temas uzunluklarının değişimi incelenmiştir. Bu incelemelerden elde edilen sonuçlar, tablo ve grafikler halinde verilerek bunlara ait bulgular irdelenmiştir.

Tablo ve grafiklerde geçen bazı boyutsuz büyükler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

a/h_2 : Yayılı yük genişliği

b/h_2 : 1.Fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ile 2. Fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka arasındaki yarı temas uzunluğu

c/h_2 : 2.Fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ile yarı sonsuz düzlem arasındaki yarı temas uzunluğu

h_1/h_2 : Fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaların yükseklikleri oranı

p_0 : Yayılı yükün şiddeti

μ_{01} : 1. Fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın alt yüzeyinin kayma modülü

μ_{02} : 2. Fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın alt yüzeyinin kayma modülü

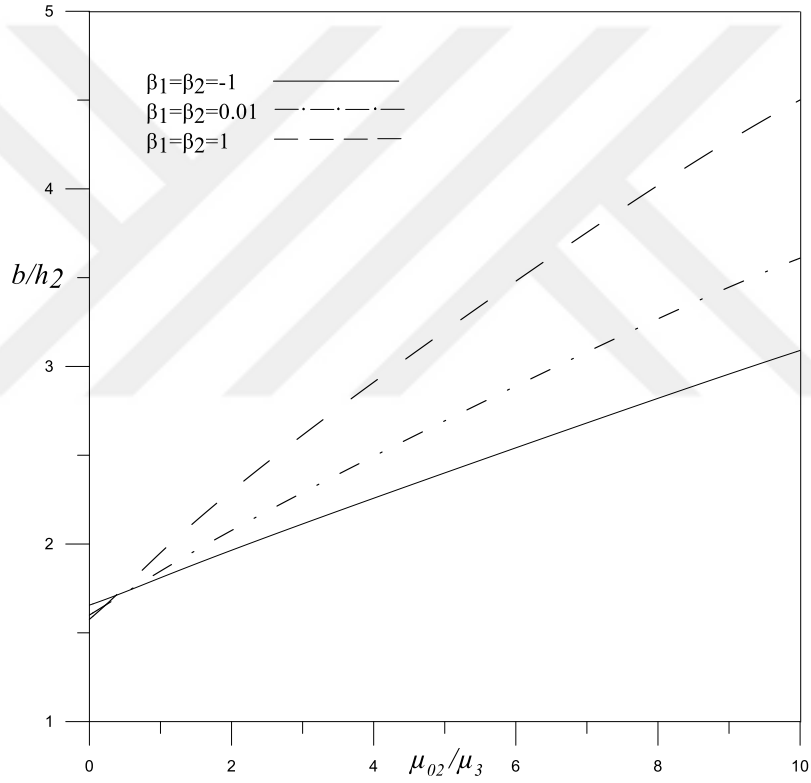
μ_3 : Yarı sonsuz düzlemin kayma modülü

3.2. Temas Uzunlukları ve Temas Gerilmelerine İlişkin Bulgular

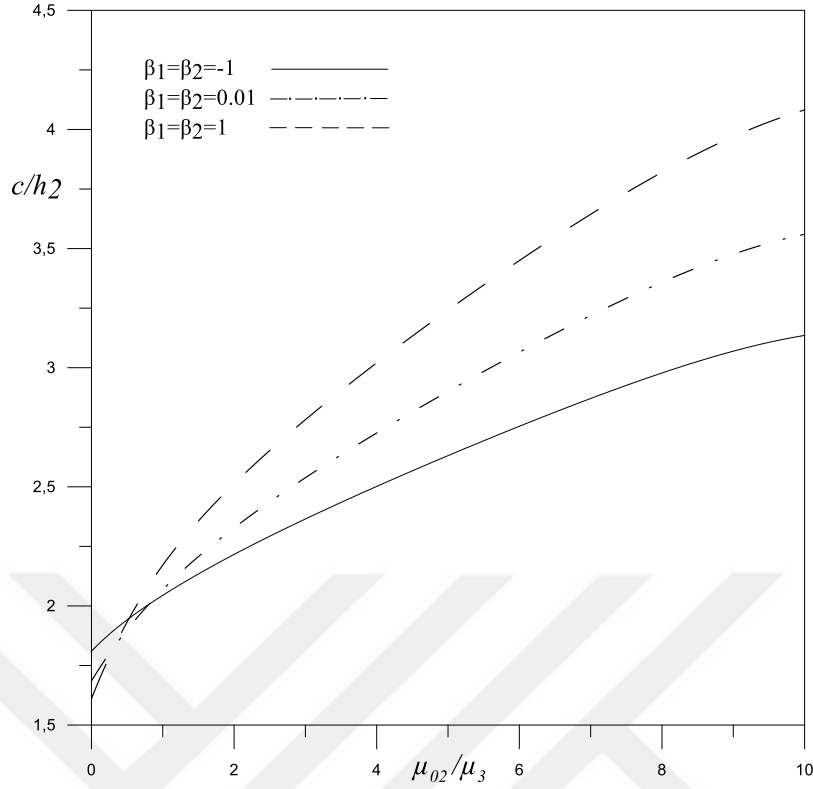
Tablo 1 ve Şekil (2-3)' de (μ_{02}/μ_3) kayma modülü oranları için fonksiyonel derecelendirilmiş tabakalara ait rijitlik parametrelerine $(\beta_1 = \beta_2)$ bağlı olarak temas yüzeyindeki yarı temas uzunlukları verilmektedir. Tablo ve grafiklerden (μ_{02}/μ_3) kayma modülü oranları arttıkça tabakalar arası yarı temas uzunluklarının arttığı görülmektedir. Ayrıca $(\beta_1 = \beta_2)$ rijitlik parametresi değerleri artarken tabakalar arası yarı temas uzunluklarının azaldığı görülmektedir.

Tablo 1. Çeşitli (μ_{02}/μ_3) Değerleri İçin Temas Uzunluklarının $\beta_1 = \beta_2$ ile Değişimi
 $(K_1 = K_2 = K_3 = 2, h_1 = h_2 = 1, a/h_2 = 1)$

	$\mu_{02}/\mu_3 = 0.0001$		$\mu_{02}/\mu_3 = 0.1$		$\mu_{02}/\mu_3 = 1$		$\mu_{02}/\mu_3 = 10$	
$\beta_1 = \beta_2$	b/h_2	c/h_2	b/h_2	c/h_2	b/h_2	c/h_2	b/h_2	c/h_2
-1	1.655889	1.810150	1.670089	1.839909	1.810038	2.044500	3.090000	3.135690
0.01	1.600089	1.68499	1.624832	1.732885	1.847427	2.068427	3.610199	3.560000
1	1.575889	1.610150	1.610922	1.683999	1.950427	2.171427	4.200612	4.075000



Şekil 2. Çeşitli (μ_{02}/μ_3) Değerleri İçin Fonksiyonel Derecelendirilmiş 1. Tabaka ile Fonksiyonel Derecelendirilmiş 2. Tabaka Arasındaki Yarı Temas Uzunluğunun (b/h_2) , $\beta_1 = \beta_2$ ile Değişimi
 $(K_1 = K_2 = K_3 = 2, h_1 = h_2 = 1, a/h_2 = 1)$



Şekil 3. Çeşitli (μ_{02}/μ_3) Değerleri İçin Fonksiyonel Derecelendirilmiş 2. Tabaka ile Yarı Sonsuz Düzlem Arasındaki Temas Uzunluğunun (c/h_2) , $\beta_1 = \beta_2$ ile Değişimi ($K_1 = K_2 = K_3 = 2, h_1 = h_2 = 1, a/h_2 = 1$)

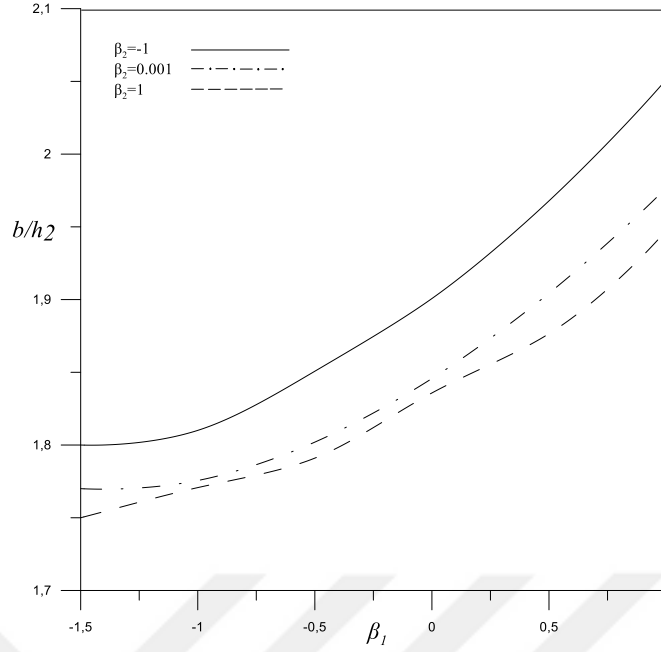
Tablo-(2-3) ve Şekil (4-5)' de, β_1, β_2 rijitlik parametrelerinin çeşitli değerlerine bağlı olarak yarı temas uzunlukları verilmektedir. Tablo ve grafiklerden de görüldüğü gibi β_1 rijitlik parametresi artarken temas uzunlukları da artmaktadır. Ayrıca β_2 rijitlik parametresi artarken 1. ve 2. fonksiyonel derecelendirilmiş tabakalar arası temas uzunluğu az da olsa azalırken 2. fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki temas uzunluğunun β_2 'nin negatif değerleri için azaldığı, pozitif değerleri için ise arttığı görülmektedir.

Tablo 2. Çeşitli β_1, β_2 Değerleri İçin Fonksiyonel Derecelendirilmiş 1. Tabaka ile Fonksiyonel Derecelendirilmiş 2. Tabaka Arasındaki Temas Uzunluğunun (b/h_2) Değişimi ($K_1 = K_2 = K_3 = 2$, $\mu_{01} = \mu_{02} = \mu_3 = 100$, $a/h_2 = 1$, $p_0 = 1$, $h_1/h_2 = 1$)

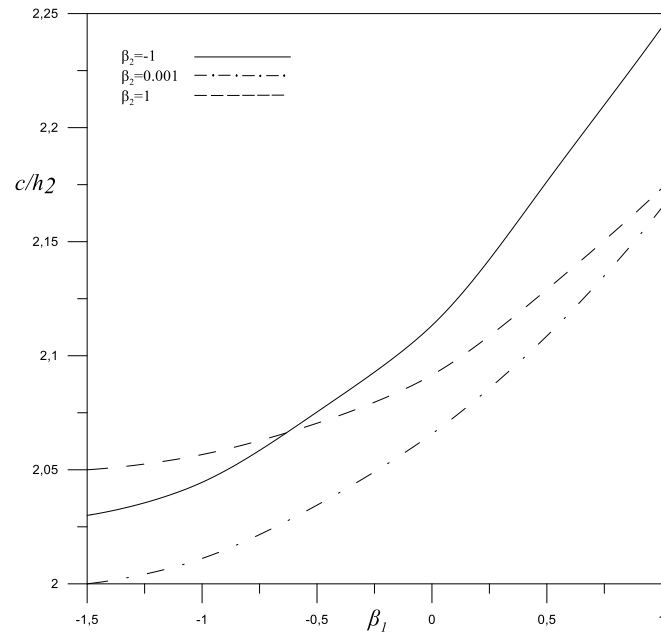
β_1	β_2				
	b/h_2				
	-1	-0.5	0.001	0.5	1
-1	1.810038	1.792479	1.775600	1.770119	1.770754
-0.5	1.850755	1.822707	1.801982	1.795374	1.790990
0.001	1.900801	1.869093	1.845801	1.834749	1.835843
0.5	1.967851	1.929819	1.904340	1.890256	1.876537
1	2.051127	2.010736	1.976665	1.961644	1.947428

Tablo 3. Çeşitli β_1, β_2 Değerleri İçin Fonksiyonel Derecelendirilmiş 2. Tabaka ile Yarı Sonsuz Düzlem Arasındaki Temas Uzunluğunun (c/h_2) Değişimi ($K_1 = K_2 = K_3 = 2$, $\mu_{01} = \mu_{02} = \mu_3 = 100$, $a/h_2 = 1$, $p_0 = 1$, $h_1/h_2 = 1$)

β_1	β_2				
	c/h_2				
	-1	-0.5	0.001	0.5	1
-1	2.044500	2.017430	2.011106	2.027150	2.056654
-0.5	2.075332	2.044988	2.034502	2.045855	2.070401
0.001	2.113318	2.082830	2.065801	2.072931	2.091565
0.5	2.176318	2.130920	2.108664	2.110401	2.129053
1	2.243960	2.190040	2.164932	2.160182	2.173427



Şekil 4. Çeşitli β_1, β_2 Değerleri İçin Fonksiyonel Derecelendirilmiş 1. Tabaka ile Fonksiyonel Derecelendirilmiş 2. Tabaka Arasındaki Temas Uzunluğunun (b/h_2) Değişimi ($K_1 = K_2 = K_3 = 2, h_1/h_2 = 1, a/h_2 = 1, \mu_{01} = \mu_{02} = \mu_3 = 100$)

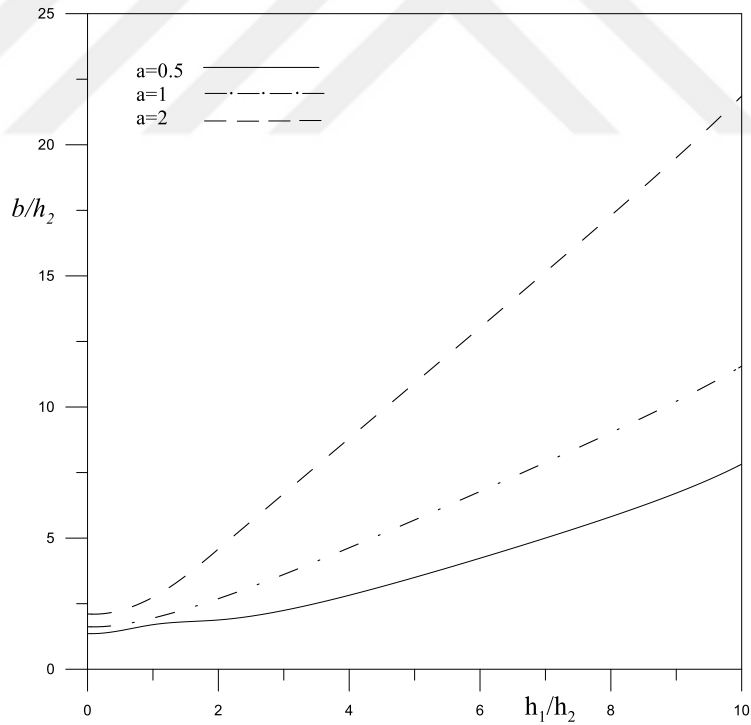


Şekil 5. Çeşitli β_1, β_2 Değerleri İçin Fonksiyonel Derecelendirilmiş 2. Tabaka ile Yarı Sonsuz Düzlem Arasındaki Temas Uzunluğunun (c/h_2) Değişimi ($K_1 = K_2 = K_3 = 2, h_1/h_2 = 1, a/h_2 = 1, \mu_{01} = \mu_{02} = \mu_3 = 100$)

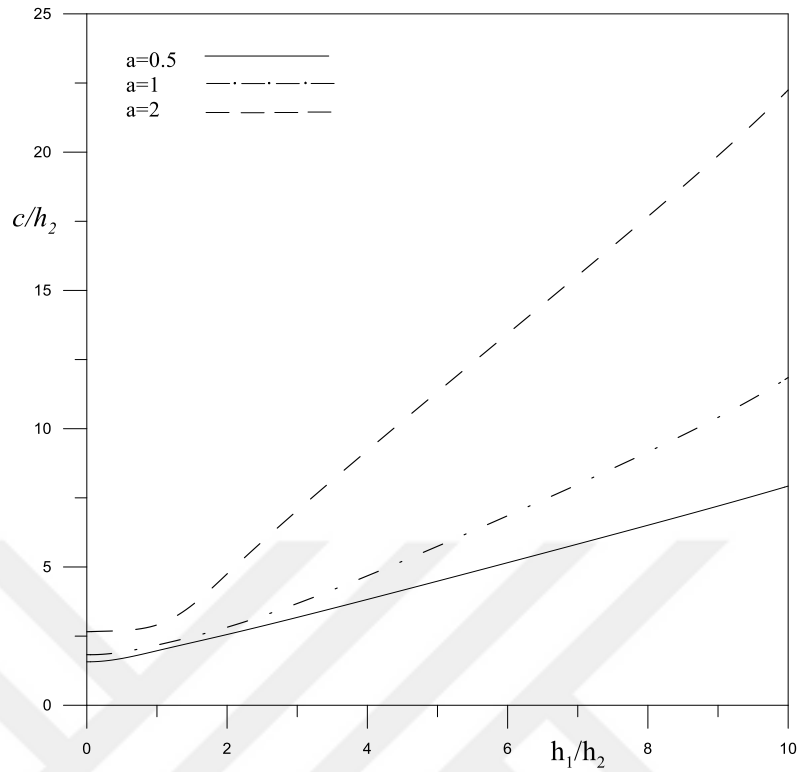
Tablo-4 ve Şekil (6-7)' de, çeşitli yayılı yük genişliği değerleri için tabakaların yükseklik oranlarına bağlı olarak yarı temas uzunluklarının değişimleri verilmektedir. Tablo ve grafiklerden h_1/h_2 oranı ve a yayılı yük genişliği arttıkça yarı temas uzunluklarının arttığı gözlenmektedir.

Tablo 4. Çeşitli Yayılı Yük Genişliği Değerleri İçin Yarı Temas Uzunluklarının h_1/h_2 ile Değişimi ($K_1 = K_2 = K_3 = 2, \mu_{01} = \mu_{02} = \mu_3 = 100, \beta_1 = \beta_2 = 1$)

	$h_1/h_2 = 0.1$		$h_1/h_2 = 1$		$h_1/h_2 = 2$	
	b/h_2	c/h_2	b/h_2	c/h_2	b/h_2	c/h_2
$a=0.1$	0.160081	1.486951	1.622789	1.902010	3.724009	3.571874
$a=0.5$	0.570721	1.572978	1.700869	1.970010	3.755591	3.606888
$a=1$	1.105050	1.831032	1.949073	2.173150	3.865850	3.716000
$a=2$	2.100921	2.667500	2.745073	2.906150	4.267002	4.146056



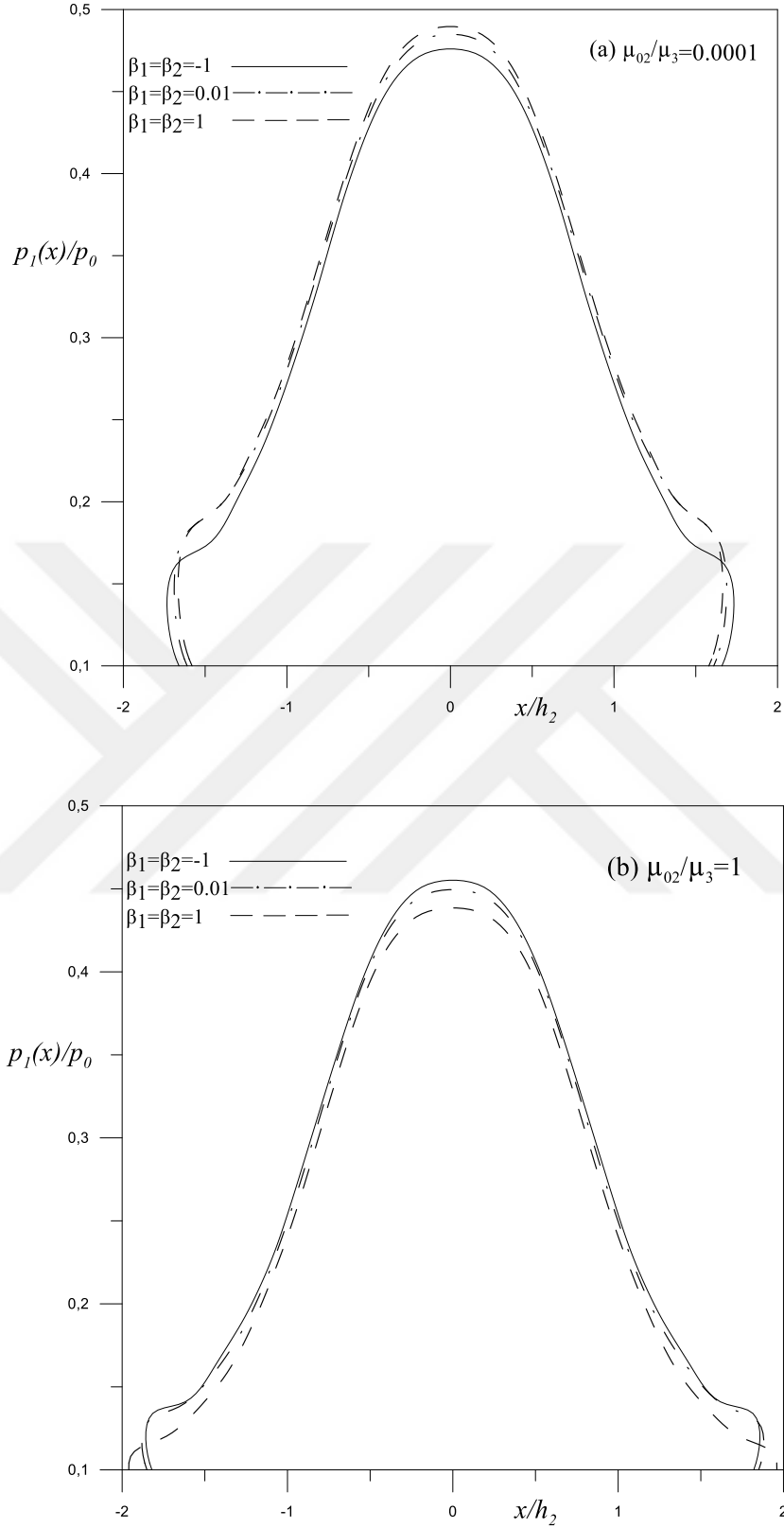
Şekil 6. Çeşitli Yayılı Yük Genişliği Değerleri İçin Fonksiyonel Derecelendirilmiş 1. Tabaka ile Fonksiyonel Derecelendirilmiş 2. Tabaka Arasındaki Yarı Temas Uzunluğunun (b/h_2) h_1/h_2 ile Değişimi ($K_1 = K_2 = K_3 = 2, \mu_{01} = \mu_{02} = \mu_3 = 100, \beta_1 = \beta_2 = 1$)



Şekil 7. Çeşitli Yayılı Yük Genişliği Değerleri İçin Fonksiyonel Derecelendirilmiş 2. Tabaka ile Yarı Sonsuz Düzlem Arasındaki Yarı Temas Uzunluğunun (c/h_2) h_1/h_2 ile Değişimi ($K_1 = K_2 = K_3 = 2, \mu_{01} = \mu_{02} = \mu_3 = 100, \beta_1 = \beta_2 = 1$)

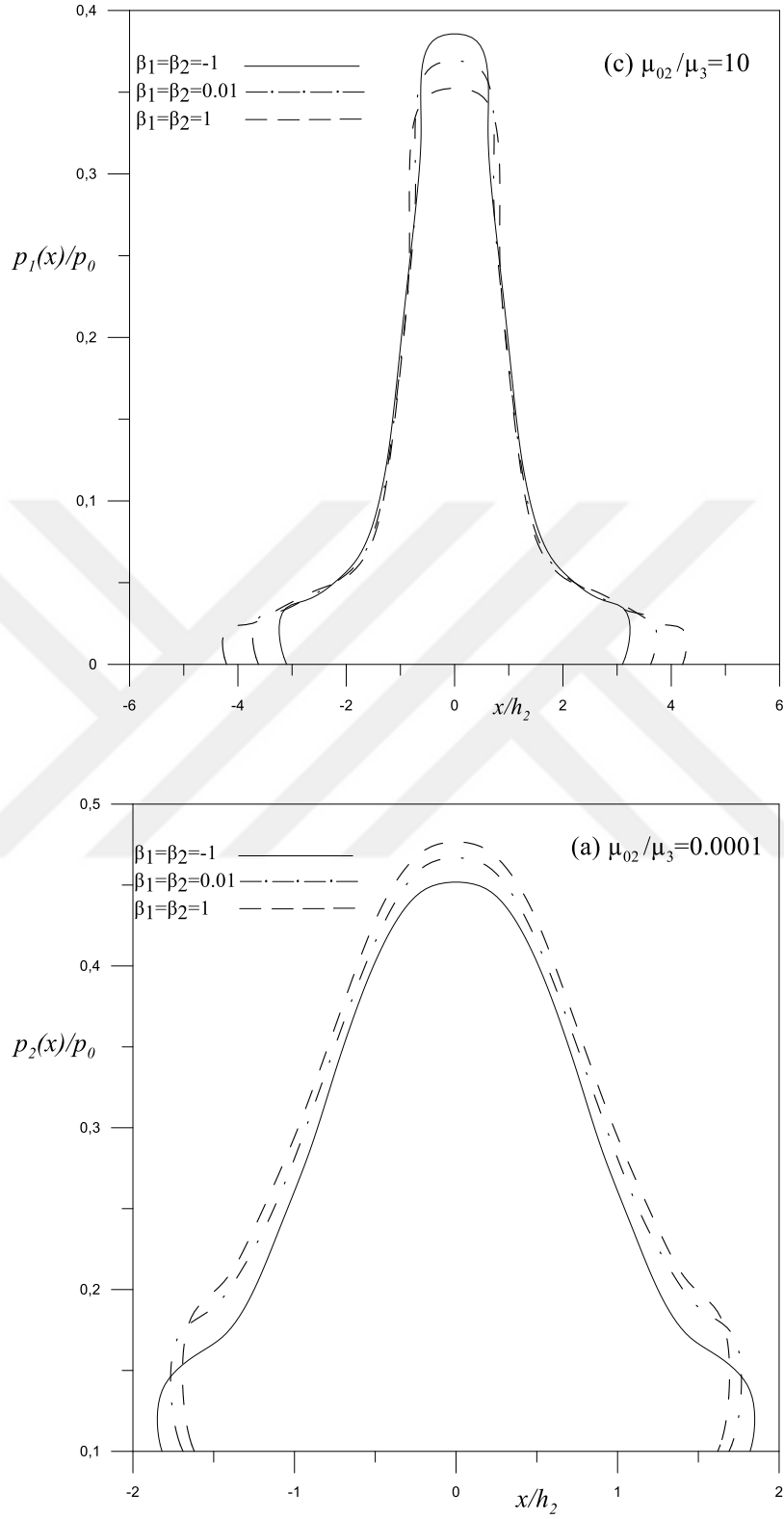
Şekil (8-17)' de çeşitli boyutsuz büyüklükler için, fonksiyonel derecelendirilmiş tabakalar arası ve fonksiyonel derecelendirilmiş 2. tabaka ile yarı sonsuz düzlem arasında ortaya çıkan temas gerilme yayılışları verilmektedir.

Şekil (8-11)' de, çeşitli (μ_{02}/μ_3) kayma modülü oranları ve ($\beta_1 = \beta_2$) rijitlik parametreleri için temas yüzeyinde oluşan temas gerilme yayılışları verilmektedir. (μ_{02}/μ_3) kayma modülü oranları arttıkça temas uzunlukları artmakta, buna bağlı olarak yük daha geniş alana yayılacağından temas gerilmeleri azalmaktadır. ($\beta_1 = \beta_2$) rijitlik parametrelerinin artması halinde; temas yüzeyindeki en büyük temas gerilmeleri, (μ_{02}/μ_3) oranının 0' a yakın olduğu değerlerde artarken, (μ_{02}/μ_3) oranının daha büyük değerlerinde azaldığı görülmektedir.



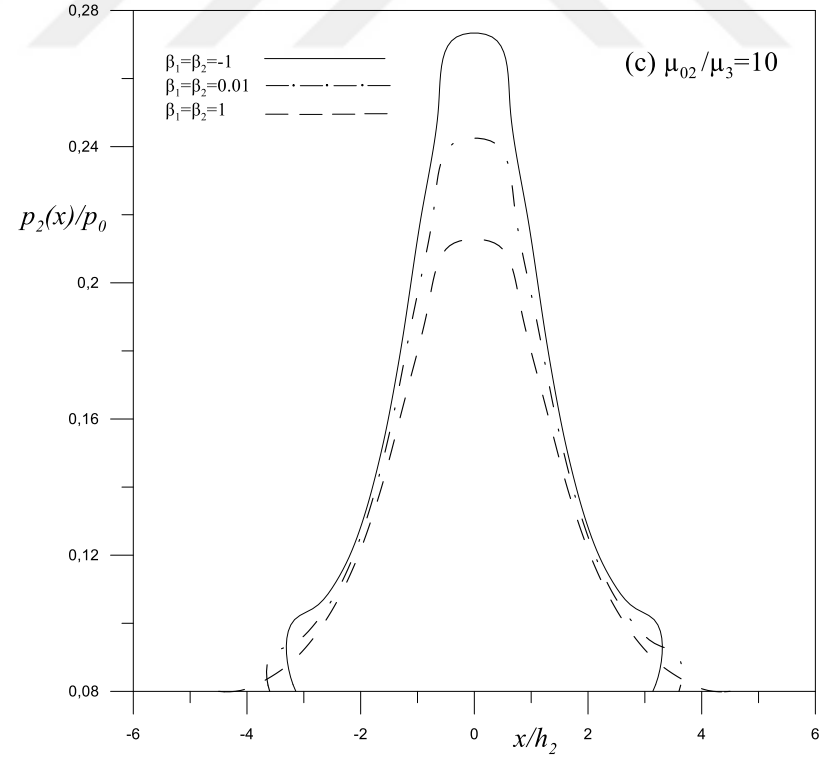
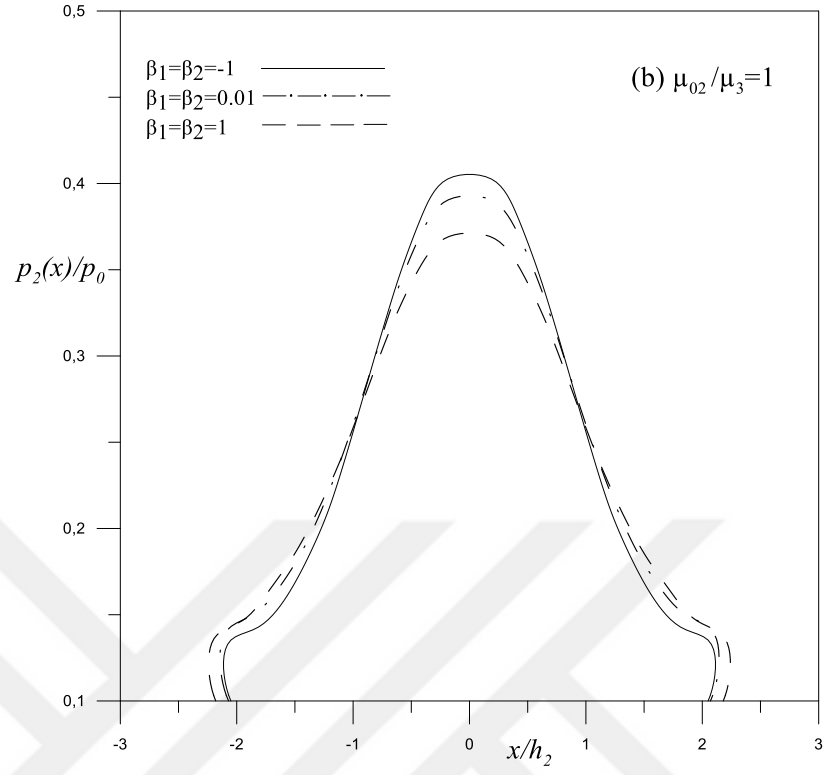
Şekil 8. Çeşitli (μ_{02}/μ_3) kayma modülü oranları ve $(\beta_1 = \beta_2)$ rijitlik parametreleri için $p_1(x)/p_0$ temas gerilme yayılışları ($K_1 = K_2 = K_3 = 2, h_1 = h_2 = 1, a/h_2 = 1$)

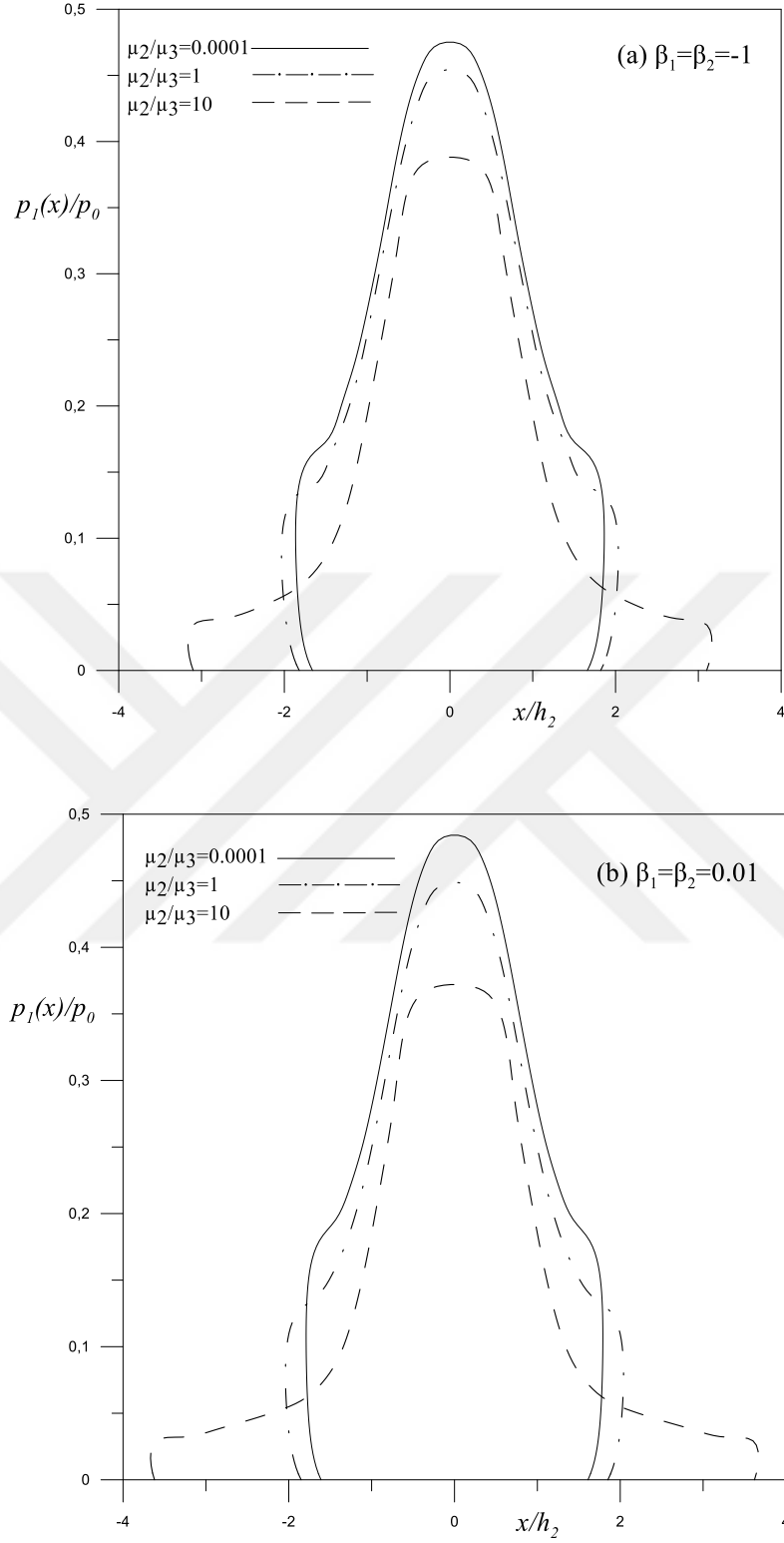
Şekil 8'in devamı



Şekil 9. Çeşitli (μ_{02}/μ_3) kayma modülü oranları ve $(\beta_1 = \beta_2)$ rijitlik parametreleri için $p_2(x)/p_0$ temas gerilme yayılışları ($K_1 = K_2 = K_3 = 2, h_1 = h_2 = 1, a/h_2 = 1$)

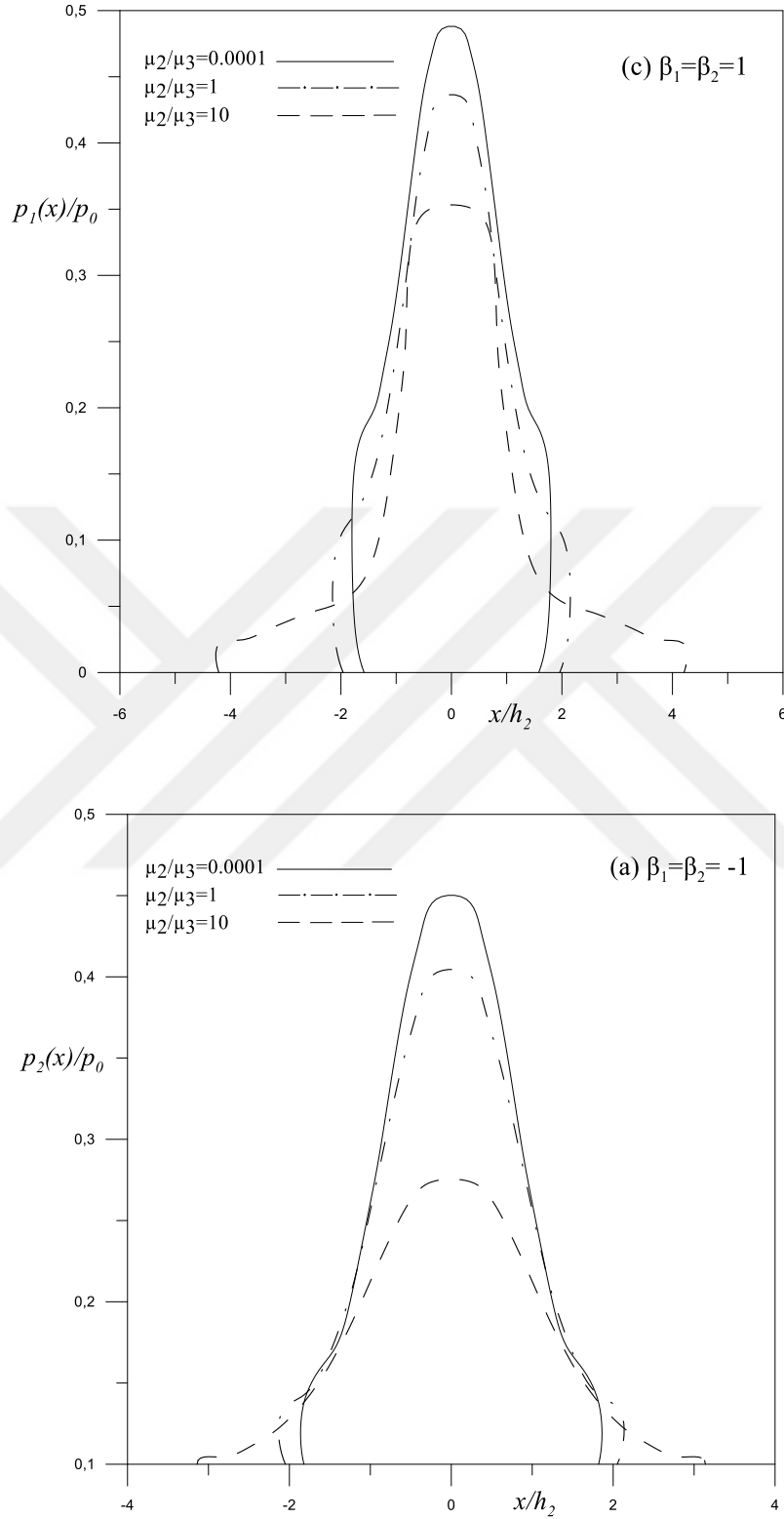
Şekil 9'un devamı





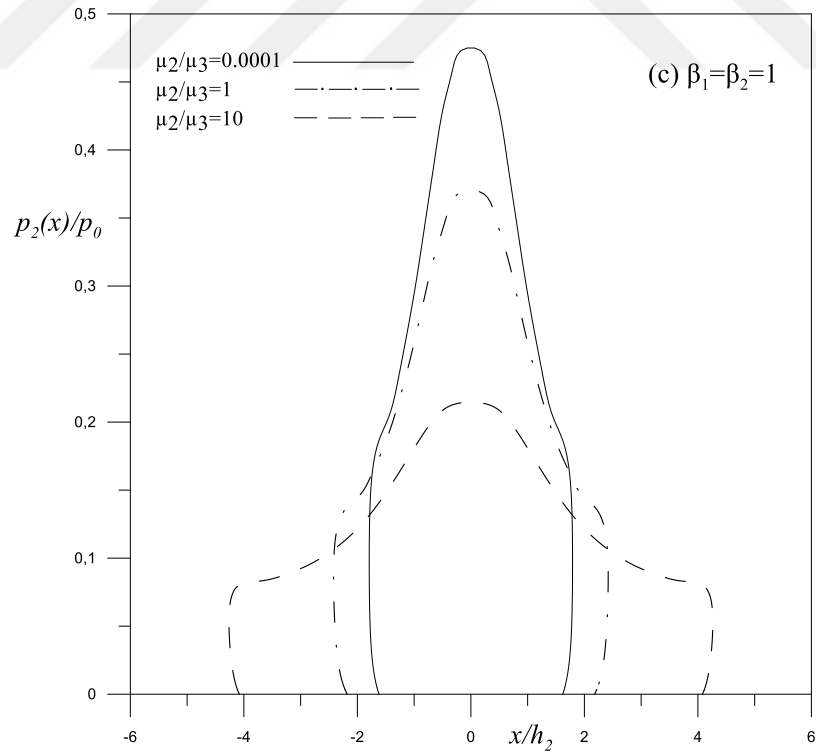
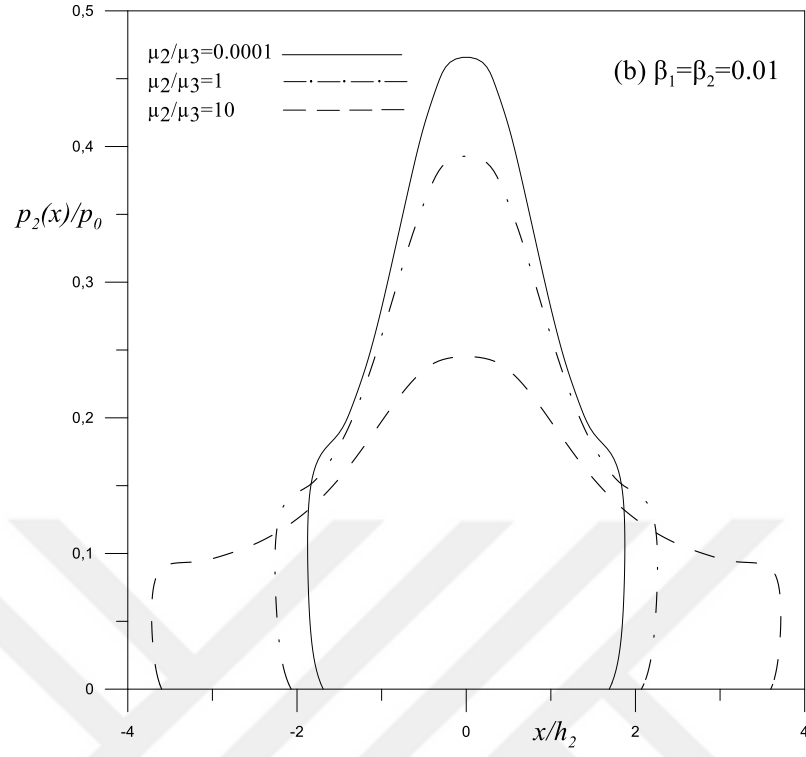
Şekil 10. Çeşitli (μ_{02}/μ_3) kayma modülü oranları ve $(\beta_1 = \beta_2)$ rijitlik parametreleri için $p_1(x)/p_0$ temas gerilme yayılışları ($K_1 = K_2 = K_3 = 2, h_1 = h_2 = 1, a/h_2 = 1$)

Şekil 10'un devamı

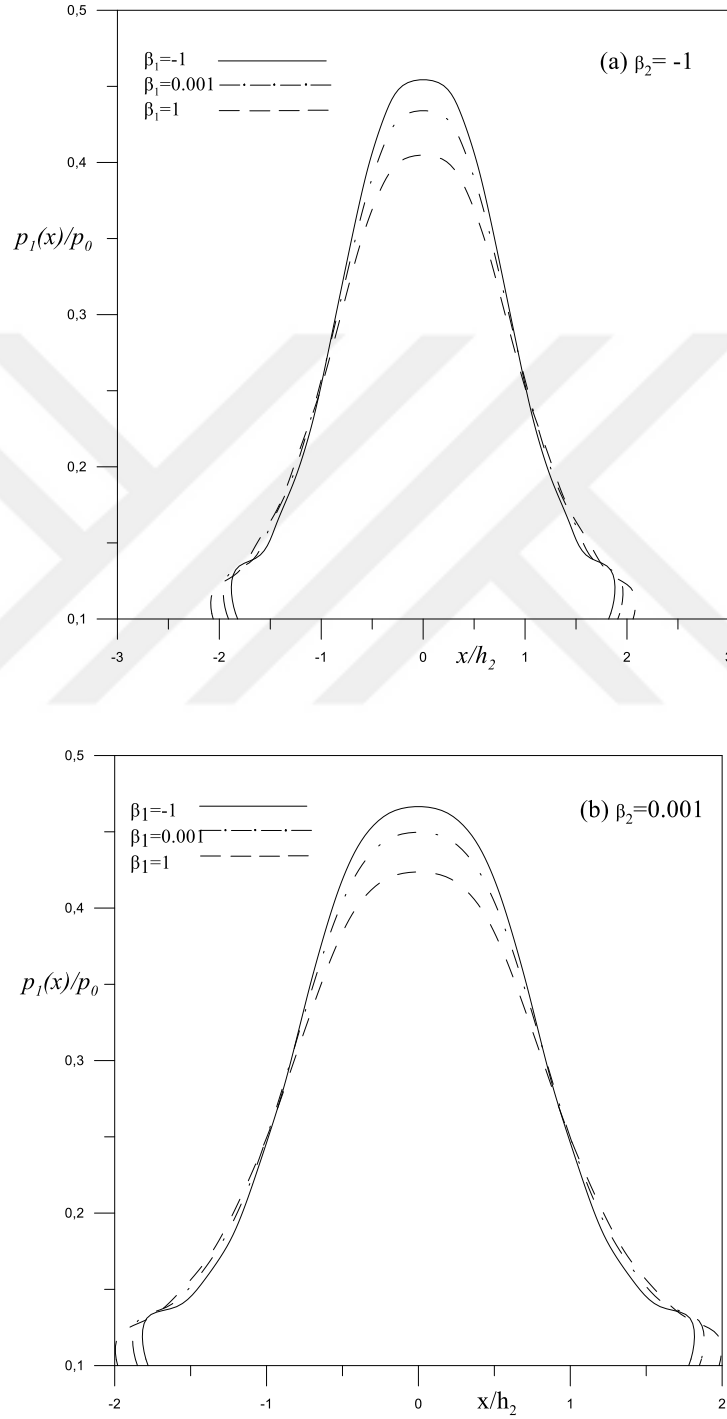


Şekil 11. Çeşitli (μ_{02}/μ_3) kayma modülü oranları ve $(\beta_1 = \beta_2)$ rijitlik parametreleri için $p_2(x)/p_0$ temas gerilme yayılışları ($K_1 = K_2 = K_3 = 2, h_1 = h_2 = 1, a/h_2 = 1$)

Şekil 11'in devamı

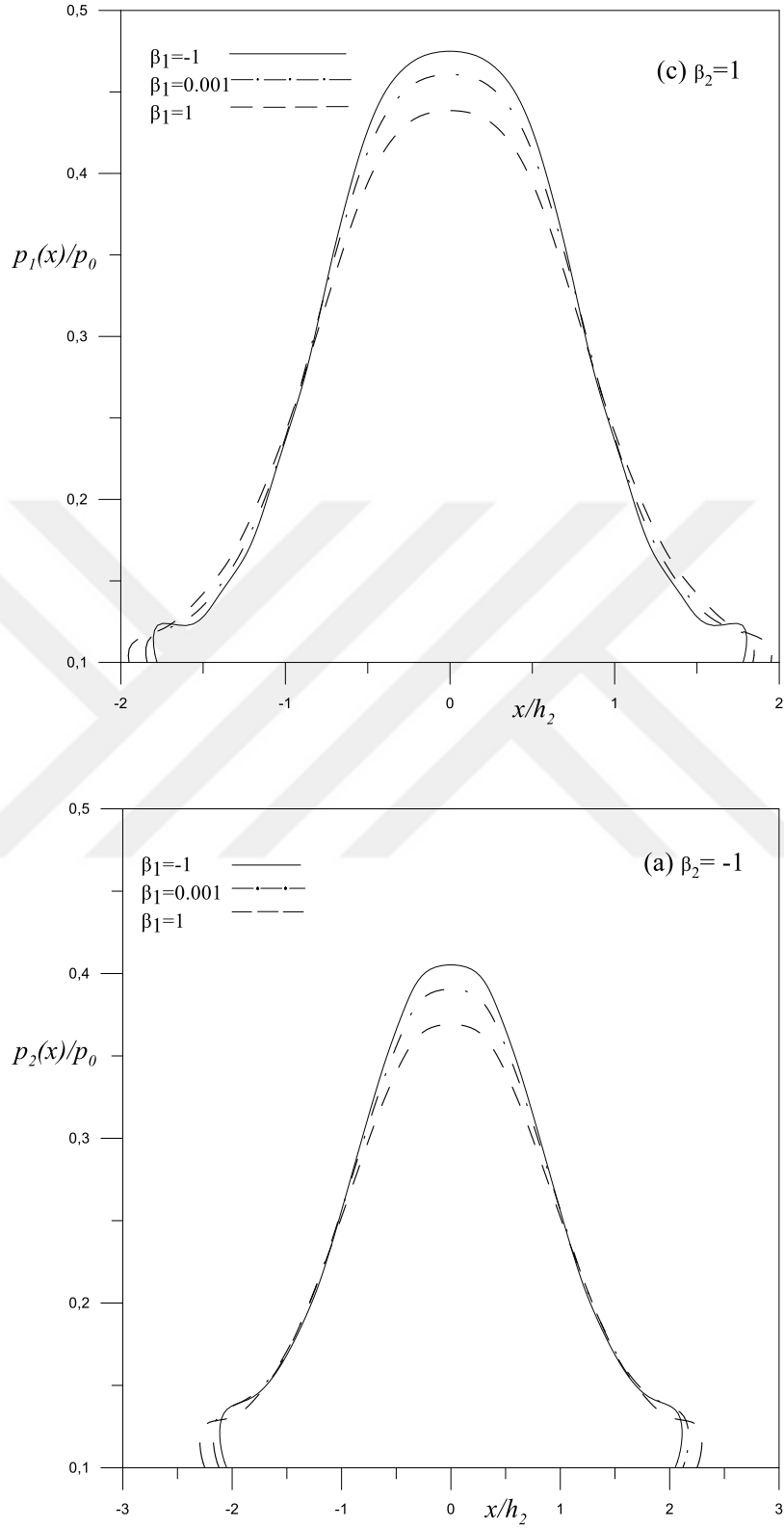


Şekil (12-15)' de çeşitli β_1, β_2 değerleri için temas yüzeylerindeki temas gerilme yayılışları verilmektedir. Burada da, β_1, β_2 değerleri arttıkça yarı temas uzunluklarının arttığı buna bağlı olarak temas gerilmelerinin azaldığı görülmektedir.



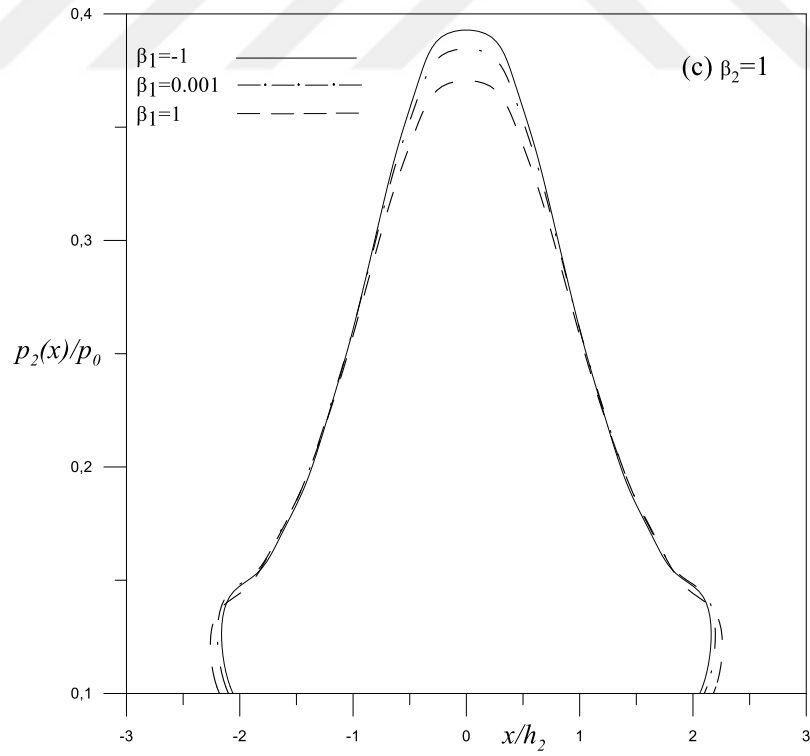
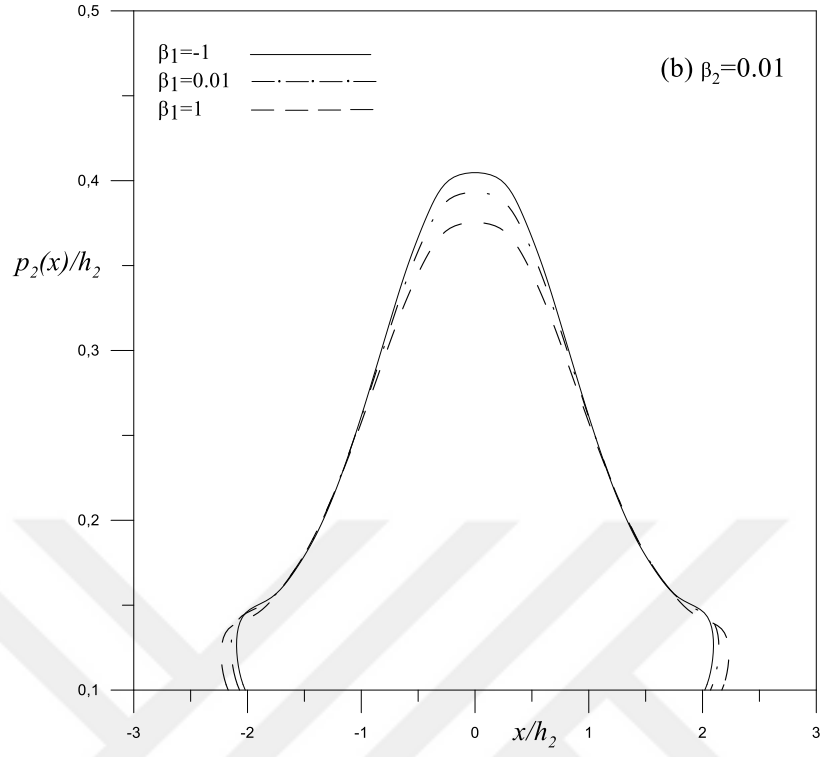
Şekil 12. Çeşitli β_1, β_2 Değerleri İçin $p_l(x)/p_0$ Temas Gerilme Yayılışları ($K_1 = K_2 = K_3 = 2$, $\mu_{01} = \mu_{02} = \mu_3 = 100$, $a/h_2 = 1$, $p_0 = 1$, $h_1/h_2 = 1$)

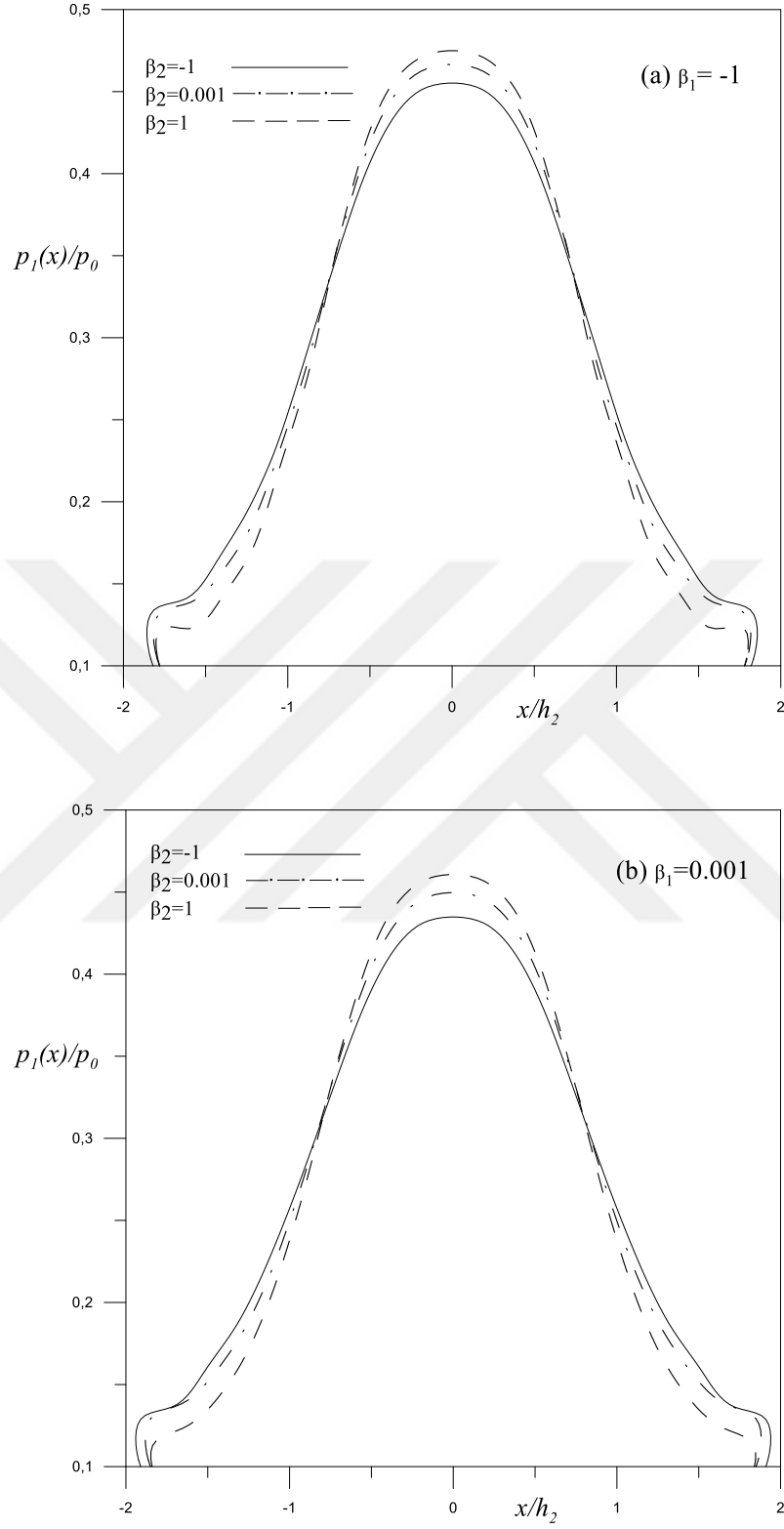
Şekil 12'nin devamı



Şekil 13. Çeşitli β_1, β_2 Değerleri İçin $p_2(x)/p_0$ Temas Gerilme Yayılışları ($K_1 = K_2 = K_3 = 2$, $\mu_{01} = \mu_{02} = \mu_3 = 100$, $a/h_2 = 1$, $p_0 = 1$, $h_1/h_2 = 1$)

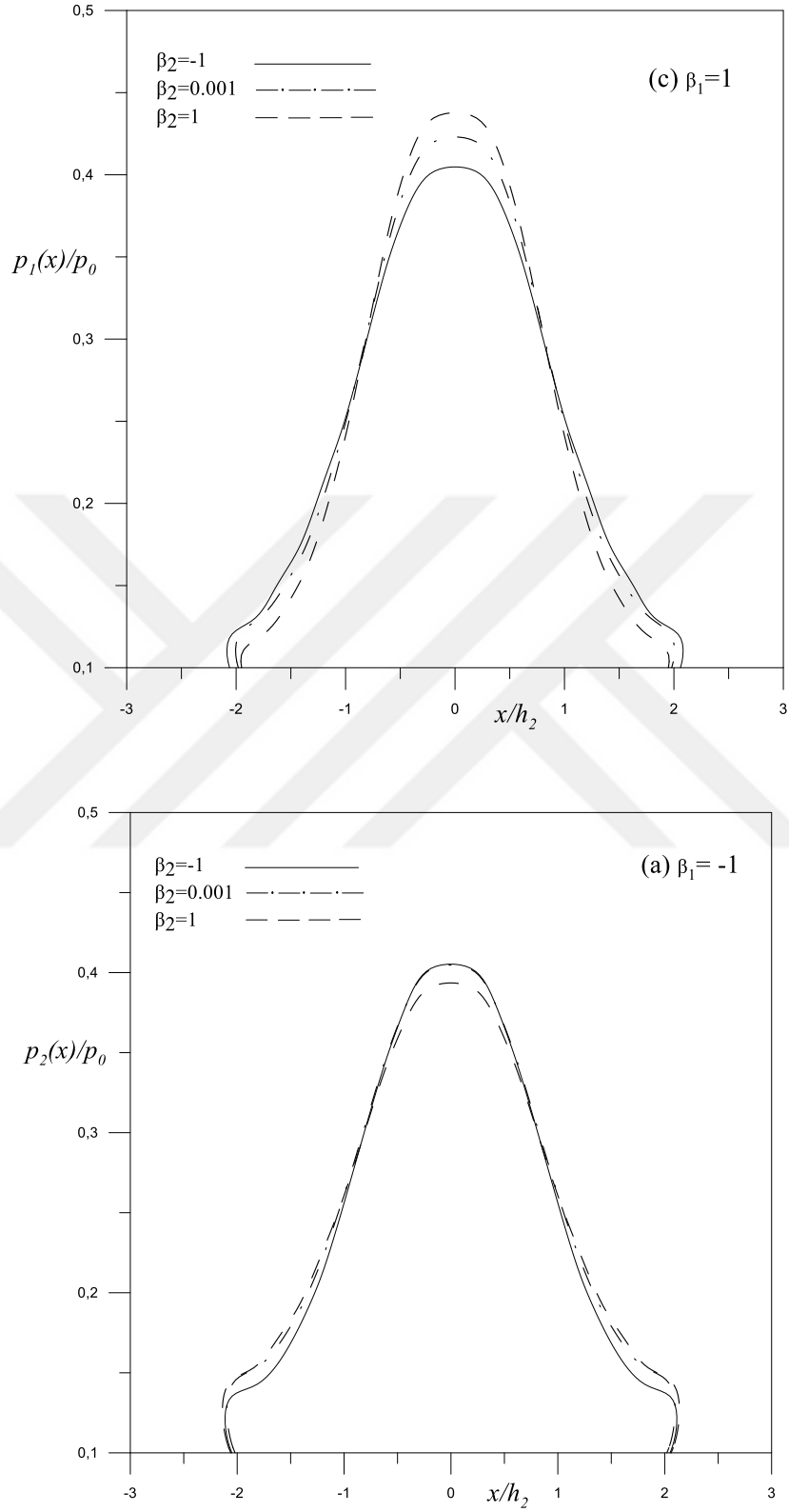
Şekil 13'ün devamı





Şekil 14. Çeşitli β_1, β_2 Değerleri İçin $p_I(x)/p_0$ Temas Gerilme Yayılışları ($K_1 = K_2 = K_3 = 2$, $\mu_{01} = \mu_{02} = \mu_3 = 100$, $a/h_2 = 1$, $p_0 = 1$, $h_1/h_2 = 1$)

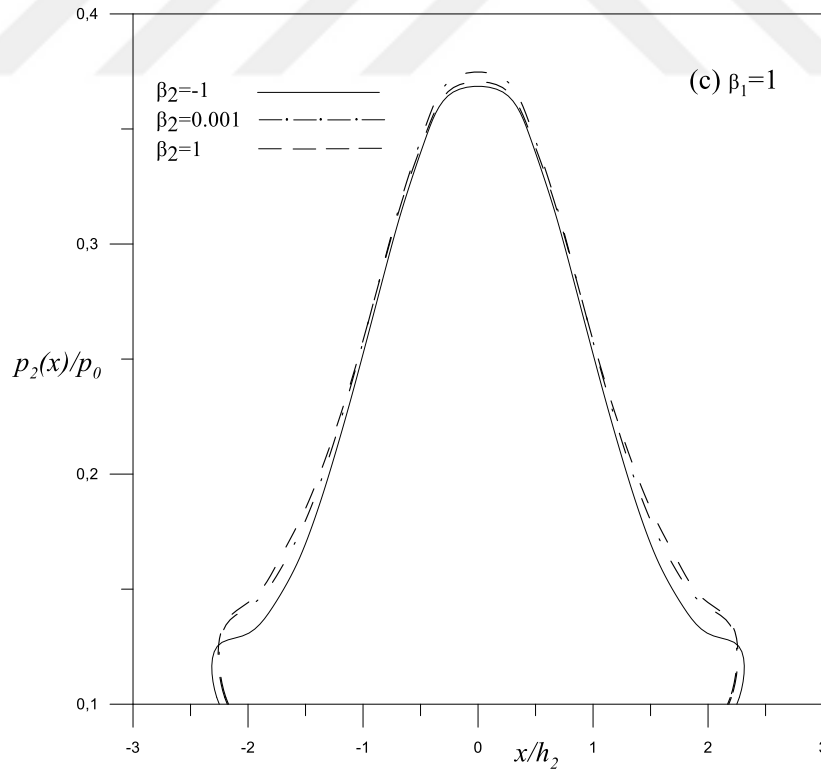
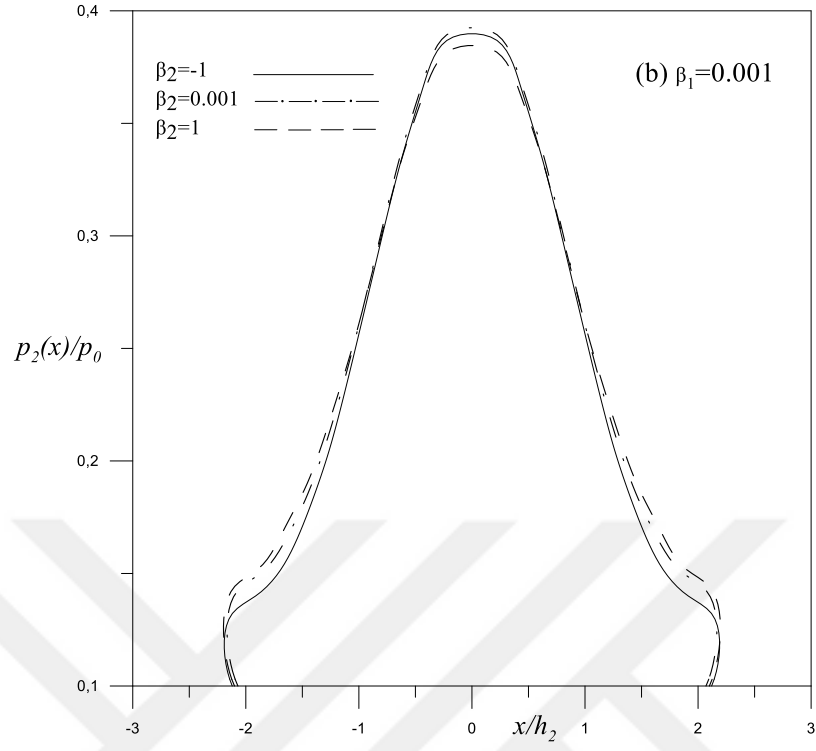
Şekil 14'ün devamı



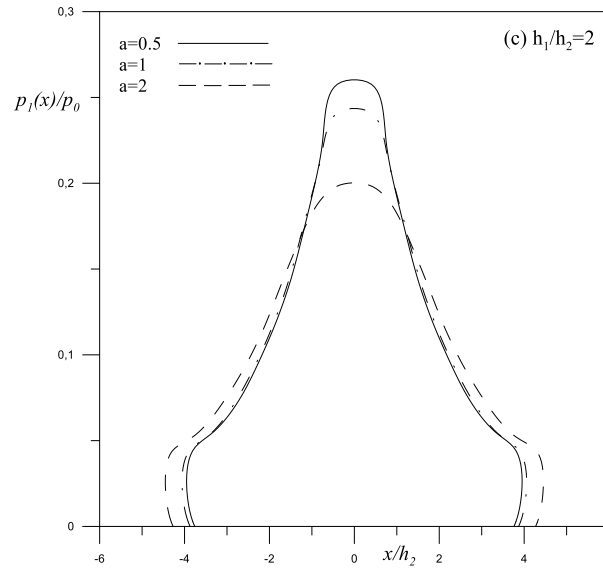
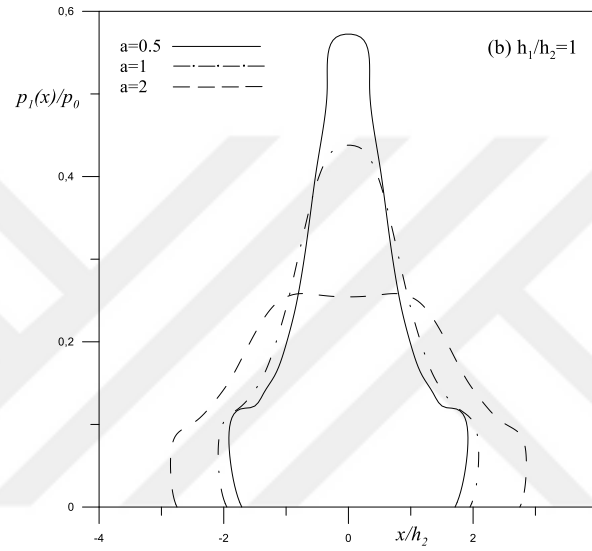
Şekil 15.

Çeşitli β_1, β_2 Değerleri İçin $p_2(x)/p_0$ Temas Gerilme Yayılışları ($K_1 = K_2 = K_3 = 2$, $\mu_{01} = \mu_{02} = \mu_3 = 100$, $a/h_2 = 1$, $p_0 = 1$, $h_1/h_2 = 1$)

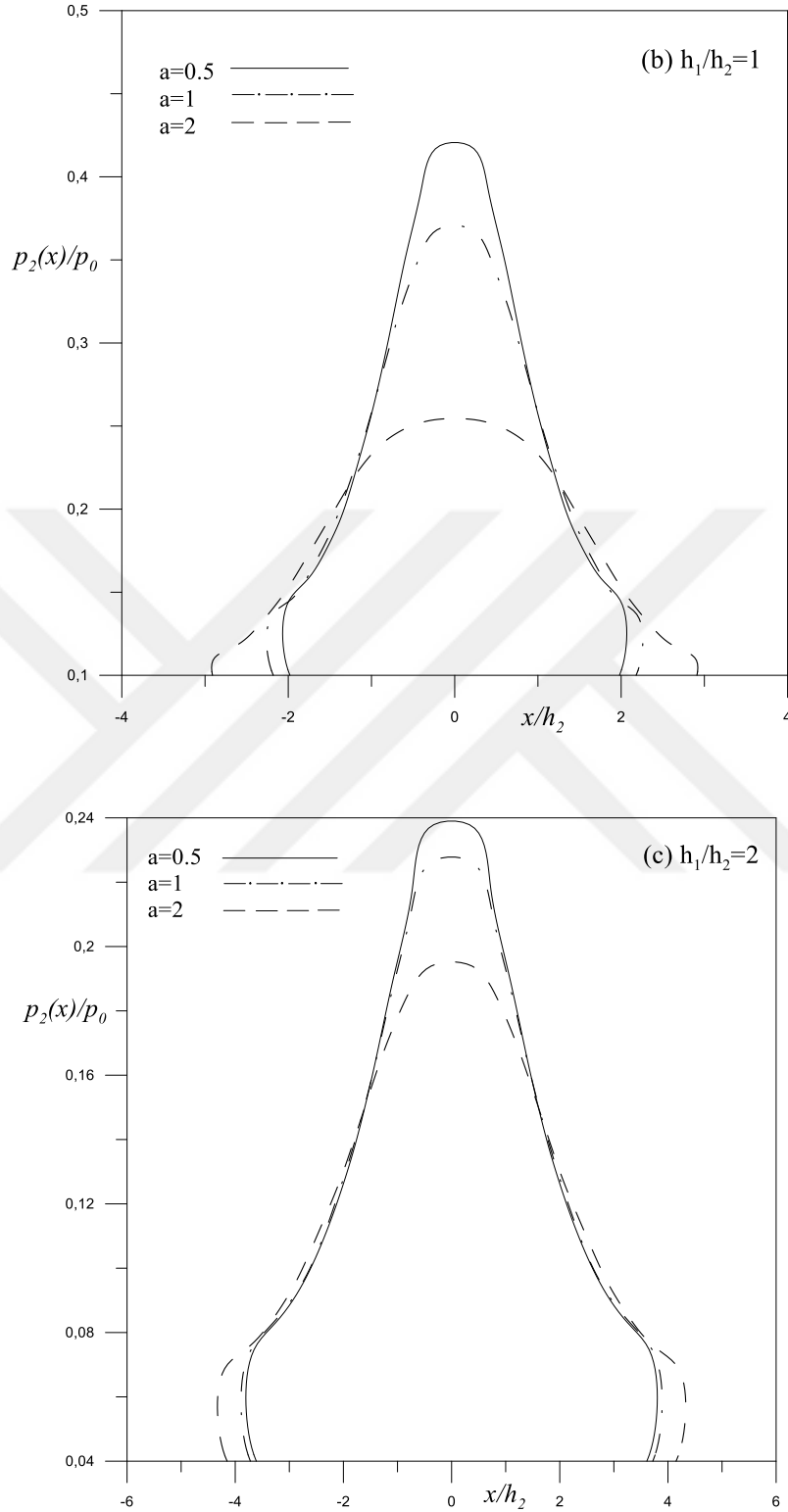
Şekil 15'in devamı



Şekil (16-17)'de, çeşitli yayılı yük genişliği ve tabakaların yükseklik oranı değerleri için temas yüzeyindeki temas gerilme yayılışları verilmektedir. Buradan yayılı yük genişliği arttıkça yarı temas uzunluklarının arttığı ve buna bağlı olarak temas gerilmelerinin azaldığı görülmektedir. Ayrıca tabakaların yükseklik oranları arttıkça yarı temas uzunluklarının arttığı, buna bağlı olarak da temas gerilmelerinin azaldığı görülmektedir.



Şekil 16. Çeşitli Yayılı Yük Genişliği ve Tabakaların Yükseklik Oranı Değerleri İçin $p_1(x)/p_0$ Temas Gerilme Yayılışları ($K_1 = K_2 = K_3 = 2, \mu_{01} = \mu_{02} = \mu_3 = 100, \beta_1 = \beta_2 = 1$)



Şekil 17. Çeşitli Yayılı Yük Genişliği ve Tabakaların Yükseklik Oranı Değerleri İçin $p_2(x)/p_0$ Temas Gerilme Yayılışları ($K_1 = K_2 = K_3 = 2, \mu_{01} = \mu_{02} = \mu_3 = 100, \beta_1 = \beta_2 = 1$)

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, düzgün yayılı yüke maruz, elastik yarı sonsuz düzleme oturan, fonksiyonel derecelendirilmiş iki tabakanın sürtünmesiz temas problemi incelenmiştir. Çözümde kütle kuvvetlerinin ihmal edildiği kabul edilmiştir. Temas probleminin çözümü için elastisite teorisi yardımıyla elde edilen Navier denklemlerine integral dönüşüm teknikleri uygulanmıştır. Problem iki integral denklemden oluşan bir integral denklem sistemine indirgenmiş ve bu denklem sisteminin sayısal çözümü sonucunda ise temas yüzeylerindeki temas uzunlukları ile temas gerilme yayılışları çeşitli boyutsuz büyüklükler için elde edilmiştir. Çeşitli kayma modülü oranları, rijitlik parametreleri, tabaka yükseklikleri oranları ve yayılı yük genişlikleri için elde edilen sonuçlar aşağıda özetlenmiştir:

- Fonksiyonel derecelendirilmiş tabakalara ait rijitlik parametrelerinin (β_1, β_2), temas uzunlukları ve temas gerilmeleri üzerinde büyük oranda etkisi vardır.
- β_1 rijitlik parametresi arttıkça, yani 1. fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın rijitliği alt yüzeyinden üst yüzeyine doğru arttıkça; 1. ve 2. fonksiyonel derecelendirilmiş tabakalar arasındaki temas uzunluğu (b/h_2) artmaktadır.
- β_2 rijitlik parametresi arttıkça, yani 2. fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın rijitliği arttıkça 1. ve 2. fonksiyonel derecelendirilmiş tabakalar arası temas uzunluğu (b/h_2) az da olsa azalırken, 2. fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ile yarı sonsuz düzlem arasındaki temas uzunluğu (c/h_2), β_2 'nin negatif değerleri için azalmakta, pozitif değerleri için ise artmaktadır.
- Fonksiyonel derecelendirilmiş 2. tabakanın kayma modülünün yarı sonsuz düzlemin kayma modülüne oranı (μ_{02}/μ_3) arttıkça temas uzunlukları artmakta, temas gerilmeleri ise azalmaktadır.
- Yayılı yük genişliği arttıkça temas uzunlukları artmakta, buna bağlı olarak temas gerilmeleri azalmaktadır.
- Tabakaların yükseklikleri oranı (h_1/h_2) arttıkça yarı temas uzunlukları artmakta, bunun sonucu olarak temas gerilmeleri azalmaktadır.

Sonuç olarak: önceki çalışmalarda olduğu gibi fonksiyonel derecelendirilmiş tabakalara ait rijitlik parametreleri, yayılı yük genişliği, kayma modülleri ile tabaka

yüksekliklerinin temas uzunlukları ve temas gerilmeleri üzerinde önemli bir etkilere sahip olduğu tespit edilmiştir.



5. KAYNAKLAR

- Adams, G.G., 1978. An Elastic Strip Pressed Against an Elastic Half Plane by a Steadily Mounge Force, Journal of Applied Mechanics, 45, 89-98.
- Adıyaman, G., Birinci, A., Öner, E. ve Yaylacı, M., 2016. A Receding Contact Problem Between A Functionally Graded Layer and Two Homogeneous Quarter Planes, Acta Mech. 227, 6, 1753–1766.
- Birinci, A., 1998. Alt Tabakasında Düşey Bir Çatlağı Bulunan ve Rijit Bir Blok Aracılığı ile Yüklenen Bileşik Tabaka Problemi, Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Civelek, M.B. ve Erdoğan, F., 1974. The Axisymmetric Double Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer, International Journal of Solids and Structures, 10, 639-659.
- Çakıroğlu, A.O. ve Çakıroğlu, F.L., 1991. Continuous and Discontinuous Contact Problems for Strips on an Elastic Semi-Infinite Plane, International Journal of Engineering Science, 29, 1, 99-111
- Çömez, İ., 2009. Rijit Dairesel Bir Pançla Bastırılan Elastik Tabaka ve Yarım Düzlemin Sürtünmeli Değme Problemi, Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Çömez, İ. ve El-Borgi, 2018. Contact Problem of a Graded Layer Supported by Two Rigid Punches, Archive of Applied Mechanics, 88, 10, 1893-1903.
- Dağ, S., Erdoğan, F., 2000. Crack and Contact Problems in Functionally Graded Materials, Ceramic Transactions, 114, 739-746.
- El-Borgi, Abdelmoula, R. ve Keer, L., 2006. A Receding Contact Problem Between a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Substrate, International Journal of Solids and Structures, 43, 658-674.
- Elloumi, R., Kallel-Kamoun, I. ve El-Borgi, S., 2010. A Fully Coupled Partial Slip Contact Problem in a Graded Half-Plane, Mechanics of Materials, 42, 417-428.
- Elshaskawy A. A., 1999. Effect of Friction on Subsurface Stresses in Sliding Line Contact of Multilayered Elastic Solids. International Journal of Solid and Structures 36. 3903-3915.
- Galın, L.A., 1961. Contact Problems in the Theory of Elasticity, İngilizce Çeviri: Moss, H., North Carolina State College Translation Series Raleigh, North Carolina.
- Geçit, M.R., 1980. A Tensionless Contact without Friction between an Elastic Layer and an Elastic Foundation, International Journal of Solids and Structures, 16, 387-396.

- Giannakopoulos, A., E. ve Suresh, S., 1997. Indentation of Solids with Gradients in Elastic Properties: Part I. Point Force, International Journal of Solids and Structures, 34, 19, 2357-2392.
- Güler, M., A. ve Erdoğan, F., 2000. Contact Mechanics of Functionally Graded Material Coatings, PhD. Thesis, Lehigh University, Pennsylvania, USA.
- Gün, H. ve Gao, X., W., 2014. Analysis of Frictional Contact Problems for Functionally Graded Materials using FEM, Engineering Analysis with Boundary Elements, 38, 1-7.
- Johnson, K.L., 1985. Contact Mechanics, First Edition, Cambridge University Press, Cambridge.
- Ke, Yang, 2008. Two-Dimensional Contact Problem for a Coating-Graded Layer-Substrate Structure under a Rigid Cylindrical Punch, International Journal of Mechanical Sciences, 50, 985-994.
- Keer, L. M. ve Chantaramunkorn, K., 1972. Loss of Contact Between an Elastic Layer and Half-Space, ASME Journal of Applied Mechanics, 39, 1115-1120.
- Kulchytsky, Z.R. ve Bajkowski, A.S., 2015. Three-Dimensional Analytical Elasticity Solution for Loaded Functionally Graded Coated Half-Space, Mechanics Research Communications, 65, 43-50.
- Muskhelishvili, N. I., 1953. Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff, Groningen.
- Öner, E., 2013. Rijit Dairesel Bir Pançla Bastırılan Elastik Tabaka ve Yarım Düzlemin Sürtünmeli Değme Problemi, Yüksek Lisans Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Öner, E., 2017. Rijit Bir Blok Aracılığıyla Yüklenmiş ve Elastik Yarım Düzleme Oturan Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakanın Sürekli ve Süreksiz Temas Problemi, Doktora Tezi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Özşahin, T.Ş. ve Taşkır, O., 2013. Contact Problem for an Elastic Layer on an Elastic Half Plane Loaded by Means of Three Rigid Flat Punches, Mathematical Problems in Engineering, 10, 1155-2013.
- Rhimi, M., El-Borgi, S., Said, W., B. ve Jemaa, F., B., 2009. A Receding Contact Axisymmetric Problem between a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Substrate, International Journal of Solids and Structures, 46, 3633-3642.
- Spence, D., A., 1975. The Hertz Contact Problem with Finite Friction, Journal of Elasticity, 5, 297-319.
- Sneddon, I. N., 1951. Fourier Transforms, McGraw-Hill, New York.

- Su, J., L., -L., Wang, Y., -S. ve Xing, Y., 2017. The Axisymmetric Torsional Contact Problem of a Functionally Graded Piezoelectric Coated Half-Space, Acta Mechanica Sinica, 33, 2, 406-414.
- Sabin, G.C.W. ve Kaloni, P.N., 1989. Contact Problem of a Rigid Indentor with Rotational Friction in Second Order Elasticity, International Journal of Engineering Science, 27, 3, 203-217.
- Weitsman, Y., 1969. On The Unbounded between Plates and an Elastic Half Space, ASME Journal of Applied Mechanics, 36, 198-202.
- Yıldırım, B., Kutlu, Ö. ve Kadioğlu, S, 2011. Periodic Crack Problem for a Functionally Graded Half-Plane an Analytic Solution, International Journal of Solids and Structures, 48, 3020-3031.



ÖZGEÇMİŞ

Bahar ŞENGÜL ŞABANO, 07/11/1993 tarihinde Trabzon’da doğdu. İlköğretimini 2007 yılında Trabzon Erdoğan İlköğretim Okulu’nu ve 2011 yılında Trabzon Lisesi’ni tamamlayan Bahar ŞENGÜL ŞABANO 2011 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümünü kazandı. 2016 yılında lisans eğitimini bu bölümde tamamlayarak aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı’nda başladığı yüksek lisans öğrenimine halen devam etmektedir.

