

39200

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELASTİK ZEMİN ÜZERİNE OTURAN KİRİŞLER

39200

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Orhan DOĞAN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 21.6.1993

Tezin Savunulduğu Tarih : 7.7.1993

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Hasan ENGİN

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Vural CİNEMRE

Prof. Dr. Yalçın AKÖZ

Ö N S Ö Z

Bu tezin hazırlanmasında, çalışmalarımın her safhasında yol gösteren ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Hasan ENGİN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.



İ Ç İ N D E K İ L E R

Sayfa No:

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	IV
SUMMARY	X
BÖLÜM 1. GİRİŞ	
1.1. Problemin Tanımı	1
1.2. Konu ile ilgili Çalışmalar	2
BÖLÜM 2. KURAMSAL ÇALIŞMA	
2.1. Statik Tekil Yükle Yüklü Kiriş	8
2.1.1. Homogen Zemin Oturan Sonsuz Kiriş	8
2.1.2. Sonlu Kiriş	10
2.1.2.1. Zeminin Homogen Olması Hali	10
2.1.2.2. Zeminin Homogen Olmaması Hali	11
2.2. Dinamik Tekil Yükle Yüklü Kiriş	
2.2.1. Homogen Zemin Oturan Sonsuz Kiriş	19
2.2.2. Sonlu Kiriş	22
2.2.2.1. Zeminin Homogen Olması Hali	22
2.2.3. Zeminin Homogen Olmaması Hali	26
BÖLÜM 3. SONUÇLAR	44
KAYNAKLAR	54
ÖZGEÇMİŞ	58

Ö Z E T

Bu çalışmada, elastik zemine oturan ağırlıksız kirişlerin statik ve dinamik tekil yükler altındaki elastik davranışları incelenmiştir. Zeminin basınç ve çekmede farklı davranış gösterdiği kabul edilmiştir.

Çalışmanın birinci bölümünde konu ile ilgili genel tanımlar ve açıklamalar yapılmıştır. Problem ilgili çalışmalar özetlenmiş, bu çalışmalar hakkında çok kısa açıklamalar yapılmış ve Winkler zeminine oturan, kesiti sabit olan bir kirişin yönetici denklemi çıkarılmıştır.

İkinci bölümde, problem ilk olarak, zeminin çekme ve basınçta yatak katsayıları eşit alınarak, ortasından statik bir tekil yükle yüklenmiş sonlu ve sonsuz kiriş için çözüm yapılarak, elastik eğri ifadesi elde edilmiştir. Daha sonra aynı problem harmonik tekil yük hali için ele alınmıştır, değişik yatak katsayısı oranları ve yüklemeler için kirişe ait yer değiştirmeye ait sayısal değerler elde edilmiştir. Yine zeminin çekme ve basınçta yatak katsayıları eşit alınarak, ortasından dinamik tekil yükle yüklenmiş, sonsuz ve sonlu kiriş için çözüm yapılmıştır. Zeminin çekme ve basınçta farklı davranış göstermesi halinde zorlama frekansı değerlerine göre tesbit edilmiş zemin parametrisleri ve kiriş geometrisi için ortaya çıkan beş değişik durum göz önüne alınarak matematiksel çözümler yapılmış, sayısal sonuçlar elde edilmiştir.

Sonuçlar bölümünde, yükleme frekansına, kiriş rijitliğine, kiriş boyuna, yatak katsayıları oranına ve yükün şiddetine bağlı olarak, nümerik sonuçlara ait grafik ve tablolar verilmiştir.

S U M M A R Y

BEAMS ON ELASTIC FOUNDATIONS

1. INTRODUCTION

In this work, the behavior of weightless beam of finite/infinite length subjected to a static or dynamic concentrated load and supported by an elastic foundation is investigated. It is assumed that the foundation behaves differently in compression and tension.

The problem of beams on elastic foundation has been examined firstly by E. Winkler in 1867. In "Winkler" foundation it is assumed that the stress is proportional to the deflection and the foundation has been composed of independent springs. The foundation is characterized by the foundation modulus which is generally denoted by k .

In engineering applications, there are some important problems which can be handled successfully by means of Winkler hypothesis : the frames of ships, space vehicles grid systems at plates and bridges, continuous foundations in one or two directions, rotationary shell and perpendicular piles under the effect of horizontal load.

Mathematical solution of problems of beams on elastic foundation is highly tiresome and difficult, but today's widely using of computers has greatly eliminated this difficulty.

The hypothesis that a foundation has such an elastic behavior may seem strange at first, but experiments done on railway tracks show that the foundation behaves elastically. If one observes a train moving on a railroad track, one notes that everytime a wheel passes over a crosstie, the crosstie moves down and afterwards comes up again. However, Winkler's hypothesis that the effect produced by a concentrated force on the foundation applies only at the point of application is not exact since near-by points of foundation are also effected.

2. FUNDAMENTAL EQUATIONS

Consider a weightless beam resting on a Winkler foundation and subjected to a concentrated load at the center.

For unit breadth of the beam, the reaction of foundation for some small length of the beam is proportional to the deflection y . The proportionately coefficient has been shown by k called as foundation modulus.

The foundation modulus is different in compression and tension region. So the differential equation of the deflection of the beam resting on this foundation is also different. The foundation modulus are k_1 and k_2 , in compression and tension regions respectively.



Figure 1 Beam on elastic foundation

The differential equation which governs the response of the beam in figure.1 is as follows

$$EI * \frac{d^4 y_1}{dx_1^4} + k_1 * y_1 = 0 \quad (1)$$

If the beam is loaded with a concentrated load P at $x = 0$, its deflection is shown in figure.2. The positive deflection y of the beam and loading is assumed to be positive downward. The length of the beam is $2L$. The system is symmetric according to loading. At the both sides the deflections of the beam, in the same distance from the loading, are equal. So the problem is solved for right half part of the beam.

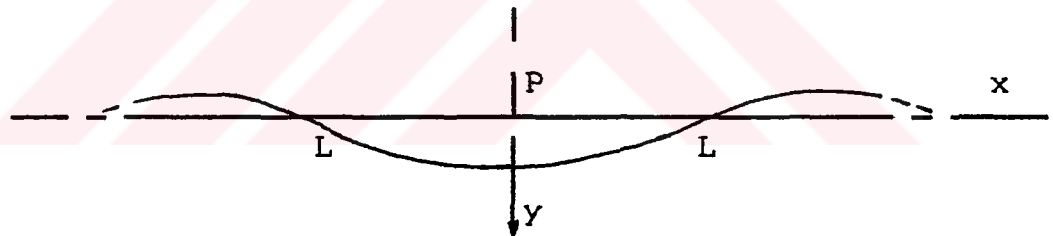


Figure 2 The deflection of the beam

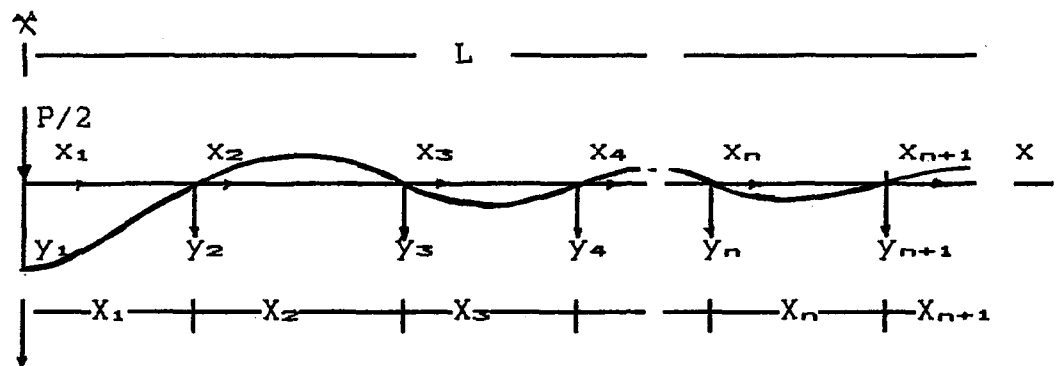


Figure 3 Right half part of the beam

2.1 Statically Loaded Beam

Before going into the solution let us define the following quantities. Denote $\beta^4 = 4EI/k_1$ and introduce the dimensionless quantities.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= x_1 / \beta, & PP &= P / (4\beta k_1), & \Gamma &= L / \beta \\ \Gamma_1 &= X_1 / \beta, & \theta^4 &= k_2 / k_1, & i &\geq 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Now the governing equation of the elastic curve will become,

$$\frac{d^4 y_1}{d\alpha_1^4} + 4 * y_1 = 0 \quad \text{in the compression region} \quad (3)$$

$$\frac{d^4 y_1}{d\alpha_1^4} + 4\theta^4 * y_1 = 0 \quad \text{in the tension region} \quad (4)$$

The deflection of the beam in compression region the foundation modulus of intensity k_1 directed upward and in tension region the foundation modulus of intensity k_2 directed downward.

Where EI is the flexural rigidity of the beam. k_1, k_2 are the subgrade modulus in compression and tension regions respectively. y is the deflection of the beam (taken positive downward) and $\alpha_1 = \Gamma_1$ is the location (unknown) where the deflection of the beam is zero. Clearly $y(\Gamma_1) = 0$.

We observe that (3) represents an even operator y . Using some dimensionless magnitudes the solution can be written in the compression and tension regions respectively.

$$y_1 = A_1 \sinh \alpha_1 \sin \alpha_1 + B_1 \cosh \alpha_1 \cos \alpha_1 + C_1 \cosh \alpha_1 \sin \alpha_1 + D_1 \sinh \alpha_1 \cos \alpha_1$$

$$y_1 = A_1 \sinh \theta \alpha_1 \sin \theta \alpha_1 + B_1 \cosh \theta \alpha_1 \cos \theta \alpha_1 + C_1 \cosh \theta \alpha_1 \sin \theta \alpha_1 + D_1 \sinh \theta \alpha_1 \cos \theta \alpha_1$$

or

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{A_1}{C_1} * e^{\alpha_1} * \sin \alpha_1 + \frac{B_1}{D_1} * e^{\alpha_1} * \cos \alpha_1 + \\ &\quad \frac{C_1}{D_1} * e^{-\alpha_1} * \sin \alpha_1 + \frac{D_1}{A_1} * e^{-\alpha_1} * \cos \alpha_1 \\ y_1 &= \frac{A_1}{C_1} * e^{\theta \alpha_1} * \sin \theta \alpha_1 + \frac{B_1}{D_1} * e^{\theta \alpha_1} * \cos \theta \alpha_1 + \\ &\quad \frac{C_1}{D_1} * e^{-\theta \alpha_1} * \sin \theta \alpha_1 + \frac{D_1}{A_1} * e^{-\theta \alpha_1} * \cos \theta \alpha_1 \end{aligned} \quad (5)$$

Where $A_1, B_1, C_1, D_1, \underline{A}_1, \underline{B}_1, \underline{C}_1, \underline{D}_1$ are unknown coefficients of integration for the compression and tension regions and Γ_1 parameters are also unknown, and θ is,

$$\theta^4 = k_2/k_1$$

The boundary conditions are;

$$y_1' \Big|_{\alpha_1=0} = 0, \quad -EI \cdot y_1''' \Big|_{\alpha_1=0} = 0$$

At the crossing points deflection is zero and slope, bending moment and shear force must be continuous.

$$y_i \Big|_{\alpha_i=\Gamma_i} = 0$$

$$y_{i+1} \Big|_{\alpha_{i+1}=0} = 0$$

$$y_i' \Big|_{\alpha_i=\Gamma_i} = y_{i+1}' \Big|_{\alpha_{i+1}=0}$$

$$y_i'' \Big|_{\alpha_i=\Gamma_i} = y_{i+1}'' \Big|_{\alpha_{i+1}=0}$$

$$y_i''' \Big|_{\alpha_i=\Gamma_i} = y_{i+1}''' \Big|_{\alpha_{i+1}=0}$$

The end of the beam is free.

$$-EI \cdot y_{n+1}'' \Big|_{\alpha_{n+1}=\Gamma_{n+1}} = 0$$

$$-EI \cdot y_{n+1}''' \Big|_{\alpha_{n+1}=\Gamma_{n+1}} = 0$$

$$\text{Where } \Gamma_{n+1} = \Gamma - \sum_{i=1}^n \Gamma_i \quad (6)$$

In addition to this, for the single foundation modulus the finite or infinite beams subjected to concentrated load are solved.

In case of infinite beam the boundary conditions are

$$y' \Big|_{\alpha=0} = 0$$

$$-EI \cdot y''' \Big|_{\alpha=0} = -P/2$$

$$y \Big|_{\alpha=\infty} = 0 \quad (7)$$

If the beam is finite and pressed against an elastic foundation by a concentrated load P at the origin as

shown in figure.2. The boundary conditions are ;

$$\begin{aligned} y' \Big|_{\alpha=0} &= 0, & -EI \cdot y''' \Big|_{\alpha=0} &= -P/2 \\ -EI \cdot y'' \Big|_{\alpha=\Gamma} &= 0, & -EI \cdot y''' \Big|_{\alpha=\Gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

2.2 Dynamically Loaded Beam

If beam is subjected to a harmonic concentrated load $P_0 \cdot \cos \Omega t$, the governing equation in compression and tension region respectively with dimensionless quantities will be

$$\frac{d^4 y_1}{d\alpha_1^4} + 4 \cdot \theta_1^4 y_1 = 0, \quad \theta_1^4 = 1 - \Omega^2 / w^2, \quad \theta_1 = |\underline{\theta}_1| \quad (9)$$

$$\frac{d^4 y_1}{d\alpha_1^4} + 4 \cdot \theta_2^4 y_1 = 0, \quad \theta_2^4 = k_2 / k_1 - \Omega^2 / w^2, \quad \theta_2 = |\underline{\theta}_2| \quad (10)$$

The governing equations change depending on the ratio of (Ω^2 / w^2) . Ω is frequency of the concentrated load, w is subjected frequency of the beam. If the beam length is finite and k_1 and k_2 are different, five different cases occur as follows

Case.1 : If the signs of the $\underline{\theta}_1$ and $\underline{\theta}_2$ are positive the solution of the governing equation in compression and tension region respectively will be

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 \sinh \theta_1 \alpha_1 \sin \theta_1 \alpha_1 + B_1 \cosh \theta_1 \alpha_1 \cos \theta_1 \alpha_1 + \\ &\quad C_1 \cosh \theta_1 \alpha_1 \sin \theta_1 \alpha_1 + D_1 \sinh \theta_1 \alpha_1 \cos \theta_1 \alpha_1 \\ y_1 &= A_1 \sinh \theta_2 \alpha_1 \sin \theta_2 \alpha_1 + B_1 \cosh \theta_2 \alpha_1 \cos \theta_2 \alpha_1 + \\ &\quad C_1 \cosh \theta_2 \alpha_1 \sin \theta_2 \alpha_1 + D_1 \sinh \theta_2 \alpha_1 \cos \theta_2 \alpha_1 \end{aligned} \quad (11)$$

Case.2 : If the sign of the $\underline{\theta}_1$ is positive and $\underline{\theta}_2$ is equal to zero, the solutions of the governing equations are

$$y_1 = A_1 \sinh \theta_1 \alpha_1 \sin \theta_1 \alpha_1 + B_1 \cosh \theta_1 \alpha_1 \cos \theta_1 \alpha_1 + C_1 \cosh \theta_1 \alpha_1 \sin \theta_1 \alpha_1 + D_1 \sinh \theta_1 \alpha_1 \cos \theta_1 \alpha_1$$

$$y_1 = A_1 \alpha_1^3 + B_1 \alpha_1^2 + C_1 \alpha_1 + D_1 \quad (12)$$

Case.3 : If the sign θ_1 is positive and the sign of the θ_2 is negative, the solution of the governing equations are

$$y_1 = A_1 \sinh \theta_1 \alpha_1 \sin \theta_1 \alpha_1 + B_1 \cosh \theta_1 \alpha_1 \cos \theta_1 \alpha_1 + C_1 \cosh \theta_1 \alpha_1 \sin \theta_1 \alpha_1 + D_1 \sinh \theta_1 \alpha_1 \cos \theta_1 \alpha_1$$

$$y_1 = A_1 \sinh \theta_2 \alpha_1 + B_1 \cosh \theta_2 \alpha_1 + C_1 \sin \theta_2 \alpha_1 + D_1 \cos \theta_2 \alpha_1 \quad (13)$$

Case.4 : If θ_1 is equal to zero and the sign of the θ_2 is negative, the solution of the governing equation in compression and tension region respectively will be

$$y_1 = A_1 \alpha_1^3 + B_1 \alpha_1^2 + C_1 \alpha_1 + D_1$$

$$y_1 = A_1 \sinh \theta_2 \alpha_1 + B_1 \cosh \theta_2 \alpha_1 + C_1 \sin \theta_2 \alpha_1 + D_1 \cos \theta_2 \alpha_1 \quad (14)$$

Case.5 : If the signs of the θ_1 and θ_2 are negative, the solution of the governing equation in compression and tension region respectively will be

$$y_1 = A_1 \sinh \theta_1 \alpha_1 + B_1 \cosh \theta_1 \alpha_1 + C_1 \sin \theta_1 \alpha_1 + D_1 \cos \theta_1 \alpha_1$$

$$y_1 = A_1 \sinh \theta_2 \alpha_1 + B_1 \cosh \theta_2 \alpha_1 + C_1 \sin \theta_2 \alpha_1 + D_1 \cos \theta_2 \alpha_1 \quad (15)$$

To find the unknown values of the equations for elastic beam in each case, the boundary conditions can be written as in static solution.

BÖLÜM I _ GİRİŞ

1.1. PROBLEMİN TANIMI

Elastik zemine oturan kirişlere ait bir problemin matematiksel bağıntılarla belirlenmesi zeminin oldukça karışık ve belirsiz, elastik ve plastik deformasyon yapabilme özelliğinden dolayı, bazı idaeelleştirmeler gerektirir. Bu da matematiksel çözümlerin geçerliliğini daima sınırlar. Bu yüzden, bu tür problemlerde zeminin elastikliğini bazı kabullere göre göz önüne almak zorunluluğu vardır. Elastik zemine oturan kirişlere ait çalışmalarda esas hipotez genellikle zemin hakkında yapılan hipotezler olmuştur. Zeminin fiziksel ve mekanik özelliklerini değişik araştırmacılar, değişik şekillerde düşünmüş ve tanımlamışlardır.

Elastik zemine oturan giriş problemi önce Winkler [1] tarafından incelenmiş ve teoremin esasları verilmiştir. Çeşitli yük etkisi altındaki elastik ve prizmatik bir girişin, elastik yatak üzerinde bulunduğu ve herhangi bir noktasındaki taban basıncının aynı noktadaki çökme ile orantılı olduğu var sayılmıştır. Bu hipotez yatak ortamının elastik olduğunu, diğer bir deyişle zemin malzemesinin Hooke kanununa uyduğunu belirtir. Zemin basınç deneyleri, yük belirli bir değeri aşmadıkça, deformasyonların yükle orantılı olduğunu gösterir. Hipotez küçük şekil değıştirmeler durumuna uygulanabilir. Bu zemin modelinde yatak katsayısının taban basıncından bağımsız olduğu ve bütün temel yüzeyi boyunca sabit kaldığı varsayılır. Bu hipotez problemin çözümünü oldukça kolaylaştırır. Bununla birlikte zeminin homogen olmaması nedeniyle yatak katsayısı noktadan noktaya değışebilir. Diğer bir hususta zemine etkiyen kuvvetlerin yalnız etkideğıği noktada şekil değışimi yapmasıdır; yani bu durumda zemin birbirinden bağımsız, birbirine sonsuz yakın ve sıkışarak serbestçe hareket edebilen düşey yaylardan oluşan mekanik

bir sistem olarak düşünülmesidir. Burada komşu yayın taban basıncı dikkate alınmaz. Bunun sonucu olarak zemin tamamen süreksiz bir ortam olarak göz önüne alınmış olur. Zeminin fiziksel özellikleri böyle basit bir bağıntı ile ifade edilmekten daha karışık bir durum arzeder. Yanlış belerli durumlar için zeminin elastik bir ortam olarak davrandığı görülür.

Mühendislikte Winkler hipotezine dayanarak iyi sonuçlar veren bazı önemli problemler vardır. Bina döşemeleri ve köprü tabliyelerinin karakteristik konstrüksiyonu olan ızgara sistemler, bir ve iki doğrultuda sürekli temeller, gemi kaburgaları, dönel kabuklar, yatay yük etkisindeki düşey kazıklar ve palplanşlar bunlara bazı önemli örneklerdir. Özellikle temel sistemlerinde Winkler hipotezini doğrulayan bazı önemli hususlar görülmüştür. Bu düşüncelerden hareketle, basitliğine rağmen Winkler hipotezinin, gerçek temel zemin durumunu bazı karmaşık bağıntılarla verilen hipotezlere göre gerçeğe daha yakın bir şekilde ifade ettiği sonucuna varılabilir. Keskinel [2].

Sonsuz, yarı sonsuz ve sonlu uzunlukta kirişlerin davranışlarını etki çigileri yardımıyla inceleyen dolaylı çözümler geliştirilmiştir. Ancak bu tür çözümlerin zaman alıcı olmaları nedeniyle geniş bir uygulama alanları yoktur. Son yıllarda bilgisayarların yaygın olarak devreye girmesiyle bu sakıncalar büyük ölçüde giderilmiştir.

1.2. KONU İLE İLGİLİ ÇALIŞMALAR

Yatak katsayısının değeri bir çok etkene, özellikle zeminin elastik özelliklerine ve yüklü alanın boyutlarına bağlıdır. Bu faktörlerin etkisi ve uygulamada yatak katsayısının sayısal değerinin ne alınabileceği konusunda birçok araştırma yapılmıştır. Yatak katsayısı kavramı uygulamalı mekanikçe önce Winkler tarafından getirilmiş ve Zimmerman [3] tarafından, bütün uzulukları boyunca balast üzerine oturan demiryolu traverslerinin hesabı amacıyla kullanılmış ve bu araştırmacılar özel uygulamalarında be-

lirli türdeki zeminler için buldukları ve kullandıkları "k" değerlerini vermişlerdir.

Engesser, kiriş genişliği arttıkça yatak katsayısı değerinin azaldığını işaret etmiştir. Hayashi ve Freund, yatak katsayısı değerinin taban basıncına bağlı olacağı düşüncesiyle "p" taban basıncı değeri arttıkça k yatak katsayısı değeri azalacak şekilde bir kabul yaparak çeşitli problemler çözmüşlerdir. Küçük şekil değiştirmeler için ve $P_{güç}/2$ dolaylarında gerçek durumla Winkler kabulü arasındaki farklar çok küçük olduğundan böyle bir hassasiyetin pratik yönden sonuçları etkilemesi yok denecek kadar azdır. Hayashi [4] elastik zemine oturan kirişler konusundaki ayrıntılı çalışmasında k yatak katsayısının yükleme deneyleri sonuçlarının yüklü alanın büyüklüğüne bağlı olduğu gerçeğinden söz etmemiştir.

Mühendislik problemlerinin çözümü için gerekli k yatak katsayılarının sayısal değerleri, yayınlanmış gözlemlere dayanarak yaklaşık benzeşimle, ya da yapının inşa edileceği zeminde yapılacak arazi deneyleri sonuçlarından elde edilebilir. Bir fikir vermek amacıyla, çeşitli zemin türleri için k yatak katsayılarının değerleri bir tabloda derlenmiştir. (Tablo .1)

Daha sonraki yapılan araştırmalarda, bir noktadaki çökmenin belirlenmesinde bütün noktalardaki yüklerin etkisi göz önüne alınmıştır. Bu durumda çökme bilinmeyen taban basıncına bağlı olarak bir integral formunda belirlenmektedir. Integral ifadesinin çekirdek fonksiyonu, elastik ortam olarak varsayılan zemin idealleştirilmesine göre değişmektedir. Çekirdek fonksiyonu çok özel hallerde kapalı bir şekilde bilinmekte, genellikle bir integral fonksiyonu olarak ortaya çıkmaktadır. Köseoğlu [5].

Sonlu kirişler hesabı en basit olarak etki çizgileri yardımıyla yapılabilir. Bu amaçla çeşitli yazarlar tarafından ayrıntılı çizelgeler düzenlenmiştir. Bunlardan en gelişmiş olanı Müllersdorf, Mölfer, Keskinel [6] ve

Grasshoff [7,8] tarafından yayınlanan çizelgelerdir.

Grasshoff diğer bir çalışmasında, yatak katsayısındaki kabulündeki hataları ortadan kaldırabilmek için kiriş üzerine Levington hesap yöntemi uygulayıp değişken yatak katsayısını kullanmıştır. Burada yatak katsayısı üniform yükten oluşan oturma kalıplarının verilmesiyle hesaplanmaktadır. Bu yöntem Grasshoff tarafından daha da geliştirilmiştir.

Tablo 1.1. Çeşitli zemin türleri için ortalama k değerleri.

Zemin Türü	k (t/m ³)
Balçık; turba	< 200
Kil, plastik	500 - 1000
Kil, yarı sert	1000 - 1500
Kil, sert	1500 - 3000
Dolma toprak	1000 - 2000
Kum, gevşek	1000 - 2000
Kum, orta sıkı	2000 - 5000
Kum, sıkı	5000 - 10000
Kum-çakıl, sıkı	10000 - 15000
Sağlam şist	> 50000
Kaya	> 200000

Durelli ve Parks [9] tarafından, elastik zemin üzerine oturan sonlu ve sızuz uzunluktaki kirişlerin fotoelastik incelemesi yapılmıştır. Kirişler bir ve iki noktadan yüklenerek davranışları incelenmiş, bulunan sonuçlar kuramsal çözümle karşılaştırılmıştır.

Bu çalışmadan sonra Munther [10] aynı durumdaki kirişlerin davranışlarını sonlu elemanlar yöntemiyle incelemiş ve sonuçları, fotoelastik çalışmadan elde edilen sonuçlarla birlikte, çizilen eğriler üzerinde vermiştir. Son zamanlarda bu tür kirişlerin sonlu

elemanlar yöntemi ile çözümü Malter [11] tarafından geliştirilmiştir.

Bakioğlu ve Özkan [12] yaptıkları çalışmada temellerin çökmeleri ile eğilme momenti arasındaki diferansiyel denklemi, sonlu farklar denklemleri şeklinde yazıp, taban basıncının bu noktalar arasında parabolük değiştiğini varsaymıştır. Bu çalışmada taban basınçları cinsinden ifade edilen moment bağıntılarından yararlanarak, çökme-ler ile taban basınçları arasında lineer denklem takımları elde edilmiştir.

Dodge [13] tarafından yayınlanan çalışmada elastik zemin üzerine oturan yarı sonsuz ve sonlu uzaklıkta kirişlerin davranışlarıyla ilgili etki fonksiyonları ve buna ait eğriler verilmiştir. Aynı konu ile ilgili araştırmada Donalt [14], bu tür kirişlerin orta noktadan tekil yük ve eğilme momenti etki etmesi durumunu ele almıştır. Her iki çalışmada da kirişlerle ilgili çizelgeler vermiştir. Iyengar ve Anatharamu [15] tarafından yapılan çalışmada ise elastik zemin üzerine oturan kirişlerin davranışları seriler yardımıyla incelenmiştir.

Orta noktadan tekil yüklü kirişlerle ilgili başka bir çalışmayı da Rao ve Anandakrishan [16] başlangıç değerleri yöntemi kullanarak yapmış, bu kirişlerle ilgili çizelge ve eğriler vermişlerdir.

Mirand ve Nair [17] ise sonlu uzunlukta kirişlerin diferansiyel denkleminin özel fonksiyonlarla çözümünü yaparak buna ilişkin sayısal örnekler vermişlerdir.

Lin ve Adams [18], çekme gerilmesi almayan Winkler zeminine oturan, ağırlıklı, üzerinde aynı hızla hareket eden bir çift yük etkisindeki elastik kirişin davranışını incelenmiştir. Tekil yüklere, aralıklarına, hızlarına ve zeminden ayrılma noktalarına bağlı olarak sonuçlar elde edilmiştir.

Weistman [19], yalnızca basınca çalışan Winkler ve Reissner modelini kullanarak, elastik zemin üzerine oturan ortasında tekil yükü yüklü sonlu kirişin, çökme ve kesit tesirlerine ait grafikler vermiştir.

Ting [20], elastik winkler zeminine oturan iki ucundan basit mesnetle mesnetlenmiş, yayılı yükü yüklü sonlu bir kirişin çökme ve kesit tesirlerine ait tablolar vermiştir.

Celep ve Malaika ve Hussein [21] tarafından çekme gerilmesi almayan elastik Winkler zemini üzerine oturan yayılı yük, tekil yük ve moment etkisi altındaki kirişin statik ve dinamik davranışı incelenmiştir. Statik ve dinamik eksantirik yüklemeler altında kiriş deformasyonuna ve zeminden ayrılma noktalarına ait grafikler verilmiştir. Burada zorlanmış titreşimin diferansiyel denklemleri Galerkin metodu kullanılarak çözülmüştür.

Elastik zemin üzerine oturan, sonlu uzunlukta ahşap ve betonarme kirişlerin davranışı Elmas [22] tarafından incelenmiş ve orta noktadan etki eden tekil yükün limit değeri araştırılmıştır. Ayrıca kirişin davranışına ve limit yüke, farklı malzeme ve boyutların etkisi incelenmiştir.

Tüm bu çalışmalardan ayrı olarak Winkler zemini dışında Pasternak, Vlassov, Filonenko-Borodich, Reissner, Hetenyi zemini gibi elastik ve viskoelastik zemin türlerini alarak bunlar üzerindeki kiriş ve plakların davranışını, Kerr [23,24], Harr [25], Tsai [26], Cheng [27], Johnson [28], Cooke [29], Shirima [30], Nogami ve O'Neill [31] gibi bir çok araştırmacı tarafından çeşitli çalışmalar yapılmıştır.

Elastik çözümlerin yanısıra, plastik çözümler yapılmıştır. Hem kirişi hem zemini plastik kabul eden Severn [32], zeminin elastik, kirişin ise plastik alındığı çalışmalarda yapmıştır. Özgen [33], bu son çalışmada,

elastik zemine oturan plastik kiriş, rijit-tam plastik alınarak sonsuz kirişe bir noktada etkiyen düşey yükün limit değeri araştırılmıştır.

Elastik-plastik zemine oturan ağırlıksız kiriş ve ince dairesel plakların tekil yük altında davranışı Engin [34] tarafından incelenmiştir. Zeminin yalnız basınç gerilmesi aktardığı ve belirli bir yerdeğiştirmede plastikleştiği kabul edilmiştir. Çözümün sonunda, plastik-elastik ve yapının zeminden ayrıldığı sınırın tekil yükün şiddeti ve plağın yarıçapı ile değişimi gözlenmiştir.

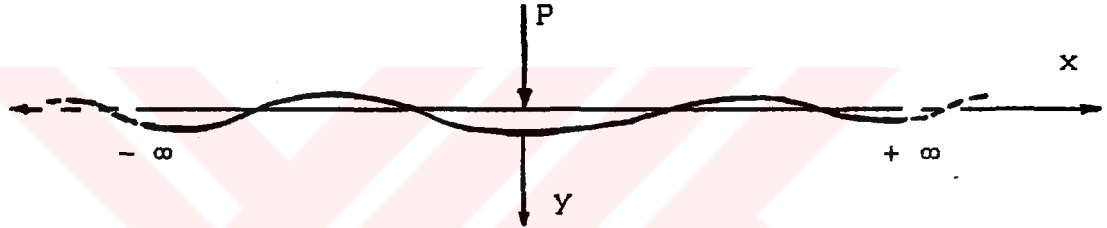


BÖLÜM 2. KURAMSAL ÇALIŞMA

2.1. STATİK TEKİL YÜKLE YÜKLÜ KİRİŞ

2.1.1. Homogen Zemine Oturan Sonsuz Kiriş

Çekme ve basınçta aynı davranışı gösteren, elastik zemine oturan, EI eğilme rijitlikli kirişin (Şekil 2.1) elastik eğrisinin yönetici denklemi aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.1 Tekil yükü yüklü, elastik zemin üzerine oturan, EI eğilme rijitlikli sonsuz kiriş.

$$EI * (d^4Y/dx^4) + kY = 0 \quad (2.1)$$

Aşağıdaki boyutsuzlaştırmalar yapılırsa,

$$\beta^4 = 4EI / k \quad , \quad \alpha = x / \beta \quad , \quad \Gamma = L / \beta \quad (2.2)$$

Γ , kirişin yarı uzunluğunun karakteristik değeri α , boyutsuz karakteristik uzunluk ve β , boyutsuzlaştırma katsayısı olup, boyutsuz büyüklükler cinsinden elastik eğrinin yönetici denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$d^4y / d\alpha^4 + 4y = 0 \quad (2.3)$$

(3) diferansiyel denkleminin genel integral ifadesi şöyledir.

$$y = e^{\alpha x}(A \sin \alpha + B \cos \alpha) + e^{-\alpha x}(C \sin \alpha + D \cos \alpha) \quad (2.4)$$

Bilinmeyenler; A,B,C,D integrasyon sabitleridir.

$\alpha=0$ noktasından P tekil yükü ile yüklü sonsuz kiriş için sınır koşulları aşağıdaki gibidir.

$$y \Big|_{\alpha \rightarrow \infty} = 0 \quad \text{ise} \quad A=0 \text{ ve } B=0 \text{ olur.}$$

$$y' \Big|_{\alpha=0} = 0 \quad \text{ise} \quad -D+C=0$$

$$-EI \cdot y'' \Big|_{\alpha=0} = -P/2 \quad \text{ise} \quad C = \frac{P \cdot \beta^3}{8 \cdot EI} = \frac{P}{2 \cdot \beta \cdot k} \quad (2.5)$$

$$y = C \cdot e^{-\alpha x} (\sin \alpha - \cos \alpha) \quad (2.6)$$

Elastik egrinin yatay eksenini kestiği noktaları bulmak için (2.6) denklemi sıfıra eşitlenir.

$$\alpha + \pi/4 = n\pi \quad \text{veya} \quad \alpha = n\pi - \pi/4, \quad [n=1,2,3,\dots] \quad (2.7)$$

Tablo 2.1 n değerleri için α_1 değerleri

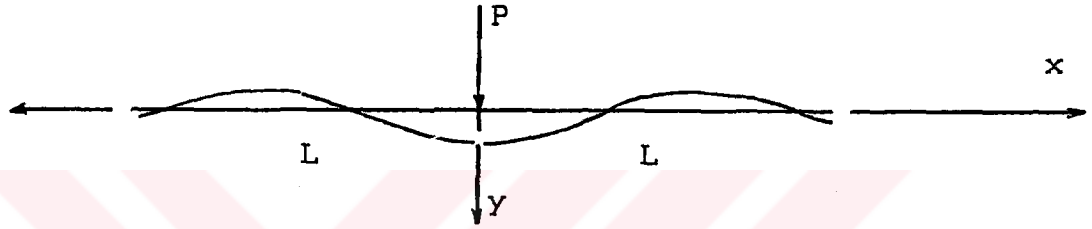
n	1	2	3	4	...
α_1	$3\pi/4$	$7\pi/4$	$11\pi/4$	$15\pi/4$	...

P yükünün yönü yukarı doğru olursa, zemin homogen olduğu için α_1 değerleri değişmez. Aşağı doğru yüklemeden farklı olarak, başlangıç sınır koşulu ($\alpha_1=0$) $-EI \cdot y'' = P/2$ yazıldığında y_1 değerleri işaret değiştirir.

2.1.2. Sonlu Kiriş

2.1.2.1 Zeminin Homogen Olması Hali

Çekme ve basınçta aynı gerilmeleri aktaran, elastik zemin üzerinde oturan, EI eğilme rijitlikli, $2.L$ boyunda, ortasından tekil P yükü ile yüklü sonlu kirise ait (Şekil 2.2) yönetici denklem sonsuz kiriştekinin aynısıdır. Ortasından tekil yükü yüklenmesi halinde sınır şartları şöyledir.



Şekil 2.2 Ortasından tekil yükü yüklü, elastik zemin üzerine oturan, EI eğilme rijitlikli sonlu kiriş.

Simetriklik şartı kullanılırsa;

$$y \Big|_{\alpha=0} = 0 \quad \text{ise} \quad A+B+C-D=0 \quad (2.8)$$

$$-EI.y''' \Big|_{\alpha=0} = -P/2 \quad \text{ise} \quad A-B+C+D=P*\beta^3/(4*EI) \quad (2.9)$$

$$PP=P/(\beta*k) \quad \text{ve} \quad PP=1 \quad \text{ise} \quad (2.10)$$

$$A+C=1/2 \quad \text{ve} \quad B-D=-1/2 \quad \text{olur.} \quad (2.11)$$

Kirişin uç ($\Gamma=L/\beta$) noktasında kesme kuvveti ve eğilme moment değerleri sıfır olduğundan ;

$$-EI.y'' \Big|_{\alpha=\Gamma} = 0 \quad , \quad -EI.y''' \Big|_{\alpha=\Gamma} = 0 \quad (2.12)$$

(2.12) denklemleri matris formunda yazılırsa ;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$a_{11} = (e^{2r}-1) \cos \Gamma - (e^{2r}+1) \sin \Gamma$$

$$a_{21} = (e^{2r}+1) \cos \Gamma, \quad a_{22} = (1-e^{2r}) \sin \Gamma$$

$$b_{11} = -\cos \Gamma, \quad b_{21} = 0.5 (\cos \Gamma - \sin \Gamma)$$

(2.13) matrisinin çözümü yapıldığında ;

$$\delta = 2e^{2r} \sin(2\Gamma) + e^{4r} - 1$$

$$\delta_1 = 0.5 [e^{2r} (\sin 2\Gamma + \cos 2\Gamma) - 1]$$

(2.14)

$$\delta_2 = 0.5 [e^{2r} (\cos 2\Gamma - \sin 2\Gamma) + 2e^{2r} + 1]$$

$$A = \delta_1 / \delta$$

$$B = \delta_2 / \delta$$

(2.11) denklemlerinden de ;

$$C = 1/2 - A$$

ve

$$D = B + 1/2$$

Böylece integrasyon katsayıları hesaplanmış olur.

Geriye dönüş ilede kirişin istenilen x mesafesindeki yer değiştirmesi hesaplanır.

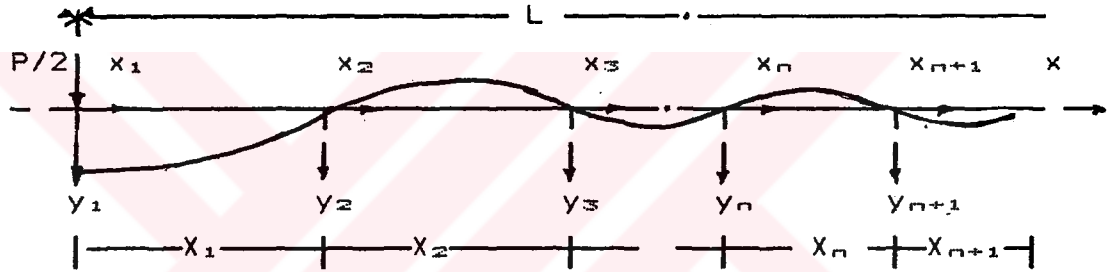
P yükünün yönü yukarı doğru olursa, zemin homogen olduğu için α_1 değerleri değişmez. Aşağı doğru yüklemeden farklı olarak, başlangıç sınır koşulu ($\alpha_1=0$) $-EI \cdot y_1''' = P/2$ yazıldığında y_1 değerleri işaret değiştirir.

2.1.2.2. Zeminin Homogen Olmaması Hali

Çekme ve basınçta farklı gerilmeler aktaran elastik

zemin üzerine oturan EI eğilme rijitlikli 2.1 boyunda, ortasından tekil P yükü ile yüklü kirite, yükleme sonrasında elastik eğrinin yatay $o-x$ eksenini n noktada keser ise $n+1$ tane bölge meydana gelir. Şekil 2.3'de bu bölgeler ve her bir bölge için koordinat eksenleri verilmiştir. Elastik eğrinin her basınç ve çekme bölgesindeki eğri için yazılacak elastik eğrinin yönetici denklemleri farklı olup, basınç ve çekmede sırası ile şöyledir.

$$\begin{aligned} EI * Y^{IV} + k_1 Y_1 &= 0 ; & x_1 \leq x \leq x_{i+1} & \quad [i=0,2,\dots] & \quad Y_1 \geq 0 \\ EI * Y^{IV} + k_2 Y_1 &= 0 ; & x_1 \leq x \leq x_{i+1} & \quad [i=1,3,\dots] & \quad Y_1 \leq 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$



Şekil 2.3 Simetrik yüklü kirişin sağ yarısında oluşacak çekme ve basınç bölgeleri için seçilen koordinat eksenleri.

Burada y kirişin aşağı doğru pozitif kabul edilen yer değiştirmesini, k_1 basınç bölgesindeki zemin modülünü, k_2 çekme bölgesindeki zemin modülünü (yatak katsayısını), x_1 ve x_{i+1} kirişin zeminden ayrılma ve zemine dalış noktalarını göstermektedir. Çözüme geçmeden önce aşağıdaki boyutsuzlaştırmaları yapalım.

$$\alpha_i = x_i / \beta_1 ; \quad \beta_1^4 = 4EI / k_1 \quad [i=2,4,\dots,(2n+1)]$$

$$\alpha_i = x_i / \beta_2 ; \quad \beta_2^4 = 4EI / k_2 \quad [i=1,3,5,\dots,(2n)] \quad (2.16)$$

α_i , i . bölgenin karakteristik uzunluğu ve β_1 basınçta, β_2 çekmede boyutsuzlaştırma katsayısıdır. Boyutsuzlaştırma α_i cinsinden yapılırsa,

$$\beta_2^4 = (k_1/k_2) * \beta_1^4$$

$$\theta^4 = k_2/k_1$$

$$\alpha_2 = x_1/\beta_2 = \theta * \alpha_1$$

(2.17)

$$\Gamma_1 = X_1/\beta_1, \quad \Gamma = L/\beta_1$$

Γ_1 , i. basınç veya çekme bölgesinin karakteristik boyu ve Γ , giriş yarı uzunluğunun karakteristik değeridir.

Bu boyutsuz büyüklükler cinsinden basınç ve çekme bölgelerindeki (2.15) yönetici denklemleri sırası ile aşağıdaki gibi olur.

$$y_1^{iv} + 4 * y_1 = 0 \quad ; \quad \alpha_i \leq \alpha \leq \alpha_{i+1} \quad [i=0,2,...] \quad y_1 \geq 0$$

$$y_1^{iv} + 4 * \theta^4 * y_1 = 0 \quad ; \quad \alpha_i \leq \alpha \leq \alpha_{i+1} \quad [i=1,3,...] \quad y_1 \leq 0 \quad (2.18)$$

Bu bölgeler için çözüm fonksiyonları sırasıyla ;

$$y_1 = A_1 * \text{sh} \alpha_1 \sin \alpha_1 + B_1 * \text{ch} \alpha_1 \cos \alpha_1 + \\ C_1 * \text{ch} \alpha_1 \sin \alpha_1 + D_1 * \text{sh} \alpha_1 \cos \alpha_1$$

$$y_1 = A_1 * \text{sh} \theta \alpha_1 \sin \theta \alpha_1 + B_1 * \text{ch} \theta \alpha_1 \cos \theta \alpha_1 + \\ C_1 * \text{ch} \theta \alpha_1 \sin \theta \alpha_1 + D_1 * \text{sh} \theta \alpha_1 \cos \theta \alpha_1 \quad (2.19)$$

olarak elde edilir. Burada her bölge için A_1, B_1, C_1, D_1 gibi dört tane integrasyon değişmezi olup, sınır ve süreklilik koşullarından elde edilecektir. Bu bilinmeyenlere ilave olarak girişin zeminden ayrılma ve dalış noktaları olan $\alpha_1 = \Gamma_1$ parametreleride bilinmemektedir.

Sınır koşulu olarak sırasıyla ;

$$y_1' \Big|_{\alpha_1=0} = 0 \quad \text{ise} \quad C_1 + D_1 = 0 \quad (2.20)$$

Buradan birinci bölgeye ait eğrinin denklemi,

$$y_1 = A_1 \cdot \text{sh} \alpha_1 \sin \alpha_1 + B_1 \cdot \text{ch} \alpha_1 \cos \alpha_1 + C_1 \cdot (\text{ch} \alpha_1 \sin \alpha_1 - \text{sh} \alpha_1 \cos \alpha_1) \quad 0 \leq \alpha_1 \leq \Gamma_1 \quad (2.21)$$

Diğer basınç ve çekme bölgeleri için aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$y_i \Big|_{\alpha_i=0} = 0 \quad ; \quad B_i = 0 \quad [i \geq 2] \text{ için} \quad 0 \leq \alpha_i \leq \Gamma_i \quad (2.22)$$

Buna göre basınç ve çekme bölgelerinin çözüm fonksiyonları sırasıyla ;

$$y_1 = A_1 \cdot \text{sh} \alpha_1 \sin \alpha_1 + C_1 \cdot \text{ch} \alpha_1 \sin \alpha_1 + D_1 \cdot \text{sh} \alpha_1 \cos \alpha_1$$

$$y_i = A_i \cdot \text{sh} \theta \alpha_i \sin \theta \alpha_i + C_i \cdot \text{ch} \theta \alpha_i \sin \theta \alpha_i + D_i \cdot \text{sh} \theta \alpha_i \cos \theta \alpha_i \quad (2.23)$$

Böylece bilinmeyen integrasyon sabitleri her bölge için üçe iner. Integrasyon değişmezlerinin hesabı için her basınçtan çekmeye ve çekmeden basınca geçiş noktalarında, dönme, kesme gerilmesi ve eğilme momenti değerlerinin eşitliği kullanılarak, bir önceki bölgenin integrasyon sabitleri bir sonraki bölgenin integrasyon sabitleri cinsinden ifade edilir.

$$y'_i \Big|_{\alpha_i=\Gamma_i} = y'_{i+1} \Big|_{\alpha_{i+1}=0}$$

$$y''_i \Big|_{\alpha_i=\Gamma_i} = y''_{i+1} \Big|_{\alpha_{i+1}=0}$$

$$y'''_i \Big|_{\alpha_i=\Gamma_i} = y'''_{i+1} \Big|_{\alpha_{i+1}=0} \quad (2.24)$$

[i=1] noktasında $\alpha_1=\Gamma_1$ ve $\alpha_2=0$ olup, bu noktada (2.24) süreklilik denklemleri yazılarak A_2 , D_2 ve C_2 integrasyon sabitlerini bir 3*3 'lük bir $\underline{A}^1$ katsayılar

matrisi ile A_1 , B_1 ve C_1 sabitleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$a_{11} = 1/\theta^2 \cdot \text{ch}\Gamma_1 \cdot \cos\Gamma_1, \quad a_{12} = -1/\theta^2 \cdot \text{sh}\Gamma_1 \cdot \sin\Gamma_1$$

$$a_{13} = 1/\theta^2 \cdot (\text{sh}\Gamma_1 \cdot \cos\Gamma_1 + \text{ch}\Gamma_1 \cdot \sin\Gamma_1)$$

$$a_{21} = 0.5/\theta \cdot [\text{ch}\Gamma_1 \cdot \sin\Gamma_1 + \text{sh}\Gamma_1 \cdot \cos\Gamma_1 + 1/\theta^2 \cdot (\text{sh}\Gamma_1 \cdot \cos\Gamma_1 - \text{ch}\Gamma_1 \cdot \sin\Gamma_1)]$$

$$a_{22} = 0.5/\theta \cdot [\text{sh}\Gamma_1 \cdot \cos\Gamma_1 - \text{ch}\Gamma_1 \cdot \sin\Gamma_1 - 1/\theta^2 \cdot (\text{ch}\Gamma_1 \cdot \sin\Gamma_1 + \text{sh}\Gamma_1 \cdot \cos\Gamma_1)]$$

$$a_{23} = 1/\theta \cdot (\text{sh}\Gamma_1 \cdot \sin\Gamma_1 + 1/\theta^2 \cdot \text{ch}\Gamma_1 \cdot \cos\Gamma_1)$$

$$a_{31} = 0.5/\theta \cdot [\text{ch}\Gamma_1 \cdot \sin\Gamma_1 + \text{sh}\Gamma_1 \cdot \cos\Gamma_1 - 1/\theta^2 \cdot (\text{sh}\Gamma_1 \cdot \cos\Gamma_1 - \text{ch}\Gamma_1 \cdot \sin\Gamma_1)]$$

$$a_{32} = 0.5/\theta \cdot [\text{sh}\Gamma_1 \cdot \cos\Gamma_1 - \text{ch}\Gamma_1 \cdot \sin\Gamma_1 + 1/\theta^2 \cdot (\text{ch}\Gamma_1 \cdot \sin\Gamma_1 + \text{sh}\Gamma_1 \cdot \cos\Gamma_1)]$$

$$a_{33} = 1/\theta \cdot (\text{sh}\Gamma_1 \cdot \sin\Gamma_1 - 1/\theta^2 \cdot \text{ch}\Gamma_1 \cdot \cos\Gamma_1)$$

[$i=3,5,\dots$] basınçtan çekmeye geçiş noktalarında $\alpha_i = \Gamma_i$ ve $\alpha_{i+1} = 0$ olup, bu noktada (2.24) süreklilik denklemleri yazılırsa, A_{i+1} , C_{i+1} ve D_{i+1} sabitleri A_i , C_i ve D_i sabitleri cinsinden yine bir 3×3 'lük $\underline{A}^i$ katsayılar matrisi ile aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\begin{bmatrix} A_{i+1} \\ C_{i+1} \\ D_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i \\ C_i \\ D_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i \\ C_i \\ D_i \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$a_{11} = 1/\theta^2 \cdot \text{ch}\Gamma_i \cdot \cos\Gamma_i, \quad a_{12} = 1/\theta^2 \cdot \text{sh}\Gamma_i \cdot \cos\Gamma_i$$

$$a_{13} = -1/\theta^2 \cdot \text{ch}\Gamma_i \cdot \sin\Gamma_i$$

$$\begin{aligned}
a_{21} &= 0.5/\theta [ch\Gamma_1 \cdot sin\Gamma_1 + sh\Gamma_1 \cdot cos\Gamma_1 + \\
&\quad 1/\theta^2 (sh\Gamma_1 \cdot cos\Gamma_1 - ch\Gamma_1 \cdot sin\Gamma_1)] \\
a_{22} &= 0.5/\theta [sh\Gamma_1 \cdot sin\Gamma_1 + ch\Gamma_1 \cdot cos\Gamma_1 + \\
&\quad 1/\theta^2 (ch\Gamma_1 \cdot cos\Gamma_1 - sh\Gamma_1 \cdot sin\Gamma_1)] \\
a_{23} &= 0.5/\theta [ch\Gamma_1 \cdot cos\Gamma_1 - sh\Gamma_1 \cdot sin\Gamma_1 - \\
&\quad 1/\theta^2 (sh\Gamma_1 \cdot sin\Gamma_1 + ch\Gamma_1 \cdot cos\Gamma_1)] \\
a_{31} &= 0.5/\theta [ch\Gamma_1 \cdot sin\Gamma_1 + sh\Gamma_1 \cdot cos\Gamma_1 - \\
&\quad 1/\theta^2 (sh\Gamma_1 \cdot cos\Gamma_1 - ch\Gamma_1 \cdot sin\Gamma_1)] \\
a_{32} &= 0.5/\theta [sh\Gamma_1 \cdot sin\Gamma_1 + ch\Gamma_1 \cdot cos\Gamma_1 - \\
&\quad 1/\theta^2 (ch\Gamma_1 \cdot cos\Gamma_1 - sh\Gamma_1 \cdot sin\Gamma_1)] \\
a_{33} &= 0.5/\theta [ch\Gamma_1 \cdot cos\Gamma_1 - sh\Gamma_1 \cdot sin\Gamma_1 + \\
&\quad 1/\theta^2 (sh\Gamma_1 \cdot sin\Gamma_1 + ch\Gamma_1 \cdot cos\Gamma_1)]
\end{aligned}$$

[i=2,4,...] çekmeden basınca geçiş noktalarında $\alpha_i = \Gamma_i$ ve $\alpha_{i+1} = 0$ olup, bu noktada (2.24) süreklilik denklemleri yazılırsa bir sonraki bölgenin sabitleri bir öncekiler cinsinden hesaplanır. (2.26) katsayılar matrisindeki yer alan θ_1 ve θ^2 değerleri burada çarpan olarak gelecektir ve Γ_i değerleri θ_1 ile çarpılacaktır.

[i=n] noktasında son bölgenin integrasyon sabitlerinin birinci bölgedekiler cinsinden ifadesi ;

$$\begin{bmatrix} A^{n+1} \\ C^{n+1} \\ D^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}^n \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \underline{A}^1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \underline{A}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Yukarıdaki 3*3 'lük $\underline{A}^i$ matrislerinin çarpımı yine bir 3*3 'lük $\underline{B}_i$ matrisidir.

$$\begin{bmatrix} A^{n+1} \\ C^{n+1} \\ D^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Son olarak elde edilen altı bilinmeyenli üç denklemi çözebilmek için başlangıç noktasında, kesme gerilmesinin değeri $-P/2$ olması şartı yazılırsa;

$$\left. -EI \cdot y_1''' \right|_{\alpha_1=0} = -P/2 \quad (2.29)$$

Yukarıdaki eşitlikten $C_1 = P \cdot \beta_1^3 / (8 \cdot EI) = P / (2 \cdot \beta_1 \cdot k_1)$ bulunur.

Yine kirişin uç noktasının çekme veya basınç bölgesinde bitmesi dikkate alınarak, kesme ve eğilme momenti değerlerinin sıfır olması nedeniyle ;

$$\left. -EI \cdot y''_{n+1} \right|_{\alpha_{n+1}=\Gamma_{n+1}} = 0, \quad \left. -EI \cdot y'''_{n+1} \right|_{\alpha_{n+1}=\Gamma_{n+1}} = 0 \quad (2.30)$$

$$\text{Burada } \Gamma_{n+1} = \Gamma - \sum_{i=1}^n \Gamma_i$$

Son bölgenin bilinmeyen üç integrasyon sabitine bağlı olarak matris formunda yazılacak olursa ;

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{n+1} \\ C_{n+1} \\ D_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Kiriş uç noktasının basınç bölgesinde bitmesi halinde, matris elemanları aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} c_{11} &= \text{ch} \Gamma_{n+1} \cdot \cos \Gamma_{n+1} \\ c_{12} &= \text{sh} \Gamma_{n+1} \cdot \cos \Gamma_{n+1} \\ c_{13} &= -\text{ch} \Gamma_{n+1} \cdot \sin \Gamma_{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c21 &= \text{sh}\Gamma_{n+1} \cdot \cos\Gamma_{n+1} - \text{ch}\Gamma_{n+1} \cdot \sin\Gamma_{n+1} \\
c22 &= \text{ch}\Gamma_{n+1} \cdot \cos\Gamma_{n+1} - \text{sh}\Gamma_{n+1} \cdot \sin\Gamma_{n+1} \\
c23 &= -\text{sh}\Gamma_{n+1} \cdot \sin\Gamma_{n+1} - \text{ch}\Gamma_{n+1} \cdot \cos\Gamma_{n+1}
\end{aligned}$$

Kiriş uç noktasının basınç bölgesinde bitmesi halinde, matris elemanlarındaki Γ_{n+1} değerleri θ ile çarpılır.

(25). matris denkleminde yerine konursa ;

$$\begin{bmatrix} \underline{C}^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{B}^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Burada $\underline{C}^{n+1}$ 2×3 'lük matrisi ile $\underline{B}^{n+1}$ 3×3 'lük matrisin çarpımı yine 2×3 'lük bir $\underline{D}^{n+1}$ matrisidir. A_1 ve B_1 integrasyon sabitleri C_1 bilinen sabiti cinsinden yazılarak hesaplanır.

Kirişin zemin yüzeyini kestiği her $\alpha_i = \Gamma_i$ $[i \geq 1]$ değerlerini bulabilmek için ;

$i=1$ noktasında,

$$y_1 = A_1 \cdot \text{sh}\Gamma_1 \sin\Gamma_1 + B_1 \cdot \text{ch}\Gamma_1 \cos\Gamma_1 + C_1 \cdot (\text{ch}\Gamma_1 \sin\Gamma_1 - \text{sh}\Gamma_1 \cos\Gamma_1)$$

$[i=3,5,7,\dots]$ noktalarında,

$$y_i = A_i \cdot \text{sh}\Gamma_i \sin\Gamma_i + C_i \cdot \text{ch}\Gamma_i \cos\Gamma_i + D_i \cdot \text{sh}\Gamma_i \cos\Gamma_i$$

$[i=2,4,6,\dots]$ noktalarında,

$$y_i = A_i \cdot \text{sh}\theta\Gamma_i \sin\theta\Gamma_i + C_i \cdot \text{ch}\theta\Gamma_i \sin\theta\Gamma_i + D_i \cdot \text{sh}\theta\Gamma_i \cos\theta\Gamma_i \quad (2.33)$$

(2.33) ifadeleri sıfıra eşitlenir.

(2.33) Denklem takımları integrasyon değişmezlerine göre doğrusal fakat Γ_1 parametrelerine göre doğrusal değildir.

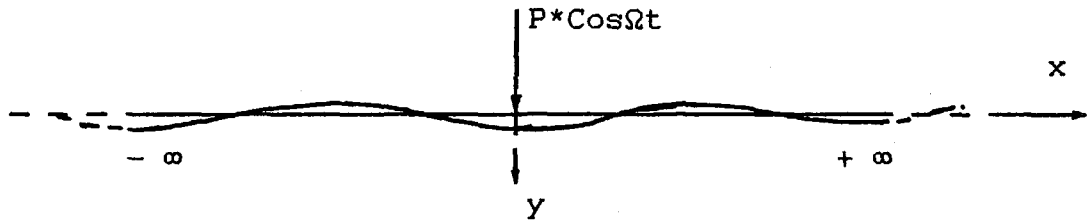
(2.28)'e kadar olan denklem takımlarından integrasyon değişmezleri A_1 ve B_1 integrasyon sabitleri cinsinden hesaplanır. (2.32) denklemlerinde yerlerine konulup, 2×2 'lik doğrusal denklem takımı çözülerek A_1 , B_1 integrasyon değişmezleride Γ_1 parametreleri cinsinden hesaplanıp, doğrusal olmayan (2.33) denklemlerinde yerine konulursa, $\Gamma_1 > 0$ ve $\Sigma \Gamma_1 < \Gamma$ olacak şekilde en küçük kökleri sayısal olarak elde edilir. Geriye dönüş ile de kirişin elastik eğrisi ve kesit zorlamaları hesaplanır.

P yükünün yönü yukarı doğru olursa, zemin homogen olmadığı için birinci bölge çekme bölgesi olduğundan basınç bölgesinin çarpanı olan $\theta = k_1/k_2$ olarak değişeceğinden Γ_1 değerleri değişir. Aşağı doğru yüklemekten farklı olarak, başlangıç sınır koşulu ($\alpha_1=0$) $-EI \cdot y_1 = P/2$ yazıldığında y_1 değerleri işaret değiştirir.

2.2. DİNAMİK TEKİL YÜKLE YÜKLU KİRİŞ

2.2.1. Homogen Zemine Oturan Sonsuz Kiriş

Çekme ve basınç gerilmeleri aynı olan elastik Winkler zemini üzerine oturan, ortasından tekil dinamik yükü $[P \cdot \cos(\Omega \cdot t)]$ ile harmonik olarak yüklü, EI eğilme rijitlikli, sonsuz uzunluktaki elastik kirişin yönetici denklemi aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.4 Noktasal harmonik yüküyle yüklü, elastik zemine oturan EI eğilme rijitlikli kiriş.

$$EI \cdot y^{IV} + k \cdot y = - \sigma \cdot A \cdot d^2 y / dt^2 \quad (2.34)$$

İfadesinde, σ kirişin özgül kütlesi, A kirişin kesiti, y kirişin aşağıya doğru pozitif kabul edilen yer değiştirmesi, k çekme ve basınçta eşit olup zemin modülü, $d^2 y / dt^2$ ise ivme ifadesidir.

$$y = y(x) \cdot \cos \Omega t$$

$$y'' = -\Omega^2 \cdot y \quad (2.35)$$

$$EI \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} + k \cdot y - \sigma \cdot A \cdot \Omega^2 \cdot y = 0$$

$$y^{IV} + \frac{k}{EI} \cdot (1 - \Omega^2 \cdot \frac{\sigma \cdot A}{k}) \cdot y = 0 \quad (2.36)$$

Çözümde önce aşağıdaki boyutsuzlaştırmalar yapılırsa;

$$\alpha = x / \beta, \quad w^2 = k / (\sigma \cdot A)$$

İfadeleri (2.36) dekleminde yerine konulursa ;

$$y^{IV} + \frac{\beta^4 k}{EI} \cdot (1 - \Omega^2 / w^2) \cdot y = 0 \quad (2.37)$$

Burada zorlama kuvvetinin frekansının sistemin tabi frekansına oranlarına bağlı olarak üç değişik durum söz konusudur ;

1. Durum : $\Omega = w$ olmasıdır. Rezonans halidir.

$y^{IV} = 0$ olup, çözüm fonksiyonu ise ;

$$y = A \cdot \alpha^3 + B \cdot \alpha^2 + C \cdot \alpha + D \quad (2.38)$$

$$y \Big|_{\alpha \rightarrow \infty} = 0 \quad \text{ise} \quad A=B=C=D=0$$

Bu sonuçtan görülüyor ki P kuvvetini dengeleyici herhangi bir direnç yoktur. Kiriş zemin e sonsuz olarak batar.

$$2. \text{ Durum : } \Omega > \omega \text{ olması halinde } 1 - \Omega^2/\omega^2 < 0 \text{ olur.} \\ \beta^4 = EI/k \quad \text{ve} \quad \theta^4 = \Omega^2/\omega^2 - 1$$

Kirişin elastik eğrisinin yönetici denklemi,

$$y^{IV} - \theta^4 y = 0 \quad (2.39)$$

Yukarıdaki difaransiyel denklemin genel czm şöyle olur.

$$y_1 = A \cdot \text{sh} \theta \alpha_1 + B \cdot \text{ch} \theta \alpha_1 + C \cdot \sin \theta \alpha_1 + D \cdot \cos \theta \alpha_1 \quad (2.40)$$

Sonsuz kiriş için sınır ve süreklilik koşulları yazılırsa ;

$$y \Big|_{\alpha \rightarrow \infty} = 0 \quad \text{ise} \quad A=B=0$$

$$y' \Big|_{\alpha = 0} = 0 \quad \text{ise} \quad C=0 \quad (2.41)$$

Elastik eğrinin denklemi şu şekilde kısalır.

$$y = D \cdot \cos \theta \alpha \quad (2.42)$$

Eğri denkleminin yatay eksenini kestiği noktaları bulmak için yukarıdaki ifadeyi sıfıra eşitlersek ;

$$\alpha = \frac{2n-1}{\theta} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{ise} \quad [n = 0, 1, 2, 3, \dots]$$

Tablo 2.2 Burada α_i 'nin değerleri Ω^2/w^2 ve n değerlerine bağlı olarak verilmiştir.

n	0	1	2	3	...
α	$\pi/(2.\theta)$	$3\pi/(2.\theta)$	$5\pi/(2.\theta)$	$7\pi/(2.\theta)$	...

3. Durum : $\Omega < w$ olması halidir.

$$1 - \Omega^2/w^2 > 0 \quad \text{ve} \quad \theta^4 = 1 - \Omega^2/w^2 \quad (2.43)$$

Aşağıdaki boyutsuzlaştırma yapılırsa ;

$$\beta^4 = 4EI / k \quad , \quad \alpha = x / \beta \quad (2.44)$$

Boyutsuz büyüklükler cinsinden elastik eğrinin yönetici denklemini aşağıdaki gibi olur.

$$d^4y / d\alpha^4 + 4\theta^4 y = 0 \quad (2.45)$$

(2.45) diferansiyel denkleminin genel integral ifadesi şoyledir.

$$y = e^{\theta\alpha} (A \sin \theta\alpha + B \cos \theta\alpha) + e^{-\theta\alpha} (C \sin \theta\alpha + D \cos \theta\alpha) \quad (2.46)$$

Bilinmeyenler; A,B,C,D integrasyon sabitleri ve α parametrisidir.

$\alpha=0$ noktasından P tekil yükü ile yüklü sonsuz kiriş için sınır koşulları aşağıdaki gibidir.

$$y \Big|_{\alpha \rightarrow \infty} = 0 \quad \text{ise} \quad A=0 \text{ ve } B=0 \text{ olur.}$$

$$y' \Big|_{\alpha=0} = 0 \quad \text{ise} \quad -D+C=0$$

$$-EI.y'''' \Big|_{\alpha=0} = -P/2 \quad \text{ise} \quad C = \frac{P \cdot \beta^3}{8 \cdot \theta^3 \cdot EI} = \frac{P}{2 \cdot \theta^3 \cdot \beta \cdot k} \quad (2.47)$$

$$y = C \cdot e^{-\theta \alpha} (\sin \theta \alpha - \cos \theta \alpha) \quad (2.48)$$

Elastik eğrinin yatay eksenini kestiği noktaları bulmak için (2.6) denklemi sıfıra eşitlenir.

$$\theta \cdot \alpha + \pi/4 = n \cdot \pi \quad \text{ise} \quad \theta \cdot \alpha = n\pi - \pi/4, \quad [n=1,2,3,...] \quad (2.49)$$

Tablo 2.3 n değerleri için α_1 değerleri şöyledir.

n	1	2	3	4	...
α_1	$3\pi/(4 \cdot \theta)$	$7\pi/(4 \cdot \theta)$	$11\pi/(4 \cdot \theta)$	$15\pi/(4 \cdot \theta)$	...

Bu üç durumda da P yükünün yönü yukarı doğru olursa, zemin homogen olduğu için α_1 değerleri değişmez. Aşağı doğru yükleme-den farklı olarak, başlangıç sınır koşulu ($\alpha_1=0$) $-EI \cdot y_1 = P/2$ yazıldığında y_1 değerleri işaret değiştirir.

2.2.2. Sonlu Kiriş

2.2.2.1. Zeminin Homogen Olması Hali

Dinamik yükle yüklü sonlu kirişin çözümünün sonsuz kiriş çözümünden farkı, kiriş boyunun $2 \cdot L$ olması nedeniyle sınır ve süreklilik şartlarının değişmesidir.

Burada yine dinamik yükle yüklenmiş sonsuz kirişte olduğu gibi, $1 - \Omega^2/w^2$ değerine bağlı olarak üç değişik durum ortaya çıkar.

1. Durum : $\Omega = w$ olması yani rezonans halidir.

Bu hal sonsuz kirişin aynısı olmaktadır.

2. Durum : $\Omega > w$ ise $\underline{\theta} = 1 - \Omega^2/w^2 < 0$ olup, $\theta = |\underline{\theta}|$ ve $\theta^4 = \Omega^2/w^2 - 1$ ve $\beta^4 = EI/k$

Yukarıdaki boyutsuzlaştırmalar yapılırsa, elastik eğrinin yönetici denklemi ;

$$EI.y^{IV} - \theta^4.y = 0 \quad (2.50)$$

Elastik eğrinin çözüm fonksiyonu ;

$$y = A \cdot \text{sh}\theta\alpha + B \cdot \text{ch}\theta\alpha + C \cdot \sin\theta\alpha + D \cdot \cos\theta\alpha \quad (2.51)$$

Sınır koşulları ;

$$\left. y' \right|_{\alpha=0} = 0 \quad \text{ise} \quad A+C=0$$

$$\left. -EI.y''' \right|_{\alpha=0} = -P/2 \quad \text{ise} \quad -EI.\theta^3.(A-C) = -P.\beta^3/2$$

$$PP = P/(\beta.k) \quad , \quad A = PP/\theta^3 \quad , \quad C = -PP/\theta^3 \quad (2.52)$$

Yukarıdaki eşitlikler yerlerine konulursa,

$$y = A * (\text{sh}\theta\alpha - \sin\theta\alpha) + B * \text{ch}\theta\alpha + D * \cos\theta\alpha \quad (2.53)$$

Kiriş uç notasında moment ve kesme gerilme değerleri sıfır olur. Kirişin boyutsuz karakteristik yarı uzunluğunun değeri ise $\Gamma = L/\beta$ olur.

$$\left. -EI.y'' \right|_{\alpha=\Gamma} = 0 \quad \text{ve} \quad \left. -EI.y''' \right|_{\alpha=\Gamma} = 0 \quad (2.54)$$

Buradan elde edilen iki bilinmeyenli iki denklem matris formunda yazılırsa ;

$$\begin{bmatrix} \text{ch}\theta\Gamma & -\cos\theta\Gamma \\ \text{sh}\theta\Gamma & -\sin\theta\Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A*(\text{sh}\theta\Gamma + \sin\theta\Gamma) \\ -A*(\text{ch}\theta\Gamma + \cos\theta\Gamma) \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Denklem takımının çözümü yapılırsa integrasyon sabitleri bulunur.

$$B = -A * \frac{\text{sh}\theta\Gamma \sin\theta\Gamma + \text{ch}\theta\Gamma \cos\theta\Gamma + 1}{\text{ch}\theta\Gamma \sin\theta\Gamma + \text{sh}\theta\Gamma \cos\theta\Gamma}$$

$$D = -A * \frac{\text{ch}\theta\Gamma \cos\theta\Gamma - \text{sh}\theta\Gamma \sin\theta\Gamma + 1}{\text{ch}\theta\Gamma \sin\theta\Gamma + \text{sh}\theta\Gamma \cos\theta\Gamma} \quad (2.56)$$

3. Durum : $\Omega < w$ ise $1 - \Omega^2/w^2 > 0$ olup,
 $\theta^4 = 1 - \Omega^2/w^2$, $\beta^4 = 4EI/k$

Elastik eğrinin yönetici denklemi ;

$$EI.y^{IV} + 4.\theta^4.y = 0 \quad (2.57)$$

Elastik eğrinin çözüm fonksiyonu ;

$$y = A*\text{sh}\theta\alpha.\sin\theta\alpha + B*\text{ch}\theta\alpha.\cos\theta\alpha + C*\text{ch}\theta\alpha.\sin\theta\alpha + D*\text{sh}\theta\alpha.\cos\theta\alpha \quad (2.58)$$

Sınır Şartları ;

$$y \Big|_{\alpha=0} = 0 \quad \text{ise} \quad A+B+C-D=0 \quad (2.59)$$

Simetriklik şartı kullanılırsa;

$$-EI.y''' \Big|_{\alpha=0} = -P/2 \quad \text{ise} \quad A-B+C+D = P*\beta^3/(4*\theta^3.EI)$$

$$PP=P/(\beta*k) \quad \text{ve} \quad PP=1 \quad \text{ise}$$

$$A+C=1/(2.\theta^3) \quad \text{ve} \quad B-D=-1/(2.\theta^3) \quad \text{olur.} \quad (2.60)$$

Kirişin uç ($\Gamma=L/\beta$) noktasında kesme kuvveti ve eğilme moment değerleri sıfır olduğundan ;

$$\left. -EI.y'' \right|_{\alpha=\Gamma} = 0 \quad , \quad \left. -EI.y''' \right|_{\alpha=\Gamma} = 0 \quad (2.61)$$

(2.61) denklemleri matris formunda yazılırsa ;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= (e^{2\theta\Gamma}-1)*\cos\theta\Gamma - (e^{2\theta\Gamma}+1)*\sin\theta\Gamma \\ a_{12} &= (1-e^{2\theta\Gamma})*\cos\theta\Gamma - (e^{2\theta\Gamma}+1)*\sin\theta\Gamma \\ a_{21} &= (e^{2\theta\Gamma}+1)*\cos\theta\Gamma \quad , \quad a_{22} = (1-e^{2\theta\Gamma})*\sin\theta\Gamma \\ b_{11} &= -\cos\theta\Gamma \quad , \quad b_{21} = 0.5*(\cos\theta\Gamma - \sin\theta\Gamma) \end{aligned}$$

(2.62) matrisinin çözümü yapıldığında ;

$$\delta = 2*e^{2\theta\Gamma}*\sin(2\theta\Gamma) + e^{4\theta\Gamma} - 1$$

$$\delta_1 = 0.5*[e^{2\theta\Gamma}*(\sin 2\theta\Gamma + \cos 2\theta\Gamma) - 1]$$

$$\delta_2 = 0.5*[e^{2\theta\Gamma}*(\cos 2\theta\Gamma - \sin 2\theta\Gamma) + 2*e^{2\theta\Gamma} + 1] \quad (2.63)$$

$$A = \delta_1/\delta \quad , \quad B = \delta_2/\delta \quad (2.64)$$

(2.60) denklemlerinden de ;

$$C = 1/(2.\theta^3) - A \quad \text{ve} \quad D = B + 1/(2.\theta^3)$$

integrasyon katsayıları hesaplanmış olur.

Geriye dönüş ilede kirişin istenilen x mesafesindeki yer değiştirmesi hesaplanır.

Bu üç durumda da P yükünün yönü yukarı doğru olursa, zemin homogen olduğu için α_1 değerleri değişmez. Aşağı doğru yükleme-den farklı olarak, başlangıç sınır koşulu ($\alpha_1=0$) $-EI*y_1=P/2$ yazıldığında y_1 değerleri işaret değiştirir.

2.2.2.2. Zeminin Homogen Olmaması Hali

Ortasından $P*\cos(\Omega t)$ tekil, dinamik yüklü, Winkler zeminine oturan, EI eğilme rijitlikli elastik kirişin çözümü yapılırken, kirişin çekme ve basınçta bölgelere ayrımı statik haldeki gibi düşünülmüştür.

Basınç ve çekme bölgesinde kirişin elastik eğrisinin yönetici denklemleri, gerekli boyutsuzlaştırmalar yapıldıktan sonra, sırası ile şöyledir.

$$y_1^{iv} + 4\theta_1^4 y_1 = 0 \quad ; \quad \alpha_i \leq \alpha \leq \alpha_{i+1} \quad , \quad [i=2,4...] \quad , \quad y_1 \geq 0$$

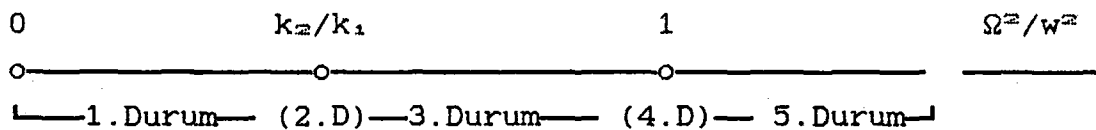
$$y_1^{iv} + 4\theta_2^4 y_1 = 0 \quad ; \quad \alpha_i \leq \alpha \leq \alpha_{i+1} \quad , \quad [i=1,3...] \quad , \quad y_1 \leq 0 \quad (2.65)$$

Burada θ_1 ve θ_2 katsayılarımız Ω^2/w^2 ve k_2/k_1 değerlerine bağlı değerlerdir.

$$\theta_1^4 = 1 - \Omega^2/w^2 \quad , \quad \theta_2^4 = k_2/k_1 - \Omega^2/w^2$$

$$\theta_1 = |\theta_1| \quad , \quad \theta_2 = |\theta_2|$$

Ω^2/w^2 'nin alacağı değerlere bağlı olarak, elastik eğrinin denklemi çekme ve basınç bölgelerinde değişmekte ve beş değişik durum ortaya çıkmaktadır.



Her durum için çekme ve basınç bölgelerinde elastik eğrinin yönetici denklemleri ve $\underline{\theta}$ değerleri sırasıyla şöyledir.

Eğer Ω^2/w^2 değeri sıfır olursa statik yüklü kiriş çözümü yapılır.

1.Durum : $0 < \Omega^2/w^2 < k_2/k_1$

$\underline{\theta}_1$	$\underline{\theta}_2$
+	+

Basınç : $y_1^{IV} + 4\theta_1^4 y_1 = 0$, $\theta_1^4 = 1 - \Omega^2/w^2$

Çekme : $y_1^{IV} + 4\theta_2^4 y_1 = 0$, $\theta_2^4 = k_2/k_1 - \Omega^2/w^2$
(2.66)

2.Durum : $k_2/k_1 = \Omega^2/w^2$

$\underline{\theta}_1$	$\underline{\theta}_2$
+	0

Basınç : $y_1^{IV} + 4\theta_1^4 y_1 = 0$, $\theta_1^4 = 1 - \Omega^2/w^2$

Çekme : $y_1^{IV} = 0$, $\theta_2^4 = 0$ (2.67)

3.Durum : $k_2/k_1 < \Omega^2/w^2 < 1$

$\underline{\theta}_1$	$\underline{\theta}_2$
+	-

Basınç : $y_1^{IV} + 4\theta_1^4 y_1 = 0$, $\theta_1^4 = 1 - \Omega^2/w^2$

Çekme : $y_1^{IV} - \theta_2^4 y_1 = 0$, $\theta_2^4 = \Omega^2/w^2 - k_2/k_1$
(2.68)

4.Durum : $\Omega^2/w^2 = 1$

$\underline{\theta}_1$	$\underline{\theta}_2$
0	-

Basınç : $y_1^{IV} = 0$, $\theta_1^4 = 0$

Çekme : $y_1^{IV} - \theta_2^4 y_1 = 0$, $\theta_2^4 = \Omega^2/w^2 - k_2/k_1$
(2.69)

5. Durum : $1 < \Omega^2/w^2$

$\underline{\theta}_1$	$\underline{\theta}_2$
-	-

Basınc : $y_1'' - \theta_1^4 y_1 = 0$, $\theta_1^4 = \Omega^2/w^2 - 1$

Çekme : $y_1'' - \theta_2^4 y_1 = 0$, $\theta_2^4 = \Omega^2/w^2 - k_2/k_1$
(2.70)

2.2.3 1. Durum : $0 < \Omega^2/w^2 < k_2/k_1$ olup, basınc ve çekme bölgesinde elastik eğrinin (2.66) yönetici denklemlerinin çözüm fonksiyonları sırasıyla şöyledir.

$$\begin{aligned}
 y_1 &= A_1 * \text{sh}\theta_1 \alpha_1 \sin\theta_1 \alpha_1 + B_1 * \text{ch}\theta_1 \alpha_1 \cos\theta_1 \alpha_1 + \\
 &\quad C_1 * \text{ch}\theta_1 \alpha_1 \sin\theta_1 \alpha_1 + D_1 * \text{sh}\theta_1 \alpha_1 \cos\theta_1 \alpha_1 \\
 y_1 &= A_1 * \text{sh}\theta_2 \alpha_1 \sin\theta_2 \alpha_1 + B_1 * \text{ch}\theta_2 \alpha_1 \cos\theta_2 \alpha_1 + \\
 &\quad C_1 * \text{ch}\theta_2 \alpha_1 \sin\theta_2 \alpha_1 + D_1 * \text{sh}\theta_2 \alpha_1 \cos\theta_2 \alpha_1
 \end{aligned} \quad (2.71)$$

Ortasından tekil yükle yüklü sonlu kiriş için sınır ve süreklilik koşulları sırası ile şöyledir.

$$\left. y_1' \right|_{\alpha_1=0} = 0 \quad (2.72)$$

$C_1 + D_1 = 0$ olup, birinci bölgedeki denklemin çözüm fonksiyonu şöyledir.

$$\begin{aligned}
 y_1 &= A_1 * \text{sh}\theta_1 \alpha_1 \sin\theta_1 \alpha_1 + B_1 * \text{ch}\theta_1 \alpha_1 \cos\theta_1 \alpha_1 + \\
 &\quad C_1 * (\text{ch}\theta_1 \alpha_1 \sin\theta_1 \alpha_1 - \text{sh}\theta_1 \alpha_1 \cos\theta_1 \alpha_1) \\
 \left. y_1 \right|_{\alpha_1=0} &= 0 \quad \text{ise} \quad [i \geq 2]
 \end{aligned} \quad (2.73)$$

$B_1 = 0$ olup, asınc ve çekme bölgelerinde çözüm fonksiyonları sırası ile şöyledir.

$$y_1 = A_1 * \text{sh}\theta_1 \alpha_1 \sin\theta_1 \alpha_1 + C_1 * \text{ch}\theta_1 \alpha_1 \sin\theta_1 \alpha_1 + D_1 * \text{sh}\theta_1 \alpha_1 \cos\theta_1 \alpha_1$$

$$y_1 = A_1 * \text{sh}\theta_2 \alpha_1 \sin\theta_2 \alpha_1 + C_1 * \text{ch}\theta_2 \alpha_1 \sin\theta_2 \alpha_1 + D_1 * \text{sh}\theta_2 \alpha_1 \cos\theta_2 \alpha_1$$

[i=1] noktasında süreklilik denklemleri ;

$$y_1' \Big|_{\alpha_1=\Gamma_1} = y_2' \Big|_{\alpha_2=0}$$

$$y_1'' \Big|_{\alpha_1=\Gamma_1} = y_2'' \Big|_{\alpha_2=0}$$

$$y_1''' \Big|_{\alpha_1=\Gamma_1} = y_2''' \Big|_{\alpha_2=0} \quad (2.74)$$

Bu eşitliklerden ikinci bölgenin A_2, C_2, D_2 integrasyon sabitleri, birinci bölgenin A_1, B_1, C_1 sabitleri cinsinden yazılır. Bu eşitlikler matris formunda yazılacak olursa;

$Z = \theta_1 / \theta_2$ kısaltması yapılırsa ;

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

$$a_{11} = Z^2 * \text{ch}\theta_1 \Gamma_1 \cdot \cos\theta_1 \Gamma_1, \quad a_{12} = -Z^2 * \text{sh}\theta_1 \Gamma_1 \cdot \sin\theta_1 \Gamma_1$$

$$a_{13} = Z^2 * (\text{sh}\theta_1 \Gamma_1 \cdot \cos\theta_1 \Gamma_1 + \text{ch}\theta_1 \Gamma_1 \cdot \sin\theta_1 \Gamma_1)$$

$$a_{21} = 0.5 * Z * [\text{ch}\theta_1 \Gamma_1 \cdot \sin\theta_1 \Gamma_1 + \text{sh}\theta_1 \Gamma_1 \cdot \cos\theta_1 \Gamma_1 + \\ Z^2 * (\text{sh}\theta_1 \Gamma_1 \cdot \cos\theta_1 \Gamma_1 - \text{ch}\theta_1 \Gamma_1 \cdot \sin\theta_1 \Gamma_1)]$$

$$a_{22} = 0.5 * Z * [\text{sh}\theta_1 \Gamma_1 \cdot \cos\theta_1 \Gamma_1 - \text{ch}\theta_1 \Gamma_1 \cdot \sin\theta_1 \Gamma_1 - \\ Z^2 * (\text{ch}\theta_1 \Gamma_1 \cdot \sin\theta_1 \Gamma_1 + \text{sh}\theta_1 \Gamma_1 \cdot \cos\theta_1 \Gamma_1)]$$

$$a_{23} = Z * (\text{sh}\theta_1 \Gamma_1 \cdot \sin\theta_1 \Gamma_1 + Z^2 * \text{ch}\theta_1 \Gamma_1 \cdot \cos\theta_1 \Gamma_1)$$

$$a_{31} = 0.5 * Z * [\text{ch}\theta_1 \Gamma_1 \cdot \sin\theta_1 \Gamma_1 + \text{sh}\theta_1 \Gamma_1 \cdot \cos\theta_1 \Gamma_1 - \\ Z^2 * (\text{sh}\theta_1 \Gamma_1 \cdot \cos\theta_1 \Gamma_1 - \text{ch}\theta_1 \Gamma_1 \cdot \sin\theta_1 \Gamma_1)]$$

$$a_{32} = 0.5 * Z * [\text{sh}\theta_1 \Gamma_1 \cdot \cos\theta_1 \Gamma_1 - \text{ch}\theta_1 \Gamma_1 \cdot \sin\theta_1 \Gamma_1 + \\ Z^2 * (\text{ch}\theta_1 \Gamma_1 \cdot \sin\theta_1 \Gamma_1 + \text{sh}\theta_1 \Gamma_1 \cdot \cos\theta_1 \Gamma_1)]$$

$$a_{33} = Z * (\text{sh}\theta_1 \Gamma_1 \cdot \sin\theta_1 \Gamma_1 - Z^2 * \text{ch}\theta_1 \Gamma_1 \cdot \cos\theta_1 \Gamma_1)$$

Herhangi bir noktada aşağıdaki süreklilik denklemleri yazılabilir.

$$y_1' \Big|_{\alpha_1=\Gamma_1} = y_{1+1}' \Big|_{\alpha_{1+1}=0}$$

$$y_1'' \Big|_{\alpha_1=\Gamma_1} = y_{1+1}'' \Big|_{\alpha_{1+1}=0}$$

$$y_1''' \Big|_{\alpha_1=\Gamma_1} = y_{1+1}''' \Big|_{\alpha_{1+1}=0} \quad (2.76)$$

[i=3,5,7,...] basınçtan çekmeye geçiş noktalarında $\alpha_1=\Gamma_1$ ve $\alpha_{1+1}=0$ olup, bu noktada (2.76) süreklilik denklemleri yazılırsa, A_{1+1} , C_{1+1} ve D_{1+1} sabitleri A_1 , C_1 ve D_1 sabitleri cinsinden yine bir 3*3 'lük $\underline{A}^1$ katsayılar matrisi ile aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\begin{bmatrix} A_{1+1} \\ C_{1+1} \\ D_{1+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix}$$

(2.77)

$$\begin{aligned} a_{11} &= Z^2 * \text{ch}\Gamma_1 . \cos\Gamma_1 \quad , \quad a_{12} = Z^2 * \text{sh}\Gamma_1 . \cos\Gamma_1 \\ a_{13} &= -Z^2 * \text{ch}\Gamma_1 . \sin\Gamma_1 \\ a_{21} &= 0.5 * Z * [\text{ch}\Gamma_1 . \sin\Gamma_1 + \text{sh}\Gamma_1 . \cos\Gamma_1 + \\ &\quad Z^2 * (\text{sh}\Gamma_1 . \cos\Gamma_1 - \text{ch}\Gamma_1 . \sin\Gamma_1)] \\ a_{22} &= 0.5 * Z * [\text{sh}\Gamma_1 . \sin\Gamma_1 + \text{ch}\Gamma_1 . \cos\Gamma_1 + \\ &\quad Z^2 * (\text{ch}\Gamma_1 . \cos\Gamma_1 - \text{sh}\Gamma_1 . \sin\Gamma_1)] \\ a_{23} &= 0.5 * Z * [\text{ch}\Gamma_1 . \cos\Gamma_1 - \text{sh}\Gamma_1 . \sin\Gamma_1 - \\ &\quad Z^2 * (\text{sh}\Gamma_1 . \sin\Gamma_1 + \text{ch}\Gamma_1 . \cos\Gamma_1)] \\ a_{31} &= 0.5 * Z * [\text{ch}\Gamma_1 . \sin\Gamma_1 + \text{sh}\Gamma_1 . \cos\Gamma_1 - \\ &\quad Z^2 * (\text{sh}\Gamma_1 . \cos\Gamma_1 - \text{ch}\Gamma_1 . \sin\Gamma_1)] \\ a_{32} &= 0.5 * Z * [\text{sh}\Gamma_1 . \sin\Gamma_1 + \text{ch}\Gamma_1 . \cos\Gamma_1 - \\ &\quad Z^2 * (\text{ch}\Gamma_1 . \cos\Gamma_1 - \text{sh}\Gamma_1 . \sin\Gamma_1)] \\ a_{33} &= 0.5 * Z * [\text{ch}\Gamma_1 . \cos\Gamma_1 - \text{sh}\Gamma_1 . \sin\Gamma_1 + \\ &\quad Z^2 * (\text{sh}\Gamma_1 . \sin\Gamma_1 + \text{ch}\Gamma_1 . \cos\Gamma_1)] \end{aligned}$$

[$i=2,4,\dots$] çekmeden basınca geçiş noktalarında $\alpha_i = \Gamma_i$

ve $\alpha_{i+1}=0$ olup, bu noktada (2.76) süreklilik denklemleri yazılırsa bir sonraki bölgenin sabitleri bir öncekiler cinsinden hesaplanır. (2.77) matris eşitliğindeki katsayılar matrisinde yer alan Z_1 ve Z^2 çarpanları burada bölün, θ_1 ise θ_2 olarak gelecektir.

[$i=n$] noktasında son bölgenin integrasyon sabitlerinin birinci bölgedekiler cinsinden ifadesi ;

$$\begin{bmatrix} A^{n+1} \\ C^{n+1} \\ D^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}^n \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \underline{A}^1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \underline{A}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

Yukarıdaki 3×3 'lük $\underline{A}^1$ matrislerinin çarpımı yine bir 3×3 'lük $\underline{B}^1$ matrisidir.

$$\begin{bmatrix} A^{n+1} \\ C^{n+1} \\ D^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

Son olarak elde edilen altı bilinmeyenli üç denklemi çözebilmek için başlangıç noktasında, kesme gerilmesinin değeri $-P \cos \Omega t / 2$ olması koşulu yazılırsa;

$$\left. -EI \cdot y_1''' \right|_{\alpha_1=0} = -P \cos \Omega t / 2 \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} C_1 &= P \cos \Omega t \cdot \beta_1^3 / (8 \cdot \theta_1^3 \cdot EI) = P \cos \Omega t / (2 \cdot \theta_1^3 \cdot \beta_1 \cdot k_1) \\ &= PP / (2 \cdot \theta_1^3) \end{aligned}$$

Yine kirişin uç noktasının çekme veya basınç bölgesinde bitmesi dikkate alınarak, kesme ve eğilme momenti

değerlerinin sıfır olması nedeniyle ;

$$\left. -EI \cdot y''''_{n+1} \right|_{\alpha_{n+1}=\Gamma_{n+1}} = 0 \quad , \quad \left. -EI \cdot y'''_{n+1} \right|_{\alpha_{n+1}=\Gamma_{n+1}} = 0 \quad (2.81)$$

$$\text{Burada } \Gamma_{n+1} = \Gamma - \sum_{i=1}^n \Gamma_i$$

Yukarıdaki ifadeler son bölgenin bilinmeyen üç integrasyon sabitine bağlı olarak matris formunda yazılırsa.

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{n+1} \\ C_{n+1} \\ D_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

Kirişin uç noktasının basınç bölgesinde bitmesi halinde ;

$$\begin{aligned} C_{11} &= \text{ch}\theta_1 \Gamma_{n+1} \cdot \cos\theta_1 \Gamma_{n+1} \\ C_{12} &= \text{sh}\theta_1 \Gamma_{n+1} \cdot \cos\theta_1 \Gamma_{n+1} \\ C_{13} &= -\text{ch}\theta_1 \Gamma_{n+1} \cdot \sin\theta_1 \Gamma_{n+1} \\ C_{21} &= \text{sh}\theta_1 \Gamma_{n+1} \cdot \cos\theta_1 \Gamma_{n+1} - \text{ch}\theta_1 \Gamma_{n+1} \cdot \sin\theta_1 \Gamma_{n+1} \\ C_{22} &= \text{ch}\theta_1 \Gamma_{n+1} \cdot \cos\theta_1 \Gamma_{n+1} - \text{sh}\theta_1 \Gamma_{n+1} \cdot \sin\theta_1 \Gamma_{n+1} \\ C_{23} &= -\text{sh}\theta_1 \Gamma_{n+1} \cdot \sin\theta_1 \Gamma_{n+1} - \text{ch}\theta_1 \Gamma_{n+1} \cdot \cos\theta_1 \Gamma_{n+1} \end{aligned}$$

Kirişin uç noktasının çekme bölgesinde bitmesi halinde (2.82) matris elemanlarında θ_1 değerleri yerine θ_2 yazılıp, (2.79) matris denkleminde yerine konursa ;

$$\begin{bmatrix} \underline{C}_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{B}_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

Burada $\underline{C}^{n+1}$ 2×3 'lük matrisi ile $\underline{B}^{n+1}$ 3×3 'lük matrisin çarpımı yine 2×3 'lük bir $\underline{D}^{n+1}$ matrisidir.

A_1 ve B_1 integrasyon sabitleri $C_1=1$ kabul edilirse, C_1 bilinen sabiti cinsinden yazılarak hesaplanır.

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

$$d_{11} = c_{11} * b_{11} + c_{12} * b_{21} + c_{13} * b_{31}$$

$$d_{12} = c_{11} * b_{12} + c_{12} * b_{22} + c_{13} * b_{32}$$

$$d_{13} = c_{11} * b_{13} + c_{12} * b_{23} + c_{13} * b_{33}$$

$$d_{21} = c_{21} * b_{11} + c_{22} * b_{21} + c_{23} * b_{31}$$

$$d_{22} = c_{21} * b_{12} + c_{22} * b_{22} + c_{23} * b_{32}$$

$$d_{23} = c_{21} * b_{13} + c_{22} * b_{23} + c_{23} * b_{33}$$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_{13} \\ -d_{23} \end{bmatrix}$$

$$\delta_1 = -d_{13} * d_{22} + d_{23} * d_{12}$$

$$\delta_2 = -d_{11} * d_{23} + d_{21} * d_{13}$$

$$\delta = d_{11} * d_{22} - d_{21} * d_{12}$$

$$A_1 = \delta_1 / \delta \quad \vee \quad B_1 = d_{23} / \delta$$

Kirişin zemin yüzeyini kestiği her $\alpha_i = \Gamma_i$ [$i \geq 1$] değerlerini bulabilmek için ;

$i=1$ noktasında,

$$y_1 = A_1 * \text{sh}\theta_1 \Gamma_1 \sin\theta_1 \Gamma_1 + B_1 * \text{ch}\theta_1 \Gamma_1 \sin\theta_1 \Gamma_1 + C_1 * (\text{ch}\theta_1 \Gamma_1 \sin\theta_1 \Gamma_1 - \text{sh}\theta_1 \Gamma_1 \cos\theta_1 \Gamma_1)$$

[$i=3,5,7,\dots$] noktalarında,

$$y_i = A_i \cdot \text{sh}\theta_1 \Gamma_1 \sin\theta_1 \Gamma_1 + C_i \cdot \text{ch}\theta_1 \Gamma_1 \cos\theta_1 \Gamma_1 + D_i \cdot \text{sh}\theta_1 \Gamma_1 \cos\theta_1 \Gamma_1$$

[i=2,4,6,...] noktalarında,

$$y_i = A_i \cdot \text{sh}\theta_2 \Gamma_1 \sin\theta_2 \Gamma_1 + C_i \cdot \text{ch}\theta_2 \Gamma_1 \cos\theta_2 \Gamma_1 + D_i \cdot \text{sh}\theta_2 \Gamma_1 \cos\theta_2 \Gamma_1 \quad (2.85)$$

ifadeleri sıfıra eşitlenir.

Denklem takımları integrasyon değişmezlerine göre doğrusal fakat Γ_1 parametrelerine göre doğrusal değildir. (2.79) 'e kadar olan denklem takımlarından integrasyon değişmezleri A_1 ve B_1 integrasyon sabitleri cinsinden hesaplanır. (2.81) denklemlerinde yerlerine konulup, 2*2 'lik doğrusal denklem takımı çözülerek A_1 , B_1 integrasyon değişmezleride Γ_1 parametreleri cinsinden hesaplanıp, doğrusal olmayan (2.85) denklemlerinde yerine konulursa, $\Gamma_1 > 0$ ve $\Sigma \Gamma_1 < \Gamma$ olacak şekilde en küçük kökleri sayısal olarak elde edilir. Geriye dönüş ile de kirişin elastik eğrisi ve kesit zorlamaları hesaplanır.

Bölge sayısı tahmin edilip, çözüm yapıldıktan sonra elastik eğri ile bölgenin uyumlu olup olmadığı araştırılır. Uyumluluk yoksa bölge sayısı değiştirilir.

P yükünün yönü yukarı doğru olursa, zemin homogen olmadığı için birinci bölge çekme bölgesi olduğundan basınç bölgesinin çarpanı olan $\theta = k_1/k_2$ olarak değişeceğinden Γ_1 değerleri değişir. Aşağı doğru yüklemekten farklı olarak, başlangıç sınır koşulu ($\alpha_1=0$) $-EI \cdot y_1 = P \cdot \cos \Omega t / 2$ yazıldığında y_1 değerleri işaret değiştirir.

2.2.3 2. Durum : $\Omega^2/w^2 = k_2/k_1$ olması halinde, elastik eğrinin (2.67) yönetici denklemlerinin çözümü yapılırsa, çözüm fonksiyonları sırası ile şöyledir.

Basınc bölgesinde,

$$y_1 = A_1 * \text{sh}\theta_1 \alpha_1 \sin\theta_1 \alpha_1 + B_1 * \text{ch}\theta_1 \alpha_1 \cos\theta_1 \alpha_1 + C_1 * \text{ch}\theta_1 \alpha_1 \sin\theta_1 \alpha_1 + D_1 * \text{sh}\theta_1 \alpha_1 \cos\theta_1 \alpha_1$$

Çekme bölgesinde,

$$y_1 = A_1 * \alpha_1^3 + B_1 * \alpha_1^2 + C_1 * \alpha_1 + D_1 \quad (2.86)$$

Sırasıyla sınır ve süreklilik koşulları (2.72) ve (2.73) sınır koşulları yazılırsa, birinci bölgede $C_1 + D_1 = 0$, basınç bölgesinde $B_1 = 0$ ve çekme bölgesinde $D_1 = 0$ olur.

Sistemin çözüm fonksiyonları sırası ile şu hale gelir.

[i=1] bölgesinde,

$$y_1 = A_1 * \text{sh}\theta_1 \alpha_1 \sin\theta_1 \alpha_1 + B_1 * \text{ch}\theta_1 \alpha_1 \cos\theta_1 \alpha_1 + C_1 * (\text{ch}\theta_1 \alpha_1 \sin\theta_1 \alpha_1 - \text{sh}\theta_1 \alpha_1 \cos\theta_1 \alpha_1)$$

[i=3,5,7,...] bölgelerinde,

$$y_1 = A_1 * \text{sh}\theta_1 \alpha_1 \sin\theta_1 \alpha_1 + C_1 * \text{ch}\theta_1 \alpha_1 \sin\theta_1 \alpha_1 + D_1 * \text{sh}\theta_1 \alpha_1 \cos\theta_1 \alpha_1$$

[i=2,4,6,...] bölgelerinde,

$$y_1 = A_1 * \alpha_1^3 + B_1 * \alpha_1^2 + C_1 * \alpha_1 \quad (2.87)$$

[i=1] noktasında $\alpha_1 = \Gamma_1$ ve $\alpha_2 = 0$ olmak üzere, (2.74) eşitlikleri kullanılarak A_2 , B_2 , C_2 sabitlerini A_1 , B_1 , C_1 sabitleri cinsinden hesaplanır.

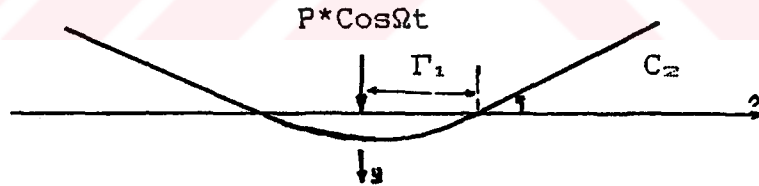
Kiriş uç noktasının çekme bölgesinde eğilme momenti ve kesme değerleri ayrı ayrı sıfıra eşitlenerek, 2×3 'lük bir $\underline{C}$ matrisi oluşturulur. Bu 3×3 'lük $\underline{B}^1$ matrisi ile 2×3 'lük $\underline{C}$ matrisinin çarpımı yine 2×3 'lük bir $\underline{D}$ matrisidir.

Yükün altındaki başlangıç noktasında, (2.80) eşitliği yazılarak, $C_1 = PP/(2.E_1^3)$ hesaplanmış olur.

Kirişin zemin yüzeyini kestiği noktayı bulabilmek için birinci bölgenin elastik eğrisinin çözüm fonksiyonu $\alpha_1 = \Gamma_1$ noktasında sıfıra eşitlenir.

$$y_1 \Big|_{\alpha_1 = \Gamma_1} = 0 \quad (2.88)$$

Kirişin uç noktasında moment ve kesme kuvvetinin sıfır olması şartından elde edilen iki denklemin ortak çözümü yapılırsa, $A_2 = B_2 = D_2 = 0$ olarak bulunur. Kirişin çekme bölgesi denklemi, kirişi aşağıya çağırıcı bir terim olmadığı için lineer olarak artacak ve yatay ekseni bir daha kesmeyecektir. Yani ikinci bölgenin denklemi $y_2 = C_2 * \alpha_1$ durumuna gelecektir. Bu durumda birinci bölgenin çözümü çekme almayan zemine oturan kirişin statik çözümüne benzer olacaktır.



Şekil 2.5 $\Omega^2/w^2 = k_2/k_1$ olması halinde elastik kirişin davranışı

$$y_1 = A_1 * \text{sh}\theta_1 \Gamma_1 \sin\theta_1 \Gamma_1 + B_1 * \text{ch}\theta_1 \Gamma_1 \cos\theta_1 \Gamma_1 + C_1 * \text{ch}\theta_1 \Gamma_1 \sin\theta_1 \Gamma_1 + D_1 * \text{sh}\theta_1 \Gamma_1 \cos\theta_1 \Gamma_1 \quad (2.89)$$

Denkleminin çözümü için sınır koşulları:

$$\alpha_1 = 0 \text{ ise } y_1' = 0 \text{ ve } -EI * y_1''' = -P * \text{Cos}\Omega t / 2$$

$$\alpha_1 = \Gamma_1 \text{ ise } y_1'' = 0, y_1''' = 0 \text{ ve } y_1 = 0 \quad (2.90)$$

Sınır koşulları ile A_1 , B_1 , C_1 , D_1 integrasyon sabitleri ve Γ_1 bilinmeyeninin çözümü yapılırsa $A_1=C_1=D_1=0$ bulunur ve (2.90) denklemi şu şekilde kısalır,

$$y_1 = B_1 \cdot \text{ch} \theta_1 \Gamma_1 \cos \theta_1 \Gamma_1 \quad (2.91)$$

$y_1=0$ koşulundan $\theta_1 \cdot \Gamma_1 = \pi/2$, $\theta_1 = 1 - \Omega^2/w^2$ bulunur.

Tablo 2.4 Ω^2/w^2 değerlerine bağlı olarak Γ_1 değerleri

Ω^2/w^2	0.00	0.10	0.40	0.60	0.80	0.90	0.99
Γ_1	1.571	1.746	2.618	3.928	7.855	15.71	157.1

P yükünün yönü yukarı doğru olursa, zemin homogen olmadığı için birinci bölge çekme bölgesi olduğundan basınç bölgesinin çarpanı olan $\theta = k_1/k_2$ olarak değişeceğinden Γ_1 değerleri değişir. Aşağı doğru yüklemeyen farklı olarak, başlangıç sınır koşulu ($\alpha_1=0$) $-EI \cdot y_1 = P \cdot \cos \Omega t/2$ yazıldığında y_1 değerleri işaret değiştirir.

2.2.3 3. Durum : $k_2/k_1 < \Omega^2/w^2 < 1$ olup, elastik eğrinin (2.68) yönetici denklemlerinin çözümü yapılırsa, çözüm fonksiyonları sırası ile aşağıdaki gibidir.

$$y_1 = A_1 \cdot \text{sh} \theta_1 \alpha_1 \sin \theta_1 \alpha_1 + B_1 \cdot \text{ch} \theta_1 \alpha_1 \cos \theta_1 \alpha_1 + C_1 \cdot \text{ch} \theta_1 \alpha_1 \sin \theta_1 \alpha_1 + D_1 \cdot \text{sh} \theta_1 \alpha_1 \cos \theta_1 \alpha_1$$

$$y_1 = A_1 \cdot \text{sh} \theta_2 \alpha_1 + B_1 \cdot \text{ch} \theta_2 \alpha_1 + C_1 \cdot \sin \theta_2 \alpha_1 + D_1 \cdot \cos \theta_2 \alpha_1 \quad (2.92)$$

Sırasıyla sınır ve süreklilik koşulları yazılırsa ;

(2.72) ve (2.73) sınır koşulları yazılırsa, birinci bölgede $C_1+D_1=0$, basınç bölgesinde $B_1=0$ ve çekme bölge-sinde $B_1+D_1=0$ olur.

Sistemin çözüm fonksiyonları sırası ile şu hale gelir.

[i=1] bölgesinde,

$$y_1 = A_1 * \text{sh}\theta_1 \alpha_1 \sin\theta_1 \alpha_1 + B_1 * \text{ch}\theta_1 \alpha_1 \cos\theta_1 \alpha_1 + C_1 * (\text{ch}\theta_1 \alpha_1 \sin\theta_1 \alpha_1 - \text{sh}\theta_1 \alpha_1 \cos\theta_1 \alpha_1)$$

[i=3,5,7,...] bölgelerinde,

$$y_1 = A_1 * \text{sh}\theta_1 \alpha_1 \sin\theta_1 \alpha_1 + C_1 * \text{ch}\theta_1 \alpha_1 \sin\theta_1 \alpha_1 + D_1 * \text{sh}\theta_1 \alpha_1 \cos\theta_1 \alpha_1$$

[i=2,4,6,...] bölgelerinde,

$$y_1 = A_1 * \text{sh}\theta_2 \alpha_1 + B_1 * (\text{ch}\theta_2 \alpha_1 - \cos\theta_2 \alpha_1) + C_1 * \sin\theta_2 \alpha_1 \quad (2.93)$$

[i=1] noktasında $\alpha_1 = \Gamma_1$ ve $\alpha_2 = 0$ olmak üzere, (2.74) eşitlikleri yazılırsa A_2 , B_2 , C_2 sabitleri A_1 , B_1 , D_1 sabitlerine bağlı olarak yazılır.

[i=2,4,6,...] çekmeden basınca geçiş noktalarında ve [i=3,5,7,...] basınçtan çekmeye geçiş noktalarında $\alpha_1 = \Gamma_1$ ve $\alpha_{i+1} = 0$ olmak üzere, (2.76) süreklilik ifadeleri yazılırsa A_{i+1} , B_{i+1} , C_{i+1} sabitleri A_i , B_i , C_i sabitleri cinsinden hesaplanır.

Her geçiş noktasında yazacağımız 3*3 'lük $\underline{A}^+$ matrisiyle bir sonraki bölgenin integrasyon sabitlerini bir öncekiler cinsinden yazılır. Daha sonra bu $\underline{A}^+$ matrisleriyle, birinci durumda yapıldığı gibi, son bölgenin sabitleri birinci bölgeninkiler cinsinden ifade edilir. Yine bunlarda 3*3 'lük bir $\underline{B}^+$ matrisiyle birbirine bağlıdır.

Kiriş uç noktasının basınç ve çekme bölgelerinde farklı olmak üzere eğilme momenti ve kesme değerleri ayrı ayrı sıfıra eşitlenerek, 2*3 'lük bir $\underline{C}$ matrisi oluşturulur. Bu 3*3 'lük $\underline{B}_i$ matrisi ile 2*3 'lük $\underline{C}$ matrisinin çarpımı yine 2*3 'lük bir $\underline{D}$ matrisidir.

Yükün altındaki başlangıç noktasında, (2.80) eşitliği yazılarak, $C_1 = PP/(2.\theta_1^3)$ hesaplanmış olur.

Kirişin zemin yüzeyini kestiği noktaları bulabilmek için her bölgenin elastik eğrisinin çözüm fonksiyonu (2.88) sıfıra eşitlenir.

Buradan geriye dönüşlede kirişin elastik eğrisinin denklemi elde edilmiş olur.

P yükünün yönü yukarı doğru olursa, zemin homogen olmadığı için birinci bölge çekme bölgesi olduğundan basınç bölgesinin çarpanı olan $\theta = k_1/k_2$ olarak değişeceğinden Γ_1 değerleri değişir. Aşağı doğru yüklenmeden farklı olarak, başlangıç sınır koşulu ($\alpha_1 = 0$) $-EI \cdot y_1 = P \cdot \cos \Omega t / 2$ yazıldığında y_1 değerleri işaret değiştirir.

2.2.3 4. Durum : $\Omega^2/w^2 = 1$ olması halinde, elastik eğrinin (2.69) yönetici denklemlerinin çözüm fonksiyonları basınç ve çekmede sırası ile şöyle olur.

$$y_1 = A_1 \cdot \alpha_1^3 + B_1 \cdot \alpha_1^2 + C_1 \cdot \alpha_1 + D_1$$

$$y_1 = A_1 \cdot \text{sh} \theta_2 \alpha_1 + B_1 \cdot \text{ch} \theta_2 \alpha_1 + C_1 \cdot \sin \theta_2 \alpha_1 + D_1 \cdot \cos \theta_2 \alpha_1 \quad (2.94)$$

Sırasıyla sınır ve süreklilik koşulları yazılırsa ;

(2.72) ve (2.73) sınır koşulları yazılacak olursa, birinci bölgede $C_1 = 0$, basınç bölgesinde $D_1 = 0$ ve çekme bölgesinde $B_1 + D_1 = 0$ olur.

Sistemin çözüm fonksiyonları sırası ile şu hale gelir.

[i=1] bölgesinde,

$$y_1 = A_1 \cdot \alpha_1^3 + B_1 \cdot \alpha_1^2 + D_1$$

$[i=3,5,7,\dots]$ bölgelerinde,

$$y_i = A_i \cdot \alpha_i^3 + B_i \cdot \alpha_i^2 + C_i \cdot \alpha_i$$

$[i=2,4,6,\dots]$ bölgelerinde,

$$y_i = A_i \cdot \text{sh}\theta_2 \alpha_i + B_i \cdot (\text{ch}\theta_2 \alpha_i - \cos\theta_2 \alpha_i) + C_i \cdot \sin\theta_2 \alpha_i \quad (2.95)$$

$[i=1]$ noktasında $\alpha_1 = \Gamma_1$ ve $\alpha_2 = 0$ olmak üzere, (2.74) süreklilik denklemleri yazılırsa, A_2 , B_2 , C_2 sabitlerini A_1 ve B_1 sabitlerine bağlı olarak hesaplanır.

$[i=2,4,\dots]$ çekmeden basınca geçiş noktalarında $\alpha_i = \Gamma_i$ ve $\alpha_{i+1} = 0$ olmak üzere, (2.76) eşitliklerinden A_{i+1} , B_{i+1} , C_{i+1} sabitleri A_i , B_i , C_i sabitleri cinsinden hesaplanır.

$[i=3,5,\dots]$ basınçtan çekmeye geçiş noktalarında $\alpha_i = \Gamma_i$ ve $\alpha_{i+1} = 0$ olmak üzere, (2.76) süreklilik ifadelerinden A_{i+1} , B_{i+1} , C_{i+1} sabitleri A_i , B_i , C_i sabitleri cinsinden hesaplanır.

Her geçiş noktasında yazacağımız 3×3 'lük $\underline{A}^i$ matrisiyle bir sonraki bölgenin integrasyon sabitlerini bir öncekiler cinsinden yazılır. Daha sonra bu $\underline{A}^i$ matrisleriyle,

birinci durumda yapıldığı gibi, son bölgenin sabitleri birinci bölgeninkiler cinsinden ifade edilir. Yine bunlarda 3×3 'lük bir $\underline{B}^i$ matrisiyle birbirine bağlıdır.

Kiriş uç noktasının basınç ve çekme bölgelerinde farklı olmak üzere moment ve kesme değerleri ayrı ayrı sıfıra eşitlenerek, 2×3 'lük bir $\underline{C}$ matrisi oluşturulur. Bu 3×3 'lük $\underline{B}^i$ matrisi ile 2×3 'lük $\underline{C}$ matrisinin çarpımı yine 2×3 'lük bir $\underline{D}$ matrisidir.

Yükün altındaki başlangıç noktasında, (2.80) eşitliği yazılarak, $A_1 = P \cdot \beta_1^3 / (12 \cdot EI) = PP/3$ hesaplanmış olur.

Kirişin zemin yüzeyini kestiği noktaları bulabilmek için her bölgenin elastik eğrisinin çözüm fonksiyonu (2.88) sıfıra eşitlenir.

Buradan geriye dönüşlede kirişin elastik eğrisinin denklemi elde edilmiş olur.

P yükünün yönü yukarı doğru olursa, zemin homogen olmadığı için birinci bölge çekme bölgesi olduğundan basınç bölgesinin çarpanı olan $\theta = k_1/k_2$ olarak değişeceğinden T_1 değerleri değişir. Aşağı doğru yüklenmeden farklı olarak, başlangıç sınır koşulu ($\alpha_1=0$) $-EI*y_1 = P*\cos\Omega t/2$ yazıldığında y_1 değerleri işaret değiştirir.

2.2.3 5. Durum : $1 < \Omega^2/w^2$ olması halinde, elastik eğrinin (2.70) yönetici denklemlerinin çözümü yapılırsa, çözüm fonksiyonları basınç ve çekmede sırası ile şöyle olur.

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 * \text{sh}\theta_1 \alpha_1 + B_1 * \text{ch}\theta_1 \alpha_1 + C_1 * \sin\theta_1 \alpha_1 + D_1 * \cos\theta_1 \alpha_1 \\ y_1 &= A_1 * \text{sh}\theta_2 \alpha_1 + B_1 * \text{ch}\theta_2 \alpha_1 + C_1 * \sin\theta_2 \alpha_1 + D_1 * \cos\theta_2 \alpha_1 \end{aligned} \quad (2.96)$$

Sırasıyla sınır ve süreklilik koşulları yazılırsa ;

(2.72) ve (2.73) sınır koşulları yazılırsa, birinci bölgede $A_1 + C_1 = 0$, basınç bölgesinde $B_1 + D_1 = 0$ ve çekme bölgesinde $B_1 + D_1 = 0$ olur.

Sistemin çözüm fonksiyonları sırası ile şu hale gelir.

[i=1] bölgesinde,

$$y_1 = A_1 * (\text{sh}\theta_1 \alpha_1 - \sin\theta_1 \alpha_1) + B_1 * \text{ch}\theta_1 \alpha_1 + D_1 * \cos\theta_1 \alpha_1$$

[i=3,5,7,...] bölgelerinde,

$$y_1 = A_1 * \text{sh}\theta_1 \alpha_1 + B_1 * (\text{ch}\theta_1 \alpha_1 - \cos\theta_1 \alpha_1) + C_1 * \sin\theta_1 \alpha_1$$

[i=2,4,6,...] bölgelerinde,

$$y_i = A_i \cdot \text{sh} \theta_2 \alpha_i + B_i \cdot (\text{ch} \theta_2 \alpha_i - \cos \theta_2 \alpha_i) + C_i \cdot \sin \theta_2 \alpha_i \quad (2.97)$$

[i=1] noktasında $\alpha_1 = \Gamma_1$ ve $\alpha_2 = 0$ olmak üzere, (2.74) süreklilik ifadelerinden A_2, B_2, C_2 sabitleri A_1, B_1, D_1 sabitlerine bağlı olarak yazılır.

[i=2,4,6,...] çekmeden basınca geçiş noktalarında ve [i=3,5,7,...] basınçtan çekmeye geçiş noktalarında $\alpha_i = \Gamma_i$ ve $\alpha_{i+1} = 0$ olmak üzere, (2.76) süreklilik ifadeleri yazılırsa $A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}$ sabitleri A_i, B_i, C_i sabitleri cinsinden hesaplanır.

Her geçiş noktasında yazacağımız 3*3 'lük $\underline{A}^i$ matrisiyle bir sonraki bölgenin integrasyon sabitlerini bir öncekiler cinsinden yazılır. Daha sonra bu $\underline{A}^i$ matrisleriyle, birinci durumda yapıldığı gibi, son bölgenin sabitleri birinci bölgeninkiler cinsinden ifade edilir. Yine bunlarda 3*3 'lük bir $\underline{B}^i$ matrisiyle birbirine bağlıdır.

Kiriş uç noktasının basınç ve çekme bölgelerinde farklı olmak üzere moment ve kesme değerleri ayrı ayrı sıfıra eşitlenerek, 2*3 'lük bir $\underline{C}$ matrisi oluşturulur. Bu 3*3 'lük $\underline{B}^i$ matrisi ile 2*3 'lük $\underline{C}$ matrisinin çarpımı yine 2*3 'lük bir $\underline{D}$ matrisidir.

Yükün altındaki başlangıç noktasında, (2.80) eşitliği yazılarak, $C_1 = -PP/\theta_1^3$ hesaplanmış olur.

Kirişin zemin yüzeyini kestiği noktaları bulabilmek için her bölgenin elastik eğrisinin çözüm fonksiyonu (2.88) sıfıra eşitlenir.

Buradan geriye dönüşlede kirişin elastik eğrisinin denklemini elde edilmiş olur.

P yükünün yönü yukarı doğru olursa, zemin homogen olmadığı için birinci bölge çekme bölgesi olduğundan

BÖLÜM 3 SONUÇLAR

Bu bölümde, Bölüm 2'deki konu anlatımına paralel olarak, orada hesapla bulunan tablolara ilaveten bilgisayarla hesaplanarak hazırlanmış sayısal tablolar ve şekiller verilmiştir.

Tablo 3.1 Homogen zemine oturan sonsuz kirişte, $P\beta^3/EI=1$ için P yükü altındaki deplasman ve eğrinin zemin yüzeyini kestiği noktaların Γ_1 değerleri.

KİRİŞ	K_2/K_1	Γ	Y_0	Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4
SONSUZ	1	∞	0.125	2.355	5.498	8.639	...

Tablo 3.2 Homogen zemine oturan sonlu kirişte, $P\beta^3/EI=1$ ve farklı Γ değerleri için, P yükü altındaki deplasman Y_0 ve eğrinin zemin yüzeyini kestiği noktalar Γ_1 .

KİRİŞ	K_2/K_1	Γ	Y_0	Γ_1	Γ_2	Γ_3
SONLU	1	1	0.15025	-	-	-
	1	2	0.13775	1.690	-	-
	1	3	0.12650	2.200	-	-
	1	4	0.12514	2.340	-	-
	1	5	0.12503	2.350	4.780	-
	1	6	0.12502	2.364	5.250	-
	1	7	0.12501	2.370	5.450	-
	1	8	0.12500	2.375	5.495	-
	1	9	0.12500	2.380	5.505	8.340
	1	10	0.12500	3.388	5.507	8.610

Tablo 3.3 Homogen olmayan zemine oturan sonlu kirişte, $P\beta^3/EI=1$ ve farklı K_2/K_1 değerleri için P yükü altındaki deplasman Y_0 , eğrinin zemin yüzeyini kestiği noktalar Γ_1 ve uç deplasmanlar Y_{uc}

KİRİŞ	K_2/K_1	Γ	Y_0	Γ_1	Γ_2	Y_{uc}
SONLU	0.01	5	0.13062	1.777	-	-
	0.1	5	0.12625	2.075	-	-
	0.2	5	0.12575	2.154	-	-
	0.4	5	0.12506	2.234	-	-
	0.6	5	0.12519	2.284	4.972	-
	0.8	5	0.12509	2.320	4.849	-
	1.0	5	0.12503	2.350	4.778	-

Tablo 3.4 Homogen olmayan zemine oturan sonlu kirişte $P\beta^3/EI=1$ ve farklı K_2/K_1 değerleri için P yükünün yukarı doğru olması halinde deplasman Y_0 , eğrinin zemin yüzeyini kestiği noktalar Γ_1 ve uç deplasmanlar Y_{uc}

KİRİŞ	K_2/K_1	Γ	Y_0	Γ_1	Γ_2	Y_{uc}
SONLU	0.01	5	1.0903	4.908	-	-
	0.1	5	1.0062	4.350	-	-
	0.2	5	0.9989	3.823	-	-
	0.4	5	0.9985	3.101	-	-
	0.6	5	0.9991	2.740	-	-
	0.8	5	0.9996	2.512	4.8874	-
	1.0	5	1.0002	2.350	4.778	-

Tablo 3.5 Homogen zemine oturan sonsuz kirişte, $P\cos\Omega t\beta^3/(\theta^3 EI)=1$ için $P\cos\Omega t$ yükü altındaki deplasman Y_0 ve eğrinin zemin yüzeyini kestiği noktalar Γ_1 .

KİRİŞ	K_2/K_1		Ω^2/w^2	Γ	Γ_1	Γ_2	Γ_3
SONSUZ	1	$\Omega > w$	1.01	∞	4.96	14.88	24.8
			1.1		2.79	8.37	13.9
			1.5		1.86	5.58	9.3
			2.1		1.53	4.60	7.6
	1	$\Omega < w$	0.01	∞	2.362	5.511	8.66
			0.1		2.419	5.644	8.87
			0.5		2.802	6.538	10.3
			0.9		4.189	9.774	15.4

Tablo 3.6-a Homogen zemine oturan sonlu kirişte, $P\cos\Omega t\beta^3/(\theta^3 EI)=1$ için $P\cos\Omega t$ yükü altında, değişken $\Omega^2 < w^2$ değerlerine bağlı deplasman Y_0 , eğrinin zemin yüzeyini kestiği noktalar Γ_1 ve uç deplasman Y_{uc}

KİRİŞ	Ω^2/w^2	Y_0	Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4
SONLU	0.01	0.12509	2.362	5.512	8.654	14.94
	0.1	0.13528	2.45	5.62	8.88	15.32
$K_2/K_1=1$	0.5	0.21020	2.83	6.53	10.28	17.77
	0.7	0.30837	3.15	7.44	11.69	19.44
$\Gamma=20$	0.8	0.41796	3.52	8.25	12.91	-
	0.9	0.70293	4.04	9.69	15.24	-
$\Omega^2 < w^2$	0.95	1.18240	4.964	9.966	-	-

Tablo 3.6-b Homogen zemine oturan sonlu kirişte, $P \cdot \cos \Omega t \cdot \beta^3 / (\theta^3 \cdot EI) = 1$ için $P \cdot \cos \Omega t$ yükü altında, değişken $\Omega^2 > w^2$ değerlerine bağlı deplasman Y_0 , eğrinin zemin yüzeyini kestiği noktalar Γ_1 ve uç deplasman Y_{uc}

KIRIŞ	Ω^2 / w^2	Y_0	Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4
SONLU	1.001	-1.303	9.71	-	-	-
	1.5	-0.664	5.64	9.33	-	-
$K_2/K_1=1$	2.	-0.618	4.72	7.86	-	-
	3.	0.584	1.18	3.99	6.61	9.22
$\Gamma=10$	4.	-0.573	3.59	5.96	8.36	-
	5.	-1.98	1.22	3.32	5.414	7.78
$\Omega^2 > w^2$						

Tablo 3.7 Homogen olmayan zemine oturan sonlu kirişte $P \cdot \cos \Omega t \cdot \beta^3 / (\theta^3 \cdot EI) = 1$ için $P \cdot \cos \Omega t$ yükü altında, değişken $\Omega^2 / w^2 < K_2/K_1 < 1$ değerlerine bağlı deplasman Y_0 , eğrinin zemin yüzeyini kestiği noktalar Γ_1 ve uç deplasman Y_{uc}

KIRIŞ	Ω^2 / w^2	Y_0	Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4
SONLU	0.01	0.12618	2.275	6.132	9.000	-
	0.1	0.13558	2.316	6.389	9.170	-
$K_2/K_1=.5$	0.2	0.14818	2.363	6.760	9.417	-
	0.4	0.18448	2.431	8.426	-	-
$\Gamma=10$	0.45	0.19754	2.407	9.250	-	-

Tablo 3.8 Homogen olmayan zemine oturan sonlu kirişte $P \cdot \cos \Omega t \cdot \beta^3 / (\theta^3 \cdot EI) = 1$ kabulü edilip, $P \cdot \cos \Omega t$ yükünün aşağıdan yukarı doğru olması halinde, değişken $\Omega^2 / w^2 < K_2/K_1 < 1$ değerlerine bağlı deplasman Y_0 , eğrinin zemin yüzeyini kestiği noktalar Γ_1 ve uç deplasman Y_{uc}

KIRIŞ	Ω^2 / w^2	Y_0	Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4
SONLU	0.01	-0.1257	2.449	5.021	8.250	-
	0.1	-0.1351	2.514	5.110	8.430	-
$K_2/K_1=.5$	0.2	-0.1471	2.598	5.223	8.656	-
	0.4	-0.1830	2.815	5.506	9.143	-
$\Gamma=10$	0.45	-0.1954	2.884	5.585	9.248	-

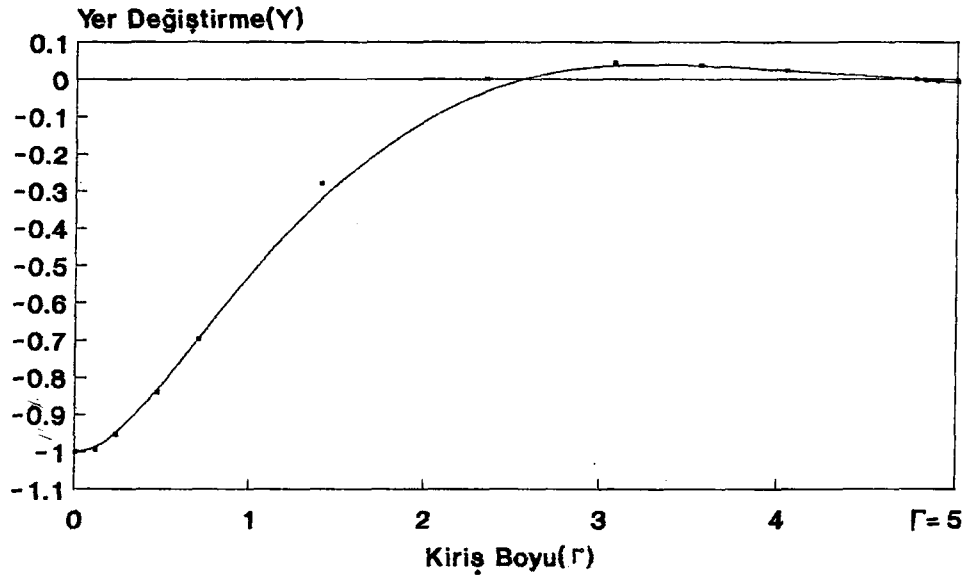
Tablo 3.9 Homogen olmayan zemine oturan sonlu kirişte $P \cdot \cos \Omega t \cdot \beta^3 / (\theta^3 \cdot EI) = 1$ için $P \cdot \cos \Omega t$ yükü altında, değişken $1 > \Omega^2 / w^2 > K_2 / K_1$ değerlerine bağlı deplasman Y_0 , eğrinin zemin yüzeyini kestiği noktalar Γ_1 ve uç deplasman Y_{uc}

KIRIŞ	K_2 / K_1	Y_0	Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4
SONLU	0.835	0.65041	2.746	-	-	-
	0.84	0.64810	2.578	-	-	-
$\Omega^2 / w^2 = .95$	0.85	0.63910	2.346	-	-	-
	0.92	0.64531	3.280	-	-	-
$\Gamma=4$						

Tablo 3.10 Homogen olmayan zemine oturan sonlu kirişte $P \cdot \cos \Omega t \cdot \beta^3 / (\theta^3 \cdot EI) = 1$ için $P \cdot \cos \Omega t$ yükü altında, değişken $1 < \Omega^2 / w^2$ değerlerine bağlı deplasman Y_0 , eğrinin zemin yüzeyini kestiği noktalar Γ_1 ve uç deplasman Y_{uc}

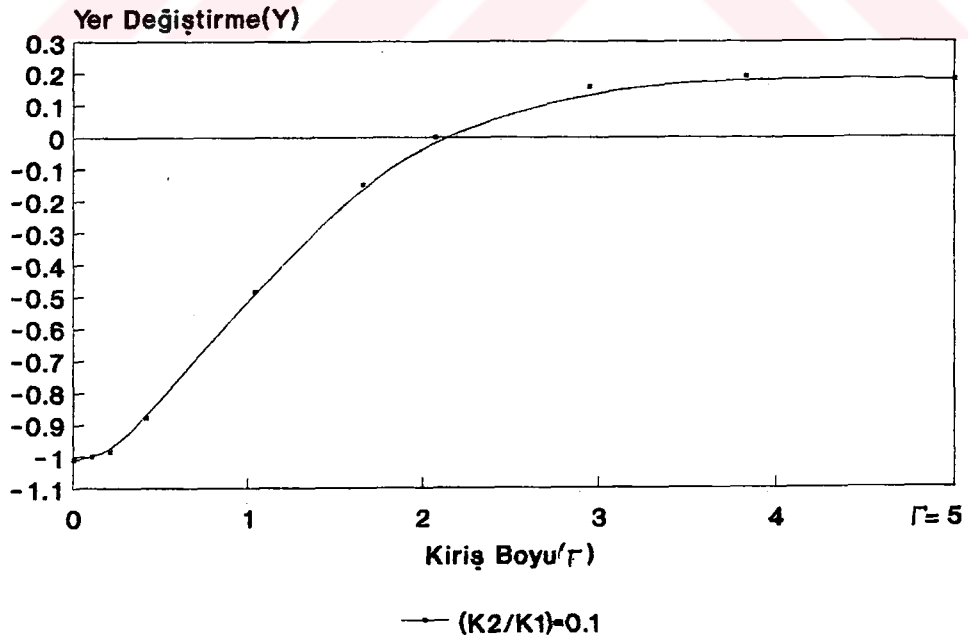
KIRIŞ SONLU	Ω^2 / w^2	K_2 / K_1	Y_0	Γ_1	Γ_2	Γ_3
$\Gamma=10$	1.001	1.00	-1.3030	9.710	-	-
	1.01	0.50	0.15233	2.314	5.194	-
	2.00	0.99	-0.3030	2.981	5.980	-
	2.00	1.00	-0.618	4.720	7.860	-

Netice itibariyle homogen zemin üzerine oturan kirişe yükün aşağıdan yukarı doğru yüklenmesi halinde Y_1 deplasmanlarının işaret değiştirmesi dışında herhangi bir değişiklik olmaz.



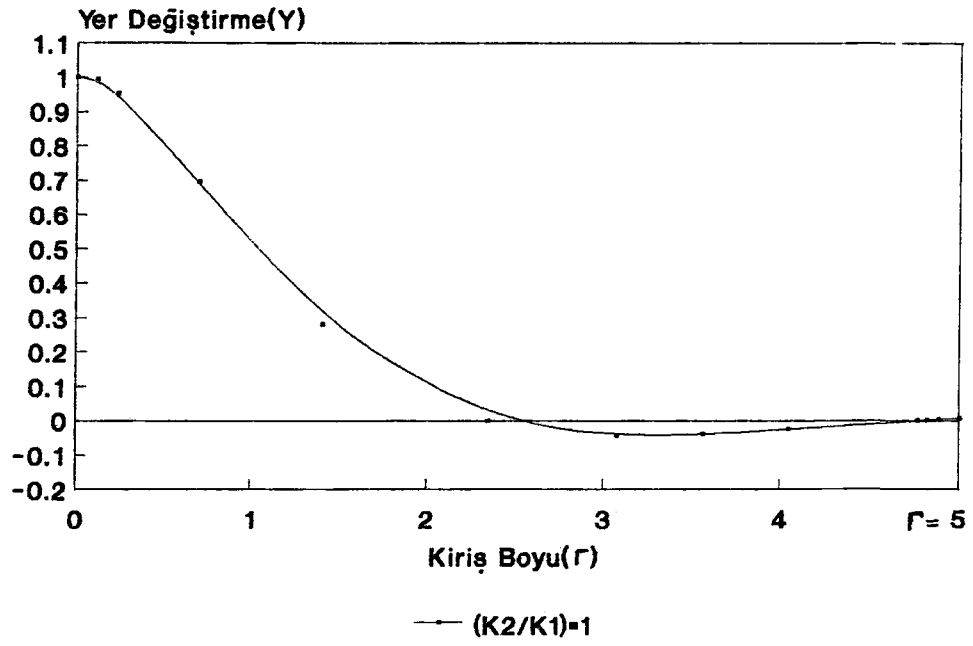
Şekil 3.1

Homojen olmayan zemin üzerine oturan
statik tekil yükle yüklü sonlu kiriş

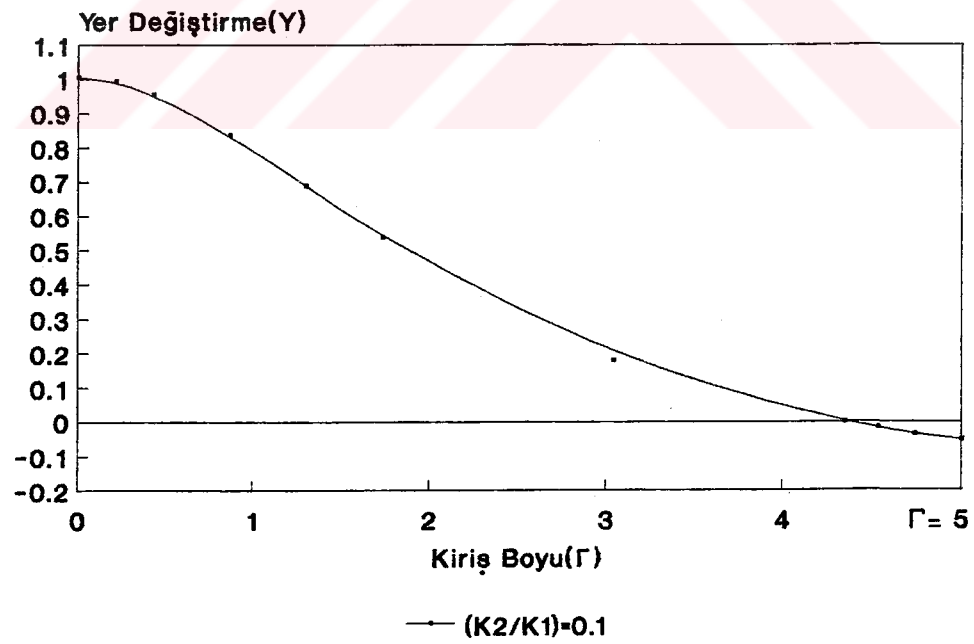


Şekil 3.2

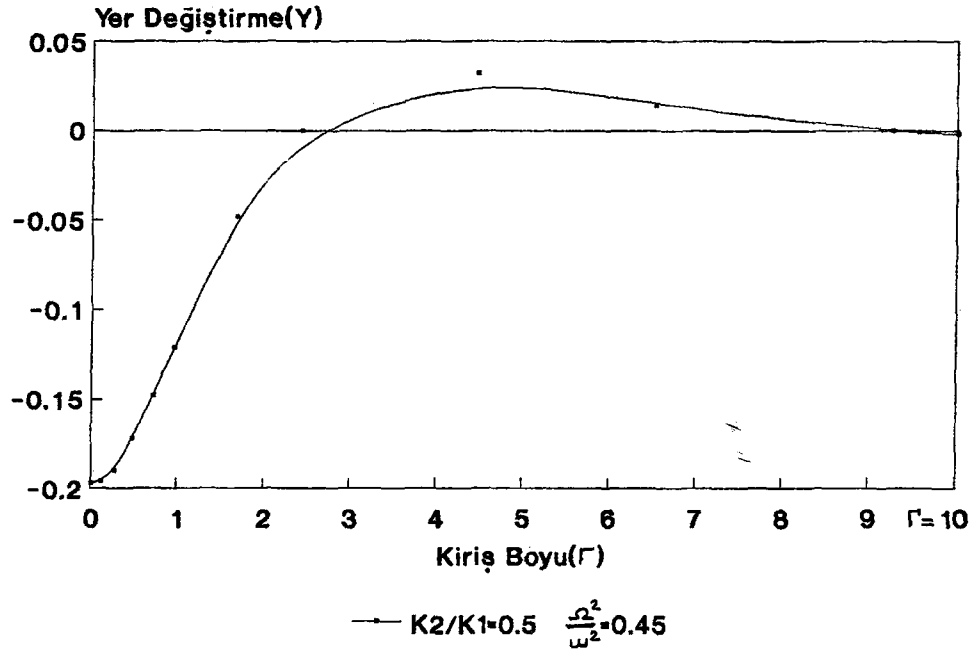
Homojen olmayan zemin üzerine oturan
statik tekil yükle yüklü sonlu kiriş



Şekil 3.3 Homojen olmayan zemin üzerine oturan alttan st.tek. yükle yüklü sonlu kiriş

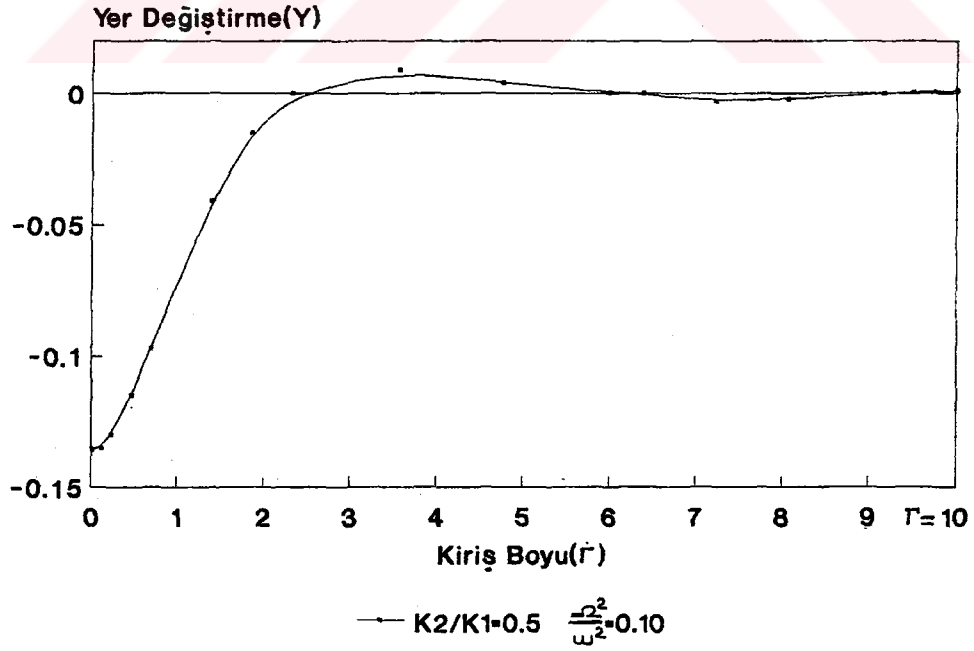


Şekil 3.4 Homojen olmayan zemin üzerine oturan alttan st. tek. yükle yüklü sonlu kiriş



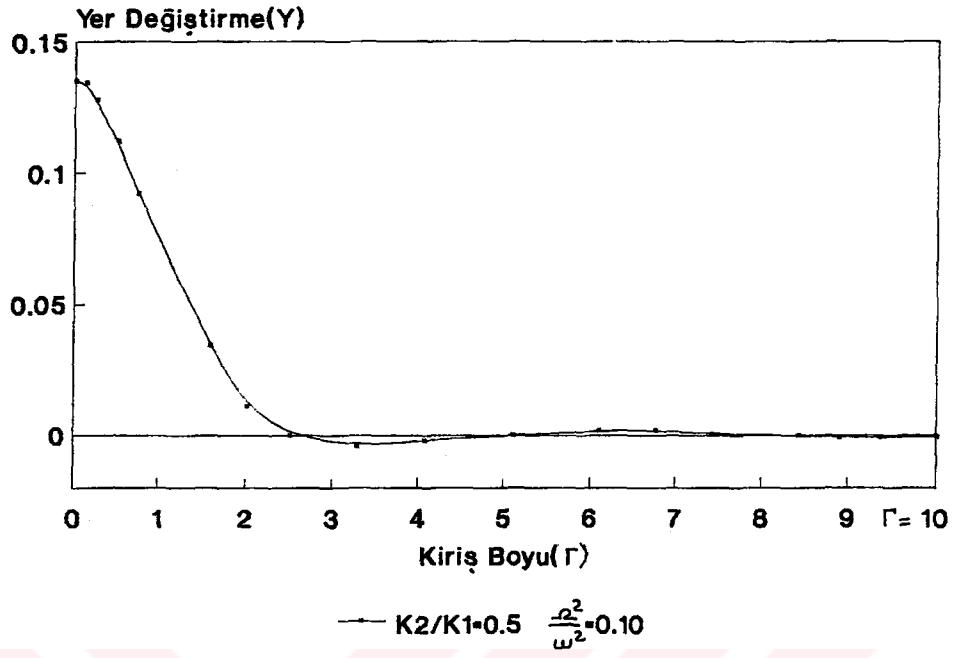
Şekil 3.5

Homojen olmayan zemin üzerine oturan
dinamik tekil yükle yüklü sonlu kiriş



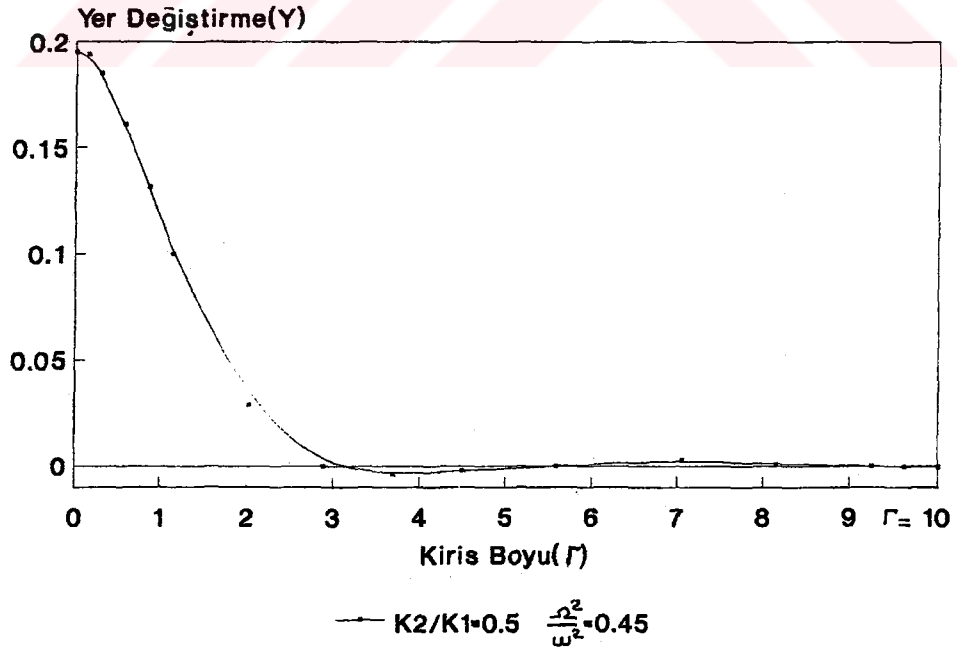
Şekil 3.6

Homojen olmayan zemin üzerine oturan
dinamik tekil yükle yüklü sonlu kiriş



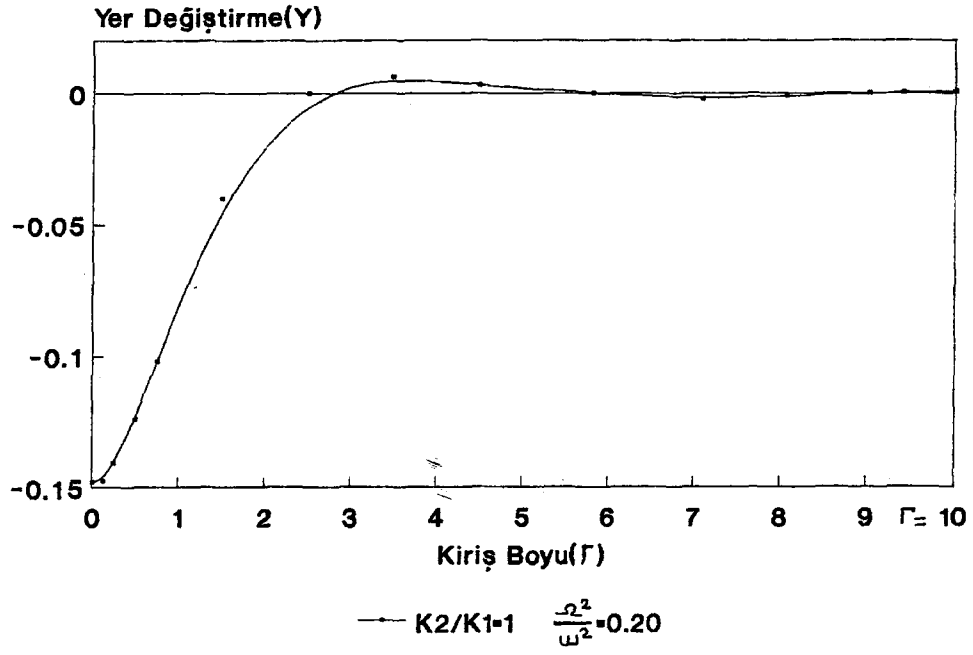
Şekil 3.7

Homojen olmayan zemin üzerine oturan
alttan din.tek.yük. yüklü sonlu kiriş

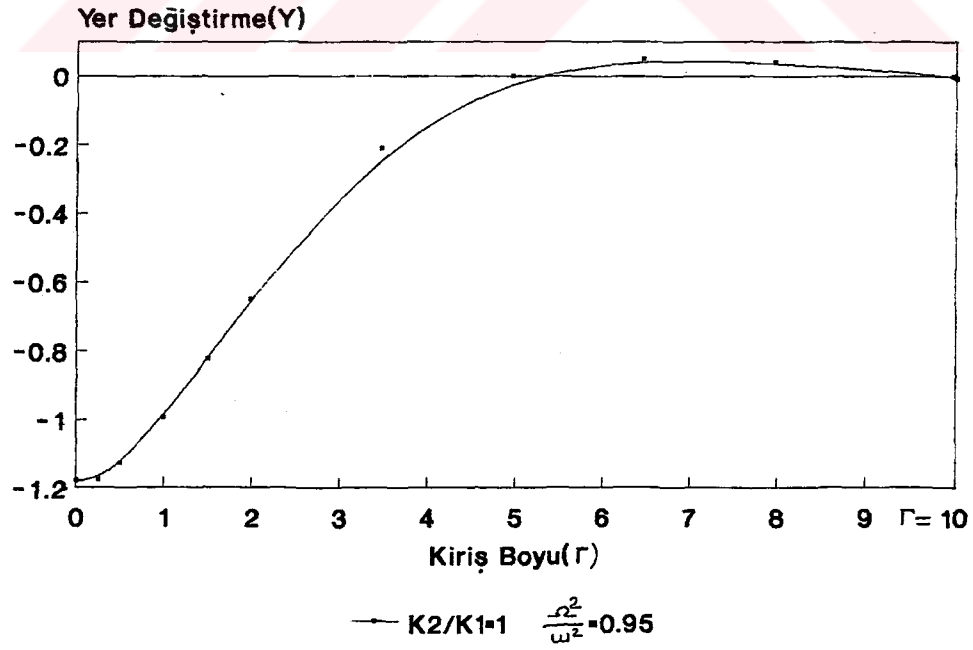


Şekil 3.8

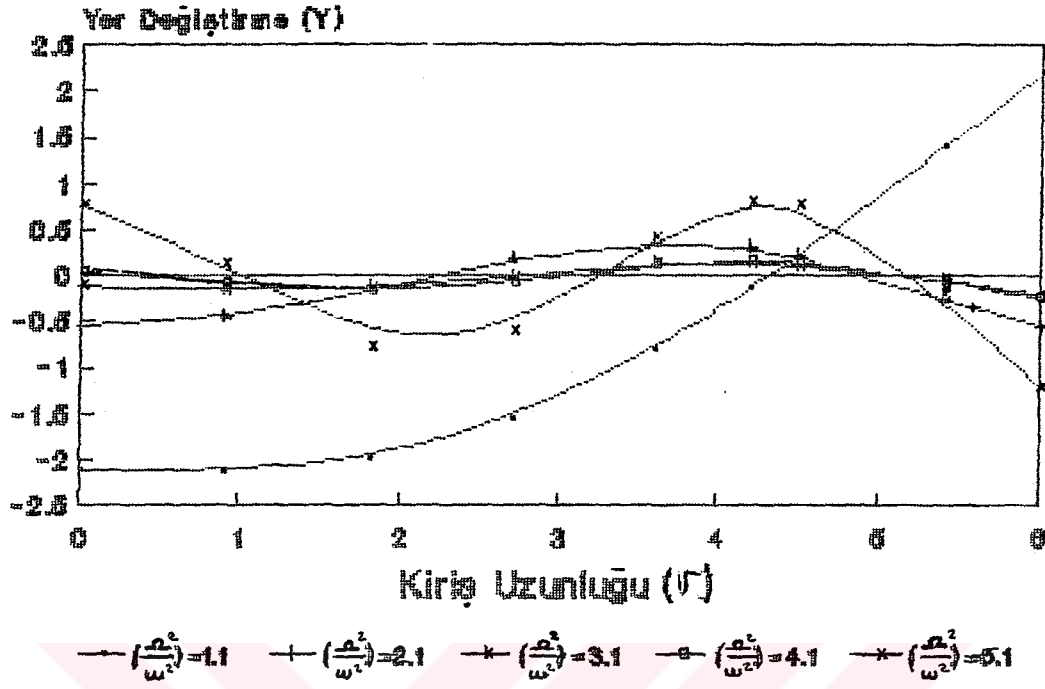
Homojen olmayan zemin üzerine oturan
alttan din.tek.yük. yüklü sonlu kiriş



Şekil 3.9 Homojen olmayan zemin üzerine oturan
düşey din.tek.yük. yüklü sonlu kiriş



Şekil 3.10 Homojen olmayan zemin üzerine oturan
düşey din.tek.yük. yüklü sonlu kiriş



Sekil 3.1 Homojen olmayan zemin üzerine oturan
altıgen statik tekil yükle yüklü kiriş

K A Y N A K L A R

- [1] WINKLER, Die Lehre von der Elastizitat und Festigkeit, Prag, (1867).
- [2] KESKİNEL, F., Elastik Zemin Oturan Sonlu Kiriş Te-sir Çizgileri ve Sürekli Temellerin Çözümü-ne Uygulanması. İstanbul.(1970).
- [3] ZIMMERMANN, K., Die Berechnung der Söldruck-vertelung unter Grundungskörpern. Der Bauingenieur, (1942).
- [4] HAYASHI, K., Theorie des Tragers auf elastischer Unterlage, J. Springer, Berlin. (1921).
- [5] KÖSEOGU, S., Yüzeysel Temeller. İstanbul, (1986).
- [6] KESKİNEL, F., Elastik Zemin Oturan iki İstikamet-te Müttemadi Sistemlerin Etüdü, İ.T.Ü. Mimarlık Fakültesi, İstanbul, (1961).
- [7] GRASSHOFF, H., Einflusslinien für Flachengrundungen ,Berlin, München, Dusseldorf, (1978).
- [8] GRASSHOFF, H., Influence of Flexural Rigidity on Superstruture on the Distribution of Contact Press and Bending Moments of an Elastic Combined Footing. Proc.4.Intern. Conf. of Soil Mech. and Eng. Foundation. London, (1957).
- [9] DURELLI, A.J., PARKS, V.J., MOK, C.K.C., Photoelas-tic Beams on Elastic Foundations. J.Struc. Div. Proc. ASCE, August, (1969).
- [10] MUNTHER, J.H., Photoelastic Study of Beams on Elas-tic Foundation, Discussion. ASCE. April. (1970).
- [11] MALTER, H., Numerical Solutions for Beams on Elas-tic Foundations, Trans. ASCE, Vol.125, 757-791. (1960).

- [12] BAKIOĞLU. M., ÖZKAN. T., Sonlu Kalınlıkta Zemin Üzerine Oturan Yüzeysel Temellerin Hesabı Hakkında Bir Yöntem. Tübitak VII. Bil. Kon., (1980).
- [13] DODGE. A., Influence Functions for Beams on Elastic Foundations, J. Struc. Div. Proc. ASCE, August, (1964).
- [14] DONALT, D., ELY. F.J., SERGEV. S., BARBERITO. B., Influence Functions For Beams on elastic Foundation, Diss. ASCE, April, (1965).
- [15] IYENGAR, S.R., ANANTHARAMU, S., Influence Lines For Beams on Elastic Foundations, J. Struc. Div. Proc. ASCE, June (1960).
- [16] RAO, N.S.V.K., DAS, Y.C., ANANDOKRISHAN. M., Variational Approach to Beams on Elastic Foundations, J. Struc. Div. Proc. ASCE, April, (1971).
- [17] MIRANDA, C.K., NAIR, K., Finite Beams on Elastic Foundation, App. Div. Proc. ASCE, April, (1966),
- [18] LIN, L. and ADAMS, G.G., Beam on Tensionless Elastic Foundation, Journal of Engineering Mechanics, Vol.113, No.4, April, 1987, Pg. 542-553.
- [19] WEISTMAN, Y., On Foundations That React in Compression only, Journal of Applied Mechanics, Dec. 1970. Pg. 1019-1030.
- [20] TING, B. Y., M. ASCE and MOCKRY, E. F. A. M. ASCE, Beam on Elastic Foundation Finite Element, J. Appl. Mech., Vol. 109, No.6, Dec. 1983. Pg. 1390-1402.
- [21] CELEP, Z., MALAIKA, A. and ABU-HUSSEIN. M., Forced Vibrations Of A Beam On A Tensionless Foundation, J. of Sound and Vibration, 1988, 128(2), Pg 235-246.

- [22] ELMAS. M., Elastik Zemin Oturan Sonlu Kirişlerin Deneysel İncelenmesi, İ.T.Ü. Fen Bil.Enst., Doktora Tezi, İstanbul, (1988).
- [23] KERR, A. D., Elastic and Viscoelastic Foundation Models, J. Appl. Mech., 31,491-498, (1964).
- [24] KERR, A. D., Improved Stress Analysis for Cross Tie Tracks, J. Eng. Mech. Div., August, (1979).
- [25] HARR, M. E., DAVIDSON, J. L., HO, D. M., POMPO, L. E., RAMA, S. V., ROSNER, J. C., Euler Beams on a two Parameter Foundation Model. J. Appl. Mech. Soil Mech. and Foundations Div., ASCE, July, (1969).
- [26] TSAI, N. C., WESTMANN, R. A., Beam on Tensionless Foundation, J. Appl. Mech. Eng. Div., ASCE, Oct. (1967).
- [27] CHENG, A. P., FURR, H. L., Beams of Discrete, Nonlinear Elastic Supports, J. Struct. Div., ASCE, November, (1969).
- [28] JOHNSON, W. H., KOUSKOULAS, V., Beams on Bilinear Foundation, J. of Appl. Mech., Transactions of the ASME, March, (1973).
- [29] COOKE, R. D., ZHAOHUA, F., Beam Elements on two Parameter Elastic Foundations, J. of Eng. Mech., December, (1983).
- [30] SHIRIMA, L. M. and GIGER, M. W., M. ASCE, Timoshenko Beam Element Resting on Two Parameter Elastic Foundation, J. of Eng. Mech., Vol 118, No.2, Feb. 1992, Pg.280-295.
- [31] NOGAMI, T. and O'NEILL, M. W., M. ASCE, Beam on Generalized Two-Parameter Foundation, J. of Eng. Mech., Vol. 111, No.5, May. 1985, Pg. 664-679.
- [32] SEVERN, R. T., The Solution of Foundation Mat. Problems by Finite Elements Methods, Struc. Eng., London, June, (1966).

- [33] ÖZGEN. K.. Elastik Zemin Oturan Betonarme Kirişlerin Limit Analizi. Doga Bilim Dergisi. Müh./Çevre. Cilt 6, 13-19. (1982).
- [34] ENGİN. H., Elasto-Plastik Zemin Oturan Kiriş ve Plaklar. İ.T.U. İnş. Fak.. İnşaat Mühendisliğinde Bilgisayar Kullanımı, III. Sempozyum. İstanbul. Syf. 262-273. 15-18 Haziran (1992).

Ö Z G E Ç M İ Ş

Orhan DOĞAN. 1967'de Kayseri'nin Develi ilçesine bağlı Eşelik Köyü'nde doğdu. İlk öğrenimini Eşelik ilkokulu'nda 1979'da tamamladı. Orta öğrenimini Bakırdağı Ortaokulu'nda 1982'de, liseyi Develi Merkez Lisesi'nde 1985'de tamamladı.

1985 'te İTÜ Sakarya Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nü kazandı, 1989'da mezun oldu. Aynı yıl İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Mekanik Programında yüksek lisansa başladı. Bir yıl ingilizce hazırlık öğrenimi gördü. 1990'da İTÜ Sakarkarya Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü Mekanik Anabilim Dalı'nda araştırma görevliliğine başladı. Halen bu görevini sürdürmektedir.