

ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tez çalışmasında, çekme gerilmesi aktarmayan Pasternak zeminine oturan bir sonlu kirişin asimetric olarak uygulanan harmonik tekil kuvvet etkisi altındaki davranışı incelenenek kirişin zeminden ayrıldığı noktalar (temas boyu) ve bu noktaların çeşitli parametrelere göre değişimi araştırılmıştır.

Bu tezin hazırlanması sırasında sağladığı katkılardan dolayı sayın hocam Doç. Dr. İrfan COŞKUN'a ve bana maddi, manevi her türlü desteği veren aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Temmuz, 2007

Tuygur Can SEÇKİN

ÖZET

Bu çalışmada, yalnız basınca çalışan elastik zemine oturan sonlu bir kirişin, simetrik olmayan tekil yükleme altındaki davranışı incelenmiştir. Yönetici diferansiyel denklemlerin elde edilmesinde, Bernoulli- Euler hipotezinin geçerli olduğu ve kirişin zemine tam batmadığı kabul edilmiştir. Asimetrik yükleme durumu göz önünde tutularak, diferansiyel denklemler temas ve ayrılma bölgeleri için ayrı ayrı elde edilmiştir. Simetrik ve asimetrik yükleme durumları için ayrılma noktaları (temas boyu) ve bu noktaların çeşitli parametrelere göre değişimi, şekiller yardımıyla incelenmiştir.

Birinci bölümde, çeşitli zemin modelleri ve konu ile ilgili çalışmalar verilmiştir. İkinci bölümde, temas ve ayrılma bölgeleri için yönetici denklemler elde edilmiş ve probleme ait sınır koşulları verilmiştir. Üçüncü bölümde, frekans parametresinin çeşitli değerleri için diferansiyel denklemlerin çözümleri verilmiştir. Dördüncü bölümde, temas boyunun çeşitli parametrelere göre değişimi grafiklerle incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Elastik zemin, asimetrik yükleme, harmonik titreşim, sonlu kiriş

ABSTRACT

In this study, the response of a finite beam resting on a tensionless Pasternak foundation, subjected to an asymmetric vertical load is investigated. In obtaining the governing differential equations, it is assumed that the Bernoulli-Euler hypothesis is valid and that the beam is partially in contact with the foundation. By considering the asymmetric loading case, differential equations are obtained for both the contact and noncontact regions. The coordinates of the lift-off points (contact length) and the variation of them with respect to some parameters, for symmetric and asymmetric loading cases are studied with the aid of graphics.

In the first chapter, various kinds of foundation models and the studies dealing with the subject are given. In the second chapter, the differential equations for the contact and noncontact regions are obtained, and the boundary conditions of the problem is given. In the third chapter, the solution of the differential equations which depends on the various values of the frequency parameter is given. In the fourth chapter, the variation of the contact length with respect to some parameters are studied with the aid of graphics.

Keywords: Elastic foundation, assymmetric load, harmonic vibration, finite beam

1. GİRİŞ

Elastik zemine oturan kirişlerle ilgili çalışmalar uygulama alanının (yapı temelleri, demiryolu hatları, yol kaplamaları, geoteknik uygulamaları vb.) genişliği nedeni ile oldukça fazladır. Bu tür problemlerin çözümü için kirişin mekanik davranışı yanında zeminin mekanik davranışının ve kirişle zemin arasındaki etkileşimin de bilinmesi gerekmektedir. Kiriş problemlerinin analizinde çoğunlukla Bernoulli-Euler teorisi gözönüne alınmaktadır. Bilindiği gibi bu teoride kayma deformasyonlarının etkisi ihmal edilmektedir. Kirişte kayma etkisinin önemli olduğu durumlarda ise bu etkiyi dikkate alan Timoshenko kiriş modeli kullanılmaktadır.

Kiriş-zemin etkileşim problemlerinin çoğunda, matematiksel basitlik nedeniyle, elastik zemin Winkler zemini olarak modellenmektedir. Bu modelde zemin birbirinden bağımsız sonsuz sayıda yaydan oluşan bir ortam olarak alınmakta, diğer bir deyişle ortam süreksiz olarak kabul edilmektedir. Yaylar arasındaki etkileşimin dikkate alınmadığı bu model, bazı durumlarda gerçekçi olmamaktadır. Bu nedenle yaylar arasındaki etkileşimi de dikkate alan çeşitli iki parametrelili zemin modelleri geliştirilmiştir. Bu modeller, Pasternak, Filonenko-Borodich, Hetényi, Vlasov zemin modelleri olarak bilinmektedir. Matematiksel olarak bu modeller eşdeğer olup, fark yalnızca ikinci parametrenin tanımındadır.

1.1. Elastik Zemin Modelleri

1.1.1. Winkler Zemin Modeli

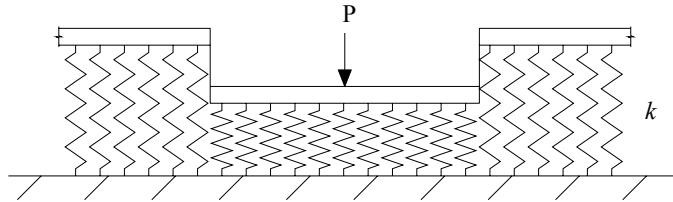
Winkler zemin modelinde zemin birbirinden bağımsız, sonsuz sayıda tekil elastik yaydan oluşan bir ortam olarak alınmaktadır.

Bu modele göre, kirişin herhangi bir noktasındaki zemin tepkisi, o noktadaki çökme ile doğru orantılıdır. Diğer bir deyişle, zemin lineer-elastik bir davranış göstermektedir. Buradaki orantı katsayısı zemin modülü olarak adlandırılmaktadır. $q(x)$ herhangi bir noktadaki basıncı göstermek üzere, basınç-çökme ilişkisi;

$$q(x) = kw(x) \quad (1.1)$$

olarak alınmaktadır. Burada $w(x)$ kiriş çökmesini, k yatak katsayısını (Winkler zemin modülü) göstermektedir.

Buna göre zemine etkiyen kuvvet, sadece etkidiği noktada şekil değiştirme yapmakta, diğer bir deyişle bir yayın sıkışması diğer yayları etkilememektedir. Bu kabul ile de ortam süreksiz bir ortam olarak kabul edilmektedir.



Şekil 1.1. Winkler Zemin Modeli

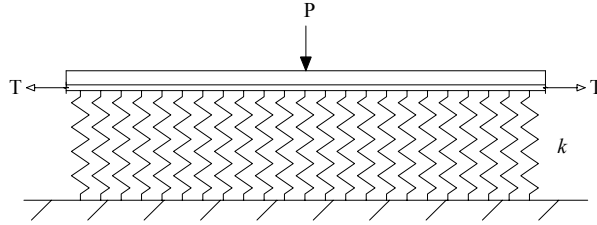
1.1.2. Filonenko – Borodich Zemin Modeli

Bu modelde, Winkler zemin modelini temsil eden yayların uçlarından sabit T çekme kuvvetine maruz elastik bir membrana tutturulduğu kabul edilmektedir. Böylece, yaylar arasındaki etkileşim T çekme kuvvetinin büyüklüğü ile dikkate alınmaktadır.

Model matematik olarak;

$$p(x) = kw(x) - T \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (1.2)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada $p(x)$ zemin tepkilerini, $w(x)$ kiriş çökmesi, k zemin modülü, T membrandaki çekme kuvvetini ifade etmektedir.



Şekil 1.2. Filonenko – Borodich Zemin Modeli

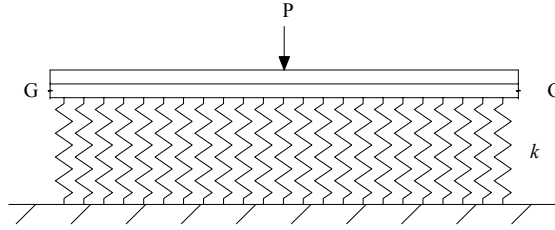
1.1.3. Pasternak Zemin Modeli

Bu modelde, Winkler zeminini temsil eden yayların uçlarından yalnız kayma deformasyonlarına karşı koyabilen bir tabakaya tutturulduğu kabul edilmektedir. Bu tabaka yardımı ile yaylar arasındaki kayma etkileşimi dikkate alınmaktadır.

Model matematik olarak;

$$p(x) = kw(x) - G \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (1.3)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada G kayma tabakasının parametresini (kayma tabakasının kayma modülü) göstermektedir.



Şekil 1.3. Pasternak Zemin Modeli

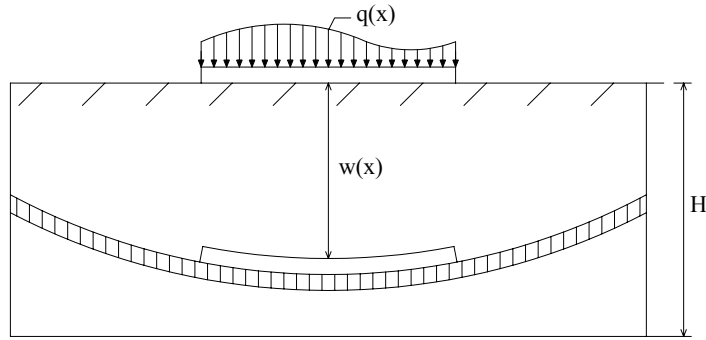
1.1.4. Vlasov Zemin Modeli

Vlasov zemin modelinde zemin yarı sonsuz elastik bir ortam olarak kabul edilmektedir.

Model matematik olarak;

$$p(x) = kw(x) - 2t \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (1.4)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada k Winkler zemin modülü , $2t$ ise Winkler modelinde ihmal edilen yaylar arasındaki kayma etkisini temsil eden zemin parametresini göstermektedir. Diğer bir ifadeyle $2t$ sıfıra eşit alındığında, Winkler modeline ait denklem elde edilmektedir. Bu yaklaşımın avantajı, zemin modülü k ile yaylar arası etkileşimi temsil eden $2t$ 'nin zemin ve kirişin geometrisi ve malzeme özelliklerine bağlı olarak hesaplanmasıdır.



Şekil 1.4. Vlasov Zemin Modeli

Yapı-zemin etkileşim problemlerinde ilave olarak geliştirilmiş zemin modeli, Hetenyi ve Reissner zemin modelleri de kullanılmaktadır.

1.2. Konu ile ilgili çalışmalar

Elastik zemine oturan kiriş problemlerinde genellikle, zeminin iki yönlü olarak çekme ve basınç gerilmelerini aktardığı kabul edilmektedir. Bu konuda literatürde çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Bu alandaki iki temel çalışma Hetényi , Vlasov ve Leontev tarafından verilmiştir. Uygulamada bu tür bir davranış, kirişle zemin arasında yapışma söz konusu olmadıkça , fiziksel olarak gerçekçi olmamaktadır. Daha gerçekçi bir yaklaşım olarak zeminin yalnız basınç gerilmesi aktardığı kabul edilmektedir. Bu durumda ise problem, sınır koşulları bakımından lineer olmakla beraber, ayrılma noktasının koordinatları başlangıçta bilinmediğinden, lineer olmayan bir karakter göstermektedir. Genellikle, elde edilen lineer olmayan bir denklem veya denklem takımının kökleri hesaplanarak kirişin zeminden ayrıldığı noktalar (temas boyu) bulunmaktadır. Her adımda bu denklem/denklem takımının kök hesabı gerektiği için bu tür problemlerin çözümü ayrı bir zorluk göstermektedir.

Çekme almayan elastik zemine oturan kirişlerin statik/dinamik yük etkisi altındaki davranışı Tsai ve Westman , Weistman, Choros ve Adams, Lin ve Adams tarafından incelenmiştir. Bu çalışmalarda, sonsuz kiriş kabulü nedeniyle, sistem simetrik olmakta ve uygulanan tekil yük de doğal olarak kiriş ortasında etkimektedir.

Çekme almayan zemine oturan zonlu kirişlerle ilgili çalışmalar da literatürde bulunmaktadır. Celep ve diğerleri, simetrik olmayan yükleme durumları için Winkler zeminine oturan sonlu bir kirişin dinamik davranışını incelemişlerdir. İki parametrelili zemin modeli dikkate alınarak, tekil kuvvet etkisi altındaki sonlu bir kirişin statik davranışı Kerr ve Coffin, tarafından incelenmiştir. Bu çalışmada iki parametrelili zemin modeli olarak Pasternak zemin modeli alınmıştır.

Çekme almayan nonlinear Winkler zeminine oturan sonlu bir kirişin dinamik davranışı Coşkun ve Engin tarafından, çekme almayan Pasternak zemine oturan kirişin simetrik yükleme altındaki dinamik davranışı ise Coşkun tarafından incelenmiştir. Simetrik ve simetrik olmayan yükleme maruz sonlu bir kirişin statik davranışı Zhang ve Murphy tarafından incelenmiştir.

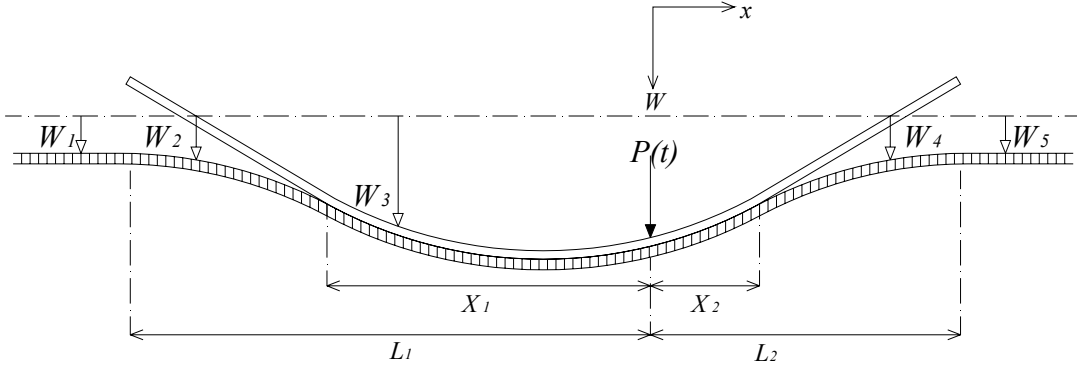
Klasik Winkler zeminine oturan kirişlerin dinamik davranışı ve stabilitesi literatürde geniş olarak incelenmiştir. Buna karşın, iki parametrelili zemine oturan kirişlerle ilgili çalışmalar biraz daha kısıtlıdır. Bunun nedeni ise bu modellerin daha karmaşık yapıda olması ve zemin parametrelerinin tahminindeki güçlülüdür. Bu konudaki tipik çalışmalara örnek

olarak Valsangkar ve Pradhanang, Rosa ve Maurizi, Horibe ve Asano, Chen ve diğeri, Morfidis ve Avramidis'in çalışmaları verilebilir.

Bu çalışmada, çekme gerilmesi aktarmayan Pasternak zeminine oturan sonlu bir kirişin tekil yük etkisi altındaki davranışı incelenmiştir. Kirişin sonlu olması nedeniyle yük, simetrik olmanın yanı sıra asimetrik olarak da uygulanabilmektedir. Yükleme simetrik olması halinde sistemin yarısı için formülasyon yapılmakta ve dolayısıyla bilinmeyen sayısı önemli bir oranda azaltılmaktadır (Kerr ve Coffin). Bu çalışmada ise, simetrik olmayan yükleme durumu için problem incelenmiştir. Kirişin sonlu olması nedeniyle, simetrik durum için geçerli olan bazı sınır koşulları, asimetrik yükleme durumunda geçerli olmamaktadır. Ayrıca, problemdeki bilinmeyenlerin sayısı da simetrik duruma göre daha fazla olmaktadır. Problemin formülasyonu asimetrik durum için yapılmakla beraber, sonuçlar simetrik hali de kapsayacak şekilde grafikler yardımıyla verilmiştir.

2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU

2.1. Sistem ve denge denklemleri



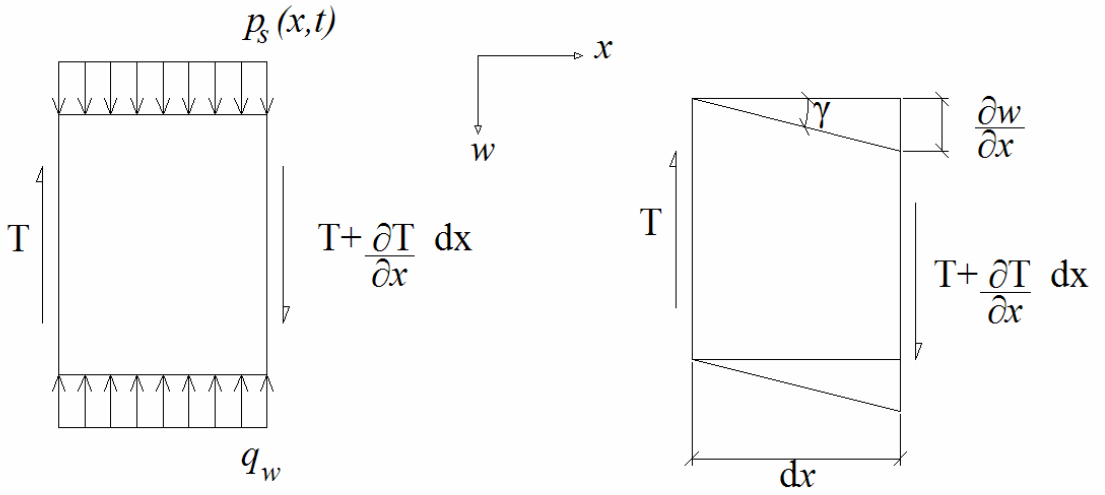
Şekil 2.1. Üzerine tekil yük uygulanmış L boyundaki kiriş

Şekil 2.1.'de yalnız basınç gerilmesi aktaran, iki parametrelili bir Pasternak zeminine oturan, $P(t)$ tekil kuvveti ile yüklü, $L=L_1+L_2$ boyunda, EJ rijitliğine sahip bir Bernoulli-Euler kirişi görülmektedir. Zeminin çekme almaması nedeniyle kiriş zeminden ayrılmakta ve herhangi bir t anında kiriş elastik eğrisi ve zemin yüzeyi şekildeki gibi olmaktadır. L_1 mesafesi kirişin sol ucundan tekil $P(t)$ yüküne olan mesafeyi, L_2 mesafesi kirişin sağ ucundan tekil $P(t)$ yüküne olan mesafeyi, X_1 kirişin $P(t)$ tekil yükünün solunda kalan kiriş-zemin temas bölgesini, X_2 kirişin $P(t)$ tekil yükünün sağında kalan kiriş-zemin temas bölgesini göstermektedir. Bu durumda toplam temas boyu X_1+X_2 olmaktadır.

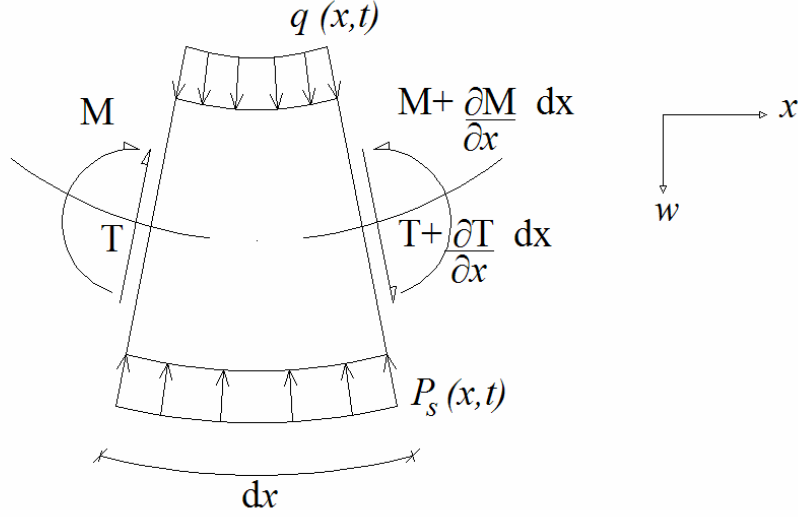
Zeminin çekme almaması nedeniyle kiriş zeminden ayrılmakta ve kiriş elastik eğrisi ve zemin tabakasının yüzeyine göre yer değiştirmeler için beş farklı bölge ortaya çıkmaktadır.

- a) Ayrılma bölgesi – Zemin yüzeyi için : $W(x)=W_1(x), \quad -\infty < x < -X_1$
- b) Ayrılma bölgesi – Kiriş için : $W(x)=W_2(x), \quad -L_1 < x < -X_1$
- c) Temas bölgesi – Ortak hareket için: $W(x)=W_3(x), \quad -X_1 < x < X_2$
- d) Ayrılma bölgesi – Kiriş için : $W(x)=W_4(x), \quad X_2 < x < -L_2$
- e) Ayrılma bölgesi – Zemin yüzeyi için : $W(x)=W_5(x), \quad X_2 < x < \infty$

Bu bölgeler için hareket denklemini elde etmek amacıyla önce kirişle kayma tabakası arasındaki basınç elde edilecektir. Bunun için Şekil 2.2.(a) ve Şekil 2.2.(b)'de verilen kayma tabakası elemanını gözönüne alalım.



Şekil 2.2.(a) Dış yükler , b) Deformasyon



(c) Kiriş diferansiyel elemanı

Burada T kesme kuvvetini, q_w yay tepki kuvvetini, P_s ortak basıncı ve γ kayma açısını göstermektedir. Şekil 2.2.(b) den kayma açısının $\gamma_{xy} = \frac{dW}{dx}$ olduğu görülmektedir.

Hooke Yasası'ndan yararlanılarak birim kalınlıktaki tabakada kesme kuvveti

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = G \frac{\partial W}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$T = \int_0^1 G \frac{\partial w}{\partial x} dy = G \frac{\partial W}{\partial x} \quad (2.2)$$

$$T = G \frac{\partial W}{\partial x} \quad (2.3)$$

olarak bulunur.

P_s ortak basıncını hesaplamak için Şekil 2.2.a'daki diferansiyel eleman üzerinde düşey denge yazılırsa,

$$(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx) - T + P_s(x, t) dx - q_w(x, t) dx = \rho_z A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

$$P_s(x, t) = -\frac{\partial T}{\partial x} + q_w + \rho_z A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (2.5)$$

olarak elde edilir. Burada ρ_z , zemin tabakasına ait birim hacmin kütlesini göstermektedir. Winkler zemin tepkisi, birim boy kütlesi ($m_z = \rho_z A$) ve (2.3) eşitliği göz önünde tutularak, P_s ortak basıncı aşağıdaki gibi bulunur.

$$P_s(x, t) = k_w(x, t) - G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m_z \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

Şekil 2.2.(c)'deki kiriş diferansiyel elemanı üzerinde düşey denge denklemi yazılırsa,

$$(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx) - T + q(x, t) dx - P_s(x, t) dx + P(t) \delta(x) = \rho_k A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} dx \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} dx + q(x, t) - P_s(x, t) + P(t) \delta(x) = \rho_k A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

denklemleri bulunur. Kesme kuvveti ile eğilme momenti ve eğrilik arasında aşağıdaki bağıntılar bulunmaktadır.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \frac{dM}{dx} = T \quad (2.9)$$

(2.9)'dan gerekli türevler yapıp, (2.8)'de yerine yazılır ve $q(x,t)=0$ olduğu gözönünde tutulursa,

$$-EJ \frac{\partial^4 M}{\partial x^4} + q - P_s + P(t)\delta(x) = m_k \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (2.10)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerde P_s için (2.6) eşitliği yerine yazılırsa kiriş için hareket denklemleri,

$$EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + k_w - G \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -(m_z + m_k) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + P(t)\delta(x) \quad (2.11)$$

olarak elde edilir. Yukarıda tanımlanan beş bölge için hareket denklemleri aşağıdaki gibi olmaktadır.

a) 1. Bölge: Bu bölgede dış yük ve kiriş olmadığından hareket denklemleri, (2.11) bağıntısından aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$G \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} - k W_1 = m_z \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} , \quad -\infty < x < -X_I \quad (2.12)$$

b) 2. Bölge: Bu bölgede dış yük ve zemin etkisi olmadığından (2.11) bağıntısında bu etkiler sıfır alınarak hareket denklemleri,

$$EJ \frac{\partial^4 W_2}{\partial x^4} = -m_k \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} , \quad -L_I < x < -X_I \quad (2.13)$$

c) 3. Bölge: $P(t)$ dinamik yükünün $P(t) = P_0 \cos \Omega t$ olarak alınması ile, bu bölgede hareket denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$EJ \frac{\partial^4 W_3}{\partial x^4} - G \frac{\partial^2 W_3}{\partial x^2} + kW_3 = -(m_k + m_z) \frac{\partial^2 W_3}{\partial t^2} + P_0 \delta(x) \cos \Omega t, \quad -X_1 < x < X_2 \quad (2.14)$$

d) 4. Bölge: Bu bölgede hareket denklemi 2. bölgedeki gibidir.

$$EJ \frac{\partial^4 W_4}{\partial x^4} = -m_k \frac{\partial^2 W_4}{\partial t^2}, \quad X_2 < x < -L_2 \quad (2.15)$$

e) 5. Bölge: Bu bölgede hareket denklemi 1. bölgedeki gibidir.

$$G \frac{\partial^2 W_5}{\partial x^2} - kW_5 = m_z \frac{\partial^2 W_5}{\partial t^2}, \quad X_2 < x < \infty \quad (2.16)$$

Zorlama harmonik olduğuna göre, kiriş ve zeminin davranışı da harmonik olacaktır. Buna göre,

$$W_i(x, t) = W_i(x) \cos \Omega t, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (2.17)$$

ayrıştırması yapılabilir. Bu ayrıştırma ile (2.12)-(2.17) ifadeleri aşağıdaki gibi olmaktadır.

a) 1. Bölgede:

$$G \frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} + (m_z \Omega^2 - k) W_1(x) = 0, \quad -\infty < x < -X_1 \quad (2.18)$$

b) 2. Bölgede:

$$EJ \frac{d^4 W_2}{dx^4} - m_k \Omega^2 W_2 = 0 \quad , \quad -L_1 < x < -X_1 \quad (2.19)$$

c) 3. Bölgede:

$$EJ \frac{d^4 W_3}{dx^4} - G \frac{d^2 W_3}{dx^2} + (k - (m_k + m_z) \Omega^2) W_3 = P_o \delta(x) \quad , \quad -X_1 < x < X_2 \quad (2.20)$$

d) 4. Bölgede:

$$EJ \frac{d^4 W_4}{dx^4} - m_k \Omega^2 W_4 = 0 \quad , \quad X_2 < x < -L_2 \quad (2.21)$$

e) 5. Bölgede:

$$G \frac{d^2 W_5}{dx^2} + (m_k \Omega^2 - k) W_5 = 0 \quad , \quad X_2 < x < \infty \quad (2.22)$$

Çözüme geçmeden önce aşağıdaki boyutsuzlaştırmalar yapılmaktadır.

$$\begin{aligned} \lambda^4 &= \frac{k}{4EJ} \quad , \quad \xi = \lambda x \quad , \quad \xi_1 = \lambda X_1 \quad , \quad \xi_2 = \lambda X_2 \quad , \quad \ell = \lambda L \quad , \\ \ell_1 &= \lambda L_1 \quad , \quad \ell_2 = \lambda L_2 \quad , \quad w = \lambda W \quad , \quad \frac{k}{G\lambda^2} = \lambda_G \quad , \quad \frac{m_k}{k} \Omega^2 = \Omega^{*2} \quad , \\ \frac{m_k}{m_z} &= m^* \quad , \quad \frac{P_0}{\lambda^2 EJ} = F \end{aligned} \quad (2.23)$$

Burada ξ boyutsuz koordinatı, λ Winkler zemin parametresi ξ_1 ve ξ_2 ayrılma noktalarının koordinatlarını, λ_G kayma tabakası parametresini, k yay katsayısını, EJ kiriş eğilme rijitliğini, $\delta(x)$ Dirac delta fonksiyonunu, m_k kiriş için birim boyun kütlesini, m_z birim boydaki zemin kolonunun kütlesini, P_0 zorlama genliğini, Ω^* frekans parametresini göstermektedir. Bu durumda diferansiyel denklemdeki türetilmeler de aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$\frac{dW}{dx} = \frac{dW}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{dw}{d\xi} \lambda = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{w}{\lambda} \right) \lambda = \frac{dw}{d\xi} \quad (2.24)$$

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = \lambda \frac{d^2 w}{d\xi^2}, \quad \frac{d^3 W}{dx^3} = \lambda^2 \frac{d^3 w}{d\xi^3}, \quad \frac{d^4 W}{dx^4} = \lambda^3 \frac{d^4 w}{d\xi^4}$$

(2.23) boyutsuz büyüklükleri ve (2.24) türetilmeleri ile, beş bölge için boyutsuz hareket denklemleri aşağıdaki gibi olmaktadır.

a) 1. Bölgede:

$$\frac{d^2 w_1}{d\xi^2} - \lambda_G \left(1 - \frac{\Omega^{*2}}{m^*} \right) w_1(\xi) = 0, \quad -\infty < \xi < -\xi_1 \quad (2.25)$$

b) 2. Bölgede:

$$\frac{d^4 w_2}{d\xi^4} - 4\Omega^{*2} w_2(\xi) = 0, \quad -l_1 < \xi < -\xi_1 \quad (2.26)$$

c) 3. Bölgede:

$$\frac{d^4 w_3}{d\xi^4} - \frac{4}{\lambda_G} \frac{d^2 w_3}{d\xi^2} + 4\left(1 - \left(1 + \frac{1}{m^*}\right)\Omega^{*2}\right)w_3 = F\delta(\xi), \quad -\xi_1 < \xi < \xi_2 \quad (2.27)$$

d) 4. Bölgede:

$$\frac{d^4 w_4}{d\xi^4} - 4\Omega^{*2} w_4(\xi) = 0, \quad \xi_2 < \xi < -\xi_2 \quad (2.28)$$

e) 5. Bölgede:

$$\frac{d^2 w_1}{d\xi^2} - \lambda_G \left(1 - \frac{\Omega^{*2}}{m^*}\right) w_1(\xi) = 0, \quad \xi_2 < \xi < \infty \quad (2.29)$$

2.2. Sınır koşulları

Problemin sınır ve süreklilik koşulları ise; ayrılma noktalarında düşey yerdeğiştirmelerin, eğimlerin, kesme kuvvetlerinin ve momentlerin eşitliğinden, yüksüz olan kiriş uçlarında kesme kuvveti ve eğilme momentlerinin sıfır olmasından ve zemin tabakası için büyük x değerleri için yerdeğiştirmelerin sonlu kalmasından yararlanılarak, aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

Sol taraf sınır koşulları:

- Ayrılma noktasındaki düşey yerdeğiştirmelerin eşitliğinden:

$$\begin{aligned} w_1(-\xi_1) &= w_3(-\xi_1) \\ w_2(-\xi_1) &= w_3(-\xi_1) \end{aligned} \quad (2.30)$$

- Eğimlerin eşitliğinden:

$$\begin{aligned} w'_1(-\xi_1) &= w'_3(-\xi_1) \\ w'_2(-\xi_1) &= w'_3(-\xi_1) \end{aligned} \quad (2.31)$$

- Moment ve kesme kuvvetlerinin eşitliğinden:

$$\begin{aligned} w''_1(-\xi_1) &= w''_3(-\xi_1) \\ w''_2(-\xi_1) &= w''_3(-\xi_1) \end{aligned} \quad (2.32)$$

- Kiriş ucunda yük olmamasından:

$$\begin{aligned} w''_2(-\ell_1) &= 0 \\ w'''_2(-\ell_1) &= 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

- Büyük x değerleri için yerdeğiştirmenin sonlu kalmasından:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \{w_1\} \rightarrow \text{sonlu değer} \quad (2.34)$$

Sağ taraf sınır koşulları:

- Ayrılma noktasındaki düşey yerdeğiştirmelerin eşitliğinden:

$$\begin{aligned} w_5(\xi_2) &= w_3(\xi_2) \\ w_4(\xi_2) &= w_3(\xi_2) \end{aligned} \quad (2.35)$$

- Eğimlerin eşitliğinden:

$$\begin{aligned} w'_5(\xi_2) &= w'_3(\xi_2) \\ w'_4(\xi_2) &= w'_3(\xi_2) \end{aligned} \quad (2.36)$$

- Moment ve kesme kuvvetlerinin eşitliğinden:

$$\begin{aligned} w''_4(\xi_2) &= w''_3(\xi_2) \\ w'''_4(\xi_2) &= w'''_3(\xi_2) \end{aligned} \quad (2.37)$$

- Kiriş ucunda yük olmamasından:

$$\begin{aligned} w''_4(\ell_2) &= 0 \\ w'''_4(\ell_2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

- Büyük x değerleri için yerdeğiştirmenin sonlu kalmasından:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{w_5\} \rightarrow \text{sonlu değer} \quad (2.39)$$

Bu ifadelerde $()' = \frac{d()} {dx}$ olarak gösterilmiştir. Yazılan 18 sınır koşulu, çözümde ortaya çıkacak integral sabitlerinin (16 adet) ve ayrılma noktalarının koordinatlarının (2 adet) hesabı için yeterli olmaktadır.

3. PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde (2.25)-(2.29) diferansiyel denklemlerinin çözüm yapıları incelenecektir. Bunun için parametre sayısını azaltmak amacıyla $m^*=1$ ($m_k=m_z$) alınacak ve λ_G parametresinin de pozitif bir değer olduğu gözönünde tutulacaktır. Yukarıda verilen denklemlerden (2.27) dışında kalanların hepsinin homojen yapıda oldukları görülmektedir. Bu nedenle önce (2.27)'nin homojen formunu da göz önünde tutarak homojen diferansiyel denklemler çözülecek, daha sonra bu denklemin çeşitli durumlar için özel çözümü araştırılacaktır.

3.1. Homojen diferansiyel denklemlerin çözümü

a) 1. Bölge için W_I çözümü;

Bu bölgede (2.25) denklemini, $m^*=1$ alındığından

$$\bar{w}_1 - \lambda_G(1 - \Omega^{*2})w_1 = 0 \quad (3.1.1)$$

olmaktadır. Bu denklemin çözümü için $w_1 = Ae^{r\xi}$ şeklinde bir çözüm alınıp (3.1.1)'de yerine yazılması ile

$$r^2 - \lambda_G(1 - \Omega^{*2}) = 0 \quad (3.1.2)$$

karakteristik denklemini veya,

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{\lambda_G(1 - \Omega^{*2})} \quad ; \quad (3.1.3)$$

kökleri elde edilir. λ_G pozitif bir değer olduğundan $\Omega^*<1$ için kökler gerçel, $\Omega^*=1$ için kökler katlı, $\Omega^*>1$ için sanal olmaktadır.

$$\diamond \quad \Omega < 1 \text{ için : } w_1(\xi) = A_1 e^{r\xi} + A_2 e^{-r\xi} \quad (3.1.4)$$

$$\diamond \quad \Omega = 1 \text{ için : } w_1(\xi) = A_1 \xi + A_2 \quad (3.1.5)$$

$$\diamond \quad \Omega > 1 \text{ için : } w_1(\xi) = A_1 \cos \chi \xi + A_2 \sin \chi \xi \quad (3.1.6)$$

çözümleri elde edilmektedir. Burada $\chi = \sqrt{(\Omega^{*2} - 1)\lambda_G}$ olarak tanımlanmakta, A_1 ve A_2 ise integral sabitlerini göstermektedir.

b) 2. Bölge için W_2 çözümü;

Bu bölgede (2.26) denklemi için $\theta^4 = 4\Omega^{*2}$ tanımı yapılırsa,

$$w_2^{IV} - 4\Omega^{*2} w_2 = 0 \quad (3.1.7)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü ise,

$$w_2(\xi) = B_1 \cosh(\theta\xi) + B_2 \sinh(\theta\xi) + B_3 \cos(\theta\xi) + B_4 \sin(\theta\xi) \quad (3.1.8)$$

şeklindedir. B_1 , B_2 , B_3 ve B_4 integral sabitleridir. Bu çözümün yapısı Ω^* ile değişmemektedir.

c) 3. Bölge için W_3 çözümü;

Bu bölgede (2.27) denklemi için $w_3 = Ce^{m\xi}$ çözümü alındığında;

$$m^4 - \frac{4}{\lambda_G} m^2 + 4(1 - 2\Omega^{*2}) = 0 \quad (3.1.9)$$

karakteristik denklemi elde edilmektedir. Bu denklemin kökleri ise;

$$m_i = \pm \sqrt{\frac{2}{\lambda_G} \pm \sqrt{\alpha}} \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.1.10)$$

şeklindedir. Burada $\alpha = \left(\frac{2}{\lambda_G}\right)^2 - 4(1 - \Omega^{*2})$ olarak tanımlanmıştır. Bu durumda da m_i

köklerine göre aşağıdaki durumlar ortaya çıkmaktadır.

❖ $\Omega^* < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $\alpha > 0$ ise köklerin hepsi gerçeldir.

$$w_3(\xi) = C_1 \cosh(m_{11}\xi) + C_2 \sinh(m_{11}\xi) + C_3 \cosh(m_{12}\xi) + C_4 \sinh(m_{12}\xi) \quad (3.1.11)$$

❖ $\Omega^* < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $\alpha = 0$ ise kökler katlı gerçeldir.

$$w_3(\xi) = (C_1 + C_2\xi)e^{m_{21}\xi} + (C_3 + C_4\xi)e^{-m_{21}\xi} \quad (3.1.12)$$

❖ $\Omega^* < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $\alpha < 0$ ise köklerin hepsi karmaşıktır.

$$w_3(\xi) = [C_1 \cos(m_{31}\xi) + C_2 \sin(m_{31}\xi)] \cosh(m_{32}\xi) + [C_3 \cos(m_{31}\xi) + C_4 \sin(m_{31}\xi)] \sinh(m_{32}\xi) \quad (3.1.13)$$

❖ $\frac{1}{\sqrt{2}} < \Omega^* < 1$ ve $\alpha > 0$ ise köklerin ikisi gerçel, ikisi sanaldır.

$$w_3(\xi) = C_1 \cosh(m_{41}\xi) + C_2 \sinh(m_{41}\xi) + C_3 \cos(m_{42}\xi) + C_4 \sin(m_{42}\xi) \quad (3.1.14)$$

Bu çözümlerde C_1, C_2, C_3 ve C_4 integral sabitleridir,

$$m_{11} = \sqrt{\frac{2}{\lambda_G} + \sqrt{\alpha}} \quad , \quad m_{12} = \sqrt{\frac{2}{\lambda_G} - \sqrt{\alpha}} \quad , \quad m_{21} = \sqrt{\frac{2}{\lambda_G}}$$

$$m_{31} = \sqrt{-\frac{1}{\lambda_G} + \sqrt{1 - 2\Omega^{*2}}} \quad , \quad m_{32} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_G} + \sqrt{1 - 2\Omega^{*2}}}$$

$$m_{41} = \sqrt{\frac{2}{\lambda_G} + \sqrt{\alpha}} \quad , \quad m_{42} = \sqrt{-\frac{2}{\lambda_G} + \sqrt{\alpha}}$$

olarak tanımlanmıştır.

d) 4. Bölge için W_4 çözümü;

Bu bölge için çözüm 2. bölgedeki çözümden yararlanılarak,

$$w_4(\xi) = D_1 \cosh(\theta\xi) + D_2 \sinh(\theta\xi) + D_3 \cos(\theta\xi) + D_4 \sin(\theta\xi) \quad (3.1.15)$$

olarak yazılabilmektedir. D_1, D_2, D_3 ve D_4 integral sabitlerini göstermektedir.

e) 5. Bölge için W_5 çözümü;

Bu bölge için çözüm, 1. bölgedeki çözümden yararlanılarak,

$$\diamond \quad \Omega < 1 \text{ için: } w_5(\xi) = E_1 e^{r\xi} + E_2 e^{-r\xi} \quad (3.1.16)$$

$$\diamond \quad \Omega = 1 \text{ için: } w_5(\xi) = E_1 \xi + E_2 \quad (3.1.17)$$

$$\diamond \quad \Omega < 1 \text{ için: } w_5(\xi) = E_1 \cos \chi\xi + E_2 \sin \chi\xi \quad (3.1.18)$$

şeklinde yazılabilmektedir. E_1, E_2, E_3 ve E_4 integral sabitlerini göstermektedir.

3.2. Temas bölgesine ait denklemin özel çözümü

Bu bölgede (3.1.10) bağıntısı ile verilen köklere ait homojen çözümler Ω^* ve α 'nın çeşitli durumları için (3.1.11)-(3.1.14) de verilmişti. Bu durumlara karşılık gelen özel çözümler aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\diamond \quad \Omega^* < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ve} \quad \alpha > 0 \quad \text{durumu}$$

Bu durum için özel çözüm,

$$(w_3)_\delta = R_1 \sinh |m_{11}\xi| + R_2 \sinh |m_{12}\xi| \quad (3.2.1)$$

olarak alınabilir. Bu denklem ikinci ve dördüncü türevleri $\frac{d|\xi|}{d\xi} = \text{sgn}(\xi)$, $\frac{d \text{sgn}|\xi|}{d\xi} = 2\delta(\xi)$ bağıntıları dikkate alınarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$(w_3)''_\delta = R_1 \sinh m_{11} (m_{11} \sinh |m_{11}\xi| + 2\delta(\xi)) + R_2 \sinh m_{12} (m_{12} \sinh |m_{12}\xi| + 2\delta(\xi))$$

$$(w_3)''''_\delta = R_1 [2m_{11}^3 \delta(\xi) + 2m_{11} \delta''(\xi) + m_{11}^4 \sinh |m_{11}\xi|] + \\ R_2 [2m_{12}^3 \delta(\xi) + 2m_{12} \delta''(\xi) + m_{12}^4 \sinh |m_{12}\xi|]$$

bu türetmeler ve (3.2.1) çözümü, (2.27) diferansiyel denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse;

$$\delta(\xi) [R_1 (2m_{11}^3 - \frac{8m_{11}}{\lambda_G}) + R_2 (2m_{12}^3 - \frac{8m_{12}}{\lambda_G})] + \delta''(\xi) [2m_{11}R_1 + 2m_{12}R_2] + \\ [m_{11}^4 - \frac{4m_{11}^2}{\lambda_G} + 4(1 - 2\Omega^{*2})] \sinh |m_{11}\xi| R_1 + \\ [m_{12}^4 - \frac{4m_{12}^2}{\lambda_G} + 4(1 - 2\Omega^{*2})] \sinh |m_{12}\xi| R_2 = F\delta(\xi) \quad (3.2.2)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde $\delta(\xi)$ ve $\delta''(\xi)$ terimlerinin katsayılarından yararlanılarak;

$$2m_{11}R_1 + 2m_{12}R_2 = 0 \rightarrow R_2 = -\frac{m_{11}}{m_{12}}R_1 \quad (3.2.3)$$

$$2m_{11}R_1(m_{11}^2 - \frac{4}{\lambda_G}) - \frac{m_{11}}{m_{12}}R_1 2m_{12}(m_{12}^2 - \frac{4}{\lambda_G}) = F \quad (3.2.4)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerdende,

$$R_1 = \frac{F}{2m_{11}(m_{11}^2 - m_{12}^2)}, R_2 = \frac{F}{2m_{12}(m_{11}^2 - m_{12}^2)} \quad (3.2.5)$$

katsayıları hesaplanmış olur. Bunların (3.2.1)'de yerine yazılması ile özel çözüm;

$$(w_3)_\delta = \frac{F}{2m_{11}(m_{11}^2 - m_{12}^2)} \sinh|m_{11}\xi| - \frac{F}{2m_{12}(m_{11}^2 - m_{12}^2)} \sinh|m_{12}\xi| \quad (3.2.6)$$

olarak elde edilir.

$$\diamond \quad \Omega^* < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ve } \alpha = 0 \text{ durumu}$$

Bu durum için özel çözüm,

$$w_{3\delta} = \alpha e^{|m_{21}\xi|} + \beta |\xi| e^{-|m_{21}\xi|} \quad (3.2.7)$$

olarak alınabilir. Bu durumda ikinci ve dördüncü mertebeden diferansiyelleri alınıp (3.2.7) ile birlikte (2.27) denkleminde yazılır ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned} & (2m\alpha + 2\beta)\delta'' + [(2m^3 - \frac{8m}{\lambda_G})\alpha + (6m^2 - \frac{8}{\lambda_G})\beta]\delta(\xi) + \\ & [(m^4 - \frac{4}{\lambda_G}m^2 + 4 - 8\Omega^2)e^{|m\xi|}\alpha + (-4m^3 + m^4|\xi| + \frac{8m}{\lambda_G} - \frac{4m}{\lambda_G}|\xi| + \\ & (4 - 8\Omega^2)|\xi|)e^{-|m\xi|}\beta] = F\delta(\xi) \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemden $\delta(\xi)$ ve $\delta''(\xi)$ 'nin katsayılarından yararlanılarak,

$$\alpha = -\frac{F}{4m^3}, \quad \beta = \frac{F}{4m^2} \quad (3.2.9)$$

sabitleri bulunur. Bu sabitler (3.2.7)'de yerine yazılırsa,

$$(w_3)_\delta = -\frac{F}{4m_{21}^3} e^{|m_{21}\xi|} + \frac{F}{4m_{21}^2} e^{-|m_{21}\xi|} \quad (3.2.10)$$

olarak özel çözüm bulunmuş olur.

$$\diamond \quad \Omega^* < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ve } \alpha < 0 \text{ durumu}$$

Bu durum için bu kez

$$(w_3)_\delta = S_1 \sin h |(m_{32}\xi)| \cos(m_{31}\xi) + S_2 \cosh(m_{32}\xi) \sin |(m_{31}\xi)| \quad (3.2.11)$$

çözümü alınmaktadır. Yukarıda izlenen yolla gerekli türetmeler yapıp (3.2.11) ile (2.27) denkleminde gidilse, ve elde edilen denklem $\delta(\xi)$ ve $\delta''(\xi)$ 'ye göre düzenlense bu kez,

$$\begin{aligned} & (2tS_1 + 2nS_2)\delta''(\xi) + [(t^3 - 3tn^2 - \frac{4t}{\lambda_G})S_1 + (3t^2n - n^3 - \frac{4n}{\lambda_G})S_2]2\delta(\xi) \\ & + [(4tn^3 - 4t^3n + \frac{8}{\lambda_G}tn) \cosh t\xi \sin |n\xi| + (t^4 + n^4 - 6t^2n^2 - \frac{4}{\lambda_G}(t^2 - n^2) \\ & + 4 - 8\Omega^2) \sinh |t\xi| \cos n\xi]S_1 + [(4t^3n - 4tn^3 - \frac{8}{\lambda_G}tn) \sinh |t\xi| \cos n\xi \\ & + (t^4 + n^4 - 6t^2n^2 - \frac{4}{\lambda_G}(t^2 - n^2) + 4 - 8\Omega^2) \cosh t\xi \sin |n\xi|]S_2 = F\delta(\xi) \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemlerde sabitler,

$$S_1 = -\frac{F}{4t(t^2 + n^2)} \quad , \quad S_2 = \frac{F}{4n(t^2 + n^2)} \quad (3.2.13)$$

olarak elde edilir. Bunların yerine yazılması ile,

$$\begin{aligned} (w_3)_\delta = & -\frac{F}{4t(t^2 + n^2)} \sin h |(m_{32}\xi)| \cos(m_{31}\xi) + \\ & \frac{F}{4n(t^2 + n^2)} \cosh(m_{32}\xi) \sin |(m_{31}\xi)| \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

olarak özel çözüm bulunmuş olur.

❖ $\Omega^* > \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $\alpha > 0$ durumu

Bu durumda özel çözüm için,

$$(w_3)_o = S_1 \sin h |(m_{41}\xi)| + S_2 \sin |(m_{42}\xi)| \quad (3.2.15)$$

çözümü alınmaktadır. Gerekli türetmeler yapıp (2.27) de yerine yazıldığında ve düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} & (2S_1 m_{41} + 2S_2 m_{42})\delta''(\xi) + [(2S_1 m_{41}^3 - \frac{8m_{41}}{\lambda_G})S_1 - (2S_2 m_{42}^3 - \frac{8m_{42}}{\lambda_G})S_2]\delta(\xi) + \\ & (m_{41}^4 - \frac{4m_{41}^2}{\lambda_G} + (4 - 8\Omega^2))S_1 \sinh |(m_{41}\xi)| + \\ & (m_{42}^4 - \frac{4m_{42}^2}{\lambda_G} + (4 - 8\Omega^2))S_2 \sinh |(m_{42}\xi)| = F\delta(\xi) \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

denklemini elde edilmektedir. Bu denklemin sabitleri,

$$S_1 = \frac{F}{2m_{41}(m_{41}^2 + m_{42}^2)} \quad , \quad S_2 = -\frac{F}{2m_{42}(m_{41}^2 + m_{42}^2)} \quad (3.2.17)$$

olarak bulunmaktadır. Bunların (3.2.15) denkleminde yerine yazılması ile,

$$(w_3)_o = \frac{F}{2m_{41}(m_{41}^2 + m_{42}^2)} \sin h |(m_{41}\xi)| - \frac{F}{2m_{42}(m_{41}^2 + m_{42}^2)} \sin |(m_{42}\xi)| \quad (3.2.18)$$

çözümü bulunmaktadır.

Bütün durumlar için her bölgedeki çözümler aşağıda topluca verilmiştir.

1.Durum: $\Omega^* < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $\alpha > 0$

$$w_1(\xi) = A_1 e^{r\xi} + A_2 e^{-r\xi} \quad (3.2.19)$$

$$w_2(\xi) = B_1 \cosh(\theta\xi) + B_2 \sinh(\theta\xi) + B_3 \cos(\theta\xi) + B_4 \sin(\theta\xi) \quad (3.2.20)$$

$$w_3(\xi) = C_1 \cosh(m_{11}\xi) + C_2 \frac{F}{2m_{11}(m_{11}^2 - m_{12}^2)} \sinh|m_{11}\xi| + C_3 \cosh(m_{12}\xi) - C_4 \frac{F}{2m_{12}(m_{11}^2 - m_{12}^2)} \sinh|m_{12}\xi| \quad (3.2.21)$$

$$w_4(\xi) = D_1 \cosh(\theta\xi) + D_2 \sinh(\theta\xi) + D_3 \cos(\theta\xi) + D_4 \sin(\theta\xi) \quad (3.2.22)$$

$$w_5(\xi) = E_1 e^{r\xi} + E_2 e^{-r\xi} \quad (3.2.23)$$

2.Durum: $\Omega^* < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $\alpha = 0$

Bu durumda $w_1(\xi), w_2(\xi), w_4(\xi), w_5(\xi)$ 1.durumdaki ile aynıdır. $w_3(\xi)$ çözümü ise aşağıdaki gibidir.

$$w_3 = \left[-\frac{F}{4m_{21}^3} e^{|m_{21}\xi|} + \frac{F}{4m_{21}^2} e^{-|m_{21}\xi|} \right] + \left[(C_1 + C_2\xi)e^{m_{21}\xi} + (C_3 + C_4\xi)e^{-m_{21}\xi} \right] \quad (3.2.24)$$

3.Durum: $\Omega^* < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $\alpha < 0$

Bu durumda $w_1(\xi), w_2(\xi), w_4(\xi), w_5(\xi)$ 1. ve 2. durumdaki ile aynıdır. $w_3(\xi)$ çözümü aşağıdaki gibidir.

$$w_3(\xi) = [C_1 \cos(m_{31}\xi) + C_2 \sin(m_{31}\xi)] \cosh(m_{32}\xi) + [C_3 \cos(m_{31}\xi) + C_4 \sin(m_{31}\xi)] \sinh(m_{32}\xi) - \frac{F}{4t(t^2 + n^2)} \sinh|(m_{32}\xi)| \cos(m_{31}\xi) + \frac{F}{4n(t^2 + n^2)} \cosh(m_{32}\xi) \sin|(m_{31}\xi)| \quad (3.2.25)$$

4.Durum: $\frac{1}{\sqrt{2}} < \Omega^* < 1$ ve $\alpha > 0$

Bu durumda $w_1(\xi), w_2(\xi), w_4(\xi), w_5(\xi)$ 1. , 2. ve 3. durumdaki ile aynıdır. $w_3(\xi)$ çözümü aşağıdaki gibidir.

$$w_3(\xi) = C_1 \cosh(m_{41}\xi) + C_2 \sinh(m_{41}\xi) + C_3 \cos(m_{42}\xi) + C_4 \sin(m_{42}\xi) \\ + \frac{F}{2m_{41}(m_{41}^2 + m_{42}^2)} \sin h|(m_{41}\xi)| - \frac{F}{2m_{42}(m_{41}^2 + m_{42}^2)} \sin |(m_{42}\xi)| \quad (3.2.26)$$

5.Durum: $\Omega^* > 1$ ve $\alpha > 0$

Bu durumda $w_2(\xi), w_3(\xi), w_4(\xi)$ 4. durumdaki ile aynıdır. $w_1(\xi)$ ve $w_5(\xi)$ çözümleri aşağıdaki gibidir.

$$w_1(\xi) = A_1 \cos \chi \xi + A_2 \sin \chi \xi \quad (3.2.27)$$

$$w_5(\xi) = E_1 \cos \chi \xi + E_2 \sin \chi \xi \quad (3.2.28)$$

Yukarıda verilen beş durumun her birinde 16 integral sabiti bilinmeyen olarak bulunmaktadır. Bundan başka temas bölgesini veren ξ_1 ve ξ_2 koordinatları da bilinmemektedir. Bu durumda bilinmeyenlerin toplam sayısı 18 olmaktadır. Çözüm yöntemi her durum için aynı olduğundan, 1. durum için bilinmeyenlerin hesabı şöyle yapılmaktadır. (2.34) ve (2.39) sınır koşullarının kullanılması ile, $A_2=0$ ve $E_1=0$ olarak elde edilmektedir. Bu durumda bilinmeyen sabitleri sayısı 14'e düşmektedir. (2.33) ve (2.34) sınır koşullarından; B_3, B_4, D_3 ve D_4 diğer sabitler cinsinden hesaplanmaktadır. Diğer bir deyişle, $B_3=f(D_1, D_2)$ olmaktadır. Bu durumda ise geriye kullanılmayan 12 sınır koşulu kalmaktadır. B_3, B_4, D_3 ve D_4 sabitlerinin kullanılmayan sınır koşullarından yerine yazılması ile homojen olmayan 12 adet cebirsel denklem elde edilmektedir. Bu denklemlerde bilinmeyen olarak artık $B_1, B_2 ; C_1, C_4 ; D_1, D_2$ ve A_1, E_2 sabitleri bulunmaktadır. Bununla beraber, denklemlerdeki sabitlerin katsayıları ve denklemlerin sağ tarafındaki terimler ξ_1 ve ξ_2 'ye bağlıdır. ξ_1 ve ξ_2 başlangıçta bilinmediğinden iterasyon yolu ile hesap yapılmaktadır. Bunun için ξ_1 ve ξ_2 seçilerek 10 sabit, 10 denklem kullanılarak sayısal olarak elde edilmekte ve daha sonra kullanılmayan iki denklemde

yerine konulmaktadır. Newton-Raphson yöntemini kullanan paket programlar yardımı ile ayrılma noktalarının koordinatları, bu iki denklemin kökleri olarak elde edilmektedir. Ayrılma noktaları (temas boyu) ve sabitler elde edildikten sonra, istenilen bir noktadaki yerdeğiştirmeler hesaplanmaktadır.

Kiriş üzerinde herhangi bir noktadaki eğilme momenti ve kesme kuvveti de, yerdeğiştirme fonksiyonlarının ardışık olarak türetilmesi ile $T^*(\xi) = -\bar{W}(\xi)$ ve $M^*(\xi) = -\ddot{W}(\xi)$ olarak elde edilmektedir.

4. SONUÇLAR

Bu bölümde çekme almayana Pasternek zeminine oturan simetrik veya asimetrik olarak uygulanabilen harmonik tekil kuvvet etkisindeki kiriş problemlerine ait sonuçlar grafikler yardımıyla verilmiştir.

Şekil 4.1.'de simetrik yükleme durumunda çeşitli l boyları için toplam temas boyunun frekans parametresine göre değişimi verilmiştir ($F=1$, $\lambda_G=2$). Simetri nedeniyle toplam temas boyu $2x\zeta_l$ olmaktadır. Şekilde frekansın artması ile küçük kiriş boylarında önce tek, daha sonra iki çözüm olduğu görülmektedir. Her iki durum için de temas boyu frekansla büyümektedir. Kiriş boyunun yaklaşık $l \geq 6$ değerleri için bazı frekans değerlerinde çözüm olmadığı görülmektedir. Bu durumda kiriş zeminden ayrılmamaktadır. Bu kiriş boylarında, küçük frekans değerleri için tek çözüm olduğunda temas bölgesi frekansla küçülmeaktadır. Şekilden, $l \geq 6$ için büyük frekans değerlerinde, temas boyunun kiriş boyunun büyümesi ile büyüdüğü görülmektedir.

Şekil 4.2.'de simetrik yükleme durumunda, çeşitli λ_G değerleri için toplam temas boyunun frekans parametresine göre değişimi verilmiştir ($l=6$). Simetri nedeniyle toplam temas boyu $2x\zeta_l$ olmaktadır. Şekilden, frekans parametresinin yaklaşık olarak $0 < \Omega^* < 0.2$ ve $0.7 < \Omega^*$ değerleri arasında tek çözüm, $0.2 < \Omega^* < 0.7$ değerleri arasında ise iki çözüm olduğu görülmektedir. Yine şekilden, bazı Ω^* ve λ_G değerlerinde çözüm olmadığı görülmektedir. Bu durumda kiriş zeminden ayrılmamaktadır.

Şekil 4.3.'de simetrik yükleme ($l=0,5x l$) halinde, farklı şiddetteki kuvvetler için kiriş elastik eğrileri ve zemin yüzeyinin durumu verilmiştir ($\lambda_G=2$, $l=6$, $\Omega^*=0,1$). Şekilden kuvvetin büyümesi ile düşey yerdeğiştirmelerin de büyüdüğü, ayrılma noktasının koordinatının ise değişmediği görülmektedir. Bu parametreler için $\zeta_l = 1,0895$ olarak elde edildiğinden $2x\zeta_l = 2,179$ olmaktadır.

Şekil 4.4.'de simetrik yükleme halinde frekans parametresinin 0,1 ve 0,6 değerleri için kiriş elastik eğrileri görülmektedir ($F=1$, $\lambda_G=2$, $l=6$). Şekilden frekans parametresinin büyümesi ile yerdeğiştirmelerin ve temas boylarının da büyüdüğü görülmektedir. Temas boyu $\Omega^*=0,1$ için $2x1,0895=2,179$ ve $\Omega^*=0,6$ için $2x1,6502=3,300$ olmaktadır.

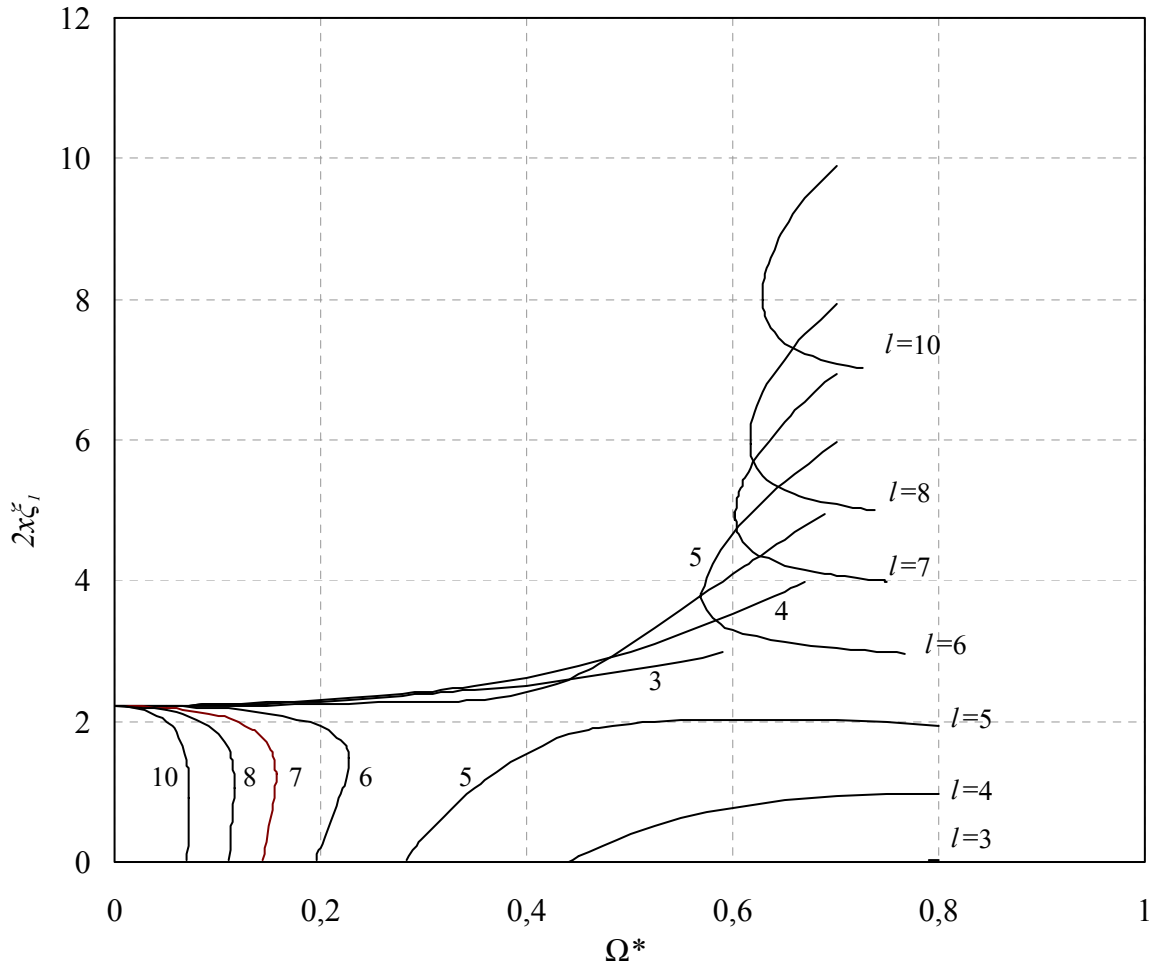
Şekil 4.5.'de sol ve sağ taraftaki temas boylarının frekans parametresi ile değişimi, simetrik durum da gözönünde tutularak verilmiştir ($F=1$, $\lambda_G=2$, $l=6$). Küçük frekans değerleri için simetrik halde tek çözüm varken, asimetrik halde iki çözüm olduğu görülmektedir. Frekans parametresinin büyük değerleri içinse asimetrik halde dört çözüm olduğu (aynı frekans oranında dört farklı temas boyu) görülmektedir.

Şekil 4.6.'da şekil 4.5.'deki parametreler için asimetrik haldeki toplam temas boyunun frekans parametresi ile değişimi verilmiştir. Şekilden, küçük frekanslar için asimetrik haldeki temas eğrisinin, simetrik haldeki eğrinin altında kaldığı (temas boyunun daha küçük olduğu) görülmektedir. Bu eğri asimetrik halde farklı olan ξ_1 ve ξ_2 temas boylarının toplanması ile elde edilmiştir. Büyük frekans değerleri için de benzer bir yol izlenerek sol ve sağ temas boyları (dörder adet) toplanarak, toplam temas boyları elde edilmiştir. Bu durumda da aynı frekans oranı için dört farklı temas boyu elde edildiği görülmektedir.

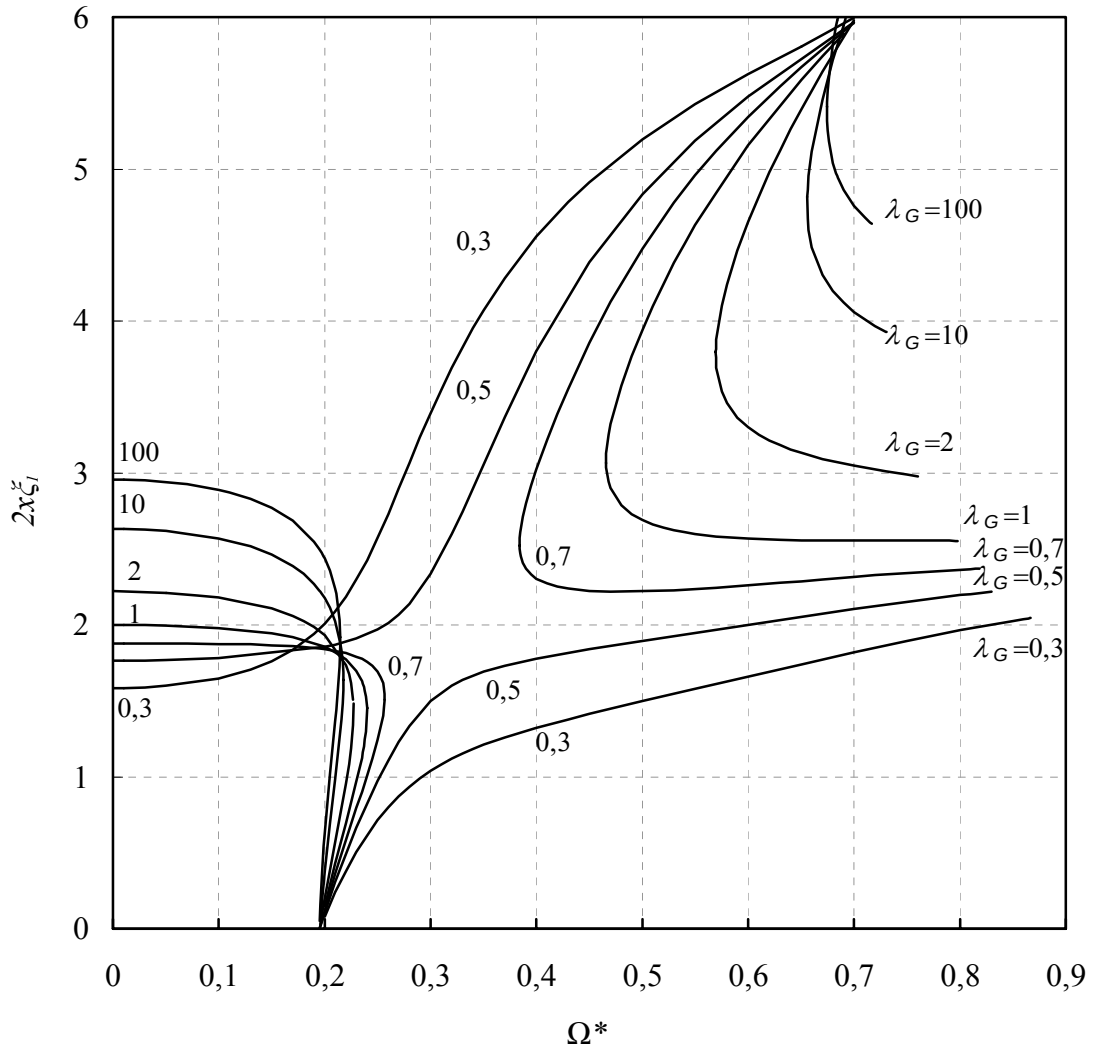
Şekil 4.7.'de $\Omega^*=0,1$ için asimetrik yükleme gözönüne alınarak farklı yüklemeler için kiriş elastik eğrileri verilmiştir ($F=1$, $\lambda_G=2$, $l=6$). Şekilden, simetrik halde olduğu gibi asimetrik halde de yerdeğiştirmelerin yükün şiddeti ile arttığı, ve temas boyunun değişmediği görülmektedir. Bu parametrelerin sol taraf temas bou (ξ_1) 1,02009 , sağ taraf temas boyu (ξ_2) 1,1167 olarak elde edilmiştir. Bu durumda toplam temas boyu ($\xi_1 + \xi_2$) 2,1268 olmaktadır.

Şekil 4.8. ve 4.9.'da asimetrik yükleme durumu için kirişin eğilmem momenti ve kesme kuvveti diyagramları verilmiştir ($\lambda_G=2$, $l=6$, $\Omega^*=0,1$). Beklendiği gibi moment ve kesme kuvveti yükün artması ile büyümektedir.

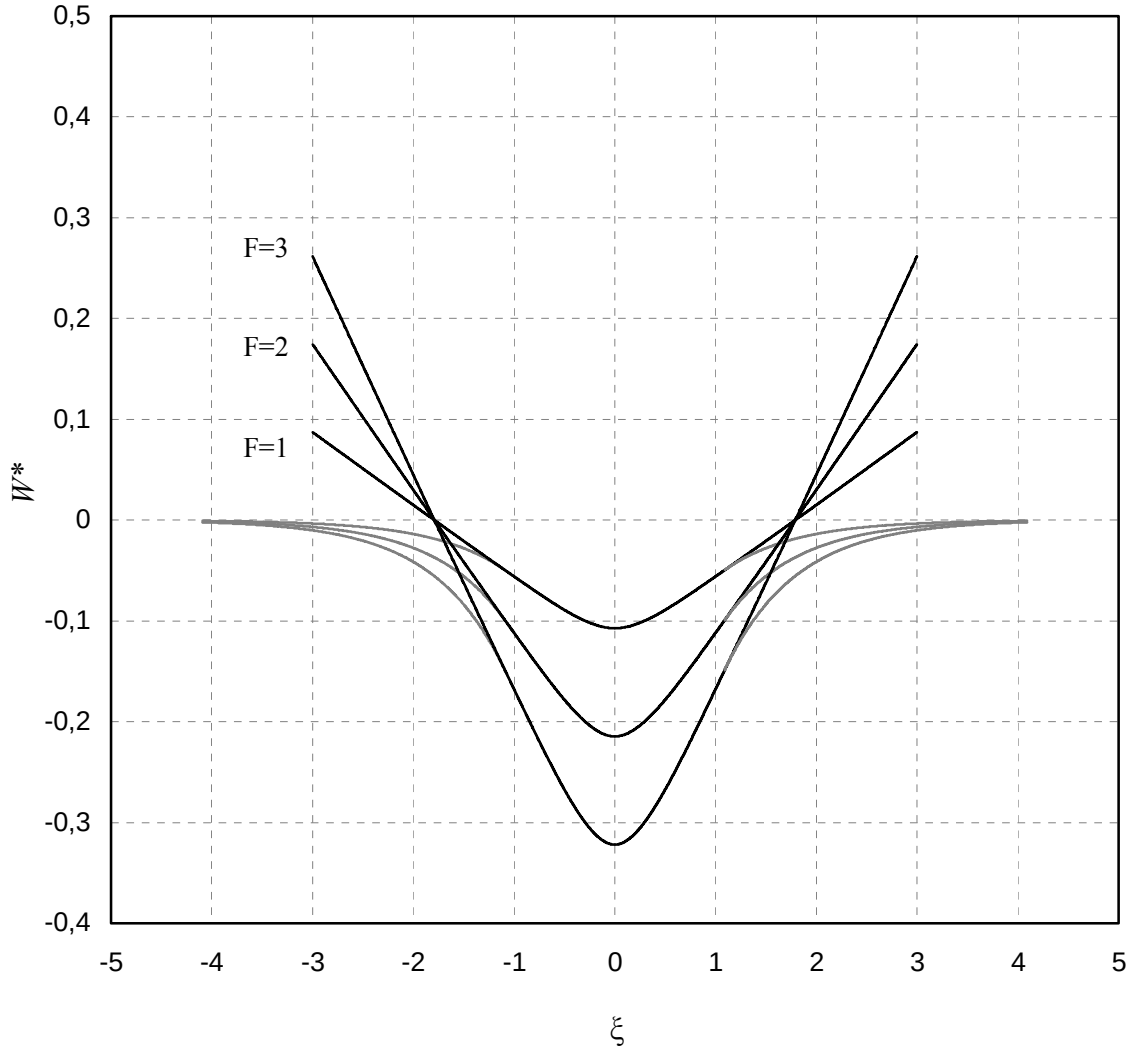
Şekil 4.10.'da asimetrik yükleme durumu için kiriş tabanındaki basınç dağılımı verilmiştir. Şekilden basınçların, yükün şiddeti ile büyüdüğü ve ayrılma noktalarında basıncın sıfır olmadığı görülmektedir.



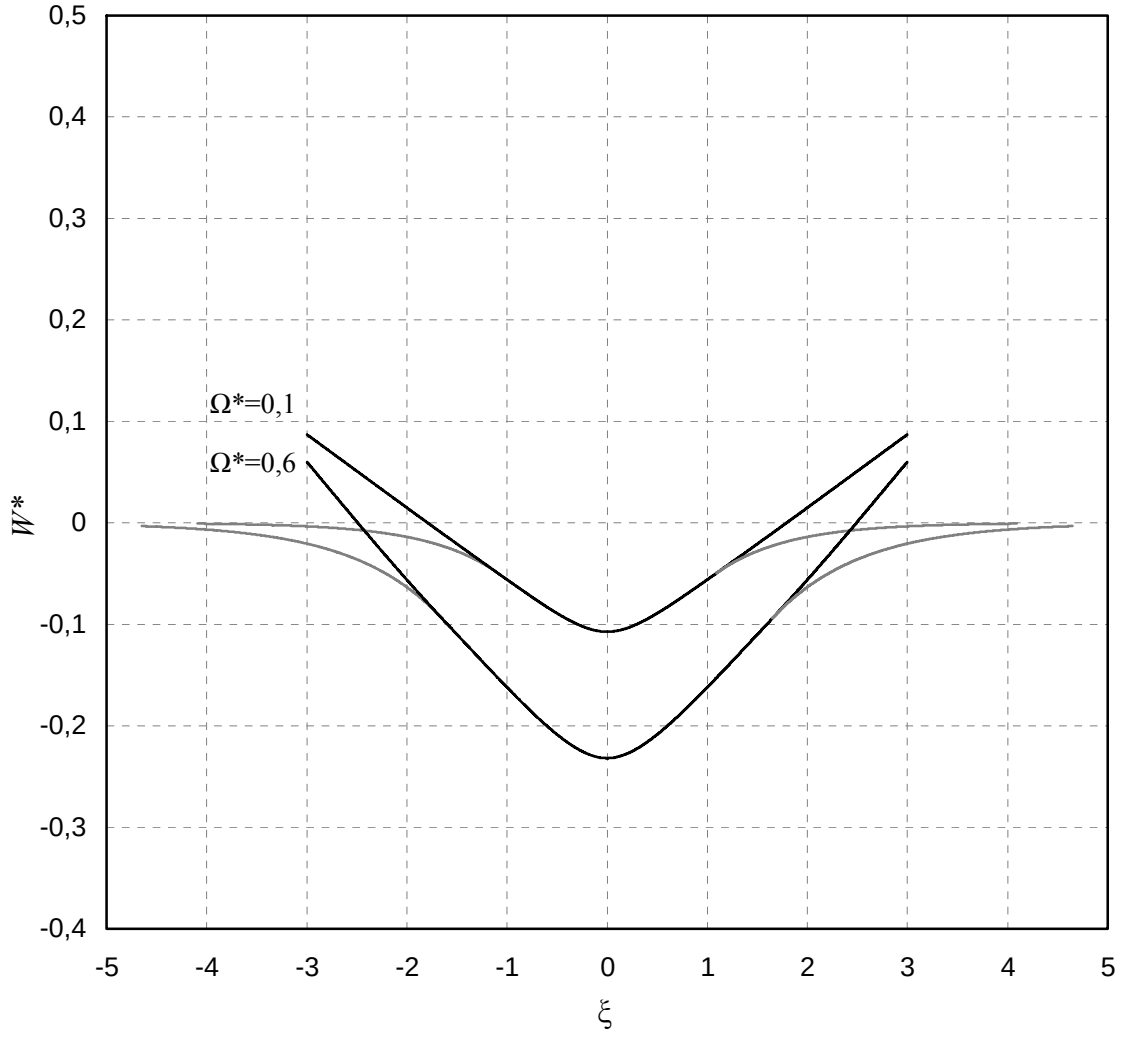
Şekil 4.1. Simetrik yükleme için temas boyunun ($2x\zeta_l$), frekans parametresi (Ω^*) ile değişimi



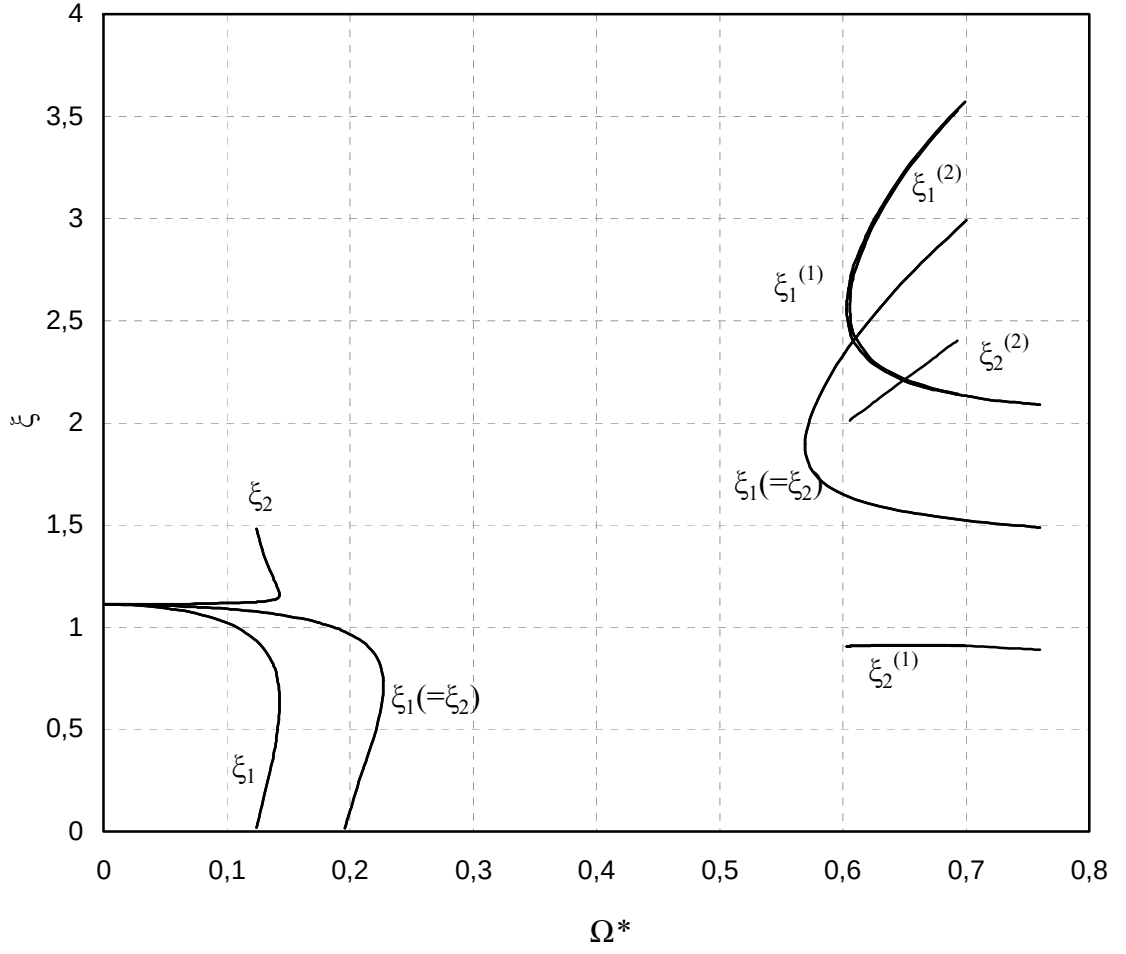
Şekil 4.2. Simetrik yükleme için temas boyunun ($2x\xi_l$), frekans parametresi (Ω^*) ile kayma tabakası parametresi λ_G değerlerine göre değişimi



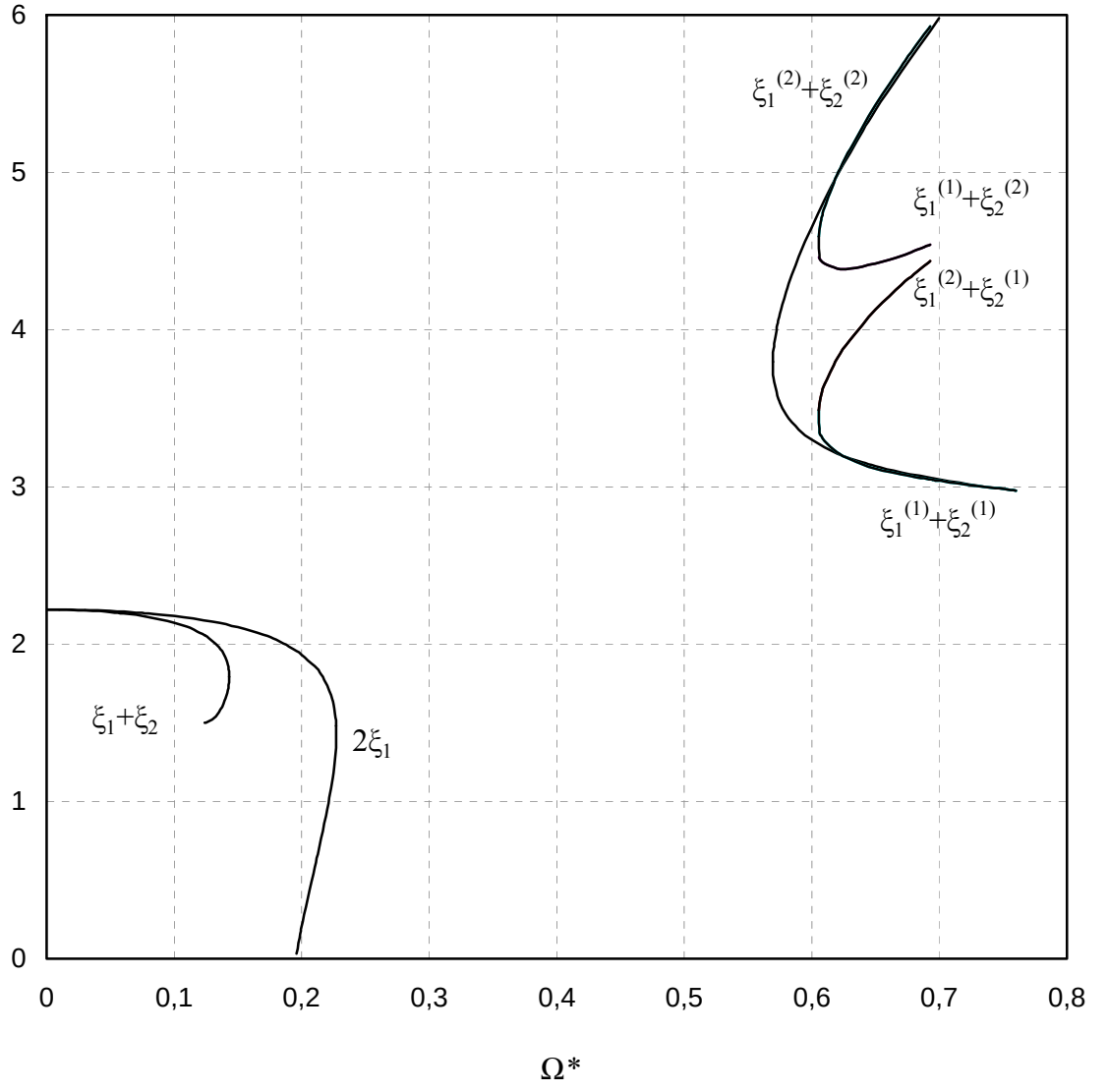
Şekil 4.3. Simetrik yükleme için kiriş elastik eğrileri



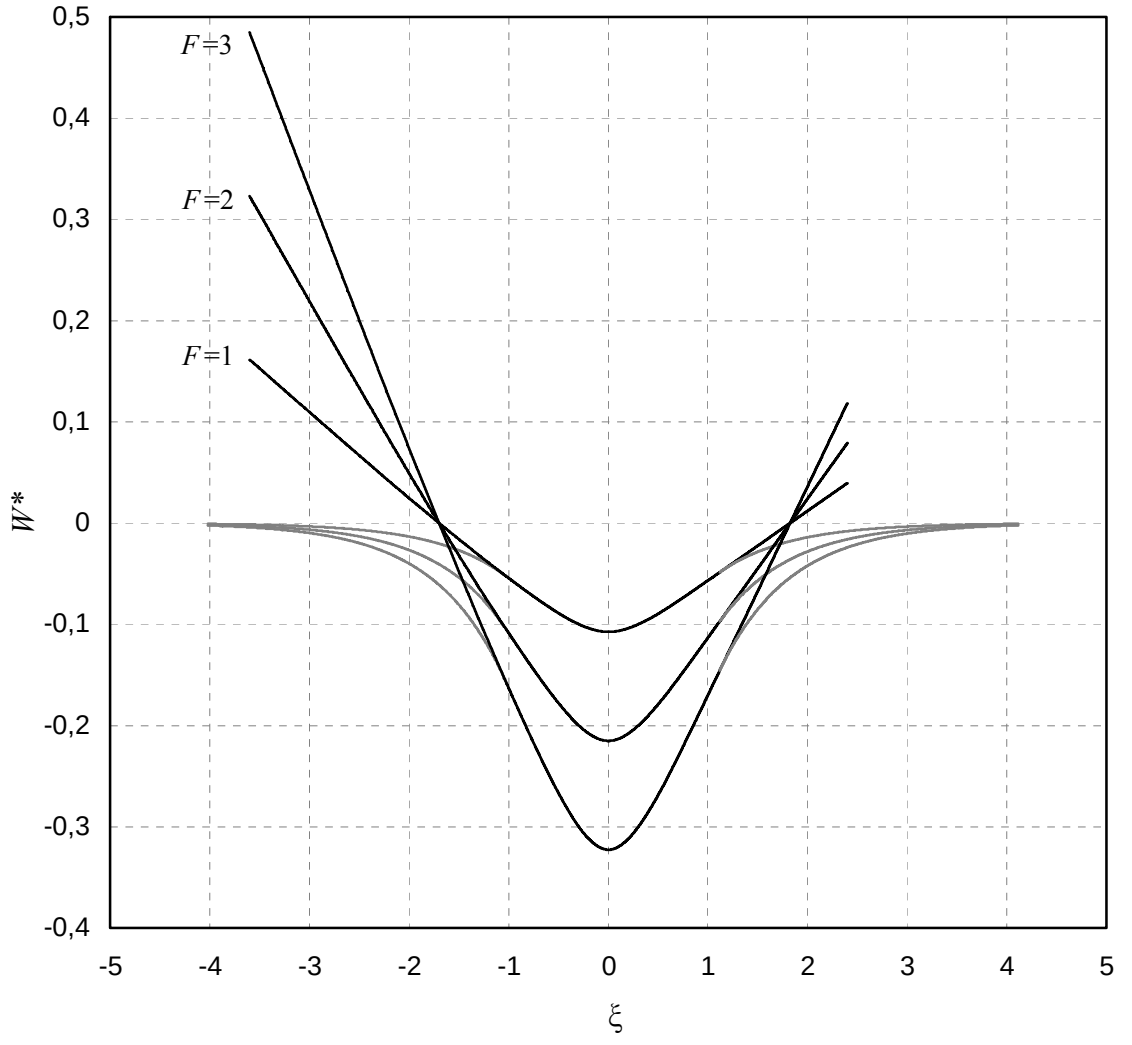
Şekil 4.4. Simetrik yükleme için kiriş elastik eğrileri



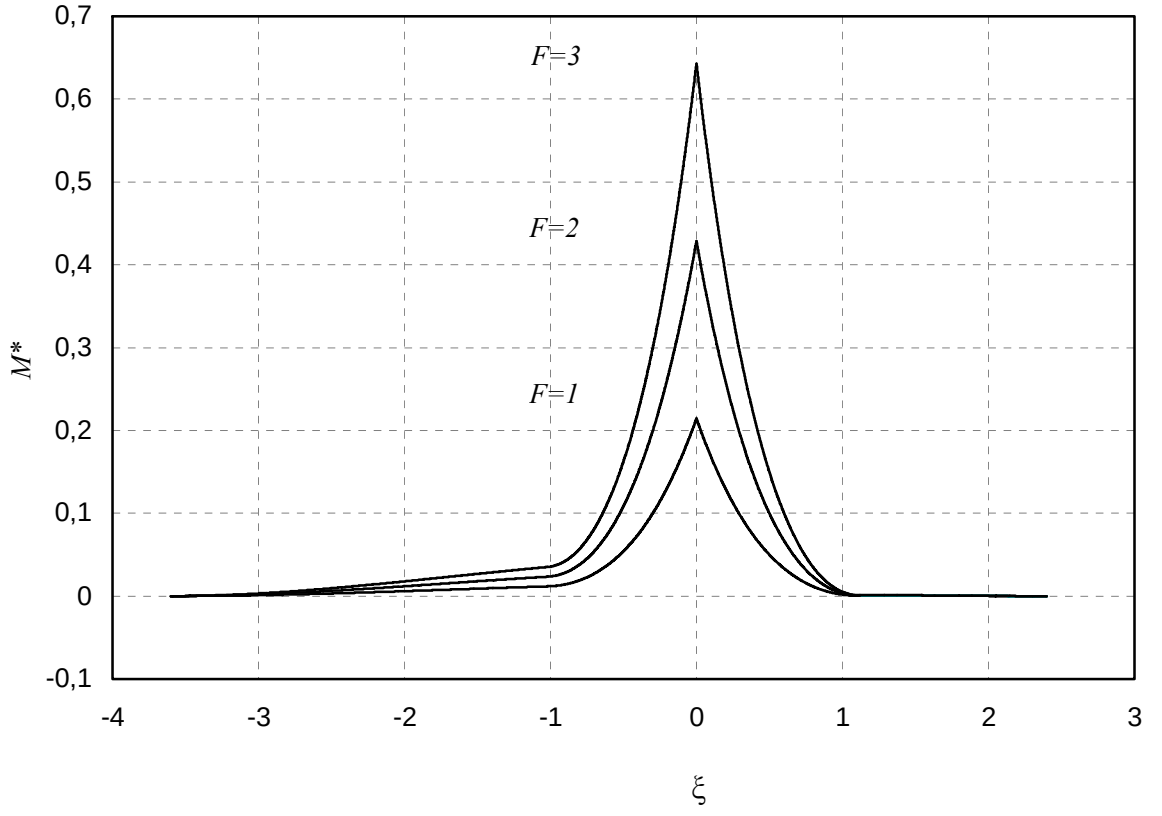
Şekil 4.5. Asimetrik halde sol ve sağ taraf temas boylarının frekans parametresi ile değişimi



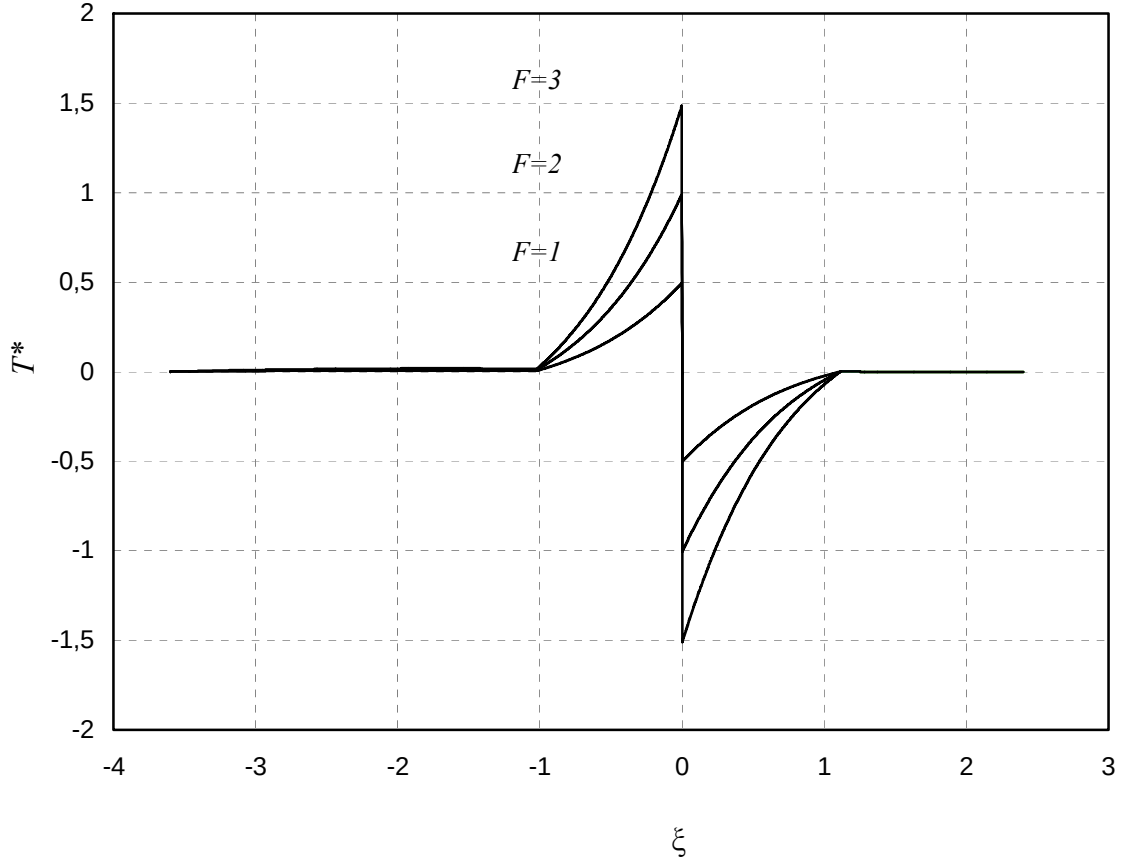
Şekil 4.6. Asimetrik halde toplam temas boyunun frekans parametresi ile değişimi



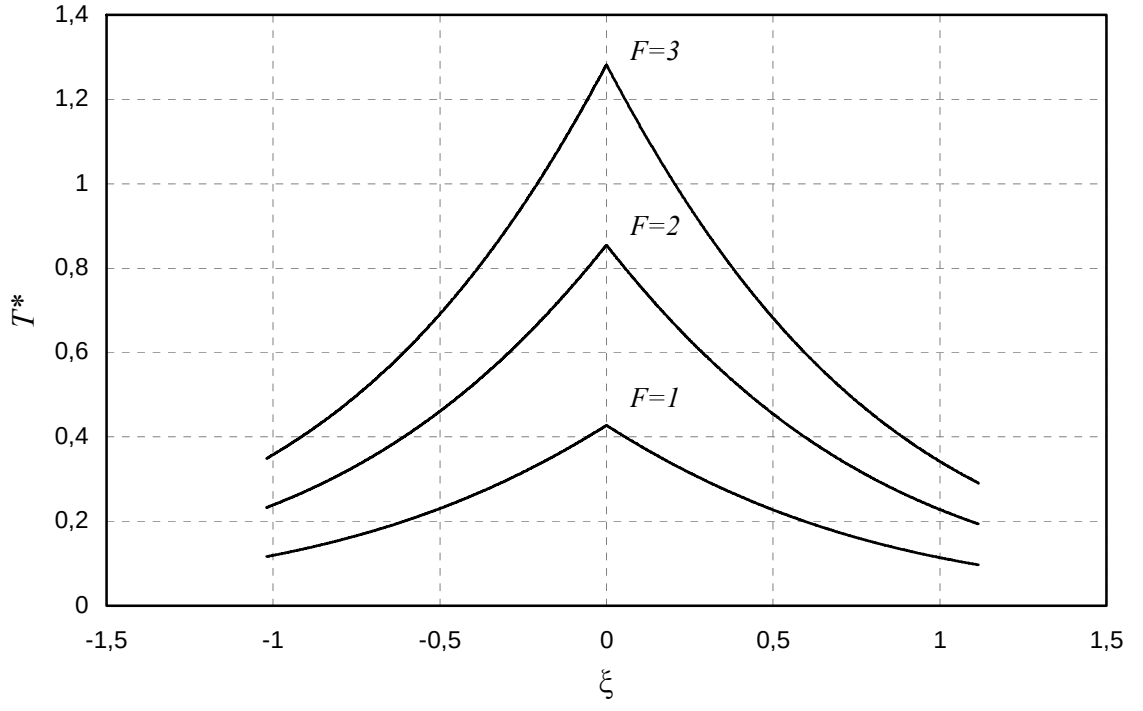
Şekil 4.7. Asimetrik halde sol ve sağ taraf temas boylarının frekans parametresi ile değişimi



Şekil 4.8. Asimetrik halde moment diyagramları



Şekil 4.9. Asimetrik halde kesme kuvveti diyagramları



Şekil 4.10. Asimetrik halde taban basıncı diyagramları