



TÜRKİYE CUMHURİYETİ
ADANA ALPARSLAN TÜRKER BİLİM VE TEKNOLOJİ
ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ELASTİK ZEMİNE OTURAN FONKSİYONEL DERECELENMİŞ
PLAKLARIN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

İREM DALDABAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ



TÜRKİYE CUMHURİYETİ
ADANA ALPARSLAN TÜRKER BİLİM VE TEKNOLOJİ
ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ELASTİK ZEMİNE OTURAN FONKSİYONEL DERECELENMİŞ
PLAKLARIN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

İREM DALDABAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. FARUK FIRAT ÇALIM

ADANA, 2024

JÜRİ ONAY SAYFASI

ELASTİK ZEMİNE OTURAN FONKSİYONEL DERECELENMİŞ PLAKLARIN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

Adana Alparslan Türkeş Bilim ve Teknoloji Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında 20801201003 numaralı İrem DALDABAN tarafından ilgili yönetmeliklerin belirlediği şartlar doğrultusunda tamamlanan Yüksek Lisans aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek “Adana Alparslan Türkeş Bilim ve Teknoloji Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ahmet BEYÇİOĞLU
Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Faruk Fırat ÇALIM
Anabilim Dalı Başkanı

Prof. Dr. Faruk Fırat ÇALIM
Danışman

Tez Jürisi

Prof. Dr. Faruk Fırat ÇALIM
Adana Alparslan Türkeş Bilim ve Teknoloji Üniversitesi

Prof. Dr. Serkan TOKGÖZ
Adana Alparslan Türkeş Bilim ve Teknoloji
Üniversitesi

Prof. Dr. Metin Hakan SEVERCAN
Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi

23/01/2024

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Adana Alparslan Türkeş Bilim ve Teknoloji Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak, bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın hazırladığım bu tez çalışmasında;

Bu tezin özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin akademik kurallara ve etik davranışa uygun olarak elde edilerek sunulduğunu beyan ederim. Ayrıca, tez kapsamında bu kuralların ve davranışların gerektirdiği şekilde bu çalışmaya özgün olmayan tüm veri ve bilgiler için bilimsel etik ve gelenek çerçevesinde kaynak gösterdiğimi; bu kaynakları da kaynakçada belirttiğimi beyan ederim. Çalışmam ile ilgili yaptığım beyana aykırı bir durum saptanması halinde tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

23/01/2024

[İmza]

İrem DALDABAN

ÖZET

ELASTİK TEMEL ÜZERİN OTURAN FONKSİYONEL DERECELENMİŞ PLAKLARIN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

İrem DALDABAN

Yüksek Lisans, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Faruk Fırat ÇALIM

Ocak 2024, 42 sayfa

Bu çalışmada, elastik zemine oturan fonksiyonel derecelenmiş malzemeden yapılan plakların serbest titreşim analizi gerçekleştirilmiştir. Bu analizde, deplasman alanların tespiti için birinci mertebe kayma deformasyon teorisi kullanılmıştır. Plâğın mekanik özellikleri, plâğın kalınlığı boyunca sürekli değiştiği ve bileşenlerin hacim oranının bir kuvvet yasası dağılımını izlediği varsayılırken Poisson oranı sabit kabul edilmiştir. Elastik zemine oturan fonksiyonel derecelenmiş plakların hareket denklemleri Hamilton prensibi kullanılarak elde edilmiştir. Elde edilen hareket denklemleri Navier metodu ile çözülmüş ve temel frekanslar elde edilmiştir. Bu çözüm için Mathematica programı dilinde bir algoritma geliştirilmiştir. Geliştirilen algoritmanın doğruluğunu göstermek amacıyla serbest titreşim analizleri gerçekleştirilip literatürde yer alan örnekler ile kıyaslanmıştır. Sonrasında gerçekleştirilen parametrik çalışmalarda serbest titreşim analizi gerçekleştirilerek çeşitli elastik zemin parametrelerinin, malzeme değişim parametrelerinin, narinlik oranlarının, modların ve malzeme özelliklerinin analizlere etkisi incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Elastik zemin, fonksiyonel derecelenmiş malzeme, plak, serbest titreşim

ABSTRACT

FREE VIBRATION ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED PLATES RESTING ON ELASTIC FOUNDATION

İrem DALDABAN

M.Sc., Department of Civil Engineering

Supervisor Prof. Dr. Faruk Fırat ÇALIM

Januar 2024, 42 pages

In this study, free vibration analysis of plates made of functionally graded material on elastic foundation has been conducted. In this analysis, the first-order shear deformation theory has been used for the determination of displacement fields. The mechanical properties of the plate are assumed to vary continuously along the thickness of the plate, following a power-law distribution of volume fractions for the constituents, while the Poisson ratio is considered constant. The equations of motion for functionally graded plates on elastic foundation have been derived using the Hamiltonian principle. The obtained equations of motion have been solved using the Navier method, and the fundamental frequencies have been determined. An algorithm has been developed in the Mathematica programming language for this solution. To demonstrate the accuracy of the developed algorithm, free vibration analyses have been performed and compared with examples found in the literature. Subsequently, in parametric studies, free vibration analysis has been conducted to investigate the effects of various elastic foundation parameters, material change parameters, aspect ratios, modes, and material properties on the analyses.

Keywords: Elastic foundation, functionally graded material, plate, free vibration

İthaf

Sonsuz sevgileri, destekleri ve teşvikleri için aileme ve hayat arkadaşına

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının gerçekleşmesinde engin bilgilerini, tecrübesini ve her türlü desteğini esirgemeyen danışmanım, Sayın Prof. Dr. Faruk Fırat ÇALIM'a sonsuz teşekkürler sunarım. Tez çalışmasının planlanmasında ve araştırılmasında desteğini, sabrını ve değerli görüşlerini eksiltmeyen Sayın Dr. Öğr. Üyesi Yavuz Çetin Cuma ve Sayın Arş.Gör. Mehmet Buğra ÖZBEY'e teşekkür ederim. Bu zorlu sürecin sonuçlandırılmasında sevgi ve desteklerini her zaman hissettiren aileme sonsuz sevgilerimi sunuyorum.



İÇİNDEKİLER

JÜRİ ONAY SAYFASI	i
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANNAMESİ	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
<i>İthaf</i>	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİL LİSTESİ	ix
TABLO LİSTESİ	x
KISALTMALAR	xi
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ARAŞTIRMASI	4
3. MATERYAL VE METOT	11
3.1. Elastik Zemine Oturan Fonksiyonel Derecelenmiş Plak	11
3.1.1. Karışım Kuralı	12
3.2. Yer Değiştirme ve Gerilme Denklemleri	13
3.3. Kinematik Bağlantılar ve Hareket denklemleri	15
3.3.1. Hamilton Prensibi	15
3.2.1. Hareket Denklemleri	18
3.2.2. Kuvvet ve Momentler	18
3.1.3. Navier Metodu	19
3.3. Özdeğer Problemi Çözümü	20
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	22
4.1. Örnek 1	23
4.2. Örnek 2	25
4.3. Örnek 3	27
4.4. Örnek 4	31
4.5. Örnek 5	34

5. SONUÇLAR	38
KAYNAKÇA	39



ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1. Fonksiyonel derecelenmiş malzeme seramik-metal dağılımı	2
Şekil 2. Elastik zemine oturan fonksiyonel derecelenmiş plak	12
Şekil 3. a) Gerilmeler, b) Kuvvet ve momentler	14
Şekil 4. Elastik zemine oturan Al_2O_3 FDM plak	23
Şekil 5. FDM Kare Plak	27
Şekil 6. Malzeme değişim parametresi ile narinlik oranının temel frekanslara etkisi	29
Şekil 7. Elastik zemine oturan ZrO_2 FDM plak	31
Şekil 8. Elastik zemin ve malzeme değişim parametresinin temel frekanslara etkisi	33
Şekil 9. Farklı malzeme değişim parametresi ve modların temel frekansa etkisi	36

TABLO LİSTESİ

Tablo 1. Malzeme özellikleri	22
Tablo 2. Örnek 1'e ait boyutsuz temel frekans değerleri $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{p_c E_c}$	23
Tablo 3. Örnek 2'e ait boyutsuz temel frekans değerleri $\bar{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{p_c E_c}$	25
Tablo 4. Örnek 3'e ait boyutsuz temel frekans değerleri $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{p_m E_m}$	28
Tablo 5. Örnek 4'e ait boyutsuz temel frekans değerleri $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{p_m E_m}$	31
Tablo 6. Örnek 5'e ait boyutsuz temel frekans değerleri $\bar{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{p_c E_c}$	33



KISALTMALAR

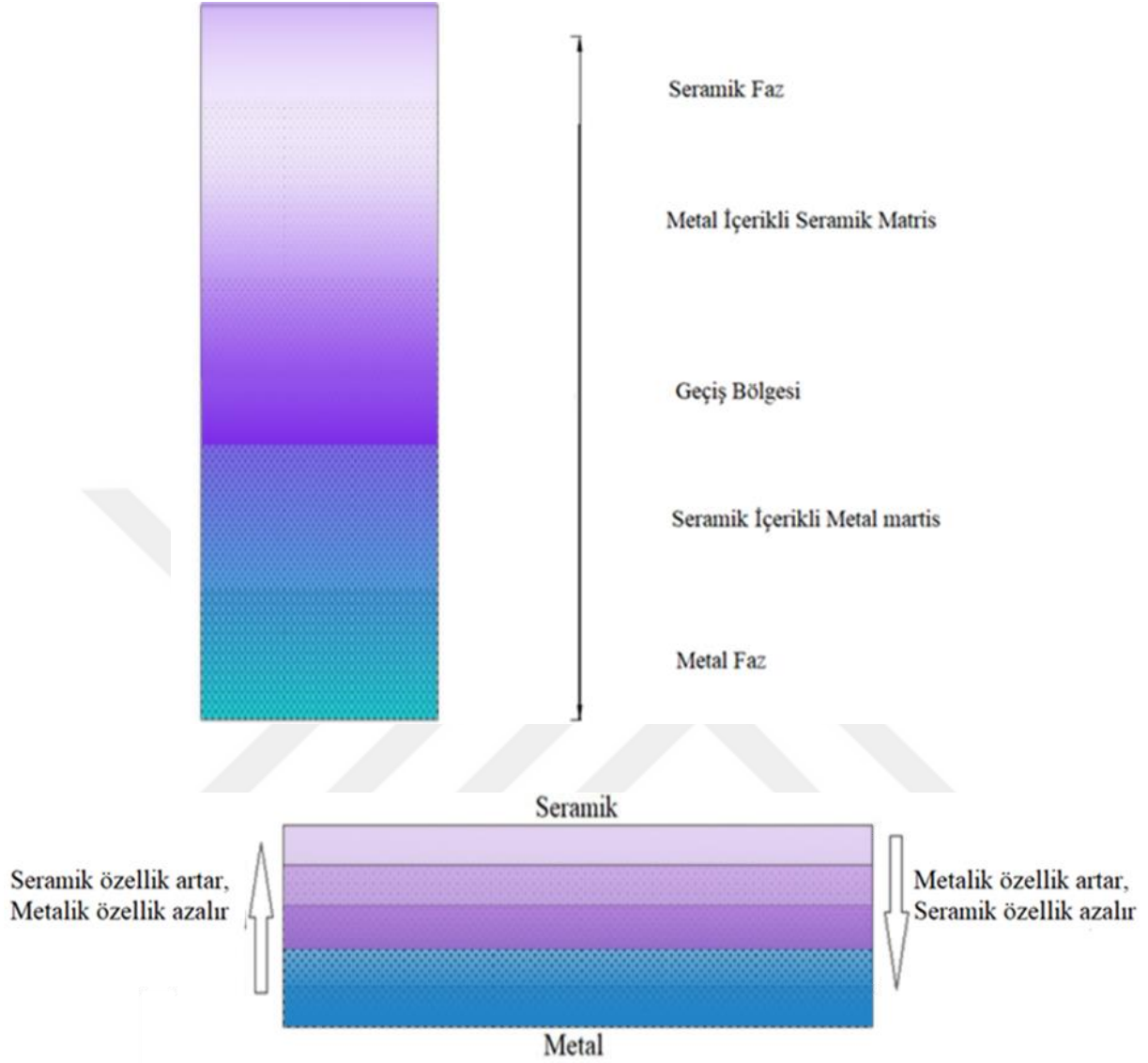
a	: Plak kenar uzunluğu
b	: Plak kenar genişliği
h	: Plak kalınlığı
E	: Elastisite modülü
ρ	: Kütlesel yoğunluk
G	: Kayma modülü
ν	: Poisson oranı
P_m	: Metal malzeme özelliği
P_c	: Seramik malzeme özelliği
p	: Malzeme değişim katsayısı
u, v, w	: Plâğın herhangi bir noktasının x, y, z eksenleri doğrultularındaki yer değiştirmeleri
u_0, v_0, w_0	: Plâğın orta düzlemindeki bir noktanın x, y, z eksenleri doğrultularındaki yer değiştirmeleri
θ_x, θ_y	: Orta düzlem normalinin sırasıyla x, y eksenindeki dönmeler
t	: Zaman
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	: x, y ve z eksenleri doğrultusundaki şekil değiştirme bileşenleri
γ_{xy}	: x, y yönündeki kayma şekil değiştirmesi
γ_{yz}	: y, z yönündeki kayma şekil değiştirmesi
γ_{xz}	: x, z yönündeki kayma şekil değiştirmesi
Q_{ij}	: Rijitlik parametreleri
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	: x, y ve z eksenleri doğrultusundaki gerilme bileşenleri
M_x, M_y	: Plâğın x ve y eksenleri dik kesitlerin birim boyuna gelen eğilme momentleri
M_{xy}	: Plâğın x eksenine dik kesitlerinin birim boyuna gelen burulma momenti
N_{ij}	: Düzlem içi birim uzunluğa düşen iç kuvvetler ($i, j = x, y$)
Q_x, Q_y	: Kesme kuvveti
τ_{xy}	: Kayma gerilmesi
V	: Gerilme enerjisi

V_e	: Elastik zemin potansiyel enerjisi
T	: Kinetik enerjisi
δ	: Varyasyon
k_0, k_1	: Zemin parametreleri
ω	: Doğal frekans
I_i	: Atalet katsayısı
m, n	: Öz mod değerleri
A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}	: Yer değiştirme parametresi
K	: Rijitlik matrisi
M	: Kütle matrisi
Δ	: Bilinmeyen katsayısı
Al	: Alüminyum
Al_2O_3	: Alümina
ZrO_2	: Zirkonyum
D	: Plâğın eğilme rijitliği
V_c	: Seramiğin hacim oranı
V_m	: Metalin hacim oranı
ϖ	: Boyutsuz doğal frekans

1. GİRİŞ

Plaklar mühendisliğin birçok alanında yapısal eleman olarak sıklıkla kullanılmaktadır. Plaklar, kalınlığı taşıyıcı boyutlarının diğer iki boyutunun yanında çok küçük ve orta düzlemine dik olarak yüklenmiş düzlemsel taşıyıcı sistemlerdir. Güvenli bir yapı için bu sistemlerin farklı zorlanmalar altındaki statik ve dinamik davranışlarının belirlenmesi oldukça önem arz etmektedir. Bu sebeple, plakların statik ve dinamik analiziyle alakalı pek çok çalışma yapılmış ve hala çalışmalar devam etmektedir.

Uzay, havacılık, bilgisayar, inşaat ve biyomedikal gibi birçok mühendislik alanında, yapısal yönden çok daha gelişmiş, her ortamda kullanılabilecek yapısal sistemler geliştirmek amaçlanmıştır. Gelişen teknoloji ile birlikte “Fonksiyonel Derecelenmiş Malzeme (FDM)” ismiyle yeni bir malzeme sınıfı ortaya çıkmıştır. Bu sınıftaki malzemelerden üretilen yapıların mekanik özellikleri kalınlık boyunca bir fonksiyon ile belirlenmektedir. Fonksiyonel derecelenmiş malzemeler (FDM) 1984 yılında Japonya’da bir uzay aracı projesi sırasında keşfedilmiştir. Fonksiyonel derecelenmiş malzeme keşfedilmeden önce yüksek performans istenen yapı elemanlarında geleneksel tabakalı kompozit yapılar kullanılmıştır. Fakat bu iki farklı malzemenin birleşim yüzeyleri arasında malzeme özelliklerindeki keskin süreksizlik son derece önemli kusurlara sebep olacak gerilme yığılmaları oluşturmaktadır. Ayrıca malzemenin mekanik özellikleri her katmanda aniden değişmektedir. Fonksiyonel derecelenmiş malzemeler, daha önce kullanılan tabakalı kompozit malzemelere göre oldukça üstün özellikler içermektedir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler mikroskobik olarak homojen değildir ve makro seviyede malzeme özellikleri bir yüzeyden diğer yüzeye sürekli şekilde değişmektedir. Bu özellik, kalınlık doğrultusunda malzeme bileşenlerinin ve hacim oranlarının sürekli olarak artması sonucu elde edilmiştir. FDM’leri geleneksel kompozit malzemelerden ayıran en önemli özellik, fonksiyonel derecelenmiş malzemelerin Elastisite modülü, ısı genleşme katsayısı, Poisson oranı gibi mekanik özelliklerinin kalınlık boyunca her bir katmanda aniden değişmesi değil sürekli bir şekilde değişmesidir. Bu sürekli değişim sayesinde farklı uygulamalarda ve yüksek sıcaklıklı ortamlarda kullanılabilmektedir.



Şekil 1. Fonksiyonel derecelenmiş malzeme seramik-metal dağılımı

Fonksiyonel derecelenmiş malzemeler seramik ve metal karışımından veya farklı metallerin kombinasyonlarından elde edilir. Bileşenlerin hacim oranlarındaki dizilişin değişimi ve içyapıların sürekli değişikliğe uğramasından dolayı yeni oluşan heterojen malzemenin, mekanik ve termik özellikleri fonksiyonel olarak değişim göstermektedir. Fonksiyonel derecelenmiş malzemeler ısıya karşı iyi bir dirence sahip olduklarından dolayı gelişmiş yapısal malzemeler arasında oldukça ilgi çekici olmaktadır.

Yapı ve zemin ilişkisinin inşaat endüstrisi için önemi oldukça büyüktür. Herhangi bir yapı ile ilgili yapılan mühendislik çalışmalarında, yapı ile zemin arasındaki etkileşimin doğru ve güvenilir bir şekilde probleme yansıtılması, kesin çözüme ulaşılması için çok önemlidir. Bu

sebeple elastik zemine oturan yapıların analizi hakkında literatürde pek çok araştırma gözlenmektedir. Araştırmalar sonucu elastik zemine oturan yapıların davranışı ve zeminin kendi davranışının birbirleri arasındaki etkileşimi ile farklı zemin modelleri keşfedilmiştir.

Elastik zemine oturan plakların analizinin üç aşamadan oluştuğu kabul edilir. Birinci aşama, zeminin ve yapının birbirleri arasındaki davranışlarına uygun temsil edecek uygun bir zemin modelinin seçilmesidir. İkinci aşama, zemine ve plağa ait malzeme ve geometrik özelliklerin belirlenmesidir. Son aşama ise daha önce literatürde bulunan araştırmalardan elde edilen veriler ve yeni oluşturulan matematiksel model ile problemin çözümlenmesidir. Bu analizde, deplasman alanların tespiti için birinci mertebe kayma deformasyon teorisinden yararlanılmıştır. FDM plakların hareket denklemi Hamilton prensibi yardımı ile elde edilmiştir. Plâğın orta düzleminden bir noktanın yer değiştirme bileşenleri ele alınarak denklemler elde edilmiştir. Analitik çözümde Navier metodundan yararlanılmıştır. Navier metodu ile özdeğer problemi kapalı formda çözülerek analitik sonuçlar elde edilmiştir. Öncelikle gerçekleştirilen serbest titreşim analizlerinden elde edilen veriler ile literatürde var olan çalışmalar ile elde edilen sonuçlar karşılaştırılmış ve Mathematica programı dilinde geliştirilen algoritmanın doğruluğu gösterilmiştir. Daha sonrasında parametrik çalışma kapsamında serbest titreşim analizleri gerçekleştirilerek malzeme özellikleri, zemin parametreleri, modlar ve malzeme değişim parametrelerinin temel frekanslar üzerine etkisi gözlemlenmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu tez kapsamında elastik zemine oturan fonksiyonel derecelenmiş plakların serbest titreşim analizleri incelenmiştir. Elastik zemine oturan fonksiyonel derecelenmiş plakların analizi üzerine literatürde yapılan çalışmalar aşağıda verilmiştir.

Young (1950) Ritz metodu kullanarak düzgün bir kirişin normal titreşim modlarını tanımlayan fonksiyonları dikdörtgen plakların titreşim analizi için uygulamıştır. Üç özel plak problemi için çözümler elde etmiştir. Farklı mesnet koşullarına sahip plakların serbest titreşim analizini incelenmiştir.

Warburton (1954) dikdörtgen plakların enine titreşimlerini tüm olası kenar koşulları ve titreşim modlarıyla birlikte ele almıştır. Dikdörtgen plakların titreşim frekansları, iki kenar koşulu için hesaplanmıştır. Rayleigh yöntemini kullanarak basit bir yaklaşık frekans ifadesi türetmiştir. Birkaç istisna dışında, yaklaşık ifade ve doğru analiz sonuçları yakından uyumaktadır.

Leissa (1973) dikdörtgen plakların serbest titreşimine dair kapsamlı ve doğru analitik sonuçlar elde etmek için çalışmasını gerçekleştirmiştir. Basit mesnetli ve serbest kenar koşullarının kombinasyonlarını içeren 21 durum gözlemlenmektedir. Geriye kalan 15 durumu analiz etmek için, 36 terim içeren kiriş fonksiyonlarını içeren Ritz yöntemi ele alınmıştır. Her bir durum için farklı en boy oranlarında analizlerini gerçekleştirmiştir. Ayrıca Poisson oranının boyutsuz frekans üzerindeki etkisini incelemiştir.

Koizumi (1993) Winkler-Pasternak tipi zemin üzerine oturan ve eksenel yüke maruz fonksiyonel derecelendirilmiş ve metal tabakalardan oluşan silindirik kabukların stabilitesini incelemiştir.

Kang ve diğ. (1995) diferansiyel kareleme yöntem ile hem dönme ataletinin hem de kayma deformasyonunun alındığı Bresse-Timoshenko kiriş teorisine dayalı olarak, dikdörtgen ve dairesel kesitli dairesel kemerlerin düzlem içi ve düzlem dışı titreşimi hesaplamışlardır.

Cheung ve Zhou (1999) dikdörtgen kompozit plakların serbest titreşimlerini analiz etmek için hesaplama açısından verimli ve doğru bir sayısal yöntem geliştirmişlerdir. Statik giriş fonksiyonlarından oluşan yeni bir fonksiyonel set önerilmiştir. Bu fonksiyonel set diğerlerinden farklı olarak nokta destek sınır koşullarını da sağlamaktadır, bu fonksiyonlar ilk kez elde edilmiştir.

Carrera (1999) basit mesnetli sınır şartları kullanılarak karma plakların serbest titreşim analizlerini incelemiştir. Bu analizde izotropik ve ortotropik katmanların analizi yapılmıştır. Çok katmanlı yapıların titreşim üzerindeki enine normal gerilme etkisini araştırmıştır. Karşılaştırma amacı ile standart yer değiştirme formülasyonları baz alınarak klasik modeller kullanılmıştır. İzotropik ve ortotropik katmanlardan oluşan tabakalı, basit destekli levhaların, silindirik ve küresel kabukların serbest titreşim etkisi incelenmiştir.

Liu ve Liew (2000) birinci derece kayma deformasyon teorisine dayalı karışık sınır şartlarına sahip halka şeklindeki plakların serbest titreşim analizi için diferansiyel çözümler sunmuşlardır. Ayrıca bu çalışmada üç boyutlu, elastik bir zemin üzerinde bulunan fonksiyonel dereceli kalın plakların serbest titreşim tepkileri incelenmiştir. Çalışmada Young modülü ve yoğunluğunun kalınlık boyunca üstel olarak değiştiği, Poisson oranının da sabit kaldığı kabul edilmiştir. Basit mesnetli plağın tam bir çözüme ulaşması için durum değişkenliklerini trigonometrik çift Fourier serisiyle genişleterek ele alınmıştır.

Lam ve diğ. (2000) Green fonksiyonları kullanarak, iki parametrelili zemin üzerine oturan Levy plakların eğilme, burkulma ve titreşim analizleri ile ilgili kesin çözümler bulmuşlardır. Bu kesin çözümler, çeşitli tasarım parametreleri açısından çözümlerin içsel özelliklerini açıkça göstermektedir.

Reddy (2000) fonksiyonel olarak derecelendirilmiş dikdörtgen plakların statik davranışını analiz etmek için üçüncü dereceden bir kayma deformasyon plak teorisini kullanmıştır. Plakların kalınlık boyunca izotropik iki bileşenli malzeme özelliğine sahip olduğu düşünülmektedir. Üçüncü derece doğrusal teori ve doğrusal olmayan birinci derece teorinin sayısal sonuçları ile malzemenin gerilme ve eğilme durumu sonuçları gösterilmiştir.

Zhou ve diğ. (2002) ince, orta ve çok kalın plakların serbest titreşimi için bir yöntem geliştirmişlerdir. Chebyshev polinomlarını içeren fonksiyonlar kullanmışlardır. Analiz doğrusal üç boyutlu bir elastisite teorisine dayanmaktadır.

Chakraborty ve diğ. (2003) birinci dereceden kayma deformasyon teorisine dayalı, kalınlığı boyunca elastik ve termal özellikleri değişen yeni bir malzeme geliştirmişlerdir. Bu malzeme fonksiyonel olarak derecelenmiş yapıların termoelastik davranışını incelemek için geliştirilmiştir.

Daloğlu (2004) elastik zemine oturan plaklar için boyutsuz parametreler kullanarak analiz yapmıştır. Tekil yüke maruz plak problemini Winkler modeliyle çözümlmek için zemin parametresini elde etmek üzere bir yöntem geliştirmiştir.

Vel ve Batra (2004) çalışmalarında, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş dikdörtgen plakların serbest ve zorlanmış titreşimleri için üç boyutlu kesin bir çözüm sunmuşlardır. Bu çalışmada, plakların basit mesnetli yapılar üzerindeki titreşim özelliklerini detaylı bir şekilde incelemişlerdir. Elde edilen sonuçlar, fonksiyonel derecelendirme özelliği gösteren plakların titreşim davranışının daha iyi anlaşılmasına katkı sağlamaktadır.

Daloglu ve Ozgan (2004) çalışmalarında elastik temel üzerine oturan plakların yüklemeye ve plak boyutuna göre belirlenen gerilme dağılımını kullanarak zemin derinliğinin hesaplanmasını amaçlamışlardır. Bu çalışma ile toprak altındaki yükten etkilenen zeminin, etkili derinliğini elde eden tekrarlı bir yöntem geliştirmişlerdir.

Eser (2004) elastik zemine oturan kirişli ve kirişsiz plaklar ile ilgili çalışmalar yapmışlardır. Çalışmada Winkler zemin modeli kullanılmıştır. Plak için belirlenen düğüm noktası parametrelerini göz önünde bulundurarak yer değiştirme fonksiyonu belirlenmiştir.

Qian ve diğ. (2004) kalın dikdörtgen fonksiyonel olarak derecelendirilmiş plakların statik deformasyonları, serbest ve zorlanmış titreşimleri incelemişlerdir. Yüksek mertebeden kayma deformasyon teorisi Petrov-Galerkin yöntemi ele alınarak çözümlenmiştir. Plakların darbe yüklerine tepkisi de incelenmiştir.

Zenkour (2005) basit mesnetli fonksiyonel derecelendirilmiş sandviç plağın burkulmasını incelemek için sinüzoidal kayma deformasyonu plak teorisi kullanılmıştır. Serbest titreşim için ise dönme atalet etkileri dikkate alınmıştır. Plağın toplam kalınlığına göre çekirdek kalınlığının kritik burkulma yükü üzerindeki etkisi ve öz frekanslar araştırılmıştır.

Ferreira ve diğ. (2006) birinci ve üçüncü mertebeden kayma deformasyon teorisini Mori-Tanaka homojenleştirme tekniği kullanarak fonksiyonel derecelendirilmiş plakların serbest titreşim analizlerini araştırmışlardır.

Özarslan (2007) Zirkonyum ve Alüminyum malzemelerinden oluşan fonksiyonel derecelenmiş bir plağın farklı birleşim oranlarında serbest titreşim analizi yapılarak doğal frekanslarını hesaplamıştır. Hareket denklemlerini klasik plak teorisine dayalı Navier metodu ile hesaplamıştır. Plağa belirli bir yük yükleyip sonuçları incelenmiş ve daha sonra Runge-Kutta iterasyon yöntemi kullanılarak yer değiştirmeleri hesaplamışlardır.

Uymaz ve Aydoğdu (2007) malzeme özelliklerinin kalınlık koordinatının bir kuvvet formu olarak değiştiği varsayılmaktadırlar. Ritz titreşim problemini çözmek için Chebyshev yer değiştirme fonksiyonlarını kullanılmışlardır.

Huang ve diğ. (2008) fonksiyonel derecelendirilmiş kalın levhalar için üç boyutlu elastisite teorisine dayalı kesin çözümler sunmaktadırlar. Zeminin yük durumu, rijitliği ve gradyan indisi plaklarının durumları incelenmiştir.

Nagino ve diğ. (2008) herhangi bir kalınlık ve keyfi sınır koşulları ile izotropik dikdörtgen plakların 3 boyutlu serbest titreşim analizi incelemişlerdir. Çalışmalarında B-spline Ritz yöntemi kullanmışlardır. Kullanılan yöntem ile seri, yerinde sayan yakınsamalar ile yüksek doğruluk elde edilmiştir.

Matsunaga (2008) fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemelerden yapılmış plakların burkulma gerilmeleri normal ve enine kayma etkilerini hesaba katarak deformasyonları, dönme eylemsizliği ve doğal frekansları analiz etmiştir. Analizler Hamilton prensibi kullanılarak incelenmiştir.

Avey ve diğ. (2009) çalışmalarında Winkler zeminine oturan basit mesnetli seramik, metal ve fonksiyonel derecelenmiş tabakadan oluşan üç katmanlı kompozit silindirik kabukların burkulmasını araştırmışlardır. Galerkin yöntemi kullanılarak basınç yükü için analitik ifadeler elde etmişlerdir.

Malekzadeh (2009) iki parametrelili elastik zemin üzerinde fonksiyonel olarak derecelenmiş üç boyutlu (3D) serbest titreşim analizlerini araştırmaktadır. Çalışmasında, hareket denklemlerini çözmek için diferansiyel kareleme yöntemi ve seri çözümü kombinasyonunu kullanmıştır.

Lü ve diğ. (2009) 3 boyutlu elastisite teorisine dayanarak, elastik temel üzerine oturan kalın plakların titreşim analizini incelemişlerdir. Pasternak zemini ve plak yüzeyi arasındaki etkiler incelenmiştir. Zemin desteği, sertliği ve indeksinin doğal frekanslara olan tepkileri detaylandırılmıştır.

Kitipornchai ve diğ. (2009) açık kenar çatlağı içeren fonksiyonel olarak derecelenmiş malzemelerden yapılmış Timoshenko kirişlerinin doğrusal olmayan titreşimi üzerine çalışmışlardır. Çatlak olan kesit kütleli elastik bir dönme yayı ile modellemişlerdir. Eğilme-uzama bağlantısından dolayı pozitif ve negatif genlik değerlerinde farklı titreşim davranışı gösterdiği bulunmuştur.

Şık (2010) değişken derinlikli iki parametrelili elastik zemine oturan plakların serbest titreşim analizini Vlasov zemin modeli esas alarak hesaplamıştır. Virtüel iş teoremi kullanılarak iç ve dış kuvvetlerin yaptığı tepkimeler incelenmiştir.

Atmane ve diğ. (2010) yeni bir kayma deformasyon teorisi kullanarak Winkler–Pasternak elastik zemindeki deformasyon teorisi incelenmişlerdir. Hamilton'un prensibi, Navier tekniği gibi yöntemler ile kapalı form çözümler gösterilmiştir.

Hosseini ve diğ. (2010) Winkler veya Pasternak elastik temelleri tarafından desteklenen orta kalınlıkta dikdörtgen plakların serbest titreşim analizi üzerine çalışma yapmışlardır.

Şimşek (2010) farklı sınır şartlarını içeren fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) kirişleri, birinci mertebeden ve yüksek mertebeden kayma deformasyon kiriş teorilerini kullanarak temel frekans analizi gerçekleştirmiştir.

Shaban ve Alipour (2011) fonksiyonel olarak derecelendirilmiş kalın dairesel yapıların serbest titreşim analizini yapmışlardır. Bu çalışmada, denklemler birinci dereceden kayma deformasyonu temel alınarak türetilmiştir.

Çalım ve Akkurt (2011) elastik zemine oturan doğru ve daire eksenli kirişlerin statik ve serbest titreşim analizleri incelemiştir. Yönetim denkleminin elde edilmesinde Timoshenko kiriş teorisi benimsenmiştir. Laplace alanında elde edilen skaler formdaki adi diferansiyel denklemler tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür.

Baferani ve diğ. (2011) iki parametrelili elastik zemine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş dikdörtgen plağın titreşim analizini sunmuşlardır. Üçüncü dereceden kayma deformasyon plak teorisine dayanan yer değiştirme yöntemi kullanmışlardır.

Adıgüzel (2011) Winkler elastik zemin üzerine oturan fonksiyonel değişimli katman içeren üç katmanlı silindirik kabukların burulma yükü etkisi altında burkulma problemini ele almışlardır.

Thai ve Choi (2011, 2012) elastik zemine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş plaklar için iki parametrelili bir plak teorisi geliştirmişlerdir. Bu teori, plak kalınlığı boyunca enine kayma gerilmelerinin ikinci dereceden değişiminin nasıl olduğunu anlatmaktadır.

Yas ve diğ. (2012) Pasternak temelleri üzerine oturan fonksiyonel dereceli piezoelektrik (FDPM) dairesel plakların üç boyutlu serbest titreşim analizi üzerine çalışmışlardır.

Hebali ve diğ. (2014) fonksiyonel derecelenmiş plaklarda yeni bir yarı üç boyutlu (3D) hiperbolik kayma deformasyon teorisi geliştirerek eğilme ve serbest titreşim analizini incelemiştir.

Mantari ve diğ. (2014) elastik zemin üzerine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş plakların serbest titreşim analizini sunmuşlardır. Navier tipi kapalı çözümler kullanmışlardır. Kullandıkları yer değiştirme alanı, yeni bir polinom olmayan yüksek dereceli kayma deformasyonuna dayanmaktadır.

Akavci (2014) fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemelerden yapılmış ve elastik zemine oturan kalın plakların serbest titreşim analizini, enine kayma deformasyonlarının etkisini dikkate alarak açıklamıştır.

Şimşek ve diğ. (2015) elastik zemine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) bir plağın statik davranışını Ritz yöntemi ile Kirchhoff-Love plak teorisini dikkate alarak çalışmışlardır. Çalışmalarında farklı malzeme çeşitleri, sınır koşulları ve zemin parametreleri üzerindeki etkilerini incelemişlerdir.

Fazzolari (2016) keyfi sınır şartları kullanılarak fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin serbest titreşim analizleri incelenmiştir. Analizi yer değiştirme bileşenlerinin güç serisi yöntemi kullanılarak ve değişken-kinematik yarı-3B kiriş teorilerine dayanılarak çözümlenmiştir.

Mechab ve diğ. (2016) porozite etkilerini içeren iki değişkenli rafine plağı ayrıntılı olarak incelemiş ve tartışmışlardır. Winkler ve Pasternak elastik zemine oturan fonksiyonel derecelenmiş nano plağın serbest titreşim analizini araştırmışlardır.

Shahsavari ve diğ. (2018) fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemelerin serbest titreşim analizi için yeni üç boyutlu bir hiperbolik teori sunmuşlardır. Çalışmada, üç farklı porozite dağılım modelini (eşit, eşit olmayan dağılım ve logaritmik-düzensiz) dikkate almışlardır. Hareket denklemlerinin çözümü için bir Galerkin yöntemi geliştirilmişlerdir ve alanda önemli ilerlemeler kaydetmişlerdir.

Aşık (2021) fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerden (FDM) oluşan sandviç kirişin serbest titreşim analizi üzerine çalışmışlardır. Beş farklı sınır koşulları ile ilk üç mod için doğal frekans değerleri hesaplanmıştır.

Aktaş (2021) fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin, mekanik ve ısı yükleri altındaki burkulma davranışını matematiksel olarak modellemişlerdir. Bu modelden elde edilen sonuçları sonlu elemanlar metodundan çıkan sonuçlar ile karşılaştırma yapmışlardır.

Cuma ve diğ. (2023) viskoelastik gözenekli fonksiyonel derecelenmiş kabukların zamanla değişen yük altındaki sönümlü zorlanmış titreşiminin parametrik çalışmasını yapmışlardır. Yer değiştirme alanını yüksek mertebeden kayma deformasyon teorisi kullanarak elde etmişlerdir.

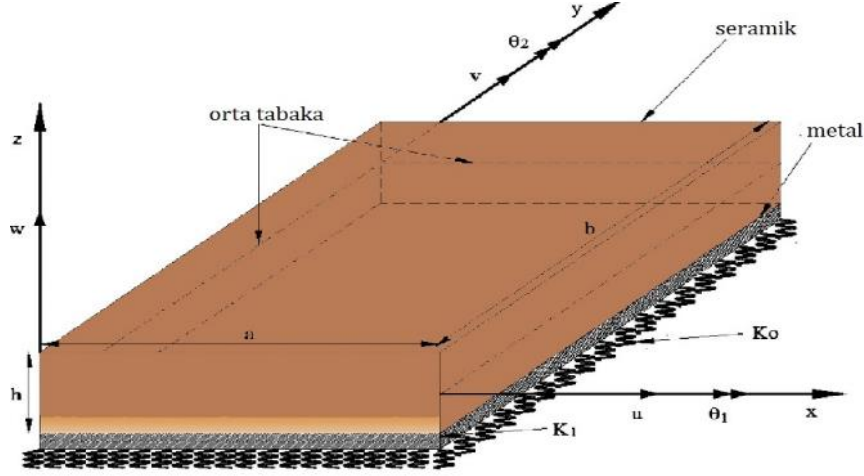
Elde edilen sonuçları zaman alanına aktarmak için Durbin'in ters Laplace algoritmasını kullanmışlardır.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, elastik zemine oturan fonksiyonel olarak derecelenmiş plâğın serbest titreşimini hesaplamak için kullanılacak matematiksel formüller elde edilmektedir.

3.1. Elastik Zemine Oturan Fonksiyonel Derecelenmiş Plak

Elastik zemine oturan fonksiyonel derecelenmiş plak Şekil 2'de gösterilmiştir. Bu çalışmada, a uzunluğuna, b genişliğine ve h üniform kalınlığına sahip olan seramik ve metal karışımından oluşan fonksiyonel derecelenmiş plak incelenmektedir. Plak geometrisi ve boyutları x, y, z Kartezyen koordinat sistemine bağlı olup orijin (sıfır noktası) plâğın merkezindedir ve eksenler plak kenarlarına paraleldir. Malzeme özelliklerindeki değişimde kalınlık doğrultusu esas alınmaktadır. Şekil 2'de $z = 0$ düzlemi orta düzlemdir. Fonksiyonel derecelenmiş plak bileşiminde üst yüzeyinin ($z = h/2$) seramik, alt yüzeyinin ($z = -h/2$) metal olduğu kabul edilmektedir.



Şekil 2. Elastik zemine oturan fonksiyonel derecelenmiş plak

Fonksiyonel olarak derecelenmiş plağın malzeme özellikleri olan, elastisite modülü (E), kütsel yoğunluk (ρ), kayma modülü (G) ve Poisson oranı (ν) kalınlık boyunca fonksiyona bağlı olarak değişmektedir.

3.1.1. Karışım Kuralı

Klasik karışım kuralı, birçok araştırmacı tarafından fonksiyonel derecelenmiş malzemelerin etkin özelliklerinin değişiminin tanımlanmasında yaygın olarak kullanılan en basit tekniktir. FDM için kalınlık doğrultusunda karışım kuralı Denklem (1)'de verilmiştir.

$$P(z) = P_m V_m + P_c V_c \quad (1)$$

$P(z)$ plağın eksen boyunda etkin malzeme özelliklerinin değişimini veren fonksiyondur. Burada, P_m ve P_c sırasıyla plağın üst ve alt yüzeylerindeki malzeme özelliğini temsil etmektedir. V_m ve V_c ise sırasıyla plağın metal ve seramik hacim oranını ifade etmektedir. Bu hacim oranları arasındaki ilişki şu şekildedir.

$$V_m + V_c = 1 \quad (2)$$

$$V_c(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p, z \in \left[-h/2, h/2 \right], (0 \leq p \leq \infty) \quad (3)$$

Burada, p hacim oranının plak kalınlığı boyunca değişimini belirleyen malzeme değişim katsayısıdır. Bu katsayı, plak kalınlığı boyunca malzeme oranlarının değişimini belirleyen en

önemli katsayısıdır. Denklem (1)'de verilen karışım kuralına, Denklem (2)' yerleştirilerek Denklem (4) elde edilmiş olur.

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m)V_m \quad (4)$$

Denklem (3)'ün dikkate alınmasıyla etkili malzeme özelliklerinin değişimi aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (5)$$

Fonksiyonel derecelenmiş plağın elastisite modülünün kalınlıkla değişimi $E(z)$, yoğunluk değişimi $\rho(z)$ fonksiyonu olarak tanımlanmıştır. Bu çalışmadaki plağın malzeme özellikleri aşağıdaki denklemlerde gösterilmiştir.

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (6)$$

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (7)$$

Burada E_m ve E_c sırasıyla metal ve seramik malzemenin elastisite modülünü ρ_m ve ρ_c sırasıyla metal ve seramik yoğunluğunu temsil etmektedir. Plağın alt ve üstünün elastisite modülü incelenecek olursa, $z = \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right]$ ifadeleri ayrı ayrı yerleştirilir ve sonuç olarak;

$$E(z) = E_c, \quad E(z) = E_m \text{ ifadeleri elde edilir.}$$

3.2. Yer Değiştirme ve Gerilme Denklemleri

Birinci mertebeden kayma deformasyon teorisi kullanılarak bir plağın herhangi bir noktadaki yer değiştirme alanı kartezyen koordinat sistemine bağlı olarak elde edilmektedir.

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) \quad (8.a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) \quad (8.b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y, t) \quad (8.c)$$

Burada u, v, w sırasıyla x, y, z yönlerindeki yer değiştirmeleri ifade etmektedir. u_0, v_0 ve w_0 ise orta düzlem yer değiştirmelerini ifade etmektedir. θ_x ve θ_y orta düzlem normalinin sırasıyla x eksenindeki ve y eksenindeki dönmeleridir. Deplasman birim şekil değiştirme arasındaki bağlantı Denklem (9) ile sağlanmaktadır.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = u_{0,x} + z\theta_{x,x} \quad (9.a)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = v_{0,y} + z\theta_{y,y} \quad (9.b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = u_{0,y} + v_{0,x} + z(\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) \quad (9.c)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = w_{0,y} + \theta_y \quad (9.d)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} = w_{0,x} + \theta_x \quad (9.e)$$

Hooke kanuna göre gerilme ve şekil değiştirme arasındaki bünye bağıntıları aşağıda gösterildiği gibidir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

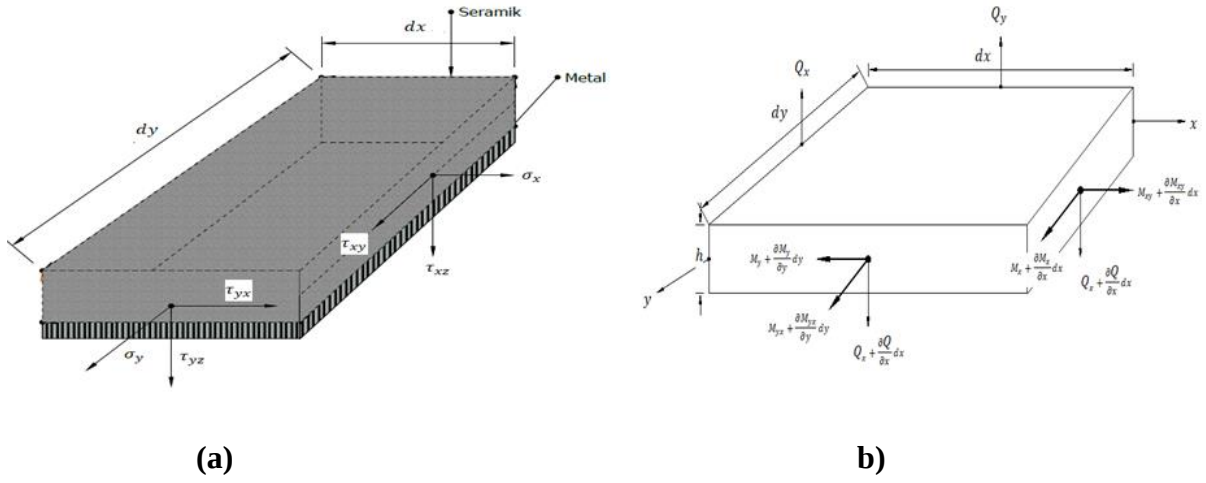
Plakın kalınlığıyla kıyaslandığında z yönündeki deplasmanlar oldukça küçük kalmaktadır. Birinci mertebe ilkesi gereği z yönündeki şekil değiştirme ve gerilmeler sıfır olarak kabul edilmektedir. Denklemdaki Q_{ij} terimleri mühendislik sabitlerinden elde edilen rijitlik parametreleridir.

$$Q_{11} = Q_{22} = E(z)/(1 - \nu^2) \quad (11.a)$$

$$Q_{12} = \nu E(z)/(1 - \nu^2) \quad (11.b)$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = E(z)/2(1 - \nu) \quad (11.c)$$

Şekil 3'te sırasıyla bir plak elemanının yüzeylerine etki eden gerilmeler ve moment ve kuvvetler görülmektedir. Gerilmelerin toplamını veren iç kuvvetler ve momentler aşağıdaki şekil ve denklemlerde ifade edilmektedir.



Şekil 3. a) Gerilmeler, b) Kuvvet ve momentler

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, & N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \\
 M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz, & M_{yx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z dz, \\
 Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} z dz, & Q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} z dz
 \end{aligned} \tag{12}$$

Yukarda verilen denklemlerde görüldüğü üzere momentler ve kesme kuvvetleri plağın gerilme parametrelerine bağlıdır. Ayrıca, M_{xy} , $-M_{yx}$ 'e eşit olmaktadır.

3.3. Kinematik Bağlantılar ve Hareket denklemleri

3.3.1. Hamilton Prensibi

Bu bölümde malzeme özellikleri kalınlığı boyunca değişen fonksiyonel derecelenmiş plaklara, enerji prensiplerinin uygulanması incelenmektedir. Fonksiyonel derecelenmiş plağa ait toplam enerji şu şekilde ifade edilir:

$$\Pi = V + V_e - T \tag{13}$$

Denklem (13)'te toplam enerji denkleminin zamana göre türevi ve varyasyonu alınarak Hamilton prensibi uygulanmış olur. Hamilton prensibinden keyfi bir zaman aralığında hareket

denklemleri belirlenebilir. Burada, V şekil değiştirme enerjisi, T ise plağın kinetik enerjisi olup aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (V + V_e - T) dt = 0 \quad (14)$$

$$V = \frac{1}{2} \int (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}) dV \quad (15)$$

$$T = \frac{1}{2} \int \rho(z) [(u_{,t})^2 + (v_{,t})^2 + (w_{,t})^2] dV \quad (16)$$

V_e elastik zeminin potansiyel enerjisi olup aşağıdaki gibi elde edilir.

$$V_e = \frac{1}{2} \int \left\{ k_0 w^2 + k_1 \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dA \quad (17)$$

Burada $\rho(z)$ birim hacim başına düşen kütleli yoğunluğu, k_0 ve k_1 sırasıyla Winkler ve Pasternak zemin parametrelerini göstermektedir.

Denklem (14)'de yer alan δ ifadesi varyasyon sembolüdür. Şekil değiştirme enerjisi, kinetik ve zeminin potansiyel enerjisi Denklem (14)'te verilen Hamilton prensibinde yerine yerleştirilerek aşağıdaki Denklem (18)'e ulaşılmaktadır.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\int (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}) - \rho(z)(\ddot{u}\delta u + \ddot{v}\delta v + \ddot{w}\delta w) \right) dv + \int \left[k_0 w \delta w + k_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right] dA \right) dt = 0 \quad (18)$$

Denklem (18)'deki ifadenin şekil değiştirme enerjisi varyasyonu Denklem (9.a)'dan yararlanılarak aşağıda olduğu gibi ifade edilmektedir.

$$\delta \int \sigma_{xx} u_{0,x} dv = \delta (N_x u_{0,x}) = \frac{d(N_x u_{0,x})}{d(u_0)} - \frac{d}{dx} \left(\frac{d(N_x u_{0,x})}{d(u_{0,x})} \right) = -N_{x,x} \delta u_0 \quad (19)$$

Yukardaki elde edilen eşitlik benzeri işlemler diğer gerilme bileşenleri için yapılır ve şekil değiştirme enerjisinin varyasyonu aşağıdaki formu alır.

$$(20)$$

$$\delta V = -N_{x,x}\delta u_0 - M_{x,x}\delta\theta_x - N_{y,y}\delta v_0 - M_{y,y}\delta\theta_y - N_{xy,y}\delta u_0 - N_{xy,x}\delta v_0 - M_{xy,y}\delta\theta_x - M_{xy,x}\delta\theta_y - Q_{x,x}\delta w_0 + \theta_x\delta\theta_x - Q_{y,y}\delta w_0 + \theta_y\delta Q_y$$

Plak kinetik enerjisinin varyasyonu ise aşağıda görüldüğü gibi elde edilmektedir.

$$\delta T = p(z)(-\ddot{u}\delta u - \ddot{v}\delta v - \ddot{w}\delta w)$$

$$\delta T = p(z)(-\ddot{u}_o\delta u_0 - \ddot{u}_oz\delta\theta_x - z\ddot{\theta}_x\delta u_0 - z^2\ddot{\theta}_x\delta\theta_x - \ddot{v}_o\delta v_0 - z\ddot{v}_o\delta\theta_y - z\ddot{\theta}_y\delta v_0 - z^2\ddot{\theta}_y\delta\theta_y - w_o\delta w_0) \quad (21)$$

Zemin gerilme enerjisinde varyasyon için gerekli türevler alınırsa denklem son hali aşağıdaki gibidir.

$$\delta V_e = k_0 w_0 \delta w_0 - k_1(w_{0,x,x} + w_{0,y,y})\delta w_0 \quad (22)$$

Varyasyonları elde edilen δV , δT ve δV_e Hamilton prensibinde yerine yerleştirilerek aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

$$\int_{-h/2}^{h/2} (-N_{x,x}\delta u_0 - M_{x,x}\delta\theta_x - N_{y,y}\delta v_0 - M_{y,y}\delta\theta_y - N_{xy,y}\delta u_0 - N_{xy,x}\delta v_0 - M_{xy,y}\delta\theta_x - M_{xy,x}\delta\theta_y - Q_{x,x}\delta w_0 + \theta_x\delta\theta_x - Q_{y,y}\delta w_0 + \theta_y\delta Q_y) + (k_0 w_0 \delta w_0 - k_1(w_{0,x,x} + w_{0,y,y})\delta w_0) - p(z)(-\ddot{u}_o\delta u_0 - \ddot{u}_oz\delta\theta_x - z\ddot{\theta}_x\delta u_0 - z^2\ddot{\theta}_x\delta\theta_x - \ddot{v}_o\delta v_0 - z\ddot{v}_o\delta\theta_y - z\ddot{\theta}_y\delta v_0 - z^2\ddot{\theta}_y\delta\theta_y - w_o\delta w_0)dt \quad (23)$$

Denklem (23)'te elde edilen varyasyonlu Hamilton prensibindeki ifadeler sırasıyla $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta\theta_x, \delta\theta_y$ parantezine alınarak aşağıdaki ifadelere ulaşılmaktadır.

$$\int_{-h/2}^{h/2} (-N_{x,x} - N_{xy,x} + p(z)\ddot{u}_o + p(z)z\ddot{\theta}_x)\delta u_0 dt \quad (24)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} (-N_{y,y} - N_{xy,y} + p(z)\ddot{v}_o + p(z)z\ddot{\theta}_y)\delta v_0 dt \quad (25)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} (-\theta_{x,x} - \theta_{y,y} + k_0 w_0 - k_1(w_{0,x,x} + w_{0,y,y}) + p(z)\ddot{w}_o)\delta w_0 dt \quad (26)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} (-M_{x,x} - M_{xy,y} + \theta_x + p(z)z\ddot{u}_o + p(z)z^2\ddot{\theta}_x)\delta\theta_x dt \quad (27)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} (-M_{y,y} - M_{xy,x} + \theta_y + p(z) z \ddot{v}_o + p(z) z^2 \ddot{\theta}_y) \delta \theta_y dt \quad (28)$$

Varyasyon parantezine alınan bu 5 adet denklem hareket denkleminin elde edilmesinde önem arz etmektedir.

3.2.1. Hareket Denklemleri

Denklem (24-28) arasındaki integral denklemlerinde, varyasyonlu yer değiştirme ve dönme katsayıları parantezine alınarak, hareket denklemleri elde edilmektedir.

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = I_0 \ddot{u}_o + I_1 \ddot{\theta}_x \quad (29.a)$$

$$N_{y,y} + N_{xy,x} = I_0 \ddot{v}_o + I_1 \ddot{\theta}_y \quad (29.b)$$

$$M_{x,x} + M_{xy,x} + Q_x = I_1 \ddot{u}_o + I_2 \ddot{\theta}_x \quad (29.c)$$

$$M_{y,y} + M_{xy,y} + Q_y = I_1 \ddot{v}_o + I_2 \ddot{\theta}_y \quad (29.ç)$$

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} - k_0 w_0 + k_1 (w_{0,x} + w_{0,y}) = I_0 w_0 \quad (29.d)$$

Buradaki I_i atalet katsayılarıdır ve şu şekilde ifade edilir.

$$I_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz \quad (30.a)$$

$$I_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z dz \quad (30.b)$$

$$I_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z^2 dz \quad (30.c)$$

3.2.2. Kuvvet ve Momentler

Denklem (12)'de ifade edilen kuvvet ve moment integrallerinin içerisindeki gerilme ifadeleri Denklem (10)'dan alınarak denklemin içerisine yazılır. Daha sonra Denklem (9)'daki şekil değiştirme bağlantıları kullanılarak kuvvet ve momentler ayrı ayrı elde edilir.

$$N_x = A_{11} u_{0,x} + B_{11} \theta_{x,x} + A_{12} v_{0,y} + B_{12} \theta_{y,y} \quad (31.a)$$

$$N_{x,y} = A_{66} u_{0,yy} + B_{66} \theta_{x,yy} + A_{66} v_{0,xy} + B_{66} \theta_{y,x} \quad (31.b)$$

$$N_y = A_{12} u_{0,xy} + B_{12} \theta_{x,xy} + A_{22} v_{0,yy} + B_{22} \theta_{y,yy} \quad (31.c)$$

$$Q_x = A_{55} w_{0,x} + A_{55} \theta_x \quad (31.d)$$

$$Q_y = A_{44} w_{0,y} + A_{44} \theta_y \quad (31.e)$$

$$M_x = B_{11} u_{0,x} + D_{11} \theta_{x,x} + B_{12} v_{0,y} + D_{12} \theta_{y,y} \quad (31.f)$$

$$M_{xy} = B_{66}u_{0,y} + D_{66}\theta_{x,y} + B_{66}v_{0,x} + D_{66}\theta_{y,x} \quad (31.g)$$

$$M_y = B_{12}u_{0,xy} + D_{12}\theta_{x,xy} + B_{22}v_{0,yy} + D_{22}\theta_{y,yy} \quad (31.h)$$

Buradaki A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} katsayıları yer değiştirme parametreleridir ve şu şekilde hesaplanır.

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} dz \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (32.a)$$

$$B_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} z dz \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (32.b)$$

$$D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} z^2 dz \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (32.c)$$

3.1.3. Navier Metodu

Kısmi diferansiyel denklemin analitik çözümü için belirli sınır koşulları altında çift Fourier serilerine dayalı Navier yöntemi kullanılmıştır. Navier yöntemi kullanılarak, yer değiştirme değişkenlerinin çözümü aşağıdaki Fourier serisi şeklinde ifade edilebilir.

$$u_0(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \quad (33.a)$$

$$v_0(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \quad (33.b)$$

$$w_0(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \quad (33.c)$$

$$\theta_x(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{xmn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \quad (33.ç)$$

$$\theta_y(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{ymn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \quad (33.d)$$

$$\alpha = \frac{m\pi x}{a}, \beta = \frac{n\pi y}{b} \quad (33.e)$$

Burada $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, T_{xmn}$ ve T_{ymn} bilinmeyen deplasman parametreleridir.

Navier metodu ile elde edilen deplasmanlar kuvvet ve moment ifadelerinde yerine yerleştirilerek aşağıdaki ifadeye ulaşılmaktadır.

$$N_{x,x} = A_{11}(-A_{mn}\alpha^2 \cos \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t}) + B_{11}(-T_{xmn}\alpha^2 \cos \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t}) + A_{12}(-B_{mn}\alpha\beta \cos \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t}) + B_{12}(-T_{ymn}\alpha\beta \cos \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t}) \quad (34.a)$$

$$N_{xy,y} = A_{66}(-A_{mn}\beta^2 \cos \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t}) + B_{66}(-T_{xmn}\beta^2 \cos \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t}) + A_{66}(-B_{mn}\alpha\beta \cos \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t}) + B_{66}(-T_{ymn}\alpha\beta \cos \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t}) \quad (34.b)$$

$$N_{xy,x} = A_{66}(-A_{mn}\alpha\beta \sin \alpha x \cos \beta y e^{i\omega t}) + B_{66}(-T_{xmn}\alpha\beta \sin \alpha x \cos \beta y e^{i\omega t}) + A_{66}(-B_{mn}\alpha^2 \sin \alpha x \cos \beta y e^{i\omega t}) + B_{66}(-T_{ymn}\alpha^2 \sin \alpha x \cos \beta y e^{i\omega t}) \quad (34.c)$$

$$N_{y,y} = A_{12}(-A_{mn}\alpha\beta \sin \alpha x \cos \beta y e^{i\omega t}) + B_{12}(-T_{xmn}\alpha\beta \sin \alpha x \cos \beta y e^{i\omega t}) + A_{22}(-B_{mn}\beta^2 \sin \alpha x \cos \beta y e^{i\omega t}) + B_{22}(-T_{ymn}\beta^2 \sin \alpha x \cos \beta y e^{i\omega t}) \quad (34.ç)$$

$$Q_x = A_{55}(-C_{mn}\alpha^2 \sin \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t}) + A_{55}(-T_{xmn}\alpha \sin \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t}) \quad (34.d)$$

$$Q_y = A_{44}(-C_{mn}\beta^2 \sin \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t}) + A_{44}(-T_{ymn}\alpha \sin \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t}) \quad (34.e)$$

$$M_{x,x} = B_{11}(-A_{mn}\alpha^2 \cos \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t}) + D_{11}(-T_{xmn}\alpha^2 \cos \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t}) + B_{12}(-B_{mn}\alpha\beta \cos \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t}) + D_{12}(-T_{ymn}\alpha\beta \cos \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t}) \quad (34.f)$$

$$M_{xy,y} = B_{66}(-A_{mn}\beta^2 \cos \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t}) + D_{66}(-T_{xmn}\beta^2 \cos \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t}) + B_{66}(-B_{mn}\alpha\beta \cos \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t}) + D_{66}(-T_{ymn}\alpha\beta \cos \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t}) \quad (34.g)$$

$$M_{y,y} = B_{12}(-A_{mn}\alpha\beta \sin \alpha x \cos \beta y e^{i\omega t}) + D_{12}B_{66}(-T_{xmn}\alpha\beta \sin \alpha x \cos \beta y e^{i\omega t}) + B_{22}(-B_{mn}\alpha^2 \sin \alpha x \cos \beta y e^{i\omega t}) + D_{22}(-T_{ymn}\alpha^2 \sin \alpha x \cos \beta y e^{i\omega t}) \quad (34.h)$$

3.3. Özdeğer Problemi Çözümü

Navier metodu yardımıyla elde edilen Denklem (34)'teki kuvvet ve momentler ve Denklem (33)'te verilen Fourier serisindeki deplasmanlar, Denklem (29)'daki hareket denklemlerine yerleştirilir ve elde edilen ifade $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, T_{xmn}, T_{ymn}$ parantezine alınır ve aşağıdaki matris elde edilir.

$$\left(\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ . & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ . & . & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ . & . & . & k_{44} & k_{45} \\ . & . & . & . & k_{55} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & I_1 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & I_1 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \\ T_{xmn} \\ T_{ymn} \end{Bmatrix} = 0 \quad (35)$$

Denklem (35)'teki matrisin kapalı hali aşağıda verilmiştir.

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\Delta = 0 \quad (36)$$

Burada $[\mathbf{K}]$ ve $[\mathbf{M}]$ sırasıyla rijitlik ve kütle matrisleri Δ ise bilinmeyen yer vektörünü temsil eder ve aşağıdaki gibi gösterilir. $\mathbf{K}$ matrisinin elemanları aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} k_{11} &= A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2 \\ k_{12} &= \alpha\beta(A_{12} + A_{66}) \\ k_{13} &= 0 \\ k_{14} &= B_{11}\alpha^2 + B_{66}\beta^2 \\ k_{15} &= \alpha\beta(B_{12} + B_{66}) \\ k_{22} &= A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2 \\ k_{23} &= 0 \\ k_{24} &= \alpha\beta(C_{12} + C_{66}) \\ k_{25} &= B_{66}\alpha^2 + B_{22}\beta^2 \\ k_{33} &= +A_{55}\alpha^2 + A_{44}\beta^2 + k_0 + k_1(\alpha^2 + \beta^2) \\ k_{34} &= \alpha A_{55} \\ k_{35} &= \alpha A_{44} \\ k_{44} &= D_{11}\alpha^2 + D_{66}\beta^2 + A_{55} \\ k_{45} &= \alpha\beta(D_{12} + D_{66}) \\ k_{55} &= D_{66}\alpha^2 + D_{22}\beta^2 + A_{44} \end{aligned} \quad (37)$$

Denklem (37)'deki özdeğer problemi çözülerek temel frekans değerleri elde edilmektedir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu tez kapsamında elastik zemine oturan fonksiyonel derecelenmiş sabit mesnetli plaklar için serbest titreşim analizi gerçekleştirilmiştir. Deplasman alanların elde edilmesinde birinci mertebeden kayma deformasyon teorisi kullanılmıştır. Hareket denklemleri elde edilirken Hamilton prensibinden yararlanılmıştır. Hamilton prensibinden elde edilen hareket denklemleri Navier metodu ile çözülmüş ve temel frekans değerleri elde edilmiştir. Bu analiz için Mathematica programı kullanılarak bir algoritma geliştirilmiştir. Önerilen algoritmanın doğruluğunu ispatlamak amacıyla fonksiyonel derecelenmiş sabit mesnetli plaklar için birkaç serbest titreşim analizi gerçekleştirilmiştir. Elde edilen temel frekans değerleri literatürdeki çalışmalarla karşılaştırılmış ve geliştirilen algoritmanın doğruluğu gösterilmiştir. Sonrasında parametrik bir çalışma kapsamında serbest titreşim analizleri gerçekleştirilmiş ve elde edilen temel frekanslara çeşitli zemin parametreleri, malzeme değişim parametreleri, narinlik oranları, modlar ve malzeme özelliklerinin etkileri araştırılmıştır. Tüm örneklerde kullanılan malzemelerin özellikleri Tablo 1’de belirtilmiştir.

Tablo 1. Malzeme özellikleri

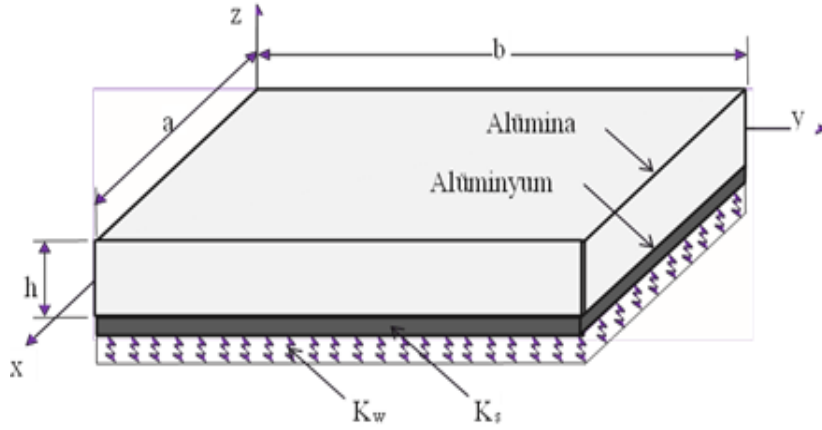
Malzeme			
	$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	$E(\text{GPa})$	ν
Alüminyum (Al)	2702	70	0.3
Alümina (Al_2O_3)	3800	380	0.3
Zirkonyum (ZrO_2)	5700	200	0.3

4.1. Örnek 1

Bu örnekte, sabit mesnetli elastik zemine oturan fonksiyonel derecelenmiş dikdörtgen plak problemi ele alınmıştır (Şekil 4). Analiz edilen plağın geometrik özellikleri $a = 1 \text{ m}$ ve $h = 0.15 \text{ m}$ 'dir. Plağın malzeme özellikleri Tablo 1'de verilmiştir. Bu örnekte temel frekans değerleri, farklı zemin parametreleri ($k_0 = 0, 100; k_1 = 0, 10$), malzeme değişim katsayıları ($p = 0, 0.25, 1, 5$) ve uzunluk genişlik oranları ($a/b = 0.5, 1, 2$) ile değişmektedir. Fonksiyonel derecelenmiş plak için kullanılan malzemeler Alüminyum (metal) ve Alümina'dır (seramik). Analizden elde edilen sonuçlar literatürde yer alan Akavci (2014), Hosseini-Hashemi diğ. (2010), Mantari diğ. (2014) çalışmaları ile karşılaştırmalı olarak Tablo 2'de verilmiştir. Aşağıda bu örnekte kullanılan boyutsuzlaştırma parametreleri verilmiştir.

$$A = \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} * \frac{p * (8 + 3 + p + p^2) * E_m + 3 * (2 + p + p^2) * E_c}{(1 + p) * (2 + p) * (3 + p)} \quad (38)$$

$$k_0 = (K_0 * A)/a^4, k_1 = (K_1 * A)/a^2$$



Şekil 4. Elastik zemine oturan Al/Al₂O₃ FDM plak

Tablo 2. Örnek 1'e ait boyutsuz temel frekans değerleri $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$

(k_0, k_1)	a/b	p	Mantari ve diğ. (2014)	Akavci (2014)	Hosseini ve diğ. (2010)	Mevcut çalışma
(0,0)	0.5	0	0.0801	0.0802	0.0801	0.0805
		0.25	0.0734	0.0734	0.0732	0.0736
		1	0.0614	0.0615	0.0634	0.0617
		5	0.0521	0.0522	0.0538	0.0528
	1	0	0.1248	0.1251	0.1248	0.1259
		0.25	0.1143	0.1146	0.1135	0.1123
		1	0.0960	0.0961	0.0964	0.0967
		5	0.0809	0.0809	0.0803	0.0825
	2	0	0.2853	0.2866	0.2851	0.2904
		0.25	0.2624	0.2636	0.2555	0.2666
		1	0.2210	0.2219	0.2059	0.2244
		5	0.1821	0.1823	0.1631	0.1893

Tablo 2. Örnek 1'e ait boyutsuz temel frekans değerleri $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ (devamı)

(k_0, k_1)	a/b	p	Mantari ve diğ. (2014)	Akavci (2014)	Hosseini ve diğ. (2010)	Mevcut çalışma
(100,10)	0.5	0	0.1287	0.1287	0.1287	0.1290
		0.25	0.1184	0.1185	0.1184	0.1122
		1	0.1038	0.1039	0.1052	0.0980
		5	0.0909	0.0910	0.0922	0.0859

1	0	0.1702	0.1704	0.1702	0.1641
	0.25	0.1565	0.1566	0.1560	0.1507
	1	0.1358	0.1359	0.1365	0.1303
	5	0.1177	0.1177	0.1179	0.1133
2	0	0.3278	0.3289	0.3277	0.3253
	0.25	0.3018	0.3030	0.2961	0.2990
	1	0.2583	0.2590	0.2467	0.2551
	5	0.2176	0.2178	0.2036	0.2179

Alüminyum(metal) ve Alümina malzemedan oluşan, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş dikdörtgen plakların boyutsuz temel frekanslarının farklı malzeme değişim katsayıları ($p = 0, 0.25, 1, 5$), zemin parametreleri ($k_0 = 0, 100; k_1 = 0, 10$) ve uzunluk genişlik oranları ($a/b = 0.5, 1, 2$) ile değişimi Tablo 2’de verilmiş ve literatür karşılaştırması yapılmıştır. Önerilen yöntemden elde edilen sonuçların literatürdeki çalışmalarla uyumlu olduğu görülmektedir.

4.2. Örnek 2

Bu problemde elastik zemine oturan fonksiyonel olarak derecelenmiş dikdörtgen plak için serbest titreşim analizi gerçekleştirilmiştir. Plak üst malzemesi Alüminyum (metal) ve alt malzemesi Alümina’dır (seramik). Analizde kullanılan fonksiyonel derecelendirilmiş plağın malzeme özellikleri Tablo 1’de verilmiştir. Plak, $a = 1\text{ m}$, $b = 2\text{ m}$ geometrik özelliğine sahiptir. Geliştirilen algoritmanın geçerliliğini test etmek için, elde edilen sonuçlar literatürdeki çeşitli araştırmacıların fonksiyonel derecelenmiş plakların boyutsuz frekans sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Tablo 3. Örnek 2’e ait boyutsuz temel frekans değerleri ($\bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\rho_c/E_c}$)

a/h	Mod		p						
		(m,n)	0	0.5	1	2	5	8	10
5	1,1	Mevcut çalışma	3.4747	2.9581	2.6694	2.4218	2.2750	2.2222	2.1917
		Hosseini ve diğ.(2010).	3.4409	2.9322	2.9408	2.4017	2.2528	2.1985	2.1677
		Thai ve Choi (2011)	3.4412	2.9347	2.6475	2.3949	2.1677	2.1697	2.1407

		Akavci (2014)	3.4495	2.9408	2.6529	2.3989	2.2275	2.1724	2.1455
		Mevcut çalışma	5.3559	4.5706	4.1273	3.7406	3.4988	3.4111	3.3624
	1,2	Hosseini ve diğ.(2010).	5.2802	4.5122	4.0773	3.6953	3.4492	3.3587	3.3094
		Thai ve Choi.(2011)	5.2813	4.5180	4.0781	3.6805	3.3938	3.2964	3.2514
		Akavci(2014)	5.3003	4.5321	4.0906	3.6900	3.3952	3.3031	3.2626
		Mevcut çalışma	5.3559	4.5706	4.1273	3.7406	3.4988	3.4111	3.3624
	1,2	Hosseini ve diğ.(2010).	5.2802	4.5122	4.0773	3.6953	3.4492	3.3587	3.3094
		Thai ve Choi.(2011)	5.2813	4.5180	4.0781	3.6805	3.3938	3.2964	3.2514
		Akavci(2014)	5.3003	4.5321	4.0906	3.6900	3.3952	3.3031	3.2626
		Mevcut çalışma	8.2364	7.0518	6.3737	5.7687	5.3646	5.2168	5.1388
	1,3	Hosseini ve diğ.(2010).	8.0710	6.9231	6.2636	5.6695	5.2579	5.1045	5.0253
		Thai ve Choi.(2011)	8.0749	6.9366	6.2663	5.6390	5.1425	4.9758	4.9055
		Akavci(2014)	8.1179	6.9690	6.2950	5.6614	5.1479	4.9921	4.9313
		Mevcut çalışma	10.357	8.8864	8.0370	7.2680	6.7334	6.5371	6.4363
	2,1	Hosseini ve diğ.(2010).	9.7416	8.6926	7.8711	7.1189	6.5749	5.9062	5.7518
		Thai ve Choi.(2011)	10.116	8.7138	7.8762	7.0751	6.5749	6.1846	6.1846
		Akavci(2014)	10.182	8.7640	7.9209	7.1105	6.4181	6.2111	6.1355
		Mevcut çalışma	3.6620	3.1060	2.8002	2.5446	2.4066	2.3577	2.3272
	1,1	Hosseini ve diğ.(2010).	3.6518	3.0983	2.7937	2.5386	2.3998	2.3504	2.3197
		Thai ve Choi.(2011)	3.6518	3.0990	2.7937	2.5364	2.3916	2.3411	2.3110
		Akavci(2014)	3.6542	3.1008	2.7952	2.5376	2.3915	2.3418	2.3124
10		Mevcut çalışma	5.7944	4.9187	4.4354	4.0291	3.8049	3.7251	3.6762
	1,2	Hosseini ve diğ.(2010).	5.7693	4.8997	4.4192	4.0142	3.7881	3.7072	3.6580
		Thai ve Choi.(2011)	5.7694	4.9014	4.4192	4.0118	3.7682	3.6846	3.6368
		Akavci(2014)	5.7754	4.9059	4.4231	4.0118	3.7682	3.6864	3.6403

Tablo 3. Örnek 2’ e ait boyutsuz temel frekans değerleri ($\bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\rho_c/E_c}$) (devamı)

a/h	Mod	p							
	(m,n)		0	0.5	1	2	5	8	10
10	1,3	Mevcut çalışma	9.2497	7.8618	7.0916	6.4384	6.0659	5.9327	5.8533
		Hosseini ve diğ.(2010).	9.1876	7.8145	7.0512	6.4015	6.0247	5.8887	5.8086
		Thai ve Choi.(2011)	9.1880	7.8189	7.0515	6.3886	5.9765	5.8341	5.7575

		Akavci(2014)	9.2029	7.8299	7.0612	6.3959	5.9766	5.8388	5.7662
		Mevcut çalışma	11.931	10.150	9.1587	8.3116	7.8175	7.6401	7.5362
	1,2	Hosseini ve diğ.(2010).	11.831	10.074	9.0928	8.2515	7.7505	7.5688	7.4639
		Thai ve Choi.(2011)	11.831	10.081	9.0933	8.2309	7.6731	7.4813	7.3821
		Akavci(2014)	11.856	10.099	9.1093	8.2428	7.6738	7.4892	7.3965
		Mevcut çalışma	3.7150	3.1476	2.8370	2.5793	2.4427	2.3967	2.3662
	1,1	Hosseini ve diğ.(2010).	3.7123	3.1456	2.8352	2.5777	2.4425	2.3948	2.3642
		Thai ve Choi.(2011)	3.7123	3.1458	2.8352	2.5771	2.4403	2.3923	2.3619
		Akavci(2014)	3.7129	3.1463	2.8357	2.5774	2.4402	2.3924	2.3623
		Mevcut çalışma	5.9267	5.0226	4.5272	4.1155	3.8985	3.8220	3.7732
	1,2	Hosseini ve diğ.(2010).	5.9198	5.0175	4.5228	4.1115	3.8939	3.8170	3.7681
		Thai ve Choi.(2011)	5.9199	5.0180	4.5228	4.1110	3.8884	3.8107	3.7622
		Akavci(2014)	5.9215	5.0191	4.5238	4.1118	3.8883	3.8112	3.7632
20		Mevcut çalışma	9.5846	8.1255	7.3246	6.6575	6.3022	6.1766	6.0973
	1,2	Hosseini ve diğ.(2010).	9.5668	8.1121	7.3132	6.6471	6.2903	6.1639	6.0843
		Thai ve Choi.(2011)	9.5669	8.1133	7.3132	6.6433	6.2760	6.1476	6.0690
		Akavci(2014)	9.5711	8.1164	7.3159	6.6453	6.2759	6.1476	6.0715
		Mevcut çalışma	12.486	10.588	9.5453	8.6749	8.2076	8.0422	7.9383
	1,3	Hosseini ve diğ.(2010).	12.456	10.566	9.5261	8.6572	8.1875	8.0207	7.9166
		Thai ve Choi.(2011)	12.456	10.567	9.5261	8.6509	8.1636	7.9934	7.8909
		Akavci(2014)	12.463	10.572	9.5307	8.6542	8.1634	7.9954	7.8950

Tablo 3'te elastik zemine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş dikdörtgen plak için farklı modlar $((m, n) = (1,1), (1,2), (1,3))$, narinlik oranları $(a/h = 5, 10, 20)$ ve malzeme değişim katsayısı $(p = 0, 0.5, 1, 2, 5, 8, 10)$ ile değişen boyutsuz frekans değerleri literatürde yer alan çalışmaların sonuçları ile kıyaslanmıştır. Literatür çalışmaları ve sunulan çalışmanın karşılaştırmasında sonuçların uyum içinde olduğu görülmektedir.

4.3. Örnek 3

Bu örnekte, sabit mesnetli elastik zemine oturan fonksiyonel derecelenmiş kare bir plağın serbest titreşim problemi ele alınmıştır. Bu örnekte plak için kullanılan malzemeler Alüminyum ve Alümina'dır (Şekil 5). Analiz edilen plak $a = 1 m$ uzunluk, $b = 1 m$ genişlik boyutlarına sahiptir. Plağın malzeme özellikleri Tablo 1'de verilmiştir. Farklı zemin parametrelerinin $(k_0 = k_1 = 0, 100)$, malzeme değişim katsayıları $(p = 0, 0.5, 1, 2, 5)$ ve

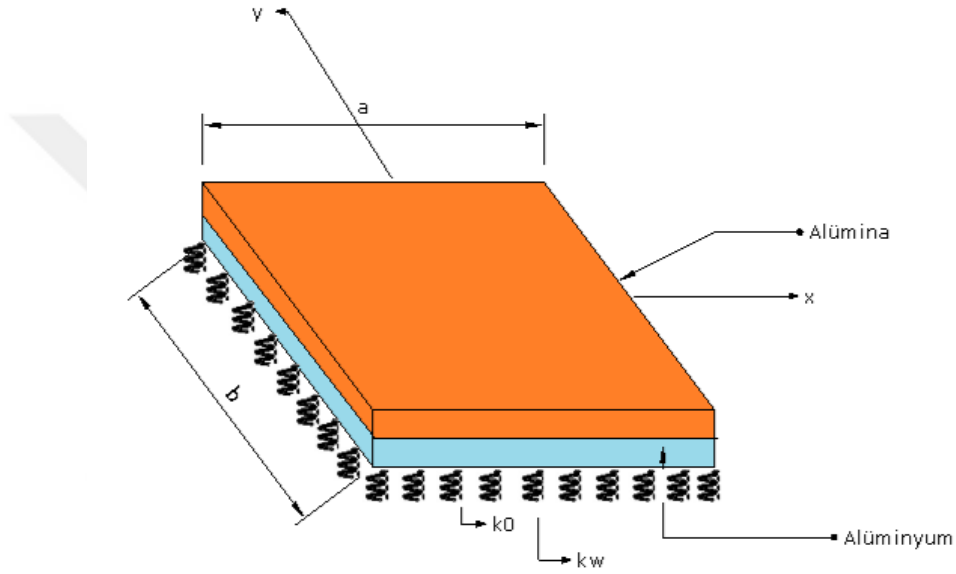
narinlik oranlarının ($h/a = 0.05, 0.1, 0.15, 0.20$) temel frekanslar üzerindeki değişimi araştırılmıştır.

Bu çalışma için aşağıdaki boyutsuzlaştırma parametreleri kullanılmıştır.

$$D_m = E_m h^3 / (12 * (1 - \nu^2)) \quad (39)$$

$$k_0 = K_0 D_m / b^4 \quad (40)$$

$$k_1 = K_1 D_m / b^2 \quad (41)$$



Şekil 5. FDM Kare Plak

Tablo 4. Örnek 3'e ait boyutsuz temel frekans değerleri ($\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$)

(k_0, k_1)	h/a	p				
		0	0.5	1	2	5
(0,0)	0.05	0.0291	0.0247	0.0223	0.0202	0.0191
	0.1	0.1138	0.0966	0.0871	0.0792	0.0748

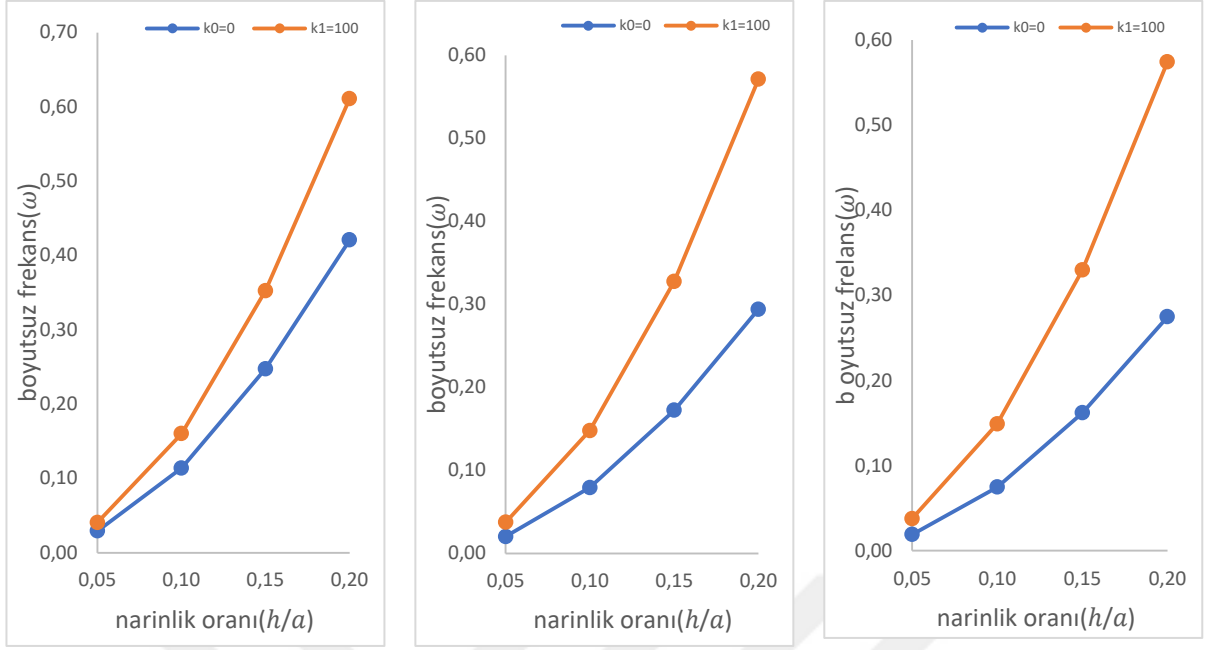
	0.15	0.2474	0.2105	0.1899	0.1724	0.1620
	0.2	0.4209	0.3512	0.3243	0.2940	0.2749
(0,100)	0.05	0.0405	0.0387	0.0378	0.0374	0.0377
	0.1	0.1601	0.1528	0.1495	0.1479	0.1490
	0.15	0.3526	0.3378	0.3311	0.3276	0.3297
	0.2	0.6111	0.5879	0.5769	0.5710	0.5745
(100,0)	0.05	0.0298	0.0257	0.0227	0.0214	0.0204
	0.1	0.1166	0.1002	0.0913	0.0840	0.0802
	0.15	0.2538	0.2187	0.1995	0.1834	0.1745
	0.2	0.4326	0.3716	0.3417	0.3139	0.2976
(100,100)	0.05	0.0411	0.0392	0.0384	0.0381	0.0384
	0.1	0.1620	0.1551	0.1521	0.1506	0.1518
	0.15	0.3571	0.3430	0.3366	0.3335	0.3360
	0.2	0.6192	0.5971	0.5868	0.5815	0.5856

Tablo 4.'da bir kare FDM plağın boyutsuz frekansları verilmektedir. Dört kenarı basit mesnetli FDM plağın boyutsuz frekansına, farklı zemin parametrelerinin ($k_0, k_1 = 0, 100$), narinlik oranlarının ($h/a = 0.05, 0.1, 0.15, 0.20$) ve malzeme değişim katsayılarının ($p = 0, 0.5, 1, 2, 5$) etkisi incelenmiştir. Tablo 4'de görüldüğü üzere zemin parametrelerinin (k_0, k_1) artmasıyla temel frekans değerleri artmaktadır. Bu durumun artan rijitlik nedeniyle olduğu açıklanabilmektedir. Ayrıca, Pasternak zemin parametresinin (k_1) Winkler zemin parametresinden (k_0) daha fazla etkili olduğu da sonuçlardan anlaşılmaktadır. Narinlik oranı h/a 'nın artmasıyla boyutsuz frekans değerlerinde artış meydana gelmektedir, buradan plak kalınlığının artmasıyla boyutsuz temel frekansın da artacağı bilgisine ulaşılır. FDM plakta malzeme değişim katsayısının artışı seramikten metale geçişi hızlandırır. Bu durumda da malzeme rijitliği azalmakta ve boyutsuz frekans değerlerinde azalış meydana gelmektedir. Frekans değerlerindeki bu azalış malzeme değişim katsayısı arttıkça azalmaktadır.

$p = 0$

$p = 1$

$p = 5$



Şekil 6. Malzeme değişim ve zemin parametresi ile narinlik oranının temel frekanslara etkisi

Sabit mesnetli elastik zemine oturan fonksiyonel derecelenmiş kare bir plak için serbest titreşim analizi gerçekleştirilmiştir. Şekil 6’da FDM plağın boyutsuz frekanslarının farklı narinlik oranları ($h/a = 0.05, 0.1, 0.15, 0.20$), zemin parametreleri ($k_0, k_1 = 0, 100$) ve malzeme değişim katsayıları ($p = 0, 0.5, 1, 2, 5$) ile değişimi görülmektedir. Her bir grafik farklı malzeme değişim katsayısı için oluşturulmuştur. Şekil 6’de görüldüğü üzere zemin parametrelerinin artışı boyutsuz temel frekansı artırmaktadır. Pasternak zemini olan kayma tabakasının etkisi (k_1) ile plağın temel frekans değerleri Winkler zeminine (k_0) göre daha hızlı arttığı görülmektedir. Şekil 7’de malzeme değişim katsayısı (p) artışı incelendiğinde, boyutsuz temel frekansta düşüğe olsa azalış görülmektedir. Bu durum plağın elastisite modülünün metalin elastisite modülüne yaklaşması olarak açıklanabilir. Malzeme değişim katsayısındaki artış, k_0 ve k_1 zemin parametreleri arasındaki boyutsuz frekansları değerlerindeki farkı arttırır. Narinlik oranı (h/a) arttıkça frekans değerlerinde artış gözlenmektedir.

4.4. Örnek 4

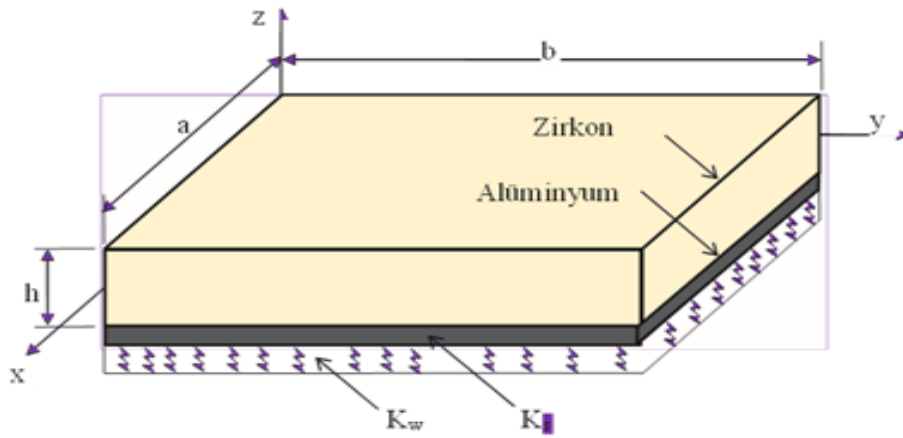
Bu çalışmada, basit mesnetli fonksiyonel derecelenmiş plakların elastik zemin üzerindeki serbest titreşim analizi incelenmiştir. (Şekil 7). Bu örnekte plak için kullanılan malzemeler Alüminyum (metal) ve Zirkonyum'dur (seramik). Plak $a = 1 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$ geometrik özelliklerine sahiptir. Plakın malzeme özellikleri Tablo 1'de verilmiştir. Farklı narinlik oranları ($h/a = 0.05, 0.1, 0.25$), zemin parametreleri ($k_0 = k_1 = 0, 10, 100$) ve malzeme değişim katsayıları ($p = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$) ele alınarak fonksiyonel derecelenmiş kare bir plak için boyutsuz temel frekans analizi gerçekleştirilmiştir.

Bu çalışma için aşağıdaki boyutsuzlaştırma parametreleri kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 5'te sunulmuştur.

$$D_m = E_m h^3 / (12 * (1 - \nu^2)) \quad (42)$$

$$k_0 = K_0 D_m / a^4 \quad (43)$$

$$k_1 = K_1 D_m / a^2 \quad (44)$$



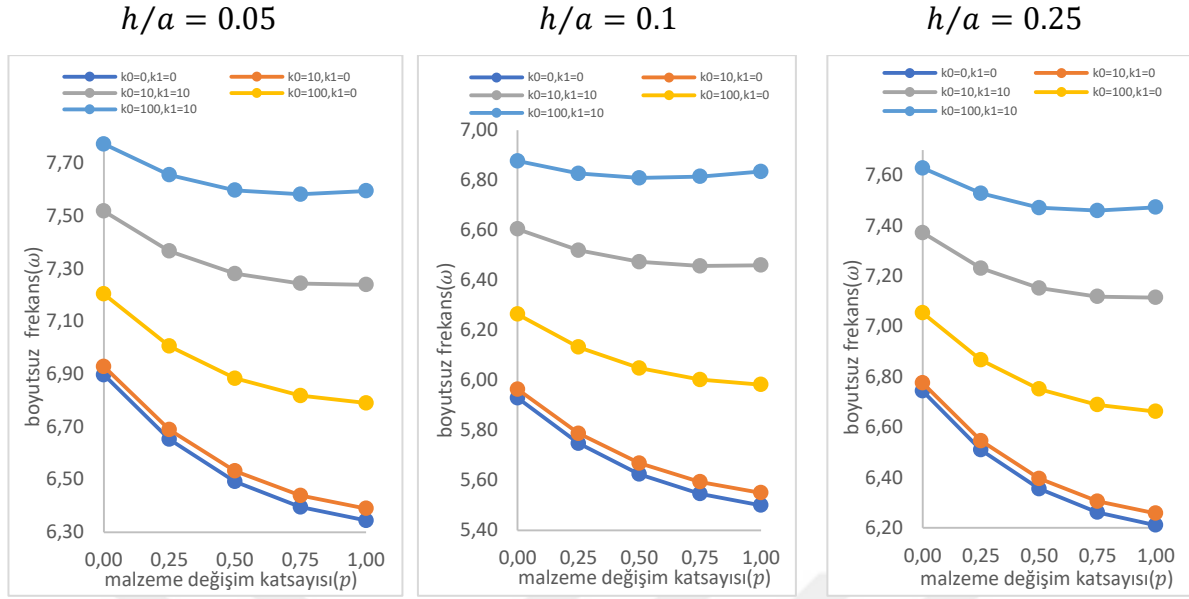
Şekil 7. Elastik zemine oturan Al/ZrO_2 FDM plak

Tablo 5. Örnek 4'e ait boyutsuz temel frekans değerleri($\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$)

(k_0, k_1)	h/a	p				
		0	0.25	0.5	0.75	1
(0,0)	0.05	6.8974	6.6523	6.4916	6.3955	6.3439
	0.1	6.7434	6.5095	6.3552	6.2621	6.2113
	0.25	5.9293	5.7477	5.6241	5.5459	5.4997
(10,0)	0.05	6.9286	6.6885	6.5319	6.4390	6.3899
	0.1	6.7751	6.5461	6.3959	6.3060	6.2579
	0.25	5.9636	5.7873	5.6679	5.5932	5.5499
(10,10)	0.05	7.5193	7.3672	7.2812	7.2443	7.2397
	0.1	7.3718	7.2312	7.1519	7.1183	7.1148
	0.25	6.6045	6.5193	6.4731	6.4567	6.4598
(100,0)	0.05	7.2040	7.0061	6.8837	6.8180	6.7906
	0.1	7.0534	6.8670	6.7511	6.6886	6.6623
	0.25	6.2640	6.1320	6.0484	6.0024	5.9821
(100,10)	0.05	7.7738	7.6566	7.5984	7.5832	7.5956
	0.1	7.6284	7.5286	7.4713	7.4594	7.4729
	0.25	6.8768	6.8270	6.8086	6.81440	6.8346

Basit mesnetli elastik zemine oturan FDM plak için serbest titreşim analizi gerçekleştirilmiştir. Tablo 5 incelendiğinde, plak narinlik oranının (h/a) artması ile boyutsuz temel frekans değerlerinde azalış gözlemlenir. Malzeme değişim katsayısının (p) artması ile boyutsuz temel frekans değerleri azalır. Fakat zemin parametresinin artması ile boyutsuz temel frekans değerlerinin arttığı görülmektedir. Zemin parametrelerinin artması ile plak daha rijit hale gelmektedir. Pasternak zemini (k_1) ile elde edilen plağın temel frekans değerleri Winkler zeminine (k_0) göre daha hızlı arttığı görülmektedir.

Narinlik oranı (h/a) değerlerinin artışı malzeme değişim katsayısı (p)'nin etkisini azaltmaktadır. Aynı zamanda narinlik oranı artışı, boyutsuz temel frekans değerlerini de arttırmaktadır. Böylece malzeme değişim katsayısı (p)'nin artması narinlik oranının (h/a) etkisini azaltmaktadır. Zemin parametrelerinin artışı boyutsuz temel frekansı artırır. Malzeme değişim katsayısı (p)'nin artışı ile de zeminin etkisi giderek artmaktadır.



Şekil 8. Elastik zemin ve malzeme değişim parametresinin temel frekanslara etkisi

Farklı narinlik oranları (h/a) için zemin parametreleri (k_0, k_1) ve malzeme değişim katsayısının (p) temel frekanslara etkisi grafiklerde verilmiştir. Grafiklerdeki eğriler, zemin parametrelerinin ($k_0, k_1 = 0, 10, 100$) farklı değerlerini ifade etmektedir. Her bir sütun boyutsuz temel frekans değerlerinin zemine bağlı değerlerini temsil etmektedir ve her satır malzeme değişim katsayılarını ($p = 0, 0.25, 0.50, 0.75, 1$) temsil eder. Grafik analizi öncesinde elde edilen sonuçlar tablo şeklinde listelenmiştir. Bu grafiklerden daha net görülebileceği üzere narinlik oranı (h/a) arttıkça boyutsuz temel frekans değerleri azalır. Yine grafikler incelendiğinde malzeme değişim katsayısı (p) arttıkça boyutsuz temel frekans değerlerinde azalış gözlemlenir.

Malzeme değişim katsayısının artması, bu örnekte ele alınan malzemeler için seramikten metale daha hızlı geçişi ifade etmektedir. Elastisite modüllerindeki değişimin ivmesi arttıkça, beklendiği gibi merkezi yer değiştirme de artmaktadır. Ayrıca, Elastisite modülü nedeniyle titreşimlerin periyodu da artmaktadır. Malzeme değişim katsayısının ana etkisi, malzeme değişimini doğrudan kontrol ettiği için Elastisite modülüdür. Analiz, başka malzemelerin kullanılması durumunda yer değiştirmelerin genlikleri ve periyotları için farklı sonuçlar verebilir.

4.5. Örnek 5

Bu örnekte, elastik zemine oturan fonksiyonel olarak derecelenmiş dikdörtgen plaklar için serbest titreşim analizi gerçekleştirilmiş ve ilk üç mod için boyutsuz temel frekans değerlerinin etkileri incelenmiştir. Analizde kullanılan plak $a = 1 \text{ m}$ uzunluk, $b = 1 \text{ m}$ genişliğine sahiptir. Plakın malzeme özellikleri Tablo 1’de belirtilmiştir. Farklı zemin parametrelerinin ($k_0, k_1 = 10, 100, 1000$) , malzeme değişim katsayılarının ($p = 0, 0.5, 1, 2, 5, 10$) ve narinlik oranlarının ($a/h = 5, 10, 20$) temel frekanslar üzerindeki etkileri incelenmiştir. Bu örnekte plak için kullanılan üst ve alt malzemeler sırasıyla, Alüminyum ve Zirkonyum’dur. Narinlik oranının (a/h), elastik zemin katsayılarının (k_0, k_1), malzeme değişim katsayısının (p) ve modların (m,n) farklı değerleri için sonuçlardaki değişim araştırılmıştır.

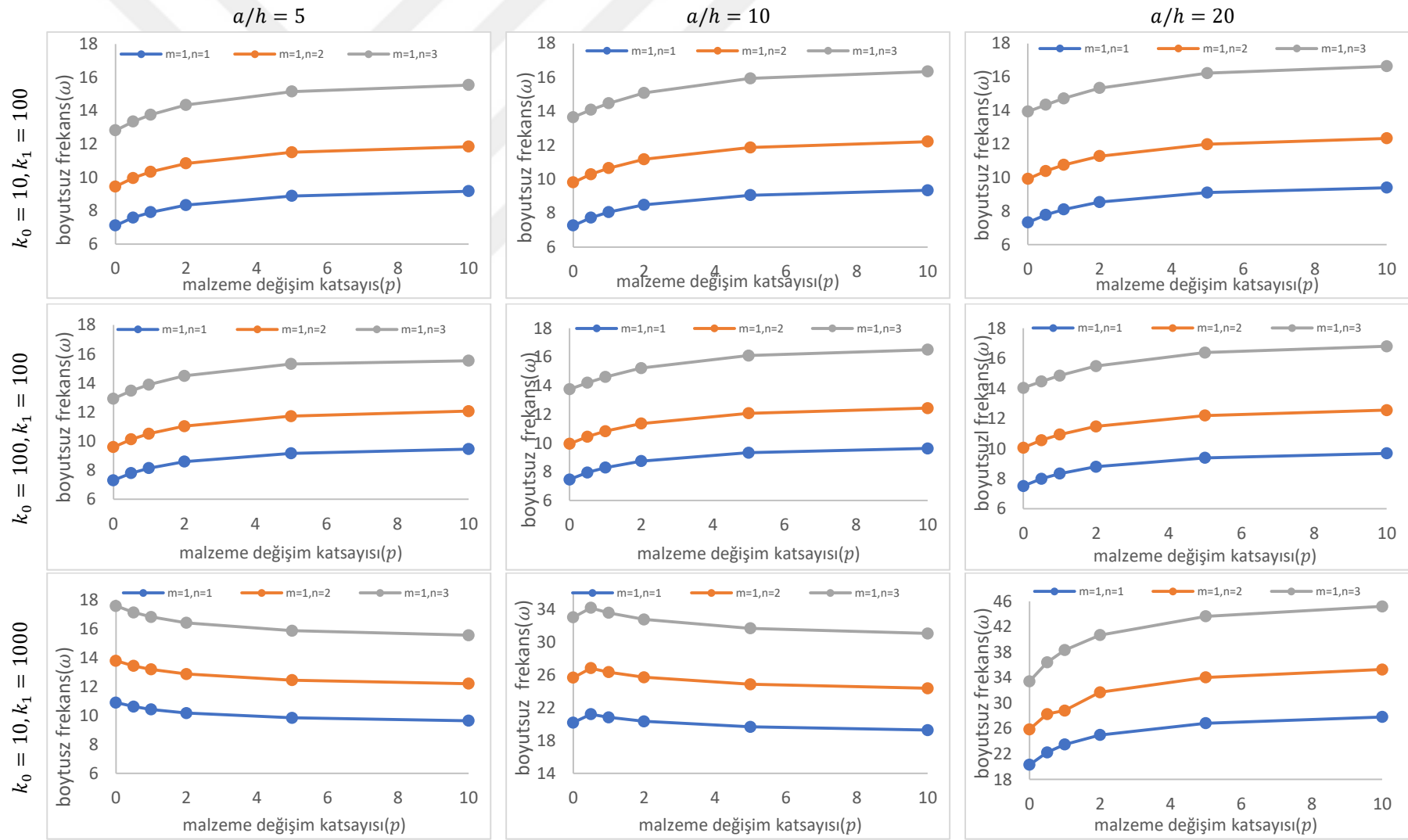
Tablo 6. Örnek 5’e ait boyutsuz temel frekans değerleri ($\bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\rho_c / E_c}$)

a/h	Mod (m, n)	k_0, k_1	p					
			0	0.5	1	2	5	10
5	1,1	10,100	7.1162	7.5882	7.9151	8.3399	8.8894	9.1736
		100,100	7.3096	7.8081	8.1507	8.5932	9.1635	9.4594
		100,1000	10.8915	10.6146	10.4221	10.1725	9.8365	9.6421
	1,2	10,100	9.4522	9.9655	10.3382	10.8425	11.5113	11.8518
		100,100	9.5966	10.1316	10.5171	11.0355	11.7207	12.0707
		100,1000	13.7768	13.4261	13.1822	12.8657	12.4408	12.1956
	1,3	10,100	12.8261	13.3546	13.7650	14.3524	15.1582	15.5445
		100,100	12.9309	13.4766	13.8972	14.4958	15.3145	15.5445
		100,1000	17.5620	17.1143	16.8022	16.3975	15.8557	15.5445
10	1,1	10,100	7.2725	7.7321	8.0587	8.4920	9.0580	9.3458
		100,100	7.4663	7.9530	8.2958	8.7471	9.3343	9.6340
		100,1000	20.2032	21.2297	20.8459	20.3479	19.676	19.2860
	1,2	10,100	9.8092	10.2872	10.6546	11.1722	11.8715	12.2171
		100,100	9.9530	10.4534	10.8341	11.3663	12.0824	12.4376
		100,1000	25.6887	26.8536	26.3677	25.7375	24.8876	24.3946

Tablo 6. Örnek 5'e ait boyutsuz temel frekans değerleri ($\bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\rho_c/E_c}$) (devamı)

a $/h$	Mod (m, n)	k_0, k_1	p					
			0	0.5	1	2	5	10
10	1,3	10,100	13.6509	14.0875	14.4769	15.0829	15.9435	16.3506
		100,100	13.7538	14.2084	14.6085	15.2260	16.0998	16.5147
		100,1000	33.0611	34.2314	33.6115	32.8074	31.7240	31.0963
20	1,1	10,100	7.3187	7.7744	8.1009	8.5368	9.1084	9.3976
		100,100	7.5127	7.9956	8.3384	8.7925	9.3854	9.6864
		100,1000	20.2834	22.2355	23.4779	24.9790	26.8313	27.8189
	1,2	10,100	9.9226	10.3887	10.7544	11.2771	11.9885	12.3365
		100,100	10.063	10.5550	10.9342	11.4716	12.1999	12.5576
		100,1000	25.8544	28.2703	28.8185	31.7003	34.0316	35.2708
	1,3	10,100	13.9403	14.3425	14.7250	15.3408	16.2287	16.6403
		100,100	14.0428	14.4632	14.8565	15.4840	16.3851	16.8044
		100,1000	33.4148	36.3906	38.3193	40.6869	43.6385	45.2001

Tablo 6'da elastik zemine oturan fonksiyonel kare bir plağın boyutsuz temel frekans değerlerin gösterilmiştir. Analiz sonucu elde edilen sonuçlara bakıldığında mod değerlerinin (m, n) arttırılmasıyla fonksiyonel derecelenmiş plağın boyutsuz frekansında artış olmaktadır. Malzeme değişim katsayısının (p) artmasıyla $k_0 = 10$, $k_1 = 1000$ zemin parametresi değerleri dışında boyutsuz temel frekans değerlerinde artış görülmektedir. Narinlik oranının (a/h) artmasıyla ise boyutsuz frekans değerleri de artmaktadır.



Şekil 9. Farklı malzeme değişim parametresi ve modların temel frekansa etkisi

Elde edilen sonuçlar incelendiğinde fonksiyonel derecelenmiş plağın ilk üç mod için boyutsuz temel frekanslardaki etkisinin, değerleri arttırdığı yönünde gözlem yapılmaktadır. Malzeme değişim katsayısının belirli oranda arttırılması sonucunda, boyutsuz temel frekansın değişim oranının yükseldiği görülmektedir. Kalınlık boyunca değişen malzeme özellikleri olan FDM bir plak için sonuçlarını elde ettiğimiz boyutsuz temel frekans değerleri, malzeme değişim katsayısı (p) narinlik oranı(a/h), mod değerleri (m, n), ve zemin parametreleri (k_0, k_1) değişimlerinin hangi ölçüde olduğunu gösteren değerler Tablo 6’da ve Şekil 9’da verilmiştir. Malzeme değişim katsayısının (p) artmasıyla $k_0 = 10, k_1 = 1000$ zemin parametresi değerleri dışında orantılı bir artış görülmektedir. Bunun sebebi de seramik malzemenin malzeme yapısına daha çok nüfus etmesinden kaynaklı malzeme rijitliği artmaktadır. Fakat $k_0 = 10, k_1 = 1000$ değerlerinde zemin rijitliği arttırdığında frekansta değişen bir azalma gözlemlenir.

Aynı şekilde kalınlık arttıkça boyutsuz temel frekanslar hızla artmaktadır. Kalınlığın sabit kalması koşuluyla malzeme değişim katsayısının değişimi ile boyutsuz frekansın değişimine baktığımızda elde edilen sonuçların birbirine çok yakın olduğunu (p) katsayısının artmasından hiç etkilenmediğini gözlemlenir.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, elastik zemine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş plakların serbest titreşim analizi teorik olarak incelenmiştir. Hamilton prensibi yardımıyla enerji yöntemine göre hareket denklemleri elde edilmiştir. Navier metodu ile özdeğer probleminin kapalı formda çözümü gerçekleştirilmiştir. Geliştirilen algoritmanın doğruluğunu kanıtlamak için literatürde bulunan çalışmalarla bir karşılaştırma gerçekleştirilmiştir. Sonrasında gerçekleştirilen parametrik serbest titreşim çalışmasında, plak narinliği, malzeme değişim ve elastik zemin parametrelerinin fonksiyonel derecelenmiş plakların serbest titreşimi analizi üzerine etkileri incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar aşağıda maddeler halinde özetlenebilir.

- Malzeme değişim parametresinin (p) artması, farklı örneklerde seramikten metale veya metalden seramiğe hızlı geçişi simüle etmektedir. Yapılan analiz eğer seramikten metale daha hızlı geçişi aktarıyorsa fonksiyonel derecelenmiş plağın boyutsuz temel frekansları azalış gözlemlenmektedir. Eğer metalden seramiğe hızlı bir geçiş varsa, boyutsuz temel frekansta artış görülür.
- Malzeme değişim katsayısının (p) en önemli etkisi Elastisite modülüdür. Malzeme değişim katsayısının artması rijitliği arttırmaktadır.
- Narinlik oranı (h/a) değerlerinin artması ile boyutsuz temel frekans değerleri azalmaktadır. Buradan plak kalınlığının veya uzunluğunun da temel frekans değerlerinde etkili olduğu görülmektedir.
- Elastik zemin parametresinin (k_o, k_1) artması ile fonksiyonel derecelenmiş plağın temel frekansları artmaktadır.
- Elastik zemin parametrelerinin artması (k_o, k_1) ile malzeme değişim parametre etkisinin azaldığı görülmektedir.
- Kayma tabakasının etkisi (k_I) ile plağın temel frekans değerleri Winkler zeminine göre daha hızlı arttığı görülmektedir.
- Kalınlığın sabit kalması koşuluyla malzeme değişim parametresinin değişimi ile boyutsuz frekansın değişimine baktığımızda birbirine çok yakın olduğunu (p) katsayısının artmasından hiç etkilenmediğini gözlemlenmektedir.
- Fonksiyonel derecelenmiş plakta mod değerlerinin (m, n) arttırılmasıyla, plağın boyutsuz frekansında artış olmaktadır.

KAYNAKÇA

Adıgüzel Ş. (2011). Burkulma yükü etkisi altındaki fonksiyonel tabaka içeren üç tabakalı silindirik kabuğun burkulmasına Winkler zemin etkisinin incelenmesi (Yüksek lisans tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta). Erişim Adresi: <https://acikbilim.yok.gov.tr/handle/20.500.12812/284846>

Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, E. A. (2010). Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 6(2), 113-121. <https://doi.org/10.1007/s10999-010-9110-x>

Akavci, S. S. (2014). An efficient shear deformation theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation. *Composite Structures*, 108, 667-676. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.10.019>

Aktaş, İ.U. (2021). Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden üretilen plakların mekanik ve ısıl yükler altındaki burkulma analizi (Yüksek lisans tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul). Erişim Adresi: <https://akademi.itu.edu.tr/search-results?st=Burkulma>

Aşık, A.E. (2021). Fonksiyonel derecelendirilmiş sandviç kirişin serbest titreşim analizi (Yüksek lisans tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta). Erişim Adresi: <http://tez.sdu.edu.tr/Tezler/TF04911.pdf>

Avey, A, Avcar, M., Özyiğit, P., Adıgözel, Ş. (2009, Haziran). Elastik zemin üzerinde bulunan fonksiyonel değişimli tabaka içeren katmanlı silindirik kabukların uniform yanal basınç yükü etkisi altında burkulması, XVI. Ulusal Mekanik Kongre, Kayseri.

Carrera, E. (1999). A study of transverse normal stress effect on vibration of multilayered plates and shells. *Journal of Sound and Vibration*, 225(5), 803-829. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2271>

Chakraborty, A., Gopalakrishnan, S., Reddy, J. N. (2003). A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. *International Journal of Mechanical Sciences*, 45(3), 519-539. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(03\)00058-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(03)00058-4)

Cheung, Y. K., Zhou, D. (1999). The free vibrations of rectangular composite plates with point-supports using static beam functions. *Composite Structures*, 44(2-3), 145-154. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(98\)00122-6](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(98)00122-6)

Cuma, Y.C., Özbey, M.B. Calim, F.F. (2023). Vibration and damping analysis of functionally graded shells. *Mech Time-Depend Mater* . <https://doi.org/10.1007/s11043-023-09621-z>

Çalim, F. F., Akkurt, F. G. (2011). Static and free vibration analysis of straight and circular beams on elastic foundation. *Mechanics Research Communications*, 38(2), 89-94. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2011.01.003>

Daloglu, A. T. (2004). Elastik Zeminde Oturan Plaklar İçin Parametreler, İMO Teknik Dergi, 15(73), 3283-3293

Daloglu, A. T., Ozgan, K. (2004). The effective depth of soil stratum for plates resting on elastic foundation. Structural Engineering and Mechanics, 18(2), 263-276. <https://doi.org/10.12989/SEM.2004.18.2.263>

Eser M. (2004). Elastik zemine oturan ince plakların sonlu elemanlar metodu ile eğilme hesabı (Yüksek lisans tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul).Erişim Adresi: <http://dspace.yildiz.edu.tr/xmlui/handle/1/8636>

Fazzolari, F. A. (2016). Quasi-3D beam models for the computation of eigenfrequencies of functionally graded beams with arbitrary boundary conditions. Composite Structures, 154, 239-255. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.06.042>

Ferreira, A. J. M., Batra, R. C., Roque, C. M. C., Qian, L. F., Jorge, R. M. N. (2006). Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method. Composite Structures, 75(1-4), 593-600. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2006.04.018>

Hasani Baferani, A., Saidi, A. R., Ehteshami, H. (2011). Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation. Composite Structures, 93(7), 1842-1853. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.01.020>

Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M. S. A., Bessaim, A., Bedia, E. A. A. (2014). New Quasi-3D Hyperbolic Shear Deformation Theory for the Static and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Plates. Journal of Engineering Mechanics, 140(2), 374-383. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000665](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000665)

Hosseini-Hashemi, Sh., Rokni Damavandi Taher, H., Akhavan, H., Omid, M. (2010). Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory. Applied Mathematical Modelling, 34(5), 1276-1291. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2009.08.008>

Huang, Z. Y., Lü, C. F., Chen, W. Q. (2008). Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations. Composite Structures, 85(2), 95-104. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.10.010>

Kang, K., Bert, C. W., Striz, A. G. (1995). Vibration analysis of shear deformable circular arches by the differential quadrature method. Journal of Sound and Vibration, 183(2), 353-360. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1995.0258>

Kitipornchai, S., Ke, L. L., Yang, J., Xiang, Y. (2009). Nonlinear vibration of edge cracked functionally graded Timoshenko beams. Journal of Sound and Vibration, 324(3-5), 962-982. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.02.023>

Koizumi M. (1993). The Concept of FGM. Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials,34,3-10.

- Lam, K. Y., Wang, C. M., He, X. Q. (2000). Canonical exact solutions for Levy-plates on two-parameter foundation using Green's functions. *Engineering Structures*, 22(4), 364-378. [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(98\)00116-3](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(98)00116-3)
- Leissa, A. W. (1973). The free vibration of rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 31(3), 257-293. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(73\)80371-2](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(73)80371-2)
- Liew, K. M., Liu, F.-L. (2000). Differential Quadrature Method For Vibration Analysis Of Shear Deformable Annular Sector Plates. *Journal of Sound and Vibration*, 230(2), 335-356. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2623>
- Lü, C. F., Lim, C. W., Chen, W. Q. (2009). Exact Solutions for Free Vibrations of Functionally Graded Thick Plates on Elastic Foundations. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 16(8), 576-584. <https://doi.org/10.1080/15376490903138888>
- Malekzadeh, P. (2009). Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations. *Composite Structures*, 89(3), 367-373. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.08.007>
- Mantari, J. L., Granados, E. V., & Guedes Soares, C. (2014). Vibrational analysis of advanced composite plates resting on elastic foundation. *Composites Part B: Engineering*, 66, 407-419. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.05.026>
- Matsunaga, H. (2008). Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory. *Composite Structures*, 82(4), 499-512. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.01.030>
- Mechab, I., Mechab, B., Benaissa, S., Serier, B., Bouiadjra, B. B. (2016). Free vibration analysis of FGM nanoplate with porosities resting on Winkler Pasternak elastic foundations based on two-variable refined plate theories. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 38(8), 2193-2211. <https://doi.org/10.1007/s40430-015-0482-6>
- Nagino, H., Mikami, T., Mizusawa, T. (2008). Three-dimensional free vibration analysis of isotropic rectangular plates using the B-spline Ritz method. *Journal of Sound and Vibration*, 317(1-2), 329-353. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.03.021>
- Özarslan O. (2007). Fonksiyonel derecelendirilmiş bir plağın analizi (Yüksek lisans tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul). Erişim Adresi: <http://dspace.yildiz.edu.tr/xmlui/handle/1/80>
- Qian, L. F., Batra, R. C., Chen, L. M. (2004). Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method. *Composites Part B: Engineering*, 35(6-8), 685-697. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2004.02.004>

Reddy, J. N. (2000). Analysis of functionally graded plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(1-3), 663-684. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(20000110/30\)47:1/3<663::AID-NME787>3.0.CO;2-8](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(20000110/30)47:1/3<663::AID-NME787>3.0.CO;2-8)

Shaban, M., Alipour, M. M. (2011). Semi-analytical solution for free vibration of thick functionally graded plates rested on elastic foundation with elastically restrained edge. *Acta Mechanica Sinica*, 24(4), 340-354. [https://doi.org/10.1016/S0894-9166\(11\)60035-9](https://doi.org/10.1016/S0894-9166(11)60035-9)

Shahsavari, D., Shahsavari, M., Li, L., Karami, B. (2018). A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation. *Aerospace Science and Technology*, 72, 134-149. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.11.004>

Şık D. (2010). Değişken derinlikli iki parametrelili elastik zemine oturan plaklar (Yüksek lisans tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul). Erişim Adresi: <https://polen.itu.edu.tr:8443/server/api/core/bitstreams/ed5d23c0-57ca-4089-bd5e-ae78605d331a/content>

Şimşek, M. (2010). Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories. *Nuclear Engineering and Design*, 240(4), 697-705. <https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2009.12.013>

Şimşek, M., Aydın, M., Yurtcu, H. H. (2015, Ağustos). Elastik zemine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş kare bir plağın statik yükler altındaki davranışı. XIX Mekanik Ulusal Kongresi , Karadeniz Teknik Üniversitesi ,Karadeniz.

Thai, H.-T., Choi, D.-H. (2011). A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation. *Composites Science and Technology*, 71(16), 1850-1858. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2011.08.016>

Thai, H.-T., Choi, D.-H. (2012). A refined shear deformation theory for free vibration of functionally graded plates on elastic foundation. *Composites Part B: Engineering*, 43(5), 2335-2347. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2011.11.062>

Uymaz, B., Aydogdu, M. (2007). Three-Dimensional Vibration Analyses of Functionally Graded Plates under Various Boundary Conditions. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 26(18), 1847-1863. <https://doi.org/10.1177/0731684407081351>

Vel, S. S., Batra, R. C. (2004). Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 272(3-5), 703-730. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00412-7](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00412-7)

Warburton, G. B. (1954). The Vibration of Rectangular Plates. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 168(1), 371-384. https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1954_168_040_02

Yas, M. H., Jodaiei, A., Irandoust, S., & Nasiri Aghdam, M. (2012). Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded piezoelectric annular plates on elastic foundations. *Meccanica*, 47(6), 1401-1423. <https://doi.org/10.1007/s11012-011-9525-y>

Young, D.H. (1950). Vibration of rectangular plates by the Ritz method. *Journal of Applied Mechanics-transactions of The Asme*, 17.

Zenkour, A. M. (2005). A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2—Buckling and free vibration. *International Journal of Solids and Structures*, 42(18-19), 5243-5258. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.02.016>

Zhou, D., Cheung, Y.K., Au, F.T.K., Lo, S.H. (2002). Three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates using Chebyshev polynomial and Ritz method. *International Journal of Solids and Structures*, 39 6339-6353. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00460-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00460-2)



