

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ELASTİK ZEMİNE OTURAN KADEMELİ TIMOSHENKO
KİRİŞİNİN SERBEST TİTREŞİMLERİNİN İNCELENMESİ**

NESLİHAN SAİM

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MEKANİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. İRFAN COŞKUN**

İSTANBUL, 2013

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELASTİK ZEMİNE OTURAN KADEMELİ TIMOSHENKO
KİRİŞİNİN SERBEST TİTREŞİMLERİNİN İNCELENMESİ

Neslihan SAİM tarafından hazırlanan tez çalışması 17.07.2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. İrfan COŞKUN
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. İrfan COŞKUN
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Abdullah GEDİKLİ
İstanbul Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Ayşe ERDÖLEN
Yıldız Teknik Üniversitesi

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında elastik zemine oturan, konsol ve kademeli Timoshenko kirişinin serbest titreşim analizi yapılmıştır. Sistemin doğal frekansları ve mod şekilleri elde edilmiştir. Euler- Bernoulli kirişi için de aynı hesaplar yapılmış, sonuçlar Timoshenko kirişinden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana destek olan, engin bilgisini benden esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. İrfan COŞKUN' a teşekkürü bir borç bilirim. Tez çalışmamda bana yol gösteren ve yardımcı olan değerli hocam Yrd. Doç Dr. Ayşe ERDÖLEN' e ve bugüne kadarki eğitimimde emeği geçen tüm hocalarıma çok teşekkür ederim. Hayatım boyunca yaptığım her işte bana destek olan sevgili anneme ve sevgili babama, bugüne gelmemde çok emeği geçen sevgili halama ve sevgili enişteme çok teşekkür ederim. Ayrıca tezimi yazarken bana çok yardımcı olan değerli arkadaşım Şenol KORKMAZ' a çok teşekkür ederim.

Temmuz, 2013

Neslihan SAİM

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ.....	vi
ÇİZELGE LİSTESİ	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti.....	1
1.2 Tezin Amacı.....	1
1.3 Hipotez.....	3
BÖLÜM 2	
PROBLEMİN FORMÜLASYONU	4
2.1 Problemin Tanımı ve Hareket Denklemleri.....	4
2.2 Ayrıklaştırma ve Boyutsuzlaştırma	8
2.3 Diferansiyel Denklemlerin Çözümü	9
2.4 Kademeli Giriş Durumu için Diferansiyel Denklemler ve Çözümü	14
2.5 Euler- Bernoulli Girişi için Diferansiyel Denklemler ve Çözümü	17
BÖLÜM 3	
SAYISAL UYGULAMALAR	20
BÖLÜM 4	
SONUÇLAR.....	31
KAYNAKLAR	32
ÖZGEÇMİŞ	34

SİMGE LİSTESİ

A	Kiriş kesit alanı
b	Kiriş kesit genişliği
E	Elastisite modülü
G	Kayma modülü
h	Kiriş kesit yüksekliği
I	Atalet momenti
J	Kutupsal eylemsizlik momenti
k^*	Kesit kayma faktörü
K	Yay katsayısı
L	Kiriş boyu
M	Eğilme momenti
q	Dış yayılı kuvvet
q_k	Zemin tepki kuvveti
T	Kesme kuvveti
w	Düşey yer değiştirme
ω	Doğal frekans
ρ	Kütle yoğunluğu
ψ	Kesit dönmesi
γ	Kayma açısı
ν	Poisson oranı

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1 Winkler zeminine oturan kademeli konsol Timoshenko kirişi.....	4
Şekil 2.2 (a) Kiriş diferansiyel elemanı, (b) şekil değiştirmeler	5
Şekil 3.1 $K=0$ için ω_1 - ξ değişimi.....	24
Şekil 3.2 $K=0$ için ω_2 - ξ değişimi.....	25
Şekil 3.3 $K=0$ için ω_3 - ξ değişimi.....	25
Şekil 3.4 $K \neq 0$ için ω_1 - ξ değişimi.....	26
Şekil 3.5 $K \neq 0$ için ω_2 - ξ değişimi.....	26
Şekil 3.6 $K \neq 0$ için ω_3 - ξ değişimi.....	27
Şekil 3.7 Timoshenko kirişinde $K=0$ ve $K \neq 0$ için ω_1 - ξ değişimi.....	27
Şekil 3.8 Euler- Bernoulli kirişinde $K=0$ ve $K \neq 0$ için ω_1 - ξ değişimi.....	28
Şekil 3.9 Timoshenko kirişinde $K \neq 0$ ve $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ için yer değiştirme- ξ değişimi....	28
Şekil 3.10 Euler- Bernoulli kirişinde $K \neq 0$ ve $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ için yer değiştirme- ξ değ.....	29
Şekil 3.11 Timoshenko kirişinde $K=0, K \neq 0$ ve ω_1 için yer değiştirme- ξ değişimi.....	29
Şekil 3.12 Euler- Bernoulli kirişinde $K=0, K \neq 0$ ve ω_1 için yer değiştirme- ξ değişimi.....	30

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 3.1	Kademesiz durumda, $K=0$ için ilk üç moda ait doğal frekanslar.....22
Çizelge 3.2	Kademeli durumda, $K=0$ için ilk üç moda ait doğal frekanslar.....22
Çizelge 3.3	Kademesiz durumda, $K \neq 0$ için ilk üç moda ait doğal frekanslar.....23
Çizelge 3.4	Kademeli durumda, $K \neq 0$ için ilk üç moda ait doğal frekanslar.....23

ÖZET

ELASTİK ZEMİNE OTURAN KADEMELİ TIMOSHENKO KİRİŞİNİN SERBEST TİTREŞİMLERİNİN İNCELENMESİ

Neslihan SAİM

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İrfan COŞKUN

Bina temelleri, otoyol ve demiryolu yapıları ve geoteknik uygulamalarında elastik zemine oturan kiriş problemi ile sıkça karşılaşılmaktadır. Bu nedenle konuyla ilgili çok sayıda çalışma yapılmıştır. Statik veya dinamik yük etkisindeki bu kirişler sabit veya değişken kesitli olabilmektedir. Kesiti kademeli olarak değişen kirişler, malzeme ağırlığını azaltmak veya mühendislik gereksinimlerini karşılamak amacıyla oluşturulmaktadır. Bu çalışmada en kesiti ani olarak değişen ve iki parçadan oluşan, açıklığı boyunca elastik zemine oturan bir konsol kirişin serbest titreşimleri Timoshenko kiriş teorisi çerçevesinde incelenmiştir. Sonuçları karşılaştırmak amacıyla Euler-Beroulli kirişi için de çözüm yapılmıştır. Elastik zemin için Winkler zemin modeli kullanılmıştır. Kiriş hareket denklemlerindeki çökme ve dönme ile ilgili girişimler kaldırıldıktan sonra diferansiyel denklemlerin kapalı çözümleri trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonlar yardımıyla elde edilmiştir. Probleme ait sınır ve süreklilik koşulları kullanılarak elde edilen homojen denklem takımının sayısal çözümünden sistemin doğal frekansları ve bu frekanslara ait mod şekilleri elde edilmiştir. Sayısal sonuçlar kirişin zemine oturmaması durumu için de elde edilmiş olup, Timoshenko ve Euler-Bernoulli kirişi için elde edilen sonuçlarla karşılaştırmalı olarak ilgili tablolarda ve şekillerde verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Elastik zemin, Timoshenko kirişi, titreşim, kademeli kiriş, Euler-Bernoulli kirişi

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

ANALYSIS OF FREE VIBRATIONS OF STEPPED TIMOSHENKO BEAM ON ELASTIC FOUNDATION

Neslihan SAİM

Department of Civil Engineering

MSc. Thesis

Adviser: Prof. Dr. İrfan COŞKUN

The problem of beam on elastic foundation is encountered frequently on foundation of buildings, highways, railways and geotechnical applications. Therefore a great number of studies have been done on this subject. The beams subjected to static or dynamic loads, might have constant or variable cross-section. Stepped beams are created in order to save weight or satisfy various engineering requirements. In this study, free vibrations of a cantilever beam that consists of two pieces, has cross-section changes abruptly and rests on elastic foundation are examined within the framework of Timoshenko beam theory. The solution is also made for Euler- Bernoulli beam to compare the results. The Winkler foundation model is used as foundation model. After removing the coupling on displacement and rotation in the beam governing equations, closed form solutions of the differential equations are obtained by using trigonometric and hyperbolic functions. Boundary and continuity conditions are used to obtain homogenous equations. Natural frequencies of the system and mode shapes related to these frequencies are obtained from the numerical solution of these homogenous equations. Numerical results are also for the case in which there is no foundation. These results are compared with the results of Timoshenko and Euler- Bernoulli beams and given in the related tables and figures.

Keywords: Elastic foundation, Timoshenko beam, vibration, stepped beam, Euler- Bernoulli beam

**YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Elastik zemine oturan uniform kirişlerin titreşimi ile ilgili olarak literatürde çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Buna karşın, kiriş ve/ veya zemin özelliklerinin kiriş boyunca değişmesi durumu ile ilgili çalışmalar oldukça sınırlıdır. Elastik zemine oturan kademeli kirişlerin serbest titreşimleri Wang(1991) [3], Kukla(1991) [4], Thambiratnam ve Zhuge(1995) [5] tarafından Euler- Bernoulli kiriş teorisi çerçevesinde incelenmiştir. Çeşitli mesnetlenme ve yükleme durumları göz önünde tutularak uniform ve kademeli Timoshenko kirişlerinin serbest titreşimleri Abramovich ve Elishakoff(1991) [6], Abramovich ve Hamburger(1992) [7], Brunch ve Mitchell(1987) [8], Dong ve diğerleri(2005) [9], Farghaly ve Elmahdy(1994) [10], Farghaly ve diğerleri(1994) [11], Gutierrez ve diğerleri(1990) [12], Lee ve Lin(1992) [13], Lin ve Chang(2005) [14], Lin(2009) [15], tarafından incelenmiştir. Elastik zemine oturan uniform veya kademeli Timoshenko kirişlerinin titreşimleri ise Lee ve Lin(1995) [16], Karami ve diğerleri(2003) [17], Spountzakis ve Kampitsis(2010) [18] ve Morfidis(2010) [19] tarafından incelenmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Elastik zemine oturan kirişler, zemin- yapı etkileşimi problemlerinin modellenmesi amacıyla inşaat mühendisliği alanında geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Bu problemlere örnek olarak bina temelleri, otoyol kaplamaları, demiryolu üst yapısı (balast, ray- travers sistemi) ve geoteknikte kazık ve palplanj uygulamaları verilebilir. Problemin çözümü için kiriş ve zeminin mekanik davranışlarına ilaveten, bunlar arasındaki etkileşim biçiminin de bilinmesi gerekmektedir. Statik veya dinamik yük etkisindeki kirişlerin incelenmesinde basitliği nedeniyle çoğunlukla Euler- Bernoulli

kiriş teorisi kullanılmaktadır. Bilindiği gibi bu teoriye göre başlangıçta düzlem ve kiriş eksenine dik olan kesitler, şekil değiştirmeden sonra da düzlem ve elastik eğriye dik kalmaktadır. Kayma şekil değiştirmesi ve dönme eylemsizliğinin göz önüne alınmadığı bu teori narin kirişler için geçerli olmaktadır. Kirişte dönme eylemsizliğinin göz önüne alınması durumunda problem Rayleigh kiriş teorisi çerçevesinde, kayma şekil değiştirmesi göz önüne alındığında ise kayma kirişi çerçevesinde incelenmektedir. Diğer yandan Euler- Bernoulli kirişine dönme eylemsizliği ve kayma şekil değiştirmesi etkileri eklendiğinde Timoshenko kiriş modeli elde edilmektedir. Kayma ve dönme etkilerinin göz önüne alınması gereken durumlarda, örneğin derin(kalın) kirişlerde ve kirişlerin yüksek frekans modlarındaki davranışlarında problem Timoshenko kiriş teorisi ile çözülmektedir. Bu teorinin önemli parametrelerinden biri de şekil faktörüdür. Kayma gerilmelerinin kesit üzerinde sabit olmaması nedeniyle göz önüne alınan bu parametre malzemenin poisson oranı ve kesit biçimine bağlıdır. Yukarıda değinilen dört kiriş modeli yardımıyla kirişlerin titreşimi Han ve diğerleri(1999) [1] tarafından detaylı olarak incelenmiştir. Bu teorilerin kullanılması ile titreşimi incelenen kirişler sabit ve değişken kesitli olabilmekte ve çeşitli biçimlerde mesnetlendirilebilmektedir. Bundan başka; kiriş üzerinde ve/ veya uçlarında tekil ktle(ler) ve ötelenme ve dönme yayları bulunabilmekte, kiriş tamamen veya kısmen elastik zemine oturabilmektedir. Kiriş için malzeme sabitleri ve mekanik davranışın gerçekçi bir biçimde tanımlanabilmesine karşın, zeminin mekanik davranışını ve kirişle zemin arasındaki etkileşimi modellemek oldukça zordur. Lineer elastik davranış gösterdiği, homojen ve izotrop malzemeden yapıldığı/ oluştuğu kabul ile zemin için iki farklı modelleme yapılmaktadır. Bunlardan birincisi sürekli ortam modeli olup, model yarı sonsuz elastik ortama ait denklemlerle ifade edilmektedir. Bu modelden elde edilen sonuçların doğruluğu oldukça fazla olmakla beraber, ilgili denklemlerin kesin çözümü oldukça zordur. Mekanik model olarak adlandırılan ikinci modelde ise, yapılan bazı basitleştirici kabuller nedeniyle daha az hassas sonuçlar elde edilmekle beraber, model oldukça basit olup uygulamada geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Bu modeller arasında bir parametrelili zemin modeli olarak da adlandırılan Winkler modeli en eski ve en sık kullanılan modeldir. Bu modelde zemin ortamının birbirine yakın sonsuz sayıdaki ayrıık ve özdeş doğrusal elastik yaylardan oluştuğu kabul edilmektedir. Buna göre yaylardan kiriş düşey yer değiştirmesiyle doğru orantılı olarak bir tepki kuvveti ortaya çıkmaktadır. Bu modelde zemin özellikleri tek bir parametre ile tanımlanmakta ve yaylar arasındaki etkileşim göz önüne alınmamaktadır. Yaylar arasındaki etkileşimi göz önüne alabilmek ve dolayısıyla

daha gerçekçi bir model oluşturabilmek amacıyla çeşitli iki ve üç parametrelili zemin modelleri geliştirilmiştir. Bu modeller Filonenko- Borodich, Pasternak, Hetenyi, Vlasov ve Kerr modelleridir. Bu modeller Dutta ve Roy(2002) [2] tarafından özetlenmiştir. Statik veya dinamik yük etkisindeki değişken kesitli kirişler gerilme dağılışı optimizasyonu, malzeme tasarrufu ve ağırlık etkisi gibi nedenlerle oluşturulmakta ve özellikle inşaat ve makine mühendisliğinde sıkça kullanılmaktadır. Yapının veya yapıyı oluşturan elemanların serbest titreşimlerine ait doğal frekansların ve bunlara ait mod şekillerinin bilinmesi ise, yapı sisteminin dinamik yük altındaki toplam davranışının incelenmesi açısından önemli olmaktadır.

Bu tez çalışmasında elastik zemine oturan kademeli bir Timoshenko kirişinin serbest titreşimleri incelenerek, kademe değişiminin ve zemin parametresinin kirişin frekans ve mod biçimleri üzerindeki etkisinin gösterilmesi amaçlanmıştır.

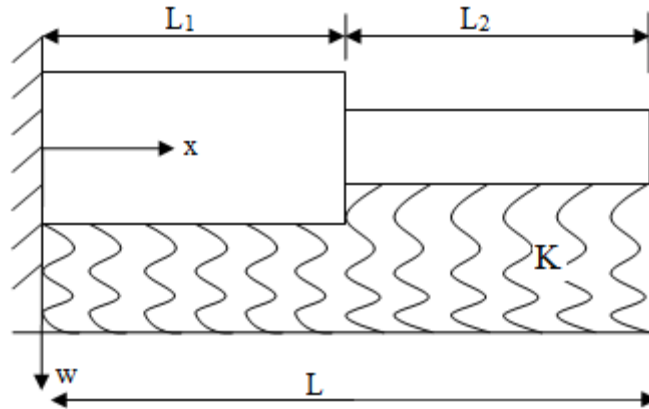
1.3 Hipotez

Bu çalışmada farklı enkesit alanına sahip iki parçadan oluşan ve kiriş boyunca elastik zemine oturan Timoshenko kirişinin serbest titreşimleri incelenmiştir. Elastik zemin için Winkler zemin modeli kullanılmıştır. Kirişin her iki bölgesi için yazılan hareket denklemlerindeki yer değiştirme ve dönme ile ilgili girişimler kaldırılarak, yer değiştirme ve dönmeler için dördüncü mertebeden homojen diferansiyel denklemler elde edilmiştir. Probleme ait sınır ve süreklilik koşulları kullanılarak bu diferansiyel denklemler çözülmüş ve sistemin doğal frekansları elde edilmiştir. Euler- Bernoulli kirişi için de problem çözülmüş ve sonuçlar ilgili şekiller ve tablolar yardımıyla açıklanmıştır.

PROBLEMİN FORMÜLASYONU

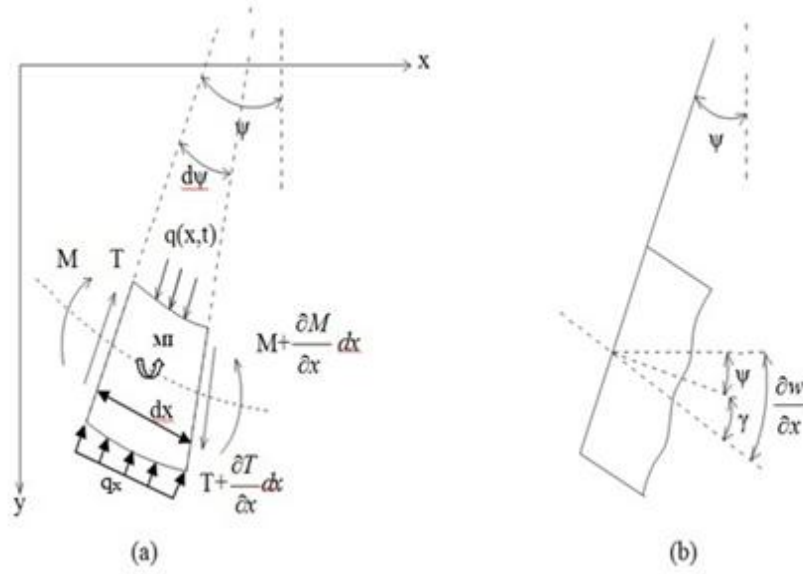
2.1 Problemin Tanımı ve Hareket Denklemleri

Şekil 2.1’ de kesit alanları farklı, iki parçadan oluşan ve Winkler zeminine oturan konsol Timoshenko kirişi görülmektedir. Kirişin toplam boyu L olup, parçaların boyları L_1 , ve L_2 , kiriş eğilme rijitlikleri $(EI)_1$ ve $(EI)_2$, kayma rijitlikleri $(GAk^*)_1$ ve $(GAk^*)_2$, kütle yoğunlukları ρ_1 ve ρ_2 dir. K yay katsayısı (Winkler zemin parametresini) göstermektedir.



Şekil 2.1 Winkler zeminine oturan kademeli konsol Timoshenko kirişi

Kirişin düşey doğrultudaki titreşim hareketine ait diferansiyel denklemleri elde etmek için Şekil 2.2’ de görülen bir diferansiyel eleman göz önüne alalım.



Şekil 2.2 (a) Kiriş diferansiyel elemanı, (b) şekil değiştirmeler [20]

Bu eleman üzerinde görülen M, T, q ve q_k sırasıyla eğilme momenti, kesme kuvveti, dış yayılı kuvvet ve zemin tepki kuvvetidir. Kiriş elastik eğrisinin (ekseninin) düşey yer değiştirmesi $w(x,t)$, eğim $\partial w / \partial x$ ve eğilme durumundaki kesit dönmesi $\psi(x,t)$ ile ölçülmektedir. Euler- Bernoulli kirişinde ψ kesit dönmesi, elastik eğrinin $\partial w / \partial x$ ile gösterilen eğimine eşit olmaktadır. Bilindiği gibi kesitte kayma gerilmesi dağılımı uniform olmadığından kesitte bir çarpılma oluşmakta, diğer bir deyişle elastik eğri de artık kesite dik olmamaktadır. Bu durumda Timoshenko kirişi için elastik eğrinin eğimi

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \psi + \gamma_0 \quad (2.1)$$

ile ifade edilmektedir. Burada ψ eğilmeden oluşan kesit dönmesini γ_0 ise kayma etkisini, yani eksen üzerinden ölçülen kayma açısını göstermektedir. T kesitteki kesme kuvveti, G kayma modülü olmak üzere,

$$T = \int_A \tau dA = \int_A G \gamma dA = G \int_A \gamma dA \quad (2.2)$$

bağıntıları ile bulunmaktadır. γ_0 eksenindeki kayma şekil değiştirmesi olarak alındığından, $G \gamma_0 A$ kesitteki kesme kuvvetini vermektedir. Gerçekte ise kayma gerilmeleri, kesitte değişken olup, kesme kuvvetinin yukarıdaki integrasyonla hesaplanması gerekmektedir. Bu durumda bir k^* parametresi göz önüne alınarak, kesme kuvveti

$$T = G \int_A \gamma dA = (G\gamma_0 A)k^* \quad (2.3)$$

olarak ifade edilmektedir. Buradaki k^* kesit biçimine (aynı zamanda Poisson oranına) bağlı bir katsayı olup kesit kayma faktörü olarak adlandırılmaktadır. Dikdörtgen kesitlerde k^* ' in değeri 5/6 olarak alınmaktadır.

(2.1) ifadesindeki γ_0 değerinin (2.3)' te yerine yazılması ile kesme kuvveti

$$T = GAk^* \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \quad (2.4)$$

olarak bulunmaktadır. Moment- eğrilik arasındaki ilişki ise aşağıdaki gibidir:

$$M = -EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.5)$$

Hareket denklemlerini elde etmek için şekil 2.2' deki eleman üzerinde düşey denge denklemi aşağıdaki gibi yazılmaktadır:

$$\left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) - T + (q - q_k) dx = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx \quad (2.6)$$

Bu ifadede dış yük olmadığı ($q = 0$) ve $q_k = Kw$ olduğu göz önünde tutulursa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{\partial T}{\partial x} - Kw = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

Bu ifadede kesme kuvveti yerine (2.4) ifadesi yazılırsa, yer değiştirme ve dönme cinsinden

$$GAk^* \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + Kw + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.8)$$

denklemi elde edilir. İlgili diferansiyel elemanın $x - y$ düzlemine dik eksen etrafında, orta noktasına göre yazılan moment denge denklemi ise aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$M - \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) + \frac{T}{2} dx + \frac{1}{2} \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) dx = J \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

Bu ifadedeki J elemanın kutupsal eylemsizlik momentidir. J ile alan eylemsizlik momenti I arasında $J = \rho I dx$ bağıntısı olduğu göz önünde tutulursa, (2.9) denkleminin düzenlenmesi ile

$$T - \frac{\partial M}{\partial x} = \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.10)$$

denklemini elde edilir. (2.4) ve (2.5)' teki kesme kuvveti ve moment ifadelerinin (2.10)' da yerine yazılması ve yapılan düzenlemeden sonra aşağıdaki denklem elde edilmektedir:

$$GAk^* \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) + EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.11)$$

Yukarıda elde edilen (2.8) ve (2.11) denklemleri Timoshenko kirişi için hareket denklemleridir. Bu denklemlerin her ikisinde de w ve ψ olduğundan, bu denklemler arasında kuplaj (girişim) bulunmaktadır. Diferansiyel denklemlerin çözümü için önce bu denklemlerdeki girişim kaldırılacaktır.

Yalnız w yer değiştirmelerini içeren hareket denklemini elde etmek amacıyla (2.8) denkleminin $\partial \psi / \partial x$ çekilmekte ve (2.11) denklemini x ' e göre bir kez türetilmektedir. Buna göre aşağıdaki ifadeler elde edilmektedir.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{Kw}{GAk^*} - \frac{\rho A}{GAk^*} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.12)$$

$$GAk^* \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + EI \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = \rho I \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial t^2} \quad (2.13)$$

(2.12) ifadesinin (2.13)' te yerine yazılması ve yapılan düzenlemelerle, w yer değiştirmesi için hareket denklemini aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left(\frac{EI \rho A}{GAk^*} + \rho I \right) \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{EI K}{GAk^*} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\rho A + \frac{\rho I K}{GAk^*} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ + \left(\frac{\rho I \rho A}{GAk^*} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + Kw = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Yalnız ψ dönmesini içeren hareket denklemini elde etmek için bu kez (2.11) ifadesindeki $\partial w / \partial x$ terimi çekilmekte ve (2.8) denklemini x ' e göre bir kez türetilerek aşağıdaki ifade elde edilmektedir:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \psi - \frac{EI}{GAk^*} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\rho I}{GAk^*} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.15)$$

$$GAk^* \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) + K \frac{\partial w}{\partial x} + \rho A \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} = 0 \quad (2.16)$$

(2.15) ifadesi ve ilgili türevlerinin (2.16)' da yerine yazılıp elde edilen ifadenin düzenlenmesi sonucunda, yalnız ψ dönmesi için hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$EI \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} - \left(\frac{EI\rho A}{GAk^*} + \rho I \right) \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{EIK}{GAk^*} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left(\rho A + \frac{\rho IK}{GAk^*} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \left(\frac{\rho I\rho A}{GAk^*} \right) \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} + K\psi = 0 \quad (2.17)$$

2.2 Ayırıklaştırma ve Boyutsuzlaştırma

(2.14) ve (2.17) diferansiyel denklemlerinin çözümüne geçmeden önce aşağıdaki ayırıklaştırmalar yapılmaktadır.

$$w(x,t) = W(x)e^{i\omega t}, \quad \psi(x,t) = \Psi(x)e^{i\omega t} \quad (2.18)$$

Bu ifadelerdeki ω terimi sistemin doğal frekansını göstermektedir. (2.18) ifadelerinin (2.14) ve (2.17) denklemlerinde yerine yazılıp düzenlemeler yapıldıktan sonra, aşağıdaki denklemler elde edilmektedir.

$$EIW^{IV} + \left[\left(\frac{EI\rho A}{GAk^*} + \rho I \right) \omega^2 - \frac{EIK}{GAk^*} \right] W'' + \left[\left(\frac{\rho I\rho A}{GAk^*} \omega^4 - \left(\rho A + \frac{\rho IK}{GAk^*} \right) \omega^2 + K \right] W = 0 \quad (2.19)$$

$$EI\Psi^{IV} + \left[\left(\frac{EI\rho A}{GAk^*} + \rho I \right) \omega^2 - \frac{EIK}{GAk^*} \right] \Psi'' + \left[\left(\frac{\rho I\rho A}{GAk^*} \omega^4 - \left(\rho A + \frac{\rho IK}{GAk^*} \right) \omega^2 + K \right] \Psi = 0 \quad (2.20)$$

(2.19) ve (2.20) denklemlerinde x koordinatı, $W(x)$ yer değiştirmesi ve $\Psi(x)$ dönmesi için

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad W(\xi) = \frac{W(x)}{L}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \Psi(\xi) = \Psi(x) \quad (2.21)$$

boyutsuzlaştırmaları yapılmaktadır. Bu boyutsuzlaştırma yapıлып (2.19) ve (2.20) denklemleri sırasıyla L^3 / EI ve L^4 / EI ile çarpılırsa,

$$W^{IV} + \left[\left(\frac{\rho AL^2}{GAk^*} + \frac{\rho I}{EI} \right) \omega^2 - \frac{KL^2}{GAk^*} \right] W'' + \left[\left(\frac{\rho I \rho AL^4}{GAk^* EI} \omega^4 - \left(\frac{\rho AL^4}{EI} + \frac{\rho IKL^4}{EIGAk^*} \right) \omega^2 + \frac{KL^4}{EI} \right] W = 0 \quad (2.22)$$

$$\Psi^{IV} + \left[\left(\frac{\rho AL^2}{GAk^*} + \frac{\rho IL^2}{EI} \right) \omega^2 - \frac{KL^2}{GAk^*} \right] \Psi'' + \left[\left(\frac{\rho I \rho AL^4}{GAk^* EI} \omega^4 - \left(\frac{\rho AL^4}{EI} + \frac{\rho IKL^4}{GAk^* EI} \right) \omega^2 + \frac{KL^4}{EI} \right] \Psi = 0 \quad (2.23)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerde, aşağıdaki kısaltmalar yapılmaktadır.

$$\frac{\rho AL^4}{EI} \omega^2 = \omega_f^2, \frac{EI}{GAk^* L^2} = S^2, \frac{I}{AL^2} = R^2, \frac{KL^2}{EI} = \lambda_\omega^2, \frac{KL^2}{GAk^*} = \lambda_{\omega s}^2, \lambda_{\omega s} = S^2 \lambda_\omega^2 \quad (2.24)$$

Burada ω_f , S , R ve λ_ω boyutsuz büyüklükleri sırasıyla frekansı, kesme- eğilme parametresini, jirasyon yarıçapını ve zemin parametresini göstermektedir. Bilindiği gibi kesit jirasyon yarıçapı (atalet yarıçapı) $r = \sqrt{I/A}$ ve narinlik oranı $\bar{s} = L/r$ olarak tanımlanmaktadır. Buna göre $R = r/L$ bağıntısından $R = 1/\bar{s}$ yazılabilir. Narinlik oranı $\bar{s} \geq 100$ civarı olan kirişlerde (narin kirişlerde) kiriş teorileri birbirine yakın sonuç vermektedir. $\bar{s}$ ' nin küçük değerleri için ise Kayma veya Timoshenko kiriş modelleri kullanılmaktadır. (2.24) kısaltmalarına ilaveten

$$\Omega = [(R^2 + S^2) \omega_f^2 - \lambda_\omega^2 S^2] / 2, \quad \varepsilon = \omega_f^4 R^2 S^2 - \omega_f^2 (1 + R^2 S^2 \lambda_\omega^2) + \lambda_\omega^2 \quad (2.25)$$

kısaltmaları da yapılarak, (2.22) ve (2.23) denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$W^{IV}(\xi) + 2\Omega W''(\xi) + \varepsilon W(\xi) = 0 \quad (2.26)$$

$$\Psi^{IV}(\xi) + 2\Omega \Psi''(\xi) + \varepsilon \Psi(\xi) = 0 \quad (2.27)$$

2.3 Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Yukarıdaki dördüncü mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümü için $W(\xi) = e^{m\xi}$ çözümü alınarak, gerekli türetmelerden sonra örneğin (2.26) denkleminde yerine yazılırsa:

$$(m^4 + 2\Omega m^2 + \varepsilon) e^{m\xi} = 0 \quad (2.28)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sağlanabilmesi için ($e^{m_\xi} \neq 0$) parantez içindeki terimin sıfır olması gerekir. Buna göre karakteristik denklem aşağıdaki gibi olur:

$$m^4 + 2\Omega m^2 + \varepsilon = 0 \quad (2.29)$$

Bu denklemin kökleri, ε parametresine göre aşağıdaki gibi bulunmaktadır:

$$m_{1,2} = \pm \sqrt{-\Omega + \sqrt{\Omega^2 - \varepsilon}}, m_{3,4} = \pm i \sqrt{\Omega + \sqrt{\Omega^2 - \varepsilon}}, (\varepsilon < 0) \quad (2.30)$$

$$m_{1,2} = \pm \sqrt{-\Omega + \sqrt{\Omega^2 - \varepsilon}}, m_{3,4} = \pm i \sqrt{\Omega - \sqrt{\Omega^2 - \varepsilon}}, (\varepsilon > 0), (\varepsilon < \Omega^2) \quad (2.31)$$

Buna göre çözümler trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonlar kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$\varepsilon < 0$ için:

$$W(\xi) = A_1 \sin(b\xi) + A_2 \cos(b\xi) + A_3 \sinh(a\xi) + A_4 \cosh(a\xi) \quad (2.32)$$

$$\Psi(\xi) = B_1 \sin(b\xi) + B_2 \cos(b\xi) + B_3 \sinh(a\xi) + B_4 \cosh(a\xi) \quad (2.33)$$

$\varepsilon > 0$ fakat $\varepsilon < \Omega^2$ için:

$$W(\xi) = A_1 \sin(b\xi) + A_2 \cos(b\xi) + A_3 \sin(c\xi) + A_4 \cos(c\xi) \quad (2.34)$$

$$\Psi(\xi) = B_1 \sin(b\xi) + B_2 \cos(b\xi) + B_3 \sin(c\xi) + B_4 \cos(c\xi) \quad (2.35)$$

Bu çözümlerdeki a , b ve c parametreleri aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$a = \sqrt{-\Omega + \sqrt{\Omega^2 - \varepsilon}}, b = \sqrt{\Omega + \sqrt{\Omega^2 - \varepsilon}}, c = \sqrt{\Omega - \sqrt{\Omega^2 - \varepsilon}} \quad (2.36)$$

Yukarıda elde edilen çözümlerde görülen A_i ve B_i sabitleri ($i=1,4$) birbirinden bağımsız olmayıp (2.8) bağıntısı nedeniyle birbirine bağlıdır. (2.8) ifadesi boyutsuz durumda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$GAk^* [\Psi'(\xi) - W''(\xi)] + (KL^2 - \rho AL^2 \omega^2) W(\xi) = 0 \quad (2.37)$$

(2.32) ve (2.33) çözümlerinin de (2.37)' de yerine yazılması ve trigonometrik/ hiperbolik terimlerin katsayılarına göre düzenlenmesi ile aşağıdaki denklem elde edilmektedir.

$\varepsilon < 0$ durumu için:

$$\begin{aligned} & \left[-GAk^* B_2 b + GAk^* A_1 b^2 + (KL^2 - \rho A \omega^2 L^2) A_1 \right] \sin(b\zeta) \\ & + \left[GAk^* B_1 b + GAk^* A_2 b^2 + (KL^2 - \rho A \omega^2 L^2) A_2 \right] \cos(b\zeta) \\ & + \left[GAk^* B_4 a - GAk^* A_3 a^2 + (KL^2 - \rho A \omega^2 L^2) A_3 \right] \sinh(a\zeta) \\ & + \left[GAk^* B_3 a - GAk^* A_4 a^2 + (KL^2 - \rho A \omega^2 L^2) A_4 \right] \cosh(a\zeta) = 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Bu ifadede parantez içindeki terimlerin sıfıra eşitlenmesi ile A_i ve B_i sabitleri arasında aşağıdaki bağıntılar elde edilmektedir.

$$B_1 = \beta_1 A_2, \quad B_2 = -\beta_1 A_1, \quad B_3 = \beta_2 A_4, \quad B_4 = \beta_2 A_3 \quad (2.39)$$

β_1 ve β_2 ise

$$\beta_1 = \frac{S^2(\omega_f^2 - \lambda_\omega^2) - b^2}{b}, \quad \beta_2 = \frac{a^2 + S^2(\omega_f^2 - \lambda_\omega^2)}{a} \quad (2.40)$$

olarak tanımlanmaktadır. (2.34) ve (2.35) çözümlerinin (2.37)' de yerine yazılması ve trigonometrik terimlerin katsayılarına göre düzenlenmesi ile $\varepsilon > 0$ durumu için aşağıdaki denklem elde edilmektedir:

$$\begin{aligned} & [-B_2 b + A_1 b^2 + (\lambda_\omega^2 - \omega_f^2) S^2 A_1] \sin(b\zeta) \\ & + [B_1 b + A_2 b^2 + (\lambda_\omega^2 - \omega_f^2) S^2 A_2] \cos(b\zeta) \\ & + [-B_4 c + A_3 c^2 + (\lambda_\omega^2 - \omega_f^2) S^2 A_3] \sin(c\zeta) \\ & + [B_3 c + A_4 c^2 + (\lambda_\omega^2 - \omega_f^2) S^2 A_4] \cos(c\zeta) = 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Bu ifadede parantez içindeki terimlerin sıfıra eşitlenmesi ile A_i ve B_i sabitleri arasında bu kez aşağıdaki bağıntılar elde edilmektedir:

$$B_1 = \beta_1 A_2, B_2 = -\beta_1 A_1, B_3 = -\beta_3 A_4, B_4 = \beta_3 A_3 \quad (2.42)$$

β_1 ve β_2 ise aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\beta_1 = \frac{S^2(\omega_f^2 - \lambda_\omega^2) - b^2}{b}, \beta_3 = \frac{c^2 + S^2(\lambda_\omega^2 - \omega_f^2)}{c} \quad (2.43)$$

(2.39) ve (2.42) bağıntılarının göz önüne alınması ile L boyundaki kiriş için W ve Ψ çözümlerinden gelen toplam 8 sabit, 4 sabite düşmektedir. Bu sabitlerin hesabı için probleme ait sınır koşulları kullanılmaktadır. Bu sınır koşulları; ankastre mesnette düşey yer değiştirmelerin ve kesit dönmelerinin sıfır olması ve serbest uçta eğilme momenti ve kesme kuvvetinin sıfır olmasıdır. Bu sınır koşulları toplu olarak aşağıda verilmiştir.

1) $x=0, \zeta=0$:

$$W(x)=0, W(x)=LW(\zeta) \Big|_{\zeta=0} = 0 \rightarrow W(0)=0$$

$$\Psi(x)=0, \Psi(x)=\Psi(\zeta) \Big|_{\zeta=0} = 0 \rightarrow \Psi(0)=0 \quad (2.44)$$

2) $x=L, \zeta=1$:

$$-EI \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} = M = 0 \rightarrow -\frac{EI}{L} \frac{d\Psi(\zeta)}{d\zeta} = M = 0 \rightarrow -\frac{d\Psi(\zeta)}{d\zeta} = \frac{ML}{EI} = \bar{M} = 0$$

$$\rightarrow \Psi'(1) = 0$$

$$GAk^* \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \Psi \right) \Big|_{x=L} = T = 0 \rightarrow GAk^* (W'(\zeta) - \Psi(\zeta)) \Big|_{\zeta=1} = T = 0$$

$$\rightarrow W'(1) - \Psi(1) = \frac{T}{GAk^*} = \bar{T} = 0$$

$$\rightarrow W'(1) - \Psi(1) = 0 \quad (2.45)$$

Yukarıda verilen sınır koşullarının ve (2.39) bağıntılarının kullanılması ile $\varepsilon < 0$ için aşağıdaki denklemler elde edilmektedir.

$$A_2 + A_4 = 0$$

$$-\beta_1 A_1 + \beta_2 A_3 = 0$$

$$\beta_1 b \cos b A_2 + \beta_1 b \sin b A_1 + \beta_2 a \cosh a A_4 + \beta_2 a \sinh a A_3 = 0$$

$$A_1(b \cos b + \beta_1 \cos b) + A_2(-b \sin b - \beta_1 \sin b) + A_3(a \cosh a - \beta_2 \cosh a)$$

$$+ A_4(a \sinh a - \beta_2 \sinh a) = 0 \quad (2.46)$$

Benzer şekilde sınır koşulları ve (2.42) bağıntılarının kullanılması ile $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \Omega^2$) için aşağıdaki denklemler elde edilmektedir.

$$A_2 + A_4 = 0$$

$$-\beta_1 A_1 + \beta_3 A_3 = 0$$

$$\beta_1 b \sin b A_1 + \beta_1 b \cos b A_2 - \beta_3 c \sin c A_3 - \beta_3 c \cos c A_4 = 0$$

$$A_1(b \cos b + \beta_1 \cos b) + A_2(-b \sin b - \beta_1 \sin b) + A_3(\cos c - \beta_3 \cos c)$$

$$+ A_4(-c \sin c + \beta_3 \sin c) = 0 \quad (2.47)$$

(2.46) ve (2.47) denklem takımları matris formunda aşağıdaki gibi yazılmaktadır:

$$[A]\{X\} = 0 \quad (2.48)$$

Bu ifadede A , 4×4 boyutlarındaki katsayılar matrisini, X ise sabitleri içeren bilinmeyen vektörünü göstermektedir. (2.48) homojen denklem takımının çözümünden sistemin doğal frekansları elde edilmektedir. Bilindiği gibi, bu sistemin sıfırdan farklı çözümü olabilmesi için katsayılar matrisinin determinanı sıfıra eşit olmalıdır. Determinantı sıfır yapan ω_i değerleri bulunarak sistemin doğal frekansları hesaplanmaktadır. Frekanslar hesaplandıktan sonra, ilgili denklemlerden biri kaldırılarak, üç sabit bir sabite bağlı olarak hesaplanmakta ve sistemin mod şekilleri elde edilmektedir.

2.4 Kademeli Kiriş Durumu İçin Diferansiyel Denklemler ve Çözümü

Bölüm 2.3' te L boyundaki kiriş için elde edilen diferansiyel denklemler, bu bölümde kirişte iki farklı bölge olması göz önünde tutularak aşağıdaki biçimde yazılmaktadır.

$$W_1^{IV} + 2\Omega_1 W_1'' + \varepsilon_1 W_1 = 0$$

$$\Psi_1^{IV} + 2\Omega_1 \Psi_1'' + \varepsilon_1 \Psi_1 = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \eta_1 \quad (2.49)$$

$$W_2^{IV} + 2\Omega_2 W_2'' + \varepsilon_2 W_2 = 0$$

$$\Psi_2^{IV} + 2\Omega_2 \Psi_2'' + \varepsilon_2 \Psi_2 = 0, \quad \eta_1 \leq \xi \leq 1 \quad (2.50)$$

Bu denklemlerdeki $2\Omega_{1(2)}, \varepsilon_{1(2)}$ ve bunlarla ilgili büyüklükler aşağıdaki gibidir.

$$2\Omega_{1(2)} = (R_{1(2)}^2 + S_{1(2)}^2)\omega_{f1(2)}^2 - \lambda_{\omega1(2)}^2 S_{1(2)}^2$$

$$\varepsilon_{1(2)} = \omega_{f1(2)}^4 R_{1(2)}^2 S_{1(2)}^2 - \omega_{f1(2)}^2 (1 + R_{1(2)}^2 S_{1(2)}^2 \lambda_{\omega1(2)}^2) + \lambda_{\omega1(2)}^2$$

$$\frac{\rho_{1(2)} A_{1(2)} L^4}{(EI)_{1(2)}} \omega^2 = \omega_{f1(2)}^2, \quad \frac{(EI)_{1(2)}}{G_{1(2)} A_{1(2)} k^* L^2} = S_{1(2)}^2, \quad \frac{I_{1(2)}}{A_{1(2)} L^2} = R_{1(2)}^2, \quad \frac{K_{1(2)} L^4}{(EI)_{1(2)}} = \lambda_{\omega1(2)}^2$$

$$\eta_1 = \frac{L_1}{L}, \quad \eta_2 = \frac{L_2}{L}, \quad \eta_1 + \eta_2 = 1 \quad (2.51)$$

(2.49) ve (2.50) denklemlerinin çözümleri ($\varepsilon < 0$ için) aşağıdaki gibidir.

$$W_1 = A_1 \sin(b_1 \xi) + A_2 \cos(b_1 \xi) + A_3 \sinh(a_1 \xi) + A_4 \cosh(a_1 \xi) \quad (2.52)$$

$$\Psi_1 = B_1 \sin(b_1 \xi) + B_2 \cos(b_1 \xi) + B_3 \sinh(a_1 \xi) + B_4 \cosh(a_1 \xi) \quad (2.53)$$

$$W_2 = C_1 \sin(b_2 \xi) + C_2 \cos(b_2 \xi) + C_3 \sinh(a_2 \xi) + C_4 \cosh(a_2 \xi) \quad (2.54)$$

$$\Psi_2 = D_1 \sin(b_2 \xi) + D_2 \cos(b_2 \xi) + D_3 \sinh(a_2 \xi) + D_4 \cosh(a_2 \xi) \quad (2.55)$$

Bu çözümlerdeki a_1, b_1 ve a_2, b_2 terimleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sqrt{-\Omega_1 + \sqrt{\Omega_1^2 - \varepsilon_1}}, b_1 = \sqrt{\Omega_1 + \sqrt{\Omega_1^2 - \varepsilon_1}} \\
a_2 &= \sqrt{-\Omega_2 + \sqrt{\Omega_2^2 - \varepsilon_2}}, b_2 = \sqrt{\Omega_2 + \sqrt{\Omega_2^2 - \varepsilon_2}}
\end{aligned} \tag{2.56}$$

(2.52)- (2.55) çözümlerindeki A_i katsayıları B_i ’lerden, C_i katsayıları da D_i ’lerden bağımsız değildir. Bu katsayılar her iki bölgede yazılan (2.8) denklemi nedeniyle birbirine bağlıdır. (2.8) denkleminin birinci ve ikinci bölgede yazılıp (2.52)- (2.55) çözümlerinin yerine konulması ve trigonometrik/ hiperbolik terimlerin katsayılarının sıfıra eşitlenmesi ile, ilgili sabitler arasında aşağıdaki bağıntılar elde edilmektedir:

$$\begin{aligned}
B_1 &= \beta_1 A_2, B_2 = -\beta_1 A_1, B_3 = \beta_2 A_4, B_4 = \beta_2 A_3 \\
D_1 &= \beta_3 C_2, D_2 = -\beta_3 C_1, D_3 = \beta_4 C_4, D_4 = \beta_4 C_3
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Bu ifadelerdeki β_1 , β_2 , β_3 ve β_4 parametreleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{S_1^2(\omega_{f1}^2 - \lambda_{\omega1}^2) - b_1^2}{b_1}, \beta_2 = \frac{S_1^2(\omega_{f1}^2 - \lambda_{\omega1}^2) + a_1^2}{a_1} \\
\beta_3 &= \frac{S_2^2(\omega_{f2}^2 - \lambda_{\omega2}^2) - b_2^2}{b_2}, \beta_4 = \frac{S_2^2(\omega_{f2}^2 - \lambda_{\omega2}^2) + a_2^2}{a_2}
\end{aligned} \tag{2.58}$$

(2.57) bağıntılarının göz önüne alınması ile her iki bölge için W ve Ψ çözümlerinden gelen toplam 16 sabit, 8 sabite düşmektedir. Bu sabitlerin ve doğal frekansların hesabı için sınır koşulları kullanılmaktadır. Probleme ait sınır ve süreklilik koşulları; ankastre mesnette ($\zeta = 0$) çökme ve dönmelerin sıfır olması, serbest uçta ($\zeta = 1$) moment ve kesme kuvvetinin sıfır olması, kiriş kesitinin değiştiği yerde ($\zeta = \eta_1$) çökmelerin, dönmelerin, moment ve kesme kuvvetlerinin eşit olmasıdır. Bu koşullar aşağıda toplu olarak verilmektedir.

$\zeta = 0$:

$$1) W_1(0) = 0$$

$$2) \Psi_1(0) = 0$$

$\zeta = 1$:

$$3) \left(\frac{-EI}{L}\right)_2 \Psi'_2(1) = 0 \Rightarrow \Psi'_2(1) = 0$$

$$4) (GAK^*)_2(W'_2 - \Psi_2) = 0 \Rightarrow W'_2(1) - \Psi_2(1) = 0$$

$$\xi = \eta_1 :$$

$$5) W_1(\eta_1) = W_2(\eta_1)$$

$$6) \Psi_1(\eta_1) = \Psi_2(\eta_1)$$

$$7) \left(\frac{EI}{L}\right)_1 \Psi'_1(\eta_1) = \left(\frac{EI}{L}\right)_2 \Psi'_2(\eta_1)$$

$$8) (GAK^*)_1[W'_1(\eta_1) - \Psi_1(\eta_1)] = (GAK^*)_2[W'_2(\eta_1) - \Psi_2(\eta_1)] \quad (2.59)$$

Yukarıdaki sınır koşullarının ve (2.57) bağıntılarının (2.52)- (2.55) çözümlerinde kullanılması ile aşağıdaki denklemler elde edilmektedir:

$$1) A_2 + A_4 = 0$$

$$2) -\beta_1 A_1 + \beta_2 A_3 = 0$$

$$3) \beta_3 b_2 C_1 \sin b_2 + \beta_3 b_2 C_2 \cos b_2 + \beta_4 a_2 C_3 \sinh a_2 + \beta_4 a_2 C_4 \cosh a_2 = 0$$

$$4) (b_2 + \beta_3) \cos b_2 C_1 + (-b_2 - \beta_3) \sin b_2 C_2 + (a_2 - \beta_4) \cosh a_2 C_3 + (a_2 - \beta_4) \sinh a_2 C_4 = 0$$

$$5) A_1 \sin b_1 \eta_1 + A_2 \cos b_1 \eta_1 + A_3 \sinh a_1 \eta_1 + A_4 \cosh a_1 \eta_1$$

$$-C_1 \sin b_2 \eta_1 - C_2 \cos b_2 \eta_1 - C_3 \sinh a_2 \eta_1 - C_4 \cosh a_2 \eta_1 = 0$$

$$6) -\beta_1 A_1 \cos b_1 \eta_1 + \beta_1 A_2 \sin b_1 \eta_1 + \beta_2 A_3 \cosh a_1 \eta_1 + \beta_2 A_4 \sinh a_1 \eta_1$$

$$+\beta_3 C_1 \cos b_2 \eta_1 - \beta_3 C_2 \sin b_2 \eta_1 - \beta_4 C_3 \cosh a_2 \eta_1 - \beta_4 C_4 \sinh a_2 \eta_1 = 0$$

$$7) R_1 = (EJ)_1, R_2 = (EJ)_2, R_3 = (GAK^*)_1, R_4 = (GAK^*)_2$$

$$\begin{aligned}
& R_1(b_1\beta_1 \sin b_1\eta_1 A_1 + b_1\beta_1 \cos b_1\eta_1 A_2 + a_1\beta_2 \sinh a_1\eta_1 A_3 + a_1\beta_2 \cosh a_1\eta_1 A_4) \\
& -R_2(b_2\beta_3 \sin b_2\eta_1 C_1 + b_2\beta_3 \cos b_2\eta_1 C_2 + a_2\beta_4 \sinh a_2\eta_1 C_3 + a_2\beta_4 \cosh a_2\eta_1 C_4) = 0 \\
& 8)R_3(b_1 \cos b_1\eta_1 A_1 - b_1 \sin b_1\eta_1 A_2 + a_1 \cosh a_1\eta_1 A_3 + a_1 \sinh a_1\eta_1 A_4 \\
& + \beta_1 \cos b_1\eta_1 A_1 - \beta_1 \sin b_1\eta_1 A_2 - \beta_2 \cosh a_1\eta_1 A_3 - \beta_2 \sinh a_1\eta_1 A_4) \\
& -R_4(b_2 \cos b_2\eta_1 C_1 - b_2 \sin b_2\eta_1 C_2 + a_2 \cosh a_2\eta_1 C_3 + a_2 \sinh a_2\eta_1 C_4 \\
& + \beta_3 \cos b_2\eta_1 C_1 - \beta_3 \sin b_2\eta_1 C_2 - \beta_4 \cosh a_2\eta_1 C_3 - \beta_4 \sinh a_2\eta_1 C_4) = 0
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Yukarıdaki denklem takımı matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$[A]\{X\} = 0 \tag{2.61}$$

Bu ifadede A , 8×8 boyutlarındaki katsayılar matrisini, X ise integrasyon sabitlerini içeren bilinmeyenler vektörünü göstermektedir. Bir önceki alt bölümde olduğu gibi, katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenerek sistemin doğal frekansları ve sonra da mod şekilleri elde edilmektedir.

2.5 Euler- Bernoulli Kirişi İçin Diferansiyel Denklemler ve Çözümü

Dönme eylemsizliği ve kayma şekil değiştirmesinin göz önüne alınmadığı bu kirişte hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + Kw + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{2.62}$$

Ayrıklaştırma ve boyutsuzlaştırmadan sonra her iki bölge için aşağıdaki diferansiyel denklemler elde edilmektedir:

$$W_i^{IV} + (\lambda_{oi}^2 - \omega_f^2)W_i(\xi) = 0, \quad (i=1,2) \tag{2.63}$$

Bu denklemlerde $\lambda_{oi}^2 = \frac{KL^4}{(EI)_i}$ ve $\omega_f^2 = \frac{(\rho A)L^4}{(EI)_i} \omega^2$ biçiminde tanımlanmaktadır. (2.63)

denklemlerinin çözümü $(\lambda_o^2 - \omega_f^2)$ teriminin işaretine bağlı olarak değişmektedir.

$\lambda_{\omega}^2 = \omega_f^2$ durumu bir tarafa bırakılırsa, diğer iki durum ve bunlara ait çözümler aşağıdaki gibi olur.

1) $\lambda_{\omega i}^2 - \omega_{fi}^2 > 0$ olması durumu:

Bu durumda $(\lambda_{\omega i}^2 - \omega_{fi}^2) = \beta_i^4$ alınarak

$$W_1(\xi) = C_1 \cos \alpha_1 \xi \cosh \alpha_1 \xi + C_2 \cos \alpha_1 \xi \sinh \alpha_1 \xi + C_3 \sin \alpha_1 \xi \cosh \alpha_1 \xi + C_4 \sin \alpha_1 \xi \sinh \alpha_1 \xi \quad (2.64)$$

$$W_2(\xi) = D_1 \cos \alpha_2 \xi \cosh \alpha_2 \xi + D_2 \cos \alpha_2 \xi \sinh \alpha_2 \xi + D_3 \sin \alpha_2 \xi \cosh \alpha_2 \xi + D_4 \sin \alpha_2 \xi \sinh \alpha_2 \xi \quad (2.65)$$

çözümleri elde edilmektedir. Bu ifadelerde $\alpha_i = \beta_i / \sqrt{2}$ olarak tanımlanmaktadır.

2) $\lambda_{\omega i}^2 - \omega_{fi}^2 < 0$ olması durumu:

Bu durumda $(\omega_{fi}^2 - \lambda_{\omega i}^2) = \beta_i^4$ alınarak

$$W_1(\xi) = C_1 \sin \beta_1 \xi + C_2 \cos \beta_1 \xi + C_3 \sinh \beta_1 \xi + C_4 \cosh \beta_1 \xi \quad (2.66)$$

$$W_2(\xi) = D_1 \sin \beta_2 \xi + D_2 \cos \beta_2 \xi + D_3 \sinh \beta_2 \xi + D_4 \cosh \beta_2 \xi \quad (2.67)$$

çözümleri elde edilmektedir. Yukarıda her iki durum için elde edilen (2.64)- (2.67) denklemlerinin çözümünde kullanılacak sınır ve süreklilik koşulları (8 adet) aşağıdaki gibidir.

$\xi = 0$:

1) $W_1(0) = 0$

2) $W_1'(0) = 0$

$\xi = 1$:

$$3) W_2''(1) = 0$$

$$4) W_2'''(1) = 0$$

$$\xi = \eta_1:$$

$$5) W_1(\eta_1) = W_2(\eta_1)$$

$$6) W_1'(\eta_1) = W_2'(\eta_1)$$

$$7) (EI)_1 W_1'' = (EI)_2 W_2''$$

$$8) (EI)_1 W_1''' = (EI)_2 W_2'''$$

Yukarıdaki sınır/ süreklilik koşullarının kullanılması ile elde edilecek homojen denklem takımı çözülerek sistemin doğal frekansları ve mod şekilleri elde edilmektedir.

BÖLÜM 3

SAYISAL UYGULAMALAR

Sayısal işlemlerde kiriş toplam boyu $L=2m$, kiriş malzemesinin(beton) elastisite modülü, Poisson oranı ve yoğunluğu sırasıyla $E = 27 \times 10^9 N/m^2$, $\nu = 0.2$ ve $\rho = 2400 kg/m^3$ olarak seçilmiştir. Kademeli durumda her iki kiriş parçası için de malzeme sabitleri aynı olup en kesitler birinci bölgede $25 \times 25(cm)$, ikinci bölgede ise $25 \times 50(cm)$ ' dir. Elastik zemine ait yay sabiti (Winkler zemin parametresi) iki parametrelili zemin için Vlasov ve Leontiev [21] tarafından önerilen bağıntılarda yaylar arasındaki kayma etkileşimini gösteren ikinci parametrenin sıfır alınması ile aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$K = \frac{E_0 b}{2(1-\nu_0^2)} \frac{\gamma}{\Lambda} \quad (3.1)$$

$$\Lambda = \sqrt[3]{\frac{2Eb h^3(1-\nu_0^2)}{12(1-\nu^2)E_0 b}}, \quad E_0 = \frac{E_s}{1-\nu_s^2}, \quad \nu_0 = \frac{\nu_s}{1-\nu_s} \quad (3.2)$$

Yukarıdaki bağıntılarda b, h, E ve ν sırasıyla kiriş kesit genişliğini, kesit yüksekliğini, kiriş malzemesine ait elastisite modülünü ve Poisson oranını göstermektedir. E_s ve ν_s ise zemine ait elastisite modülü ve Poisson oranıdır. γ zemin özelliklerine bağlı bir parametre olup genellikle 1 alınmaktadır. Kirişin oturduğu zemin kil ($E_s = 30 \times 10^6 N/m^2$, $\nu_s = 0.35$) olarak seçilmiştir. Bu zemin parametreleri ve kirişe ait parametrelerin kullanılması ile yay katsayılarının sayısal değerleri $h=25cm$ ve $h=50cm$ için sırasıyla $K = 5.23 \times 10^6 N/m^2$ ve $K = 2.61 \times 10^6 N/m^2$ olarak bulunmaktadır.

Çizelge 3.1' de Timoshenko ve Euler- Bernoulli kiriş teorileri için kademersiz halde, zemin etkisinin olmaması durumunda($K=0$) ilk üç moda ait doğal frekanslar görülmektedir. Sayısal değerlerden, her iki kiriş teorisi için de kiriş kesitinin(yüksekliğinin) büyümesi halinde frekansların da büyüdüğü görülmektedir. Kiriş kesitlerinin aynı olması durumunda, Euler- Bernoulli kirişi için elde edilen değerler, Timoshenko kirişine göre daha büyük olmaktadır. İlk moda ait frekans değerlerinin birbirine yakın olmasına rağmen, ikinci ve üçüncü modlarda farkın büyüdüğü görülmektedir.

Çizelge 3.2' de zemin etkisinin olmaması halinde($K=0$), her iki kiriş teorisi için kademeli halde elde edilen ilk üç moda ait frekans değerleri görülmektedir. Her iki kiriş teorisi için de ilk modda kiriş kesitinin büyümesi ile frekansların önce büyüdüğü daha sonra ise küçüldüğü görülmektedir. İkinci ve üçüncü modlarda ise kesitin büyümesi ile frekans değerlerinde de bir dalgalanma olduğu görülmektedir.

Çizelge 3.3' te zemin etkisi göz önüne alındığında($K \neq 0$) kademersiz haldeki frekans değerleri görülmektedir. Her iki kiriş teorisinde de, kiriş kesitinin büyümesi ile frekansların da büyüdüğü görülmektedir. Çizelge 3.1' deki değerlerle karşılaştırıldığında, zemin etkisinin göz önüne alınması durumundaki frekansların, zemin etkisinin göz önüne alınmaması durumuna göre daha büyük olduğu anlaşılmaktadır. Özellikle ilk modda, zemin etkisi frekansları önemli oranda etkilemektedir. Yüksek modlarda zeminin frekans üzerindeki etkisinin gittikçe azaldığı görülmektedir.

Çizelge 3.4' te zemin etkisinin göz önüne alınması($K \neq 0$) halinde kademeli kiriş için her iki teoriden elde edilen frekans değerleri görülmektedir. Zemin etkisinin sıfır olması durumuna benzer biçimde, birinci mod hariç diğer modlarda, kiriş kesitinin büyümesi ile frekans değerlerinde dalgalanma görülmektedir.

Çizelge 3.1 Kademersiz durumda, $K=0$ için ilk üç moda ait doğal frekanslar

	$A=25 \times 25 \text{ cm}^2$			$A=25 \times 50 \text{ cm}^2$		
	$\omega_1(\text{rad/sn})$	$\omega_2(\text{rad/sn})$	$\omega_3(\text{rad/sn})$	$\omega_1(\text{rad/sn})$	$\omega_2(\text{rad/sn})$	$\omega_3(\text{rad/sn})$
Timoshenko	210,326	1236,600	3181,600	407,099	2079,000	4786,100
Euler-Bernoulli	212,772	1333,400	3733,600	425,546	2666,900	7467,300

Çizelge 3.2 Kademeli durumda, $K=0$ için ilk üç moda ait doğal frekanslar

	Timoshenko			Euler- Bernoulli		
	$A_1=25 \times 25 \text{ cm}^2, A_2=25 \times 50 \text{ cm}^2$			$A_1=25 \times 25 \text{ cm}^2, A_2=25 \times 50 \text{ cm}^2$		
η_1	$\omega_1(\text{rad/sn})$	$\omega_2(\text{rad/sn})$	$\omega_3(\text{rad/sn})$	$\omega_1(\text{rad/sn})$	$\omega_2(\text{rad/sn})$	$\omega_3(\text{rad/sn})$
0,0	210,326	1236,600	3181,600	212,772	1333,400	3733,600
0,1	250,930	1436,400	3588,800	254,579	1579,000	4372,700
0,2	301,198	1613,400	3714,400	306,724	1812,200	4692,800
0,3	361,569	1678,800	3549,700	370,002	1921,200	4480,200
0,4	428,240	1615,600	3671,600	441,029	1852,000	4671,000
0,5	487,519	1581,000	3958,000	506,047	1799,500	5336,900
0,6	517,573	1706,900	3993,600	541,248	1950,500	5699,200
0,7	511,503	2010,100	4002,200	537,011	2379,500	5609,300
0,8	483,237	2252,400	4615,200	507,539	2841,300	6484,800
0,9	446,294	2228,300	5061,500	467,938	2876,000	7861,500
1,0	407,095	2079,000	4786,100	425,545	2666,900	7467,300

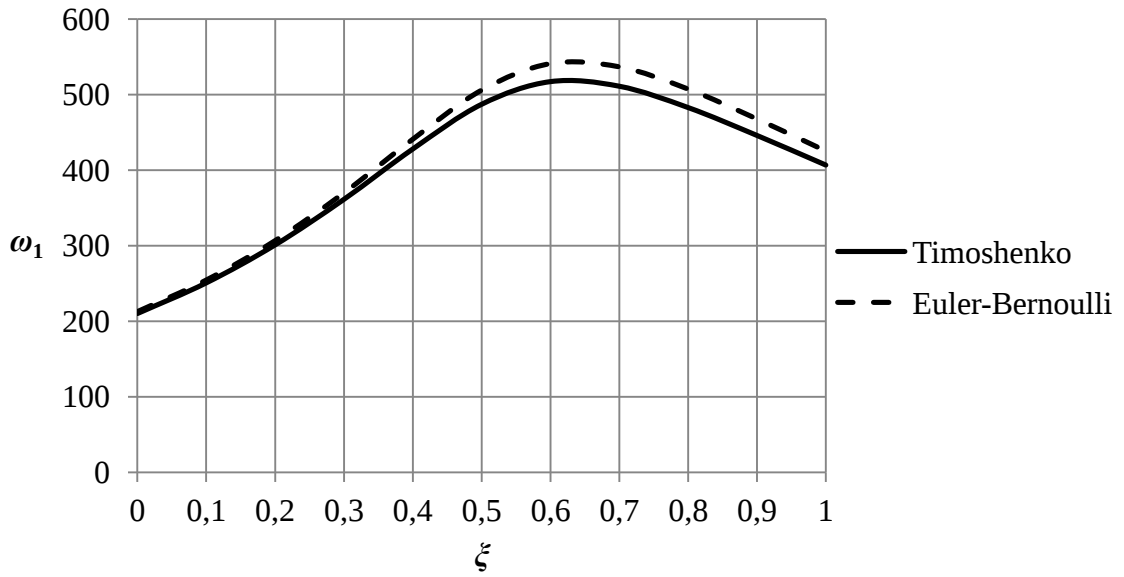
Çizelge 3.3 Kademersiz durumda, $K \neq 0$ için ilk üç moda ait doğal frekanslar

	$A=25 \times 25 \text{ cm}^2$			$A=25 \times 50 \text{ cm}^2$		
	$\omega_1(\text{rad/sn})$	$\omega_2(\text{rad/sn})$	$\omega_3(\text{rad/sn})$	$\omega_1(\text{rad/sn})$	$\omega_2(\text{rad/sn})$	$\omega_3(\text{rad/sn})$
Timoshenko	280,934	1250,200	3186,700	417,454	2080,900	4786,900
Euler- Bernoulli	283,125	1346,400	3738,300	435,673	2668,500	7467,800

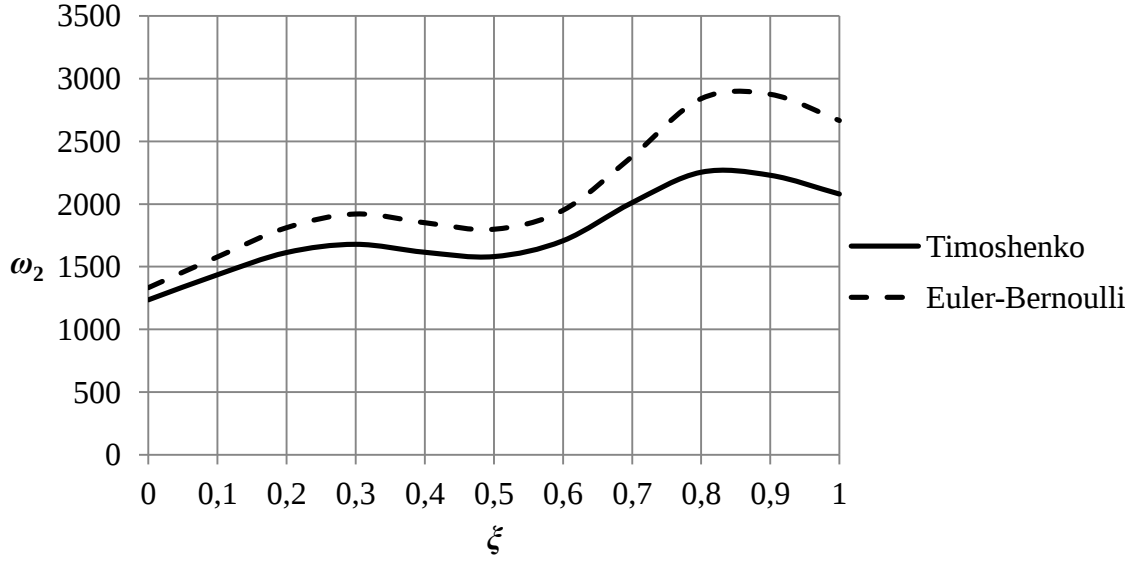
Çizelge 3.4 Kademeli durumda, $K \neq 0$ için ilk üç moda ait doğal frekanslar

	Timoshenko			Euler- Bernoulli		
	$A_1=25 \times 25 \text{ cm}^2, A_2=25 \times 50 \text{ cm}^2$			$A_1=25 \times 25 \text{ cm}^2, A_2=25 \times 50 \text{ cm}^2$		
η_1	$\omega_1(\text{rad/sn})$	$\omega_2(\text{rad/sn})$	$\omega_3(\text{rad/sn})$	$\omega_1(\text{rad/sn})$	$\omega_2(\text{rad/sn})$	$\omega_3(\text{rad/sn})$
0,0	280,930	1250,200	3186,700	283,125	1346,400	3738,300
0,1	312,433	1448,000	3593,300	315,750	1590,000	4376,700
0,2	354,013	1623,600	3718,300	359,117	1821,700	4696,400
0,3	406,515	1687,900	3553,000	414,434	1929,800	4483,300
0,4	466,465	1623,500	3674,600	478,673	1859,700	4673,800
0,5	520,172	1587,800	3960,600	538,142	1806,100	5339,200
0,6	545,397	1712,600	3995,700	568,656	1956,100	5701,000
0,7	534,989	2014,800	4004,000	560,226	2383,900	5610,900
0,8	502,624	2255,900	4616,900	526,732	2844,600	6486,200
0,9	461,387	2231,000	5062,600	482,839	2878,400	7863,200
1,0	417,453	2080,900	4786,900	435,673	2668,500	7467,800

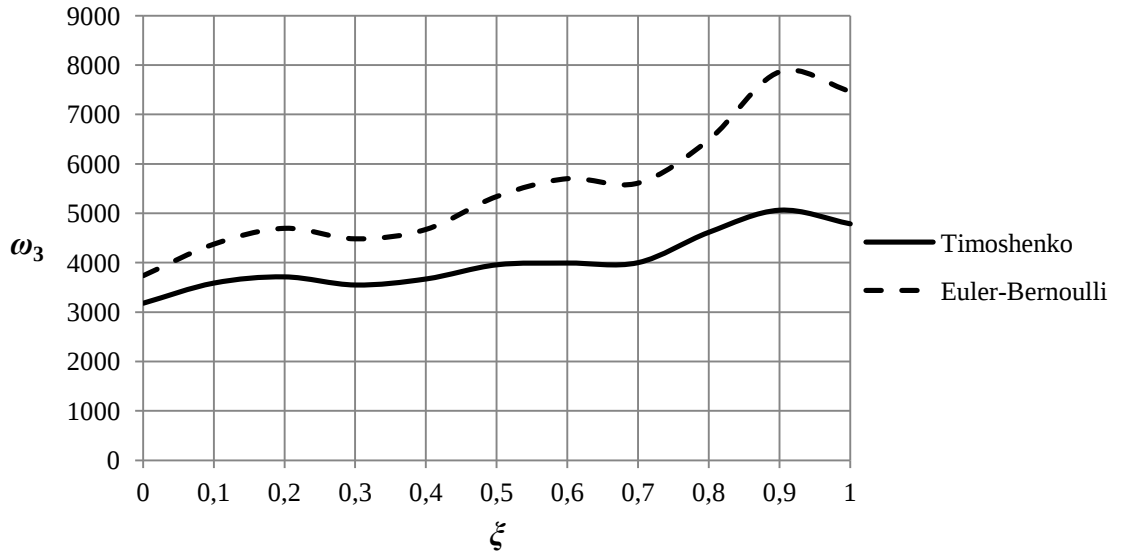
Şekil 3.1, Şekil 3.2 ve Şekil 3.3’ te Timoshenko ve Euler- Bernoulli kiriş teorileri için, zemin etkisinin olmaması durumunda frekansların kiriş boyunca değişimi görülmektedir. İlgili şekiller Çizelge 3.4’ teki değerlerin kullanılması ile elde edilmiştir. Burada $\xi=0$ olduğunda kiriş kesiti 25x25 cm, $\xi=1$ olduğunda ise 25x50 cm boyutundadır. Yukarıda da belirtildiği gibi kiriş kesiti büyüdükçe ikinci ve üçüncü modlarda bir dalgalanma görülmekte, bu modlarda teorilerden elde edilen frekans değerleri arasındaki fark da büyümektedir. Aynı durum, zemin etkisinin göz önüne alınması durumunda($K \neq 0$) da gözlenmektedir(Şekil 3.4- 3.6).



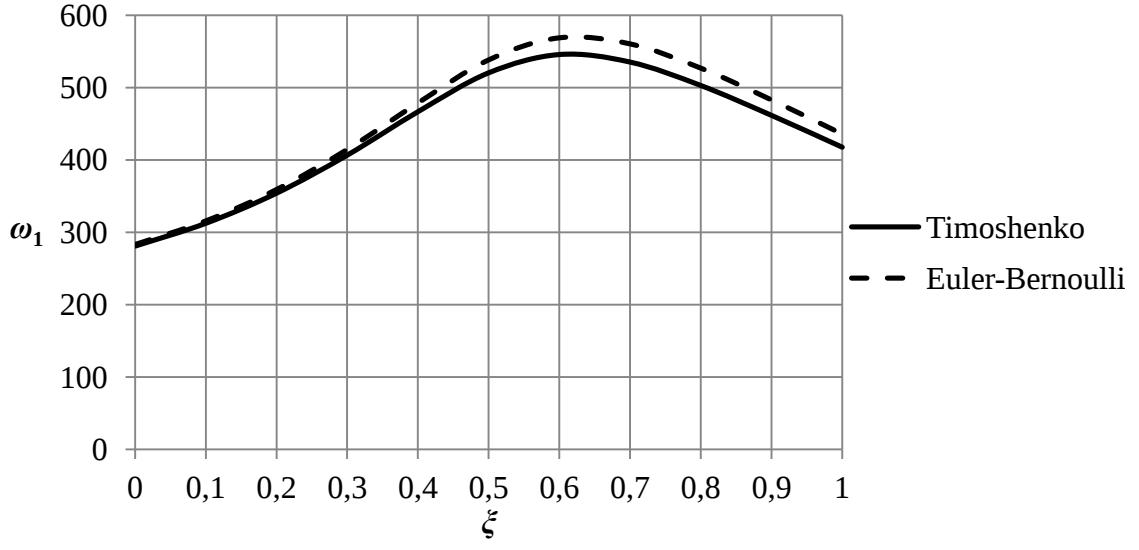
Şekil 3.1 $K=0$ için ω_1 - ξ değişimi



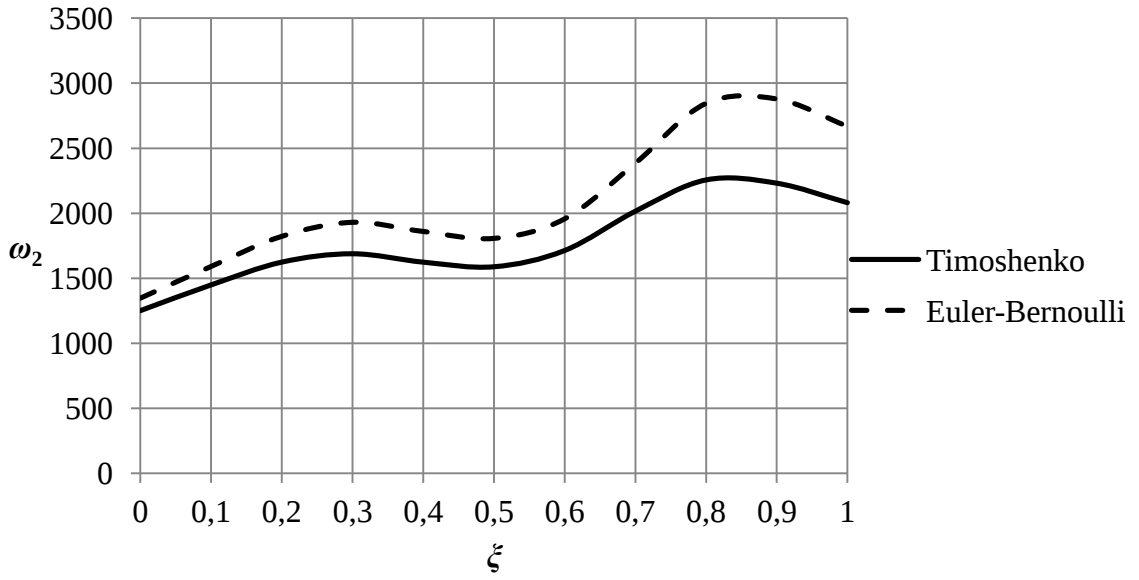
Şekil 3.2 K=0 için ω_2 - ξ değişimi



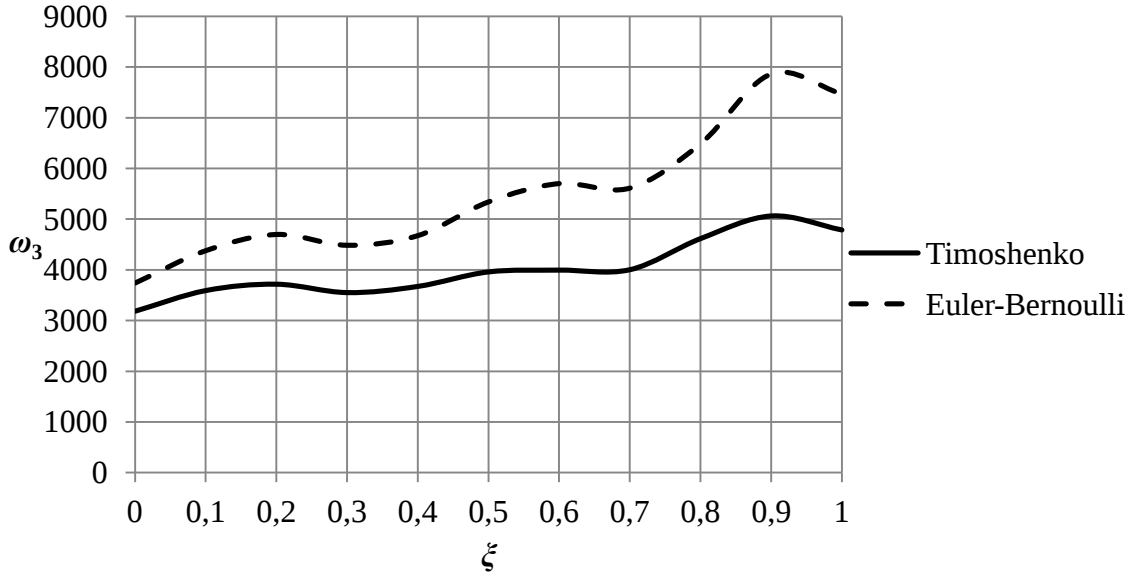
Şekil 3.3 K=0 için ω_3 - ξ değişimi



Şekil 3.4 $K \neq 0$ için ω_1 - ξ değişimi

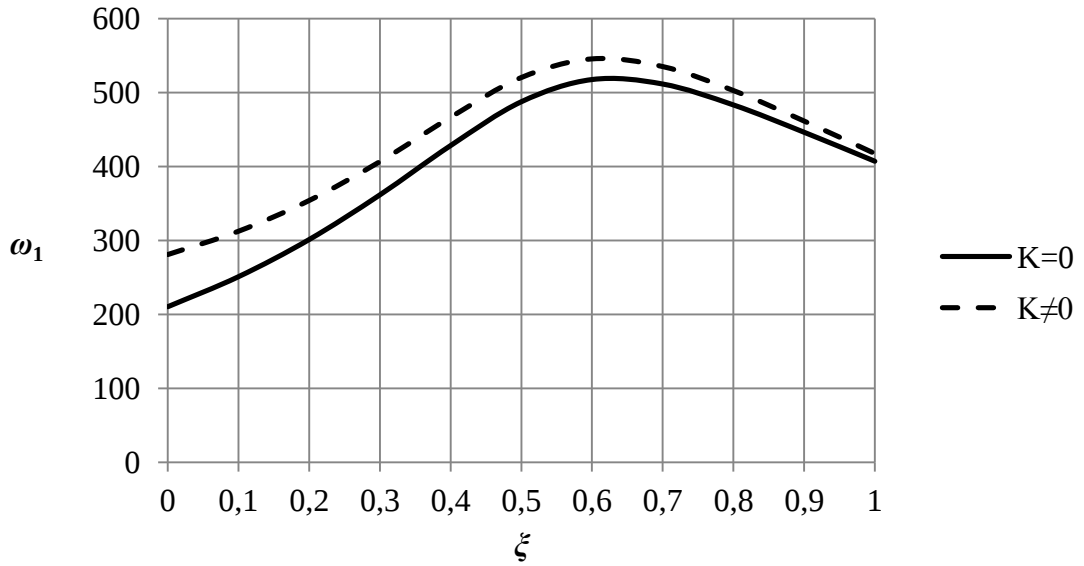


Şekil 3.5 $K \neq 0$ için ω_2 - ξ değişimi

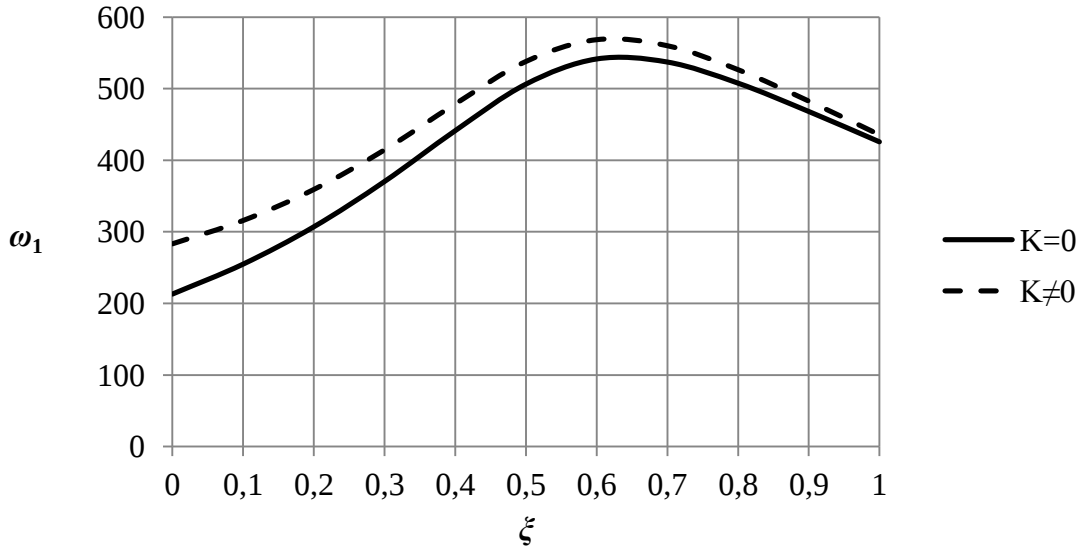


Şekil 3.6 $K \neq 0$ için ω_3 - ξ değişimi

Şekil 3.7’ de ve 3.8’ de zemin tepkisinin göz önüne alınması ve alınmaması durumları için sırasıyla Timoshenko ve Euler- Bernoulli kirişleri için birinci modda frekansın kiriş boyunca değişimi görülmektedir. Şekillerden de görüldüğü gibi her iki teori için de zemin etkisinin göz önüne alınması durumunda frekans değerleri daha büyük olmaktadır.

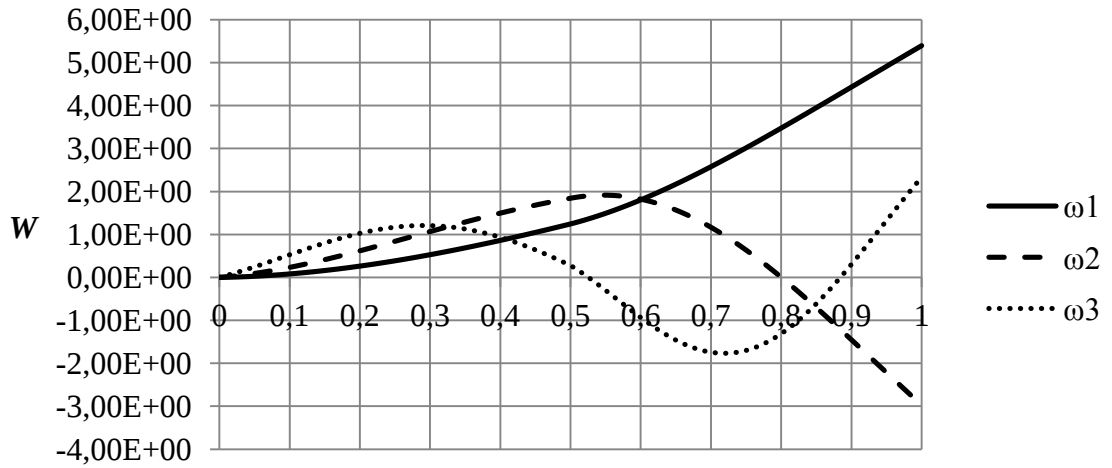


Şekil 3.7 Timoshenko kirişinde $K=0$ ve $K \neq 0$ için ω_1 - ξ değişimi

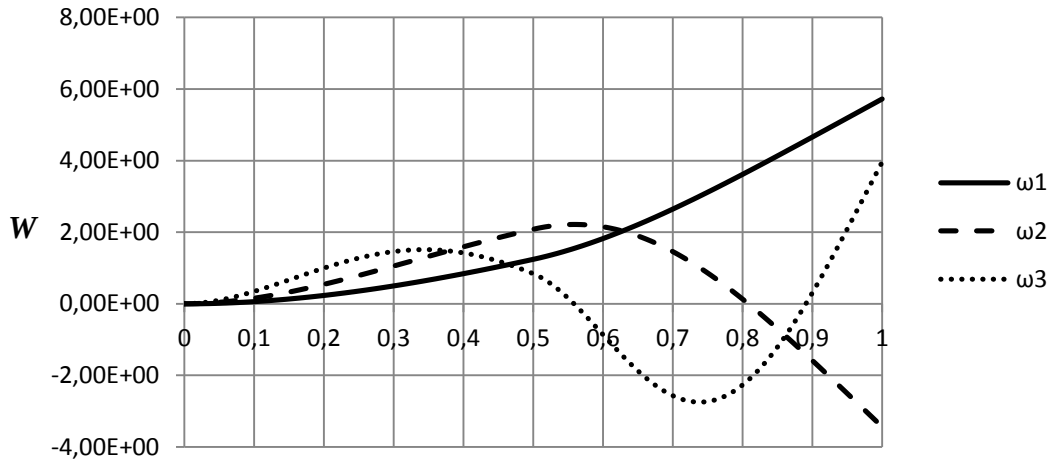


Şekil 3.8 Euler- Bernoulli kirişinde $K=0$ ve $K \neq 0$ için ω_1 - ξ değişimi

Şekil 3.9 ve 3.10' da Timoshenko ve Euler- Bernoulli kirişleri için kademenin kiriş ortasında olması halinde ilk üç moda ait mod şekilleri görülmektedir. Şekillerde, 1. mod dışındaki modlarda yer değiştirmenin sıfır olduğu noktalar bulunmaktadır. Bu noktaların sayısı mod sayısı büyüdükçe artmaktadır.

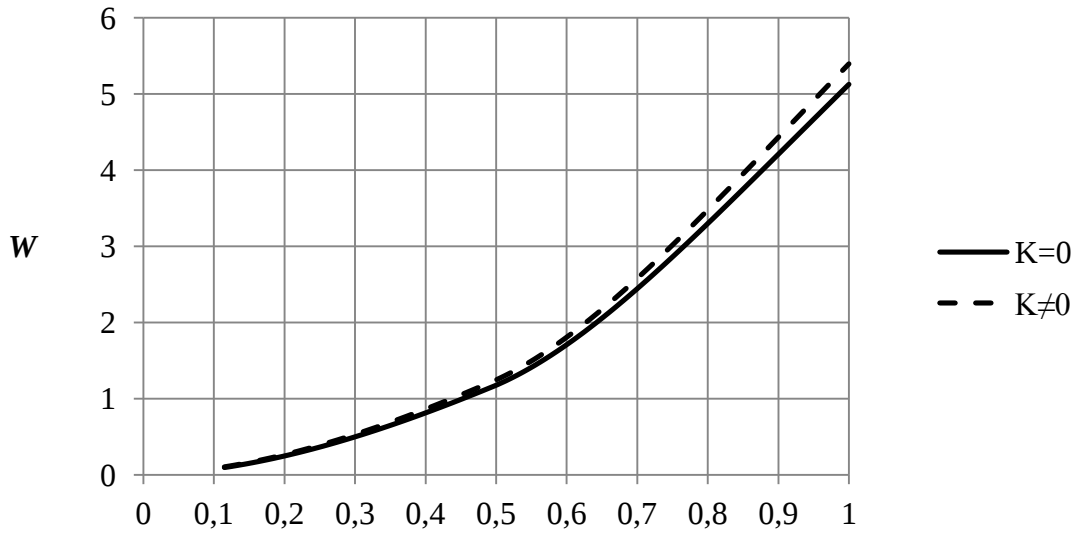


Şekil 3.9 Timoshenko kirişinde $K \neq 0$ ve $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ için yer değiştirmeler

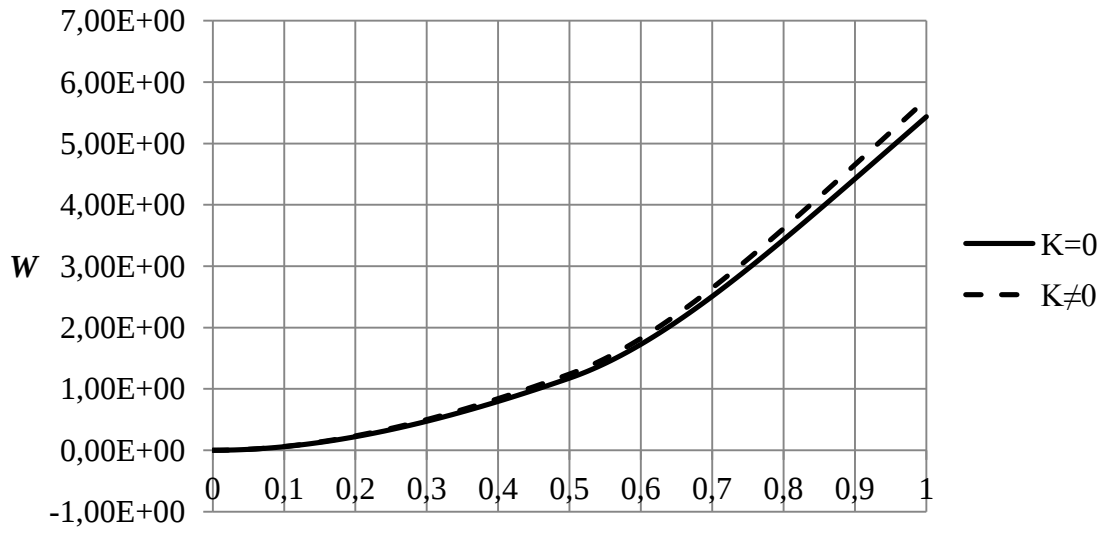


Şekil 3.10 Euler- Bernoulli kirişinde $K \neq 0$ ve $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ için yer değiştirmeler

Şekil 3.11 ve 3.12’ de her iki kiriş teorisi kullanılarak elde edilen birinci moda ait mod şekilleri görülmektedir. Şekillerden, zemin etkisinin olması durumunda, frekansın daha büyük olması nedeniyle, yer değiştirmelerin de daha büyük olduğu görülmektedir.



Şekil 3.11 Timoshenko kirişinde $K=0, K \neq 0$ ve ω_1 için yer değiştirmeler



Şekil 3.12 Euler- Bernoulli kirişinde $K=0, K \neq 0$ ve ω_1 için yer değiştirmeler

BÖLÜM 4

SONUÇLAR

Enkesit alanları farklı iki parçadan oluşan ve elastik zemine oturan bir konsol Timoshenko kirişinin serbest titreşimleri incelenerek ilk üç mod için doğal frekanslar hazırlanan bir bilgisayar programı yardımıyla hesaplanmıştır. Kirişin elastik zemine oturmaması durumu ve Euler- Bernoulli kirişi için de çözüm yapılmış ve aşağıdaki değerlendirmeler yapılmıştır.

i) Timoshenko ve Euler- Bernoulli kirişlerinin her ikisi için de kirişin elastik zemine oturması durumunda elde edilen frekanslar, zemin etkisinin olmaması durumuna göre daha büyük olmaktadır. Birinci mod dışında, zeminin frekans değerleri üzerindeki etkisi küçük olmaktadır. Timoshenko kiriş teorisinden elde edilen frekanslar, Euler- Bernoulli kirişine göre daha küçük olup, bu durum zeminin etkisinden bağımsızdır.

ii) Kiriş kesitinin büyümesi halinde, birinci moda ait frekans değerleri önce büyümekte sonra ise küçülmektedir. İkinci ve üçüncü modlarda ise frekans değerlerinde bir dalgalanma görülmektedir. Birinci mod göz önüne alındığında, frekansın daha büyük olması nedeniyle yer değiştirmeler kirişin elastik zemine oturması durumundan daha büyük olmaktadır. Bu durum her iki kiriş teorisi için de geçerlidir.

KAYNAKLAR

-
- [1] Han, S.M., Benaroya, H. ve Wei, T., (1999). "Dynamics of Transversely Vibrating Beams Using Four Engineering Theories", Journal of Sound and Vibration, 225(5):935-988.
 - [2] Dutta, S.C. ve Roy, R., (2002). "Acritical Review on Idealization and Modeling for Interaction Among Soil- Foundation- Structure System", Computers and Structures, 80:1579-1594.
 - [3] Wang, J., (1991). "Vibration of Stepped Beams on Elastic Foundations", Journal of Sound and Vibration, 149(2):315-322.
 - [4] Kukla, S., (1991). "Free Vibration of a Beam Supported on a Stepped Elastic Foundation", Journal of Sound and Vibration, 149(2):259-265.
 - [5] Thambiratnam, D. Ve Zhunge, Y., (1995&1996). "Free Vibration Analysis of Beams on Elastic Foundation", Computers and Structures, 60(6):971-980.
 - [6] Abramovich, H. ve Elishakoff, I., (1991). "Vibration of a Cantilever Timoshenko Beam with a Tip Mass", Journal of Sound and Vibration, 148:162-170.
 - [7] Abramovich, H. ve Hamburger, O., (1992). "Vibration of a Uniform Cantilever Timoshenko Beam with Translational and Rotational Springs and with a Tip Mass", Journal of Sound and Vibration, 152:67-80.
 - [8] Brunch, J.C. ve Mitchell, T.P., (1987). "Vibrations of a Mass-Loaded Clamped-Free Timoshenko Beam", Journal of Sound and Vibration, 114:341-345.
 - [9] Dong, X.J., Meng, G., Li, H.G. ve Ye, L., (2005). "Vibration Analysis of a Stepped Laminated Composite Timoshenko Beam", Mechanics Research Communications, 32:572-581.
 - [10] Farghaly, S.H. ve Elmahdy, T.H., (1994). "The Gain in The Fundamental Frequency of Timoshenko Beams Consisting of Three Distinct Parts and with Root Flexibilities", Journal of Sound and Vibration, 178:131-140.
 - [11] Farghaly, S.H., (1994). "Vibration and Stability Analysis of Timoshenko Beams with Discontinuities in Cross- section", Journal of Sound and Vibration, 174:591-605.
 - [12] Gutierrez, R.H., Laura, P.A.A. ve Rossi, R.E., (1990). "Naturel Frequencies of a Timoshenko Beam of Non- Uniform Cross Section Elastically Restrained at

- One End Guided at The Other”, *Journal of Sound and Vibration*, 141(1):174-179.
- [13] Lee, S.Y. ve Lin, S.M., (1992). “Exact Vibrations for Nonuniform Timoshenko Beams with Attachments”, *AIAA Journal*, 30:2930-2934.
 - [14] Lin, H.P. ve Chang, S.C., (2005). “Free Vibration Analysis of Multi-span Beams with Intermediate Flexible Constraints”, *Journal of Sound and Vibration*, 281:155-169.
 - [15] Lin, H.Y., (2009). “On The Naturel Frequencies and Mode Shapes of a Multispan Timoshenko Beam Carrying a Number of Various Concentrated Elements”, *Journal of Sound and Vibration*, 319:593-605.
 - [16] Lee, S.Y. ve Lin, S.M., (1995). “Vibrations of Elastically Restrained Non-uniform Timoshenko Beams”, *Journal of Sound and Vibration*, 183(3):403-415.
 - [17] Karami, G., Malekzadeh, P. ve Shahpari, S.A., (2003). “A DQEM for Vibration of Shear Deformable Non-uniform Beams with General Boundary Conditions”, *Engineering Structures*, 25:1169-1178.
 - [18] Spountzakis, E.J. ve Kampitsis, A.E., (2010). “Nonlinear Dynamic Analysis of Timoshenko Beam- Columne Partially Soppoted on Tensionless Winkler Foundation”, *Computers and Structures*, 88:1206-1219.
 - [19] Morfidis, K., (2010). “Vibration of Timoshenko Beams on Three- Parameter Elastic Foundation”, *Computers and Structures*, 88:294-308.
 - [20] Graff, K.F., (1975). *Wave Motion in Elastic Solids*, Ohio State University Press.
 - [21] Vlazov, V.Z. ve Leontiev, U.N., (1966). *Beams, Plates and Shells on Elastic Foundation*, Jerusalem Israel Programme for Scientific Translations(Translated from Russia).

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Neslihan SAİM
Doğum Tarihi ve Yeri : 18.02.1986, İstanbul
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : neslihansaim@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	İnşaat Mühendisliği	Kocaeli Üniversitesi	2010
Lise	Fen Bilimleri	Edirne Anadolu Lisesi	2004

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2011-2013	Şimşek Yapı Denetim Ltd. Şti.	Kontrol mühendisi