



**ELEKTROMANYETİZMANIN EŞİTLİKLERİNİN
GEOMETRİK CEBİR İLE GÖSTERİMİ**

Yüksek Lisans Tezi

Mine FAKILI

Eskişehir 2021

**ELEKTROMANYETİZMANIN EŞİTLİKLERİNİN GEOMETRİK CEBİR İLE
GÖSTERİMİ**

Mine FAKILI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Genel Fizik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Abidin KILIÇ**

**Eskişehir
Eskişehir Teknik Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Haziran 2021**

ÖZET

ELEKTROMANYETİZMANIN EŞİTLİKLERİNİN GEOMETRİK CEBİR İLE GÖSTERİMİ

Mine FAKILI

Genel Fizik Anabilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Haziran 2021

Danışman: Prof. Dr. Abidin KILIÇ

Bu çalışmada, fizik ve matematik alanlarında yaygın bir şekilde kullanılan Clifford Cebiri'nin tanımı ve elektromanyetizmanın eşitliklerinin cebir ile gösterimi ele alınmıştır. Clifford Cebiri'nin tarihsel gelişiminden bahsedildikten sonra cebirde kullanılan cebirsel eşitliklere yer verilmiştir. Daha sonra elektromanyetizmanın eşitlikleri ve bu eşitliklerin Clifford Cebiri ile gösterimi ele alınmıştır. Akabinde Maxwell Denklemleri ve denklemlerin Clifford Cebiri ile gösterimi sunulmuştur. En sonunda Lenz yasasının Clifford Cebiri ile gösterimi yer almaktadır.

Anahtar Sözcükler: Clifford Cebiri, Elektrik Alan, Manyetik Alan, Maxwell Denklemleri, Lenz Yasası

ABSTRACT

REPRESENTATION OF EQUATIONS OF ELECTROMAGNETISM WITH GEOMETRIC ALGEBRA

Mine FAKILI

Department of General Physics

Eskişehir Technical University, Graduate School of Institute, June 2021

Supervisor: Prof. Dr. Abidin KILIÇ

In this study, the definition of Clifford Algebra, which is widely used in physics and mathematics, and the representation of electromagnetism equalities by algebra are discussed. After mentioning the historical development of Clifford Algebra, the algebraic expressions are included which is used in algebra. Then, electromagnetism expressions and the representation of electromagnetism expressions with Clifford Algebra is discussed. Then, Maxwell's Equations and the representation of Maxwell's Equations with Clifford Algebra is presented. Finally, the representation of Lenz's Law with Clifford Algebra is discussed.

Keywords: Clifford Algebra, Electric Field, Magnetic Field, Maxwell Equations, Lenz's Law

TEŞEKKÜR

Lisans eğitimimden yüksek lisans eğitimime kadar ve tez çalışmam sırasında da kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösteren, destek olan, yanında çalışmaktan onur duyduğum ve ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı değerli danışmanım ve hocam Prof. Dr. Abidin KILIÇ'a sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Tez çalışmam boyunca maddi ve manevi destekleriyle beni hiç yalnız bırakmayan aileme sonsuz teşekkür ederim.

Tezi hazırlama sürecimde tezin her detayı ile ilgilenen ve bana yardımcı olan ablam Merve KUZU'ya ayrıca teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca yardımını ve desteğini hiç esirgemeyen değerli kuzenim (ablam) Dr. Öğr. Üyesi A. Sevtap DEMİR'e teşekkür ederim.

Mine FAKILI

Haziran, 2021

10/06/2021

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Mine FAKILI

STATEMENT OF COMPLIANCE WITH ETHICAL PRINCIPLES AND RULES

I hereby truthfully declare that this thesis is an original work prepared by me; that I have behaved in accordance with the scientific ethical principles and rules throughout the stages of preparation, data collection, analysis and presentation of my work; that I have cited the sources of all the data and information that could be obtained within the scope of this study, and included these sources in the references section; and that this study has been scanned for plagiarism with “scientific plagiarism detection program” used by Eskişehir Technical University, and that “it does not have any plagiarism” whatsoever. I also declare that, if a case contrary to my declaration is detected in my work at any time, I hereby express my consent to all the ethical and legal consequences that are involved.

Mine FAKILI

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BAŞLIK SAYFASI.....	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	vi
İÇİNDEKİLER	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xii
1. GİRİŞ	1
1.1. Clifford Cebiri'nin Tarihçesi	1
2. CLIFFORD CEBİRİ.....	7
2.1. Lineer Uzay ve Vektör Uzayı	9
2.2. Skalar Çarpım	10
2.3. Vektörel Çarpım	11
2.4. İki Boyutlu Uzayda Clifford Cebiri.....	12
2.5. Üç Boyutlu Uzayda Clifford Cebiri.....	13
2.6. Bivektör	15
2.7. Trivektör	17
2.8. n-Boyutlu Uzayda Vektörün Derecesi.....	17
2.9. Multivektör (Çokluvektör).....	19
2.9.1. Bir multivektörün derecesi.....	23
2.9.2. Bir multivektörün tersi	24
2.9.3. Bir multivektörün duali	24
2.9.4. Bir multivektörün izdüşümü ve dik bileşeni.....	25
2.10. Sankiskalar.....	28
2.11. Sankivektör	28
2.12. Dış Çarpım	29

2.13. İç Çarpım	34
2.14. Geometrik Çarpım	36
2.15. 2- Boyutlu Uzayda Clifford Cebirinin Matris Gösterimleri.....	38
2.16. 3- Boyutlu Uzayda Clifford Cebirinin Matris Gösterimler	39
3. ELEKTROMANYETİZMA	41
3.1. Diferansiyel Vektör Operatörleri	41
3.2. İntegral ile Hesaplamalar	43
3.3. Elektrostatik	44
3.4. Manyetizma	54
3.5. Skalar ve Vektör Potansiyeli.....	57
3.6. Lorentz Kuvveti.....	59
4. ELEKTROMANYETİZMANIN CLIFFORD CEBİRİ İLE İFADESİ.....	61
4.1. Elektrik Alanın Clifford Cebiri İle İfadesi	62
4.2. Elektrik Akımının Clifford Cebiri İle İfadesi	64
4.3. Lorentz Kuvvetinin Clifford Cebiri İle İfadesi	64
4.4. Manyetik Alanın Clifford Cebiri İle İfadesi	65
4.5. Potansiyelin Clifford Cebiri İle İfadesi	67
4.6. Manyetik Akımın Clifford Cebiri İle İfadesi.....	68
5. MAXWELL DENKLEMLERİ VE CLIFFORD CEBİRİ İLE İFADESİ	68
5.1. Maxwell Denklemlerinin Elde Edilmesi.....	69
5.2. Maxwell Denklemlerinin Clifford Cebiri ile İfadesi	73
6. LENZ YASASININCLIFFORD CEBİRİ İLE İFADESİ.....	80
6.1. Lenz Yasası.....	80
6.2. Lenz Yasasının Clifford Cebiri ile İfadesi.....	81
7. SONUÇ.....	81

KAYNAKÇA

ÖZGEÇMİŞ

ÇİZELGELER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 2.1. Cl^n 'nin birim bazları.....	7
Çizelge 2.2. Cl^2 Clifford Cebirinin çarpım tablosu.....	13
Çizelge 2.3. Cl^3 Clifford Cebirinin çarpım tablosu	14
Çizelge 2.4. 2-boyutlu uzayın dereceleri.....	18
Çizelge 2.5. 3-boyutlu uzayın dereceleri	18
Çizelge 2.6. n-boyutlu uzayın dereceleri	19
Çizelge 2.7. Cl^2 'de dış çarpım için birim bazların olası kombinasyonları	32
Çizelge 2.8. Cl^3 'te dış çarpım için birim bazların olası kombinasyonları	34
Çizelge 2.9. 3-boyutlu Clifford Cebirinde birim bazların iç çarpım için kombinasyonları	35
Çizelge 2.10. Cl^2 'nin baz vektörlerinin matris gösterimi	38
Çizelge 2.11. Cl^3 'ün baz vektörlerinin matris gösterimi	39
Çizelge 2.12. Pauli cebiri ile Cl^3 arasındaki benzerlik.....	40
Çizelge 4.1. Elektromanyetizma eşitliklerinin Geometrik Cebir ile gösterimleri	62
Çizelge 5.1. Maxwell Denklemlerinin integral ve diferansiyel formları	72
Çizelge 5.2. Maxwell Denklemlerinde kullanılan semboller, büyüklükler ve birimler ...	72

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 1.1. Argand diyagramları.....	2
Şekil 2.1. Bivektör ve trivektör gösterimleri	8
Şekil 2.2. Vektör gösterimi	9
Şekil 2.3. Kartezyen düzlemde birim baz vektörleri.....	10
Şekil 2.4. Vektörel çarpımın yönü.....	12
Şekil 2.5. 2-boyutlu uzayın bivektörleri	16
Şekil 2.6. 3-boyutlu uzayın bivektörleri	16
Şekil 2.7. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ trivektör gösterimi	17
Şekil 2.8. n-boyutlu uzayın en küçük dereceli multivektörlerin görselleştirilmesi	19
Şekil 2.9. $\vec{a}$ vektörünün $\mathbf{A}$ multivektörü üzerindeki bileşenleri	28
Şekil 2.10. $\vec{a}\vec{b}$ ve $\vec{b}\vec{a}$ dış çarpımlarının geometrik anlamı	30
Şekil 2.11. $\vec{a} \times \vec{b}$ vektörü	30
Şekil 2.12. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ dış çarpımının geometrik anlamı	31
Şekil 2.13. Bir vektör ile bir bivektörün iç çarpımı.....	35
Şekil 3.1. Yüklü cisimler arasındaki elektriksel kuvvetler.....	45
Şekil 3.2. Noktasal yük etrafında yükün cinsine ve miktarına bağlı elektrik alan çizgileri.....	46
Şekil 3.3. İşaretleri ve yük büyüklükleri aynı noktasal cisimlerin etrafındaki elektrik alan çizgileri	47
Şekil 3.4. İşaretleri farklı, yük büyüklükleri aynı olan noktasal yüklerin oluşturduğu elektrik alan çizgileri.....	47
Şekil 3.5. İşaretleri ve yük büyüklükleri farklı noktasal yüklerin oluşturduğu elektrik alan çizgileri	47
Şekil 3.6. Düzgün elektrik alandaki noktalar	50
Şekil 3.7. Düzgün elektrik alan içindeki elektriksel akı.....	52
Şekil 3.8. Düzgün olmayan elektrik alan içindeki elektriksel akı	53
Şekil 3.9. Manyetik alan çizgilerinin gösterimi	55
Şekil 3.10. Manyetik kuvvetin gösterimi	56
Şekil 3.11. Yüzeyden dik geçen manyetik alan çizgiler.....	57
Şekil 4.1. Kutupsal ve eksenel vektörler arasındaki ayırım	61
Şekil 6.1. Faraday ve Lenz Yasasının gösterimi.....	81

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\vec{a}, \vec{A}$	: Vektörler
λ, β	: Skalar
$\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$	: Birim Baz Vektörler
$\hat{e}_{12}, \hat{e}_{13}, \hat{e}_{23}$	: Bivektörler
$\hat{e}_{123}$	: trivektör
Cl^n	: n-boyutlu Clifford Cebiri
$\mathbf{M}$	: Multivektörler
$\langle \mathbf{M} \rangle_s$	: Multivektörün Derecesi
$\mathbf{M}^{-1}$	: Multivektörün Tersi
$\mathbf{M}^*$	: Multivektörün Duali
$\cdot$	: Skalar (nokta) Çarpım
$\times$	: Vektörel Çarpım
$\wedge$	: Wedge Çarpım
$\lrcorner$	: İç Çarpım
δ_{ij}	: Dirac-Delta Fonksiyonu
Σ	: Toplam Sembolü
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	: Pauli-Spin Matrisleri
$a_{\perp}$	: $\vec{a}$ vektörünün dik bileşeni
$a_{\parallel}$	: $\vec{a}$ vektörünün paralel bileşeni
$\vec{\nabla}$	: Nabla/del Operatörü
$\square$	: d'Elambert İfadesi (4-Gradyent Operatörü)
Δ	: Laplace Operatörü
$\vec{E}$	: Elektrik Alan Vektörü
$\vec{B}$	: Manyetik Alan Vektörü
$\vec{F}$	: Lorentz Kuvveti
i	: Trivektör ($\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$)
c	: Işık Hızı
I	: Akım
$\vec{F}_E$	: Elektrik Alan Kuvveti
$\vec{F}_B$	: Manyetik Alan Kuvveti
V	: Skalar Potansiyel

$\vec{A}$	: Vektör Potansiyeli
q	: Yük
ρ	: Hacimsel Yük Yoğunluğu
$\vec{v}$	: Hız
$\vec{j}$	: Akım Yoğunluğu
Φ_E	: Elektriksel Akı
Φ_B	: Manyetik Akı
μ_0	: Boş Uzayın Manyetik Geçirgenlik Sabiti
ϵ_0	: Boş Uzayın Elektrik Geçirgenlik Sabiti
$\vec{S}$	: Pointing Vektörü





Annem'e

1. GİRİŞ

Fizikteki kavramların açıklanabilmesi ve bu kavramların ispatlanabilmesi için matematiksel eşitliklere ihtiyaç duyulur. Matematik, fizik biliminin dilidir de denilebilir. Tarih boyunca matematikçiler ve fizikçiler tarafından eşitlikleri içeren cebirler ortaya konmuştur. Clifford Cebiri ya da diğer ismiyle Geometrik Cebir ise bu cebirlerden biridir.

Clifford Cebiri, William Kingdon Clifford tarafından ortaya konulmuştur. Clifford Cebiri, matematiksel fiziğin en temel teorilerinden biri olarak yerini almıştır ve adıyla anılan çarpım işlemi de oldukça büyük bir öneme sahiptir.

Grassman tarafından ortaya atılan ve Clifford tarafından cebirsel eşitlik şekline dönüştürülen geometrik çarpım; iki vektörün birbirine ortogonal (dik) olma büyüklüğünü iç çarpım şeklinde ifade ederken, ortogonallığın (dikliğin) doğrultusunu dış çarpım şeklinde ifade eder [1].

1.1 Clifford Cebiri'nin Tarihçesi

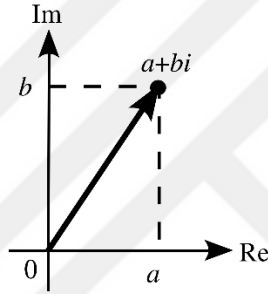
Reel sayılar klasik fizikte önemli bir yere sahiptir. Kompleks sayılar ise kuantum fiziğinde önemli rol oynar. Caspar Wessel, Jean-Robert Argand ve Carl Friedrich Gauss 2-boyutlu problemleri çözmek için kompleks sayılardan faydalandılar [2]. Bu sayılar matematikçilerin yüzyıllarca ilgisini çekmiş olan kareler ve kareköklerle ilgili birçok sorunun cevabıdır. Karekök fonksiyonu, elimizdeki sayıya ulaşmak için hangi sayıyı kendisiyle çarpmamız yani karesini almamız gerektiği sorusunun cevabıdır. Başka bir deyişle, karekök bize alanını bildiğimiz bir karenin bir kenar uzunluğunun ne olması gerektiğini söyler. Karekök basit bir fikir olsa da;

-1 'in karekökü hangi sayıdır?

Bu sorun ile ilk olarak matematikçi ve mühendis Heron'un karşı karşıya geldiği iddia edilir. Sonrasında ise, negatif bir sayının karekökünü kullanan ilk kişinin İtalyan matematikçi Cardano olduğu sanılır. Cardano'dan sonra kartezyen koordinat sisteminin kâşifi Descartes, bu sayıları "imaginery" yani "sanal" olarak nitelendirir. Daha sonra çok sayıda matematikçi, Leonhard Euler, Abraham de Moivre, Cari Friedrich Gauss, William Rowan Hamilton, Augustin Louis Cauchy, Bernhard Riemann, Kari Weierstrass da bu sayılarla ilgilenir [3]. De Moivre ve Newton, trigonometriyi karmaşık sayılarla birleştirirler. Bu sayılara " i " gösterimini ise Euler kazandırır ve bu sayıları $i = \sqrt{-1}$ eşitliğini sağlayan sanal bir birim olarak tanımlar.

Gauss, bu sayılar için “kompleks sayılar” ifadesini kullanan ilk kişidir. Kompleks sayılar ne sanal ne de reel bir sayıdır. Kompleks sayılar bu ikisinin karışımıdır. Sonrasında Gauss, kompleks sayıları bir düzlem üzerindeki noktalar şeklinde düşünür ve matematiğin ‘kompleks analiz’ denilen dalının temellerini atar. Gauss, x-eksenini reel eksen, y-eksenini hayali (sanal) eksen olarak ifade ederek, karmaşık sayıları tanımlar ve karmaşık sayıları $a + bi$ biçiminde gösterir. Aslında buna benzer çalışmaları öncesinde Norveçli matematikçi Casper Wessel de yapmıştır.

Norveçli Caspar Wessel sanal sayıları geometrik olarak çizen ilk kişidir. Wessel’in çalışması yıllar boyunca fark edilmeden bekler ve bu buluşun onuru Jean-Robert Argand’a (1768-1822) verilir. Bu yüzden ki kompleks sayıların geometrik diyagramlarına bugün Wessel diyagramları değil Argand diyagramları denilir [4].



Şekil 1.1. Argand diyagramları

William Rowan Hamilton 1830 yılından itibaren kompleks sayılar üzerinde çalışır ve 1833 yılında iki reel sayıdan oluşan kompleks sayıların bir cebir oluşturduğu sonucuna varır. Bu sonuçtan yola çıkarak çalışmalarını iki kompleks ve bir reel bileşenden oluşan

$$q = a + \hat{e}_1 b + \hat{e}_2 c \quad (1.1)$$

üçlü sayı sistemi üzerinde yoğunlaştırır. Elemanlarını vektör olarak adlandırdığı bu sistem üzerinde toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayabildiği halde bölme işlemi için bir metot geliştiremez. 1843 yılında bu sayı sisteminin çarpma işleminde değişme özelliğinin gerçekleşmediğini anlar ve çarpma işleminin bu özelliğinden vazgeçerek

$$\hat{e}_1^2 = \hat{e}_2^2 = \hat{e}_3^2 = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 = -1 \quad (1.2)$$

özelliğine sahip üç sanal birimi tanımlar [5].

Kuaterniyon cebiri, birleşme özelliği olan fakat değişme özelliği olmayan ($\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$) dört birimden oluşur ve bunlardan biri reel, diğer üçü sanaldır [6]:

$$\hat{e}_i^2 = -1 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.3)$$

$$\hat{e}_0^2 = 1 \quad (\hat{e}_0 = \text{birim eleman}) \quad (1.4)$$

$$\hat{e}_i \hat{e}_j = -\hat{e}_j \hat{e}_i \quad (i, j = 1, 2, 3 \text{ ve } i \neq j) \quad (1.5)$$

Kuaterniyonlar (1.3), (1.4) ve (1.5) eşitliklerini sağlarlar ve bir q kuaterniyonu;

$$q = q_0 \hat{e}_0 + q_1 \hat{e}_1 + q_2 \hat{e}_2 + q_3 \hat{e}_3 \quad (1.6)$$

dir. Burada; q_0, q_1, q_2, q_3 reel sayılar, $\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ ise;

$$\hat{e}_0 = 1 \quad (1.7)$$

$$\hat{e}_1^2 = \hat{e}_2^2 = \hat{e}_3^2 = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 = -1 \quad (1.8)$$

$$\hat{e}_1 \hat{e}_2 = -\hat{e}_2 \hat{e}_1 = \hat{e}_3 \quad (1.9)$$

$$\hat{e}_2 \hat{e}_3 = -\hat{e}_3 \hat{e}_2 = \hat{e}_1 \quad (1.10)$$

$$\hat{e}_3 \hat{e}_1 = -\hat{e}_1 \hat{e}_3 = \hat{e}_2 \quad (1.11)$$

kurallarına uyan birbirine dik sanal birimlerdir. Böylece Hamilton, kuaterniyon ismini verdiği 4-boyutlu kompleks sayıyı keşfeder. Kuaterniyonlar da aynı reel ve kompleks sayılar gibi bir sayı sistemidir.

Yukarıdaki kuaterniyon tanımından da görüldüğü üzere iki kuaterniyonun çarpımı komütatif (değişimli) değildir. Yani çarpım sırasını değiştirdiğimizde sonuç da değişir. Ancak iki kuaterniyon çarpımı asosiyetiftir (birleşimli). Yani herhangi üç kuaterniyonu çarparken hangi ikisini önce çarptığımız sonucu değiştirmez. Reel sayılar bir bileşen, kompleks sayılar iki bileşen içerirken kuaterniyonlar ise dört bileşene sahiptir.

Kuaterniyonların keşfi ile modern cebirdeki en önemli gelişmelerden biri yaşanır. Kuaterniyonun fizikteki kullanım bulduğu konulardan birisi de Einstein'ın özel ve genel relativite teorileridir [7]. Döneminde Hamilton'un çalışmaları ilgi görmese de tarih Hamilton'u haklı çıkarır [4].

1844 yılında Hermann Grassmann dış (exterior) geometrik cebir fikrini ortaya atar. Grassmann'ın cebiri kuaterniyon cebirine oldukça benzerdir. Grassman $\hat{e}_i$ hiper sayılarını yönlü birim olarak tanımlar ve herhangi bir vektörü,

$$a_i \hat{e}_i \quad (1.12)$$

eşitliği ile gösteririr. Burada a_i skalar bir sayıdır. Grassman bu hiper sayılar için iki çarpma işlemi tanımlar. Bunlar; iç çarpım;

$$\hat{e}_i \hat{e}_j = -\hat{e}_j \hat{e}_i = \delta_{ij} \quad (1.13)$$

ve dış çarpım;

$$\hat{e}_i \wedge \hat{e}_j = -\hat{e}_j \wedge \hat{e}_i \quad (1.14)$$

dır [2].

İç çarpım eşitliğinde yer alan δ_{ij} ifadesi Kronecker delta fonksiyonudur. Bu Kronecker delta fonksiyonu ise,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (1.15)$$

dir.

1878 yılında William Kingdon Clifford, Grassmann'ın tanıttığı dış çarpım ve William Rowan Hamilton'un kuaterniyonlarını araştırır. William Kingdon Clifford bu iki cebiri birleştirerek geometrik çarpım işlemine ulaşır. Geometrik çarpım $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ iki vektör olmak üzere,

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b} \quad (1.16)$$

dir. Bu eşitlikte $\vec{a} \cdot \vec{b}$ iç çarpım, $\vec{a} \wedge \vec{b}$ ise dış çarpım olarak adlandırılır. Bu eşitlikler ise

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a}) \quad (1.17)$$

ve

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a}) \quad (1.18)$$

dir.

Kompleks sayıların, Hamilton'un kuaterniyonlarına genişletilmesi fikri her ne kadar matematikçiler tarafından fazlasıyla tartışılmış olsa da Grassmann'ın, iç çarpım ve dış çarpım işlemlerinin özelliklerini geliştirmesiyle birlikte bu iki işlem birleştirilerek William Kingdon Clifford tarafından geometrik çarpım işlemine ulaşılır.

Bu birleştirme daha sonra, W.K.Clifford tarafından bir cebirsel yapı olarak ortaya konulur. Günümüzde de bu cebir *Clifford Cebiri* olarak adlandırılır.

20. yüzyılın başlarında ise J.W. Gibbs, çalışmalarında vektörlerde nokta çarpımı ve bugün bildiğimiz vektörel çarpımı tanımlar. Vektör hesabının temeli kuaterniyon cebirine dayanır. Gibbs'in vektör hesabı elektromanyetizma eşitliklerin çözümüne uygun olduğu için oldukça önemlidir. Ancak değişimli olmadığından ve çok boyutlu sistemlere genişletilmesi mümkün olmadığından bazı problemlerin çözümünde başarılı olamaz [2].

Benjamin Franklin, tarihte ilk defa elektrik için artı ve eksi yük terimlerini kullanan kişidir. Elektrik yükünün korunduğunu öne sürer ve bunu Leiden kapları kullanarak deneylerle ispatlar. 1780'li yıllarda Fransız fizikçi Charles Coulomb hem elektrik kutupların hem manyetik kutupların fiziksel özelliklerini inceler ve Coulomb Yasası'nı kaleme alır. Oersted ise yıllarca mıknatıslarla elektrik akımı taşıyan teller üzerine çalışır. Elektrik akımı taşıyan tellerin etraflarına ısı yayması gibi manyetik alan da yaydıklarını düşünür ve yaptığı gözlemler sonucunda oluşan manyetik etkinin şeklinin dairesel olduğunu görür. Elektrik ile manyetizma arasında bir ilişki olmasını gören Ampere'i kendi adıyla anılan, Ampere Yasası olarak bilinen, akım taşıyan iki telin birbirlerine tıpkı mıknatıslar gibi çekme-itme kuvveti uyguladığını keşfeder. Ampere ile birlikte modern elektrik biliminin temelleri atılmış olur [8].

Michael Faraday, elektromanyetik kuramın oluşumunda büyük bir rol üstlenir. Elektrik alanın manyetik alan oluşturduğu gerçeği bilinirken aynı şekilde manyetizmanın da elektrik alan oluşturup oluşturamadığı sorusunun cevabı 1831 yılında deneysel olarak Faraday tarafından bulunur. Yaptığı deneylerle elektrik ve manyetizma arasındaki bağlantıya dikkat çekmeyi başarır. Hareket ve elektromanyetizmanın birbirine dönüşebileceğini gösterir. Faraday ayrıca manyetik alanın ışığı doğrudan etkilediğini keşfeden ilk kişi olur [8]. Ancak elektromanyetizma hakkında elde ettiği verileri matematikle yorumlamayı başaramaz. Deney sonuçlarını matematiksel olarak ifade eden kişi Maxwell'dir. Birbirinden bağımsız olduğu düşünülen elektrik ve manyetizmanın aralarında çok derin bir bağ olduğu anlaşılır ve bu ilişkiye de elektromanyetizma denilir.

Sonuç olarak, fizik biliminde ölçülebilen her şeyin reel olma zorunluluğu vardır. Kompleks sayıların mekanik ve elektriksel uygulamalarda, özellikle devre analizlerinde kullanıldığı bilinir. Ancak ne yazık ki bu sayı sistemi uygulamalara sadece iki-boyut getirir. Üç-boyutlu uygulamalarda ise vektörler kullanılır ancak vektörlerin de bazı uygulamalarda yetersiz kaldığı görülür. Kuaterniyonlar, vektörleri ifade etmede kullanılır ve bu sayı sistemi vektörleri kapsadığı gibi, vektörlere ilaveten reel bileşen de ortaya koyar. Böylece uygulamalara dördüncü bir boyut katar. Ayrıca kuaterniyonlar bölüm

cebirine de sahiptir [6]. Kuaterniyonların fizikte kullanım bulduğu konulardan birisi ve belki de en önemlisi Einstein'ın özel ve genel relativite teorileridir. Kuaterniyon cebirinin keşfedildiği yıllarda İngiliz matematikçiler A. Carley, K. Clifford ve J. J. Sylvester ve elektromanyetik teoriyi yeniden inşa eden J.C. Maxwell ile P.G. Tait gibi önemli fizikçiler de bu konuya katkıda bulunurlar [7]. Genel olarak, Clifford Cebiri ve özel olarak geometrik cebir, fizik biliminde giderek artan bir öneme sahiptir.

Bu tezde, elektromanyetizmanın eşitliklerine ve Maxwell Denklemlerine Clifford Cebiri uygulanarak işlem kolaylığı sağlanması amaçlanmıştır. Tezin ikinci bölümünde Clifford Cebiri ve cebirde kullanılan ifadeler detaylı bir şekilde ele alınacaktır. Tezin devamındaki bölümlerde ise elektromanyetizmanın eşitlikleri Clifford Cebiri ile ifade edilecektir. Elektromanyetizmanın eşitliklerini Clifford Cebiri ile ifade etmeden önce üçüncü bölümde elektromanyetizmanın eşitliklerinin tanımı yapılacaktır. Dördüncü bölümde, bu eşitliklerin Clifford Cebiri ile ifadesine yer verilecektir. Beşinci bölümde, Maxwell Denklemleri açıklanacak ve bu denklemlerin Clifford Cebiri ile ifadesi ele alınacaktır. Altıncı ve son bölümde ise, Lenz yasası tanımlanacak ve Lenz yasası geometrik cebir ile ifade edilecektir.

2. CLIFFORD CEBİRİ

Clifford'un geometrik cebiri, reel sayı sistemlerini genişleten bir cebir olup matematiksel fizikte sıklıkla kullanılan fizik için ideal bir dildir.

Geometrik cebir,

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b} \quad (2.1)$$

dir.

Burada $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ifadesi iç çarpımdır ve skalar bir ifadedir. $\vec{a} \wedge \vec{b}$ ifadesi ise dış çarpımdır. Dış çarpım ifadesi “ $\wedge$ ” wedge işareti ile gösterilir. Dış çarpım, ne skalar ne de vektördür. Bivektör olarak adlandırılan yeni bir elemandır.

$\mathcal{R}^n$ ile gösterilen tüm uzaylar geometrik cebirin alt uzayını oluşturacak temel elemanlar serisini üretir. Bu, n-dereceli Clifford Uzayı olarak adlandırılır ve Cl^n şeklinde gösterilir.

n-dereceli bir Clifford Cebirin elemanları ise,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad (2.2)$$

dir.

Çizelge 2.1. Cl^n 'nin birim bazları

Cl^n	Temel Elemanlar	Toplam
Cl^0	$\{1\}$	$2^0 = 1$
Cl^1	$\{1, \hat{e}_1\}$	$2^1 = 2$
Cl^2	$\{1, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_{12}\}$	$2^2 = 4$
Cl^3	$\{1, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_{12}, \hat{e}_{13}, \hat{e}_{23}, \hat{e}_{123}\}$	$2^3 = 8$

Clifford Cebiri, içerdiği temel unsurlar sayesinde alan ve hacim elemanları da içerir. Daha sonra detaylı bir şekilde açıklanacak olan bivektörler alan ifade ederken, trivektörler hacim ifade ederler.

Clifford Cebirinin $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ olmak üzere üç ortagonal birim baz vektörü vardır. Bu birim baz vektörleri birbirlerine dik olduğundan,

$$\hat{e}_1^2 = \hat{e}_2^2 = \hat{e}_3^2 = 1 \quad (2.3)$$

yazılabilir. Bu eşitlik, cebirin temel unsurları olan $\hat{e}_{12}, \hat{e}_{13}, \hat{e}_{23}$ bivektörleri ve $\hat{e}_{123}$ trivektörü oluşturarak Descartes'in koordinat sistemini genişletir. Clifford Cebiri değişme

özelliğine sahip olmadığından dolayı bivektörler,

$$\hat{e}_1 \hat{e}_2 = -\hat{e}_2 \hat{e}_1 \quad (2.4)$$

$$\hat{e}_1 \hat{e}_3 = -\hat{e}_3 \hat{e}_1 \quad (2.5)$$

$$\hat{e}_2 \hat{e}_3 = -\hat{e}_3 \hat{e}_2 \quad (2.6)$$

dir. Birim baz bivektörlerin gösterimi döngüseldir. Bu tezde, bivektörler $\{\hat{e}_{12}, \hat{e}_{13}, \hat{e}_{23}\}$ gösterimi ile ifade edilecektir.

Clifford Cebirinin değişme özelliğine sahip olmamasının sonuçları vardır. Bir sonuçlardan biri, bivektörlerin karesi -1'e eşittir. Bu ise,

$$(\hat{e}_1 \hat{e}_2)^2 = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_1 \hat{e}_2 = -\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_2 \hat{e}_1 = -\hat{e}_1 \hat{e}_1 = -1 \quad (2.7)$$

$$(\hat{e}_1 \hat{e}_3)^2 = \hat{e}_1 \hat{e}_3 \hat{e}_1 \hat{e}_3 = -\hat{e}_3 \hat{e}_1 \hat{e}_1 \hat{e}_3 = -\hat{e}_3 \hat{e}_3 = -1 \quad (2.8)$$

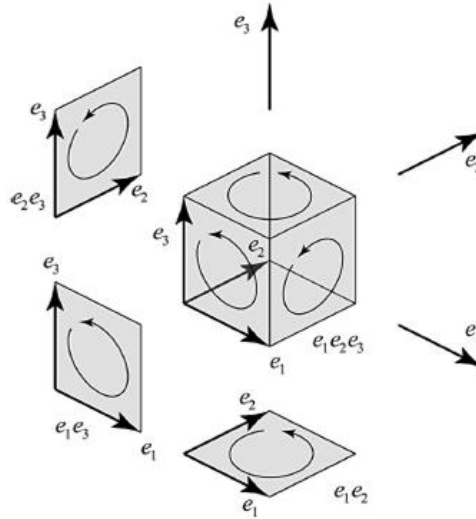
$$(\hat{e}_2 \hat{e}_3)^2 = \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_2 \hat{e}_3 = -\hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_3 \hat{e}_2 = -\hat{e}_2 \hat{e}_2 = -1 \quad (2.9)$$

dir.

Diğer bir sonuç ise, trivektörlerin karesinin de -1'e eşit olduğudur. Bu eşitlik ise,

$$(\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3)^2 = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 = -\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_1 \hat{e}_3 \hat{e}_2 \hat{e}_3 = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_1 \hat{e}_3 \hat{e}_3 \hat{e}_2 = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_1 \hat{e}_2 = -1 \quad (2.10)$$

dir.

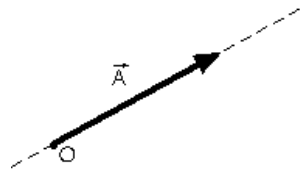


Şekil 2.1. Bivektör ve trivektör gösterimleri

Geometrik cebir; lineer cebir, vektör cebiri, kuaterniyonlar, karmaşık sayılar gibi matematiksel dilleri birleştirerek kullanma imkânı sunar. Geometrik cebirin mühendislikte, fizikte birçok uygulamaları bulunur. Günümüzde ise özellikle robotikler, kuantum mekaniği, ve görüntü işleme gibi alanlarda sıklıkla kullanılır.

2.1. Lineer Uzay ve Vektör Uzayı

Lineer (doğrusal) uzay ile vektör uzayı aynı kavramlar olarak bilinse de aslında farklılıkları vardır. Lineer uzayda bir vektörün, bir skalar ile çarpımı ya da toplamı mümkün değildir. Bu ise lineer uzay kavramının, bir vektörün geometrik kavramlarının tanımlanması ve cebirsel temsili için yeterli olmadığını ortaya koyar. Oysaki vektör uzayında bir vektörün skalar ile çarpımını veya toplamını açıklamak mümkündür [2].



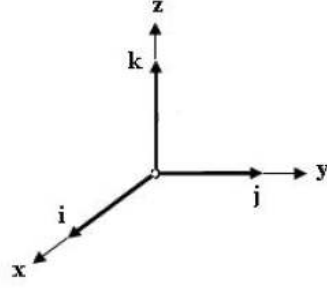
Şekil 2.2. Vektör gösterimi

Bir vektör, vektör uzayının bir ögesidir. Yani, bir vektör uzayı, elemanları "vektörler" olarak adlandırılan bir kümedir. Ayrıca bir vektör uzayı, toplama işleminin ve bir skalar ile çarpma işleminin tanımlandığı kümedir. İki veya üç boyutta yönlendirilmiş vektörler, paralelkenar yasası ile uç uca eklenebilir, sayılarla çarpılabilir, uzunlukları değiştirilebilir ve yönü ters çevrilebilir (negatif sayılarla çarpma).

Vektörel nicelikler, bir **A** vektörü ele alındığında, koyu gösterimle (bold) “**A**” veya üzerinde ok ile “ $\vec{A}$ ” gösterilir. Bu tezde vektörel nicelikler üzerinde ok ile gösterilecektir. Üç boyutlu bir vektör kartezyen düzlemde,

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad (2.11)$$

eşitliği ile gösterilir. Bu eşitlikte A_x ; $\vec{A}$ vektörünün x-ekseni üzerindeki izdüşümü, A_y ; $\vec{A}$ vektörünün y-ekseni üzerindeki izdüşümü, A_z ; $\vec{A}$ vektörünün z-ekseni üzerindeki izdüşümü ve $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ise birim baz vektörlerdir. Birim vektörün varlığının tek bir sebebi vardır; yön göstermek. Birim baz vektörlerinin matematikte uzunluğu 1 (bir) birimdir ve bu vektörler uzayda bir norma sahiptir.



Şekil 2.3. Kartezyen düzlemde birim baz vektörleri

Birim baz vektörler $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$, $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$, $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ gösterimleri ile de ifade edilebilir. Bu tezde birim baz vektörler $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ şeklinde ifade edilmiştir.

Birim baz vektörlerin matris gösterimleri ise,

$$\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

$$\hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

$$\hat{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

dir. Bir vektör, aynı zamanda bir matris ile temsil edilebilir.

2.2. Skalar Çarpım

Skalar çarpım, iki vektörün çarpımı için kullanılan özel bir çarpma işlemidir. Bu çarpım işlemine iç (inner) çarpım ya da nokta (dot) çarpım da denilebilir. Çarpımın sonucu skalar bir büyüklüktür. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ iki vektör olmak üzere, skalar çarpım,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \quad (2.15)$$

dir. Bu eşitlikteki θ ise, iki vektör arasındaki açıdır.

n -boyutlu vektörler için skalar çarpım,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{r=1}^n \vec{a}_r \vec{b}_r \quad (2.16)$$

dir.

İki vektör birbirine dik ise, $\theta = \pi/2$ olacağından $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ olur.

İki vektörün yönleri aynı ise, $\theta = 0$ olacağından $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ olur.

İki vektör zıt yönlü ise, $\theta = \pi$ olacağından $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$ olur.

Skalar çarpımın özellikleri ise, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektör ve λ skalar olmak üzere;

$$- \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (2.17)$$

$$- \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2, (\sqrt{\vec{a}^2}) = |\vec{a}| \quad (2.18)$$

$$- \vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad (2.19)$$

$$- \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b}) \quad (2.20)$$

$$- |\vec{a}| = 1 \text{ ise, } \vec{a} \cdot \vec{a} = 1 \text{ 'dir.} \quad (2.21)$$

$$- \vec{a} \perp \vec{b} \text{ ise, } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ 'dır.} \quad (2.22)$$

dir.

2.3. Vektörel Çarpım

Vektörel çarpım, iki vektörün çarpımı için kullanılan bir diğer çarpma işlemidir. Çarpımın sonucu yine bir vektördür. Vektörel çarpım, çarpılan iki vektörün meydana getirdikleri paralelkenarın alana dik olan vektör olarak tanımlanabilir. Vektörel çarpım "×" ile gösterilir. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ iki vektör olmak üzere vektörel çarpım,

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = (A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3) \times (B_1\hat{e}_1 + B_2\hat{e}_2 + B_3\hat{e}_3) =$$

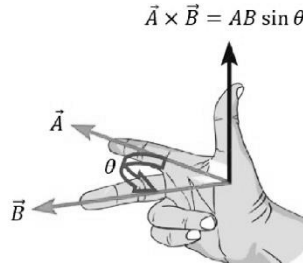
$$\hat{e}_1(A_2B_3 - A_3B_2) + \hat{e}_2(A_1B_3 - A_3B_1) + \hat{e}_3(A_1B_2 - A_2B_1) \quad (2.23)$$

dir.

Vektörel çarpımın büyüklüğü ise,

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin \theta \quad (2.24)$$

dir. Bu eşitlikteki θ ise, iki vektör arasındaki açıdır. $\vec{C}$ vektörü, $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerine dik olup yönü sağ el kuralı ile bulunur.



Şekil 2.4. Vektörel çarpımın yönü

Vektörel çarpımında birim baz vektörlerinin çarpımı,

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3, \quad \hat{e}_2 \times \hat{e}_1 = -\hat{e}_3 \quad (2.25)$$

$$\hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1, \quad \hat{e}_3 \times \hat{e}_2 = -\hat{e}_1 \quad (2.26)$$

$$\hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2, \quad \hat{e}_1 \times \hat{e}_3 = -\hat{e}_2 \quad (2.27)$$

dir.

Vektörel çarpımın özellikleri ise, $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörler ve λ skalar olmak üzere,

$$- \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \quad \text{Vektörel çarpımda çarpma sırası önemlidir.} \quad (2.28)$$

$$- \vec{A} \times \vec{B} = 0 \text{ ise, } \vec{A} \text{ ile } \vec{B} \text{ paraleldir.} \quad (2.29)$$

$$- \lambda(\vec{A} \times \vec{B}) = (\lambda\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (\lambda\vec{B}) \quad (2.30)$$

$$- \vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} \quad (2.31)$$

dir.

2.4. 2-Boyutlu Uzayda Clifford Cebiri

2-boyutlu uzayın Clifford Cebirine Cl^2 denir. 2-boyutlu uzayın Clifford Cebiri; alanları tanımlar. 2- boyutlu uzayın birim baz vektörleri $\hat{e}_1$ ve $\hat{e}_2$ 'dir. Bu iki baz vektörünün Clifford çarpımı,

$$\hat{e}_1 \hat{e}_2 = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 + \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 \quad (2.32)$$

dir.

$\hat{e}_1$ ve $\hat{e}_2$ birim baz vektörleri birbirine dik olduğundan skalar çarpımları,

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0 \quad (2.33)$$

dir. Eşitlik (2.33)'ten yola çıkarak $\hat{e}_1 \hat{e}_2$ işleminin sonucunda,

$$\hat{e}_1 \hat{e}_2 = \underbrace{\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2}_0 + \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 \quad (2.34)$$

$$\hat{e}_1 \hat{e}_2 = \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 \quad (2.35)$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen $\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2$ eşitliği bir bivektördür. Bir bivektör;

$$\hat{e}_i \hat{e}_j = \hat{e}_{ij} \quad (i \neq j) \quad (2.36)$$

eşitliği ile gösterilebilir. Bu eşitlik,

$$\hat{e}_1 \hat{e}_2 = \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 = \hat{e}_{12} \quad (2.37)$$

eşitliği olarak da gösterilebilir.

Bivektör; 2-boyutlu uzayın yüksek dereceli bir elemanıdır. Yüksek dereceli elemanlar her zaman sankiskalar olarak adlandırılırlar ve bu sankiskalar “I” olarak gösterilir.

2-boyutlu uzayda Clifford Cebiri’nin,

1 :skalar

$\hat{e}_1, \hat{e}_2$:vektörler

$\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2$:bivektör

olmak üzere dört elemanı vardır. Sonuç olarak, 2 boyutlu Clifford Cebiri’nde 1 tane skalar, 2 tane vektör ve 1 tane de bivektör vardır.

Çizelge 2.2. Cl^2 Clifford cebirinin çarpım tablosu

	$\hat{e}_1$	$\hat{e}_2$	e_{12}
$\hat{e}_1$	1	$\hat{e}_{12}$	$\hat{e}_2$
$\hat{e}_2$	$-\hat{e}_{12}$	1	$-\hat{e}_1$
e_{12}	$-\hat{e}_2$	$\hat{e}_1$	1

2.5. 3-Boyutlu Uzayda Clifford Cebiri

3-boyutlu uzayın Clifford Cebirine Cl^3 denir. 3-boyutlu uzayın Clifford Cebiri; hacimleri, düzlemleri ve vektörleri tanımlar. 2-boyuttaki baz vektörlerine üçüncü bir baz vektörü eklenir. 3-boyutlu uzayın baz vektörleri $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ ve $\hat{e}_3$ ’tür. Bu üç birim baz vektörler

birbirine dik vektörlerdir. Bu birim baz vektörler birbirlerine dik olduğundan kendi aralarında yer değiştirebilirler. Yani değişme özelliğine sahiptirler. Birbirine dik olan bu birim baz vektörlerden üç tane bivektör elde edilir. Bu bivektörler;

$$\hat{e}_1\hat{e}_2 = \hat{e}_1\wedge\hat{e}_2 = \hat{e}_{12} \quad (2.38)$$

$$\hat{e}_1\hat{e}_3 = \hat{e}_1\wedge\hat{e}_3 = \hat{e}_{13} \quad (2.39)$$

$$\hat{e}_2\hat{e}_3 = \hat{e}_2\wedge\hat{e}_3 = \hat{e}_{23} \quad (2.40)$$

dir. Bu üç bivektörlerin çarpımından ise trivektör elde edilir.

$$\hat{e}_1\wedge\hat{e}_2\wedge\hat{e}_3 = \hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3 = \hat{e}_{123} \quad (2.41)$$

Trivektör, hacim elemanını temsil eder ve bu boyuttaki en büyük dereceli elemandır. En büyük dereceli elemanlar “I” diye adlandırıldığından bu boyuttaki sankiskalar yani I, trivektördür.

$$\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3 = \hat{e}_{123} = I \quad (2.42)$$

3-boyutlu uzayda Clifford Cebiri’nin,

1	:skalar
$\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$	:vektörler
$\hat{e}_1\wedge\hat{e}_2, \hat{e}_1\wedge\hat{e}_3, \hat{e}_2\wedge\hat{e}_3$	:bivektörler
$\hat{e}_1\wedge\hat{e}_2\wedge\hat{e}_3$	:trivektör

olmak üzere sekiz elemanı vardır. Sonuç olarak, 3 boyutlu Clifford Cebiri’nde 1 tane skalar, 3 tane vektör, 3 tane bivektör ve 1 tane trivektör vardır.

Çizelge 2.3. Cl^3 Clifford cebrinin çarpım tablosu

	$\hat{e}_1$	$\hat{e}_2$	$\hat{e}_3$
$\hat{e}_1$	1	$i\hat{e}_3$	$-i\hat{e}_2$
$\hat{e}_2$	$-i\hat{e}_3$	1	$i\hat{e}_1$
$\hat{e}_3$	$i\hat{e}_2$	$-i\hat{e}_1$	1

2.6. Bivektör

Clifford Cebiri, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektör olmak üzere Eşitlik (2.1)'de $\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b}$ şeklinde tanımlanmıştır. Bu çarpımda, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ çarpımına iç çarpım, $\vec{a} \wedge \vec{b}$ çarpımına dış çarpım denildiği ifade edilmiştir. Dış çarpım, wedge operatörü ile ifade edilir ve “ $\wedge$ ” sembolü ile gösterilir. Dış çarpım ifadesi ne skalar ne de vektör olduğundan bu ifadeye bivektör denilir. Bivektör, birbirine dik iki vektörden meydana gelen geometrik ifadedir. Bivektör iki vektörün dış çarpımı ile elde edilir ve bir düzlem (alan) belirtir. Yani, bivektör elde etmek için dış çarpım kullanılır.

2-boyutlu uzayın birim baz vektörleri $\hat{e}_1$ ve $\hat{e}_2$ 'dir. Bu birim baz vektörlerinin oluşturduğu bivektör ise $\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2$ 'dir. Bu iki birim baz vektörleri geometrik olarak çarpılırsa,

$$\hat{e}_1 \hat{e}_2 = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 + \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 \quad (2.43)$$

eşitliği elde edilir. Bu çarpımın sonucundan ise, $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0$ olduğundan

$$\hat{e}_1 \hat{e}_2 = \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 \quad (2.44)$$

dir. Bu eşitlik aynı zamanda

$$\hat{e}_1 \hat{e}_2 = \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 = \hat{e}_{12} \quad (2.45)$$

dir. Yani bir bivektör $\hat{e}_{12}$ şeklinde de gösterilir.

Birbirine dik $\hat{e}_1$ ve $\hat{e}_2$ vektörlerinin yerleri değiştirildiğinde,

$$\hat{e}_2 \hat{e}_1 = \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_1 + \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_1 \quad (2.46)$$

dir. Bu çarpımın sonucunda, $\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_1 = 0$ olduğundan

$$\hat{e}_2 \hat{e}_1 = \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_1 \quad (2.47)$$

dir. Bu eşitlik aynı zamanda

$$\hat{e}_2 \hat{e}_1 = \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_1 = \hat{e}_{21} \quad (2.48)$$

dir.

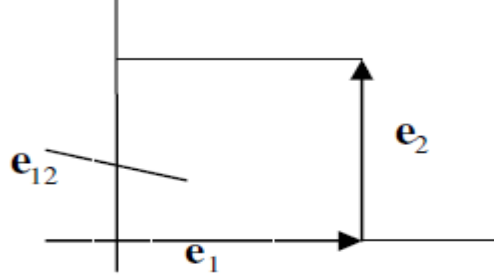
Sonuç olarak,

$$\hat{e}_i \wedge \hat{e}_j = -\hat{e}_j \wedge \hat{e}_i = \delta_{ij} \quad (2.49)$$

dir. Eşitlik (2.49)'dan yola çıkarak, bivektör,

$$\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 = -\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_1 = \delta_{12} = I \quad (2.50)$$

dir.



Şekil 2.5. İki boyutlu uzayın bivektörleri

3-boyutlu uzayın birim baz vektörleri $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ ve $\hat{e}_3$ 'tür. 3- boyutlu uzayda üç tane bivektör ifadesi vardır. Bunlar $\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2$, $\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3$ ve $\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3$ şeklinde ifade edilir.

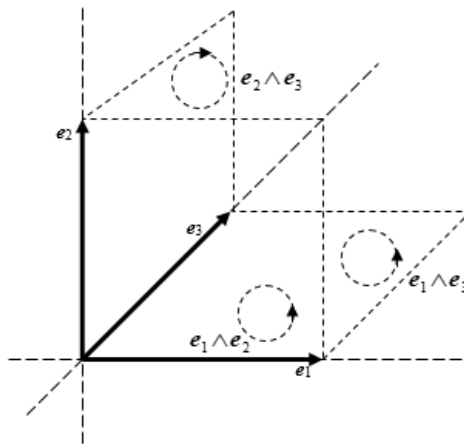
$\hat{e}_i \wedge \hat{e}_j = -\hat{e}_j \wedge \hat{e}_i = \delta_{ij}$ eşitliğinden yola çıkarak, bivektörler,

$$\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 = -\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_1 = \delta_{12} \quad (2.51)$$

$$\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3 = -\hat{e}_3 \wedge \hat{e}_1 = \delta_{13} \quad (2.52)$$

$$\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3 = -\hat{e}_3 \wedge \hat{e}_2 = \delta_{23} \quad (2.53)$$

dir.



Şekil 2.6. Üç boyutlu uzayın bivektörleri

2.7. Trivektör

Bir trivektör elde edilmesi için, 3-boyutlu uzayın dış çarpımının incelenmesi gerekmektedir. Bir bivektörün üçüncü bir birim baz vektörüne uzanımı sonucu bir trivektör elde edilir. Trivektörler, aynı zamanda hacim elemanlarıdır. Yüksek dereceli elemanlar sankiskalar diye adlandırıldığından 3-boyutlu uzayın trivektörü bir sankiskalardır. Çünkü en yüksek dereceli eleman trivektördür.

3-boyutlu uzayın birim baz vektörleri, $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ ve $\hat{e}_3$ 'tür. Bu birim baz vektörlerinin dış çarpımları,

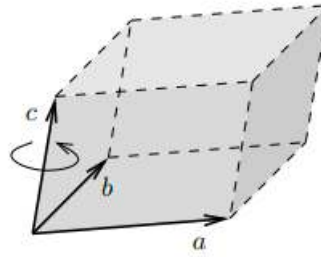
$$\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3 \quad (2.54)$$

dir. Bu eşitlik bir trivektördür ve bu trivektör,

$$\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3 = \hat{e}_{123} = I \quad (2.55)$$

dir

Trivektör, üç vektörün dış çarpımı ile ifade edilen üç boyutlu bir eleman olduğundan, $\vec{a}$, $\vec{b}$ ve $\vec{c}$ üç vektör olmak üzere bu üç vektörün dış çarpımları, $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$ ile ifade edilir. $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$ trivektör gösterimi Şekil 2.7.'de gösterilmiştir.



Şekil 2.7. $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$ trivektör gösterimi

2.8. n – Boyutlu Uzayda Vektörün Derecesi

n - boyutlu uzaydaki bir vektörün alt uzay boyutunu gösteren k kavramı incelenecektir. k kavramı n - boyutlu bir uzaydaki vektörün derecesini gösterir. Yani, 2-boyutlu uzayda bir tane skalar, iki tane vektör ve bir tane de bivektör vardır ya da 3-boyutlu uzayda, bir tane skalar, üç tane vektör, üç tane bivektör ve bir tane de trivektör vardır. Buradaki amaç n -dereceli bir uzayda kaç tane skalar, vektör, bivektör, trivektör gibi baz elemanları olduğunu bulmaktır.

n -boyutlu uzayda kaç k derecesi olduğu,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (2.56)$$

eşitliği ile bulunur. Bu eşitlikte n boyutu, k ise bazın derecesini gösterir.

Örneğin, 4-boyutlu bir uzayda kaç tane trivektör baz olduğu bulunmak istenirse Eşitlik (2.56)'dan, $n = 4$ ve $k = 3$ olduğundan,

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{(4-3)!3!} = 4 \quad (2.57)$$

bulunur.

Çizelge 2.4. 2-boyutlu uzayın dereceleri

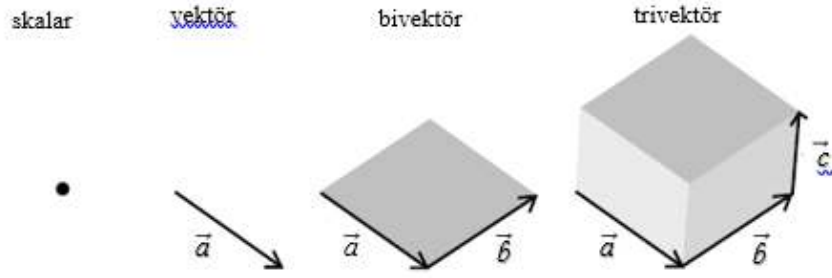
k (derece)	Baz Elemanı	Toplam
Skalar	$\{1\}$	1
Vektör	$\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$	2
Bivektör	$\{\hat{e}_{12}\}$	1

Çizelge 2.5. 3-boyutlu uzayın dereceleri

k (derece)	Baz Elemanı	Toplam
Skalar	$\{1\}$	1
Vektör	$\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$	3
Bivektör	$\{\hat{e}_{12}, \hat{e}_{13}, \hat{e}_{23}\}$	3
Trivektör	$\{\hat{e}_{123}\}$	1

Vektör 1-boyutlu uzayın alt uzayı, bivektör 2-boyutlu uzayın alt uzayı, trivektör ise 3-boyutlu uzayın alt uzayı iken sankiskalar da n -boyutlu uzayın alt uzayıdır [9].

$\vec{a}$, $\vec{b}$ ve $\vec{c}$ vektör olmak üzere, n -boyutlu uzayın en küçük dereceli multivektörlerin görselleştirilmesi Şekil 2.8'de gösterilmiştir.



Şekil 2.8. n -boyutlu uzayın en küçük dereceli multivektörlerin görselleştirilmesi

Çizelge 2.6. n -boyutlu uzayın dereceleri

Baz Elemanı	k (derece)	Derece Sayısı
$\{1\}$	Skalar	$\binom{n}{0} = 1$
$\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \dots\}$	Vektör	$\binom{n}{1} = n$
$\{\hat{e}_{12}, \hat{e}_{13}, \hat{e}_{23}, \dots\}$	Bivektör	$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
$\{\hat{e}_{123}, \dots\}$	Trivektör	$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
$\hat{e}_{123\dots n}$	Sankiskalar	$\binom{n}{n} = 1$

2.9. Multivektör (Çokluvektör)

Vektör cebirinden farklı olarak Clifford Cebiri, çok değişkenler oluşturmak için skalarları ve vektörleri birleştirir. Bu birleştirme, kompleks sayıları oluşturmak için gerçel ve sanal sayıları birleştirmeye benzer. Aslında kompleks sayılar multivektörlerin bir alt uzayıdır. Clifford Cebiri'nde ise bu birleşme işlemi multivektör adı verilen ifadeler ile mümkündür. Bir multivektör, n -boyutlu uzayın k elemanlarının kombinasyonundan oluşan bir vektördür. Bu tezde multivektörler büyük harf ve bold " $\mathbf{M}$ " ile gösterilecektir. Genel bir multivektör,

$$\mathbf{M} = a + \vec{v} + i\vec{w} + ib \quad (2.58)$$

eşitliği ile gösterilir. Burada, a ve b birer skalar, $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ birer vektör, $i(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ trivektör, $a + ib$ bir kompleks sayı, $a + i\vec{w}$ bir kuaterniyon, $a + \vec{v}$ bir 4-vektör, $i\vec{w}$ bir sankivektör.

2-boyutlu uzayda bir multivektörün ifade edilebilmesi için $2^2 = 4$ elemana ihtiyaç vardır. 2-boyutlu uzayda bir multivektör,

$$\mathbf{M} = m_1 + m_2\hat{e}_1 + m_3\hat{e}_2 + m_4\hat{e}_{12} \quad (2.59)$$

dir. Bu eşitlikte, m_1 reel bir sayı yani bir skalar sayıdır. $m_2\hat{e}_1$ ve $m_3\hat{e}_2$ ifadeleri birer vektördür. $m_4\hat{e}_{12}$ ifadesi ise bir bivektördür.

3-boyutlu uzayda bir multivektörün ifade edilebilmesi için ise $2^3 = 8$ elemana ihtiyaç vardır. 3-boyutlu uzayda bir multivektör ise,

$$\mathbf{M} = m_1 + m_2\hat{e}_1 + m_3\hat{e}_2 + m_4\hat{e}_3 + m_5\hat{e}_{12} + m_6\hat{e}_{13} + m_7\hat{e}_{23} + m_8\hat{e}_{123} \quad (2.60)$$

dir. Bu eşitlikte, m_1 reel bir sayı yani bir skalar sayıdır. $m_2\hat{e}_1$, $m_3\hat{e}_2$ ve $m_4\hat{e}_3$ ifadeleri birer vektördür. $m_5\hat{e}_{12}$, $m_6\hat{e}_{13}$ ve $m_7\hat{e}_{23}$ ifadeleri birer bivektördür. $m_8\hat{e}_{123}$ ifadesi ise bir trivektördür.

n-boyutlu bir uzayda ise bir multivektörün ifade edilebilmesi için 2^n tane elemana ihtiyaç vardır.

Multivektörler, cebirsel işlemler oldukları için diğer cebirler gibi cebirsel özelliklere sahiplerdir. Multivektörler,

$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ve $\mathbf{C}$ multivektörler, λ skalar olmak üzere;

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \quad \text{birleşme özelliği} \quad (2.61)$$

$$\lambda\mathbf{A} = \mathbf{A}\lambda \quad \text{skalarle çarpımın değişme özelliği} \quad (2.62)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \quad \text{toplama işlemi üzerine dağılma özelliği} \quad (2.63)$$

özelliklerini sağlarlar.

2-boyutlu Clifford uzayında iki multivektör ele alınıp bu multivektörlerin geometrik çarpımına bakılırsa,

$\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ multivektörler olmak üzere bu multivektörler,

$$\mathbf{A} = a_1 + a_2\hat{e}_1 + a_3\hat{e}_2 + a_4\hat{e}_{12} \quad (2.64)$$

$$\mathbf{B} = b_1 + b_2\hat{e}_1 + b_3\hat{e}_2 + b_4\hat{e}_{12} \quad (2.65)$$

eşitlikleri ile tanımlansın. Bu multivektörlerin geometrik çarpımı,

$$\mathbf{AB} = (a_1 + a_2\hat{e}_1 + a_3\hat{e}_2 + a_4\hat{e}_{12})(b_1 + b_2\hat{e}_1 + b_3\hat{e}_2 + b_4\hat{e}_{12}) \quad (2.66)$$

dir. Multivektörlerde dağılma özelliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} = & a_1b_1 + a_1b_2\hat{e}_1 + a_1b_3\hat{e}_2 + a_1b_4\hat{e}_{12} + a_2\hat{e}_1b_1 + a_2\hat{e}_1b_2\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_1b_3\hat{e}_2 + \\ & a_2\hat{e}_1b_4\hat{e}_{12} + a_3\hat{e}_2b_1 + a_3\hat{e}_2b_2\hat{e}_1 + a_3\hat{e}_2b_3\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_2b_4\hat{e}_{12} + a_4\hat{e}_{12}b_1 + a_4\hat{e}_{12}b_2\hat{e}_1 + \\ & a_4\hat{e}_{12}b_3\hat{e}_2 + a_4\hat{e}_{12}b_4\hat{e}_{12} \end{aligned} \quad (2.67)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} = & a_1b_1 + a_1b_2\hat{e}_1 + a_1b_3\hat{e}_2 + a_1b_4\hat{e}_{12} + a_2b_1\hat{e}_1 + a_2b_2\hat{e}_1\hat{e}_1 + a_2b_3\hat{e}_1\hat{e}_2 + \\ & a_2b_4\hat{e}_1\hat{e}_{12} + a_3b_1\hat{e}_2 + a_3b_2\hat{e}_2\hat{e}_1 + a_3b_3\hat{e}_2\hat{e}_2 + a_3b_4\hat{e}_2\hat{e}_{12} + a_4b_1\hat{e}_{12} + a_4b_2\hat{e}_{12}\hat{e}_1 + \\ & a_4b_3\hat{e}_{12}\hat{e}_2 + a_4b_4\hat{e}_{12}\hat{e}_{12} \end{aligned} \quad (2.68)$$

eşitliğine ulaşılır.

Bu eşitlik sadeleştirilmek istenirse bu sadeleştirme işleminin gerçekleştirilebilmesi için birim baz vektörlerin geometrik çarpımlarının ele alınması gerekir. 2-boyutlu uzayda birim baz vektörleri $\hat{e}_1$ ve $\hat{e}_2$ idi. O halde birim baz vektörlerin sırası ile geometrik çarpımları yapılacak olursa,

Öncelikle $\hat{e}_1\hat{e}_1$ geometrik çarpımı incelenirse:

$$\hat{e}_1\hat{e}_1 = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 + \hat{e}_1\wedge\hat{e}_1 \quad (2.69)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $\hat{e}_1\wedge\hat{e}_1$ çarpımının bir alan belirtmediğine daha önce değinilmişti. Bu yüzden bu eşitlik sıfıra eşittir. Yani;

$$\hat{e}_1\wedge\hat{e}_1 = 0 \text{’dir.} \quad (2.70)$$

Kendisi ile nokta çarpımı yapılan eşitlik, yani $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1$ nokta çarpımı birim baz vektörlerinin büyüklüğünün karesine eşittir. Birim baz vektörlerinin büyüklüğü de 1 olduğundan,

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 = 1 \text{’dir.} \quad (2.71)$$

Sonuç olarak,

$$\hat{e}_1\hat{e}_1 = 1 + 0 = 1 \quad (2.72)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu sonuçtan yola çıkarak gerekli işlemler $\hat{e}_2\hat{e}_2$ geometrik çarpımı için

de yapıldığında $\hat{e}_2\hat{e}_2 = 1$ olduğu görülür.

$\hat{e}_1\hat{e}_2$ geometrik çarpımı incelenirse,

$$\hat{e}_1\hat{e}_2 = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 + \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 \quad (2.73)$$

dir. Bu eşitlikte $\hat{e}_1$ ve $\hat{e}_2$ birim baz vektörleri birbirine dik olduğundan, bu iki birim baz vektörlerinin nokta çarpımları sıfırdır. Yani,

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0 \text{ dır.} \quad (2.74)$$

Sonuç olarak,

$$\hat{e}_1\hat{e}_2 = \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 \quad (2.75)$$

eşitliğine ulaşılır. $\hat{e}_1\hat{e}_2 = \hat{e}_{12}$ eşitliğinden yararlanılarak,

$$\hat{e}_1\hat{e}_2 = \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 = \hat{e}_{12} \quad (2.76)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu sonuçtan yola çıkarak gerekli işlemler $\hat{e}_2\hat{e}_1$ geometrik çarpımı için de yapıldığında $\hat{e}_2\hat{e}_1 = \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_1 = \hat{e}_{21}$ olduğu görülür.

Son olarak, $\hat{e}_1\hat{e}_{12}$, $\hat{e}_{12}\hat{e}_1$, $\hat{e}_2\hat{e}_{12}$, $\hat{e}_{12}\hat{e}_2$ ve $\hat{e}_{12}\hat{e}_{12}$ geometrik çarpımları incelenirse,

$$\hat{e}_1\hat{e}_{12} = \hat{e}_1\hat{e}_1\hat{e}_2 = \hat{e}_2 \quad (2.77)$$

$$\hat{e}_{12}\hat{e}_1 = \hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_1 = -\hat{e}_1\hat{e}_1\hat{e}_2 = \hat{e}_2 \quad (2.78)$$

$$\hat{e}_2\hat{e}_{12} = \hat{e}_2\hat{e}_1\hat{e}_2 = -\hat{e}_2\hat{e}_2\hat{e}_1 = -\hat{e}_1 \quad (2.79)$$

$$\hat{e}_{12}\hat{e}_2 = \hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_2 = \hat{e}_1 \quad (2.80)$$

$$\hat{e}_{12}\hat{e}_{12} = \hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_1\hat{e}_2 = -\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_2\hat{e}_1 = -1 \quad (2.81)$$

eşitlikleri elde edilir.

Bulunan tüm bu sonuçlar Eşitlik (2.68)'de yerine konulursa,

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} = & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 - a_4b_4 + (a_1b_2 + a_2b_1 - a_3b_4 + a_4b_3)\hat{e}_1 + \\ & (a_1b_3 + a_3b_1 + a_2b_4 - a_4b_2)\hat{e}_2 + (a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2)\hat{e}_{12} \end{aligned} \quad (2.82)$$

eşitliği elde edilir.

Yapılan bu işlemler sonucunda bivektör, trivektör ve sankiskalarlar için de geçerli olan ve işlemleri kolaylaştıran sonuçlar şunlardır:

- Birbirlerine dik birim baz vektörlerin nokta çarpımları sıfır olduğundan geometrik çarpımları dış çarpımlarına eşit olur.

$$\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_4 = \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3 \wedge \hat{e}_4 = \hat{e}_{1234} \quad (2.83)$$

- Birim baz vektörlerin sırası ile yerleri değiştirilebilir. Bu özellik işlemlerde kolaylık sağlamaktadır. Fakat bu değiştirme işlemi yapılırken her işlem " – " ile çarpılır.

$$\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_4 = -\hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_4 \hat{e}_1 = \hat{e}_3 \hat{e}_4 \hat{e}_1 \hat{e}_2 = -\hat{e}_4 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_4 \quad (2.84)$$

- Birim baz vektörlerin kendileriyle geometrik çarpımları 1'dir.

$$\hat{e}_1 \hat{e}_1 = 1 \quad (2.85)$$

2.9.1. Bir multivektörün derecesi

Bir multivektörün s dereceli kısmı $\langle \mathbf{M} \rangle_s$ gösterilir. Bu ifade bir multivektörde kaç tane s dereceli eleman olduğunu söyler. Örneğin; $\mathbf{M}$ multivektörü Cl^3 'de bir multivektör olsun ve bu multivektör,

$$\mathbf{M} = m_1 + m_2 \hat{e}_1 + m_3 \hat{e}_2 + m_4 \hat{e}_3 + m_5 \hat{e}_{12} + m_6 \hat{e}_{13} + m_7 \hat{e}_{23} + m_8 \hat{e}_{123} \quad (2.86)$$

eşitliği ile gösterilsin. Burada;

$$\langle \mathbf{M} \rangle_0 = m_1 \text{ multivektörün skalar kısmını,}$$

$$\langle \mathbf{M} \rangle_1 = m_2 \hat{e}_1 + m_3 \hat{e}_2 + m_4 \hat{e}_3 \text{ multivektörün vektör kısmını,}$$

$$\langle \mathbf{M} \rangle_2 = m_5 \hat{e}_{12} + m_6 \hat{e}_{13} + m_7 \hat{e}_{23} \text{ multivektörün bivektör kısmını,}$$

$$\langle \mathbf{M} \rangle_3 = m_8 \hat{e}_{123} \text{ multivektörün trivektör kısmını}$$

gösterir.

Genel ifadesi ise,

$$\sum_{s=0}^n \langle \mathbf{M} \rangle_s = \langle \mathbf{M} \rangle_0 + \langle \mathbf{M} \rangle_1 + \langle \mathbf{M} \rangle_2 + \langle \mathbf{M} \rangle_3 + \dots + \langle \mathbf{M} \rangle_n \quad (2.87)$$

dir.

A ve **B** iki multivektör olsun. Bu multivektörlerin,

$$\text{iç çarpımları } \langle \mathbf{A} \rangle_s \lrcorner \langle \mathbf{B} \rangle_t = \langle \mathbf{AB} \rangle_u, u = \begin{cases} s > t, & 0 \\ s \leq t, & t - s \end{cases} \quad (2.88)$$

$$\text{dış çarpımları } \langle \mathbf{A} \rangle_s \wedge \langle \mathbf{B} \rangle_t = \langle \mathbf{AB} \rangle_{s+t} \quad (2.89)$$

dir.

2.9.2. Bir multivektörün tersi

Bir multivektörün tersi $\mathbf{M}^{-1}$ ile gösterilir. Bir multivektörün tersi ile kendisinin çarpımı 1'dir. Bu çarpma işlemini soldan ve sağdan yapmak sonucu değiştirmez. Yani;

$$\mathbf{M}^{-1L} \mathbf{M} = \mathbf{M} \mathbf{M}^{-1R} = 1 \text{ 'dir.} \quad (2.90)$$

Bir multivektörü başka bir multivektöre bölme işlemi, tersi ile çarpılarak yapılır. Yani; **A** ve **B** iki multivektör olsun bu iki multivektörü birbirine bölmek demek,

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \mathbf{B}^{-1L} \mathbf{A} \quad (2.91)$$

ya da

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \mathbf{AB}^{-1R} \quad (2.92)$$

eşitlikleri ile ifade etmek demektir. Geometrik çarpım işlemi değişim özelliğine sahip olmadığından iki multivektörün bölümü sağdan ve soldan tersi ile çarpımı farklı sonuçlar verir. İşlemin sağdan veya soldan yapılması sonucu değiştirir.

Bir multivektörün tersinin cebirsel özellikleri ise,

$$- (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \quad (2.93)$$

$$- (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1} \quad (2.94)$$

dir.

2.9.3. Bir multivektörün duali

Bir multivektörün duali yani eşleniği $\mathbf{M}^*$ ile gösterilir. Bir multivektörün duali ise,

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{MI}^{-1} \quad (2.95)$$

eşitliği ile bulunur. Bu eşitlikte, I^{-1} sankiskaların tersidir.

2-boyutlu Clifford Cebiri için, $I = \hat{e}_1 \hat{e}_2 = \hat{e}_{12}$ 'dir. Bu sankiskaların tersi ise, $I^{-1} = \hat{e}_2 \hat{e}_1 = \hat{e}_{21}$ 'dir.

3-boyutlu Clifford Cebiri için, $I = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 = \hat{e}_{123}$ 'tür. Bu sankiskaların tersi ise, $I = \hat{e}_3 \hat{e}_2 \hat{e}_1 = \hat{e}_{321}$ 'dir.

Örneğin; Cl^3 'de $\hat{e}_{12}$ bivektörünün duali,

$$\hat{e}_{12}^* = \hat{e}_{12} I^{-1} \quad (2.96)$$

$$\hat{e}_{12}^* = \hat{e}_{12} (\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3)^{-1} \quad (2.97)$$

$$\hat{e}_{12}^* = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_2 \hat{e}_1 = -\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_1 = -\hat{e}_1 \hat{e}_3 \hat{e}_1 = \hat{e}_1 \hat{e}_1 \hat{e}_3 = \hat{e}_3 \quad (2.98)$$

dir. Bu eşitliklerden yola çıkarak, $\hat{e}_{12}$ bivektörünün duali olan $\hat{e}_3$ birim baz vektörü aynı zamanda $\hat{e}_{12}$ bivektörünün normalidir. Bu eşitlik tüm bivektörler için geçerlidir. Bu durumda bütün bivektörlerin duali aynı zamanda normalleridir.

2.9.4. Bir multivektörün izdüşümü ve dik bileşeni

Bir vektörün, bir multivektöre göre hem paralel hem de dik iki kısmı vardır. $\vec{a}$ bir vektör, $\mathbf{A}$ ise bir multivektör olmak üzere, $\vec{a}$ vektörünün $\mathbf{A}$ multivektörü ile aynı doğrultulu olan kısmı $\vec{a}_{\parallel \mathbf{A}}$ ile gösterilir ve $\vec{a}$ vektörünün $\mathbf{A}$ multivektörü üzerindeki izdüşümü olarak adlandırılır. $\vec{a}$ vektörünün $\mathbf{A}$ multivektörü ile dik olan kısmı ise $\vec{a}_{\perp \mathbf{A}}$ ile gösterilir ve $\mathbf{A}$ multivektöründen $\vec{a}$ vektörüne doğru çizilebilen dik vektör olarak adlandırılır. Böylece bir $\vec{a}$ vektörü,

$$\vec{a} = \vec{a}_{\parallel \mathbf{A}} + \vec{a}_{\perp \mathbf{A}} \quad (2.99)$$

eşitliği ile ifade edilebilir. $\vec{a}$ vektörünün $\mathbf{A}$ multivektörü üzerindeki paralel ve dik bileşenleri ise,

$$\vec{a}_{\parallel \mathbf{A}} = \frac{\vec{a} \cdot \mathbf{A}}{\mathbf{A}} \quad (2.100)$$

$$\vec{a}_{\perp \mathbf{A}} = \frac{\vec{a} \wedge \mathbf{A}}{\mathbf{A}} \quad (2.101)$$

dir.

$\vec{a}$ vektörünün ve $\mathbf{A}$ multivektörünün geometrik çarpımı yapılacak olursa,

$$\vec{a} \mathbf{A} = \vec{a} \cdot \mathbf{A} + \vec{a} \wedge \mathbf{A} \quad (2.102)$$

eşitliği elde edilir.

$\mathbf{A}$ multivektörü üzerindeki bir $\vec{a}$ vektörünün bileşenlerine ayrılması incelenirse;

- $\vec{a}$ vektörü ile $\mathbf{A}$ multivektörü birbirine dik ise, iç çarpımları sıfırdır.

$$\vec{a}_{\perp\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A} = 0 \text{ 'dır.} \quad (2.103)$$

- $\vec{a}$ vektörü ile $\mathbf{A}$ multivektörü birbirine paralel (aynı yönlü) ise, dış çarpımları sıfırdır.

$$\vec{a}_{\parallel\mathbf{A}} \wedge \mathbf{A} = 0 \text{ 'dır.} \quad (2.104)$$

$\vec{a}$ vektörünün dik kısmı ile $\mathbf{A}$ multivektörünün geometrik çarpımı yapılırsa;

$$\vec{a}_{\perp\mathbf{A}} \mathbf{A} = \vec{a}_{\perp\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A} + \vec{a}_{\perp\mathbf{A}} \wedge \mathbf{A} \quad (2.105)$$

dir. Eşitlik (2.103)'den $\vec{a}_{\perp\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A} = 0$ 'dır.

$$\vec{a}_{\perp\mathbf{A}} \mathbf{A} = \vec{a}_{\perp\mathbf{A}} \wedge \mathbf{A} \quad (2.106)$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik (2.104) kullanılarak,

$$\vec{a}_{\perp\mathbf{A}} \mathbf{A} = \vec{a}_{\perp\mathbf{A}} \wedge \mathbf{A} + \vec{a}_{\parallel\mathbf{A}} \wedge \mathbf{A} \quad (2.107)$$

eşitliği yazılabilir. Buradan,

$$\vec{a}_{\perp\mathbf{A}} \mathbf{A} = (\vec{a}_{\perp\mathbf{A}} + \vec{a}_{\parallel\mathbf{A}}) \wedge \mathbf{A} \quad (2.108)$$

dir. Eşitlik (2.99) kullanılarak,

$$\vec{a}_{\perp\mathbf{A}} \mathbf{A} = \vec{a} \wedge \mathbf{A} \quad (2.109)$$

eşitliği yazılabilir. $\vec{a}$ vektörünün $\mathbf{A}$ multivektörü üzerindeki dik bileşeni $\vec{a}$ vektörü ile $\mathbf{A}$ multivektörünün dış çarpımına eşittir.

Eşitlik (2.109)'un her iki tarafı $\mathbf{A}^{-1}$ ile çarpılırsa,

$$\vec{a}_{\perp\mathbf{A}} \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = (\vec{a} \wedge \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-1} \quad (2.110)$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik (2.90) kullanılarak,

$$\vec{a}_{\perp\mathbf{A}} = (\vec{a} \wedge \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-1} \quad (2.111)$$

eşitliği elde edilir.

$\vec{a}$ vektörünün paralel kısmı ile $\mathbf{A}$ multivektörünün geometrik çarpımı yapılırsa;

$$\vec{a}_{\parallel\mathbf{A}} \mathbf{A} = \vec{a}_{\parallel\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A} + \vec{a}_{\parallel\mathbf{A}} \wedge \mathbf{A} \quad (2.112)$$

dir. Eşitlik (2.104)'den $\vec{a}_{\parallel A} \wedge \mathbf{A} = 0$ 'dır.

$$\vec{a}_{\parallel A} \mathbf{A} = \vec{a}_{\parallel A} \cdot \mathbf{A} \quad (2.113)$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik (2.103) kullanılarak,

$$\vec{a}_{\parallel A} \mathbf{A} = \vec{a}_{\perp A} \cdot \mathbf{A} + \vec{a}_{\parallel A} \cdot \mathbf{A} \quad (2.114)$$

eşitliği yazılabilir. Buradan,

$$\vec{a}_{\parallel A} \mathbf{A} = (\vec{a}_{\perp A} + \vec{a}_{\parallel A}) \cdot \mathbf{A} \quad (2.115)$$

dir. Eşitlik (2.99) kullanılarak,

$$\vec{a}_{\parallel A} \mathbf{A} = \vec{a} \cdot \mathbf{A} \quad (2.116)$$

eşitliği yazılabilir. $\vec{a}$ vektörünün $\mathbf{A}$ multivektörü üzerindeki paralel bileşeni $\vec{a}$ vektörü ile $\mathbf{A}$ multivektörünün iç çarpımına eşittir.

Eşitlik (2.116)'nın her iki tarafı $\mathbf{A}^{-1}$ ile çarpılırsa,

$$\vec{a}_{\parallel A} \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = (\vec{a} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-1} \quad (2.117)$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik (2.90) kullanılarak,

$$\vec{a}_{\parallel A} = (\vec{a} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-1} \quad (2.118)$$

eşitliği elde edilir.

Eşitlik (2.111) ve Eşitlik (2.118) kullanılarak $\vec{a} = \vec{a}_{\parallel A} + \vec{a}_{\perp A}$ eşitliği doğrulanabilir.

$$\vec{a} = \vec{a}_{\parallel A} + \vec{a}_{\perp A} = (\vec{a} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-1} + (\vec{a} \wedge \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-1} \quad (2.119)$$

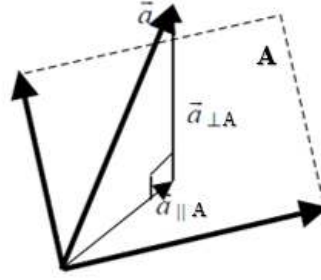
dir. Eşitlik düzenlenirse,

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \mathbf{A} + \vec{a} \wedge \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-1} \quad (2.120)$$

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1}) \quad (2.121)$$

$$\vec{a} = \vec{a} \quad (2.122)$$

bulunur [2].



Şekil 2.9. $\vec{a}$ vektörünün A multivektörü üzerindeki bileşenleri

2.10. Sankiskalar

2-boyutlu uzayda sankiskalar $I = \hat{e}_1 \hat{e}_2$ 'dir. Sankiskaların birim baz vektörleri $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ ve kendisi ile işlemler yapılırsa,

$$I \hat{e}_1 = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_1 = -\hat{e}_1 \hat{e}_1 \hat{e}_2 = -\hat{e}_1 \hat{e}_1 \hat{e}_2 = -\hat{e}_1 I \quad (2.123)$$

$$I \hat{e}_2 = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_2 = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_2 = -\hat{e}_2 \hat{e}_1 \hat{e}_2 = -\hat{e}_2 I \quad (2.124)$$

$$II = I^2 = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_1 \hat{e}_2 = -\hat{e}_1 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_2 = -1 \quad (2.125)$$

eşitliklerine ulaşılır.

3-boyutlu uzayda sankiskalar $I = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$ 'dir. Sankiskaların birim baz vektörleri $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ ve kendisi ile işlemleri yapılırsa,

$$I \hat{e}_1 = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_1 = -\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_1 \hat{e}_3 = \hat{e}_1 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 = \hat{e}_1 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 = \hat{e}_1 I \quad (2.126)$$

$$I \hat{e}_2 = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_2 = -\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_2 \hat{e}_3 = -\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_2 \hat{e}_3 = \hat{e}_2 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 = \hat{e}_2 I \quad (2.127)$$

$$I \hat{e}_3 = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_3 = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_3 = -\hat{e}_1 \hat{e}_3 \hat{e}_2 \hat{e}_3 = \hat{e}_3 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 = \hat{e}_3 I \quad (2.128)$$

$$II = I^2 = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 = -\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_1 \hat{e}_3 \hat{e}_2 \hat{e}_3 = \hat{e}_1 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_2 \hat{e}_3 = -\hat{e}_1 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_3 = -1 \quad (2.129)$$

eşitliklerine ulaşılır.

2.11. Sankivektör

2-boyutlu uzayda sankiskalar $I = \hat{e}_1 \hat{e}_2$ 'dir. Sankiskaların birim baz vektörleri $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ ile işlemleri yapılırsa,

$$I \hat{e}_1 = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_1 = -\hat{e}_1 \hat{e}_1 \hat{e}_2 = -\hat{e}_2 \quad (2.130)$$

$$\hat{e}_1 I = \hat{e}_1 \hat{e}_1 \hat{e}_2 = \hat{e}_2 \quad (2.131)$$

$$I \hat{e}_2 = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_2 = \hat{e}_1 \quad (2.132)$$

$$\hat{e}_2 I = \hat{e}_2 \hat{e}_1 \hat{e}_2 = -\hat{e}_2 \hat{e}_2 \hat{e}_1 = -\hat{e}_1 \quad (2.133)$$

eşitliklerine ulaşılır.

3-boyutlu uzayda sankiskalar $I = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$ 'dir. Sankiskaların birim baz vektörleri $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ ile işlemleri yapılırsa,

$$I \hat{e}_1 = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_1 = -\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_1 \hat{e}_3 = \hat{e}_1 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 = \hat{e}_2 \hat{e}_3 \quad (2.134)$$

$$I \hat{e}_2 = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_2 = -\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_2 \hat{e}_3 = -\hat{e}_1 \hat{e}_3 = \hat{e}_3 \hat{e}_1 \quad (2.135)$$

$$I \hat{e}_3 = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_3 = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \quad (2.136)$$

eşitliklerine ulaşılır. $\hat{e}_1 I, \hat{e}_2 I$, ve $\hat{e}_3 I$ için de aynı işlemler yapıldığında,

$$I \hat{e}_1 = \hat{e}_1 I = \hat{e}_2 \hat{e}_3 \quad (2.137)$$

$$I \hat{e}_2 = \hat{e}_2 I = -\hat{e}_1 \hat{e}_3 = \hat{e}_3 \hat{e}_1 \quad (2.138)$$

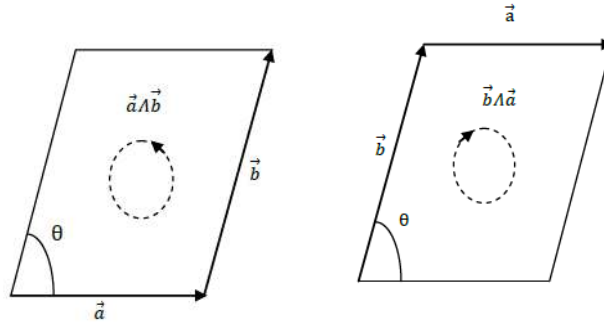
$$I \hat{e}_3 = \hat{e}_3 I = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \quad (2.139)$$

olduğu görülür.

2.12. Dış Çarpım

Bir vektörün, yön ve bir büyüklük veya uzunluk ile karakterize edilebildiği bilinir. Aynı zamanda vektörlerin nasıl toplanacağı, çıkarılacağı ve yeniden ölçeklendirilebileceği de bilinir. Tüm bu işlemlerin yanında vektörlerin çoğaltılabilmesi de mümkündür. Bu çoğaltma işlemi dış çarpım diye adlandırılan işlem ile yapılır.

Geometrik çarpım ifadesinde, $\vec{a} \wedge \vec{b}$ çarpım ifadesi dış çarpım olarak adlandırılır. “ $\wedge$ ” ise, wedge diye adlandırılır ve dış çarpım sembolüdür. Dış çarpım işlemlerinin sonucu bir bivektördür ve bir paralelkenarın yönlendirilmiş düzlem parçasını temsil eder.



Şekil 2.10. $\vec{a} \wedge \vec{b}$ ve $\vec{b} \wedge \vec{a}$ dış çarpımlarının geometrik anlamı

$\vec{a} \wedge \vec{b}$ ve $\vec{b} \wedge \vec{a}$ dış çarpımlarının büyüklükleri oluşturdukları paralelkenarın alanına eşittir. $\vec{a} \wedge \vec{b}$ ve $\vec{b} \wedge \vec{a}$ bivektörleri aynı alana ve aynı büyüklüğe sahiptir fakat zıt yönlüdür.

$$\vec{a} = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 \text{ ve } \vec{b} = b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2 \text{ iki vektörün dış çarpımlarının büyüklüğü,}$$

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |a_1 b_2 - a_2 b_1| \quad (2.140)$$

eşitliğine eşittir.

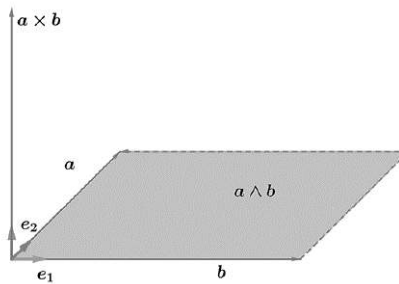
Ayrıca, $\vec{a} \wedge \vec{b}$ bivektörü ile $\vec{a} \times \vec{b}$ çapraz çarpımı arasında,

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = i(\vec{a} \times \vec{b}) \quad (2.141)$$

bağıntısı vardır. Burada,

$$i = \hat{e}_{123} = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \text{ 'tür.} \quad (2.142)$$

Vektörel çarpımların aksine wedge çarpımında birleşme özelliği vardır ve herhangi bir boyuta kolaylıkla genişletilebilir. Oysaki vektörel çarpım üç boyut için tanımlıdır. Ayrıca dış çarpım bir düzlem belirtirken, vektörel çarpımın sonucu ortogonal bir vektördür ve Şekil 2.11’de gösterilmiştir.



Şekil 2.11. $\vec{a} \times \vec{b}$ vektörü

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörler ve λ skalar olmak üzere, dış çarpımın cebirsel özellikleri;

$$- \vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a} \text{ dir.} \quad \text{bivektörlerin zıt yönlü olduğunu ifade eder} \quad (2.143)$$

$$- \vec{a} \wedge \vec{a} = 0 \text{ dır.} \quad \text{bir vektör kendisine paraleldir.} \quad (2.144)$$

Paralel olan iki vektörün dış çarpımı sifıra eşittir. Bundan dolayı, dış çarpım paralellik ölçütü olarak kullanılabilir.

$$- \vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c} \text{ dış çarpımın toplama işlemi üzerinde dağılma özelliği} \quad (2.145)$$

$$- (\lambda \vec{a}) \wedge \vec{b} = \lambda (\vec{a} \wedge \vec{b}) \text{ skalarle vektörün dış çarpımının birleşme özelliği} \quad (2.146)$$

$$- \lambda (\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \lambda \text{ skalarle vektörün dış çarpımının değişme özelliği} \quad (2.147)$$

$$- \text{Eğer bir bivektör } \lambda \text{ skaları ile çarpılırsa paralelkenarın alanı } |\lambda| \text{ kadar büyür. } \lambda \text{ negatif ise, değişiklik ters yöne doğru olur.} \quad (2.148)$$

$$- \vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \text{ vektörle vektörün dış çarpımının birleşme özelliği} \quad (2.149)$$

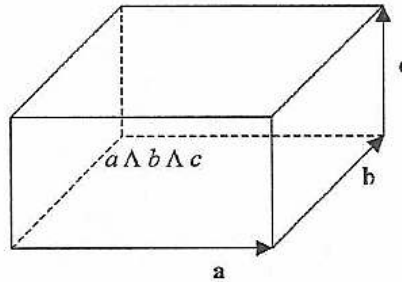
$$- \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \frac{1}{2} (\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c} \wedge \vec{a}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} \quad (2.150)$$

Bu eşitlik, bir vektör ile bir bivektörün wedge çarpımının simetrik olduğunu söyler.

$$- \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{1}{2} [\vec{c} (\vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b}) \vec{c}] = \frac{1}{2} [(\vec{c} \wedge \vec{a}) \vec{b} + \vec{b} (\vec{c} \wedge \vec{a}) + \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c}) - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}] \quad (2.151)$$

eşitlikleri ile sıralanabilir.

$\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$ çarpımının sonucu bir trivektördür ve bu çarpımın geometrik anlamı Şekil 2.12' de gösterilmiştir.



Şekil 2.12. $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$ dış çarpımının geometrik anlamı

İki Boyutlu Uzayda Dış Çarpım

Herhangi iki vektörün çarpımı bir düzlem belirtir. Bir düzlem ise 2-boyutan oluşur. $\hat{e}_1, \hat{e}_2$

2-boyutlu düzlemin birim baz vektörleridir. Bu birim baz vektörler ile herhangi iki vektör,

$$\vec{a} = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 \quad (2.152)$$

$$\vec{b} = b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2 \quad (2.153)$$

eşitlikleri ile tanımlanırsa, bu vektörlerin dış çarpımları,

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2) \wedge (b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2) \quad (2.154)$$

dir. Dış çarpımın dağılma özelliğinden yararlanılarak,

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = a_1 b_1 \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_1 + a_1 b_2 \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 + a_2 b_1 \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_1 + a_2 b_2 \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_2 \quad (2.155)$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 \quad (2.156)$$

dir.

$$- \quad \hat{e}_i \wedge \hat{e}_i = 0 \quad \text{bir baz vektörün kendisiyle dış çarpımı sıfırdır.} \quad (2.157)$$

$$- \quad \hat{e}_i \wedge \hat{e}_j = \hat{e}_{ij} \quad \text{farklı baz vektörlerin dış çarpımı birim baz iki vektöre eşittir} \quad (2.158)$$

$$- \quad \hat{e}_j \wedge \hat{e}_i = -\hat{e}_{ij} \quad \text{baz vektörlerin değişme özelliği yoktur.} \quad (2.159)$$

özelliklerinin ardından $\vec{a} \wedge \vec{b}$ sonucu,

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{e}_{12} \quad (2.160)$$

dir.

Cl^2 dış çarpım için birim bazların olası kombinasyonları Çizelge 2.7’de gösterilmiştir.

Çizelge 2.7. Cl^2 dış çarpım için birim bazların olası kombinasyonları

$\wedge$	1	$\hat{e}_1$	$\hat{e}_2$	$\hat{e}_{12}$
1	1	$\hat{e}_1$	$\hat{e}_2$	$\hat{e}_{12}$
$\hat{e}_1$	$\hat{e}_1$	1	$\hat{e}_{12}$	$\hat{e}_2$
$\hat{e}_2$	$\hat{e}_2$	$-\hat{e}_{12}$	1	$-\hat{e}_1$
$\hat{e}_{12}$	$\hat{e}_{12}$	$-\hat{e}_2$	$\hat{e}_1$	-1

Üç boyutlu uzayda dış çarpım

3-boyutlu uzayın birim baz vektörleri, $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ 'tür. Bu birim baz vektörler kullanılarak 3-boyutlu uzayın bivektörleri tanımlanırsa, bu bivektörler

$$\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 = \hat{e}_{12} \quad (2.161)$$

$$\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3 = \hat{e}_{13} \quad (2.162)$$

$$\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3 = \hat{e}_{23} \quad (2.163)$$

dir.

$\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ birim baz vektörleri ile herhangi iki vektör tanımlanırsa,

$$\vec{a} = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3 \quad (2.164)$$

$$\vec{b} = b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2 + b_3 \hat{e}_3 \quad (2.165)$$

dir.

Bu vektörlerin dış çarpımları ise,

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3) \wedge (b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2 + b_3 \hat{e}_3) \quad (2.166)$$

dir. Dış çarpımın dağılma özelliğinden yararlanılarak,

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{b} = & a_1 \hat{e}_1 \wedge b_1 \hat{e}_1 + a_1 \hat{e}_1 \wedge b_2 \hat{e}_2 + a_1 \hat{e}_1 \wedge b_3 \hat{e}_3 + a_2 \hat{e}_2 \wedge b_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 \wedge b_2 \hat{e}_2 + a_2 \hat{e}_2 \wedge b_3 \hat{e}_3 + \\ & a_3 \hat{e}_3 \wedge b_1 \hat{e}_1 + a_3 \hat{e}_3 \wedge b_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3 \wedge b_3 \hat{e}_3 \end{aligned} \quad (2.167)$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{b} = & a_1 b_1 \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_1 + a_2 b_2 \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 + a_1 b_3 \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3 + a_2 b_3 \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_1 + a_2 b_2 \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_2 + a_2 b_3 \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3 + \\ & a_3 b_1 \hat{e}_3 \wedge \hat{e}_1 + a_3 b_2 \hat{e}_3 \wedge \hat{e}_2 + a_3 b_3 \hat{e}_3 \wedge \hat{e}_3 \end{aligned} \quad (2.168)$$

eşitliği elde edilir.

Eşitlik (2.161), (2.162) ve (2.163)'den yararlanarak, $\vec{a} \wedge \vec{b}$ sonucu,

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{e}_{12} + (a_1 b_3 - a_3 b_1) \hat{e}_{13} + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{e}_{23} \quad (2.169)$$

dir.

$\mathbb{C}l^3$ 'te dış çarpım için birim bazların olası kombinasyonları Çizelge 2.8'de gösterilmiştir.

Çizelge 2.8. Cl^3 'te dış çarpım için birim bazların olası kombinasyonları

Λ	1	$\hat{e}_1$	$\hat{e}_2$	$\hat{e}_3$	$\hat{e}_{12}$	$\hat{e}_{13}$	$\hat{e}_{23}$	$\hat{e}_{123}$
1	1	$\hat{e}_1$	$\hat{e}_2$	$\hat{e}_3$	$\hat{e}_{12}$	$\hat{e}_{13}$	$\hat{e}_{23}$	$\hat{e}_{123}$
$\hat{e}_1$	$\hat{e}_1$	1	$\hat{e}_{12}$	$\hat{e}_{13}$	$\hat{e}_2$	$\hat{e}_3$	$\hat{e}_{123}$	$\hat{e}_{23}$
$\hat{e}_2$	$\hat{e}_2$	$-\hat{e}_{12}$	1	$\hat{e}_{23}$	$-\hat{e}_1$	$-\hat{e}_{123}$	$\hat{e}_3$	$-\hat{e}_{13}$
$\hat{e}_3$	$\hat{e}_3$	$-\hat{e}_{13}$	$-\hat{e}_{23}$	1	$\hat{e}_{123}$	$\hat{e}_1$	$\hat{e}_2$	$\hat{e}_{12}$
$\hat{e}_{12}$	$\hat{e}_{12}$	$-\hat{e}_2$	$\hat{e}_1$	$\hat{e}_{123}$	-1	$-\hat{e}_{23}$	$\hat{e}_{13}$	$-\hat{e}_3$
$\hat{e}_{13}$	$\hat{e}_{13}$	$-\hat{e}_3$	$-\hat{e}_{123}$	$\hat{e}_1$	$\hat{e}_{23}$	-1	$-\hat{e}_{12}$	$\hat{e}_2$
$\hat{e}_{23}$	$\hat{e}_{23}$	$\hat{e}_{123}$	$-\hat{e}_3$	$\hat{e}_2$	$-\hat{e}_{13}$	$\hat{e}_{12}$	-1	$-\hat{e}_1$
$\hat{e}_{123}$	$\hat{e}_{123}$	$\hat{e}_{23}$	$-\hat{e}_{13}$	$\hat{e}_{12}$	$-\hat{e}_3$	$\hat{e}_2$	$-\hat{e}_1$	-1

2.13. İç Çarpım

Geometrik çarpım, iç çarpım olarak adlandırılan bir işleme sahiptir. Bu işlem, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ birer vektör olmak üzere, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ şeklinde ifade edilir. Öklidyen uzayında iki vektörün iç çarpımı skalar çarpım ile aynıdır. Bu iki $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin öklidyen uzayındaki skalar çarpımı,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \quad (2.170)$$

dir. Burada $|\vec{a}|$ ve $|\vec{b}|$ vektörlerin uzunluğunu, θ açısı ise iki vektör arasındaki açıyı gösterir. Skalar çarpımda olduğu gibi iç çarpım da dikliğin bir ölçütüdür. İki dik vektörün iç çarpımı her zaman sıfırdır.

Geometrik çarpımdaki iç çarpım işlemi sadece vektörler için kullanılmaz. İki bivektör ya da bir vektör ile bir bivektörün iç çarpımı da hesaplanabilir. Bundan dolayı, skalar çarpım iç çarpımın özel bir halidir de denilebilir. İç çarpım derece düşüren bir işlemdir. Mesela, bir vektör ile bir bivektörün iç çarpımının sonucu bir vektördür. İç çarpım işlemi, "J" sembolü ile gösterilir.

İç çarpım ifadesinin cebirsel özellikleri,

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektör, $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ve $\mathbf{C}$ multivektörler, γ ve λ ise skalar olmak üzere,

$$- \gamma \lrcorner \lambda = \gamma \lambda \quad \text{skalar ve skalar iç çarpımı} \quad (2.171)$$

$$- \vec{a} \lrcorner \gamma = 0 \quad \text{vektör ve skalar iç çarpımı} \quad (2.172)$$

$$- \gamma \lrcorner \vec{a} = \gamma \vec{a} \quad \text{skalar ve vektör iç çarpımı} \quad (2.173)$$

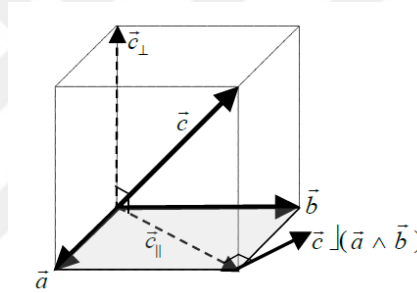
$$- \vec{a} \lrcorner \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \quad \text{vektör ve vektör iç çarpımı} \quad (2.174)$$

Çarpanların her ikisi de vektör ise bu iki vektörün iç çarpımının sonucu vektörlerin nokta çarpımına eşittir.

$$- \vec{a} \lrcorner (\vec{b} \wedge \mathbf{C}) = (\vec{a} \lrcorner \vec{b}) \wedge \mathbf{C} - \vec{b} \wedge (\vec{a} \lrcorner \mathbf{C}) \quad \text{vektör ve multivektör iç çarpımı} \quad (2.175)$$

$$- (\mathbf{A} \lrcorner \mathbf{B}) \lrcorner \mathbf{C} = \mathbf{A} \lrcorner (\mathbf{B} \lrcorner \mathbf{C}) \quad \text{multivertörlerin iç çarpım dağılma özelliği} \quad (2.176)$$

eşitlikleri ile sıralanabilir.



Şekil 2.13. Bir vektör ile bir bivektörün iç çarpımı

Çizelge 2.9. 3 boyutlu Clifford Cebiri'nde birim bazların iç çarpım için kombinasyonları

$\lrcorner$	1	$\hat{e}_1$	$\hat{e}_2$	$\hat{e}_3$	$\hat{e}_{12}$	$\hat{e}_{13}$	$\hat{e}_{23}$	$\hat{e}_{123}$
1	1	0	0	0	0	0	0	0
$\hat{e}_1$	$\hat{e}_1$	1	0	0	0	0	0	0
$\hat{e}_2$	$\hat{e}_2$	0	1	0	0	0	0	0
$\hat{e}_3$	$\hat{e}_3$	0	0	1	0	0	0	0
$\hat{e}_{12}$	$\hat{e}_{12}$	$\hat{e}_2$	$-\hat{e}_1$	0	-1	0	0	0
$\hat{e}_{13}$	$\hat{e}_{13}$	$\hat{e}_3$	0	$-\hat{e}_1$	0	-1	0	0
$\hat{e}_{23}$	$\hat{e}_{23}$	0	$\hat{e}_3$	$-\hat{e}_2$	0	0	-1	0
$\hat{e}_{123}$	$\hat{e}_{123}$	$\hat{e}_{23}$	$\hat{e}_{13}$	$\hat{e}_{12}$	$-\hat{e}_3$	$\hat{e}_2$	$-\hat{e}_1$	-1

2.14. Geometrik Çarpım

Geometrik çarpım, iç ve dış çarpımın bir kombinasyonudur. Yani geometrik çarpım, iç ve dış çarpımın birleştirilmesiyle elde edilir. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ iki vektör olmak üzere, bu iki vektörün geometrik çarpımı $\vec{a}\vec{b}$,

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b} \quad (2.177)$$

eşitliği ile ifade edilmişti. Bu $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri,

$$\vec{a} = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 \quad (2.178)$$

$$\vec{b} = b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2 \quad (2.179)$$

eşitlikleri ile tanımlansın. Bu iki vektörü kullanarak $\vec{a}\vec{b}$ ve $\vec{b}\vec{a}$ geometrik çarpımları incelenecek olursa,

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b} \quad (2.180)$$

$$\vec{a}\vec{b} = [(a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2) \cdot (b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2)] + [(a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2) \wedge (b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2)] \quad (2.181)$$

dir. Bu eşitlik sadeleştirilecek olursa,

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_i = 1 \quad (2.182)$$

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = 0 \quad (2.183)$$

ve

$$\hat{e}_i \wedge \hat{e}_i = 0 \quad (2.184)$$

$$\hat{e}_i \wedge \hat{e}_j = \hat{e}_i \hat{e}_j = \hat{e}_{ij} = -\hat{e}_{ji} \quad (2.185)$$

özelliklerinden yola çıkarak,

$$\vec{a}\vec{b} = (a_1 b_1 + a_2 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{e}_{12} \quad (2.186)$$

eşitliğine ulaşılır. $\vec{a}\vec{b}$ ifadesine $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$ ve $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ yer değiştirmesi uygulanırsa,

$$\vec{b}\vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \wedge \vec{a} \quad (2.187)$$

$$\vec{b}\vec{a} = [(b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2) \cdot (a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2)] + [(b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2) \wedge (a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2)] \quad (2.188)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik sadeleştirilecek olursa, eşitlik (2.182), (2.183), (2.184) ve (2.185) özelliklerinden yola çıkarak,

$$\vec{b}\vec{a} = (b_1a_1 + b_2a_2) + (b_1a_2 - b_2a_1)\hat{e}_{12} \quad (2.189)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlikten $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ispatı çıkarılır. Yani, nokta çarpımında iki vektörün yer değiştirmesi sonucu değişmez. Aynı zamanda, $\vec{a}\vec{\Lambda}\vec{b} = -\vec{b}\vec{\Lambda}\vec{a}$ eşitliğinin de doğruluğu ispatlanmış olur. Bu durumda,

$$\vec{b}\vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b}\vec{\Lambda}\vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a}\vec{\Lambda}\vec{b} \quad (2.190)$$

dir

$\vec{a}\vec{b}$ ve $\vec{b}\vec{a}$ geometrik çarpımlarının birbirleri ile toplanıp çıkarılması yapılacak olursa; bu geometrik çarpımlar,

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a}\vec{\Lambda}\vec{b} \quad (2.191)$$

$$\vec{b}\vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a}\vec{\Lambda}\vec{b} \quad (2.192)$$

eşitlikleri ile tanımlansın.

Öncelikle toplama işlemi yapılacak olursa,

$$\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a}\vec{\Lambda}\vec{b} + (\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a}\vec{\Lambda}\vec{b}) \quad (2.193)$$

$$\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a} = 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (2.194)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a}) \quad (2.195)$$

dir. Bu eşitliğe nokta çarpım ifadesi denir ve skalar bir ifadedir. Vektörler birbirine dik ise, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 'dır. O halde,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a}) \text{ eşitliği } \vec{a}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a} \text{ eşitliğine eşit olur.} \quad (2.196)$$

Çıkarma işlemi yapılacak olursa,

$$\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a}\vec{\Lambda}\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a}\vec{\Lambda}\vec{b}) \quad (2.197)$$

$$\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a} = 2(\vec{a}\vec{\Lambda}\vec{b}) \quad (2.198)$$

$$\vec{a}\vec{\Lambda}\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a}) \quad (2.199)$$

dir. Bu eşitliğe dış çarpım ifadesi ya da wedge çarpım ifadesi denir. Bu ifade ise ne skalar ne de vektördür çünkü ifadenin karesi, $(\vec{a}\vec{\Lambda}\vec{b})^2 = -1$ 'e eşittir.

Bu işlemlerden sonra denilebilir ki, geometrik çarpım sadece vektörler için değil aynı zamanda geometrik şekiller için de geçerlidir ve Clifford Cebiri, en temel cebirlerden birisidir.

2.15. 2-Boyutlu Uzayda Clifford Cebirinin Matris Gösterimleri

2-boyutlu uzayın birim baz vektörleri $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ ve eleman sayısı $2^2 = 4$ 'tür. Bu elemanlar da:

1 :skalar

$\hat{e}_1, \hat{e}_2$:vektörler

$\hat{e}_{12}$:bivektör

dir.

Bu elemanların matris gösterimleri;

$$1 \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.200)$$

$$\hat{e}_1 \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \hat{e}_2 \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.201)$$

$$\hat{e}_{12} = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.202)$$

eşitlikleri ile gösterilir.

Çizelge 2.10. Cl^2 'nin baz vektörlerinin matris gösterimi

Cl^2	R^2
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\hat{e}_1, \hat{e}_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\hat{e}_{12}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Cl^2 'de seçilmiş herhangi bir eleman $a_0 + a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_{12}$ olmak üzere bu elemanın matris gösterimi,

$$a_0 + a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_{12} \cong \begin{pmatrix} a_0 + a_1 & a_2 + 12 \\ a_2 - a_{12} & a_0 - a_1 \end{pmatrix} \quad (2.203)$$

dir.

2.16. 3-Boyutlu Uzayda Clifford Cebirinin Matris Gösterimleri

3-boyutlu uzayın birim baz vektörleri $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ ve eleman sayısı $2^3 = 8$ 'dir. Bu elemanlar da:

1 :skalar
 $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$:vektörler
 $\hat{e}_{12}, \hat{e}_{13}, \hat{e}_{23}$:bivektör
 $\hat{e}_{123}$:trivektör

dir.

Bu elemanların matris gösterimleri;

$$1 \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.204)$$

$$\hat{e}_1 \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \hat{e}_2 \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{e}_3 \cong \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.205)$$

$$\hat{e}_{12} = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{e}_{13} = \hat{e}_1 \hat{e}_3 \cong \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \hat{e}_{23} = \hat{e}_2 \hat{e}_3 \cong \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad (2.206)$$

$$\hat{e}_{123} = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \cong \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad (2.207)$$

eşitlikleri ile gösterilir.

Çizelge 2.11. Cl^3 'ün baz vektörlerinin matris gösterimi

Cl^3	R^3
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$
$\hat{e}_{12}, \hat{e}_{13}, \hat{e}_{23}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$
$\hat{e}_{123}$	$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

Pauli matrisleri ile Cl^3 'ün birim bazları arasında benzerlik söz konusudur. Pauli matrisleri;

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.208)$$

dir. Her bir Pauli matrisinin kendisi ile çarpımı birim matrisi verir.

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I \quad (2.209)$$

Ayrıca Pauli matrisleri arasında,

$$\sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3 = -\sigma_2 \sigma_1 \quad (2.210)$$

$$\sigma_1 \sigma_3 = i \sigma_2 = -\sigma_3 \sigma_1 \quad (2.211)$$

$$\sigma_2 \sigma_3 = i \sigma_1 = -\sigma_3 \sigma_2 \quad (2.212)$$

bağıntısı vardır. Pauli matrisleri ile Cl^3 'ün birim bazları arasındaki benzerlik Çizelge 2.12'de görülmektedir.

Çizelge 2.12. Pauli cebri ile Cl^3 arasındaki benzerlik

I	1
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	$\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$
$\sigma_1 \sigma_2, \sigma_1 \sigma_3, \sigma_2 \sigma_3$	$\hat{e}_{12}, \hat{e}_{13}, \hat{e}_{23}$
$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$	$\hat{e}_{123}$

O halde,

$$\hat{e}_1 \cong \sigma_1 \quad (2.213)$$

$$\hat{e}_2 \cong \sigma_2 \quad (2.214)$$

$$\hat{e}_3 \cong \sigma_3 \quad (2.215)$$

izomorfluğu söz konusudur denilebilir.

3. ELEKTROMANYETİZMA

Elektromanyetizma elektrik yüklerini ve elektrik yükleri ile ilişkili alan ve kuvvetleri inceleyen bilim dalıdır. Elektrik ve manyetizma uzun süre boyunca ayrı kuvvetler olarak düşünülse de 19.yy'da aynı kuvvetin farklı iki parçası olduğu keşfedilir. Elektrik alan ve manyetik alan kavramları arasında bir bağıllık söz konusudur. Bu ikisi esasen tek bir kuvvettir. Elektromanyetik teori, Franklin, Coulomb, Ampere, Faraday ve diğer bilim adamları tarafından geliştirilir. Fakat tüm parçaları bir araya getirip tutarlı bir teori oluşturan kişi ise Maxwell'dir. Clark Maxwell'in bu keşfinden sonra ise elektrik ve manyetizma tek bir isimde birleştirilir ve elektromanyetizma olarak adlandırılır.

3.1. Diferansiyel Vektör Operatörleri

Nabla/del operatörü

Nabla ya da del operatörü kısmi türev operatörüdür. Skalar ya da vektörel fonksiyonlara uygulanabilen bir türev alma operatörüdür ve " $\vec{\nabla}$ " ile gösterilen bir vektördür.

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} = \sum_{i=1}^n \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (3.1)$$

dir.

Gradyent

$\vec{\nabla}$ operatörünün skalar bir büyüklüğe uygulanmasıyla bu büyüklüğün uzaysal olarak artıp artmadığına bakmaya ve yönünü belirlemeye yarar. Yön belirlendiği için ise sonuç vektör olur. A bir skalar olmak üzere,

$$\vec{\nabla} A = \text{grad} A = \hat{e}_1 \frac{\partial A}{\partial x} + \hat{e}_2 \frac{\partial A}{\partial y} + \hat{e}_3 \frac{\partial A}{\partial z} \quad (3.2)$$

dir.

Gradyent işlemi; λ ve β skalar, $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektör olmak üzere;

$$- \vec{\nabla}(\lambda \vec{A}) = \lambda(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A}(\vec{\nabla} \lambda) \quad (3.3)$$

$$- \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \quad (3.4)$$

$$- \vec{\nabla}(\lambda + \beta) = \vec{\nabla} \lambda + \vec{\nabla} \beta \quad (3.5)$$

$$- \vec{\nabla}(\lambda \beta) = \lambda \vec{\nabla} \beta + \beta \vec{\nabla} \lambda \quad (3.6)$$

özelliklerine sahiptir.

$(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$ diverjansın gradyent işlemi laplace işlemi ile karıştırılmamalıdır. Laplace işlemi gradyentin diverjansıdır ve sonuçlar farklıdır.

Diverjans

$\vec{\nabla}$ operatörünün bir vektör ile noktasal çarpımıdır. İki vektörün nokta çarpımı skalar bir büyüklük olduğu için diverjans işleminin sonucu da skaldır. $\vec{A}$ bir vektör olmak üzere,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \text{div} \vec{A} = \hat{e}_1 \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + \hat{e}_2 \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + \hat{e}_3 \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \quad (3.7)$$

dir.

Diverjans işlemi; λ skalar, $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektör olmak üzere;

$$- \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \quad (3.8)$$

$$- \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{A}) = (\vec{\nabla} \lambda) \cdot \vec{A} + \lambda (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \quad (3.9)$$

$$- \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \lambda) = \vec{\nabla}^2 \lambda (\text{laplace işlemi}) \quad (3.10)$$

$$- \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (3.11)$$

$$- \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \text{ (bir vektörün kendisiyle vektörel çarpımı daima sıfırdır.)} \quad (3.12)$$

özelliklerine sahiptir.

Rotasyonel

$\vec{\nabla}$ operatörünün bir vektör ile vektörel çarpımıdır. Sonuç ise yine bir vektördür. $\vec{A}$ bir vektör olmak üzere,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \text{rot} \vec{A} = \hat{e}_1 \left(\frac{\partial A_z}{\partial A_y} - \frac{\partial A_y}{\partial A_z} \right) + \hat{e}_2 \left(\frac{\partial A_x}{\partial A_z} - \frac{\partial A_z}{\partial A_x} \right) + \hat{e}_3 \left(\frac{\partial A_y}{\partial A_x} - \frac{\partial A_x}{\partial A_y} \right) = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (3.13)$$

dir.

Rotasyonel işlemi; λ skalar, $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektör olmak üzere;

$$- \quad \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (3.14)$$

$$- \quad \vec{\nabla} \times (\lambda \vec{A}) = \lambda(\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \times (\vec{\nabla} \lambda) = (\vec{\nabla} \lambda) \times \vec{A} + \lambda(\nabla \times \vec{A}) \quad (3.15)$$

$$- \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} \quad (3.16)$$

$$- \quad \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \quad (3.17)$$

$$- \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \lambda) = 0 \quad (3.18)$$

özelliklerine sahiptir.

Laplace

Skalar bir niceliğin gradyenti alınarak elde edilen vektörün diverjansıdır. Laplace işleminin sonucu ise bir skaldır. “ $\vec{\nabla}^2$ ” veya “ Δ ” ile gösterilir. A bir skalar olmak üzere,

$$\Delta A = \vec{\nabla}^2 A = \text{div}(\text{grad} A) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} A) = \hat{e}_1 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \hat{e}_2 \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \hat{e}_3 \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \quad (3.19)$$

dir.

3.2. İntegral ile Hesaplamalar

Elektromanyetikte sıklıkla kullanılan integraller vardır. Bunlar; çizgi (yol) integrali, alan (yüzey) integrali ve hacim integralidir.

Çizgi (yol) integrali

Bu integral gradyent işlemi için temel teoremdir. T üç değişkenli bir fonksiyon olsun T(x,y,z), herhangi seçilen iki yol boyunca mesela a’dan b’ye gitmekle T’deki toplam değişme;

$$\int_a^b (\vec{\nabla} T) d\vec{l} = T(b) - T(a) \quad (3.20)$$

dir.

Burada önemli olan yolun tamamı değil, yolun uç noktalarıdır. Yani başlangıç ve bitiş noktalarıdır. Buradan iki sonuç çıkarılır.

- I. $\int_a^b (\vec{\nabla} T) d\vec{l}$ integrali seçilen yoldan bağımsızdır.
- II. $\oint_a^a (\vec{\nabla} T) d\vec{l} = 0$ 'dır. İntegral üzerindeki yuvarlak işareti integralin kapalı bir eğri üzerinde alındığını gösterir. Başlangıç ve bitiş noktaları aynı olduğundan dolayı $T(a) - T(a) = 0$ 'dır.

Alan (yüzey) integrali

Bu integral, diverjans işlemi için temel teoremdir. Bu teorem Gauss Teoremi veya Green Teoremi olarak da adlandırılır. Bu integral, bir fonksiyonun diverjans ifadesinin hacim üzerinden integralinin, hacmi saran yüzeye (alana) eşit olduğunu gösterir. İntegralin eşitliği,

$$\iiint (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) d\tau = \oiint \vec{A} d\vec{a} \quad (3.21)$$

dir. Burada, $d\vec{a}$ ifadesi vektörel yüzey elemanını gösterir ve yüzeye diktir.

Hacim integrali

Bu integral rotasyonel işlemi için temel teoremdir. Bu teorem Stokes Teoremi olarak da bilinir. Bu integral, bir fonksiyonun rotasyonel ifadesinin bir yüzey üzerinden integralinin, yüzeyi çevreleyen eğriye eşit olduğunu söyler. İntegralin eşitliği,

$$\iint (\vec{\nabla} \times \vec{A}) d\vec{a} = \oint \vec{A} d\vec{l} \quad (3.22)$$

dir. Bu integralin iki sonucu vardır. Bunlar;

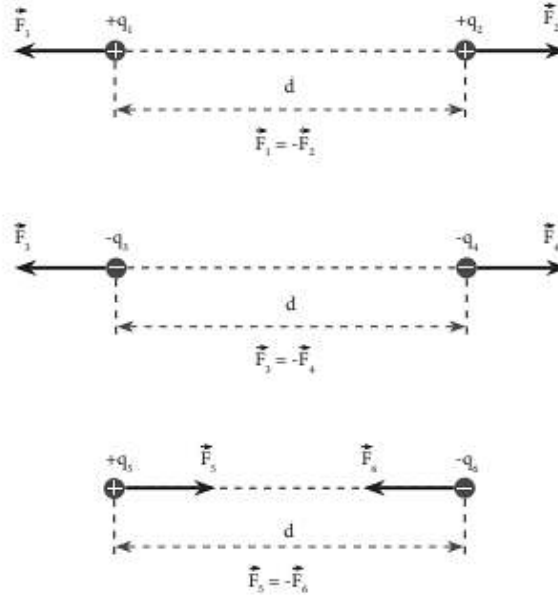
- I. $\iint (\vec{\nabla} \times \vec{A}) d\vec{a}$ integrali, seçilen yüzeye değil sadece sınır eğrisine bağlıdır.
- II. $\oiint (\vec{\nabla} \times \vec{A}) d\vec{a} = 0$ 'dır.

3.3. Elektrostatik

Doğada pozitif ve negatif olmak üzere iki elektriksel yük çeşidi vardır. Doğadaki bu elektriksel yükler korunumludur. Yani, bir elektriksel yük tek başına yoktan var edilemez ya da yok edilemez. Evrendeki net elektrik yükün sonsuzdan bu yana sabit olduğu kabul edilir. Doğada bulunan en küçük elektrik yükü elektron yüküdür ve " $-e$ " ile gösterilir. Diğer bütün yük değerleri elektron yükü cinsinden ifade edilirler. Bundan dolayı elektron yüküne "yük kuantumu" adı verilir.

Elektrik Yüğü ve Coulomb Yasası

Elektrik yüğü, maddenin özelliklerinden biridir. Elektrik yüklerinin cinsine bağı olarak, bu yükler birbirlerine itme ya da çekme kuvveti uygularlar. Aynı işaretli yükler (+,+ veya -,-) birbirini iterken, zıt işaretli yükler (+,- veya -,+) birbirini çekerler.



Şekil 3.1. Yüklü cisimler arasındaki elektriksel kuvvetler

Şekil 3.1.'de de gösterildiği üzere; $+q_1$ ve $+q_2$ yükleri birbirini iterler, $-q_3$ ve $-q_4$ yükleri de birbirini iterler, $+q_5$ ve $-q_6$ yükleri ise birbirini çekerler. Bu itme ya da çekme kuvvetleri daima zıt yönlü ve eşit büyüklüktedir. Yüklerin birbirine uyguladığı kuvvetler arasında ise; $F_1 = -F_2$, $F_3 = -F_4$ ve $F_5 = -F_6$ eşitliği vardır.

Elektrik kuvvetin büyüklüğü ise,

$$F = k \frac{q_1 \cdot q_2}{d^2} \quad (3.23)$$

dir.

Bu eşitliğe, “Coulomb Yasası” denilir. Coulomb Yasası, durgun ve noktasal bir q_1 yükünün kendisinden d kadar uzakta olan q_2 yüküne uyguladığı kuvvet nedir sorusunun cevabıdır. Burada; q_1 ve q_2 elektrik yükleri olup birimi Coulomb’dur (C), d yükler arasındaki uzaklık olup birimi metredir (m), k ise ortamın cinsine bağı olan bir sabittir.

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,98 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \quad (3.24)$$

Burada; ϵ_0 , boşluğun (yaklaşık olarak havanın) elektriksel geçirgenliğidir.

Elektrik Alan

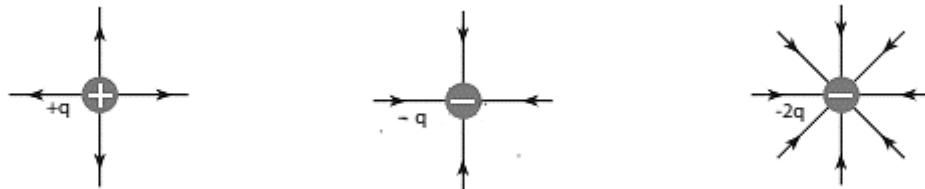
Nokta yükler arasında herhangi bir temas olmadığı halde Şekil 3.1'deki yüklerin birbirine temas uygulamaları nasıl açıklanabilir? Mesela q_1 yükü yakınında q_2 yükünün bulunduğunu nasıl bilir? Burada “elektrik alan” vektörü kavramı ortaya çıkar. q_1 nokta yükü q_2 nokta yüküne doğrudan kuvvet uygulamaz. q_2 yükü bir elektrik alan oluşturur ve bu alan kuvvet uygular. Bir yükün kuvvet etkisini gösterebildiği yükü saran uzay bölgesine o yükün elektrik alanı denir. Yani, bir yükün pozitif birim yüke (+1 C) uyguladığı elektriksel kuvvetin büyüklüğüne yükün o noktadaki elektrik alan şiddeti denir. Elektrik alan şiddeti,

$$E = k \frac{q}{d^2} \quad (3.25)$$

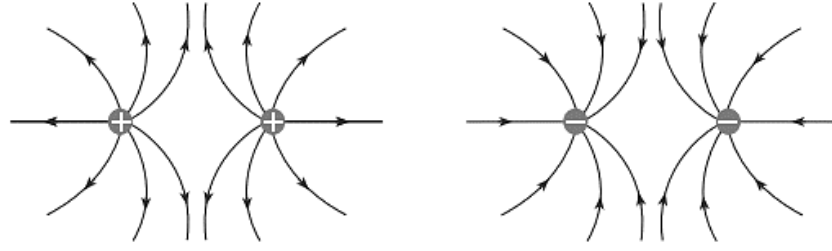
dir.

Elektrik alan şiddeti vektörel bir büyüklüktür. Birimi ise, N/C'dur. Elektrik alan, Coulomb yasası ile orantılıdır.

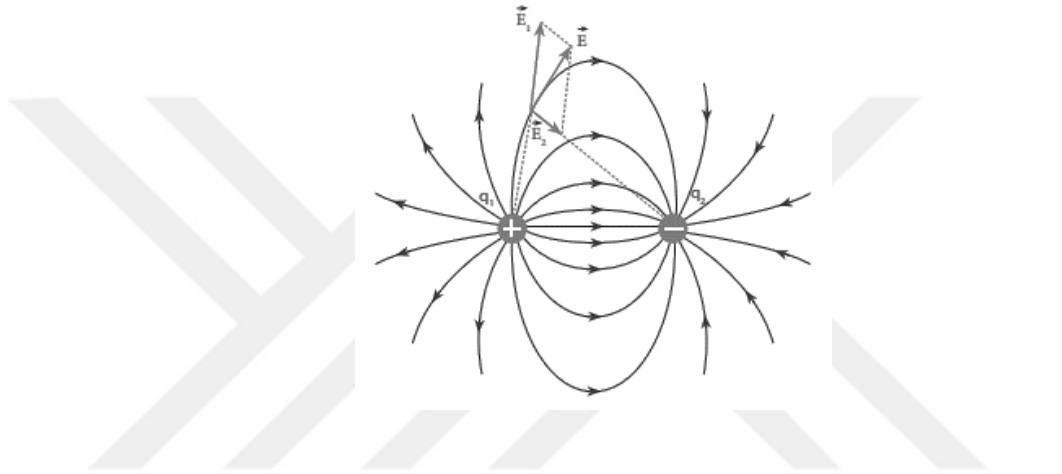
Elektrik alan çizgileri, elektrik alan kavramının daha iyi anlaşılmasını sağlayan somut bir modellemedir. Pozitif yüklerin oluşturduğu elektrik alan çizgilerinin yönü yükten dışarıya doğru çizilir. Negatif yüklerin oluşturduğu elektrik alan çizgilerinin yönü ise yüke doğru çizilir. Çizgi sayısı da yükün büyüklüğü ile doğru orantılıdır. Elektrik alan çizgileri, yüzeye daima diktir ve elektrik alan çizgileri birbirlerini kesmezler. Ayrıca, elektrik alan çizgileri, elektrik alan şiddetinin arttığı yerde sık, azaldığı yerde ise seyrek çizilir. Elektrik alan çizgileri, herhangi bir pozitif (+) yüklü parçacıktan çıkıp, herhangi bir (-) yüklü parçacıkta son bulur.



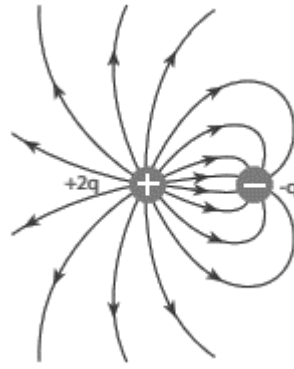
Şekil 3.2. Noktasal yük etrafında yükün cinsine ve miktarına bağlı elektrik alan çizgileri



Şekil 3.3. İşaretleri ve yük büyüklükleri aynı noktasal cisimlerin etrafındaki elektrik alan çizgileri



Şekil 3.4. İşaretleri farklı, yük büyüklükleri aynı olan noktasal yüklerin oluşturduğu elektrik alan çizgileri



Şekil 3.5. İşaretleri ve yük büyüklükleri farklı noktasal yüklerin oluşturduğu elektrik alan çizgileri

Bir noktadaki elektrik alan, o noktada bulunan birim pozitif yüke etki eden elektrik kuvveti olarak da tanımlanır. Buna göre bir q yüküne etki eden elektrik kuvveti $\vec{F}_E$ ise, yükün bulunduğu noktadaki elektrik alan,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q} \quad (3.26)$$

dir.

Elektrik kuvveti ise,

$$\vec{F}_E = q\vec{E} \quad (3.27)$$

dir.

Eğer q yükü pozitif ise $\vec{E}$ ve $\vec{F}_E$ aynı yönlüdür fakat q yükü negatif ise $\vec{E}$ ve $\vec{F}_E$ zıt yönlüdür. Yani, pozitif yükler daima elektrik alan yönünde gitmek isterken, negatif yükler ise ters yönde gitmek isterler.

Elektrik Alanın Diverjans ve Rotasyoneli

Elektrik alan vektörünün diverjansı, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ eşitliğine eşittir. Bu konuya Maxwell Denklemleri konusunda değinilecektir.

Elektrik alan vektörü sıradan bir vektör değildir, rotasyoneli her zaman sıfır olan özel bir vektördür. Yani, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ 'dır.

Rotasyoneli sıfır olan her vektör, bir skaların gradyenti olarak yazılabilir. Elektrik alan vektörü ise elektrik potansiyeli cinsinden yazılabilir. Bu konuya elektrik potansiyeli konusunda değinilecektir.

Elektrik Potansiyeli

Elektriksel potansiyeli, belirli bir durumdaki yükün (q) nasıl hareket ettiği hakkında bizlere bilgi verir. Ayrıca, bu q yükünün potansiyel enerji değerini tahmin etmemize yardımcı olur. Bir q yükünün herhangi bir noktaya olan uzaklığı d kadar ise elektrik potansiyeli,

$$V = k \frac{q}{d} \quad (3.28)$$

dir.

Elektriksel potansiyel değeri yükün işaretine bağlı olarak pozitif veya negatif olabilir. Elektriksel potansiyel ifadesi skalar bir ifadedir, vektör değildir. Birimi ise, volt'tur (V).

$$\text{Volt} = \frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}} \quad (3.29)$$

Rotasyoneli sıfır olan bir vektörün, bir skaların diverjansı cinsinden ifade edilebileceğinden bahsedildi. Elektrik alan ifadesi ise elektrik potansiyelinin diverjansı cinsinden,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad (3.30)$$

dir.

Elektrik alanın diverjans eşitliği $(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0})$, elektrik potansiyeli (V) cinsinden ifade edilirse, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ diverjans eşitliğinde $\vec{E}$ elektrik alan vektörü yerine $-\vec{\nabla}V$ ifadesi yazılır. Bir gradyent ifadenin diverjansının laplasyen olduğu hatırlanırsa, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}V) = -\nabla^2V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ olur. O halde, $-\nabla^2V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik Poisson Denklemi olarak bilinir. Yük olmayan bir ortamda (boşlukta) $\rho = 0$ olacağından, $-\nabla^2V = 0$ olur.

Elektrik alanın rotasyonel eşitliği $(\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0)$ elektrik potansiyeli (V) cinsinden ifade edilirse, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ rotasyonel eşitliğinde $\vec{E}$ elektrik alan vektörü yerine $-\vec{\nabla}V$ ifadesi yazılır. Bu işlem sonucunda $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla}V) = 0$ eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik ise gradyentin rotasyoneli sıfır olduğundan bilinen bir durumdur (Eşitlik 3.18).

Elektrostatik Enerji

Elektrik yükleri arasındaki elektriksel yüklerden kaynaklanan durum enerjisine elektrik potansiyel enerjisi denir. E_p ile gösterilir ve skalar bir büyüklüktür. Birimi ise joule'dür (J). Elektrik potansiyel enerjisi,

$$E_p = k \frac{q_1 q_2}{d} \quad (3.31)$$

dir.

Burada; k Coulomb sabitidir. q_1 ve q_2 elektriksel yüklerdir birimi Coulomb'tur (C). d ise yükler arasındaki uzaklıktır birimi metredir (m).

Elektriksel potansiyel enerji skalar bir büyüklük olduğu için işlemlerde yükler işaretleri ile kullanılır. Birbirini iten yükler arasındaki elektriksel potansiyel enerji pozitif olurken, birbirini çeken yükler arasındaki elektriksel potansiyel enerji negatif olur.

Elektriksel potansiyel ile elektriksel potansiyel enerji kavramları farklı ifadelerdir. Bu iki ifade karıştırılmamalıdır.

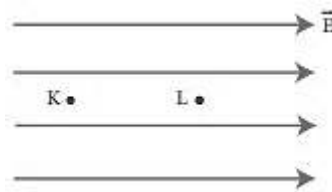
Elektrik Potansiyel Farkı (Elektrostatik İş)

Elektrik alan içerisindeki pozitif birim yükün bir noktadan diğerine götürülmesi için yapılan işe, bu iki noktanın elektrik potansiyel farkı denir. O halde, elektrik potansiyel farkı,

$$\Delta V = \frac{W}{q} \quad (3.32)$$

eşitliği ile gösterilir. Birimi ise Volt'tur (V).

Elektrik alan yönüne doğru bir yük taşınması yapılırsa elektriksel potansiyel azalır ve bu durumda ΔV ifadesi negatif çıkar. ΔV ifadesinin negatif çıkması $W = q \cdot \Delta V$ iş eşitliğinin de negatif çıkması demektir. Bu ise, elektriksel kuvvetlerin iş yaptığı anlamına gelir. Fakat elektrik alan yönünün tersine bir yük taşınması yapılırsa elektriksel potansiyel artar ve bu durumda da ΔV ifadesi pozitif çıkar. ΔV ifadesinin pozitif çıkması ise $W = q \cdot \Delta V$ iş eşitliğinin de pozitif çıkması demektir. Bu da, elektriksel kuvvetlerine karşı iş yapıldığı anlamına gelir.



Şekil 3.6. Düzgün elektrik alandaki noktalar

Şekil 3.6.'da, K noktasından L noktasına doğru yapılan iş negatif, L noktasından K noktasına doğru yapılan iş ise pozitifdir.

Elektrik Akımı

Serbest yükler bir elektrik alanı içinde bulunurlarsa, elektrik kuvvetinin etkisinden dolayı sürüklenirler. Uzayın belirli bir bölgesinden geçen bu yüklü taneciklerin akış hızını tanımlamak için akım ifadesi kullanılır. Elektrikle yüklü ve potansiyelleri farklı olan iki

iletken küre, iletken bir telle birleştirilirse, potansiyel farkından dolayı iletkende yük akışı meydana gelir. Bir iletken uzun süreli elektrik yük akışını sağlamak için, iletkenin iki ucu arasında sürekli bir potansiyel farkı oluşturmak gerekir.

İletken bir ortamın herhangi bir kesitinden belirli bir yönde, birim zamanda geçen elektrik yükü miktarına elektrik akım şiddeti denir. “ I ” ile gösterilir. Bir iletkenin herhangi bir kesitinden t sürede q kadar net yük geçiyorsa, iletkenin geçen akım şiddeti,

$$I = \frac{q}{t} \quad (3.33)$$

dir. Birimi ise Amper’dir (A).

Pozitif (+) elektrik yüklerinin hareketi; potansiyeli yüksek olan noktadan, potansiyeli düşük olan noktaya doğrudur. Elektrik akımının yönü, pozitif (+) yüklerin hareket yönünde veya elektron hareketinin zıt yönünde kabul edilir. Elektrik akımının yönü, elektrik alanın yönü ile aynıdır. İletken metallerde elektrik akımı, serbest hareket edebilen elektronlarla sağlanır.

Bir iletkenin s yüzeyinden geçen toplam akım, $\vec{J}$ akım yoğunluğu olmak üzere,

$$I = \oint \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (3.34)$$

eşitliği ile gösterilir. Bu eşitlikte s iletkenin kesitidir ve birimi ise mm^2 ’dir. $\vec{J}$ akım yoğunluğu birimi ise Ampere/m^2 ’dir. Eşitliğe diverjans teoremi uygulanırsa,

$$I = \oint \vec{J} \cdot d\vec{s} = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV \quad (3.35)$$

eşitliğine ulaşılır. Eğer ki akım sabit ise, keyfi bir hacim içerisine giren yük miktarı ile çıkan yük miktarı aynı olacağından, $\vec{J}$ akım yoğunluğu kapalı bir hacim içerisinde sıfır olacaktır. Yük miktarı değişmeyecektir. O halde,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \text{ olur.} \quad (3.36)$$

Eğer ki akım sabit değil ise,

$$I = \oint \vec{J} \cdot d\vec{s} = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV = -\frac{dq}{dt} \quad (3.37)$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik (3.37)’da $q = \int \rho dV$ eşitliği yazıldığında,

$$I = \oint \vec{J} \cdot d\vec{s} = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV = -\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \int \rho dV \quad (3.38)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{d\rho}{dt} \quad (3.39)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik yükün korunumunu verir ve Süreklilik Denklemi olarak adlandırılır.

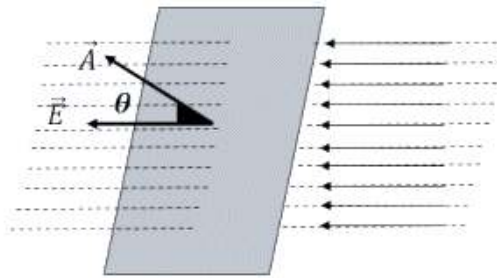
Elektrik Akısı

Elektrik alan çizgilerinin nicel olarak ele alınabilmesi için elektrik akı kavramından bahsedilir. Elektrik akısı, belirli bir yüzeyden geçen elektrik alan çizgilerinin sayısının bir ölçüsüdür. Birim yüzeyden geçen elektrik alan çizgilerinin sayısı elektrik alanın büyüklüğü ile orantılıdır. Elektrik akısı,

$$\Phi_E = EA \cos \theta \quad (3.40)$$

eşitliği ile gösterilir. Birimi ise $N \cdot m^2/C$ 'dur. Buradaki $\vec{E}$ elektrik alan ifadesidir, $\vec{A}$ vektörü ise büyüklüğü yüzeyin alanına eşit yüzeye dik bir vektördür.

Elektrik alanın yüzeye dik olması durumunda akı ifadesi en büyük değerini alır ($\cos 90^\circ = 1$). Eğer elektrik alan ifadesi ile yüzey paralel ise akı ifadesi en küçük değerini alır yani sıfır olur ($\cos 0^\circ = 0$).

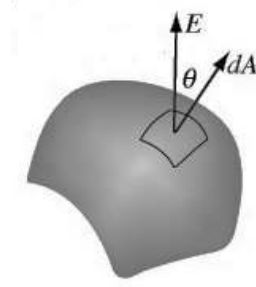


Şekil 3.7. Düzgün elektrik alan içindeki elektriksel akı

Eşitlik (3.40)'da akı ifadesi, elektrik alan ifadesinin değişmediği kabul edilerek yazılmıştır. Eğer değişen bir elektrik alan var ise, örneğin küre yüzeyi düşünülecek olursa, kürenin yüzeyinden geçen elektrik alanın yönü her noktada farklıdır. Bu durumda akı ifadesi nasıl hesaplanır? Yüzey, çok sayıda sonsuz $d\vec{A}$ küçük yüzey alanına bölünür ve bu sonsuz küçük alanların $d\Phi$ akısı hesaplanır. Bu hesaplama,

$$d\phi_E = E dA \cos \theta \quad (3.41)$$

dir. Bu eşitlik Şekil 3.8’de gösterilmiştir.



Şekil 3.8. Düzgün olmayan elektrik alan içindeki elektriksel akı

Yüzeyden geçen toplam akı, $d\vec{A}$ alanlarına karşılık gelen sonsuz küçük $d\phi$ akıların toplamına eşittir.

$$\phi_E = \lim_{dA \rightarrow 0} \sum \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (3.42)$$

O halde kapalı yüzeyden geçen net akı,

$$\phi_E = \oint d\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (3.43)$$

eşitliği ile gösterilir. Buradaki kapalı integral ifadesi, toplam akının tüm kapalı yüzey boyunca ifadesidir.

$$\phi_E = \oint d\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA \cos \theta = \oint E dA \cos 0 = \oint E dA \quad (3.44)$$

eşitliğinde elektrik alan $E = k \frac{q}{d^2}$ yerine yazılacak olursa,

$$\phi_E = \oint E dA = \oint k \frac{q}{d^2} dA = k \frac{q}{d^2} \oint dA \quad (3.45)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki dA yüzey elemanlarının integrali kürenin yüzey alanına eşittir. Yani, $\oint dA = 4\pi r^2$ ’dir. O halde,

$$\phi = k \frac{q}{d^2} \oint dA = k \frac{q}{d^2} 4\pi r^2 \quad (3.46)$$

dir. Eşitlik (3.46)’da $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ifadesi yerine yazılacak olursa,

$$\phi_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{d^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (3.47)$$

eşitliğine ulaşılır.

Bu eşitlik elektriksel alan için Gauss Yasası eşitliğidir. Burada, q gauss yüzeyinin içinde kalan yük miktarıdır. Eğer yük hacim yoğunluğu ρ olan bir V hacmine dağılmış ise o zaman yük (q) ifadesi,

$$q = \oint \rho dV \quad (3.48)$$

eşitliği ile gösterilir. Eşitlik (3.48), Eşitlik (3.47)'da yerine yazılacak olursa, akı,

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \oint \rho dV \quad (3.49)$$

dir.

3.4. Manyetizma

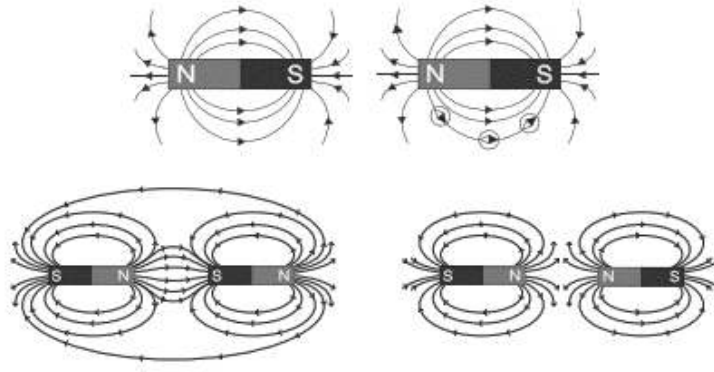
Mıknatıslar, yapısında bulunan Fe_3O_4 bileşiğinden dolayı çekme özelliğine sahiptirler. Bir mıknatısın N (North) ve S (South) olmak üzere iki kutbu vardır. Bu manyetik kutuplar da tıpkı elektrik yükleri gibi birbirlerini iterler ve çekerler. Mıknatıs kutupları ve elektrik yükleri arasında çok önemli bir fark vardır. Bu fark, elektrik yüklerinin doğada tek başlarına bulunabildikleri halde manyetik kutupların tek başlarına bulunamamasıdır. Manyetik yükler doğada daima çift halde bulunurlar. Bir mıknatıs kaç parçaya bölünürse bölünsün her bir parçanın iki kutbu vardır. Hiçbir zaman tek kutuplu bir mıknatıs olmaz.

Manyetik Alan

Manyetik alan denilince akla mıknatıslar geldiği gerçeği kaçınılmazdır. Mıknatısın, mıknatıslık özelliği gösterebildiği alana manyetik alan denir. Yani, bir mıknatıs belirli bir mesafede mıknatıslık özelliği gösterir. Aynı cins kutuplar birbirini iterken, zıt kutuplar birbirlerini çekerler. Manyetik alanın şiddeti manyetik alan çizgilerinin sıklığı ile doğru orantılıdır. Manyetik alan çizgilerinin yoğun olduğu yerlerde manyetik alan şiddetlidir.

Mıknatısın manyetik alanı N kutbundan S kutbuna doğrudur. Manyetik alan çizgileri mıknatısın dışında mıknatısın kuzey kutbundan güney kutbuna, mıknatısın içinde ise güney kutbundan kuzey kutbuna doğrudur. Manyetik alan çizgileri kapalı eğriler şeklindedir ve birbirlerini kesmezler (Şekil 3.9.).

Manyetik alan vektörel bir büyüklük olup “ $\vec{B}$ ” ile gösterilir. Birimi, *Tesla*(T) veya *Weber*/ m^2 ’dir.



Şekil 3.9. Manyetik alan çizgilerinin gösterimi

Manyetik Alanın Diverjans ve Rotasyoneli

Manyetik alan ifadesinin diverjansı, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ ile gösterilir. Manyetik alanın diverjansının sıfır olması elektrik alan vektöründe olduğu gibi bir potansiyel tanımlanmasına olanak sağlar. Yani, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ olduğundan $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ eşitliği gibi bir $\vec{A}$ vektör potansiyeli tanımlanabilir. $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ eşitliği $\vec{A}$ vektör potansiyelinin rotasyoneli için tanımlı olduğundan vektör potansiyelinin diverjansı için bir şey söylenemez. Bu serbestlikten yola çıkarak $\vec{A}$ vektör potansiyelinin diverjansı sıfır olarak tanımlanabilir. Yani, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ 'dır.

Manyetik alan ifadesinin rotasyoneli ($\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$) vektör potansiyeli ($\vec{A}$) cinsinden ifade edilmek istenirse, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ rotasyonel eşitliğinde $\vec{B}$ manyetik alan vektörü yerine $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ eşitliği yazılır. Bu işlem sonrasında $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$ eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten ise, $\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$ sonucuna ulaşılır. Bu sonuç Poisson eşitliğidir.

$\vec{A}$ Vektör potansiyelinin elektrik alan potansiyeli gibi $\vec{B} = -\vec{\nabla}U$ şeklinde ifadesi mümkün değildir. Çünkü gradyanın rotasyoneli daima sıfır olduğundan bu gösterim Amper Yasası ile çelişir. Eğer akımların olmadığı yerde işlem yapılacak olursa skalar bir manyetik potansiyel tanımlanabilir. Ancak manyetik alanın varlığı akımlardan dolayı olduğundan böyle bir şey teorik olarak mümkün değildir. Ayrıca, manyetik kuvvetler iş yapmaz. Bundan dolayı skalar manyetik potansiyel için V elektrik potansiyelinde olduğu gibi iş tanımı yapılamaz. Ama tüm bunların aksine $\vec{A}$ vektör potansiyeli de kullanışlı bir gösterimdir [10].

Manyetik Kuvvet

Elektrostatik bölümünde durgun yüklerin uyguladığı kuvvet incelendi. Hareketli yükler ele alınacak olursa, bir mıknatıs veya hareketli elektrik yükü etrafında manyetik alan oluşur. Bu manyetik alan, yükü q ve hızı $\vec{v}$ olan bir parçacığa etkiyen $\vec{F}_B$ manyetik kuvveti yardımıyla tanımlanır. Manyetik kuvvet vektörel bir büyüklüktür. $\vec{F}_B$ manyetik kuvveti,

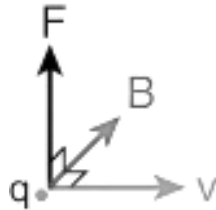
$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (3.50)$$

dir. Manyetik kuvvetin büyüklüğü de,

$$F_B = qvB \sin \theta \quad (3.51)$$

dir.

Manyetik kuvvet, hem $\vec{v}$ hızına hem de $\vec{B}$ manyetik alanına diktir. Manyetik alan içerisinde hareket eden yüksüz bir cisme manyetik kuvvet etki etmez. Manyetik alana paralel olarak hareket eden yüklü bir cisme manyetik kuvvet etki etmez ($\sin 0 = 0$). Şekil 3.10'da manyetik kuvvetin gösterimi yer almaktadır.

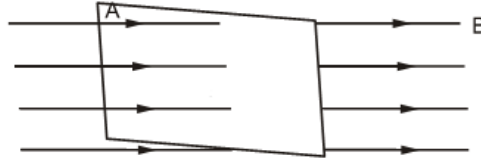


Şekil 3.10. Manyetik kuvvetin gösterimi

Manyetik kuvvet iş yapmaz. Ayrıca manyetik kuvvet, hareket eden bir parçacığın yönünü değiştirebilir fakat hızını arttırıp azaltmaz.

Manyetik Akı

Manyetik akı, bir yüzeyden dik olarak geçen manyetik alan çizgilerinin sayısıdır. Şekil 3.11'de yüzeyden dik geçen manyetik alan çizgileri gösterilmektedir.



Şekil 3.11. Yüzeyden dik geçen manyetik alan çizgiler

Manyetik akı Φ_B ile gösterilir ve birimi *Weber* (W)'dir. Manyetik alan ile manyetik akı arasında

$$\vec{B} \cdot \vec{A} = \Phi_B \quad (3.52)$$

bağıntısı vardır. Burada $\vec{A}$ ifadesi, manyetik kuvvet çizgilerinin kestiği yüzey alanıdır.

Manyetik alan ve manyetik akı arasındaki analitik bağıntı ise,

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (3.53)$$

dir.

3.5. Skalar ve Vektör Potansiyeli

Elektrostatikte $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ özelliğinden yararlanarak elektrik alan $-\vec{\nabla}V$ skalar bir fonksiyonun diverjansı şeklinde ifade edilmişti. Elektromanyetizmada bu mümkün değildir. Çünkü artık elektrik alanın rotasyoneli sıfırdan farklıdır. Fakat manyetik alanın diverjansı $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ hala sıfır olduğundan manyetizmada olduğu gibi $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ eşitliği gibi bir $\vec{A}$ vektör potansiyeli tanımlanabilir.

Elektrik alanın rotasyonelini gösteren $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ Faraday Yasasında, manyetik alan ifadesi yerine vektör potansiyeli $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ eşitliği yazılacak olursa,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad (3.54)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad (3.55)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad (3.56)$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.57)$$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}V \quad (3.58)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (3.59)$$

eşitliği elde edilir. Böylece elektrik alan ifadesi skalar ve vektör potansiyelleri cinsinden elde edilmiş olur. Bulunan bu eşitliğin diverjansı alınır,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla}^2 V - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad (3.60)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ eşitliği yerine yazılırsa,

$$\vec{\nabla}^2 V + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.61)$$

eşitliğine ulaşılır.

Manyetik alanın rotasyonelini gösteren $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ Ampere Yasası'nda manyetik alan ve elektrik alan ifadelerinin yerine potansiyel ifadeleri ile eşitlikleri yazılırsa,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad (3.62)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} - \epsilon_0 \mu_0 \vec{\nabla} \frac{\partial V}{\partial t} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad (3.63)$$

eşitliğine ulaşılır. $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$ eşitliği kullanılırsa,

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} - \epsilon_0 \mu_0 \vec{\nabla} \frac{\partial V}{\partial t} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad (3.64)$$

eşitliği elde edilir. Eşitlikte düzenleme yapılırsa,

$$\left(\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J} \quad (3.65)$$

eşitliğine ulaşılır. Eşitlik (3.65), $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ Lorenz eşitliği seçilerek yazılırsa,

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \quad (3.66)$$

eşitliğine ulaşılır.

Eşitlik (3.61) ve (3.66); Eşitlik (3.67)'deki d'Alembert ifadesi

$$\square^2 = \vec{\nabla}^2 - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (3.67)$$

kullanılarak gösterilirse,

$$\square^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad (3.68)$$

ve

$$\square^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.69)$$

eşitlikleri elde edilir. 4-boyutlu uzayda d'Alembert operatörü Laplasyen operatörünün görevini üstlenir [10].

3.6. Lorentz Kuvveti

Lorentz kuvvet yasası, uzayda belirli bir elektrik ve manyetik alan etkisi altında bulunan bir yüke etkiyen toplam kuvveti açıklar. Elektrik ve manyetik alanların etkisiyle $\vec{v}$ hızıyla hareket eden bir q yüküne bir kuvvet etki eder. Etkiyen bu kuvvete Lorentz Kuvveti denir. Lorentz Kuvveti,

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (3.70)$$

eşitliği ile ifade edilir. Eşitlik (3.70) ortak q parantezine alınır,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.71)$$

eşitliği elde edilir.

Lorentz Kuvvetinin Potansiyel ile İfadesi

Lorentz kuvveti $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ eşitliği, Newton'un hareket yasası $F = m\vec{a}$ cinsinden yazılırsa,

$$\vec{F} = m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.72)$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik (3.72)'de Newton'un hareket yasası momentum $\vec{p}$ cinsinden yazılacak olursa,

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.73)$$

eşitliğine ulaşılır.

Son olarak eşitlik (3.73)'de elektrik ve manyetik alan ifadeleri potansiyeller cinsinden yazılırsa,

$$\vec{F} = m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{\vartheta} \times \vec{B}) = q\left(-\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\vartheta} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})\right) \quad (3.74)$$

eşitliğine ulaşılır. Elde edilen bu eşitlikte $\vec{\vartheta} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$ ifadesi indirgenecek olursa,

$$\vec{\nabla}(\vec{\vartheta} \cdot \vec{A}) = \vec{\vartheta} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{\vartheta} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \quad (3.75)$$

özelliklerinden yararlanarak, $\vec{\vartheta} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$ ifadesi

$$\vec{\vartheta} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\vartheta} \cdot \vec{A}) - (\vec{\vartheta} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \quad (3.76)$$

eşitliği olarak yazılabilir. Parçacığın hızı sadece zamanın fonksiyonu olup konumdan bağımsız olduğundan, Eşitlik (3.74), Eşitlik (3.76) kullanılarak,

$$F = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt} = -q\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{\vartheta} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{\nabla}(V - \vec{\vartheta} \cdot \vec{A})\right) \quad (3.77)$$

eşitliği ile yazılabilir. Eşitlik (3.78)'da ki Taylor açılımı,

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{\vartheta} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \quad (3.78)$$

kullanılarak, Eşitlik (3.77),

$$\frac{d}{dt}(\vec{p} + q\vec{A}) = -\vec{\nabla}(q(V - \vec{\vartheta} \cdot \vec{A})) \quad (3.79)$$

eşitliği olarak bulunur.

Bu eşitlikten iki sonuç çıkarılabilir. Birincisi, potansiyelin kendisi zamana bağlı olarak değişmektedir. İkincisi ise, parçacık uzayda yeni bir konuma geçtiğinde potansiyel de uzayda değişmiş olur [10].

Pointing Teoremi

Pointing Teoremi, elektromanyetik alanların enerji akısını tanımlar. Işığın (elektromanyetik dalganın) birim zamanda birim yüzeyden iletildiği enerji akısının bir ölçüsüdür. Pointing Teoremine göre, elektromanyetik kuvvetlerin yaptığı iş, alanlarda depolanan enerjideki azalma ile yüzeyden kaybedilen enerjinin toplamına eşit olur.

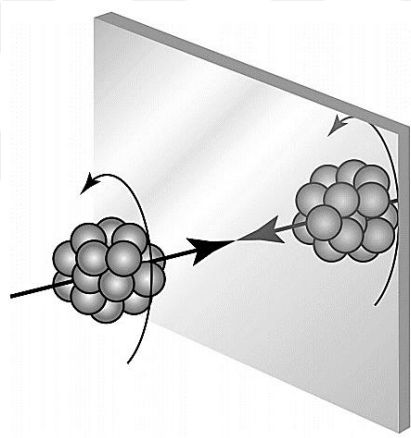
Pointing Teoremi,

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (3.80)$$

eşitliği ile gösterilir.

4. ELEKTROMANYETİZMANIN CLIFFORD CEBİRİ İLE İFADESİ

3-boyutlu uzayda $\vec{E} = E_1\hat{e}_1 + E_2\hat{e}_2 + E_3\hat{e}_3$ elektrik alan ve $\vec{B} = B_1\hat{e}_1 + B_2\hat{e}_2 + B_3\hat{e}_3$ manyetik alan vektör gösterimleri makul bir gösterimdir. Fakat daha derinlemesine bir araştırma yapıldığında manyetik alanın elektrik alandan farklı dönüşümlere sahip olduğu görülür. Bu araştırmalar elektrik alanın kutupsal bir vektör, manyetik alanın ise eksenel bir vektör olduğunu söyler. Kutupsal ve eksenel vektör ayırımı Şekil 4.1’de gösterilmiştir.



Şekil 4.1. Kutupsal ve eksenel vektörler arasındaki ayrımı

Şekil 4.1’de ayna görüntüsüne bakıldığında, eksenel vektör yani manyetik alan yönünün aynı kaldığı, değişmediği fakat kutupsal vektörün yani elektrik alan yönünün ters olduğu görülür. Bilinen Heaviside vektör gösterimi bir vektörün eksenel mi yoksa kutupsal mı olduğunu söylemez. Bu da Heaviside vektör gösteriminin belirsizliğini ortaya koyar. Bu belirsizlik geometrik cebir ile çözülebilir. Geometrik cebirde elektrik alan bir vektör olarak gösterilirken, manyetik alan bivektör (multivektör) olarak gösterilerek belirsizlik ortadan kaldırılır.

Sabit bir iletkeni göre hareket eden mıknatıs ile aynı iletkenin sabit mıknatısa göre hareket etmesiyle açığa çıkan akım her iki durumda da aynıdır. Bununla birlikte mıknatısın sabit olduğu durumda yalnızca manyetik alan mevcutken, Faraday Yasası ile

hareket eden bir mıknatıs için manyetik alanın yanında elektrik alanının da mevcut olduğu görülür. Bu nedenle elektrik ve manyetik alan vektörleri bağımsız iki vektör olarak yazılmaktansa, göreceli harekete bağlı olarak tutarlı tek bir eşitlik olarak yazılabilir. Bu eşitlik, $\vec{E} + ic\vec{B}$ ifadesi ile gösterilir [11]. Bu ifadeden de yola çıkarak Maxwell Denklemleri tek bir eşitlikte ifade etmek mümkündür. Maxwell Denklemlerinin tek bir eşitliğe indirgenmesi Maxwell Denklemlerinin Clifford Cebiri ile ifadesi bölümünde ayrıntılı bir şekilde ele alınacaktır. Bu sayede geometrik cebirin ne kadar kullanışlı bir cebir olduğu görülmüş olacaktır. Çizelge 4.1’de elektromanyetizma eşitliklerinin Clifford Cebiri ile ifadesine yer verilmiştir.

Çizelge 4.1. Elektromanyetizma eşitliklerinin Geometrik Cebir ile gösterimleri.

	Elektromanyetizma İfadesi	Geometrik Cebir İfadesi
Lorentz Kuvveti	$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{\partial} \times \vec{E})$	$\mathbf{F} = \vec{E} + ic\vec{B}$
Maxwell Denklemleri	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$ $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$ $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\square \mathbf{F} = c\mu_0 \mathbf{J}$
Akım Yoğunluğu	$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$	$\square \cdot \mathbf{J} = 0$
Potansiyel İfadesi	$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$	$\mathbf{F} = \square \mathbf{A}$

4.1. Elektrik Alanın Clifford Cebiri İle İfadesi

Elektrik alanın $\vec{E}$, $\vec{\nabla}$ operatörü ile geometrik çarpımı:

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \quad (4.1)$$

dir. Burada, $\vec{a} \wedge \vec{b} = i(\vec{a} \times \vec{b})$ eşitliği yani Eşitlik (2.141) kullanılırsa,

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + i \vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (4.2)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlikte eşitliğin sağ tarafına elektrik alanlar için Gauss Yasası $\left(\frac{\rho}{\epsilon_0}\right)$ ve Faraday Yasası $\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$ eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} + i \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \quad (4.3)$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik (4.3)'de manyetik alan vektörü, bileşenleri cinsinden yazılacak olursa,

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} + i \left(-\frac{\partial}{\partial t} (B_1 \hat{e}_1 + B_2 \hat{e}_2 + B_3 \hat{e}_3)\right) \quad (4.4)$$

eşitliğine ulaşılır. Eşitlik (4.4)'de gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} + i \left(-\frac{\partial}{\partial t} (B_1 \hat{e}_1 + B_2 \hat{e}_2 + B_3 \hat{e}_3)\right) \quad (4.5)$$

eşitliğine ulaşılır. Eşitlik (2.142)'deki $i = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$ ifadesi de yerine yazılıp yeniden bir düzenleme yapılırsa,

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \left(\frac{\partial}{\partial t} (B_1 \hat{e}_1 + B_2 \hat{e}_2 + B_3 \hat{e}_3)\right) \quad (4.6)$$

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} (B_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 - B_2 \hat{e}_1 \hat{e}_2 + B_3 \hat{e}_1 \hat{e}_2) \quad (4.7)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik Maxwell Denklemleri kullanılarak elektrik alan ifadesinin Clifford Cebiri ile gösterimidir.

Elektrik alan ifadesinin Clifford Cebiri ile gösterimi Maxwell Denklemleri kullanılmadan yapılırsa,

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \quad (4.8)$$

$$\vec{\nabla} \vec{E} = (\partial_x E_1 + \partial_y E_2 + \partial_z E_3) + i[\hat{e}_1(\partial_y E_3 - \partial_z E_2) - \hat{e}_2(\partial_x E_3 - \partial_z E_1) + \hat{e}_3(\partial_x E_2 - \partial_y E_1)] \quad (4.9)$$

$$\vec{\nabla}\vec{E} = (\partial_x E_1 + \partial_y E_2 + \partial_z E_3) + (\partial_y E_3 - \partial_z E_2)\hat{e}_2\hat{e}_3 + (\partial_x E_3 - \partial_z E_1)\hat{e}_1\hat{e}_3 + (\partial_x E_2 - \partial_y E_1)\hat{e}_1\hat{e}_2 \quad (4.10)$$

eşitliği elde edilir.

4.2. Elektrik Akımının Clifford Cebiri ile İfadesi

Elektrik akımı I 'nın, $\vec{\nabla}$ operatörü ile geometrik çarpımı:

$$\vec{\nabla}I = \vec{\nabla} \cdot I + \vec{\nabla} \wedge I \quad (4.11)$$

dir. Bu eşitlikte $I = \frac{q}{t}$ ifadesi yerine yazılacak olursa,

$$\vec{\nabla}I = \vec{\nabla} \cdot \frac{q}{t} + \vec{\nabla} \wedge \frac{q}{t} \quad (4.12)$$

$$\vec{\nabla}I = \vec{\nabla} \cdot \frac{q}{t} + i\vec{\nabla} \times \frac{q}{t} \quad (4.13)$$

eşitliği elde edilir.

4.3. Lorentz Kuvvetinin Clifford Cebiri ile İfadesi

Lorentz Kuvvet Yasası, Eşitlik (3.70)'de ifade edildiği gibi $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{\vartheta} \times \vec{B}$ eşitliği ile gösterilir. Bu eşitlik ortak q parantezine alınır Eşitlik (3.71)'de ifade edildiği gibi $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{\vartheta} \times \vec{B})$ eşitliği ile gösterilir. Bu eşitlikteki $\vec{\vartheta} \times \vec{B}$ vektörel çarpımı manyetik alanın varlığından ekstenel vektörden ziyade polar bir vektördür. Çünkü manyetik alan vektör değil bivektör (multivektör) dür [11]. Bundan dolayı $\vec{\vartheta} \times \vec{B}$ vektörel çarpımı $i\vec{B} \wedge \vec{\vartheta}$ wedge çarpımı şeklinde ifade edilir. O halde Lorentz kuvveti,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + i\vec{B} \wedge \vec{\vartheta}) \quad (4.14)$$

dir. Bu eşitlik ile manyetik alan vektörünün doğrusal bir vektörden ziyade bir alan ifade ettiği kanıtlanmış olur. Manyetik alan, birim yükün birim hızının boyutlarına sahip olduğundan, manyetik alan ışık hızı ile çarpılarak,

$$\mathbf{F} = \vec{E} + ic\vec{B} \quad (4.15)$$

eşitliği elde edilir.

3-boyutlu uzayda bilinen elektrik alan eşitliği $\vec{E} = E_1\hat{e}_1 + E_2\hat{e}_2 + E_3\hat{e}_3$, ekstenel manyetik alan vektörü için yetersiz kalır. Clifford Cebiri ile bu yetersizlik ortadan kalkar.

Clifford Cebiri, temel koordinat sistemini genişleterek vektörleri, multivektör olarak yazmaya imkân sağlar. Bundan dolayı Eşitlik (4.15)'deki $\mathbf{F}$ artık bir vektör değil multivektördür.

4.4. Manyetik Alanın Clifford Cebiri ile İfadesi

Geometrik cebirde, manyetik alan vektör olarak değil bivektör olarak ifade edilir. Neden bivektör olarak ifade edildiğinin cevabı ise, manyetik alanın eksenel bir vektör olmasından dolayı geleneksel vektör gösterimindeki eksikliği ortadan kaldırmasıdır. Manyetik alanın bivektör eşitliği,

$$B_1\hat{e}_2\hat{e}_3 + B_2\hat{e}_3\hat{e}_1 + B_3\hat{e}_1\hat{e}_2 = \hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3(B_1\hat{e}_1 + B_2\hat{e}_2 + B_3\hat{e}_3) = i\vec{B} \quad (4.16)$$

dir.

3-boyutlu uzayda manyetik alan $\vec{B} = B_1\hat{e}_1 + B_2\hat{e}_2 + B_3\hat{e}_3$ vektörü ile gösterilir. Bu manyetik alan ifadesinin $\vec{V}$ ile Clifford Cebir çarpımı yapılacak olursa,

$$\vec{V}\vec{B} = \vec{V} \cdot \vec{B} + \vec{V}\wedge\vec{B} \quad (4.17)$$

eşitliği elde edilir. Burada $\vec{a}\wedge\vec{b} = i\vec{a} \times \vec{b}$ eşitliği yani eşitlik (2.141) kullanılırsa,

$$\vec{V}\vec{B} = \vec{V} \cdot \vec{B} + i(\vec{V} \times \vec{B}) \quad (4.18)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte eşitliğin sağ tarafına manyetik alanlar için Gauss Yasası ($\vec{V} \cdot \vec{B} = 0$) ve Amper Yasası ($\mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$) eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$\vec{V}\vec{B} = 0 + i\left(\mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \quad (4.19)$$

eşitliğine ulaşılır. Eşitlikte gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\vec{V}\vec{B} = i\mu_0\vec{J} + i\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.20)$$

eşitliği elde edilir. Eşitlikte elektrik alan ve akım yoğunluğu vektörleri bileşenleri cinsinden yazılırsa.

$$\vec{V}\vec{B} = i\mu_0(J_1\hat{e}_1 + J_2\hat{e}_2 + J_3\hat{e}_3) + i\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(E_1\hat{e}_1 + E_2\hat{e}_2 + E_3\hat{e}_3) \quad (4.21)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlikte, Eşitlik (2.142)'deki $i = \hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ eşitliği yerine yazılırsa,

$$\vec{\nabla} \vec{B} = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \mu_0 (J_1 \hat{e}_1 + J_2 \hat{e}_2 + J_3 \hat{e}_3) + \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (E_1 \hat{e}_1 + E_2 \hat{e}_2 + E_3 \hat{e}_3) \quad (4.22)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\vec{\nabla} \vec{B} = \mu_0 (J_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 - J_2 \hat{e}_1 \hat{e}_3 + J_3 \hat{e}_1 \hat{e}_2) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (E_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 - E_2 \hat{e}_1 \hat{e}_3 + E_3 \hat{e}_1 \hat{e}_2) \quad (4.23)$$

eşitliğine ulaşılır. $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$ eşitliği, Eşitlik (4.23)'de yerine yazılacak olursa,

$$\vec{\nabla} \vec{B} = \mu_0 (J_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 - J_2 \hat{e}_1 \hat{e}_3 + J_3 \hat{e}_1 \hat{e}_2) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (E_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 - E_2 \hat{e}_1 \hat{e}_3 + E_3 \hat{e}_1 \hat{e}_2) \quad (4.23)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik Maxwell Denklemleri kullanılarak manyetik alan ifadesinin Clifford Cebiri ile gösterimidir.

Manyetik alan ifadesinin Clifford Cebiri ile gösterimi Maxwell Denklemleri kullanılmadan yapılacaktır.

$$\vec{\nabla} \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} + \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \quad (4.24)$$

$$\vec{\nabla} \vec{B} = (\partial_x B_1 + \partial_y B_2 + \partial_z B_3) + i[\hat{e}_1(\partial_y B_3 - \partial_z B_2) - \hat{e}_2(\partial_x B_3 - \partial_z B_1) + \hat{e}_3(\partial_x B_2 - \partial_y B_1)] \quad (4.25)$$

$$\vec{\nabla} \vec{B} = (\partial_x B_1 + \partial_y B_2 + \partial_z B_3) + (\partial_y B_3 - \partial_z B_2) \hat{e}_2 \hat{e}_3 + (\partial_x B_3 - \partial_z B_1) \hat{e}_1 \hat{e}_3 + (\partial_x B_2 - \partial_y B_1) \hat{e}_1 \hat{e}_2 \quad (4.26)$$

eşitliği elde edilir.

Manyetik alanın Eşitlik (4.24)'deki $i\vec{B}$ şeklindeki bivektör gösterimi elektromanyetik alanın $\vec{F} = \vec{E} + ic\vec{B}$ eşitliği ile gösterimine olanak sağlar. Manyetik alanın ışık hızı c ile çarpılmasının ana nedeni, manyetik alanın birim hıza göre birim yükün kuvvet boyutlarına sahip olmasıdır. Artık elektromanyetizmada eksenel vektörler bivektör olarak ifade edilebilir.

Bilinen formülü ile Pointing vektörü $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$ eşitliği ile ifade edilir. Lorentz kuvvetinde de olduğu gibi eşitlikteki manyetik alanın varlığından dolayı Pointing vektörü geometrik cebirde,

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} i\vec{B} \wedge \vec{E} \quad (4.27)$$

eşitliği ile gösterilir.

4.5. Potansiyelin Clifford Cebiri ile İfadesi

Elektrik alan potansiyeli $E = -\vec{\nabla}V$ ve manyetik alan vektör potansiyeli $B = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ eşitlikleri ile göstermişti. Potansiyel formülasyonunun geometrik cebir ifadesi ele alınacak olursa, bu potansiyellerin tek bir formda multivektör olarak ifade edilmesi gerekir. Bu multivektör,

$$\mathbf{A} = V - c\vec{A} \quad (4.28)$$

eşitliği ile gösterilir.

Eşitlik (4.15) $\mathbf{F} = \vec{E} + ic\vec{B}$ eşitliğinde elektrik potansiyel $(-\vec{\nabla}V)$ ve manyetik vektör potansiyeli $(\vec{\nabla} \times \vec{A})$ yerine yazılacak olursa,

$$\mathbf{F} = -\vec{\nabla}V + ic(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad (4.29)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik, Eşitlik (4.44) ve 4-gradyent gösterimi ile yazılacak olursa,

$$\mathbf{F} = \square \mathbf{A} \quad (4.30)$$

eşitliği elde edilir.

Eşitlik (4.30)'un geometrik çarpımı yapılacak olursa,

$$\mathbf{F} = \square \mathbf{A} = \square \cdot \mathbf{A} + \square \wedge \mathbf{A} \quad (4.31)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $\square \cdot \mathbf{A} = 0$ olduğundan,

$$\mathbf{F} = \square \mathbf{A} = \square \wedge \mathbf{A}. \quad (4.32)$$

dir. Buradan,

$$\mathbf{F} = \square \mathbf{A} \quad (4.33)$$

eşitliğine ulaşılır.

$$\mathbf{F} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla} \right) (V - c\vec{A}) \quad (4.34)$$

$$\mathbf{F} = c \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t V \right) + c\vec{\nabla} \wedge \vec{A} - \vec{\nabla}V - \partial_t \vec{A} \quad (4.35)$$

$$\mathbf{F} = c \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t V \right) + ic \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{\nabla} V - \partial_t \vec{A} \quad (4.36)$$

$$\mathbf{F} = c\lambda - \vec{\nabla} V - \partial_t \vec{A} + ic \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (4.37)$$

$$\mathbf{F} = c\lambda + \vec{E} + ic \vec{B} \quad (4.38)$$

eşitliğine ulaşılır. Eşitlikte $\lambda = \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ Lorenz göstergesidir. Ayrıca, $\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \partial_t \vec{A}$ ve $i\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = i\vec{\nabla} \times \vec{A}$ dir.

$$- \quad \lambda = 0 \text{ ise, } \mathbf{F} = \vec{E} + ic \vec{B} \text{ olur.} \quad (4.39)$$

$$- \quad \lambda \neq 0 \text{ ise, } \square^2 \mathbf{A} = c\mu_0 \mathbf{J} = \square \mathbf{F} \text{ olur.} \quad (4.40)$$

$$\square \mathbf{F} = \square(\vec{E} + ic \vec{B}) = \square^2 \mathbf{A} = \square^2 (V - c \vec{A}) = c\mu_0 \mathbf{J} \quad (4.41)$$

$$\mathbf{A} = [V - c(A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3)] = V - c \vec{A} \text{ dir.} \quad (4.42)$$

$$\mathbf{J} = c\rho - \vec{j} \text{ dir.} \quad (4.43)$$

4.6. Manyetik Akının Clifford Cebiri İle İfadesi

Manyetik akı $\phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A}$ eşitliğinin $\vec{\nabla}$ operatörü ile Clifford çarpımı yapılırsa,

$$\vec{\nabla} \phi_B = \vec{\nabla} \cdot \phi_B + \vec{\nabla} \wedge \phi_B \quad (4.44)$$

$$\vec{\nabla} \phi_B = \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{A}) + \vec{\nabla} \wedge (\vec{B} \cdot \vec{A}) \quad (4.45)$$

$$\vec{\nabla} \phi_B = \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{A}) + i\vec{\nabla} \times (\vec{B} \cdot \vec{A}) \quad (4.46)$$

eşitliği elde edilir.

5. MAXWELL DENKLEMLERİ VE CLIFFORD CEBİRİ İLE İFADESİ

Maxwell Denklemleri, Lorentz Kuvveti Yasası ile birlikte klasik elektrodinamik, klasik optik ve elektrik devreleri için başlangıç noktası oluşturan bir dizi kısmi diferansiyel denklemlerden meydana gelmektedir. Elektromanyetik teoremin temelini oluşturan Maxwell Denklemleri elektrik ve manyetik alanlar arasındaki ilişkiyi ifade eden diferansiyel denklemlerdir. Bu denklem sistemleri elektrik ve manyetik alan ifadelerinin birbirinden ayrı düşünölemeyeceğinin bir kanıtıdır.

James Clerk Maxwell, maddenin elektrik ve manyetik alanlardaki etkileşimini incelemesi sonucunda kendi adıyla adlandırdığı dört adet denklem ortaya koyar. Bu denklemlerin hem integral hem de diferansiyel formları bulunmaktadır. Maxwell Denklemleri'nin integral ve diferansiyel formları aynı anlamları taşımaktadır. Farklı form olması farklı anlam içerdiğini düşündürmemelidir. Diferansiyel formları, integral formlarından yola çıkılarak elde edilir.

5.1. Maxwell Denklemlerinin Elde Edilmesi

Elektrik Alan için Gauss Yasası

Gauss Yasası, Carl Friedrich Gauss tarafından keşfedilmiş olup elektrik alanın hesaplanmasında kullanılan bir yasadır. Gauss Yasası sayesinde elektrik yükü ile elektrik alan arasındaki bağıntı hakkında daha kolay bir anlayışa sahip olunur.

Gauss Yasası, kapalı bir yüzeyden geçen elektrik akısının, bu kapalı yüzeyin içindeki yüklerle orantılı olduğunu söyler. Herhangi kapalı bir yüzeyden geçen toplam elektrik akısının, bu yüzey içinde kalan toplam yükün ϵ_0 'a bölümüne eşit olduğunu ifade etmektedir. Kısacası; kapalı bir yüzeyin içindeki toplam yük, yüzey içindeki elektrik alan çizgilerinin sayısı ile orantılıdır. Aynı zamanda alanların yüklerden nasıl oluştuğunu açıklamaktadır. Gauss Yasası,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (5.1)$$

eşitliği ile gösterilir. Bu eşitlik, elektrik alanlar için Gauss Yasası'nın integral formudur. Gauss Yasası, kapalı tüm yüzeyler ve tüm yük dağılımları için geçerlidir. Burada; $\vec{E}$ elektrik alan, $\vec{A}$ yüzey alanı, q yük, ϵ_0 boş uzayın elektriksel geçirgenlik sabitidir. Eğer bu eşitliğe diverjans teoremi uygulanırsa,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \cdot dV = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (5.2)$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik (5.2)'de; $q = \int \rho dV$ eşitliği yerine yazılırsa,

$$\int (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \cdot dV = \frac{\int \rho dV}{\epsilon_0} \quad (5.3)$$

eşitliği elde edilir. Buradan da,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.4)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik elektrik alanlar için Gauss Yasası'nın diferansiyel formudur. Böylece Maxwell Denklemleri'nin ilki elde edilir.

Manyetik alanlar için Gauss Yasası

Herhangi kapalı bir yüzey boyunca manyetik akının sıfır olduğunu söylemektedir. Yani, kapalı bir yüzeyin hacmine giren manyetik alan çizgilerinin sayısı hacmi terk eden manyetik alan çizgilerinin sayısına eşittir. Bu ise, doğada manyetik kutupların var olamayacağını bir kanıttır. Bu nedenle de manyetik alan çizgileri asla kesişmez ve sonlanmaz, daima kapalı döngüler oluşturur. Gauss Yasası,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (5.5)$$

eşitliği ile gösterilir. Bu eşitlik, manyetik alanlar için Gauss Yasası'nın integral formudur. Burada; $\vec{B}$ manyetik alan, $\vec{A}$ yüzey alan ifadesidir. Eğer bu eşitliğe diverjans teoremi uygulanırsa,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.6)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik, manyetik alanlar için Gauss Yasası'nın diferansiyel formudur. Böylece Maxwell Denklemleri'nin ikincisi elde edilir.

Faraday Yasası

Faraday'ın manyetik indüksiyon yasasının bir ifadesidir. Yani manyetizma tarafından üretilen elektriğin miktarı, manyetik kuvvetin artma veya azalma hızına eşit olmaktadır. Çok hızlı bir şekilde değişen bir manyetik kuvvet çok miktarda elektrik, yavaşça değişen bir manyetik kuvvet ise çok küçük bir miktar elektrik üretmektedir. Zaman içinde sabit kalan bir manyetik kuvvet ise hiç elektrik üretmez.

Faraday Yasası, herhangi kapalı bir yol boyunca elektrik alanın çizgi integralinin, kapalı yol boyunca çevrelenen herhangi bir yüzey alanından geçen manyetik akının zamanla değiştiğini ifade etmektedir. Yani, zamanla değişen manyetik alanlar bir elektrik alan oluştururlar.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (5.7)$$

Bu eşitlik, Faraday Yasası'nın integral formudur. Burada; $\vec{E}$ elektrik alanı, $\vec{l}$ uzunluk, Φ_B manyetik akı, t zaman ifadesidir. Bu ifadeye Stokes Teoremi uygulanırsa,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) d\vec{A} \quad (5.8)$$

ve

$$-\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (5.9)$$

eşitlikleri elde edilir. Eşitlik (4.8) ve eşitlik (4.9) eşitliklerinin birleşiminden,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.10)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik Faraday Yasası'nın diferansiyel formudur.

Böylece Maxwell Denklemleri'nin üçüncüsü elde edilir.

Ampere Yasası

Ampere Yasası, elektrik akımlarının ve zamanla değişen elektrik alanlarının bir manyetik alan ürettiğini ifade eder. Manyetik alanın oluşması için elektrik alanın zamana bağlı değişmesi ve akımın varlığı gerekmektedir.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I \quad (5.11)$$

Bu eşitlik Ampere Yasası'nın integral formudur. Burada; $\vec{B}$ manyetik alan, l zaman, μ_0 boş uzayın manyetik geçirgenlik sabiti, I akım ifadesidir. Denklem (4.11)'de $I = \int \vec{j} \cdot d\vec{A}$ ifadesi yerine yazılırsa,

$$\oint \vec{j} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{A} \quad (5.12)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik, Ampere Yasası'nın integral formudur. Burada; $\vec{j}$ elektrik akım yoğunluğudur. Bu eşitliğe Stokes Teoremi uygulanırsa,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{B}) d\vec{A} = \mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{A} \quad (5.13)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.14)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik Ampere Yasası'nın diferansiyel formudur. Böylece Maxwell Denklemleri'nin dördüncüsü de elde edilir.

Çizelge 5.1. *Maxwell Denklemlerinin integral ve diferansiyel formları*

Maxwell Denklemleri	İntegral Gösterimi	Diferansiyel Gösterimi
Elektrik Alan için Gauss Yasası	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Manyetik Alan için Gauss Yasası	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
Faraday Yasası	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Ampere Yasası	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\phi_E}{dt}$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Çizelge 5.2. *Maxwell Denklemlerinde kullanılan semboller, büyüklükler ve birimler*

Sembol	Büyüklik	Birim
q	Elektriksel Yük	Coulomb (C)
ϕ_E	Elektriksel akı	$N \cdot m^2 / C$
ϕ_B	Manyetik akı	$T \cdot m^2$ veya Wb
$\vec{E}$	Elektrik alan vektörü	V/m veya N/C
$\vec{B}$	Manyetik alan vektörü	<i>Tesla (T)</i> veya Wb/m^2
ρ	Elektrik yük yoğunluğu	C/m^3
$\vec{J}$	Elektrik akım yoğunluğu	A/m^2
ϵ_0	Boş uzayın elektriksel geçirgenlik sabiti	F/m veya $C/N \cdot m^2$
μ_0	Boş uzayın manyetik geçirgenlik sabiti	H/m veya N/A^2
$\vec{A}$	Yüzey alanı	m^2
t	Zaman	Saniye (s)
$\vec{l}$	Uzunluk	Metre (m)

5.2. Maxwell Denklemlerinin Clifford Cebiri ile İfadesi

Geometrik cebir ile birlikte Maxwell Denklemlerinin tek bir eşitlikte yazımı mevcuttur. 1966 yılında Hestenes, dört Maxwell Denklemlerini tek bir eşitlikte toplar. Bu eşitlik:

$$\left(\frac{1}{c}\partial_t + \vec{\nabla}\right) \mathbf{F} = c\mu_0 \mathbf{J} \text{ dir.} \quad (5.15)$$

dir. Burada; $\mathbf{F}$ ve $\mathbf{J}$ ifadeleri birer multivektördür.

$$\mathbf{F} = \vec{E} + ic\vec{B} \quad (5.16)$$

ve

$$\mathbf{J} = c\rho - \vec{j} \text{ dir.} \quad (5.17)$$

Eşitlik (5.16) ve (5.17), Eşitlik (5.15)'de yerine yazılacak olursa,

$$\left(\frac{1}{c}\partial_t + \vec{\nabla}\right) (\vec{E} + ic\vec{B}) = c\mu_0 (c\rho - \vec{j}) \quad (5.18)$$

eşitliği elde edilir.

Eşitlik (5.18)'i elde etmek için öncelikle elektrik ve manyetik alan ifadelerinin $\vec{\nabla}$ ile geometrik çarpımları yapılacak olursa,

İlk olarak elektrik alan geometrik cebir ile ifade edilirse,

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + i(\vec{\nabla} \times \vec{E}) \quad (5.19)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ ve $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ Maxwell Denklemleri yerine yazılacak olursa,

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} + i\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \quad (5.20)$$

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - i\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.21)$$

$$\vec{\nabla}\vec{E} + i\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.22)$$

eşitliği elde edilir.

Manyetik alan geometrik cebir ile ifade edilirse,

$$\vec{\nabla}\vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} + i(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (5.23)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ ve $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ Maxwell Denklemleri yerine yazılacak olursa,

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 + i\left(\mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \quad (5.24)$$

$$\vec{\nabla}\vec{B} = i\mu_0 \vec{J} + i\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.25)$$

$$\vec{\nabla}\vec{B} - i\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\mu_0 \vec{J} \quad (5.26)$$

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}, \text{dır. O halde,}$$

$$\vec{\nabla}\vec{B} - \frac{i}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\mu_0 \vec{J} \quad (5.27)$$

eşitliğine ulaşılır. Ulaşılan bu eşitlik ic ile çarpılırsa,

$$ic\vec{\nabla}\vec{B} + \frac{i}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -c\mu_0 \vec{J} \quad (5.28)$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen Eşitlik (5.22) $\vec{\nabla}\vec{E} + i\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ ve Eşitlik (5.28) $ic\vec{\nabla}\vec{B} + \frac{i}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -c\mu_0 \vec{J}$ taraf tarafa toplanırsa,

$$\vec{\nabla}\vec{E} + i\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + ic\vec{\nabla}\vec{B} + \frac{i}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - c\mu_0 \vec{J} \quad (5.29)$$

eşitliği elde edilir. Eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılsa,

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla}\right) (\vec{E} + ic\vec{B}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - c\mu_0 \vec{J} \quad (5.30)$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlik dört Maxwell Denklemlerinin tek bir eşitlik ile ifade edilmiş halidir. Elde edilen bu eşitlik 4-gradyent operatörü ile ifade edilirse bu eşitlik,

$$\square \mathbf{F} = c\mu_0 \mathbf{J} \quad (5.31)$$

eşitliği ile yazılır. Burada “ $\square$ ” 4-gradyent operatörüdür ve

$$\square = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla} \right) \text{ eşitliği ile gösterilir.} \quad (5.32)$$

Bu sembolün kare olmasının nedeni ise 4-boyutlu Minkowski uzayını temsil ediyor olmasıdır. Ayrıca $\mathbf{F}$ ve $\mathbf{J}$ multivektörleri ise,

$$\mathbf{F} = \vec{E} + ic\vec{B} = E_1\hat{e}_1 + E_2\hat{e}_2 + E_3\hat{e}_3 + ic(B_1\hat{e}_1 + B_2\hat{e}_2 + B_3\hat{e}_3) \quad (5.33)$$

$$\mathbf{J} = c\rho - \vec{J} = c\rho - (J_1\hat{e}_1 + J_2\hat{e}_2 + J_3\hat{e}_3) \text{ 'dir.} \quad (5.34)$$

dir.

Hestenes'in, Maxwell Denklemlerini tek bir eşitlik ile gösterdiğinden ve bu gösterimin, Eşitlik (5.30)'da $\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla} \right) (\vec{E} + ic\vec{B}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} - c\mu_0\vec{J}$ şeklinde ifade edildiğinden bahsedildi.

Bu gösterimde, $\vec{\nabla} = \hat{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_3 \frac{\partial}{\partial z}$ eşitliğini, elektrik alan vektörü $\vec{E} = E_1\hat{e}_1 + E_2\hat{e}_2 + E_3\hat{e}_3$, manyetik alan vektörü $B = B_1\hat{e}_1 + B_2\hat{e}_2 + B_3\hat{e}_3$ ve elektriksel akım yoğunluğu vektörü $\vec{J} = J_1\hat{e}_1 + J_2\hat{e}_2 + J_3\hat{e}_3$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapıldığında, dört Maxwell Denklemleri elde edilir:

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \hat{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) (E_1\hat{e}_1 + E_2\hat{e}_2 + E_3\hat{e}_3 + ic(B_1\hat{e}_1 + B_2\hat{e}_2 + B_3\hat{e}_3)) = \frac{\rho}{\epsilon_0} - c\mu_0(J_1\hat{e}_1 + J_2\hat{e}_2 + J_3\hat{e}_3) \quad (5.35)$$

$i = \hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ eşitliği, Eşitlik (5.35)'de yerine yazılırsa,

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \hat{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) (E_1\hat{e}_1 + E_2\hat{e}_2 + E_3\hat{e}_3 + c\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3(B_1\hat{e}_1 + B_2\hat{e}_2 + B_3\hat{e}_3)) = \frac{\rho}{\epsilon_0} - c\mu_0(J_1\hat{e}_1 + J_2\hat{e}_2 + J_3\hat{e}_3) \quad (5.36)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlikte nokta çarpımlar ve vektörel çarpımlar tek bir eşitlikte toplanmıştır. Ayrıca 3-boyutlu öklidyen uzayının birim baz vektörleri $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ kullanılarak tek bir formda yazılmıştır. Bu eşitliğe dağılma özelliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \partial_t E_1 \hat{e}_1 + \frac{1}{c} \partial_t E_2 \hat{e}_2 + \frac{1}{c} \partial_t E_3 \hat{e}_3 + \partial_x E_1 \hat{e}_1 \hat{e}_1 + \partial_x E_2 \hat{e}_1 \hat{e}_2 + \partial_x E_3 \hat{e}_1 \hat{e}_3 + \partial_y E_1 \hat{e}_2 \hat{e}_1 + \\ & \partial_y E_2 \hat{e}_2 \hat{e}_2 + \partial_y E_3 \hat{e}_2 \hat{e}_3 + \partial_z E_1 \hat{e}_3 \hat{e}_1 + \partial_z E_2 \hat{e}_3 \hat{e}_2 + \partial_z E_3 \hat{e}_3 \hat{e}_3 + \partial_t B_1 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \partial_t B_2 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_2 + \partial_t B_3 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_3 + c \partial_x B_1 \hat{e}_1 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_1 + c \partial_x B_2 \hat{e}_1 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_2 + \\
& c \partial_x B_3 \hat{e}_1 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_3 + c \partial_y B_1 \hat{e}_2 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_1 + c \partial_y B_2 \hat{e}_2 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_2 + c \partial_y B_3 \hat{e}_2 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_3 + \\
& c \partial_z B_1 \hat{e}_3 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_1 + c \partial_z B_2 \hat{e}_3 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_2 + c \partial_z B_3 \hat{e}_3 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_3 = \frac{\rho}{\epsilon_0} - c \mu_0 J_1 \hat{e}_1 - c \mu_0 J_2 \hat{e}_2 - \\
& c \mu_0 J_3 \hat{e}_3
\end{aligned} \tag{5.37}$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen eşitlik (5.37)'ya $\hat{e}_i \hat{e}_i = 1$ ve $\hat{e}_i \hat{e}_j = -\hat{e}_j \hat{e}_i$ özellikleri uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{c} \partial_t E_1 \hat{e}_1 + \frac{1}{c} \partial_t E_2 \hat{e}_2 + \frac{1}{c} \partial_t E_3 \hat{e}_3 + \partial_x E_1 + \partial_x E_2 \hat{e}_1 \hat{e}_2 + \partial_x E_3 \hat{e}_1 \hat{e}_3 - \partial_y E_1 \hat{e}_1 \hat{e}_2 + \partial_y E_2 + \\
& \partial_y E_3 \hat{e}_2 \hat{e}_3 - \partial_z E_1 \hat{e}_1 \hat{e}_3 - \partial_z E_2 \hat{e}_2 \hat{e}_3 + \partial_z E_3 + \partial_t B_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 - \partial_t B_2 \hat{e}_1 \hat{e}_3 + \partial_t B_3 \hat{e}_1 \hat{e}_2 + \\
& c \partial_x B_1 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 - c \partial_x B_2 \hat{e}_3 + c \partial_x B_3 \hat{e}_2 + c \partial_y B_1 \hat{e}_3 + c \partial_y B_2 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 - c \partial_y B_3 \hat{e}_1 - \\
& c \partial_z B_1 \hat{e}_2 + c \partial_z B_2 \hat{e}_1 + c \partial_z B_3 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 = \frac{\rho}{\epsilon_0} - c \mu_0 J_1 \hat{e}_1 - c \mu_0 J_2 \hat{e}_2 - c \mu_0 J_3 \hat{e}_3
\end{aligned} \tag{5.38}$$

eşitliğine ulaşılır. Burada,

$$\hat{e}_2 \hat{e}_3 = i \hat{e}_1 \tag{5.39}$$

$$\hat{e}_1 \hat{e}_3 = -i \hat{e}_2 \tag{5.40}$$

$$\hat{e}_1 \hat{e}_2 = i \hat{e}_3 \tag{5.41}$$

eşitlikleri de yerine yazılarak yeniden bir düzenleme yapılırsa,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{c} \partial_t E_1 \hat{e}_1 + \frac{1}{c} \partial_t E_2 \hat{e}_2 + \frac{1}{c} \partial_t E_3 \hat{e}_3 + \partial_x E_1 + \partial_y E_2 + \partial_z E_3 + i \partial_x E_2 \hat{e}_3 - i \partial_x E_3 \hat{e}_2 - \\
& i \partial_y E_1 \hat{e}_3 + i \partial_y E_3 \hat{e}_1 + i \partial_z E_1 \hat{e}_2 - i \partial_z E_2 \hat{e}_1 + i \hat{e}_1 \partial_t B_1 + i \hat{e}_2 \partial_t B_2 + i \hat{e}_3 \partial_t B_3 + \\
& c \partial_x B_1 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 - c \partial_x B_2 \hat{e}_3 + c \partial_x B_3 \hat{e}_2 + c \partial_y B_1 \hat{e}_3 + c \partial_y B_2 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 - c \partial_y B_3 \hat{e}_1 - \\
& c \partial_z B_1 \hat{e}_2 + c \partial_z B_2 \hat{e}_1 + c \partial_z B_3 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 = \frac{\rho}{\epsilon_0} - c \mu_0 J_1 \hat{e}_1 - c \mu_0 J_2 \hat{e}_2 - c \mu_0 J_3 \hat{e}_3
\end{aligned} \tag{5.42}$$

eşitliğine ulaşılır.

Bu eşitlikteki $\partial_x E_1 + \partial_y E_2 + \partial_z E_3$ ifadesi $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ 'ye eşittir. O halde, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \partial_x E_1 + \partial_y E_2 + \partial_z E_3 = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ olur. Burada, Maxwell Denklemlerinin elektrik alan için Gauss Yasası olan $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ eşitliği doğrulanmış olur.

Eşitliğin geri kalan ifadesi yazılarak diğer Maxwell Denklemlerinin de çıkarımı yapılacaktır.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{c} \partial_t E_1 \hat{e}_1 + \frac{1}{c} \partial_t E_2 \hat{e}_2 + \frac{1}{c} \partial_t E_3 \hat{e}_3 + i \partial_x E_2 \hat{e}_3 - i \partial_x E_3 \hat{e}_2 - i \partial_y E_1 \hat{e}_3 + i \partial_y E_3 \hat{e}_1 + \\
& i \partial_z E_1 \hat{e}_2 - i \partial_z E_2 \hat{e}_1 + i \hat{e}_1 \partial_t B_1 + i \hat{e}_2 \partial_t B_2 + i \hat{e}_3 \partial_t B_3 + c \partial_x B_1 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 - c \partial_x B_2 \hat{e}_3 + \\
& c \partial_x B_3 \hat{e}_2 + c \partial_y B_1 \hat{e}_3 + c \partial_y B_2 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 - c \partial_y B_3 \hat{e}_1 - c \partial_z B_1 \hat{e}_2 + c \partial_z B_2 \hat{e}_1 + \\
& c \partial_z B_3 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 = -c \mu_0 J_1 \hat{e}_1 - c \mu_0 J_2 \hat{e}_2 - c \mu_0 J_3 \hat{e}_3
\end{aligned} \tag{5.43}$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik (5.43)'de elektrik alan bileşenleri $i\hat{e}_1, i\hat{e}_2, i\hat{e}_3$ ve manyetik alan bileşenleri $c\hat{e}_1, c\hat{e}_2, c\hat{e}_3$ ortak parantezine alınır,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{c} \partial_t E_1 \hat{e}_1 + \frac{1}{c} \partial_t E_2 \hat{e}_2 + \frac{1}{c} \partial_t E_3 \hat{e}_3 + i \hat{e}_1 (\partial_y E_3 - \partial_z E_2) - i \hat{e}_2 (\partial_x E_3 - \partial_z E_1) + \\
& i \hat{e}_3 (\partial_x E_2 - \partial_y E_1) + i \partial_t B_1 \hat{e}_1 + i \partial_t B_2 \hat{e}_2 + i \partial_t B_3 \hat{e}_3 + ic \partial_x B_1 + ic \partial_y B_2 + ic \partial_z B_3 + \\
& c \hat{e}_1 (\partial_z B_2 - \partial_y B_3) + c \hat{e}_2 (\partial_x B_3 - \partial_z B_1) + c \hat{e}_3 (\partial_y B_1 - \partial_x B_2) = -c \mu_0 J_1 \hat{e}_1 - c \mu_0 J_2 \hat{e}_2 - \\
& c \mu_0 J_3 \hat{e}_3
\end{aligned} \tag{5.44}$$

eşitliğine ulaşılır. Elde edilen (5.44) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{1}{c} \partial_t E_1 \hat{e}_1 + c \hat{e}_1 (\partial_z B_2 - \partial_y B_3) = -c \mu_0 J_1 \tag{5.45}$$

$$\frac{1}{c} \partial_t E_2 \hat{e}_2 + c \hat{e}_2 (\partial_x B_3 - \partial_z B_1) = -c \mu_0 J_2 \tag{5.46}$$

$$\frac{1}{c} \partial_t E_3 \hat{e}_3 + c \hat{e}_3 (\partial_y B_1 - \partial_x B_2) = -c \mu_0 J_3 \tag{5.47}$$

eşitliklerine ulaşılır.

Bu üç eşitliğin ortak çözümünden, Maxwell Denklemleri'nin Amper Yasası'nı $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} + \mu_0 \vec{J}$ verdiği bulunur.

Eşitlik (5.44)'de eşitliğin geri kalanı yazılacak olursa,

$$\begin{aligned}
& i \hat{e}_1 (\partial_y E_3 - \partial_z E_2) - i \hat{e}_2 (\partial_x E_3 - \partial_z E_1) + i \hat{e}_3 (\partial_x E_2 - \partial_y E_1) + i \partial_t B_1 \hat{e}_1 + i \partial_t B_2 \hat{e}_2 + \\
& i \partial_t B_3 \hat{e}_3 + ic \partial_x B_1 + ic \partial_y B_2 + ic \partial_z B_3 = 0
\end{aligned} \tag{5.48}$$

eşitliğine ulaşılır. Elde edilen eşitlikte $ic \partial_x B_1 + ic \partial_y B_2 + ic \partial_z B_3$ ifadesi ic parantezine alınıp, $i \partial_t B_1 \hat{e}_1 + i \partial_t B_2 \hat{e}_2 + i \partial_t B_3 \hat{e}_3$ ifadesi de eşitliğin diğer tarafına alınır,

$$\begin{aligned}
& i \hat{e}_1 (\partial_y E_3 - \partial_z E_2) - i \hat{e}_2 (\partial_x E_3 - \partial_z E_1) + i \hat{e}_3 (\partial_x E_2 - \partial_y E_1) + ic (\partial_x B_1 + \partial_y B_2 + \\
& \partial_z B_3) = i \partial_t B_1 \hat{e}_1 + i \partial_t B_2 \hat{e}_2 + i \partial_t B_3 \hat{e}_3
\end{aligned} \tag{5.49}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten,

$$i\partial_t B_1 \hat{e}_1 = i\hat{e}_1 (\partial_y E_3 - \partial_z E_2) \quad (5.50)$$

$$i\partial_t B_2 \hat{e}_2 = -i\hat{e}_2 (\partial_x E_3 - \partial_z E_1) \quad (5.51)$$

$$i\partial_t B_3 \hat{e}_3 = i\hat{e}_3 (\partial_x E_2 - \partial_y E_1) \quad (5.52)$$

eşitliklerine ulaşılır.

Bu eşitliklerin ortak çözümünden, Maxwell Denklemlerinin Faraday Yasası $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ eşitliğine ulaşılır.

Son olarak, eşitliğin geri kalanı yazılırsa,

$$ic(\partial_x B_1 + \partial_y B_2 + \partial_z B_3) = 0 \quad (5.53)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin de Maxwell Denklemleri'nin manyetik alan için Gauss Yasası $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ eşitliğini verdiği görülür.

Tüm bu işlemler sonucunda, Eşitlik (5.30) ve (5.31)'nin Maxwell Denklemleri'nin dördünü de türettiği görülür.

Eşitlik 5.31'in Clifford çarpımı yapılırsa,

$$\square \mathbf{F} = \square \cdot \mathbf{F} + \square \wedge \mathbf{F} = c\mu_0 \mathbf{J} \quad (5.54)$$

$$\square \cdot \mathbf{F} + \square \wedge \mathbf{F} = \mathbf{J}_e + i\mathbf{J}_m \quad (5.55)$$

eşitlikleri elde edilir. Eşitlik (5.55)'de, $\mathbf{J}_e$: Elektrik Akım Yoğunluğu $\mathbf{J}_m$: Manyetik Alan Yoğunluğu'dur. Eşitlikte vektör ve bivektör eşitlikleri ayrı yazılırsa,

$$\square \cdot \mathbf{F} = \mathbf{J}_e \quad (5.56)$$

$$\square \wedge \mathbf{F} = i\mathbf{J}_m \quad (5.57)$$

eşitliklerine ulaşılır. Bu eşitliklerde diverjans ve rotasyonel operatörlerinin arasındaki bağıntı kullanılarak,

$$(\square \wedge \mathbf{F})i = \square \cdot (i\mathbf{F}) \quad (5.58)$$

eşitliğine ulaşılır. Vektör ile skalarların değişme özelliği olmadığından,

$$\nabla \cdot (i\mathbf{F}) = \mathbf{J}_m \quad (5.59)$$

dir. Sonuç olarak,

$$\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot (i\mathbf{F}) \quad (5.60)$$

eşitliği elde edilir. [12].

Maxwell Denklemleri'nin, multivektörler cinsinden Eşitlik (5.30)'da $\left(\frac{1}{c}\partial_t + \vec{\nabla}\right)(\vec{E} + ic\vec{B}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} - c\mu_0\vec{J}$ tek bir eşitlik ile gösterildiğine değinildi. Bu eşitlik de 4-vektör gradyenti ile, Eşitlik (5.31)'de $\nabla\mathbf{F} = c\mu_0\mathbf{J}$ eşitliği ile gösterildi. Bu eşitlikler manyetik monopollerin varlığı olmadan ifade edildi. Manyetik monopollerin varlığı da eklenerek eşitliğin sağ tarafı multivektörler cinsinden düzenlenirse, Maxwell Denklemleri manyetik monopoller var sayılarak,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \rho^m \quad (5.61)$$

ve

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{J}^m \quad (5.62)$$

eşitlikleri ile gösterilir. Bu eşitlikler Maxwell Denklemleri'ne manyetik yüklerin de dahil edilmiş formudur. Burada, ρ^m manyetik yükü ve $\vec{J}^m$ ise manyetik yük akımını temsil eder. Eşitlik (5.30), Eşitlik (5.61) ve Eşitlik (5.62) ile düzenlenirse,

$$\left(\frac{1}{c}\partial_t + \vec{\nabla}\right)(\vec{E} + ic\vec{B}) = c\mu_0\left(c\rho - \vec{J} - \frac{i}{c}\vec{J}^m + i\rho^m\right) \quad (5.63)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik Maxwell Denklemleri'nin manyetik monopollerin de eklenmesiyle tek eşitlik ile gösterimidir.

6. LENZ YASASININ CLIFFORD CEBİRİ İLE İFADESİ

Micheal Faraday yaptığı deneylerle elektrik ve manyetizma arasındaki bağıntıya dikkat çekmeyi başarır. Faraday, hareket ve elektromanyetizmanın birbirine dönüşebileceğini gösterir.

Faraday Yasası, elektromanyetizmanın en temel ve önemli yasalarından biridir. Bu yasa, elektriksel makinelerin ve medikal alanın çoğunda uygulamaya sahiptir.

6.1. Lenz Yasası

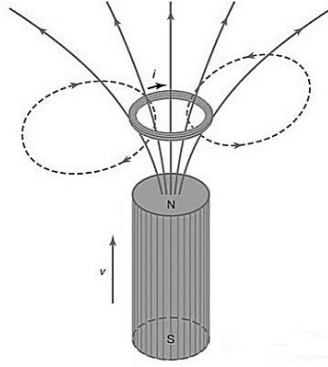
1831 yılında, Michael Faraday zamana bağlı olarak değişen manyetik alanın elektrik akım meydana getirebileceğini açıklamıştır. Bu kavram elektromanyetik indüksiyon olarak ifade edilmektedir. Sabit bir manyetik alan içerisinde indüklenme söz konusu olmaz. Fakat manyetik alan değişken ise o zaman manyetik akı da değişecektir. Manyetik akının değişmesi ile birlikte indüksiyon akımı meydana gelir. Bu indüksiyon akımı, başlangıçtaki manyetik akının değişimini önleme etkisi yapar. İndüksiyon akımının yönü ise manyetik akı değişime karşı koyacak şekilde oluşur. Yani, manyetik akı artıyorsa indüksiyon akımı onu azaltacak yönde, manyetik akı azalıyorsa indüksiyon akımı onu arttıracak yönde oluşur. Aslında bu, klasik fizikteki Newton yasalarından da bilinen etki-tepki olayına benzerdir. Lenz yasası, Faraday yasasındaki (-) işaretinin bir açıklamasıdır. Denilebilir ki, Lenz yasası enerji korunumunun bir sonucudur. Faraday yasasındaki (-) işaretinin de kaynağı bu enerji korunumudur.

Faraday Yasası,

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (6.1)$$

dir. Buradaki (-) işareti manyetik akı ve indüksiyon akımının zıtlığını ve indüklenen gerilimin yönünü gösterir.

Sonuç olarak, indüklenen akımın kendisini oluşturan manyetik alana zıt yönde bir alan oluşturduğunu Heinrich Lenz bulduğundan bu yasa “Lenz yasası” olarak adlandırılır. Kısacası, Lenz yasasına göre; değişen manyetik alan değişen akı oluşturur. Manyetik akının değişmesi ile birlikte indüksiyon akım meydana gelir. İndüksiyon akım ise, manyetik akıyı muhafaza etme eğilimindedir.



Şekil 6.1 Faraday ve Lenz yasasının gösterimi

6.2. Lenz Yasasının Clifford Cebiri İle İfadesi

Faraday Yasası $\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt}$ eşitliğinin $\vec{\nabla}$ ile geometrik çarpımı yapılacak olursa,

$$\vec{\nabla}\varepsilon = \vec{\nabla} \cdot \varepsilon + \vec{\nabla}\wedge\varepsilon \quad (6.2)$$

$$\vec{\nabla}\varepsilon = \vec{\nabla} \cdot \varepsilon + i(\vec{\nabla} \times \varepsilon) \quad (6.3)$$

$$\vec{\nabla}\varepsilon = \vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{d\phi_B}{dt}\right) + i\left(\vec{\nabla} \times \left(-\frac{d\phi_B}{dt}\right)\right) \quad (6.4)$$

$$\vec{\nabla}\varepsilon = -\vec{\nabla} \cdot \frac{d\phi_B}{dt} - i\left(\vec{\nabla} \times \left(\frac{d\phi_B}{dt}\right)\right) \quad (6.5)$$

$d\phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{A}$ akı ifadesi yerine yazılacak olursa,

$$\vec{\nabla}\varepsilon = -\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{B} \cdot d\vec{A}}{dt} - i\left(\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B} \cdot d\vec{A}}{dt}\right)\right) \quad (6.6)$$

eşitliği elde edilir.

7. SONUÇ

Clifford Cebiri, fiziğin ve matematiğin birçok alanında kullanılan önemli bir cebirdir. Bu tezde, Clifford Cebirinin elektromanyetizma eşitliklerine uygulaması incelenmiştir. İlk önce Clifford Cebirin tarihsel gelişiminden bahsedildi. Sonrasında ise cebirin tanımı yapıldı ve cebirin cebirsel özelliklerinden bahsedildi. Elektrik ve manyetik alanların tanımından sonra bu tanımların Clifford Cebiri ile ifadesi ele alındı. Lorentz kuvveti $\mathbf{F} = \vec{E} + ic\vec{B}$ ve akım yoğunluğu $\mathbf{J} = c\rho - \vec{j}$ olmak üzere Maxwell Denklemleri $\square \mathbf{F} = c\mu_0 \mathbf{J}$ ile gösterilen tek bir denkleme indirgendi. İndirgenen bu denklemin Clifford Cebiri ile ifadesi irdelendi. Buradaki amaç Clifford Cebiri kullanarak işlem kolaylığı sağlamaktır. Tezin son bölümünde ise, Faraday Yasasından yola çıkarak Lenz Yasasının Clifford Cebiri ile gösterimine yer verildi.

Sonuç olarak, Clifford Cebiri özellikle fizikte ve mühendislikte kullanışlı gösterimler sağlamaktadır. İşlem kolaylığı sağlaması ve çok boyutlu uzayları tanımlarken sağladığı olanaklar oldukça dikkat çekicidir.

KAYNAKÇA

- [1] Sezgin, F. (2008). *Clifford Cebiri ve Geometrik Uygulamaları*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. İstanbul: Beykent Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [2] Kılıç, A. (2021). Clifford Cebiri ile *Doğanın Tam Simetrik Yapıları*. Ankara: Akademisyen Kitabevi.
- [3] **http-1:** <http://liseondroid.blogspot.com/2013/12/karmasıl-sayılar-tarihcesi.html> (Erişim Tarihi: 21.03.2021).
- [4] **http-2:** <http://matematiksel.org/hayal-edilemeyen-sayılar-karmasik-sayılar> (Erişim Tarihi: 21.03.2021).
- [5] Jafari, M. (2012). *Genelleştirilmiş Hamilton Operatörleri ve Lie Grupları*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tez. Ankara: Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [6] Soydaş, M. (2003). *Bikuaternionların Modern Fiziğe Uygulanması*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [7] Dereli, T. (1992) *Soyut Cebirler ve Fizikte Simetri Yasaları*. Bilim ve Teknik Dergisi, Aralık, 35.
- [8] Yazıcı, Dr. E. (2016). *Elektromanyetizmanın Öyküsü: İlk Kıvılcım*. Bilim ve Teknik Dergisi, Haziran, 52-55.
- [9] Franchini, S., Vassallo, G. ve Sorbello, F. (2010). A Brief Introduction to Clifford Algebra. 6.
- [10] Griffiths, D.J. (1996). *Elektromanyetik Teori*. (Çev: B. Karaoğlu). İstanbul: Güven Kitap Yayın Dağıtım
- [11] Chappell J.M., Drake S.P., Seidel C.L., Gunn L.J. (2014). Geometric Algebra for Electrical and Electronic Engineers. *Proceedings of the IEEE*, 102 (9), 1340-1341, 1345-1346.
- [12] Hestenes D., (2018). Deconstructing the Electron Clock. *Preprint*, 2.

