

MAYIS 2017

Yüksek Lisans - Matematik

SALTUK YAŞAMALI

**GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ELEMANLARI JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL
LUCAS SAYILARI OLAN DAİRESEL MATRİSLERİN
NORMLARININ SINIRLARI**

**MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**SALTUK YAŞAMALI
MAYIS 2017**

**Elemanları Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayıları Olan
Dairesel Matrislerin Normlarının Sınırları**

**Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Tezi**

**Danışman
Yrd. Doç. Dr. Şükran UYGUN**

Saltuk YAŞAMALI

Mayıs 2017



© 2017 [Saltuk YAŞAMALI]

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Elemanları Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayıları Olan Dairesel Matrislerin
Normlarının Sınırları

Öğrencinin, Adı Soyadı: Saltuk YAŞAMALI

Tez Savunma Tarihi: 26 Mayıs 2017

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı



Prof. Dr. Ahmet Necmeddin YAZICI

FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.



Prof. Dr. Adil KILIÇ

Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımda okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.



Yrd. Doç. Dr. Şükran UYGUN

Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

Doç. Dr. Abdullah KABLAN

Yrd. Doç. Dr. Bilge İNAN

Yrd. Doç. Dr. Şükran UYGUN

İmzası



İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Saltuk YAŞAMALI

ABSTRACT

BOUNDS OF CIRCULANT MATRICES NORMS WITH JACOBSTHAL AND JACOBSTHAL LUCAS NUMBERS

YAŞAMALI, SALTUK

M. Sc. Thesis in Mathematics Department

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Şükran UYGUN

May 2017,

44 pages

Dr. Ş. BOŞKUL

Firstly we give some basic definitions as Euclid norm, spectral norm, Kronecker product and Hadamard product. Also some important inequalities are given about them. Then, we define briefly circulant matrix and give its some important properties. We describe Jacobsthal, Jacobsthal Lucas sequences and give some important identities. After that we define a generalization of these sequences, by using the variable $k \in R^+$, called k-Jacobsthal and k-Jacobsthal Lucas sequences.

Then, we find the sum of the first n terms of Jacobsthal, Jacobsthal Lucas numbers by using different number sequences.

In the end we find out upper and lower bounds of the norms for the circulant matrix with Jacobsthal, Jacobsthal Lucas numbers and k-Jacobsthal and k-Jacobsthal Lucas sequences.

Keywords: Jacobsthal, Jacobsthal Lucas sequences, Binet formulas, Circulant Matrices, Norm.

ÖZET

ELEMANLARI JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL LUCAS SAYILARI OLAN DAİRESEL MATRİSLERİN NORMLARININ SINIRLARI

YAŞAMALI, SALTUK

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Şükran UYGUN

Mayıs 2017,

44 sayfa

Bu çalışmamızda ilk olarak, öklit normu, spektral norm, Kronecker çarpanı ve Hadamard çarpanı hakkında kısa bir bilgi verilecektir. Dairesel matrisin kısa bir tanımı yapıldıktan sonra bazı önemli özelliklerinden bahsedilecektir. Sonra Jacobsthal, Jacobsthal Lucas dizisi ve bazı önemli özdeşlikleri verilecektir. Daha sonra, $k \in \mathbb{R}^+$ değişkeni kullanarak k -Jacobsthal ve k -Jacobsthal Lucas dizileri olarak isimlendirilen bu dizilerin bir genellemesi tanımlanacaktır.

Sonraki bölümlerde, Jacobsthal, Jacobsthal Lucas ve genelleştirilmiş Jacobsthal Lucas sayılarının ilk n teriminin karelerinin toplam formülleri farklı sayı dizileri kullanılarak elde edilecektir.

Son olarak, elemanları Jacobsthal, Jacobsthal Lucas sayılı ve k -Jacobsthal ve k -Jacobsthal Lucas olan dairesel matrislerin normları için alt ve üst sınırlar elde edilecektir.

Anahtar Kelimeler: Jacobsthal, Jacobsthal Lucas Dizileri, Binet Formülü, Dairesel Matrisler, Norm.



Çok kıymetli aileme...

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince desteğini, deneyimini ve emeğini hiçbir zaman benden esirgemeyen ve aynı zamanda kişiliğiyle de bana örnek olan Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Şükran UYGUN'a, maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda bulunarak bu günlere gelmemde en büyük pay sahibi olan aileme ve tüm sevdiklerime minnettarlığımı ve teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ABSTRACT.....	v
ÖZET.....	vi
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER.....	ix
SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	xi
BÖLÜM 1.....	1
GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2.....	4
ÖN BİLGİLER.....	4
2.1. Matris Normları, Matrislerin Hadamard ve Kronecker Çarpımları	4
2.2. Dairesel (Circulant) Matris:	6
BÖLÜM 3.....	8
JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL LUCAS SAYILARI.....	8
3.1. Jacobsthal , Jacobsthal Lucas ve Genelleştirilmiş Jacobsthal Sayıları	8
3.2. Jacobsthal, Jacobsthal Lucas ve Genelleştirilmiş Jacobsthal Sayıları Arasındaki Bağıntılar	11
BÖLÜM 4.....	13
JACOBSTHAL, JACOBSTHAL LUCAS VE GENELLEŞTİRİLMİŞ JACOBSTHAL SAYILARI İÇİN BAZI TOPLAM FORMÜLLERİ.....	13
BÖLÜM 5.....	19
BÖLÜM 6.....	27

ELEMANLARI k -JACOBSTHAL VE k - JACOBSTHAL LUCAS SAYILARI OLAN DAİRESEL MATRİSLER İÇİN ALT VE ÜST SINIRLAR.....	27
BÖLÜM 7.....	34
ELEMANLARI JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL LUCAS SAYILARI OLAN r - DAİRESEL MATRİSLER İÇİN ALT VE ÜST SINIRLAR.....	34
BÖLÜM 8.....	40
SONUÇ VE ÖNERİLER.....	40
KAYNAKLAR.....	41



SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ

- f_n : Fibonacci sayı dizisinin n-inci elemanı
 l_n : Lucas sayı dizisinin n-inci elemanı
 j_n : Jacobsthal sayı dizisinin n-inci elemanı
 c_n : Jacobsthal Lucas sayı dizisinin n-inci elemanı
 $j_{k,n}$: k -Jacobsthal sayı dizisinin n-inci elemanı
 $c_{k,n}$: k Jacobsthal Lucas sayı dizisinin n-inci elemanı
 g_n : Genelleştirilmiş Jacobsthal dizisinin n-inci elemanı

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Özel tamsayı dizileri sayılar teorisinde çok önemli bir yere sahiptir. Öncelikle tamsayı dizileri denilince ilk akla gelen, Fibonacci dizisidir. Bu sayı dizisi $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ yineleme bağıntısı kullanılarak tanımlanmıştır. Fibonacci dizisi en basit işlem yapılabilen sayılar $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ile başlar. Fibonacci dizisinin bu kadar önemli olmasının sebebi ardışık iki teriminin oranının sonsuz için limitinin “altın oran” olarak adlandırılan sayı olmasıdır. Altın oran doğada (çiçek ve ağaçlarda) sanatta, mimarlıkta, insan vücudunda vb. karşımıza çıkmaktadır. Fibonacci dizisi istenirse başlangıç elemanları değiştirilerek tamamen bu diziden bağımsız başka bir sayı dizisi de elde edilebilir. Bir örnek olarak Fransız matematikçi Edward Lucas başlangıç şartları için seçilebilecek başka basit $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ değerlerini kullanarak Lucas sayı dizilerini tanımlamış ve bu sayı dizisi de ciddi bir önem kazanmıştır. Lucas sayı dizisinin literatürde önem kazanmasının nedeni Fibonacci sayı dizileri ile arasında bir çok bağıntının elde edilmesidir. Literatürde farklı yineleme bağıntıları ve başlangıç şartları seçilerek çeşitli özel sayı dizileri elde edilir: Pell, Pell Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal, Lucas, Mersenne, Horadam, Padovan gibi...

Dairesel ve r -dairesele matrisler son yıllarda birçok araştırmacının ilgisini çekmektedir. r -dairesele matrisleri, uygulamalı matematik alanında en ilginç araştırma alanlarından biridir. Bu matrislerin, sinyal işleme, kodlama teorisi, görüntü işleme, dijital görüntü oluşturma, olasılıkta doğrusal tahmin ve tasarımda çok çeşitli uygulamaları olduğu bilinmektedir.

Bu bölümde çeşitli sayı dizileri ile oluşturulan çeşitli tipteki dairesele matrislerin normları ile ilgili literatürde yapılmış olan bazı çalışmalardan bahsedelim: Solak S. ve Bozkurt D. (2002) C_n dairesele matrisinin operatör ve matris normlarının üst sınırlarını elde etmiştir. Solak S. ve Bozkurt D. (2003), $H_n = [1/(g + h(i + j))]_{i,j=1}^n \equiv$

$([1/(g+kh)]_{i,j=1}^n)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ matris formunun ℓ_p ve spektral normları için sınırlar vermiştir. Burada; $i + j \equiv k \pmod{n}$ olacak şekilde k tanımlanmıştır. Solak S. (2005) Dairesel matrislerin spektral normlarını Fibonacci ve Lucas sayılarıyla incelemiştir. $n \times n$ mertebeli $A=[a_{ij}]$ ve $B=[b_{ij}]$ matrislerini $a_{ij} = F_{(\text{mod}(j-i,n))}$ ve $b_{ij} = L_{(\text{mod}(j-i,n))}$ şeklinde tanımlamıştır. A ve B matrislerinin spektral ve Öklid normları ile ilgili bazı alt ve üst sınırlar elde etmiştir. Ayrıca A ve B matrislerinin Hadamard ve Kronecker çarpımlarının normlarının sınırlarını da bulmuştur. Rimas J. (2005) $n=(2p+1)$. mertebeden ($p \in \mathbb{N}$) simetrik dairesele matrislerin bir tipi için L ($L \in \mathbb{N}$) kuvvetinin genel tanımı elde etmiştir.

Benzer olarak Rimas J. (2006) makalesinde $n=(2p)$. mertebeden ($p \in \mathbb{N}, p \geq 2$) simetrik dairesele matrislerin bir tipi için L . ($L \in \mathbb{N}$) kuvvetinin genel ifadesini elde etmiştir. Kocer E. G. (2007), Horadam sayıları ile dairesele ve yarı-dairesel matris normlarını elde etmiştir.

Civciv H., Türkmen R. (2008) çalışmasında Lucas elemanlı dairesele matris ve bu matrisin normlarının alt ve üst sınırlarını Lucas sayılarına bağılı olarak elde etmiştir. Ayrıca bu matrisin Hadamard tersinin normunun alt ve üst sınırlarını elde etmiştir.

Shen S. ve Cen J. (2010), Fibonacci ve Lucas sayılarıyla oluşturulan r -dairesele matrislerin normlarının sınırlarını bulmuşlardır. Benzer olarak Shen S. ve Cen J. (2010), k -Fibonacci ve k -Lucas sayılarıyla oluşturulan r -dairesele matrislerin spektral normları için sınırlar bulmuşlardır.

Uslu K., Taskara N., Uygun S. (2011), k -Fibonacci ve k -Lucas ve genelleştirilmiş k -Fibonacci sayıları ile oluşturulan dairesele matrislerin spektral normu için yine bu sayılara bağılı sınırları vermişlerdir.

Bahsi M., Solak S. (2011), hiper-Fibonacci ve hiper-Lucas sayılarıyla dairesele ve r -dairesele matrislerinin normlarını inclemiştir. Yazlık Y., Taskara N. (2013), genelleştirilmiş k -Horadam sayılarıyla bir r -dairesele matrisinin spektral normları için yeni alt ve üst sınırlar verdiler. Jiang ve Zhou (2015), r -dairesele matrisler için spektrum normları vermişlerdir. Tuğlu ve Kızılateş (2015), sonlu fark operatörü kullanılarak Öklid normunu hesaplamış ve dairesele, r -dairesele ve bazı harmonik Fibonacci ve hiper harmonik Fibonacci sayıları ile bazı özel matrislerin spektrum normlarını vermişlerdir. Bahsi M. (2016), hiper harmonik sayılı r -dairesele matrislerin spektrum normlarını hesaplamıştır. Bahsi M. (2016), hiper Fibonacci ve Lucas sayılı

r -dairese matrislerin spektrum normlarını bulmuştur. Tuglu ve Kızılateş (2016), elemanları Fibonacci, Lucas ve hiper harmonik Fibonacci olan geometrik dairese matrislerin normları için sınırlar bulmuşlardır.



BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER

Bu bölümde öncelikle çeşitli matris normları, matrislerin Hadamard ve Kronecker çarpımı ile dairesel matris hakkında genel bir bilgi verilecektir.

2.1. Matris Normları, Matrislerin Hadamard ve Kronecker Çarpımları

A herhangi bir n -kare matris olmak üzere, matris normları ve matrislerin Hadamard ve Kronecker çarpımları ile ilgili bazı genel bilgileri verelim:

Tanım 2.1.1. A ve B herhangi n – kare matrisler olmak üzere,

- a) $\|A\| \geq 0$ ve $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A=0$,
- b) $c \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $\|cA\| = |c| \|A\|$,
- c) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlayan $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyona **genelleştirilmiş matris normu** adı verilir ve $\|A\|$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.2. A herhangi bir n – kare matris olmak üzere,

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

ifadesine A matrisinin ℓ_p **normu** adı verilir.

Eğer $p = \infty$ ise o takdirde,

$$\|A\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A\|_p = \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

Tanım 2.1.3. A herhangi bir n -kare matris olmak üzere,

$$\|A\|_E = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

ifadesine A matrisinin **Frobenius (Euclidean) normu** adı verilir ve $\|A\|_E$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.4. A herhangi bir n -kare matris olmak üzere,

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A^H A)}$$

ifadesine ise A matrisinin **spektral normu** adı verilir. Burada; $A^H = (\bar{A})^T$ dir.

Yukarıda vermiş olduğumuz normlar arasında aşağıdaki şekilde bir ilişki mevcuttur:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_E \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_E \quad (2.1)$$

Tanım 2.1.5. A herhangi bir n -kare matris olmak üzere sırasıyla,

$$c_1(A) = \max_j \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2} \quad (2.2)$$

$$r_1(A) = \max_i \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} \quad (2.3)$$

şeklinde A matrisinin **maksimum sütun uzunluk normu** $c_1(\cdot)$ ve **maksimum satır uzunluk normunu** da $r_1(\cdot)$ olarak tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.6. $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ kare matrisler olmak üzere,

$$A \circ B = [a_{ij} \cdot b_{ij}]$$

şeklinde verilen çarpıma A ve B matrislerinin **Hadamard çarpımı** adı verilir.

Mathias R. (1990) tarafından; A , B ve C matrisleri n -kare matrisler olmak üzere, eğer $A = B \circ C$ ise

$$\|A\|_2 \leq r_1(B)c_1(C) \quad (2.4)$$

eşitsizliği elde edilmiştir.

Visick G. (2000) tarafından ise, $\|\cdot\|$ normu n -kare matrisler üzerinde herhangi bir norm olmak üzere,

$$\|A \circ B\| \leq \|A\| \|B\| \quad (2.5)$$

eşitsizliği elde edilmiştir.

Tanım 2.1.7. A ve B , n -kare matrisler olmak üzere,

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nn}B \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan matris çarpım türüne **Kronecker çarpımı** adı verilir.

İki matrisin Kronecker çarpımının Euclidean normu için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\|A \otimes B\|_E = \|A\|_E \|B\|_E \quad (2.6)$$

2.2. Dairesel (Circulant) Matris:

C matrisi n -kare bir matris olmak üzere,

$$C_n = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_3 & c_4 & c_5 & \dots & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n-1} & c_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilen matrise **dairesel (Circulant) matris** adı verilir. Her bir $i, j = 1, 2, \dots, n$ ve $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ için (i, j) elemanlarının hepsi $(j-i) \equiv k \pmod{n}$ olacak şekilde aynı c_k değerine sahiptir. Buradaki (i, j) elemanları formu c 'nin k . satır veya sütunu olarak adlandırılır. Yani, bir dairesel matris, onun ilk satırı (veya ilk sütunu) yardımıyla belirlenir.

Dairesel matrislerin birçok ilginç özelliği vardır. $n \times n$ mertebeli dairesel matrisler için şunlar söylenebilir.

- (i) A ve B aynı mertebeli dairesel matrisler ve a ile b herhangi iki skaler olmak üzere $aA + bB$ matrisi bir dairesel matristir.
- (ii) Aynı mertebeli iki dairesel matrisin çarpımı yine bir dairesel matristir.
- (iii) Aynı mertebeli iki dairesel matrisin çarpımı değişme özelliğine sahiptir.
- (iv) Eğer bir dairesel matris tekil değilse, tersi de dairesel matristir.
- (v) Dairesel matrislerin transpozu dairesel matristir.
- (vi) Dairesel matrisler normal matrislerdir.
- (vii) İlk satırı $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1})$ olan $n \times n$ mertebeli bir dairesel matris ve $w_k w^n = 1$ denkleminin farklı çözümlerinden biri olmak üzere dairesel matrisin öz değerleri,

$$\lambda_k = a_0 + a_1 w_k + a_2 w_{k^2} + \dots + a_{n-1} w_{k^{n-1}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

formülü ile bulunur. Ayrıca dairesel matrisin ilgili öz vektörleri,

$$X_i = (1, w_k, w_{k^2}, \dots, w_{k^{n-1}})^T \text{ olur.}$$

BÖLÜM 3

JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL LUCAS SAYILARI

Bu bölümde, Alman matematikçi Jacobsthal'ın literatüre kazandırdığı Jacobsthal sayılarına ait çeşitli özellikler incelenecektir. Bu sayı dizilerinin matris gösterimi belirtildikten sonra birçok özelliğin ispatının bu matris gösterimi kullanılarak kolaylıkla bulunabileceği görülecektir.

Bilgisayarlardaki bazı mikro işlemciler bir programın akışını değiştirmek için koşullu yönlendirmeler kullanırlar. Bu mikro işlemciler(dallı yönlendirenler) geçici olarak ilerideki yönlendirmeye atlatan komutlandırma yaparlar. Burada, 2 bit'in 4 olasılığı için 1 durumun, 3 bit'in 8 olasılığı için 3 durumun, 4 bit'in 16 olasılığı için 5 durumun, vb. durumları hariç bırakılarak diğerlerinin yararlı olduğu sonucuna varılmış ve hariç bırakılan bu durumların tam olarak Jacobsthal sayılarını verdiği görülmüştür (Horadam,1999).

3.1. Jacobsthal , Jacobsthal Lucas ve Genelleştirilmiş Jacobsthal Sayıları

Tanım.3.1.1: Başlangıç şartları $j_0 = 0$, $j_1 = 1$ olan; $j_{n+1} = j_n + 2j_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{j_n\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki sayı dizisine Jacobsthal sayı dizisi denir.

Tanım.3.1.2: Başlangıç şartları $c_0 = 2$, $c_1 = 1$ olan; $c_{n+1} = c_n + 2c_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ sayı dizisine Jacobsthal Lucas sayı dizisi denir.

Tanım.3.1.3: Başlangıç şartları $G_0 = a$, $G_1 = b$ olarak verilen $G_{n+1} = G_n + 2G_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile tanımlanan $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki sayı dizisine Genelleştirilmiş Jacobsthal sayı dizisi denir. Birkaç Genelleştirilmiş Jacobsthal sayısı

N	0	1	2	3	4	5	6	...
G_n	A	b	$(2a+b)$	$(2a+3b)$	$(6a+5b)$	$(10a+11b)$	$(22a+21b)$	...

şeklinde ifade edilir.

Teorem 3.1.4. $x^2 - x - 2 = 0$ denkleminin kökleri $x_1 = 2, x_2 = -1$ olmak üzere Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıları için Binet formülü

$$j_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

$$c_n = x_1^n + x_2^n = 2^n + (-1)^n$$

şeklinde verilir (Horadam,1996).

Teorem 3.1.5. n herhangi bir tamsayı olmak üzere, Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıları toplam formülleri kullanılarak sırasıyla

$$j_n = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-r}{r} 2^r$$

$$c_n = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-r} \binom{n-r}{r} 2^r$$

şeklinde elde edilebilir (Horadam, 1996).

Teorem3.1.6. (Cassini Özdeşliği) $n \geq 0$ tamsayısı için Jacobsthal sayı dizileri için Cassini özdeşliği aşağıdaki gibi verilir:

$$j_{n+1}j_{n-1} - j_n^2 = (-1)^n 2^{n-1}$$

Teorem 3.1.7. (Catalan Özdeşliği) $n > 0$ tamsayısı için Jacobsthal sayı dizilerinin Catalan özdeşliği

$$j_{n-r}j_{n+r} - j_n^2 = (-1)^{n+1-r} j_r^2 2^{n-r}$$

eşitliği ile verilir.

Teorem 3.1.8. (D’ocagne Özdeşliği) $m, n > 0$ tamsayıları ve $m > n$ için Jacobsthal sayı dizilerinin D’ocagne Özdeşliği aşağıdaki gibidir:

$$j_m j_{n+1} - j_{m+1} j_n = (-2)^n j_{m-n}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.9. (Cassini Özdeşliği) $n > 0$ ve $n > r$ tamsayıları için Jacobsthal Lucas sayı dizilerinin Cassini Özdeşliği

$$c_{n-1} c_{n+1} - c_n^2 = (-2)^{n-1} (c_1^2 - (-2)^{1+2})$$

eşitliği ile verilir (Jhala, 2014).

Teorem 3.1.10. (Catalan Özdeşliği) $n > 0$ ve $n > r$ tamsayıları için Jacobsthal Lucas sayı dizilerinin Catalan Özdeşliği

$$c_{n-r} c_{n+r} - c_n^2 = (-2)^{n-r} (c_r^2 - (-2)^{r+2})$$

eşitliği ile verilir (Jhala, 2014).

Teorem 3.1.11. (D'Ocagne Özdeşliği): $m, n > 0$ tamsayıları ve $m > n$ için

$$c_m c_{n+1} - c_{m+1} c_n = 3(-2)^n (c_{m-n} - 2^{m-n+1})$$

eşitliği sağlanır (Jhala 2013).

Teorem 3.1.12. (Toplam Formülü) n, k herhangi iki tamsayı olmak üzere, Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayılarının kısmi toplam formülü

$$\sum_{i=2}^n j_i = \frac{1}{2} (j_{n+2} - 3)$$

$$\sum_{i=1}^n c_i = \frac{1}{2} (c_{n+2} - 5)$$

şeklindedir (Horadam, 1996).

3.2. Jacobsthal, Jacobsthal Lucas ve Genelleştirilmiş Jacobsthal Sayıları Arasındaki Bağlılıklar

Jacobsthal, Jacobsthal Lucas ve genelleştirilmiş Jacobsthal sayıları arasında aşağıdaki eşitlikler mevcuttur Aşağıdaki eşitlikler sayesinde bir sayı dizisini diğerleri cinsinden ifade edebiliriz. Bu özellikler Binet formülleri ve basit bazı Jacobsthal dizi özellikleri kullanılarak kolaylıkla ispatlanabilir.

a) Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıları arasında,

$$j_n = \frac{2c_{n+1} - c_n}{9}$$

ve

$$c_n = j_n + 4j_{n-1}$$

b) Genelleştirilmiş Jacobsthal ve genelleştirilmiş Jacobsthal sayıları arasında

$$G_n = bj_n + 2aj_{n-1}$$

c) $n \in \mathbb{Z}^+$ için, Jacobsthal sayıları genelleştirilmiş Jacobsthal sayıları cinsinden aşağıdaki gibi verilir:

$$j_n = \frac{aG_{n+1} - bG_n}{2a^2 - b^2 + ab}$$

İspat:

$$G_n = bj_n + 2aj_{n-1}$$

$$G_{n+1} = bj_{n+1} + 2aj_n$$

Burada G_{n+1} ifadesini a ile G_n ifadesini de b ile çarparak birbirinden çıkartırsak

$$aG_{n+1} - bG_n = (2a^2 - b^2)j_n + ab(j_{n+1} - 2j_{n-1})$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifadeden j_n ifadesini yalnız bırakırsak

$$j_n = \frac{aG_{n+1} - bG_n}{2a^2 - b^2 + ab}$$

sonucuna ulaşırız.

d) Genelleştirilmiş Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıları arasında

$$\begin{aligned} G_n &= b \left(\frac{2c_{n+1} - c_n}{9} \right) + 2a \left(\frac{2c_n - c_{n-1}}{9} \right) \\ &= \frac{1}{9} (c_n(b + 4a) + 2c_{n-1}(2b - a)), \quad (a, b \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

şeklinde bir ilişki mevcuttur.

e) $n \in \mathbb{Z}^+$ için, Jacobsthal Lucas sayıları Genelleştirilmiş Jacobsthal sayıları cinsinden aşağıdaki gibi verilir:

$$c_n = \frac{(5a - b)G_n + 2G_{n-1}(a - 2b)}{2a^2 - b^2 + ab}$$

İspat: Jacobsthal Lucas sayı dizisinin Jacobsthal sayıları cinsinden yararlanarak

$$\begin{aligned} c_n &= j_{n+1} + 2j_{n-1} = j_n + 4j_{n-1} \\ &= \frac{aG_{n+1} - bG_n + 4aG_n - 4bG_{n-1}}{2a^2 - b^2 + ab} \\ &= \frac{(5a - b)G_n + 2G_{n-1}(a - 2b)}{2a^2 - b^2 + ab} \end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

BÖLÜM 4

JACOBSTHAL, JACOBSTHAL LUCAS VE GENELLEŞTİRİLMİŞ JACOBSTHAL SAYILARI İÇİN BAZI TOPLAM FORMÜLLERİ

Teorem 4.1. $n \in \mathbb{Z}^+$ için, j_n Jacobsthal sayılarının ilk n teriminin kareleri toplamı Jacobsthal sayıları cinsinden

$$\sum_{s=0}^{n-1} j_s^2 = \frac{1}{9} (j_{2n} + n + 2(-1)^n j_n) \quad (4.1)$$

şeklinde yazılır.

İspat: Geometrik seri açılımı ve Binet formülü, tam kare özdeşliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{n-1} j_s^2 &= \sum_{s=0}^{n-1} \left(\frac{2^s - (-1)^s}{3} \right)^2 = \frac{1}{9} \sum_{s=0}^{n-1} 2^{2s} - 2(-2)^s + 1 \\ &= \frac{1}{9} \left[\frac{2^{2n} - 1}{3} + 2 \frac{(-2)^n - 1}{3} + n \right] \\ &= \frac{1}{9} \left[\frac{2^{2n} - (-1)^{2n}}{3} + 2(-1)^n \frac{(2)^n - (-1)^n}{3} + n \right] \\ &= \frac{1}{9} (j_{2n} + n + 2(-1)^n j_n) \end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

Teorem 4.2. $n \in \mathbb{Z}^+$ için, Jacobsthal sayılarının ilk n teriminin kareleri toplamı Jacobsthal Lucas sayıları c_n cinsinden

$$\sum_{s=0}^n j_s^2 = \frac{1}{9} \left[\frac{c_{n+1}^2 + 3n - 1}{3} \right] \quad (4.2)$$

şeklinde yazılır.

İspat: Binet formülü ve tam kare özdeşliğinden yararlanarak, geometrik seri açılımından

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^n j_s^2 &= \sum_{s=0}^n \left(\frac{\alpha^s - \beta^s}{\alpha - \beta} \right)^2 = \frac{1}{9} \sum_{s=0}^n \alpha^{2s} - 2\alpha^s \beta^s + \beta^{2s} \\
&= \frac{1}{9} \left[\frac{1 - \alpha^{2n+2}}{1 - \alpha^2} - 2 \frac{1 - (\alpha\beta)^{n+1}}{1 - \alpha\beta} + n + 1 \right] \\
&= \frac{1}{9} \left[\frac{2^{2n+2} - 1}{3} - 2 \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3} + n + 1 \right] \\
&= \frac{1}{9} \left[\frac{2^{2n+2} - 1 - 2 + 2(2^{n+1})(-1)^n}{3} + n + 1 \right] \\
&= \frac{1}{9} \left[\frac{c_{n+1}^2 + 3n - 1}{3} \right]
\end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

Teorem 4.3. $n \in \mathbb{Z}^+$ için, Jacobsthal sayılarının ilk n teriminin kareleri toplamı Jacobsthal Lucas sayıları cinsinden

$$\sum_{s=0}^{n-1} j_s^2 = \frac{1}{9} \left[\frac{c_n^2 - 4}{3} + n \right] \quad (4.3)$$

şeklinde yazılır.

İspat: Binet formülü ve tam kare özdeşliğinden yararlanarak

$$\sum_{s=0}^{n-1} j_s^2 = \sum_{s=0}^{n-1} \left(\frac{2^s - (-1)^s}{3} \right)^2 = \frac{1}{9} \sum_{s=0}^{n-1} 2^{2s} - 2(-2)^s + 1$$

Geometrik seri açılımından

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{9} \left[\frac{2^{2n} - 1}{3} + 2 \frac{(-2)^n - 1}{3} + n \right] \\
&= \frac{1}{9} \left[\frac{2^{2n} + 2(-2)^n + (-1)^{2n} - 1 - 2}{3} + n \right] \\
&= \frac{1}{9} \left[\frac{c_n^2 - 4}{3} + n \right]
\end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

Teorem 4.4. $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\sum_{s=0}^{n-1} j_{s-1}^2 = j_{2n} + n + 2(-1)^n j_n \quad (4.4)$$

İspat: Binet formülü ve tam kare özdeşliğinden yararlanarak

$$\sum_{s=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha^{s-1} - \beta^{s-1}}{\alpha - \beta} \right)^2 = \frac{1}{9} \sum_{s=0}^{n-1} \alpha^{2s-2} - 2\alpha^{s-1}\beta^{s-1} + \beta^{2s-2}$$

Geometrik seri açılımından

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{9} \left[\frac{\alpha^{2n} - 1}{3} + n + 2 \left[\frac{(\alpha\beta)^n - 1}{3} \right] \right] \\ &= j_{2n} + n + 2(-1)^n \left[\frac{2^n - (-1)^n}{3} \right] \\ &= j_{2n} + n + 2(-1)^n j_n \end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

Teorem 4.5. $n \in \mathbb{Z}^+$ için, Jacobsthal Lucas sayılarının ilk n teriminin kareleri toplamı Jacobsthal sayıları cinsinden

$$\sum_{s=0}^{n-1} c_s^2 = j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n \quad (4.5)$$

şeklinde yazılır.

İspat: Jacobsthal Lucas sayılarının Binet formülü: $c_n = 2^n + (-1)^n$ şeklindedir.

Buradan hareketle

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{n-1} c_s^2 &= [2^s + (-1)^s]^2 = \sum_{s=0}^{n-1} [4^s + 1 + 2(-2)^s] \\ &= \frac{-1 + 2^{2n}}{3} + n + 2 \frac{-1 - (-2)^n}{3} = \frac{2^{2n} - (-1)^{2n}}{3} + n + 2(-1)^n \left[\frac{2^n - (-1)^n}{3} \right] \\ &= j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n \end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

Teorem 4.6. $n \in \mathbb{Z}^+$ için, Jacobsthal Lucas sayılarının ilk n teriminin kareleri toplamı Jacobsthal sayıları cinsinden

$$\sum_{s=0}^{n-1} c_s^2 = 3j_n^2 + n \quad (4.6)$$

şeklinde yazılır.

İspat: Binet formülü ve tam kare özdeşliğinden yararlanarak

$$\sum_{s=0}^{n-1} c_s^2 = \sum_{s=0}^{n-1} [2^s + (-1)^s]^2 = \sum_{s=0}^{n-1} [2^{2s} + 1 + 2(-2)^s]$$

Geometrik seri açılımından

$$\begin{aligned} &= \frac{-1 + 2^{2n}}{3} + n + 2 \frac{1 - (-2)^n}{-3} = \frac{2^{2n} - 2(-2)^n + 1}{3 \cdot 3} 3 + n \\ &= 3j_n^2 + n \end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

Not:

$X = 2b + 2a$ ve $Y = 2a - b$ olmak üzere Genelleştirilmiş Jacobsthal sayılarını X ve Y sayılarına bağlı olarak

$$\begin{aligned} G_n &= bj_n + 2aj_{n-1} = b \left(\frac{2^n - (-1)^n}{3} \right) + 2a \left(\frac{2^{n-1} - (-1)^{n-1}}{3} \right) \\ &= \frac{1}{3} [2^{n-1}(2b + 2a) - (-1)^{n-1}(-b + 2a)] \\ &= \frac{1}{3} [X 2^{n-1} - Y(-1)^{n-1}] \end{aligned}$$

Teorem 4.7. $n \in \mathbb{Z}^+$ için, genelleştirilmiş Jacobsthal sayılarının ilk n teriminin kareleri toplamı Jacobsthal sayıları cinsinden

$$\sum_{s=0}^{n-1} G_s^2 = \frac{1}{9} \left(X^2 j_{2n} + Y^2 n + 2XY(-1)^n j_n \right) \quad (4.7)$$

şeklinde yazılır.

İspat: Genelleştirilmiş Jacobsthal sayılarının X ve Y ifadelerine bağlı bulunan eşitliği ve tamkare özdeşliğinden yararlanarak

$$\sum_{s=0}^{n-1} G_s^2 = \frac{1}{9} \sum_{s=0}^{n-1} X^2 2^{2n-2} + Y^2 - 2XY(-2)^{n-1}$$

Geometrik seri açılımından

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{9} \left[X^2 \left(\frac{2^{2n} - 1}{3} \right) + Y^2 n - 2XY \left(\frac{(-2)^n - 1}{-3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{9} \left[X^2 \left(\frac{2^{2n} - (-1)^{2n}}{3} \right) + Y^2 n + 2XY(-1)^n \left(\frac{2^n - (-1)^n}{3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{9} \left[X^2 j_{2n} + Y^2 n + 2XY(-1)^n j_n \right] \end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

Teorem 4.8. $n \in \mathbb{Z}^+$ için, genelleştirilmiş Jacobsthal sayılarının ilk n teriminin kareleri toplamı Jacobsthal Lucas sayıları cinsinden

$$\sum_{n=0}^{m-1} G_n^2 = \frac{1}{9} \left[X^2 \left(\frac{2c_{2m-1} - c_{2m-2}}{9} \right) + Y^2 m + 2XY(-1)^{m-1} \left(\frac{2c_m - c_{m-1}}{9} \right) \right]$$

şeklinde yazılır.

İspat:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{m-1} G_n^2 &= \sum_{n=0}^{m-1} \left[\frac{1}{3} (X 2^{n-1} - Y(-1)^{n-1}) \right]^2 \\ &= \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{m-1} (X^2 2^{2n-2} + Y^2 - 2XY(-2)^{n-1}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{9} \left[X^2 \left(\frac{2^{2m-2} - 1}{2^2 - 1} \right) + Y^2 m - 2XY \left(\frac{(-2)^{m-1} - 1}{-2 - 1} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{9} \left[X^2 \left(\frac{2^{2m-2} - (-1)^{2m-2}}{2 - (-1)} \right) + Y^2 m + 2XY \left(\frac{(-1)^{m-1} [2^{2m-1} - 1(-1)^{m-1}]}{3} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{9} [X^2 j_{2m-2} + Y^2 m + 2XY(-1)^{m-1} j_{m-1}]$$

$$= \frac{1}{9} \left[X^2 \left(\frac{2c_{2m-1} - c_{2m-2}}{9} \right) + Y^2 m + 2XY(-1)^{m-1} \left(\frac{2c_m - c_{m-1}}{9} \right) \right]$$

Teorem 4.9. $n \in \mathbb{Z}^+$ için, genelleştirilmiş Jacobsthal sayılarının ilk n teriminin kareleri toplamı Jacobsthal sayıları cinsinden

$$\sum_{n=0}^{m-1} G_n^2 = \frac{1}{9} \left[X^2 \frac{j_{2m}}{12} + Y^2 m + 2XY(-1)^n j_m \right]$$

şeklinde yazılır.

İspat:

$$\sum_{n=0}^{m-1} G_n^2 = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{m-1} X^2 2^{2n-2} + Y^2 - 2XY(-2)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{9} \left[2^{-2} \left(\frac{2^{2m} - 1}{3} \right) + Y^2 m - \frac{2XY}{-2} (-1)^m \left(\frac{2^m - (-1)^m}{-3} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{9} \left[X^2 \frac{j_{2m}}{12} + Y^2 m + 2XY(-1)^n j_m \right]$$

ispat tamamlanır.

BÖLÜM 5

JACOBSTHAL, JACOBSTHAL LUCAS VE GENELLEŞTİRİLMİŞ JACOBSTHAL ELEMANLI DAİRESEL MATRİSLERİN NÖRMLARININ ALT VE ÜST SINIRLARI

Jacobsthal elemanlı dairesel matrislerin, Jacobsthal elemanlarına bağı olarak normlarının alt ve üst sınırları, ayrıca Jacobsthal Lucas ve genelleştirilmiş Jacobsthal elemanlı dairesel matrislerin Jacobsthal elemanlarına bağı olarak normlarının alt ve üst sınırları aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

Teorem 5.1. Elemanları Jacobsthal sayılarından oluşan $a_{ij} = j_{(\text{mod}(j-i,n))}$ olacak şekilde n – kare $A = [a_{ij}]$ matrisi veriliyor. Bu takdirde;

$$\frac{1}{3}\sqrt{j_{2n} + n + 2(-1)^n j_n} \leq \|A\|_2 \leq \frac{1}{3}\sqrt{(j_{2n} + n + 2(-1)^n j_n)(1 + \frac{1}{9}[j_{2n} + n + 2(-1)^n j_n])} \quad (5.1)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\|\cdot\|_2$ spektral normdur.

İspat :

$$A = \begin{bmatrix} j_0 & j_1 & j_2 & \cdots & j_{n-1} \\ j_{n-1} & j_0 & j_1 & \cdots & j_{n-2} \\ j_{n-2} & j_{n-1} & j_0 & \cdots & j_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere normlar arasında

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_E \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_E$$

şeklinde bir bağıntı olduğunu biliyoruz. Frobenius normunun tanımından ve (4.1) den hareketle

$$\|A\|_E^2 = n \sum_{s=0}^{n-1} J_s^2 = \frac{n}{9} (j_{2n} + n + 2(-1)^n j_n)$$

olup,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_E = \frac{1}{3} \sqrt{j_{2n} + n + 2(-1)^n j_n}$$

dir. Buradan,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_E \leq \|A\|_2$$

ifadesinden hareketle

$$\frac{1}{3} \sqrt{j_{2n} + n + 2(-1)^n j_n} \leq \|A\|_2$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $A = B \circ C$ olacak şekilde,

$$B = (b_{ij}) = \begin{cases} b_{ij} = J_{(\text{mod}(j-i, n))} & i \geq j \\ b_{ij} = 1 & i < j \end{cases}$$

$$C = (c_{ij}) = \begin{cases} c_{ij} = J_{(\text{mod}(j-i, n))} & i < j \\ c_{ij} = 1 & i \geq j \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} j_0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ j_{n-1} & j_0 & 1 & \dots & 1 \\ j_{n-2} & j_{n-1} & j_0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j_1 & j_{n-1} & j_{n-1} & \dots & j_0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} j_0 & j_1 & j_2 & \dots & j_{n-1} \\ 1 & j_0 & j_1 & \dots & j_{n-2} \\ 1 & 1 & j_0 & \dots & j_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & j_0 \end{bmatrix}$$

matrisleri verilsin. O takdirde,

$$r_1(B) = \max_i \sqrt{\sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n |b_{nj}|^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} J_s^2} = \frac{1}{3} \sqrt{j_{2n} + n + 2(-1)^n j_n}$$

ve

$$c_1(C) = \max_j \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{in}|^2} = \sqrt{1 + \sum_{s=1}^{n-1} J_s^2} = \sqrt{1 + \frac{j_{2n} + n + 2(-1)^n j_n}{9}}$$

Buradan,

$$r_1(B)c_1(C) = \frac{1}{3} \sqrt{(j_{2n} + n + 2(-1)^n j_n)(1 + \frac{1}{9}[j_{2n} + n + 2(-1)^n j_n])}$$

olup, dolayısıyla (2.4) den,

$$\|A\|_2 \leq \frac{1}{3} \sqrt{(j_{2n} + n + 2(-1)^n j_n)(1 + \frac{1}{9}[j_{2n} + n + 2(-1)^n j_n])}$$

elde edilir.

Teorem 5.2. $a_{ij} = C_{(\text{mod}(j-i,n))}$ olacak şekilde Jacobsthal Lucas sayılarından oluşan dairesel n -kare $A = [a_{ij}]$ matrisi veriliyor. O takdirde bu matrisin spektral normu için alt ve üst sınırlar,

$$\|A\|_2 \geq \sqrt{j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n} \quad (5.2)$$

ve

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{(j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n)(1 + j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n)} \quad (5.3)$$

şeklindedir.

İspat :

$$A = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \dots & c_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere Frobenius normunun tanımından hareketle,

$$\|A\|_E^2 = n \sum_{s=0}^{n-1} C_s^2 = n(c_{2n} + n - 2(-1)^n c_n)$$

dir. Böylece, (4.1) ifadesinden

$$\frac{1}{n} \|A\|_E^2 = j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n$$

ve

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_E = \sqrt{j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n}$$

dir. Buradan,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_E \leq \|A\|_2$$

ifadesinden hareketle

$$\|A\|_2 \geq \sqrt{j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n}$$

elde edilir. Diğer taraftan $A = B \circ C$ olacak şekilde,

$$B = (b_{ij}) = \begin{cases} b_{ij} = C_{(\text{mod}(j-i, n))} & i \geq j \\ b_{ij} = 1 & i < j \end{cases}$$

$$C = (c_{ij}) = \begin{cases} c_{ij} = C_{(\text{mod}(j-i, n))} & i < j \\ c_{ij} = 1 & i \geq j \end{cases}$$

matrisleri verilsin. O takdirde,

$$r_1(B) = \max_i \sqrt{\sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} C_s^2} = \sqrt{j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n}$$

elde edilir. Ayrıca (4.5) dikkate alınırca,

$$c_1(C) = \max_j \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{in}|^2} = \sqrt{1 + \sum_{s=1}^{n-1} C_s^2}$$

$$c_1(C) = \sqrt{j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n + 1}$$

elde edilir. Böylece,

$$r_1(B)c_1(C) = \sqrt{(j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n)(1 + j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n)}$$

bulunur. Dolayısıyla (2.4) den,

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{(j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n)(1 + j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n)}$$

ispat tamamlanır.

Sonuç 5.3. A matrisi Teorem 5.1 deki matris ve B matrisi Teorem 5.2 deki matris olmak üzere, bu matrislerin Hadamard çarpımının spektral normu için

$$\|A \circ B\|_2 \leq \frac{1}{3} \sqrt{(j_{2n} + n + 2(-1)^n j_n) \left(\frac{1}{9} [j_{2n} + n + 2(-1)^n j_n] + 1 \right) \sqrt{(j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n)(1 + j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n)}} \quad (5.4)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat : $\|A \circ B\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$ olduğundan, Teorem 5.1 ve Teorem 5.2 den ispatı açıktır.

Sonuç 5.4. A matrisi Teorem 5.1 deki matris ve B matrisi Teorem 5.2 deki matris olmak üzere, A ve B matrislerinin Kronecker çarpımının Euclidean normu için

$$\|A \otimes B\|_E = \frac{n}{9} (j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n)(j_{2n} + n + 2(-1)^n j_n) \quad (5.5)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat :

$$\|A \otimes B\|_E^2 = \|A\|_E^2 \|B\|_E^2 = \left(n \sum_{s=0}^{n-1} J_s^2 \right) \left(n \sum_{s=0}^{n-1} C_s^2 \right)$$

Teorem 5.1 ve Teorem 5.2 den hareketle,

$$\|A \otimes B\|_E^2 = n^2 \frac{1}{81} (j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n)(j_{2n} + n + 2(-1)^n j_n)$$

elde edilir. Buradan da,

$$\|A \otimes B\|_E = \frac{n}{9} (j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n)(j_{2n} + n + 2(-1)^n j_n)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 5.6. Elemanları Genelleştirilmiş Jacobsthal sayıları olan $a_{ij} = G_{(\text{mod}(j-i,n))}$ olacak şekilde n – kare $A = [a_{ij}]$ matrisi veriliyor. O takdirde;

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sqrt{X^2 j_{2n} + Y^2 n + 2XY(-1)^n j_n} &\leq \|A\|_2 \\ &\leq \frac{1}{3} \sqrt{(X^2 j_{2n} + Y^2 n + 2XY(-1)^n j_n)(1 + \frac{1}{9} [X^2 j_{2n} + Y^2 n + 2XY(-1)^n j_n])} \end{aligned}$$

dir. Burada $\|\cdot\|_2$ spektral norm ve J 'ler de Jacobsthal sayılarıdır.

Not:

$X = 2b + 2a$ ve $Y = 2a - b$ olmak üzere genelleştirilmiş Jacobsthal sayılarını X ve Y sayılarına bağlı olarak

$$G_n = bJ_n + 2aJ_{n-1} = b \left(\frac{2^n - (-1)^n}{3} \right) + 2a \left(\frac{2^{n-1} - (-1)^{n-1}}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{3} [2^{n-1}(2b + 2a) - (-1)^{n-1}(-b + 2a)]$$

$$= \frac{1}{3} [X 2^{n-1} - Y(-1)^{n-1}]$$

İspat :

$$A = \begin{bmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_{n-1} \\ g_{n-1} & g_0 & g_1 & \cdots & g_{n-2} \\ g_{n-2} & g_{n-1} & g_0 & \cdots & g_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere normlar arasında

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_E \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_E$$

şeklinde bir bağıntı olduğunu biliyoruz. Frobenius normunun tanımından ve Teorem 5 den hareketle,

$$\|A\|_E^2 = n \sum_{s=0}^{n-1} G_s^2 = \frac{n}{9} (X^2 j_{2n} + Y^2 n + 2XY(-1)^n j_n)$$

olup,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_E = \frac{1}{3} \sqrt{X^2 j_{2n} + Y^2 n + 2XY(-1)^n j_n}$$

dir. Buradan,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_E \leq \|A\|_2$$

ifadesinden hareketle

$$\frac{1}{3} \sqrt{X^2 j_{2n} + Y^2 n + 2XY(-1)^n j_n} \leq \|A\|_2$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $A = B \circ C$ olacak şekilde,

$$B = (b_{ij}) = \begin{cases} b_{ij} = G_{(\text{mod}(j-i,n))} & i \geq j \\ b_{ij} = 1 & i < j \end{cases}$$

$$C = (c_{ij}) = \begin{cases} c_{ij} = G_{(\text{mod}(j-i,n))} & i < j \\ c_{ij} = 1 & i \geq j \end{cases}$$

matrisleri verilsin. O takdirde,

$$r_1(B) = \max_i \sqrt{\sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n |b_{nj}|^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} G_s^2} = \frac{1}{3} \sqrt{X^2 j_{2n} + Y^2 n + 2XY(-1)^n j_n}$$

ve

$$c_1(C) = \max_j \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{in}|^2} = \sqrt{1 + \sum_{s=1}^{n-1} G_s^2} = \sqrt{1 + \frac{X^2 j_{2n} + Y^2 n + 2XY(-1)^n j_n}{9}}$$

Buradan,

$$r_1(B)c_1(C) = \frac{1}{3} \sqrt{(X^2 j_{2n} + Y^2 n + 2XY(-1)^n j_n) \left(1 + \frac{1}{9} [X^2 j_{2n} + Y^2 n + 2XY(-1)^n j_n]\right)}$$

olup, dolayısıyla (2.4) den,

$$\|A\|_2 \leq \frac{1}{3} \sqrt{(X^2 j_{2n} + Y^2 n + 2XY(-1)^n j_n) \left(1 + \frac{1}{9} [X^2 j_{2n} + Y^2 n + 2XY(-1)^n j_n]\right)}$$

elde edilir.

BÖLÜM 6

ELEMENLARI k -JACOBSTHAL k - JACOBSTHAL LUCAS SAYILARI OLAN DAİRESEL MATRİSLER İÇİN ALT VE ÜST SINIRLAR

k -Jacobsthal ve k -Jacobsthal Lucas elemanlı dairesel matrislerin, k -Jacobsthal elemanlarına bağlı olarak spektral normlarının alt ve üst sınırları verilmiştir.

Bu bölümde ayriyeten Kronecker ve Hadamard çarpımları için de sınırlar elde edilmiştir.

Tanım 6.1. (k-Jacobsthal dizisi) Her $k > 0$ reel sayısı için başlangıç şartları $j_{k,0} = 0, j_{k,1} = 1$ olan

$$j_{k,n+2} = kj_{k,n+1} + 2j_{k,n} \quad n \geq 0$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{j_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine k -Jacobsthal dizisi denir. $k=1$ alınırsa Jacobsthal dizisi elde edilir.

Tanım 6.2. (k-Jacobsthal Lucas dizisi) Her $k > 0$ reel sayısı için başlangıç şartları $c_{k,0} = 2$ ve $c_{k,1} = k$ olan

$$c_{k,n+2} = kc_{k,n+1} + 2c_{k,n} \quad n \geq 0$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan $\{c_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine k -Jacobsthal Lucas dizisi denir. $k=1$ alınırsa Jacobsthal Lucas dizisi elde edilir.

Teorem 6.3. $a_{ij} = J_{(\text{mod}(j-i,n))}$ olacak şekilde n -kare $A = [a_{ij}]$ dairesel matrisi veriliyor.

O takdirde;

$$\sqrt{\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_{k,n} \right) \frac{1}{k^2 + 8}} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{\left[\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_{k,n} \right) \frac{1}{k^2 + 8} \right]} \quad (6.1)$$

$$\sqrt{\left[\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_{k,n} \right) \frac{1}{k^2 + 8} + 1 \right]}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat :

$$A = \begin{bmatrix} j_{k,0} & j_{k,1} & j_{k,2} & \cdots & j_{k,n-1} \\ j_{k,n-1} & j_{k,0} & j_{k,1} & \cdots & j_{k,n-2} \\ j_{k,n-2} & j_{k,n-1} & j_{k,0} & \cdots & j_{k,n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ j_{k,1} & j_{k,2} & j_{k,3} & \cdots & j_{k,0} \end{bmatrix}$$

olmak üzere normlar arasında

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_E \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_E$$

şeklinde bir bağıntı olduğunu biliyoruz. Frobenius normunun tanımından hareketle

$$\|A\|_E^2 = n \sum_{s=0}^{n-1} j_{k,s}^2 = n \frac{1}{k^2 + 8} \left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_{k,n} \right)$$

olup,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_E = \sqrt{\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_{k,n} \right) \frac{1}{k^2 + 8}}$$

dir. Buradan,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_E \leq \|A\|_2$$

ifadesinden hareketle

$$\sqrt{\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_{k,n} \right) \frac{1}{k^2 + 8}} \leq \|A\|_2$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $A = B \circ C$ olacak şekilde,

$$B = (b_{ij}) = \begin{cases} b_{ij} = J_{(\text{mod}(j-i,n))} & i \geq j \\ b_{ij} = 1 & i < j \end{cases}$$

$$C = (c_{ij}) = \begin{cases} c_{ij} = J_{(\text{mod}(j-i,n))} & i < j \\ c_{ij} = 1 & i \geq j \end{cases}$$

matrisleri verilsin. O takdirde,

$$r_1(B) = \max_i \sqrt{\sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n |b_{nj}|^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} j_{k,s}^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_{k,n} \right) \frac{1}{k^2 + 8}}$$

ve

$$c_1(C) = \max_j \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{in}|^2} = \sqrt{1 + \sum_{s=1}^{n-1} j_{k,s}^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_{k,n} \right) \frac{1}{k^2 + 8} + 1}$$

Buradan,

$$r_1(B)c_1(C) = \sqrt{\left[\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_{k,n} \right) \frac{1}{k^2 + 8} \right]}.$$

$$\sqrt{\left[\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_{k,n} \right) \frac{1}{k^2 + 8} + 1 \right]}$$

olup, dolayısıyla (2.4) den,

$$\|A\|_2 \leq$$

$$\sqrt{\left[\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_{k,n} \right) \frac{1}{k^2 + 8} \right]}.$$

$$\sqrt{\left[\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_{k,n} \right) \frac{1}{k^2 + 8} + 1 \right]}$$

elde edilir.

Teorem 6.4. $a_{ij} = C_{(\text{mod}(j-i,n))}$ olacak şekilde n – kare $A = [a_{ij}]$ matrisi veriliyor. O takdirde,

$$\|A\|_2 \geq \sqrt{\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_n \right)} \quad (6.2)$$

ve

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_n \right)} \quad (6.3)$$

dir.

İspat :

$$A = \begin{bmatrix} c_{k,0} & c_{k,1} & c_{k,2} & \dots & c_{k,n-1} \\ c_{k,n-1} & c_{k,0} & c_{k,1} & \dots & c_{k,n-2} \\ c_{k,n-2} & c_{k,n-1} & c_{k,0} & \dots & c_{k,n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k,1} & c_{k,2} & c_{k,3} & \dots & c_{k,0} \end{bmatrix}$$

olmak üzere Frobenius normunun tanımından hareketle,

$$\|A\|_E^2 = n \sum_{s=0}^{n-1} C_{k,s}^2 = n \left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_n \right)$$

dir. Böylece,

$$\frac{1}{n} \|A\|_E^2 = \left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_n \right)$$

ve

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_E = \sqrt{\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_n \right)}$$

dir. Buradan,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_E \leq \|A\|_2$$

ifadesinden hareketle

$$\|A\|_2 \geq \sqrt{\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_n \right)}$$

elde edilir. Diğer taraftan $A = B \circ C$ olacak şekilde,

$$B = (b_{ij}) = \begin{cases} b_{ij} = C_{(\text{mod}(j-i,n))} & i \geq j \\ b_{ij} = 1 & i < j \end{cases}$$

$$C = (c_{ij}) = \begin{cases} c_{ij} = C_{(\text{mod}(j-i,n))} & i < j \\ c_{ij} = 1 & i \geq j \end{cases}$$

matrisleri verilsin. O takdirde,

$$r_1(B) = \max_i \sqrt{\sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} c_{k,s}^2} = \sqrt{\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_n \right)}$$

elde edilir.

$$c_1(C) = \max_j \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{in}|^2} = \sqrt{1 + \sum_{s=1}^{n-1} C_{k,s}^2}$$

$$c_1(C) = \sqrt{\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_n \right) + 1}$$

elde edilir. Böylece,

$$r_1(B)c_1(C) = \sqrt{\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_n \right)} \sqrt{\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_n + 1 \right)}$$

bulunur.

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_n \right)} \sqrt{\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_n + 1 \right)}$$

ispat tamamlanır.

Sonuç 6.5. A matrisi Teorem 6.1 deki matris ve B matrisi Teorem 6.2 deki matris olmak üzere, bu matrislerin Hadamard çarpımının spektral normu için

$$\|A \circ B\|_2 \leq \sqrt{\left[\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_{k,n} \right) \frac{1}{k^2 + 8} \right]^x \left[\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_{k,n} \right) \frac{1}{k^2 + 8} + 1 \right]^x}$$

$$\sqrt{\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_n \right) \left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_n + 1 \right)} \quad (6.4)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat : $\|A \circ B\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$ olduğundan, Teorem 6.1 ve Teorem 6.2 den ispatı açıktır.

Sonuç 6.6. A matrisi Teorem 6.1 deki matris ve B matrisi Teorem 6.2 deki matris olmak üzere, A ve B matrislerinin Kronecker çarpımının Euclidean normu için

$$\|A \otimes B\|_E = n \left[\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_{k,n} \right) \frac{1}{k^2 + 8} \right] \left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_n \right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat :

$$\|A \otimes B\|_E^2 = \|A\|_E^2 \|B\|_E^2 = \left(n \sum_{s=0}^{n-1} J_{k,s}^2 \right) \left(n \sum_{s=0}^{n-1} C_{k,s}^2 \right)$$

Teorem 6.1 ve Teorem 6.2 den hareketle,

$$\|A \otimes B\|_E^2 =$$

$$n^2 \left[\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_{k,n} \right) \frac{1}{k^2 + 8} \right] \left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_n \right)$$

elde edilir. Buradan da,

$$\|A \otimes B\|_E = n \sqrt{\left[\left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_{k,n} \right) \frac{1}{k^2 + 8} \right] \cdot \left(\frac{4c_{k,2n-2} - c_{k,2n} - c_{k,2} + 2}{5 - c_{k,2}} + 2(-1)^n j_n \right)}$$

şeklinde elde edilir.

BÖLÜM 7

ELEMENLARI JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL LUCAS SAYILARI OLAN r -DAİRESEL MATRİSLER İÇİN ALT VE ÜST SINIRLAR

Bu bölümde elemanları Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıları olan r -dairesele matrislerin spektral normları için alt ve üst sınırlar elde edilerek Kronecker ve Hadamard çarpımları için de sınırlar elde edilmiştir.

Teorem 7.1. A , elemanları Jacobsthal sayılarından oluşan bir r dairesele matris olmak üzere

(i) $r \geq 1$ için

$$\sqrt{\frac{j_{2n} + n + 2(-1)^n j_n}{9}} \leq \|A\|_2 \leq |r| \frac{j_{2n} + n + 2(-1)^n j_n}{9}$$

(ii) $r \leq 1$ için

$$|r| \sqrt{\frac{j_{2n} + n + 2(-1)^n j_n}{9}} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{\frac{(n-1)(j_{2n} + n + 2(-1)^n j_n)}{9}}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat: A matrisi

$$A = \begin{bmatrix} j_0 & j_1 & j_2 & \cdots & j_{n-1} \\ rj_{n-1} & j_0 & j_1 & \cdots & j_{n-2} \\ rj_{n-2} & rj_{n-1} & j_0 & \cdots & j_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ rj_1 & rj_2 & rj_3 & \cdots & j_0 \end{bmatrix}$$

(i) $r \geq 1$ için

$$\begin{aligned} \|A\|_E^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-1)j_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k|r|^2 j_k^2 \\ &\geq \sum_{k=0}^{n-1} (n-1)j_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k j_k^2 = n \sum_{k=0}^{n-1} j_k^2 \\ &= \frac{n}{9} [j_{2n} + 2(-1)^n j_n + n] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{3} \left[\sqrt{j_{2n} + 2(-1)^n j_n + n} \right] \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_E \leq \|A\|_2$$

Diğer yandan $A = B \circ C$

$$B = \begin{bmatrix} rj_0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ rj_{n-1} & rj_0 & 1 & \dots & 1 \\ rj_{n-2} & rj_{n-1} & rj_0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ rj_1 & rj_{n-1} & rj_{n-1} & \dots & rj_0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} j_0 & j_1 & j_2 & \dots & j_{n-1} \\ 1 & j_0 & j_1 & \dots & j_{n-2} \\ 1 & 1 & j_0 & \dots & j_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & j_0 \end{bmatrix}$$

$$r_1(B) = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n |b_{nj}|^2} = \sqrt{|r|^2 \sum_{k=0}^{n-1} j_k^2} = \frac{|r|}{3} \sqrt{j_{2n} + n + 2(-1)^n j_n}$$

$$c_1(C) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{in}|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} j_k^2} = \frac{1}{3} \sqrt{j_{2n} + n + 2(-1)^n j_n}$$

kullanılarak aşağıdaki elde edilir.

$$\|A\|_2 \leq r_1(B) c_1(C) = \frac{|r|}{9} [j_{2n} + 2(-1)^n j_n + n]$$

$$\frac{1}{3} \sqrt{j_{2n} + 2(-1)^n j_n + n} \leq \|A\|_2 \leq \frac{|r|}{9} [j_{2n} + 2(-1)^n j_n + n]$$

Buradan (i) nin ispatı tamamlanır.

(ii) $r \leq 1$

$$\begin{aligned} \|A\|_E^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) j_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k |r|^2 j_k^2 \\ &\geq \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) |r|^2 j_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k |r|^2 j_k^2 = n |r|^2 \sum_{k=0}^{n-1} j_k^2 \\ &= \frac{|r|^2 n}{9} [j_{2n} + 2(-1)^n j_n + n] \end{aligned}$$

$$\frac{|r|}{3} \sqrt{j_{2n} + 2(-1)^n j_n + n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_E \leq \|A\|_2$$

Diğer yandan $A = B \circ C$

$$B = \begin{bmatrix} j_0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ r & j_0 & 1 & \dots & 1 \\ r & r & j_0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r & r & r & \dots & j_0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} j_0 & j_1 & j_2 & \dots & j_{n-1} \\ j_{n-1} & j_0 & j_1 & \dots & j_{n-2} \\ j_{n-2} & j_{n-1} & j_0 & \dots & j_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_0 \end{bmatrix}$$

$$r_1(B) = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2} = \sqrt{j_0^2 + (n-1)} = \sqrt{n-1}$$

$$c_1(C) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} j_k^2} = \frac{1}{3} \sqrt{j_{2n} + n + 2(-1)^n j_n}$$

Buradan

$$\|A\|_2 \leq r_1(B)c_1(C) = \sqrt{\frac{(n-1)(j_{2n} + 2(-1)^n j_n + n)}{9}}$$

elde edilir.

Böylece ispat tamamlanır. Bu iki sonuç birleştirilirse aşağıdaki elde edilir.

$$\frac{|r|}{3} \sqrt{j_{2n} + 2(-1)^n j_n + n} \leq \|A\|_2 \leq \frac{1}{3} \sqrt{(n-1)(j_{2n} + 2(-1)^n j_n + n)}$$

Teorem 7.2. A elemanları Jacobsthal Lucas sayılarından oluşan bir r dairesel matris olmak üzere

(i) $r \geq 1$ için

$$\sqrt{j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{(4 + |r|^2)(j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n - 4))(j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n - 3)}$$

(ii) $r \leq 1$ için

$$|r| \sqrt{j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n(j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n)}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat:

$$A = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ rc_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ rc_{n-2} & rc_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ rc_1 & rc_2 & rc_3 & \cdots & c_0 \end{bmatrix}$$

(i) $r \geq 1$ için

$$\begin{aligned} \|A\|_E^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)c_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k|r|^2 c_k^2 \\ &\geq \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)c_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} kc_k^2 = n \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2 \\ &= n[j_{2n} - 2(-1)^n j_n + n] \\ \sqrt{j_{2n} - 2(-1)^n j_n + n} &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_E \leq \|A\|_2 \end{aligned}$$

Diğer yandan, $A = B \circ C$

$$B = \begin{bmatrix} c_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ rc_{n-1} & c_0 & 1 & \cdots & 1 \\ rc_{n-2} & rc_{n-1} & c_0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ rc_1 & rc_2 & rc_3 & \cdots & c_0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ 1 & 1 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} r_1(B) &= \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n-1} |b_{nj}|^2} = \sqrt{c_0^2 + |r|^2 \sum_{k=1}^{n-1} c_k^2} = \sqrt{4 + |r|^2 \sum_{k=1}^{n-1} c_k^2} \\ &= 4 + |r|^2 [j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n - 4] \end{aligned}$$

$$c_1(C) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{in}|^2} = \sqrt{1 + |r|^2 \sum_{k=1}^{n-1} c_k^2} = \sqrt{j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n - 3}$$

bu sonuçlar kullanılırsa,

$$\|A\|_2 \equiv \|B \circ C\| \leq \sqrt{(4 + |r|^2 (j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n - 4))(j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n - 3)}$$

elde edilir.

(ii) $r \leq 1$ için

$$\begin{aligned}\|A\|_E^2 &\geq \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)|r|^2 c_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k|r|^2 c_k^2 = n|r|^2 \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2 \\ \sqrt{|r|^2 \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2} &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_2 \\ &= |r| \sqrt{(j_{2n} - 2(-1)^n j_n + n)}\end{aligned}$$

Diğer yandan $A = B \circ C$

$$B = \begin{bmatrix} r & 1 & 1 & \dots & 1 \\ r & r & 1 & \dots & 1 \\ r & r & r & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r & r & r & \dots & r \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \dots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_0 \end{bmatrix}$$

$$r_1(B) = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2} = \sqrt{n}$$

$$c_1(C) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} c_k^2} = \sqrt{j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n}$$

$$\|A\|_2 \equiv \|B \circ C\| \leq r_1(B) c_1(C) \leq \sqrt{n(j_{2n} - 2(-1)^n j_n + n)}$$

$$|r| \sqrt{j_{2n} - 2(-1)^n j_n + n} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n(j_{2n} - 2(-1)^n j_n + n)}$$

buradan ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 7.3. A elemanları Jacobsthal sayılarından oluşan bir r dairesel matris, B elemanları Jacobsthal Lucas sayılarından oluşan bir r dairesel matris olmak üzere olmak üzere bu iki matrisin Hadamard çarpımı

(i) $r \geq 1$ için

$$\|A \circ B\|_2 \leq |r| \frac{j_{2n} + 2(-1)^n j_n + n}{9} \sqrt{(4 + |r|^2 (j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n - 4))(j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n - 3)}$$

(ii) $r \leq 1$ için

$$\|A \circ B\|_2 \leq \sqrt{\frac{(n-1)(j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n)}{9} (n(j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n))}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 7.4. A elemanları Jacobsthal sayılarından oluşan bir r dairesel matris, B elemanları Jacobsthal Lucas sayılarından oluşan bir r dairesel matris olmak üzere olmak üzere bu iki matrisin Kronecker çarpımı

(i) $r \geq 1$ için

$$\|A \otimes B\|_2 \geq \sqrt{\left(\frac{j_{2n} + 2(-1)^n j_n + n}{9}\right) (j_{2n} - 2(-1)^n j_n + n)}$$

(ii) $r \leq 1$ için

$$\|A \otimes B\|_2 \geq \sqrt{(j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n)(j_{2n} + n - 2(-1)^n j_n)}$$

şeklinde elde edilir.

BÖLÜM 8

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmamızda elemanları Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas olan dairesel marislerin spektral normları için alt ve üst sınırlar elde edilmiştir. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas bir genelleştirilmiş dizisi olan k - Jacobsthal ve k -Jacobsthal Lucas dizisi elde edilerek bu diziyle oluşturulan dairesel marislerin spektral normları için alt ve üst sınırlar elde edilmiştir. Ayrıca elemanları Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıları olan dairesel matrislerin özel bir türü olan k - dairesel matrislerin normları için de sınırlar elde edilmiştir.

Tezimizle ilgili “Some Bounds for the Norms of Circulant Matrices with the k - Jacobsthal and k - Jacobsthal Lucas Numbers” , “ On the Bounds for the Norms of r -circulant Matrices with the Jacobsthal and Jacobsthal Lucas Numbers.”adı ile International Journal of Pure and Applied Mathematics dergisinde ve “On the Bounds for the Norms of Circulant matrices with the Jacobsthal and Jacobsthal Lucas Numbers” adı ile Notes on Number Theory and Discrete Mathematics dergisinde makalelerimiz yayınlanmıştır. Mersin’ de yapılan 29.Ulusal Matematik Sempozyumu adlı konferansta “Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Dairesel Matrislerinin Normları için Sınırlar” adı ile bir sunum yapılmıştır.

Bu çalışmaya benzer olarak farklı sayı dizileriyle oluşturulan çeşitli tipteki dairesel matrislerin spektral normları için de sınırlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

- Akbulut, M., Bozkurt, D. (2008). On the norms of Hankel matrices involving Fibonacci and Lucas numbers. *Selçuk Journal Of Applied Mathematics*, **9(2)**, 45-52.
- Bahsi, M. (2015). On the norms of circulant matrices with the generalized Fibonacci and Lucas numbers. *TWMS J. Pure Appl. Math*, **6(1)**, 84-92
- Bahsi, M. (2016). On the norms of circulant matrices with the hyperharmonic numbers. *J. Math. Inequal*, **10(2)**, 445-458
- Bahsi, M., Solak, S. (2014). On the norms of circulant matrices with the hyper-Fibonacci and Lucas numbers. *J. Math. Inequal*, **8(4)**, 693-705
- Banidomi, W., Kittaneh, F. (2008). Norm equalites and inequalities for operator matrices, *Linear Algebra Appl*, **429**, 57-67.
- Bozkurt, D., Tam, T. (2012). Determinants and inverses of circulant matrices with Jacobsthal and Jacobsthal Lucas numbers. *Applied Mathematics and Computations*, **219**, 544-551.
- Cerin, Z. (2007). Sums of squares and products of Jacobsthal numbers. *Journal of Integer Sequences*, **(10)**, 07.2.5.
- Falcon, S. (2007). On the Fibonacci k -numbers. *Chaos, Solitions&Fractals*, **32(5)**, 1615-1624.
- Falcon, S. (2011). On the k -Lucas numbers. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, **6(21)**, 1039-1050.
- Horadam, A. F. (1996). Jacobsthal Representation Numbers, *The Fibonacci Quarterly*, **34(1)**, 40-54.

Horn, R.A., Johnson, C.R.(1991). Topics in Matrix Analysis, *Cambridge University Press, Cambridge*.

Ipek, A. (2011). On the spectral norms of circulant matrices with classical Fibonacci and Lucas numbers entries. *Applied Mathematics and Computation*, **217**, 6011-6012.

Jhala, D. (2014). Some properties of the k -Jacobsthal Lucas sequence. *International Journal of Modern Sciences and Engineering Technology (IJMSET)*, **1(3)**, 87-92.

Jhala, D., Sisodiya, K., Rathore, G.P.S. (2013). On some identities for k -Jacobsthal numbers. *Int. Journal of Math. Analysis*, **7(12)**, 551-556.

Jiang, Z., Zhou, Z. (2015). A note on spectral norms of even order r -circulant matrices. *Appl. Math. Comput*, **250**, 363-371.

Kızılates, C., Tuglu, N. (2016). On the bounds for the spectral norms of geometric circulant matrices. *Journal of Inequalities and Applications*, **312**, 1-15.

Koçer, E.G. (2007). Circulant, negacyclic and semicirculant matrices with the modified Pell, Jacobsthal and Jacobsthal Lucas numbers. *Hacettepe J. Math. and Statistics*, **36(2)**, 133-142.

Koken, F. (2008). Applications and properties of Jacobsthal and Jacobsthal Lucas numbers. M.S. Thesis, *Selçuk University, Konya, Turkey*.

Koken, F., Bozkurt, D. (2008). On the Jacobsthal numbers by matrix methods. *Int. Jour. Contemp. Math Sciences*, **3(13)**, 605-614.

Koken, F., Bozkurt, D. (2008). On the Jacobsthal Lucas numbers by matrix methods. *Int. Jour. Contemp. Math Sciences*, **3(13)**, 1629-1633.

Koshy, T. (2001). Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, *John Wiley and Sons, Inc. NY*.

Mathias, R. (1990). The spectral norm of non negative matrix, *Linear Algebra and its Applications*, **131**, 269-284.

Öcal, A.A., Tuglu, N., Altinisik, E. (2005). On the representation of k -generalized Fibonacci and Lucas numbers. *Appl. Math. And Comput*, **170**, 584-596.

Shen, S., Cen, J. (2010). On the bounds for the norms of r -circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers, *Appl. Math. Comput*, **216**, 2891-2897.

Shen, S., Cen, J. (2010). On the spectral norms of r -circulant matrices with the k -Fibonacci and k -Lucas numbers, *Int J. Contemp.Math.Sciences*, **5 (12)**, 569-578.

Solak, S. (2005). On the norms of some special circulant matrices with Fibonacci and Lucas numbers. *Appl. Math. Comput*, **160**, 125-132.

Solak, S., Bozkurt, D. (2003). A note on bound for norms of Cauchy-Henkel matrices, *Numer. Linear Algebra Appl.*, **10**, 377-382.

Solak, S., Bahsi, M. (2011). On the spectral norms of Hankel matrices with Fibonacci and Lucas numbers. *Selçuk Journal of Applied Mathematics*, **12(1)**, 71-76

Reams, R. (1999). Hadamard inverses square roots and products of almost semi-definite matrices, *Linear Algebra and its Applications*, **288**, 35-43.

Tuglu, N., Kızılates, C. (2015). On the norms of circulant and r -circulant matrices with the hyperharmonic Fibonacci numbers. *J. Inequal. Appl.*, **253**, 1-11.

Tuglu, N., Kızılates, C. (2015). On the norms of some special matrices with the harmonic Fibonacci numbers. *Gazi Univ J. Sci.*, **28(3)**, 447-501.

Uslu, K., Taskara, N., Uygun, S. (2011). The relations among k -Fibonacci, k -lucas and generalized k -Fibonacci and k -Lucas numbers and the spectral norms of the matrices of involving these numbers. *Ars Combinatoria*, **102**, 183-192.

Uygun, S. (2016). Some Bounds for the Norms of Circulant Matrices with the k -Jacobsthal and k -Jacobsthal Lucas Numbers, *Journal of Mathematics Research*, **8(6)**, 133-138.

Uygun, S. (2015). The (s, t) Jacobsthal and (s, t) Jacobsthal Lucas sequences. *Applied Mathematical Sciences*, **70(9)**, 3467-3476.

Uygun, S., Eldogan, H. (2016). Properties of k - Jacobsthal and k - Jacobsthal Lucas matrix sequences. *International Mathematical Forum*, **11(3)**, 145-154.

Uygun, S. Yasamali, S., (2017). On the Bounds for the Norms of r -circulant Matrices with the Jacobsthal and Jacobsthal Lucas Numbers. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **112, 1**, 93-102.

Uygun, S. Yasamali, S. (2017). On the Bounds for the Norms of circulant matrices with the Jacobsthal and Jacobsthal Lucas Numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, **23, 1**, 91-98.

Weisstein, Eric W., 2006-05-15, Jacobsthal Number, WolframMath. world, [online], <http://mathworld.wolfram.com/JacobsthalNumber.html>, Retrieved 2007-10-03.

Yalçiner, A. (2008). Spectral norms of some special circulant matrices, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, **3(35)**, 1733-1738.

Yazlik, Y.,Taskara, N. (2012). Spectral norm, eigenvalues and determinant of circulant matrix involving generalized k - Horadam numbers. *Ars Comb.*, **104**, 505-512.

Yazlik, Y.,Taskara, N. (2013). On the norms of an r –circulant matrix with the generalized k -Horadam numbers, *Journal of Inequalities and Applications*, **394**, 36-41.

Zielke, G.(1988). Some remarks on matrix norms, condition numbers and error estimates for lineare quations, *Linear Algebra and its Applications*, **110**, 29-41.