

EYLÜL 2019

Yüksek Lisans Tezi - Matematik

HASAN AKKURT

**TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ELEMANLARI PELL VE PELL LUCAS SAYILARI OLAN
DAİRESEL MATRİSLERİN NORMLARI İÇİN SINIRLAR**

**MATEMATİK
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**HASAN AKKURT
EYLÜL 2019**

**ELEMANLARI PELL VE PELL LUCAS SAYILARI OLAN
DAİRESEL MATRİSLERİN NORMLARI İÇİN SINIRLAR**

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Şükran UYGUN

Hasan AKKURT

Eylül 2019

© 2019 [Hasan AKKURT]

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı : Elemanları Pell ve Pell Lucas Sayıları Olan Dairesel
Matrislerin Normları İçin Sınırlar

Öğrencinin, Adı Soyadı : Hasan AKKURT

Tez Savunma Tarihi : 5 Eylül 2019

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. A. Necmeddin YAZICI
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Adil KILIÇ
Enstitü Ana Bilim Dalı Başkanı

Bu tez tarafımda okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Şükran UYGUN
Danışman

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

İmzası

Doç. Dr. Abdullah KABLAN

.....

Dr. Öğr. Üyesi Bayram BALA

.....

Dr. Öğr. Üyesi Şükran UYGUN

.....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Hasan AKKURT

ABSTRACT

BOUNDS OF CIRCULANT MATRICES OF NORMS WITH PELL AND PELL LUCAS NUMBERS

AKKURT, Hasan

M.Sc. in Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Şükran UYGUN

September 2019

43 pages

In this study, firstly we define various norms, Kronecker product and Hadamard product basically and give relations among them. In addition we define briefly circulant matrix and give its some important properties. Then two of special integer sequences, Pell and Pell Lucas sequences are defined and describe some important identities and by using the variable $k \in R^+$ we obtain a generalization of Pell, Pell Lucas sequences called k - Pell, k -Pell Lucas sequences. Then, we find the sum of the first n terms of Pell, Pell Lucas, k - Pell, k - Pell Lucas numbers. By using these formulas we find out upper and lower bounds of the spectral norm for the circulant matrix with Pell, Pell Lucas, k - Pell, k - Pell Lucas sequences. Besides this, we give upper and lower bounds of the spectral norm for the r -circulant matrix with Pell, Pell Lucas sequences

Keywords: Pell, Pell Lucas ve k - Pell, k - Pell Lucas Sequences, Binet Formulas, Circulant, Matrices, Norm.

ÖZET

ELEMANLARI PELL VE PELL LUCAS SAYILARI OLAN DAİRESEL MATRİSLERİN NÖRMLARI İÇİN SINIRLAR

AKKURT, Hasan

Yüksek Lisans Tezi, Matematik

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Şükran UYGUN

Eylül 2019

43 sayfa

Bu çalışmamızda ilk olarak, çeşitli normlar, Kronecker çarpımı ve Hadamard çarpımı kısaca tanıtılıp aralarındaki bağıntılar verilecektir. Ayrıca dairesel matrisin tanımı yapıldıktan sonra bazı önemli özellikleri verilecektir. Sonra özel sayı dizilerinden olan Pell, Pell Lucas dizileri ve önemli bir takım özdeşlikler verilecektir ve $k \in R^+$ değişkeni kullanarak Pell, Pell Lucas dizilerinin bir genelleştirilmesi olan k - Pell, ve k - Pell Lucas dizileri tanıtılacaktır. Pell, Pell Lucas ve k - Pell, k - Pell Lucas sayılarının ilk n teriminin karelerinin toplam formülleri elde edilecektir. Bu formüller kullanılarak elemanları Pell, Pell Lucas ve k - Pell, k - Pell Lucas olan dairesel matrislerin spektral normları için alt ve üst sınırlar elde edilecektir. Ayrıca elemanları Pell, Pell Lucas sayıları olan r dairesel matrislerin spektral normları için de alt ve üst sınırlar verilecektir.

Anahtar Kelimeler: Pell, Pell Lucas ve k - Pell, k - Pell Lucas Dizileri, Binet Formülü, Dairesel Matrisler, Norm.

Çok kıymetli aileme...

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince desteğini, deneyimini ve emeğini hiçbir zaman benden esirgemeyen ve aynı zamanda kişiliğiyle de bana örnek olan Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden saygıdeğer hocam Dr. Öğr. Üyesi Şükran UYGUN'a, maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda bulunarak bu günlere gelmemde en büyük pay sahibi olan aileme ve tüm sevdiklerime minnettarlığımı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ABSTRACT	v
ÖZET.....	vi
TEŞEKKÜR	viii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ	xi
GİRİŞ	1
BÖLÜM 2.....	3
ÖN BİLGİLER.....	3
2.1. Matris Normları, Matrislerin Hadamard ve Kronecker Çarpımları	3
2.2. Dairesel (Circulant) Matris:	5
BÖLÜM 3.....	7
ÖZEL SAYI DİZİLERİ.....	7
3.1. Fibonacci ve Lucas Sayı Dizileri	7
3.2. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Dizileri.....	8
3.3. Pell , Pell Lucas ve Modifiye Pell Sayıları	9
3.4. k-Pell ve k-Pell Lucas ve Modifiye k-Pell Sayıları.....	13
BÖLÜM 4.....	16
ELEMANLARI PELL, PELL LUCAS ve MODİFİYE PELL SAYILARI OLAN DAİRESEL MATRİSLERİN NORMLARI İÇİN SINIRLAR.....	16
4.1. Elemanları Pell Sayıları Olan Dairesel Matrislerin Normları için Sınırlar	16
4.2. Elemanları Pell Lucas Sayıları Olan Dairesel Matrislerin Normları için Sınırlar	20
4.3. Elemanları Modifiye Pell Sayıları Olan Dairesel Matrislerin Normları için Sınırlar	23
BÖLÜM 5.....	25
ELEMANLARI k -PELL , k - PELL LUCAS VE MODİFİYE k -PELL SAYILARI OLAN DAİRESEL MATRİSLERİN NORMLARI İÇİN SINIRLAR.	25
5.1. Elemanları k-Pell Sayıları Olan Dairesel Matrislerin Normları için Sınırlar..	25

5.2.Elemanları k -Pell Lucas Sayıları Olan Dairesel Matrislerin Normları için Sınırlar	28
5.3.Elemanları Modifiye k -Pell Sayıları Olan Dairesel Matrislerin Normları için Sınırlar	31
BÖLÜM 6.....	34
PELL VE PELL LUCAS SAYILARI OLUŞAN r-DAİRESEL MATRİSLER İÇİN ALT VE ÜST SINIRLAR	34
6.1. Elemanları Pell Sayıları Olan r -Dairesel Matrislerin Normları için Sınırlar ..	34
6.2. Pell Lucas Sayıları Oluşan r -Dairesel Matrislerin Normları için Sınırlar.....	36
BÖLÜM 7.....	40
SONUÇ VE ÖNERİLER.....	40
KAYNAKLAR	41

SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ

f_n : Fibonacci sayı dizisinin n-inci elemanı

l_n : Lucas sayı dizisinin n-inci elemanı

j_n : Jacobsthal sayı dizisinin n-inci elemanı

c_n : Jacobsthal Lucas sayı dizisinin n-inci elemanı

P_n : Pell sayı dizisinin n-inci elemanı

Q_n : Pell Lucas sayı dizisinin n-inci elemanı

$P_{k,n}$: k PellLucas sayı dizisinin n-inci elemanı

$Q_{k,n}$: k PellLucas sayı dizisinin n-inci elemanı

GİRİŞ

Özel tamsayı dizileri sayılar teorisinde çok önemli bir yere sahiptir. Öncelikle tamsayı dizileri denilince ilk akla gelen, Fibonacci dizisidir. Bu sayı dizisinin elemanları ardışık iki elemanın toplanmasından elde edilir. Fibonacci dizisi en basit işlem yapılabilen sayılar $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ile başlar. Fibonacci dizisinin bu kadar önemli olmasının sebebi ardışık iki teriminin oranının sonsuz için limitinin “altın oran” olarak adlandırılan sayı olmasıdır. Altın oran doğada (çiçek ve ağaçlarda) sanatta, mimarlıkta, insan vücudunda vb. karşımıza çıkmaktadır. Fibonacci dizisi istenirse başlangıç elemanları değiştirilerek tamamen bu diziden bağımsız başka bir sayı dizisi de elde edilebilir. Bir örnek olarak Fransız matematikçi Edward Lucas başlangıç şartları için seçilebilecek $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ değerlerini kullanarak Lucas sayı dizilerini tanımlamıştır. Lucas sayı dizisi ve Fibonacci sayı dizisi arasında bir çok bağıntı mevcuttur. Literatürde farklı yineleme bağıntıları ve başlangıç şartları seçilerek çeşitli özel sayı dizileri elde edilir: Pell, Pell Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal Lucas, Mersenne, Horadam, Padovan gibi...

Dairesel ve r -dairesele matrisler son yıllarda birçok araştırmacının ilgisini çekmektedir. Dairesel matrisler, uygulamalı matematik alanında en ilginç araştırma alanlarından biridir. Bu matrislerin, sinyal işleme, kodlama teorisi, görüntü işleme, dijital görüntü oluşturma, olasılıkta doğrusal tahmin ve tasarımda çok çeşitli uygulamaları vardır.

Çeşitli özel sayı dizileri ile oluşturulan çeşitli tipteki dairesele matrislerin normları ile ilgili literatürde yapılmış olan bazı çalışmalar hakkında bilgi verelim. Solak (2005), Fibonacci ve Lucas sayılarıyla oluşan dairesele matrislerin spektral normlarını, Hadamard ve Kronecker çarpımlarının normlarının sınırlarını da bulmuştur. Kocer (2007), Horadam sayıları ile oluşan dairesele ve yarı-dairesel matris normlarını elde etmiştir.

Shen ve Cen (2010), Fibonacci ve Lucas sayılarıyla oluşturulan r -dairesele matrislerin normlarının sınırlarını bulmuşlardır. Benzer olarak Shen ve Cen

(2010), k -Fibonacci ve k -Lucas sayılarıyla oluşturulan r -daireseel matrislerin spektral normları için sınırlar bulmuşlardır. Uslu , Taskara , Uygun (2011), k -Fibonacci ve k -Lucas ve genelleştirilmiş k -Fibonacci sayıları ile oluşturulan daireseel matrislerin spektral normu için yine bu sayılara bağılı sınırlar elde etmiştir. Yazlık Taskara 2013'te genelleştirilmiş k -Horadam sayılarıyla bir r -daireseel matrisinin spektral normları için alt ve üst sınırlar verilmiştir. He, Ma, Zhang, Wang (2015) te, elemanları Fibonacci ve Lucas sayıları olan r -daireseel matrislerin spektrum normları için formüller elde etmiştir. Bahsi 2015'de, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan daireseel matrislerin spektrum normlarını hesaplamıştır. Kızılateş ve Tuglu 2016'da geometrik daireseel matrislerin spektral normları için sınırları bulan formüller elde etmiştir.

BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER

Bu bölümde öncelikle çeşitli matris normları, matrislerin Hadamard ve Kronecker çarpımı ile dairesel matris hakkında genel bilgi verilecektir.

2.1. Matris Normları, Matrislerin Hadamard ve Kronecker Çarpımları

A herhangi bir n -kare matris olmak üzere, matris normları ve matrislerin Hadamard ve Kronecker çarpımları ile ilgili bazı genel bilgileri verelim:

Tanım 2.1.1. A ve B herhangi n -kare matrisler olmak üzere,

a) $\|A\| \geq 0$ ve $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

b) c pozitif tamsayı olmak üzere, $\|cA\| = |c| \|A\|$,

c) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlayan $\|\cdot\| : R^{n \times n} \rightarrow R$ reel değerli fonksiyona genelleştirilmiş matris normu adı verilir ve $\|A\|$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.2. A herhangi bir $n \times n$ tipinde kare matris olmak üzere,

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

ifadesine A matrisinin ℓ_p normu adı verilir.

Eğer $p = \infty$ ise o takdirde,

$$\|A\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A\|_p = \max_{i,j} |a_{ij}|$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 2.1.3. A herhangi bir $n \times n$ tipinde kare matris olmak üzere,

$$\|A\|_E = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

ifadesine A matrisinin Frobenius (Euclidean) normu adı verilir.

Tanım 2.1.4. A herhangi bir $n \times n$ tipinde kare matris olmak üzere,

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A^H A)}$$

ifadesine ise A matrisinin spektral normu adı verilir. Burada: $A^H = (\bar{A})^T$ dır.

Yukarıda vermiş olduğumuz normlar arasında aşağıdaki şekilde bir ilişki mevcuttur (Zielke, 1988):

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_E \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_E \quad (2.1)$$

Tanım 2.1.5. A herhangi bir $n \times n$ tipinde kare matris olmak üzere sırasıyla,

$$c_1(A) = \max_j \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2} \quad (2.2)$$

$$r_1(A) = \max_i \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} \quad (2.3)$$

şeklinde A matrisinin maksimum sütun uzunluk normu $c_1(\cdot)$ ve maksimum satır uzunluk normunu da $r_1(\cdot)$ olarak tanımlanmıştır (Solak, 2005).

Tanım 2.1.6. $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ aynı tipten kare matrisler olmak üzere,

$$A \circ B = [a_{ij} \cdot b_{ij}]$$

şeklinde verilen çarpıma A ve B matrislerinin Hadamard çarpımı adı verilir.

A , X ve Y matrisleri $n \times n$ tipinde kare matrisler olmak üzere, eğer $A = X \circ Y$ ise

$$\|A\|_2 \leq r_1(X) c_1(Y) \quad (2.4)$$

eşitsizliği elde edilmiştir (Mathias R. 1990).

tarafından ise, $\|\cdot\|$ normu $n \times n$ tipinde matrisler üzerinde herhangi bir norm olmak üzere,

$$\|A \circ B\| \leq \|A\| \|B\| \quad (2.5)$$

eşitsizliği elde edilmiştir (Reams,1999).

Tanım 2.1.7. A ve B , $n \times n$ tipinde matrisler ise,

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nn}B \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan matris çarpımına Kronecker çarpım adı verilir.

İki matrisin Kronecker çarpımının Euclidean normu için

$$\|A \otimes B\|_E = \|A\|_E \|B\|_E \quad (2.6)$$

eşitlik sağlanır (Horn, 1991).

2.2. Dairesel (Circulant) Matris:

C matrisi n -kare bir matris olmak üzere,

$$C_n = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_3 & c_4 & c_5 & \dots & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n-1} & c_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilen matrise dairesel matris adı verilir. Her bir $i, j = 1, 2, \dots, n$ ve $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ için (i, j) elemanlarının hepsi $(j-i) \equiv k \pmod{n}$ olacak şekilde aynı c_k değerine sahiptir. Yani bir dairesel matris, onun ilk satırı (veya ilk sütunu) yardımıyla belirlenir.

$n \times n$ mertebeli dairesel matrisler için şunlar söylenebilir:

(i) A ve B aynı mertebeli dairesel matrisler ve a ile b herhangi iki skaler olmak üzere $aA + bB$ matrisi bir dairesel matristir.

(ii) Aynı mertebeli iki dairesel matrisin çarpımı yine bir dairesel matristir.

- (iii) Aynı mertebeli iki dairesel matrisin çarpımı değişme özelliğine sahiptir.
- (iv) Eğer bir dairesel matris tekil değilse, tersi de dairesel matristir.
- (v) Dairesel matrislerin transpozu da dairesel matristir.
- (vi) Dairesel matrisler normal matrislerdir.
- (vii) İlk satırı $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1})$ olan $n \times n$ mertebeli bir dairesel matris ve $w_k w^n = 1$ denkleminin farklı çözümlerinden biri olmak üzere dairesel matrisin özdeğerleri,

$$\lambda_k = a_0 + a_0 w_k + a_1 w_{k^2} + \dots a_{n-1} w_{k^{n-1}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

formülü ile bulunur. Ayrıca dairesel matrisin ilgili özvektörleri,

$$X_i = (1, w_k, w_{k^2}, \dots, w_{k^{n-1}})^T \text{ olur.}$$

BÖLÜM 3

ÖZEL SAYI DİZİLERİ

3.1. Fibonacci ve Lucas Sayı Dizileri

Tanım 3.1.1. $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere; $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine Fibonacci sayı dizisi denir. Fibonacci

dizisinin Binet benzeri formülü $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere

$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ şeklindedir. Binet formülünden hareketle $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha$ olduğu

kolayca görülmektedir. Buradaki α sayısı “Altın Oran” olarak adlandırılmaktadır. Altın Oran, bir sayının insanlık, bilim ve sanat tarihinde oynadığı inanılmaz bir roldür. Altın oran doğada, bitkilerde, çiçeklerde, ideal insan vücudunda, mimari eserlerde ve birçok alanda karşımıza çıkar. Altın oran, evren ve yaşamı anlama konusunda bizlere yeni kapılar açmaya devam etmektedir. Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$$

şeklinde olup Simpson formülü

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

bağıntısı ile tanımlanır.

Tanım 3.1.2. $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ olmak üzere; $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine Lucas sayı dizisi denir. Lucas dizisinin

Binet formülü $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere $L_n = \alpha^n + \beta^n$ şeklindedir.

Binet formülünden hareketle $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \alpha$ olduğu kolayca görülmektedir. Bu değer sayesinde Lucas sayı dizisi de en az Fibonacci sayı dizisi kadar önemli hale gelmiştir. Fibonacci sayıları ile Lucas sayıları arasında aşağıdaki bağıntılar mevcuttur.

$$L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n$$

$$F_n L_n = F_{2n}$$

$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n$$

Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n x^n = \frac{2x^2 + x}{1 - x - x^2}$$

şeklinde olup Simpson formülü

$$L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}$$

bağıntısı ile tanımlanır. Kısmi toplam formülü

$$\sum_{k=1}^n L_k = L_{n+2} - 3$$

şeklinde verilir (Koshy, 2001).

Fibonacci ve Lucas sayıları için Koshy 'nin (2001) kitabı önemli bir kaynaktır.

3.2. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Dizileri

Tanım 3.2.1. $j_0 = 0$, $j_1 = 1$ olmak üzere; $j_{n+1} = j_n + 2j_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{j_n\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki sayı dizisine Jacobsthal sayı dizisi denir. Yineleme bağıntısının fark denklemi $x^2 - x - 2 = 0$ şeklinde elde edilir. Bu denklemin kökleri 2 ve -1 sayılarıdır.

Jacobsthal sayıları için Binet formülü

$$j_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

(Catalan özdeşliği) $n > 0$ tamsayısı için

$$j_{n-r} j_{n+r} - j_n^2 = (-1)^{n+1-r} j_r^2 2^{n-r}$$

eşitliği sağlanır.

(D'ocagne özdeşliği) $m, n > 0$ tamsayıları ve $m > n$ için

$$j_m j_{n+1} - j_{m+1} j_n = (-2)^n j_{m-n}$$

eşitliği sağlanır.

Jacobsthal sayılarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{k=0}^{\infty} j_k x^k = \frac{x}{1-x-2x^2}$$

dir.

Tanım 3.2.2. $c_0 = 2, c_1 = 1$ olmak üzere; $c_{n+1} = c_n + 2c_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ sayı dizisine Jacobsthal Lucas sayı dizisi denir. Yineleme bağıntısını Jacobsthal sayıları ile aynı olduğundan kökleri 2 ve -1 sayılarıdır. Jacobsthal Lucas sayıları için Binet formülü

$$c_n = x_1^n + x_2^n = 2^n + (-1)^n$$

şeklindedir.

Jacobsthal sayılarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \frac{2-x}{1-x-2x^2}$$

ile verilir.

3.3. Pell , Pell Lucas ve Modifiye Pell Sayıları

Tanım 3.3.1. $P_0 = 0$ ve $P_1 = 1$ olmak üzere; $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki sayı dizisine Pell sayı dizisi denir. Pell dizisinin ilk elemanları $\{0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, \dots\}$ şeklindedir. Pell dizisinin Binet formülü

$\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ve $\beta = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere $P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ şeklindedir. Negatif indisli Pell

sayı dizisi $P_{-n} = (-1)^{n+1} P_n$ şeklinde tanımlanır.

Pell sayılarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n x^n = \frac{x}{1-2x-x^2}$$

şeklinde olup Simpson formülü

$$P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n$$

bağıntısı ile tanımlanır. Kısmi toplam formülü

$$\sum_{k=1}^n P_k = \frac{1}{2}(P_{n+1} + P_n - 1)$$

şeklinde verilir (Horadam, 1971).

Tanım 3.3.2. $Q_0 = 2$ ve $Q_1 = 2$ olmak üzere; $Q_{n+1} = 2Q_n + Q_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine Pell Lucas sayı dizisi denir. Pell Lucas dizisinin ilk elemanları $\{2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, \dots\}$ dir. Pell Lucas dizisinin Binet formülü $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ve $\beta = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere $Q_n = \alpha^n + \beta^n$ şeklindedir. Pell Lucas sayılarının üreteç fonksiyon

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_n x^n = \frac{2 - 2x}{1 - 2x - x^2}$$

şeklinde tanımlandıktan sonra Simpson formülü

$$Q_{n+1}Q_{n-1} - Q_n^2 = 8(-1)^{n-1}$$

bağıntısı ile tanımlanır. Kısmi toplam formülü

$$\sum_{k=1}^n Q_k = \frac{1}{2}(Q_{n+1} + Q_n - 2)$$

şeklinde verilir.

Tanım 3.3.3. $q_0 = 1$ ve $q_1 = 1$ olmak üzere; $q_{n+1} = 2q_n + q_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine modifiye Pell sayı dizisi denir. Modifiye Pell dizisinin ilk elemanları $\{1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 238, \dots\}$ dir. Modifiye Pell dizisinin Binet formülü $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ve $\beta = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere $q_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}$ şeklindedir. Negatif indisli Modifiye Pell sayı dizisi $q_{-n} = (-1)^{n+1} q_n$ şeklinde tanımlanır.

Modifiye Pell sayılarının üret  fonksiyonu

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n x^n = \frac{1-x}{1-2x-x^2}$$

 eklinde tanımlandıktan sonra Simpson formülü

$$q_{n+1}q_{n-1} - q_n^2 = 2(-1)^{n-1}$$

bağıntısı ile tanımlanır. Kısmi toplam formülü

$$\sum_{k=1}^n q_k = \frac{1}{4}(Q_{n+1} + Q_n - 2)$$

 eklinde verilir (Catarino, Vasco, 2013).

$P_n(x)$, $Q_n(x)$ i in Temel  zellikler

Pell ve Pell Lucas sayıları i in a ağıdaki e itlikler ge erlidir:

1) $P_n Q_n = P_{2n}$

2) $P_{m+n} = 2P_m Q_n - (-1)^n P_{m-n}$

3) $Q_m^2 = 2P_m^2 + (-1)^m$

4) $Q_{2m} = 2Q_m^2 - 2(-1)^m$

5) $P_{n+1} + P_{n-1} = Q_n = 2P_n + 2P_{n-1}$

6) $Q_{n+1} + Q_{n-1} = 8P_n$

7) $P_n P_{m+1} + P_{m-1} P_n = P_{m+n}$

8) $P_m P_{n+1} - P_{m+1} P_n = (-1)^n P_{m-n}$

9) $P_n^2 + P_{n+1}^2 = P_{2n-1}$

10) $P_{n+1}^2 - P_{n-1}^2 = 2P_{2n}$

$$11) \quad p_{2n+1} + p_{2n} = 2p_{n+1}^2 - 2p_n^2 - (-1)^n$$

$$12) \quad P_n^2 + P_{n+3}^2 = 5P_{2n+3}$$

$$13) \quad 2P_{n+1}P_n - 2P_n^2 = P_{2n}$$

$$14) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k P_{2k} = P_{2n}$$

$$15) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k P_{n-k} = 2^n P_n$$

$$16) \quad Q_{2k+1}^2 - Q_{2k-1}Q_{2k+3} = 32$$

$$17) \quad Q_{2k}Q_{2k+1} = Q_{4k+1} + 2$$

$$18) \quad Q_{2k}^2 = 8 + Q_{2k+1}Q_{2k-1}$$

$$19) \quad Q_{2k}Q_{2k+1} = Q_{2k+3}Q_{2k-2} - 80 = 2(p_{2k+2}p_{2k-1} - 6)$$

$$20) \quad \sum_{i=0}^m p_i^2 = \frac{1}{4}Q_{2m} + \frac{1}{2}p_{2m} + \frac{1}{4}Q_0 - \frac{1}{2}p_0 - \frac{(-1)^m + 1}{2}$$

$$21) \quad p_k = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{k}{2r+1} 2^r$$

$$22) \quad p_{2s} = \sum_{r=1}^s \binom{s}{r} 2^r p_r = \sum_{r=0}^s \binom{s}{r} 2^{s-r} p_{s-r}$$

$$23) \quad P_{2n+1} + P_{2n} = 2P_{n+1}^2 - 2P_n^2 - (-1)^n$$

$$24) \quad (-1)^n P_a P_b = P_{n+a} P_{n+b} - P_n P_{n+a+b}$$

$$25) \quad P_{n+r} = P_r P_{n+1} + P_{r-1} P_n$$

$$26) \quad P_{2n} = P_n (P_{n+1} + P_{n-1})$$

P_n Q_n için Temel Toplam Formülleri

$$\text{a)} \sum_{i=0}^n P_i = \frac{P_{n+1} + P_n - 1}{2}$$

$$\text{b)} \sum_{i=0}^n Q_i = \frac{Q_{n+1} + Q_n - 4}{2}$$

$$\text{c)} \sum_{i=0}^n q_i = \frac{q_{n+1} + q_n - 2}{2}$$

$$\text{d)} \sum_{r=1}^n P_{2r} = (P_{2n+1} - 1)/2$$

$$\text{e)} \sum_{r=1}^n P_{2r-1} = P_{2n}/2$$

$$\text{f)} \sum_{r=1}^n P_r = (P_{n+1} + P_n - 1)/2$$

$$\text{g)} \sum_{r=1}^n Q_{2r} = (Q_{2n+1} - 2)/2$$

$$\text{h)} \sum_{r=1}^n Q_{2r-1} = (Q_{2n} - 2)/2$$

$$\text{i)} \sum_{r=1}^m Q_r = (Q_{m+1} + Q_m - 2)/2$$

$$\text{j)} P_n = \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-m-1}{m} (2)^{n-2m-1}$$

$$\text{k)} Q_n = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i} (2)^{n-i}, n \neq 0$$

3.4. k-Pell ve k-Pell Lucas ve Modifiye k-Pell Sayıları

k-Pell $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, k-Pell Lucas $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ve modifiye k-Pell $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizileri aşağıdaki yineleme bağıntıları kullanılarak

$$P_{k,n+1} = 2P_{k,n} + kP_{k,n-1}, \quad P_{k,0} = 0, \quad P_{k,1} = 1,$$

$$Q_{k,n} = 2Q_{k,n-1} + kQ_{k,n-2}, \quad Q_0 = 2, \quad Q_1 = 2,$$

$$q_{k,n} = 2q_{k,n-1} + kq_{k,n-2} \quad q_{k,0} = 1, \quad q_{k,1} = 1,$$

$n \geq 2$ için ile tamamlanır (Catarino, Vasco, 2013). Yineleme bağıntılarından $x^2 - 2x - k = 0$ karakteristik denklemi elde edilir. Denklemin kökleri $\alpha = 1 + \sqrt{1+k}$, $\beta = 1 - \sqrt{1+k}$ şeklinde elde edilir. Denklemin kökleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 2, & \alpha - \beta &= 2\sqrt{1+k}, \\ \alpha\beta &= -k & \alpha^2 + \beta^2 &= 4 + 2k \end{aligned}$$

özellikleri elde edilir. Binet formülleri ise sırasıyla

$$\begin{aligned} P_{k,n} &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\ Q_{k,n} &= \alpha^n + \beta^n \\ q_{k,n} &= \frac{\alpha^n + \beta^n}{2} \end{aligned}$$

ile verilir. k -Pell $\{P_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, k -Pell Lucas $\{Q_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ve modifiye k -Pell $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizileri için bazı bağıntılar şöyle verilmiştir:

Catalan Özdeşliği: $P_{k,n-r}P_{k,n+r} - P_{k,n}^2 = (-1)^{n+1-r} k^{n-r} P_{k,r}^2$ dir.
İspat için Binet formülü kullanılır.

$$\begin{aligned} P_{k,n-r}P_{k,n+r} - P_{k,n}^2 &= \left(\frac{\alpha^{n-r} - \beta^{n-r}}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\alpha - \beta} \right) - \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right)^2 \\ &= (-1)^{n+1} k^{n-r} \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right)^2 \\ &= (-1)^{n+1} k^{n-r} P_{k,r}^2 \end{aligned}$$

Catalan özdeşliğinde $r=1$ seçilirse Cassini özdeşliği sağlanır.

Cassini Özdeşliği: $P_{k,n-1}P_{k,n+1} - P_{k,n}^2 = (-1)^n k^{n-1}$ dir.

D’ocagne Özdeşliği: $P_{k,m}P_{k,n+1} - P_{k,m+1}P_{k,n} = (-1)^n k^n P_{k,m-n}$ dir.

İspat için Binet formülü kullanılır.

$$\begin{aligned}
P_{k,m}P_{k,n+1} - P_{k,m+1}P_{k,n} &= \left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \right) - \left(\frac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) \\
&= (\alpha\beta)^n \left(\frac{(\alpha - \beta)(\alpha^{m-n} - \beta^{m-n})}{(\alpha - \beta)^2} \right) k^{n-r} \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right)^2 \\
&= (\alpha\beta)^n \left(\frac{\alpha^{m-n} - \beta^{m-n}}{(\alpha - \beta)} \right) \\
&= (-k)^n P_{k,m-n} \\
&= (-1)^n k^n P_{k,m-n}
\end{aligned}$$

D’ocagne Özdeşliği: $m > n$ olmak üzere

$$P_{k,m}P_{k,n+1} - P_{k,m+1}P_{k,n} = (-1)^n k^n \sqrt{1+k} \left(P_{k,m-n} - (1 + \sqrt{1+k})^{m-n} \right)$$

Üreteç fonksiyonu:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} Q_{k,n} x^n &= \frac{2-2x}{1-2x-kx^2} \\
\sum_{n=0}^{\infty} q_{k,n} x^n &= \frac{1-x}{1-2x-kx^2} \quad \text{dir.}
\end{aligned}$$

Catalan özdeşliği: $q_{k,n-r}q_{k,n+r} - q_{k,n}^2 = (-k)^{n-r} (q_{k,n}^2 - (-k)^r)$ dir.

Catalan özdeşliğinde $r=1$ seçilirse Cassini özdeşliği sağlanır. dir.

Cassini özdeşliği: $q_{k,n-1}q_{k,n+1} - q_{k,n}^2 = (-k)^{n-1} (1+k)$

BÖLÜM 4

ELEMANLARI PELL, PELL LUCAS ve MODİFİYE PELL SAYILARI OLAN DAİRESEL MATRİSLERİN NORMLARI İÇİN SINIRLAR

4.1. Elemanları Pell Sayıları Olan Dairesel Matrislerin Normları için Sınırlar

Herhangi bir $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(C)$ için, önceki ünite de Frobenious (veya Euclid) normu ve spektral normu sırasıyla şöyle tanımlamıştık:

$$\|A\|_E = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A^H A)}$$

Buradaki $\lambda_i(A^H A)$, $A^H A$ matrisinin öz değeridir.

Yine herhangi bir $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(C)$ için, maksimum sütun uzunluğu normu ve maksimum satır uzunluğu normu sırasıyla

$$c_1(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2}, \quad r_1(A) = \max_{1 \leq i \leq m} \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

şeklinde tanımlanmıştı. Ayrıca

$$\|A \circ B\|_2 \leq r_1(A) c_1(B) \quad (4.1.1)$$

$$\|A \otimes B\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2 \quad (4.1.2)$$

eşitsizlikleri de verilmişti.

$A \in M_{m,n}(C)$ verilsin. Frobenious (veya Euclid) normu ve spektral normları arasında aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F \quad (4.1.3)$$

Pell dizisinin ilk n teriminin karelerinin toplamı (Horadam,1971) de şu şekilde verilmiştir:

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_k^2 = \frac{P_{n-1}P_n}{2} \quad (4.1.4)$$

Lemma 4.1.1. Pell dizisinin ilk n teriminin karelerinin toplamı, Pell Lucas sayıları kullanılarak da aşağıdaki gibi de verilebilir.

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_k^2 = \frac{1}{16} \begin{cases} Q_{2n-1} + 2 & n \text{ çift} \\ Q_{2n-1} - 2 & n \text{ tek} \end{cases} \quad (4.1.5)$$

İspat: Pell sayı dizisinin Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} P_k^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(\sqrt{2}+1)^k - (1-\sqrt{2})^k}{2\sqrt{2}} \right)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1+\sqrt{2})^{2k} + (1-\sqrt{2})^{2k} - 2(-1)^k}{8} \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{(1+\sqrt{2})^{2n} - 1}{2(1+\sqrt{2})} + \frac{(1-\sqrt{2})^{2n} - 1}{2(1-\sqrt{2})} - 2 \left[\frac{(-1)^n - 1}{-2} \right] \right] \\ &= \frac{1}{16} \begin{cases} Q_{2n-1} + 2, & n \text{ çift} \\ Q_{2n-1} - 2, & n \text{ tek} \end{cases} \end{aligned}$$

elde edilir. Pell dizisinin ilk n teriminin kareleri toplamı, Pell sayıları cinsinden

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_k^2 = \frac{1}{16} \begin{cases} P_{2n} + P_{2n-2} + 2, & n \text{ çift} \\ P_{2n} + P_{2n-2} - 2, & n \text{ tek} \end{cases} \quad (4.1.6)$$

şeklinde yazılır.

Teorem 4.1.2. $A = C \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & \dots & P_{n-1} \end{pmatrix}$ Pell sayılarını içeren dairesel matris olsun, bu matrisin spektral normları için sınırlar aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{Q_{2n-1}+2}}{4} &\leq \|A\|_2 \leq \frac{\sqrt{(Q_{2n-1}+2)(Q_{2n-1}+18)}}{16} & n \text{ çift} \\
\frac{\sqrt{Q_{2n-1}-2}}{4} &\leq \|A\|_2 \leq \frac{\sqrt{(Q_{2n-1}-2)(Q_{2n-1}+14)}}{16} & n \text{ tek}
\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

İspat: A matrisi

$$A = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & \cdots & P_{n-1} \\ P_{n-1} & P_0 & P_1 & \cdots & P_{n-2} \\ P_{n-2} & P_{n-1} & P_0 & \cdots & P_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1 & P_2 & P_3 & \cdots & P_0 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. (4.1.5) eşitliğinden ve Pell sayıları için Binet formülünden

$$\|A\|_E^2 = n \sum_{k=0}^{n-1} P_k^2 = \frac{n}{16} \begin{cases} Q_{2n-1} + 2, & n \text{ çift} \\ Q_{2n-1} - 2, & n \text{ tek} \end{cases}$$

elde edilir. (4.1.3) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F &= \frac{1}{4} \sqrt{\begin{cases} Q_{2n-1} + 2, & n \text{ çift} \\ Q_{2n-1} - 2, & n \text{ tek} \end{cases}} \\
\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F &\leq \|A\|_2 \\
\frac{1}{4} \sqrt{\begin{cases} Q_{2n-1} + 2, & n \text{ çift} \\ Q_{2n-1} - 2, & n \text{ tek} \end{cases}} &\leq \|A\|_2
\end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan, $A = B \circ C$ olacak şekilde B ve C matrislerini seçelim:

$$B = \begin{bmatrix} P_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ P_{n-1} & P_0 & 1 & \cdots & 1 \\ P_{n-2} & P_{n-1} & P_0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1 & P_2 & P_3 & \cdots & P_0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & P_1 & P_2 & \cdots & P_{n-1} \\ 1 & 1 & P_1 & \cdots & P_{n-2} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & P_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Maksimum sütun uzunluğu normu ve maksimum satır uzunluğu normu kullanılarak

$$\begin{aligned}
r_1(B) &= \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n |b_{nj}|^2} \\
&= \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} P_k^2} = \frac{1}{4} \sqrt{\begin{cases} Q_{2n-1} + 2, & n \text{ çift} \\ Q_{2n-1} - 2, & n \text{ tek} \end{cases}} \\
c_1(C) &= \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n |c_{nj}|^2} = \sqrt{1 + \sum_{k=0}^{n-1} P_k^2} \\
&= \frac{1}{4} \sqrt{\begin{cases} Q_{2n-1} + 18, & n \text{ çift} \\ Q_{2n-1} + 14, & n \text{ tek} \end{cases}}.
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonra (2.4) özelliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
r_1(B)c_1(C) &= \frac{1}{16} \sqrt{\begin{cases} (Q_{2n-1} + 2)(Q_{2n-1} + 18), & n \text{ çift} \\ (Q_{2n-1} - 2)(Q_{2n-1} + 14), & n \text{ tek} \end{cases}} \\
\|A\|_2 \leq r_1(B)c_1(C) &= \frac{1}{16} \sqrt{\begin{cases} (Q_{2n-1} + 2)(Q_{2n-1} + 18), & n \text{ çift} \\ (Q_{2n-1} - 2)(Q_{2n-1} + 14), & n \text{ tek} \end{cases}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu şekilde ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.3. $A = C(P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$ Pell sayılarını içeren dairesel matris olsun,

Pell sayılarını kullanarak bu matrisin spektral normları için sınırlar

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{P_{2n} + P_{2n-2} + 2}}{4} &\leq \|A\|_2 \\
\|A\|_2 &\leq \frac{\sqrt{(P_{2n} + P_{2n-2} + 2)(P_{2n} + P_{2n-2} + 18)}}{16} \quad n \text{ çift} \\
&\hspace{15em} (4.1.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{P_{2n} + P_{2n-2} - 2}}{4} &\leq \|A\|_2 \\
\|A\|_2 &\leq \frac{\sqrt{(P_{2n} + P_{2n-2} - 2)(P_{2n} + P_{2n-2} + 14)}}{16} \quad n \text{ tek}
\end{aligned}$$

ile verilir.

İspat: (4.1.6) ve (4.1.7) kullanılarak ispat bulunur.

Sonuç 4.1.4. $A = C(P_0^2, P_1^2, \dots, P_{n-1}^2)$ Pell sayılarını içeren dairesel matris olsun, bu matrisin spektral normları için üst sınır

$$\begin{aligned}\|A\|_2 &\leq \frac{1}{256}(Q_{2n-1} + 2)(Q_{2n-1} + 18) & n \text{ çift} \\ \|A\|_2 &\leq \frac{1}{256}(Q_{2n-1} - 2)(Q_{2n-1} + 14) & n \text{ tek}\end{aligned}$$

şeklinde gösterilebilir.

İspat: $\|AoB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$ olduğundan ispat Tanım 2.1.6 ve (4.1.7) özdeşliği kullanılarak bulunur.

4.2. Elemanları Pell Lucas Sayıları Olan Dairesel Matrislerin Normları için Sınırlar

Lemma 4.2.1. Pell Lucas sayıları ilk n teriminin kareleri toplamı, Pell Lucas sayıları kullanılarak aşağıdaki gibi verilir.

$$\sum_{k=0}^{n-1} Q_k^2 = \frac{1}{2} \begin{cases} Q_{2n-1} + 2, & n \text{ çift} \\ Q_{2n-1} + 6, & n \text{ tek} \end{cases} \quad (4.2.1)$$

İspat: Pell Lucas sayılarının Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} Q_k^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} \left((1+\sqrt{2})^k - (1-\sqrt{2})^k \right)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left((1+\sqrt{2})^{2k} - (1-\sqrt{2})^{2k} + 2(-1)^k \right) \\ &= \frac{(\sqrt{2}+1)^{2n} - 1}{2(1+\sqrt{2})} + \frac{(1-\sqrt{2})^{2n} - 1}{2(1-\sqrt{2})} + 2 \left[\frac{(-1)^n - 1}{-2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \begin{cases} Q_{2n-1} + 2, & n \text{ çift} \\ Q_{2n-1} + 6, & n \text{ tek} \end{cases}.\end{aligned}$$

elde edilir.

Pell Lucas dizisinin ilk n teriminin kareleri toplamı, Pell sayıları kullanılarak aşağıdaki gibi verilir.

$$\sum_{k=0}^{n-1} Q_k^2 = \frac{1}{2} \begin{cases} P_{2n} + P_{2n-2} + 2, & n \text{ çift} \\ P_{2n} + P_{2n-2} + 6, & n \text{ tek} \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Teorem 4.2.2. $A = C \begin{pmatrix} Q_0, & Q_1, \dots, & Q_{n-1} \end{pmatrix}$ Pell Lucas sayılarını içeren dairesel matris olsun, sonra bu matrisin spektral normları için sınırlar

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{Q_{2n-1}+2}}{2} &\leq \|A\|_2 \leq \frac{\sqrt{(Q_{2n-1}+2)(Q_{2n-1}+4)}}{2} & n \text{ çift} \\ \frac{\sqrt{Q_{2n-1}+6}}{2} &\leq \|A\|_2 \leq \frac{\sqrt{(Q_{2n-1}+6)(Q_{2n-1}+8)}}{2} & n \text{ tek} \end{aligned}$$

ile verilir.

İspat: A matrisi

$$A = \begin{bmatrix} Q_0 & Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_{n-1} \\ Q_{n-1} & Q_0 & Q_1 & \cdots & Q_{n-2} \\ Q_{n-2} & Q_{n-1} & Q_0 & \cdots & Q_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & \cdots & Q_0 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. (4.2.1) eşitliğinden ve Pell Lucas sayıları için Binet formülünden

$$\|A\|_E^2 = n \sum_{k=0}^{n-1} Q_k^2 = \frac{n}{2} \begin{cases} Q_{2n-1} + 2, & n \text{ çift} \\ Q_{2n-1} + 6, & n \text{ tek} \end{cases}$$

elde edilir. (4.1.3) eşitsizliği kullanılarak

$$\frac{1}{2} \sqrt{\begin{cases} Q_{2n-1} + 2, & n \text{ çift} \\ Q_{2n-1} + 6, & n \text{ tek} \end{cases}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_2$$

elde edilir.

Öte yandan, $A = B \circ C$ olacak şekilde aşağıdaki seçimleri yapalım:

$$B = \begin{bmatrix} Q_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ Q_{n-1} & Q_0 & 1 & \cdots & 1 \\ Q_{n-2} & Q_{n-1} & Q_0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & \cdots & Q_0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_{n-1} \\ 1 & 1 & Q_1 & \cdots & Q_{n-2} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & Q_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Daha sonra, maksimum sütun uzunluğu normu ve maksimum satır uzunluğu normu aşağıdaki gibi olur:

$$r_1(B) = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} Q_k^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \begin{cases} Q_{2n-1} + 2 & n \text{ çift} \\ Q_{2n-1} + 6 & n \text{ tek} \end{cases}}$$

$$c_1(C) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{ij}|^2} = \sqrt{1 + \sum_{k=1}^{n-1} Q_k^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \begin{cases} Q_{2n-1} - 4 & n \text{ çift} \\ Q_{2n-1} + 8 & n \text{ tek} \end{cases}}$$

$$\|A\|_2 \leq r_1(B) c_1(C) \leq \frac{1}{2} \sqrt{\begin{cases} (Q_{2n-1} + 2)(Q_{2n-1} - 4) & n \text{ çift} \\ (Q_{2n-1} + 6)(Q_{2n-1} + 8) & n \text{ tek} \end{cases}}$$

(2.4) özelliği kullanılarak, ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.3. $A = C(Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1})$ dairesel matris olsun, sonra Pell sayıları kullanarak bu matrisin spektral normları için sınırlar

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{P_{2n} + P_{2n-2} + 2}}{2} &\leq \|A\|_2 \\ \|A\|_2 &\leq \frac{\sqrt{(P_{2n} + P_{2n-2} + 2)(P_{2n} + P_{2n-2} + 4)}}{2}, \quad n \text{ çift} \\ \frac{\sqrt{P_{2n} + P_{2n-2} + 6}}{2} &\leq \|A\|_2 \\ \|A\|_2 &\leq \frac{\sqrt{(P_{2n} + P_{2n-2} + 6)(P_{2n} + P_{2n-2} + 8)}}{2}, \quad n \text{ tek} \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

şeklinde elde edilir.

İspat: (4.2.2), (4.2.3) özellikleri kullanılarak ispat bulunur.

Sonuç 4.2.4. $A = C(Q_0^2, Q_1^2, \dots, Q_{n-1}^2)$ Pell Lucas sayılarını içeren dairesel matris olsun, bu matrisin spektral normu için üst sınır

$$\begin{aligned} \|A\|_2 &\leq \frac{1}{4} (Q_{2n-1} + 2)(Q_{2n-1} - 4) \quad n \text{ çift} \\ \|A\|_2 &\leq \frac{1}{2} (Q_{2n-1} + 6)(Q_{2n-1} + 8) \quad n \text{ tek} \end{aligned}$$

ile elde edilir.

İspat: $\|AoB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$ olduğundan ispat Tanım 2.1.6 ve (4.2.2) özdeşliği kullanılarak bulunur.

Sonuç 4.2.5. $A = C \begin{pmatrix} P_0, & P_1, \dots, & P_{n-1} \end{pmatrix}$ ve $B = C \begin{pmatrix} Q_0, & Q_1, \dots, & Q_{n-1} \end{pmatrix}$ dairesel matrisler olsun, bu matrislerin Kronecker çarpımının spektral normları için alt ve üst sınırlar

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}(Q_{2n-1} + 2) \leq \|A \otimes B\|_2 \leq \frac{1}{32} \sqrt{(Q_{2n-1} + 2)^2 (Q_{2n-1} - 4)(Q_{2n-1} + 18)} \quad n \text{ çift}$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \sqrt{(Q_{2n-1} - 2)(Q_{2n-1} + 6)} \leq \|A \otimes B\|_2 \leq \frac{1}{32} \sqrt{(Q_{2n-1} - 2)(Q_{2n-1} + 6)} \quad n \text{ tek}$$

ile verilir.

İspat: (4.1.2), (4.2.1) kullanarak ispat kolayca görülür.

4.3. Elemanları Modifiye Pell Sayıları Olan Dairesel Matrislerin Normları için Sınırlar

Teorem 4.3.1. $A = C \begin{pmatrix} q_0, & q_1, \dots, & q_{n-1} \end{pmatrix}$ modifiye Pell sayısını içeren dairesel matris olsun, bu matrisin spektral normları için sınırlar

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{q_{2n-1} + 1} &\leq \|A\|_2 \leq \frac{1}{4} \sqrt{(q_{2n-1} + 1)(q_{2n-1} + 5)}, & n \text{ çift} \\ \frac{1}{2} \sqrt{q_{2n-1} + 3} &\leq \|A\|_2 \leq \frac{1}{4} \sqrt{(q_{2n-1} + 3)(q_{2n-1} + 7)}, & n \text{ tek} \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

ile gösterilir.

İspat: (4.2.1) eşitliğinden ve modifiye Pell sayıları için Binet formülünden

$$\|A\|_F^2 = n \sum_{k=0}^{n-1} q_k^2 = \frac{n}{8} \begin{cases} 2q_{2n-1} + 2, & n \text{ çift} \\ 2q_{2n-1} + 6, & n \text{ tek} \end{cases}$$

(4.1.3) eşitsizliğinden

$$\frac{1}{2} \sqrt{\begin{cases} q_{2n-1} + 1 & n \text{ çift} \\ q_{2n-1} + 3 & n \text{ tek} \end{cases}} \leq \|A\|_2$$

elde edilir.

Öte yandan, B, C matrislerini $A=BoC$ eşitliğini sağlayacak şekilde seçelim:

$$B = \begin{bmatrix} q_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ q_{n-1} & q_0 & 1 & \cdots & 1 \\ q_{n-2} & q_{n-1} & q_0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1 & q_2 & q_3 & \cdots & q_0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & q_1 & q_2 & \cdots & q_{n-1} \\ 1 & 1 & q_1 & \cdots & q_{n-2} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & q_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Maksimum satır uzunluğu normu ve maksimum sütun uzunluğu normu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$r_1(B) = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} q_k^2} = \sqrt{\frac{1}{8} \begin{cases} 2q_{2n-1} + 2, & n \text{ çift} \\ 2q_{2n-1} + 6, & n \text{ tek} \end{cases}}$$

$$c_1(C) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{ij}|^2} = \sqrt{1 + \sum_{k=0}^{n-1} q_k^2} = \sqrt{\frac{1}{8} \begin{cases} 2q_{2n-1} + 1, & n \text{ çift} \\ 2q_{2n-1} + 3, & n \text{ tek} \end{cases}}$$

$$\|A\|_2 \leq \frac{1}{4} \sqrt{\begin{cases} (q_{2n-1} + 1), & n \text{ çift} \\ (q_{2n-1} + 3), & n \text{ tek} \end{cases}}$$

(2.4) özelliği kullanılarak, ispat tamamlanır.

BÖLÜM 5

ELEMENLARI k -PELL , k - PELL LUCAS VE MODİFİYE k -PELL SAYILARI OLAN DAİRESEL MATRİSLERİN NORMLARI İÇİN SINIRLAR

5.1. Elemanları k -Pell Sayıları Olan Dairesel Matrislerin Normları için Sınırlar

Teorem 5.1.1. k -Pell sayıları için ilk n teriminin kareleri toplamı

$$\sum_{i=0}^{n-1} P_{k,i}^2 = \frac{1}{4+4k} \left[\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{k+1} \right] \quad (5.1.1)$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} \text{İspat: } \sum_{i=0}^{n-1} P_{k,i}^2 &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha^i - \beta^i}{\alpha - \beta} \right)^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha^{2i} + \beta^{2i} - 2(\alpha\beta)^i}{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta} \right) \\ &= \frac{1}{4+4k} \left[\frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^2 - 1} + \frac{\beta^{2n} - 1}{\beta^2 - 1} - 2 \frac{(\alpha\beta)^n - 1}{\alpha\beta - 1} \right] \\ &= \frac{1}{4+4k} \left[\frac{(\alpha\beta)^2 (\alpha^{2n-2} + \beta^{2n-2}) - (\alpha^{2n} + \beta^{2n}) - (\alpha^2 + \beta^2) + 2}{(\alpha\beta)^2 - (\alpha^2 + \beta^2) + 1} - 2 \frac{(-k)^n - 1}{-k - 1} \right] \\ &= \frac{1}{4+4k} \left[\frac{k^2 (\alpha^{2n-2} + \beta^{2n-2}) - (\alpha^{2n} + \beta^{2n}) - (4+2k) + 2}{k^2 - (4+2k) + 1} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{k+1} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4+4k} \left[\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{k+1} \right]$$

Teorem 5.1.2. $A = C \begin{pmatrix} P_{k,0}, & P_{k,1}, & \dots, & P_{k,n-1} \end{pmatrix}$ k Pell sayılarını içeren dairesel matris olsun, bu matrisin spektral normları için sınırlar aşağıdaki gibi verilir

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{1}{4+4k} \left[\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{k+1} \right]} \leq \|A\|_2 \\ \|A\|_2 & \leq \sqrt{\frac{1}{4+4k} \left[\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{1+k} \right]} \\ & \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4+4k} \left[\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{1+k} \right]} \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

İspat: A matrisi

$$A = \begin{bmatrix} P_{k,0} & P_{k,1} & P_{k,2} & \cdots & P_{k,n-1} \\ P_{k,n-1} & P_{k,0} & P_{k,1} & \cdots & P_{k,n-2} \\ P_{k,n-2} & P_{k,n-1} & P_{k,0} & \cdots & P_{k,n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{k,1} & P_{k,2} & P_{k,3} & \cdots & P_{k,0} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. (5.1.1) eşitliklerinden ve Pell Lucas sayıları için Binet formülünden

$$\|A\|_E^2 = n \sum_{i=0}^{n-1} P_{k,i}^2 = \frac{n}{4+4k} \left[\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - (4+2k) + 1} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{k+1} \right]$$

elde edilir. (4.1.3) eşitsizliğinden

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_E = \sqrt{\frac{1}{4+4k} \left[\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{k+1} \right]} \leq \|A\|_2$$

elde edilir. Öte yandan, $A = B \circ C$ olacak şekilde aynı tipten B ve C matrislerini aşağıdaki gibi seçilsin:

$$B = \begin{bmatrix} P_{k,0} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ P_{k,n-1} & P_{k,0} & 1 & \cdots & 1 \\ P_{k,n-2} & P_{k,n-1} & P_{k,0} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{k,1} & P_{k,2} & P_{k,3} & \cdots & P_{k,0} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & P_{k,1} & P_{k,2} & \cdots & P_{k,n-1} \\ 1 & 1 & P_{k,1} & \cdots & P_{k,n-2} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & P_{k,n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Maksimum sütun uzunluğu normu ve maksimum satır uzunluğu normu

$$\begin{aligned} r_1(B) &= \frac{\max}{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n |b_{nj}|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} P_k^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4+4k} \left[\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - (4+2k) + 1} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{k+1} \right]} \\ c_1(C) &= \frac{\max}{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{nj}|^2} = \sqrt{1 + \sum_{k=0}^{n-1} P_k^2} \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{4+4k} \left[\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - (4+2k) + 1} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{k+1} \right]} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Sonra (2.4) deki özellik kullanılarak,

$$\begin{aligned} \|A\|_2 &\leq r_1(B) c_1(C) \\ &= \sqrt{\frac{1}{4+4k} \left[\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - (4+2k) + 1} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{k+1} \right]} \\ &\quad \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4+4k} \left[\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - (4+2k) + 1} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{k+1} \right]} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu şekilde ispat tamamlanır.

5.2. Elemanları k -Pell Lucas Sayıları Olan Dairesel Matrislerin Normları için Sınırlar

Teorem 5.2.1. k -Pell Lucas sayıları için ilk n teriminin kareleri toplamı

$$\sum_{i=0}^{n-1} Q_{k,i}^2 = \left[\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{k + 1} \right]$$

dir.

İspat: k -Pell Lucas sayıları için Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} Q_{k,i}^2 &= \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha^i + \beta^i)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha^{2i} + \beta^{2i} + 2(\alpha\beta)^i) \\ &= \left[\frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^2 - 1} + \frac{\beta^{2n} - 1}{\beta^2 - 1} + 2 \frac{(\alpha\beta)^n - 1}{\alpha\beta - 1} \right] \\ &= \left[\frac{(\alpha\beta)^2 (\alpha^{2n-2} + \beta^{2n-2}) - (\alpha^{2n} + \beta^{2n}) - (\alpha^2 + \beta^2) + 2}{(\alpha\beta)^2 - (\alpha^2 + \beta^2) + 1} - 2 \frac{(-k)^n - 1}{-k - 1} \right] \\ &= \left[\frac{k^2 (\alpha^{2n-2} + \beta^{2n-2}) - (\alpha^{2n} + \beta^{2n}) - (4 + 2k) + 2}{k^2 - (4 + 2k) + 1} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{1 + k} \right] \\ &= \left[\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{k + 1} \right] \end{aligned}$$

Teorem 5.2.2. $A = C \begin{pmatrix} Q_{k,0}, & Q_{k,1}, & \dots, & Q_{k,n-1} \end{pmatrix}$ k -Pell Lucas sayılarını içeren dairesele matris olsun, sonra bu matrisin spektral normları için sınırlar

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left[\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{k + 1} \right] \leq \|A\|_2$$

$$\begin{aligned} \|A\|_2 &\leq \sqrt{\left[\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{1 + k} \right]} \\ &\cdot \sqrt{1 + \left[\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{k + 1} \right]} \end{aligned}$$

ile verilir.

İspat: A matrisi

$$A = \begin{bmatrix} Q_{k,0} & Q_{k,1} & Q_{k,2} & \cdots & Q_{k,n-1} \\ Q_{k,n-1} & Q_{k,0} & Q_{k,1} & \cdots & Q_{k,n-2} \\ Q_{k,n-2} & Q_{k,n-1} & Q_{k,0} & \cdots & Q_{k,n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{k,1} & Q_{k,2} & Q_{k,3} & \cdots & Q_{k,0} \end{bmatrix}$$

biçimindedir. (5.2.1) ve k - Pell Lucas sayıları için Binet formülünden

$$\|A\|_F^2 = n \sum_{i=0}^{n-1} Q_{k,i}^2 = n \left[\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{k + 1} \right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left[\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{k + 1} \right] \leq \|A\|_2$$

elde edilir. Öte yandan, $A = BoC$ olacak şekilde aşağıdaki gibi seçim yapalım:

$$B = \begin{bmatrix} Q_{k,0} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ Q_{k,n-1} & Q_{k,0} & 1 & \cdots & 1 \\ Q_{k,n-2} & Q_{k,n-1} & Q_{k,0} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{k,1} & Q_{k,2} & Q_{k,3} & \cdots & Q_{k,0} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & Q_{k,1} & Q_{k,2} & \cdots & Q_{k,n-1} \\ 1 & 1 & Q_{k,1} & \cdots & Q_{k,n-2} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & Q_{k,n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Daha sonra, maksimum sütun uzunluğu normu ve maksimum satır uzunluğu normu aşağıdaki gibi oluşur.

$$r_1(B) = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} Q_k^2} = \sqrt{\left[\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{k + 1} \right]}$$

$$c_1(C) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{ij}|^2} = \sqrt{1 + \sum_{k=1}^{n-1} Q_k^2} = \sqrt{\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + \frac{2(-k)^n - 1 + k}{k + 1}}$$

$$\|A\|_2 \leq r_1(B)C_1(C) \leq \sqrt{\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{1+k}} \cdot \sqrt{\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + \frac{2(-k)^n - 1 + k}{k+1}}$$

bu şekilde ispat tamamlanır.

Sonuç 5.2.3. $D = C(Q_{k,0}^2, Q_{k,1}^2, \dots, Q_{k,n-1}^2)$ k - Pell Lucas sayılarının karelerini içeren dairesel matris olsun, sonra bu matrisin spektral normları için üst sınır

$$\|D\|_2 \leq \frac{1}{4+4k} \left[\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{k+1} \right] \cdot \left(1 + \frac{1}{4+4k} \left[\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{k+1} \right] \right)$$

şeklinde gösterilebilir.

İspat: $\|D\|_2 = \|AoB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$ olduğundan ispat (5.2.1), (5.2.2) özdeşlikleri kullanılarak bulunur.

Sonuç 5.2.4. $A = C(P_{k,0}, P_{k,1}, \dots, P_{k,n-1})$ ve $B = C(Q_{k,0}, Q_{k,1}, \dots, Q_{k,n-1})$ dairesel matrisler olsun, bu matrislerin Kronecker çarpımının spektral normları için sınırlar

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{1}{4+4k} \left[\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{1+k} \right]} \\ & \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{1+k} \right] \leq \|A \otimes B\|_2 \\ & \|A \otimes B\|_2 \leq \sqrt{\frac{1}{4+4k} \left[\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{1+k} \right]} \\ & \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4+4k} \left[\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{1+k} \right]} \end{aligned}$$

$$\sqrt{\left[\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{1+k} \right]}$$

$$\sqrt{1 + \left[\frac{k^2 Q_{k,2n-2} - Q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{1+k} \right]}$$

ile verilir.

İspat: (2.6), (5.1.2), (5.2.2) kullanarak ispat kolayca görülür.

5.3. Elemanları Modifiye k -Pell Sayıları Olan Dairesel Matrislerin Normları için Sınırlar

Teorem 5.3.1. Modifiye k -Pell sayıları için ilk n terimin kareleri toplamı

$$\sum_{i=0}^{n-1} q_{k,i}^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{k^2 q_{k,2n-2} - q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{k+1} \right] \quad (5.3.1)$$

şeklindedir.

İspat: Modifiye k -Pell sayıları için Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} q_{k,i}^2 &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha^i + \beta^i}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha^{2i} + \beta^{2i} + 2(\alpha\beta)^i) \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{-(\alpha^{2n} + \beta^{2n}) + (\alpha\beta)^2 (\alpha^{2n-2} + \beta^{2n-2}) - (\alpha^2 + \beta^2) + 2}{(\alpha\beta)^2 - (\alpha^2 + \beta^2) + 1} - 2 \frac{(-k)^n - 1}{-k - 1} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{k^2 q_{k,2n-2} - q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{k+1} \right] \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 5.3.2. $A = C \begin{pmatrix} q_{k,0}, & q_{k,1}, & \dots, & q_{k,n-1} \end{pmatrix}$ modifiye k -Pell sayılarını içeren dairesel matris olsun, sonra bu matrisin spektral normları için sınırlar

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \left[\frac{k^2 q_{k,2n-2} - q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{k+1} \right] \leq \|A\|_2$$

$$\|A\|_2 \leq \frac{1}{4} \sqrt{\left[\frac{k^2 q_{k,2n-2} - q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{k+1} \right]} \sqrt{\frac{k^2 q_{k,2n-2} - q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + \frac{2(-k)^n + 2 + 4k}{k+1}} \quad (5.3.2)$$

ile verilir.

İspat: (5.3.1) ve modifiye k -Pell sayıları için Binet formülü kullanılarak

$$\|A\|_F^2 = n \sum_{i=0}^{n-1} q_{k,i}^2 = n \frac{1}{4} \left[\frac{k^2 q_{k,2n-2} - q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{k+1} \right]$$

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \left[\frac{k^2 q_{k,2n-2} - q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{k+1} \right] \leq \|A\|_2$$

elde edilir.

Öte yandan, $A = BoC$ olacak şekilde aşağıdaki gibi seçim yapalım:

$$B = \begin{bmatrix} q_{k,0} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ q_{k,n-1} & q_{k,0} & 1 & \cdots & 1 \\ q_{k,n-2} & q_{k,n-1} & q_{k,0} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{k,1} & q_{k,2} & q_{k,3} & \cdots & q_{k,0} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & q_{k,1} & q_{k,2} & \cdots & q_{k,n-1} \\ 1 & 1 & q_{k,1} & \cdots & q_{k,n-2} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & q_{k,n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Daha sonra, maksimum sütun uzunluğu normu ve maksimum satır uzunluğu normu aşağıdaki gibi oluşur:

$$r_1(B) = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} q_{k,i}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{k^2 q_{k,2n-2} - q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{k+1} \right]},$$

$$c_1(C) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{ij}|^2} = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} q_{k,i}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k^2 q_{k,2n-2} - q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + \frac{2(-k)^n + 2 + 4k}{k+1}}$$

$$\begin{aligned}\|A\|_2 &= \|BoC\|_2 \leq r_1(B)c_1(C) \leq \\ &\frac{1}{4} \sqrt{\left[\frac{k^2 q_{k,2n-2} - q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{k+1} \right]} \\ &\sqrt{\frac{k^2 q_{k,2n-2} - q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + \frac{2(-k)^n + 2 + 4k}{k+1}}\end{aligned}$$

bu şekilde ispat tamamlanır.

Sonuç 5.3.3. $A = C(q_{k,0}^2, q_{k,1}^2, \dots, q_{k,n-1}^2)$ modifiye k -Pell sayılarını içeren dairesel matris olsun, sonra bu matrisin spektral normları için üst sınır

$$\begin{aligned}\|A\|_2 &\leq \frac{1}{16} \left[\frac{k^2 q_{k,2n-2} - q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + 2 \frac{(-k)^n - 1}{k+1} \right] \\ &\cdot \left[\frac{k^2 q_{k,2n-2} - q_{k,2n} - 2k - 2}{k^2 - 2k - 3} + \frac{2(-k)^n + 2 + 4k}{k+1} \right]\end{aligned}$$

şeklinde gösterilebilir.

İspat: $\|AoB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$ olduğundan ispat (2.1.6), (5.3.2) özdeşlikleri kullanılarak bulunur.

BÖLÜM 6

PELL VE PELL LUCAS SAYILARI OLUŞAN r -DAİRESEL MATRİSLER İÇİN ALT VE ÜST SINIRLAR

6.1. Elemanları Pell Sayıları Olan r -Dairesel Matrislerin Normları için Sınırlar

Bu bölüm (Türkmen, Gökbaş, 2016) referansından yararlanılarak yazılmıştır. Bu bölümde elemanları Pell ve Pell Lucas sayıları olan r -dairesele matrislerin spektral normları için sınırlar elde edilerek Kronecker ve Hadamard çarpımları için de sınırlar elde edilmiştir.

Teorem 6.1.1. A , elemanları Pell sayılarından oluşan bir r -dairesele matris olmak üzere

(i) $r \geq 1$ için

$$\sqrt{\frac{P_{2n} + n + 2(-1)^n P_n}{9}} \leq \|A\|_2 \leq |r| \frac{P_{2n} + n + 2(-1)^n P_n}{9}$$

(ii) $r \leq 1$ için

$$|r| \sqrt{\frac{P_{2n} + n + 2(-1)^n P_n}{9}} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{\frac{(n-1)(P_{2n} + n + 2(-1)^n P_n)}{9}}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat: A matrisi

$$A = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & \cdots & P_{n-1} \\ rP_{n-1} & P_0 & P_1 & \cdots & P_{n-2} \\ rP_{n-2} & rP_{n-1} & P_0 & \cdots & P_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ rP_1 & rP_2 & rP_3 & \cdots & P_0 \end{bmatrix}$$

(i) $r \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
\|A\|_F^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-1)P_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k|r|^2 P_k^2 \\
&\geq \sum_{k=0}^{n-1} (n-1)j_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k j_k^2 = n \sum_{k=0}^{n-1} j_k^2 \\
&= \frac{n}{9} [P_{2n} + 2(-1)^n P_n + n]
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{3} \left[\sqrt{P_{2n} + 2(-1)^n P_n + n} \right] \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_E \leq \|A\|_2.$$

Diğer yandan $A = B \circ C$ şeklinde aynı tipten B ve C matrisleri seçilsin:

$$B = \begin{bmatrix} rP_0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ rP_{n-1} & rP_0 & 1 & \dots & 1 \\ rP_{n-2} & rP_{n-1} & rP_0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ rP_1 & rP_{n-1} & rP_{n-1} & \dots & rP_0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & \dots & P_{n-1} \\ 1 & P_0 & P_1 & \dots & P_{n-2} \\ 1 & 1 & P_0 & \dots & P_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & P_0 \end{bmatrix}.$$

$$r_1(B) = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n |b_{nj}|^2} = \sqrt{|r|^2 \sum_{k=0}^{n-1} P_k^2} = \frac{|r|}{3} \sqrt{P_{2n} + n + 2(-1)^n P_n},$$

$$c_1(C) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{in}|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} P_k^2} = \frac{1}{3} \sqrt{P_{2n} + n + 2(-1)^n P_n}$$

kullanılarak aşağıdaki elde edilir.

$$\|A\|_2 \leq r_1(B)c_1(C) = \frac{|r|}{9} [P_{2n} + 2(-1)^n P_n + n]$$

$$\frac{1}{3} \sqrt{P_{2n} + 2(-1)^n P_n + n} \leq \|A\|_2 \leq \frac{|r|}{9} [P_{2n} + 2(-1)^n P_n + n]$$

Buradan (i) nin ispatı tamamlanır.

(ii) $r \leq 1$ için

$$\begin{aligned}
\|A\|_F^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)P_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k|r|^2 P_k^2 \\
&\geq \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)|r|^2 P_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k|r|^2 P_k^2 = n|r|^2 \sum_{k=0}^{n-1} P_k^2 \\
&= \frac{|r|^2 n}{9} [P_{2n} + 2(-1)^n P_n + n]
\end{aligned}$$

Buradan

$$\frac{|r|}{3} \sqrt{P_{2n} + 2(-1)^n P_n + n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_E \leq \|A\|_2$$

eşitsizliği elde edilir.

Diğer yandan $A = B \circ C$ şeklinde B ve C matrisleri seçilsin:

$$B = \begin{bmatrix} P_0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ r & P_0 & 1 & \dots & 1 \\ r & r & P_0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r & r & r & \dots & P_0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & \dots & P_{n-1} \\ P_{n-1} & P_0 & P_1 & \dots & P_{n-2} \\ P_{n-2} & P_{n-1} & P_0 & \dots & P_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1 & P_2 & P_3 & \dots & P_0 \end{bmatrix}.$$

$$r_1(B) = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2} = \sqrt{P_0^2 + (n-1)} = \sqrt{(n-1)},$$

$$c_1(C) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} P_k^2} = \frac{1}{3} \sqrt{P_{2n} + n + 2(-1)^n P_n}.$$

Buradan

$$\|A\|_2 \leq r_1(B) c_1(C) = \sqrt{\frac{(n-1)(P_{2n} + 2(-1)^n P_n + n)}{9}}$$

elde edilir. Bu iki sonuç birleştirilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\frac{|r|}{3} \sqrt{P_{2n} + 2(-1)^n P_n + n} \leq \|A\|_2 \leq \frac{1}{3} \sqrt{(n-1)(P_{2n} + 2(-1)^n P_n + n)}$$

Böylece ispat tamamlanır.

6.2. Pell Lucas Sayıları Oluşan r -Dairesel Matrislerin Normları için Sınırlar

Teorem 6.2.1. A , elemanları Pell Lucas sayılarından oluşan bir r -dairesele matris olsun.

(i) $r \geq 1$ için

$$\sqrt{P_{2n} - 2(-1)^n P_n + n} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{(4 + |r|^2)(P_{2n} - 2(-1)^n P_n + n - 4)(P_{2n} - 2(-1)^n P_n + n - 3)}$$

(ii) $r \leq 1$ için

$$|r| \sqrt{P_{2n} + n - 2(-1)^n P_n} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n(P_{2n} + n - 2(-1)^n P_n)}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat:

(i) $r \geq 1$ için

$$\begin{aligned} \|A\|_F^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) Q_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k |r|^2 Q_k^2 \\ &\geq \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) Q_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k Q_k^2 = n \sum_{k=0}^{n-1} Q_k^2 \\ &= n [P_{2n} - 2(-1)^n P_n + n] \end{aligned}$$

$$\sqrt{P_{2n} - 2(-1)^n P_n + n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_E \leq \|A\|_2$$

Diğer yandan $A = B \circ C$ olacak şekilde B ve C matrisleri seçilsin:

$$B = \begin{bmatrix} Q_0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ rQ_{n-1} & Q_0 & 1 & \dots & 1 \\ rQ_{n-2} & rQ_{n-1} & Q_0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ rQ_1 & rQ_2 & rQ_3 & \dots & Q_0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & Q_1 & Q_2 & \dots & Q_{n-1} \\ 1 & 1 & Q_1 & \dots & Q_{n-2} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & Q_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} r_1(B) &= \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n-1} |b_{nj}|^2} = \sqrt{Q_0^2 + |r|^2 \sum_{k=1}^{n-1} Q_k^2} = \sqrt{4 + |r|^2 \sum_{k=1}^{n-1} Q_k^2} \\ &= \sqrt{4 + |r|^2 [P_{2n} + n - 2(-1)^n P_n - 4]}, \end{aligned}$$

$$c_1(C) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{in}|^2} = \sqrt{1 + |r|^2 \sum_{k=1}^{n-1} Q_k^2} = \sqrt{P_{2n} + n - 2(-1)^n P_n - 3},$$

bu sonuçlar kullanılırsa,

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{(4 + |r|^2 (P_{2n} + n - 2(-1)^n P_n - 4))(P_{2n} + n - 2(-1)^n P_n - 3)}$$

elde edilir.

(ii) $r \leq 1$ için

$$\begin{aligned}\|A\|_F^2 &\geq \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)|r|^2 Q_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k|r|^2 Q_k^2 = n|r|^2 \sum_{k=0}^{n-1} Q_k^2 \\ &\sqrt{|r|^2 \sum_{k=0}^{n-1} Q_k^2} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_2 \\ &= |r| \sqrt{(P_{2n} - 2(-1)^n P_n + n)}\end{aligned}$$

sağlanır. Diğer yandan $A = B \circ C$ olacak şekilde aynı tipten iki matris seçelim:

$$B = \begin{bmatrix} r & 1 & 1 & \dots & 1 \\ r & r & 1 & \dots & 1 \\ r & r & r & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r & r & r & \dots & r \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} Q_0 & Q_1 & Q_2 & \dots & Q_{n-1} \\ Q_{n-1} & Q_0 & Q_1 & \dots & Q_{n-2} \\ Q_{n-2} & Q_{n-1} & Q_0 & \dots & Q_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & \dots & Q_0 \end{bmatrix}.$$

$$r_1(B) = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2} = \sqrt{n}$$

$$c_1(C) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} Q_k^2} = \sqrt{P_{2n} + n - 2(-1)^n P_n}$$

$$\|A\|_2 \leq r_1(B) c_1(C) \leq \sqrt{n(P_{2n} - 2(-1)^n P_n + n)}$$

$$|r| \sqrt{P_{2n} - 2(-1)^n P_n + n} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n(P_{2n} - 2(-1)^n P_n + n)}$$

buradan ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 6.2.2. A elemanları Pell sayılarından oluşan bir r -daireseel matris, B elemanları Pell Lucas sayılarından oluşan bir r -daireseel matris olmak üzere olmak üzere bu iki matrisin Hadamard çarpımı

(i) $r \geq 1$ için

$$\|A \circ B\|_2 \leq |r| \frac{P_{2n} + 2(-1)^n P_n + n}{9} \sqrt{(4 + |r|^2 (P_{2n} + n - 2(-1)^n P_n - 4))(P_{2n} + n - 2(-1)^n P_n - 3)}$$

(ii) $r \leq 1$ için

$$\|A \circ B\|_2 \leq \sqrt{\frac{(n-1)(P_{2n} + n - 2(-1)^n P_n)}{9} \left(n(P_{2n} - 2(-1)^n P_n + n) \right)}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 6.2.3. A elemanları Pell sayılarından oluşan bir r -daireseel matris, B elemanları Pell Lucas sayılarından oluşan bir r -daireseel matris olmak üzere bu iki matrisin Kronecker çarpımı

(i) $r \geq 1$ için

$$\|A \otimes B\|_2 \geq \sqrt{\left(\frac{P_{2n} + 2(-1)^n P_n + n}{9} \right) (P_{2n} - 2(-1)^n P_n + n)}$$

(ii) $r \leq 1$ için

$$\|A \otimes B\|_2 \geq \sqrt{(P_{2n} + n - 2(-1)^n P_n)(P_{2n} + n - 2(-1)^n P_n)}$$

şeklinde elde edilir.

BÖLÜM 7

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmamızda elemanları Pell ve Pell Lucas olan dairesel matrislerin spektral normları için sınırlar elde edilmiştir. Pell ve Pell Lucas bir genelleştirilmiş dizisi olan k -Pell ve k -Pell Lucas dizisi elde edilerek bu diziyle oluşturulan dairesel matrislerin spektral normları için sınırlar elde edilmiştir. Ayrıca Pell ve Pell Lucas sayılarından oluşan dairesel matrislerin özel bir türü olan r - dairesel matrislerin normları için de sınırlar elde edilmiştir.

Tezimizle ilgili Gaziantep’te düzenlenen 6. Uluslararası Multidisipliner Çalışmaları Kongresi adlı konferansta “Pell ve Pell Lucas Dairesel Matrislerinin Normları için Sınırlar” adlı ile bir sunum yapılmıştır.

Bu çalışmaya benzer olarak farklı genelleştirmelerle elde edilebilecek Pell ve Pell Lucas dizileriyle oluşturulan çeşitli tipteki dairesel matrislerin spektral normları için de sınırlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Bahsi, M. (2015). On the norms of circulant matrices with the generalized Fibonacci and Lucas numbers. *TWMS J. Pure Appl. Math.* **6(1)**, 84-92.

Catarino, P., Vasco, P. (2013). On Some Identities and Generating Functions for k -Pell-Lucas Sequence, *Applied Mathematical Sciences*, **7(98)**, 4867 – 4873.

Catarino, P., Vasco, P. (2013). Modified k -Pell Sequence: Some Identities and Ordinary Generating Function, *Applied Mathematical Sciences*, **7(121)**, 6031-6037.

Catarino, P., (2013). On Some Identities and Generating Functions for k -Pell Numbers, *Int. Journal of Math. Analysis*, **7(38)**, 1877 – 1884.

Dasdemir, A., (2011). On the Pell, Pell-Lucas and Modified Pell Numbers By Matrix Method, *Applied Mathematical Sciences*, **5(64)**, 3173 – 3181.

Horadam, A. F. (1971), Pell identities, *Fibonacci Quarterly*, **9(3)**, 245-263.

Horn, R. A., Johnson, C. R. (1991). Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge.

Ipek, A. (2011). On the spectral norms of circulant matrices with classical Fibonacci and Lucas numbers entries. *Applied Mathematics and Computation*, **217**, 6011-6012.

Jhala, D., (2014). Some properties of the k -Pell Lucas sequence, *International Journal of Modern Sciences and Engineering Technology (IJMSET)*. **1(3)**, 87-92.

Jhala, D., Sisodiya, K., Rathore, G.P.S. (2013). On some identities for k -Pell numbers. *Int. Journal of Math. Analysis*. **7(12)**, 551-556

- Jiang, Z., Zhou, Z. (2015). A note on spectral norms of even order r -circulant matrices. *Applied Mathematics and Computation*, **250**, 363-371.
- Koçer, E.G. (2007). Circulant, negacyclic and semicirculant matrices with the modified Pell, Pell and Pell Lucas numbers. *Hacettepe J. Math. and Statistics*, **36(2)**, 133-142.
- Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, John Wiley and Sons, Inc., NY .
- Koshy, T., (2014). *Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications*. Springer, Berlin
- Mathias, R., (1990). The spectral norm of nonnegative matrix, *Linear Algebra and its Applications*, **131**, 269-284.
- Reams, R., (1999). Hadamard inverses square roots and products of almost semidefinite matrices, *Linear Algebra and its Applications*, **288**, 35-43.
- Shen S, Cen J., (2010). On the bounds for the norms of r -circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers, *Applied Mathematics and Computation*, **216**, 2891-2897.
- Shen, S., Cen, J. (2010). On the spectral norms of r -circulant matrices with the k -Fibonacci and k -Lucas numbers, *Int J. Contemp. Math. Sciences*, **5 (12)**, 569-578.
- Solak, S., (2005). On the norms of circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers, *Applied Mathematics and Computation*, **160**, 125-132.
- Torunbalci Aydin F. , Köklü, K., On Generalizations of the Pell Sequence, arxiv:1711.06260v1[math.Co] 16 Nov 2017.
- Türkmen R., Gökbaş H., (2016). On the spectral norm of r -circulant matrices with the Pell and Pell-Lucas numbers, *Journal of Inequalities and Applications*, **65**, DOI 10.1186/s13660-016-0997-0

Uslu, K., Taskara, N., Uygun, S. (2011). The relations among k -Fibonacci, k -Lucas and generalized k -Fibonacci and k -Lucas numbers and the spectral norms of the matrices of involving these numbers. *Ars Combinatoria*, **102**, 183-192.

Uygun, S. (2016). Some Bounds for the Norms of Circulant Matrices with the k -Jacobsthal and k -Jacobsthal Lucas Numbers, *J. of Mathematical Research*, **8(6)**, 133-138.

Yazlik, Y., Taskara, N., (2013). On the norms of an r -circulant matrix with the generalized k -Horadam numbers, *Journal of Inequalities and Applications*, **394**, 36-41.

Zielke, G., (1988). Some remarks on matrix norms, condition numbers and error estimates for linear equations, *Linear Algebra and its Applications*, **110**, 29-41.