

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ELEMANTER ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA
SAYILABİLİRLİK**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Betül SELVİ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : TOPOLOJİ

Tez Danışmanı : Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ

Temmuz 2019

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELEMANTER ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA SAYILABİLİRLİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Betül SELVİ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 16. 07. 2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.



Doç.Dr.
Banu PAZAR VAROL
Jüri Başkanı



Doç.Dr.
Mahpeyker ÖZTÜRK
Üye



Doç.Dr.
İsmet ALTINTAŞ
Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Betül SELVİ

15.07.2019



TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim süresince bilgileri, tecrübeleri ve bakış açısıyla beni destekleyen, teşvik eden ve çalışmalarımı titizlikle takip eden, öğrencisi olduğum için onur ve gurur duyduğum tezi danışmanım Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ hocama sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Lisans eğitimim boyunca bilgilerini sabırla aşılayan ve yüksek lisans eğitimine karar vermemde büyük emekleri olan Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümündeki değerli hocalarıma şükranlarımı sunarım.

Ayrıca bu süreçte desteğini benden esirgemeyen her zaman yanımda olan bundan sonraki süreç için de desteğini benden esirgemeyecek annem Ümmühan Selvi'ye, babam Ahmet Selvi'ye ve kardeşlerime teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	iv
ÖZET	vi
SUMMARY	vii
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ	1
BÖLÜM 2.	
TEMEL KAVRAMLAR	5
2.1. Esnek Kümeler	5
2.2. Esnek Elemanlar.....	7
2.3. Elemanter Esnek İşlemler	10
2.4. Esnek Reel Sayılar	13
2.5. Esnek Metrik Uzaylar	14
2.6. Elemanter Esnek Topolojik Uzaylar	19
2.7. Elemanter Esnek Alt Uzaylar	29
BÖLÜM 3.	
ESNEK FONKSİYONLAR.....	31
3.1. Esnek Fonksiyon	31
3.2. Esnek Süreklilik	34
3.3. Esnek Homeomorfizm	36

BÖLÜM 4.

SAYILABİLİR ELEMANTER ESNEK UZAYLAR	38
4.1. Yoğun Esnek Kümeler	38
4.2. Birinci Sayılabilir Elemanter Esnek Uzaylar	40
4.3. İkinci Sayılabilir Elemanter Esnek Uzaylar	42
4.4. Ayrılabilir Elemanter Esnek Uzaylar	45
4.5. Lindelöf Elemanter Esnek Uzaylar	49

BÖLÜM 5.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER	52
KAYNAKLAR.....	53
ÖZGEÇMİŞ	57

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

A	: Parametreler kümesi
$\mathcal{B}$	: Esnek baz
$\mathfrak{B}$	: Esnek eleman sınıfı
F^c	: F 'nin esnek tümleyeni
$F^{\mathbb{C}}$	: F 'nin elemanter esnek tümleyeni
$\mathcal{P}(X)$	: X 'in kuvvet kümesi
Φ	: Boş esnek küme
$\mathbb{R}(A)$	: Esnek reel sayıların sınıfı
$S_A(X)$	: X üzerindeki tüm esnek kümelerin sınıfı
$SE(\tilde{X})$	: $\tilde{X}$ 'nin tüm esnek elemanlarının sınıfı
$SS(\mathfrak{B})$	: $\mathfrak{B}$ esnek eleman sınıfının ürettiği esnek küme
$\mathcal{S}$	: Esnek alt baz
τ	: Esnek topoloji
$\mathfrak{T}$	: Esnek eleman sınıflarının topolojisi
$\mathcal{T}$	: Elemanter esnek topoloji
EET	: Elemanter Esnek Topoloji
X	: Evrensel küme
$\tilde{X}$	: Mutlak esnek küme
$\tilde{x}$	: Bir esnek eleman
$\subseteq$	: Esnek alt küme
$\supseteq$	: Esnek üst küme
$\cup$	: Esnek birleşim
$\cap$	: Esnek kesişim
$\setminus$	: Esnek fark

U	: Elemanter esnek birleşim
∩	: Elemanter esnek kesişim
\	: Elemanter esnek fark
€	: Esnek elemanı
ℳ	: Esnek elemanı değil



ÖZET

Anahtar kelimeler: Esnek küme, esnek eleman, elemanter esnek işlemler, elemanter esnek topoloji, esnek baz, yoğun esnek küme, sayılabilir esnek uzay, ayrılabilir esnek uzay, Lindelöf esnek uzay.

Bu tezin amacı, elemanter esnek topolojik uzaylarda sayılabilirlik, ayrılabilirlik ve Lindelöf özelliklerini tanımlamak ve temel topolojik özelliklerini incelemektir. Bu amaç doğrultusunda aşağıdaki çalışmalar yapıldı.

1. Elemanter esnek topolojik uzaylarda yoğun esnek küme kavramı tanımlandı ve örnekler verildi.
2. Birinci sayılabilir elemanter esnek topolojik uzay tanımlandı, örnekler verildi ve birinci sayılabilir elemanter esnek uzayın hem kalıcı hem de topolojik özelliğe sahip olduğu ispatlandı.
3. İkinci sayılabilir elemanter esnek topolojik uzay tanımlandı. İkinci sayılabilir uzayın kalıcı ve topolojik özelliğe sahip olduğu gösterildi. İkinci sayılabilir elemanter esnek uzayın her alt kümesinin her esnek açık örtüsünün bir sayılabilir esnek alt örtüye sahip olduğu ispatlandı. İkinci sayılabilir uzayla birinci sayılabilir uzay arasındaki ilişki incelendi.
4. Elemanter esnek topolojik uzayda ayrılabilirlik kavramı tanımlandı. Örnekler verildi. İkinci sayılabilir uzayla ilişkisi incelendi. Ayrılabilir elemanter esnek uzayın topolojik özelliğe sahip olduğu ancak kalıcı özelliğe sahip olmadığı gösterildi.
5. Lindelöf elemanter esnek uzayı tanımlandı. İkinci sayılabilir uzayla ilişkisi incelendi ve Lindelöf elemanter esnek uzayının topolojik özelliğe sahip olduğu gösterildi. Lindelöf elemanter esnek uzaylarında kalıcı özellik sadece esnek kapalı alt uzaylar için sağlandığı ispatlandı.

COUNTABILITY IN ELEMENTARY SOFT TOPOLOGICAL SPACES

SUMMARY

Keywords: Soft set, soft element, elementary operations, elementary soft topology, soft base, dense soft set, countable soft space, separable soft space, Lindelöf soft space.

The aim of this thesis is to define countability, separability and Lindelöf's properties in elementary soft topological spaces and to examine their basis topological properties. For this purpose, the following studies has been performed.

1. The dense soft set in elementary soft topological spaces has been defined and some examples have been given.
2. The first countable elementary soft topological spaces has been defined, some examples have been given. It proved that the first countable elementary soft topological space has the hereditary property and topological property.
3. The second countable elementary soft topological spaces has been defined. It showed that the second countable elementary soft topological space has the hereditary property and topological property and proved that every soft open covers of each soft subset in a second countable elementary soft topological space have a countable soft sub-cover. Second countable space was compared with first countable space.
4. The concept of separability in elementary soft topological spaces has been defined and some examples have been given. The relationship between separable space and second countable space was examined. It showed that the separable elementary soft topological space has the topological property, but it hasn't hereditary property.
5. Lindelöf's elementary soft space has been defined. The relationship between Lindelöf's space and second countable space was examined. It showed that the elementary soft Lindelöf's space has the topological property. It proved that hereditary property of Lindelöf's elementary soft space is satisfied only for its closed soft subset.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Mühendislik, ekonomi, çevre bilimleri ve sosyal bilimler gibi alanlarda doğruluk değeri göreceli olan kavramlar sonucu ortaya çıkan belirsiz problemleri, matematiksel olarak modellemek ve çözmek için Aristo mantığı ve klasik kümeler teorisi yetersiz kalabilir. Bu tür problemlerle başa çıkabilmek için olasılık teorisi, bulanık kümeler teorisi, yaklaşımlı kümeler teorisi, sezgisel bulanık kümeler teorisi, aralık matematiği teorisi ve esnek kümeler teorisi gibi birçok teori geliştirilmiştir. Bu teorilerin en önemlilerinden biri L. A. Zadeh tarafından geliştirilen ve belirsizlik kavramıyla büyük ölçüde başa çıkabilen bulanık kümeler teorisi birçok alana başarıyla uygulanmıştır [1]. Fakat üyelik fonksiyonlarından yararlanılan bu teoride her bir durum için üyelik fonksiyonunun inşa edilmesi kolay değildir. D.Molodtsov bu zorlukları ortadan kaldırmak için esnek kümeler teorisini ortaya atmıştır [2]. Esnek kümeler teorisinde, bulanık kümeler teorisindeki reel değerli üyelik fonksiyonunun aksine küme değerli bir dönüşüm kullanılmakta ve bir esnek küme, bir parametre kümesinden bir evrensel kümeye bir dönüşüm olarak tanımlanmaktadır.

D. Molodtsov esnek kümeler teorisini oyun teorisi, olasılık teorisi, optimizasyon teorisi, sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, Riemann integrasyonu, Peron integrasyonu ve yöneylem araştırması gibi alanlara başarılı bir şekilde uygulamıştır [2,3]. Ayrıca D. Molodtsov ve arkadaşları esnek sayı, esnek türev ve esnek integral gibi kavramları tanıtarak esnek küme teorisi temelinde bir analiz inşa etmeye çalışmışlardır [4]. P. K. Maji ve arkadaşları esnek kümelerin bazı özelliklerini incelemiş, esnek küme teorisini karar verme problemlerinde kullanmış ve bulanık esnek küme kavramını tanıtmışlardır [5-7]. Bunun dışında birçok araştırmacı da esnek kümeleri ve esnek küme işlemlerini farklı şekillerde yorumlayarak geliştirmeye çalışmıştır [8-17]. D. Pei ve D. Miao esnek kümelerin bilgi sistemlerinin bir sınıfı olduğunu göstermişlerdir [18]. Son yıllarda esnek kümeler üzerine birçok

matematiksel yapı kurulmuştur. Bu bağlamda esnek kümeler teorisinde grup, halka, ideal vb. cebirsel yapılar üzerine çok sayıda çalışma yapılmış [19-24].

İlk kez 2011 yılında M. Shabir ve M. Naz esnek kümeler üzerine topolojik yapılar kurmuşlardır [25]. W. K. Min bu esnek topolojik uzaylarda esnek ayırma aksiyomları ile ilgili çalışmalar sunmuştur [26]. 2012 yılında H. Hazra ve arkadaşları Shabir ve Naz'ın tanımladığı esnek topolojiden farklı bir topoloji tanımlamışlardır [27]. Bu süreçte A. Aygünoğlu, B. P. Varol ve H. Aygün esnek kümeler ve bulanık esnek kümeler üzerine topolojik yapılar kurup birçok topolojik kavramı incelemişlerdir [28-31]. İ. Zorlutuna ve arkadaşları esnek topolojik uzaylarda esnek nokta kavramını kullanarak esnek iç nokta, esnek komşuluk, esnek süreklilik ve esnek kompaktlık gibi kavramları tanıtmışlardır [32]. Bunların dışında birçok yazar esnek nokta kavramını kullanarak esnek topolojik uzaylar ile ilgili çok sayıda yeni çalışma yapmışlardır [33-36].

2012 yılında S. Das ve S. K. Samanta, esnek reel küme, esnek reel sayı ve onların özelliklerini [37], 2013 yılında esnek kompleks küme, esnek kompleks sayı ve onların özelliklerini [38] inceledikten sonra aynı yıl esnek eleman ile esnek kümeler üzerinde elemanter esnek küme işlemlerini tanıtarak bu işlemlere göre esnek kümeler üzerine esnek metrik yapıları kurmuşlardır [39]. S. Das, S. K. Samanta ve birçok yazar esnek eleman kavramını kullanarak esnek vektör uzayları, esnek normlu uzaylar, esnek iç çarpım uzayları gibi çeşitli matematiksel yapılar üzerine çalışmalar yapmışlardır [40-45].

K. Taşköprü, 2017 yılında doktora tezinde literatürde bilinen esnek topolojik yapılardan farklı olarak, esnek eleman temelinde esnek kümeler üzerinde tanımlanan elemanter işlemler ile elemanter esnek topolojik (EET) yapı kurmuş, literatürdeki birçok temel topolojik kavram bu yeni yapıya uygun şekilde tanımlanmış ve onların özellikleri ispatlanmıştır [46].

Bu tezin amacı ayrılabilir, birinci sayılabilir, ikinci sayılabilir ve Lindelöf EET uzayları tanımlamak ve bazı temel özellikleri ispatlamaktır. Bu amaca uygun olarak aşağıdaki çalışmalar yapılmıştır.

İkinci bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak esnek küme ve temel özellikler, esnek eleman, esnek kümeler üzerinde elemanter işlemler, esnek metrik uzaylar, EET uzaylar ve EET uzayında bazı temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde esnek fonksiyon kavramı ile EET uzaylarında esnek sürekli fonksiyon ve bazı temel özellikler verilmiştir. Bu bölümde esnek homeomorfizm tanımı yapılmış ve EET uzayında bir esnek kümenin kapanış özelliğinin homeomorfizm altında korunduğu ispatlanmıştır.

Tezin esas bölümü olan dördüncü bölümünde, birinci sayılabilir, ikinci sayılabilir, ayrılabilir ve Lindelöf EET uzayları tanımlanmış ve temel özellikleri ispatlanmıştır. Bu bölümde ilk önce EET uzaylarında yoğun esnek kümeler tanımlanmış ve örnekler verilmiştir. Sonra birinci sayılabilir EET uzayı tanımlanmış, bir kaç örnek verilmiş, birinci sayılabilir EET uzayın kalıcı ve topolojik özelliklere sahip olduğu ispatlanmıştır. Aynı zamanda ikinci sayılabilir EET uzayı tanımlanmış, kalıcı ve topolojik özelliklere sahip olduğu ispatlanmıştır. Her ikinci sayılabilir EET uzayının birinci sayılabilir olduğu gösterilmiştir. EET uzayında esnek açık örtü kavramı tanımlanmış ve ikinci sayılabilir EET uzayda bir esnek kümenin her esnek açık örtüsünün bir sayılabilir esnek alt örtüye sahip olduğu ispatlanmıştır. Daha sonra ayrılabilir EET uzayı tanımlanmış, İkinci sayılabilir EET uzayı ile ilişkisi verilmiştir. Ayrılabilir EET uzayının topolojik özelliğe sahip olduğu ispatlanmış ve kalıcı özelliğe sahip olmadığına bir örnek verilmiştir. Son olarak Lindelöf EET uzayı tanımlanmış, ikinci sayılabilir EET uzayı ile ilişkisi verilmiş, Lindelöf EET uzayının her esnek kapalı alt uzayı bir Lindelöf uzay olduğu ve bir Lindelöf EET uzayının esnek sürekli fonksiyon altındaki görüntüsünün bir Lindelöf EET uzayı olduğu ispatlanmıştır.

Tezin son bölümü olan sonuçlar ve öneriler bölümünde, bu tezde elde edilen sonuçlar ve tez kapsamındaki çalışmaların devamı niteliğinde olan çalışmalar için bazı öneriler verilmiştir.



BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde esnek küme, esnek küme işlemleri, esnek eleman, esnek sayı, esnek kümeler üzerinde tanımlanan elemanter işlemler, esnek metrik uzaylar, esnek topolojik uzaylar ile ilgili özet bilgiler [2,5,13,37,38,39]'den yararlanılarak verilmiştir. Aynı zamanda elemanter esnek topolojik uzaylar ve bu uzayda bazı kavramlar verilmiştir. Elemanter esnek topolojik ile ilgili kavramlar K. Taşköprü' nün çalışmasından alınmıştır [46].

2.1. Esnek Kümeler

Tanım 2.1.1. [2] $X \neq \emptyset$ bir evrensel küme ve $A \neq \emptyset$ bir parametreler kümesi olsun.

$F: A \rightarrow \mathcal{P}(X)$ dönüşümüne X üzerinde bir *esnek küme* denir ve (F, A) ikilisi ile gösterilir. Başka bir ifade ile X kümesinin alt kümelerinin parametrelendirilmiş bir ailesine X üzerinde bir esnek küme denir. Her $\lambda \in A$ için $F(\lambda)$ kümesi, (F, A) esnek kümesinin λ -yaklaşımlı elemanlarının bir kümesi olarak göz önünde bulundurulabilir. Böylece X kümesi üzerinde bir (F, A) esnek kümesi

$$(F, A) = \{(\lambda, F(\lambda)) : \lambda \in A \text{ ve } F(\lambda) \subset X\}$$

şeklinde ifade edilir.

A parametre kümesi tarafından parametrelendirilmiş X evrensel kümesi üzerindeki bütün esnek kümelerin sınıfı $S_A(X)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.2. [5,13,16] X üzerinde (F, A) ve (G, B) esnek kümeleri verilsin.

Her $\lambda \in A$ için $F(\lambda) = \emptyset$ ise (F, A) kümesine *boş esnek küme* denir ve Φ ile gösterilir.

Her $\lambda \in A$ için $F(\lambda) = X$ ise (F, A) kümesine *mutlak esnek küme* denir ve $\tilde{X}$ ile gösterilir.

$A \subset B$ ve her $\lambda \in A$ için $F(\lambda) \subset G(\lambda)$ ise (F, A) kümesine (G, B) esnek kümesinin *esnek alt kümesi* denir ve $(F, A) \tilde{\subset} (G, B)$ ile gösterilir. (G, B) kümesine de (F, A) esnek kümesinin *esnek üst kümesi* denir ve $(G, B) \supset (F, A)$ ile gösterilir.

(F, A) kümesi, (G, B) kümesinin esnek alt kümesi ve (G, B) kümesi de (F, A) kümesinin esnek alt kümesi ise (F, A) ve (G, B) kümelerine X üzerinde *eşit esnek kümeler* denir.

$C = A \cup B$ ve her $\lambda \in C$ için

$$H(\lambda) = \begin{cases} F(\lambda) & , \lambda \in A - B \\ G(\lambda) & , \lambda \in B - A \\ F(\lambda) \cup G(\lambda) & , \lambda \in A \cap B \end{cases}$$

olmak üzere (H, C) esnek kümesine (F, A) ve (G, B) esnek kümelerinin *esnek birleşimi* denir ve $(H, C) = (F, A) \tilde{\cup} (G, B)$ ile gösterilir.

$C = A \cap B$ ve her $\lambda \in C$ için $H(\lambda) = F(\lambda) \cap G(\lambda)$ olmak üzere (H, C) esnek kümesine (F, A) ve (G, B) esnek kümelerinin *esnek kesişimi* denir ve $(H, C) = (F, A) \tilde{\cap} (G, B)$ ile gösterilir.

$C = A \setminus B$ ve her $\lambda \in C$ için $H(\lambda) = F(\lambda) \setminus G(\lambda)$ olmak üzere (H, C) esnek kümesine (F, A) ve (G, B) esnek kümelerinin *esnek farkı* denir ve $(H, C) = (F, A) \setminus (G, B)$ ile gösterilir.

$F^C : A \rightarrow \mathcal{P}(X)$ dönüşümü her $\lambda \in A$ için $F^C(\lambda) = X - F(\lambda)$ olmak üzere X üzerindeki (F^C, A) esnek kümesine (F, A) esnek kümesinin *esnek tümleyeni* denir ve $(F^C, A) = (F, A)^C$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.3. [13,16] (F, A) , (G, A) ve (H, A) , X üzerinde esnek kümeler olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

1. $((F, A) \cup (G, A))^C = (F, A)^C \cap (G, A)^C,$
2. $((F, A) \cap (G, A))^C = (F, A)^C \cup (G, A)^C,$
3. $((F, A) \cap (G, A)) \cup (H, A) = ((F, A) \cup (H, A)) \cap ((G, A) \cup (H, A)),$
4. $((F, A) \cup (G, A)) \cap (H, A) = ((F, A) \cap (H, A)) \cup ((G, A) \cap (H, A)).$

2.2. Esnek Elemanlar

Tezin bundan sonraki kısmında bir $A \neq \emptyset$ parametre kümesi ile çalışılacağı için esnek kümenin gösteriminde (F, A) yerine kolaylık için sadece F kullanılmıştır.

Tanım 2.2.1. [37] $X \neq \emptyset$ bir küme ve $A \neq \emptyset$ bir parametreler kümesi olsun. Bir $\varepsilon : A \rightarrow X$ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir *esnek eleman* denir.

ε , X üzerinde bir esnek eleman ve bir $F \in S_A(X)$ verildiğinde her $\lambda \in A$ için $\varepsilon(\lambda) \in F(\lambda)$ ise ε esnek elemanı F esnek kümesine *aittir* denir ve $\varepsilon \in F$ ile gösterilir.

Her $\lambda \in A$ için $F(\lambda) \subset X$ tek elemanlı bir küme ise F kümesine *tek elemanlı esnek küme* denir. Böylece her tek elemanlı esnek küme aynı zamanda bir esnek elemana karşılık gelir.

Her $\lambda \in A$ için $F(\lambda) \neq \emptyset$ olacak şekilde X üzerinde tanımlı tüm esnek kümeler ile Φ boş esnek kümenin oluşturduğu sınıf $S(\tilde{X})$ ile gösterilir. $F \in S(\tilde{X})$ esnek kümesinin tüm esnek elemanlarının sınıfı da $SE(F)$ ile gösterilir.

Tezin bundan sonraki kısmında esnek elemanlar için $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \dots$ gösterimi kullanılmıştır.

Önerme 2.2.2. [39] Bir $F \in S(\tilde{X})$ esnek kümenin esnek elemanlarının bir sınıfı, bu esnek kümenin bir esnek alt kümesini üretir. $\mathcal{B}, \tilde{X}$ mutlak esnek kümesinin esnek elemanlarının bir sınıfı olmak üzere $\mathcal{B}$ sınıfının ürettiği esnek küme $SS(\mathcal{B})$ ile gösterilir.

Önerme 2.2.3. [39] Herhangi bir $F \in S(\tilde{X})$ esnek kümesi için $SS(SE(F)) = F$ olur. Ancak $\tilde{X}$ mutlak esnek kümesinin esnek elemanlarının bir $\mathcal{B}$ sınıfı için $SE(SS(\mathcal{B})) \supseteq \mathcal{B}$ olur.

Uyarı 2.2.4. $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subset SE(\tilde{X})$ olmak üzere $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ olsun. Her $\lambda \in A$ için $\mathcal{B}_1(\lambda) = \mathcal{B}_2(\lambda)$ ise $SS(\mathcal{B}_1) = SS(\mathcal{B}_2)$ olur.

Örnek 2.2.5. [46] $A = \{\lambda, \mu\}$ ve $X = \{a, b, c\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \{(\lambda, a), (\mu, a)\}, & \tilde{x}_4 &= \{(\lambda, a), (\mu, b)\}, & \tilde{x}_7 &= \{(\lambda, b), (\mu, c)\}, \\ \tilde{x}_2 &= \{(\lambda, b), (\mu, b)\}, & \tilde{x}_5 &= \{(\lambda, a), (\mu, c)\}, & \tilde{x}_8 &= \{(\lambda, c), (\mu, a)\}, \\ \tilde{x}_3 &= \{(\lambda, c), (\mu, c)\}, & \tilde{x}_6 &= \{(\lambda, b), (\mu, a)\}, & \tilde{x}_9 &= \{(\lambda, c), (\mu, b)\} \end{aligned}$$

olmak üzere $SE(\tilde{X}) = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_9\}$ olur. $\mathcal{B}_1 = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2\}$, $\mathcal{B}_2 = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5\}$ ve $\mathcal{B}_3 = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_4, \tilde{x}_6\}$ esnek eleman sınıfları ele alınırsa

$$F = SS(\mathcal{B}_1) = SS(\mathcal{B}_3) = \{(\lambda, \{a, b\}), (\mu, \{a, b\})\},$$

$$G = SS(\mathcal{B}_2) = \{(\lambda, \{a, b\}), (\mu, \{a, b, c\})\}$$

olduğu görülür. Buradan $SE(F) = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_4, \tilde{x}_6\}$ ve $SE(G) = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5, \tilde{x}_6, \tilde{x}_7\}$ olup $\mathcal{B}_1 \subset SE(F)$, $\mathcal{B}_2 \subset SE(G)$ ve $\mathcal{B}_3 = SE(F)$ elde edilir.

Önerme 2.2.6. [39] Herhangi $F, G \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri için F kümesinin her esnek elemanı G kümesinin de bir esnek elemanı ise $F \tilde{\subset} G$ olur.

Uyarı 2.2.7. [39] $F, G \in S(\tilde{X})$ verilsin.

1. $\tilde{x} \in F \tilde{\cup} G$ ise $\tilde{x} \in F$ veya $\tilde{x} \in G$ olması gerekmez.
2. F, G esnek kümelerinin esnek kesişiminin veya esnek tümleyeninin $S(\tilde{X})$ sınıfına ait olması gerekmez.

Örnek 2.2.8. Örnek 2.2.5. üzerinden $H = \{(\lambda, \{a, c\}), (\mu, \{c\})\} \in S(\tilde{X})$ ve $K = \{(\lambda, \{a, b, c\}), (\mu, \{b, c\})\} \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri verilsin. Buradan $K^c = \{(\lambda, \emptyset), (\mu, \{a\})\} \notin S(\tilde{X})$ olur ve $F \tilde{\cup} H = \{(\lambda, \{a, b, c\}), (\mu, \{a, b, c\})\}$ olup $\tilde{x}_7 \in F \tilde{\cup} H$ olmasına rağmen $\tilde{x}_7 \notin F$ ve $\tilde{x}_7 \notin H$ olur. Ayrıca $F \tilde{\cap} H = \{(\lambda, \{a\}), (\mu, \emptyset)\} \notin S(\tilde{X})$ olur.

2.3. Elemanter Esnek İşlemler

Bu kısımda esnek kümeler üzerinde esnek elemanlar kullanılarak yapılan elemanter esnek birleşim, elemanter esnek kesişim ve elemanter esnek tümleyen olarak adlandırılan elemanter esnek işlemler ve bu işlemlerin bazı yeni özellikleri verilmiştir.

Tanım 2.3.1. [39] $F, G \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri verilsin.

$\mathcal{B} = \{\tilde{x} \in \tilde{X} : \tilde{x} \in F \text{ veya } \tilde{x} \in G\}$ olmak üzere $F \cup G = SS(\mathcal{B})$ esnek kümesine F ve G esnek kümelerinin *elemanter birleşimi* denir. Diğer bir ifadeyle $F \cup G = SS(SE(F) \cup SE(G))$ olarak tanımlanır.

$\mathcal{B} = \{\tilde{x} \in \tilde{X} : \tilde{x} \in F \text{ ve } \tilde{x} \in G\}$ olmak üzere $F \cap G = SS(\mathcal{B})$ esnek kümesine F ve G esnek kümelerinin *elemanter kesişimi* denir. Diğer bir ifadeyle $F \cap G = SS(SE(F) \cap SE(G))$ olarak tanımlanır.

$\mathcal{B} = \{\tilde{x} \in \tilde{X} : \tilde{x} \in F^c\}$ olmak üzere $F^c = SS(\mathcal{B})$ esnek kümesine F esnek kümesinin *elemanter tümleyeni* denir. Diğer bir ifadeyle $F^c = SS(SE(F^c))$ olarak tanımlanır.

$\mathcal{B} = \{\tilde{x} \in \tilde{X} : \tilde{x} \in F \setminus G\}$ olmak üzere $F \setminus G = SS(\mathcal{B})$ esnek kümesine F ve G esnek kümelerinin *elemanter farkı* denir. Diğer bir ifadeyle $F \setminus G = SS(SE(F \setminus G))$ olarak tanımlanır.

Önerme 2.3.2. [39, 46] $F, G \in S(\tilde{X})$ iki esnek küme olsun. Aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

1. $F \cup G = F \cup G,$
2. $F \cap F^c = \Phi,$

3. Her $i \in I$ için $F_i = SS(\mathfrak{B}_i)$ ise $\bigcup_{i \in I} F_i = SS\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{B}_i\right)$,
4. $F \cap G \subseteq F \tilde{\cap} G$,
5. $F^c \subseteq F^c$,
6. $F \setminus G \subseteq F \tilde{\setminus} G$,
7. $F \cup F^c \subseteq \tilde{X}$,
8. Her $i \in I$ için $F_i = SS(\mathfrak{B}_i)$ ise $\bigcap_{i \in I} F_i \subseteq SS\left(\bigcap_{i \in I} \mathfrak{B}_i\right)$.

Uyarı 2.3.3. [46] Herhangi $F, G \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri için $F \cap G = \Phi$ olması $F \subseteq G^c$ ve $G \subseteq F^c$ olmasını gerektirmez. Örneğin $X = \{a, b, c, d\}$ ve $A = \{\lambda, \mu\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} F &= \{(\lambda, \{a, b\}), (\mu, \{a, c\})\}, \\ G &= \{(\lambda, \{c, d\}), (\mu, \{b, c\})\}, \\ H &= \{(\lambda, \{c, d\}), (\mu, \{a, b, d\})\} \end{aligned}$$

esnek kümelerini ve onların elemanter tümleyenlerini ele alalım. $F \cap G = \Phi$ ve $F \cap H = \Phi$ olmasına rağmen $F \not\subseteq G^c$ veya $G \not\subseteq F^c$ ve $F \not\subseteq H^c$ veya $H \not\subseteq F^c$ elde edilir. Fakat $H^c \subseteq F$ ve $F^c \subseteq H$ olur. Ayrıca $G \cap H \neq \Phi$ olmasına rağmen $G^c \cap H^c = \Phi$ olur.

Önerme 2.3.4. [46] $F, G \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri verilsin. $F \cap G = \Phi$ ve $F \tilde{\cap} G \in S(\tilde{X})$ ise $F \subseteq G^c$ ve $G \subseteq F^c$ olur.

Önerme 2.3.5. [46] Herhangi $F, G \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri için aşağıdakiler sağlanır.

1. $SE(F \cap G) = SE(F) \cap SE(G)$,

2. $SE(F \uplus G) \supset SE(F) \cup SE(G),$
3. $(F \cap G) \uplus H \subseteq (F \uplus H) \cap (G \uplus H),$
4. $(F \uplus G) \cap H \subseteq (F \cap H) \uplus (G \cap H).$

Uyarı 2.3.6. Yukarıdaki önermeye göre elemanter birleşim ve elemanter kesişim işlemleri $S(\tilde{X})$ üzerinde dağılma özelliğine sahip değildir. Örneğin; Uyarı 2.3.4.'teki F , G ve H esnek kümeleri için $(F \cap G) \uplus H = H$ olmasına rağmen

$$(F \uplus H) \cap (G \uplus H) = \{(\lambda, \{c, d\}), (\mu, \{a, b, c, d\})\}$$

olur. Ayrıca $(F \uplus G) \cap H = \{(\lambda, \{c, d\}), (\mu, \{a, b\})\}$ olmasına rağmen

$$(F \cap H) \uplus (G \cap H) = \{(\lambda, \{c, d\}), (\mu, \{b\})\}$$

olur.

Hangi şartlarda elemanter birleşim ve elemanter kesişim işlemlerinin $S(\tilde{X})$ üzerinde dağılma özelliğine sahip olacağı aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 2.3.7. [46] Herhangi $F, G, H \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri verilsin. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

1. $F \tilde{\cap} G \in S(\tilde{X})$ ise $(F \cap G) \uplus H = (F \uplus H) \cap (G \uplus H),$
2. $F \tilde{\cap} H \in S(\tilde{X})$ ve $G \tilde{\cap} H \in S(\tilde{X})$ ise $(F \uplus G) \cap H = (F \cap H) \uplus (G \cap H).$

Önerme 2.3.8. [46] Herhangi $F, G \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri verilsin. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

1. $F^C \cap G^C \neq \Phi$ ise $(F \cup G)^C = F^C \cap G^C$,
2. $(F \cap G)^C \neq \Phi$ ise $(F \cap G)^C = F^C \cup G^C$,
3. $F^C \cap G^C \neq \Phi$, $F^C \neq \Phi$ ve $G^C \neq \Phi$ ise $(F \cup G)^C = F^C \cap G^C$,
4. $F \cap G \neq \Phi$, $F^C \neq \Phi$ ve $G^C \neq \Phi$ ise $(F \cap G)^C = F^C \cup G^C$.

Uyarı 2.3.9. Yukarıdaki önermelerde görüldüğü gibi esnek kümeler üzerinde elemanter işlemler dağılma özelliğini ve De Morgan kurallarını genelde sağlamaz. Eğer verilen esnek kümelerin esnek kesişimleri, esnek tümleyenleri ve esnek tümleyenlerinin esnek kesişimleri $S(\tilde{X})$ sınıfına ait ise dağılma özelliği ve De Morgan kuralları elemanter işlemler için de sağlanır.

2.4. Esnek Reel Sayılar

Tanım 2.4.1. [37] $B(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin boştan farklı tüm sınırlı alt kümelerinin sınıfı olsun. $F: A \rightarrow B(\mathbb{R})$ dönüşümü ile birlikte F esnek kümesine *esnek reel küme* denir. Eğer F esnek reel kümesi tek elemanlı esnek küme ise F kümesine karşılık gelen esnek eleman ile ilişkilendirerek bu esnek kümeye *esnek reel sayı* denir. Tüm esnek reel kümelerin sınıfı $R(A)$, tüm esnek reel sayıların sınıfı $\mathbb{R}(A)$ ve negatif olmayan esnek reel sayıların sınıfı $\mathbb{R}(A)^*$ ile gösterilir. $\mathbb{R}(A) = SE(\tilde{\mathbb{R}})$ olduğu açıktır. Esnek sayılar için $\tilde{r}, \tilde{s}, \tilde{t}, \dots$ ile ve özel olarak her $\lambda \in A$ için $\tilde{r}(\lambda) = r$ ise $\bar{r}$ ile gösterilir.

$\tilde{r}, \tilde{s} \in \mathbb{R}(A)$ esnek reel sayıları verildiğinde bu *esnek reel sayıların sıralaması*, her $\lambda \in A$ için $\tilde{r}(\lambda) \leq \tilde{s}(\lambda)$ ise $\tilde{r} \leq \tilde{s}$; $\tilde{r}(\lambda) \geq \tilde{s}(\lambda)$ ise $\tilde{r} \geq \tilde{s}$; $\tilde{r}(\lambda) < \tilde{s}(\lambda)$ ise $\tilde{r} < \tilde{s}$; $\tilde{r}(\lambda) > \tilde{s}(\lambda)$ ise $\tilde{r} > \tilde{s}$ şeklinde tanımlanır.

Uyarı 2.4.2. [37] $\mathbb{R}(A)$ esnek reel sayılar sınıfı üzerinde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri $R(A)$ üzerindeki işlemlere benzer şekilde yapılır. Örneğin; $\tilde{r}, \tilde{s} \in \mathbb{R}(A)$ verildiğinde bu iki esnek reel sayının toplamı her $\lambda \in A$ için $(\tilde{r} + \tilde{s})(\lambda) = \{a + b : a = \tilde{r}(\lambda), b = \tilde{s}(\lambda)\}$ olmak üzere $\tilde{r} + \tilde{s}$ biçiminde ve bu iki esnek reel sayının çarpımı her $\lambda \in A$ için $(\tilde{r} \cdot \tilde{s})(\lambda) = \{a \cdot b : a = \tilde{r}(\lambda), b = \tilde{s}(\lambda)\}$ olmak üzere $\tilde{r} \cdot \tilde{s}$ biçiminde tanımlanır.

2.5. Esnek Metrik Uzaylar

Bu kısımda esnek metrik uzay tanımı ve esnek metrik uzayın bazı özellikleri, esnek elemanlar üzerinden verilmiştir.

Tanım 2.5.1. [39] $X \neq \emptyset$ bir evrensel küme ve $A \neq \emptyset$ bir parametreler kümesi olmak üzere ve $d : SE(\tilde{X}) \times SE(\tilde{X}) \rightarrow \mathbb{R}(A)^*$ esnek dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa d dönüşümüne $\tilde{X}$ üzerinde *esnek metrik* denir.

- EM1. Her $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ için $d(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq \bar{0}$,
- EM2. Her $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ için $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = \bar{0} \Leftrightarrow \tilde{x} = \tilde{y}$,
- EM3. Her $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ için $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = d(\tilde{y}, \tilde{x})$,
- EM4. Her $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{X}$ için $d(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq d(\tilde{x}, \tilde{z}) + d(\tilde{z}, \tilde{y})$.

$\tilde{X}$ mutlak esnek kümesine üzerindeki d esnek metriği ile birlikte *esnek metrik uzay* denir ve $(\tilde{X}, d, A)$ veya $(\tilde{X}, d)$ ile gösterilir. (EM1)-(EM4) aksiyomlarına da *esnek metrik aksiyomları* denir.

Önerme 2.5.2. [39] $\{d_\lambda : \lambda \in A\}$, bir X klasik kümesi üzerindeki klasik metriklerin herhangi parametrelendirilmiş ailesi olsun. Bu durumda her $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ ve her $\lambda \in A$ için

$d(\tilde{x}, \tilde{y})(\lambda) = d_\lambda(\tilde{x}(\lambda), \tilde{y}(\lambda))$ şeklinde tanımlanan d dönüşümü $\tilde{X}$ üzerinde bir esnek metrik olur.

Önerme 2.5.3. [39] ρ , bir X klasik kümesi üzerindeki herhangi bir klasik metrik olmak üzere, her $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ ve her $\lambda \in A$ için $d(\tilde{x}, \tilde{y})(\lambda) = \rho(\tilde{x}(\lambda), \tilde{y}(\lambda))$ şeklinde tanımlanan $d : SE(\tilde{X}) \times SE(\tilde{X}) \rightarrow \mathbb{R}(A)^*$ dönüşümü bir esnek metrik olur. Bu şekildeki bir esnek metriğe ρ klasik metriği tarafından üretilen esnek metrik denir. Böylece X üzerindeki herhangi bir metrik bir esnek metriğe genişletilebilir.

Örnek 2.5.4. $\mathbb{R}$ üzerindeki Öklid metriği tarafından üretilen esnek metrik,

$$d : SE(\tilde{\mathbb{R}}) \times SE(\tilde{\mathbb{R}}) \rightarrow \mathbb{R}(A)^*, \quad \forall \lambda \in A \text{ ve } \forall \tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{\mathbb{R}}, \quad d(\tilde{x}, \tilde{y})(\lambda) = |\tilde{x}(\lambda) - \tilde{y}(\lambda)|$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 2.5.5. [39] Klasik metriklerin herhangi bir parametrelendirilmiş ailesi esnek metrik olmasına rağmen, herhangi bir esnek metrik klasik metriklerin parametrelendirilmiş bir ailesi değildir. Böylece esnek metrik, klasik metriklerin herhangi bir parametrelendirilmiş ailesinden daha genel ve daha kapsamlıdır.

Örnek 2.5.6. [39] $X = \{x, y\}$ ve $A = \{\alpha, \beta\}$ olsun.

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \{(\alpha, x), (\beta, x)\}, & \tilde{x}_3 &= \{(\alpha, y), (\beta, x)\}, \\ \tilde{x}_2 &= \{(\alpha, x), (\beta, y)\}, & \tilde{x}_4 &= \{(\alpha, y), (\beta, y)\} \end{aligned}$$

olmak üzere $SE(\tilde{X}) = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4\}$ olur. $\tilde{X}$ üzerinde esnek ayırık metrik her $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ için

$$d(\tilde{x}, \tilde{y}) = \begin{cases} \bar{0}, & \tilde{x} = \tilde{y} \\ \bar{1}, & \tilde{x} \neq \tilde{y} \end{cases}$$

ile tanımlansın. Buradan her $\lambda \in A$ ve her $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ için

$$d(\tilde{x}, \tilde{y})(\lambda) = d_\lambda(\tilde{x}(\lambda), \tilde{y}(\lambda))$$

olacak şekilde $d_\lambda : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümleri iyi tanımlı olmaz. Gerçekten,

$$\begin{aligned} d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_1) = \bar{0} &\Rightarrow d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_1)(\alpha) = 0 \Rightarrow d_\alpha(\tilde{x}_1(\alpha), \tilde{x}_1(\alpha)) = d_\alpha(x, x) = 0, \\ d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \bar{1} &\Rightarrow d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)(\alpha) = 1 \Rightarrow d_\alpha(\tilde{x}_1(\alpha), \tilde{x}_2(\alpha)) = d_\alpha(x, x) = 1 \end{aligned}$$

olur. Böylece her $\lambda \in A$ için d_λ , X üzerinde metrik değildir.

Teorem 2.5.7. [39] $X \neq \emptyset$ bir evrensel küme ve $A \neq \emptyset$ bir parametreler kümesi olsun. $\tilde{X}$ üzerinde bir $d : SE(\tilde{X}) \times SE(\tilde{X}) \rightarrow \mathbb{R}(A)^*$ esnek metriği (EM5) şartını sağlarsa her $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ için $d_\lambda(\tilde{x}(\lambda), \tilde{y}(\lambda)) = d(\tilde{x}, \tilde{y})(\lambda)$ şeklinde tanımlanan $d_\lambda : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$, her $\lambda \in A$ için X üzerinde bir metriktir.

EM5. Her $\lambda \in A$, her $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ ve her $(\eta, \xi) \in X \times X$ için $\{d(\tilde{x}, \tilde{y})(\lambda) : \tilde{x}(\lambda) = \eta, \tilde{y}(\lambda) = \xi\}$ tek elemanlı bir kümedir.

Tanım 2.5.8. [39] $(\tilde{X}, d, A)$ esnek metrik uzay ve $F \in S(\tilde{X})$ esnek alt kümesi verilsin. $d_F : SE(F) \times SE(F) \rightarrow \mathbb{R}(A)^*$ esnek dönüşümü, her $\tilde{x}, \tilde{y} \in F$ için $d_F(\tilde{x}, \tilde{y}) = d(\tilde{x}, \tilde{y})$ olmak üzere F üzerinde bir esnek metriktir. Bu esnek metriğe F üzerine indirgenen esnek alt metrik ve (F, d_F, A) üçlüsüne de esnek alt metrik uzay denir.

Tanım 2.5.9. [39] $(\tilde{X}, d, A)$ esnek metrik uzay, $\tilde{a} \in \tilde{X}$ ve $\tilde{r} \in \mathbb{R}(A)^*$ olsun.

$$B(\tilde{a}, \tilde{r}) = \{\tilde{x} \in \tilde{X} : d(\tilde{x}, \tilde{a}) < \tilde{r}\} \subset SE(\tilde{X}),$$

$$B[\tilde{a}, \tilde{r}] = \{\tilde{x} \in \tilde{X} : d(\tilde{x}, \tilde{a}) \leq \tilde{r}\} \subset SE(\tilde{X}),$$

$$S(\tilde{a}, \tilde{r}) = \{\tilde{x} \in \tilde{X} : d(\tilde{x}, \tilde{a}) = \tilde{r}\} \subset SE(\tilde{X}),$$

sınıflarına sırasıyla $\tilde{a}$ merkezli $\tilde{r}$ yarıçaplı *açık yuvar*, *kapalı yuvar* ve *küre*, $SS(B(\tilde{a}, \tilde{r}))$, $SS(B[\tilde{a}, \tilde{r}])$ ve $SS(S(\tilde{a}, \tilde{r}))$ esnek kümelerine de sırasıyla $\tilde{a}$ merkezli $\tilde{r}$ yarıçaplı *esnek açık yuvar*, *esnek kapalı yuvar* ve *esnek küre* denir.

Tanım 2.5.10. [39] $(\tilde{X}, d, A)$ esnek metrik uzayında bir esnek küme olsun. Bir $\tilde{a} \in F$ esnek elemanı için $\tilde{a} \in B(\tilde{a}, \tilde{r}) \subset SE(F)$ olacak şekilde $\tilde{r} \in \mathbb{R}(A)^*$ var ise $\tilde{a}$ elemanına F kümesinin bir *iç elemanı* denir ve F kümesinin tüm iç elemanlarının kümesi $Int(F)$ ile gösterilir. Buradan $SS(Int(F))$ esnek kümesine de F esnek kümesinin *esnek içi* denir.

Tanım 2.5.11. [39] $(\tilde{X}, d, A)$ esnek metrik uzay ve $\mathcal{B} \subset SE(\tilde{X})$ sınıfı boştan farklı olsun. $\mathcal{B}$ sınıfının her elemanı iç eleman ise $\mathcal{B}$ sınıfına $(\tilde{X}, d, A)$ içinde *açıktır* denir. Buradan $SS(\mathcal{B})$ kümesine de *esnek açık küme* denir.

Teorem 2.5.12. [39] Bir esnek metrik uzayda her açık yuvar bir açık kümedir ve böylece her esnek açık yuvar bir esnek açık kümedir.

Tanım 2.5.13. [39] $(\tilde{X}, d, A)$ esnek metrik uzay olsun. Bir $F \in S(\tilde{X})$ esnek kümesinin esnek tümleyeni için $F^c \in S(\tilde{X})$ ve $F^c, (\tilde{X}, d, A)$ içinde esnek açık ise F kümesine *esnek kapalı küme* denir.

Tanım 2.5.14. [39] $(\tilde{X}, d, A)$ esnek metrik uzay, $\tilde{a} \in \tilde{X}$ ve $N(\tilde{a}) \subset SE(\tilde{X})$ olsun. $\tilde{a} \in B(\tilde{a}, \tilde{r}) \subset N(\tilde{a})$ olacak şekilde $\tilde{r} \in \mathbb{R}(A)^*$ var ise $N(\tilde{a})$ sınıfına $\tilde{a}$ elemanın komşuluğu denir ve $SS(N(\tilde{a}))$ kümesine de $\tilde{a}$ elemanın esnek komşuluğu denir.

Teorem 2.5.15. [39] $(\tilde{X}, d, A)$ bir esnek metrik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1. Φ ve $\tilde{X}$ esnek kümeleri esnek açıktır.
2. Herhangi sayıda esnek açık kümenin elemanter birleşimi esnek açıktır.

Uyarı 2.5.16. [39] $SS(\mathcal{B}_1) \cap SS(\mathcal{B}_2) \neq SS(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2)$ olduğundan herhangi iki esnek açık kümenin elemanter kesişimi esnek açık olmayabilir.

Örnek 2.5.17. [39] $X = \{x, y, z\}$ ve $A = \{\lambda, \mu\}$ olsun.

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \{(\lambda, x), (\mu, x)\}, & \tilde{x}_2 &= \{(\lambda, y), (\mu, y)\}, & \tilde{x}_3 &= \{(\lambda, z), (\mu, z)\}, \\ \tilde{x}_4 &= \{(\lambda, x), (\mu, y)\}, & \tilde{x}_5 &= \{(\lambda, y), (\mu, z)\}, & \tilde{x}_6 &= \{(\lambda, z), (\mu, x)\} \end{aligned}$$

olmak üzere $\mathcal{B}_1 = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3\}$ ve $\mathcal{B}_2 = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5, \tilde{x}_6\}$ sınıfları verilsin. Bu durumda $SS(\mathcal{B}_1) = \tilde{X}$ ve $SS(\mathcal{B}_2) = \tilde{X}$ olup $SS(\mathcal{B}_1) \cap SS(\mathcal{B}_2) = \tilde{X}$ elde edilir. Fakat $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \{\tilde{x}_1\}$ olup $SS(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) \neq \tilde{X}$ olur.

Önerme 2.5.18. [39] $(\tilde{X}, d, A)$ esnek metrik uzayı (EM5) şartını sağlasın. $(\tilde{X}, d, A)$ içindeki her $\lambda \in A$ ve $B(\tilde{a}, \tilde{r})$ açık yuvarı için $SS(B(\tilde{a}, \tilde{r}))(\lambda) = B(\tilde{a}(\lambda), \tilde{r}(\lambda))$, (X, d_λ) metrik uzayı içinde bir açık yuvardır.

Önerme 2.5.19. [39] $(\tilde{X}, d, A)$ esnek metrik uzayı (EM5) şartını sağlasın. F , $(\tilde{X}, d, A)$ içinde esnek açık olması için gerek ve yeter şart her $\lambda \in A$ için $F(\lambda)$, (X, d_λ) metrik uzayı içinde açık olmasıdır.

Teorem 2.5.20. [39] $(\tilde{X}, d, A)$ esnek metrik uzayı (EM5) şartını sağlasın. Bu durumda $(\tilde{X}, d, A)$ içinde iki esnek açık kümenin elemanter kesişimi esnek açık kümedir.

2.6. Elemanter Esnek Topolojik Uzaylar

Bu kısımda elemanter esnek topolojik (EET) uzayın tanımı ve bu uzayın bazı kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.6.1. [25] $\tau \subseteq S_A(X)$ olmak üzere

1. $\Phi, \tilde{X} \in \tau$,
2. $\{F_i\}_{i \in I} \subset \tau$ için $\bigcup_{i \in I} F_i \in \tau$,
3. $\{F_i\}_{i=1}^n \subset \tau$ için $\bigcap_{i=1}^n F_i \in \tau$,

şartları sağlanırsa τ sınıfı X üzerinde bir *esnek topoloji* ve (X, τ, A) üçlüsüne *esnek topolojik uzay* denir.

Örnek 2.6.2. [25,28] (X, τ, A) bir esnek topolojik uzay olsun. Her $\lambda \in A$ için $\tau_\lambda = \{F(\lambda) : (F, A) \in \tau\}$ sınıfı X üzerinde bir topolojidir. Bu topoloji λ -parametre topolojisi olarak adlandırılır.

Tanım 2.6.3. [27] τ , X üzerinde A ile parametrelendirilen esnek kümelerin bir sınıfı ve her $\lambda \in A$ için $\tau_\lambda = \{F(\lambda) : F \in \tau\}$ olsun. Eğer τ_λ sınıfı her $\lambda \in A$ için X üzerinde bir topoloji ise τ sınıfına $\tilde{X}$ üzerinde *esnek kümelerin bir topolojisi* denir.

Tanım 2.6.4. [46] $\mathfrak{T} \subset \mathcal{P}(SE(\tilde{X}))$, esnek elemanların sınıflarının bir koleksiyonu olmak üzere

1. $\emptyset, SE(\tilde{X}) \in \mathfrak{T}$,
2. $\{\mathcal{B}_i\}_{i \in I} \subset \mathfrak{T}$ için $\bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i \in \mathfrak{T}$,
3. $\{\mathcal{B}_i\}_{i=1}^n \subset \mathfrak{T}$ için $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{B}_i \in \mathfrak{T}$

şartları sağlanırsa $\mathfrak{T}$ koleksiyonu $\tilde{X}$ üzerinde bir topolojidir. Bu topoloji *esnek elemanların sınıflarının oluşturduğu topoloji* (EES topoloji) olarak adlandırılır ve $(\tilde{X}, \mathfrak{T}, A)$ üçlüsüne de *EES topolojik uzay* adı verilir.

Örnek 2.6.5. [46] $(\tilde{X}, \mathfrak{T}, A)$, EES topolojik uzay olsun. Her $\lambda \in A$ için

$$\mathfrak{T}_\lambda = \{\mathcal{B}_\lambda \subset X : \tilde{x}(\lambda) \in \mathcal{B}_\lambda, \forall \tilde{x} \in \mathcal{B} \in \mathfrak{T}\}$$

sınıfı X üzerinde bir topolojidir.

Tanım 2.6.6. [46] $\mathcal{T} \subset S(\tilde{X})$ olmak üzere

1. $\Phi, \tilde{X} \in \mathcal{T}$,
2. $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ için $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$,
3. $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{T}$ için $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$

şartları sağlanırsa $\mathcal{T}$ sınıfı $\tilde{X}$ üzerinde bir esnek topolojidir. Bu *topolojiye elemanter esnek topoloji* (EET) ve $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ üçlüsüne de *elemanter esnek topolojik uzay* adı verilir.

Örnek 2.6.7. Her esnek metrik uzay bir elemanter esnek topolojik uzay değildir. Çünkü esnek metrik uzayda iki esnek açık kümenin elemanter kesişimi esnek açık olmayabilir (bakınız Uyarı 2.5.16). Fakat (EM5) şartını sağlayan $(\tilde{X}, d, A)$ esnek metrik uzayında tüm esnek açık kümelerin sınıfı Teorem 2.5.15. ve 2.5.20.'den esnek kümelerin elemanter birleşim ve elemanter kesişim işlemlerine göre bir topoloji olur. Bu topolojiye elemanter esnek metrik topoloji denir.

Örnek 2.6.8. [46] $X = \{x, y, z\}$ ve $A = \{\lambda, \mu\}$ olmak üzere

$$F_1 = \{(\lambda, \{x, y\}), (\mu, \{x, z\})\},$$

$$F_2 = \{(\lambda, \{z\}), (\mu, \{y\})\},$$

$$F_3 = \{(\lambda, \{z\}), (\mu, \{y, z\})\}$$

esnek kümeler olsun. Bu durumda $\mathcal{T}_1 = \{\Phi, \tilde{X}, F_1, F_2\}$ sınıfı $\tilde{X}$ üzerinde hem bir elemanter esnek topoloji hem de Tanım 2.6.1. ve 2.6.3.'e göre bir esnek topolojidir. $\mathcal{T}_2 = \{\Phi, \tilde{X}, F_2, F_3\}$ sınıfı $\tilde{X}$ üzerinde ne bir elemanter esnek topoloji ne de bir esnek topolojidir. $\mathcal{T}_3 = \{\Phi, \tilde{X}, F_1, F_3\}$ sınıfı $\tilde{X}$ üzerinde bir elemanter esnek topolojidir. Ancak, $\tilde{X}$ üzerinde Tanım 2.6.1. ve 2.6.4.'e göre bir esnek topoloji değildir. Gerçekten, $F_1 \cap F_3 = \{(\mu, \{z\})\} \notin \mathcal{T}_3$ olur ve $\tau_\mu = \{\emptyset, X, \{x, z\}, \{y, z\}\}$ sınıfı X üzerinde bir topoloji değildir. Son olarak $\mathcal{T}_4 = \{\Phi, \tilde{X}, F_1, F_2, F_3\}$ sınıfı $\tilde{X}$ üzerinde bir elemanter esnek topoloji ve Tanım 2.6.1.'e göre bir esnek topoloji olmasına rağmen Tanım 2.6.3.'e göre bir esnek topoloji değildir.

Aşağıdaki önermeler ve teoremler, EET ile diğer topolojiler arasındaki ilişkileri verir.

Önerme 2.6.9. [46] 1. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ bir EET uzay olsun. Eğer boştan farklı her $U, V \in \mathcal{T}$ esnek kümeleri için $U \cap V \neq \Phi$ ise $\mathcal{T}$ sınıfı aynı zamanda $\tilde{X}$ üzerinde bir esnek topolojidir.

2. $(\tilde{X}, \tau, A)$, Tanım 2.6.3.'e göre bir esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda $\mathcal{T} = \{U \in S(\tilde{X}) : U(\lambda) \in \tau_\lambda, \forall \lambda \in A\}$ sınıfı ile $\tilde{X}$ üzerinde bir EET topolojidir.

3. $(\tilde{X}, \mathfrak{T}, A)$ bir EES topolojik uzay olsun. Bu durumda $\mathcal{T} = \{U \in S(\tilde{X}) : SE(U) \in \mathfrak{T}\}$ sınıfı $\tilde{X}$ üzerinde bir elemanter esnek topolojidir.

Önerme 2.6.10. [46] $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ bir EET uzay olsun. Eğer $U, V \in \mathcal{T}$ için $U \tilde{\cap} V \in S(\tilde{X})$ ise her $\lambda \in A$ için $\mathcal{T}_\lambda = \{U(\lambda) : U \in \mathcal{T}\}$ sınıfı X üzerinde bir topolojidir.

Tanım 2.6.11. [46] $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ bir EET uzay olmak üzere $\mathcal{T}$ sınıfının her bir üyesine *esnek açık küme* denir.

Bir $K \in S(\tilde{X})$ esnek kümesi verildiğinde $K^c \in S(\tilde{X})$ ve $K^c \in \mathcal{T}$ ise K esnek kümesine *esnek kapalı küme* denir.

Önerme 2.6.12. [46] $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ bir EET uzay olsun.

1. Φ ve $\tilde{X}$ esnek kapalıdır.
2. $\{K_i : i \in I\}$, $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ uzayında esnek kapalı kümelerin bir sınıfı olsun. Bu durumda $K = \cap \{K_i : i \in I\}$ esnek kapalıdır.

3. $K_1^{\mathbb{C}} \cap K_2^{\mathbb{C}} \neq \Phi$ ile K_1 ve K_2 , $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ uzayında iki esnek kapalı küme olsun.

Bu durumda $K_1 \cup K_2$ esnek kapalıdır.

Tanım 2.6.13. [46] $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ bir EET uzay ve $\tilde{x} \in \tilde{X}$ olsun. Bir $N \in S(\tilde{X})$ esnek kümesi için $\tilde{x} \in U \subseteq N$ olacak şekilde $U \in \mathcal{T}$ esnek açık kümesi varsa N esnek kümesine $\tilde{x}$ esnek elemanının *esnek komşuluğu* denir. $\tilde{x}$ esnek elemanının tüm esnek komşuluklarının sınıfı $N_{\mathcal{T}}(\tilde{x})$ veya $\mathcal{T}$ anlaşıyor ise $N(\tilde{x})$ ile gösterilir.

$F, N \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri için $F \subseteq U \subseteq N$ olacak şekilde $N \in \mathcal{T}$ esnek açık kümesi varsa N esnek kümesine F esnek kümesinin *esnek komşuluğu* denir.

Tanım 2.6.14. [46] $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ bir EET uzay ve $F \in S(\tilde{X})$ olsun. Bir $\tilde{x} \in F$ için $\tilde{x} \in U \subseteq F$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{T}$ var ise $\tilde{x}$ elemanına F kümesinin bir *esnek iç elemanı* denir. F kümesinin tüm esnek iç elemanlarının sınıfı $\text{int}F$ ile gösterilir. F kümesinin tüm esnek iç elemanlarının sınıfının ürettiği esnek kümeye de F kümesinin *esnek içi* denir ve $F^{\circ} = SS(\text{int}F)$ ile gösterilir.

Teorem 2.6.15. [46] $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ bir EET uzay ve $F, G \in S(\tilde{X})$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. F° , F kümesinin esnek açık alt kümelerinin elemanter birleşimine eşittir,
2. F° , F kümesinin en büyük esnek açık alt kümesidir,
3. F esnek açıktır $\Leftrightarrow F^{\circ} = F$,
4. $\tilde{X}^{\circ} = \tilde{X}$ ve $\Phi^{\circ} = \Phi$,
5. $F \subseteq G$ ise $F^{\circ} \subseteq G^{\circ}$,
6. $(F^{\circ})^{\circ} = F^{\circ}$,
7. $F^{\circ} \cap G^{\circ} = (F \cap G)^{\circ}$,

$$8. \quad F^\circ \uplus G^\circ \tilde{=} (F \uplus G)^\circ.$$

Tanım 2.6.16. [46] $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ bir EET uzay, $F \in S(\tilde{X})$ ve $\tilde{x} \in \tilde{X}$ olsun. Eğer her bir $N \in N_{\mathcal{T}}(\tilde{x})$ için $F \cap N \neq \Phi$ ise $\tilde{x}$ elemanına F kümesinin *esnek kapanış elemanı* denir. F kümesinin tüm esnek kapanış elemanlarının sınıfı clF ile gösterilir. F kümesinin tüm esnek kapanış elemanlarının sınıfının ürettiği esnek kümeye de F kümesinin *esnek kapanışı* denir ve $\bar{F} = SS(clF)$ ile gösterilir.

Eğer $F \cap N = \Phi$ ve $F \cap N \in S(\tilde{X})$ olacak şekilde en az bir $N \in N_{\mathcal{T}}(\tilde{x})$ var ise $\tilde{x} \in \tilde{X}$, F kümesinin bir esnek kapanış elemanı değildir.

Teorem 2.6.17. [46] $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ bir EET uzay ve $F \in S(\tilde{X})$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $\bar{F}$, F kümesini kapsayan esnek kapalı kümelerin elemanter kesişimine eşittir.
2. $\bar{F}$, F kümesini kapsayan en küçük esnek kapalı kümedir.
3. F esnek kapalıdır $\Leftrightarrow \bar{F} = F$.
4. $\bar{\tilde{X}} = \tilde{X}$ ve $\bar{\Phi} = \Phi$,
5. $F \tilde{=} G$ ise $\bar{F} \tilde{=} \bar{G}$,
6. $\overline{(\bar{F})} = \bar{F}$,
7. $\bar{F}^c \cap \bar{G}^c \neq \Phi$ ise $\bar{F} \uplus \bar{G} = \overline{(F \uplus G)}$,
8. $\overline{(F \cap G)} \tilde{=} \bar{F} \cap \bar{G}$.

Önerme 2.6.18. [46] $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ bir EET uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

1. $F \in S(\tilde{X})$ ise $(\bar{F})^c = (F^c)^\circ$,
2. $F, F^c \in S(\tilde{X})$ ise $(F^\circ)^c = \overline{(F^c)}$.

Tanım 2.6.19. [46] $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ bir EET uzay, $F \in S(\tilde{X})$ ve $\tilde{x} \in \tilde{X}$ olsun. Eğer her bir $N \in N_{\mathcal{T}}(\tilde{x})$ için $F \cap (N \setminus \{\tilde{x}\}) \neq \Phi$ ise $\tilde{x}$ elemanına F kümesinin *esnek yığılma elemanı* denir. F kümesinin tüm esnek yığılma elemanlarının sınıfı $\lim F$ ile gösterilir. F kümesinin tüm esnek yığılma elemanlarının sınıfının ürettiği esnek kümeye F kümesinin *esnek yığılma elemanlarının kümesi* denir ve $F^{\sim} = SS(\lim F)$ ile gösterilir.

Eğer $F \cap (N \setminus \{\tilde{x}\}) = \Phi$ ve $F \cap (N \setminus \{\tilde{x}\}) \in S(\tilde{X})$ olacak şekilde en az bir $N \in N(\tilde{x})$ var ise $\tilde{x} \notin \tilde{X}$, F kümesinin bir esnek yığılma elemanı değildir. Ayrıca $F^{\sim} \subsetneq \bar{F}$ olduğu açıktır.

Teorem 2.6.20. [46] $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ bir EET uzay ve $F \in S(\tilde{X})$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

1. $F \cup F^{\sim}$ esnek kümesi esnek kapalıdır,
2. $\bar{F} = F \cup F^{\sim}$,
3. F esnek kapalıdır $\Leftrightarrow F^{\sim} \subsetneq F$.

Tanım 2.6.21. [46] $\mathcal{B} \subset S(\tilde{X})$ esnek kümelerin bir sınıfı olsun. Eğer $\mathcal{B}$ sınıfı aşağıdaki şartları sağlarsa bu sınıfa, $\tilde{X}$ üzerindeki bir elemanter esnek topoloji için *esnek baz* denir.

- B1. Her $\tilde{x} \in \tilde{X}$ için $\tilde{x} \in B$ olacak şekilde en az bir $B \in \mathcal{B}$ esnek kümesi vardır.
- B2. $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ için $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ve $\tilde{x} \in B_1 \cap B_2$ ise $\tilde{x} \in B_3 \subsetneq B_1 \cap B_2$ olacak şekilde $B_3 \in \mathcal{B}$ esnek kümesi vardır.

Örnek 2.6.22. [46] $X = \{x, y, z\}$ ve $A = \{\lambda, \mu\}$ olmak üzere

$$B_1 = \{(\lambda, \{x\}), (\mu, \{x\})\}, \quad B_2 = \{(\lambda, \{x\}), (\mu, \{y\})\}, \quad B_3 = \{(\lambda, \{x\}), (\mu, \{z\})\}, \\ B_4 = \{(\lambda, \{x, y\}), (\mu, X)\}, \quad B_5 = \{(\lambda, \{x, z\}), (\mu, X)\}$$

esnek kümeleri için $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$ olsun. $\mathcal{B}$ sınıfı $\tilde{X}$ üzerindeki bir EET için esnek bazdır.

Çözüm. $\tilde{X}$ mutlak esnek kümesinin esnek elemanları

$$\tilde{x}_1 = \{(\lambda, x), (\mu, x)\}, \quad \tilde{x}_4 = \{(\lambda, y), (\mu, x)\}, \quad \tilde{x}_7 = \{(\lambda, z), (\mu, x)\}, \\ \tilde{x}_2 = \{(\lambda, x), (\mu, y)\}, \quad \tilde{x}_5 = \{(\lambda, y), (\mu, y)\}, \quad \tilde{x}_8 = \{(\lambda, z), (\mu, y)\}, \\ \tilde{x}_3 = \{(\lambda, x), (\mu, z)\}, \quad \tilde{x}_6 = \{(\lambda, y), (\mu, z)\}, \quad \tilde{x}_9 = \{(\lambda, z), (\mu, z)\}$$

olmak üzere $SE(\tilde{X}) = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5, \tilde{x}_6, \tilde{x}_7, \tilde{x}_8, \tilde{x}_9\}$ olur. Bu durumda

B1. $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5, \tilde{x}_6 \in B_4$ ve $\tilde{x}_7, \tilde{x}_8, \tilde{x}_9 \in B_5$ olur.

B2. $B_1 \cap B_4 = B_1 \in \mathcal{B}$, $B_2 \cap B_4 = B_2 \in \mathcal{B}$, $B_3 \cap B_4 = B_3 \in \mathcal{B}$, $B_1 \cap B_5 = B_1 \in \mathcal{B}$,
 $B_2 \cap B_5 = B_2 \in \mathcal{B}$, $B_3 \cap B_5 = B_3 \in \mathcal{B}$ ve $B_4 \cap B_5 = \{(\lambda, \{x\}), (\mu, X)\} = B_6 \notin \mathcal{B}$
 olur. Burada B_6 esnek kümesi için $\tilde{x}_1 \in B_1 \subset B_6$, $\tilde{x}_2 \in B_2 \subset B_6$ ve $\tilde{x}_3 \in B_3 \subset B_6$
 elde edilir.

Dolayısıyla $\mathcal{B}$ esnek bazdır.

Uyarı 2.6.21. [46] $\mathcal{B}$, $\tilde{X}$ üzerindeki bir EET için esnek baz ise $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ için $B_1 \cap B_2$ kümesinin $\mathcal{B}$ sınıfına ait olması gerekmez. Örneğin; Örnek 2.6.22.'de $B_4, B_5 \in \mathcal{B}$ olduğu görülmesine rağmen $B_4 \cap B_5 = B_6 \notin \mathcal{B}$ olur.

Önerme 2.6.22. [46] $\mathcal{B} \subset S(\tilde{X})$, $\tilde{X}$ üzerindeki bir EET için bir esnek baz olsun.

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{U \in S(\tilde{X}) : \forall \tilde{x} \in \tilde{X} \text{ için } \exists B \in \mathcal{B} \ni \tilde{x} \in B \subset U\}$$

sınıfı $\tilde{X}$ üzerinde bir elemanter esnek topolojidir.

Tanım 2.6.23. [46] Önerme 2.6.22.'de verilen $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ sınıfına $\mathcal{B}$ esnek bazı tarafından üretilen elemanter esnek topoloji denir.

Bu tanıma göre $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ olduğundan $\mathcal{B}$ sınıfının elemanları esnek açık kümelerdir.

Önerme 2.6.24. [46] $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ bir EET uzay ve $\mathcal{B}, \mathcal{T}$ topolojisi için bir esnek baz olsun ($\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$). Bu durumda her esnek açık küme, $\mathcal{B}$ sınıfının bazı elemanlarının elemanter birleşimi olarak ifade edilebilir.

Örnek 2.6.25. Örnek 2.6.22.'deki esnek baz $\mathcal{B}$ sınıfının $\tilde{X}$ üzerinde ürettiği elemanter esnek topoloji

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(\lambda, \{x\}), (\mu, \{x\})\}, & U_4 &= \{(\lambda, \{x\}), (\mu, \{x, y\})\}, & U_7 &= \{(\lambda, \{x\}), (\mu, X)\}, \\ U_2 &= \{(\lambda, \{x\}), (\mu, \{y\})\}, & U_5 &= \{(\lambda, \{x\}), (\mu, \{x, z\})\}, & U_8 &= \{(\lambda, \{x, y\}), (\mu, X)\}, \\ U_3 &= \{(\lambda, \{x\}), (\mu, \{z\})\}, & U_6 &= \{(\lambda, \{x\}), (\mu, \{y, z\})\}, & U_9 &= \{(\lambda, \{x, z\}), (\mu, X)\} \end{aligned}$$

olmak üzere $\mathcal{T} = \{\Phi, \tilde{X}, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7, U_8, U_9\}$ olur.

Teorem 2.6.25. [46] $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ bir EET uzay ve $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ olsun. Aşağıdaki $(\mathcal{B}_*)$ şartı sağlanırsa $\mathcal{B}$ sınıfı $\mathcal{T}$ için bir esnek baz olur.

$\mathcal{B}_*$. Her $U \in \mathcal{T}$ ve her $\tilde{x} \in U$ için $\tilde{x} \in B \subset U$ olacak şekilde $B \in \mathcal{B}$ vardır.

Örnek 2.6.26. $\mathcal{B} = \{SS(B(\tilde{x}, \tilde{\epsilon})) : \tilde{x} \in \tilde{X} \text{ ve } \tilde{\epsilon} \succ \bar{0}\}$, $(\tilde{X}, d, A)$ esnek metrik uzayında esnek açık kümelerin bir sınıfı olsun. $(\tilde{X}, d, A)$ esnek metrik uzayı (EM5) şartını sağlarsa $\mathcal{B}$ sınıfı Örnek 2.6.7.'deki elemanter esnek metrik topoloji için bir esnek baz olur.

Tanım 2.6.27. [46] $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ EET uzay ve $\tilde{x} \in \tilde{X}$ bir esnek eleman olsun. $\tilde{x}$ elemanını içeren esnek açık kümelerin bir sınıfı $\mathcal{B}_{\tilde{x}}$ olmak üzere $\tilde{x}$ elemanını içeren her U esnek açık kümesi için $\tilde{x} \in B_{\tilde{x}} \subset U$ olacak şekilde $B_{\tilde{x}} \in \mathcal{B}_{\tilde{x}}$ var ise $\mathcal{B}_{\tilde{x}}$ sınıfına $\tilde{x}$ elemanının *esnek yerel bazı* denir.

Önerme 2.6.28. [46] $\mathcal{B}$, $\tilde{X}$ üzerindeki bir elemanter esnek topoloji için esnek baz ve $\tilde{x} \in \tilde{X}$ olsun. $\mathcal{B}$ esnek bazının $\tilde{x}$ elemanını içeren elemanları $\tilde{x}$ esnek elemanı için bir esnek yerel baz oluşturur.

2.7. Elemanter Esnek Alt Uzay

$(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ elemanter esnek topolojik uzay olmak üzere elemanter işlemler ile bu uzayın bir esnek alt uzayını elde etmek her durumda mümkün değildir. Örneğin, herhangi $F \in S(\tilde{X})$ esnek kümesi için $\mathcal{T}_F = \{F \cap U : U \in \mathcal{T}\}$ sınıfı F esnek kümesi üzerinde bir elemanter esnek topoloji değildir. Çünkü, her $i \in I$ için $V_i \in \mathcal{T}_F$ esnek kümelerinin herhangi elemanter birleşimleri $\mathcal{T}_F$ sınıfına ait olmayabilir. Gerçekten; her $i \in I$ için $V_i = F \cap U_i$ olacak şekilde $U_i \in \mathcal{T}$ vardır. Bu durumda elemanter kesişim ve birleşim işlemlerinin genelde dağılma özelliği olmadığından

$$\bigcup_{i \in I} V_i = \bigcup_{i \in I} (F \cap U_i) \not\supseteq F \cap \bigcup_{i \in I} U_i$$

elde edilir.

Herhangi bir $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ elemanter esnek topolojik uzayı ve $F \in S(\tilde{X})$ esnek kümesi verildiğinde $\mathcal{T}$ topolojisinden indirgenen $\mathcal{T}_F$ sınıfının F üzerinde elemanter esnek topoloji olması aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 2.7.1. [46] $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ elemanter esnek topolojik uzay ve $F \in S(\tilde{X})$ olsun. Her $U \in \mathcal{T}$ için $F \tilde{\cap} U \in S(\tilde{X})$ ise $\mathcal{T}_F = \{F \cap U : U \in \mathcal{T}\}$ sınıfı F üzerinde bir elemanter esnek topolojidir.

İspat. 1. $F \cap \Phi = \Phi$ ve $F \cap \tilde{X} = F$ olduğundan $\Phi, F \in \mathcal{T}_F$ olur.

2. $V_1, V_2 \in \mathcal{T}_F$ olsun. Bu durumda $V_1 = F \cap U_1$ ve $V_2 = F \cap U_2$ olacak şekilde $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ vardır. Buradan $V_1 \cap V_2 = (F \cap U_1) \cap (F \cap U_2) = F \cap (U_1 \cap U_2)$ olur. Böylece $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ olduğundan $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{T}_F$ elde edilir.

3. Her $i \in I$ için $V_i \in \mathcal{T}_F$ olsun. Bu durumda $V_i = F \cap U_i$ olacak şekilde $U_i \in \mathcal{T}$ vardır. Buradan her $U \in \mathcal{T}$ için $F \tilde{\cap} U \in S(\tilde{X})$ olduğu göz önünde bulundurularak Önerme 2.3.10.'dan $\bigcup_{i \in I} V_i = \bigcup_{i \in I} (F \cap U_i) = F \cap \bigcup_{i \in I} U_i$ olur. Böylece $\bigcup_{i \in I} V_i \in \mathcal{T}_F$ elde edilir.

Tanım 2.7.2. [46] $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ elemanter esnek topolojik uzay olmak üzere herhangi $F \in S(\tilde{X})$ esnek kümesi için Önerme 2.7.1.'deki $\mathcal{T}$ topolojisinden F esnek kümesi üzerine indirgenen $\mathcal{T}_F$ elemanter esnek topolojisine elemanter esnek alt uzay topolojisi ve $(F, \mathcal{T}_F, A)$ uzayına da $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ uzayının elemanter esnek alt uzayı denir.

Örnek 2.7.3. [46] Örnek 2.6.8.'e göre $\tilde{X}$ üzerinde $\mathcal{T}_3$ elemanter esnek topolojisi ve $F = \{(\lambda, \{x, z\}), (\mu, X)\}$ esnek kümesi verilsin. Her $U \in \mathcal{T}_3$ için $F \tilde{\cap} U \in S(\tilde{X})$ olduğu kolayca görülür. Buradan

$$\begin{aligned} F \cap \Phi &= \Phi, & F \cap \tilde{X} &= F, \\ F \cap F_1 &= \{(\lambda, \{x\}), (\mu, \{x, z\})\} = V_1, & F \cap F_3 &= \{(\lambda, \{z\}), (\mu, \{y, z\})\} = V_2 \end{aligned}$$

olmak üzere $\mathcal{T}_F = \{\Phi, F, V_1, V_2\}$ sınıfı F üzerinde elemanter esnek alt uzay topolojisi olur.



BÖLÜM 3. ESNEK FONKSİYONLAR

Bu bölümde esnek dönüşüm tanımı ve esnek dönüşümün özellikleri esnek elemanlar üzerinden ve esnek süreklilik tanımı EET uzaylar üzerinde verilmiştir. Ayrıca EET uzayında esnek homeomorfizm tanımlanarak bir esnek kümenin kapanışının esnek homeomorfizm altında korunduğu ispatlanmıştır.

3.1. Esnek Fonksiyon

Tanım 3.1.1. [46] X ve Y boştan farklı herhangi iki küme ve A boştan farklı parametreler kümesi olsun. $f : SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ dönüşümüne bir *esnek dönüşüm* denir.

Örnek 3.1.2. [46] X ve Y boştan farklı herhangi iki küme, A boştan farklı parametreler kümesi ve $\{f_\lambda : \lambda \in A\}$, X 'den Y 'ye klasik dönüşümlerin herhangi bir parametrelendirilmiş ailesi olsun. Bu durumda her $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ve her $\lambda \in A$ için $f(\tilde{x})(\lambda) = f_\lambda(\tilde{x}(\lambda))$ şeklinde tanımlanan $f : SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ dönüşümü bir esnek dönüşüm olur.

Örnek 3.1.3. [46] X ve Y boştan farklı herhangi iki küme ve A boştan farklı parametreler kümesi olsun. $g : X \rightarrow Y$, bir klasik dönüşüm olmak üzere her $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ve her $\lambda \in A$ için $f(\tilde{x})(\lambda) = g(\tilde{x}(\lambda))$ şeklinde tanımlanan $f : SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ dönüşümü bir esnek dönüşüm olur. Bu şekildeki bir esnek dönüşüme g klasik dönüşümü tarafından üretilen esnek dönüşüm denir. Böylece, X 'den Y 'ye herhangi bir klasik dönüşüm bir esnek dönüşüme genişletilebilir.

Uyarı 3.1.4. Örnek 3.1.3.'ün tersi doğru değildir (Örnek 3.1.5.'e bakınız). Klasik dönüşümlerin herhangi parametrelendirilmiş ailesi bir esnek dönüşüm olmasına rağmen bir esnek dönüşüm klasik dönüşümlerin herhangi parametrelendirilmiş ailesi olmayabilir. Böylece esnek dönüşüm klasik dönüşümlerin herhangi bir parametrelendirilmiş ailesinden daha genel ve daha kapsamlıdır.

Örnek 3.1.5. [46] $X = \{a, b\}$, $Y = \{c, d\}$ ve $A = \{\lambda, \mu\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= \{(\lambda, a), (\mu, a)\}, & \tilde{y}_1 &= \{(\lambda, c), (\mu, c)\}, \\ \tilde{x}_2 &= \{(\lambda, a), (\mu, b)\}, & \tilde{y}_2 &= \{(\lambda, c), (\mu, d)\}, \\ \tilde{x}_3 &= \{(\lambda, b), (\mu, a)\}, & \tilde{y}_3 &= \{(\lambda, d), (\mu, c)\}, \\ \tilde{x}_4 &= \{(\lambda, b), (\mu, b)\}, & \tilde{y}_4 &= \{(\lambda, d), (\mu, d)\}\end{aligned}$$

olmak üzere $SE(\tilde{X}) = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4\}$ ve $SE(\tilde{Y}) = \{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3, \tilde{y}_4\}$ olur.

$f: SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ esnek dönüşümü $f(\tilde{x}_1) = \tilde{y}_4$, $f(\tilde{x}_2) = \tilde{y}_1$, $f(\tilde{x}_3) = \tilde{y}_2$, $f(\tilde{x}_4) = \tilde{y}_3$ şeklinde tanımlansın. Buradan

$$\begin{aligned}f(\tilde{x}_1)(\lambda) &= \tilde{y}_4(\lambda) \Rightarrow f_\lambda(\tilde{x}_1(\lambda)) = f_\lambda(a) = d, \\ f(\tilde{x}_2)(\lambda) &= \tilde{y}_1(\lambda) \Rightarrow f_\lambda(\tilde{x}_2(\lambda)) = f_\lambda(a) = c, \\ f(\tilde{x}_3)(\lambda) &= \tilde{y}_2(\lambda) \Rightarrow f_\lambda(\tilde{x}_3(\lambda)) = f_\lambda(b) = c, \\ f(\tilde{x}_4)(\lambda) &= \tilde{y}_3(\lambda) \Rightarrow f_\lambda(\tilde{x}_4(\lambda)) = f_\lambda(b) = d\end{aligned}$$

olduğundan $f_\lambda: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm değildir.

Teorem 3.1.6. [46] X ve Y boştan farklı herhangi iki küme ve A boştan farklı parametreler kümesi olsun. $f: SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ esnek dönüşümü aşağıdaki (f_*) şartını sağlarsa, her $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ve her $\xi \in X$ için $\tilde{x}(\lambda) = \xi$ olmak üzere $f_\lambda(\xi) = f(\tilde{x})(\lambda)$ ile tanımlanan $f_\lambda: X \rightarrow Y$, her bir $\lambda \in A$ için bir klasik dönüşümdür.

(f_*) . $\lambda \in A$ ve $\xi \in X$ için $\{f(\tilde{x})(\lambda) : \tilde{x} \in \tilde{X} \ni \tilde{x}(\lambda) = \xi\}$ tek elemanlı bir kümedir.

Tanım 3.1.7. [46] $f : SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ bir esnek dönüşüm olsun.

$F \in S(\tilde{X})$ esnek kümesinin f altındaki görüntüsü $f(SE(F))$ olarak tanımlanır ve F kümesinin f altındaki esnek görüntü kümesi $SS(f(SE(F))) \in S(\tilde{Y})$ esnek kümesidir.

$F' \in S(\tilde{Y})$ esnek kümesinin f altındaki ters görüntüsü $f^{-1}(SE(F'))$ olarak tanımlanır ve F' kümesinin f altındaki esnek ters görüntü kümesi $SS(f^{-1}(SE(F')))) \in S(\tilde{X})$ esnek kümesidir.

Uyarı 3.1.8. $f : SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ bir esnek dönüşüm ve $F \in S(\tilde{X})$ olmak üzere Önerme 2.2.3. gereği $f(SE(F)) \subset SE(SS(f(SE(F))))$ olur.

Uyarı 3.1.9. $F \in S(\tilde{X})$ ve $\mathcal{B} \subset SE(\tilde{X})$ için $SS(\mathcal{B}) = F$ ve $f : SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ bir esnek dönüşüm olsun. Bu durumda $\mathcal{B} \subseteq SE(F)$ olduğundan $f(\mathcal{B}) \subseteq f(SE(F))$ olur. Buradan da $SS(f(\mathcal{B})) \subseteq SS(f(SE(F)))$ olur. Fakat f esnek dönüşümü (f_*) şartını sağlarsa her $\lambda \in A$ için $f(\mathcal{B})(\lambda) = f(SE(F))(\lambda)$ olacağından Uyarı 2.2.4. gereği $SS(f(\mathcal{B})) = SS(f(SE(F)))$ olur.

Tanım 3.1.10. [46] (f_*) şartını sağlayan bir esnek dönüşüme *esnek fonksiyon* adı verilir.

3.2. Esnek Süreklilik

Tanım 3.2.1. [46] $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ ve $(\tilde{Y}, \mathcal{T}', A)$ elemanter esnek topolojik uzaylar, $f: SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ esnek dönüşümü ve $\tilde{x} \in \tilde{X}$ esnek elemanı verilsin. Her $N' \in N_{\mathcal{T}'}(f(\tilde{x}))$ esnek komşuluğu için $f(SE(N)) \subset SE(N')$ olacak şekilde en az bir $N \in N_{\mathcal{T}}(\tilde{x})$ esnek komşuluğu varsa f esnek dönüşümüne $\tilde{x}$ esnek elemanında *esnek süreklidir* denir. f esnek dönüşümü her bir $\tilde{x} \in \tilde{X}$ esnek elemanında esnek sürekli ise f esnek dönüşümüne $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ üzerinde esnek süreklidir ya da sadece *esnek süreklidir* denir.

Teorem 3.2.2. [46] $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ ve $(\tilde{Y}, \mathcal{T}', A)$ elemanter esnek topolojik uzaylar, $f: SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ bir esnek dönüşüm olsun. f dönüşümünün esnek sürekli olması için gerek ve yeter şart her $U' \in \mathcal{T}'$ için $SS(f^{-1}(SE(U')))) \in \mathcal{T}$ olmasıdır.

Önerme 3.2.3. [46] $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ ve $(\tilde{Y}, \mathcal{T}', A)$ elemanter esnek topolojik uzaylar olsun. $S(\tilde{X})$ ve $S(\tilde{Y})$ sınıflarına ait esnek açık kümelerin sonlu elemanter kesişimleri, $S(\tilde{X})$ ve $S(\tilde{Y})$ sınıflarına ait olsun. $f: SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ esnek fonksiyonunun $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ üzerinde esnek sürekli olması için gerek ve yeter şart her $\lambda \in A$ ve her $\tilde{x} \in \tilde{X}$ için $f_{\lambda}(\tilde{x}(\lambda)) = f(\tilde{x})(\lambda)$ ile tanımlanan $f_{\lambda}: X \rightarrow Y$ dönüşümünün $(X, \mathcal{T}_{\lambda})$ üzerinde sürekli olmasıdır.

Örnek 3.2.4. [46] Örnek 3.1.5.'de verilen $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$ mutlak esnek kümeleri üzerindeki elemanter esnek topolojiler

$$U_1 = \{(\lambda, \{a\}), (\mu, (a, b))\}, \quad U_2 = \{(\lambda, \{b\}), (\mu, (b))\}, \\ V_1 = \{(\lambda, \{c, d\}), (\mu, (c))\}, \quad V_2 = \{(\lambda, \{d\}), (\mu, (c, d))\}$$

olmak üzere sırasıyla $\mathcal{T} = \{\tilde{X}, \Phi, U_1, U_2\}$ ve $\mathcal{T}' = \{\tilde{Y}, \Phi, V_1, V_2\}$ olsun. Bu durumda f esnek dönüşümü $\tilde{x}_4$ elemanında esnek sürekli, fakat $\tilde{x}_1$ elemanında esnek sürekli değildir. Gerçekten $N_{\mathcal{T}}(\tilde{x}_4) = \{U_2, \tilde{X}\}$ ve $N_{\mathcal{T}'}(f(\tilde{x}_4)) = \{V_1, V_2, \tilde{Y}\}$ olmak üzere

$$SS(f(SE(U_2))) = \{\tilde{y}_3\} \subsetneq V_1,$$

$$SS(f(SE(U_2))) = \{\tilde{y}_3\} \subsetneq V_2,$$

$$SS(f(SE(\tilde{X}))) = \tilde{Y} \subsetneq \tilde{Y}$$

olduğundan f , $\tilde{x}_4$ elemanında esnek sürekli dir. $N_{\mathcal{T}}(\tilde{x}_1) = \{U_1, \tilde{X}\}$ ve $N_{\mathcal{T}'}(f(\tilde{x}_1)) = \{V_2, \tilde{Y}\}$ olmak üzere $SS(f(SE(U_1))) = \tilde{X} \not\subset V_2$ olduğundan f , $\tilde{x}_1$ elemanında esnek sürekli değildir.

Teorem 3.2.5. [46] $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ ve $(\tilde{Y}, \mathcal{T}', A)$ elemanter esnek topolojik uzaylar, $f: SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ bir esnek dönüşüm ve $F \in S(\tilde{X})$ olsun. f esnek dönüşümü $\tilde{x} \in \tilde{X}$ elemanında esnek sürekli ve $\tilde{x} \in clF$ ise $f(\tilde{x}) \in cl(SS(f(SE(F))))$ olur.

Sonuç 3.2.6. [46] $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ ve $(\tilde{Y}, \mathcal{T}', A)$ elemanter esnek topolojik uzaylar, $f: SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ esnek sürekli bir dönüşüm ve $F \in S(\tilde{X})$ olsun. Bu durumda $SS(f(clF)) \subset \overline{SS(f(SE(F)))}$ olur.

Teorem 3.2.7. [46] $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ ve $(\tilde{Y}, \mathcal{T}', A)$ elemanter esnek topolojik uzaylar, $\mathcal{B}' \subset \mathcal{T}'$ sınıfı $\mathcal{T}'$ topolojisi için bir esnek baz, $\mathcal{S}' \subset \mathcal{T}'$ sınıfı $\mathcal{T}'$ topolojisi için bir esnek alt baz ve $f: SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ bir esnek fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

1. $f, (\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ uzayında esnek süreklidir,
2. Her $S' \in \mathcal{S}'$ için $SS(f^{-1}(SE(S')))) \in \mathcal{T}$ olur,
3. Her $B' \in \mathcal{B}'$ için $SS(f^{-1}(SE(B')))) \in \mathcal{T}$ olur.

3.3. Esnek Homeomorfizm

Tanım 3.3.1. $(\tilde{X}, \mathcal{T}_1, A), (\tilde{Y}, \mathcal{T}_2, A)$ iki elemanter esnek topolojik uzay ve $f: SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ bir esnek fonksiyon olsun.

$f(SE(\tilde{X})) = SE(\tilde{Y})$ (yani $f(\tilde{X}) = \tilde{Y}$) ise, f esnek fonksiyonuna *örten esnek fonksiyon* denir.

Her $\tilde{x} \neq \tilde{y}$ ile $\tilde{x}, \tilde{y} \in SE(\tilde{X})$ için $f(\tilde{x}) \neq f(\tilde{y}) \in S(\tilde{Y})$ sağlanıyorsa f esnek fonksiyonuna *bire bir esnek fonksiyon* denir.

Her $U \in S(\tilde{X})$ esnek açık kümesi için $SS(f(SE(U))) = G \in S(\tilde{Y})$ esnek açık küme ise f esnek fonksiyonuna *esnek açık fonksiyon* denir.

Her $F \in S(\tilde{X})$ esnek kapalı kümesi için $SS(f(SE(F))) = H \in S(\tilde{Y})$ esnek kapalı küme ise f esnek fonksiyonuna *esnek kapalı fonksiyon* denir.

f , bire bir, örten, sürekli ve f^{-1} esnek fonksiyonu sürekli ise, f esnek fonksiyonuna bir *esnek homeomorfizm* denir.

Uyarı 3.3.2. $(\tilde{X}, \mathcal{T}_1, A), (\tilde{Y}, \mathcal{T}_2, A)$ iki elemanter esnek topolojik uzay ve $f: SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ bir esnek fonksiyon olsun. Teorem 3.2.2 göz önüne alınırsa aşağıdaki ifadeler denk olur.

- i. f , bir esnek homeomorfizmdir.
- ii. f , bire bir, örten, sürekli ve esnek açık fonksiyondur.
- iii. f , bire bir, örten, sürekli ve esnek kapalı fonksiyondur.

Tanım 3.3.3. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ elemanter esnek topolojik uzayının sağladığı bir özellik uzayın tüm esnek alt uzayları için de sağlanıyorsa bu özelliğe *kalıcı özellik* denir.

Tanım 3.3.4. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ elemanter esnek topolojik uzayının sağladığı bir özellik, $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ uzayına esnek homeomorf olan tüm esnek uzaylar için de sağlanıyorsa bu özelliğe *topolojik özellik* denir.

BÖLÜM 4. SAYILABİLİR ELEMANTER ESNEK UZAYLAR

4.1. Yoğun Esnek Kümeler

Tanım 4.1.1. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ bir EET uzay ve $F \neq \Phi$, $G \neq \Phi$ olmak üzere $F, G \in S(\tilde{X})$ esnek kümeler olsun.

1. $F \subsetneq F^-$ ise F kümesine *kendi içinde yoğun esnek küme* denir.
2. Eğer $\bar{F} \subsetneq G$ ise F esnek kümesine G içinde *yoğun esnek küme* denir.
3. $\overset{o}{F} = \Phi$ ise F kümesine $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ uzayında *hiç bir yerde yoğun olmayan esnek küme* denir.
4. $\bar{F} = \tilde{X}$ ise F kümesine $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ uzayında her yerde *yoğun esnek küme* denir.

Örnek 4.1.2. $A = \{\alpha, \beta\}$ ve $X = \{x, y, z, t\}$ olsun.

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= \{(\alpha, \{x\}), (\beta, \{x\})\}, & \tilde{x}_6 &= \{(\alpha, \{y\}), (\beta, \{y\})\}, \\ \tilde{x}_2 &= \{(\alpha, \{x\}), (\beta, \{y\})\}, & \tilde{x}_7 &= \{(\alpha, \{y\}), (\beta, \{z\})\}, \\ \tilde{x}_3 &= \{(\alpha, \{x\}), (\beta, \{z\})\}, & \tilde{x}_8 &= \{(\alpha, \{y\}), (\beta, \{t\})\}, \\ \tilde{x}_4 &= \{(\alpha, \{x\}), (\beta, \{t\})\}, & \tilde{x}_9 &= \{(\alpha, \{z\}), (\beta, \{x\})\}, \\ \tilde{x}_5 &= \{(\alpha, \{y\}), (\beta, \{x\})\}, & \tilde{x}_{10} &= \{(\alpha, \{z\}), (\beta, \{y\})\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{11} &= \{(\alpha, \{z\}), (\beta, \{z\})\}, & \tilde{x}_{14} &= \{(\alpha, \{t\}), (\beta, \{y\})\}, \\
\tilde{x}_{12} &= \{(\alpha, \{z\}), (\beta, \{t\})\}, & \tilde{x}_{15} &= \{(\alpha, \{t\}), (\beta, \{z\})\}, \\
\tilde{x}_{13} &= \{(\alpha, \{t\}), (\beta, \{x\})\}, & \tilde{x}_{16} &= \{(\alpha, \{t\}), (\beta, \{t\})\}
\end{aligned}$$

esnek elemanlardır.

$$\begin{aligned}
F_1 &= \{(\alpha, \tilde{X}), (\beta, \{x, y, z\})\}, \\
F_2 &= \{(\alpha, \{y, z, t\}), (\beta, \tilde{X})\}, \\
F_3 &= \{(\alpha, \{y, z, t\}), (\beta, \{x, y, z\})\}, \\
F_4 &= \{(\alpha, \{x, z, t\}), (\beta, \{y, z, t\})\}, \\
F_5 &= \{(\alpha, \{x, z, t\}), (\beta, \{y, z\})\}, \\
F_6 &= \{(\alpha, \{z, t\}), (\beta, \{y, z, t\})\}, \\
F_7 &= \{(\alpha, \{z, t\}), (\beta, \{y, z\})\}
\end{aligned}$$

esnek kümeler olmak üzere $\mathcal{T} = \{\Phi, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, \tilde{X}\}$, $\tilde{X}$ üzerinde elementer esnek topolojidir. $\mathcal{T}$ topolojisine göre esnek kapalı kümelerin sınıfı,

$$\begin{aligned}
K_3 &= \{(\alpha, \{x\}), (\beta, \{t\})\}, \\
K_4 &= \{(\alpha, \{y\}), (\beta, \{x\})\}, \\
K_5 &= \{(\alpha, \{y\}), (\beta, \{x, t\})\}, \\
K_6 &= \{(\alpha, \{x, y\}), (\beta, \{x\})\}, \\
K_7 &= \{(\alpha, \{x, y\}), (\beta, \{x, t\})\}
\end{aligned}$$

olmak üzere $\mathcal{K} = \{\Phi, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7, \tilde{X}\}$ olur.

$F = \{(\alpha, \{x\}), (\beta, \{x, t\})\} \in S(\tilde{X})$ ve $G = \{(\alpha, \{x, y, z\}), (\beta, \{x, t\})\} \in S(\tilde{X})$ iki esnek küme olsun.

$\bar{F} = \{(\alpha, \{x, y\}), (\beta, \{x, t\})\} = K_7$ ve $\bar{F} \subset G$ olduğundan F, G içinde yoğun esnek kümedir.

$\overset{o}{\bar{F}} = \Phi$ olduğundan $F, (\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ uzayı içinde hiç bir yerde yoğun olmayan esnek kümedir.

$\bar{G} = \tilde{X}$ olduğundan G esnek kümesi $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ uzayı içinde her yerde yoğun esnek kümedir.

Uyarı 4.1.3. Bir kümenin içi boş olmasına rağmen kendisi bir küme içinde veya her yerde yoğun esnek küme olabilir. Örneğin yukarıdaki örnekte verilen G esnek kümesinin içi $\overset{o}{G} = \Phi$ olmasına rağmen $\bar{G} = \tilde{X}$ olduğundan G her yerde yoğun esnek kümedir.

4.2. Birinci Sayılabilir Elemanter Esnek Uzaylar

Tanım 4.2.1. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ bir EET uzay olsun. Eğer her $\tilde{x} \in \tilde{X}$ esnek elemanının bir sayılabilir esnek yerel bazı varsa $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ uzayına *birinci sayılabilir esnek uzay* denir.

Örnek 4.2.2. A sonlu parametreler kümesi olmak üzere, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}, A)$ esnek reel topolojik uzay birinci sayılabilir esnek uzaydır. Gerçekten her $\tilde{x} \in \mathbb{R}(A)$ için

$$\mathcal{B}(\tilde{x}) = \left\{ \left(\tilde{x} - \frac{\bar{1}}{n}, \tilde{x} + \frac{\bar{1}}{n} \right) : \forall \lambda \in A \text{ için } \frac{\bar{1}}{n}(\lambda) = \frac{1}{n} \in \mathbb{N} \right\}$$

esnek açık aralıkların ailesi $\tilde{x}$ esnek elemanının bir sayılabilir yerel bazıdır.

Örnek 4.2.3. EM(5) şartını sağlayan her $(\tilde{X}, d, A)$ elemanter esnek metrik uzayı birinci sayılabilir uzaydır.

Örnek 4.2.4. $(\tilde{\mathbb{R}}, \mathcal{P}(\tilde{\mathbb{R}}), A)$ elemanter esnek ayrık uzayı birinci sayılabilir uzaydır.

Gerçekten $\tilde{x} \in \mathbb{R}(A)$ için $\mathcal{B}(\tilde{x}) = \{\tilde{x}\}$ kümesi esnek açıktır ve $\tilde{x}$ esnek elemanını içeren her esnek açık (U, A) kümesi için $\tilde{x} \in \{\tilde{x}\} \subset (U, A)$ olduğundan $\mathcal{B}(\tilde{x}) = \{\tilde{x}\}$ bir esnek yerel bazıdır ve sayılabilir.

Teorem 4.2.5. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ birinci sayılabilir EET uzayı ve $(F, A) \in S(\tilde{X})$ esnek kümesi verilsin. Bu durumda $(F, \mathcal{T}_F, A)$ elemanter esnek alt uzayı birinci sayılabilir.

İspat. $\tilde{x} \in (F, A)$ olsun. $(F, A) \in S(\tilde{X})$ olduğundan $\tilde{x} \in \tilde{X}$ olur. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ birinci sayılabilir olduğundan $\tilde{x} \in \tilde{X}$ esnek elemanının $\mathcal{T}$ topolojisine göre bir sayılabilir $\mathcal{B}(\tilde{x}) = \{(B_n, A) \in S(\tilde{X}) : n \in \mathbb{N}\}$ esnek yerel bazı vardır. Böylece $\mathcal{B}_{(F,A)}(\tilde{x}) = \{F \cap B_n : n \in \mathbb{N}, F \cap B_n \in S(\tilde{X})\}$, $\tilde{x}$ esnek elemanının $\mathcal{T}_F$ topolojisine göre bir sayılabilir yerel bazıdır. O halde $(F, \mathcal{T}_F, A)$ birinci sayılabilir elemanter esnek uzay olur.

Teorem 4.2.6. Birinci sayılabilir uzay olma özelliği bir topolojik özelliktir.

İspat. $(\tilde{X}, \mathcal{T}_1, A)$ bir birinci sayılabilir EET uzay, $(\tilde{Y}, \mathcal{T}_2, A)$ bir EET uzay ve $f : SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ bir esnek homeomorfizm olsun. $(\tilde{Y}, \mathcal{T}_2, A)$ uzayının birinci sayılabilir elemanter esnek uzay olduğunu gösterelim. $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ herhangi bir esnek eleman olsun. f bire bir ve örten olduğundan $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$ olacak şekilde $\tilde{x} \in \tilde{X}$ esnek

elemanı vardır. $(\tilde{X}, \mathcal{T}_1, A)$ birinci sayılabilir olduğundan her $U \in \mathcal{T}_1$ esnek açık kümesi için $\tilde{x} \in B \tilde{\subset} U$ ile $\mathcal{T}_1$ topolojisinin $\mathcal{B}(\tilde{x}) = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ sayılabilir yerel bazı vardır. f esnek açık fonksiyon olduğundan $f(\tilde{x}) \in f(SE(B)) \tilde{\subset} f(SE(U))$ ile $SS(f(SE(B))) = B'$ ve $SS(f(SE(U))) = V$ açık kümeleri vardır. Bu durumda $\tilde{y} = f(\tilde{x}) \tilde{\in} B' \tilde{\subset} V$ olur. f bire bir, açık ve $\mathcal{B}(\tilde{x})$, $\tilde{x}$ esnek elemanının sayılabilir yerel bazı olduğundan $\mathcal{B}'(\tilde{y}) = \{B'_n : n \in \mathbb{N}\}$ $\tilde{y}$ esnek elemanının bir sayılabilir yerel bazı olur.

Örnek 4.2.7. Sonlu tümleyen elemanter esnek topolojik uzay birinci sayılabilir değildir

4.3. İkinci Sayılabilir Elemanter Esnek Uzaylar

Tanım 4.3.1. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ EET uzay olsun. Eğer $\mathcal{T}$ topolojisinin bir sayılabilir esnek bazı varsa $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ uzayına *ikinci sayılabilir elemanter esnek uzay* denir.

Örnek 4.3.2. Örnek 4.2.2 deki $(\tilde{\mathbb{R}}, \mathcal{T}, A)$ elemanter esnek reel topolojik uzayı ikinci sayılabilirdir. Gerçekten,

$$\mathcal{B} = \{B = (\tilde{x}, \tilde{y}) : \forall \lambda \in A \text{ için } \tilde{x}(\lambda), \tilde{y}(\lambda) \in \mathbb{Q}, \tilde{x}(\lambda) \tilde{<} \tilde{y}(\lambda)\}$$

ailesi $\mathcal{T}$ esnek topolojisi için bir elemanter esnek bazdır. Çünkü

$$\mathcal{B}(\lambda) = \{B(\lambda) = (\tilde{x}, \tilde{y})(\lambda) = (\tilde{x}(\lambda), \tilde{y}(\lambda)), \forall \lambda \in A\}$$

ailesi, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_\lambda)$ standart topolojik uzayında bir bazdır.

Örnek 4.3.3. $(\tilde{\mathbb{R}}, \mathcal{P}(\tilde{\mathbb{R}}), A)$ ayrık esnek uzayı ikinci sayılabilir değildir. $\mathcal{B} = \{\{\tilde{x}\} : \tilde{x} \in \mathbb{R}(A)\}$ ailesi $\mathcal{P}(\tilde{\mathbb{R}})$ topolojisi için bir esnek bazdır. Fakat $\mathbb{R}(A)$ sayılamaz olduğundan $\mathcal{B}$ ailesi sayılamazdır.

Uyarı 4.3.4. Bir birinci sayılabilir esnek uzayın ikinci sayılabilir olması gerekmez. Örneğin, $(\tilde{\mathbb{R}}, \mathcal{P}(\tilde{\mathbb{R}}), A)$ uzayı birinci sayılabilir esnek uzaydır fakat ikinci sayılabilir esnek uzay değildir.

Uyarı 4.3.5. Birinci sayılabilir elemanter esnek uzay olma özelliği bir yerel özellik, ikinci sayılabilir elemanter esnek uzay olma özelliği bir evrensel özelliktir.

Teorem 4.3.6. Her ikinci sayılabilir elemanter esnek uzay birinci sayılabilirdir.

İspat. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ ikinci sayılabilir EET uzayı ve $\mathcal{B}, \mathcal{T}$ topolojisinin bir esnek bazı olsun. Her $\tilde{x} \in \tilde{X}$ için $\mathcal{B}(\tilde{x}) = \{B \in \mathcal{B} : \tilde{x} \in B\}$ ailesi $\tilde{x} \in \tilde{X}$ noktasının bir esnek yerel bazıdır. $\mathcal{B}$ sayılabilir olduğundan $\mathcal{B}(\tilde{x})$ ailesi de sayılabilir. Buradan $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ birinci sayılabilir esnek uzaydır.

Teorem 4.3.7. İkinci sayılabilir elemanter esnek uzayın her elemanter esnek alt uzayı da ikinci sayılabilirdir.

İspat. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ bir EET uzay $F \in S(\tilde{X})$ bir esnek alt küme ve $(F, \mathcal{T}_F, A)$ bir elemanter esnek alt uzay olsun. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ ikinci sayılabilir olduğundan bir sayılabilir $\mathcal{B}$ esnek bazı vardır. $\mathcal{B}_F = \{F \cap B : \forall B \in \mathcal{B} \text{ ve } F \cap B \in S(\tilde{X})\}$ ailesi $\mathcal{T}_F$ topolojisi için bir sayılabilir esnek bazdır. O halde $(F, \mathcal{T}_F, A)$ ikinci sayılabilir elemanter esnek uzaydır.

Teorem 4.3.8. İkinci sayılabilir uzay olma özelliği bir topolojik özelliktir.

İspat. $(\tilde{X}, \mathcal{T}_1, A)$ bir ikinci sayılabilir EET uzay, $(\tilde{Y}, \mathcal{T}_2, A)$ bir EET uzay ve $f: SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ bir esnek homeomorfizm olsun. $(\tilde{Y}, \mathcal{T}_2, A)$ uzayının ikinci sayılabilir elemanter esnek uzay olduğunu gösterelim. $(\tilde{X}, \mathcal{T}_1, A)$ ikinci sayılabilir elemanter esnek uzay olduğundan her $U \in \mathcal{T}_1$ esnek açık kümesi ve her $\tilde{x} \in U$ için $\tilde{x} \in B_n \subset U$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\mathcal{T}_1$ topolojisinin bir $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ sayılabilir esnek bazı vardır. f sürekli olduğundan her $f(\tilde{x}) \in f(SE(U))$ için $f(\tilde{x}) \in f(SE(B_0)) \subset f(SE(U))$ olacak şekilde bir $B_0 \in \mathcal{B}$ esnek açık kümesi vardır. f esnek açık fonksiyon olduğundan

$$SS(f(SE(B_0))) = B'_0 \text{ ve } SS(f(SE(U))) = V$$

kümeleri $S(\tilde{Y})$ sınıfının esnek açık alt kümeleridir. f esnek açık fonksiyon ve $\mathcal{B}$ açık sınıf olduğundan her $B_n \in \mathcal{B}$ için $SS(f(SE(B_n))) = B'_n$ esnek açıktır. f esnek fonksiyonunun sürekliliğinden her $V \in \mathcal{T}_2$ esnek açık kümesi için $B'_n \subset V$ ile $B'_n \in \mathcal{B}'$ esnek kümesi vardır. f bire bir ve B_n sayılabilir olduğundan $\mathcal{B}' = \{B'_n : n \in \mathbb{N}\}$ sınıfı sayılabiliridir. f örten olduğundan $\mathcal{B}'$, $\mathcal{T}_2$ topolojisinin bir sayılabilir esnek bazıdır. O halde $(\tilde{Y}, \mathcal{T}_2, A)$ ikinci sayılabilir elemanter esnek uzaydır.

Tanım 4.3.9. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ elemanter esnek topolojik uzay, $F \in S(\tilde{X})$ ve $\mathcal{G} = \{U_i \in S(\tilde{X}) : i \in I\} \subset S(\tilde{X})$ esnek kümelerinin bir ailesi olsun. $F \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ ise $\mathcal{G}$ ailesine F kümesinin bir esnek örtüsü denir.

Eğer $\mathcal{G} = \{U_i \in S(\tilde{X}) : i \in I \text{ için } U_i \in \mathcal{T}\} \subset \mathcal{T}$ esnek açık kümelerinin bir ailesi ise $\mathcal{G}$ ailesine F kümesinin bir esnek açık örtüsü denir.

Tanım 4.3.10. $\mathcal{G}$ ailesi, F kümesinin bir esnek açık örtüsü olsun. Eğer $F \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ ise $\mathcal{G}_n = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ ailesine $\mathcal{G}$ ailesinin bir sayılabilir esnek açık alt örtüsü denir.

Teorem 4.3.11. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ bir ikinci sayılabilir EET uzay, $F \in S(\tilde{X})$ ve $\mathcal{G}$, F kümesinin bir esnek açık örtüsü ise $\mathcal{G}$ ailesinin bir sayılabilir alt örtüsü vardır.

İspat. $\mathcal{B}$, $\mathcal{T}$ için sayılabilir esnek baz olsun. Her $\tilde{x} \in F$ için $F \subseteq \bigcup \{U : U \in \mathcal{G}\}$ olduğundan en az bir $U_{\tilde{x}} \in \mathcal{G}$ için $\tilde{x} \in U_{\tilde{x}}$ yazılabilir. $\mathcal{B}$ bir esnek baz olduğundan $\tilde{x} \in B_{\tilde{x}} \subset U_{\tilde{x}}$ olacak şekilde bir $B_{\tilde{x}} \in \mathcal{B}$ vardır. Buradan $F \subseteq \bigcup \{B_{\tilde{x}} : \tilde{x} \in F\}$ olur. $\{B_{\tilde{x}} : \tilde{x} \in F\} \subset \mathcal{B}$ olduğundan sayılabilir. Böylece $\{B_{\tilde{x}} : \tilde{x} \in F\} \subseteq \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ yazılabilir. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için bir $U_n \in \mathcal{G}$ seçilebilir öyle ki $B_n \subset U_n$ olur. Bu durumda $F \subseteq \bigcup \{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \bigcup \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ yazılır. Buradan $\mathcal{G}_n = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\mathcal{G}$ ailesinin bir sayılabilir açık alt örtüsü olur.

4.4. Ayrılabilir Elemanter Esnek Uzaylar

Tanım 4.4.1. F bir esnek küme olsun. $SE(F)$ sayılabilir ise F kümesine sayılabilir esnek küme denir.

Tanım 4.4.2. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ bir EET uzay $\mathcal{B} \subset SE(\tilde{X})$ esnek elemanların bir sınıfı olsun. Eğer $\mathcal{B}$ sayılabilir ise $F = SS(\mathcal{B}) \in S(\tilde{X})$ kümesine sayılabilir esnek küme denir.

Tanım 4.4.3. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ bir EET uzay olsun. Eğer sayılabilir her yerde yoğun bir $F \in S(\tilde{X})$ esnek kümesi varsa $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ uzayına ayrılabilir elemanter esnek uzay denir.

Örnek 4.4.4. Örnek 4.1.2 deki $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ EET uzayı ayrılabilirdir. Gerçekten $G, \tilde{X}$ içinde her yerde yoğundur ve sayılabilir bir esnek kümedir.

Örnek 4.4.5. A sonlu parametreler kümesi olsun. $(\tilde{\mathbb{R}}, \mathcal{T}, A)$, her $\lambda \in A$ ve her $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{\mathbb{R}}$ için $d(\tilde{x}, \tilde{y})(\lambda) = |\tilde{x}(\lambda) - \tilde{y}(\lambda)|$ ile tanımlanan ve $EM(5)$ şartını sağlayan $(\tilde{\mathbb{R}}, d, A)$ esnek metrik uzayının ürettiği elemanter esnek topolojik uzay olsun. $\tilde{\mathbb{Q}} \subset S(\tilde{\mathbb{R}})$, her $\tilde{x} \in \tilde{\mathbb{Q}}$ ve her $\lambda \in A$ için $\tilde{x}(\lambda) \in \mathbb{Q}$ ile tanımlanan esnek rasyonel sayılar kümesi olsun. $\overline{\tilde{\mathbb{Q}}} = \tilde{\mathbb{R}}$ olduğundan $(\tilde{\mathbb{R}}, \mathcal{T}, A)$ EET uzayı ayrılabilirdir.

Örnek 4.4.6. $(\tilde{\mathbb{R}}, \mathcal{P}(\tilde{\mathbb{R}}), A)$ ayrık elemanter esnek uzayı ayrılabilir değildir. Çünkü $S(\tilde{\mathbb{R}})$ kümesinin bütün alt kümeleri hem esnek açık hem esnek kapalıdır. Dolayısıyla kapanışı $\tilde{\mathbb{R}}$ kümesine eşit olan küme $\tilde{\mathbb{R}}$ kümesinin kendisidir. Yani $SE(\tilde{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}(A)$ sayılabilir değildir.

Teorem 4.4.7. Her ikinci sayılabilir EET uzayı ayrılabilirdir.

İspat. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ bir ikinci sayılabilir EET uzay olsun. Bu durumda bir sayılabilir $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ esnek bazı vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için bir $\tilde{x}_n \in B_n$ seçelim. Bu durumda $F = SS(\{\tilde{x}_n : n \in \mathbb{N}\}) \subset S(\tilde{X})$ esnek kümesi sayılabilirdir. $\overline{F} = \tilde{X}$ olduğunu gösterelim. $F \subset \overline{F}$ ve $F \cup F^c = \tilde{X}$ olduğundan $F \cup F^c = \overline{F}$ olduğu veya buna denk olarak her $\tilde{x} \in F^c$ için $\tilde{x} \in \overline{F}$ olduğu gösterilirse $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ ayrılabilir olur. Bunun için $\overline{F} = F \cup F^c$ olduğundan her $\tilde{x} \in F^c$ için $\tilde{x} \in F^c$ olduğunu göstermek yeterlidir. $U, \tilde{x}$ esnek elemanını içeren esnek açık küme olsun. Bu durumda $B_{n_0} \subset U$ olacak şekilde en az bir $B_{n_0} \in \mathcal{B}$ vardır. Böylece $\tilde{x}_{n_0} \in B_{n_0} \subset U$ olacak şekilde bir $\tilde{x}_{n_0} \in \tilde{X}$ vardır. Buradan $\tilde{x}_{n_0} \neq \tilde{x}$ olduğundan $\tilde{x}_{n_0} \in F$ elde edilir. O halde $\tilde{x} \in F^c$ olur.

Uyarı 4.4.8. Yukarıdaki teoremin tersi doğru değildir. Yani ayrılabilir EET uzayının ikinci sayılabilir uzay olması gerekmez. Örneğin; A sonlu parametreler kümesi ve

$$\mathcal{T} = \left\{ G = (\tilde{x}, \tilde{y}) : \forall \lambda \in A \text{ için } \tilde{x}(\lambda), \tilde{y}(\lambda) \in \tilde{\mathbb{R}}, \tilde{x}(\lambda) < \tilde{y}(\lambda) \right\}$$

olmak üzere $(\tilde{\mathbb{R}}, \mathcal{T}, A)$ bir EET uzay olsun. Her $\lambda \in A$ için $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_\lambda)$ uzayı ayrılabilir ancak ikinci sayılabilir uzay olmadığından $(\tilde{\mathbb{R}}, \mathcal{T}, A)$ uzayı ayrılabilir fakat ikinci sayılabilir değildir.

Teorem 4.4.9. EM(5) şartını sağlayan her ayrılabilir elemanter esnek metrik uzay ikinci sayılabilir.

İspat. $(\tilde{X}, d, A)$, EM(5) şartını sağlayan bir metrik uzay olsun. Bu durumda $(\tilde{X}, \mathcal{T}_d, A)$ bir EET uzaydır. $\tilde{X}$ ayrılabilir olduğundan bir sayılabilir yoğun $F \in S(\tilde{X})$ esnek kümesi vardır. $\mathcal{B}$, merkezi $\tilde{x} \in F$ ve yarıçapı $\tilde{r} \succ \bar{0}$, $\tilde{r} \in \tilde{\mathbb{Q}}$ olan bütün açık yuvarların ürettiği esnek kümelerin bir ailesi olsun. Yani

$$\mathcal{B} = \{ SS(B(\tilde{x}, \tilde{r})) : \tilde{x} \in F, \tilde{r} \succ \bar{0}, \tilde{r} \in \tilde{\mathbb{Q}} \}$$

olsun. Bu durumda $\mathcal{B}$ ailesi sayılabilir. $\mathcal{B}$ ailesinin $\mathcal{T}_d$ topolojisi için bir esnek baz olduğunu gösterelim. Bunun için her $U \in \mathcal{T}_d$ esnek açık kümesi ve her $\tilde{y} \in U$ için $SS(B(\tilde{x}, \tilde{r})) \in \mathcal{B}$ olacak şekilde en az bir $\tilde{y} \in B(\tilde{x}, \tilde{r}) \subset SE(U)$ olduğunu gösterelim. $\tilde{y} \in SE(U)$ olduğundan $\tilde{y} \in B(\tilde{y}, \tilde{r}) \subset SE(U)$ açık yuvarı vardır. F , $\tilde{X}$ içinde her yerde yoğun esnek küme olduğundan F birden fazla esnek elemana sahiptir. Böylece $d(\tilde{x}, \tilde{y}) < \frac{\tilde{r}}{3}$ olacak şekilde $\tilde{y} \in F$ esnek elemanı vardır. $\tilde{X}$ elemanter esnek metrik

uzay olduğundan M(4) şartından $\frac{\tilde{r}}{3} < \tilde{r}_0 < \frac{2\tilde{r}}{3}$ olacak şekilde $\tilde{r}_0 \in \tilde{\mathbb{Q}}^*$ esnek sayısını

alabiliriz. Bu durumda $B(\tilde{x}, \tilde{r}_0) \subset B(\tilde{x}, \tilde{r}) \subset SE(U)$ olur. Ayrıca $SS(B(\tilde{x}, \tilde{r})) \in \mathcal{B}$ olduğundan $SS(B(\tilde{x}, \tilde{r}_0)) \in \mathcal{B}$ elde edilir. O halde $\mathcal{B}$, $\tilde{X}$ üzerinde $\mathcal{T}_d$ topolojisi için bir sayılabilir esnek bazdır.

Teorem 4.4.10. Ayrılabilir olma özelliği bir topolojik özelliktir.

İspat. $(\tilde{X}, \mathcal{T}_1, A)$ bir ayrılabilir EET uzay, $(\tilde{Y}, \mathcal{T}_2, A)$ bir EET uzay ve $f: SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ bir esnek homeomorfizm olsun. $(\tilde{X}, \mathcal{T}_1, A)$ ayrılabilir olduğundan bir sayılabilir her yerde yoğun $F \in S(\tilde{X})$ esnek kümesi vardır. Böylece $SE(F)$ sayılabilirdir. f bire bir olduğundan $f(SE(F)) \subset SE(\tilde{Y})$ ailesi sayılabilirdir. Yani $G = SS(f(SE(F))) \in S(\tilde{Y})$ sayılabilirdir. f bir esnek homeomorfizm olduğundan $f(clF) = cl(SS(f(SE(F)))) = clG$ olur. Ayrıca $\bar{F} = \tilde{X}$ ve f örten olduğundan $\bar{G} = \tilde{Y}$ yazılabilir. O halde $(\tilde{Y}, \mathcal{T}_2, A)$ ayrılabilirdir.

Uyarı 4.4.11. Ayrılabilir uzay kalıcı özelliğe sahip değildir. Örneğin, Örnek 4.4.5 deki $(\tilde{\mathbb{R}}, \mathcal{T}, A)$ elemanter esnek uzayı ayrılabilirdir. Ancak $(\tilde{\mathbb{Q}}, \mathcal{T}_{\tilde{\mathbb{Q}}}, A)$ alt uzayı ayrılabilir değildir. Çünkü her $F \in S(\tilde{\mathbb{Q}})$ sonsuz esnek kümesi, $F = \tilde{\mathbb{Q}} \cap SS((a, b))$, $F = \tilde{\mathbb{Q}} \cap SS([a, b))$, $F = \tilde{\mathbb{Q}} \cap SS((a, b])$ veya $F = \tilde{\mathbb{Q}} \cap SS([a, b])$ şeklindedir. Her $\lambda \in A$ için $F(\lambda) = \tilde{\mathbb{Q}} \cap SS([a, b])(\lambda) = \tilde{\mathbb{Q}}(\lambda) \cap SS([a(\lambda), b(\lambda)]) = \mathbb{Q} \cap [a, b]$ kümesi $\mathcal{T}_{\tilde{\mathbb{Q}}(\lambda)}$ topolojisine göre $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinin bir alt kümesidir ve $\bar{F}(\lambda) = \overline{\mathbb{Q} \cap [a, b]} = [a, b] \neq \mathbb{Q}$ olduğundan $\mathbb{Q}$ kümesinin bir sayılabilir yoğun alt kümesi yoktur. Yani $\mathbb{Q}$ ayrılabilir değildir. Dolayısıyla $(\tilde{\mathbb{Q}}, \mathcal{T}_{\tilde{\mathbb{Q}}}, A)$ ayrılabilir değildir.

Örnek 4.4.12. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ sonlu tümleyen EET uzayı ayrılabilirdir.

Çözüm. $\tilde{X}$ üzerinde sonlu tümleyen elemanter esnek topolojisi

$$\mathcal{T} = \{\Phi, U \in S(\tilde{X}) : U^c \text{ sonlu ve } U^c \in S(\tilde{X})\}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $SE(\tilde{X})$ sayılabilir ise $\tilde{X}$, $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ uzayının bir yoğun esnek alt kümesidir. Yani $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ sayılabilirdir. $SE(\tilde{X})$ ailesinin sayılabilir olmadığını kabul edelim. Bu durumda bir numaralanabilir $F \in S(\tilde{X})$ esnek kümesi vardır. Sonlu tümleyen elemanter esnek topolojisine göre her sonlu $F \in S(\tilde{X})$ kümesi ve $\tilde{X}$ esnek kapalı kümelerdir. Böylece sonlu olmayan F kümesinin esnek kapanışı $\tilde{X}$ olur. O halde $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ ayrılabilirdir.

Örnek 4.4.13. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ ayrık EET uzayının ayrılabilir olması için gerek ve yeter şart $SE(\tilde{X})$ esnek kümesinin sayılabilir olmasıdır.

Çözüm. Her $F \in S(\tilde{X})$ kümesi hem esnek açık hem esnek kapalıdır. Böylece $\tilde{X}$ kümesinin yoğun esnek alt kümesi $\tilde{X}$ esnek kümesinin kendisidir. O halde $\tilde{X}$ kümesinin sayılabilir olması için gerek ve yeter şart $SE(\tilde{X})$ esnek elemanların sınıfının sayılabilir olmasıdır.

4.5. Lindelöf Elemanter Esnek Uzaylar

Tanım 4.5.1. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ bir EET uzay olsun. $\tilde{X}$ esnek kümesinin her esnek açık örtüsünün bir esnek sayılabilir alt örtüsü varsa $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ uzayına *Lindelöf esnek uzay* denir.

Örnek 4.5.2. İkinci sayılabilir her esnek uzay bir Lindelöf uzayıdır. Teorem 4.3.11 de $F = \tilde{X}$ almak yeterlidir.

Örnek 4.5.3. Esnek sayılabilir bir $\tilde{X}$ esnek kümesinin her $\mathcal{T}$ elemanter esnek topolojisine göre $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ uzayı bir Lindelöf esnek uzaydır.

Örnek 4.5.4. $(\tilde{X}, \mathcal{P}(\tilde{X}), A)$ uzayı bir Lindelöf esnek uzay olması için gerek ve yeter şart $\tilde{X}$ esnek kümesinin sayılabilir olmasıdır.

Örnek 4.5.5. $(\tilde{\mathbb{R}}, \mathcal{P}(\tilde{\mathbb{R}}), A)$ ayrık esnek uzayı Lindelöf esnek uzay değildir. Çünkü $\tilde{\mathbb{R}}$ esnek kümesi sayılabilir değildir.

Teorem 4.5.6. Bir Lindelöf esnek uzayının her esnek kapalı alt uzayı Lindelöf esnek uzaydır.

İspat. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ bir Lindelöf EET uzay, $F \in S(\tilde{X})$ esnek kapalı küme ve $\{U_i : i \in I\}$ F esnek kapalı kümesinin bir esnek açık örtüsü olsun. $F^c \in S(\tilde{X})$ ve $F^c \in \mathcal{T}$ ve $\tilde{X} = F \cup F^c$ olduğundan $\{F^c, U_i : i \in I\}$, $\tilde{X}$ esnek kümesinin bir esnek açık örtüsü olur. $\tilde{X}$ Lindelöf esnek uzay olduğundan bu örtünün sayılabilir bir $\{F^c, U_n : n \in \mathbb{N}\}$ esnek açık örtüsü vardır. Dolayısıyla $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, F kümesinin bir esnek örtüsü olur. O halde F Lindelöf esnek uzaydır.

Teorem 4.5.7. Bir Lindelöf esnek uzayın esnek sürekli fonksiyon altındaki görüntüsü de Lindelöf esnek uzaydır.

İspat. $(\tilde{X}, \mathcal{T}_1, A)$ bir Lindelöf EET uzay, $(\tilde{Y}, \mathcal{T}_2, A)$ bir EET uzay ve $f : SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ esnek sürekli fonksiyon olsun. $f(\tilde{X}) = SS(f(SE(\tilde{X}))) \subset \tilde{Y}$ uzayının Lindelöf esnek olduğunu gösterelim. $\{U_i : i \in I\}$, $f(\tilde{X})$ esnek kümesinin bir esnek açık örtüsü olsun. f sürekli olduğundan her U_i için $SS(f^{-1}(SE(U_i))) = V_i$

$(\tilde{X}, \mathcal{T}_1, A)$ uzayında esnek açık kümelerdir. Böylece $\{V_i : i \in I\}$ ailesi $\tilde{X}$ esnek kümesinin bir esnek açık örtüsüdür. $\tilde{X}$ Lindelöf esnek olduğundan $\tilde{X} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ olur. Yani $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi $\tilde{X}$ esnek kümesinin sayılabilir bir alt örtüsüdür. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $SS(f(SE(V_n))) \subseteq U_n$ olduğundan $f(\tilde{X}) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ elde edilir. O halde $F(\tilde{X})$ bir Lindelöf esnek uzaydır.

Sonuç 4.5.8. $(\tilde{X}, \mathcal{T}_1, A)$ bir Lindelöf EET uzay ve $(\tilde{Y}, \mathcal{T}_2, A)$ bir EET uzay olsun. $f : SE(\tilde{X}) \rightarrow SE(\tilde{Y})$ esnek fonksiyonu örten ve sürekli ise $(\tilde{Y}, \mathcal{T}_2, A)$ Lindelöf esnek uzaydır.

Sonuç 4.5.9. Lindelöf esnek uzay olma özelliği bir topolojik özelliktir.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde, elemanter esnek topolojik uzaylarda sayılabilirlik ve ayrılabilirlik üzerine çalışıldı. İlk önce elemanter esnek topolojik uzaylarda yoğun esnek küme kavramı tanımlandıktan sonra birinci sayılabilir elemanter esnek topolojik uzay ve ikinci sayılabilir elemanter esnek topolojik uzay kavramları tanımlandı. Her iki uzayın da temel özellikleri ispatlandı ve aralarındaki ilişki verildi.

Sonra elemanter esnek topolojik uzayda ayrılabilirlik kavramı tanımlandı, ayrılabilir elemanter esnek topolojik uzayın temel özellikleri ispatlandı ve ikinci sayılabilir elemanter esnek uzayla ilişkisi incelendi.

Son olarak Lindelöf elemanter esnek uzay kavramı tanımlandı. Lindelöf elemanter esnek uzayın temel özellikleri ispatlandı ve ikinci sayılabilir elemanter esnek uzayla ilişkisi incelendi.

Bu tezde yapılan çalışmalardan faydalanılarak elemanter esnek topolojik uzaylarda kompaktlık, dizisel kompaktlık, sayılabilir kompaktlık kavramları tanımlanabilir, temel özellikleri ispatlanabilir. Bu uzaylarla Lindelöf elemanter esnek uzaylar arasındaki ilişkiler incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Zadeh, L. A., Fuzzy sets. Inform. Control., 8(3): 338-353, 1965.
- [2] Molodtsov, D., Soft sets theory-First results. Comput. Math. Appl., 37(4-5): 19-31, 1999.
- [3] Molodtsov, D., The theory of soft sets (in Russian), URSS Publishers, 2004.
- [4] Molodtsov, D. A., Leonov, V. Y., Kovkov, D. V., Soft sets technique and its application. Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya, 1(1): 8-39, 2006.
- [5] Maji, P. K., Biswas, R., Roy, A. R., Soft set theory. Comput. Math. Appl, 45(4-5): 555-562, 2003.
- [6] Maji, P. K., Roy, A. R., Biswas, R., An application of soft sets in a decision making problem. Comput. Math. Appl., 44(8-9): 1077-1083, 2002.
- [7] Maji, P. K., Biswas, R., Roy, A. R., Fuzzy soft sets. J. Fuzzy Math., 9(3): 589-602, 2001.
- [8] Maji, P. K., Biswas, R., Roy, A. R., Intuitionistic fuzzy soft sets. J. Fuzzy Math., 9(3): 677-692, 2001.
- [9] Xu, W., Ma, J., Wang, S., Hao, G., Vague soft sets and their properties. Comput. Math. Appl., 59(2): 787-794, 2010.
- [10] Ali, M. I., A note on soft sets, rough soft sets and fuzzy soft sets. Appl. Soft Comput., 11(4): 3329-3332, 2011.
- [11] Feng, F., Liu, X., Leoreanu-Fotea, V., Jun, Y. B., Soft sets and soft rough sets. Inform. Sci., 181(6): 1125-1137, 2011.
- [12] Yang, C. F., A note on: Soft set theory. Comput. Math. Appl., 56(7): 1899-1900, 2008.
- [13] Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K., Shabir, M. On some new operations in soft set theory. Comput. Math. Appl., 57(9): 1547-1553, 2009.

- [14] Sezgin, A., Atagün, A. O., On operations of soft sets. *Comput. Math. Appl.*, 61(5): 1457-1467, 2011.
- [15] Zhu, P., Wen, Q., Operations on soft sets revisited. *J. Appl. Math.*, Article ID 105752, 2013.
- [16] Babitha, K. V., Sunil, J. J., Soft set relations and functions. *Comput. Math. Appl.*, 60(7): 1840-1849, 2010.
- [17] Majumdar, P., Samanta, S. K., Similarity measure of soft sets. *New Math. Nat. Comput.*, 4(01): 1-12, 2008.
- [18] Pei, D., Miao, D., From soft sets to information systems. 2005 IEEE International Conference on Granular Computing, Vol. 2 . IEEE, 617-621, 2005.
- [19] Jun, Y. B., Soft BCK/BCI-algebras. *Comput. Math. Appl.*, 56(5): 1408-1413, 2008.
- [20] Jun, Y. B., Park, C. H., Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI-algebras. *Inform. Sci.*, 178(11): 2466-2475, 2008.
- [21] Feng, F., Jun, Y. B., Zhao, X., Soft semirings. *Comput. Math. Appl.*, 56(10): 2621-2628, 2008.
- [22] Aygünoğlu, A., Aygün, H., Introduction to fuzzy soft groups. *Comput. Math. Appl.*, 58(6): 1279-1286, 2009.
- [23] Acar, U., Koyuncu, F., Tanay, B., Soft sets and soft rings. *Comput. Math. Appl.*, 59(11): 3458-3463, 2010.
- [24] Ali, M. I., Shabir, M., Naz, M., Algebraic structures of soft sets associated with new operations. *Comput. Math. Appl.*, 61(9): 2647-2654, 2011.
- [25] Shabir, M., Naz, M., On soft topological spaces. *Comput. Math. Appl.*, 61(7): 1786-1799, 2011.
- [26] Min, W. K., A note on soft topological spaces. *Comput. Math. Appl.*, 62(9): 3524-3528, 2011.
- [27] Hazra, H., Majumdar, P., Samanta, S. K., Soft topology. *Fuzzy Inf. Eng.*, 4(1): 105-115, 2012.
- [28] Aygünoğlu, A., Aygün, H., Some notes on soft topological spaces. *Neural Comput. Appl.*, 21(1): 113-119, 2012.

- [29] Varol, B. P., Aygün, H., A new approach to soft topology. *Hacet. J. Math. Stat.*, 41(5): 731-741, 2012.
- [30] Varol, B. P., Aygün, H., Fuzzy soft topology. *Hacet. J. Math. Stat.*, 41(3): 407-419, 2012.
- [31] Varol, B. P., Aygün, H., On soft Hausdorff spaces. *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 5(1): 15-24, 2013.
- [32] Zorlutuna, I., Akdağ, M., Min, W. K., Atmaca, S., Remarks on soft topological spaces. *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 3(2): 171-185, 2012.
- [33] Hussain, S., Ahmad, B., Some properties of soft topological spaces. *Comput. Math. Appl.*, 62(11): 4058-4067, 2011.
- [34] Ahmad, B., Hussain, S., On some structures of soft topology. *Math. Sci.*, 6: 64, 2012.
- [35] Nazmul, S., Samanta, S. K., Neighbourhood properties of soft topological spaces. *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 6(1): 1-15, 2013.
- [36] Georgiou, D. N., Megaritis, A. C., Soft set theory and topology. *Appl. Gen. Topol.*, 15(1): 93-109, 2014.
- [37] Das, S., Samanta, S. K., Soft real sets, soft real numbers and their properties. *J. Fuzzy Math.*, 20(3): 551-576, 2012.
- [38] Das, S., Samanta, S. K., On soft complex sets and soft complex numbers. *J. Fuzzy Math.*, 21(1): 195-216, 2013.
- [39] Das, S., Samanta, S. K., On soft metric spaces. *J. Fuzzy Math.*, 21(3): 707-734, 2013.
- [40] Das, S., Samanta, S. K., On soft inner product spaces. *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 6(1): 151-170, 2013.
- [41] Das, S., Samanta, S. K., Soft linear operators in soft normed linear spaces. *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 6(2): 295-314, 2013.
- [42] Nazmul, S., Samanta, S. K., Some properties of soft topologies and group soft topologies. *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 8(4): 645-661, 2014.
- [43] Das, S., Majumdar, P., Samanta, S. K., On soft linear spaces and soft normed linear spaces. *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 9(1): 91-109, 2015.

- [44] Chiney, M., Samanta, S. K., Vector soft topology. Ann. Fuzzy Math. Inform., 10(1): 45-64, 2015.
- [45] Chiney, M., Samanta, S. K., Soft topological vector space. Ann. of Fuzzy Math. Inform., 13(2): 153-174, 2017.
- [46] Taşköprü, K., Elemanter esnek topolojik uzaylara giriş. Doktora tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bil. Ens., 2017.



ÖZGEÇMİŞ

Betül Selvi, 14.09.1993 tarihinde Gebze’de doğdu. İlk ve orta eğitimi Gebze’de ve lise eğitimini İzmit’te tamamladı. 2011 yılında başladığı Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümünü 2015 yılında bitirdi. 2017 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Topoloji Bilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı.

