



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ELİPTİK DEĞERLİ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA
TEORİSİNE GEOMETRİK YAKLAŞIM**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İsa TİMURTAŞ

**DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Zeynep CAN**

AKSARAY, 2023

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 212342008 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi **İsa TİMURTAŞ** tarafından hazırlanan **ELİPTİK DEĞERLİ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEORİSİNE GEOMETRİK YAKLAŞIM** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Zeynep CAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Samet MALDAR

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Hidayet Hüda KÖSAL

Sakarya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 10/07/2023

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Mehmet Ali HINIS
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmada kullandığım verilerin orijinalliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

İsa TİMURTAŞ



TEŞEKKÜR

Böyle güzel bir konuyu seçip bana yol gösteren, üç yıllık süreç boyunca bu çalışmanın oluşmasında en büyük katkıyı sağlayan, tez çalışmam süresince gecesini gündüzüne katarak her türlü yardımda bulunan, hoşgörüsünü, içtenliğini, bilgi birikimini ve tecrübelerini benimle paylaşan, bu uzun ve zorlu süreç boyunca azmine ve sabrına hayran kaldığım sevgili danışmanım, saygıdeğer hocam

Dr. Öğr. Üyesi Zeynep CAN 'a

teşekkürü borç bilirim.

Ayrıca yüksek lisans eğitimim boyunca fikirlerini ve desteğini esirgemeyen, her daim yanımda olan saygıdeğer hocam

Doç. Dr. Samet MALDAR'a

teşekkürü borç bilirim.

Doğduğum andan beri hep yanımda olan, mutlu olmam için her zaman elinden gelenin fazlasını yapan, karamsarlığa düştüğüm anlarda beni yeniden umutlandıran canım annem Zeynep TİMURTAŞ'a, her zaman yanımda olan, her daim en büyük destekçilerim olan yeğenlerim olan Esra TİMURTAŞ, Ayten TİMURTAŞ, Besime TİMURTAŞ ve Ferhat TİMURTAŞ doğduğum andan beri desteklerini esirgemeyen, karşılaştığım zorlukların üstesinden gelmemde bana rehberlik eden ablam Nazime TİMURTAŞ ve düştüğüm zaman bana eline uzatan babama Adil TİMURTAŞ'a sonsuz teşekkür ederim.

Lisans eğitimim sırasında tanıştığım, çalışma süreci boyunca her zaman yanımda hissettiğim, her zaman destekçim olan Halit BALTA veysel HAZAR, Mehmet SABAZ ve Tuba SABAZ'A sonsuz teşekkür ederim. Tezin düzenlenmesinde emeği geçen, oda arkadaşım Savaş YAĞUZLUK'a teşekkürü borç bilirim.

Niğde Halk Eğitim Merkezinde görev yaptığım sırada İngilizce makaleleri çevirmemde bana yardımcı olan Merve TUNCER'e sonsuz teşekkür ederim.

İsa TİMURTAŞ
AKSARAY, 2023

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Sabit Nokta Teorisi	3
2.2 Eliptik Sayıların Cebirsel Özellikleri ve Eliptik Değerli Metrik Uzaylar.....	12
3. BAZI ELİPTİK DEĞERLİ METRİK UZAY ÖRNEKLERİ	15
4. BAZI ELİPTİK DEĞERLİ METRİK UZAYLARDA ÇEMBER ÖRNEKLERİ.....	25
5. ELİPTİK DEĞERLİ METRİK UZAYLARDA SABİT ÇEMBERLERİN VARLIĞI TEOREMLERİ	37
6. ELİPTİK DEĞERLİ METRİK UZAYLARDA SABİT ÇEMBERLERİN BAZI TEKLİK TEOREMLERİ	71
7. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	74
KAYNAKLAR	75
ÖZGEÇMİŞ.....	77

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELİPTİK DEĞERLİ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEORİSİNE
GEOMETRİK YAKLAŞIM

İsa TİMURTAŞ

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Zeynep CAN

ÖZET

Bu tezde öncelikle eliptik değerli metrik uzaylara bazı örnekler verilmiştir. Daha sonrasında eliptik değerli metrik uzaylarda çember tanıtılmış ve bu uzaylarda sabit çemberler araştırılmıştır. Son olarak eliptik değerli metrik uzaylarda sabit çemberlerin varlığı ve tekliği gösterilmiştir.

Bu çalışma yedi bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmış olup bu bölümde sabit nokta teorisi için kısa bir literatür araştırılması verilmiştir. Ayrıca sabit çember ve eliptik metrik uzaylara da değinilmiştir.

İkinci bölümde konu hakkında temel kavramlar çatısı altında tanımlar ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde eliptik değerli metrik uzaylarda daha iyi çalışabilmek adına bu uzaylara bazı örnekler verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise üçüncü bölümde örneklendirilen eliptik değerli metrik uzaylarda bazı çember örnekler verilmiştir.

Beşinci bölümde eliptik değerli metrik uzaylarda hangi koşullar altında sabit çemberlerin elde edileceğine dair teoremler verilmiş, bu teoremler sabit çemberlere sahip olan ya da olmayan bazı dönüşüm örnekleri ile örneklendirilmiştir.

Altıncı bölümde eliptik değerli metrik uzaylarda sabit çemberlerin teklik koşulları incelenmiştir.

Son olarak yedinci bölümde bu tezden elde edilen sonuçlar ve bu sonuçlar ışığında yapılabilecek çalışmalara değinilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta, Eliptik değerli metrik uzaylar, Sabit çember, Metrik uzay, Teklik teoremleri

Temmuz, 2023; 77 sayfa

M. Sc. THESIS

**GEOMETRIC APPROACH TO FIXED POINT THEORY IN ELLIPTICAL
VALUE METRIC SPACES**

İsa TİMURTAŞ

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Zeynep CAN

ABSTRACT

In this thesis, firstly, some examples of elliptic valued metric spaces are given. Later, circles are introduced in elliptic valued metric spaces and fixed circles are investigated in these spaces. Finally, the existence and uniqueness of fixed circles in elliptic valued metric spaces are shown.

This study consists of seven chapters. The first chapter is devoted to the introduction, and in this chapter, a brief literature review for fixed point theory is given. In addition, fixed circle and elliptic metric spaces are also mentioned.

In the second part, definitions and theorems are given under the umbrella of basic concepts about the subject.

In the third chapter, some examples of these spaces are given in order to study elliptic valued metric spaces better.

In the third chapter, some examples of the elliptic valued metric spaces are given in order to study these spaces better.

In the fifth chapter, theorems about the conditions under which fixed circles can be obtained in elliptic valued metric spaces are given, and these theorems are exemplified by some transformation examples with or without fixed circles.

In the sixth chapter, the uniqueness conditions of fixed circles in elliptic valued metric spaces are examined.

Finally, in the seventh chapter, the results obtained from this thesis and the studies that can be done in the light of these results are mentioned.

Keywords: Fixed point, Elliptic valued metric spaces, Fixed circle, Metric space, Uniqueness theorems

July, 2023; 77 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1. Düzlemde $\wp_{(2,1),(1,2)}^{\mathbb{E}_p}$	26
Şekil 4.2. Düzlemde $\wp_{(2,1),(0,3)}^{\mathbb{E}_p}$	27
Şekil 4.3. Düzlemde $\wp_{(3,4),(0,2)}^{\mathbb{E}_p}$	28
Şekil 4.4. Düzlemde $\wp_{(4,0),(0,2)}^{\mathbb{E}_p}$	28
Şekil 4.5. Düzlemde $\wp_{(1,0),(0,3)}^{\mathbb{E}_p}$	29
Şekil 4.6. Düzlemde $\wp_{(2,0),(0,5)}^{\mathbb{E}_p}$	30
Şekil 4.7. Düzlemde $\wp_{(0,0),(2,0)}^{\mathbb{E}_p}$	31
Şekil 4.8. Düzlemde $\wp_{(-2,1),(0,3)}^{\mathbb{E}_p}$ ·	32
Şekil 4.9. Düzlemde $\wp_{(2,-3),(1,3)}^{\mathbb{E}_p}$	33
Şekil 4.10. Düzlemde $\wp_{(3,-7),(1,3)}^{\mathbb{E}_p}$ ·	34
Şekil 4.11. Düzlemde $\wp_{(4,2),(0,4)}^{\mathbb{E}_p}$	35
Şekil 4.12. Düzlemde $\wp_{(5,4),(2,2)}^{\mathbb{E}_p}$	36

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}_p$	Genelleştirilmiş kompleks sayı kümesi
$\mathbb{E}_p$	Eliptik sayılar kümesi
ϵ	Epsilon
λ	Lambda
σ	Sigma
ς	Varsigma
τ	Tau
$\ \cdot \ $	Norm
$\ \epsilon \ _{\mathbb{E}}$	Eliptik norm
$<$	Önce gelir
$\approx$	Önce gelir ancak eşit değildir
$\prec$	Kısmi sıralamada önce gelir
$\preceq$	Kısmi sıralamada önce gelir veya eşittir
$\wedge$	Mantıksal ve
Ξ	Xi
φ	Phi

1. GİRİŞ

Sabit nokta, bir muhafaza işlemindeki tekrarlı bir devrin sonucunun değişmeyen bir noktasıdır. Basitçe ifade etmek gerekirse, bir işlevin sabit noktası, bu işlevi kullandığınızda kendisini veren bir giriş değeridir. Yani, $f(x) = x$ kullanımlarını sağlayan x değeri sabit noktadır. Matematikte sabit noktaların birçok uygulama alanı vardır. Bunlardan bazıları;

1. **Analiz ve Mühendislik:** Sabit noktalar diferansiyel denklemler ve integral denklemler gibi muhafazalı modellerin çözümünde kullanılır.
2. **Optimizasyon:** Birden çok optimizasyonu, bir işlevin sabit noktalarını veya en küçük/sabit noktalarını bulmayı hedefler.
3. **Bilgisayar Bilimi:** Sabit nokta kavramı, açıklamaların analizi ve veri yapıları gibi alanlarda önemli rol oynar.
4. **Oyun Teorisi:** Sabit noktalar, oyun teorisi gibi birçok stratejik etkileşimli alan analizinde önemli bir rol oynar. Bir oyun sabit noktası, oyuncuların stratejilerini değiştirme ihtiyacını duymadan devam eden bir noktayı temsil eder.

Bunlar sadece sabit noktaların bazı uygulama kullanımlardan birkaçıdır. Matematiksel ölçülerde ve diğer birçok bölümlerde sabit noktaların kullanımı oldukça yaygındır. Sabit noktalar, sistemlerin analizinde ve problemlerin çözümünde önemli bir araç olarak kullanılır.

Sabit nokta teorisi bilimin birçok alanında sayısız uygulamalara sahip olduğu için matematiğin en popüler alanlarından biridir. Banach, Banach büzülme dönüşümü ilkesini yayınladıktan sonra bu sonucu ilerletme ve genelleştirmeyi adanmış bir dizi çalışma yapılmıştır. Büzülme koşulunun genelleştirilmesi ile ilgili olan bu çalışmaların çoğu metrik uzaylarda yapılmıştır. Gahler metrik uzay fikrini genellemiş ve 2-metrik uzayı tanıtmıştır [1, 2], 1992 de Dhage D-metrik uzayı [3], 2012 de Sedghi vd. metrik uzaylara bir diğer genellemesi olan S-metrik uzayları [4], daha sonra 2015'te Abbas vd. S-metrik uzayları bir genellemesi olan A-metrik uzayları tanıtmıştır [5]. En sonunda 2016 da Ughade vd. A-metrik uzayları da içeren A_b -metrik uzayları tanıtmıştır [6].

Son yıllarda Özgür ve Taş sabit noktanın bir genellemesi olan sabit çemberler üzerine çalışmışlardır. Öncelikle herhangi bir metrik uzayda sabit çember kavramını tanımlayıp Caristi nin sabit nokta teoremindeki

$$d(x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

eşitsizliğini kullanarak sabit çember teoremleri elde etmiş ve bunu S-metrik uzaylarda da genelleştirmişlerdir. Bu çalışmalar için [7-11] kaynakları örnek verilebilir. Bu çalışmalar ışığında Erçinar de farklı metrik uzaylarda farklı sabit eğriler üzerinde çalışmış ve sabit noktanın bir genellemesini elde etmiştir [12].

$i^2 = p$ tanımlanan sayı sistemine genelleştirilmiş kompleks sayı sistemi denir. $\mathbb{C}_p$,

$$\mathbb{C}_p = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, i^2 = p\}.$$

sayı sistemini temsil eder. Bu p –kompleks düzlemde toplama ve çıkarma, genelde olduğu gibi karşılıklı elemanlarla yapılır. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_p$ için çarpma

$$M^p(z_1, z_2) = (x_1x_2 + py_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

biçiminde tanımlıdır. Bu tanım p nin -1,0 ve 1 olmasına bağlı olarak alındık, Study ve Clifford çarpımlarını oluşturur. Dikkat edilirse $\mathbb{C}_p$, yalnızca $p < 0$ için, toplama ve p -çarpımı altında bir cisimdir. Bu sistem p nin değerlerine göre farklı şekillerde isimlendirilir. $p < 0$ ise sistem eliptik sayı sistemi olarak adlandırılır, özel olarak $p = -1$ ise sistem kompleks sayı sistemidir, $p = 0$ ise sistem parabolik ya da dual sayı sistemi ve son olarak $p > 0$ ise elde edilen sistem hiperbolik sayı sistemi olarak isimlendirilir [13].

Azam vd. kompleks değerli metrik uzaylarını tanıtmışlardır [14]. Daha sonra buna benzer bir metot kullanarak Öztürk vd. eliptik değerli metrik uzaylarını tanıtmışlardır [15].

Bu çalışmada öncelikle eliptik değerli metrik uzaylarda bazı sabit çember teoremlerini araştırmış, daha sonra sabit çemberlerin varlık ve teklik koşulları incelenmiştir.

2.TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm iki alt bölümden oluşmakta olup tezin diğer bölümlerinde kullanılacak temel tanım ve teoremler, tezi başka kaynaklara başvurmadan anlaşılır kılmak için ilgili kaynaklar esas alınarak ve özetlenerek verilmektedir.

2.1 Sabit Nokta Teorisi

Tanım 2.1.1: G boş olmayan bir küme ve $*$, G de bir ikili işlem olsun. $(G, *)$ cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bir grup denir.

G_1 : $(G, *)$ de bir ikili işlem olsun. $\forall a, b \in G$ için $a * b \in G$ dir. (Kapalılık özelliği)

G_2 : $\forall a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ dir. (Birleşme özelliği)

G_3 : $*$ işleminin G de birim elemanı vardır. Yani $\forall a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde $\exists e \in G$ vardır.

G_4 : $*$ işleminin G deki her elemanın bir tersi vardır. Yani $a \in G$ için $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ olacak şekilde $\exists a^{-1} \in G$ bulunabilir [16].

Tanım 2.1.2: $(G, *)$ bir grup ve $\forall a, b \in G$ için $a * b = b * a$ değişme özelliği de sağlanıyorsa gruba değişmeli grup veya abel grup denir [16].

Tanım 2.1.3: H boştan farklı bir herhangi bir küme $\oplus$ ve $\odot$ da H üzerinde ikili işlemler olsun. Bu taktirde aşağıdaki aksiyomları sağlanıyorsa, $(H, \oplus, \odot)$ sistemine bir halka denir.

H_1 : $\forall a, b, c \in H$ için $a \oplus b \in H$ dir. ($\oplus$ nın kapalılık özelliği)

H_2 : $\forall a, b, c \in H$ için $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ dir. ($\oplus$ nın Birleşme özelliği)

H_3 : $\oplus$ işleminin H de birim elemanı vardır. Yani $\forall a \in H$ için

$a \oplus e = e \oplus a = a$ olacak şekilde $\exists e \in H$ vardır. ($\oplus$ ya göre etkisiz eleman özelliği)

H_4 : $\oplus$ işleminin H deki her elemanın bir tersi vardır. Yani $a \in H$ için

$a \oplus a^{-1} = a^{-1} \oplus a = e$ olacak şekilde $\exists a^{-1} \in H$ bulunabilir. ($\oplus$ ya göre ters eleman özelliği)

H_5 : $\forall a, b, c \in H$ için $a \oplus b = b \oplus a$ dır. ($\oplus$ nın değişme özelliği)

H_6 : $\forall a, b, c \in H$ için $a \odot b \in H$ dir. ($\odot$ nın kapalılık özelliği)

H_7 : $\forall a, b, c \in H$ için $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$ dir. ($\odot$ nın Birleşme özelliği)

H_8 : $\forall a, b, c \in H$ için $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$ dir. ($\odot$ nın $\oplus$ üzerine soldan dağılma özelliği) ve $(a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c)$ dir. ($\odot$ nın $\oplus$ üzerine sağdan dağılma özelliği) [16].

Tanım 2.1.4: Birimli, değişmeli H halkasının sıfırdan farklı her elemanı tersinirse bu halkaya cisim denir. Yani $\forall x \in H$ için;

- $x \cdot x^{-1} = 1_H \in H$
- $x \cdot y = y \cdot x$
- $1_H \neq 0_H$

şartlarını sağlayan her halka cisimdir [16].

Tanım 2.1.5: Boş kümeden farklı X kümesi üzerinde tanımlı gerçel değerli $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu, $\forall x, y, z \in X$ için aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise, d 'ye metrik denir.

$$\mathbf{M}_1) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\mathbf{M}_2) \quad \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) = d(y, x) \text{ (Simetri)}$$

$$\mathbf{M}_3) \quad \forall x, y, z \in X \text{ için } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ (Üçgen eşitsizliği)}$$

(X, d) ikilisine metrik uzay denir [17].

Tanım 2.1.6: X bir metrik uzay ve $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her bir $\epsilon > 0$

için $n \geq n_0$ olduğunda, $d(x_n, x) < \epsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ varsa, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine $x \in X$ noktasına yakınsar denir ve x noktasına da bu dizinin limiti denir [11].

Tanım 2.1.7: X bir metrik uzay ve $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her bir $\epsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda, $d(x_n, x_m) < \epsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ varsa, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine Cauchy dizisi denir [11].

Tanım 2.1.8: X bir metrik uzay olsun. Bu uzaydaki her $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Cauchy dizisi yakınsak ise, X uzayına tam metrik uzay denir [18].

Tanım 2.1.9: X bir vektör uzayı olsun ve K cismi $\mathbb{R}$ olmak üzere,

$\| \cdot \|: X \rightarrow K$ fonksiyonunun x noktasındaki değeri $\|x\|$ ile verilsin. Bu fonksiyon;

$$N_1. \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$N_2. \forall \alpha \in K \text{ ve } \forall x \in X \text{ için } \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$$

$$N_3. \forall x, y \in X \text{ için } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

şartlarını sağlıyorsa $\| \cdot \|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm, $(X, \| \cdot \|)$ ikilisine de normlu uzay denir [9].

Tanım 2.1.10: X normlu vektör uzayı olsun. X uzayı, $d(x, y) = \|x - y\|$ ($x, y \in X$) norm metriğine göre tam ise X e Banach uzayı denir. X in reel veya kompleks vektör uzay oluşuna göre Banach uzayı da reel veya kompleks Banach uzayı olarak adlandırılır [19].

Tanım 2.1.11: X bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir Lipschitzian dönüşümü olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için;

$$e(Tx, Ty) \leq h \cdot d(x, y)$$

olacak şekilde en az bir $h \in [0, 1)$ sayısı bulunabiliyorsa T ye contraction dönüşümü veya daraltan dönüşüm denir [12].

Tanım 2.1.12: X boş olmayan bir küme ve $T: X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T 'nin sabit noktası denir ve T nin tüm sabit noktalarının kümesi F_T , $F(T)$ veya $Fix(T)$ ile gösterilir [12].

Teorem 2.1.1: (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ olsun. Eğer $x \in X$ için;

$$d(x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx), \quad (1.1)$$

olacak şekilde X in negatif olmayan reel sayılara eşleyen bir φ alt yarı sürekli fonksiyon varsa T 'nin bir sabit noktası vardır [18].

Tanım 2.1.13: Bir X kümesi üzerinde yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerine sahip bir $\preceq$ bağıntısı varsa X kümesine kısmi sıralı küme denir.

Tanım 2.1.14: $\mathbb{C}_p = \{x + iy: x, y \in \mathbb{R}, i^2 = p\}$ biçimindeki kümeye genelleştirilmiş kompleks sayılar kümesi denir.

Teorem 2.1.2: $\mathbb{C}_p$ genelleştirilmiş kompleks sayılar kümesi, $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{C}_p$ ve üzerinde $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$ ve $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2$ olmak üzere;

$$\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2 = (v_1 + v_2) + i(w_1 + w_2)$$

biçiminde tanımlı

$$\oplus: \mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{C}_p$$

ve

$$\mathcal{T}_1 \odot \mathcal{T}_2 = (v_1 \cdot v_2 + pw_1 \cdot w_2) + i(v_1 \cdot w_2 + v_2 \cdot w_1)$$

biçiminde tanımlı

$$\odot: \mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{C}_p$$

işlemleri ile birlikte $(\mathbb{C}_p, \oplus, \odot)$ sistemi $p < 0$ için bir cisimdir.

İspat: $(\mathbb{C}_p, \oplus, \odot)$ sisteminin cisim aksiyomlarını sağladığı gösterilmelidir.

$\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2$, $\mathcal{T}_3 = v_3 + iw_3 \in \mathbb{C}_p$ ve $e = x + iy$ olsun.

$$H_1: \forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{C}_p \text{ için } \mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2 = (v_1 + v_2) + i(w_1 + w_2) \in \mathbb{C}_p$$

dır.

$$H_2: \forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3 \in \mathbb{C}_p \text{ için}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 \oplus (\mathcal{T}_2 \oplus \mathcal{T}_3) &= (v_1 + iw_1) \oplus [(v_2 + iw_2) \oplus (v_3 + iw_3)] \\ &= (v_1 + iw_1) \oplus [(v_2 + v_3) + i(w_2 + w_3)] \\ &= [v_1 + (v_2 + v_3)] + i[w_1 + (w_2 + w_3)] \\ &= [(v_1 + v_2) + v_3] + i[(w_1 + w_2) + w_3] \\ &= [(v_1 + v_2) + i(w_1 + w_2)] + (v_3 + iw_3) \\ &= [(v_1 + iw_1) + (v_2 + iw_2)] + (v_3 + iw_3) \\ &= (\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2) \oplus \mathcal{T}_3 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$H_3: \forall \mathcal{T}_1 \in \mathbb{C}_p \text{ için } \mathcal{T}_1 \oplus e = e \oplus \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_1 \text{ olacak şekilde bir}$$

$e = x + iy \in \mathbb{C}_p$ eleman var olduğunu gösterilmelidir.

$$\mathcal{T}_1 \oplus e = (v_1 + x) + i(w_1 + y)$$

ifadesinden $e = x + iy = 0 + i0 \in \mathbb{C}_p$ elde edilir. $e \oplus \mathcal{T}_1$ içinde benzer işlemlerle aynı $e = 0 + i0$ elemanı bulunur.

$H_4: \forall \mathcal{T}_1 \in \mathbb{C}_p$ için $\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_1^{-1} = e$ olacak şekilde bir $\mathcal{T}_1^{-1} \in \mathbb{C}_p$ elemanı var olmalıdır. $\mathcal{T}_1^{-1} = v_1' + iw_1'$ olsun.

$$\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_1^{-1} = e \Rightarrow (v_1 + v_1') + i(w_1 + w_1') = 0 + i0$$

$$\Rightarrow v_1 + v_1' = 0 \text{ ve } w_1 + w_1' = 0$$

$$\Rightarrow v_1 = v_1' \text{ ve } w_1 = w_1'$$

olup $\mathcal{T}_1^{-1} = -v_1 - iw_1$ elde edilir. Benzer şekilde $\mathcal{T}_1^{-1} \oplus \mathcal{T}_1$ içinde yapılarak $\mathcal{T}_1^{-1} = -v_1 - iw_1$ olduğu görülür.

H₅: $\forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{C}_p$ için

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2 &= (v_1 + v_2) + i(w_1 + w_2) \\ &= (v_2 + v_1) + i(w_2 + w_1) \\ &= (v_2 + iw_2) + (v_1 + iw_1) \\ &= \mathcal{T}_2 \oplus \mathcal{T}_1\end{aligned}$$

olup $\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2 \oplus \mathcal{T}_1$ elde edilir.

H₆: $\forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{C}_p$ için $\mathcal{T}_1 \odot \mathcal{T}_2 = [(v_1 \cdot v_2 + pw_1 \cdot w_2) + i(v_1 \cdot w_2 + w_1 \cdot v_2)] \in \mathbb{C}_p$

dır.

H₇: $\forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3 \in \mathbb{C}_p$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_1 \odot (\mathcal{T}_2 \odot \mathcal{T}_3) &= (v_1 + iw_1) \odot [(v_2 + iw_2) \odot (v_3 + iw_3)] \\ &= (v_1 + iw_1) \odot [(v_2 \cdot v_3 + pw_2 \cdot w_3) + i(v_2 \cdot w_3 + w_2 \cdot v_3)] \\ &= [v_1(v_2 \cdot v_3 + pw_2 \cdot w_3) + pw_1(v_2 \cdot w_3 + w_2 \cdot v_3)] \\ &\quad + i[v_1(v_2 \cdot w_3 + w_2 \cdot v_3) + w_1(v_2 \cdot v_3 + pw_2 \cdot w_3)] \\ &= [v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 + p(v_1 \cdot w_2 \cdot w_3 + v_2 \cdot w_1 \cdot w_3 + v_3 \cdot w_1 \cdot w_2)] \\ &\quad + i[v_1 \cdot v_2 \cdot w_3 + v_1 \cdot v_3 \cdot w_2 + v_2 \cdot v_3 \cdot w_1 + p(w_1 \cdot w_2 \cdot w_3)] \quad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}_1 \odot \mathcal{T}_2) \odot \mathcal{T}_3 &= [(v_1 + iw_1) \odot (v_2 + iw_2)] \odot (v_3 + iw_3) \\ &= \{[v_1 \cdot v_2 + p(w_1 \cdot w_2)] + i(v_1 \cdot w_2 + w_1 \cdot v_2)\} \odot (v_3 + iw_3) \\ &= \{[v_1 \cdot v_2 + p(w_1 \cdot w_2)] \cdot v_3 + p(v_1 \cdot w_2 + w_1 \cdot v_2) \cdot w_3\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +i\{[v_1 \cdot v_2 + p(w_1 \cdot w_2)] \cdot v_3 + p(v_1 \cdot w_2 + w_1 \cdot v_2) \cdot w_3\} \\
& = [v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 + p(v_1 \cdot w_2 \cdot w_3 + v_2 \cdot w_1 \cdot w_3 + v_3 \cdot w_1 \cdot w_2)] \\
& +i[v_1 \cdot v_2 \cdot w_3 + v_1 \cdot v_3 \cdot w_2 + v_2 \cdot v_3 \cdot w_1 + p(w_1 \cdot w_2 \cdot w_3)] \quad (2)
\end{aligned}$$

olup (1) ve (2) eşitliklerinden $\mathcal{T}_1 \odot (\mathcal{T}_2 \odot \mathcal{T}_3) = (\mathcal{T}_1 \odot \mathcal{T}_2) \odot \mathcal{T}_3$ elde edilir.

$$\mathbf{H_8}: \forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3 \in \mathbb{C}_p$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2) \odot \mathcal{T}_3 &= [(v_1 + iw_1) \oplus (v_2 + iw_2)] \odot (v_3 + iw_3) \\
&= [(v_1 + v_2) + i(w_1 + w_2)] \odot (v_3 + iw_3) \\
&= \{(v_1 + v_2) \cdot v_3 + p[(w_1 + w_2) \cdot w_3]\} \\
&+ [(v_1 + v_2) \cdot w_3 + (w_1 + w_2) \cdot v_3] \\
&= [v_1 \cdot v_3 + v_2 \cdot v_3 + p(w_1 \cdot w_3 + w_2 \cdot w_3)] \\
&+ i(v_1 \cdot w_3 + v_2 \cdot w_3 + w_1 \cdot v_3 + w_2 \cdot v_3) \\
&= \{[v_1 \cdot v_3 + p(w_1 \cdot w_3)] + [v_2 \cdot v_3 + p(w_2 \cdot w_3)]\} \\
&+ i(v_1 \cdot w_3 + w_1 \cdot v_3) + i(v_2 \cdot w_3 + w_2 \cdot v_3) \\
&= (\mathcal{T}_1 \odot \mathcal{T}_3) \oplus (\mathcal{T}_2 \odot \mathcal{T}_3)
\end{aligned}$$

dır. Benzer şekilde $\mathcal{T}_1 \odot (\mathcal{T}_2 \oplus \mathcal{T}_3) = (\mathcal{T}_1 \odot \mathcal{T}_2) \oplus (\mathcal{T}_1 \odot \mathcal{T}_3)$ elde edilir.

$$\mathbf{H_9}: \forall \mathcal{T}_1 \in \mathbb{C}_p \text{ ve } i^2 = p \text{ olmak üzere}$$

$$\mathcal{T}_1 \odot e = e \odot \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_1$$

olacak şekilde bir $e = x + iy \in \mathbb{C}_p$ var olmalıdır.

$$\mathcal{T}_1 \odot e = \mathcal{T}_1 \Rightarrow (v_1 + iw_1) \odot (x + iy) = v_1 + iw_1$$

$$\Rightarrow (v_1 \cdot x + p \cdot w_1 \cdot y) + i(v_1 \cdot y + w_1 \cdot x) = v_1 + iw_1$$

olup

$$v_1 \cdot x + pw_1 y = v_1$$

$$v_1 \cdot y + w_1 \cdot x = iw_1 \quad (3)$$

denklem sistemi x e göre çözülürse $x = 1$ elde edilir. Bu değer (3) de yerine yazılırsa $y = 0$ bulunur. Böylece $e = x + iy = 1 + i0$ elde edilir. Benzer olarak $e \odot \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_1$ eşitliğinde $e = 1 + i0$ bulunur.

H_{10} : $\forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{C}_p$ için;

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 \odot \mathcal{T}_2 &= (v_1 \cdot v_2 + p \cdot w_1 \cdot w_2) + i(v_1 \cdot w_2 + v_2 \cdot w_1) \\ &= (v_2 \cdot v_1 + p \cdot w_2 \cdot w_1) + i(v_2 \cdot w_1 + v_1 \cdot w_2) \\ &= \mathcal{T}_2 \odot \mathcal{T}_1 \end{aligned}$$

dır.

H_{11} : $\forall \mathcal{T}_1 \in \mathbb{C}_p$ için $\mathcal{T}_1 \odot \mathcal{T}_1^{-1} = \mathcal{T}_1^{-1} \odot \mathcal{T}_1 = e$ olacak biçimde bir $\mathcal{T}_1^{-1} \in \mathbb{C}_p$ var olmalıdır. $\mathcal{T}_1^{-1} = v_1' + iw_1'$ olsun.

$$\mathcal{T}_1 \odot \mathcal{T}_1^{-1} = e \Rightarrow (v_1 + iw_1) \odot (v_1' + iw_1') = 1 + i0$$

$$\Rightarrow (v_1 \cdot v_1' + p \cdot w_1 \cdot w_1') + i(v_1' \cdot w_1 + v_1 w_1') = 1 + i0$$

olup

$$v_1 \cdot v_1' + p \cdot w_1 \cdot w_1' = 1$$

$$v_1' \cdot w_1 + v_1 w_1' = 0$$

Denklem sistemi v_1' ne göre çözülürse

$$v_1' = \frac{v_1}{v_1^2 - pw_1^2}$$

ve

$$w_1' = \frac{w_1}{v_1^2 - pw_1^2}$$

elde edilir. $p < 0$ olduğundan

$$\mathcal{T}_1^{-1} = v_1' + iw_1' = \frac{v_1}{v_1^2 - pw_1^2} + i \frac{(-w_1)}{v_1^2 - pw_1^2} \in \mathbb{C}_p$$

elde edilir. Böylece $(\mathbb{C}_p, \oplus, \odot)$ sistemi $p < 0$ için bir cisimdir.



2.2 Eliptik Sayıların Cebirsel Özellikleri ve Eliptik Değerli Metrik Uzaylar

Bu bölümde eliptik sayıların bazı cebirsel özellikleri ile eliptik değerli metrik uzayların tanımı kaynağından özetlenerek verilmektedir. [13] kaynağından özetlenerek $\mathbb{E}_p$;

$$\mathbb{E}_p = \{\epsilon = v + iw : v, w \in \mathbb{R}, i^2 = p < 0\}.$$

sayı sistemini gösterebilir. Bir $\epsilon = v + iw$ eliptik sayısı için, v gerçel sayısı ϵ nin reel kısmı olarak ve w ise ϵ nin sanal kısmı olarak adlandırılır.

- i. Eliptik sayıların toplamı $\epsilon_1 = v_1 + iw_1$ ve $\epsilon_2 = v_2 + iw_2$ olmak üzere;

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 = v_1 + v_2 + i(w_1 + w_2)$$

biçiminde tanımlanır.

- ii. Bir eliptik $\epsilon_1 \in \mathbb{E}_p$ sayısının skaler bir $\lambda \in \mathbb{R}$ ile çarpımı

$$\lambda \epsilon_1 = (v_1 + iw_1) = \lambda v_1 + \lambda iw_1 \text{ olarak tanımlanır.}$$

Ayrıca iki eliptik sayı $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere bu iki eliptik sayının çarpımı

$$\epsilon_1 \cdot \epsilon_2 = (v_1 + iw_1) \cdot (v_2 + iw_2) = (v_1 v_2 + p w_1 w_2) + i(v_1 w_2 + v_2 w_1).$$

biçiminde tanımlanır.

- iii. Bir ϵ eliptik sayısının eşleniği $\bar{\epsilon}$ ile gösterilir ve

$$\bar{\epsilon} = Re(\epsilon) - Im(\epsilon) = v - iw$$

biçiminde tanımlanır.

- iv. Eliptik bir sayı için normu

$$\|\epsilon\|_{\mathbb{E}} = \sqrt{\epsilon \bar{\epsilon}} = \sqrt{v^2 - p w^2}.$$

biçimindedir.

$\mathbb{E}_p$ nin $\mathbb{R}$ cismi üzerinde toplama ve skaler ile çarpma ile birlikte iki boyutlu bir vektör uzayı olduğu açıktır. Dolayısıyla, bire bir eşleme $\mathbb{E}_p$ den $\mathbb{R}^2$ ye oluşturulabilir ve her bir $\epsilon = v + iw$ eliptik sayısı (bilinen) düzlemde tek bir şekilde ifade edilebilir. Bu düzlem eliptik düzlem olarak adlandırılır ve eliptik bir düzlemde iki eliptik sayı arasındaki uzaklık, $\epsilon_1 = v_1 + iw_1$ ve $\epsilon_2 = v_2 + iw_2$ olmak üzere;

$$\|\epsilon_1 - \epsilon_2\|_{\mathbb{E}} = \sqrt{(v_1 - v_2)^2 - p(w_1 - w_2)^2}.$$

biçiminde tanımlanır.

Bu eliptik düzlemde, orijinden 1 birim uzakta bulunan tüm eliptik sayıların kümesi elipstir ve $v^2 - pw^2 = 1$ denklemiyle ifade edilir [13].

Bu çalışma boyunca θ , $\mathbb{E}_p$ uzayının sıfır vektörünü göstermektedir. Şimdi, $\mathbb{E}_p$ üzerinde bir $\preccurlyeq$ kısmı sıralaması

$$\epsilon_1 = v_1 + iw_1 \in \mathbb{E}_p, \epsilon_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p \text{ olmak üzere,}$$

$$\epsilon_1 \preccurlyeq \epsilon_2 \Leftrightarrow Re(\epsilon_1) \preccurlyeq Re(\epsilon_2), Im(\epsilon_1) \preccurlyeq Im(\epsilon_2). \quad (4)$$

biçiminde tanımlansın.

Aşağıdaki ifadelerden herhangi biri geçerliyse, $\epsilon_1 \preccurlyeq \epsilon_2$ olur:

- i. $Re(\epsilon_1) = Re(\epsilon_2), Im(\epsilon_1) < Im(\epsilon_2);$
- ii. $Re(\epsilon_1) < Re(\epsilon_2), Im(\epsilon_1) = Im(\epsilon_2);$
- iii. $Re(\epsilon_1) < Re(\epsilon_2), Im(\epsilon_1) < Im(\epsilon_2);$
- iv. $Re(\epsilon_1) = Re(\epsilon_2), Im(\epsilon_1) = Im(\epsilon_2).$

Özel olarak i, ii ve iii den biri sağlanıyorsa $\epsilon_1 \preccurlyeq \epsilon_2 (\epsilon_1 \neq \epsilon_2)$ ifadesi, iii sağlanıyorsa sadece $\epsilon_1 < \epsilon_2$ ifadesi kullanılacaktır. $\preccurlyeq$ kısmı sıralamasının $\mathbb{E}_p$ üzerindeki bazı temel özellikleri aşağıdaki gibi verilebilir:

- I. $\theta \preccurlyeq \epsilon_1 \preccurlyeq \epsilon_2$, ise $\|\epsilon_1\|_{\mathbb{E}} < \|\epsilon_2\|_{\mathbb{E}}$ dir.
- II. $\epsilon_1 \preccurlyeq \epsilon_2, \epsilon_1 - \epsilon_2 \preccurlyeq \theta$ ifadesine eşdeğerdir.
- III. Eğer $\epsilon_1 \preccurlyeq \epsilon_2$ ve $\epsilon_2 \preccurlyeq \epsilon_3$ ise $\epsilon_1 \preccurlyeq \epsilon_3$ dir.

IV. Eğer $\epsilon_1 \leq \epsilon_2$ ve Λ , ($\Lambda \in \mathbb{R}$), ise $\Lambda \epsilon_1 \leq \Lambda \epsilon_2$.

V. $\theta \leq \epsilon_1$ ve $\theta \leq \epsilon_2$, olması $\theta \leq \epsilon_1 \epsilon_2$ anlamına gelmez.

Tanım 2.2.1: Ξ boş olmayan bir küme olsun. Bir $e: \Xi \times \Xi \rightarrow \mathbb{E}_p$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa e , Ξ üzerinde bir eliptik değerli metriktir.

$$(\mathbb{E}_1) \quad \forall \sigma, \varsigma \in \Xi \text{ için } \theta \leq e(\sigma, \varsigma),$$

$$(\mathbb{E}_2) \quad e(\sigma, \varsigma) = \theta \Leftrightarrow \sigma = \varsigma;$$

$$(\mathbb{E}_3) \quad e(\sigma, \varsigma) = e(\varsigma, \sigma) \quad \forall \sigma, \varsigma \in \Xi.$$

$$(\mathbb{E}_4) \quad \forall \sigma, \varsigma, \tau \in \Xi \text{ için } e(\sigma, \varsigma) \leq e(\sigma, \tau) + e(\tau, \varsigma).$$

Bu durumda, (Ξ, e) ikilisine eliptik değerli metrik uzay denir [19].

3. BAZI ELİPTİK DEĞERLİ METRİK UZAY ÖRNEKLERİ

Bu bölümde eliptik değerli metrik uzaylar için bazı örnekler verilecektir.

Örnek 3.1: [15] $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere;

$$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}$$

biçiminde tanımlanan $e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$ dönüşümü bir metriktir ve $(\mathbb{E}_p, e)$ bir eliptik değerli metrik uzaydır. e dönüşümünün bir metrik olduğunu göstermek için $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ ve $\mathbf{M}_3$ metrik aksiyomlarının sağlandığı gösterilmelidir.

$\mathbf{M}_1$) $\forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{E}_p$ için $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \theta \Leftrightarrow \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ olduğu gösterilmelidir.

$\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$ ve $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2$ olmak üzere;

$$\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}} = 0 + 0i$$

$v_1 - v_2 = 0$ ve $w_1 - w_2 = 0$ olup $v_1 = v_2$ ve $w_1 = w_2$ ve dolayısıyla $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ elde edilir.

$\mathbf{M}_2$) $\forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{E}_p$ için $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = e(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1)$ olduğu gösterilmelidir.

$\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$ ve $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) &= \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}} \\ &= \sqrt{(v_1 - v_2)^2} + i \sqrt{(w_1 - w_2)^2} \\ &= \sqrt{(v_2 - v_1)^2} + i \sqrt{(w_2 - w_1)^2} \\ &= e(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1) \end{aligned}$$

elde edilir.

$\mathbf{M}_3$) $\forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3 \in \mathbb{E}_p$ için $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) \leq e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3) + e(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_2)$ olduğu gösterilmelidir.

$\mathcal{T}_1 = v_1 - iw_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 - iw_2$ ve $\mathcal{T}_3 = v_3 - iw_3$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) &= \sqrt{(v_1 - v_2)^2} + i \sqrt{(w_1 - w_2)^2} \\
&\leq \sqrt{(v_1 - v_3 - v_2 + v_3)^2} + \sqrt{(w_1 - w_3 - w_2 + w_3)^2} \\
&\leq \sqrt{(v_1 - v_3)^2} + \sqrt{(v_3 - v_2)^2} + i \sqrt{(w_1 - w_3)^2} + i \sqrt{(w_3 - w_2)^2} \\
&= \sqrt{(v_1 - v_3)^2} + i \sqrt{(w_1 - w_3)^2} + \sqrt{(v_3 - v_2)^2} + i \sqrt{(w_3 - w_2)^2} \\
&= e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3) + e(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_2)
\end{aligned}$$

olup $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) \leq e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3) + e(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_2)$ elde edilir. Böylece $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli bir metrik uzaydır.

Örnek 3.2: $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere;

$$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = i | \mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2 | \quad e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = i | \mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2 |$$

biçiminde tanımlanan $e: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_p$, dönüşümü bir metriktir ve $(\mathbb{R}, e)$ bir eliptik değerli metrik uzaydır. e dönüşümünün bir metrik olduğunu göstermek için $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ ve $\mathbf{M}_3$ metrik aksiyomlarının sağlandığı gösterilmelidir.

$\mathbf{M}_1) \forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{E}_p$ için $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \theta \Leftrightarrow \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ olduğu gösterilmelidir.

$\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$ ve $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2$ olmak üzere;

$$i | v_1 - v_2 | = 0 + 0i \Leftrightarrow | v_1 - v_2 | = 0$$

$$\Leftrightarrow v_1 - v_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow v_1 = v_2$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$$

elde edilir.

$\mathbf{M}_2) \forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{E}_p$ için $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = e(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1)$ olduğu gösterilmelidir.

$\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$ ve $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2$ olmak üzere;

$$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = i \mid \mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2 \mid = i \mid v_1 - v_2 \mid = i \mid v_2 - v_1 \mid = i \mid \mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_1 \mid = e(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1)$$

elde edilir.

M₃) $\forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3 \in \mathbb{E}_p$ için $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) \leq e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3) + e(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_2)$ olduğu gösterilmelidir.

$\mathcal{T}_1 = v_1 - iw_1, \mathcal{T}_2 = v_2 - iw_2$ ve $\mathcal{T}_3 = v_3 - iw_3$ olmak üzere;

$\forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3 \in \mathbb{E}_p$ için mutlak değer fonksiyonunun özelliklerinden

$$\mid v_1 - v_2 \mid \leq \mid v_1 - v_3 \mid + \mid v_3 - v_2 \mid$$

olduğu bilinmektedir. O halde;

$$i \mid \mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2 \mid \leq i \mid \mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_3 \mid + i \mid \mathcal{T}_3 - \mathcal{T}_2 \mid$$

olup

$$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) \leq e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3) + e(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_2)$$

elde edilir. Böylece $(\mathbb{R}, e)$ eliptik değerli bir metrik uzaydır.

Örnek 3.3: $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1, \mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere;

$$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \|\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2\|_{\mathbb{E}} e^{i\theta_p}, \theta_p \in \left[0, \frac{\pi(p-1)}{8p}\right]$$

biçiminde tanımlanan $e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p^+$ dönüşümü bir metriktir ve $(\mathbb{E}_p, e)$ bir eliptik değerli metrik uzaydır. e dönüşümünün bir metrik olduğunu göstermek için **M₁**, **M₂** ve **M₃** metrik aksiyomlarının sağlandığı gösterilmelidir.

M₁) $\forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{E}_p$ için $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \theta \Leftrightarrow \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ olduğu gösterilmelidir.

$\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$ ve $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2$ olmak üzere;

$\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ ise $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \theta$ olduğu açıktır.

Tersine $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \theta$ ise yani $\|\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2\|_{\mathbb{E}} e^{i\theta_p} = \theta$ ise $\theta_p \in \left[0, \frac{\pi(p-1)}{8p}\right]$ için

$\theta \leq e^{i\theta_p}$ olduğundan; $\|\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2\|_{\mathbb{E}} = \theta$ olup

$\|\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2\|_{\mathbb{E}} = \sqrt{(v_1 - v_2)^2 - p(w_1 - w_2)^2} = 0$ dır ve böylece $v_1 = v_2$ ve $w_1 = w_2$ olup $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ elde edilir.

M_2) $\forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{E}_p$ için $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = e(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1)$ olmalıdır. $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$ ve

$\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2$ olmak üzere;

$$\sqrt{(v_1 - v_2)^2 - p(w_1 - w_2)^2} e^{i\theta_p} = \sqrt{(v_2 - v_1)^2 - p(w_2 - w_1)^2} e^{i\theta_p}$$

olup $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = e(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1)$ elde edilir.

M_3) $\forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3 \in \mathbb{E}_p$ için $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) \leq e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3) + e(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_2)$ olduğu gösterilmelidir.

$\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1, \mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2$ ve $\mathcal{T}_3 = v_3 + iw_3$ olmak üzere;

$$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \sqrt{(v_1 - v_2)^2 - p(w_1 - w_2)^2} e^{i\theta_p} = \sqrt{(v_1 - v_3 + v_3 - v_2)^2 - p(w_1 - w_3 + w_3 - w_2)^2} e^{i\theta_p}$$

$$\leq \sqrt{(v_1 - v_3)^2 - p(w_1 - w_3)^2} e^{i\theta_p} + \sqrt{(v_3 - v_2)^2 - p(w_3 - w_2)^2} e^{i\theta_p}$$

$$\leq e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3) + e(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_2)$$

olup $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) \leq e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3) + e(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_2)$ elde edilir. Böylece $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli bir metrik uzaydır.

Örnek 3.4: $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1, \mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere;

$$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \max\{\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}}, \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}\}i$$

biçiminde tanımlanan $e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$ dönüşümü bir metriktir ve $(\mathbb{E}_p, e)$ bir eliptik değerli metrik uzaydır. e dönüşümünün bir metrik olduğunu göstermek için **M_1, M_2** ve **M_3** metrik aksiyomlarının sağlandığı gösterilmelidir.

M_1) $\forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{E}_p$ için $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \theta \Leftrightarrow \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ olduğu gösterilmelidir.

$\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$ ve $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2$ olmak üzere;

$$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \theta \Rightarrow \max\{\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}}, \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}\}i = 0 + i0$$

dır. $\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}} \leq \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}}$ olduğu varsayalım. Bu durumda

$$\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}}i = 0 + 0i$$

olup

$$\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}i = 0$$

olmalıdır. Böylece

$$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \theta \Rightarrow \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} = 0 \wedge \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}} = 0$$

$$\Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \wedge w_1 - w_2 = 0$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2 \wedge w_1 = w_2$$

$$\Rightarrow \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$$

elde edilir. $\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} \leq \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}$ olması durumunda da benzer işlemlerle $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \theta \Rightarrow \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ bulunur. $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ ise $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \theta$ olduğu açıktır.

M₂) $\forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{E}_p$ için $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = e(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1)$ olduğu gösterilmelidir.

$\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$ ve $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) &= \max\{\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}}, \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}\}i \\ &= \max\{\|v_2 - v_1\|_{\mathbb{E}}, \|w_2 - w_1\|_{\mathbb{E}}\}i \\ &= e(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1) \end{aligned}$$

olup $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = e(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1)$ eşitliğini sağlar.

M₃) $\forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3 \in \mathbb{E}_p$ için $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) \leq e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3) + e(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_2)$ olduğu gösterilmelidir.

$$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) \leq e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3) + e(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_2)$$

olduğu göstermek için, $\mathcal{T}_1 = v_1 - iw_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 - iw_2$ ve $\mathcal{T}_3 = v_3 - iw_3$ olsun.

$$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \max\{\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}}, \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}\}i$$

$$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3) = \max\{\|v_1 - v_3\|_{\mathbb{E}}, \|w_1 - w_3\|_{\mathbb{E}}\}i$$

ve

$$e(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_2) = \max\{\|v_3 - v_2\|_{\mathbb{E}}, \|w_3 - w_2\|_{\mathbb{E}}\}i$$

olmak üzere;

$$\max\{\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}}, \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}\}i \leq \max\{\|v_1 - v_3\|_{\mathbb{E}}, \|w_1 - w_3\|_{\mathbb{E}}\}i + \max\{\|v_3 - v_2\|_{\mathbb{E}}, \|w_3 - w_2\|_{\mathbb{E}}\}i$$

olduğu gösterilmelidir. Bunun için aşağıdaki durumların incelenmesi gerekmektedir;

$$\textbf{i.} \quad \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}} \leq \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}}, \|w_1 - w_3\|_{\mathbb{E}} \leq \|v_1 - v_3\|_{\mathbb{E}} \text{ ve } \|w_3 - w_2\|_{\mathbb{E}} \leq \|v_3 - v_2\|_{\mathbb{E}} \text{ ise}$$

$$\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} \leq \|v_1 - v_3\|_{\mathbb{E}} + \|v_3 - v_2\|_{\mathbb{E}}$$

olup

$$\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}}i \leq \|v_1 - v_3\|_{\mathbb{E}}i + \|v_3 - v_2\|_{\mathbb{E}}i$$

olur. Böylece $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) \leq e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3) + e(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_2)$ elde edilir.

$$\textbf{ii.} \quad \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}} \leq \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}}, \|w_1 - w_3\|_{\mathbb{E}} \leq \|v_1 - v_3\|_{\mathbb{E}} \text{ ve } \|v_3 - v_2\|_{\mathbb{E}} \leq \|w_3 - w_2\|_{\mathbb{E}} \text{ ise}$$

$$\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} \leq \|v_1 - v_3\|_{\mathbb{E}} + \|v_3 - v_2\|_{\mathbb{E}}$$

$$\leq \|v_1 - v_3\|_{\mathbb{E}} + \|w_3 - w_2\|_{\mathbb{E}}$$

olup

$$\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}}i \leq \|v_1 - v_3\|_{\mathbb{E}}i + \|w_3 - w_2\|_{\mathbb{E}}i$$

olur. Böylece $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) \leq e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3) + e(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_2)$ elde edilir.

$$\textbf{iii.} \quad \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}} \leq \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}}, \|v_1 - v_3\|_{\mathbb{E}} \leq \|w_1 - w_3\|_{\mathbb{E}} \text{ ve } \|w_3 - w_2\|_{\mathbb{E}} \leq \|v_3 - v_2\|_{\mathbb{E}} \text{ ise}$$

$$\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} \leq \|v_1 - v_3\|_{\mathbb{E}} + \|v_3 - v_2\|_{\mathbb{E}}$$

$$\leq \|w_1 - w_3\|_{\mathbb{E}} + \|v_3 - v_2\|_{\mathbb{E}}$$

olup

$$\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}}i \leq \|w_1 - w_3\|_{\mathbb{E}}i + \|v_3 - v_2\|_{\mathbb{E}}i$$

olur. Böylece $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) \leq e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3) + e(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_2)$ elde edilir.

$$\textbf{iv.} \quad \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}} \leq \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}}, \|v_1 - v_3\|_{\mathbb{E}} \leq \|w_1 - w_3\|_{\mathbb{E}} \text{ ve } \|v_3 - v_2\|_{\mathbb{E}} \leq \|w_3 - w_2\|_{\mathbb{E}} \text{ ise}$$

$$\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} \leq \|v_1 - v_3\|_{\mathbb{E}} + \|v_3 - v_2\|_{\mathbb{E}}$$

$$\leq \|w_1 - w_3\|_{\mathbb{E}} + \|w_3 - w_2\|_{\mathbb{E}}$$

olup

$$\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} i \leq \|w_1 - w_3\|_{\mathbb{E}} i + \|w_3 - w_2\|_{\mathbb{E}} i$$

olur. Böylece $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) \leq e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3) + e(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_2)$ elde edilir.

v. $\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} \leq \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}, \|w_1 - w_3\|_{\mathbb{E}} \leq \|v_1 - v_3\|_{\mathbb{E}}$ ve $\|w_3 - w_2\|_{\mathbb{E}} \leq \|v_3 - v_2\|_{\mathbb{E}}$ ise

$$\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}} \leq \|w_1 - w_3 + w_3 - w_2\|_{\mathbb{E}}$$

$$\leq \|w_1 - w_3\|_{\mathbb{E}} + \|w_3 - w_2\|_{\mathbb{E}}$$

$$\leq \|v_1 - v_3\|_{\mathbb{E}} + \|v_3 - v_2\|_{\mathbb{E}}$$

olup

$$\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}} i \leq \|v_1 - v_3\|_{\mathbb{E}} i + \|v_3 - v_2\|_{\mathbb{E}} i$$

olur. Böylece $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) \leq e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3) + e(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_2)$ elde edilir.

vi. $\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} \leq \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}, \|w_1 - w_3\|_{\mathbb{E}} \leq \|v_1 - v_3\|_{\mathbb{E}}$ ve $\|v_3 - v_2\|_{\mathbb{E}} \leq \|w_3 - w_2\|_{\mathbb{E}}$ ise

$$\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}} \leq \|w_1 - w_3\|_{\mathbb{E}} + \|w_3 - w_2\|_{\mathbb{E}}$$

$$\leq \|v_1 - v_3\|_{\mathbb{E}} + \|w_3 - w_2\|_{\mathbb{E}}$$

olup

$$\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}} i \leq \|v_1 - v_3\|_{\mathbb{E}} i + \|w_3 - w_2\|_{\mathbb{E}} i$$

olur. Böylece $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) \leq e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3) + e(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_2)$ elde edilir.

vii. $\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} \leq \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}, \|v_1 - v_3\|_{\mathbb{E}} \leq \|w_1 - w_3\|_{\mathbb{E}}$ ve $\|w_3 - w_2\|_{\mathbb{E}} \leq \|v_3 - v_2\|_{\mathbb{E}}$ ise

$$\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}} \leq \|w_1 - w_3\|_{\mathbb{E}} + \|w_3 - w_2\|_{\mathbb{E}}$$

$$\leq \|w_1 - w_3\|_{\mathbb{E}} + \|v_3 - v_2\|_{\mathbb{E}}$$

olup

$$\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}} i \leq \|w_1 - w_3\|_{\mathbb{E}} i + \|v_3 - v_2\|_{\mathbb{E}} i$$

olur. Böylece $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) \leq e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3) + e(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_2)$ elde edilir.

viii. $\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} \leq \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}, \|v_1 - v_3\|_{\mathbb{E}} \leq \|w_1 - w_3\|_{\mathbb{E}}$ ve $\|v_3 - v_2\|_{\mathbb{E}} \leq \|w_3 - w_2\|_{\mathbb{E}}$ ise

$$\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}} \leq \|w_1 - w_3\|_{\mathbb{E}} + \|w_3 - w_2\|_{\mathbb{E}}$$

$$\leq \|w_1 - w_3\|_{\mathbb{E}} + \|w_3 - w_2\|_{\mathbb{E}}$$

olup

$$\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}} i \leq \|w_1 - w_3\|_{\mathbb{E}} i + \|w_3 - w_2\|_{\mathbb{E}} i$$

olur. Böylece $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) \leq e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3) + e(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_2)$ elde edilir. Böylece $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli bir metrik uzaydır.

Örnek 3.5: $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere;

$$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = i \|\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2\|_{\mathbb{E}}$$

biçiminde tanımlanan $e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$ dönüşümü bir metriktir ve $(\mathbb{E}_p, e)$ bir eliptik değerli metrik uzaydır. e dönüşümünün bir metrik olduğunu göstermek için $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ ve $\mathbf{M}_3$ metrik aksiyomlarının sağlandığı gösterilmelidir.

$\mathbf{M}_1$) $\forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{E}_p$ için $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \theta \Leftrightarrow \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ olduğu gösterilmelidir.

$\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$ ve $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2$ ve $p < 0$ olmak üzere;

$$i \|\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2\|_{\mathbb{E}} = \theta \Rightarrow i\sqrt{(v_1 - v_2)^2 - p(w_1 - w_2)^2} = 0 + 0i$$

$$\Rightarrow \sqrt{(v_1 - v_2)^2 - p(w_1 - w_2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \wedge w_1 - w_2 = 0$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2 \wedge w_1 = w_2$$

$$\Rightarrow \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$$

elde edilir.

$\mathbf{M}_2$) $\forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{E}_p$ için $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = e(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1)$ olduğunu gösterilmelidir.

$\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$ ve $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2$ olmak üzere;

$$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = i \|\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2\|_{\mathbb{E}} = i\sqrt{(v_1 - v_2)^2 - p(w_1 - w_2)^2}$$

$$= i\sqrt{(v_2 - v_1)^2 - p(w_2 - w_1)^2}$$

$$= i \|\mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_1\|_{\mathbb{E}}$$

$$= e(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1)$$

elde edilir.

$\mathbf{M}_3$) $\forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3 \in \mathbb{E}_p$ için $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) \leq e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3) + e(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_2)$ olmalıdır.

$\mathcal{T}_1 = v_1 - iw_1, \mathcal{T}_2 = v_2 - iw_2$ ve $\mathcal{T}_3 = v_3 - iw_3$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} i \|\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2\|_{\mathbb{E}} &= i\sqrt{(v_1 - v_2)^2 - p(w_1 - w_2)^2} \\ &= i\sqrt{(v_1 - v_3 + v_3 - v_2)^2 - p(w_1 - w_3 + w_3 - w_2)^2} \\ &\leq i\sqrt{(v_1 - v_3)^2 + (v_3 - v_2)^2 - p[(w_1 - w_3)^2 + (w_3 - w_2)^2]} \\ &\leq i\sqrt{[(v_1 - v_3)^2 + p(w_1 - w_3)^2] + [(v_3 - v_2)^2 - p(w_3 - w_2)^2]} \\ &\leq \sqrt{(v_1 - v_3)^2 + p(w_1 - w_3)^2} + \sqrt{(v_3 - v_2)^2 - p(w_3 - w_2)^2} \\ &\leq e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3) + e(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli bir metrik uzaydır.

Örnek 3.6: $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1, \mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere;

$$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|p|}\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}$$

biçiminde tanımlanan $e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$ dönüşümü bir metriktir ve $(\mathbb{E}_p, e)$ bir eliptik değerli metrik uzaydır. e dönüşümünün bir metrik olduğunu göstermek için $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ ve $\mathbf{M}_3$ metrik aksiyomlarının sağlandığı gösterilmelidir.

$\mathbf{M}_1$) $\forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{E}_p$ için $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \theta \Leftrightarrow \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ olduğu gösterilmelidir.

$\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$ ve $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \theta &\Rightarrow \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|p|}\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}} = 0 + i0 \\ &\Rightarrow \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} = 0 \wedge \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \wedge w_1 - w_2 = 0$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2 \wedge w_1 = w_2$$

$$\Rightarrow \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$$

elde edilir. Tersine $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ iken $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \theta$ olduğu açıktır.

M₂) $\forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{E}_p$ için $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = e(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1)$ olduğu gösterilmelidir.

$\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$ ve $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) &= \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|p|} \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}} \\ &= \|v_2 - v_1\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|p|} \|w_2 - w_1\|_{\mathbb{E}} \\ &= e(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1) \end{aligned}$$

elde edilir.

M₃) $\forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3 \in \mathbb{E}_p$ için $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) \leq e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3) + e(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_2)$ olduğunu gösterilmelidir. $\mathcal{T}_1 = v_1 - iw_1, \mathcal{T}_2 = v_2 - iw_2$ ve $\mathcal{T}_3 = v_3 - iw_3$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) &= \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|p|} \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}} \\ &= \|v_1 - v_3 + v_3 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|p|} \|w_1 - w_3 + w_3 - w_2\|_{\mathbb{E}} \\ &\leq \|v_1 - v_3\|_{\mathbb{E}} + \|v_3 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|p|} (\|w_1 - w_3\|_{\mathbb{E}} + \|w_3 - w_2\|_{\mathbb{E}}) \\ &\leq [\|v_1 - v_3\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|p|} \|w_1 - w_3\|_{\mathbb{E}}] + [\|v_3 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|p|} \|w_3 - w_2\|_{\mathbb{E}}] \\ &\leq e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3) + e(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli bir metrik uzaydır.

4. BAZI ELİPTİK DEĞERLİ METRİK UZAYLARDA ÇEMBER ÖRNEKLERİ

Bu bölümde 3. bölümde tanımlanan eliptik değerli metrik uzaylarda bazı çember örnekleri verilmektedir.

Tanım 4.1: $\mathbb{E}_p$ eliptik sayılar kümesi olmak üzere pozitif eliptik sayılar kümesi $\mathbb{E}_p^+$ ile gösterilir ve $\mathbb{E}_p^+ = \{\mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid \theta \preccurlyeq \mathcal{T}\}$ biçiminde tanımlanır.

Tanım 4.2: Ξ boş olmayan bir küme, $\mathbb{E}_p$ eliptik sayılar kümesi, $e: \Xi \times \Xi \rightarrow \mathbb{E}_p$ bir metrik, (Ξ, e) eliptik değerli bir metrik uzay, $\mathcal{T}_0 = v_0 + iw_0 \in \mathbb{E}_p$ ve $r = r_1 + ir_2 \in \mathbb{E}_p^+ \cup \{\theta\}$ olmak üzere $\mathcal{T}_0$ dan r birim uzaklıktaki noktaların kümesi eliptik değerli bir çember olarak isimlendirilir ve $\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ veya $\wp_{(v_0, w_0), (r_1, r_2)}^{\mathbb{E}_p}$ biçiminde gösterilir.

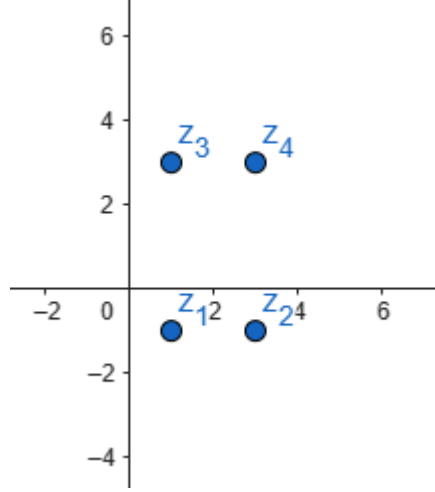
Örnek 4.1: Örnek 3.1 ‘de tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın. $e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$, $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere;

$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}$ biçiminde tanımlanmaktadır.

$\mathcal{T} = x + iy$, $\mathcal{T}_0 = 2 + i$, $r = 1 + 2i$ olmak üzere $\mathcal{T}_0$ merkezli r yarıçaplı $\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi

$$\begin{aligned} \wp_{(2,1),(1,2)}^{\mathbb{E}_p} &= \{\mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = r\} \\ &= \{\mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid \|x - 2\|_{\mathbb{E}} + i \|y - 1\|_{\mathbb{E}} = 1 + 2i\} \\ &= \{\mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid x \in \{1, 3\} \text{ ve } y \in \{-1, 3\}\} \\ &= \{1 - i, 3 - i, 1 + 3i, 3 + 3i\} \end{aligned}$$

biçimindedir.



Şekil 4.1.Düzlemde $\wp_{(2,1),(1,2)}^{\mathbb{E}_p}$.

Örnek 4.2: Örnek 3.1 de tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın.

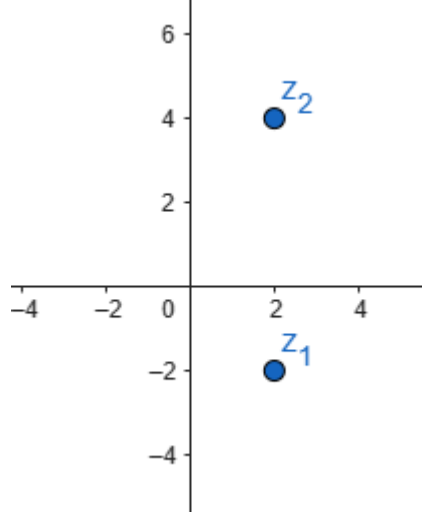
$e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$, $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere;

$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}$ biçiminde tanımlanmaktadır.

$\mathcal{T} = x + yi$, $\mathcal{T}_0 = 2 + i$, $r = 3i$ alınırsa $\mathcal{T}_0$ merkezli r yarıçaplı $\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi

$$\begin{aligned} \wp_{(2,1),(0,3)}^{\mathbb{E}_p} &= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = r \} \\ &= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid \|x - 2\|_{\mathbb{E}} + i \|y - 1\|_{\mathbb{E}} = 3i \} \\ &= \{2 + 4i, 2 - 2i\} \end{aligned}$$

biçimindedir.



Şekil 4.2. Düzlemde $\mathcal{O}_{(2,1),(0,3)}^{\mathbb{E}_p}$.

Örnek 4.3: Örnek 3.1 de tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın.

$e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$, $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere;

$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}$ biçiminde tanımlanmaktadır.

$\mathcal{T} = x + iy$, $\mathcal{T}_0 = 3 + 4i$, $r = 2i$ olmak üzere $\mathcal{T}_0$ merkezli r yarıçaplı $\mathcal{O}_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi

$$\mathcal{O}_{(3,4),2}^{\mathbb{E}_p} = \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = r \}$$

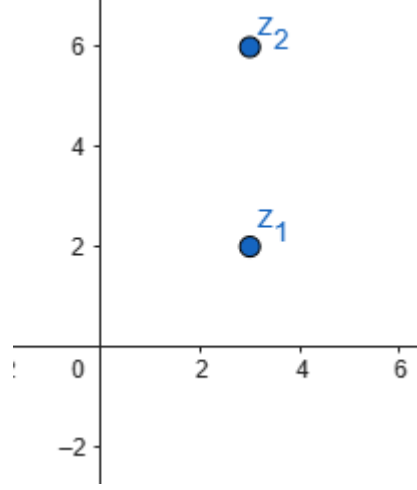
$$= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid \|x - 3\|_{\mathbb{E}} + i \|y - 4\|_{\mathbb{E}} = 2i \}$$

$$= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid \sqrt{(x - 3)^2} + i \sqrt{(y - 4)^2} = 2i \}$$

$$= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid |x - 3| + i|y - 4| = 2i \}$$

$$= \{3 + 2i, 3 + 6i\}$$

biçimindedir.

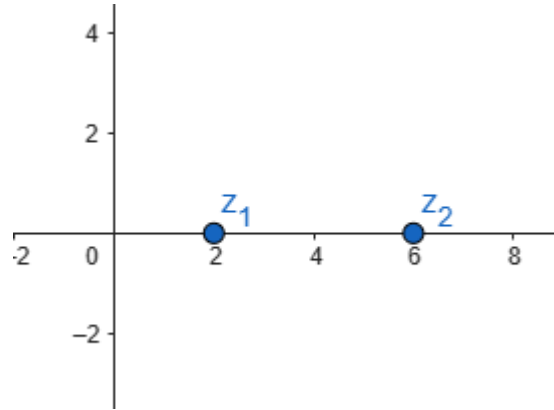


Şekil 4.3. Düzlemde $\wp_{(3,4),(0,2)}^{\mathbb{E}_p}$.

Örnek 4.4: Örnek 3.2 de tanımlanan $(\mathbb{R}, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın. $e: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_p$, $\mathcal{T}_1 = v_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere; $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = i | \mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2 |$ biçiminde tanımlanmaktadır. $\mathcal{T} = x$, $\mathcal{T}_0 = 4$, $r = 2i$ olmak üzere $\mathcal{T}_0$ merkezli r yarıçaplı $\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{R}}$ çemberi

$$\begin{aligned} \wp_{(4,0),(0,2)}^{\mathbb{E}_p} &= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{R} \mid e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = r \} \\ &= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{R} \mid i|x - 4| = 2i \} \\ &= \{2, 6\} \end{aligned}$$

biçimindedir.

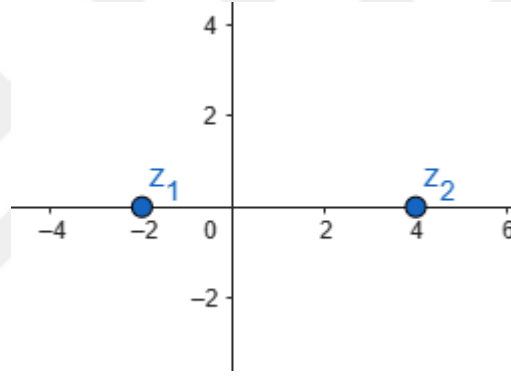


Şekil 4.4. Düzlemde $\wp_{(4,0),(0,2)}^{\mathbb{E}_p}$.

Örnek 4.5: Örnek 3.2 de tanımlanan $(\mathbb{R}, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın. $e: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_p$, $\mathcal{T}_1 = v_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere; $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = i | \mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2 |$ biçiminde tanımlanmaktadır. $\mathcal{T} = x$, $\mathcal{T}_0 = 1$, $r = 3i$ olmak üzere $\mathcal{T}_0$ merkezli r yarıçaplı $\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{R}}$ çemberi

$$\begin{aligned} \wp_{(1,0),(0,3)}^{\mathbb{E}_p} &= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{R} \mid e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = r \} \\ &= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{R} \mid i|x - 1| = 3i \} \\ &= \{-2, 4\} \end{aligned}$$

biçimindedir.

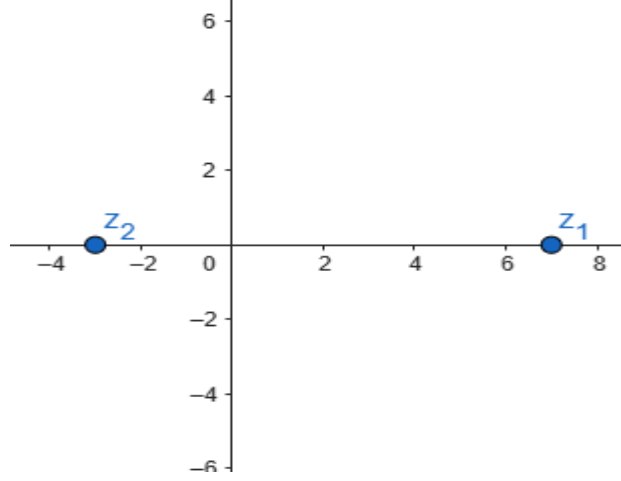


Şekil 4.5. Düzlemde $\wp_{(1,0),(0,3)}^{\mathbb{E}_p}$.

Örnek 4.6: Örnek 3.2 de tanımlanan $(\mathbb{R}, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın. $e: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_p$, $\mathcal{T}_1 = v_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere; $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = i | \mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2 |$ biçiminde tanımlanmaktadır. $\mathcal{T} = x + yi$, $\mathcal{T}_0 = 2$, $r = 5i$ olmak üzere $\mathcal{T}_0$ merkezli r yarıçaplı $\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi

$$\begin{aligned} \wp_{(2,0),(0,5)}^{\mathbb{E}_p} &= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{R} \mid e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = r \} \\ &= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{R} \mid i|x - 2| = 5i \} \\ &= \{7, -3\} \end{aligned}$$

biçimindedir.



Şekil 4.6. Düzlemde $\wp_{(2,0),(0,5)}^{\mathbb{E}_p}$.

Örnek 4.7: Örnek 3.3 de tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın.

$e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$, $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere;

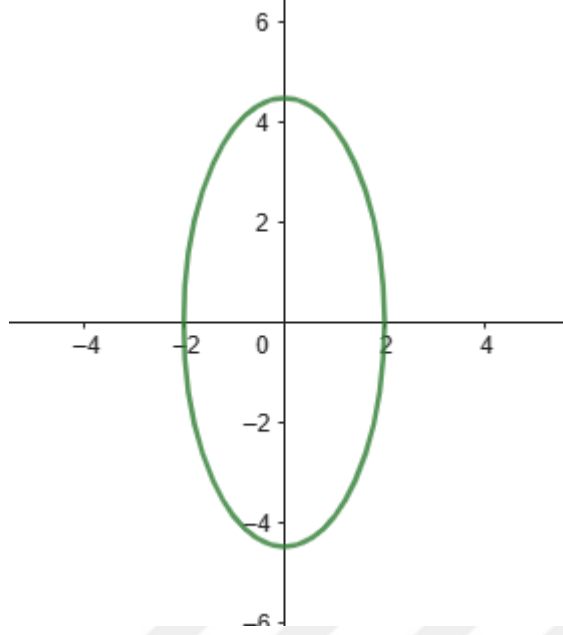
$e(\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2) = \|\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2\|_{\mathbb{E}} e^{i\theta p}$, $\theta p \in \left[0, \frac{\pi}{2\sqrt{|p|}}\right]$ biçiminde tanımlanmaktadır.

$\mathcal{T} = x + iy$, $\mathcal{T}_0 = 0 + i0$, $r = 2 + i0$ ve $p = -\frac{1}{5}$ olmak üzere $\mathcal{T}_0$ merkezli r yarıçaplı

$\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi

$$\begin{aligned}
 \wp_{(0,0),(2,0)}^{\mathbb{E}_p} &= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = r \} \\
 &= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid \|\mathcal{T} - \mathcal{T}_0\|_{\mathbb{E}} e^{i\theta p} = r \} \\
 &= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid \|x + iy\|_{\mathbb{E}} e^{i\theta p} = 2 e^{i\theta p} \} \\
 &= \left\{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid \sqrt{x^2 - p y^2} = 2, p = -\frac{1}{5} \right\} \\
 &= \left\{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{20} = 1 \right\}
 \end{aligned}$$

biçimindedir.



Şekil 4.7. Düzlemde $\wp_{(0,0),(2,0)}^{\mathbb{E}_p}$.

Örnek 4.8: Örnek 3.5 de tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın.

$e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$, $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere;

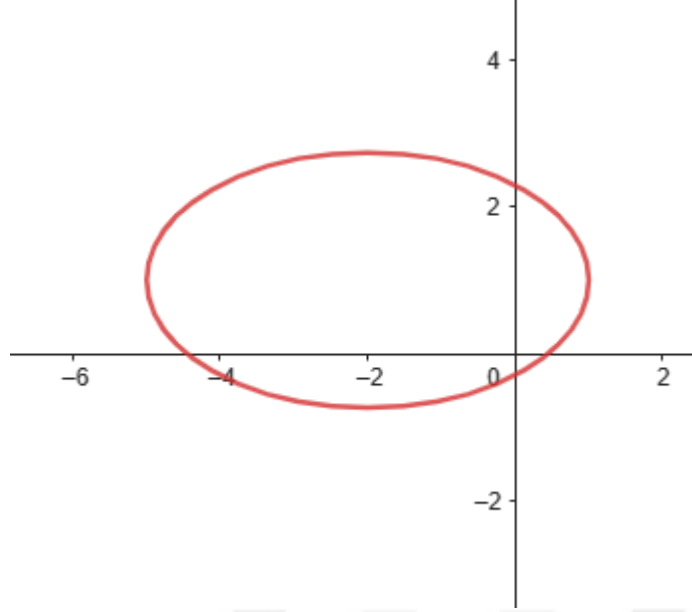
$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = i\|\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2\|_{\mathbb{E}}$, $p < 0$ biçiminde tanımlanmaktadır.

$\mathcal{T} = x + iy$, $\mathcal{T}_0 = -2 + i$, $r = 3i$ ve $p = -3$ olmak üzere $\mathcal{T}_0$ merkezli r yarıçaplı

$\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi

$$\begin{aligned}
 \wp_{(-2,1),(0,3)}^{\mathbb{E}_p} &= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = r \} \\
 &= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid \|(x - (-2)) + (y - 1)i\|_{\mathbb{E}} = 3i \} \\
 &= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid i\sqrt{(x + 2)^2 - (-3)(y - 1)^2} = 3i \} \\
 &= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid (x + 2)^2 + 3(y - 1)^2 = 9 \} \\
 &= \left\{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid \frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{3} = 1 \right\}
 \end{aligned}$$

biçimindedir.



Şekil 4.8. Düzlemde $\wp_{(-2,1),(0,3)}^{\mathbb{E}_p}$.

Örnek 4.9: Örnek 3.1 de tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın.

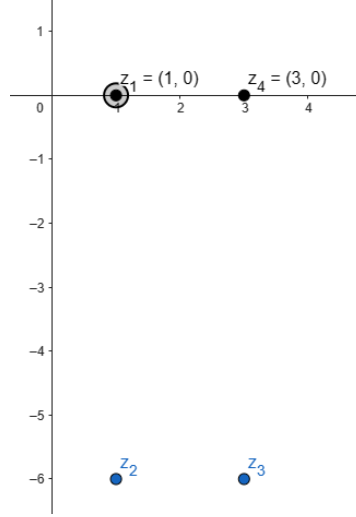
$e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$, $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere;

$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}$ biçiminde tanımlanmaktadır.

$\mathcal{T} = x + iy$, $\mathcal{T}_0 = 2 - 3i$, $r = 1 + 3i$ olmak üzere $\mathcal{T}_0$ merkezli r yarıçaplı $\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi

$$\begin{aligned}
 \wp_{(2,-3),(1,3)}^{\mathbb{E}_p} &= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = r \} \\
 &= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid \|x - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|y - (-3)\|_{\mathbb{E}} = 1 + 3i \} \\
 &= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid \sqrt{(x - 2)^2} + i\sqrt{(y + 3)^2} = 1 + 3i \} \\
 &= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid |x - 2| + i|y - 3| = 1 + 3i \} \\
 &= \{1, 1 - 6i, 3, 3 - 6i\}
 \end{aligned}$$

biçimindedir.



Şekil 4.9. Düzlemde $\mathcal{O}_{(2,-3),(1,3)}^{\mathbb{E}_p}$.

Örnek 4.10: Örnek 3.6 da tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın.

$e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$, $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere;

$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|p|}\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}$, $p < 0$ biçiminde tanımlanmaktadır.

$\mathcal{T} = x + iy$, $\mathcal{T}_0 = 3 - 7i$, $r = 1 + 3i$ ve $p = -9$ olmak üzere $\mathcal{T}_0$ merkezli r yarıçaplı

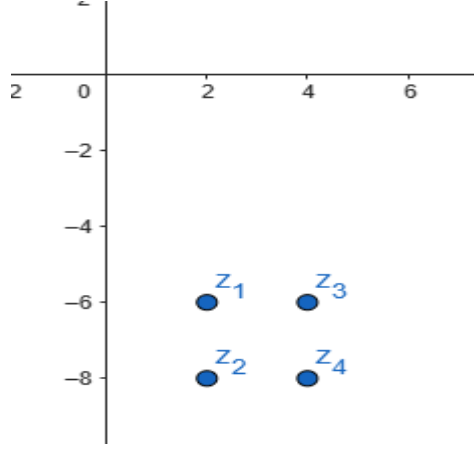
$\mathcal{O}_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi

$$\mathcal{O}_{(3,-7),(1,3)}^{\mathbb{E}_p} = \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = r \}$$

$$= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid \|x - 3\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|p|}\|y - (-7)\|_{\mathbb{E}} = 1 + 3i \}$$

$$= \{2 - 6i, 2 - 8i, 4 - 6i, 4 - 8i\}$$

biçimindedir.



Şekil 4.10. Düzlemde $\wp_{(3,-7),(1,3)}^{\mathbb{E}_p}$.

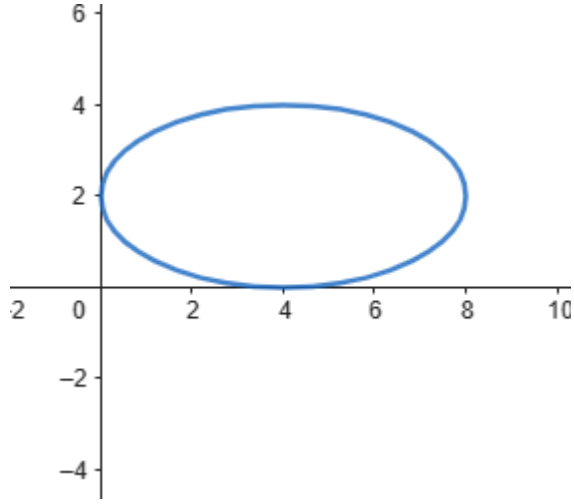
ÖRNEK 4.11: Örnek 3.5’te tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayını ele alalım. $e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$, $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere;

$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = i||\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2||_{\mathbb{E}}$, $p < 0$ biçiminde tanımlanmaktadır.

$\mathcal{T} = x + iy$, $\mathcal{T}_0 = 4 + 2i$, $r = 4i$ ve $p = -4$ olmak üzere $\mathcal{T}_0$ merkezli r yarıçaplı $\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi

$$\begin{aligned}
 \wp_{(4,2),4}^{\mathbb{E}_p} &= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = r \} = \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = r \} \\
 &= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid \|x - 4\|_{\mathbb{E}} + i\|y - 2\|_{\mathbb{E}} = 4i \} \\
 &= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid i\sqrt{(x - 4)^2 - p(y - 2)^2} = 4i \} \\
 &= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid i\sqrt{(x - 4)^2 - (-4)(y - 2)^2} = 4i \} \\
 &= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid i\sqrt{(x - 4)^2 + 4(y - 2)^2} = 4i \} \\
 &= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid (x - 4)^2 + 4(y - 2)^2 = 16 \} \\
 &= \left\{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid \frac{(x - 4)^2}{16} + \frac{(y - 2)^2}{4} = 1 \right\}
 \end{aligned}$$

biçimindedir.



Şekil 4.11. Düzlemde $\mathcal{E}_{(4,2),(0,4)}^{\mathbb{E}_p}$.

Örnek 4.12: Örnek 3.6 da tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayını ele alalım.

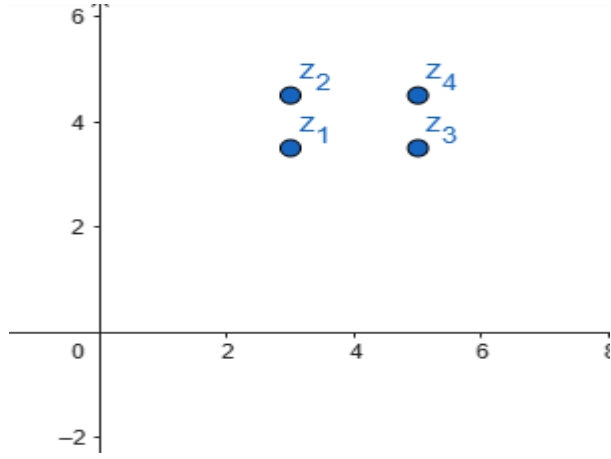
$e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p, \mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1, \mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere;

$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|p|}\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}, p < 0$ biçiminde tanımlanmaktadır.

$\mathcal{T} = x + iy, \mathcal{T}_0 = 5 + 4i, r = 2 + 2i$ ve $p = -16$ olmak üzere $\mathcal{T}_0$ merkezli r yarıçaplı $\mathcal{E}_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{(5,4),(2,2)}^{\mathbb{E}_p} &= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = r \} = \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = r \} \\ &= \left\{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid \|x - 5\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|-16|}\|y - 4\|_{\mathbb{E}} = 2 + 2i \right\} \\ &= \{ \mathcal{T} \in \mathbb{E}_p \mid \|x - 5\|_{\mathbb{E}} + 4i\|y - 4\|_{\mathbb{E}} = 2 + 2i \} \\ &= \left\{ 3 + \frac{9}{2}i, 3 + \frac{7}{2}i, 5 + \frac{9}{2}i, 5 + \frac{7}{2}i \right\} \end{aligned}$$

biçimindedir.



Şekil 4.12. Düzlemde $\wp_{(5,4),(2,2)}^{\mathbb{E}_p}$.

5. ELİPTİK DEĞERLİ METRİK UZAYLARDA SABİT ÇEMBERLERİN VARLIĞI TEOREMLERİ

Bu bölümde metrik uzaylar üzerinde bazı koşullar altında sabit çember teoremleri vereceğiz. Sabit çemberlere sahip olan ya da olmayan bazı dönüşüm örnekleri elde edeceğiz.

Tanım 5. 1: (Ξ, e) bir eliptik değerli metrik uzay ve $\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p} = \{\mathcal{T} \in \Xi: e(\mathcal{T}_0, \mathcal{T}) = r\}$ bir çember olsun. Bir $T: \Xi \rightarrow \Xi$ kendi kendine dönüşümü için $\forall \mathcal{T} \in \wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ için

$T\mathcal{T} = \mathcal{T}$ ise $\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ çemberine T nin sabit çemberi denir.

(1.1) eşitsizliğini kullanılarak sabit bir çember için bir varlık teoremi aşağıda verilmektedir.

Teorem 5.1: (Ξ, e) bir eliptik değerli metrik uzay ve $\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ Ξ üzerindeki herhangi bir çember olsun. $\forall \mathcal{T} \in \Xi$ için;

$$\varphi(\mathcal{T}) = e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) \quad (2.1)$$

olacak biçimde $\varphi: \Xi \rightarrow \mathbb{E}_p^+ \cup \{\theta\}$ dönüşümünü tanımlayalım. Bir $T: \Xi \rightarrow \Xi$ kendi kendine dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde varsa $\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ T nin sabit çemberidir.

$\forall \mathcal{T} \in \wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ için;

$$I_1. e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T})$$

ve

$$I_2. r \leq e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0)$$

dır.

İspat: φ , (2.1) de tanımlanan dönüşüm ve $\mathcal{T} \in \wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ olsun. I_1 koşulunu kullanarak

$$\begin{aligned}
e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) &\leq \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T}) \\
&= e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) - e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) \\
&= r - e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

elde edilir.

I_2 koşulu nedeniyle $T\mathcal{T}$ noktası $\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ çemberinin üzerinde veya dışında bulunur. Dolayısıyla iki durum söz konusudur. $r < e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0)$ ise (2.2) den $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) < \theta$ çelişkisi elde edilir.

Bu nedenle $e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = r$ olup yine (2.2) kullanılarak

$$e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq r - e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = r - r = 0$$

yani $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq 0$ elde edilir ve böylece $T\mathcal{T} = \mathcal{T}$ dur. Dolayısıyla $\forall \mathcal{T} \in \wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ için $T\mathcal{T} = \mathcal{T}$ olup $\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$, T nin bir sabit çemberidir.

Örnek 5.1: Örnek 3.1 de tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın.

$e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$, $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere;

$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}$ biçiminde tanımlanır.

$\wp_{(2,1)(1,2)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi ve $\forall \mathcal{T} = v + iw \in \mathbb{E}_p$ için

$$T\mathcal{T} = \begin{cases} \mathcal{T}, \mathcal{T} \in \wp_{(2,1)(1,2)}^{\mathbb{E}_p} \\ 4 + 4i, \text{ diğ er durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde $T: \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$ kendi kendine dönüşümü tanımlansın. Bu durumda

$$\varphi(\mathcal{T}) = e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) = \|v - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|w - 1\|_{\mathbb{E}}$$

dır.

$I_1. \forall \mathcal{T} \in \wp_{(2,1)(1,2)}^{\mathbb{E}_p}$ için $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T})$ olmalıdır.

$$e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = e(\mathcal{T}, \mathcal{T}) = \theta$$

ve

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T}) &= e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) - e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) \\ &= [\|v - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|w - 1\|_{\mathbb{E}}] - [\|v - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|w - 1\|_{\mathbb{E}}] \\ &= 0 + 0i = \theta \end{aligned}$$

olup $(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T})$ dir. Dolayısıyla I_1 sağlanır.

$I_2. \forall \mathcal{T} \in \wp_{(2,1)(1,2)}^{\mathbb{E}_p}$ için $e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) = e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) = r$ olup $r \leq e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o)$ dir.

Dolayısıyla I_2 sağlar.

Böylece I_1 ve I_2 sağladığından $\wp_{(2,1)(1,2)}^{\mathbb{E}_p}$ T nin bir sabit çemberidir.

Örnek 5.2: Örnek 3.1 de tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın.

$e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$, $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere

$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}$ biçiminde tanımlanır.

$\mathcal{T} = x + yi$, $\mathcal{T}_0 = 2 + i$, $r = 3i$ olmak üzere $\mathcal{T}_0$ merkezli r yarıçaplı $\wp_{(2,1)(0,3)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberini ele alalım ve $T\mathcal{T} = 2 + i$ olacak şekilde $T: \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$ kendi kendine dönüşümünü tanımlansın.

$I_1. \forall \mathcal{T} \in \wp_{(2,1)(0,3)}^{\mathbb{E}_p}$ için $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T})$ olmalıdır.

$$e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = e(\mathcal{T}, 2 + i) = \|v - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|w - 1\|_{\mathbb{E}}$$

ve

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T}) &= e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) - e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) \\ &= e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) - e(2 + i, \mathcal{T}_o) \\ &= \|v - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|w - 1\|_{\mathbb{E}} - [\|2 - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|1 - 1\|_{\mathbb{E}}] \\ &= \|v - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|w - 1\|_{\mathbb{E}} \end{aligned}$$

olup $(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T})$ dir. Dolayısıyla I_1 sağlanır.

I_2 . $\forall \mathcal{T} \in \wp_{(2,1),(0,3)}^{\mathbb{E}_p}$ için $e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = e(2+i, 2+i) = \|2-2\|_{\mathbb{E}} + i\|1-1\|_{\mathbb{E}} = \theta$ ve $r = 3i$ olup $r \leq e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0)$ eşitsizliği doğru olmadığından I_2 aksiyomu sağlamaz. Dolayısıyla $\wp_{(2,1),(0,3)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi T nin bir sabit çemberi değildir.

Örnek 5.3: Örnek 3.1 de tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın. $e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$, $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}$ biçiminde tanımlanır.

$\mathcal{T} = x + iy$, $\mathcal{T}_0 = 3 + 4i$, $r = 2i$ olmak üzere $\mathcal{T}_0$ merkezli r yarıçaplı $\wp_{(3,4),(0,2)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberini ve $T\mathcal{T} = 3 + 7i$ olacak şekilde $T: \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$ kendi kendine dönüşümü tanımlansın.

I_1 . $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T}) \Rightarrow e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) - e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0)$ olmalıdır. Yani

$$\sqrt{(v-3)^2} + i\sqrt{(w-7)^2} \leq \sqrt{(v-3)^2} + i\sqrt{(w-4)^2} - \left[\sqrt{(3-3)^2} + i\sqrt{(7-4)^2} \right]$$

$$|v-3| + i|w-7| \leq |v-3| + i|w-4| - 3i \quad (5.3.1)$$

eşitsizliği sağlamalıdır.

$\mathcal{T} = 3 + 2i$ (5.3.1) eşitsizliğinden yerine yazılırsa $5i \leq -i$ olup $\mathcal{T} = 3 + 2i$ için I_1 aksiyomu için sağlamaz.

Benzer olarak $\mathcal{T} = 3 + 6i$ için (5.3.1) eşitsizliğinde yerine yazılırsa $i \leq -i$

olup $\mathcal{T} = 3 + 6i$ için I_1 aksiyomu için sağlamaz. Bu durumda I_1 aksiyomu sağlamamaktadır.

I_2 . $r \leq e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0)$ olmalıdır. $r = 2i$ ve $e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = e(3+7i, 3+4i) = 3i$ olup

$r \leq e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0)$ eşitsizliği dolayısıyla I_2 aksiyomu sağlamaktadır. Bu durumda I_2 I_1 aksiyomu sağlandığı halde, I_1 aksiyomunu sağlamadığından $\wp_{(3,4),(0,2)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi T nin bir sabit çemberi değildir.

Örnek 5.4: Örnek 3.2 de tanımlanan $(\mathbb{R}, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın. $e: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_p$, $T_1 = v_1$, $T_2 = v_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere; $e(T_1, T_2) = i |T_1 - T_2|$ biçiminde tanımlanmaktadır.

$T_0 = 4$, $r = 2i$ olmak üzere T_0 merkezli r yarıçaplı $\wp_{(4,0),(0,2)}^{\mathbb{R}}$ çemberini ele alınsın ve $\forall T \in \wp_{(4,0),(0,2)}^{\mathbb{R}}$ için;

$$T\mathcal{T} = \begin{cases} T, T \in \wp_{T_0, r}^{\mathbb{R}} \\ 5, \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olacak şekilde $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kendi kendine dönüşümü tanımlansın.

I_1 . $\forall T \in \wp_{(4,0),(0,2)}^{\mathbb{R}}$ için $e(T, T\mathcal{T}) \leq \varphi(T) - \varphi(T\mathcal{T})$ olmalıdır.

$$e(T, T\mathcal{T}) = e(T, T) = \theta$$

ve

$$\begin{aligned} \varphi(T) - \varphi(T\mathcal{T}) &= e(T, T_0) - e(T\mathcal{T}, T_0) \\ &= e(T, 4) - e(T, 4) \\ &= i|v - 4| - i|v - 4| \\ &= \theta \end{aligned}$$

olup $e(T, T\mathcal{T}) \leq \varphi(T) - \varphi(T\mathcal{T})$ dur. Dolayısıyla **I_1** sağlar.

I_2 . $\forall T \in \wp_{(4,0),(0,2)}^{\mathbb{R}}$ için $e(T\mathcal{T}, T_0) = e(T, T_0) = i|v - 4|$ olup $T = 2$ için $e(T\mathcal{T}, T_0) = 2i$ ve $T = 6$ için $e(T\mathcal{T}, T_0) = 2i$ dir. Ayrıca $r = 2i$ olduğunda

$r \leq e(T\mathcal{T}, T_0)$ olup **I_2** aksiyomu sağlamaktadır. O halde $\wp_{(4,0),(0,2)}^{\mathbb{R}}$ çemberi T nin bir sabit çemberidir.

Örnek 5.5: Örnek 3.2 de tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın. $e: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_p$, $T_1 = v_1$, $T_2 = v_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $e(T_1, T_2) = i |T_1 - T_2|$ biçiminde tanımlanmaktadır.

$\mathcal{T}_0 = 1$, $r = 3i$ olmak üzere $\mathcal{T}_0$ merkezli r yarıçaplı $\wp_{(1,0),(0,3)}^{\mathbb{R}}$ çemberini ele alınsın
ve $\forall \mathcal{T} \in \wp_{(1,0),(0,3)}^{\mathbb{R}}$ için

$$T\mathcal{T} = \begin{cases} 1, \mathcal{T} \in \wp_{(1,0),3}^{\mathbb{R}} \\ 3, \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olacak şekilde $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kendi kendine dönüşümünü tanımlansın.

I_1 . $\forall \mathcal{T} \in \wp_{(1,0),(0,3)}^{\mathbb{R}}$ için $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T})$ olmalıdır.

$$e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = e(\mathcal{T}, 1) = i \mid v - 1 \mid$$

ve

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T}) &= e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) - e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) \\ &= e(\mathcal{T}, 1) - e(1, 1) \\ &= i \mid v - 1 \mid \end{aligned}$$

olup $\mathcal{T} \in \{-2, 4\}$ için $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T})$ eşitsizliği yani **I_1** koşulu sağlar.

I_2 . $\forall \mathcal{T} \in \wp_{(1,0),(0,3)}^{\mathbb{R}}$ için;

$e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = e(1, 1) = \theta$ olup $r = 3i$ olduğunda $r \leq e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0)$ eşitsizliği doğru olmadığından **I_2** aksiyomu sağlamamaktadır. O halde $\wp_{(1,0),(0,3)}^{\mathbb{R}}$ T nin bir sabit çemberi değildir.

Örnek 5.6: Örnek 3.2 de tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın.

$e: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_p$, $\mathcal{T}_1 = v_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = i \mid \mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2 \mid$ biçiminde tanımlanmaktadır. $\mathcal{T}_0 = 2$, $r = 5i$ olmak üzere $\wp_{(2,0),(0,5)}^{\mathbb{R}}$ çemberini ele alalım ve $T\mathcal{T} = 2$ olacak şekilde $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kendi kendine dönüşümünü tanımlansın.

I_1 . $\forall \mathcal{T} \in \wp_{(2,0),(0,5)}^{\mathbb{R}}$ için $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T})$ olmalıdır.

$$e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = e(\mathcal{T}, 2) = i \mid v - 2 \mid$$

ve

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T}) &= e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) - e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) \\
&= e(\mathcal{T}, 2) - e(2, 2) \\
&= i|v - 2|
\end{aligned}$$

olup $\mathcal{T} \in \{7, -3\}$ için $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T})$ eşitsizliği yani I_1 koşulu sağlar.

$I_2. \forall \mathcal{T} \in \wp_{(2,0),(0,5)}^{\mathbb{R}}$ için $e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) = e(2, 2) = \theta$ olup $r = 6i$ olduğunda

$r \leq e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o)$ eşitsizliği doğru olmadığından I_2 aksiyomu sağlamamaktadır. O halde $\wp_{(2,0),(0,5)}^{\mathbb{R}}$ T nin bir sabit çemberi değildir.

Örnek 5.7: Örnek 3.2 de tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın. $e: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_p$, $\mathcal{T}_1 = v_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = i | \mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2 |$ biçiminde tanımlanmaktadır. $\mathcal{T}_0 = 1$, $r = 3i$ olmak üzere $\mathcal{T}_0$ merkezli r yarıçaplı $\wp_{(1,0),(0,3)}^{\mathbb{R}}$ çemberi ele alınsın ve $T\mathcal{T} = 5$ olacak şekilde $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kendi kendine dönüşümünü tanımlansın.

$I_1. \forall \mathcal{T} \in \wp_{(1,0),(0,3)}^{\mathbb{R}}$ için $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T})$ olmalıdır.

$$\begin{aligned}
e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) &\leq e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) - e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) \Rightarrow e(\mathcal{T}, 5) \leq e(\mathcal{T}, 1) - e(5, 1) \\
&\Rightarrow i|v - 5| \leq i|v - 1| - 4i \quad (5.7.1)
\end{aligned}$$

olup

$\mathcal{T} = -2$ (5.7.1) denklemde yerine yazılırsa $7i \leq i$ elde edilip $\mathcal{T} = -2$ için I_1 aksiyomu sağlamaz.

$\mathcal{T} = 4$ (5.7.1) denklemde yerine yazılırsa $i \leq -i$ elde edilip $\mathcal{T} = 4$ için I_1 aksiyomu sağlamaz.

$I_2. \forall \mathcal{T} \in \wp_{(1,0),(0,3)}^{\mathbb{R}}$ için $e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) = e(5, 1) = 4i$ olup $r = 3i$ olduğunda

$r \leq e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o)$ eşitsizliği sağlar dolayısıyla I_2 aksiyomu sağlamaktadır. O halde $\wp_{(1,0),(0,3)}^{\mathbb{R}}$ çemberini T nin bir sabit çemberi değildir.

Örnek 5.8: Örnek 3.5 de tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın.

$e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$, $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere

$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = i\|\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2\|_{\mathbb{E}}$, $p < 0$ biçiminde tanımlanmaktadır.

$\mathcal{T}_0 = -2 + i$, $r = 3i$ ve $p = -3$ olmak üzere $\mathcal{T}_0$ merkezli r yarıçaplı $\wp_{(-2,1),(0,3)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi ele alınsın ve

$$T\mathcal{T} = \begin{cases} \mathcal{T}, \mathcal{T} \in \wp_{(-2,1),(0,3)}^{\mathbb{E}_p} \\ 5 + i, \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olacak şekilde $T: \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$ kendi kendine dönüşümünü tanımlansın.

I_1 . $\forall \mathcal{T} \in \wp_{(-2,1),(0,5)}^{\mathbb{R}}$ için $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T})$ olmalıdır.

$$e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = e(\mathcal{T}, \mathcal{T}) = \theta$$

ve

$$\varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T}) = e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) - e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o)$$

$$= e(\mathcal{T}, -2 + i) - e(\mathcal{T}, -2 + i)$$

$$= \theta$$

olup $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T})$ eşitsizliği yani I_1 koşulu sağlar.

I_2 . $\forall \mathcal{T} \in \wp_{(-2,1),(0,5)}^{\mathbb{R}}$ için $e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) = e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_o)$

$$= i\sqrt{(v+2)^2 + 3(w-1)^2}$$

olup $r = 3i$ için $r \leq e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o)$ eşitsizliği yani I_2 koşulu sağlanır. Bu durumda $\wp_{(-2,1),(0,3)}^{\mathbb{R}}$ çemberini T nin bir sabit çemberidir.

Örnek 5.9: Örnek 3.5 de tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın.

$e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$, $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere

$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = i\|\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2\|_{\mathbb{E}}$, $p < 0$ biçiminde tanımlanmaktadır.

$\mathcal{T}_0 = -2 + i$, $r = 3i$ ve $p = -3$ olmak üzere $\mathcal{T}_0$ merkezli r yarıçaplı $\wp_{(-2,1),(0,3)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi ele alınsın ve $T\mathcal{T} = 2 + 5i$ olacak şekilde $T: \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$ kendi kendine dönüşümünü tanımlansın.

I_1 . $\forall \mathcal{T} = v + iw \in \wp_{(-2,1),(0,3)}^{\mathbb{R}}$ için $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T})$ olmalıdır.

$$e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = e(\mathcal{T}, 2 + 5i) = i\sqrt{(v-2)^2 + 3(w-5)^2}$$

ve

$$\varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T}) = e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) - e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0)$$

$$= i\sqrt{(v-2)^2 + 3(w-5)^2} - 8i$$

$$= 5i$$

olup $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T})$ eşitsizliği sağlamadığından I_1 koşulu sağlanmamaktadır.

I_2 . $\forall \mathcal{T} = v + iw \in \wp_{(-2,1),(0,3)}^{\mathbb{R}}$ için $e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = e(2 + 5i, -2 + i) = 8i$ ve $r = 3i$ olup $r \leq e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0)$ eşitsizliği doğru olup I_2 koşulu sağlamaktadır. Dolayısıyla $\wp_{(-2,1),(0,3)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberini T nin bir sabit çemberi değildir.

Örnek 5.10: Örnek 3.6 da tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayını ele alınsın.

$e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$, $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere

$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|p|}\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}$, $p < 0$ biçiminde tanımlanmaktadır.

$\mathcal{T}_0 = 2 - 3i$, $r = 1 + 12i$ ve $p = -9$ olmak üzere $\mathcal{T}_0$ merkezli r yarıçaplı $\wp_{(2,-3),(1,12)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi ele alınsın ve

$$T\mathcal{T} = \begin{cases} \mathcal{T}, \mathcal{T} \in \wp_{(2,-3),(1,12)}^{\mathbb{E}_p} \\ 4 + 3i, \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olacak şekilde $T: \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$ kendi kendine dönüşümünü tanımlansın. Buradan aksiyomlarının sağlandığını bakalım.

$I_1. \forall \mathcal{T} = v + iw \in \wp_{(2,-3),(1,12)}^{\mathbb{R}}$ için $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T})$ olmalıdır.

$$e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = e(\mathcal{T}, \mathcal{T}) = \theta$$

ve

$$\varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T}) = e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) - e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o)$$

$$= \|v - 2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|-9|}\|w + 3\|_{\mathbb{E}} - \|v - 2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|-9|}\|w + 3\|_{\mathbb{E}}$$

elde edilir. Böylece

$$\theta \leq \|v - 2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|-9|}\|w + 3\|_{\mathbb{E}} - \|v - 2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|-9|}\|w + 3\|_{\mathbb{E}} \quad (5.10.1)$$

i. $\mathcal{T} = 1 + i$ (5.10.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\theta \leq \|1 - 2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|-9|}\|1 + 3\|_{\mathbb{E}} - \|1 - 2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|-9|}\|1 + 3\|_{\mathbb{E}} \Rightarrow \theta \leq \theta$$

olup $\mathcal{T} = 1 + i$ için I_1 koşulu sağlamaktadır.

ii. $\mathcal{T} = 1 - 7i$ (5.10.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\theta \leq \|1 - 2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|-9|}\|-7 + 3\|_{\mathbb{E}} - \|1 - 2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|-9|}\|-7 + 3\|_{\mathbb{E}} \Rightarrow \theta \leq \theta$$

olup $\mathcal{T} = 1 - 7i$ için I_1 koşulu sağlamaktadır.

iii. $\mathcal{T} = 3 + i$ (5.10.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\theta \leq \|3 - 2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|-9|}\|1 + 3\|_{\mathbb{E}} - \|3 - 2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|-9|}\|1 + 3\|_{\mathbb{E}} \Rightarrow \theta \leq \theta$$

olup $\mathcal{T} = 3 + i$ için I_1 koşulu sağlamaktadır.

iv. $\mathcal{T} = 3 - 7i$ (5.10.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\theta \leq \|3 - 2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|-9|}\|-7 + 3\|_{\mathbb{E}} - \|3 - 2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|-9|}\|-7 + 3\|_{\mathbb{E}} \Rightarrow \theta \leq \theta$$

olup $\mathcal{T} = 3 - 7i$ için I_1 koşulu sağlamaktadır.

Böylece I_1 koşulu sağlamaktadır.

I_2 . $\forall \mathcal{T} = v + iw \in \mathcal{P}_{(2,-3),(1,12)}^{\mathbb{R}}$ için

$$e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) = e(\mathcal{T}, 2 - 3i)$$

$$= \|v - 2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|-9|}\|w + 3\|_{\mathbb{E}} - \|v - 2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|-9|}\|w + 3\|_{\mathbb{E}} \quad (5.10.2)$$

ve $r = 1 + 12i$ dir.

i. $\mathcal{T} = 1 + i$ (5.10.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$1 + 12i \leq \|1 - 2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|-9|}\|1 + 3\|_{\mathbb{E}}$$

$$1 + 12i \leq 1 + 12i$$

olup $\mathcal{T} = 1 + i$ için I_2 koşulu sağlamaktadır.

ii. $\mathcal{T} = 1 - 7i$ (5.10.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$1 + 12i \leq \|1 - 2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|-9|}\|-7 + 3\|_{\mathbb{E}}$$

$$1 + 12i \leq 1 + 12i$$

olup $\mathcal{T} = 1 - 7i$ için I_2 koşulu sağlamaktadır.

iii. $\mathcal{T} = 3 + i$ (5.10.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$1 + 12i \leq \|3 - 2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|-9|}\|1 + 3\|_{\mathbb{E}}$$

$$1 + 12i \leq 1 + 12i$$

olup $\mathcal{T} = 3 + i$ için I_2 koşulu sağlamaktadır.

iv. $T = 3 - 7i$ (5.10.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$1 + 12i \leq \|3 - 2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|-9|}\|-7 + 3\|_{\mathbb{E}}$$

$$1 + 12i \leq 1 + 12i$$

olup I_2 aksiyomu sağlamaktadır. O halde I_1 ve I_2 koşulları sağlandığından $\wp_{(2,-3),(1,12)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberini T nin bir sabit çemberidir.

Teorem 5.2: $(\mathbb{E}, e)$ bir metrik uzay ve $\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$, $\mathbb{E}$ deki herhangi bir çember olsun. φ dönüşümü (2.1) deki gibi tanımlansın. Bir $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ kendi kendine dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlarsa, $\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ nin, T nin sabit bir çemberidir.

$\forall \mathcal{T} \in \wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ için;

$$I_1^*. e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(x) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r$$

ve

$$I_2^*. e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) \leq r$$

dir.

İspat: (2.1) de tanımlanan φ dönüşümü dikkate alınsın ve $\mathcal{T} \in \wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ herhangi bir keyfi nokta olsun. I_1^* koşulunu kullanılarak

$$\begin{aligned} e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) &\leq \varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r = e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) - 2r \\ &= e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) - r \end{aligned} \quad (2.3)$$

elde edilir. I_2^* koşulundan $T\mathcal{T}$ noktası $\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ çemberinin üzerinde veya içinde olmalıdır. O halde iki durum söz konusudur. Eğer $e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) < r$ ise (2.3) kullanılarak $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \theta$ çelişkisi elde edilir. Bu nedenle $e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = r$ olmalıdır.

$e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = r$ yine (2.3) kullanılarak;

$$e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) - r = r - r = 0$$

elde edilir ve böylece $T\mathcal{T} = \mathcal{T}$ dir. Sonuç olarak $\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$, T nin sabit bir çemberdir.

Örnek 5.11: Örnek 3.1 de tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın.

$e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$, $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere;

$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}$ biçiminde tanımlanmaktadır.

$\mathcal{T}_0 = 2 - 3i$, $r = 1 + 3i$ olmak üzere $\mathcal{T}_0$ merkezli r yarıçaplı $\wp_{(2,-3),(1,3)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi ele alınsın ve

$$T\mathcal{T} = \begin{cases} \mathcal{T}, \mathcal{T} \in \wp_{(2,-3),(1,3)}^{\mathbb{E}_p} \\ 3 - 2i, \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olacak şekilde $T: \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$ kendi kendine dönüşümünü tanımlansın.

$I_1^*. \forall \mathcal{T} = v + iw \in \wp_{(2,-3),(1,3)}^{\mathbb{E}_p}$ için $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r$ olmalıdır.

$$e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = e(\mathcal{T}, \mathcal{T}) = \theta$$

ve

$$\varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r = e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) - 2r$$

$$= e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) + e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) - 2r$$

$$= \|v - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|w + 3\|_{\mathbb{E}} + \|v - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|w + 3\|_{\mathbb{E}} - 2 - 6i$$

dir. Böylece

$$\theta \leq \|v - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|w + 3\|_{\mathbb{E}} + \|v - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|w + 3\|_{\mathbb{E}} - 2 - 6i \quad (5.11.1)$$

eşitsizliği sağlanmalıdır.

i. $\mathcal{T} = 1$ (5.11.1) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\theta \leq \|1 - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|0 + 3\|_{\mathbb{E}} + \|1 - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|0 + 3\|_{\mathbb{E}} - 2 - 6i$$

$$\theta \leq 1 + 3i + 1 + 3i - 2 - 6i$$

$$\theta \leq \theta$$

olup $\mathcal{T} = 1$ için I_1^* koşulu sağlanmaktadır.

ii. $\mathcal{T} = 3$ (5.11.1) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\theta \leq \|3 - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|0 + 3\|_{\mathbb{E}} + \|3 - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|0 + 3\|_{\mathbb{E}} - 2 - 6i$$

$$\theta \leq 1 + 3i + 1 + 3i - 2 - 6i$$

$$\theta \leq \theta$$

olup $\mathcal{T} = 3$ için I_1^* koşulu sağlanmaktadır.

iii. $\mathcal{T} = 1 - 6i$ (5.11.1) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\theta \leq \|1 - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|-6 + 3\|_{\mathbb{E}} + \|1 - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|-6 + 3\|_{\mathbb{E}} - 2 - 6i$$

$$\theta \leq 1 + 3i + 1 + 3i - 2 - 6i$$

$$\theta \leq \theta$$

olup $\mathcal{T} = 1 - 6i$ için I_1^* koşulu sağlanmaktadır.

iv. $\mathcal{T} = 3 - 6i$ (5.11.1) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\theta \leq \|3 - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|-6 + 3\|_{\mathbb{E}} + \|3 - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|-6 + 3\|_{\mathbb{E}} - 2 - 6i$$

$$\theta \leq 1 + 3i + 1 + 3i - 2 - 6i$$

$$\theta \leq \theta$$

olup $\mathcal{T} = 3 - 6i$ için I_1^* koşulu sağlanmaktadır.

$I_2^*. \forall \mathcal{T} = v + iw \in \wp_{(2,-3),(1,3)}^{\mathbb{E}^p}$ için

$$e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = e(\mathcal{T}, 2 - 3i) = \|v - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|w + 3\|_{\mathbb{E}} \quad (5.11.2)$$

dır.

i. $\mathcal{T} = 1$ (5.11.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = \|1 - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|0 + 3\|_{\mathbb{E}} = 1 + 3i \text{ dir ve } r = 1 + 3i \text{ olduğundan}$$

$$e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) \leq r$$

olup $\mathcal{T} = 1$ için I_2^* koşulunu sağlamaktadır.

ii. $\mathcal{T} = 3$ (5.11.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = \|3 - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|0 + 3\|_{\mathbb{E}} = 1 + 3i \text{ dir ve } r = 1 + 3i \text{ olduğundan}$$

$$e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) \leq r$$

olup $\mathcal{T} = 3$ için I_2^* koşulunu sağlamaktadır.

iii. $\mathcal{T} = 1 - 6i$ (5.11.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = \|1 - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|-6 + 3\|_{\mathbb{E}} = 1 + 3i \text{ dir ve } r = 1 + 3i \text{ olduğundan}$$

$$e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) \leq r$$

olup $\mathcal{T} = 1 - 6i$ için I_2^* koşulunu sağlamaktadır.

iv. $\mathcal{T} = 3 - 6i$ (5.11.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = \|3 - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|-6 + 3\|_{\mathbb{E}} = 1 + 3i \text{ dir ve } r = 1 + 3i \text{ olduğundan}$$

$$e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) \leq r$$

olup $\mathcal{T} = 3 - 6i$ için I_2^* koşulunu sağlamaktadır. Böylece I_1^* ve $I_2^* \in \wp_{(2,-3),(1,3)}^{\mathbb{E}^p}$ çemberini T nin bir sabit çemberidir.

Örnek 5.12: Örnek 3.1 de tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın.

$e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p, \mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1, \mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere

$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}$ biçiminde tanımlanmaktadır.

$\mathcal{T}_0 = 2 - 3i, r = 1 + 3i$ olmak üzere $\mathcal{T}_0$ merkezli r yarıçaplı $\mathcal{E}_{(2,-3),(1,3)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi ele alınsın ve

$$T\mathcal{T} = 3 - 2i$$

olacak şekilde $T: \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$ kendi kendine dönüşümünü tanımlasın.

$I_1^*. \forall \mathcal{T} = v + iw \in \mathcal{E}_{(2,-3),(1,3)}^{\mathbb{E}_p}$ için $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r$ olmalıdır.

$$e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = e(\mathcal{T}, 3 - 2i) = \|v - 3\|_{\mathbb{E}} + i\|w + 2\|_{\mathbb{E}} + \|v - 3\|_{\mathbb{E}} + i\|w + 2\|_{\mathbb{E}} \quad (5.12.1)$$

ve

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r &= e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) - 2r \\ &= e(\mathcal{T}, 2 - 3i) + e(3 - 2i, 2 - 3i) - 2 - 6i \\ &= \|v - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|w + 3\|_{\mathbb{E}} + \|3 - 2\|_{\mathbb{E}} + i\| - 2 + 3\|_{\mathbb{E}} - 2 - 6i \\ &= |v - 2| + i|w + 3| - 1 - 5i \end{aligned} \quad (5.12.2)$$

dir. Böylece

i. $\mathcal{T} = 1$ (5.12.1) ve (5.12.2) denklemleri yerine yazılırsa

$$e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = 2 + 2i \text{ ve } \varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r = -2i$$

olup $\mathcal{T} = 1$ için I_1^* koşulu sağlamamaktadır.

ii. $\mathcal{T} = 3$ (5.12.1) ve (5.12.2) denklemleri yerine yazılırsa

$$e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = 2 \text{ ve } \varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r = -2i$$

olup $\mathcal{T} = 3$ için I_1^* koşulu sağlamamaktadır.

iii. $\mathcal{T} = 1 - 6i$ (5.12.1) ve (5.12.2) denklemleri yerine yazılırsa

$$e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = 2 + 4i \text{ ve } \varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r = -2i$$

olup $\mathcal{T} = 1 - 6i$ için I_1^* koşulu sağlamamaktadır.

iv. $\mathcal{T} = 3 - 6i$ (5.12.1) ve (5.12.2) denklemleri yerine yazılırsa

$$e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = 4i \text{ ve } \varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r = -2i$$

olup $\mathcal{T} = 3 - 6i$ için I_1^* koşulu sağlamamaktadır.

I_2^* . $\forall \mathcal{T} = v + iw \in \wp_{(2,-3),(1,3)}^{\mathbb{E}_p}$ için

$$e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = e(3 - 2i, 2 - 3i) = \|1\|_{\mathbb{E}} + i\|1\|_{\mathbb{E}} = 1 + i \text{ ve } r = 1 + 3i \text{ olup}$$

$1 + i = e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) \leq r = 1 + 3i$ olduğundan I_2^* koşulu sağlamaktadır.

Böylece I_1^* koşulu sağlamayıp I_2^* koşulu sağladığından $\wp_{(2,-3),(1,3)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberini T nin bir sabit çemberi değildir.

Örnek 5.13: Örnek 3.1 de tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın.

$e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$, $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere

$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}$ biçiminde tanımlanmaktadır.

$\mathcal{T}_0 = 2 - 3i$, $r = 1 + 3i$ olmak üzere $\mathcal{T}_0$ merkezli r yarıçaplı $\wp_{(2,-3),(1,3)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberini ele alalım ve

$$T\mathcal{T} = \begin{cases} -3 + 6i, \mathcal{T} = 1 \text{ ise} \\ -3 - 7i, \mathcal{T} = 3 \text{ ise} \\ 4 + 3i, \mathcal{T} = 1 - 6i \text{ ise} \\ 4 - 6i, \mathcal{T} = 3 - 6i \text{ ise} \\ 3 - 7i, \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olacak şekilde $T: \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$ kendi kendine dönüşümünü tanımlansın.

I_1^* . $\forall \mathcal{T} = v + iw \in \wp_{(2,-3),(1,3)}^{\mathbb{E}^p}$ için $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r$ olmalıdır. $T\mathcal{T}$ beş farklı değer alabildiğinden $T\mathcal{T} = \mathcal{T}j = v_j + iw_j$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$ biçiminde gösterilsin. Bu durumda;

$$\begin{aligned} e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) &= e(\mathcal{T}, \mathcal{T}j) = \|v - v_j\|_{\mathbb{E}} + i\|w - w_j\|_{\mathbb{E}} \\ &= |v - v_j| + i|w - w_j| \end{aligned} \quad (5.13.1)$$

dır ve

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r &= e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) - 2r \\ &= e(\mathcal{T}, 2 - 3i) + e(\mathcal{T}j, 2 - 3i) - 2 - 6i \\ &= \|v - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|w + 3\|_{\mathbb{E}} + \|v_j - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|w_j + 3\|_{\mathbb{E}} - 2 - 6i \\ &= |v - 2| + i|w + 3| + |v_j - 2| + i|w_j + 3| - 2 - 6i \end{aligned} \quad (5.13.2)$$

dır. Böylece;

- i. $\mathcal{T} = 1$ (5.13.1) ve (5.13.2) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = 4 + 6i \text{ ve } \varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r = 4 + 6i$$

olup $\mathcal{T} = 1$ için I_1^* koşulu sağlamaktadır.

- ii. $\mathcal{T} = 3$ (5.13.1) ve (5.13.2) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = 1 + 3i \text{ ve } \varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r = 1 + 3i$$

olup $\mathcal{T} = 3$ için I_1^* koşulu sağlamaktadır.

- iii. $\mathcal{T} = 1 - 6i$ (5.13.1) ve (5.13.2) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = 4 + i \text{ ve } \varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r = 4 + i$$

olup $\mathcal{T} = 1 - 6i$ için I_1^* koşulu sağlamaktadır.

- iv. $\mathcal{T} = 3 - 6i$ (5.13.1) ve (5.13.2) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = 1 \text{ ve } \varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r = 1$$

olup $\mathcal{T} = 3 - 6i$ için I_1^* koşulu sağlamaktadır.

I_2^* . $\forall \mathcal{T} = v + iw \in \wp_{(2,-3),(1,3)}^{\mathbb{E}_p}$ için $e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) \leq r$ olmalıdır. $T\mathcal{T}$ beş farklı değer alabildiğinden $T\mathcal{T} = Tj = v_j + iw_j$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$ biçiminde gösterilsin, burada

$\mathcal{T}_1 = -3 + 6i, \mathcal{T}_2 = -3 - 7i, \mathcal{T}_3 = 4 + 3i, \mathcal{T}_4 = 4 - 6i, \mathcal{T}_5 = 3 - 7i$ dır. Bu durumda;

$$\begin{aligned} e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) &= e(Tj, \mathcal{T}_0) = \|v_j - 2\|_{\mathbb{E}} + i\|w_j + 3\|_{\mathbb{E}} \\ &= |v_j - 2| + i|w_j + 3| \end{aligned} \quad (5.13.3)$$

olup çemberin tüm noktaları için durumlar incelenmelidir.

i. $\mathcal{T} = 1$ (5.13.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = 5 + 9i \text{ dir ve } r = 1 + 3i \text{ olduğundan}$$

olup $\mathcal{T} = 1$ için I_2^* koşulu sağlamamaktadır.

ii. $\mathcal{T} = 3$ (5.13.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = 2 + 6i \text{ dir ve } r = 1 + 3i \text{ olduğundan}$$

olup $\mathcal{T} = 3$ için I_2^* koşulu sağlamamaktadır.

iii. $\mathcal{T} = 1 - 6i$ (5.13.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = 2 + 6i \text{ dir ve } r = 1 + 3i \text{ olduğundan}$$

olup $\mathcal{T} = 1 - 6i$ için I_2^* koşulu sağlamamaktadır.

iv. $\mathcal{T} = 3 - 6i$ (5.13.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = 2 + 6i \text{ dir ve } r = 1 + 3i \text{ olduğundan}$$

olup $\mathcal{T} = 3 - 6i$ için I_2^* koşulu sağlamamaktadır. O halde $\wp_{(2,-3),(1,3)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberini T nin bir sabit çemberi değildir.

Örnek 5.14: Örnek 3.6 da tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın.

$e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$, $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere

$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|p|}\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}$, $p < 0$ biçiminde tanımlanmaktadır.

$\mathcal{T}_0 = 3 - 7i$, $r = 1 + 3i$ ve $p = -9$ olmak üzere $\mathcal{T}_0$ merkezli r yarıçaplı $\mathcal{P}_{(3,-7),(1,3)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi ele alınsın ve

$$T\mathcal{T} = \begin{cases} \mathcal{T}, \mathcal{T} \in \mathcal{P}_{(3,-7),(1,3)}^{\mathbb{E}_p} \\ 2 - 7i, \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olacak şekilde $T: \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$ kendi kendine dönüşümü tanımlansın.

I_1^* . $\forall \mathcal{T} = v + iw \in \mathcal{P}_{(3,-7),(1,3)}^{\mathbb{E}_p}$ için $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r$ olmalıdır.

$$e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = e(\mathcal{T}, \mathcal{T}) = \theta$$

ve

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r &= e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) - 2r \\ &= e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) + e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) - 2r \\ &= 2e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) - 2r \\ &= 2\|v - 3\|_{\mathbb{E}} + 6i\|w + 7\|_{\mathbb{E}} - 2 - 6i \\ &= 2|v - 3| + 6i|w + 7| - 2 - 6i \end{aligned} \tag{5.14.1}$$

dir. Böylece

i. $\mathcal{T} = 2 - 6i$ (5.14.1) denkleminde yerine yazılırsa $\varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r = \theta$ $\mathcal{T} = 2 - 6i$ için I_1^* koşulunu sağlamaktadır.

ii. $\mathcal{T} = 2 - 8i$ (5.14.1) denkleminde yerine yazılırsa $\varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r = \theta$ $\mathcal{T} = 2 - 8i$ için I_1^* koşulunu sağlamaktadır.

iii. $\mathcal{T} = 4 - 6i$ (5.14.1) denkleminde yerine yazılırsa $\varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r = \theta$ $\mathcal{T} = 4 - 6i$ için I_1^* koşulunu sağlamaktadır.

iv. $\mathcal{T} = 4 - 8i$ (5.14.1) denkleminde yerine yazılırsa $\varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r = \theta$
 $\mathcal{T} = 4 - 8i$ için I_1^* koşulunu sağlamaktadır.

$I_2^*. \forall \mathcal{T} = v + iw \in \wp_{(3,-7),(1,3)}^{\mathbb{E}_p}$ ise

$$\begin{aligned} e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) &= e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) = \|v - 3\|_{\mathbb{E}} + 3i\|w + 7\|_{\mathbb{E}} \\ &= |v - 3| + 3i|w + 7| \end{aligned} \quad (5.14.2)$$

dır. Böylece;

i. $\mathcal{T} = 2 - 6i$ (5.14.2) denkleminde yerine yazılırsa $e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) = 1 + 3i$ olup
 $r = 1 + 3i$ olduğundan $\mathcal{T} = 2 - 6i$ için I_2^* koşulu sağlamaktadır.

ii. $\mathcal{T} = 2 - 8i$ (5.14.2) denkleminde yerine yazılırsa $e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) = 1 + 3i$ olup
 $r = 1 + 3i$ olduğundan $\mathcal{T} = 2 - 8i$ için I_2^* koşulu sağlamaktadır.

iii. $\mathcal{T} = 4 - 6i$ (5.14.2) denkleminde yerine yazılırsa $e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) = 1 + 3i$ olup
 $r = 1 + 3i$ olduğundan $\mathcal{T} = 4 - 6i$ için I_2^* koşulu sağlamaktadır.

iv. $\mathcal{T} = 4 - 8i$ (5.14.2) denkleminde yerine yazılırsa $e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) = 1 + 3i$ olup
 $r = 1 + 3i$ olduğundan $\mathcal{T} = 4 - 8i$ için I_2^* koşulu sağlamaktadır. Böylece I_1^* ve I_2^*
koşulları sağlandığından $\wp_{(3,-7),(1,3)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberini $\mathcal{T}$ nin bir sabit çemberidir.

Örnek 5.15: Örnek 3.6 da tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın.
 $e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$, $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere

$$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|p|}\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}, p < 0 \text{ biçiminde tanımlanmaktadır.}$$

$\mathcal{T}_0 = 3 - 7i$, $r = 1 + 3i$, $p = -9$ olmak üzere $\mathcal{T}_0$ merkezli r yarıçaplı $\wp_{(3,-7),(1,3)}^{\mathbb{E}_p}$
çemberi ele alınsın ve

$$T\mathcal{T} = 2 - 7i$$

olacak şekilde $T: \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$ kendi kendine dönüşümün tanımlansın.

$I_1^*. \forall \mathcal{T} = v + iw \in \wp_{(3,-7),(1,3)}^{\mathbb{E}_p}$ için $e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_T) \leq \varphi(\mathcal{T}) + \varphi(\mathcal{T}_T) - 2r$ olmalıdır.

$$\begin{aligned}
e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) &= e(\mathcal{T}, 2 - 7i) = \|v - 2\|_{\mathbb{E}} + 3i\|w + 7\|_{\mathbb{E}} \\
&= |v - 2| + 3i|w + 7|
\end{aligned} \tag{5.15.1}$$

ve

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r &= e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) - 2r \\
&= e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) + e(2 - 7i, \mathcal{T}_o) - 2r \\
&= \|v - 3\|_{\mathbb{E}} + 3i\|w + 7\|_{\mathbb{E}} + \|-1\|_{\mathbb{E}} + 3i\|0\|_{\mathbb{E}} - 2 - 6i \\
&= |v - 3| + 3i|w + 7| - 1 - 6i
\end{aligned} \tag{5.15.2}$$

dır. Böylece;

- i. $\mathcal{T} = 2 - 6i$ (5.15.1) ve (5.15.2) denklemlerinde yerine yazılırsa $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = 3i$ ve $\varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r = -3i$ olup $\mathcal{T} = 2 - 6i$ için I_1^* koşulu sağlamamaktadır.
- ii. $\mathcal{T} = 2 - 8i$ (5.15.1) ve (5.15.2) denklemlerinde yerine yazılırsa $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = 3i$ ve $\varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r = -3i$ olup $\mathcal{T} = 2 - 8i$ için I_1^* koşulu sağlamamaktadır.
- iii. $\mathcal{T} = 4 - 6i$ (5.15.1) ve (5.15.2) denklemlerinde yerine yazılırsa $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = 1 + 3i$ ve $\varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r = 1 - 3i$ olup $\mathcal{T} = 4 - 6i$ için I_1^* koşulu sağlamamaktadır.
- iv. $\mathcal{T} = 4 - 8i$ (5.15.1) ve (5.15.2) denklemlerinde yerine yazılırsa $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = 2 + 3i$ ve $\varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r = 1 - 3i$ olup $\mathcal{T} = 4 - 8i$ için I_1^* koşulu sağlamamaktadır.

I_2^* . $\forall \mathcal{T} = v + iw \in \wp_{(3,-7),(1,3)}^{\mathbb{E}p}$ ise

$$\begin{aligned}
e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) &= e(2 - 7i, 3 - 7i) = \|2 - 3\|_{\mathbb{E}} + 3i\|-7 + 7\|_{\mathbb{E}} \\
&= |2 - 3| + 3i|-7 + 7| \\
&= 1
\end{aligned}$$

dır ve $r = 1 + 3i$ olduğundan I_2^* koşulu sağlamaktadır. Böylece I_1^* koşulu sağlanmayıp I_2^* koşulu sağladığından $\wp_{(3,-7),(1,3)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberini T nin bir sabit çemberi değildir.

Örnek 5.16: Örnek 3.6 da tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın. $e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$, $T_1 = v_1 + iw_1$, $T_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere

$$e(T_1, T_2) = \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|p|}\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}, p < 0 \text{ biçiminde tanımlanmaktadır.}$$

$T = x + iy$, $T_0 = 3 - 7i$, $r = 1 + 3i$ ve $p = -9$ olmak üzere T_0 merkezli r yarıçaplı $\wp_{(3,-7),(1,3)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi ele alınsın ve

$$T\mathcal{T} = \begin{cases} 2 - 5i, \mathcal{T} = 2 - 6i \text{ ise,} \\ 2 - 9i, \mathcal{T} = 2 - 8i \text{ ise,} \\ 5 - 5i, \mathcal{T} = 4 - 6i \text{ ise,} \\ 5 - 9i, \mathcal{T} = 4 - 8i \text{ ise,} \\ 1 - 5i, \text{diğer durmlar} \end{cases}$$

olacak şekilde $T: \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$ kendi kendine dönüşümünü tanımlansın.

I_1^* . $\forall \mathcal{T} = v + iw \in \wp_{(3,-7),(1,3)}^{\mathbb{E}_p}$ için $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r$ olmalıdır. $T\mathcal{T}$ beş farklı değer alabildiğinden $T\mathcal{T} = \mathcal{T}j = v_j + iw_j$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$ biçiminde gösterilsin, burada $\mathcal{T}_1 = 2 - 5i$, $\mathcal{T}_2 = 2 - 9i$, $\mathcal{T}_3 = 5 - 5i$, $\mathcal{T}_4 = 5 - 9i$ ve $\mathcal{T}_5 = 1 - 5i$ dir. Bu durumda;

$$\begin{aligned} e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) &= e(\mathcal{T}, \mathcal{T}j) = \|v - v_j\|_{\mathbb{E}} + 3i\|w - w_j\|_{\mathbb{E}} \\ &= |v - v_j| + 3i|w - w_j| \end{aligned} \quad (5.16.1)$$

ve

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r &= e(\mathcal{T}, T_0) + e(T\mathcal{T}, T_0) - 2r \\ &= e(\mathcal{T}, 3 - 7i) + e(\mathcal{T}j, 3 - 7i) - 2 - 6i \\ &= \|v - 3\|_{\mathbb{E}} + 3i\|w + 7\|_{\mathbb{E}} + \|v_j - 3\|_{\mathbb{E}} + 3i\|w_j + 7\|_{\mathbb{E}} - 2 - 6i \end{aligned} \quad (5.16.2)$$

dır. Böylece;

i. $\mathcal{T} = 2 - 6i$ (5.16.1) ve (5.16.2) denklemlerinde yerine yazılırsa $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = 3i$ ve $\varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r = 3i$ olup $\mathcal{T} = 2 - 6i$ için I_1^* koşulu sağlamaktadır.

ii. $\mathcal{T} = 2 - 8i$ (5.16.1) ve (5.16.2) denklemlerinde yerine yazılırsa $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = 3i$ ve $\varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r = 3i$ olup $\mathcal{T} = 2 - 8i$ için I_1^* koşulu sağlamaktadır.

iii. $\mathcal{T} = 4 - 6i$ (5.16.1) ve (5.16.2) denklemlerinde yerine yazılırsa $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = 3i$ ve $\varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r = 3i$ olup $\mathcal{T} = 4 - 6i$ için I_1^* koşulu sağlamaktadır.

iv. $\mathcal{T} = 4 - 8i$ (5.16.1) ve (5.16.2) denklemlerinde yerine yazılırsa $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = 3i$ ve $\varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r = 3i$ olup $\mathcal{T} = 4 - 8i$ için I_1^* koşulu sağlamaktadır.

I_2^* . $\forall \mathcal{T} = v + iw \in \wp_{(3,-7),(1,3)}^{\mathbb{E}_p}$ için $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(\mathcal{T}) + \varphi(T\mathcal{T}) - 2r$ olmalıdır.

$T\mathcal{T}$ beş farklı değer alabildiğinden $T\mathcal{T} = Tj = v_j + iw_j$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$ biçiminde gösterilsin, burada $\mathcal{T}_1 = 2 - 5i$, $\mathcal{T}_2 = 2 - 9i$, $\mathcal{T}_3 = 5 - 5i$, $\mathcal{T}_4 = 5 - 9i$ ve $\mathcal{T}_5 = 1 - 5i$ dır. Bu durumda;

$$\begin{aligned} e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) &= e(Tj, 3 - 7i) = \|v_j - 3\|_{\mathbb{E}} + 3i\|w_j + 7\|_{\mathbb{E}} \\ &= |v_j - 3| + 3i|w_j + 7| \end{aligned} \quad (5.16.3)$$

olup çemberin tüm noktaları için durumlar incelenmelidir.

i. $\mathcal{T} = 2 - 6i$ (5.16.3) denkleminde yerine yazılırsa $e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = 1 + 6i$ ve $r = 1 + 3i$ olup $\mathcal{T} = 2 - 6i$ için I_2^* koşulu sağlamamaktadır.

ii. $\mathcal{T} = 2 - 8i$ (5.16.3) denkleminde yerine yazılırsa $e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = 1 + 6i$ ve $r = 1 + 3i$ olup $\mathcal{T} = 2 - 8i$ için I_2^* koşulu sağlamamaktadır.

iii. $\mathcal{T} = 4 - 6i$ (5.16.3) denkleminde yerine yazılırsa $e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = 1 + 6i$ ve $r = 1 + 3i$ olup $\mathcal{T} = 4 - 6i$ için I_2^* koşulu sağlamamaktadır.

iv. $\mathcal{T} = 4 - 8i$ (5.16.3) denkleminde yerine yazılırsa $e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = 1 + 6i$ ve $r = 1 + 3i$ olup $\mathcal{T} = 4 - 8i$ için I_2^* koşulu sağlamamaktadır. Böylece I_1^* koşulu sağlandığı halde I_2^* koşulu sağlanmadığından $\wp_{(3,-7),(1,3)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberini T nin bir sabit çemberi değildir.

Teorem 5.3: $(\mathbb{E}, e)$ bir eliptik değerli metrik uzay ve $\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$, $\mathbb{E}$ deki herhangi bir çember olsun. φ dönüşümü (2.1) deki gibi tanımlansın. $\forall \mathcal{T} \in \wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ için $h \in [0,1)$ olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde bir $T: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ kendi kendine dönüşüm varsa $\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$, T nin sabit bir çemberidir.

$$I_1^{**}.e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T})$$

ve

$$I_2^{**}.r \leq h[e(\mathcal{T}, T\mathcal{T})] + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0)$$

İspat: φ , (2.1) de tanımlanan dönüşüm olsun. $\mathcal{T} \in \wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ ve $T\mathcal{T} \neq \mathcal{T}$ olduğunu varsayalım. I_1^{**} ve I_2^{**} koşulları kullanılırsa

$$\begin{aligned} e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) &\leq \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T}) = e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) - e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) \\ &= r - e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) \\ &\leq h[e(\mathcal{T}, T\mathcal{T})] + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) - e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) \\ &= h[e(\mathcal{T}, T\mathcal{T})] \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da $h \in [0,1)$ olduğundan bir çelişki olup varsayımımız hatalıdır. O halde $T\mathcal{T} = \mathcal{T}$ dır ve $\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi T nin bir sabit çemberidir.

ÖRNEK 5.17: Örnek 3.5 te tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın.

$e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p, \mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1, \mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere

$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = i||\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2||_{\mathbb{E}}, p < 0$ biçiminde tanımlanmaktadır.

$\mathcal{T}_0 = 4 + 2i, r = 4i$ ve $p = -4$ olmak üzere $\mathcal{T}_0$ merkezli r yarıçaplı $\wp_{(4,2),(0,4)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi ele alınsın ve

$$T\mathcal{T} = \begin{cases} \mathcal{T}, \mathcal{T} \in \wp_{(4,2),(0,4)}^{\mathbb{E}_p} \\ 2 - 7i, \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olacak şekilde $T: \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$ kendi kendine dönüşümünü tanımlansın.

I_1^{**} . $\forall \mathcal{T} = v + iw \in \wp_{(4,2),(0,4)}^{\mathbb{E}_p}$ için $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T})$ olmalıdır.

$$e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = e(\mathcal{T}, \mathcal{T}) = \theta$$

ve

$$\varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T}) = e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) - e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o)$$

$$= e(\mathcal{T}, 4 + 2i) - e(\mathcal{T}, 4 + 2i)$$

$$= i\sqrt{(v-4)^2 + 4(w-2)^2} - i\sqrt{(v-4)^2 + 4(w-2)^2} = \theta$$

olup I_1^{**} koşulunu sağlar.

I_2^{**} . $\forall \mathcal{T} = v + iw \in \wp_{(4,2),(0,4)}^{\mathbb{E}_p}$ için $h = [0,1)$ olmak üzere

$r \leq h[e(\mathcal{T}, T\mathcal{T})] + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o)$ olmalıdır.

$$h[e(\mathcal{T}, T\mathcal{T})] + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) = h[e(\mathcal{T}, \mathcal{T})] + e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_o)$$

$$= e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_o)$$

$$= e(\mathcal{T}, 4 + 2i)$$

$$= i\sqrt{(v-4)^2 + 4(w-2)^2}$$

ve $r = 4i$ olup I_2^{**} koşulu sağlanmaktadır. Böylece I_1^{**} ve I_2^{**} koşulları sağlandığından $\wp_{(4,2),(0,4)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi T nin bir sabit çemberidir.

Örnek 5.18: Örnek 3.5'te tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın.

$e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$, $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere

$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = i||\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2||_{\mathbb{E}}$, $p < 0$ biçiminde tanımlanmaktadır. $\mathcal{T}_0 = 4 + 2i$, $r = 4i$

ve $p = -4$ olmak üzere $\mathcal{T}_0$ merkezli r yarıçaplı $\wp_{(4,2),(0,4)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi ele alınsın ve

$$T\mathcal{T} = 4 + 2i$$

olacak şekilde $T: \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$ kendi kendine dönüşümü tanımlansın.

I_1^{**} . $\forall \mathcal{T} = v + iw \in \wp_{(4,2),(0,4)}^{\mathbb{E}_p}$ için $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T})$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) &= e(\mathcal{T}, 4 + 2i) = i||\mathcal{T} - (4 + 2i)||_{\mathbb{E}} \\ &= i\sqrt{(v - 4)^2 + 4(w - 2)^2} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T}) &= e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) - e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) \\ &= e(\mathcal{T}, 4 + 2i) - e(4 + 2i, 4 + 2i) \\ &= e(\mathcal{T}, 4 + 2i) \\ &= i\sqrt{(v - 4)^2 + 4(w - 2)^2} \end{aligned}$$

olup I_1^{**} koşulu sağlanmaktadır.

I_2^{**} . $\forall \mathcal{T} = v + iw \in \wp_{(4,2),(0,4)}^{\mathbb{E}_p}$ için $h = [0,1)$ olmak üzere

$r \leq h[e(\mathcal{T}, T\mathcal{T})] + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o)$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} h[e(\mathcal{T}, T\mathcal{T})] + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) &= h[e(\mathcal{T}, 4 + 2i)] + e(4 + 2i, 4 + 2i) \\ &= h[e(\mathcal{T}, 4 + 2i)] \\ &= h \left[i\sqrt{(v - 4)^2 + 4(w - 2)^2} \right] \end{aligned}$$

dır. $r = 4i$ ve $h = [0,1)$ olduğundan I_2^{**} koşulu sağlamamaktadır. Böylece I_1^{**} koşulu sağlandığı halde I_2^{**} koşulu sağlanmadığından $\wp_{(4,2),(0,4)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberini T nin bir sabit çemberi değildir.

Örnek 5.19: Örnek 3.6 da tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın.

$e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$, $T_1 = v_1 + iw_1$, $T_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere;

$e(T_1, T_2) = \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|p|}\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}$, $p < 0$ biçiminde tanımlanmaktadır.

$T = x + iy$, $T_0 = 5 + 4i$, $r = 2 + 2i$ ve $p = -16$ olmak üzere T_0 merkezli r yarıçaplı $\wp_{(5,4),(2,2)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi ele alınsın ve

$$T\mathcal{T} = \begin{cases} \mathcal{T}, \mathcal{T} \in \wp_{(5,4),(2,2)}^{\mathbb{E}_p} \\ 4 + 4i, \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olacak şekilde $T: \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$ kendi kendine dönüşümü tanımlansın.

I_1^{**} . $\forall \mathcal{T} = v + iw \in \wp_{(5,4),(2,2)}^{\mathbb{E}_p}$ için $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T})$ olmalıdır.

$$e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = e(\mathcal{T}, \mathcal{T}) = \theta$$

ve

$$\varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T}) = e(\mathcal{T}, T_0) - e(T\mathcal{T}, T_0)$$

$$= \|v - 5\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|-16|}\|w - 4\|_{\mathbb{E}} - \|v - 5\|_{\mathbb{E}} - i\sqrt{|-16|}\|w - 4\|_{\mathbb{E}}$$

$$= |v - 5| + 4i|w - 4| - |v - 5| - 4i|w - 4| \quad (5.19.1)$$

dir. Böylece;

i. $\mathcal{T} = 3 + \frac{9}{2}i$ (5.19.1) denkleminde yerine yazılırsa

$\varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T}) = 2 + 4i - 2 - 4i = \theta$ olup $\mathcal{T} = 3 + \frac{9}{2}i$ için I_1^{**} koşulu sağlanır.

ii. $\mathcal{T} = 3 + \frac{7}{2}i$ (5.19.1) denkleminde yerine yazılırsa

$\varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T}) = 2 + 4i - 2 - 4i = \theta$ olup $\mathcal{T} = 3 + \frac{7}{2}i$ için I_1^{**} koşulu sağlanır.

iii. $\mathcal{T} = 7 + \frac{9}{2}i$ (5.19.1) denkleminde yerine yazılırsa

$\varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T}) = 2 + 4i - 2 - 4i = \theta$ olup $\mathcal{T} = 7 + \frac{9}{2}i$ için I_1^{**} koşulu sağlanır.

iv. $\mathcal{T} = 7 + \frac{7}{2}i$ (5.19.1) denkleminde yerine yazılırsa

$\varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T}) = 2 + 4i - 2 - 4i = \theta$ olup $\mathcal{T} = 7 + \frac{7}{2}i$ için I_1^{**} koşulu sağlanır.

$I_2^{**}. \forall \mathcal{T} = v + iw \in \wp_{(5,4),(2,2)}^{\mathbb{E}^p}$ için $h = [0,1)$ olmak üzere

$r \leq h[e(\mathcal{T}, T\mathcal{T})] + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o)$ olmalıdır.

$$h[e(\mathcal{T}, T\mathcal{T})] + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) = h[e(\mathcal{T}, \mathcal{T})] + e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_o)$$

$$= e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_o)$$

$$= e(\mathcal{T}, 5 + 4i)$$

$$= \|v - 5\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|-16|}\|w - 4\|_{\mathbb{E}}$$

$$= |v - 5| + 4i|w - 4| \quad (5.19.2)$$

dir. Böylece;

i. $\mathcal{T} = 3 + \frac{9}{2}i$ (5.19.2) denkleminde yerine yazılırsa

$h[e(\mathcal{T}, T\mathcal{T})] + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) = 2 + 2i$ olup $r = 2 + 2i$ olduğundan $\mathcal{T} = 3 + \frac{9}{2}i$ için I_2^{**} koşulu sağlar.

ii. $\mathcal{T} = 3 + \frac{7}{2}i$ (5.19.2) denkleminde yerine yazılırsa

$h[e(\mathcal{T}, T\mathcal{T})] + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) = 2 + 2i$ olup $r = 2 + 2i$ olduğundan $\mathcal{T} = 3 + \frac{7}{2}i$ için I_2^{**} koşulu sağlar.

iii. $\mathcal{T} = 7 + \frac{9}{2}i$ (5.19.2) denkleminde yerine yazılırsa

$h[e(\mathcal{T}, T\mathcal{T})] + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) = 2 + 2i$ olup $r = 2 + 2i$ olduğundan $\mathcal{T} = 7 + \frac{9}{2}i$ için I_2^{**} koşulu sağlar.

iv. $\mathcal{T} = 7 + \frac{7}{2}i$ (5.19.2) denkleminde yerine yazılırsa

$h[e(\mathcal{T}, T\mathcal{T})] + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) = 2 + 2i$ olup $r = 2 + 2i$ olduğundan $\mathcal{T} = 7 + \frac{7}{2}i$ için I_2^{**}

koşulu sağlar. Böylece I_1^{**} ve I_2^{**} koşulları sağladığından $\wp_{(5,4),(2,2)}^{\mathbb{E}^p}$ çemberini T nin bir sabit çemberidir.

Örnek 5.20: Örnek 3.6 da tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın.

$e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$, $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere;

$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|p|}\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}$, $p < 0$ biçiminde tanımlanmaktadır.

$\mathcal{T} = x + iy$, $\mathcal{T}_0 = 5 + 4i$, $r = 2 + 2i$ ve $p = -4$ olmak üzere $\mathcal{T}_0$ merkezli r yarıçaplı

$\wp_{(5,4),(2,2)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi ele alınsın ve

$$T\mathcal{T} = \begin{cases} 5 + 4i, \mathcal{T} \in \wp_{(5,4),(2,2)}^{\mathbb{E}_p} \\ 7 + 5i, \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olacak şekilde $T: \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$ kendi kendine dönüşümünü tanımlansın.

I_1^{**} . $\forall \mathcal{T} = v + iw \in \wp_{(5,4),(2,2)}^{\mathbb{E}_p}$ için $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T})$ olmalıdır.

$$e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = e(\mathcal{T}, 5 + 4i)$$

$$= \|v - 5\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|-16|}\|w - 4\|_{\mathbb{E}}$$

$$= |v - 5| + 4i|w - 4| \quad (5.20.1)$$

ve

$$\varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T}) = e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) - e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0)$$

$$= e(\mathcal{T}, 5 + 4i) - e(5 + 4i, 5 + 4i)$$

$$= e(\mathcal{T}, 5 + 4i)$$

$$= \|v - 5\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|-16|}\|w - 4\|_{\mathbb{E}}$$

$$= |v - 5| + 4i|w - 4| \quad (5.20.2)$$

dir. Böylece;

i. $\mathcal{T} = 3 + 3i$ (5.20.1) ve (5.20.2) denkleminde yerine yazılırsa

$e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = 2 + 2i$ ve $\varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T}) = 2 + 2i$ olup $\mathcal{T} = 3 + 3i$ için I_1^{**} koşulu sağlanır.

ii. $\mathcal{T} = 3 + 5i$ (5.20.1) ve (5.20.2) denkleminde yerine yazılırsa $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = 2 + 2i$ ve $\varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T}) = 2 + 2i$ olup $\mathcal{T} = 3 + 5i$ için I_1^{**} koşulu sağlanır.

iii. $\mathcal{T} = 7 + 3i$ (5.20.1) ve (5.20.2) denkleminde yerine yazılırsa $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = 2 + 2i$ ve $\varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T}) = 2 + 2i$ olup $\mathcal{T} = 7 + 3i$ için I_1^{**} koşulu sağlanır.

iv. $\mathcal{T} = 7 + 5i$ (5.20.1) ve (5.20.2) denkleminde yerine yazılırsa $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = 2 + 2i$ ve $\varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T}) = 2 + 2i$ olup $\mathcal{T} = 7 + 5i$ için I_1^{**} koşulu sağlanır.

I_2^{**} . $\forall \mathcal{T} = v + iw \in \wp_{(5,4),(2,2)}^{\mathbb{E}_p}$ için $h = [0,1)$ olmak üzere

$r \leq h[e(\mathcal{T}, T\mathcal{T})] + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o)$ olmalıdır.

$$\begin{aligned}
 h[e(\mathcal{T}, T\mathcal{T})] + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) &= h[e(\mathcal{T}, 5 + 4i)] + e(5 + 4i, 5 + 4i) \\
 &= h[e(\mathcal{T}, 5 + 4i)] \\
 &= e(\mathcal{T}, 5 + 4i) \\
 &= h \left[\|v - 5\|_{\mathbb{E}} + i \sqrt{|-16|} \|w - 4\|_{\mathbb{E}} \right] \\
 &= h[|v - 5| + 4i|w - 4|] \tag{5.20.3}
 \end{aligned}$$

dir. Böylece;

i. $\mathcal{T} = 3 + 3i$ (5.20.3) denkleminde yerine yazılırsa $h[e(\mathcal{T}, T\mathcal{T})] + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) = h[2 + 2i]$ olup $r = 2 + 2i$ ve $h = [0,1)$ olduğundan $\mathcal{T} = 3 + 3i$ için I_2^{**} koşulu sağlamaz.

ii. $\mathcal{T} = 3 + 5i$ (5.20.3) denkleminde yerine yazılırsa $h[e(\mathcal{T}, T\mathcal{T})] + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) = h[2 + 2i]$ olup $r = 2 + 2i$ ve $h = [0,1)$ olduğundan $\mathcal{T} = 3 + 5i$ için I_2^{**} koşulu sağlamaz.

iii. $\mathcal{T} = 7 + 3i$ (5.20.3) denkleminde yerine yazılırsa

$h[e(\mathcal{T}, T\mathcal{T})] + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = h[2 + 2i]$ olup $r = 2 + 2i$ ve $h = [0,1)$ olduğundan $\mathcal{T} = 7 + 3i$ için I_2^* koşulu sağlamaz.

iv. $\mathcal{T} = 7 + 5i$ (5.20.3) denkleminde yerine yazılırsa

$h[e(\mathcal{T}, T\mathcal{T})] + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) = h[2 + 2i]$ olup $r = 2 + 2i$ ve $h = [0,1)$ olduğundan $\mathcal{T} = 7 + 5i$ için I_2^* koşulu sağlamaz. Böylece I_1^{**} koşulu sağlandığı halde I_2^{**} koşulu sağlanmadığından $\wp_{(5,4),(2,2)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberini $\mathcal{T}$ nin bir sabit çemberi değildir.

Örnek 5.21: Örnek 3.6 da tanımlanan $(\mathbb{E}_p, e)$ eliptik değerli metrik uzayı ele alınsın. $e: \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$, $\mathcal{T}_1 = v_1 + iw_1$, $\mathcal{T}_2 = v_2 + iw_2 \in \mathbb{E}_p$ olmak üzere;

$e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|p|}\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{E}}$, $p < 0$ biçiminde tanımlanmaktadır.

$\mathcal{T} = x + iy$, $\mathcal{T}_0 = 5 + 4i$, $r = 2 + 2i$ ve $p = -4$ olmak üzere $\mathcal{T}_0$ merkezli r yarıçaplı $\wp_{(5,4),(2,2)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi ele alınsın ve

$$T\mathcal{T} = \begin{cases} 7 + 5i, \mathcal{T} \in \wp_{(5,4),(2,2)}^{\mathbb{E}_p} \\ 4 + 4i, \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olacak şekilde $T: \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_p$ kendi kendine dönüşümü tanımlansın.

I_1^{**} . $\forall \mathcal{T} = v + iw \in \wp_{(5,4),(2,2)}^{\mathbb{E}_p}$ için $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T})$ olmalıdır.

$$e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = e(\mathcal{T}, 7 + 5i)$$

$$= \|v - 7\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|-4|}\|w - 5\|_{\mathbb{E}}$$

$$= |v - 7| + 2i|w - 5| \quad (5.21.1)$$

ve

$$\varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T}) = e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0) - e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_0)$$

$$= e(\mathcal{T}, 5 + 4i) - e(7 + 5i, 5 + 4i)$$

$$= \|v - 5\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|-4|}\|w - 4\|_{\mathbb{E}} - \|7 - 5\|_{\mathbb{E}} + i\sqrt{|-4|}\|5 - 4\|_{\mathbb{E}}$$

$$= |v - 5| + 2i|w - 4| - 2 - 2i \quad (5.21.2)$$

dir. Böylece;

i. $\mathcal{T} = 3 + 3i$ (5.21.1) ve (5.21.2) denkleminde yerine yazılırsa
 $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = 4 + 4i$ ve $\varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T}) = \theta$ elde edilir $\mathcal{T} = 3 + 3i$ için I_1^{**} koşulu sağlamamaktadır.

ii. $\mathcal{T} = 3 + 5i$ (5.21.1) ve (5.21.2) denkleminde yerine yazılırsa
 $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = 4$ ve $\varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T}) = \theta$ elde edilir $\mathcal{T} = 3 + 5i$ için I_1^{**} koşulu sağlamamaktadır.

iii. $\mathcal{T} = 7 + 3i$ (5.21.1) ve (5.21.2) denkleminde yerine yazılırsa
 $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = 4i$ ve $\varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T}) = \theta$ elde edilir $\mathcal{T} = 7 + 3i$ için I_1^{**} koşulu sağlamamaktadır.

iv. $\mathcal{T} = 7 + 5i$ (5.21.1) ve (5.21.2) denkleminde yerine yazılırsa
 $e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) = \theta$ ve $\varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T}) = \theta$ elde edilir $\mathcal{T} = 7 + 5i$ için I_1^{**} koşulu sağlanır.
Ancak çemberin diğer 3 noktası için I_1^{**} koşulu sağlamadığından $\wp_{(5,4),(2,2)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi ve T dönüşümü için I_1^{**} koşulu sağlamamaktadır.

I_2^{**} . $\forall \mathcal{T} = v + iw \in \wp_{(5,4),(2,2)}^{\mathbb{E}_p}$ için $h = [0,1)$ olmak üzere

$r \leq h[e(\mathcal{T}, T\mathcal{T})] + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o)$ olmalıdır.

$$h[e(\mathcal{T}, T\mathcal{T})] + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) = h[e(\mathcal{T}, 7 + 5i)] + e(7 + 5i, 5 + 4i)$$

$$= h \left[\|v - 7\|_{\mathbb{E}} + i \sqrt{|-4|} \|w - 5\|_{\mathbb{E}} \right] + \|7 - 5\|_{\mathbb{E}} + i \sqrt{|-4|} \|5 - 4\|_{\mathbb{E}}$$

$$= h[|v - 7| + 2i|w - 5|] + 2 + 2i \quad (5.21.3)$$

dir. Böylece;

i. $\mathcal{T} = 3 + 3i$ (5.21.3) denkleminde yerine yazılırsa
 $h[e(\mathcal{T}, T\mathcal{T})] + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) = h[4 + 4i] + 2 + 2i$ olup $r = 2 + 2i$ ve $h = [0,1)$ olduğundan $\mathcal{T} = 3 + 3i$ için I_2^{**} koşulu sağlamaktadır.

ii. $\mathcal{T} = 3 + 5i$ (5.21.3) denkleminde yerine yazılırsa

$h[e(\mathcal{T}, T\mathcal{T})] + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) = h[4 + 0i] + 2 + 2i$ olup $r = 2 + 2i$ ve $h = [0,1)$ olduğundan $\mathcal{T} = 3 + 5i$ için I_2^{**} koşulu sağlamaktadır.

iii. $\mathcal{T} = 7 + 3i$ (5.21.3) denkleminde yerine yazılırsa

$h[e(\mathcal{T}, T\mathcal{T})] + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) = h[0 + 4i] + 2 + 2i$ olup $r = 2 + 2i$ ve $h = [0,1)$ olduğundan $\mathcal{T} = 7 + 3i$ için I_2^{**} koşulu sağlamaktadır.

iv. $\mathcal{T} = 7 + 5i$ (5.21.3) denkleminde yerine yazılırsa

$h[e(\mathcal{T}, T\mathcal{T})] + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) = h[0 + 0i] + 2 + 2i$ olup $r = 2 + 2i$ ve $h = [0,1)$ olduğundan $\mathcal{T} = 7 + 5i$ için I_2^{**} koşulu sağlamaktadır. Böylece I_2^{**} koşulu sağlandığı halde I_1^{**} koşulu sağlamadığından $\wp_{(5,4),(2,2)}^{\mathbb{E}_p}$ çemberi T nin bir sabit çemberi değildir.

Teorem 5.4: $(\mathbb{E}, e)$ bir eliptik değerli metrik uzay ve $\wp_{\mathcal{T}_o, r}^{\mathbb{E}_p}$, $\mathbb{E}$ deki herhangi bir çember ve φ dönüşümü (2.1) deki gibi tanımlanan dönüşüm olsun. Her $\mathcal{T} \in \mathbb{E}$ ve herhangi bir $h > 1$ için $T: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ kendine dönüşümü

$$e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq \frac{\varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T})}{h} \quad (5.4.1)$$

koşulunu sağlarsa $T = I_{\mathcal{T}}$ dur ve $\wp_{\mathcal{T}_o, r}^{\mathbb{E}_p}$ nin, T nin sabit bir çemberidir.

İspat: $\mathcal{T} \in \mathbb{E}$ ve $T\mathcal{T} = \mathcal{T}$ olsun. Böylece (5.4.1) ve üçgen eşitsizliklerini kullanılırsa

$$\begin{aligned} h[e(\mathcal{T}, T\mathcal{T})] &\leq \varphi(\mathcal{T}) - \varphi(T\mathcal{T}) \\ &= e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) - e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) \\ &\leq e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) + e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) - e(T\mathcal{T}, \mathcal{T}_o) \\ &= e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece

$$(h - 1)e(\mathcal{T}, T\mathcal{T}) \leq 0$$

olur, ancak $h > 1$ olduğundan son eşitsizlik bir çelişkidir. Buradan $T\mathcal{T} = \mathcal{T}$ ve

$T = I_{\mathcal{T}}$ elde edilir. Sonuç olarak $\wp_{\mathcal{T}_o, r}^{\mathbb{E}_p}$ nin, T nin sabit bir çemberidir.

6. ELİPTİK DEĞERLİ METRİK UZAYLARDA SABİT ÇEMBERLERİN BAZI TEKLİK TEOREMLERİ

Bu bölümde, 5. bölümde elde edilen sabit çemberlerin teklik teoremleri incelenecektir. Teorem 5.1'deki $\wp_{\mathcal{T}_0,r}^{\mathbb{E}_p}$ sabit çemberinin tek olmak zorunda olmadığına dikkat edilmelidir, Benzer olarak (Teorem 5.2, 5.3) deki sabit çemberlerle de tek değildirler. Böylece aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 6.1: (Ξ, e) bir eliptik değerli metrik uzay olsun. Verilen herhangi $\wp_{\mathcal{T}_0,r}^{\mathbb{E}_p}$ ve $\wp_{\mathcal{T}_1,p}^{\mathbb{E}_p}$ çemberleri için Ξ in en az bir kendi kendine T dönüşümü vardır, öyle ki T , $\wp_{\mathcal{T}_0,r}^{\mathbb{E}_p}$ ve $\wp_{\mathcal{T}_1,p}^{\mathbb{E}_p}$ çemberlerini sabit bırakır.

İspat: $\wp_{\mathcal{T}_0,r}^{\mathbb{E}_p}$ ve $\wp_{\mathcal{T}_1,p}^{\mathbb{E}_p}$, Ξ deki herhangi çemberler olsunlar. α , $e(\alpha, \mathcal{T}_0) \neq r$ ve $e(\alpha, \mathcal{T}_1) \neq \rho$ özelliğinde bir sabit olmak üzere $\forall \mathcal{T} \in \Xi$ için;

$$T\mathcal{T} = \begin{cases} \mathcal{T}; & \mathcal{T} \in \wp_{\mathcal{T}_0,r}^{\mathbb{E}_p} \cup \wp_{\mathcal{T}_1,p}^{\mathbb{E}_p} \\ \alpha; & \text{aksi halde} \end{cases} \quad (3.1)$$

biçiminde $T: \Xi \rightarrow \Xi$ kendi kendine dönüşümü tanımlansın. Ayrıca

$\forall \mathcal{T} \in \Xi$ için

$$\varphi_1(\mathcal{T}) = e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0),$$

ve

$$\varphi_2(\mathcal{T}) = e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_1),$$

olacak şekilde $\varphi_1, \varphi_2: \Xi \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümlerini tanımlansın. Böylece sırasıyla $\varphi_1(\mathcal{T})$ ve $\varphi_2(\mathcal{T})$ dönüşümleri ile birlikte $\wp_{\mathcal{T}_0,r}^{\mathbb{E}_p}$ ve $\wp_{\mathcal{T}_1,p}^{\mathbb{E}_p}$ çemberleri için T tarafından I_1 ve I_2 koşullarının sağlandığı kolaylıkla kontrol edilebilir. Açıkça Teorem 5.1 den $\wp_{\mathcal{T}_0,r}^{\mathbb{E}_p}$ ve $\wp_{\mathcal{T}_1,p}^{\mathbb{E}_p}$, T nin sabit çemberleridir.

Sonuç 6.1: (Ξ, e) bir eliptik değerli metrik uzay olsun. Verilen herhangi $\wp_{\mathcal{T}_1, r_1}^{\mathbb{E}_p}, \dots, \wp_{\mathcal{T}_n, r_n}^{\mathbb{E}_p}$ çemberleri için $\wp_{\mathcal{T}_1, r_1}^{\mathbb{E}_p}, \dots, \wp_{\mathcal{T}_n, r_n}^{\mathbb{E}_p}$ çemberlerini sabit bırakacak biçimde Ξ in en az bir T kendi kendine dönüşümü vardır.

Örnek 6. 1: (Ξ, e) bir eliptik değerli metrik uzay ve $\wp_{\mathcal{T}_1, r_1}^{\mathbb{E}_p}, \dots, \wp_{\mathcal{T}_n, r_n}^{\mathbb{E}_p}, \Xi$ deki herhangi çemberler olsun. $\alpha, e(\alpha, \mathcal{T}_i) \neq r_i$ ($1 \leq i \leq n$) olacak biçimde bir sabit olsun. $\forall \mathcal{T} \in \Xi$ için;

$$T\mathcal{T} = \begin{cases} \mathcal{T} ; \mathcal{T} \in \bigcup_{i=1}^n \wp_{\mathcal{T}_i, r_i}^{\mathbb{E}_p} \\ a, \text{ aksi halde} \end{cases}$$

olacak biçimde $T: \Xi \rightarrow \Xi$ kendi kendine dönüşümünü ve $\varphi_i = e(\mathcal{T}, \mathcal{T}_i)$, ($1 \leq i \leq n$) olacak biçimde $\varphi_i: \Xi \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümlerini tanımlansın. Böylece sırasıyla $\wp_{\mathcal{T}_1, r_1}^{\mathbb{E}_p}, \dots, \wp_{\mathcal{T}_n, r_n}^{\mathbb{E}_p}$ çemberleri için I_1 ve I_2 koşullarının T tarafından sağlandığı kolayca kontrol edilebilir. Sonuç olarak $\wp_{\mathcal{T}_1, r_1}^{\mathbb{E}_p}, \dots, \wp_{\mathcal{T}_n, r_n}^{\mathbb{E}_p}$ çemberleri Teorem 5.1 e göre T nin sabit çemberleridir. Bu çemberlerin ayrıık olması gerekmediğinde dikkat edilmelidir.

Bu nedenle, sabit çemberlerin tekliğini araştırmak önemlidir. Böylece aşağıdaki teoremle Teorem 5.1 deki sabit çemberler için teklik koşullarını tanımlayabiliriz.

Teorem 6. 1: (Ξ, e) bir eliptik değerli metrik uzay ve $\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}, \Xi$ deki herhangi bir çember ve $T: \Xi \rightarrow \Xi$ Teorem 5.1 de verilen I_1 ve I_2 koşullarını sağlayan bir kendi kendine dönüşüm olsun. $\forall \mathcal{T}_1 \in \wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}, \mathcal{T}_2 \in \Xi \setminus \wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ ve herhangi bir $h \in [0, 1)$ için ;

$$I_3. e(T_{\mathcal{T}_1}, T_{\mathcal{T}_2}) \leq h. e(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) \quad (3.2)$$

özelligi T tarafından sağlanıyor ise $\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$, T nin tek sabit çemberidir.

İspat: T kendi kendine dönüşümünün iki tane $\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ ve $\wp_{\mathcal{T}_1, p}^{\mathbb{E}_p}$ sabit çemberi olduğunu, yani T nin I_1 ve I_2 koşullarını $\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ ve $\wp_{\mathcal{T}_1, p}^{\mathbb{E}_p}$ çemberlerinin her biri için sağladığını

varsayalım. $\mathcal{T}_u \in \wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ ve $\mathcal{T}_v \in \wp_{\mathcal{T}_1, p}^{\mathbb{E}_p}$ herhangi noktalar olsun. $e(\mathcal{T}_u, \mathcal{T}_v) = 0$ ve böylece $\mathcal{T}_u = \mathcal{T}_v$ olduğu gösterilecektir. I_3 koşulunu kullanılarak,

$$e(\mathcal{T}_u, \mathcal{T}_v) = e(T_{\mathcal{T}_u}, T_{\mathcal{T}_v}) \leq h \cdot e(\mathcal{T}_u, \mathcal{T}_v)$$

elde edilir ki bu da $h \in [0,1)$ olduğu için bir çelişkidir. Sonuç olarak, $\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ T nin tek sabit çemberdir.

Önerme 6.1 in ispatında verilen T kendi kendine dönüşümün (I_3) büzülme koşulunu sağlamadığına dikkat edilmesi gerekmektedir.

Sıradaki teoremle Teorem 5.2 deki sabit çemberler için teklik koşulunu veriyoruz.

Teorem 6.2: $(\mathbb{E}, e)$ bir eliptik değerli metrik uzay ve $\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$, $\mathbb{E}$ deki herhangi bir çember ve $T: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ Teorem 5.2 de verilen I_1^* ve I_2^* koşullarını sağlayan bir kendi kendine dönüşüm olsun. Eğer (3.2) de tanımlanmış (I_3) büzülme koşulu $\forall \mathcal{T}_1 \in \wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{E} \setminus \wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$ ve herhangi bir $h \in [0,1)$ için T tarafından sağlanıyor ise $\wp_{\mathcal{T}_0, r}^{\mathbb{E}_p}$, T nin tek sabit çemberidir.

İspat: Teorem 6.1in ispatına benzer olarak elde edilir.

7.SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde ilk bölümde sabit nokta teorisinden, sabit nokta teorisindeki gelişme ve genelleştirilmelerden bahsedilmiştir. İkinci bölümde sabit nokta teorisindeki temel tanım ve teoremlere ve eliptik sayıların temel cebirsel özellikleri ile eliptik değerli metrik uzaylara değinilmiştir.

Daha önceki çalışmalarda eliptik değerli metrik uzaylar tanıtılmış ve bu uzaylara bazı örnekler verilmiştir. Bu tezde bu örnekler ele alınmış ayrıca ilk olarak bu tezde yeni eliptik değerli metrik uzay örnekleri verilmiştir. Daha sonraki bölümlerde örnek verilen eliptik değerli metrik uzaylarda bazı çember örnekleri verilmiş bu örnekler grafiklerle görselleştirilmiştir.

Son bölümlerde ise tezin temel amacı olan eliptik değerli metrik uzaylarda sabit çemberlerin varlık ve teklik teoremleri incelenmiştir.

Yapılan bu çalışmayla sabit nokta teorisi literatürüne katkıda bulunulmuştur. Böylelikle sabit nokta teorisinde yapılabilecek daha ileri çalışmalara ışık tutulmuştur.

KAYNAKLAR

1. Gahler, S., 1963. 2-Metriche Raume And Ihre Topologische Strukture, Mathematische Nachrichten, 26, 115– 148.
2. Gahler, S., 1966. Zur Geometric 2-Metriche Raume, Revue Roumaine de Mathématique Pures et Appliquées, 11, 664–669.
3. Dhage, B.C., 1992. Generalized Metric Spaces And Mapping With Fixed Point. Bull. Cal. Math. Soc., 84, 329–336.
4. Sedghi, Ş., Shobe, N. ve Aliouche, A., 2012. A generalization of fixed point theorems in S – metric spaces, Matematički Vesnik, 64, 3, 258 – 266.
5. Abbas, M., Bashir, A. ve Suleiman Y. I., 2015. Generalized coupled common fixed point results in partially ordered A-metric spaces, Fixed Point Theory and Applications, 2015, 64.
6. Ughade, M., Türkoğlu, D., Singh, S. K. ve Daheriya, R. D., 2016. Some Fixed Point Theorems in Ab – Metric Space, British Journal of Mathematics and Computer Science, 19, 6, 1–24.
7. Özgür, N. Y. ve Taş, N., 2017. Some fixed point theorems on S-metric spaces, Matematički Vesnik, 69, 1, 3952.
8. Özgür, N. Y. ve Taş, N., 2017. Some New Contractive Mappings On S-Metric Spaces And Their Relation Ships With The Mapping (S25), Mathematical Sciences, 11, 7-16.
9. Özgür, N. Y. ve Taş, N., 2017. Some fixed circle theorems on metric spaces, arXiv:1703.00771.
10. Özgür, N. Y. ve Taş, N., 2017. Some fixed circle theorems on S-metric spaces with a geometric view point, arXiv:1704.08838.
11. Özgür, N. Y. ve Taş, N., 2016. Some generalizations of fixed point theorems on S-metric spaces, Essays in Mathematics ve Its Applications in Honor of Vladimir Arnold, Springer, New York.
12. Erçınar, G. Z., 2020. Sabit Noktaların Bazı Geometrik Özellikleri, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
13. Harkin, J., 2004. Geometry Of Generalized Complex Numbers, Mathematics Magazine, 77, 2, 118.
14. Azam, A., Fisher, B. ve Khan, M., 2011. Common fixed point theorems in complex valued metric spaces, Numerical Functional Analysis ve Optimization, 32, 243-253.

15. Öztürk, M., Kösal, I. A. ve Kösal, H. H., 2021. Coincidence and common fixed point theorems via ρ -class functions in elliptic valued metric spaces, *Analele Universitatii Ovidius Constanta - Seria Matematica*, 29, 1, 165-182.
16. Çallıalp, F., 1994. Cebir, Sakarya Üniversitesi Matbaası, Adapazarı, Sakarya.
17. Atalan, Y., 2017. Sabit nokta yaklaşımlarıyla bazı diferansiyel ve integral denklemlerin çözümlenmesi, Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
18. Özgür, N, Y., Taş, N. ve Çelik U., 2017. New fixed circle results on s-metric spaces, *Bulletin of Mathematical Analysis ve Applications*, 9, 2, 1023.
19. Özgür, N. Y. ve Taş, N., 2018. Some fixed circle theorems and discontinuity at fixed circle, *AIP Conference Proceedings*, 1926, 1, 020048.



ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : İsa TİMURTAŞ

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Siirt Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2012-2016.

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2021-2023.

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Makaleler

1. Timurtaş, İ. ve Can, Z., 2023. On Fixed Circle Theorems in a Metric Space, 6. Uluslararası Ayasofya Multidisipliner Bilimsel Araştırmalar Kongresi, 02-03 Haziran 2023, İstanbul, Türkiye.