



ELİPTİK DENKLEM İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

Fatih ARTIŞ
Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Prof. Dr. GABİL YAGUB
2017
Her Hakkı Saklıdır



T.C
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELİPTİK DENKLEM İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

FATİH ARTIŞ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. GABİL YAGUB

AĞRI -2017

TEZ ETİK VE BİLDİRİM SAYFASI

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum “Eliptik Denklem İçin Optimal Kontrol Problemi” adlı tezin tamamen kendi çalışmam olduğunu ve her alıntıya kaynak gösterdiğimi taahhüt eder, tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü arşivlerinde aşağıda belirttiğim koşullarda saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim-Öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

Tezimin 2 yıl süreyle erişime açılmasını istemiyorum. Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir

18.07.2017

Fatih ARTIŞ

Ağrı-2017

İÇİNDEKİLER

TEZ KABUL TUTANAĞI	I
TEZ ETİK ve BİLDİRİM SAYFASI	II
ÖZET.....	IV
ABSTRACT.....	V
SİMGELER DİZİNİ.....	VI
ÖN SÖZ	VII
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	6
3.1. Eliptik Denklem İçin Optimal Kontrol Probleminin Konulması	6
3.2. Eliptik Denklem İçin Sınır Değer Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği ..	7
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	10
4.1. Eliptik Denklem İçin Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği	10
4.2. Fonksiyonelin Gradyentinin Bulunması	18
4.3. Optimal Kontrol Probleminin Çözümü İçin Gradyent Yöntemi.....	22
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	26
KAYNAKLAR	27
ÖZGEÇMİŞ.....	29

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELİPTİK DENKLEM İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

Fatih ATİŞ

Tez Danışmanı: Prof Dr. Gabil YAGUB

2017, 29+VII

Jüri: Yrd. Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK

Jüri: Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Bu tezde eliptik denklem için bir optimal kontrol problemi ele alındı. Bu çalışmanın 3.1 bölümünde önce eliptik denklem için bir optimal kontrol problemi tanımlandı. 3.2 bölümünde eliptik denklem için birinci çeşit sınır değer problemlerinin genelleştirilmiş çözümlerinin varlığı ve tekliğine ait olan hüküm ve onu ispatı verildi. Bu hükümden yararlanarak 4.1 bölümünde söz konusu optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliğini içeren teorem ispatlandı. 4.2 bölümünde amaç fonksiyonelinin diferensiyellenebilir olduğu incelendi ve fonksiyonelin gradiyenti için formül elde edildi. Bu formülden yararlanarak optimal kontrol probleminin çözümü için gerek ve yeterli şart gösterildi. Nihayet çalışmanın 4.3 bölümünde optimal kontrol probleminin çözümü için gradiyent yönteminin algoritması verildi.

Anahtar Kelimeler: Eliptik denklemi, Sınır Değer Problemi, Optimal kontrol, Gradiyent Yöntemi

ABSTRACT

MASTER’S THESIS

OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR ELIPTIC EQUATION

Fatih ARTIŞ

Thesis Advisor: Prof. Dr. Gabil YAGUB

2017, page: 29 + VII

Jury: Asst. Assoc. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK

Jury: Assoc. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

In this thesis, an optimal control problem for the elliptic equation is discussed. In section 3.1 of this work, we first defined an optimal control problem for the elliptic equation. In section 3.2, the provision belonging to the existence and uniqueness of the generalized solutions, and the provision of it. Utilizing this provision, the problem of section 4.1 has been proved for solving of the optimal control problem and for the only expensive theorem. In section 4.2, objective functional were examined for differentiability and formula for gradient of functional were obtained. It was necessary and sufficient condition for the solution of optimal control problem. Finally, in section 4.3 of the work, an algorithm for solving of the optimal control problem is given.

Keywords: Elliptic Equation, Boundary Value Problem, Optimal Control, Gradient Method

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
$\leq$	Küçük veya Eşittir
$\geq$	Büyük veya Eşittir
$\subset$	Alt Küme
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı Değildir
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^n$	n –boyutlu Euclidean Uzay
$\overset{0}{\forall}$	Hemen Hemen
$\forall$	Herhangi
α	Alfa
β	Beta
χ	Hi
η	Eta
Δ	Delta
ψ	Psi
ξ	Ksi

ÖNSÖZ

Bu çalışma İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

Gelişen ve değişen dünyada 21. Yüzyıl teknolojisine ayak uydurmamız gerekmektedir. Burada bizim için olmazsa olmaz bilim dalı, matematiktir. Bu teknolojiyi yakalamak için, matematik biliminde en azami ölçüde yararlanmamız gerekmektedir.

Bu tez çalışması eliptik denklem için optimal kontrol probleminin iyi konulması ve çözümü için gerek ve yeterli şartla ilgili meseleler üzerine hazırlanmıştır

Çalışmalarımın planlanmasında, araştırılmasında ve oluşturulmasında ilgi ve desteğini esirgemeyen bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmesiyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren Sayın Prof. Dr. Gabil YAGUB danışman hocama en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tezin hazırlanma sürecinde manevi desteğini her zaman hissettiğim aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Fatih ARTIŞ

Ağrı-2017

1. GİRİŞ

Eliptik denklemler ile ifade edilen sistemler için optimal kontrol problemleri dağılmış parametrelili sistemler için optimal kontrol problemlerinin bir kısmı olup durgun ısı süreçlerinin öğrenilmesinde, elastikiyet teorisinde ve diğer alanlarda ortaya çıkar [7–9]. Bu nedenle eliptik denklem için optimal kontrol problemlerinin öğrenilmesi, gerek teorik gerekse pratik açıdan önem taşır.

Söylemek gerekir ki, eliptik denklemler ile ifade edilen sistemler için optimal kontrol problemleri önceden farklı araştırmacılar farklı konulmalarda incelenmiştir [1–3,6–12,14]. Bu çalışmaların çoğunluğunda amaç fonksiyoneli genelde alttan sınırlı fonksiyonellerdir ve olası kontroller kümesi ise ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar sınıfından seçilen kapalı sınırlı kümelerdir. Ancak sunulan bu tez çalışmasında amaç fonksiyoneli görünürde alttan sınırlı değil ve olası kontroller kümesi de karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır, yani olası kontroller kümesi genelde sınırsız kümedir.

Sunulan bu tez çalışmasında eliptik denklem için bir optimal kontrol problemi incelenmektedir. Burada esas amacımız konulan problemin çözümünün varlığını, tekliğini incelemek, çözüm için gerek ve yeterli şartlar elde etmek ve nümerik çözüm için algoritma oluşturmaktır. Tez çalışması giriş, kuramsal temeller, materyal ve yöntem, araştırma bulguları, tartışma ve sonuç olmak üzere beş bölümden ve kaynaklardan oluşmaktadır. Tezin 3.1 bölümünde eliptik denklem için optimal kontrol probleminin konulması verilir. 3.2 bölümünde eliptik denklem için 1. çeşit sınır değer probleminin genelleştirilmiş çözümünün varlığı ve tekliğine ait önceden bilinen hüküm verilmiştir. 4.1 bölümünde optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanmıştır. 4.2 bölümünde amaç fonksiyonelinin diferansiyellenebilirliği incelenmiş

ve fonksiyonelin gradiyenti için formül bulunmuştur. Bu formülden yararlanarak optimal kontrol probleminin çözümü için gerek ve yeterli şart ifade edilmişti. 4.3 bölümünde fonksiyonelin gradiyenti için olan formülü kullanarak bir boyutlu haldeki eliptik denklem için optimal kontrol problemin çözüm algoritması açıklanmıştır. Tartışma ve sonuç bölümünde ise bu çalışmanın daha önceki yapılan çalışmalardan farklılığı ortaya konulmuş ve tezin önemi vurgulanmıştır.



Fatih ARTİŞ

Ağrı-2017

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde çalışma boyunca kullanacağımız tanım ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 2.1: $L_2(D)$ uzayı Hilbert Uzayı olup elemanları D bölgesinde ölçülebilir ve karesiyle integrallenebilir fonksiyonların Lebesgue uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\langle u, v \rangle_{L_2(D)} = \int_D u(x)v(x)dx$$

$$\|u\|_{L_2(D)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{L_2(D)}} < +\infty.$$

Tanım 2.2: $W_2^1(D)$ Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların $\frac{\partial u}{\partial x_j} \quad j=1, n$

birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(D)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle u, v \rangle_{W_2^1(D)} = \int_D \left[\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_j} + u(x)v(x) \right] dx$$

$$\|u\|_{W_2^1(D)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_2^1(D)}}$$

$W_2^0(D)$ uzayı $W_2^1(D)$ 'nin alt uzayı olup elemanları D 'nin sınırında sıfıra dönüşen fonksiyonlardır [5].

Tanım 2.3: V, X lineer uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer $\forall u, v \in V$ ve $\alpha \in [0,1]$ için $\alpha u + (1-\alpha)v \in V$ oluyorsa, V kümesine X de konveks küme denir [4].

Tanım 2.4: Eğer B Banach Uzayından olan $\{u_k\}$ dizisi için $\forall c \in B^*, \lim_{k \rightarrow \infty} \langle c, u_k \rangle = \langle c, u \rangle$ şartı sağlanıyorsa bu takdirde $\{u_k\}$ dizisi $u \in B$ noktasına zayıf yakınsıyor denir. Burada B^* uzayı B 'nin eşlenik uzayıdır [4,13].

Tanım 2.5: U, B Banach Uzayının bir kümesi olsun. Eğer $\forall \{u_k\} \in U$ dizisinden zayıf yakınsayan en azından bir alt dizi seçmek mümkün ise bu takdirde U kümesine B de zayıf kompakt küme denir [4,13].

Tanım 2.6: $J(u)$ fonksiyoneli B Banach Uzayının U alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer, $u \in U$ noktasına zayıf yakınsayan $\{u_k\} \in U$ dizisi için $\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) \geq J(u)$ şartı sağlanıyorsa bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneline u noktasında alttan zayıf yarı sürekli denir [13].

Tanım 2.7: Diyelim ki B herhangi Banach Uzayı ve $J(u)$ fonksiyoneli u noktasının herhangi bir $\omega(u, \gamma) = \{v : v \in B, \|v - u\| < \gamma\}$ komşuluğunda tanımlanmış olsun. Eğer fonksiyonelin artışı için

$$\lim_{\|h\|_B \rightarrow 0} \frac{o(h, u)}{\|h\|_B} = 0$$

olacak şekilde $\Delta J(u) = J(u + h) - J(u) = \langle J'(u), h \rangle_B + o(h, u)$ şartını sağlayan $J'(u) \in B^*$ elemanı varsa, bu taktirde $J(u)$ fonksiyoneli u noktasında Frechet anlamında diferansiyellenebilir. Burada B^* uzayı B 'nin eşlenik uzayıdır [13].

Teorem 2.8: Diyelim ki U, B Banach uzayının konveks bir alt kümesi, $J(u)$ fonksiyoneli bu kümede 1. mertebeden sürekli türevlenebilir konveks fonksiyonel ve $U_* = \left\{ u \in U : J(u) = J_* = \inf_u J(u) \right\}$ kümesi $J(u)$ fonksiyonelinin minimum noktalar

kümesi olsun. Bu takdirde $\forall u^* \in U_*$ için $\langle J'(u^*), u - u^* \rangle \geq 0$ şartının sağlanması gerek ve yeterlidir. Eğer $U \equiv B$ ise, bu takdirde $\forall u^* \in U_*$ için $J'(u^*) = 0$ şartının sağlanması gerek ve yeterlidir [13].

Teorem 2.9 (Weierstrass Teoremi): U, B Banach Uzayında zayıf kompakt küme olsun. $J(u)$ fonksiyoneli ise bu kümede tanımlanan sonlu değerlere sahip ve alttan zayıf yarı sürekli olsun. Bu takdirde $J_* = \inf_u J(u) > -\infty$, $U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\} \neq \emptyset$ zayıf kompakttır ve U dan olan herhangi minimalleştirici dizi minimum noktalar kümesine yakınsar [13].

Lemma 2.10 (Cauchy – Bunjakovski Eşitsizliği): $u, v \in L_2(\Omega)$ elemanları için

$$\left| \int_{\Omega} u \bar{v} dx d\tau \right| \leq \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği geçerlidir [5].

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Eliptik Denklem İçin Optimal Kontrol Probleminin Konulması

Farz edelim ki $D \in R^n$ n-boyutlu Eucliden uzayının sınırlı, açık kümesi olsun ve $\Gamma \in C^2$ yani Γ sınırı 2. mertebeden sürekli türevlenebilir sınırı olsun. Aşağıdaki optimal kontrol problemini göz önüne alalım.

$$J_\alpha(v) = -\beta \int_D |u(x;v) - y(x)|^2 dx + \alpha \int_D |v(x)|^2 dx \quad (3.1.1)$$

fonksiyonelinin $V \equiv L_2(D)$ kümesi üzerinde

$$-\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \right) + a(x)u = v(x), \quad x \in D \quad (3.1.2)$$

$$u|_\Gamma = 0, s \in \Gamma \quad (3.1.3)$$

şartları altında minimumunu bulmak gerekir. Burada $\beta > 0, \alpha > 0$ verilen sayılar, $a_{jk}(x), a(x)$ fonksiyonları ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar olup aşağıdaki şartları sağlar.

$$a_{jk}(x) = a_{jk}(x), \quad j, k = 1, n \quad (3.1.4)$$

$$\mu_0 \|\xi\|_{R^n}^2 \leq \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \xi_j \xi_k \leq \mu_1 \|\xi\|_{R^n}^2, \quad \forall \xi \in R^n, \quad \forall x \quad (3.1.5)$$

$$0 < \mu_2 < a(x) \leq \mu_3, \quad \forall x \in D \quad (3.1.6)$$

$\mu_j = \text{sabit} > 0 \quad j = \overline{0,3}, \quad y \in L_2(D)$ verilen fonksiyondur.

Her bir $u \in V$ için (3.1.2)-(3.1.3) şartlarından $u = u(x) = u(x;v)$ fonksiyonun bulunması problemi eliptik denklem için 1. çeşit sınır değer problemidir. Bu problemin çözümü olarak; $\forall \eta = \eta(x) \in W_2^1(D)$ için

$$\int_D \left[\sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + a(x) u \eta \right] dx = \int_D v(x) \eta(x) dx \quad (3.1.7)$$

integral özdeşliğini sağlayan ve $W_2^1(D)$ uzayına ait olan $u = u(x) = u(x; v)$ fonksiyonu anlaşılmaktadır.

Söylemek gerekir ki (3.1.1)-(3.1.3) tipinde optimal kontrol problemleri $\beta < 0$ için önceki çalışmalarda ele alınmıştır ve problemin çözümünün varlığına ait hükümleri ispatlanmıştır. Şimdiki halde (3.1.1)-(3.1.3) optimal kontrol problemi $\beta < 0$ olması nedeniyle önceki çalışmalardan farklıdır.

3.2. Eliptik Denklem için Sınır Değer Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

Bu bölümde önceki çalışmalardan bildiğimiz ve eliptik denklemler için 1. Sınır değer probleminin çözümünün varlığına ve bir tekliğine ait hükmü ve onun ispatını vereceğiz.

TEOREM 3.2.1: Farz edelim ki $\alpha_{jk}(x), \alpha(x)$ fonksiyonları (3.1.4)-(3.1.6) şartlarını sağlasın ve $\Gamma \in C^2$ olsun. Bu takdirde (3.1.2)-(3.1.3) sınır değer probleminin $W_2^1(D)$ uzayına ait olan bir tek genelleştirilmiş çözümü vardır ve çözümü için:

$$\|u\|_{W_2^1(D)}^0 \leq c_0 \|v\|_{L_2(D)} \quad (3.2.1)$$

kestirimi geçerlidir. Burada c_0 sayısı v 'ye bağlı olmayan sayıdır.

İspat: Şarta göre $\alpha(x)$ ve $\alpha_{jk}(x)$ fonksiyonları (3.1.4),(3.1.6) şartlarını sağladığından $W_2^1(D)$ uzayının bildiğimiz;

$$\langle u, \eta \rangle_{W_2^1(D)}^0 = \int_D \left[\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + v \eta \right] dx \quad (3.2.2)$$

iç çarpımına denk olan aşağıdaki iç çarpımı verebiliriz:

$$\langle u, \eta \rangle_{W_2^1(D)} = \int_D \left[\sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + a(x) v \eta \right] dx \quad (3.2.3)$$

bu nedenle (3.1.7) integral özdeşliğini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\langle u, \eta \rangle_{W_2^1(D)} = \langle u, \eta \rangle_{L_2(D)} \quad (3.2.4)$$

Tespit edilmiş $v \in L_2(D)$ için (3.2.4)'ün sağ tarafı olan $\langle u, \eta \rangle_{L_2(D)}$ ifadesi $W_2^1(D)$ 'de

lineer fonksiyoneldir ve $\eta \in W_2^1(D)$ 'dir. Cauchy Bunjakovsky eşitsizliğini kullanırsak:

$$\langle v, \eta \rangle_{L_2(D)} \leq \|v\|_{L_2(D)} \|\eta\|_{L_2(D)} \leq c_0 \|v\|_{L_2(D)} \|\eta\|_{W_2^1(D)}^0 \quad (3.2.5)$$

burada c_0 sayısı v ve η 'den bağımsızdır. (3.2.5) eşitsizliği $\langle u, \eta \rangle_{L_2(D)}$ fonksiyoneli

sınırlıdır ve bu fonksiyonelin normu $c_0 \|v\|_{L_2(D)}$ norm miktarı ile sınırlanır. Bu takdirde

[4] çalışmasından bilinen Riesz teoremine göre: $\forall \eta \in W_2^1(D)$

$$\langle v, \eta \rangle_{L_2(D)} = \langle v, \eta \rangle_{W_2^1(D)}^0 \quad (3.2.6)$$

olacak biçimde $u \in W_2^1(D)$ fonksiyonu vardır. Bu fonksiyon bir tektir ve bu fonksiyon

için;

$$\|u\|_{W_2^1(D)}^0 \leq c_0 \|v\|_{L_2(D)} \quad (3.2.7)$$

kestirimi geçerlidir. (3.2.6) ile (3.2.4)'yi karşılaştırmış olursak $u = u(x) \in W_2^1(D)$

fonksiyonu (3.1.2)-(3.1.3) sınır değer probleminin bir tek çözümü olduğunu ve bu

çözümün (3.1.7) integral özdeşliğini sağladığını ve (3.2.1) kestiriminin geçerli

olduğunu elde ediyoruz. Böylece teorem ispatlandı.

Teorem 1'den gözüktüğü gibi $u \in L_2(D)$ olduğundan 1. Bölümden ele alınan fonksiyonelin anlamına sahip görüyoruz.



4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Eliptik Denklem İçin Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

Şimdi (1)-(3) optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliğini öğrenelim.

TEOREM 4.1.1: Farz edelim ki $a(x), a_{jk}(x), j, k = \overline{1, n}$ fonksiyonları (3.1.4)-(3.1.6)

şartlarını sağlasın ve $y \in L_2(D)$ olsun. Bunların yanı sıra farz edelim ki $\alpha > 0, \beta > 0$ sayıları

$$\alpha - 2\beta c_0 > 0 \quad (4.1.1)$$

şartlarını sağlasın. Bu takdirde (3.1.1)-(3.1.3) optimal probleminin bir tek çözümü var ve aşağıdaki şartlar geçerlidir:

$$\|v^m - v^*\|_{L_2(D)} \leq \frac{2}{\alpha - 2\beta c_0} [J_\alpha(v^m) - J_\alpha(v^*)] \quad (4.1.2)$$

burada v^* (3.1.1)-(3.1.3) probleminin çözümü v^m ise V 'den olan herhangi minimalleştirici dizidir.

İSPAT : $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin tanımından gözüktüğü gibi $\forall v \in V$ için $J_\alpha(v) < +\infty$ yani;

$$-\beta \|u - y\|_{L_2(D)}^2 + \|v\|_{L_2(D)}^2 < +\infty \quad (4.1.3)$$

bu taktirde; $\inf J_\alpha(v) < +\infty$ eşitsizliği geçerlidir. Sonucu eşitsizliğe göre:

$$\inf J_\alpha(v) = \inf J_\alpha(v^m) < +\infty \quad (4.1.4)$$

$$J_\alpha(v^m) = -\beta \|u_m - y\|_{L_2(D)}^2 + \alpha \|v\|_{L_2(D)}^2 \leq M, \quad M \geq 1 \quad (4.1.5)$$

olacak biçimde $\{v^m\} \in V$ dizisi ve $M > 0$ sayısı vardır. Burada $u_m = u(x; v^m)$ (3.1.2)-

(3.1.3) sınır değer probleminin $v^m \in V$, $m = 1, 2, 3, \dots$ 'ye karşılık gelen çözümdür. $M > 0$

sayısı ise m ' den bağımsızdır. (3.2.1) kestiriminden yararlanarak her bir m için;

$$\|u^m\|_{W_2^1(D)}^2 = c_0 \|v^m\|_{L_2(D)}^2, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.1.6)$$

kestirimin elde ederiz. Burada $c_0 > 0$ sayısı m 'e bağlı değildir. (4.1.5) eşitsizliğini

kullanarak bir sonraki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\alpha \|v^m\|_{L_2(D)}^2 \leq M + \beta \|u_m - y\|_{L_2(D)}^2$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki 2. terimi değerlendirerek bir sonraki eşitsizliğin geçerli olduğunu elde ederiz.

$$\alpha \|v^m\|_{L_2(D)}^2 \leq M + 2\beta \|u_m\|_{L_2(D)}^2 + 2\beta \|y\|_{L_2(D)}^2 \quad (4.1.7)$$

Bu eşitsizlikte (4.1.6) kestirimini uygularsak;

$$\alpha \|v^m\|_{L_2(D)}^2 \leq M + 2\beta c_0 \|u_m\|_{L_2(D)}^2 + 2\beta \|y\|_{L_2(D)}^2$$

eşitsizliğini elde ederiz. Teoremden yer alan (4.1.1) şartını kullanırsak sonucu eşitsizliği aşağıdaki gibi bir biçimde yazabiliriz:

$$(\alpha - \beta c_0) \|v^m\|_{L_2(D)}^2 \leq M + 2\beta \|y\|_{L_2(D)}^2$$

burada $c_1 = \frac{M + 2\beta \|y\|_{L_2(D)}^2}{(\alpha - \beta c_0)}$ ile gösterirsek:

$$\|v^m\|_{L_2(D)}^2 \leq c_1, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.1.8)$$

eşitsizliğin geçerli olduğunu görürüz. Bu eşitsizlik $\{v^m\}$ dizisinin kapalı küresinde olduğunu gösterir. $L_2(D)$ 'de olan kapalı küre, zayıf kompakt ve zayıf kapalı olduğundan $\{v^m\}$ dizisinden $v \in L_2(D)$ 'ye zayıf yakınsayan $\{v^{mk}\}$ alt dizisini seçebiliriz[4,13]. Kolay olsun diye bu zayıf yakınsayan diziyi yine de $\{v^m\}$ 'i ile gösterelim bu takdirde;

$$v^m \rightarrow v \quad L_2(D)'de \text{ zayıf} \quad (4.1.9)$$

limit bağıntısını yazabiliriz. Limit noktası için;

$$\|v\|_{L_2(D)}^2 \leq c_1 \quad (4.1.10)$$

eşitsizliği kolaylıkla elde edilir. (4.1.8)'i (4.1.6)'da kullanırsak:

$$\|v\|_{W_2^1(D)}^2 \leq c_2, \quad m=1,2,3,\dots \quad (4.1.11)$$

kestirimi elde edilir. Burada $c_2 = c_0 c_1$ 'dir. Bu eşitsizlikte $\{u_m\}$ dizisini $W_2^1(D)$ uzayına ait olan kapalı kürenin elemanı olduğunu gösterir. $W_2^1(D)$ uzayı Hilbert uzayı olduğundan kapalı küre bu uzayda zayıf kompakt ve zayıf kapalıdır. Bu nedenle $\{u_m\}$ dizisinden $W_2^1(D)$ uzayında $u \in W_2^1(D)$ 'ye zayıf yakınsayacak alt diziyi seçebiliriz. Yine de kolay olsun diye bu zayıf yakınsayan alt diziyi $\{u_m\}$ ile gösterelim. Bu takdirde aşağıdaki limit bağıntılarını yazabiliriz.

$$m \rightarrow \infty \quad (4.1.12)$$

$$u_m \rightarrow u, \quad L_2(D)'de \text{ zayıf} \quad (4.1.13)$$

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_j} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad j=1,2,3,\dots, L_2(D)'de \text{ zayıf} \quad (4.1.14)$$

Her bir m için $u_m \in W_2^1(D)$ fonksiyon (3.1.2)-(3.1.3) sınır değer probleminin genelleştirilmiş çözümü olduğundan $\eta \in W_2^1(D)$ için;

$$\iint_D \left[\sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + a(x) u_m \eta \right] dx = \int_D v^m(x) \eta(x) dx \quad (4.1.15)$$

integral özdeşliğinin sağlandığını gösterebiliriz. (4.1.9)-(4.1.13)-(4.1.14) limit bağıntılarını kullanarak (26) özdeşliğinin geçerli olduğunu elde ederiz:

$\forall \eta = \eta(x) \in W_2^1(D)$ için

$$\iint_D \left[\sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + a(x) u \eta \right] dx = \int_D v(x) \eta(x) dx \quad (4.1.16)$$

böylece $\{u_m\}$ dizisinin limit fonksiyonu olan $u = u(x)$ fonksiyonun $W_2^1(D)$ 'den olduğu ve (27) özdeşliğini sağladığını ispatlamış oluyoruz. Şimdi $u \in W_2^1(D)$ olduğunu yani $u|_{\Gamma} = 0$ olduğunu gösterelim;

$W_2^1(D)$ uzayı $L_2(\Gamma)$ 'ya kompakt gömüldüğünden $\{u_m\} \subset W_2^1(D)$ dizisi $u \in W_2^1(D)$ elemanına $L_2(\Gamma)$ 'da kuvvetli yakınsayacak.

$$u_m \rightarrow u, \quad L_2(D) \text{ 'de kuvvetli} \quad (4.1.17)$$

şimdi $-\beta \|u(x, v) - y\|_{L_2(D)}^2$ fonksiyonelinin v 'ye göre zayıf sürekli olduğunu gösterelim.

Bu amaçla:

$$J_0(v) = -\beta \|u(x, v) - y\|_{L_2(D)}^2 \quad (4.1.18)$$

gösterimini yapalım. Bu formülü kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz;

$$\begin{aligned}
J_0(v^m) - J_0(v) &= -\beta \|u(x, v^m) - y\|_{L_2(D)}^2 + \beta \|u(x, v) - y\|_{L_2(D)}^2 \\
&= -\beta \int_D \left[(u(x, v^m) - y(x))^2 - (u(x, v) - y(x))^2 \right] dx \\
&= -\beta \int_D \left[(u(x, v^m) - y(x)) (u(x, v) - y(x)) \right] dx \\
&= -\beta \int_D \left[(u(x, v^m) - y(x))^2 - (u(x, v) - y(x))^2 \right] dx
\end{aligned}$$

bu eşitsizliğin her iki tarafını değerlendirip Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğini uygularsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\|J_0(v^m) - J_0(v)\| = 2\beta \|u - y\| \cdot \|u_m - u\|_{L_2(D)}^2 + \beta \|u^m - u\|_{L_2(D)}^2$$

Bu eşitsizliğin her iki yanına da $m \rightarrow \infty$ için limite geçerse (4.1.17) limit bağıntısını kullanırsak:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J_0(v^m) = J_0(v) \quad (4.1.19)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Yani bu eşitsizlik $J_0(v)$ fonksiyonelinin v kümesine zayıf sürekli olduğunu göstermektedir. Diğer yandan $\alpha > 0$ için $\alpha \|v\|_{L_2(D)}^2$ fonksiyoneli alttan zayıf yarı sürekli fonksiyonel olduğundan v 'ye zayıf yakınsayan $\{v^m\}$ dizisi için aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha \|v^m\|_{L_2(D)}^2 \geq \alpha \|v\|_{L_2(D)}^2 \quad (4.1.20)$$

Bu takdirde (4.1.18) formülünden ve (4.1.19)-(4.1.20) limit bağıntılarından yararlanırsak bir sonraki bağıntıyı yazabiliriz.

$$\inf J_\alpha(w) \leq J_\alpha(v) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} J_\alpha(w) = \lim_{m \rightarrow \infty} J_\alpha(v^m) + \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha \|v^m\|_{L_2(D)}^2$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} J_{\alpha}(v^m) = \inf_{w \in V} J_{\alpha}(w) \quad (4.1.21)$$

Eşitsizliği elde ederiz. Böylece $v \in V$ 'nin optimal kontrol probleminin çözümü olduğu elde edilir.

Şimdi $\alpha - 2\beta c_0 > 0$ şartı altında $J_{\alpha}(v)$ fonksiyonelinin kuvvetli konveks fonksiyon olduğunu gösterelim. Yani $\forall v_0, v_1 \in V \equiv L_2(D), \forall \tau \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} J_{\alpha}(v_0) &= J_{\alpha}(\tau v_1 + (1-\tau)v_0) \\ &\leq \tau J_{\alpha}(v_1) + (1-\tau)J_{\alpha}(v_0) - \chi \tau(1-\tau) \|v_1 - v_0\|_{L_2(D)}^2 \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

olacak biçimde $\chi > 0$ sabitinin var olduğunu gösterelim. (3.1.2)-(3.1.3) sınır değer probleminin $v_0 \in V$ 'ye karşılık gelen çözümünü $u_0 = u_0(x) = u(x, v_0)$, $v_1 \in V$ 'ye karşılık gelen çözümünü $u_1 = u_1(x) = u(x, v_1)$ olarak gösterelim. Bu takdirde denklemin lineer biçimde yer almasını göz önünde bulundurarak aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$\begin{aligned} u_{\Gamma}(x) &= u(x, v_2) = u(x, \tau v_1 + (1-\tau)v_0) \\ &= \tau u(x, v_1) + (1-\tau)u(x, v_0) \\ &= \tau u_1(x) + (1-\tau)u_0(x) \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

bu formülü $J_{\alpha}(v)$ fonksiyonelinin ifadesinde yerine yazalım. Bu takdirde aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} J_{\alpha}(v\tau) &= -\beta \|u_{\tau} - y\|_{L_2(D)}^2 + \alpha \|u\|_{L_2(D)}^2 \\ &= -\beta \|\tau(u_1 - y) + (1-\tau)(u_0 - y)\|_{L_2(D)}^2 + \alpha \|\tau v_1 + (1-\tau)v_0\|_{L_2(D)}^2 \\ &= -\beta \tau \|(u_1 - y)\|_{L_2(D)}^2 - \beta (1-\tau) \|(u_0 - y)\|_{L_2(D)}^2 + \alpha \tau \|v_1\|_{L_2(D)}^2 + \alpha (1-\tau) \|v_0\|_{L_2(D)}^2 \\ &\quad - \alpha \tau(1-\tau) \|v_1 - v_0\|_{L_2(D)}^2 + \beta \tau(1-\tau) \|u_1 - u_0\|_{L_2(D)}^2 \end{aligned}$$

böylece $J_\alpha(v_\tau)$ için aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$J_\alpha(v_\tau) = \tau J_\alpha(v_1 + (1-\tau)v_0) - \alpha\tau(1-\tau)\|v_1 - v_0\|_{L_2(D)}^2 + \beta\tau(1-\tau)\|u_1 - u_0\|_{L_2(D)}^2 \quad (4.1.24)$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki sonuncu terimi değerlendirmeye çalışalım.

$\tilde{u} = u_1 - u_0$ olarak gösterelim. (3.1.2),(3.1.3) sınır değer problemini kullanırsak kolaylıkla $\tilde{u} = \tilde{u}(x)$ fonksiyonun aşağıdaki sınır değer probleminin çözümü olduğunu elde ederiz.

$$-\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{jk}(u) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_k} + a(x) \tilde{u}(x) \right) = \tilde{v}(x) \quad (4.1.25)$$

$$\tilde{u}|_\Gamma = 0, \quad s \in \Gamma \quad (4.1.26)$$

Burada $\tilde{v} = v_1 - v_0$ görüldüğü üzere (4.1.25)-(4.1.26) sınır değer problemi (3.1.2)-(3.1.3) sınır değer problemi biçiminde bir problemidir. Bu taktirde (4.2.1) kestirimine aynı olarak bir sonraki kestirimi elde edebiliriz.

$$\|\tilde{v}\|_{W_2}^2 \leq c_0 \|v\|_{L_2(D)}^2 \quad (4.1.27)$$

Burada $c_0 > 0$ sayısı (4.2.1) kestiriminde yer alan sabittir. Buradan da aşağıdaki eşitsizliği elde edebiliriz:

$$\|u_1 - u_0\|_{W_2}^2 \leq c_0 \|v_1 - v_2\|_{L_2(D)}^2 \quad (4.1.28)$$

bu kestirimden ve aşağıdaki eşitsizlikten:

$$\|u_1 - u_0\|_{L_2(D)}^2 \leq c_0 \|u_1 - u_0\|_{W_2}^2 \quad (4.1.29)$$

bir sonraki kestirimi yazabiliriz.

$$\|u_1 - u_0\|_{L_2(D)}^2 \leq c_0 \|u_1 - u_0\|_{L_2(D)}^2 \quad (4.1.30)$$

Bu eşitsizliği (4.1.24)'te dikkate alırsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\begin{aligned} J_{\alpha}(v^{\tau}) &= J_{\alpha}(\tau v_1 + (1-\tau)v_0) \\ &\leq \tau J_{\alpha}(v_1) + (1-\tau)J_{\alpha}(v_0) - \alpha\tau(1-\tau)\|v_1 - v_0\|_{L_2(D)}^2 \\ &\quad + \beta\tau_0(1-\tau)\|v_1 - v_0\|_{L_2(D)}^2 \end{aligned} \quad (4.1.31)$$

$\alpha - 2\beta c_0 > 0$ olduğundan $\chi = \alpha - \beta c_0 > 0$ şartı sağlanıyor. Böylece (4.1.30)'de $\chi = \alpha - \beta c_0 > 0$ sabitini yerine yazarsak (4.1.25) eşitliğinin geçerli olduğunu elde ederiz. Bu ise $J_{\alpha}(v)$ fonksiyonelinin $\alpha - 2\beta c_0 > 0$ şartı altında kuvvetli konveks olduğunu gösterir. Kuvvetli konveks fonksiyonel aynı zamanda ciddi konveks fonksiyoneldir. Ciddi konveks fonksiyonel minimumu var ve bir tektir. Üstte ispat ettiğimize göre $\alpha - 2\beta c_0 > 0$ şartı altında (3.1.1)-(3.1.3) Optimal kontrol probleminin en az bir çözümü vardır ve $J_{\alpha}(v)$ ciddi konveks olduğundan minimum noktası bir tek olacaktır. Böylece (3.1.1)-(3.1.4) optimal kontrol probleminin bir tek çözüme sahip olduğunu ispatladık.

Şimdi teoremde yer alan eşitsizliği ispatlayalım. Bu amaçla (4.1.22)'ü kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\chi\tau(1-\tau)\|v_1 - v_0\|_{L_2(D)}^2 \leq -J_{\alpha}(\tau v_1 + (1-\tau)v_0) + (1-\tau)J_{\alpha}(v_0) \quad (4.1.32)$$

Şimdi farz edelim ki $\{v^m\} \in V$ herhangi minimalleştirici dizi $v^* \in V$ (3.1.1)-(3.1.3) kontrol probleminin çözümü olsun.

$$\tau = \frac{1}{2}, \quad v_1 \in \frac{1}{2}, \quad v_0 = v^* \text{ alırsak ve bunları (4.1.32)'te yerine yazarsak aşağıdaki}$$

eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\frac{\chi}{4} \|v^m - v_0\|_{L_2(D)}^2 &\leq -J_\alpha \left(\frac{1}{2} v^m + \frac{1}{2} v^* \right) + \frac{1}{2} J_\alpha(v^m) + \frac{1}{2} J_\alpha(v^*) \\
&\leq -J_\alpha(v^*) + \frac{1}{2} J_\alpha(v^m) + \frac{1}{2} J_\alpha(v^*) \\
&= \frac{1}{2} J_\alpha(v^m) - \frac{1}{2} J_\alpha(v^*)
\end{aligned}$$

Buradan da;

$$\|v^m - v_0\|_{L_2(D)}^2 \leq \frac{2}{\chi} (J_\alpha(v^m) - J_\alpha(v^*)) = \frac{2}{\alpha - 2\beta c_0} (J_\alpha(v^m) - J_{a^*})$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Burada

$$J_{a^*} = \inf_{v \in V} J_a(v) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} J_a(v^m) = J_{a^*} \text{ olur. Teorem böylece ispatlanır.}$$

Bu Teoremde $\alpha - 2\beta c_0 > 0$ şartı ve kabul edilmiş diğer şartlar altında (3.1.1)-(3.1.3)

optimal kontrol probleminin iyi konulmuş problem olduğunu göstermektedir.

Böyle olduğu taktirde (3.1.1)-(3.1.3) optimal kontrol problemini çözmek için direkt yaklaşık yöntemlerini kullanabiliriz. Bu yöntemlerden biri grandiyent yöntemidir. Bu sebepten şimdi fonksiyonelin diferansiyellenebilir olduğunu inceleyim ve gradiyent için formül elde edelim.

4.2. Fonksiyonelin Gradiyentinin Bulunması

Farz edelim ki $\psi = \psi(x)$ fonksiyonu aşağıdaki sınır değer probleminin çözümü olsun.

$$-\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{jk}(u) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + a(x) \psi \right) = 2\beta(u(x) - y) \quad (4.2.1)$$

$$\psi|_\Gamma = 0, \quad s \in \Gamma \quad (4.2.2)$$

Burada $u = u(x) = u(x, v)$ fonksiyonu $v \in V$ için (3.1.2)-(3.1.3) sınır değer probleminin çözümdür. Bu probleme (3.1.1)-(3.1.3) optimal kontrol problemine eşlenik olan problem denir.

Eşlenik problemin çözümü olarak; $\forall \eta_1 = \eta_1(x) \in W_2^1$ için

$$\iint_D \left[\sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \frac{\partial \eta_1}{\partial x_k} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + a(x) \psi \eta_1 \right] dx = 2\beta \int_D (u(x) - y(x) \eta_1(x)) dx \quad (4.2.3)$$

integral özdeşliğini sağlayan $W_2^1(D)$ uzayına ait olan $\psi = \psi(x) = \psi(x, v)$ fonksiyonu anlaşılır.

Görüldüğü üzere eşlenik problem (3.1.2)-(3.1.3) sınır değer problemi biçiminde bir problemidir. Burada $u \in L_2(D)$, $y \in L_2(D)$ olduğundan $2\beta(u - y) \in L_2(D)$ olacaktır. Bu takdirde Teorem 1'e dayanarak eşlenik probleminde bir tek çözüme sahip olduğu ve çözüm için aşağıdaki kestirimin geçerli olduğuna hükmedebiliriz:

$$\|\psi\|_{W_2^1(D)} \leq c_3 \|u(x) - y\|_{L_2(D)} \quad (4.2.4)$$

burada $c_3 = 4c_0\beta^2$ 'dir.

Şimdi (3.1.1) fonksiyonelinin $\forall v \in V$ noktasında artışını bulalım. v 'ye $\Delta v \in L_2(D)$ artışını verelim. Bu taktirde (3.1.2)-(3.1.3) sınır değer probleminin $v \in V$ için çözümünü $u = u(x) = u(x, v)$, $v + \Delta v \in V$ için çözümünü:

$u_\Delta = u_\Delta(x) = u(x, v + \Delta v)$ ile gösterirsek bu taktirde;

$$\Delta u = \Delta u(x) = u_\Delta(x) - u(x) = u(x, v + \Delta v) - u(x, v)$$

fonksiyonu aşağıdaki sınır değer probleminin çözümü olacaktır.

$$-\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{jk} \frac{\partial \Delta v}{\partial x_k} + a(x) \Delta u \right) = \Delta v(x), \quad (4.2.5)$$

$$\Delta u|_{\Gamma} = 0, \quad s \in \Gamma. \quad (4.2.6)$$

$\Delta u = \Delta u(x)$ fonksiyonunun aşağıdaki özdeşliği sağlaması açıktır.

$$\int_D \left[\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{jk} \frac{\partial \Delta v}{\partial x_k} + a(x) \Delta u \eta \right) \right] dx = \int_D \Delta v(x) \eta(x) dx \quad (4.2.7)$$

(4.2.5)-(4.2.6) problemi (3.1.2)-(3.1.3) sınır değer biçiminde problem olduğundan (4.2.1) kestirimine aynı olarak aşağıdaki kestirimin geçerli olduğuna hükmedebiliriz.

$$\|u\|_{W_2^1(D)}^2 \leq c_0 \|\Delta v\|_{L_2(D)}^2 \quad (4.2.8)$$

Şimdi $v \in V$ noktasında fonksiyonelin artışını yazarsak aşağıdaki formülü elde ederiz.

$$\begin{aligned} J_{\alpha}(v + \Delta v) - J_{\alpha}(v) &= -2\beta \int_D (u(x, v) - y(x) \Delta u(x)) dx \\ &\quad + 2\alpha \int_D u(x) \Delta u(x) dx - \beta \|\Delta u\|_{L_2(D)}^2 + \alpha \|\Delta v\|_{L_2(D)}^2 \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Burada $\Delta u = \Delta u(x)$ (4.2.5)-(4.2.6) sınır değer probleminin çözümü $u = u(x) = u(x, v)$ ise (3.1.2)-(3.1.3) sınır değer probleminin çözümüdür. (4.2.9) eşitliğinin sağ tarafındaki 1. terimi dönüştürmeye çalışalım. Bu amaçla (4.2.3) integral eşitliğinde

$$\eta_1 = \eta_1(x) = \Delta u(x) \in W_2^1(D) \quad (4.2.7) \text{ integral özdeşliğinde ise } \eta_1 = \eta_1(x) = \psi(x) \in W_2^1(D)$$

alıp elde edilen eşitlikleri taraf tarafa çıkarırsak bir sonraki eşitliği elde ederiz.

$$\begin{aligned} 2\beta \int_D (u(x) - y(x) \Delta u(x)) dx &= \int_D \Delta v(x) \psi(x) dx - 2\beta \int_D (u(x) - y(x) \Delta u(x)) dx \\ &= - \int_D \Delta v(x) \psi(x) dx \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliği (4.2.9)'de dikkate alırsak fonksiyonelin artışı için aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\Delta J_{\alpha}(v) = J_{\alpha}(v + \Delta v) - J_{\alpha}(v) = \int_D [-\psi(x) + 2\alpha v(x)] \Delta v(x) dx + R \quad (4.2.10)$$

Burada:

$$R = \beta \|\Delta u\|_{L_2(D)}^2 + \alpha \|\Delta v\|_{L_2(D)}^2 \quad (4.2.11)$$

(4.2.8) kestirimini kullanırsak R için aşağıdaki bağlantıyı kolaylıkla elde ederiz.

$$R = o\left(\|\Delta v\|_{L_2(D)}^2\right) \quad (4.2.12)$$

Böylece (4.2.10)-(4.2.12)'ten yararlanırsak fonksiyonelin artışı için aşağıdaki eşitliği elde etmiş oluyoruz.

$$\Delta J_\alpha(v) = \int_D [-\psi(x) + 2\alpha v(x)] \Delta v(x) dx + o\left(\|\Delta v\|_{L_2(D)}^2\right) \quad (4.2.13)$$

Fonksiyonellerin Frechet anlamında türevinin [4,13] tanımını kullanıp (4.2.13) formülünden $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin Frechet anlamında diferansiyellenebilir olduğunu ve onun gradiyenti için:

$$J'_\alpha(v) = -\psi(x) + 2\alpha v(x)$$

formülünü elde ederiz.

Şimdi bu formülden yararlanarak optimal kontrol probleminin çözümü için aşağıdaki gerek ve yeterli şartı getirelim.

TEOREM 4.2.1: Farz edelim ki, Teorem 4.1.1' in şartları sağlansın ve $v^* \in V \equiv L_2(D)$ (3.1.1)-(3.1.3) optimal kontrol probleminin herhangi çözümü olsun. Bu takdirde

$$J'_\alpha(v^*) = -\psi^*(x) + 2\alpha v^*(x) = 0$$

şartının sağlanması gerek ve yeterlidir. Burada $\psi^*(x) \equiv \psi(x; v^*)$ fonksiyonu eşlenik problemin $v^* \in V \equiv L_2(D)$ ye karşılık gelen çözümüdür.

Bu Teoremin ispatı kuramsal temellerde yer alan Teorem 2.8 in yardımıyla gerçekleştirilir, başka bir deyişle Teoremin ispatı Teorem 2.8 in şartlarının sağlanmasına indirgenir.

4.3. Optimal Kontrol Probleminin Çözümü için Gradyent Yöntemi

Bu bölümde (3.1.1)-(3.1.3) optimal kontrol probleminin bir boyutlu halde çözüm algoritmasını kuracağız. Bu amaçla (3.1.1)-(3.1.3) optimal kontrol probleminin bir boyutlu halini yazalım.

Farz edelim ki;

$$J_a(v) = -\beta \int_0^\ell |u(x, v) - y(x)|^2 dx + \alpha \int_0^\ell (v(x))^2 dx \quad (4.3.1)$$

fonksiyonun minimumunu V kümesi üzerinde:

$$-\frac{d}{dx} \left(a_0(x) \frac{du}{dx} \right) + a(x)u = v(x), \quad x \in (0, \ell) \quad (4.3.2)$$

$$u(0) = u(\ell) = 0 \quad (4.3.3)$$

şartları altında minimumunu bulmak gerekir. Buradan $\beta > 0, \alpha > 0$ verilen sayılar, $\alpha(x), \alpha_0(x)$ fonksiyonları bölüm 1'deki şartları sağlıyorlardır. (4.3.1)-(4.3.3)'e karşılık gelen eşlenik sınır değer problemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\frac{d}{dx} \left(a_0(x) \frac{d\psi}{dx} \right) + a(x)\psi = 2\beta(u(x) - y(x)) \quad (4.3.4)$$

$$\psi(0) = \psi(\ell) = 0 \quad (4.3.5)$$

bu taktirde gradyent için olan formülde aşağıdaki biçimde olacaktır.

$$J'_\alpha(v) = -\psi(x) + 2\alpha v(x) \quad (4.3.6)$$

olası kontroller kümesi tüm uzay olduğundan (4.3.1)-(4.3.3) problemini çözmek için gradyent yöntemini kullanabiliriz. [2,13] yönteminin şemasına göre ardışık yaklaşımlar aşağıdaki biçimde inşa edilir:

$$v^{m+1} = v^m - \delta_m J'_\alpha(v^m), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3.7)$$

burada $v^m \in V$ başlangıç yaklaşımıdır. $\delta_m > 0$ yönteminin parametresi olup;

$$J_\alpha(v^{m+1}) < J_\alpha(v^m) \quad (4.3.8)$$

şartı bulunabilir. $J'_\alpha(v^m)$ gradiyenti:

$$J'_\alpha(v^m) = -\psi(x, v^m) + 2\alpha v^m(x) \quad (4.3.9)$$

formülü ile tanımlanır. Burada $\psi(x, v^m)$ eşlenik problemin $v = v^m$ 'e karşılık gelen çözümüdür. Bu formülden görüldüğü üzere her bir adımda iki tane sınır değeri problemini çözmemiz gerekir. Sonra gradiyent için değeri bulmamız gerekir.

İterasyon süreci;

$$\|v^{M+1} - v^M\|_{L_2(0, \ell)} \leq \varepsilon \quad (4.3.10)$$

şartı sağlanana kadar devam ettirilir. Gradyent formülünde yer alan α parametresi teorem 2'deki şarttan seçilir. Şimdi (4.3.1)-(4.3.3) probleminin çözümünü bilgisayarda gerçekleştirmek için bu problemin sonlu farklı aynısını inşa edelim. $(0, \ell)$ aralığını

$x_j = jh, \quad j = \overline{0, M}, \quad h = \frac{\ell}{M}$ yardımı ile ağa dönüştürelim. Bu taktirde (4.3.1)-(4.3.3)

probleminde yer alan fonksiyoneli ona karşılık gelen fonksiyon ile değiştirerek (4.3.2)-(4.3.3) şartlarını uygun farklar şeması ile değiştirip bir sonraki optimal kontrol problemini elde ederiz.

$$J_\alpha[v] = -h\beta \sum_{j=1}^{M-1} |u_j - y_j| + 2h \sum_{j=1}^{M-1} v_j^2 \quad (4.3.11)$$

Fonksiyonunun $w = L_{2M}$ kümesi üzerinde

$$-(\alpha'_0 u_{x,j})_{x,j} + \alpha^j u_j = v_j, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad u_0 = u_M = 0 \quad (4.3.12)$$

şartlarını altında minimumunu bulmak gerekir. Burada:

$$u_{x,j} = \frac{u_{j+1} - u_j}{h}, \quad u_{x,j}^- = \frac{u_{j+1} - u_j}{h}$$

$$a_0^j = \frac{1}{h} \int_{u_{j-\frac{h}{2}}}^{u_{j+\frac{h}{2}}} a_0(x) dx, \quad a_j = \frac{1}{h} \int_{u_{j-\frac{h}{2}}}^{u_{j+\frac{h}{2}}} a(x) dx \quad (4.3.13)$$

$$y^j = \frac{1}{h} \int_{u_{j-\frac{h}{2}}}^{u_{j+\frac{h}{2}}} y(x) dx, \quad j = \overline{1, M-1} \quad (4.3.14)$$

olur. L_{2M} uzayı $L_2(0, \ell)$ uzayının sonlu farklı aynısı olup;

$$\sum_{j=1}^{M-1} v_j^2 < +\infty$$

şartını sağlayan $[v] = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_{M-1}]$ elemanlarından oluşur. Bu takdirde fonksiyon gradiyenti aşağıdaki biçimdedir.

$$I'_{\alpha j}([v]) = -\psi_j + 2\alpha v_j, \quad j = \overline{1, M-1} \quad (4.3.15)$$

Burada ψ_j ağ fonksiyonu aşağıdaki sistemin çözümüdür:

$$-(\alpha_0^j \psi_{xj}^-)_{xj} + \alpha^j_j = 2\beta(u_j - y_j), \quad j = \overline{1, M-1}, \quad \psi_0 = \psi_M = 0 \quad (4.3.16)$$

(4.3.11)-(4.3.12) ayrık optimal kontrol probleminin çözümü için gradiyent yönteminin şeması aşağıdaki gibi inşa edilir.

$$v_j^{m+1} = v_j^m - \delta_m I'_{\alpha j}([v^m]), \quad j = \overline{1, M-1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3.17)$$

Burada $\delta_m > 0$ parametresi;

$I_\alpha([v^{m+1}]) < I_\alpha([v^m])$ şartından seçilir. $I'_{\alpha j}([v^m])$ gradiyenti (4.3.15) formülü ile tanımlanır.

Gradiyenti bulmak için her bir adımda (4.3.12) ve (4.3.16) sistemini kovma yönteminin yardımı ile çözebiliriz [10]. İterasyon süreci:

$$h \sum_{j=1}^{M-1} \left((v_j^{m+1} - v_j^m)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$$

şartı sağlanana kadar devam ettirilir.



5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez çalışmasında eliptik denklem için bir optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Tezde ele alınan optimal kontrol probleminin önceki çalışmalardaki problemlerden önemli biçimde farklılaşmaktadır. Çünkü bir önceki çalışmalarda fonksiyonelde yer alan β parametresi adeta negatif sayı olmaktadır. Bu tezde ise pozitif sayıdır. Olası kontroller kümesi bir önceki çalışmalarda adeta sınırlı küme olarak kullanılmaktadır. Bu tez çalışmasına ise olası kontroller kümesi tüm $L_2(D)$ uzayıdır, yani sınırsız kümedir. Tezde ele alınan problem çok az incelendiğinden bu tez çalışması gerek teorik, gerekse pratik açıdan önem taşımaktadır.

Bu tezde eliptik denklem için bir optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği, çözüm için gerek ve yeterli şartlara ait elde edilen sonuçlar günceldir, önceki yazarların çalışmalarındaki sonuçlardan farklıdır ve onlarla örtüşmez. Dolayısıyla önceki çalışmalara göre daha günceldir.

6. KAYNAKLAR

Gasımova R.S. (2014) Lineer eliptik denklem için bir optimal kontrol problemi hakkında. Scientific Proceedings Lenkaran State University, Mathematical and Natural sciences series, s. 53-61.

İskenderov, A. D. Tagiyev, R. G. Yagubov. G. Y. (2002) Optimizasyon yöntemleri, Bakü, çaşıoğlu.

İskenderov A.D., Tagiyev R.K.(2013) Optimal control problem with controls in coefficients of quasilinear elliptic equation. Eurasian J. of Mathematics. And Applications, vol. 1, iss. 2, pp. 21-38.

Kolmogorov A.N., Formin S.V. (1989) Fonksiyonlar Teorisinin ve Fonksiyonel Analizin Elemanları. Moskova, Nauka, s.624 (Rusça)

Ladyzenskaja O.A. (1975) Matematiksel Fiziğin Sınır Değer Problemleri - Moskova, Nauka (Rusça)

Lions J.L. (1971) Optimal Control of Systems Governed By Partial Differential Equations. Springer- Verlag Berlin Heidelberg New York, s.400

Litvinov. V. G. (1987) Eliptik sınır değer problemlerinde optimizasyon ve onların mekanikte uygulamaları, Moskova, Nauka, 1987 (Rusça)

Lurje K. A. (1975) Matematiksel fiziğin problemlerinde optimal kontrol, Moskova, Nauka, 1975(Rusça).

Raytım U.E. (1989) Eliptik denklemler için optimal kontrol problemleri. Riga, Zinatne,

Samarskii A.A., Andreev V.B. (1976) Eliptik Denklemler İçin Fark Metodları. Moskova, Nauka(Rusça).

Tagiyev R.K.,2011, Eliptik denklemlerin katsayıları ile optimal kontrol hakkında .J.Differential Equations, vol 47, pp.871-879.

Tikhonov A.N., Arsenin,V.Ya.(1979) III – Possed Problemlerin Çözüm, hakkında .J.Differential Equations, vol 47, pp.871-879.

Vasilyev F. P. (1981) Extremal problemlerinin çözüm yöntemleri, Moskova, Nauka,(Rusça)

Zolezzi T. (1972). Necessary conditions for optimal control of elliptic and Parabolic problems. SIAM J. Control, 1972, vol. 10, No: 4, pp. 594-607.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Fatih ARTIŞ
Doğum Yeri ve Tarihi	TUTAK-01/01/1986
Eğitim Durumu	
Lisans Öğrenimi	CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ /2013
Yüksek Lisans Öğrenimi	AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ/2017
Bildiği Yabancı Diller	İNGİLİZCE
Bilimsel Faaliyetler	
İş Deneyimi	
Stajlar	
Projeler	
Çalıştığı Kurumlar	M.E.B
İletişim	
E-posta Adresi	matematikdunyamm@gmail.com
Mezuniyet Tarihi	