

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ELİPTİK DENKLEMLERDE PERTÜRBASYON TEORİSİ



YÜKSEK LİSANS

Semay ÖZTÜRK

OCAK-2023
GÜMÜŞHANE



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ELİPTİK DENKLEMLERDE PERTÜRBASYON TEORİSİ

PERTURBATION THEORY IN ELLIPTIC EQUATIONS

YÜKSEK LİSANS

Semay ÖZTÜRK

**OCAK-2023
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ELİPTİK DENKLEMLERDE PERTÜRBASYON TEORİSİ

PERTURBATION THEORY IN ELLIPTIC EQUATIONS

YÜKSEK LİSANS

Semay ÖZTÜRK

Danışman:Dr. Öğr. Üyesi Mutlu DEDETÜRK

**OCAK-2023
GÜMÜŞHANE**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Eliptik Denklemlerde Pertürbasyon Teorisi**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

12/01/2023

.....
Semay ÖZTÜRK

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygı değer hocam Dr. Öğr. Üyesi Mutlu DEDETÜRK'e teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Bu süreçte, bana destek veren ve hep yanımda olan sevgili aileme ve değerli dostlarıma tüm kalbimle teşekkür ederim.

Semay ÖZTÜRK
GÜMÜŞHANE – 2023

ÖZET

Bu tez çalışmasında, eliptik kısmi diferansiyel denklemlerde yaklaşık seri çözümünü bulmak için pertürbasyon teorisinde kullanılan yöntemler ve çeşitli kullanımları tanıtılmıştır. Yöntemlerin eliptik problemlerde uygulamaları verilmiştir.

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır:

Birinci bölümde konu hakkında literatür özeti verilmiştir.

İkinci bölümde tez boyunca kullanılan bazı temel kavramlar ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde, asimptotik merteye sembolleri ve asimptotik yaklaşımlar tanıtılmıştır. Aynı zamanda pertürbasyon teorisinden bahsedilerek, düzgün ve tekil pertürbasyon uygulamalarına yer verilmiştir.

Dördüncü ve beşinci bölümde homotopi pertürbasyon ve homotopi pertürbasyon dönüşüm yöntemleri tanıtılarak, uygulamalara yer verilmiştir.

Altıncı bölümde sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Asimptotik yaklaşım, Eliptik denklem, Homotopi pertürbasyon yöntemi, Pertürbasyon teorisi, Tekil pertürbasyon

SUMMARY

In this thesis, the methods used in perturbation theory to find the approximate series solution in elliptic partial differential equations and their various uses are introduced. The applications of these methods to elliptic problems are given.

This thesis work consists of six chapters:

In the first chapter, a summary of the literature on the subject is given.

In the second chapter, some basic concepts used throughout the thesis are expressed.

In the third chapter, asymptotic order symbols and asymptotic approximations are introduced. Perturbation theory is mentioned, and also uniform and singular perturbation applications are covered.

In the fourth and fifth chapters, homotopy perturbation and homotopy perturbation transform methods are introduced and applications are given.

In the sixth chapter, the results are given.

Keywords: Asymptotic approximation, Ellipticequation, Homotopy perturbation method, Perturbation theory, Singular perturbation

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI	III
TEŞEKKÜR	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
TABLolar DİZİNİ	X
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XI
1. GENEL BİLGİLER	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	4
2.1. Analiz ve Fonsiyonel Analizle İlgili Temel Tanım ve Kavramlar	4
2.2. Taylor Seri Açılımı	6
2.2.1. Analitik Fonksiyon	7
2.3. Diferansiyel Denklem	7
2.4. Adi Diferansiyel Denklem	8
2.4.1. Başlangıç-Sınır Değer Problemleri	8
2.4.2. Lineer ve Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem	9
2.4.3. Düzgün ve Tekil Nokta	10
2.5. Kısmi Diferansiyel Denklem	10
2.6. Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Türleri	12
2.6.1. Hiperbolik Denklemler	13
2.6.2. Parabolik Denklemler	14
2.6.3. Eliptik Denklemler	14
2.7. Yardımcı Koşullar ve İyi-Kötü Konumlu Problemler	16
2.7.1. Sınır Koşulları	16
2.7.2. Başlangıç Koşulları	17
2.7.3. İyi-Kötü Konumlu Problemler	17
2.8. İntegral Dönüşümleri	18
2.8.1. Laplace Dönüşümü Yöntemi	18
2.8.2. Sumudu Dönüşümü Yöntemi	20
2.8.3. Elzaki Dönüşümü Yöntemi	21
3. PERTÜRBASYON TEORİSİ	24

3.1. Asimptotik Mertebe Sembolleri.....	24
3.2. AsimptotikAçılım.....	25
3.3. Pertürbasyon Teorisi ve Örnekler	27
3.4. Pertürbasyon Problem Tipleri.....	35
3.4.1. Düzgün ve Tekil Pertürbasyon Problemleri	35
4. HOMOTOPİ PERTÜRBASYON YÖNTEMİ (HPY).....	42
4.1. Homotopi Pertürbasyon.....	42
4.2. Değiştirilmiş Homotopi Pertürbasyon Yöntemi (DHPY)	53
5. HOMOTOPİ PERTÜRBASYON DÖNÜŞÜM YÖNTEMLERİ	59
5.1. Homotopi Pertürbasyon Laplace Dönüşümü Yöntemi	59
5.2. Homotopi Pertürbasyon Sumudu Dönüşümü Yöntemi.....	63
5.3. Homotopi Pertürbasyon Elzaki Dönüşümü Yöntemi.....	67
6. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME.....	72
KAYNAKÇA	73
ÖZGEÇMİŞ.....	77

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. Elzaki dönüşüm tablosu	23
Tablo 2. Sumudu dönüşüm tablosu.....	23
Tablo 3. Laplace dönüşüm tablosu	23



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$<$	: Küçüktür
$>$	: Büyüktür
$=$	: Eşittir
$\leq$	: Küçük veya eşit
$\exists$	: En az bir, vardır
$\forall$	: Her
$\in$	: Elemanıdır sembolü
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel (gerçek) sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
∇^2	: Laplace Operatörü
ϵ	: Küçük epsilon parametresi
P_ϵ	: Pertürbasyon problemi
$\frac{d}{dx}$	: Adi türev operatör
$\frac{\partial}{\partial u}$	: Kısmi türev operatörü
$\sim$	: Asimptotik (veya asimptotik olarak denk)
$o(\cdot)$	: Daha küçük mertebeden (küçük “o”)
$O(\cdot)$	: En fazla aynı mertebeden (büyük “O”)
L	: Laplace dönüşümü
S	: Sumudu dönüşümü
E	: Elzaki dönüşümü
$f^{(n)}$	: f fonksiyonunun n . mertebeden türevi
$\epsilon \rightarrow \epsilon_0$	: ϵ parametresi ϵ_0 sabitine yaklaşırken (limit)
HPY	: Homotopi Pertürbasyon Yöntemi
DHPY	: Değiştirilmiş Homotopi Pertürbasyon Yöntemi

1. GENEL BİLGİLER

Diferansiyel denklemler, uygulamalı matematik alanında fiziksel olayların matematiksel modelleme problemlerinde kullanılmaktadır. Diferansiyel denklem bir takım fonksiyonlar ile bunların türevleri arasındaki ilişkiyi temsil eder. Bu kavram ilk olarak 1676 yılında Leibniz tarafından kullanılmıştır ve diferansiyel denklemler uzun zamandır çok çeşitli pratik problemin modellenmesi ve çözülmesi için bilim adamları ve mühendisler tarafından kullanılmaktadır (Engin ve Çengel, 2008). İkinci Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemler; eliptik, parabolik ve hiperbolik denklemler olarak isimlendirilir ve katsayıların durumlarına ve zamana ait türevin var olmasına göre sınıflandırılır.

Eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin incelenmesi, Euler, Laplace, Lagrange, Poisson, Fourier, Green ve Gauss'un çalışmalarıyla, akışkanlar dinamiği, elektrostatik ve ısı iletiminin matematiksel teorileriyle iki yüzyıldan fazla bir süre önce başlamıştır (Volpert, 2011). Literatürde Eliptik denklemlerin çözümleri için bazı kaynaklar; (Taşdelen, 2001), (Taşdelen, 2002), (Ashyralyev vd., 2017), (Biçer, 2022) verilebilir.

Mühendislik ve fiziki bilimlerin birçok alanında ortaya çıkan problemlerin matematiksel modelleri, eliptik denklemler içerir. Eliptik denklemlerin çözümleri analitik yaklaşım yöntemleri kullanılarak hesaplanabilmektedir. Bu yöntemlerden en bilineni pertürbasyon (asimptotik) metodudur. Lagrange ve Laplace gibi 18. ve 19. yüzyıl matematikçileri pertürbasyon teorisi yöntemlerini genişletmekte ve genelleştirmekte öncülük yapmışlardır. Bu yöntem pertürbasyon miktarı olarak adlandırılan küçük parametrelerin varlığına dayanır. Küçük parametreler içermeyen yöntemlerde denklemin farklı yerlerine eklenen yapay parametreler kullanılır.

1900'lü yıllarda L. Prandtl ve J.H. Poincaré pertürbasyon problemleri adına ilk çalışmaları yapmışlardır. Singüler pertürbasyon problemi fikri ise L. Prandtl'nin 1904'teki sınır tabaka çalışmalarında ortaya çıkmıştır. Küçük parametreler akışkan mekaniğinin klasik Navier–Stokes denkleminde ve ters Reynold sayısına dayanmaktadır. 1900 yılından itibaren bu durumlarla ilgili birçok kişi tarafından çeşitli yöntemler bulunmuş ve geliştirilmiştir. Bunların başında ise Kadalbajoo ve Reddy gelmektedir. Kadalbajoo ve Reddy tarafından singüler pertürbasyon problemlerinin yaklaşık çözümlerini belirlemek için 1908–1986 yılları arasında gelişen çeşitli sayısal ve asimptotik yöntemler araştırılmış ve bunun üzerine çalışmalar yapılmıştır (Kaya, 2019).

Yaklaşık analitik çözüm bulabilen yöntemler arasında homotopi pertürbasyon metodunun önemli yeri vardır. He, 1999 yılında geliştirdiği homotopi pertürbasyon

metodu ile geleneksel pertürbasyon yöntemindeki güçlükleri ortadan kaldırmıştır. Bu yöntem kullanılarak çok çeşitli doğrusal olmayan problemlerin yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Bu yöntem topolojinin temel kavramlarından biri olan homotopi kavramını ve klasik pertürbasyon metodunu kullanarak oluşturulmuştur. Bu yöntem de pertürbasyon yöntemleri gibi parametre içerir. Ancak bu parametreyi denkleme yerleştirmek oluşturulan homotopi sayesinde son derece kolaydır (Demirtaş, 2014).

Homotopi pertürbasyon yönteminde, çözülmek istenen diferansiyel denklemde parametreye bağlı bir homotopi denklemi oluşturulur ve oluşturulan denklemde pertürbasyon açılımı yazılarak yaklaşık seri çözüm elde edilir.

Literatürde bulunan Homotopi Pertürbasyon uygulamalarından bazılarına; (He, 1999), (Akter ve Chowdhury, 2016),(Ghoreishi ve Ismail, 2011), (Merdan ve Khanîyev, 2008), (Merdan, 2009). örnekleri verilebilir.

Homotopi pertürbasyon yöntemi uygulanan bir diferansiyel denklem probleminde oluşturulan homotopi denkleminde, bir fonksiyonun iki kısma bölünerek incelenebileceği varsayımına dayalı olarak oluşturulan homotopi pertürbasyon yöntemi için kaynak olarak: (Ahmed, 2016) verilebilir.

Tüm bu tanımlara paralel olarak eliptik denklemlere pertürbasyon uygulamaları literatüre kazandırılmıştır. Bunlardan bazılarına: (Biazar, 2008), (Bulut, 2008), (Elbadri, 2013) (Yıldırım, 2008), (Mechee vd., 2017). (Mohyud-Din ve Noor, 2009) örnekleri verilebilir.

Adi ve kısmi diferansiyel denklem problemlerinin incelenmesinde, Laplace, Fourier, Sumudu, Elzaki, dönüşümleri gibi integral dönüşüm yöntemleri önemli bir role sahiptir (Kaya ve Yılmaz, 2019). İntegral dönüşüm yöntemi, başlangıç değerleri veya sınır koşulları ile diferansiyel denklemleri çözmek için yaygın olarak kullanılır.

İntegral dönüşümlerinin kullanımının 19. yüzyılın ilk yarısında başladığı görülmektedir. Sembolik dönüşüm fikrini ilk olarak öne süren G.W. Leibniz (1646-1716) dir. Sonraları sembolik dönüşüm metotları üzerine önemli çalışmalar yapanlar J. L. Lagrange (1736-1813) ve P.S. Laplace (1749-1827)'dir. Ancak integral dönüşümleri için temel adım J.Fourier (1768-1830) ve A.L. Cauchy (1789-1853) tarafından atılmıştır (Kırdar, 2007).

İntegral dönüşüm metotlarının en önemlilerinden bir tanesi Laplace integral dönüşümüdür. Laplace dönüşümü, matematik ve diğer uygulamalı bilim dallarında kullanılan önemli bir dönüşümdür. Ünlü matematikçi P. S. Laplace (1749-1827) tarafından tanımlanmıştır. Bu diferansiyel denklemlerin çözümünde büyük kolaylık sağlar (Kırdar, 2007).

Diğer bir integral dönüşüm metodu Sumudu İntegral Dönüşümü'dür. 1993 yılında Watugala tarafından tanıtılan Sumudu dönüşümü, adi diferansiyel denklemleri çözmek için sıklıkla kullanılmıştır. Ayrıca bazı problemlerde Sumudu dönüşümü, Laplace dönüşümüne göre daha iyi sonuçlar vermektedir (Kaya ve Yılmaz, 2019).

Başka bir integral dönüşüm metodu Elzaki İntegral Dönüşümü'dür Elzaki dönüşümü, klasik Fourier dönüşümünden 2010 yılında T.M. Elzaki tarafından tanıtılmıştır. Elzaki dönüşümü, adi ve kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için önemli bir araç olan Sumudu dönüşümünün değiştirilmiş bir şeklidir. Ayrıca Elzaki dönüşümü, Sumudu dönüşümü veya Laplace dönüşümü ile çözülemeyen bazı diferansiyel denklemleri çözmek için güçlü bir araç olmuştur (Elzaki, 2012).

Kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için Elzaki, Sumudu, Laplace dönüşümleri; Homotopi pertürbasyonu ile birleştirilerek tam çözümler elde edilebilir. Dolayısıyla bu kombine çözümler oldukça yetenekli ve güvenilirdir.

Yöntem uygulaması şöyledir: Verilen bir diferansiyel denklemde ilk olarak kullanılacak integral dönüşümü alınır daha sonra başlangıç koşulları denklemde yerine yazılarak ters integral dönüşümü alınıp homotopi pertürbasyon yöntemi uygulanır.

Yaklaşık seri çözümlerinde kullanılan Homotopi pertürbasyon yönteminin integral dönüşüm metotlarıyla birlikte kullanıldığı kaynaklara örnek olarak: Homotopi pertürbasyon Laplace dönüşümü için; (Mishra ve Nagar, 2012), (Kehaili vd., 2020), (Johnston vd., 2016), (Singh ve Kumar, 2012); Homotopi pertürbasyon Sumudu dönüşümü için; (Kumar vd., 2011), (Bulut vd., 2013), (Singh vd., 2016), (Kaya ve Yılmaz, 2019); Homotopi pertürbasyon Elzaki dönüşümü için; (Elzaki ve Hilal, 2012), (Elzaki vd., 2019), (Elzaki ve Biazar, 2013), (Jasrotia ve Singh, 2022), (Merdan vd., 2022) verilebilir.

Bu Yüksek Lisans Tezi kapsamında, Pertürbasyon teoremi ile kullanılan yöntemler ve çeşitli kullanımlar detaylı incelenmiştir. Her bir yöntem ve kullanım için eliptik problemler oluşturulup yaklaşık çözümler elde edilmiştir. Aynı zamanda elde edilen çözümler için yakınsaklık incelemesi yapılmıştır.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1. Analiz ve Fonsiyonel Analizle İlgili Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 2.1.1. Bir metrik uzay, boş olmayan bir F kümesi ve bir metrik (veya uzaklık) $d: F \times F \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonundan oluşan bir (F, d) çifttir, öyle ki F deki tüm x, y, z için aşağıdaki koşullar geçerlidir (Maddox, 1970):

- a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- b) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri)
- c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

Tanım 2.1.2. F , boş olmayan bir küme ve K ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) bir cisim olsun. Eğer $x, y, z \in F$ ve $\lambda, \beta \in K$ için

$$\begin{aligned} + : F \times F &\rightarrow F, & (x, y) &\rightarrow x + y \\ \cdot : K \times F &\rightarrow F, & (\lambda, y) &\rightarrow \lambda y \end{aligned}$$

fonksiyonları tanımlansın. $\forall x, y, z \in F$ ve $\lambda, \beta \in K$ için,

- a) $x + y = y + x$
- b) $(x + y) + z = x + (y + z)$
- c) $\forall x \in F$ için $x + 0 = 0 + x = x$ olacak şekilde bir $0 \in F$ vardır.
- d) $\forall x \in F$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in F$ vardır.
- e) $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$
- f) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
- g) $(\lambda\beta)x = \lambda(\beta x)$
- h) $1 \cdot x = x$

koşulları sağlanıyorsa o zaman F 'ye K cismi üzerinde bir lineer uzay veya vektör uzay denir. Lineer uzay tanımında K cismine lineer uzayın skaler cismi, K nın elemanlarına skaler denir. F 'nin elemanları ise vektör olarak adlandırılır (Maddox, 1970).

Tanım 2.1.3. F , boş olmayan bir küme ve K ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\|\cdot\| = F \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $\forall x, y \in F$ ve $\forall \alpha \in K$ için,

- a) $\|x\| \geq 0$
- b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
- c) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlarsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna F üzerinde bir norm ve $(F, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu vektör uzay (normlu uzay) denir (Maddox, 1970).

Tanım 2.1.4. F normlu uzay ve (x_m) , F de bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $m > m_0$ olduğunda $\|x_m - x\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $m_0 \in \mathbb{N}$ varsa, (x_m) dizisine F de yakınsak dizi denir ve $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x$ veya $x_m \rightarrow x$ şeklinde gösterilir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.5. $y=f(x)$ bir fonksiyon ve bu $f(x)$ fonksiyonu bir (a, b) aralığında tanımlı olsun. Aynı zamanda $x_0 \in (a, b)$ olduğu varsayımı altında

$$y'|_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

değerinin olup olmadığı kontrol edildiğinde limit değeri varsa, o zaman bu limit değerine f fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki türevidir denir. Burada x değişkeni, kendi kontrolümüz altında değiştirebildiğimiz (bağımsız) değişken türüdür, y değişkeni ise kendi kontrolümüz altında değiştiremediğimiz (bağımlı) değişken türüdür (Gündoğdu, 2017).

Tanım 2.1.6. Bir fonksiyonun belirli bir noktadaki limitini hesapladığımızda $\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \frac{f(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)}$ biçiminde $\frac{0}{0}$ ya da $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliklerinden birini elde ediyorsak ya da diğer belirsizliklerden biri var ve ifadeyi bu iki belirsizlikten birine dönüştürebiliyorsak L'Hospital kuralı kullanarak limit değerini bulabiliriz.

$f(\varepsilon)$ ve $\varphi(\varepsilon)$ fonksiyonları $(\varepsilon_a, \varepsilon_b)$ aralığı üzerinde türevlenebilir fonksiyonlar ve bu aralık üzerinde $\varphi'(\varepsilon) \neq 0$ şartı sağlanıyor olsun. Ayrıca $-\infty \leq k \leq \infty$ olmak üzere $\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \frac{f'(\varepsilon)}{\varphi'(\varepsilon)} = k$ olsun. Bu durumda; “ $\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \frac{f(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \frac{f'(\varepsilon)}{\varphi'(\varepsilon)} = k$ ” dır (Cengizci, 2014).

2.2. Taylor Seri Açılımı

Matematikte kullanılan önemli teoremlerden biri olan Taylor Teoremi ve sonuçları özellikle asimptotik yöntemlerde çokça kullanılmaktadır.

Tanım 2.2.1. $x_0 \in \mathbb{R}$ ve $\forall m = 0,1,2, \dots$, için $k_m \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\sum_{m=0}^{\infty} k_m (x - x_0)^m = k_0 + k_1(x - x_0) + k_2(x - x_0)^2 + k_3(x - x_0)^3 + \dots$$

şeklindeki bir seriye kuvvet serisi denir. Buradaki k_m sayılarına serinin katsayıları adı verilir. Kuvvet serileri genelde bir fonksiyonun Taylor serisi olarak karşımıza çıkmaktadır (Nayfeh,1993).

Tanım 2.2.2. Bir kuvvet serisi açılımı olan $f(x)$ fonksiyonu ele alınsın, öyle ki $x = x_0$ da her mertebeden türevleri mevcut olsun. Kuvvet serisinde,

$$k_m = \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_0)$$

$$f^{(m)} = \frac{d^m f}{dx^m}$$

$$f^{(0)}(x_0) = f(x_0) = k_0$$

eşit olur. İşte bu kuvvet serisine yani

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m$$

serisine $f(x)$ 'in $x = x_0$ civarındaki Taylor serisi denir. Burada $x_0 = 0$ alınırsa,

$$T(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^m$$

serisine özel olarak Maclaurin serisi de denir (Nayfeh,1993).

Örnek 2.2.1. Önemli olan birkaç fonksiyonun $x_0 = 0$ noktası civarlarında Taylor seri açılımları

$$\sin(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$$

olarak örnek verilebilir (Nayfeh,1993).

2.2.1. Analitik Fonksiyon

Bir $f(x)$ fonksiyonu ele alınsın, bu fonksiyon $x = x_0$ noktası yakınında Taylor serisine açılabilir,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m + \dots \end{aligned}$$

bu Taylor açılımı $x = x_0$ noktasını içeren açık bir aralıktaki tüm x değerleri için $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşırsa bu fonksiyon $x = x_0$ noktasında analitik fonksiyon olarak adlandırılır. Verilen tanımdan yola çıkarak analitik fonksiyonlara örnek olarak bütün polinom fonksiyonlar söylenebilir çünkü polinom fonksiyonlar her yerde keyfi mertebeden sürekli türevlere sahiptir. Ek olarak $e^x, \sin x, \cos x$ fonksiyonları her yerde analitiktir. Eğer fonksiyon $\frac{f(x)}{g(x)}$ şeklinde ise bu fonksiyonun analitik fonksiyon olabilmesi için $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının analitik fonksiyon olması ve $g(x) \neq 0$ olması gereklidir (Kaya, 2019).

2.3. Diferansiyel Denklem

Tanım 2.3.1. Bir fonksiyonun veya birden çok fonksiyonun türevlerini barındıran denklemlerin her birine diferansiyel denklem denir.

Birçok önemli bilimsel alanda, mühendislikte ve aynı zamanda ekonomi alanlarında matematiksel modeller kolaylıkla diferansiyel denklemler kullanılarak belirtilir.

Diferansiyel denklemler temel anlamda, adi diferansiyel denklemler ve kısmi diferansiyel denklemler olmak üzere ikiye ayrılarak incelenirler (Ökten,2010).

2.4. Adi Diferansiyel Denklem

Tanım 2.4.1. Adi diferansiyel denklemler tek bağımsız değişken, tek bağımlı değişken (bilinmeyen fonksiyon) ve bu bağımlı değişkenin türevlerinden meydana gelir. Kısacası tek bağımsız değişken içeren diferansiyel denklemlere adi diferansiyel denklemler denir. y bağımlı değişken, x bağımsız değişken olarak kabul edilirse, o zaman m . mertebeden bir adi diferansiyel denklem şu şekilde ifade edilebilir:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0$$

Adi diferansiyel denklemler, mertebelerine göre, katsayılarının sabit veya değişken oluşlarına göre farklı farklı şekillerde sınıflandırılıp incelenir. Bir diferansiyel denklemde mertebeyi belirlemek için türevlere bakılır, türevlerde en yüksek mertebe diferansiyel denklemin mertebesi olarak kabul edilir. En yüksek türevinin mertebesi bire eşit olan bir diferansiyel denkleme birinci mertebededir denir. En yüksek türev mertebesi iki veya ikiden daha büyük olursa bu denklemlere de yüksek mertebeden diferansiyel denklemler denir (Ökten,2010).

Örnek 2.4.1. $x dx + y dy = 0$ birinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 6 \frac{dy}{dx} - 7y = x$$

ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir.

2.4.1. Başlangıç-Sınır Değer Problemleri

Yardımcı koşullar ile verilen bir diferansiyel denklem probleminde, yardımcı koşullar bilinmeyen fonksiyon ve türevleri üzerinde tamamı bağımsız değişkenin aynı değerinde veriliyorsa bu probleme başlangıç-değer problemi denir. Yardımcı koşullar başlangıç koşullarıdır. Eğer ki yardımcı koşullar bağımsız değişkenin birden fazla değerinde veriliyorsa bu probleme sınır-değer problemi denir. Yardımcı koşullar sınır koşullarıdır (Bronson,1994).

Örnek 2.4.2. $y = y(x)$, x 'e bağlı bir fonksiyon olsun

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{dy}{dx} = e^{2x}; y(\pi) = 1, \frac{dy}{dx}\Big|_{x=\pi} = 2$$

burada her iki yardımcı koşul $x = \pi$ de verildiği için bu problem başlangıç değer problemidir.

Örnek 2.4.3. $y = y(x)$, x 'e bağlı bir fonksiyon olsun

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{dy}{dx} = e^{2x}; y(0) = 1, \frac{dy}{dx}\Big|_{x=1} = 1$$

burada her iki yardımcı koşul $x = 0$ ve $x = 1$ farklı değerlerinde verilmiştir dolayısıyla sınır-değer problemidir. $y(x)$ fonksiyonu başlangıç-değer veya sınır değer probleminin bir çözümüdür, hem diferansiyel denklemi çözer hem de verilen yardımcı koşulların tamamını sağlar.

2.4.2. Lineer ve Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem

$y = y(x)$ bilinmeyen fonksiyonu için verilen

$$\frac{d^m y}{dx^m} + \alpha_1(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \alpha_2(x) \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + \alpha_m(x) \cdot y = f(x)$$

diferansiyel denkleme, m . mertebeden lineer diferansiyel denklem denir.

Diferansiyel denklemlerde lineerliği bozan durumlardan bazıları şunlardır: Eğer ki diferansiyel denklemin içerdiği bağımlı değişkenler üstel, trigonometrik veya logaritmik olarak ifade edilmişse lineerlik bozulur, diğer bir durum ise bazı diferansiyel denklemlerde bağımlı değişken kendisi veya türevleri ile çarpım veya bölüm durumunda ifade edilmişse ya da bağımlı değişken veya herhangi bir türevinin derecesi iki ve ikiden büyük ise lineerlik bozulur. Lineerlik tanımına uymayan diferansiyel denklemlere lineer olmayan diferansiyel denklemler denir (Keleş, 2019).

Örnek 2.4.4.

$$x^5 \frac{d^2 y}{dx^2} - x^3 \frac{dy}{dx} + 9y = e^{2x}$$

denklemini lineer diferansiyel denkleme örnektir,

$$y \frac{d^3 y}{dx^3} - 6 \frac{dy}{dx} - x = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y^3 = 0$$

denklemleri ise lineer olmayan diferansiyel denklemlere örnektir.

2.4.3. Düzgün ve Tekil Nokta

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + u_1(t) \left(\frac{dy}{dt} \right) + u_2(t)y = 0$$

ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemi ele alınsın. Eğer denklemde bulunan $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ fonksiyonlarının ikisi birden bir $t = t_0$ noktasında analitik oluyorsa bu noktaya düzgün nokta denir.

$u_1(t)$ ve $u_2(t)$ fonksiyonlarının ikisi birden veya yalnızca biri $t = t_0$ noktasında analitik olmuyorsa, o zaman bu noktaya tekil nokta denir (Kaya, 2019).

Örnek 2.4.5.

$$(1 - t^2)y'' + ty' + 6y = 0$$

diferansiyel denklemi incelenecek olursa, öncelikle her iki tarafı $(1 - t^2)$ 'ye bölerek

$$y'' + \frac{t}{1 - t^2} y' + \frac{6}{1 - t^2} y = 0$$

elde edilir. $u_1(t) = \frac{t}{1 - t^2}$ ve $u_2(t) = \frac{6}{1 - t^2}$ fonksiyonlarının $t = 1$ ve $t = -1$ noktalarında analitik olmadığı görülür dolayısıyla bu noktalar denklemin tekil noktaları olur, bu iki nokta dışındaki her nokta ise analitik olduğu için düzgün noktadır (Kaya, 2019).

2.5. Kısmi Diferansiyel Denklem

Tanım 2.5.1. En az iki bağımsız değişken ile en az bir bağımlı değişken (bilinmeyen fonksiyon) ve bu bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre birinci veya daha fazla mertebeden kısmi türevlerini barındıran denklemlere, kısmi diferansiyel denklemler denir. Kısacası iki veya daha fazla bağımsız değişkeni içeren diferansiyel

denklemlere kısmi diferansiyel denklemler denir. $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_n$ bağımsız değişkenler olsun ve u bağımlı değişkeninin bu bağımsız değişkenlere göre kısmi türevleri $u_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}, u_{x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, u_{x_n} = \frac{\partial u}{\partial x_n}$ ile gösterilsin.

O halde kısmi diferansiyel denklemlerin genel formu;

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots) = 0$$

şeklinde olur.

Kısmi diferansiyel denklemler, en yüksek kısmi türevin mertebesine, değişken sayısına, doğrusal olup olmama durumlarına göre ya da katsayılarının sabit veya parametrik oluşuna göre farklı farklı şekillerde sınıflandırılırlar. Her bir durum için kısmi diferansiyel denklemler kendine has çözüm yöntemleri barındırır (Aktaş,1995).

Örnek 2.5.1.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = x^3 + 2xy + \cos(y^2)$$

$$5 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4u = 0$$

denklemleri kısmi diferansiyel denklemlere örnektir.

Tanım 2.5.2. Bir kısmi diferansiyel denklemin mertebesi, denklemde görülen en yüksek kısmi türevin mertebesi olarak tanımlanır (Çağlıyan ve Çelebi, 2010).

Tanım 2.5.3. Bir kısmi lineer diferansiyel denklem verildiğinde en yüksek mertebeden kısmi türevin derecesine o denklemin derecesi denir (Çağlıyan ve Çelebi, 2010).

Tanım 2.5.4. Bir kısmi diferansiyel denklem bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerine göre birinci dereceden ise denkleme lineer kısmi diferansiyel denklem denir. Eğer bir kısmi diferansiyel denklem lineer değilse o denkleme lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem denir (Çağlıyan ve Çelebi, 2010).

Tanım 2.5.5. Kısmi diferansiyel denklemler, homojen ve homojen olmayan olarak sınıflandırılabilirler. İstenilen mertebeden bir kısmi diferansiyel denklem, eğer denklemin her terimi bağımlı değişkeni veya onun türevlerinden birini içerirse, o zaman homojen kısmi diferansiyel denklem olarak isimlendirilir; aksi durumda homojen olmayan kısmi diferansiyel denklem olarak isimlendirilir (Ökten,2010).

Tanım 2.5.6. Bir kısmi diferansiyel denklem, denklemde görülen en yüksek mertebeden türevlere göre lineer ise, denkleme yarı lineer denklem denir (Çağlıyan ve Çelebi, 2010).

Tanım 2.5.7. Bir kısmi diferansiyel denklem, denklemde görülen en yüksek mertebeden türevlere göre lineer, yani yarı lineer ve bu en yüksek mertebeden türevlerin katsayısı sadece bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonu ise, denkleme hemen-hemen lineer denklem denir (Çağlıyan ve Çelebi, 2010).

2.6. Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Türleri

Tanım 2.6.1. x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere iki boyutlu $u(x,y)$ fonksiyonu ve türevleri arasında verilen

$$\Phi(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0$$

bağıntısına ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklem denir.

x ve y bağımsız değişkenler; A, B, C sadece bağımsız değişkenlere bağlı katsayı fonksiyonları olmak üzere eğer ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemin bağıntısı,

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad (1)$$

biçiminde yazılabilirse denkleme, yüksek mertebeden türeve göre hemen-hemen lineer olan ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklem denir.

Yüksek mertebeden türeve göre hemen-hemen lineer olan ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklem için; Diskriminant fonksiyonu,

$$\Delta = B^2 - AC$$

olarak tanımlanır. Diskriminanta bağlı olarak denklemin türü belirlenebilir:

- (1) denklemini A, B ve C 'nin aldığı değerlere göre üç değişik durumda incelenir;

$$\Delta = B^2 - AC < 0 \quad \text{Eliptik}$$

$$\Delta = B^2 - AC = 0 \quad \text{Parabolik}$$

$$\Delta = B^2 - AC > 0 \quad \text{Hiperbolik}$$

- Belirtilen A, B, C katsayıları xy – düzlemindeki bir Ω bölgesinde x ve y 'nin iki kez sürekli türetilebilir fonksiyonlarıdır, ayrıca aynı anda üçünün birden sıfır olmadığı kabul edilir.

- f ise $x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}$ ve $\frac{\partial u}{\partial y}$ nin fonksiyonudur (Çetinkaya, 2014).

Örnek 2.6.1.

$$3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 7 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

denklemi $A = 3, B = 0, C = 7$ ve $B^2 - AC = -21 < 0$ olduğundan eliptik denklemdir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 10 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

denklemi ise $A = 1, B = 0, C = -10$ ve $B^2 - AC = -(1)(-10) = 10 > 0$ olduğundan hiperbolik denklemdir.

2.6.1. Hiperbolik Denklemler

İkinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemler $\Delta = B^2 - AC > 0$ ise hiperbolik denklemler olarak adlandırılır.

Hiperbolik denklemler kısmi türevli diferansiyel denklemlerin bir türüdür ve genellikle zamana bağlı denklemlerdir. Ortamdaki dalga ve titreşimlerin yayılımı hakkında bilgi verir. Özellikle dalga yayılımı ağırlıklı kullanıldığı için dalga denklemleri olarak da adlandırılırlar. c pozitif reel bir sabit, t zaman değişkeni ve $u = u(x, y)$ olarak kabul edilirse,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

denklemi bir boyutlu uzayda hiperbolik denklemdir.

Bu denklemlerin çözümü, titreşim halinde olan l uzunluğuna sahip bir telden t zaman sonra telin başlangıcından x kadar uzaklıktaki enine yer değişimini ifade eder. Dalga denklemleri çoğunlukla titreşim problemlerinde ya da yoğunluk, basınç ve hızdaki süreksizlik gibi durumların oluşturduğu problemlerde kullanılır. Hiperbolik denklemlerde başlangıç değerleri ve sınır değerleri bilinir. Yine bu denklemlerin kullanım

alanları olarak elektromanyetik, hidrodinamik, ses yayılması ve kuantum teorisi gibi örnekler verilebilir (Özizmirli, 2011).

2.6.2. Parabolik Denklemler

İkinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemler $\Delta = B^2 - AC = 0$ ise parabolik denklemler olarak adlandırılır.

Parabolik denklemler ısıнын yayılım teorisi ele alınarak oluşturulmuştur. Bu denklemlerin çözümü, izole edilmiş bir çubuk üzerinde t anında oluşmuş olan, çubuğun bir ucundan x kadar uzaklıktaki sıcaklığını ifade eder.

Basit haliyle parabolik bir denklem;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

şeklinde ifade edilebilir. Parabolik denklemlerde başlangıç değerleri ve sınır değerleri bilinir (Özizmirli, 2011).

2.6.3. Eliptik Denklemler

İkinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemler $\Delta = B^2 - AC < 0$ ise eliptik denklemler olarak adlandırılır. Bu denklemlerin çözüm bölgesinde olan bir noktadaki fonksiyonunun değerinin bulunabilmesi için bu bölgedeki bütün diğer noktaların eş zamanlı olarak hesaplanması gereklidir.

Eliptik denklemler genellikle, potansiyel adının verildiği bir büyüklüğün bölge içinde meydana gelen değişimini belirtirler. Bu nedenle eliptik denklemlere, potansiyel denklemler de denilmektedir. Bir büyüklüğün sıklığının ölçümü Potansiyel olarak adlandırılır. Sıcaklık veya konsantrasyon potansiyel büyüklüğe örnek verilebilir.

Eliptik denklemler genel olarak kararlı hal sistemlerini ifade etmek amacıyla kullanılırlar. Eğer zamana göre türev söz konusu değilse o zaman kararlı halden bahsedilebilir. Dolayısıyla, bu denklemler kısmi diferansiyel denklemlerde iki boyutlu bir bilinmeyen kararlı dağılımını hesaplayabilmek amacıyla kullanılırlar.

Hemen hemen lineer eliptik denklemlerin iki boyutlu hali için genel tanımı,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

şeklinde. Bu denklemde $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$ ve $B^2 - AC < 0$ olduğu açıktır.

Eliptik kısmi diferansiyel denklemler temelde en çok kullanıldığı iki biçimde incelenebilir. İki boyutlu halde;

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \left(k_1 \frac{\partial u}{\partial x} + k_2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) + au &= 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left(k_1 \frac{\partial u}{\partial x} + k_2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) + au &= f(x, y) \end{aligned}$$

burada k_1 , k_2 ve a sistemin parametreleridir aynı zamanda x, y değişkenlerine bağlı durumda olabilmektedirler. Denklemlerdeki u ise değeri bulunmak istenen büyüklüktür, yani potansiyeldir.

Bu denklemlerde $k_1 = k_2 = k$ sabit ve $a = 0$ şartları uygulandığında özel bir hal elde edilecektir ki böylelikle denklemler;

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= F(x, y) \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilebilir. Yeni oluşan denklemlerdeki belirtilen ikinci dereceden türevlerin toplamı genellikle;

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

şeklinde bir ifadeyle gösterilir, buradaki ∇^2 operatörüne Laplace operatörü denir.

Potansiyel teoreminin temel denklemlerinden olan Laplace denklemlerinin fiziksel uygulamaları oldukça fazladır. Yüzeyleri izole olan bir ortam düşündüğümüzde bu ortamda ısı dağılımı zamandan bağımsız ise o zaman ortamdaki herhangi bir (x, y) noktasındaki ısı miktarını veren $u(x, y)$ fonksiyon Laplace denklemini sağlamış olur. Diğer yandan Laplace denklemleri iletkenlerle çevrilmiş yüksüz olan bir bölgede elektrostatik potansiyel problemlerinde, kaynak olmayan bir akışkanın hız dağılım problemlerinde, kararlı sıcaklık dağılımına sahip ve ısı kaynağı olmayan problemlerde kullanılırlar.

Poisson denklemleri herhangi bir dış kuvvet etkisinde olan bir telin zamana ilişkili olarak denge durumuna gelmesi ile ifade edilir. Poisson denklemlerine ilişkin iki fiziksel olguyu örneklendirecek olursak, birinci olgu için, negatif bir ω elektriksel potansiyelin oluşmasını sağlayan ρ yük yoğunluğunun varlığı denilebilir. Bir diğeri ise T sıcaklığının oluşumunu sağlayan, η ısı kaynağının akışkan içinde bir yayılım oluşturmaları denilebilir (Özizmirli, 2011; Tezel Özturan, 2021).

2.7. Yardımcı Koşullar ve İyi-Kötü Konumlu Problemler

Kısmi diferansiyel denklemler çoğunlukla sonsuz çoklukta çözüme sahiptirler. Bir fiziksel problemin çözümünü temsil eden tek fonksiyonu belirleyebilmek için, modellenen sistemi tanımlayan bazı yardımcı koşulların sağlanması gerekir. Bunlar iki grupta incelenir.

2.7.1. Sınır Koşulları

Kısmi diferansiyel denklemin sağlandığı Ω bölgesinin $\bar{\Omega}$ sınırının üzerindeki noktalarda sağlanması gereken koşullardır.

Kısmi diferansiyel denklemler farklı türde sınır şartlarına sahip olabilirler. Bu sınır şartları veriliş türlerine göre isimlendirilirler. Eğer ki bir sınır şartı yalnızca u bilinmeyen fonksiyonunu içeriyorsa o zaman bu sınır şartına Dirichlet sınır şartı denir. Sınır şartı yalnızca u bilinmeyen fonksiyonunun türevlerinden oluşuyorsa bu sınır şartına Neumann sınır şartı denir. Son olarak verilen sınır şartı u ve u 'nun türevlerini birlikte içerdiği takdirde verilen sınır şartına Robin sınır şartı denir.

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$, bir açık bölge; $\bar{\Omega}$, bu açık bölgenin yeterince düzgün sınırı ve $\bar{\Omega}$ sınırının herhangi bir noktasındaki normali n ile gösterilsin. Ayrıca $g_0(x, y)$, $g_1(x, y)$, $g_2(x, y)$ bilinen fonksiyonlar iken $u = u(x, y)$ iki değişkenli bilinmeyen fonksiyon olduğu kabul edilsin.

Ω bölgesi içinde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (2)$$

denklemi ele alınırsa:

Dirichlet probleminde (2) denklemi ile birlikte $\bar{\Omega}$ sınırında

$$u = g_0(x, y)$$

şartını sağlayan $u(x, y)$ bilinmeyen fonksiyonu bulunmak istenir.

Neumann probleminde (2) denklemi ile birlikte $\bar{\Omega}$ sınırında

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial n} = g_1(x, y)$$

şartını sağlayan $u(x, y)$ fonksiyonu bulunmak istenir.

Robin probleminde (2) denklemi ile birlikte $\bar{\Omega}$ sınırında

$$A \frac{\partial u}{\partial n} + Bu = g_2(x, y)$$

şartını sağlayan $u(x, y)$ fonksiyonu bulunmak istenir (Bülbül,2011).

2.7.2. Başlangıç Koşulları

Başlangıç şartları sistemin başlangıcında Ω bölgesi boyunca sağlanması gereken şartlardır. Başlangıç şartlarıyla birlikte verilmiş kısmi diferansiyel denkleme Cauchy problemi denir.

Örnek 2.7.1. Başlangıç şartları

$$u(x, 0) = \cos(x), \quad u_y(x, 0) = 0$$

olan

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, 0 < x < \pi, 0 < y < 1$$

eliptik denklem, ikinci mertebeden bir Cauchy problemidir (Dündar, 2009).

2.7.3. İyi-Kötü Konumlu Problemler

1902 yılında J.S. Hadamard bir problem için iyi veya kötü konumlu olmasını tanımlamıştır.

Tanım 2.7.3.1. U ve F iki metrik uzay ve $A: U \rightarrow F$ bir operatör olsun. Belli şartlar altında

$$Au = f$$

denkleminin çözülmesi probleminde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir çözümü varsa (U, F) uzay çifti için Hadamard anlamında iyi konumlu problem denir.

- i. $\forall f \in F$ için U uzayında problemin çözümü vardır.
- ii. Problemin çözümü U uzayında tektir.
- iii. Problemin koşullarında F uzayında küçük bir değişiklik, problemin çözümünde de U uzayında küçük değişikliklere neden olmalıdır.

Bu üç şarttan en az birinin sağlanmaması durumunda problem, (U, F) uzay çifti için Hadamard anlamında kötü konumlu problem olarak adlandırılır.

Hadamard anlamında kötü konumlu bir probleme örnek olarak Laplace denklemi için Cauchy problemi verilebilir (Gölgeleyen ve Kaytmaz, 2016).

2.8. İntegral Dönüşümleri

2.8.1. Laplace Dönüşümü Yöntemi

Laplace dönüşümü bir integral dönüşümü olup; fizik, mekanik, mühendislik, matematik ve diğer uygulamalı bilim dallarında kullanılan önemli bir dönüşümdür. Ünlü matematikçi P.S. Laplace (1749-1827) tarafından tanımlanmıştır. Laplace dönüşümü diferansiyel denklemlerin çözümünde büyük kolaylık sağlar.

$f(y)$, $y \geq 0$ için y reel değişkeninin bir fonksiyonu olsun ($y < 0$ için $f(y) = 0$ kabul edilir). $v > 0$ reel veya kompleks bir parametre olmak üzere, y reel değişkeninin bir fonksiyonu e^{-vy} olduğuna göre

$$\int_0^{\infty} e^{-vy} f(y) dy$$

integrali var olacak şekilde v parametresi için bir değer bulmak mümkün oluyorsa bu integrale $f(y)$ fonksiyonunun Laplace Dönüşümü denir. Bu dönüşüm $L[f(y)]$ veya $F(v)$ ifadeleri ile gösterilir.

Laplace integral dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$L[f(y)] = F(v) = \int_0^{\infty} e^{-vy} f(y) dy$$

$F(v)$, $f(y)$ 'nin Laplace dönüşümü olsun, öyle ki;

$$L[f(y)] = F(v),$$

$$L[f'(y)] = vF(v) - f(0),$$

$$L[f''(y)] = v^2F(v) - vf(0) - f'(0),$$

$$\begin{aligned} L[f^{(n)}(y)] &= v^n F(v) - v^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \\ &= v^n F(v) - \sum_{k=0}^{n-1} v^{n-(k+1)} f^{(k)}(0). \end{aligned}$$

$L[f(y)] = F(v)$ denklemi, $F(v)$ 'nin $f(y)$ 'nin Laplace dönüşümü olduğu ve $f(y)$ 'nin $F(v)$ 'nin ters Laplace dönüşümü olduğu anlamına gelir. Yani,

$$f(y) = L^{-1}[F(v)]$$

Kısmi türevli denklemler için $u(x, y)$ sürekli ve üstel sıralı olsun. $u(x, y)$ 'nin Laplace dönüşümü şu şekilde yazılır:

$$L[u(x, y)] = F(x, v) = \int_0^{\infty} e^{-vy} u(x, y) dy$$

$u(x, y)$ üstel mertebeli ve parçalı sürekli bir fonksiyon ve Laplace dönüşümü $L[u(x, y)]$ olmak üzere kısmi türevlerinin Laplace dönüşümleri aşağıda verilmiştir (Kırdar, 2007).

$$L\left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\right] = \frac{d[L[u(x, y)]]}{dx}$$

$$L\left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right] = vL[u(x, y)] - u(x, 0)$$

$$L\left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}\right] = \frac{d^2[L[u(x, y)]]}{dx^2}$$

$$L\left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}\right] = v^2 L[u(x, y)] - vu(x, 0) - \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y}$$

2.8.2. Sumudu Dönüşümü Yöntemi

90'ların başında Watugala, Sumudu dönüşümü adı verilen yeni bir integral dönüşümünü tanıtmıştır ve bunu kontrol mühendisliği problemlerinde adi diferansiyel denklemin çözümüne uygulamıştır. Sumudu dönüşümü bir dizi fonksiyon üzerinden tanımlanır.

A ile tanımlanan bir fonksiyon kümesi olsun;

$$A = \left\{ f(y) | \exists M, \tau_1 \text{ ve/veya } \tau_2 > 0, |f(y)| < M e^{\frac{|y|}{\tau_j}}, \text{ eğer } y \in (-1)^j \times [0, \infty) \right\}$$

M bir sabit ve τ_1 ve τ_2 'nin sonlu veya sonsuz sabitlerdir.

Sumudu integral dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$S[f(y)] = F(v) = \int_0^{\infty} e^{-vy} f(y) dy, \quad v \in (-\tau_1, \tau_2)$$

veya

$$S[f(y)] = F(v) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{v}\right) e^{-\frac{y}{v}} f(y) dy, \quad v \in (-\tau_1, \tau_2)$$

$F(v)$, $f(y)$ 'nin Sumudu dönüşümü olsun, öyle ki;

$$S[f(y)] = F(v),$$

$$S[f'(y)] = \frac{1}{v} [F(v) - f(0)],$$

$$S[f''(y)] = \frac{1}{v^2} [F(v) - f(0) - v f'(0)],$$

$$S[f^{(n)}(y)] = \frac{1}{v^n} \left[F(v) - \sum_{k=0}^{n-1} v^k f^{(k)}(0) \right].$$

$S[f(y)] = F(v)$ denklemi, $F(v)$ 'nin $f(y)$ 'nin Sumudu dönüşümü olduğu ve $f(y)$ 'nin $F(v)$ 'nin ters Sumudu dönüşümü olduğu anlamına gelir. Yani,

$$f(y) = S^{-1}[F(v)]$$

Kısmi türevli denklemler için $u(x, y)$ sürekli ve üstel sıralı olsun. $u(x, y)$ 'nin Sumudu dönüşümü şu şekilde yazılır:

$$S[u(x, y)] = F(x, v) = \frac{1}{v} \int_0^\infty e^{\frac{-y}{v}} u(x, y) dy$$

$u(x, y)$ üstel mertebeli ve parçalı sürekli bir fonksiyon ve Sumudu dönüşümü $S[u(x, y)]$ olmak üzere kısmi türevlerinin Sumudu dönüşümleri aşağıda verilmiştir (Kaya ve Yılmaz, 2019).

$$S \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right] = \frac{d[S[u(x, y)]]}{dx}$$

$$S \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right] = \frac{1}{v} [S[u(x, y)] - u(x, 0)]$$

$$S \left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \right] = \frac{d^2[S[u(x, y)]]}{dx^2}$$

$$S \left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right] = \frac{1}{v^2} S[u(x, y)] - \frac{1}{v^2} u(x, 0) - \frac{1}{v} \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y}$$

2.8.3. Elzaki Dönüşümü Yöntemi

Elzaki dönüşümü, 2010 yılında T.M. Elzaki tarafından tanıtılmıştır. Elzaki dönüşümü, adi ve kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için önemli bir araç olan Sumudu dönüşümünün değiştirilmiş bir şeklidir. Elzaki dönüşümü, matematiksel formülasyonu aşağıdaki gibi olan, kolayca uygulanabilir bir dönüşümdür

Elzaki dönüşümü bir fonksiyon kümesi üzerinde tanımlanır.

A ile tanımlanan bir fonksiyon kümesi olsun;

$$A = \left\{ f(y) | \exists M, \tau_1, \text{ve/veya } \tau_2 > 0, |f(y)| < M e^{\frac{|y|}{\tau_j}}, \text{ eğer } y \in (-1)^j \times [0, \infty) \right\}$$

M bir sabit ve τ_1 ve τ_2 'nin sonlu veya sonsuz sabitlerdir.

Elzaki integral dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$E[f(y)] = F(v) = \int_0^\infty v^2 e^{-y} f(vy) dy, \quad v \in (-\tau_1, \tau_2)$$

veya

$$E[f(y)] = F(v) = \int_0^{\infty} v e^{\frac{-y}{v}} f(y) dy, \quad v \in (-\tau_1, \tau_2)$$

$F(v)$, $f(y)$ 'nin Elzaki dönüşümü olsun, öyle ki;

$$E[f(y)] = F(v),$$

$$E[f'(y)] = \frac{1}{v} F(v) - v f(0),$$

$$E[f''(y)] = \frac{1}{v^2} F(v) - f(0) - v f'(0),$$

$$E[f^{(n)}(y)] = \frac{1}{v^n} F(v) - \sum_{k=0}^{n-1} v^{2-n+k} f^{(k)}(0).$$

$E[f(y)] = F(v)$ denklemi, $F(v)$ 'nin $f(y)$ 'nin Elzaki dönüşümü olduğu ve $f(y)$ 'nin $F(v)$ 'nin ters Elzaki dönüşümü olduğu anlamına gelir. Yani,

$$f(y) = E^{-1}[F(v)]$$

Kısmi türevli denklemler için $u(x, y)$ sürekli ve en fazla üstel mertebeden olsun. $u(x, y)$ 'nin Elzaki dönüşümü şu şekilde yazılır:

$$[u(x, y)] = F(x, v) = v \int_0^{\infty} e^{\frac{-y}{v}} u(x, y) dy$$

$u(x, y)$ üstel mertebeli ve parçalı sürekli bir fonksiyon ve Elzaki dönüşümü $E[u(x, y)]$ olmak üzere kısmi türevlerinin Elzaki dönüşümleri aşağıda verilmiştir (Elzaki vd., 2019).

$$E\left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\right] = \frac{d[E[u(x, y)]]}{dx}$$

$$E\left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right] = \frac{1}{v} E[u(x, y)] - v u(x, 0)$$

$$E\left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}\right] = \frac{d^2[E[u(x, y)]]}{dx^2}$$

$$E \left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right] = \frac{1}{v^2} E[u(x, y)] - u(x, 0) - v \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y}$$

Tablo 1. Elzaki dönüşüm tablosu

$f(y) = E^{-1}[F(v)]$	$E[f(y)] = F(v)$
1	v^2
y	v^3
$y^n, n = 0, 1, 2, \dots$	$n! v^{n+2}$
e^{ay}	$\frac{v^2}{1 - av}$
$\sin ay$	$\frac{av^3}{1 + a^2 v^2}$
$\cos ay$	$\frac{v^2}{1 + a^2 v^2}$

Tablo 2. Sumudu dönüşüm tablosu

$f(y) = S^{-1}[F(v)]$	$S[f(y)] = F(v)$
1	1
y	v
$\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}, n = 1, 2, \dots$	v^{n-1}
e^{ay}	$\frac{1}{1 - av}$
$\frac{\sin ay}{a}$	$\frac{v}{1 + a^2 v^2}$
$\cos ay$	$\frac{1}{1 + a^2 v^2}$

Tablo 3. Laplace dönüşüm tablosu

$f(y) = L^{-1}[F(v)]$	$L[f(y)] = F(v)$
1	$\frac{1}{v}$
y	$\frac{1}{v^2}$
$y^n, n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{v^{n+1}}$
e^{ay}	$\frac{1}{v - a}, v > a$
$\sin ay$	$\frac{a}{v^2 + a^2}$
$\cos ay$	$\frac{v}{v^2 + a^2}$

3. PERTÜRBASYON TEORİSİ

3.1. Asimptotik Mertebe Sembolleri

O , o ve $\sim$ sembolleri ilk olarak E. Landau ve P. Du Bois-Reymond tarafından kullanılmıştır. Bir fonksiyonun davranışının limit işlemi altında doğru bir şekilde ifade edilebilmesi için mertebe fonksiyonlarından yararlanılabilir.

Pertürbasyon yöntemlerini kullanırken asıl amaç, ε sıfıra yaklaştığında limitte bilinmeyen $f(\varepsilon)$ fonksiyonlarının davranışını araştırmaktır. Probleme yaklaşma şekli, ε sıfıra yaklaştığında bilinmeyen $f(\varepsilon)$ fonksiyonunu bilinen bir veya birkaç fonksiyonla karşılaştırmaktır (Nayfeh. 1993).

Örnek olarak $f(\varepsilon) = \varepsilon$ ve $g(\varepsilon) = \varepsilon^2$ fonksiyonlarında $\varepsilon \rightarrow 0$ için 0'a yakınsama hızları karşılaştırılırsa $f(\varepsilon) = \varepsilon$ fonksiyonunun yakınsama hızı $g(\varepsilon) = \varepsilon^2$ fonksiyonunun yakınsama hızından daha düşüktür (Cengizci, 2014).

Tanım 3.1.1. $f(\varepsilon)$, ε ' nun bir fonksiyonu olsun;

- i. $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ iken $f(\varepsilon)$ en fazla $g(\varepsilon)$ ile aynı mertebededir denir eğer,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \left| \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} \right| < M, \quad M > 0$$

ise ve bu ilişki

$$f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon)), \varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$$

ile gösterilir.

- ii. $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ iken $f(\varepsilon)$, $g(\varepsilon)$ 'dan daha küçük mertebededir denir (veya $f(\varepsilon)$, $g(\varepsilon)$ 'dan çok daha küçüktür denir) eğer,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 0$$

ise ve bu ilişki

$$f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon)), \varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$$

veya

$$f(\varepsilon) \ll g(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$$

ile gösterilir (Bender ve Orszag, 1978).

Örnek 3.1.1. Aşağıda örnekler verilmiştir (Jakobsen, 2016).

(1) $\sin(\varepsilon) = O(\varepsilon), \varepsilon \rightarrow 0$; çünkü

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{\sin(\varepsilon)}{\varepsilon} \right| = 1.$$

(2) $\sin(\varepsilon^2) = o(\varepsilon), \varepsilon \rightarrow 0$; çünkü

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{\sin(\varepsilon^2)}{\varepsilon} \right| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{2\varepsilon \cos(\varepsilon^2)}{1} \right| = 0.$$

(3) $1 - \cos(\varepsilon) = o(\varepsilon), \varepsilon \rightarrow 0$; çünkü

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{1 - \cos(\varepsilon)}{\varepsilon} \right| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{\sin(\varepsilon)}{1} \right| = 0.$$

(4) $\ln(\varepsilon) = o(\varepsilon^{-1}), \varepsilon \rightarrow 0$; çünkü

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{\ln(\varepsilon)}{\varepsilon^{-1}} \right| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{\varepsilon^{-1}}{\varepsilon^{-2}} \right| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon = 0.$$

3.2. Asimptotik Açılım

Bazı diferansiyel ve integral denklemlerin analitik anlamda tam çözümünü bulmak mümkün olmayabilir. Bu problemlerin çözümü yaklaşım teorisinin konusunu oluşturur. Bu problemleri çözebilmek için 1886 yılında Poincaré asimptotik açılımı tanımlamış ve asimptotik analizi geliştirmiştir.

Tanım 3.2.1. $f(\varepsilon)$ ve $g(\varepsilon)$ fonksiyonları verilsin. $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ iken $f(\varepsilon)$ fonksiyonu $g(\varepsilon)$ 'a asimptotiktir (veya asimptotik olarak denktir) denir eğer,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 1$$

ise ve bu ilişki

$$f(\varepsilon) \sim g(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$$

ile gösterilir (Bender ve Orszag, 1978)

Örnek 3.2.1. Tanım yardımıyla $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $\frac{1}{-1-\varepsilon+e^\varepsilon} \sim \frac{2}{\varepsilon^2}$ olduğunu gösterelim,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{-1-\varepsilon+e^\varepsilon}}{\frac{2}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2}{2(-1-\varepsilon+e^\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\varepsilon}{2(-1+e^\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{e^\varepsilon} = 1$$

elde edilir. Çözüm adımlarında L'Hospital teoreminden yararlanılmıştır.

Tanım 3.2.2. $\{\phi_n(\varepsilon)\}_{n \in \mathbb{N}}$ bir fonksiyon dizisi olsun. Eğer her bir n için $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ iken

$$\phi_{n+1}(\varepsilon) = o(\phi_n(\varepsilon))$$

ise $\{\phi_n(\varepsilon)\}$ dizisine $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ için bir asimptotik dizi denir (Erdélyi, 1956).

Örnek 3.2.2.

$$\varphi_m(\varepsilon) = \sin(\varepsilon)^m$$

$$\varphi_m(\varepsilon) = \ln(\varepsilon)^{-m}$$

$$\varphi_m(\varepsilon) = (\sqrt{\varepsilon})^m$$

Asimptotik diziler kavramını kullanarak, asimptotik açılım tanımlanabilir (Jakobsen, 2016).

Tanım 3.2.3. $\{\phi_n(\varepsilon)\}_{n \in \mathbb{N}}$ bir asimptotik dizi ve $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ katsayıların bir dizisi olsun. Eğer her bir $N \in \mathbb{N}$ için $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ iken

$$f(x) = \sum_{n=0}^N a_n \phi_n(\varepsilon) + o(\phi_N(\varepsilon))$$

sağlanıyorsa yani

$$f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \phi_n(\varepsilon)$$

ise sağdaki seriye $f(x)$ 'in asimptotik serisi (veya $f(x)$ için bir asimptotik açılım) denir. $f(x)$ fonksiyonunun $f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \phi_n(\varepsilon)$ asimptotik açılımının katsayıları

$$a_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \frac{f(\varepsilon)}{\phi_0(\varepsilon)},$$
$$a_N = \lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \frac{f(\varepsilon) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(\varepsilon)}{\phi_N(\varepsilon)}, N \geq 1$$

ile hesaplanabilir. Burada $f(\varepsilon)$ fonksiyonunun türevlenebilir olması gerekmez. Kuvvet serisi, asimptotik açılımlara bir örnektir. Fakat asimptotik açılımlar çok daha geneldir (De Bruijn, 1958).

3.3. Pertürbasyon Teorisi ve Örnekler

Pertürbasyon teorisi, istenilen çözümün, kesin çözümlü problemden sapmanın miktarını belirleyen "küçük" parametre kullanılarak kuvvet serisi terimleri ile ifade edilmesine öncülük eder. Kuvvet serisinin ana terimi, kesin çözümlü problemin çözümü olurken, diğer terimler ise ilk problemden sapma miktarına göre belirlenen, çözümdeki sapmayı tanımlar. Bu yöntemde yapılan şey seri halinde lineer problemlerin çözülmesidir.

ε küçük bir parametre olmak üzere X çözümüne yaklaşım için;

$$X = \varepsilon^0 X_0 + \varepsilon^1 X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \dots$$

serisi yazılsın. Burada X_0 kesin çözümü bulunabilen başlangıç probleminin bilinen kesin çözümünü, $X_1, X_2, \dots$ belirli bir yöntem kullanılarak iterasyonla bulunan daha yüksek dereceden çözümleri ifade eder. Küçük ε değerleri için bulunan daha yüksek dereceden çözümlerin daha az önemli olduğu anlamına gelir. Pertürbasyon teorisinin etkili sonuçlar verebilmesi için ε küçük parametresinin uygun olarak belirlenmesi gerekir.

Küçük ε için serideki bu yüksek dereceli terimler genellikle art arda küçülür. Yaklaşık bir "pertürbatif çözüm", seriyi keserek, genellikle sadece ilk iki terimi

koruyarak, nihai çözümü ilk (tam) çözüm ve "birinci dereceden" pertürbatif düzeltmenin toplamı olarak ifade edilir. Teorinin işleyişinde genellikle ε ile gösterilen küçük bir parametre, $\varepsilon = 0$ olduğunda problem çözülebilir olacak şekilde tanımlanır. Verilen probleme genel çözüm bulunması $\varepsilon = 0$ civarında bir analiz ile yapılır.

$$X \approx X_0 + \varepsilon X_1 (\varepsilon \rightarrow 0)$$

Yaklaşık çözümde hatanın mertebesi belirtmek için büyük “O” gösterimi kullanılır.

$$X = X_0 + \varepsilon X_1 + O(\varepsilon^2)$$

Birçok önemli problemde küçük pertürbasyonların verilmesi, çözümlerin niceleyici ve niteleyici özelliklerini ortaya koyar. Fakat bu özellikler, pertürbe edilmeyen problemlerin çözümlerinden oldukça farklı olabilirler (Demirtaş, 2014).

Örnek 3.3.1. Başlangıç koşulları

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, & u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) &= \varepsilon \cosh(y), \\ u_x(0, y) &= \varepsilon \cosh(y), & u_y(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

olan

$$\varepsilon \left(\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \varepsilon \cos x \cosh(y), \quad 0 \leq x, y \leq \frac{\pi}{2}$$

eliptik pertürbasyon problemini ele alalım.

Çözüm: u 'nun düzgün pertürbasyon açılımı yapılırsa;

$$u(x, y) = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n$$

şeklinde ifade edilir. Bu açılım eliptik denklemde yazılırsa;

$$\varepsilon \left(\frac{\partial^2(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots)}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots)}{\partial x} = \varepsilon \cos x \cosh(y)$$

oluşan denklem ε 'nın kuvvetlerine göre gruplandırılır ve ε 'nın benzer kuvvetleri arasında eşitlik kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \text{ord}(\varepsilon^3) \\ = \varepsilon \cos x \cosh(y) \end{aligned}$$

$$\varepsilon^0: \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0$$

$$\varepsilon^1: \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial u_1}{\partial x} = \cos x \cosh(y)$$

$$\varepsilon^2: \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$$

$\vdots$

$$\varepsilon^n: \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y^2} + \frac{\partial u_n}{\partial x} = 0, n \geq 3$$

olur. Diğer taraftan $u(0, y) = 0$ şartında sol tarafta pertürbasyon açılımı kullanılırsa

$$u_0(0, y) + \varepsilon u_1(0, y) + \varepsilon^2 u_2(0, y) + \dots = 0$$

yazılır. Buradan

$$u_n(0, y) = 0, n \geq 0$$

olduğu görülür. u_0 'ın değerini bulmak için

$$\varepsilon^0: \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, u_0(0, y) = 0$$

problemi çözülür. Denklemden integral alınırsa (yani türevden kurtarılırsa),

$$\int_0^x \frac{\partial u_0}{\partial x} dx = 0$$

$$u_0(x, y) - u_0(0, y) = 0$$

buradaki $u_0(0, y) = 0$ değeri yerine yazılırsa;

$$u_0(x, y) = 0$$

elde edilir. Bu değerden yola çıkarak $u_1(x, y)$ değerini bulalım.

$$\varepsilon^1: \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial u_1}{\partial x} = \cos x \cosh(y)$$

denkleminde $u_0(x, y) = 0$ değerini kullanalım.

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \cos x \cosh(y)$$

denklemini çözmek için denkleme integral uygulanırsa yani türevden kurtarılsa

$$\int_0^x \frac{\partial u_1}{\partial x} dx = \int_0^x \cos x \cosh(y) dx$$

$$u_1(x, y) - u_1(0, y) = \sin(x) \cosh(y)$$

olur ve burada $u_1(0, y) = 0$ koşulu kullanılırsa

$$u_1(x, y) = \sin(x) \cosh(y)$$

değeri bulunur. Şimdi $u_2(x, y)$ değerini bulalım.

$$\varepsilon^2: \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$$

denkleminde $u_1(x, y) = \sin(x) \cosh(y)$ değeri yerine yazılırsa;

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$$

elde edilir. Bu denklemin integrali alınır (yani türevden kurtarılırsa),

$$\int_0^x \frac{\partial u_2}{\partial x} dx = 0$$

$$u_2(x, y) - u_2(0, y) = 0$$

olur. Burada $u_2(0, y) = 0$ koşulu kullanılırsa

$$u_2(x, y) = 0$$

bulunur. Şimdi genel olarak $u_n(x, y) = 0, n \geq 2$ olduğunu tümevarım ile kanıtlayalım.

i) $u_2(x, y) = 0$ olduğunu biliyoruz.

ii) $u_{n-1}(x, y) = 0$ olduğunu kabul edelim.

iii) $n \geq 3$ için

$$\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y^2} + \frac{\partial u_n}{\partial x} = 0$$

denklemin geçerlidir. $u_{n-1}(x, y) = 0$ olduğundan

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = 0$$

olur, ve bu denklemin $u_n(0, y) = 0$ başlangıç şartıyla çözümü

$$u_n(x, y) = 0$$

dir. Böylelikle $u_n(x, y) = 0, n \geq 2$ olduğu kanıtlandı. Bulunan

$$u_0(x, y) = 0, u_1(x, y) = \sin(x) \cosh(y), u_n(x, y) = 0, n \geq 2$$

değerleri, u nun düzgün pertürbasyon açılımında yerine yazılırsa

$$u(x, y) = u_0 + \varepsilon u_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^n u_n$$

$$u(x, y) = \varepsilon \sin(x) \cosh(y)$$

çözümü elde edilmiş olur.

Örnek 3.3.2. Başlangıç koşulları;

$$u(0, y) = \cosh(y\sqrt{\varepsilon}), \quad u_x(0, y) = -3\frac{y^3}{2}$$

$$u(x, 0) = \cos(x), \quad u_y(x, 0) = 0$$

olan

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + 9xy = 0, \quad 0 \leq x, y \leq 1$$

eliptik pertürbasyon problemini ele alalım.

Çözüm: u 'nun düzgün pertürbasyon açılımı yapılırsa;

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n \quad (3)$$

şeklinde ifade edilir. Bu açılım eliptik denklemde yazılırsa;

$$\varepsilon \frac{\partial^2 (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots)}{\partial y^2} + 9xy = 0$$

oluşan denklem ε 'nın kuvvetlerine göre gruplandırılır ve ε 'nın benzer kuvvetleri arasında eşitlik kullanılırsa;

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 9xy + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) + \text{ord}(\varepsilon^3) = 0$$

$$\varepsilon^0: \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 9xy = 0$$

$$\varepsilon^1: \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0$$

$$\varepsilon^2: \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0$$

$\vdots$

$$\varepsilon^n: \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} = 0, n \geq 3$$

u_0 değerini bulmak için

$$\varepsilon^0: \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 9xy = 0$$

denkleminde iki katlı integral alınır (yani türevden kurtarılsa);

$$\int_0^y \int_0^y \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 9xy \right) dy dy = 0$$

$$\int_0^y \left(\left(\frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial u_0(x, 0)}{\partial y} \right) + 9 \frac{y^2}{2!} x \right) dy = 0$$

buradaki $\frac{\partial u_0(x, 0)}{\partial y} = 0$ olarak soruda başlangıç koşulunda belirtilmiştir bu değer yerine yazılıp tekrar integral alınır;

$$\int_0^y \left(\left(\frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} - 0 \right) + 9 \frac{y^2}{2!} x \right) dy = 0$$

$$u_0(x, y) - u_0(x, 0) + 9 \frac{y^3}{3!} x = 0$$

buradaki $u_0(x, 0) = \cos(x)$ olarak soruda başlangıç koşulunda belirtilmiştir bu değer yerine yazılırsa;

$$u_0(x, y) = \cos(x) - 9 \frac{y^3}{3!} x$$

$u_0(x, y)$ elde edilir, bu değerden yola çıkarak $u_1(x, y)$ değeri bulunur;

$$\varepsilon^1: \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0$$

denkleminde $u_0(x, y)$ değerinin türevi yerine yazılırsa;

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = \cos(x)$$

denklemini çözmek için denkleme iki katlı integral uygulanırsa yani türevden kurtarılsa;

$$\begin{aligned} \int_0^y \int_0^y \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) dy dy &= \int_0^y \int_0^y \cos(x) dy dy \\ \int_0^y \frac{\partial u_1}{\partial y} dy &= \int_0^y y \cos(x) dy \\ u_1(x, y) &= \frac{y^2}{2!} \cos(x) \end{aligned}$$

$u_1(x, y)$ değeri bulunur bu değerden yola çıkarak $u_2(x, y)$ değeri bulunur;

$$\varepsilon^2: \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0$$

denkleminde $u_1(x, y)$ değerinin türevi yerine yazılırsa;

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \frac{y^2}{2!} \cos(x)$$

denklemini çözmek için denkleme iki katlı integral uygulanırsa yani türevden kurtarılsa;

$$\begin{aligned} \int_0^y \int_0^y \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) dy dy &= \int_0^y \int_0^y \frac{y^2}{2!} \cos(x) dy dy \\ \int_0^y \frac{\partial u_2}{\partial x} dy &= \int_0^y \frac{y^3}{3!} \cos(x) dy \\ u_2(x, y) &= \frac{y^4}{4!} \cos(x) \end{aligned}$$

$u_2(x, y)$ değeri elde edilmiş olur.

Bulunan u_0, u_1, u_2 değerleri, u nun düzgün pertürbasyon açılımında yerine yazılırsa;

$$u(x, y) = -9x \frac{y^3}{3!} + 1 \cos(x) + \varepsilon \left(\frac{y^2}{2!} \cos(x) \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{y^4}{4!} \cos(x) \right) + \dots$$

$$u(x, y) = -3x \frac{y^3}{2} + \cos(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{(2n)!} \varepsilon^n$$

$$u(x, y) = -3x \frac{y^3}{2} + \cos(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y\sqrt{\varepsilon})^{2n}}{(2n)!}$$

$$u(x, y) = -3x \frac{y^3}{2} + \cos(x) \cosh(y\sqrt{\varepsilon})$$

Çözümü elde edilmiş olur. Yakınsaklığı incelersek,

$$r_0: \frac{\|u_1\|}{\|u_0\|} = \frac{\left\| \frac{y^2}{2!} \cos(x) \right\|}{\left\| \cos(x) - 9 \frac{y^3}{3!} x \right\|} = \frac{(0.540)^{\frac{1}{2}}}{(0.540) - \frac{3}{2}} = 0,2812 < 1$$

$$r_1: \frac{\|u_2\|}{\|u_1\|} = \frac{\left\| \frac{y^4}{4!} \cos(x) \right\|}{\left\| \frac{y^2}{2!} \cos(x) \right\|} = \frac{\frac{1}{4!}}{\frac{1}{2!}} = 0,0833 < 1$$

$$r_3: \frac{\|u_3\|}{\|u_2\|} = \frac{\left\| \frac{y^6}{6!} \cos(x) \right\|}{\left\| \frac{y^4}{4!} \cos(x) \right\|} = \frac{\frac{1}{6!}}{\frac{1}{4!}} = 0,0333 < 1$$

⋮

değerlerin 1 den küçük olduğu görülür.

3.4. Pertürbasyon Problem Tipleri

3.4.1. Düzgün ve Tekil Pertürbasyon Problemleri

Bender ve Orszag (1978)'e göre bir pertürbasyon problemi, kullanılan pertürbasyon serisi, epsilona bağlı bir kuvvet serisi biçiminde ise ve bu seri sıfırdan farklı bir yakınsama yarıçapına sahip ise bir düzgün pertürbasyon problemi olarak tanımlanır. Tüm düzgün pertürbasyon problemlerinin (bu tür problemleri sınıflamak için kullanacağımız) temel

bir özelliği, küçük ama sıfırdan farklı $|\varepsilon|$ için verilen kesin çözümün, ε sıfıra giderken pertürbe edilmemiş veya sıfırıncı mertebeden çözüme düzgün olarak yakınsamasıdır.

Bir pertürbasyon problemi, kullanılan pertürbasyon serisi bir kuvvet serisi biçiminde değil ise ya da kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı sıfıra eşit ise bir tekil pertürbasyon problemi olarak tanımlanır.

Kurnaz (2019)'a göre P_ε problemi, küçük $\varepsilon > 0$ pertürbasyon parametresine bağlı bir problem olsun. Bu problemin $u_\varepsilon(x)$ çözümünün $L(u, \varepsilon) = 0$ denklemi ile belirlendiği kabul edilsin. Bu tür problemlere pertürbe olmuş problem denir.

$\varepsilon = 0$ durumundaki, P_0 probleminin çözümü, diğer bir ifadeyle $L(u_0, 0) = 0$ bağıntısı ile tanımlanan problemin çözümü u_0 olsun. P_0 problemine; P_ε problemine uygun indirgenmiş problem denir.

Şimdi bazı kabuller altında P_0 ve P_ε problemlerinin çözümlerinin bazı özelliklerini inceleyelim. P_ε problemi, başlangıç-değer veya sınır-değerler ile beraber $P_\varepsilon = \frac{du}{dx} = f(x, u, \varepsilon)$, başlangıç sınır veya karışık koşullar biçiminde tanımlanabilir.

Eğer, P_0 (indirgenmiş) problemi ile P_ε problemi aynı tip ve mertebeye sahipse, ayrıca, her iki problemin de bir tek çözümü varsa, P_ε problemine düzgün pertürbasyon problem denir. Aksi durumda ise, tekil pertürbasyon problem denir.

Kısaca, düzgün pertürbasyon problem; tanım bölgesindeki tüm x 'ler için, $\varepsilon \rightarrow 0$ iken, $u_\varepsilon(x) \rightarrow u_0(x)$ olacaktır. Eğer, tanım bölgesindeki tüm x 'ler için değilde sadece bazıları için $u_\varepsilon(x) \rightarrow u_0(x)$ oluyorsa, böyle problemler tekil pertürbasyon problemlerdir. Bununla birlikte verilen denklemin tipi ve mertebesi değişse bile indirgenmiş problem çözülebilir niteliktedir.

Örnek 3.4.1.1. Başlangıç koşulları;

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 1, & u_x(0, y) &= 1 \\ u(x, 0) &= e^x, & u_y(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

olan

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - u(x, y) = 0, \quad -1 \leq x, y \leq 1 \quad (4)$$

eliptik pertürbasyon problemini ele alalım.

Çözüm: $\varepsilon = 0$ olduğunda denklem;

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - u(x, y) = 0, \quad (5)$$

olur. Denklem (4) pertürbe edilmiş denklem olarak adlandırılırken, denklem (5) pertürbe edilmemiş veya indirgenmiş denklem olarak adlandırılır. Pertürbe edilmemiş denklemin gerçek bir çözümü olduğunu görmek kolaydır. Denklem (5)'in gerçek çözümü;

$$u(x, y) = C_1(y)e^x + C_2(y)e^{-x}$$

fonksiyonudur. Başlangıç değerleri kullanırsak;

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 1 \\ C_1(y)e^0 + C_2(y)e^0 &= 1 \\ C_1(y) + C_2(y) &= 1, \end{aligned}$$

$u_x(0, y) = 1$ şartını kullanalım:

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= C_1(y)e^x - C_2(y)e^{-x} \\ u_x(0, y) &= 1 \\ C_1(y)e^0 - C_2(y)e^0 &= 1 \\ C_1(y) - C_2(y) &= 1 \end{aligned}$$

Bu aşamada $C_1(y) = 1$ ve $C_2(y) = 0$ olduğu görülür. Yani pertürbe edilmemiş denklemin yan şartlar altında çözümü $u(x, y) = e^x$ olduğu bulunur.

Şimdi (4) denkleminin çözümü için bir pertürbasyon açılımı oluşturulursa;

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n$$

şeklinde ifade edilir. Bu açılım (4) denkleminde yazılırsa;

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots)}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots)}{\partial y^2} \\ - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots) = 0 \end{aligned}$$

oluşan denklem ε nun kuvvetlerine göre gruplandırılırsa;

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - u_0 + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - u_1 \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - u_2 \right) + \text{ord}(\varepsilon^3) = 0$$

ε 'nın benzer kuvvetleri arasında eşitlik kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \varepsilon^0: \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - u_0 &= 0 \\ \varepsilon^1: \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - u_1 &= 0 \\ \varepsilon^2: \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - u_2 &= 0 \\ \vdots \\ \varepsilon^n: \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y^2} - u_n &= 0, n \geq 3 \end{aligned}$$

Yan şartlar,

$$\left. \begin{aligned} u(0, y) &= 1 \\ u_x(0, y) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} u_0(0, y) + u_1(0, y) + \dots &= 1 \\ u_{0x}(0, y) + u_{1x}(0, y) + \dots &= 1 \end{aligned} \right\}$$

biçiminde yazılabilir. Buradan,

$$\left. \begin{aligned} u_0(0, y) &= 1 \\ u_{0x}(0, y) &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ve} \left. \begin{aligned} u_1(0, y) &= 0 \\ u_{1x}(0, y) &= 0 \end{aligned} \right\}, \dots, \left. \begin{aligned} u_n(0, y) &= 0 \\ u_{nx}(0, y) &= 0 \end{aligned} \right\}, \dots$$

olarak alınabileceği görülür.

u_0 değerini bulmak için;

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - u_0 &= 0, \\ u_0(0, y) &= 1, \\ u_{0x}(0, y) &= 1 \end{aligned}$$

çözülerek $u_0(x, y) = e^x$ olarak bulunur. u_1 fonksiyonunu bulmak için

$$\varepsilon^1: \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - u_1 = 0$$

denklemini

$$\left. \begin{aligned} u_1(0, y) &= 0 \\ u_{1x}(0, y) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

yan şartları altında çözelim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 0 - u_1 &= 0 \\ u_1(x, y) &= C_1(y)e^x + C_2(y)e^{-x} \end{aligned}$$

Genel çözümünde yan şartlar kullanıldığında $u_1(x, y) = 0$ bulunur.

Benzer şekilde $u_n(x, y) = 0, n \geq 2$ bulunur.

Bulunan $u_0, u_1, u_2, \dots$ değerleri, u nun düzgün pertürbasyon açılımında yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \\ u &= e^x + \varepsilon \cdot 0 + \varepsilon^2 \cdot 0 + \dots \\ u &= e^x \end{aligned}$$

Çözümü elde edilmiş olur.

Örnek 3.4.1.2. Başlangıç koşulları; $|\varepsilon| < 1$ için

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 1, & u_x(0, y) &= 0 \\ u(x, 0) &= \cos x, & u_y(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

olan

$$\varepsilon \left(\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right) + u(x, y) = \cos(x) (1 - \varepsilon) \quad (6)$$

eliptik pertürbasyon problemini ele alalım.

Çözüm: $\varepsilon = 0$ olduğunda denklem;

$$u(x, y) = \cos(x) \quad (7)$$

olur. Denklem (6) pertürbe edilmiş denklem olarak adlandırılırken, denklem (7) pertürbe edilmemiş veya indirgenmiş denklem olarak adlandırılır.

(6) denkleminin çözümü için bir pertürbasyon açılımı oluşturulursa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots$$

şeklinde ifade edilir. Bu açılım (6) denkleminde yazılırsa;

$$\varepsilon \left(\frac{\partial^2 (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots)}{\partial y^2} \right) + (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) = \cos(x) (1 - \varepsilon)$$

oluşan denklem ε 'nin kuvvetlerine göre gruplandırılırsa;

$$u_0 + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + u_1 \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + u_2 \right) + \text{ord}(\varepsilon^3) = \cos(x) - \varepsilon \cos(x)$$

ε 'nin benzer kuvvetleri arasında eşitlik kullanılırsa;

$$\varepsilon^0: u_0 = \cos(x)$$

$$\varepsilon^1: \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + u_1 = -\cos(x)$$

$$\varepsilon^2: \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + u_2 = 0$$

$\vdots$

$$\varepsilon^n: \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y^2} + u_n = 0, n \geq 3$$

u_1 değeri;

$$\varepsilon^1: \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + u_1 = -\cos(x)$$

$u_0 = \cos(x)$ değerinin türevleri denklemde yazılırsa;

$$-\cos(x) + u_1 = -\cos(x)$$

$$\varepsilon^1: u_1 = 0$$

u_2 değeri;

$$\varepsilon^2: \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + u_2 = 0$$

$u_1 = 0$ değerinin türevleri denklemde yazılırsa;

$$0 + u_2 = 0$$

$$\varepsilon^2: u_2 = 0$$

Bulunan $u_0, u_1, u_2, \dots$ değerleri, u nun düzgün pertürbasyon açılımında yerine yazılırsa;

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k = \cos(x) + 0$$

$$u = \cos(x)$$

çözümü elde edilmiş olur.

4. HOMOTOPİ PERTÜRBASYON YÖNTEMİ (HPY)

Tanım 4.1. F boş olmayan bir küme ve δ , F in kuvvet kümesi olan $P(F)$ in bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan δ ailesine F üzerinde bir topoloji (veya topolojik yapı) denir.

- (i) $\emptyset$ ve F , δ 'ya aittir.
- (ii) δ 'ya ait herhangi sayıda kümelerin birleşimi δ 'ya aittir.
- (iii) δ 'ya ait sonlu sayıda kümelerin arakesiti δ 'ya aittir.

Bu takdirde (F, δ) ikilisine bir topolojik uzay denir ve kısaca F ile gösterilir. Eğer (F, δ) bir topolojik uzay ise δ 'nın elemanlarına F in açık alt kümeleri denir (Bourbaki 1966).

Tanım 4.2. F ve G iki topolojik uzay; $a, b: F \rightarrow G$ iki sürekli fonksiyon ve $L = [0,1]$ olmak üzere $\forall n \in F$ için

$$\begin{aligned}\varphi: F \times L &\rightarrow G \\ (x, n) &\mapsto \varphi(x, n)\end{aligned}$$

sürekli fonksiyonu,

$$\varphi(x, 0) = a(x), \quad \varphi(x, 1) = b(x)$$

şartlarıyla tanımlanabiliyorsa yani, biri diğerine sürekli olarak deforme oluyorsa bu durumda a ile b fonksiyonlarına homotopiktir denir ve kısaca $a \simeq b$ şeklinde gösterilir. Ayrıca φ dönüşümüne a ile b arasında homotopi denir (Kamps ve Porter 1997).

4.1. Homotopi Pertürbasyon

Ji-Huan He, 1999 yılında yapmış olduğu çalışmada, geleneksel pertürbasyon yöntemlerinin aksine, bir küçük parametreye gerek duymayan bir yöntem geliştirmiştir.

Yöntemin temel fikrini anlatabilmek için aşağıdaki genel lineer olmayan problemi ele alalım:

$$A(u) - f(r) = 0, r \in \Omega \tag{8}$$

belirtilen denklem için sınır koşulu;

$$B\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0, r \in \Gamma$$

şeklindedir. Burada A genel diferansiyel operatör, B sınır operatörü, $f(r)$ bilinen bir analitik fonksiyon ve Γ, Ω tanım kümesinin sınırıdır.

Genel olarak A diferansiyel operatörü L ve N gibi iki parçaya ayrılabilir şekilde yazılabilir ki burada L lineer, N ise lineer olmayan operatördür.

Böylece (8) denklemi:

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Buradan u_0 , (8) denkleminin ilk yaklaşık çözümü olmak üzere,

$$v(r, p): \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

homotopisini oluşturabiliriz. Bu homotopi $p \in [0, 1]$ ve $r \in \Omega$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} H(v, p) &= (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0 \\ H(v, p) &= L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

eşitliğini sağlar.

Burada (9) denkleminde pertürbasyon denklemi ve p parametresine gömülü parametre denir. Bu parametre küçük parametre gibi düşünülerek klasik pertürbasyon yöntemi ile çözüm yapılabilir.

(9) denkleminde dikkat edersek $p = 0$ için

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0 \quad (10)$$

$p = 1$ için ise

$$H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0 \quad (11)$$

orijinal lineer olmayan denklem elde edilir. Böylece p gömülü parametresinin 0'dan 1'e değişmesi demek $H(v, p)$ fonksiyonunun (10) denkleminin çözümünden (11) denkleminin çözümüne dönüşmesi demektir. Bu işleme topolojide bozulma (deformation) denir.

Klasik pertürbasyon yönteminde, problemlerin çözümlerinin p küçük parametresinin bir serisi olduğu düşünülür ve

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n$$

serisi denklemde yerine yazılır. $v_0 = u_0$ olarak alındıktan sonra p parametresinin kuvvetleri cinsinden düzenlenip katsayılar sıfıra eşitlenir. Elde edilen denklemler sırayla çözülüp $v_i, i = 1, 2, \dots$ fonksiyonları bulunur. p parametresi $p = 1$ 'e eşitlenerek yaklaşık çözüm bulunur (He, 1999).

Örnek 4.1.1. Başlangıç koşulları;

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, & u_x(0, y) &= y \\ u(x, 0) &= x^2, & u_y(x, 0) &= x \end{aligned}$$

olan

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 2 \cos y - x^2 \cos y, \quad 0 \leq x, y \leq 1$$

eliptik bir denklem ele alalım.

Çözüm: Homotopi denklemini göz önüne alındığında, aşağıdaki homotopiyi oluşturabiliriz;

$$\begin{aligned} H(v, p) &= (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] \\ H(v, p) &= (1 - p) \left[\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} \right] + p \left[\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} - 2 \cos y + x^2 \cos y \right] \\ H(v, p) &= \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} - p \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + p \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + p \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \\ &\quad + p(-2 \cos y + x^2 \cos y) = 0 \end{aligned}$$

oluşur. Gerekli yok etmeler yapılırsa;

$$\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + p \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} + p(-2 \cos y + x^2 \cos y) = 0$$

denklemini elde edilir, v 'nin düzgün pertürbasyon açılımı yapılırsa;

$$v(x, y) = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n$$

şeklinde ifade edilir. Bu açılım denklemde yazılırsa;

$$\frac{\partial^2(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots)}{\partial x^2} + p \frac{\partial^2(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots)}{\partial y^2} + p(-2 \cos y + x^2 \cos y) = 0$$

denklemini elde edilir. Bu denklem p 'nin kuvvetlerine göre düzenlenirse;

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + p \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - 2 \cos y + x^2 \cos y \right) + p^2 \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right) + \text{ord}(p^3) = 0$$

$$p^0: \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = 0$$

$$p^1: \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - 2 \cos y + x^2 \cos y = 0$$

$$p^2: \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = 0$$

$\vdots$

oluşan eşitlikte p 'nin aynı kuvvetten terimlerin katsayıları birbirine eşitlenerek $v_0, v_1, v_2, \dots$ değerleri bulunur, dolayısıyla;

$$p^0: \frac{\partial^2 v_0(x, y)}{\partial x^2} = 0$$

denklemini çözmek için denkleme iki katlı integral uygulanırsa yani türevden kurtarılsa;

$$\int_0^x \int_0^x \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) dx dx = 0$$

$$\int_0^x \left(\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v_0(0, y)}{\partial x} \right) dx = 0$$

buradaki $\frac{\partial v_0(0, y)}{\partial x} = y$ olarak soruda başlangıç koşulunda belirtilmiştir bu değer yerine yazılıp tekrar integral alınır;

$$\int_0^x \left(\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} - y \right) dx = 0$$

$$v_0(x, y) - v_0(0, y) - xy = 0$$

buradaki $v_0(0, y) = 0$ olarak soruda başlangıç koşulunda belirtilmiştir bu değer yerine yazılırsa;

$$v_0(x, y) = xy$$

$v_0(x, y)$ elde edilir, bu değerden yola çıkarak $v_1(x, y)$ değeri bulunur;

$$p^1: \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - 2 \cos y + x^2 \cos y = 0$$

denkleminde $v_0(x, y)$ 'nin türevi yerine yazılırsa;

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = 2 \cos y - x^2 \cos y$$

denklemini çözmek için denkleme iki katlı integral uygulanırsa yani türevden kurtarılsa;

$$\int_0^x \int_0^x \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right) dx dx = \int_0^x \int_0^x (2 \cos y - x^2 \cos y) dx dx$$

$$\int_0^x \frac{\partial v_1}{\partial x} dx = \int_0^x \left(2x \cos y - 2 \frac{x^3}{3!} \cos y \right) dx$$

$$v_1(x, y) = 2 \cos(y) \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} \right)$$

$v_1(x, y)$ değeri bulunur bu değerden yola çıkarak $v_2(x, y)$ değeri bulunur;

$$p^2: \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = 0$$

denkleminde $v_1(x, y)$ 'nin türevi yerine yazılırsa;

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = 2 \cos(y) \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} \right)$$

denklemini çözmek için denkleme iki katlı integral uygulanırsa yani türevden kurtarılsa;

$$\int_0^x \int_0^x \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \right) dx dx = \int_0^x \int_0^x \left(2 \cos(y) \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} \right) \right) dx dx$$

$$\int_0^x \frac{\partial v_2}{\partial x} dx = \int_0^x \left(2 \cos(y) \left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} \right) \right) dx$$

$$v_2(x, y) = 2 \cos(y) \left(\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \right)$$

$v_2(x, y)$ değeri bulunur bu değerden yola çıkarak $v_3(x, y)$ değeri bulunur;

$$p^3: \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = 0$$

denkleminde $v_2(x, y)$ 'nin türevi yerine yazılırsa;

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} = 2 \cos(y) \left(\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \right)$$

denklemini çözmek için denkleme iki katlı integral uygulanırsa yani türevden kurtarılsa;

$$\int_0^x \int_0^x \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} \right) dx dx = \int_0^x \int_0^x \left(2 \cos(y) \left(\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \right) \right) dx dx$$

$$\int_0^x \frac{\partial v_3}{\partial x} dx = \int_0^x \left(2 \cos(y) \left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \right) \right) dx$$

$$v_3(x, y) = 2 \cos(y) \left(\frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} \right)$$

böylelikle,

$$v_n(x, y) = 2 \cos(y) \left(\frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \right)$$

çözümlerine ulaşıldığı görülür. Bu çözümler pertürbasyon serisinde yerine yazılırsa;

$$v(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[xy + 2 \frac{x^2}{2!} \cos y - 2 \frac{x^4}{4!} \cos y + 2 \frac{x^4}{4!} \cos y - 2 \frac{x^6}{6!} \cos y \right. \\ \left. + 2 \frac{x^6}{6!} \cos y - 2 \frac{x^8}{8!} \cos y + \dots + 2 \cos(y) \left(\frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \right) \right]$$

$$v(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[xy + 2 \frac{x^2}{2!} \cos y - 2 \cos(y) \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \right]$$

$$v(x, y) = xy + x^2 \cos y$$

çözümü elde edilmiş olur. Yakınsaklığı incelersek,

$$r_0: \frac{\|v_1\|}{\|v_0\|} = \frac{\left\| 2 \frac{x^2}{2!} \cos y - 2 \frac{x^4}{4!} \cos y \right\|}{\|xy\|} = \frac{(0,540) - \frac{1}{2}(0,540)}{1} = 0,27 < 1$$

$$r_1: \frac{\|v_2\|}{\|v_1\|} = \frac{\left\| 2 \frac{x^4}{4!} \cos y - 2 \frac{x^6}{6!} \cos y \right\|}{\left\| 2 \frac{x^2}{2!} \cos y - 2 \frac{x^4}{4!} \cos y \right\|} = \frac{\frac{1}{4!} - \frac{1}{6!}}{\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}} = 0,0878 < 1$$

$$r_2: \frac{\|v_3\|}{\|v_2\|} = \frac{\left\| 2 \frac{x^6}{6!} \cos y - 2 \frac{x^8}{8!} \cos y \right\|}{\left\| 2 \frac{x^4}{4!} \cos y - 2 \frac{x^6}{6!} \cos y \right\|} = \frac{\frac{1}{6!} - \frac{1}{8!}}{\frac{1}{4!} - \frac{1}{6!}} = 0,0338 < 1$$

$$\vdots$$

değerlerin 1 den küçük olduğu görülür.

Örnek 4.1.2. Başlangıç koşulları;

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, & u_x(0, y) &= e^y + 1 \\ u(x, 0) &= x + \sin x, & u_y(x, 0) &= x \end{aligned}$$

olan

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + u(x, y) = 2xe^y, 0 \leq x, y \leq 1$$

eliptik bir denklem ele alalım.

Çözüm: Homotopi denklemini göz önüne alındığında, aşağıdaki homotopiyi oluşturabiliriz;

$$H(v, p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)]$$

$$H(v, p) = (1 - p) \left[\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} \right] + p \left[\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} + v(x, y) - (2xe^y) \right]$$

$$\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} - p \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + p \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + p \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} + pv(x, y) - p(2xe^y) = 0$$

oluşur. Gerekli yok etmeler yapılırsa;

$$\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + p \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} + pv(x, y) - p(2xe^y) = 0$$

denklemini elde edilir, v 'nin düzgün pertürbasyon açılımı yapılırsa;

$$v(x, y) = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n$$

şeklinde ifade edilir. Bu açılım denklemde yazılırsa;

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots)}{\partial x^2} + p \frac{\partial^2 (v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots)}{\partial y^2} \\ + p(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots) - p(2xe^y) = 0 \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Bu denklem p 'nin kuvvetlerine göre düzenlenirse;

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + p \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + v_0 - (2xe^y) \right) + p^2 \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + v_1 \right) + ord(p^3) = 0$$

oluşan eşitlikte p 'nin aynı kuvvetten terimlerin katsayıları birbirine eşitlenerek $v_0, v_1, v_2, \dots$ değerleri bulunur, dolayısıyla;

$$p^0: \frac{\partial^2 v_0(x, y)}{\partial x^2} = 0$$

denklemini çözmek için denkleme iki katlı integral uygulanırsa yani türevden kurtarılsa;

$$\int_0^x \int_0^x \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) dx dx = 0$$

$$\int_0^x \left(\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v_0(0, y)}{\partial x} \right) dx = 0$$

buradaki $\frac{\partial v_0(0, y)}{\partial x} = e^y + 1$ olarak problemin başlangıç koşulunda belirtilmiştir bu değer yerine yazılıp tekrar integral alınır;

$$\int_0^x \left(\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} - e^y - 1 \right) dx = 0$$

$$v_0(x, y) - v_0(0, y) - xe^y - x = 0$$

buradaki $v_0(0, y) = 0$ olarak problemin başlangıç koşulunda belirtilmiştir bu değer yerine yazılırsa;

$$v_0(x, y) = xe^y + x$$

$v_0(x, y)$ elde edilir, bu değerden yola çıkarak $v_1(x, y)$ değeri bulunur;

$$p^1: \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + v_0 - (2xe^y) = 0$$

denkleminde $v_0(x, y)$ değeri ve türevi yerine yazılırsa;

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = -x$$

denklemini çözmek için denkleme iki katlı integral uygulanırsa yani türevden kurtarılsa;

$$\int_0^x \int_0^x \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right) dx dx = \int_0^x \int_0^x (-x) dx dx$$

$$\int_0^x \frac{\partial v_1}{\partial x} dx = \int_0^x \left(-\frac{x^2}{2!} \right) dx$$

$$v_1(x, y) = -\frac{x^3}{3!}$$

$v_1(x, y)$ değeri bulunur bu değerden yola çıkarak $v_2(x, y)$ değeri bulunur;

$$p^2: \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + v_1 = 0$$

denkleminde $v_1(x, y)$ değeri ve türevi yerine yazılırsa;

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = \frac{x^3}{3!}$$

denklemini çözmek için denkleme iki katlı integral uygulanırsa yani türevden kurtarılsa;

$$\int_0^x \int_0^x \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \right) dx dx = \int_0^x \int_0^x \left(\frac{x^3}{3!} \right) dx dx$$

$$\int_0^x \frac{\partial v_2}{\partial x} dx = \int_0^x \left(\frac{x^4}{4!} \right) dx$$

$$v_2(x, y) = \frac{x^5}{5!}$$

$v_2(x, y)$ değeri bulunur bu değerden yola çıkarak $v_3(x, y)$ değeri bulunur;

$$p^3: \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + v_2 = 0$$

denkleminde $v_2(x, y)$ değeri ve türevi yerine yazılırsa;

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} = -\frac{x^5}{5!}$$

denklemini çözmek için denkleme iki katlı integral uygulanırsa yani türevden kurtarılsa;

$$\begin{aligned} \int_0^x \int_0^x \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} \right) dx dx &= \int_0^x \int_0^x \left(-\frac{x^5}{5!} \right) dx dx \\ \int_0^x \frac{\partial v_3}{\partial x} dx &= \int_0^x \left(-\frac{x^6}{6!} \right) dx \\ v_3(x, y) &= -\frac{x^7}{7!} \end{aligned}$$

çözümlerine ulaşıldığı görülür. Bu çözümler pertürbasyon serisinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} v(x, y) &= xe^y + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ v(x, y) &= xe^y + \sin x \end{aligned}$$

çözümü elde edilmiş olur. Yakınsaklığı incelersek,

$$\begin{aligned} r_0: \frac{\|v_1\|}{\|v_0\|} &= \frac{\left\| -\frac{x^3}{3!} \right\|}{\|xe^y + x\|} = \frac{\frac{1}{3!}}{(2,718) + 1} = 0,0448 < 1 \\ r_1: \frac{\|v_2\|}{\|v_1\|} &= \frac{\left\| \frac{x^5}{5!} \right\|}{\left\| -\frac{x^3}{3!} \right\|} = \frac{\frac{1}{5!}}{\frac{1}{3!}} = 0,05 < 1 \\ r_2: \frac{\|v_3\|}{\|v_2\|} &= \frac{\left\| -\frac{x^7}{7!} \right\|}{\left\| \frac{x^5}{5!} \right\|} = \frac{\frac{1}{7!}}{\frac{1}{5!}} = 0,0238 < 1 \\ r_3: \frac{\|v_4\|}{\|v_3\|} &= \frac{\left\| \frac{x^9}{9!} \right\|}{\left\| -\frac{x^7}{7!} \right\|} = \frac{\frac{1}{9!}}{\frac{1}{7!}} = 0,0138 < 1 \end{aligned}$$

$$r_4: \frac{\|v_5\|}{\|v_4\|} = \frac{\left\| -\frac{x^{11}}{11!} \right\|}{\left\| \frac{x^9}{9!} \right\|} = \frac{\frac{1}{11!}}{\frac{1}{9!}} = 0,0090 < 1$$

$$\vdots$$

değerlerin 1 den küçük olduğu görülür.

4.2. Değiştirilmiş Homotopi Pertürbasyon Yöntemi (DHPY)

DHPY, standart HPY ile karşılaştırıldığında seri çözümün hızlı yakınsamasını gösterir, ayrıca değiştirilmiş algoritma sadece iki yineleme kullanarak problem için kesin çözüm verebilir.

Standart HP denklemini ele alırsak;

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0$$

HPY'nin değiştirilmiş formu, $f(r)$ fonksiyonunun $f_0(r)$ ve $f_1(r)$ olmak üzere iki kısma bölünebileceği varsayımına dayalı olarak oluşturulabilir:

$$f(r) = f_0(r) + f_1(r)$$

veya $f(r)$ fonksiyonunun bir dizi ile değiştirilebileceği varsayımıyla $f(r)$ 'nin Taylor serisinde ifade edildiği varsayımı altında sonsuz bileşenler,

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r)$$

şeklinde oluşturulabilir.

İlk varsayım $f(r) = f_0(r) + f_1(r)$ göre aşağıdaki eşitliği sağlayan bir $v(r, p) : \Omega \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ homotopisi oluşturulabilir:

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f_1(r)] = f_0(r) \quad (12)$$

buradan yazılan ardışık denklemlerden u_0 ve u_1 bileşenlerinin bulunduklarında değişiklik yapılır. Yöntemde $f_0(r)$, u_0 bileşeni ile ilişkilendirilir; $f_1(r) = f(r)$ ve $f_0(r) = 0$ olarak ayarlanırsa geri kalan f_1 parçası u_1 bileşeni ile ilişkilendirilir, o zaman (12) denklemi

standart homotopi denkleminde indirgenir. Yöntemin başarısı f_0 ve f_1 fonksiyonlarının doğru seçilmesine bağlıdır.

İkinci varsayım $f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r)$ göre aşağıdaki eşitliği sağlayan bir $v(r, p): \Omega \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ homotopisi oluşturulabilir:

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + pN(v) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n f_n(r) \quad (13)$$

Eğer $f(r)$ sadece iki terimden oluşuyorsa, o zaman homotopi (13), homotopi (12)'e indirgenir. Bu durumda f_0 terimi u_0 bileşeniyle, f_1 terimi u_1 bileşeniyle, f_2 terimi u_2 bileşeniyle, ... ilişkilendirilir ve çözümler elde edilir. Bu öneri $u_0, u_1, u_2, \dots$ terimlerinin hesaplanmasını kolaylaştıracak ve dolayısıyla seri çözümünün hızlı yakınsamasını hızlandıracaktır.

Denklem (12) ve denklem (13)'de verilen homotopiye dayalı DHPY algoritmasının, her bir bileşende yer alan terimlerin sayısını azalttığını ve dolayısıyla standart HPY ile karşılaştırıldığında hesaplamaların boyutunun en aza indirildiğini gözlemlemek kolaydır. Her bir bileşendeki terimlerin bu şekilde azaltılması, homotopi pertürbasyon çözümünün oluşturulmasını kolaylaştırır (Ahmed, 2016).

Örnek 4.2.1. Başlangıç koşulları

$$\begin{aligned} u(0, y) &= \cos y, & u_x(0, y) &= 0 \\ u(x, 0) &= x^4 + 1, & u_y(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

olan

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 12x^2 - \cos y, \quad 0 \leq x, y \leq 1$$

eliptik bir denklem ele alalım.

Çözüm: Homotopi denklemini göz önüne alındığında, aşağıdaki homotopiyi oluşturabiliriz;

$$\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + p \left[\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} - 12x^2 \right] = -\cos y$$

v 'nin düzgün pertürbasyon açılımı yapılırsa;

$$v(x, y) = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n$$

şeklinde ifade edilir. Bu açılım oluşturulan homotopi denkleminde yazılırsa;

$$\frac{\partial^2(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots)}{\partial x^2} + p \left[\frac{\partial^2(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots)}{\partial y^2} - 12x^2 \right] = -\cos y$$

oluşan denklem p nin kuvvetlerine göre gruplandırılırsa;

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + p \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - 12x^2 \right) + p^2 \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right) + \text{ord}(p^3) = -\cos y$$

$$p^0: \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = -\cos y$$

$$p^1: \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - 12x^2 = 0$$

$$p^2: \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = 0$$

$$p^3: \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = 0$$

$\vdots$

$$p^n: \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial y^2} = 0, n \geq 3$$

v_0 değerini bulmak için;

$$p^0: \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = -\cos y$$

denklemini çözmek için denkleme iki katlı integral uygulanırsa yani türevden kurtarılsa;

$$\int_0^x \int_0^x \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) dx dx = \int_0^x \int_0^x (-\cos y) dx dx$$

$$\int_0^x \left(\left(\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v_0(0, y)}{\partial x} \right) \right) dx = \int_0^x (-x \cos y) dx.$$

burada $\frac{\partial v_0(0, y)}{\partial x} = 0$ koşulu kullanılıp tekrar integral alınır;

$$\int_0^x \left(\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} \right) dx = \int_0^x (-x \cos y) dx$$

$$v_0(x, y) - v_0(0, y) = -\frac{x^2}{2!} \cos y$$

elde edilir. Şimdi $v_0(0, y) = \cos y$ koşulu kullanılırsa;

$$v_0(x, y) = \cos y - \frac{x^2}{2!} \cos y$$

$v_0(x, y)$ elde edilir, bu değerden yola çıkarak $v_1(x, y)$ değeri bulunur;

$$p^1: \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - 12x^2 = 0$$

denkleminde $v_0(x, y)$ değerinin türevi yerine yazılırsa;

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = \cos y - \frac{x^2}{2!} \cos y + 12x^2$$

denklemini çözmek için denkleme iki katlı integral uygulanırsa yani türevden kurtarılsa;

$$\int_0^x \int_0^x \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right) dx dx = \int_0^x \int_0^x \left(\cos y - \frac{x^2}{2!} \cos y + 12x^2 \right) dx dx$$

$$\int_0^x \frac{\partial v_1}{\partial x} dx = \int_0^x \left(x \cos y - \frac{x^3}{3!} \cos y + 12 \frac{x^3}{3} \right) dx$$

$$v_1(x, y) = x^4 + \frac{x^2}{2!} \cos y - \frac{x^4}{4!} \cos y$$

$v_1(x, y)$ değeri bulunur. Bu değerden yola çıkarak $v_2(x, y)$ değeri bulunur;

$$p^2: \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = 0$$

denkleminde $v_1(x, y)$ değerin türevi yerine yazılırsa;

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = \frac{x^2}{2!} \cos y - \frac{x^4}{4!} \cos y$$

denklemini çözmek için denkleme iki katlı integral uygulanırsa yani türevden kurtarılsa;

$$\begin{aligned} \int_0^x \int_0^x \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \right) dx dx &= \int_0^x \int_0^x \left(\frac{x^2}{2!} \cos y - \frac{x^4}{4!} \cos y \right) dx dx \\ \int_0^x \frac{\partial v_2}{\partial x} dx &= \int_0^x \left(\frac{x^3}{3!} \cos y - \frac{x^5}{5!} \cos y \right) dx \\ v_2(x, y) &= \frac{x^4}{4!} \cos y - \frac{x^6}{6!} \cos y \end{aligned}$$

$v_2(x, y)$ değeri elde edilmiş olur, bu değerden yola çıkarak $v_3(x, y)$ değeri bulunur;

$$p^3: \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = 0$$

denkleminde $v_2(x, y)$ değerin türevi yerine yazılırsa;

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} = \frac{x^4}{4!} \cos y - \frac{x^6}{6!} \cos y$$

denklemini çözmek için denkleme iki katlı integral uygulanırsa yani türevden kurtarılsa;

$$\begin{aligned} \int_0^x \int_0^x \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} \right) dx dx &= \int_0^x \int_0^x \left(\frac{x^4}{4!} \cos y - \frac{x^6}{6!} \cos y \right) dx dx \\ \int_0^x \frac{\partial v_3}{\partial x} dx &= \int_0^x \left(\frac{x^5}{5!} \cos y - \frac{x^7}{7!} \cos y \right) dx \\ v_3(x, y) &= \frac{x^6}{6!} \cos y - \frac{x^8}{8!} \cos y \end{aligned}$$

$v_3(x, y)$ değeri elde edilmiş olur.

Bulunan v_0, v_1, v_2 değerleri, pertürbasyon açılımında yerine yazılırsa;

$$v(x, y) = \cos y - \frac{x^2}{2!} \cos y + x^4 + \frac{x^2}{2!} \cos y - \frac{x^4}{4!} \cos y + \frac{x^4}{4!} \cos y - \frac{x^6}{6!} \cos y \\ + \frac{x^6}{6!} \cos y - \frac{x^8}{8!} \cos y + \dots$$

$$v(x, y) = x^4 + \cos y$$

çözümü elde edilmiş olur. Yakınsaklığı incelersek,

$$r_0: \frac{\|v_1\|}{\|v_0\|} = \frac{\left\|x^4 + \frac{x^2}{2!} \cos y - \frac{x^4}{4!} \cos y\right\|}{\left\|\cos y - \frac{x^2}{2!} \cos y\right\|} = \frac{\frac{1}{(0.540)} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}}{1 + \frac{1}{2}} = 1,5401$$

$$r_1: \frac{\|v_2\|}{\|v_1\|} = \frac{\left\|\frac{x^4}{4!} \cos y - \frac{x^6}{6!} \cos y\right\|}{\left\|x^4 + \frac{x^2}{2!} \cos y - \frac{x^4}{4!} \cos y\right\|} = \frac{\frac{1}{4!} - \frac{1}{6!}}{\frac{1}{(0.540)} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}} = 0,017 < 1$$

$$r_2: \frac{\|v_3\|}{\|v_2\|} = \frac{\left\|\frac{x^6}{6!} \cos y - \frac{x^8}{8!} \cos y\right\|}{\left\|\frac{x^4}{4!} \cos y - \frac{x^6}{6!} \cos y\right\|} = \frac{\frac{1}{6!} - \frac{1}{8!}}{\frac{1}{4!} - \frac{1}{6!}} = 0,0338 < 1$$

$$r_3: \frac{\|v_4\|}{\|v_3\|} = \frac{\left\|\frac{x^8}{8!} \cos y - \frac{x^{10}}{10!} \cos y\right\|}{\left\|\frac{x^6}{6!} \cos y - \frac{x^8}{8!} \cos y\right\|} = \frac{\frac{1}{8!} - \frac{1}{10!}}{\frac{1}{6!} - \frac{1}{8!}} = 0,0179 < 1$$

$$r_4: \frac{\|v_5\|}{\|v_4\|} = \frac{\left\|\frac{x^{10}}{10!} \cos y - \frac{x^{12}}{12!} \cos y\right\|}{\left\|\frac{x^8}{8!} \cos y - \frac{x^{10}}{10!} \cos y\right\|} = \frac{\frac{1}{10!} - \frac{1}{12!}}{\frac{1}{8!} - \frac{1}{10!}} = 0,0111 < 1$$

⋮

değerlerin 1 den küçük olduğu görülür.

5. HOMOTOPİ PERTÜRBASYON DÖNÜŞÜM YÖNTEMLERİ

Bu bölüm, diferansiyel denklemleri çözmek için Laplace dönüşümü yönteminin, Sumudu dönüşümü yönteminin ve Elzaki dönüşümü yönteminin homotopi pertürbasyon yöntemiyle birleştirilmiş bir formunu içerir, yani diferansiyel denklemlerde kesin çözümler elde etmek için iki güçlü yöntemi birleştirme yeteneğidir.

Denklemlerdeki doğrusal olmayan terimler, He'nin polinomları kullanılarak kolaylıkla ele alınabilir. Kullanılan homotopi pertürbasyon yöntemi, dönüştürülmüş değişkenler cinsinden çözüme götüren yeniden formüle edilmiş birinci ve ikinci mertebeden başlangıç değer problemine uygulanmış ve ters dönüşümden yararlanılarak seri çözümü elde edilmiştir.

Önerilen teknik, herhangi bir ayırıştırma veya kısıtlayıcı varsayım olmaksızın çözümü bulmakta ve yuvarlama hatalarından kaçınmaktadır. Ayrıca doğrusal olmayan problemleri Adomian polinomlarını kullanmadan çözmesi, bu algoritmanın ayırıştırma yöntemine göre açık bir avantajı olarak kabul edilebilir.

5.1. Homotopi Pertürbasyon Laplace Dönüşümü Yöntemi

Bu yöntemin temel fikrini göstermek için, başlangıç koşulları ile genel bir lineer olmayan, homojen olmayan kısmi diferansiyel denklemi ele alıyoruz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + R_1 u(x, y) + R_2 u(x, y) + Nu(x, y) &= f(x, y) \\ u(0, y) &= \alpha(x), \quad \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = \beta(x) \end{aligned} \quad (14)$$

burada $R_1 = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}$ ve $R_2 = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ lineer diferansiyel operatörlerdir, N ise genel doğrusal olmayan diferansiyel operatör ve $f(x, y)$ kaynak terimdir. (14)'ün her iki tarafında Laplace dönüşümünü (L ile gösterilir) alınır.

$$\begin{aligned} L \left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \right] + L[R_1 u(x, y) + R_2 u(x, y)] + L[Nu(x, y)] &= L[f(x, y)] \\ L \left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \right] &= -L[R_1 u(x, y) + R_2 u(x, y)] - L[Nu(x, y)] + L[f(x, y)] \\ v^2 L[u(x, y)] - vu(0, y) - \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} & \end{aligned}$$

$$= -L[R_1 u(x, y) + R_2 u(x, y)] - L[Nu(x, y)] + L[f(x, y)]$$

(14)'te verilen başlangıç koşullarını uygulayarak;

$$L[u(x, y)] = \frac{\alpha(x)}{v} + \frac{\beta(x)}{v^2} - \frac{1}{v^2} (L[R_1 u(x, y) + R_2 u(x, y)] + L[Nu(x, y)]) \\ + \frac{1}{v^2} (L[f(x, y)])$$

oluşan denklemde ters Laplace dönüşümü alınırsa;

$$u(x, y) = F(x, y) - L^{-1} \left[\frac{1}{v^2} (L[R_1 u(x, y) + R_2 u(x, y)] + L[Nu(x, y)]) \right]$$

burada $F(x, y)$, kaynak terimden ve öngörülen başlangıç koşullarından kaynaklanan terimi temsil eder. Şimdi, homotopi pertürbasyon yöntemini uygulanırsa;

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, y)$$

ve doğrusal olmayan terim şu şekilde ayrıştırılabilir;

$$Nu(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(u)$$

bazı He polinomları için Laplace dönüşümü ve homotopi pertürbasyon yönteminin birleşimi ile H_n şu şekilde verilir;

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, y) = F(x, y) - p \left(L^{-1} \left[\frac{1}{v^2} L \left[(R_1 + R_2) \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(u) \right] \right] \right)$$

p 'nin aynı kuvvetlerinin katsayılarını karşılaştırarak, aşağıdaki yaklaşımlara ulaşılır (Mishra ve Nagar, 2012):

$$p^0: u_0(x, y) = F(x, y)$$

$$\begin{aligned}
p^1: u_1(x, y) &= -L^{-1} \left(\frac{1}{v^2} L[(R_1 + R_2)u_0(x, y) + H_0(u)] \right) \\
p^2: u_2(x, y) &= -L^{-1} \left(\frac{1}{v^2} L[(R_1 + R_2)u_1(x, y) + H_1(u)] \right) \\
p^3: u_3(x, y) &= -L^{-1} \left(\frac{1}{v^2} L[(R_1 + R_2)u_2(x, y) + H_2(u)] \right) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Örnek 5.1.1. Başlangıç koşulları;

$$\begin{aligned}
u(0, y) &= 1 - e^y, & u_x(0, y) &= 1 \\
u(x, 0) &= e^x - 1, & u_y(x, 0) &= -1
\end{aligned}$$

olan

$$u_{xx} + u_{yy} = e^x - e^y, -1 \leq x, y \leq 1$$

eliptik denklemi ele alalım.

Çözüm: Laplace dönüşümü oluşturulursa,

$$L[u_{xx}] + L[u_{yy}] = L[e^x] + L[-e^y]$$

$$L[e^x] = \frac{1}{v-1}, L[-e^y] = -\frac{e^y}{v}$$

$$v^2 L[u(x, y)] - vu(0, y) - u_x(0, y) + L[u_{yy}] = \frac{1}{v-1} - \frac{e^y}{v}$$

$$L[u(x, y)] = \frac{1-e^y}{v} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{v^2(v-1)} - \frac{e^y}{v^3} - \frac{1}{v^2} L[u_{yy}]$$

ters Laplace dönüşümü oluşturulursa;

$$L^{-1}[L[u(x, y)]] = L^{-1} \left[\frac{1-e^y}{v} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{v^2(v-1)} - \frac{e^y}{v^3} - \frac{1}{v^2} L[u_{yy}] \right]$$

$$L^{-1} \left[\frac{1-e^y}{v} \right] = 1 - e^y, L^{-1} \left[\frac{1}{v^2} \right] = x, L^{-1} \left[-\frac{e^y}{v^3} \right] = -\frac{x^2 e^y}{2!}$$

$$L^{-1} \left[\frac{1}{v^2(v-1)} \right] = \frac{1}{v^2(v-1)} = \frac{A}{v} + \frac{B}{v^2} + \frac{C}{(v-1)}$$

$$1 = A \cdot v \cdot (v-1) + B \cdot (v-1) + C \cdot v^2$$

$$v = 0 \Rightarrow 1 = -B \Rightarrow B = -1$$

$$v = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$v = 2 \Rightarrow 1 = 2A - 1 + 4 \Rightarrow 2A = -2 \Rightarrow A = -1$$

$$L^{-1} \left[\frac{1}{v^2(v-1)} \right] = L^{-1} \left[-\frac{1}{v} - \frac{1}{v^2} + \frac{1}{(v-1)} \right] \rightarrow -1 - x + e^x$$

$$u(x, y) = 1 - e^y + x - 1 - x + e^x - \frac{x^2 e^y}{2!} - L^{-1} \left\{ \frac{1}{v^2} L[u_{yy}] \right\}$$

$$u(x, y) = -e^y + e^x - \frac{x^2 e^y}{2!} - L^{-1} \left\{ \frac{1}{v^2} L[u_{yy}] \right\}$$

şimdi homotopi pertürbasyon yöntemini uygulayarak;

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, y) = -e^y + e^x - \frac{x^2 e^y}{2!} - p \left(L^{-1} \left\{ \frac{1}{v^2} L[u_{yy}] \right\} \right)$$

yazılır. p 'nin aynı kuvvetlerinin katsayılarını karşılaştırdığımızda,

$$p^0: u_0(x, y) = -e^y + e^x - \frac{x^2 e^y}{2!}$$

$$p^1: u_1(x, y) = -L^{-1} \left\{ \frac{1}{v^2} L[u_{0yy}] \right\} = -L^{-1} \left\{ \frac{1}{v^2} L \left[-e^y - \frac{x^2 e^y}{2!} \right] \right\}$$

$$L[-e^y] = -\frac{e^y}{v}, L \left[-\frac{x^2 e^y}{2!} \right] = -\frac{e^y}{v^3}$$

$$= -L^{-1} \left[-\frac{e^y}{v^3} - \frac{e^y}{v^5} \right] = \frac{x^2 e^y}{2!} + \frac{x^4 e^y}{4!}$$

$$u_1(x, y) = \frac{x^2 e^y}{2!} + \frac{x^4 e^y}{4!}$$

$$p^2: u_2(x, y) = -L^{-1} \left\{ \frac{1}{v^2} L[u_{1yy}] \right\} = -L^{-1} \left\{ \frac{1}{v^2} L \left[\frac{x^2 e^y}{2!} + \frac{x^4 e^y}{4!} \right] \right\}$$

$$L \left[\frac{x^2 e^y}{2!} + \frac{x^4 e^y}{4!} \right] = \frac{e^y}{v^3} + \frac{e^y}{v^5}$$

$$= -L^{-1} \left[\frac{e^y}{v^5} + \frac{e^y}{v^7} \right] = -\frac{x^4 e^y}{4!} - \frac{x^6 e^y}{6!}$$

$$u_2(x, y) = -\frac{x^4 e^y}{4!} - \frac{x^6 e^y}{6!}$$

$$p^3: u_3(x, y) = -L^{-1} \left\{ \frac{1}{v^2} L[u_{2yy}] \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= -L^{-1} \left\{ \frac{1}{v^2} L \left[-\frac{x^4 e^y}{4!} - \frac{x^6 e^y}{6!} \right] \right\} \\
&= -L^{-1} \left\{ \frac{1}{v^2} \left[-\frac{e^y}{v^5} - \frac{e^y}{v^7} \right] \right\} \\
&= -L^{-1} \left[-\frac{e^y}{v^7} - \frac{e^y}{v^9} \right] = \frac{x^6 e^y}{6!} + \frac{x^8 e^y}{8!} \\
u_3(x, y) &= \frac{x^6 e^y}{6!} + \frac{x^8 e^y}{8!} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Çözüm,

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= -e^y + e^x - \frac{x^2 e^y}{2!} + \frac{x^2 e^y}{2!} + \frac{x^4 e^y}{4!} - \frac{x^4 e^y}{4!} - \frac{x^6 e^y}{6!} + \frac{x^6 e^y}{6!} + \frac{x^8 e^y}{8!} \\
&\quad - \dots \\
u(x, y) &= -e^y + e^x + \lim_{n \rightarrow \infty} \left((-1)^{n+1} \frac{x^{2+2}}{(2n+2)!} \right) \\
u(x, y) &= -e^y + e^x
\end{aligned}$$

elde edilmiş olur. Yakınsaklığı incelersek,

$$\begin{aligned}
r_0: \frac{\|u_1\|}{\|u_0\|} &= \frac{\left\| \frac{x^2 e^y}{2!} + \frac{x^4 e^y}{4!} \right\|}{\left\| -e^y + e^x - \frac{x^2 e^y}{2!} \right\|} = \frac{\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}}{2 - \frac{1}{2!}} = 0,3611 < 1 \\
r_1: \frac{\|u_2\|}{\|u_1\|} &= \frac{\left\| -\frac{x^4 e^y}{4!} - \frac{x^6 e^y}{6!} \right\|}{\left\| \frac{x^2 e^y}{2!} + \frac{x^4 e^y}{4!} \right\|} = \frac{-\frac{1}{4!} - \frac{1}{6!}}{\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}} = 0,0794 < 1 \\
r_2: \frac{\|u_3\|}{\|u_2\|} &= \frac{\left\| \frac{x^6 e^y}{6!} + \frac{x^8 e^y}{8!} \right\|}{\left\| -\frac{x^4 e^y}{4!} - \frac{x^6 e^y}{6!} \right\|} = \frac{\frac{1}{6!} + \frac{1}{8!}}{-\frac{1}{4!} - \frac{1}{6!}} = 0,0328 < 1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

değerlerin 1 den küçük olduğu görülür.

5.2. Homotopi Pertürbasyon Sumudu Dönüşümü Yöntemi

Bu yöntemin temel fikrini göstermek için, başlangıç koşulları ile genel bir lineer olmayan, homojen olmayan kısmi diferansiyel denklemi ele alıyoruz:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + R_1 u(x, y) + R_2 u(x, y) + Nu(x, y) = f(x, y) \quad (15)$$

$$u(0, y) = \alpha(x), \quad \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = \beta(x)$$

burada $R_1 = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}$ ve $R_2 = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ lineer diferansiyel operatörlerdir, N ise genel doğrusal olmayan diferansiyel operatör ve $f(x, y)$ kaynak terimidir. (15)'in her iki tarafında Sumudu dönüşümü (S ile gösterilir) alınır.

$$S \left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \right] + S[R_1 u(x, y) + R_2 u(x, y)] + S[Nu(x, y)] = S[f(x, y)]$$

$$\frac{1}{v^2} S[u(x, y)] - \frac{1}{v^2} u(0, y) - \frac{1}{v} \frac{\partial u(0, y)}{\partial x}$$

$$= -S[R_1 u(x, y) + R_2 u(x, y)] - S[Nu(x, y)] + S[f(x, y)]$$

(15)'de verilen başlangıç koşullarını uygulayarak;

$$S[u(x, y)] = \alpha(x) + v\beta(x) - v^2(S[R_1 u(x, y) + R_2 u(x, y)] + S[Nu(x, y)])$$

$$+ v^2(S[f(x, y)])$$

oluşan denklemde ters Sumudu dönüşümü alınırsa;

$$u(x, y) = F(x, y) - S^{-1}[v^2(S[R_1 u(x, y) + R_2 u(x, y)] + S[Nu(x, y)])]$$

burada $F(x, y)$, kaynak terimden ve öngörülen başlangıç koşullarından kaynaklanan terimi temsil eder. Şimdi, homotopi pertürbasyon yöntemi uygulanırsa:

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, y)$$

olur ve doğrusal olmayan terim şu şekilde ayrıştırılabilir;

$$Nu(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(u)$$

He polinomları için Sumudu dönüşümü ve homotopi pertürbasyon yönteminin birleşimi ile H_n şu şekilde verilir;

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, y) = F(x, y) - p \left(S^{-1} \left[v^2 S \left[(R_1 + R_2) \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(u) \right] \right] \right)$$

p 'nin aynı kuvvetlerinin katsayılarını karşılaştırarak, aşağıdaki yaklaşımlara ulaşılır (Kumar vd., 2011):

$$\begin{aligned} p^0: u_0(x, y) &= F(x, y) \\ p^1: u_1(x, y) &= -S^{-1}(v^2 S[(R_1 + R_2)u_0(x, y) + H_0(u)]) \\ p^2: u_2(x, y) &= -S^{-1}(v^2 S[(R_1 + R_2)u_1(x, y) + H_1(u)]) \\ p^3: u_3(x, y) &= -S^{-1}(v^2 S[(R_1 + R_2)u_2(x, y) + H_2(u)]) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Örnek 5.2.1 Aşağıdaki başlangıç koşulları ile verilen

$$\begin{aligned} u(0, y) &= \cos(y), & u_x(0, y) &= \cos(y) \\ u(x, 0) &= e^x, & u_y(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

olan

$$u_{yy} + u_{xx} = 0, -1 \leq x, y \leq 1$$

eliptik denklemi ele alalım.

Çözüm: Sumudu dönüşümü oluşturulursa,

$$\begin{aligned} S[u_{yy}] + S[u_{xx}] &= 0 \\ \frac{1}{v^2} S[u(x, y)] - \frac{1}{v^2} u(x, 0) - \frac{1}{v} u_y(x, 0) + S[u_{xx}] &= 0 \\ \frac{1}{v^2} S[u(x, y)] &= \frac{1}{v^2} e^x - S[u_{xx}] = 0 \\ S[u(x, y)] &= e^x - v^2 S[u_{xx}] = 0 \end{aligned}$$

ters Sumudu dönüşümü oluşturulursa;

$$S^{-1}[S[u(x, y)]] = S^{-1}[e^x - v^2 S[u_{xx}]] = 0, S^{-1}[e^x] = e^x$$

$$u(x, y) = e^x - S^{-1}\{v^2 S[u_{xx}]\}$$

yazılır. Şimdi homotopi pertürbasyon yöntemini uygulanarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, y) = e^x - p(S^{-1}\{v^2 S[u_{xx}]\})$$

elde edilir. p 'nin aynı kuvvetlerinin katsayılarını karşılaştırdığımızda;

$$p^0: u_0(x, y) = e^x$$

$$p^1: u_1(x, y) = -S^{-1}\{v^2 S[u_{0xx}]\} = -S^{-1}\{v^2 S[e^x]\}$$

$$= -S^{-1}\{v^2 e^x\}$$

$$u_1(x, y) = -e^x \frac{y^2}{2!}$$

$$p^2: u_2(x, y) = -S^{-1}\{v^2 S[u_{1xx}]\} = -S^{-1}\left\{v^2 S\left[-e^x \frac{y^2}{2!}\right]\right\}$$

$$= -S^{-1}\{v^2 [-e^x v^2]\}$$

$$= -S^{-1}\{-v^4 e^x\}$$

$$u_2(x, y) = e^x \frac{y^4}{4!}$$

$$\vdots$$

Çözüm

$$u(x, y) = e^x - e^x \frac{y^2}{2!} + e^x \frac{y^4}{4!} - \dots$$

$$u(x, y) = e^x \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots\right)$$

$$u(x, y) = e^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!}\right) = e^x \cos(y)$$

olarak elde edilmiş olur. Yakınsaklığı incelersek;

$$\begin{aligned}
r_0: \frac{\|u_1\|}{\|u_0\|} &= \frac{\left\| -e^x \frac{y^2}{2!} \right\|}{\|e^x\|} = \frac{1}{2!} = 0,5 < 1 \\
r_1: \frac{\|u_2\|}{\|u_1\|} &= \frac{\left\| e^x \frac{y^4}{4!} \right\|}{\left\| -e^x \frac{y^2}{2!} \right\|} = \frac{\frac{1}{4!}}{\frac{1}{2!}} = 0,0833 < 1 \\
r_2: \frac{\|u_3\|}{\|u_2\|} &= \frac{\left\| -e^x \frac{y^6}{6!} \right\|}{\left\| e^x \frac{y^4}{4!} \right\|} = \frac{\frac{1}{6!}}{\frac{1}{4!}} = 0,0333 < 1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

değerlerin 1 den küçük olduğu görülür.

5.3. Homotopi Pertürbasyon Elzaki Dönüşümü Yöntemi

Bu yöntemin temel fikrini göstermek için, başlangıç koşulları ile genel bir lineer olmayan, homojen olmayan kısmi diferansiyel denklemi ele alıyoruz:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + R_1 u(x, y) + R_2 u(x, y) + Nu(x, y) &= f(x, y) \\
u(0, y) = \alpha(x), \quad \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} &= \beta(x)
\end{aligned} \tag{16}$$

burada $R_1 = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}$ ve $R_2 = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ lineer diferansiyel operatörlerdir, N ise genel doğrusal olmayan diferansiyel operatör ve $f(x, y)$ kaynak terimdir. (16)'nın her iki tarafında Elzaki dönüşümü (E ile gösterilir) alınır.

$$\begin{aligned}
E \left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \right] + E[R_1 u(x, y) + R_2 u(x, y)] + E[Nu(x, y)] &= E[f(x, y)] \\
\frac{1}{v^2} E[u(x, y)] - u(0, y) - v \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} \\
&= -E[R_1 u(x, y) + R_2 u(x, y)] - E[Nu(x, y)] + E[f(x, y)]
\end{aligned}$$

(16)'da verilen başlangıç koşullarını uygulayarak;

$$\begin{aligned}
E[u(x, y)] &= v^2 \alpha(x) + v^3 \beta(x) - v^2 (E[R_1 u(x, y) + R_2 u(x, y)] + E[Nu(x, y)]) \\
&+ v^2 (E[f(x, y)])
\end{aligned}$$

oluşan denklemde ters Elzaki dönüşümü alınırsa;

$$u(x, y) = F(x, y) - E^{-1}[v^2(E[R_1u(x, y) + R_2u(x, y)] + E[Nu(x, y)])]$$

burada $F(x, y)$, kaynak terimden ve öngörülen başlangıç koşullarından kaynaklanan terimi temsil eder. Şimdi, homotopi pertürbasyon yöntemini uygulanırsa;

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, y)$$

ve doğrusal olmayan terim şu şekilde ayrıştırılabilir;

$$Nu(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(u)$$

He polinomları için Elzaki dönüşümü ve homotopi pertürbasyon yönteminin birleşimi ile H_n şu şekilde verilir;

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, y) = F(x, y) - p \left(E^{-1} \left[v^2 E \left[(R_1 + R_2) \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(u) \right] \right] \right)$$

p 'nin aynı kuvvetlerinin katsayılarını karşılaştırarak, aşağıdaki yaklaşımlara ulaşılır (Elzaki ve Hilal, 2012):

$$\begin{aligned} p^0: u_0(x, y) &= F(x, y) \\ p^1: u_1(x, y) &= -E^{-1}(v^2 E[(R_1 + R_2)u_0(x, y) + H_0(u)]) \\ p^2: u_2(x, y) &= -E^{-1}(v^2 E[(R_1 + R_2)u_1(x, y) + H_1(u)]) \\ p^3: u_3(x, y) &= -E^{-1}(v^2 E[(R_1 + R_2)u_2(x, y) + H_2(u)]) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Örnek 5.3.1. Başlangıç koşulları

$$u(0, y) = \sin(y), \quad u_x(0, y) = 1$$

$$u(x, 0) = \sin(x), \quad u_y(x, 0) = 1$$

olan

$$u_{xx} + u_{yy} = -\sin(x) - \sin(y), -1 \leq x, y \leq 1$$

eliptik denklemini ele alalım.

Çözüm: Elzaki dönüşümü oluşturulursa,

$$E[u_{xx}] + E[u_{yy}] = E[-\sin(x)] + E[-\sin(y)]$$

$$E[-\sin(x)] = -\frac{v^3}{v^2 + 1}, E[-\sin(y)] = -v^2 \sin(y)$$

$$\frac{1}{v^2} E[u(x, y)] - u(0, y) - v u_x(0, y) + E[u_{yy}] = -\frac{v^3}{v^2 + 1} - v^2 \sin(y)$$

$$E[u(x, y)] = v^2 \left[\sin(y) + v - E[u_{yy}] - \frac{v^3}{v^2 + 1} - v^2 \sin(y) \right]$$

$$E[u(x, y)] = v^2 \sin(y) + v^3 - v^2 E[u_{yy}] - \frac{v^5}{v^2 + 1} - v^4 \sin(y)$$

$$E[u(x, y)] = v^2 \sin(y) - v^2 E[u_{yy}] + v^3 - v^3 + \frac{v^3}{v^2 + 1} - v^4 \sin(y)$$

ters Elzaki dönüşümü oluşturulursa

$$E^{-1}[E[u(x, y)]] = E^{-1} \left[v^2 \sin(y) - v^2 E[u_{yy}] + \frac{v^3}{v^2 + 1} - v^4 \sin(y) \right]$$

$$E^{-1}[v^2] = 1, E^{-1} \left[\frac{v^3}{v^2 + 1} \right] = \sin(x), E^{-1}[v^4] = \frac{x^2}{2!}$$

$$u(x, y) = \sin(y) + \sin(x) - \frac{x^2}{2!} \sin(y) - E^{-1}\{v^2 E[u_{yy}]\}$$

$$u(x, y) = \sin(x) + \sin(y) \left[1 - \frac{x^2}{2!} \right] - E^{-1}\{v^2 E[u_{yy}]\}$$

yazılır. Şimdi homotopi pertürbasyon yöntemini uygulayarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, y) = \sin(x) + \sin(y) \left[1 - \frac{x^2}{2!} \right] - p(E^{-1}\{v^2 E[u_{yy}]\})$$

eşitliği elde edilir. p 'nin aynı kuvvetlerinin katsayılarını karşılaştırdığımızda,

$$\begin{aligned}
p^0: u_0(x, y) &= \sin(x) + \sin(y) \left[1 - \frac{x^2}{2!} \right] \\
p^1: u_1(x, y) &= -E^{-1} \{ v^2 E [u_{0yy}] \} \\
&= -E^{-1} \left\{ v^2 E \left[- \left[1 - \frac{x^2}{2!} \right] \sin(y) \right] \right\}, \\
&= -E^{-1} \left\{ v^2 \sin(y) E \left[-1 + \frac{x^2}{2!} \right] \right\}, \\
&= -E^{-1} \{ (v^2 \sin(y)) (-v^2 + v^4) \} \\
&= -\sin(y) E^{-1} \{ (-v^4 + v^6) \} \\
&= -\sin(y) \left[-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \right] \\
u_1(x, y) &= \sin(y) \left[\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} \right]
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned}
p^2: u_2(x, y) &= -E^{-1} \{ v^2 E [u_{1yy}] \} = -E^{-1} \left\{ v^2 E \left[-\sin(y) \left[\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} \right] \right] \right\} \\
u_2(x, y) &= -E^{-1} \left\{ v^2 \sin(y) E \left[\left[-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \right] \right] \right\} \\
&= -E^{-1} \{ (v^2 \sin(y)) (-v^4 + v^6) \} \\
&= -\sin(y) E^{-1} \{ (-v^6 + v^8) \} \\
&= -\sin(y) \left[-\frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} \right] \\
u_2(x, y) &= \sin(y) \left[\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$u^3: u_3(x, y) = -E^{-1} \{ v^2 E [u_{2yy}] \} = -E^{-1} \left\{ v^2 E \left[-\sin(y) \left[\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \right] \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
u_3(x, y) &= -E^{-1} \left\{ v^2 \sin(y) E \left[\left[-\frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} \right] \right] \right\} \\
&= -E^{-1} \{ (v^2 \sin(y)) (-v^6 + v^8) \} \\
&= -\sin(y) E^{-1} \{ (-v^8 + v^{10}) \} \\
&= -\sin(y) \left[-\frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \right] \\
u_3(x, y) &= \sin(y) \left[\frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} \right] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

olarak devam ettirilirse çözüm

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \sin(x) + \sin(y) \left[1 - \frac{x^2}{2!} \right] + \sin(y) \left[\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} \right] + \sin(y) \left[\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \right] \\
&\quad + \sin(y) \left[\frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} \right] + \dots \\
u(x, y) &= \sin(x) + \sin(y) * \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right) \\
u(x, y) &= \sin(x) + \sin(y)
\end{aligned}$$

elde edilmiş olur. Yakınsaklığı incelersek,

$$\begin{aligned}
r_0: \frac{\|u_1\|}{\|u_0\|} &= \frac{\left\| \sin(y) \left[\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} \right] \right\|}{\left\| \sin(x) + \sin(y) \left[1 - \frac{x^2}{2!} \right] \right\|} = \frac{\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}}{1 - \frac{1}{2!}} = 0,9166 < 1 \\
r_1: \frac{\|u_2\|}{\|u_1\|} &= \frac{\left\| \sin(y) \left[\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \right] \right\|}{\left\| \sin(y) \left[\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} \right] \right\|} = \frac{\frac{1}{4!} - \frac{1}{6!}}{\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}} = 0,0878 < 1 \\
r_2: \frac{\|u_3\|}{\|u_2\|} &= \frac{\left\| \sin(y) \left[\frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} \right] \right\|}{\left\| \sin(y) \left[\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \right] \right\|} = \frac{\frac{1}{6!} - \frac{1}{8!}}{\frac{1}{4!} - \frac{1}{6!}} = 0,0338 < 1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

değerlerin 1 den küçük olduğu görülür.

6. SONUÇ ve DEĞERLENDİRME

Bu tez çalışmasında diferansiyel denklemler, diferansiyel denklemlerin türleri (eliptik, hiperbolik, parabolik) tanımlanmış ve eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık seri çözümünü bulmak için pertürbasyon teoremi tanıtılmıştır. Pertürbasyon teoremi, eliptik denklemlere uygulanırken, probleme küçük terim veya terimler eklenip, denklem seri açılımlarının kullanıldığı bir denklem şekline getirilmiştir. Ayrıca düzgün ve tekil pertürbasyon çeşitlerine yer verilip, asimptotik yaklaşım incelenmiştir.

Matematikte sürekli değişimi veya deformasyonu (dönüşümü) tanımlayan homotopi kavramından bahsedilmiştir. Homotopi pertürbasyon yönteminin, geleneksel pertürbasyon yöntemine göre diferansiyel denklem çözümünde eklenmek istenen küçük parametrenin yerini belirlemede daha avantajlı olduğu anlaşılmıştır.

İntegral dönüşümlerine yer verilmiş, bu dönüşümlerin homotopi pertürbasyon yöntemiyle kullanımları eliptik problemlere uygulanmıştır.

Pertürbasyon yöntemi, düzgün ve tekil pertürbasyon, homotopi pertürbasyon, değiştirilmiş homotopi pertürbasyon ve integral dönüşümleriyle birlikte homotopi pertürbasyon ile ilgili her bir yöntem ve kullanım için eliptik problemler oluşturulmuştur ve yaklaşık çözümler elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlara göre, Eliptik problemler üzerinde kullanılan çeşitli pertürbasyon yöntemlerinde tam çözümlere ulaşılmıştır. Bu da Eliptik denklemlerde pertürbasyon çözümlerinin kullanışlı olduğunu ifade eder.

KAYNAKÇA

- Ahmed, M. E. S. (2016). *Application of homotopy perturbation method to linear and nonlinear partial differential equations. Doktora tezi, Sudan University of Science and Technology, (SUST 13225).*
- Aktaş, C. (1995). *Diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri. Yüksek lisans tezi, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir, (45415).*
- Akter, M. T. ve Chowdhury, M. M. (2016). Homotopy Perturbation Method for Solving Nonlinear Partial Differential Equations. *IOSR Journal of Mathematics*, 12(5), 59-69.
- Ashyralyev, C., Akyuz, G. ve Dedetürk, M. (2017). Approximate solution for an inverse problem of multidimensional elliptic equation with multipoint nonlocal and Neumann boundary conditions. *Electron. J. Differential Equations*, 197(2017), 1-16.
- Bender, C. M. ve Orszag, S. A. (1978). *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill.
- Biazar, J. (2008). He's homotopy perturbation method for solving Helmholtz equation. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 15, 739-744.
- Biçer, H. (2022). *Adomian ayrıştırma yönteminin eliptik sınır değer problemlerine uygulanması. Yüksek lisans tezi, Gümüşhane Üniversitesi, Gümüşhane, (735574).*
- Bourbaki, N. (1966). *General Topology Part 1-2*. Addison-Wesley Pub. Co., Reading, Massachusetts.
- Bronson, R. (1994). *Schaum's Outline of Differential Equations*. Mc-Graw Hill, New York.
- Bulut, H. (2008). A comparison among homotopy perturbation method and the decomposition method with the variational iteration method for Helmholtz equation. *Physical Sciences*, 3(1), 93-106.
- Bulut, H., Baskonus, H. M. ve Tuluçe, S. (2013). Homotopy perturbation Sumudu transform for heat equations. *Mathematics in Engineering, Science and Aerospace*, 4(1), 49-60.
- Bülbül, B. (2011). *İkinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin Taylor polinom çözümleri. Doktora tezi, Muğla Üniversitesi, Muğla, (285450).*
- Cengizci, S. (2014). *Singüler pertürbasyon problemlerinin asimptotik analizi. Yüksek lisans tezi, Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi, Nevşehir, (355284).*

- Çağlıyan, M. ve Çelebi, O. (2010). *Kısmi diferansiyel denklemler*. Dora Basım Yayıncılık.
- Çetinkaya, A. G. (2014). *Kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri*. Yüksek lisans tezi, Bahçeşehir Üniversitesi, İstanbul, (391830).
- De Bruijn, N. G. (1958). *Asymptotic Methods in Analysis*. North-Holland, Amsterdam.
- Demirtaş, A. (2014). *Doğrusal olmayan denklemlerin varyasyonel iterasyon, homotopi pertürbasyon ve varyasyonel homotopi pertürbasyon yöntemleri ile çözümleri*. Yüksek lisans tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul, (356016).
- Dündar, N. (2009). *Doğrusal olmayan parabolik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin matematiksel davranışı*. Yüksek lisans tezi, Dicle Üniversitesi, Diyarbakır, (255049).
- Elbadri, M. (2013). A new homotopy perturbation method for solving Laplace equation. *Advances in Theoretical and Applied Mathematics*, 8(3), 237-242.
- Elzaki, T. M. ve Hilal, E. M. A. (2012). Homotopy perturbation and Elzaki transform for solving nonlinear partial differential equations. *Mathematical Theory and Modeling*, 2(3), 33-42.
- Elzaki, T. M. ve Biazar, J. (2013). Homotopy perturbation method and Elzaki transform for solving system of nonlinear partial differential equations. *World Applied Sciences Journal*, 24(7), 944-948.
- Elzaki, T. M., Ige O. E. ve Oderinu R. A. (2019). Adomian polynomial and Elzaki transform method for solving Sine-Gordon equations. *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 32(3), 443-451.
- Erdélyi, A. (1956). *Asymptotic Expansions*. Dover Publications, Inc.
- Ghoreishi, M. I. ve Ismail A. I. B. (2011). The Homotopy Perturbation Method (HPM) for Nonlinear Parabolic Equation with Nonlocal Boundary Conditions. *Applied Mathematical Sciences*, 5(3), 113-123.
- Gölgeleyen, İ. ve Kaytmaz, Ö. (2016). Ters ve kötü konulmuş problemler teorisinin bilim ve teknolojideki bazı uygulamaları. *Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi*, 6(1), 230-237.
- Gündoğdu, H. (2017). *Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde bazı özel yöntemler*. Yüksek lisans tezi, Sakarya Üniversitesi, Sakarya, (462978).
- He, J. (1999). Homotopy perturbation technique. *Elsevier Science, Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, 178(1999), 257-262.
- Jakobsen, P. (2016). *Introduction to the method of multiple scales*. arXiv preprint arXiv:1312.3651v3.

- Johnston, S. J., Jafari, H., Moshokoa, S. P., Ariyan, V. M. ve Baleanu, D. (2016). Laplace homotopy perturbation method for Burgers equation with space-and time-fractional order. *Open Physics*, 14(1), 247-252.
- Kamps, K.H. ve Porter, T. (1997). *Abstract Homotopy and Simple Homotopy Theory*. World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.
- Kaya, F. ve Yılmaz, Ö. (2019). Basic properties of Sumudu transformation and its application to some partial differential equations. *Sakarya University Journal of Science*, 4(23), 509-514.
- Kaya, S. (2019). *Bazı lineer ve lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerin ardışık tümler açılım metodu ile nümerik çözümleri. Yüksek lisans tezi, Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi, Nevşehir, (565474).*
- Kehaili, A., Hakem, A. ve Benali, A. (2020). Homotopy Perturbation Transform method for solving the partial and the time-fractional differential equations with variable coefficients. *Global Journal of Pure and Applied Sciences*, 26(1), 35-55.
- Keleş, M. (2019). *Pertürbasyon yöntemiyle diferansiyel denklemlerin çözümü, 576686. Yüksek lisans tezi, Kocaeli Üniversitesi, Kocaeli.*
- Kırdar, D. (2007). *Bazı integral dönüşümleri ve uygulamaları, 179008. Yüksek lisans tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir.*
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley-Sons, New York.
- Kumar, D. ve Singh, J. (2012). Homotopy perturbation algorithm using Laplace transform for gas dynamics equation. *Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics*, 8(1), 55-61.
- Kumar, D., Singh, J. ve Sushila. (2011). Homotopy perturbation Sumudu transform method for nonlinear equations, *Advances in Theoretical and Applied Mechanics*, 4(2011),165–175.
- Kurnaz, P. (2019). *Birinci ve ikinci mertebeden singüler pertürbe özellikli problemler için asimptotik ve nümerik çözümler. Yüksek lisans tezi, Erzurum Üniversitesi, Erzurum, (557100).*
- Maddox, I. J. (1970). *Elements of Functional Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Mechee, M. S., Al-Rammahi, A. M. ve Al-Juaifri, G. A. (2017). A study of general second-order partial differential equations using homotopy perturbation method. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 11, 51.

- Merdan, M. (2009). Homotopy perturbation method for solving modelling the pollution of a system of lakes. *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi*, 4(1), 99-111.
- Merdan, M., Anaç, H. ve Kesemen, T. (2022) Homotopy perturbation Elzaki transform method for obtaining the approximate solutions of the random partial differential equations. *Gazi University Journal of Science*, 1-1.
- Merdan, M. ve Khanîyev, T. (2008). Variational iteration and homotopy perturbation method for solving a three-species food chain model. *AKÜ J. Sci.*, 8(2), 27-36.
- Mishra, H. K. ve Nagar, A. K. (2012). He-Laplace method for linear and nonlinear partial differential equations. *Hindawi Publishing Corporation, Journal of Applied Mathematics*, 2012.
- Mohyud-Din, S. T. ve Noor, M. A. (2009). Homotopy perturbation method for solving partial differential equations. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 64(3-4), 157-170.
- Nayfeh, A. (1993). *Introduction to Perturbation Techniques*. John Wiley and Sons, Inc.
- Ökten, M. (2010). *Ağırlıklı kalanlar yöntemi ve bazı uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi, Denizli, (275327).*
- Özizmirli, S. (2011). *Eliptik kısmi türevli denklemlerin çözümleri üzerine. Yüksek lisans tezi, Uşak Üniversitesi, Uşak, (287376).*
- Singh, P., Sharma, D. ve Chauhan, S. (2016). Homotopy perturbation Sumudu transform method with He's polynomial for solutions of some fractional nonlinear partial differential equations. *International Journal of Nonlinear Science*, 21(2), 91-97.
- Singh, P. ve Jasrotia, S. (2022). Accelerated Homotopy Perturbation Elzaki Transformation Method for Solving Nonlinear Partial Differential Equations. In *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 2267, No. 1, p. 012106. IOP Publishing.
- Taşdelen, F. (2001). Eliptik türden bir denklemin çözümleri için Harnack eşitsizlikleri. *Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Fen Dergisi*, 1(18), 81-85.
- Taşdelen, F. (2002). Eliptik tipten bir denklem için poisson integral formülü. *Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Fen Dergisi*, 1(19), 23-29.
- Tezel Özturan, A. (2021). *Bilgisayar Destekli Nümerik Analiz*. Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
- Yıldırım, S. (2008). Exact and numerical solutions of Poisson equation for electrostatic potential problems. *Mathematical problems in engineering*, 2008.

ÖZGEÇMİŞ

Semay ÖZTÜRK, lise eğitimini Çanakkale Özel Biga Açı Temel Lisesi'nde 2016 yılında bitirdi. Aynı yıl Gümüşhane Üniversitesi Matematik Mühendisliği bölümüne yerleşip 2020 yılında lisans eğitimini tamamladı. 2020 yılında Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü bünyesinde Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda tezli yüksek lisans eğitimine başlayıp 2023 yılında tamamladı.

