



**T.C.
BATMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**EMDEN-FOWLER TİPİ DİFERANSİYEL DENKLEM
SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN
NÜMERİK KARŞILAŞTIRMALAR**

Seyfettin VURAL

**Haziran-2025
BATMAN**

**T.C.
BATMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**EMDEN-FOWLER TİPİ DİFERANSİYEL DENKLEM
SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN
NÜMERİK KARŞILAŞTIRMALAR**

Seyfettin VURAL

**Danışman
Doç. Dr. Veyis TURUT**

Diğer Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

Prof. Dr. Hasan DALMAN

Doç. Dr. Veyis TURUT

**Haziran-2025
BATMAN**

TEZ KABUL VE ONAYI

Seyfettin VURAL tarafından hazırlanan “Emden-Fowler Tipi Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Çözümü İçin Nümerik Karşılaştırmalar” adlı tez çalışması 18/06/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Batman Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

.....

Danışman

Doç. Dr. Veyis TURUT

.....

Üye

Prof. Dr. Hasan DALMAN

.....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Dr. Öğr. Üyesi Ömer Murat ÖTER
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYANI

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sorumluluğu kabullendiğimi bildiririm.

ETHICAL DECLARATION

I declare that all the information in this thesis has been obtained within the framework of ethical behavior and academic rules, and that the source of any statements and information that do not belong to me in this study prepared in accordance with the thesis writing rules has been fully cited, and I declare that I accept all kinds of legal responsibility in case of any contrary situation.

Seyfettin VURAL
18/06/2025

ÖZET
YÜKSEK LİSANS TEZİ
EMDEN-FOWLER TİPİ DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN
ÇÖZÜMÜ İÇİN NÜMERİK KARŞILAŞTIRMALAR

Seyfettin VURAL

Batman Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Veyis TURUT

2025, 54 Sayfa

Bu tezde, doğrusal ve doğrusal olmayan Emden-Fowler tipi denklem sistemlerine uygulanan varyasyonel iterasyon yöntemiyle elde edilen kuvvet serisi çözümlerine padé yaklaşımı uygulanarak rasyonel kuvvet serileri elde edilmiştir. Padé yaklaşımı ile elde edilen çözümlerin daha etkin olduğu tablo ve grafikler ile gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Denklem sistemleri; Emden-Fowler diferansiyel denklemi; Varyasyonel iterasyon yöntemi; Padé yaklaşımı

ABSTRACT

MASTER THESIS
NUMERICAL COMPARISONS FOR THE SOLUTION OF EMDEN-FOWLER
TYPE DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEMS

Seyfettin VURAL

Batman University Graduate Education Institute

Mathematics Department of Science

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Veyis TURUT

2025, 54 Pages

In this thesis, rational power series solutions were obtained by applying the Padé approximation to the power series solutions derived via the variational iteration method for linear and nonlinear systems of Emden-Fowler type equations. The effectiveness of the solutions obtained through the Padé approximation was demonstrated with tables and graphs.

Keywords: Systems of equations; Emden-Fowler differential equation; variational iteration method; Padé approach.

ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasının hazırlanması sürecinde bilgi birikimi ve deneyimleri, yol göstericiliği ve her zaman yapıcı ve destekleyici yaklaşımıyla bana rehberlik eden, akademik gelişime büyük katkılar sunan değerli danışmanım Doç. Dr. Veyis TURUT'a en içten teşekkürlerimi sunuyorum. Kendisinin desteği, sabrı ve yönlendirmeleri bu süreci daha verimli ve anlamlı kılmıştır. Hayatım boyunca yanımda olan, bana koşulsuz sevgi ve destek veren, her zaman inançla yanımda duran eşime, anneme, babama ve diğer tüm aile fertlerime de sonsuz teşekkür ediyorum. Varlıklar bu yolculukta bana güç ve motivasyon kaynağı olmuştur. Bu süreçte katkı sağlayan, emeği geçen herkese ayrı ayrı teşekkür ederim.

Seyfettin VURAL
BATMAN-2025

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	iv
ÖN SÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	iv
ÇİZELGELER/TABLolar LİSTESİ.....	Hata! Yer işareti tanımlanmamış.
ŞEKİLLER LİSTESİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR	Hata! Yer işareti tanımlanmamış.
1. GİRİŞ	Hata! Yer işareti tanımlanmamış.
2. ÖN BİLGİLER.....	Hata! Yer işareti tanımlanmamış.
2.1. Adi Diferansiyel Denklemler.....	3
2.2. Diferansiyel Denklemler Sistemi	3
2.3. Başlangıç Şartları	4
2.4. Kuvvet Serileri	4
2.5. Standart Lane-Emden Denklemi.....	4
2.6. Varyasyonel İterasyon Metodu ve Lagrange çarpanları	6
3. PADÉ YAKLAŞIMI	9
3.1. Padé Yaklaşımının Hesaplanması.....	10
3.2. Padé Tablosu.....	11
4. UYGULAMALAR.....	15
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	53
KAYNAKLAR	54

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 1: $f(x) = e^{-3x}$, $P_7(x)$ ve $r_{4,3}(x)$ değerleri	14
Tablo 2: $f(x) = e^{x^2}$, $P_l(x)$ ve $r_{12,2}(x)$ değerleri.....	17
Tablo 3: $f(x) = e^{-x^2}$, $Q_l(x)$ ve $r_{12,2}(x)$ değerleri	19
Tablo 4: $f(x) = e^{x^2}$, $P_l(x)$ ve $r_{8,4}(x)$ değerleri	21
Tablo 5: $f(x) = e^{-x^2}$, $Q_l(x)$ ve $r_{8,4}(x)$ değerleri.....	23
Tablo 6: $f(x) = e^{x^2}$, $P_l(x)$ ve $r_{8,6}(x)$ değerleri	25
Tablo 7: $f(x) = e^{-x^2}$, $Q_l(x)$ ve $r_{8,6}(x)$ değerleri	27
Tablo 8: $f(x) = x^2 + e^{x^2}$, $P_2(x)$ ve $r_{6,2}(x)$ değerleri	31
Tablo 9: $f(x) = x^2 - e^{x^2}$, $Q_2(x)$ ve $r_{6,2}(x)$ değerleri	33
Tablo 10: $f(x) = x^2 + e^{x^2}$, $P_2(x)$ ve $r_{2,2}(x)$ değerleri	35
Tablo 11: $f(x) = x^2 - e^{x^2}$, $Q_2(x)$ ve $r_{4,4}(x)$ değerleri	37
Tablo 12: $f(x) = \sqrt{x^2 + I}$, $P_3(x)$ ve $r_{4,2}(x)$ değerleri	41
Tablo 13: $f(x) = \frac{I}{\sqrt{x^2 + I}}$, $Q_3(x)$ ve $r_{4,2}(x)$ değerleri	43
Tablo 14: $f(x) = \sqrt{x^2 + I}$, $P_3(x)$ ve $r_{4,2}(x)$ değerleri.....	45
Tablo 15: $f(x) = \frac{I}{\sqrt{x^2 + I}}$, $Q_3(x)$ ve $r_{4,2}(x)$ değerleri.....	47
Tablo 16: $f(x) = \sqrt{x^2 + I}$, $P_3(x)$ ve $r_{8,4}(x)$ değerleri	49
Tablo 17: $f(x) = \frac{I}{\sqrt{x^2 + I}}$, $Q_3(x)$ ve $r_{8,4}(x)$ değerleri	51

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1: $f(x) = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}x}{3x+1}}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{3,2}(x)$ Padé yaklaşımı	13
Şekil 2: $f(x) = e^{-3x}$ fonksiyonu, $P_7(x)$ kuvvet serisi ve $r_{4,3}(x)$ Padé yaklaşımı	14
Şekil 3: $f(x) = e^{x^2}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{12,2}(x)$ Padé yaklaşımı.....	18
Şekil 4: $f(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{12,2}(x)$ Padé yaklaşımı.....	20
Şekil 5: $f(x) = e^{x^2}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{8,4}(x)$ Padé yaklaşımı	22
Şekil 6: $f(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{8,4}(x)$ Padé yaklaşımı.....	24
Şekil 7: $f(x) = e^{x^2}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{8,6}(x)$ Padé yaklaşımı	26
Şekil 8: $f(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{8,6}(x)$ Padé yaklaşımı	28
Şekil 9: $f(x) = x^2 + e^{x^2}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{6,2}(x)$ Padé yaklaşımı	32
Şekil 10: $f(x) = x^2 - e^{x^2}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{6,2}(x)$ Padé yaklaşımı.....	34
Şekil 11: $f(x) = x^2 + e^{x^2}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{2,2}(x)$ Padé yaklaşımı	36
Şekil 12: $f(x) = x^2 - e^{x^2}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{4,4}(x)$ Padé yaklaşımı.....	38
Şekil 13: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{4,2}(x)$ Padé yaklaşımı	42
Şekil 14: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{4,2}(x)$ Padé yaklaşımı.....	44
Şekil 15: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{4,2}(x)$ Padé yaklaşımı	46
Şekil 16: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{4,2}(x)$ Padé yaklaşımı.....	48
Şekil 17: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{8,4}(x)$ Padé yaklaşımı	50
Şekil 18: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{8,4}(x)$ Padé yaklaşımı.....	52

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	: Gerçel Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}^+$	: Pozitif Tam Sayılar Kümesi
$[m,n]$	: (m,n) Mertebeli Padé Yaklaşımı
VIM	: Varyasyonel İterasyon Yöntemi
ODE	: Adi Diferansiyel Denklemler
PDE	: Kısmi Diferansiyel Denklemler

1. GİRİŞ

Doğrusal olmayan diferansiyel denklemler, doğa bilimlerinin pek çok alanında karmaşık sistemlerin modellenmesinde temel bir rol oynamaktadır. Özellikle fizik, mühendislik ve uygulamalı matematikte karşılaşılan pek çok problem, doğası gereği doğrusal olmayan yapılar sergiler. Bu tür denklemler arasında yer alan Emden-Fowler tipi diferansiyel denklemler, gerek teorik matematikte gerekse uygulamalı bilimler açısından oldukça değerlidir.

Emden-Fowler denklemi, ilk olarak gök mekaniği ve astrofizik problemlerinde ortaya çıkmış, daha sonra birçok farklı disiplinin ilgisini çeken önemli bir doğrusal olmayan diferansiyel denklem türüdür. Bu denklem, özellikle yıldızların iç yapısının modellenmesi, gaz kürelerinin dengesi, ısı transferi problemleri ve plazma fiziği gibi alanlarda temel bir model olarak karşımıza çıkar. Emden-Fowler Denklemi ilk kez 19. yüzyılın sonlarında fizikçi Robert Emden ve daha sonra Ralph Fowler tarafından gök cisimlerinin hidrostatik dengesi bağlamında incelenmiş, özellikle izotermal gaz kürelerinin yapısını tanımlamak amacıyla geliştirilmiştir. Bu bağlamda, Lane-Emden denklemi adıyla bilinen özel bir formu, yıldızların enerji dağılımını açıklamada kullanılmaktadır.

Bu tez çalışmasında, Emden-Fowler tipi diferansiyel denklemler ele alınacak; bu denklemlerin temel özellikleri, özel durumları ve çeşitli çözüm yöntemleri detaylı bir şekilde incelenecektir. Ayrıca, bazı seçilmiş denklemler üzerinde sayısal çözüm teknikleri uygulanarak elde edilen sonuçlar yorumlanacaktır. Amaç, bu önemli denklem sınıfının hem teorik yapısını hem de pratikteki uygulamalarını ortaya koymaktır.

“VİM yöntemi, bilimsel literatürde ilk olarak 1997 yılında matematikçi Ji-Huan He tarafından ortaya konmuştur. (He, 1997).” Wang ve He integro-diferansiyel denklemler için 2007 yılında VİM kullanmışlardır (Wang, 2007). Wazwaz lineer ve lineer olmayan Schrodinger denklemini 2008 yılında VİM ile çözmüştür (Wazwaz A. M., 2008) Hemeda da bu yöntem ile dalga denklemini 2008 yılında çözmüştür (Hemeda, 2008). Yusufoglu Klein-Gordon denklemi için bu yöntemi 2008 yılında kullanmıştır (Yusufoglu, 2008).

Bu tez çalışmasında VİM ile çözülen Emden-Fowler tipi diferansiyel denklem sistemine padé yaklaşımı uygulanmıştır.

Padé yaklaşımı, bir fonksiyonun Kuvvet serisine göre daha iyi yakınsayan rasyonel (kesirli) bir yaklaşımdır. Genellikle, bir fonksiyonun çevresinde verdiği Kuvvet serisinin kesirli bir ifade ile daha geniş bir yakınsama aralığında temsil edilmesi istenir. İşte bu noktada Padé yaklaşımı devreye girer. (Baker, 1996)

Padé Yaklaşımının avantajları şu şekilde; Kuvvet serisine göre daha geniş yakınsama aralığı sunduğu gibi, kutupları ve asimptotları modelleyebilir, bu nedenle özellikle fiziksel problemlerde daha gerçekçi çözümler verir. Sayısal çözüm yöntemlerine entegre edilebilecek şekilde tasarlanabilir ve daha uyumlu hale getirilebilir, bu da onu diferansiyel denklemlerde kullanışlı kılar. Küçük adımlarda hesaplanan çözümleri daha doğruya yakın biçimde birleştirme imkânı sunar. (Author(s)., 2021)

Bu çalışmada ilk olarak tezimizde kullanılan kavramlarla ilgili temel bilgiler verilmiştir. Standart Lane-Emden denklemi, Emden-Fowler denklemi varyasyonel iterasyon metodu ve lagrange çarpanları ile temel bilgiler verilmistir. Üçüncü bölüm, Padé yaklaşımı teorik bilgiler ve örneklere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde varyasyonel iterasyon metodu ile çözülen Emden-Fowler tipi diferansiyel denklemlerin kuvvet serisi çözümlerine Padé yaklaşımı uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar beşinci bölümde değerlendirilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

2.1. Tanım (Adi Diferansiyel Denklemler)

Bir bağımsız değişken ile en az bir bağımlı değişkenin ve bu bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre birinci ya da daha yüksek mertebeden türevlerinin yer aldığı denklemler **adi diferansiyel denklemler** olarak adlandırılır. Bu denklemler yalnızca bir bağımsız değişken içerdiği için “adi” olarak tanımlanır; kısmi türevli denklemlerden bu yönüyle ayrılır. n. mertebeden bir adi diferansiyel denklemin genel gösterimi

$$F(x, y, y', y'', y''' \dots y^{(n)}) = 0$$

şeklindedir.

2.2. Tanım (Diferansiyel Denklemler Sistemi)

“y bağımlı değişken $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_k)$ ve bir bağımsız değişken (x) içeren bir diferansiyel denklem sistemi genel olarak şu şekilde ifade edilir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_k) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_k) \\ \frac{dy_3}{dx} = f_3(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_k) \\ \vdots \\ \frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_k) \end{array} \right.$$

şeklindedir (Boyce, 2017).”

2.3. Başlangıç Şartları

“Birçok Fiziksel olayın matematiksel olarak modellenmesinde kısmi diferansiyel denklemler (PDE’ler) yardımıyla olur. Birçok diferansiyel denklem de zamana değişkenine bağlıdır. Bundan dolayı bağımlı değişkenin başlangıç anındaki değeri $t = 0$ bilinmelidir. Başlangıç şartları, çözüm fonksiyonunun başlangıç anındaki değerlerini belirler. (Wazwaz A.-M. , 2002).”

2.4. Kuvvet Serileri

Tanım: $x_0 \in \mathbb{R}$ ve $\forall n = 0, 1, 2, \dots$ için $\alpha_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x - x_0)^n = \alpha_0 + \alpha_1 (x - x_0) + \alpha_2 (x - x_0)^2 + \alpha_3 (x - x_0)^3 + \dots$$

şeklinde yazılan bir seriye kuvvet serisi denir. Buradaki α_n sayılarına serinin katsayıları adı verilir.

Eğer $\forall n \geq k$ için $\alpha_n = 0$ olduğu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x - x_0)^n = \alpha_0 + \alpha_1 (x - x_0) + \alpha_2 (x - x_0)^2 + \alpha_3 (x - x_0)^3 + \dots + \alpha_k (x - x_0)^k$$

olur. Bu gibi özel koşullarda kuvvet serisi bir polinom olur.

Verilen bir kuvvet serisinde incelenecek problem verilen bir kuvvet serisinin hangi x ler için yakınsak, hangileri için ise ıraksak olduğudur.

Her kuvvet serisinin $x = x_0$ için yakınsak olacağı açıktır. Bundan dolayı hangi x ler derken x_0 ’ dan farklı x leri kastediyoruz. Tüm x için yakınsak olan kuvvet serileri de vardır.

2.5. Standart Lane-Emden Denklemleri

“Matematiksel fizik ve astrofizik alanlarındaki birçok problem aşağıda verilen denklem ile modellenmektedir (Wazwaz A. , 2011).”

$$y'' + \frac{\alpha}{x} y' + f(x)g(y) = h(x), \quad x > 0, \quad (2.1)$$

Burada $\alpha > 0$ sabittir.

$f(x)=1$, $g(y) = y''$ ve $h(x)=0$ için, Denklem (2.1), yıldız yapısı teorisi ve küresel bir gaz bulutunun astrofizikteki çeşitli olguları modellemek için kullanılan standart Lane-Emden denklemdir. Sabit durum ve $\alpha =2$ ve $h(x)=0$ için Denklem (2.1)

$$y'' + \frac{2}{x} y' + f(x)g(y) = 0, \quad x > 0, 0 < t < L, \quad (2.2)$$

Emden-Fowler denklemi haline gelir.

Koşullara tabi olarak

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (2.3)$$

Emden-Fowler denklemi akışkan mekaniği, görelî mekanik ve kimyasal olarak tepkimeye giren sistemlerin incelenmesinde ortaya çıkar. (Wazwaz, 2011).

$x = 0$ 'da oluşan tekillik davranışı, Denklemler (2.1) ve (2.2)' nin temel zorluğudur. Emden-Fowler denklemi (2.2) ve (2.3), Adomian ayrıştırma yöntemi ve modifiye ayrıştırma metodu kullanarak elle alındı.

Bu çalışmada, başlangıç değerleri olan Emden-Fowler tipinde verilen denklem sistemlerini incelemeyi amaçlıyoruz.

$$\begin{cases} u'' + \frac{\alpha_1}{x} u' + f(u, v) = h_1(x), & x > 0, \alpha_1 > 0 \\ v'' + \frac{\alpha_2}{x} v' + g(u, v) = h_2(x), & x > 0, \alpha_2 > 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Başlangıç koşullarına bağlı olarak

$$u(0) = v(0) = 1, \quad u'(0) = v'(0) = 0, \quad (2.5)$$

Sistem (2.4), diğer değişkenler için herhangi bir sayıda denkleme genelleştirilebilir.

Emden-Fowler tipi (2.4) denklem sistemleri, desen oluşumu, popülasyon evrimi ve kimyasal reaksiyonlar gibi çeşitli fiziksel olayların modellenmesinde ortaya çıkar. (Wazwaz A. , 2011).

$\alpha_i = 1, i = 1, 2, \dots, n$ için Denklem (2.4) silindirik simetri problemleri temsil eder. Ancak $\alpha_i = 2, i \geq 1$ için, bu iki denklem küresel simetri modeller haline gelir. Adi diferansiyel denklemler (ODE'ler) için iki noktalı tekil sınır değer problemlerinin doğru ve hızlı sayısal çözümü, birçok önemli bilimsel ve mühendislik uygulamasında gereklidir, örneğin kimyasal reaktörde reaktan konsantrasyonu, sınır tabaka teorisi, kontrol ve optimizasyon teorisi ve biyolojide akış ağları. Son zamanlarda, çeşitli modelleri, tekil ve tekil olmayan, doğrusal ve doğrusal olmayan ODE'leri ve PDE'leri araştırmak için VIM çalışmasına çok fazla ilgi gösterildi. VIM, böyle bir çözüm varsa, kesin çözüme yakınsayan bir seri çözümdeki çözümü doğru bir şekilde hesaplar (Wazwaz A. , 2011).

2.6. Varyasyonel İterasyon Metodu ve Lagrange çarpanları

Bu bölümde, Varyasyonel iterasyon metodu (VIM)'i kullanmanın ve α 'nın çeşitli değerleri için Lagrange çarpanlarının belirlenmesinin temel adımlarını sunacağız. Şu diferansiyel denklemi ele alalım:

$$Ly + Ny = g(t) \quad (2.6)$$

burada homojen olmayan terim $g(t)$ kaynaktır ve L ve N sırasıyla doğrusal ve doğrusal olmayan operatörlerdir.

Varyasyonel iterasyon metodu (VIM)'i kullanmak için, Denklem (2.6) için bir düzeltme fonksiyonu şu biçimde kullanılmalıdır:

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t \lambda (Ly_n(\xi) + Ny_n(\xi) - g(\xi)) d(\xi) \quad (2.7)$$

burada, λ varyasyonel teori aracılığıyla en iyi şekilde tanımlanabilen genel bir Lagrange çarpanıdır ve $\widetilde{y}_n$, anlamına gelen kısıtlı bir varyasyondur, $\delta \widetilde{y}_n = 0$. Artık VIM'in ana

adımlarının en iyi şekilde tanımlanacak Lagrange çarpanının λ 'nın belirlenmesini gerektirdiği açıktır (Wazwaz A. , 2011).

Denklem (2.7) için düzeltme işlemi şu şekilde okunur.

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x \lambda(\xi) \left((y_n(\xi))_{\xi\xi} + \frac{\alpha}{\xi} (y_n(\xi))_{\xi\xi} - f(\xi) \tilde{g}(y_n(\xi)) \right) d(\xi) \quad (2.8)$$

$$\text{Burada } \delta(\tilde{g}(y_n(\xi))) = 0$$

$\lambda(\xi)$ 'nin en uygun değerini belirlemek için, her iki tarafın $y_n(x)$ 'e göre değişimini alarak şunu elde ederiz.

$$\delta y_{n+1}(x) = \delta y_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(\xi) \left((y_n(\xi))_{\xi\xi} + \frac{\alpha}{\xi} (y_n(\xi))_{\xi\xi} - f(\xi) \tilde{g}(y_n(\xi)) \right) d(\xi) \quad (2.9)$$

veya eşdeğer olarak

$$\delta y_{n+1}(x) = \delta y_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(\xi) \left((y_n(\xi))_{\xi\xi} + \frac{\alpha}{\xi} (y_n(\xi))_{\xi\xi} \right) d(\xi) \quad (2.10)$$

Burada $\delta(\tilde{g}(y_n(\xi))) = 0$ olarak kullanılmıştır. Sağ taraftaki integrali parçalı integrasyon yöntemiyle çözersek şu sonucu verir:

$$\delta y_{n+1}(x) = \delta y_n(x) + \left(1 - \lambda'(x) + \frac{\alpha}{x} \lambda(x) \right) + \delta \lambda(x) (y_n)_\xi(x) + \delta \int_0^x y_n \left(\lambda''(\xi) - \alpha \frac{\xi \lambda'(\xi) - \lambda(\xi)}{\xi^2} \right) \quad (2.11)$$

Bu da sabit koşulları verir.

$$\begin{aligned} \lambda(\xi = x) &= 0 \\ \lambda'|_{\xi=x} &= 1 \\ \lambda'' - \alpha \frac{\xi \lambda' - \lambda}{x^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

λ belirlenmesi için üç önemli durum incelenecektir.

(i) $\alpha = 1$ için olan silindirik simetrik problemler için, denklem (2.12) şunu verir.

$$\lambda(\xi) = \xi \ln\left(\frac{\xi}{x}\right). \quad (2.13)$$

(ii) $\alpha = 2$ için küresel simetrik problemler için, denklem (12) aşağıdaki lagrange çarpanını verir.

$$\lambda(\xi) = \frac{\xi(\xi - x)}{x}. \quad (2.14)$$

(iii) Genel durum için $\alpha > 2$ için, denklem (12) şunu verir.

$$\lambda(\xi) = \frac{\xi(\xi^{\alpha-1} - x^{\alpha-1})}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}. \quad (2.15)$$

Çözüm $y(x)$ 'in ardışık yaklaşımları y_{n+1} , $n \geq 0$, herhangi bir seçici fonksiyon $y_0(x)$ kullanılarak kolayca elde edilecektir. Sonuç olarak, çözüm

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) \quad (2.16)$$

dır (Wazwaz, 2011).

Başka bir deyişle, düzeltme fonksiyonu (2.8) birkaç yaklaşım verecektir ve bu nedenle kesin çözüm, ortaya çıkan ardışık yaklaşımların sınırında elde edilir.

Ardışık yaklaşımların yakınsamasını hızlandıracak $y_0(x)$ için en iyi başlangıç seçimi aşağıdaki gibidir:

$$y_0(x) = y(0) + xy'(0)$$

Başka bir deyişle, $y_0(x)$ için en iyi seçim $y(x)$ için Taylor serisinin ilk iki terimidir. Bu tür seçimler yakınsak ardışık yaklaşımlar elde etmek için etkili olduğunu kanıtlamıştır (Wazwaz A. , 2011).

3. PADÉ YAKLAŞIMI

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i x^i \quad (3.1)$$

Kuvvet serisini alalım.

Padé yaklaşımı

$$[m/n] = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots b_n x^n} \quad (3.2)$$

payın derecesi m ve paydanın derecesi n olan polinomların oranı şeklindeki *rasyonel fonksiyondur*. Bu durumda (3.2)'de $m+1$ pay ve $n+1$ paydanın katsayısı bulunur. Paydanın tanımsız olmaması için (3.2) verilen rasyonel fonksiyonda $b_0 = 1$ alınması gerekiyor. Tüm yaklaşımda toplamda $m+n+1$ bilinmeyen katsayı vardır ve kuvvet serisinin ilk terimlerine karşılık gelir (Çelik, 2002).

(3.1)'deki $1, x, x^2, \dots, x^{m+n}$ ninci mertebeden kuvvet serisine açılımına "Fonksiyonun orantısal bir yaklaşık modeli"

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i x^i = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots b_n x^n} + Q(x^{m+n+1}) \quad (3.3)$$

şeklinde yazılabilir. (3.3) denkleminde içler dışlar çarpımı yapılırsa

$$(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots b_n x^n)(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_m x^m + Q(x^{m+n+1}) \quad (3.4)$$

elde edilir. (3.4) denklemindeki $x^{m+1}, x^{m+2}, \dots, x^{m+n}$ katsayılarının eşitliğinden

$$\begin{aligned} b_n p_{m-n+1} + b_{n-1} p_{m-n+2} + \dots + b_0 p_{m+1} &= 0 \\ b_n p_{m-n+2} + b_{n-1} p_{m-n+3} + \dots + b_0 p_{m+2} &= 0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$b_n p_m + b_{n-1} p_{m+1} + \dots + b_0 p_{m+n} = 0$$

sistemi elde edilir. (3.5) denklemi n tane lineer denklemlerden oluşur.

Yani ;

$$\begin{bmatrix} p_{m-n+1} & p_{m-n+2} & p_{m-n+3} & \dots & p_m \\ p_{m-n+2} & p_{m-n+3} & p_{m-n+4} & \dots & p_{m+1} \\ p_{m-n+3} & p_{m-n+4} & p_{m-n+5} & \dots & p_{m+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_m & p_{m+1} & p_{m+2} & \dots & p_{m+n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p_{m+1} \\ p_{m+2} \\ p_{m+3} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{m+n} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

olur. Bu eşitlikten b_i katsayıları elde edilir. Öte taraftan (3.3) denkleminde payın katsayıları olan $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ katsayıları $1, x, x^2, x^3, \dots, x^m$ terimlerin katsayılarının eşitliğinden

$$a_0 = p_0$$

$$a_1 = p_1 + b_1 p_0$$

$$a_2 = p_2 + b_1 p_1 + b_2 p_0$$

$$(3.7)$$

•
•
•

$$a_m = p_m + \sum_{i=1}^{\min(m,n)} b_i p_{m-i}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda (3.6) ve (3.7) denklemleri Padé yaklaşımının pay ve paydası olarak tanımlanır. Bu şekilde elde edilen denklemler, literatürde Padé denklemleri olarak bilinmektedir (Çelik, 2002).

3.1. Padé Yaklaşımının Hesaplanması

“Çeşitli algoritmalar Padé yaklaşımının elde edilmesinde kullanılmıştır; bunlardan en çok benimsenen, etkin sonuçlar veren, en yaygın ve işlevsel olanı determinant temelli formüllerdir. Söz konusu yöntem aşağıda açıklanmıştır:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i x^i \quad (3.8)$$

Verilen fonksiyonun seri açılımıyla oluşturulan (m, n) dereceli Padé yaklaşımı

$$r_{m,n}(x) = \frac{g_0(x)}{q_0(x)} \quad (3.9)$$

olarak temsil edilirse,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i x^i = \frac{g_0(x)}{q_0(x)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{i=0}^n b_i x^i} \quad (3.10)$$

olur. Bu ifade, içler dışlar çarpımı yapılarak bir denklem sistemine dönüştürülür ve determinant yöntemiyle ilgili katsayılar elde edilir.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i x^i \quad \text{için;} \quad (3.11)$$

$$F_k(x) = \sum_{i=0}^k p_i x^i, \quad k \geq 0 \quad (3.12)$$

$$F_k(x) = 0, \quad k < 0 \quad (3.13)$$

şu formda temsil edilir (Turut, 2010).”

3.2. Padé Tablosu

Genel anlamda bir $f(x)$ fonksiyonunun Padé yaklaşımını

$$[m/n] = [m/n]_f = [m/n](x) = [m/n]_f(x) = r_{m,n} = R_{m,n}$$

şeklinde matematiksel temsillerle alternatif olarak bu şekilde yazabiliriz.

Bu tür yaklaşımların sistematik düzenlemesi Henri Eugène Padé’ye ait olduğundan, hem yöntem hem de tablo onun adına atfen Padé olarak adlandırılmıştır. Aşağıda genel bir Padé tablosu örneği yer almaktadır.

Çizelge 3.1. Padé Tablosu

$\begin{matrix} \text{M} \\ \text{N} \end{matrix}$	0	1	2	...
0	[0/0]	[1/0]	[2/0]	...
1	[0/1]	[1/1]	[2/1]	...
2	[0/2]	[1/2]	[2/2]	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
...	...	...	...	...

Örnek 3.1: “ $f(x) = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}x}{3x+1}}$ Verilen fonksiyonun ilk beş terimden oluşan kuvvet seri açılımı

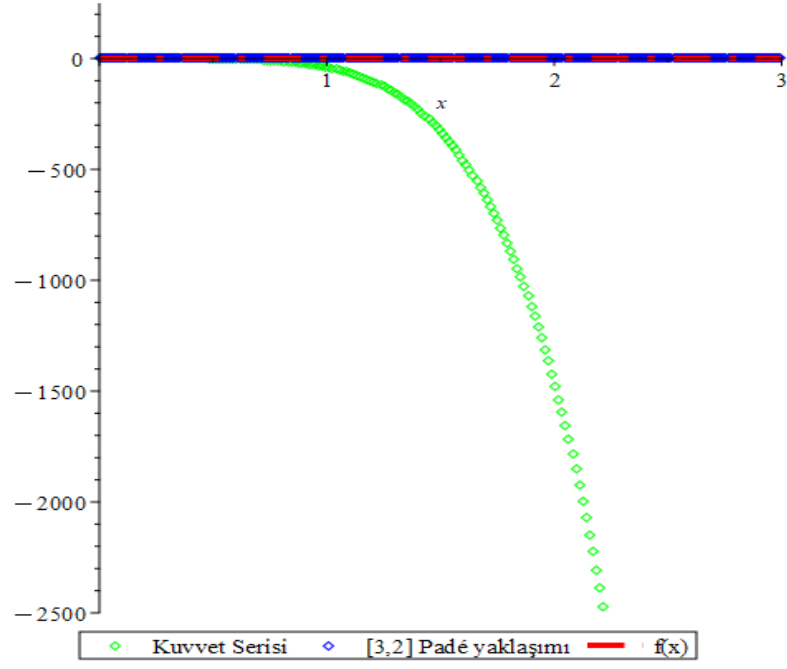
$$P_5(x) = 1 - \frac{5}{4}x + \frac{95}{32}x^2 - \frac{965}{128}x^3 + \frac{40795}{2048}x^4 - \frac{442115}{8192}x^5 \quad (3.14)$$

şeklinde (Turut, Çok değişkenli padé yaklaşımları ve uygulamaları”, Y, 2007).”

(3.14) kuvvet serisinin [3,2] dereceli Padé yaklaşımı determinant yöntemleri ile oluşturulan denklemler yardımıyla,

$$r_{3,2}(x) = \frac{1 - \frac{401203}{6025}x - \frac{33930791}{385600}x^2 - \frac{881105}{61696}x^3}{1 - \frac{1574687}{24100}x - \frac{66569281}{385600}x^2} \quad (3.15)$$

olarak hesaplanır. $f(x) = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}x}{3x+1}}$ fonksiyonu, $P_5(x)$ kuvvet serisi [3,2] dereceli Padé yaklaşımına ait grafik şekil 3.1’de gösterilmiştir.



Şekil 1: $f(x) = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}x}{3x+1}}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{3,2}(x)$ Padé yaklaşımı

Örnek 3.2: $f(x) = e^{-3x}$ fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyonun yedi terimli seri açılımı,

$$P_7(x) = 1 - 3x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{9}{2}x^3 + \frac{27}{8}x^4 - \frac{81}{40}x^5 + \frac{81}{80}x^6 - \frac{243}{560}x^7 \quad (3.16)$$

şeklindedir. (3.16) kuvvet serisinin [4,3] dereceli Padé yaklaşımı determinant denklemleri yardımıyla,

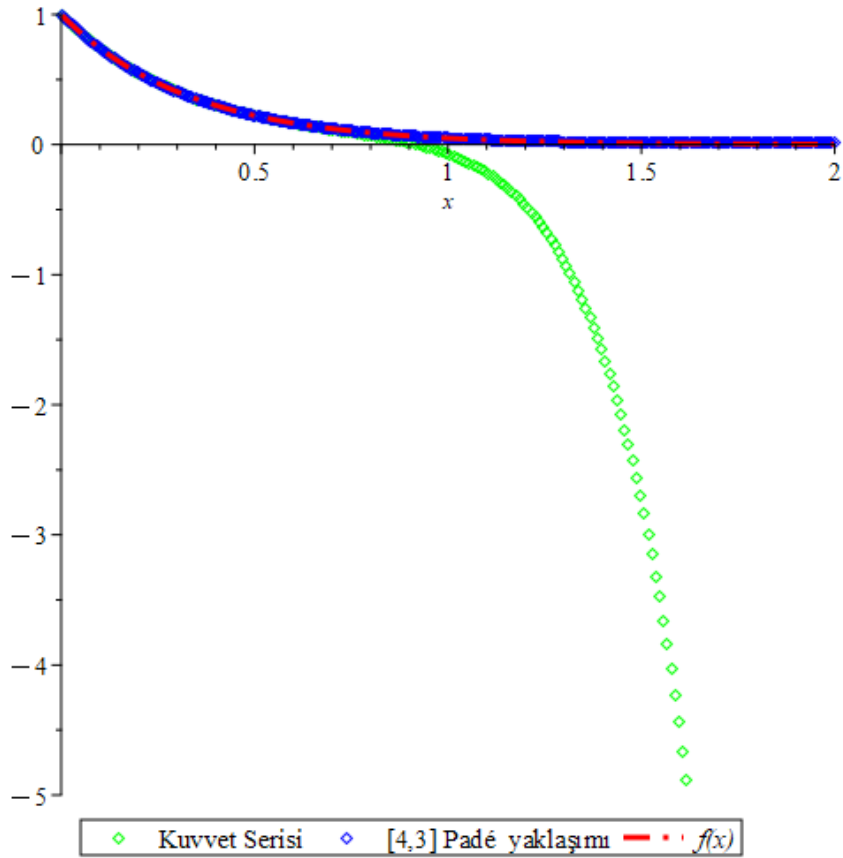
$$r_{4,3}(x) = \frac{1 - \frac{12}{7}x + \frac{9}{7}x^2 - \frac{18}{35}x^3 + \frac{27}{280}x^4}{1 + \frac{9}{7}x + \frac{9}{14}x^2 + \frac{9}{70}x^3} \quad (3.17)$$

olarak hesaplanır.

$f(x) = e^{-3x}$ fonksiyonu, $P_7(x)$ kuvvet serisi [4,3] dereceli Padé yaklaşımına ait çizelge 3.1 ve grafik şekil 3.2 de gösterilmiştir.

Tablo 1: $f(x) = e^{-3x}$, $P_7(x)$ ve $r_{4,3}(x)$ değerleri

x	$f(x) = e^{-3x}$	$r_{4,3}(x)$	$P_7(x)$	Mutlak Hata $ e^{-3x} - r_{4,3}(x) $	Mutlak Hata $ P_7(x) - r_{4,3}(x) $
1	0.04978706837	0.05023364486	-0.07142857143	0.00044657649	0.12166221629
1.1	0.03688316740	0.03766177914	-0.21634376530	0.00077861174	0.25400554444
1.2	0.02732372245	0.02859973980	-0.46798372600	0.00127601735	0.49658346580
1.3	0.02024191145	0.02222830181	-0.89653907200	0.00198639036	0.91876737381
1.4	0.01499557682	0.01795685279	-1.60407392000	0.00296127597	1.62203077279
1.5	0.01110899654	0.01536390649	-2.73497489100	0.00425490995	2.75033879749
1.6	0.00822974705	0.01415271630	-4.48851419000	0.00592296925	4.50266690630
1.7	0.00609674657	0.01411814990	-7.13374556000	0.00802140333	7.14786370990
1.8	0.00451658094	0.01512196471	-11.0269515900	0.01060538377	11.04207355471
1.9	0.00334596546	0.01707437539	-16.6318614100	0.01372840993	16.64893578539
2	0.00247875218	0.01992031873	-24.5428571400	0.01744156655	24.56277745873



Şekil 2: $f(x) = e^{-3x}$ fonksiyonu, $P_7(x)$ kuvvet serisi ve $r_{4,3}(x)$ Padé yaklaşımı

4. UYGULAMALAR

Bu bölümde $x = 0$ 'da oluşan tekillik davranışa sahip Emden-Fowler tipi iki denklemleri sistemini inceleyeceğiz. İki başlangıç değeri problemi farklı Lagrange çarpanlarının kullanılacağı çeşitli α değerleri için seçilir.

Emden-Fowler yardımıyla elde edilen seri çözümlerin farklı α değerleri için Padé yaklaşımları hesaplanmıştır. Hesaplanan Padé nümerik çözümler kesin çözümlerle kıyaslanarak α parametresinin Padé yaklaşımı üzerindeki etkisi gözlemlenmeye çalışılmıştır.

Uygulama 4.1

“İlk olarak Emden-Fowler tipi doğrusal olmayan denklem sistemini inceliyoruz.

$$\begin{cases} u'' + \frac{1}{x}u' + u^2v - (4x^2 + 5)u = 0, \\ v'' + \frac{2}{x}v' + uv^2 - (4x^2 - 5)v = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

başlangıç koşullarıyla

$$\begin{aligned} u(0) &= 1, & u'(0) &= 0 \\ v(0) &= 1, & v'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

burada $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$ alınmıştır. Bu denklem (4.1)'deki denklemlerin sırasıyla silindirik simetri ve küresel simetri (3 boyutlu) oldukları anlamına gelir (Wazwaz A. , 2011).”

“Denklem (4.1) için düzeltme fonksiyonları

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= u_n(x) + \int_0^x \left(\xi \ln\left(\frac{\xi}{x}\right) \right) \left(u''(\xi) + \frac{1}{\xi}u'(\xi) - (4\xi^2 + 5)u_n(\xi) \right) d\xi, \quad n \geq 0, \\ v_{n+1}(x) &= v_n(x) + \int_0^x \left(\frac{\xi(\xi - x)}{x} \right) \left(v''(\xi) + \frac{1}{\xi}v'(\xi) - (4\xi^2 - 5)v_n(\xi) \right) d\xi, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

nerede kullandık

$$\begin{aligned}\lambda_1(\xi) &= \xi \ln\left(\frac{\xi}{x}\right), \quad \alpha_1 = 1 \text{ için}, \\ \lambda_2(\xi) &= \frac{\xi(\xi - x)}{x}, \quad \alpha_2 = 2 \text{ için},\end{aligned}\tag{4.4}$$

Yukarıda denklem (2.13) ve (2.14) verildiği gibi. Verilen başlangıç değerlerini göz önünde bulundurarak, $u_0(x) = 1$ ve $v_0(x) = 1$ 'i seçebiliriz. Bu seçimi Denklem (4.3)'te kullanarak, aşağıdaki ardışık yaklaşımları elde ederiz (Wazwaz A. , 2011).

$$\begin{aligned}u_0(x) &= 1 \\ v_0(x) &= 1 \\ u_1(x) &= 1 + x^2 + \frac{1}{4}x^4, \\ v_1(x) &= 1 - x^2 + \frac{1}{5}x^4, \\ u_2(x) &= 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{37}{240}x^6 + \frac{1}{40}x^8 + \dots, \\ v_2(x) &= 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{31}{280}x^6 + \frac{1}{240}x^8 + \dots, \\ u_3(x) &= 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1441}{35840}x^8 + \dots, \\ v_3(x) &= 1 - x^2 + \frac{1}{2!}x^4 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{629}{17280}x^8 + \dots, \\ u_4(x) &= 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8 + \dots, \\ v_4(x) &= 1 - x^2 + \frac{1}{2!}x^4 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8 + \dots, \\ &\vdots\end{aligned}\tag{4.5}$$

Bu, Denklem (4.1)'in aşağıdaki şekilde verilen kesin çözümünü verir.

$$(u(x), v(x)) = (e^{x^2}, e^{-x^2}).\tag{4.6}$$

(Wazwaz A. , 2011).”

Varyasyonel iterasyonel yöntemi ile elde edilen,

$$P_l(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8 + \frac{1}{120}x^{10} + \frac{1}{720}x^{12} + \frac{1}{5040}x^{14}$$

kuvvet serisinin [12,2] decereli Padé yaklaşımı hesaplanırsa

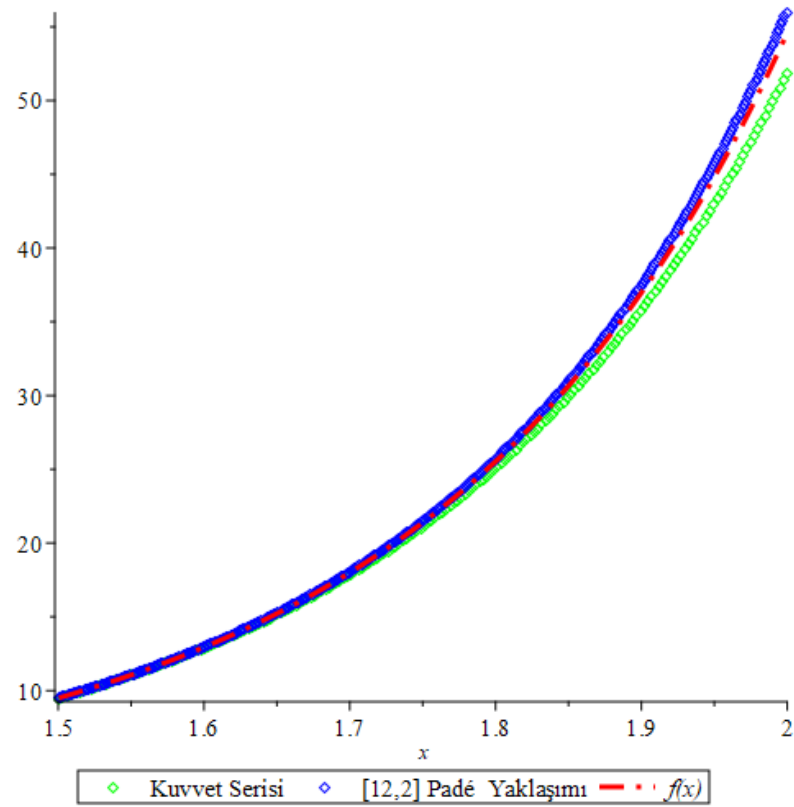
$$r_{l2,2}(x) = \frac{1 + \frac{6}{7}x^2 + \frac{5}{14}x^4 + \frac{2}{21}x^6 + \frac{1}{56}x^8 + \frac{1}{420}x^{10} + \frac{1}{5040}x^{12}}{1 - \frac{x^2}{7}}$$

olarak elde edilir.

$f(x) = e^{x^2}$ kesin çözümü, $P_l(x)$ ve $r_{l2,2}(x)$ nümerik çözümlerine ait sayısal değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 2: $f(x) = e^{x^2}$, $P_l(x)$ ve $r_{l2,2}(x)$ değerleri

x	$f(x) = e^{x^2}$	$r_{l2,2}(x)$	$P_l(x)$	Mutlak Hata $ e^{x^2} - r_{l2,2} $	Mutlak Hata $ P_l(x) - r_{l2,2} $
1	2.718281828	2.718287037	2.718253968	0.000005209	0.000033069
1.1	3.353484653	3.353510749	3.353353288	0.000026096	0.000157461
1.2	4.220695817	4.220811549	4.220151774	0.000115732	0.000659775
1.3	5.419480705	5.419945135	5.417458751	0.00046443	0.002486384
1.4	7.099327065	7.101043576	7.092469498	0.001716511	0.008574078
1.5	9.487735836	9.493663266	9.466226305	0.00592743	0.027436961
1.6	12.93581732	12.95517492	12.87274095	0.0193576	0.08243397
1.7	17.99330960	18.05373403	17.81881923	0.06042443	0.2349148
1.8	25.53372175	25.71575948	25.07493117	0.18203773	0.64082831
1.9	36.96605281	37.50032942	35.81211588	0.53427661	1.68821354
2	54.59815003	56.14074074	51.80634921	1.54259071	4.33439153



Şekil 3: $f(x) = e^{x^2}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{12,2}(x)$ Padé yaklaşımı

Varyasyonel iterasyonel yöntemi ile elde edilen,

$$Q_l(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8 - \frac{1}{120}x^{10} + \frac{1}{720}x^{12} - \frac{1}{5040}x^{14}$$

kuvvet serisinin [12,2] decereli Padé yaklaşımı hesaplanırsa

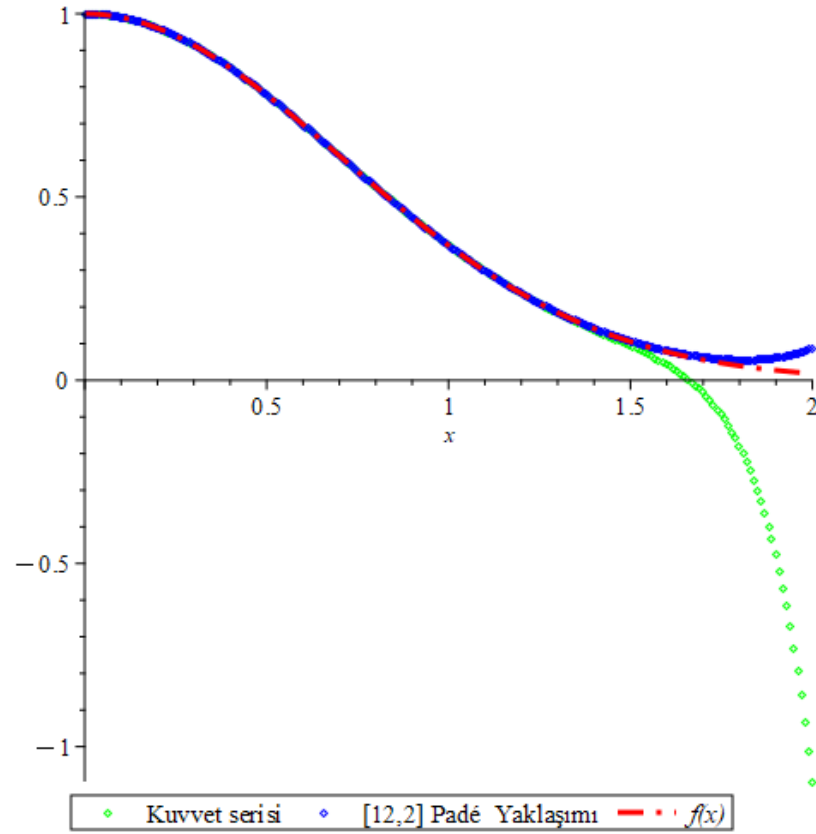
$$r_{12,2}(x) = \frac{1 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{5}{14}x^4 - \frac{2}{21}x^6 + \frac{1}{56}x^8 - \frac{1}{420}x^{10} + \frac{1}{5040}x^{12}}{1 + \frac{x^2}{7}}$$

olarak elde edilir.

$f(x) = e^{-x^2}$ kesin çözümü, $Q_l(x)$ ve $r_{l2,2}(x)$ nümerik çözümlerine ait sayısal değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 3: $f(x) = e^{-x^2}$, $Q_l(x)$ ve $r_{l2,2}(x)$ değerleri

x	$f(x) = e^{-x^2}$	$r_{l2,2}(x)$	$Q_l(x)$	Mutlak Hata $ e^{-x^2} - r_{l2,2}(x) $	Mutlak Hata $ Q_l(x) - r_{l2,2}(x) $
1	0.3678794412	0.3678819444	0.3678571429	0.0000025032	0.0000248015
1.1	0.2981972794	0.2982080173	0.2980969696	0.0000107379	0.0001110477
1.2	0.2369277587	0.2369678894	0.2365332520	0.0000401307	0.0004346374
1.3	0.1845195240	0.1846530528	0.1831337541	0.0001335288	0.0015192987
1.4	0.1408584209	0.1412607262	0.1364378063	0.0004023053	0.0048229199
1.5	0.1053992246	0.1065116255	0.09242237662	0.0011124009	0.0140892489
1.6	0.07730474044	0.08015863466	0.0418734009	0.0028538942	0.0382852337
1.7	0.05557621261	0.06243092590	-0.0351929216	0.0068547133	0.0976238475
1.8	0.03916389510	0.05469397117	-0.1806101797	0.0155300761	0.2353041509
1.9	0.02705184687	0.06045126007	-0.478949676	0.0333994132	0.5394009361
2	0.01831563889	0.08686868687	-1.095238095	0.0685530480	1.18210678



Şekil 4: $f(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{12,2}(x)$ Padé yaklaşımı

Varyasyonel iterasyonel yöntemi ile elde edilen,

$$P_1(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8 + \frac{1}{120}x^{10} + \frac{1}{720}x^{12} + \frac{1}{5040}x^{14}$$

kuvvet serisinin [8,4] decereli Padé yaklaşımı hesaplanırsa

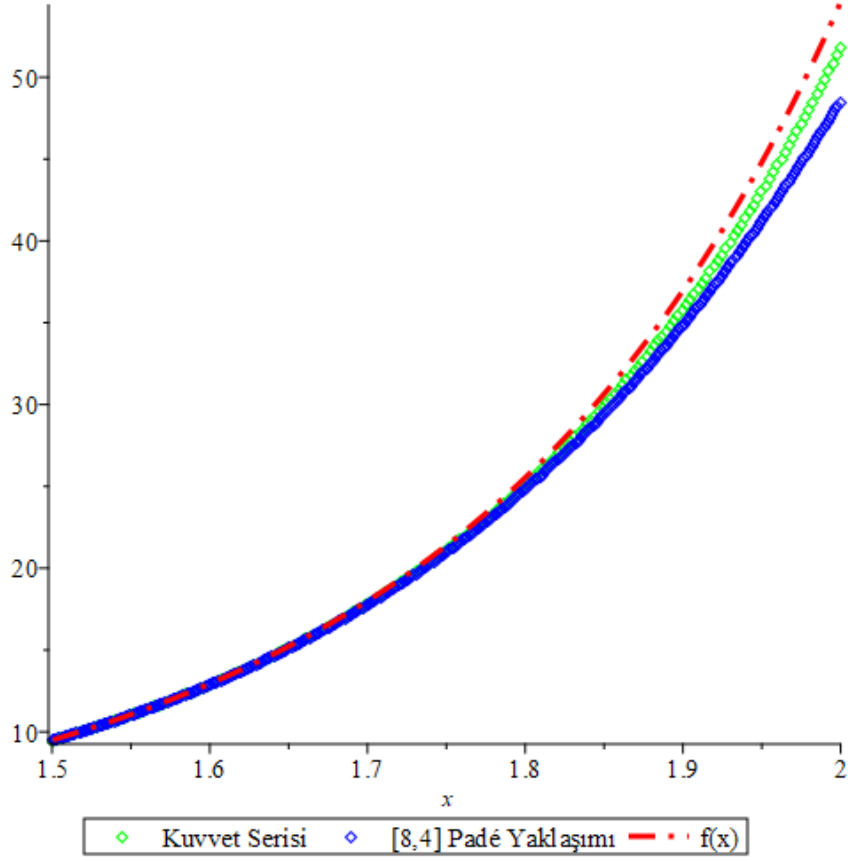
$$r_{8,4}(x) = \frac{1 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{30}x^6 + \frac{1}{360}x^8}{1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{30}x^4}$$

olarak elde edilir.

$f(x)=e^{x^2}$ kesin çözümü, $P_l(x)$ ve $r_{8,4}(x)$ nümerik çözümlerine ait sayısal değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 4: $f(x)=e^{x^2}$, $P_l(x)$ ve $r_{8,4}(x)$ değerleri

x	$f(x)=e^{x^2}$	$r_{8,4}(x)$	$P_l(x)$	Mutlak Hata $ e^{x^2}-r_{8,4}(x) $	Mutlak Hata $ P_l(x)-r_{8,4}(x) $
1	2.718281828	2.718253968	2.718253968	0,00002786	0
1.1	3.353484653	3.353359743	3.353353288	0,00012491	0,000006455
1.2	4.220695817	4.220187290	4.220151774	0,000508527	0,000035516
1.3	5.419480705	5.417563478	5.417458751	0,001917227	0,000104727
1.4	7.099327065	7.092528943	7.092469498	0,006798122	0,000059445
1.5	9.487735836	9.464785447	9.466226305	0,022950389	0,001440858
1.6	12.93581732	12.86133832	12.87274095	0,074479	0,01140263
1.7	17.99330960	17.75936566	17.81881923	0,23394394	0,05945357
1.8	25.53372175	24.81983853	25.07493117	0,71388322	0,25509264
1.9	36.96605281	34.85112013	35.81211588	2,11493268	0,96099575
2	54.59815003	48.55555556	51.80634921	6,04259447	3,25079365



Şekil 5: $f(x) = e^{x^2}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{8,4}(x)$ Padé yaklaşımı

Varyasyonel iterasyonel yöntemi ile elde edilen,

$$Q_1(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8 - \frac{1}{120}x^{10} + \frac{1}{720}x^{12} - \frac{1}{5040}x^{14}$$

kuvvet serisinin [8,4] decereli Padé yaklaşımı hesaplanırsa

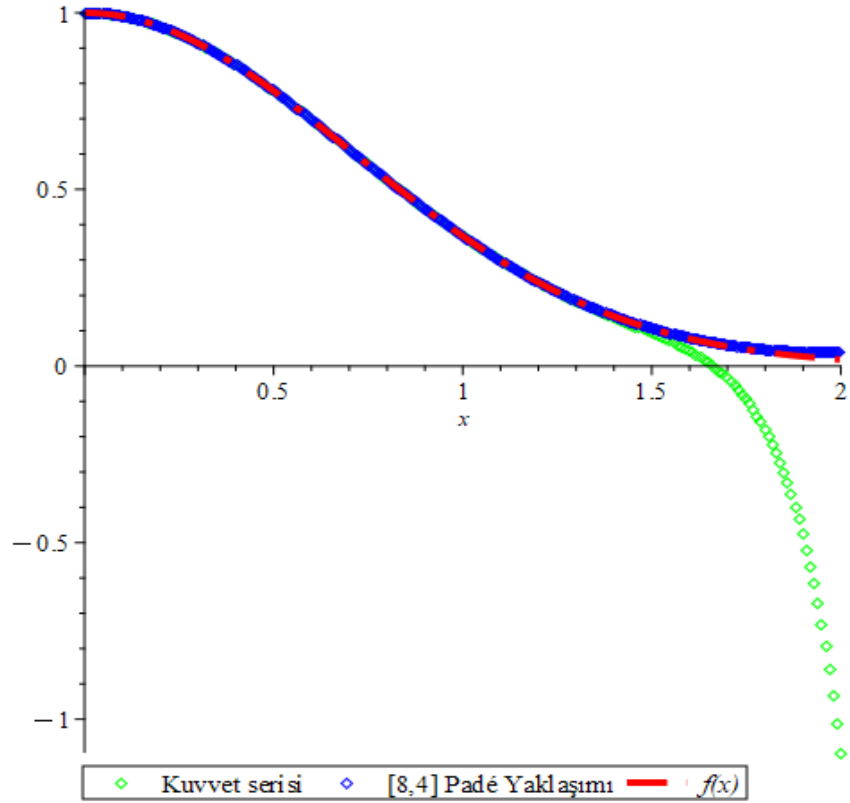
$$r_{8,4}(x) = \frac{1 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{30}x^6 + \frac{1}{360}x^8}{1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{30}x^4}$$

olarak elde edilir.

$f(x) = e^{-x^2}$ kesin çözümü, $Q_l(x)$ ve $r_{8,4}(x)$ nümerik çözümlerine ait sayısal değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 5: $f(x) = e^{-x^2}$, $Q_l(x)$ ve $r_{8,4}(x)$ değerleri

x	$f(x) = e^{-x^2}$	$r_{8,4}(x)$	$Q_l(x)$	Mutlak Hata $ e^{-x^2} - r_{8,4}(x) $	Mutlak Hata $ Q_l(x) - r_{8,4}(x) $
1	0.3678794412	0.3678861789	0.3678571429	0.0000067377	0.0000290360
1.1	0.2981972794	0.2982196673	0.2980969696	0.0000223879	0.0001226977
1.2	0.2369277587	0.2369933485	0.2365332520	0.0000655898	0.0004600965
1.3	0.1845195240	0.1846922608	0.1831337541	0.0001727368	0.0015585067
1.4	0.1408584209	0.1412736184	0.1364378063	0.0004151975	0.0048358121
1.5	0.1053992246	0.1063212540	0.09242237662	0.0009220294	0.0138988774
1.6	0.07730474044	0.07921541802	0.0418734009	0.0019106776	0.0373420171
1.7	0.05557621261	0.05930167522	-0.0351929216	0.0037254626	0.0944945968
1.8	0.03916389510	0.04604646083	-0.1806101797	0.0068825657	0.2266566405
1.9	0.02705184687	0.03917105954	-0.478949676	0.0121192127	0.5181207355
2	0.01831563889	0.03875968992	-1.095238095	0.0204440510	1.1349977849



Şekil 6: $f(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{8,4}(x)$ Padé yaklaşımı

Varyasyonel iterasyonel yöntemi ile elde edilen,

$$P_1(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8 + \frac{1}{120}x^{10} + \frac{1}{720}x^{12} + \frac{1}{5040}x^{14}$$

kuvvet serisinin [8,6] decereli Padé yaklaşımı hesaplanırsa

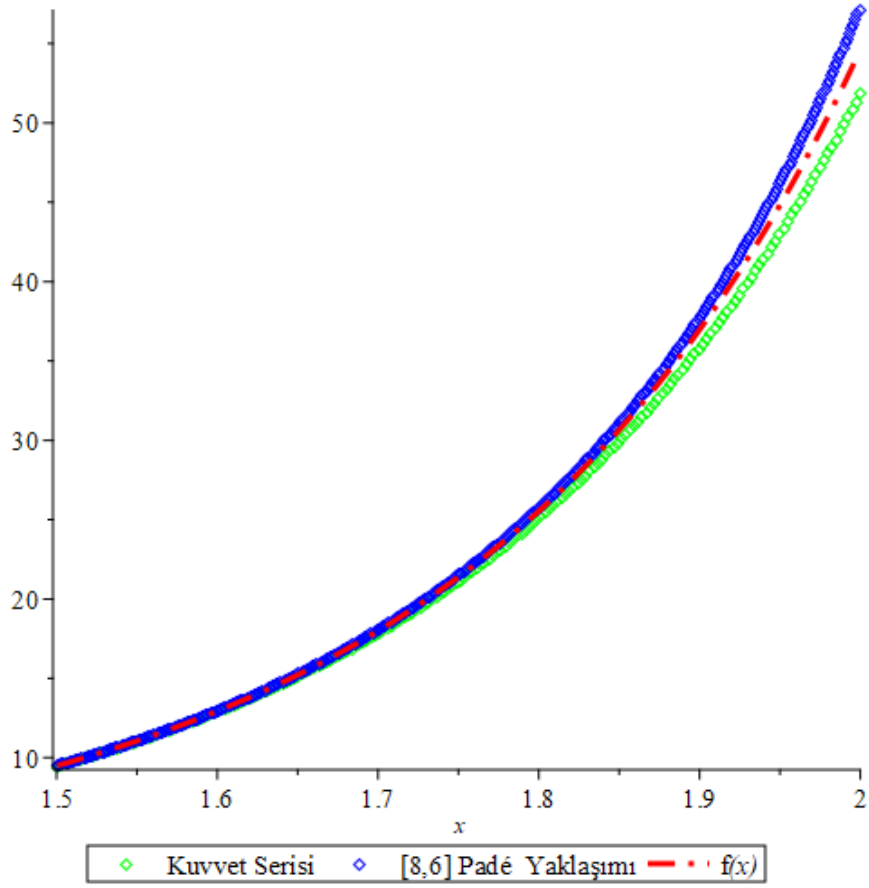
$$r_{8,6}(x) = \frac{1 + \frac{4}{7}x^2 + \frac{1}{7}x^4 + \frac{2}{105}x^6 + \frac{1}{840}x^8}{1 - \frac{3}{7}x^2 + \frac{1}{14}x^4 - \frac{1}{210}x^6}$$

olarak elde edilir.

$f(x)=e^{x^2}$ kesin çözümü, $P_l(x)$ ve $r_{8,6}(x)$ nümerik çözümlerine ait sayısal değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 6: $f(x)=e^{x^2}$, $P_l(x)$ ve $r_{8,6}(x)$ değerleri

x	$f(x)=e^{x^2}$	$r_{8,6}(x)$	$P_l(x)$	Mutlak Hata $ e^{x^2}-r_{8,6}(x) $	Mutlak Hata $ P_l(x)-r_{8,6}(x) $
1	2.718281828	2.718283582	2.718253968	0,000001754	0,000029614
1.1	3.353484653	3.353494483	3.353353288	0,000009830	0,000141195
1.2	4.220695817	4.220745155	4.220151774	0,000049338	0,000593381
1.3	5.419480705	5.419707422	5.417458751	0,000226717	0,002248671
1.4	7.099327065	7.100297777	7.092469498	0,000970712	0,007828279
1.5	9.487735836	9.491663955	9.466226305	0,003928119	0,025437650
1.6	12.93581732	12.95102131	12.87274095	0,015203990	0,078280360
1.7	17.99330960	18.05019036	17.81881923	0,056880760	0,231371130
1.8	25.53372175	25.74148346	25.07493117	0,207761710	0,666552290
1.9	36.96605281	37.71528508	35.81211588	0,749232270	1,903169200
2	54.59815003	57.30769231	51.80634921	2,709542280	5,501343100



Şekil 7: $f(x) = e^{x^2}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{8,6}(x)$ Padé yaklaşımı

Varyasyonel iterasyonel yöntemi ile elde edilen,

$$Q_1(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8 - \frac{1}{120}x^{10} + \frac{1}{720}x^{12} - \frac{1}{5040}x^{14}$$

kuvvet serisinin [8,6] decereli Padé yaklaşımı hesaplanırsa

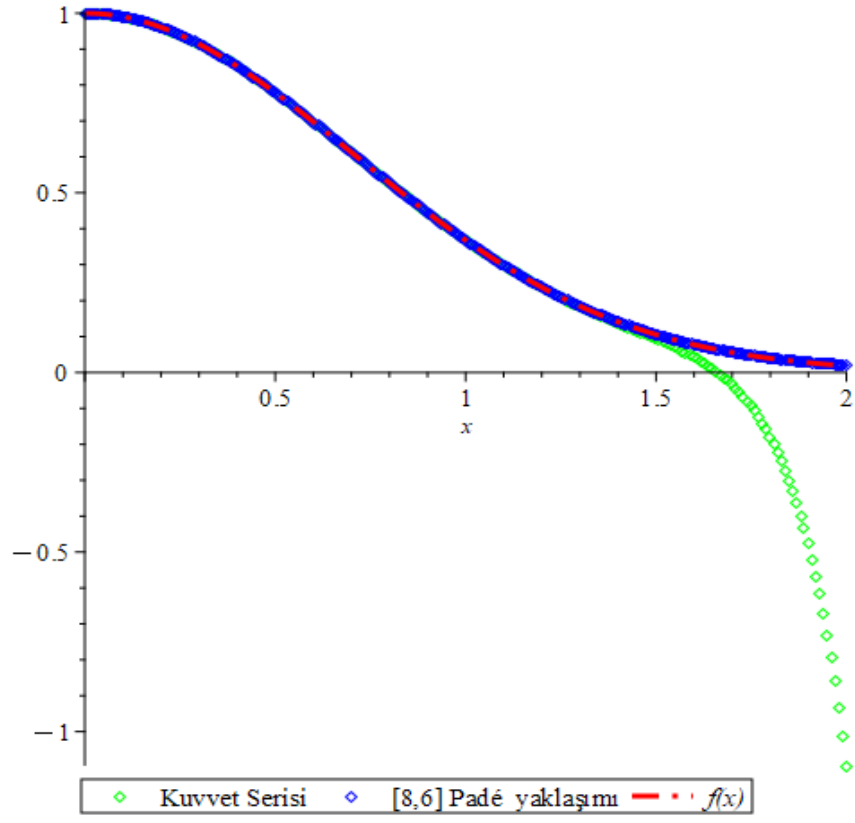
$$r_{8,6}(x) = \frac{1 - \frac{4}{7}x^2 + \frac{1}{7}x^4 - \frac{2}{105}x^6 - \frac{1}{840}x^8}{1 + \frac{3}{7}x^2 + \frac{1}{14}x^4 + \frac{1}{210}x^6}$$

olarak elde edilir.

$f(x) = e^{-x^2}$ kesin çözümü, $Q_l(x)$ ve $r_{8,6}(x)$ nümerik çözümlerine ait sayısal değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 7: $f(x) = e^{-x^2}$, $Q_l(x)$ ve $r_{8,6}(x)$ değerleri

x	$f(x) = e^{-x^2}$	$r_{8,6}(x)$	$Q_l(x)$	Mutlak Hata $ e^{-x^2} - r_{8,6}(x) $	Mutlak Hata $ Q_l(x) - r_{8,6}(x) $
1	0.3678794412	0.3678797468	0.3678571429	0.0000003056	0.0000226039
1.1	0.2981972794	0.2981984660	0.2980969696	0.0000011866	0.0001014964
1.2	0.2369277587	0.2369317403	0.2365332520	0.0000039816	0.0003984883
1.3	0.1845195240	0.1845313294	0.1831337541	0.0000118054	0.0013975753
1.4	0.1408584209	0.1408898914	0.1364378063	0.0000314705	0.0044520851
1.5	0.1053992246	0.1054757103	0.09242237662	0.0000764857	0.0130533337
1.6	0.07730474044	0.07747616473	0.0418734009	0.0001714243	0.0356027638
1.7	0.05557621261	0.05593390008	-0.0351929216	0.0003576875	0.0911268217
1.8	0.03916389510	0.03986431017	-0.1806101797	0.0007004151	0.2204744899
1.9	0.02705184687	0.02834783540	-0.478949676	0.0012959885	0.5072975114
2	0.01831563889	0.02059496568	-1.095238095	0.0022793268	1.1158330607



Şekil 8: $f(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{8,6}(x)$ Padé yaklaşımı

Uygulama 4.2

“Aşağıdaki Emden-Fowler tipi doğrusal olmayan denklem sistemini ele alırsak.

$$\begin{cases} u'' + \frac{2}{x}u' + v^2 - u^2 + 6v = 6 + 6x^2, \\ v'' + \frac{2}{x}v' + u^2 - v^2 - 6v = 6 - 6x^2, \end{cases} \quad (4.7)$$

başlangıç koşullarıyla

$$\begin{aligned} u(0) &= 1, & u'(0) &= 0 \\ v(0) &= -1, & v'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Burada $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$. Bu, sistemin iki küresel denklemden oluştuğu anlamına gelir.

Denklem (4.7) için düzeltme fonksiyonları şu şekildedir (Wazwaz A. , 2011).”

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= u_n(x) + \int_0^x \left(\frac{\xi(\xi-x)}{x} \right) \left(u_n''(\xi) + \frac{2}{\xi}u_n'(\xi) + v_n^2 - u_n^2 + 6v_n - 6 - 6\xi^2 \right) d\xi, \quad n \geq 0, \\ v_{n+1}(x) &= v_n(x) + \int_0^x \left(\frac{\xi(\xi-x)}{x} \right) \left(v_n''(\xi) + \frac{2}{\xi}v_n'(\xi) + u_n^2 - v_n^2 - 6v_n - 6 + 6\xi^2 \right) d\xi, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

Nerede kullandık

$$\lambda_1(\xi) = \lambda_2(\xi) = \frac{\xi(\xi-x)}{x}, \quad (4.10)$$

Yukarıdaki denklem (2.14)’te verildiği gibi.

“Verilen başlangıç değerlerini göz önünde bulundurarak, $u_0(x) = 1$ ve $v_0(x) = -1$. seçebiliriz. Bu seçimi denklem (4.9)’te kullanarak aşağıdaki yaklaşımları elde ederiz.

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= I, \\
v_0(x) &= -I, \\
u_1(x) &= I + 2x^2 + \frac{3}{10}x^4, \\
v_1(x) &= -I - \frac{3}{10}x^4, \\
u_2(x) &= I + 2x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{29}{210}x^6 + \frac{1}{60}x^8, \\
v_2(x) &= -I - \frac{1}{2}x^4 - \frac{29}{210}x^6 - \frac{1}{60}x^8, \\
u_3(x) &= I + 2x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \frac{11}{280}x^8 + \dots, \\
v_3(x) &= -I - \frac{1}{2!}x^4 - \frac{1}{3!}x^6 - \frac{11}{280}x^8 + \dots, \\
u_4(x) &= I + 2x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8 + \dots, \\
v_4(x) &= -I - \frac{1}{2!}x^4 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8 + \dots,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Bu, Denklem (4.7) nin aşağıdaki şekilde kesin çözümünü verir.

$$(u(x), v(x)) = (x^2 + e^{x^2}, x^2 - e^{-x^2}). \tag{4.12}$$

(Wazwaz A. , 2011).”

Varyasyonel iterasyonel yöntemi ile elde edilen,

$$P_2(x) = I + 2x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8$$

kuvvet serisinin [6,2] decereli Padé yaklaşımı hesaplanırsa

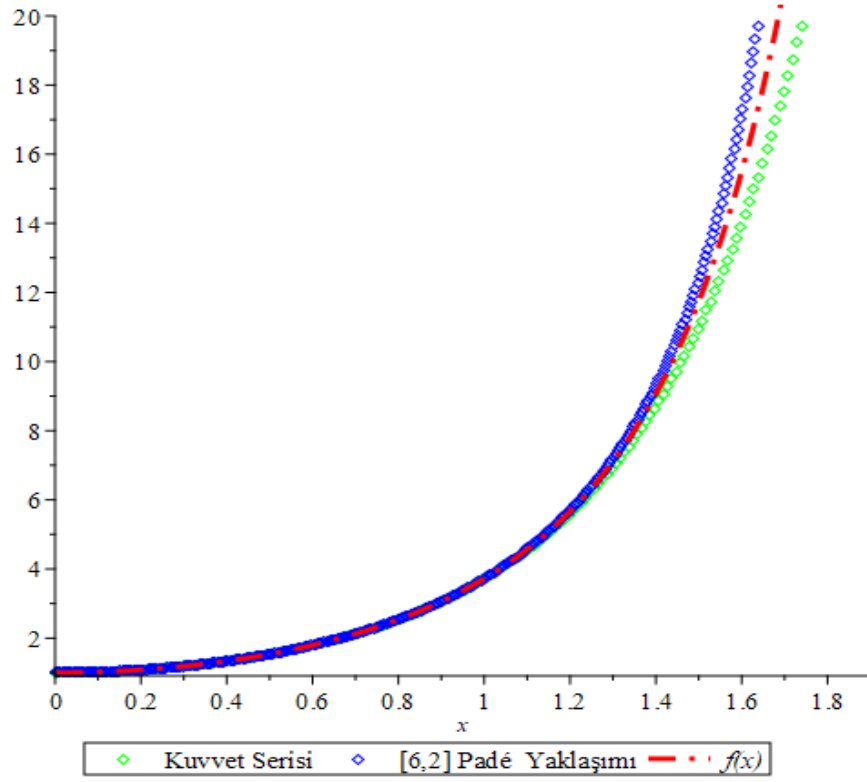
$$r_{6,2}(x) = \frac{I + \frac{7}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^4}{I - \frac{1}{4}x^2}$$

olarak elde edilir.

$f(x) = x^2 + e^{x^2}$ kesin çözümü, $P_2(x)$ ve $r_{6,2}(x)$ nümerik çözümlerine ait sayısal değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 8: $f(x) = x^2 + e^{x^2}$, $P_2(x)$ ve $r_{6,2}(x)$ değerleri

x	$f(x) = x^2 + e^{x^2}$	$r_{6,2}(x)$	$P_2(x)$	Mutlak Hata $ x^2 + e^{x^2} - r_{6,2}(x) $	Mutlak Hata $ P_2(x) - r_{6,2}(x) $
0.1	1.020050167	1.020050167	1.020050167	0.000000000	0.000000000
0.2	1.080810774	1.080810775	1.080810774	0.000000001	0.000000001
0.3	1.184174284	1.184174297	1.184174234	0.000000013	0.000000063
0.4	1.333510871	1.333511111	1.333509974	0.000000240	0.000001137
0.5	1.534025417	1.534027778	1.534016927	0.000002361	0.000010851
0.6	1.793329415	1.793345055	1.793275840	0.000015640	0.000069215
0.7	2.122316220	2.122395489	2.122060167	0.000079269	0.000335322
0.8	2.536480879	2.536812699	2.535481174	0.000331820	0.001331525
0.9	3.057907987	3.059113950	3.054559634	0.001205963	0.004554316
1	3.718281828	3.722222222	3.708333333	0.003940394	0.013888889



Şekil 9: $f(x) = x^2 + e^{x^2}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{6,2}(x)$ Padé yaklaşımı

Varyasyonel iterasyonel yöntemi ile elde edilen,

$$Q_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{24}x^8$$

kuvvet serisinin [6,2] decereli Padé yaklaşımı hesaplanırsa

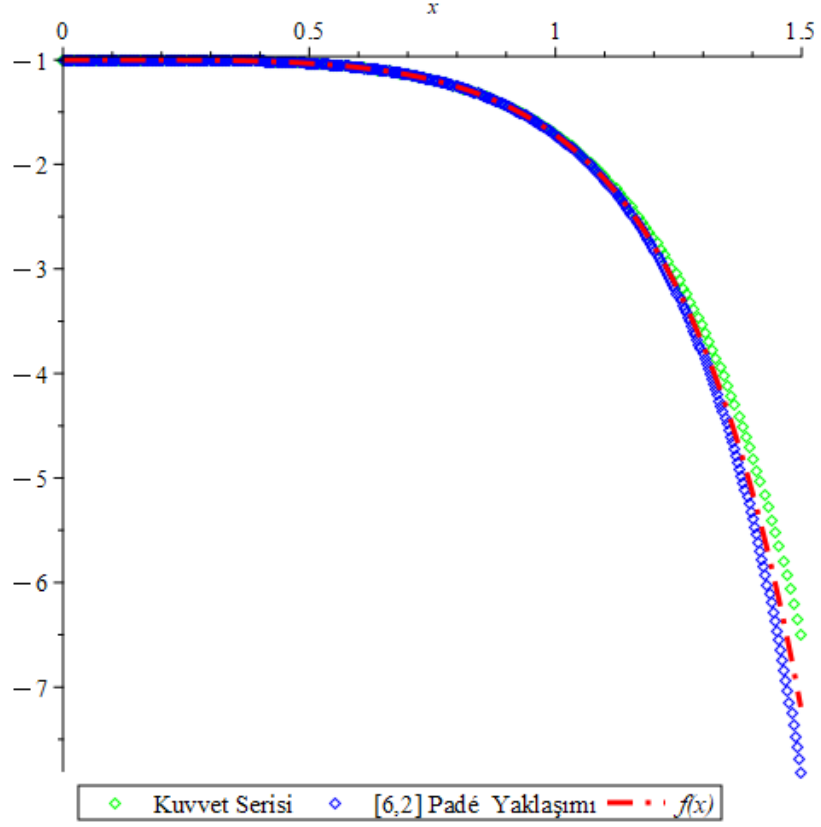
$$r_{6,2}(x) = \frac{-1 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{24}x^6}{1 - \frac{x^2}{4}}$$

olarak elde edilir.

$f(x) = x^2 - e^{x^2}$ kesin çözümü, $Q_2(x)$ ve $r_{6,2}(x)$ nümerik çözümlerine ait sayısal değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 9: $f(x) = x^2 - e^{x^2}$, $Q_2(x)$ ve $r_{6,2}(x)$ değerleri

x	$f(x) = x^2 - e^{x^2}$	$r_{6,2}(x)$	$Q_2(x)$	Mutlak Hata $ x^2 - e^{x^2} - r_{6,2}(x) $	Mutlak Hata $ Q_2(x) - r_{6,2}(x) $
0.1	-1.000050167	-1.000050167	-1.000050167	0.000000000	0.000000000
0.2	-1.000810774	-1.000810774	-1.000810774	0.000000000	0.000000000
0.3	-1.004174284	-1.004174297	-1.004174234	0.000000013	0.000000063
0.4	-1.013510871	-1.013511111	-1.013509974	0.000000240	0.000001137
0.5	-1.034025417	-1.034027778	-1.034016927	0.000002361	0.000010851
0.6	-1.073329415	-1.073345055	-1.073275840	0.000015640	0.000069215
0.7	-1.142316220	-1.142395489	-1.142060167	0.000079269	0.000335322
0.8	-1.256480879	-1.256812699	-1.255481174	0.000331820	0.001331525
0.9	-1.437907987	-1.439113950	-1.434559634	0.001205963	0.004554316
1	-1.718281828	-1.722222222	-1.708333333	0.003940394	0.013888889



Şekil 10: $f(x) = x^2 - e^{x^2}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{6,2}(x)$ Padé yaklaşımı

Varyasyonel iterasyonel yöntemi ile elde edilen,

$$P_2(x) = 1 + 2x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8$$

kuvvet serisinin [2,2] decereli Padé yaklaşımı hesaplanırsa

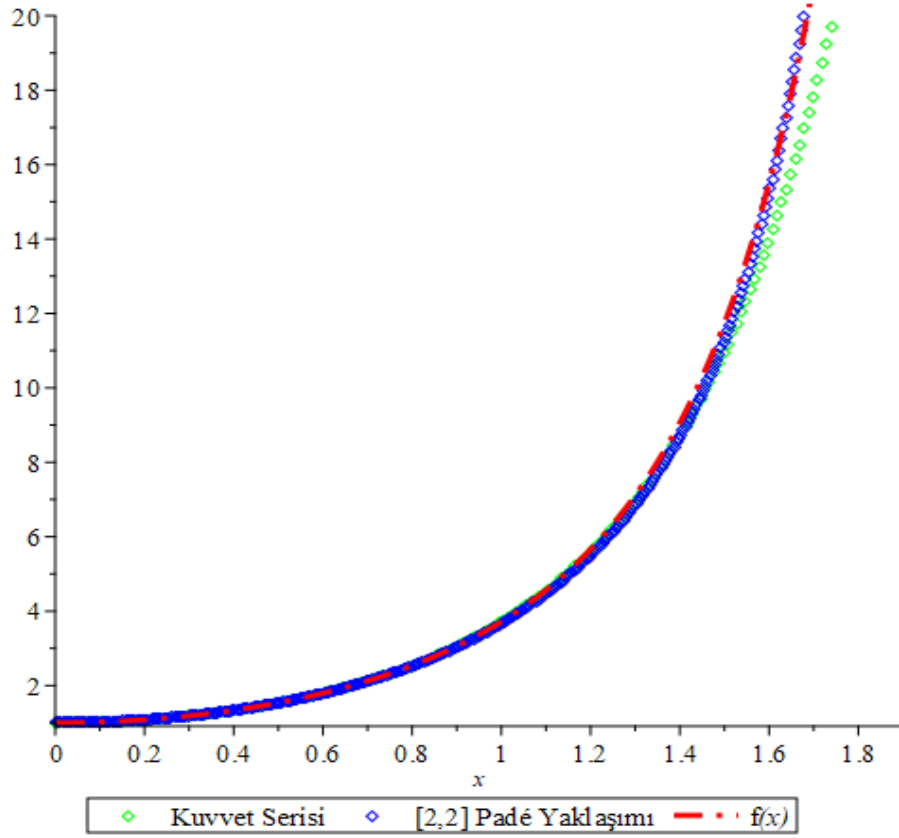
$$r_{2,2}(x) = \frac{1 + \frac{7x^2}{4}}{1 - \frac{x^2}{4}}$$

olarak elde edilir.

$f(x) = x^2 + e^{x^2}$ kesin çözümü, $P_2(x)$ ve $r_{2,2}(x)$ nümerik çözümlerine ait sayısal değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 10: $f(x) = x^2 + e^{x^2}$, $P_2(x)$ ve $r_{2,2}(x)$ değerleri

x	$f(x) = x^2 + e^{x^2}$	$r_{2,2}(x)$	$P_2(x)$	Mutlak Hata $ x^2 + e^{x^2} - r_{2,2}(x) $	Mutlak Hata $ P_2(x) - r_{2,2}(x) $
0.1	1.020050167	1.020050125	1.020050167	0.000000042	0.000000042
0.2	1.080810774	1.080808081	1.080810774	0.000002693	0.000002693
0.3	1.184174284	1.184143222	1.184174234	0.000031062	0.000031012
0.4	1.333510871	1.333333333	1.333509974	0.000177538	0.000176641
0.5	1.534025417	1.533333333	1.534016927	0.000692084	0.000683594
0.6	1.793329415	1.791208791	1.793275840	0.002120624	0.002067049
0.7	2.122316220	2.116809117	2.122060167	0.005507103	0.005251050
0.8	2.536480879	2.523809524	2.535481174	0.012671355	0.011671650
0.9	3.057907987	3.031347962	3.054559634	0.026560025	0.023211672
1	3.718281828	3.666666667	3.708333333	0.051615161	0.041666666



Şekil 11: $f(x) = x^2 + e^{x^2}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{2,2}(x)$ Padé yaklaşımı

Varyasyonel iterasyonel yöntemi ile elde edilen,

$$Q_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{24}x^8$$

kuvvet serisinin $[4,4]$ decereli Padé yaklaşımı hesaplanırsa

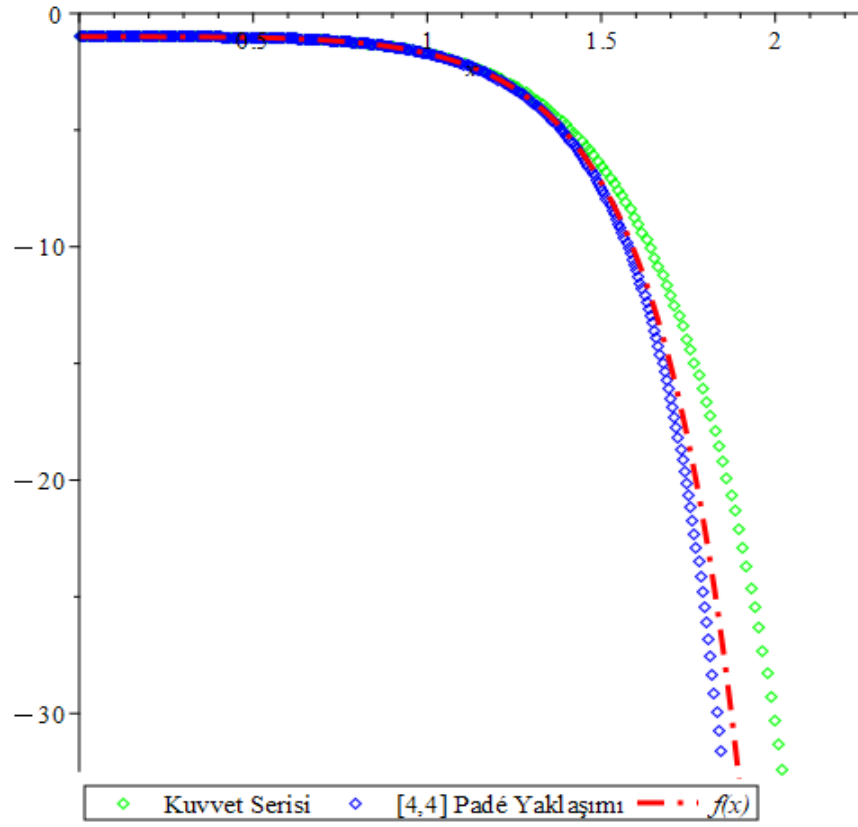
$$r_{4,4}(x) = \frac{-1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{19}{36}x^4}{1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{36}x^4}$$

olarak elde edilir.

$f(x) = x^2 - e^{x^2}$ kesin çözümü, $Q_2(x)$ ve $r_{4,4}(x)$ nümerik çözümlerine ait sayısal değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 11: $f(x) = x^2 - e^{x^2}$, $Q_2(x)$ ve $r_{4,4}(x)$ değerleri

x	$f(x) = x^2 - e^{x^2}$	$r_{4,4}(x)$	$Q_2(x)$	Mutlak Hata $ x^2 + e^{x^2} - r_{4,4}(x) $	Mutlak Hata $ Q_2(x) - r_{4,4}(x) $
0.1	-1.000050167	-1.000050167	-1.000050167	0.000000000	0.000000000
0.2	-1.000810774	-1.000810774	-1.000810774	0.000000000	0.000000000
0.3	-1.004174284	-1.004174289	-1.004174234	0.000000005	0.000000055
0.4	-1.013510871	-1.013510978	-1.013509974	0.000000107	0.000001004
0.5	-1.034025417	-1.034026465	-1.034016927	0.000001048	0.000009538
0.6	-1.073329415	-1.073336351	-1.073275840	0.000006936	0.000060511
0.7	-1.142316220	-1.142351310	-1.142060167	0.000035090	0.000291143
0.8	-1.256480879	-1.256627311	-1.255481174	0.000146432	0.001146137
0.9	-1.437907987	-1.438437636	-1.434559634	0.000529649	0.003878002
1	-1.718281828	-1.720000000	-1.708333333	0.001718172	0.011666667



Şekil 12: $f(x) = x^2 - e^{x^2}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{4,4}(x)$ Padé yaklaşımı

Uygulama 4.3

“Şimdi Emden-Fowler tipi doğrusal olmayan denklem sistemini inceliyoruz.

$$\begin{cases} u'' + \frac{3}{x}u' + uv + (x^2 + 4)u^5 = I, \\ v'' + \frac{4}{x}v' + uv - (4x^2 + 5)v^3 = I, \end{cases} \quad (4.13)$$

başlangıç koşullarıyla

$$\begin{aligned} u(0) &= I, & u'(0) &= 0 \\ v(0) &= I, & v'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

burada $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 4$.

Denklem (4.13) için düzeltme fonksiyonları

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= u_n(x) + \int_0^x \left(\frac{\xi(\xi^2 - x^2)}{2x^2} \right) \left(u_n''(\xi) + \frac{3}{\xi}u_n'(\xi) + u_n(\xi)v_n(\xi) + (\xi^2 + 4)u_n^5(\xi) - I \right) d\xi, \quad n \geq 0, \\ v_{n+1}(x) &= v_n(x) + \int_0^x \left(\frac{\xi(\xi^3 - x^3)}{3x^3} \right) \left(v_n''(\xi) + \frac{4}{\xi}v_n'(\xi) + u_n(\xi)v_n(\xi) - (4\xi^2 + 5)v_n^3(\xi) - I \right) d\xi, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (4.15)$$

Lagrange çarpanları kullandığımızda

$$\begin{aligned} \lambda_1(\xi) &= \frac{\xi(\xi^2 - x^2)}{2x^2}, \quad \alpha_1 = 3 \text{ için}, \\ \lambda_2(\xi) &= \frac{\xi(\xi^3 - x^3)}{3x^3}, \quad \alpha_2 = 4 \text{ için}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

Yukarıda denklem (2.15)'te verildiği gibi (Wazwaz A. , 2011).”

“Verilen başlangıç değerlerini göz önünde bulundurarak

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= I \\
v_0(x) &= I \\
u_1(x) &= I - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4, \\
v_1(x) &= I + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{7}x^4, \\
u_2(x) &= I - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 - \frac{365}{2688}x^6 + \frac{127}{8960}x^8 + \dots, \\
v_2(x) &= I + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{229}{4536}x^6 + \frac{871}{29568}x^8 + \dots, \\
u_3(x) &= I - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 - \frac{5}{16}x^6 + \frac{265295}{1161216}x^8 + \dots, \\
v_3(x) &= I + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 - \frac{30865}{3193344}x^8 + \dots, \\
u_4(x) &= I - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 - \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \dots, \\
v_4(x) &= I + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 + \dots, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Bu, Denklem (4.13)'nin aşağıdaki şekilde verilen kesin çözümünü verir.

$$(u(x), v(x)) = \left(\frac{I}{\sqrt{I+x^2}}, \sqrt{I+x^2} \right). \tag{4.18}$$

(Wazwaz A. , 2011).”

Varyasyonel iterasyonel yöntemi ile elde edilen,

$$P_3(x) = I + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 + \frac{7}{256}x^{10}$$

kuvvet serisinin [4,2] decereli Padé yaklaşımı hesaplanırsa

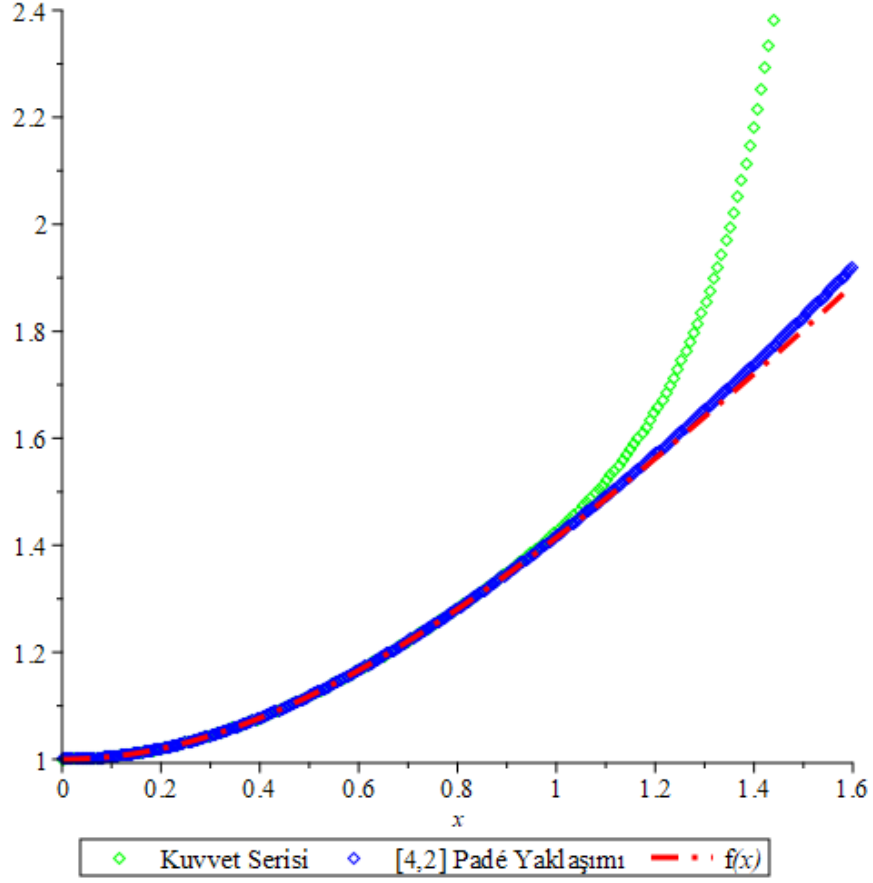
$$r_{4,2}(x) = \frac{I + x^2 + \frac{I}{8}x^4}{I + \frac{x^2}{2}}$$

olarak elde edilir.

$f(x) = \sqrt{x^2 + I}$ kesin çözümü, $P_3(x)$ ve $r_{4,2}(x)$ nümerik çözümlerine ait sayısal değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 12: $f(x) = \sqrt{x^2 + I}$, $P_3(x)$ ve $r_{4,2}(x)$ değerleri

x	$f(x) = \sqrt{x^2 + I}$	$r_{4,2}(x)$	$P_3(x)$	Mutlak Hata $ \sqrt{x^2 + I} - r_{4,2}(x) $	Mutlak Hata $ P_3(x) - r_{4,2}(x) $
1	1.414213562	1.416666667	1.425781250	0.015776062	0.009114583
1.1	1.486606875	1.490973520	1.519898769	0.004366645	0.028925249
1.2	1.562049935	1.569302326	1.648767693	0.007252391	0.079465367
1.3	1.640121947	1.651497290	1.847975062	0.011375343	0.196477772
1.4	1.720465053	1.737474747	2.184846597	0.017009694	0.447371850
1.5	1.802775638	1.827205882	2.779750824	0.024430244	0.952544942
1.6	1.886796226	1.920701754	3.838131508	0.033905528	1.917429754
1.7	1.972308292	2.018001022	5.697163632	0.045692730	3.679162610
1.8	2.059126028	2.119160305	8.891888222	0.060034277	6.772727917
1.9	2.147091055	2.224246881	14.24678505	0.077155826	12.022538169
2	2.236067977	2.333333333	23.	0.097265356	20.666666667



Şekil 13: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{4,2}(x)$ Padé yaklaşımı

Varyasyonel iterasyonel yöntemi ile elde edilen,

$$Q_3(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 - \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 - \frac{63}{256}x^{10}$$

kuvvet serisinin [4,2] decereli Padé yaklaşımı hesaplanırsa

$$r_{4,2}(x) = \frac{1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{24}x^4}{1 + \frac{5x^2}{6}}$$

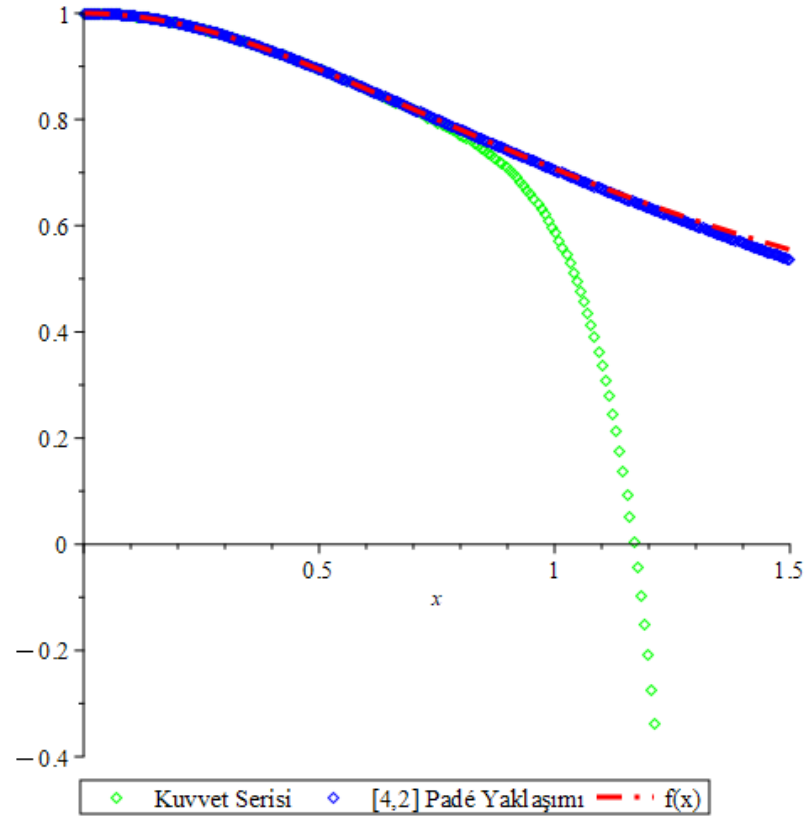
olarak elde edilir.

$f(x) = \frac{I}{\sqrt{x^2 + I}}$ kesin çözümü, $Q_3(x)$ ve $r_{4,2}(x)$ nümerik çözümlerine ait sayısal

değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 13: $f(x) = \frac{I}{\sqrt{x^2 + I}}$, $Q_3(x)$ ve $r_{4,2}(x)$ değerleri

x	$f(x) = \frac{I}{\sqrt{x^2 + I}}$	$r_{4,2}(x)$	$Q_3(x)$	Mutlak Hata $\left \frac{I}{\sqrt{x^2 + I}} - r_{4,2}(x) \right $	Mutlak Hata $ Q_3(x) - r_{4,2}(x) $
1	0.7071067810	0.7045454545	0.5898437500	0.0025613265	0.1147017045
1.1	0.6726727939	0.6683796683	0.3382584442	0.0042931256	0.3301212241
1.2	0.6401843997	0.6334545455	-0.223536435	0.0067298542	0.8569909805
1.3	0.6097107607	0.5997214535	-1.444437944	0.0099893072	2.0441593975
1.4	0.5812381939	0.5670632913	-3.975395575	0.0141749026	4.5424588663
1.5	0.5547001961	0.5353260870	-8.969234469	0.0193741091	9.5045605560
1.6	0.5299989401	0.5043404257	-18.37952277	0.0256585144	18.88386320
1.7	0.5070201266	0.4739352080	-35.39396594	0.0330849186	35.86790115
1.8	0.4856429312	0.4439459459	-65.04648220	0.0416969853	65.49042815
1.9	0.4657464329	0.4142193346	-115.0620788	0.0515270983	115.4762981
2	0.4472135954	0.3846153846	-197	0.0625982108	197.3846154



Şekil 14: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{4,2}(x)$ Padé yaklaşımı

Varyasyonel iterasyonel yöntemi ile elde edilen,

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 + \frac{7}{256}x^{10} - \frac{21}{1024}x^{12}$$

kuvvet serisinin [4,2] decereli Padé yaklaşımı hesaplanırsa

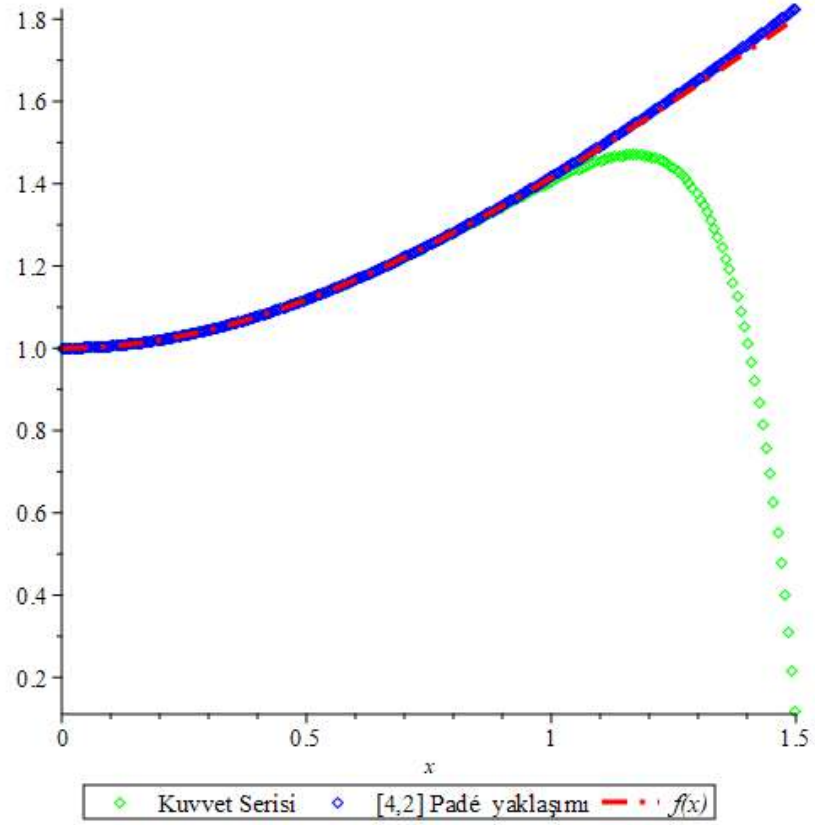
$$r_{4,2}(x) = \frac{1 + x^2 + \frac{1}{8}x^4}{1 + \frac{x^2}{2}}$$

olarak elde edilir.

$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ kesin çözümü, $P_3(x)$ ve $r_{4,2}(x)$ nümerik çözümlerine ait sayısal değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 14: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $P_3(x)$ ve $r_{4,2}(x)$ değerleri

x	$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$	$r_{4,2}(x)$	$P_3(x)$	Mutlak Hata $ \sqrt{x^2 + 1} - r_{4,2}(x) $	Mutlak Hata $ P_3(x) - r_{4,2}(x) $
1	1.414213562	1.416666667	1.405273438	0.002453105	0.011393229
1.1	1.486606875	1.490973520	1.455536468	0.004366645	0.035437052
1.2	1.562049935	1.569302326	1.465917977	0.007252391	0.103384349
1.3	1.640121947	1.651497290	1.370182301	0.011375343	0.281314989
1.4	1.720465053	1.737474747	1.022178472	0.017009694	0.715296275
1.5	1.802775638	1.827205882	0.118937254	0.024430244	1.708268628
1.6	1.886796226	1.920701754	-1.934304538	0.033905528	3.855006292
1.7	1.972308292	2.018001022	-6.251143968	0.045692730	8.269144990
1.8	2.059126028	2.119160305	-14.83219284	0.060034277	16.951353145
1.9	2.147091055	2.224246881	-31.14346231	0.077155826	33.367709191
2	2.236067977	2.333333333	-61	0.097265356	63.333333333



Şekil 15: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{4,2}(x)$ Padé yaklaşımı

Varyasyonel iterasyonel yöntemi ile elde edilen,

$$Q_3(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 - \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 - \frac{63}{256}x^{10} + \frac{231}{1024}x^{12}$$

kuvvet serisinin [4,2] decereli Padé yaklaşımı hesaplanırsa

$$r_{4,2}(x) = \frac{1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{24}x^4}{1 + \frac{5x^2}{6}}$$

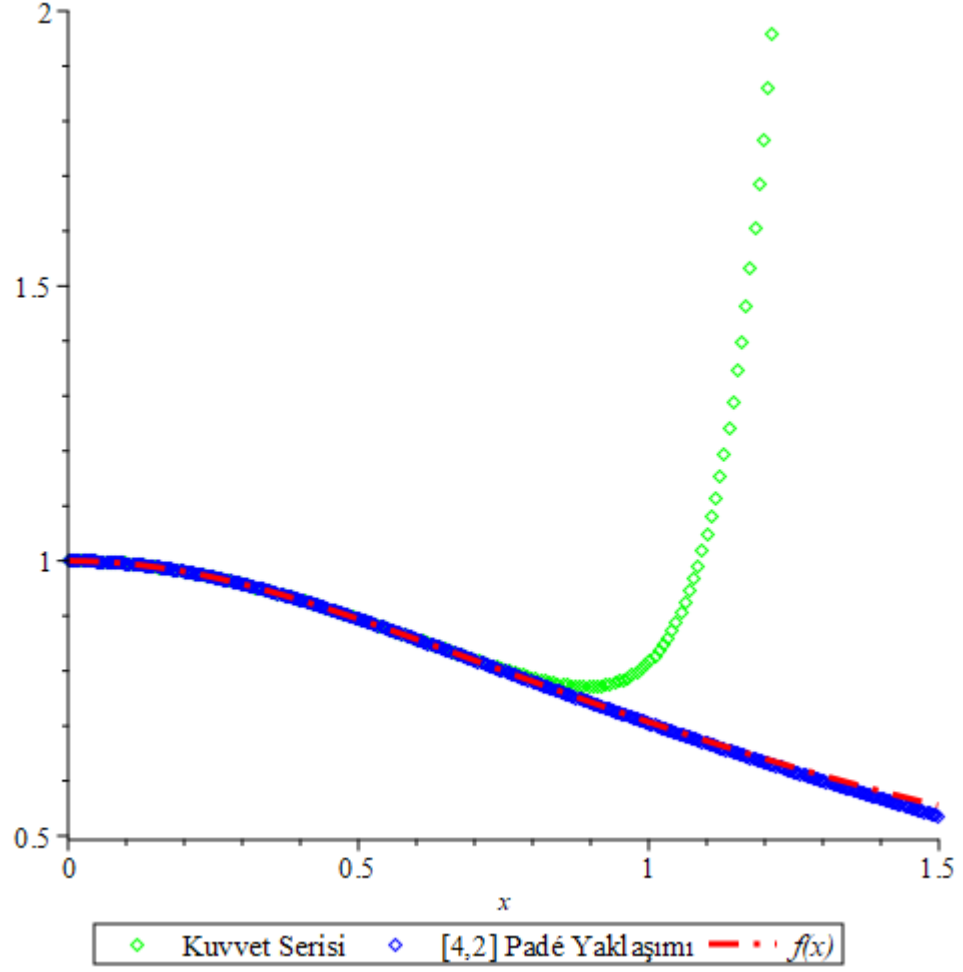
olarak elde edilir.

$f(x) = \frac{I}{\sqrt{x^2 + I}}$ kesin çözümü, $Q_3(x)$ ve $r_{4,2}(x)$ nümerik çözümlerine ait sayısal

değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 15: $f(x) = \frac{I}{\sqrt{x^2 + I}}$, $Q_3(x)$ ve $r_{4,2}(x)$ değerleri

x	$f(x) = \frac{I}{\sqrt{x^2 + I}}$	$r_{4,2}(x)$	$Q_3(x)$	Mutlak Hata $\left \frac{I}{\sqrt{x^2 + I}} - r_{4,2}(x) \right $	Mutlak Hata $ Q_3(x) - r_{4,2}(x) $
1	0.7071067810	0.7045454545	0.8154296875	0.0025613265	0.110884233
1.1	0.6726727939	0.6683796683	1.046243752	0.0042931256	0.3778640837
1.2	0.6401843997	0.6334545455	1.787810443	0.0067298542	1.1543558975
1.3	0.6097107607	0.5997214535	3.811282430	0.0099893072	3.2115609765
1.4	0.5812381939	0.5670632913	8.813953795	0.0141749026	8.2468905037
1.5	0.5547001961	0.5353260870	20.29971480	0.0193741091	19.764388713
1.6	0.5299989401	0.5043404257	45.11727373	0.0256585144	44.61293330
1.7	0.5070201266	0.4739352080	96.03741766	0.0330849186	95.56348245
1.8	0.4856429312	0.4439459459	195.9184094	0.0416969853	195.4744634
1.9	0.4657464329	0.4142193346	384.2306422	0.0515270983	383.8164229
2	0.4472135954	0.3846153846	727.	0.0625982108	726.6153846



Şekil 16: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{4,2}(x)$ Padé yaklaşımı

Varyasyonel iterasyonel yöntemi ile elde edilen,

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 + \frac{7}{256}x^{10} - \frac{21}{1024}x^{12} + \frac{33}{2048}x^{14}$$

kuvvet serisinin [8,4] decereli Padé yaklaşımı hesaplanırsa

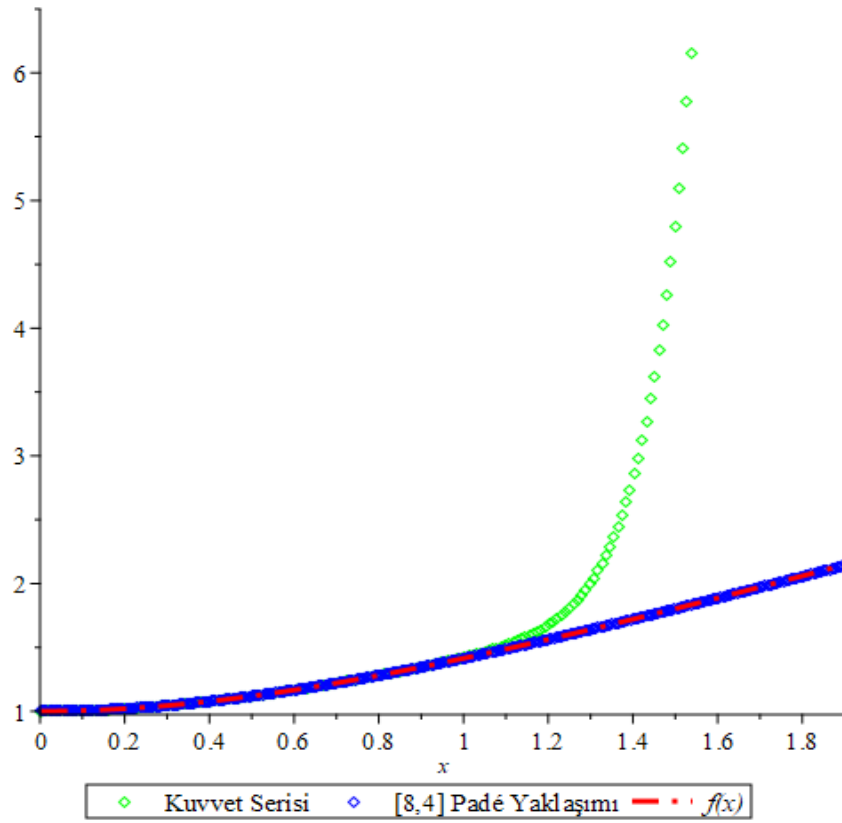
$$r_{8,4}(x) = \frac{1 + \frac{5}{3}x^2 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{16}x^6 - \frac{1}{384}x^8}{1 + \frac{7x^2}{6} + \frac{7}{24}x^4}$$

olarak elde edilir.

$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ kesin çözümü, $P_3(x)$ ve $r_{8,4}(x)$ nümerik çözümlerine ait sayısal değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 16: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $P_3(x)$ ve $r_{8,4}(x)$ değerleri

x	$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$	$r_{8,4}(x)$	$P_3(x)$	Mutlak Hata $ \sqrt{x^2 + 1} - r_{8,4}(x) $	Mutlak Hata $ P_3(x) - r_{8,4}(x) $
1	1.414213562	1.414194915	1.421386719	0.000018647	0.007191804
1.1	1.486606875	1.486556579	1.516726627	0.000050296	0.030170048
1.2	1.562049935	1.561929664	1.672799370	0.000120271	0.110869706
1.3	1.640121947	1.639861506	2.004622832	0.000260441	0.364761326
1.4	1.720465053	1.719945844	2.812687385	0.000519209	1.092741541
1.5	1.802775638	1.801810155	4.822875530	0.000965483	3.021065375
1.6	1.886796226	1.885103969	9.676538252	0.001692257	7.791434283
1.7	1.972308292	1.969488606	20.88004879	0.002819686	18.91056018
1.8	2.059126028	2.054628511	45.56253924	0.004497517	43.50791073
1.9	2.147091055	2.140184169	97.60273219	0.006906886	95.46254802
2	2.236067977	2.225806452	203	0.010261525	200.7741935



Şekil 17: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{8,4}(x)$ Padé yaklaşımı

Varyasyonel iterasyonel yöntemi ile elde edilen,

$$Q_3(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 - \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 - \frac{63}{256}x^{10} + \frac{231}{1024}x^{12} - \frac{429}{2048}x^{14}$$

kuvvet serisinin [8,4] decereli Padé yaklaşımı hesaplanırsa

$$r_{8,4}(x) = \frac{1 + x^2 + \frac{3}{20}x^4 - \frac{1}{80}x^6 + \frac{1}{640}x^8}{1 + \frac{3x^2}{2} + \frac{21}{40}x^4}$$

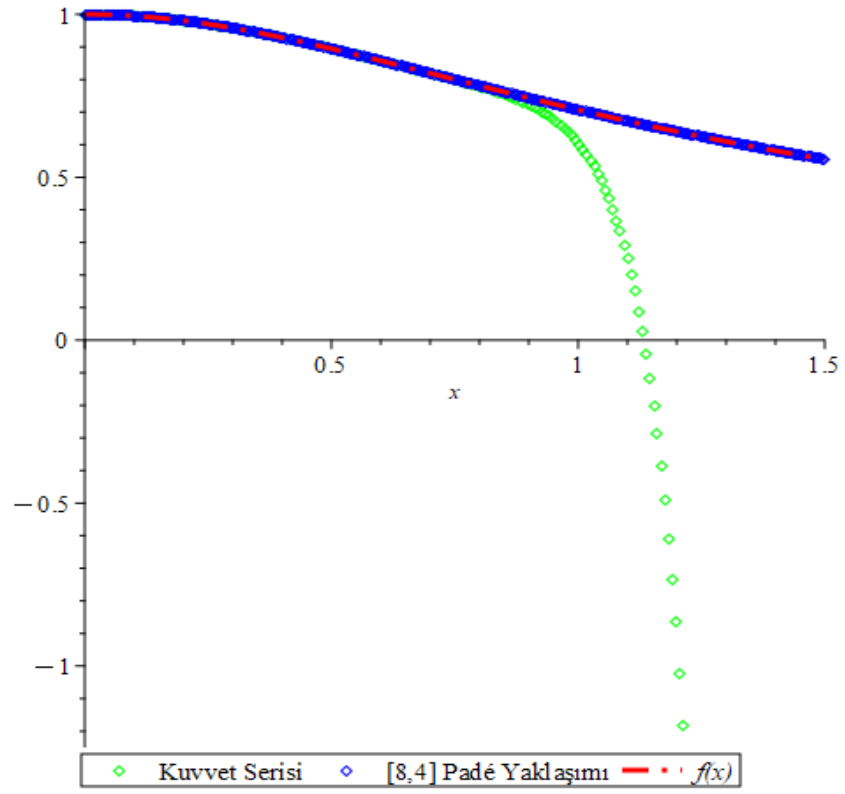
olarak elde edilir.

$f(x) = \frac{I}{\sqrt{x^2 + I}}$ kesin çözümü, $Q_3(x)$ ve $r_{8,4}(x)$ nümerik çözümlerine ait sayısal

değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 17: $f(x) = \frac{I}{\sqrt{x^2 + I}}$, $Q_3(x)$ ve $r_{8,4}(x)$ değerleri

x	$f(x) = \frac{I}{\sqrt{x^2 + I}}$	$r_{8,4}(x)$	$Q_3(x)$	Mutlak Hata $\left \frac{I}{\sqrt{x^2 + I}} - r_{8,4}(x) \right $	Mutlak Hata $ Q_3(x) - r_{8,4}(x) $
1	0.7071067810	0.7071280992	0.6059570312	0.0000213182	0.1011710680
1.1	0.6726727939	0.6727270141	0.2507716885	0.0000542202	0.4219553256
1.2	0.6401843997	0.6403069368	-0.901647670	0.0001225371	1.5419546068
1.3	0.6097107607	0.6099621917	-4.436444472	0.0002514310	5.0464061637
1.4	0.5812381939	0.5817144667	-14.46266208	0.0004762728	15.04437655
1.5	0.5547001961	0.5555440806	-40.85148279	0.0008438845	41.40702687
1.6	0.5299989401	0.5314122657	-105.8236826	0.0014133256	106.3550949
1.7	0.5070201266	0.5092764111	-256.6680882	0.0022562845	257.1773646
1.8	0.4856429312	0.4891000528	-589.2131077	0.0034571216	589.7031605
1.9	0.4657464329	0.4708591017	-1289.469886	0.0051126688	1289.880648
2	0.4472135954	0.4545454545	-2705.	0.0073318590	2705.454545



Şekil 18: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ fonksiyonu, kuvvet serisi ve $r_{8,4}(x)$ Padé yaklaşımı

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada varyasyonel iterasyon metodu (VİM) ile lineer ve lineer olmayan Lane- Emden ve Emden-Fowler denklemlerinin çözümleri araştırılmıştır. Varyasyonel iterasyon metoduna ait seri çözümlere Padé yaklaşımı uygulanmıştır. Bulunan bu sonuçlara, Padé yaklaşımı hata analiz tabloları verilerek gerçek çözümleri ile karşılaştırma yapılması sağ-lanmıştır. Tablolar incelendiğinde birbirine çok yakın sonuçlar elde edildiği ve bu metodun gerçek çözüme yaklaşık bir çözüm olduğu gözlemlenmiştir.

Birinci, ikinci ve üçüncü uygulamada tek değişkenli Padé yaklaşımlarının farklı değerleri ile varyasyonel iterasyon metodu (VİM)'i ile elde edilen farklı kuvvet serileri arasında yapıldı. Bu karşılaştırma sonucunda, padé yaklaşımlarının varyasyonel iterasyon metodu (VİM)'den daha iyi yaklaşım sergilediği ve tam çözümle daha uyumlu olduğu görüldü.

Üç farklı uygulama üzerinden yapılan karşılaştırmalar sonucunda Padé yaklaşımlarının VİM yöntemine kıyasla daha uyumlu ve doğru sonuçlar verdiği ve VİM yöntemine göre daha başarılı nümerik performans sergilediği ve tam çözümle daha iyi örtüştüğü görülmüştür.

KAYNAKLAR

- Author(s). (2021). Padé Approximants, Their Properties, and Applications to Symmetry*,. *MDPI*.
- Baker, G. A.-M. (1996). Padé Approximants (2nd ed.). *Cambridge* .
- Boyce, W. E. (2017). Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. *Wiley*.
- Çelik, E. (2002). “Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin Nümerik Çözümü”,. *doktora tezi*.
- He, J. H. (1997). Variational iteration method – a kind of non-linear analytical technique: some examples.
- Hemeda, A. (2008). Application of He's variational iteration method for solving wave equation. *Applied Mathematics and Computation*,, s. 166-172.
- Turut, V. (2007). Çok değişkenli padé yaklaşımları ve uygulamaları”, *Yüksek Lisans Tezi*.
- Turut, V. (2010). Kesirli Diferensiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri. *Doktora Tezi*.
- Wang, S. &. (2007). Variational iteration method for integro-differential equations. *Physics Letters A*, s. 188-191.
- Wazwaz, A. (2011). The variational iteration method for solving systems of equations of Emden–Fowler type,. *International Journal of Computer Mathematics*, .
- Wazwaz, A. M. (2008). The variational iteration method for solving nonlinear Schrödinger equations with cubic nonlinearity. *Journal of Computational and Applied Mathematics*,, s. 136-144.
- Wazwaz, A.-M. (2002). Partial differential equations: Methods and applications. *Balkema Publishers*.
- Yusufoğlu, E. (2008). Solutions of the Klein–Gordon equation by variational iteration method. *Chaos, Solitons & Fractals*,, s. 1193-1197.