



T.C.

**AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



T.C.

**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

**EN KÜÇÜK KARELER B-SPLİNE SONLU ELEMANLAR
YÖNTEMİNİN DİFERENSİYEL PROBLEMLERİNE
UYGULAMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

REBAZ HADI HAMA AMEEN

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN

Ortak Danışman

Doç. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKÇI

AKSARAY,2016



T.C.

**AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



T.C.

**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

**EN KÜÇÜK KARELER B-SPLİNE SONLU ELEMANLAR
YÖNTEMİNİN DİFERENSİYEL PROBLEMLERİNE
UYGULAMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

REBAZ HADI HAMA AMEEN

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN

Ortak Danışman

Doç. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKÇI

AKSARAY,2016

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ONAY BELGESİ

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 142309802 numaralı Tezli Yüksek Lisans öğrencisi, "REBAZ HADI HAMA AMEEN", ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "EN KÜÇÜK KARELER B-SPLİNE SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİNİN DİFERENSİYEL PROBLEMLERİNE UYGULAMASI" başlıklı tezini, aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ



Jüri Üyesi: Doç. Dr. Adem Cengiz ÇEVİKEL
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ



Jüri Üyesi: Doç. Dr. Halis BİLGİL
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ



Teslim Tarihi: 07 Nisan 2016

Savunma Tarihi: 29 Nisan 2016

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ve bu eserleri her kullanışında alıntı yaparak yararlandığımı belirtir; bunu şerefimle doğrularım. Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.



REBAZ HADI HAMA AMEEN

İmza

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında RLW denkleminin nümerik çözümleri, en küçük kareler sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Taban fonksiyonu olarak kübik B-spline fonksiyonların kullanıldığı yöntemde problemin zaman ayrıştırması Crank-Nicolson yaklaşımı ile yapıldı. Bu sayede RLW denklemini, ardışık iki zaman adımını içeren bir tekrarlı bağıntı haline getirildi. Sunulan nümerik yöntem, iki farklı örnek ile test edildi. Elde edilen sonuçlar literatürde yer alan bazı çalışmalar ile karşılaştırıldı.

Nümerik yöntemin bilgisayar kodları MATLAB programı ile yazılmış ve grafik çizimlerinde Grapher programı kullanılmıştır.

TEŞEKKÜR

Eğitimime destekleyici bir çalışma ortamında devam etme şansı tanıyan Aksaray Üniversitesi Matematik Bölümü, personeline en derin şükranlarımı sunarım. (Babam Hadi, başta olmak üzere aileme ve arkadaşlarıma) ve özellikle danışmalarım; Yrd. Doç.Dr. Ali ŞAHİN ve Doç. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKÇI'ya teşekkür etmek isterim. Görüşmelerim esnasında değerli vakitlerini isteyerek paylaştıkları için çalışma sürecime katkı sunanlara da ayrıca teşekkür ederim.

REBAZ HADI HAMA AMEEN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	i
TEŞEKKÜR	ii
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
1.1 Oluşum Denklemi	1
1.2 Dalgalar	2
1.2.1 Dalga özellikleri ve çarpmaları	3
1.3 İlerleyen Dalga	4
1.4 Soliton	4
1.5 Soliter Dalga	4
2. RLW DENKLEMİ	5
2.1 Test Problemleri	6
3. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ	7
3.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi Nedir?	7
3.2 Ağırlıklı Kalanlar Yöntemi	8
3.2.1 Kolokeyşin yöntemi	9
3.2.2 Galerkin yöntemi	10
3.2.3 En küçük kareler yöntemi	10
3.2.4 Moment yöntemi	11
4. B-SPLINE FONKSİYONLAR	12
4.1 B-spline Fonksiyonlar	12
4.2 Farklı Dereceden B-spline Tanımı	14

5. RLW DENKLEMİ İÇİN KÜBİK B-SPLINE EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ.....	19
5.1 Kararlılık Analizi	35
5.2 Test Problemleri	35
5.2.1 Problem 1: Tek soliter dalga hareketi	35
5.2.2 Problem 2: Dalga undulasyonu	40
6. SONUÇLAR.....	45
KAYNAKÇA.....	46
ÖZGEÇMİŞ	51

ÖZET

Bu tez çalışmasının temel amacı, dalga teorisinde önemli bir yer tutan RLW denkleminin nümerik çözümlerinin elde edilmesidir. Bu amaç doğrultusunda, en küçük kareler yöntemi kullanılmıştır.

Dalga teorisine ilişkin bazı temel bilgiler ve tanımlar birinci bölümde verilmiş, RLW denkleminin ve ilgili test problemlerinin tanıtılması ise ikinci bölümde yapılmıştır. Sonlu elemanlar yöntemine ilişkin temel bazı bilgiler üçüncü bölümde sunulmuştur. Taban fonksiyonu olarak kullanılan B-spline fonksiyonların tanıtılması ise dördüncü bölümde yer almıştır. Nümerik yöntemin RLW denklemine uygulanması ise beşinci bölümde verilmiştir. Nümerik yöntemin uygulanışında, ilk olarak, Crank-Nicolson formülleri yardımıyla diferensiyel denklemin zaman ayrıştırması yapıldı. Daha sonra denklem sistemindeki lineer olmayan terimler lineerleştirildi. Konum ayrıştırması için problemin çözüm bölgesi eşit uzunluklu alt aralıklara bölündü. Yönteminin uygulanması ile ortaya çıkan matris denkleminin çözümleri için ise Thomas algoritması kullanıldı. Von-Neumann kararlılık analizi ile yöntemin kararlılığı incelendi. Kullanılan yöntem, farklı problemler üzerinde test edildi. Yöntemin doğruluğunun araştırılması için hata normları ve RLW denkleminin korunum sabitleri hesaplandı. Son olarak, elde edilen sonuçlar ile bir değerlendirme yapıldı.

Anahtar Kelimeler: Dalga, RLW, Solitary, En küçük kareler, von-Neumann

ABSTRACT

The main objective of this thesis is to obtain the numerical solutions of the RLW equation which has quite importance in wave theory. For this objective, the least squares method is used. Some basic information about waves are given in the first chapter. RLW equation and its related test problems are introduced in the second chapter. Some introductory information about finite element method are presented in the third chapter. B-spline functions that are used as basis function are introduced in chapter four. Application of the numerical method for the RLW equation is constructed in the fifth chapter. In the application of the numerical method, firstly, the time discretization of the equation system is achieved by the help of Crank-Nicolson formulae. Then, the nonlinear terms in the equation are linearized. A uniform partition of the solution domain is considered for the space discretization. The Thomas algorithm is used for the solutions of the obtained matrix equations. von-Neumann analysis is employed for the stability of the method. The numerical method is tested on different test problems. Accuracy of the method is investigated by error norms and the conservative laws of RLW equation. Finally, a conclusion is given in the last chapter.

Keywords: Wave, RLW, Solitary, Least squares, von-Neumann

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 1. 1: Deniz Dalgaları	2
Şekil 1. 2: Soliter Dalga.....	4
Şekil 4. 1: Lineer B-spline.....	15
Şekil 4. 2: Kuadratik B-spline	15
Şekil 4. 3: Kübik B-spline	16
Şekil 4. 4: Kuartik B-spline	17
Şekil 4. 5: Kuintik B-spline	17
Şekil 5. 1: Tek soliter dalga ($c=0.1$)	37
Şekil 5. 2: Tek soliter dalga ($c=0.03$)	37
Şekil 5. 3: Tek soliter dalga için hata grafiği ($c=0.1$).....	38
Şekil 5. 4: Tek soliter dalga için hata grafiği ($c=0.03$).....	38
Şekil 5. 5: (a), (b), (c), (d), (e), (f) dalga undulasyonu $d=2$	41
Şekil 5. 6: (a), (b), (c), (d), (e), (f) dalga undulasyonu $d=5$	42

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 5. 1: Hata normları ve korunum kanunları ($c=0.1$, $h=0.125$, $\Delta t = 0.1$).....	36
Çizelge 5. 2: Hata normları ve korunum sabitleri ($c=0.03$, $h=0.125$, $\Delta t = 0.1$).....	36
Çizelge 5. 3: Hata normları ve korunum sabitlerinin karşılaştırması ($c=0.1$)	39
Çizelge 5. 4: Hata normları ve korunum sabitlerinin karşılaştırması ($c=0.03$)	39
Çizelge 5. 5: Dalga undulasyonu için korunum sabitleri.....	43

KISALTMALAR DİZİNİ

RLW	Regularized Long Wave denklemi
KdV	Korteweg-de Vries denklemi



1. GİRİŞ

1.1 Oluşum Denklemi

Bir sistemin t anındaki konumu $u(t)$ olmak üzere bu sistemin zaman içindeki oluşumunu ifade eden diferansiyel denkleme oluşum denklemi denir. Buna göre, bir sistemin oluşumu zaman değişkenine bağlı olarak aşağıdaki şekilde tarif edilebilir:

$$u' = f(u) \quad (1.1)$$

Burada f bir X vektör uzayı üzerinde tanımlı vektör alanıdır. Eğer X vektör uzayı sonlu boyutlu uzay ise oluşum denklemi adi diferansiyel denklemlerin bir sistemi olarak karşımıza çıkar. Diğer yandan kısmi diferansiyel denklemler sonsuz boyutlu uzayda bir oluşum denklemi olarak düşünülebilir [1].

(1.1) şeklindeki bir oluşum denkleminde t bağımsız değişkeni yer almadığından bu denkleme bir otonom denklem denir. Oluşum denklemlerinin otonom olmayan $u' = f(t, u)$ şeklindeki bir formu, t değişkeninin bağımlı değişken alınması ile

$$u' = f(t, u),$$

$$t' = 1.$$

şeklinde otonom denkleme dönüştürülebilir [2]. Benzer mantık ile yüksek mertebeden bir adi diferansiyel denklemin mertebesi, indirgeme yoluyla birinci mertebeye düşürülerek bir diferansiyel denklem sistemi elde edilebilir. Böylece $u'' = f(u)$ formundaki bir denlem

$$u' = v,$$

$$v' = f(u)$$

şeklinde bir oluşum denklemine dönüştürülmüş olur [3].

1.2 Dalgalar

Bir ortamda enerjinin yayılmasına dalga denir. Buradaki yayılma enerjinin bir konumdan diğerk bir konuma yer değıştirmesi şeklindedir. Dalganın türüne göre ortam farklılık arz eder. Örneğın su dalgaları için ilgili ortam su iken ses dalgaları için hava, ışık dalgaları için ise boşluktur. şekil 1.1 ile gerçerk bir su dalgası gösterilmektedir.



şekil 1.1: Deniz dalgaları

Dalgaların sınıflandırılmasında mekanik dalgalar ve elektromanyetik dalgalar kullanılabilir. Ses dalgaları ve su dalgaları mekanik dalgalara, ışık ve radyo dalgaları ise elektromanyetik dalgalara örnek olarak verilebilir.

Matematiksel olarak ise dalga, hareket eden bir fonksiyon olarak düşünölebilir. Dalga denklemi bir kısmi diferensiyel denklemdir ve bir boyutlu lineer dalga denklemi

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

şeklindedir. Burada, t zaman ve x konum değışkeni olmak üzere $u(x,t)$ fonksiyonu fiziksel olarak dalaganın genliğini temsil ederken, v ise x doğırltusundaki dalga hızını gösterir.

Matematiksel olarak, $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ terimi yüzey üzerindeki eğriliği, $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ terimi de parçacıkların ivmesini verir. Böylece (1.1) denkleminde bu terimlerin orantılı olduğu söylenebilir ve bu durum

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \propto \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

şeklinde gösterilir. f_1 ve f_2 keyfi fonksiyonlar olmak üzere (1.2) lineer dalga denkleminin

$$u(x,t) = f_1(x+vt) + f_2(x-vt)$$

formunda çözümlerinin varlığı kolayca gösterilebilir. $x+vt$ ve $x-vt$ ifadelerinde yer alan $+$ ve $-$ işaretleri dalganın x - eksenini boyunca sırasıyla sola ve sağa doğru ötelenmesini netice verir. Bu forma sahip dalgalara ilerleyen dalgalardan denir.

$f_1(x+vt)$ ile sola doğru ilerleyen ve $f_2(x-vt)$ ile de sağa doğru ilerleyen dalga gösterilmiştir.

1.2.1 Dalga özellikleri ve çarpmaları

Bir dalganın 4 temel özelliği vardır (bkz. şekil 1.2) :

- Genlik(Genişlik): Dalganın maksimum mesafesi
- Dalga boyu: Dalga üzerindeki herhangi bir noktanın bir sonraki dalgada üzerinde yine aynı noktaya olan uzaklığı
- Frekans: Birim zaman içerisinde üretilen dalga sayısı
- Dalga Hızı: Dalganın ilerleme hızı

4 farklı dalga çarpması vardır:

- Yansıma: Bir yüzeye dalganın bir açıyla çarpmasıdır. Sonuçta dalganın bir kısmı geri döner (yansır) bir kısmı ise ortamdan geçerek ilerler.
- Kırılma: Saydam madde gibi bir yüze çarpma sonucu ortamın kırılma indeksine bağlı olarak dalganın kırılmasıdır bu olayda dalganın hızı değişir.
- Kırınım: Dalganın bir engelle çarpması sonucu yönünün değişimidir.
- Girişim: İki dalganın birbiriyle çarpışmasıyla girişim ortaya çıkar.

1.3 İlerleyen Dalga

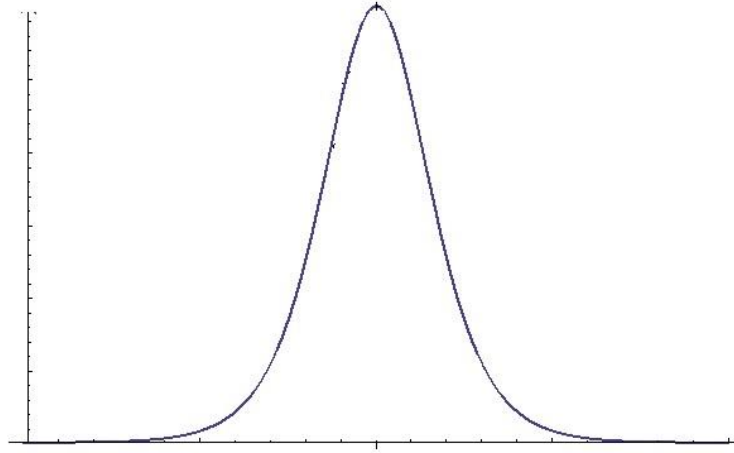
Bir dalgada, maksimum ve minimum genlikteki noktanın yayılımı dalganın ilerlediği ortama paralel ise bu dalgaya ilerleyen dalga denir. Bu dalgalar, matematiksel olarak $f(x \pm vt)$ formuna sahip dalgalardır. [4]

1.4 Soliton

Bir soliton, başka bir soliton ile girişim yaptığında özelliklerini koruyan lineer olmayan bir dalgadır. Soliton dalgalar kalıcı bir forma sahiptirler. Zıt yönlü hareket eden iki soliton, birbiri içinden kırılmadan geçebilir [5, 6].

1.5 Soliter Dalga

Bir soliter dalga, soliton özelliklerini sağlayan ve solitonumsu olarak da isimlendirilen dalgadır [7]. Aynı yönde hareket ederken soliter dalgaların çarpışmaları sonrasında dalga özelliklerinde bir değişme olmazken zıt yönlü çarpışmalarda dalgaların yapısı bozulur. Bu nedenle soliton olma özelliğini kaybederler. Soliter dalgalar, su yüzeyinin yükselmesi ve fiber optik ışık yoğunluğu da dahil olmak üzere birçok durumda ortaya çıkarlar [8, 9].



Şekil 1.2: Soliter dalga

2. RLW DENKLEMİ

Lineer olmayan oluşum denklemlerinin en önemli türlerinden birisi de birçok fiziksel olayı öngörmek için iyi modeller sağlayan RLW (Regularized Long Wave) denklemdir. RLW denklemi, 1966 yılında Peregrine tarafından ortaya konmuştur [10], 1895 yılında ortaya konulan Korteweg-de Vries (KdV) denkleminin çözümleri için çalışırken Peregrine'nin önerdiği RLW denklemi, KdV denklemine bir alternatif olarak formülize edilmiştir. Birçok disiplinde farklı olayların açıklanmasında kullanışlı olan RLW denkleminin analitik çözümlerinin sınırlılığı çözümler için nümerik yöntemleri önemli kılmaktadır [11]. Bu bağlamda birçok araştırmacı RLW denklemini çözmek için birbirinden farklı nümerik yöntemler önermişler ve uygun başlangıç ve sınır koşulları altında denklemin çözümlerini araştırmışlardır [12, 13].

RLW denkleminin sonlu farklar yöntemiyle [16, 17] sonlu elemanlar yöntemiyle [14, 15] ve spektral metodlarla [18] çözümleri literatürde mevcuttur.

Bir boyutlu RLW denklemi,

$$U_t + U_x + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxt} = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde verilir. Bu denklem için sınır koşulları

$$U(a, t) = \alpha_1, \quad U(b, t) = \alpha_2, \quad U_x(a, t) = \beta_1, \quad U_x(b, t) = \beta_2 \quad (2.2)$$

olacak şekilde ve başlangıç koşulu da

$$U(x, 0) = f(x) \quad (2.3)$$

biçiminde seçilebilir. Burada α_1, α_2 ve β_1, β_2 parametreleri pozitif parametrelerdir. RLW denklemi için kütle, momentum ve enerjiye karşılık gelen korunum kanunları

$$C_1 = \int_a^b U dx$$

$$C_2 = \int_a^b \left(U^2 + \mu (U_x)^2 \right) dx$$

$$C_3 = \int_a^b \left(U^3 + 3U^2 \right) dx$$

şeklinde verilir. Buradaki integraller, nümerik integral alma tekniklerinden birisi ile hesaplanabilir.

2.1 Test Problemleri

Problem 1: Tek soliter dalga çözümü

RLW denkleminin bilinen bir analitik çözümü

$$U(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2 \left(k [x - x_0 - vt] \right)$$

ile verilir. Bu problemde,

$$k = \sqrt{\frac{\varepsilon c}{4\mu v}}$$

şeklinde ve $3c$ genlikli dalga $v = 1 + \varepsilon c$ hızıyla pozitif x doğrultusu boyunca hareket etmektedir. Başlangıçta bu dalganın tepe noktası x_0 apsisli noktadır. Bu problemin başlangıç koşulu, analitik çözümde $t = 0$ alınarak bulunur. Sınır koşulları ise

$$U(a, t) = 0, \quad U(b, t) = 0, \quad U_x(a, t) = 0, \quad U_x(b, t) = 0 \quad (2.4)$$

olacak şekilde seçilebilir.

Problem 2: Dalga undulasyonu

RLW denkleminin bir diğer test problemi dalga undulasyonu diye ifade edilen problemidir. Bu problem

$$U(x, 0) = 0.5U_0 \left[1 - \tanh \left(\frac{x - x_c}{d} \right) \right]$$

başlangıç şartı kullanılarak elde edilir. Burada, U_0 parametresi $x = x_c$ merkezli su seviyesinde meydana gelen değişimin büyüklüğünü göstermektedir.

3. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

3.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi Nedir?

Kısmi diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini tahmin etmek için kullanılan nümerik tekniklerden birisi de sonlu elemanlar yöntemidir. Bu yöntem ayrıca integral denklemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunmasında da kullanılır. Çoğunlukla, matematiksel fizik ve mühendislik problemlerini çözmek için kullanılan bu yöntem ile ısı transferi, akışkan akışı, yapısal analiz, elektromanyetik potansiyel ve kitle taşımacılığı (mass transport) gibi alanlarda ortaya çıkan problemlerin çözümleri araştırılmıştır [19].

Karmaşık geometriye sahip bu tarz problemlerin analitik çözümlerini bulmak genellikle mümkün değildir. Bu nedenle, kabul edilebilir doğrulukta yaklaşık çözümlerin elde edilmesi önem arz eder. Sonlu elemanlar yöntemi bu noktada iyi bir alternatifi temsil eder.

Sonlu elemanlar yönteminin modern gelişimi 1940'lı yıllarda yapısal mühendislik alanında yapılan çalışmalara dayanır. İlk olarak, Hrennikoff 1941 yılında bu yöntemi geliştirmiştir [20]. Daha sonra, 1954 yılında Kelsey ve Argyris yaptıkları çalışma ile enerji prensibini kullanarak yöntemin gelişimine katkı sağlamışlardır [21, 22]. 1956 yılında Turner ve arkadaşları [23] iki boyutlu problemler üzerine çalışmışlardır. Çalışmalarında üçgensel elemanlar, dikdörtgen elemanlar ve kafes (truss) elemanları kullanmışlar ve yoğun (stiff) matrisleri elde etmişlerdir. Üçgensel ve dikdörtgensel eleman kullanarak analiz yapan bir diğer araştırmacı ise Clough'dur [24]. 1961 yılında Martin, üç boyutlu problemler için sonlu elemanlar yöntemini kullanmıştır [25]. Takip eden yıllarda Melosh [26], Argyris [27], üç boyutlu elemanlar ile çalışmışlardır.

Her geçen gün artan bir ilgi ile gelişen sonlu elemanlar yöntemi bugün özellikle mühendislik problemlerinin çözümünde önemli bir araçtır. Sonlu elemanlar yöntemi üzerinde daha geniş bir kaynak olarak Kardestuncer [28], Clough [29] çalışmalarına bakılabilir.

3.2 Ağırlıklı Kalanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar yöntemindeki gelişmelerden önce, diferensiyel problemlerin çözümünde kullanılan bir yöntem ağırlıklı kalanlar yöntemi (weighted residual method) olarak isimlendirilen yöntemdir. Uygulama açısından birbirine benzeyen bu iki yöntem arasındaki temel fark ağırlıklı kalanlar yönteminde kullanılan yaklaşım fonksiyonunun bütün bir çözüm bölgesi üzerinde tanımlı olmasıdır.

Bir diferensiyel problem üzerinde sonlu elemanlar yönteminin uygulanışı aşağıdaki şekildedir [48].

$L[u]$, u ün türevlerini içeren genel bir diferensiyel operatörü, $U_\mu[u]$ uygun sayıda sınır koşulu ve Ω ise sınırı $\partial\Omega$ ile gösterilen çözüm bölgesi olmak üzere

$$L[u]=r(x), x \in \Omega \quad (3.1)$$

$$U_\mu[u]=\gamma_\mu, x \in \partial\Omega$$

sınır değer problemini dikkate alalım. Bu problemin çözümüne yapılacak yaklaşım,

$$u(x)=w(x, a_1, a_2, \dots, a_N) \quad (3.2)$$

şeklindeir. Burada $a_1, a_2, \dots, a_N$ bulunması gerekli olan parametrelerdir.

$$a=[a_1, a_2, \dots, a_N]$$

olarak alınırsa seçilecek uygun ψ_i taban fonksiyonları için yaklaşık çözüm

$$w(x, a)=\psi_0(x)+\sum_{i=1}^N a_i \psi_i(x)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu seçim, problemin sınır koşullarını da sağlayacak şekilde olmalıdır. Bu yaklaşık çözüm, diferensiyel denklemde yerine yazılırsa

$$E[x, a]=L[w(x, a)]-r(x)$$

rezidüsü bulunur. Bu rezidü, $w(x, a)$ yaklaşım fonksiyonunun diferensiyel denklemi sağlama ölçüsünü bize verir. Yapılan yaklaşımdaki ψ_i fonksiyonlarının sayısı olan N büyüdükçe $E[x, a]$ rezidüsünün de küçülmesi beklenir. Rezidü doğrudan sıfır olduğunda ise tam çözüm elde edilir. Rezidünün doğrudan sıfır olmasını sağlamak zor olduğundan sayısal yaklaşım yöntemlerinde $E[x, a]$ rezidüsünü mümkün olduğunca küçük yapacak yollar aranır. Sonlu elemanlar yönteminde bunun için rezidünün ağırlıklı integrali olan

$$(W_j, E[x, a])=0, j=1, 2, \dots, N$$

ifadesi sıfıra eşitlenir. Burada, $(W_j, E[x, a])$ ile

$$(W, E) = \int_{\Omega} W \cdot E dx \quad (3.3)$$

şeklinde bir iç çarpım kastedilir. W_j ise daha sonra belirtilecek olan bir ağırlık fonksiyonudur. Eğer $w(x, a)$ çözümü bir tam çözüm ise (3.3) ifadesi, ağırlık fonksiyonu nasıl seçilirse seçilsin sıfır olacaktır. Ağırlık fonksiyonlarının seçimi için değişik alternatifler vardır ve bu seçimlerin her birisi yaklaşık yöntem üzerinde farklı bir kritere karşılık gelir. Ağırlık fonksiyonları için bir seçim yapıldığında (3.3) iç çarpımı N bilinmeyenli bir cebirsel denklem sistemine dönüşür. Bu sistem uygun yöntemler kullanılarak çözülebilir. Buradan elde edilen çözümlerin, (3.2) denkleminde yerlerine yazılmasıyla da (3.1) ile verilen diferensiyel denklemin yaklaşık çözümü bulunmuş olur.

Ağırlık fonksiyonunun farklı seçimlerine göre ortaya çıkan bazı sonlu eleman yöntemleri aşağıda kısaca tanıtılmıştır.

3.2.1 Kolokeyşin yöntemi

$x_1, x_2, \dots, x_N$ noktaları, Ω bölgesinde N tane nokta olsunlar. Ağırlık fonksiyonu olarak dirac delta fonksiyonu seçilsin. Buna göre

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & -\varepsilon < x < \varepsilon \\ 0, & \text{Diğer durumlar} \end{cases}$$

olmak üzere $W(x_j)$ ağırlık fonksiyonu

$$W(x_j) = \delta(x - x_j) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & x_j - \varepsilon < x < \varepsilon + x_j \\ 0, & \text{Diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece, (3.3) ifadesi

$$\int_{\Omega} \delta(x - x_i) \cdot E[x, a] dx = 0$$

halini alır. Buradan dirac delta fonksiyonunun özelliği gereği

$$E[x_j, a] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

eşitliği elde edilir. Bu ise $E[x, a]$ rezidüsünün Ω bölgesinden seçilen N tane noktada sıfır olarak alınması demektir. N tane kolokeyşin noktasının seçimi keyfi olmakla beraber eşit uzaklıktaki noktaların seçilmesi yaygın kullanımdır. Kolokeyşin

yöntemi, sadece bölünme noktalarında hesaplama yaptığı için diğer yöntemlere göre hesaplama zamanındaki azalma nedeniyle ekonomik bir alternatifi temsil eder.

3.2.2 Galerkin yöntemi

Galerkin yöntemi, sonlu elemanlar yöntemleri içinde en çok kullanılan yöntemdir.

Bu yöntemin uygulanışında, (3.3) denklemindeki ağırlık fonksiyonları

$$W_j = \frac{\partial w(x, a)}{\partial a_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

şeklinde seçilir. Burada $w(x, a)$ fonksiyonu diferensiyel denklemin yaklaşık çözümüdür.

Böylece (3.3) ifadesi

$$\int_{\Omega} \psi_i(x) \cdot E[x, a] dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

halini alır. Buradan elde edilecek cebirsel denklem sisteminin çözülmesiyle de

$$a = [a_1, a_2, \dots, a_N]$$

bilinmeyenleri bulunmuş olur.

3.2.3 En küçük kareler yöntemi

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonları

$$W_j = \frac{\partial E[x, a]}{\partial a_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

olacak şekilde seçilir. Bu seçim $a_1, a_2, \dots, a_N$ bilinmeyenlerinin bulunması için N tane denklem elde edilmesine olanak sağlar. Ağırlık fonksiyonlarının bu şekildeki seçimi

$$(W, E) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} E[x, a]^2 dx = \text{minimum}$$

rezidüsünün minimum olmasına karşılık gelir. (W, E) yi minimum yapmak için gerekli koşullar ise

$$\frac{\partial WE}{\partial a_j} = \int_{\Omega} E[x, a] \frac{\partial E[x, a]}{\partial a_j} dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

olmasıdır.

3.2.4 Moment yöntemi

Uygulanışı itibariyle Galerkin yöntemine benzeyen bu yöntemde, $P_j(x)$ ler polinom olmak üzere, ağırlık fonksiyonları

$$W_j = P_j(x)$$

şeklinde seçilir. Böylece (3.3) ile verilen iç çarpım

$$\int_{\Omega} P_j(x) \cdot E[x, a] dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

formuna döner. Moment yönteminin Galerkin yönteminden farkı şu şekilde ifade edilebilir. Bu yöntemde rezidü ifadesi, seçilen fonksiyonlar ile ortogonal olacak şekilde düzenlenir ve bu işlem için seçilen fonksiyonlar Galerkin yönteminde olduğu gibi yaklaşım fonksiyonu ile aynı olmak zorunda değildir. Uygulamada, ortogonalleştirme işlemi yapıldığı taktirde, $W_j = x_j$ seçiminin daha iyi sonuçlar ürettiği de görülmüştür [42].

4. B-SPLINE FONKSİYONLAR

4.1 B-spline Fonksiyonlar

Çok sayıdaki veri noktalarına bir tek eğri ile yaklaşmak büyük kolaylıklar sağlasa da bazı hallerde bu durum büyük hatalara neden olabilir. Ayrıca bu amaçla kullanılan Newton ve Lagrange interpolasyon polinomlarının derecesi, nokta sayısı arttıkça artacağından, bu tür polinomlarla yapılacak işlemler zorlaşır. Bu gibi durumlarda, art arda gelen iki veri arasında, birinci, ikinci ya da üçüncü dereceden fonksiyonlarla yaklaşımın yapıldığı spline interpolasyon yöntemi kullanılabilir. Spline interpolasyonu, tanımlanan aralık üzerinde, birbirini örtmeyen sonlu sayıda alt aralıklara yardımıyla daha küçük dereceden polinom bulma esasına dayanır [43],[30].

Diferensiyel denklemin çözümüne yaklaşım yapmak için kullanılan $S(x)$ spline fonksiyonunun her bir $[x_{k-1}, x_k]$ aralığı üzerindeki parçası $S_k(x)$ ile diferensiyel denklemin tam çözümü de $y(x)$ ile gösterilsin. Bu durumda $S_k(x)$ fonksiyonunun sağlaması gereken temel iki koşul

- i. İnterpolasyon koşulu: $S_k(x_{k-1}) = y(x_{k-1})$ ve $S_k(x_k) = y(x_k)$
- ii. Süreklilik koşulu: $S'_k(x_k^-) = S'_k(x_k^+)$ yada $S'_k(x_k) = S'_{k+1}(x_k)$

şeklindeir. Bunun dışında, spline fonksiyonların sahip olduğu diğer bazı özellikler ise şu şekilde sıralanabilir:

1. Spline fonksiyonlar düzgün fonksiyonlardır.
2. Spline fonksiyonlar uygun baza sahip olan sonlu boyutlu lineer uzaylardır.
3. Hesaplama yapma açısından spline fonksiyonlar kullanışlıdır.
4. Spline fonksiyonların hem türevleri hem de integralleri yine bir spline fonksiyondur.
5. Çözüm bölgesi üzerinde sürekli her fonksiyon, m. dereceden bir spline fonksiyon ile temsil edilebilir
6. Küçük dereceden spline fonksiyonlar çok esnektirler ve polinomlardaki gibi salınım yapmazlar.

B-spline fonksiyonlar, minimal desteğe sahip yine bir spline fonksiyondur. Belirli derecede ve düzgünlükteki her spline fonksiyon aynı derece ve düzgünlükteki B-spline fonksiyonların bir lineer kombinasyonu ile temsil edilebilir [44]. Bu nedenle de B-spline fonksiyonlar, spline fonksiyonlar için bir taban oluştururlar. Aynı zamanda bir B-spline fonksiyonu Bézier eğrilerinin de bir genelleştirmesidir. B-spline terimi, ilk defa basis spline kelimesinin kısaltması olarak [45] tarafından kullanılmıştır.

B-spline fonksiyonların tanımlanması bir kaç yolla yapılabilir. [44] tarafından verilen aşağıdaki türetme yöntemi literatürde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu yöntemeye göre, 0. dereceden B-spline fonksiyonu,

$$\phi_i^0 = \begin{cases} 1, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Bu adım fonksiyonunun kullanılmasıyla daha yüksek dereceden (k.derece) B-spline fonksiyonlar ardışık olarak, [31]

$$\phi_i^k(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} \phi_i^{k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} \phi_{i+1}^{k-1}(x)$$

$$k=1,2, \dots, i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

formülüyle hesaplanır. B-spline fonksiyonların, $[x_0, x_N]$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir taban olduğu [46] tarafından ifade edilmiştir. Yukarıdaki tanımlamadan da görüldüğü gibi B-spline fonksiyonlar, eşit uzunluklu alt aralıklara üzerinde tanımlanabileceği gibi çözüm bölgesi üzerinde eşit dağıtılmamış noktalar üzerinde de tanımlanabilir. B-spline fonksiyonların, geometrik olarak değişen uzunluğa sahip alt aralıklar üzerindeki tanımları için [47] referansına bakılabilir. Pek çok önemli özelliğinden dolayı B-spline fonksiyonlar diferensiyel problemlerin çözümünde etkin rol almaktadır. Bu özelliklerinden bazıları şu şekilde özetlenebilir: k. dereceden B-spline fonksiyonu ϕ^k olmak üzere

- i. Pozitif olma ve yerel destek: ϕ^k fonksiyonu $k + 1$ tane ardışık alt aralık üzerinde pozitifdir bu ardışık aralıkların dışında ise sıfırdır.
- ii. Düzgünlük: ϕ^k fonksiyonunun $(k - 1)$. mertebeye kadar türevleri süreklidir. k . mertebeden türevi ise bölünme noktalarında süreksizdir.
- iii. Parçalı polinom yapısı: ϕ^k fonksiyonu $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında parçalı polinomdur.
- iv. Simetri: ϕ^k fonksiyonu simetriktr.
- v. Monotonluk: ϕ^k fonksiyonu tanımlı olduğu aralığın yarısında monoton artan diğer yarısında ise monoton azalandır.

4.2 Farklı Dereceden B-spline Tanımı

B-spline fonksiyonların lineer, kuadratik, kübik, kuartik, ve kuintik gibi farklı dereceden ifadeleri bu kısımda verilecektir.

$[a, b]$ aralığını

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

ve

$$h = x_{i+1} - x_i, i = 0, 1, \dots, N-1$$

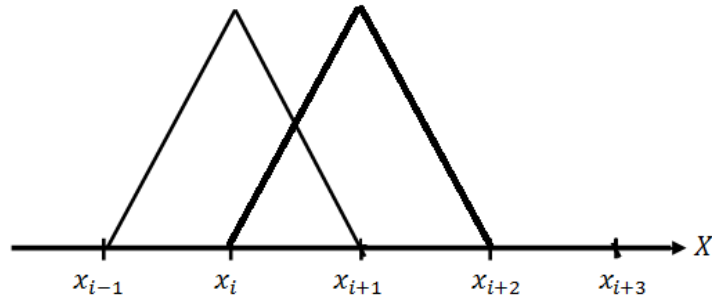
olacak şekilde alt aralıklara bölelim. $[a, b]$ aralığının bu parçalanması üzerinde üzerinde B-spline fonksiyonların ifadeleri için farklı yaklaşımlar olmakla birlikte deBoor tarafından verilen tekrarlı bağıntı ile farklı dereceden B-spline fonksiyonlar türetilir [48].

Lineer B-spline fonksiyonlar

x_m noktaları bölünme noktaları olmak üzere $[x_m, x_{m+2}]$ aralığında bir lineer B-spline fonksiyonu

$$\phi_m^1(x) = \frac{1}{h} \begin{cases} (x - x_m), & x \in [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x), & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [38]. Şekil 4.1.ile gösterilen lineer B-spline fonksiyonlarının $\{\phi_0, \dots, \phi_N\}$ kümesi $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar için bir taban oluşturur.



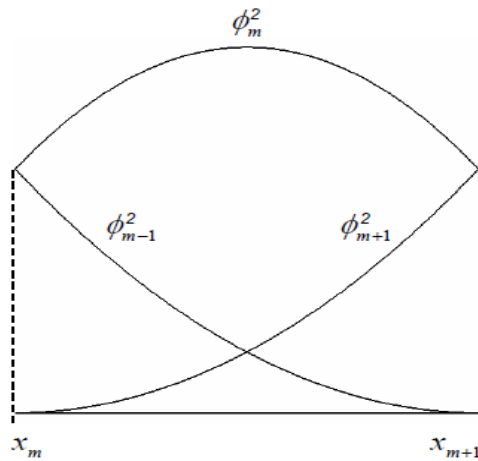
Şekil 4.1: Lineer B-spline

Kuadratik B-spline fonksiyonlar

Bir kuadratik B-spline fonksiyon ikinci dereceden parçalı polinomdur.

$$\phi_m^2(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2 + 3(x_m - x)^2 & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^2, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan kuadratik B-spline fonksiyonların $\{\phi_{-1}, \dots, \phi_N\}$ kümesi $[a, b]$ aralığı üzerinde bir taban oluşturur. Bir kuadratik B-spline ardışık 3 aralığı örttüğünden her bir aralık üzerinde sıfırdan farklı ardışık 3 kuadratik B-spline vardır. Şekil 4.3. ile bu durum gösterilmiştir.



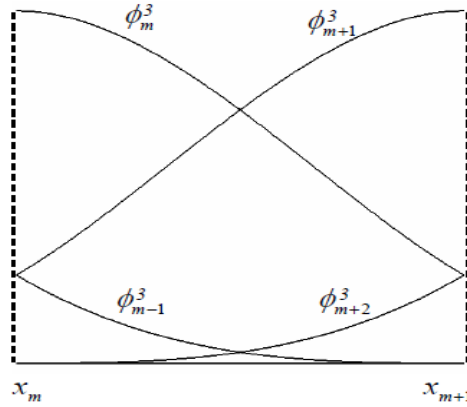
Şekil 4.2: Kuadratik B-spline

Kübik B-spline fonksiyonlar

Kübik B-spline fonksiyonların tanımı ,

$$\phi_m^3 = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m+2})^3 & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3 & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3 & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3 & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklindedir. Kübik B-spline fonksiyonlardan oluşan $\{\phi_{-1}, \dots, \phi_{N+1}\}$ kümesi $[x_0, x_N]$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir tabandır. Her bir kübik B-spline fonksiyon ardışık dört aralık üzerinde sıfırdan farklı değer alır. Dolayısı ile de her bir aralık ardışık dört kübik B-spline ile örtülür. Bu durum Şekil 4.3.ile gösterilmiştir.



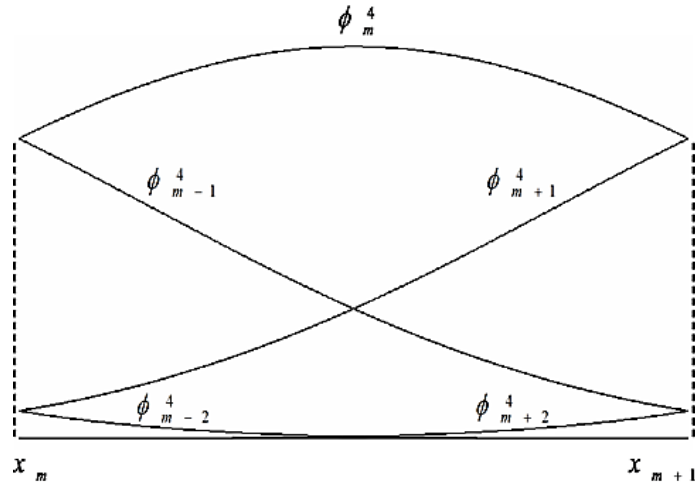
Şekil 4.3: Kübik B-spline

Kuartik B-spline fonksiyonlar

Dördüncü dereceden bir parçalı polinom olan kuartik B-spline fonksiyonlar,

$$\phi_m^4(x) = \frac{1}{h^4} \begin{cases} (x - x_{m-2})^4 & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-2})^4 & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-2})^4 + 10(x - x_{m-2})^4 & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+3} - x)^4 - 5(x_{m+2} - x)^4 & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+3} - x)^4 & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde verilir. $[x_0, x_N]$ aralığındaki fonksiyonlar için $\{\phi_{-2}, \phi_{-1}, \dots, \phi_{N+1}\}$ kümesi bir taban oluşturur. Şekil 4.4 ile bir aralık üzerinde sıfırdan farklı değer alan ardışık beş kuartik B-spline gösterilmiştir.



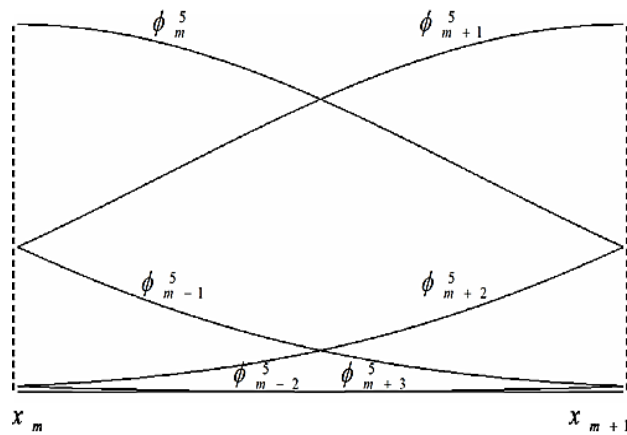
Şekil 4.4: Kuartik B-spline

Kuintik B-spline fonksiyonlar

Kuintik B-spline fonksiyonların bilinen yaygın tanımlaması,

$$\phi_m^5(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x-x_{m-3})^5 & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x-x_{m-3})^5 - 6(x-x_{m-2})^5 & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x-x_{m-3})^5 - 6(x-x_{m-2})^5 + 15(x-x_{m-1})^5 & [x_{m-1}, x_m] \\ (x-x_{m-3})^5 - 6(x-x_{m-2})^5 + 15(x-x_{m-1})^5 - 20(x-x_m)^5 & [x_m, x_{m+1}] \\ (x-x_{m-3})^5 - 6(x-x_{m-2})^5 + 15(x-x_{m-1})^5 - 20(x-x_m)^5 + 15(x-x_{m+1})^5 & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x-x_{m-3})^5 - 6(x-x_{m-2})^5 + 15(x-x_{m-1})^5 - 20(x-x_m)^5 + 15(x-x_{m+1})^5 - 6(x-x_{m+2})^5 & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklindedir. Her bir kuintik B-spline fonksiyonun ardışık 6 aralığı örttüğü ve bu nedenle de her bir aralığın ardışık 6 B-spline ile örtüldüğü Şekil 4.5 ile görülmektedir. $\{\phi_{-2}, \phi_{-1}, \dots, \phi_{N+2}\}$ kümesinin $[x_0, x_N]$ aralığındaki fonksiyonlar için bir taban olduğu ise [Prenter] referansında verilmiştir.



Şekil 4.5: Kuintik B-spline

Sektik B-spline fonksiyonlar

Yukarıda verilen tanımlamalara ek olarak daha yüksek dereceden B-spline fonksiyonlar da tanımlanabilir. Literatürde görece daha az yer bulan bu tarz B-spline fonksiyonlar için 6. dereceden parçalı polinomlarla ifade edilen sektik B-spline fonksiyonların tanımı,

$$\phi_m^6(x) = \frac{1}{h^6} \begin{cases} (x - x_{m-3})^6 & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-3})^6 - 7(x - x_{m-2})^6 & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-3})^6 - 7(x - x_{m-2})^6 + 21(x - x_{m-1})^6 & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-3})^6 - 7(x - x_{m-2})^6 + 21(x - x_{m-1})^6 - 35(x - x_m)^6 & [x_m, x_{m+1}] \\ (x - x_{m+4})^6 - 7(x - x_{m+3})^6 + 21(x - x_{m+2})^6 & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x - x_{m+4})^6 - 7(x - x_{m+3})^6 & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x - x_{m+4})^6 & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{bunun dışında} \end{cases}$$

şeklindedir ve $\{\phi_{-3}, \phi_{-1}, \dots, \phi_{N+2}\}$ kümesi bir tabandır.

Septik B-spline fonksiyonlar

Septik B-spline fonksiyonlar

$$\phi_m^7(x) = \frac{1}{h^7} \begin{cases} (x - x_{m-4})^7 & [x_{m-4}, x_{m-3}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7 & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7 - 56(x - x_{m-1})^7 & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7 - 56(x_{m+1} - x)^7 & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7 & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x_{m+4} - x)^7 & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ile tanımlanır. $\{\phi_{-3}, \phi_{-1}, \dots, \phi_{N+3}\}$ kümesi bir taban oluşturur.

5. RLW DENKLEMİ İÇİN KÜBİK B-SPLINE EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ

Bu bölümde, [33] referansındaki adımlar takip edilerek (2.1) ile verilen RLW denkleminin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü verilecektir.

En küçük kareler yönteminde rezidünün karesinin integrali bütün bir çözüm bölgesi üzerinde minimize edilmeye çalışılır. Bu durum ise

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_i} \int_{\Omega} E^2[x, \sigma] dx = 0, \quad \forall i \quad (5.1)$$

olmasın gerekir Burada E ile rezidü, σ_i diferensiyel denklemin bağımlı değişkenine yapılan yaklaşımda yer alan katsayılar ve Ω problemin çözüm bölgesidir.

(5.1) ifadesi $\Omega: [a, b] \times [0, T]$ bölgesinde RLW denklemi için dikkate alınırsa problemin zayıf (weak) formülasyonu

$$\delta \int_0^T \int_a^b (u_t + u_x + \varepsilon u u_x - \mu u_{xxt})^2 dx dt = 0 \quad (5.2)$$

şeklinde bulunur.

$[a, b]$ sonlu aralığının

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

ve $\Delta x = h = \frac{b-a}{N} = x_m - x_{m-1}$ şeklindeki parçalanmasını dikkate alalım. Bu aralık

üzerinde tanımlanan

$$\phi_m^3 = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m+2})^3 & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3 & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3 & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3 & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (5.3)$$

kübik B-spline fonksiyonlar

$$x = x_m + \eta h \Rightarrow dx = h d\eta, \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (5.4)$$

dönüşümü ile

$$\begin{aligned} \phi_{m-1} &= \begin{cases} (1-\eta)^3 \\ 1+3(1-\eta)+3(1-\eta)^2-3(1-\eta)^3 \\ 1+3\eta+3\eta^2-3\eta^3 \\ \eta^3 \end{cases}, \quad 0 \leq \eta \leq 1. \end{aligned} \quad (5.5)$$

$0 \leq \eta \leq 1$ aralığında standard ekil fonksiyonlarına dönüştürülebilir. Bu dönüşümün uygulandığı ayrıntılı olarak aşağıda verilmiştir:

$$\phi_m^3 = \frac{1}{h^3} \left[h^3 + 3h^2 (x_{m+1} - x) + 3h (x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3 \right] \quad [x_m, x_{m+1}]$$

$$\phi_m = \frac{1}{h^3} [h^3 + 3h^2 (x_{m+1} - (x_m + \eta \Delta x)) + 3h (x_{m+1} - (x_m + \eta \Delta x))^2 - 3(x_{m+1} - (x_m + \eta \Delta x))^3]$$

$$\phi_m = \frac{1}{h^3} [h^3 + 3h^2 (h - \eta h) + 3h (h - \eta h)^2 - 3(h - \eta h)^3]$$

$$\phi_m = 1 + 3(1-\eta) + 3(1-\eta)^2 - 3(1-\eta)^3$$

$$\phi_m^3 = \frac{1}{h^3} \left[h^3 + 3h^2 (x - x_{m-1}) + 3h (x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3 \right] \quad [x_{m-1}, x_m]$$

$$\phi_{m+1} = \frac{1}{h^3} \left[h^3 + 3h^2 (x - x_m) + 3h (x - x_m)^2 - 3(x - x_m)^3 \right]$$

$$\phi_{m+1} = \frac{1}{h^3} \left[h^3 + 3h^2 ((x_m + \eta \Delta x) - x_m) + 3h ((x_m + \eta \Delta x) - x_m)^2 - 3((x_m + \eta \Delta x) - x_m)^3 \right]$$

$$\phi_{m+1} = 1 + 3\eta + 3\eta^2 - 3\eta^3$$

$$\phi_m = \frac{1}{h^3} (x_{m+2} - x)^3 \quad [x_{m+1}, x_{m+2}]$$

$$\phi_{m-1} = \frac{1}{h^3} (x_{m+1} - x)^3 = \frac{1}{h^3} (x_{m+1} - (x_m + \eta \Delta x))^3 = (1-\eta)^3$$

$$\phi_m = \frac{1}{h^3} (x - x_{m-2})^3 \quad [x_{m-2}, x_{m-1}]$$

$$\phi_{m+2} = \frac{1}{h^3} (x - x_m)^3 = \frac{1}{h^3} ((x_m + \eta \Delta x) - x_m)^3 = \eta^3$$

Diğer yandan $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ olmak üzere bir $[t^n, t^{n+1}]$ aralığı

$$t = t^n + \tau \Delta t, \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad (5.6)$$

dönüşümü yardımıyla τ koordinatlarında standard bir aralığa dönüştürülebilir.

Böylece (5.2) integralinde yer alan terimler

$$U_t = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{k} U_\tau$$

$$U_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{h} U_\eta$$

$$U_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{h} U_\eta \right) = \frac{1}{h^2} U_{\eta\eta}$$

$$U_{xt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{h^2} U_{\eta\eta} \right) = \frac{1}{h^2} U_{\eta\eta\tau}$$

şeklinde hesaplanır ve (5.2) global integraline her bir $[x_m, x_{m+1}]$ ve $[t^n, t^{n+1}]$ elemanının yapacağı katkı

$$\delta \int_0^1 \int_0^1 \left(U_\tau + \frac{k}{h} U_\eta + \varepsilon \frac{k}{h} \hat{U} U_\eta - \frac{\mu}{h^2} U_{\eta\eta\tau} \right)^2 d\eta d\tau \quad (5.7)$$

şeklinde yazılabilir. Bu integralde yer alan lineer olmayan $\hat{U} U_\eta$ teriminde $\hat{U}$ fonksiyonu yerel bir sabit olarak düşünülürse (5.7) ifadesi lineer olacaktır. Böylece

$$b = \frac{\mu}{h^2}, \quad \nu = \frac{k}{h} (1 + \varepsilon \hat{U})$$

alınırsa (5.7) integrali

$$\int_0^1 \int_0^1 (U_\tau + \nu U_\eta - b U_{\eta\eta\tau}) \delta(U_\tau + \nu U_\eta - b U_{\eta\eta\tau}) d\eta d\tau \quad (5.8)$$

halini alır. Bu son integralde

$$\delta(U_\tau + \nu U_\eta - b U_{\eta\eta\tau})$$

ifadesi RLW denklemleri için bir ağırlık fonksiyonu olarak düşünülürse en küçük kareler yöntemi aynı zamanda bir Petrov-Galerkin yöntemi olur.

$[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde U fonksiyonuna yapılacak U_N^e yaklaşım fonksiyonu

$$U_N^e = \sum_{j=m-1}^{m+2} (\sigma_j + \tau \Delta \sigma_j) \phi_j(\eta) \quad (5.9)$$

ile tanımlanır. Burada

$\phi_{m-1}(\eta), \phi_m(\eta), \phi_{m+1}(\eta), \phi_{m+2}$ şekil fonksiyonları, $\sigma_{m-1}, \sigma_m, \sigma_{m+1}, \sigma_{m+2}$ ise düğüm parametreleridir. Δt kadar zaman artımında, bu düğüm parametrelerindeki artışlar $\Delta \sigma_{m-1}, \Delta \sigma_m, \Delta \sigma_{m+1}, \Delta \sigma_{m+2}$ ile gösterilir.

Kübik B-spline fonksiyonların taban olma özelliği kullanılarak düğüm noktalarındaki $(U_N)_m$ fonksiyon değerleri ile birinci ve ikinci mertebeden türevler

$$\begin{aligned} (U_N)_m &= U_N(x_m) = \sigma_{m-1} + 4\sigma_m + \sigma_{m+1} \\ (U_N)'_m &= U'_N(x_m) = 3(-\sigma_{m-1} + \sigma_{m+1}), \\ (U_N)''_m &= U''_N(x_m) = 6(\sigma_{m-1} - 2\sigma_m + \sigma_{m+1}) \end{aligned} \quad (5.10)$$

şeklinde hesaplanır. Burada $'$ notasyonu η değişkenine göre türevi göstermektedir.

Ağırlık fonksiyonu

$$\delta W = \sum_{j=m-1}^{m+2} W_j \Delta \sigma_j = \delta(U_\tau + \nu U_\eta - b U_{\eta\eta\tau})$$

olarak tekrar yazılırsa ve

$$\delta U^e = \sum_{j=m-1}^{m+2} \tau Q_j(\eta) \Delta \sigma_j, \quad (5.11)$$

açılımı kullanılırsa

$$W_m = \delta(U_\tau + \nu U_\eta - b U_{\eta\eta\tau}) = \phi_m + \nu \tau \phi'_m - b \phi''_m \quad (5.12)$$

elde edilir. Böylece (5.8) integrali

$$\int_0^1 \int_0^1 (U_\tau + \nu U_\eta - b U_{\eta\eta\tau}) (\phi_m + \nu \tau \phi'_m - b \phi''_m) d\eta d\tau \quad (5.13)$$

halini alır. Buradan, kısmi türevler için

$$U_\tau = \sum_{m=1}^{m+2} \phi_j \Delta \sigma_j$$

$$U_{\eta\eta} = \sum_{m=1}^{m+2} \phi'' \sigma_j + \sum_{m=1}^{m+1} \tau \phi'_j \Delta \sigma_j$$

$$U_{\eta\eta\tau} = \sum_{m=1}^{m+2} \phi'' \Delta \sigma_j$$

yaklaşımları dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 (U_\tau + \nu U_\eta - b U_{\eta\eta\tau}) (\phi_m + \nu \tau \phi'_m - b \phi''_m) d\eta d\tau \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{m=1}^{m+2} \phi_j \Delta \sigma_j + \nu \left(\sum_{m=1}^{m+2} \phi'_j \sigma_j + \sum_{m=1}^{m+1} \tau \phi'_j \Delta \sigma_j \right) - b \sum_{m=1}^{m+2} \phi''_j \Delta \sigma_j \right) (\phi_i + \nu \tau \phi'_i - b \phi''_i) d\eta d\tau \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{m=1}^{m+2} \phi_j \Delta \sigma_j \phi_i + \sum_{m=1}^{m+2} \phi_j \Delta \sigma_j \nu \tau \phi'_i - \sum_{m=1}^{m+2} b \phi_j \phi''_i \Delta \sigma_j + \sum_{m=1}^{m+2} \nu \phi'_j \phi'_i \sigma_j + \sum_{m=1}^{m+2} \tau \nu \phi'_j \phi'_i \Delta \sigma_j \right. \\ & \quad \left. + \sum_{m=1}^{m+2} \nu^2 \tau \phi'_j \phi'_i \sigma_j + \sum_{m=1}^{m+2} \nu^2 \tau^2 \phi'_j \phi'_i \Delta \sigma_j - \sum_{m=1}^{m+2} \nu b \phi'_j \phi''_i \sigma_j - \sum_{m=1}^{m+2} b \tau \phi'_j \phi''_i \Delta \sigma_j \right. \\ & \quad \left. - \sum_{m=1}^{m+2} b \phi''_j \phi_i \Delta \sigma_j - \sum_{m=1}^{m+2} \nu b \tau \phi''_j \phi'_i \Delta \sigma_j + \sum_{m=1}^{m+2} b^2 \phi'_j \phi''_i \Delta \sigma_j \right) d\eta d\tau \end{aligned}$$

buradan τ ya göre integral alınırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\int_0^1 \left(\phi_j \phi_i + \left(2b + \frac{\nu^2}{3} \right) \phi_j' \phi_i' + b^2 \phi_j'' \phi_i'' + \frac{\nu}{2} (\phi_j' \phi_i + \phi_j \phi_i') - \frac{\nu b}{2} (\phi_j'' \phi_i' + \phi_j' \phi_i'') \right) d\eta \right] \Delta \sigma_j \\
& - b (\phi_j \phi_i' + \phi_j' \phi_i) \Big|_0^1 \\
& + \sum_{j=m-1}^{m+1} \left[\int_0^1 \left(\nu \phi_j' \phi_i + \frac{\nu^2}{2} \phi_j' \phi_i' - \nu b \phi_j' \phi_i'' \right) d\eta \right] \sigma_j
\end{aligned} \tag{5.14}$$

bulunur. $\sigma^e = (\sigma_{m-1}, \sigma_m, \sigma_{m+1}, \sigma_{m+2})$ eleman parametreleri olmak üzere (5.14) ifadesi matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
& \left[A^e + \left(2b + \frac{\nu^2}{3} \right) B^e + b^2 C^e + \frac{\nu}{2} (D^e + (D^e)^T) - \frac{\nu b}{2} (E^e + (E^e)^T) - b F^e \right] \Delta \sigma_j \\
& + \left[\nu D^e + \frac{\nu^2}{2} B^e - \nu b (E^e)^T \right] \sigma_j
\end{aligned} \tag{5.15}$$

buradaki A^e, B^e, C^e, D^e ve E^e eleman matrisleri aşağıda verilmiştir.

$$A_{ij}^e = \int_0^1 \phi_j \phi_i d\eta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = \int_0^1 \phi_{m-1} \phi_{m-1} d\eta = \int_0^1 (1-\eta)^3 (1-\eta)^3 d\eta = \frac{1}{7}$$

$$a_{12} = \int_0^1 \phi_{m-1} \phi_m d\eta = \int_0^1 (1-\eta)^3 (1+3(1-\eta)+3(1-\eta)^2-3(1-\eta)^3) d\eta = \frac{129}{140}$$

$$a_{13} = \int_0^1 \phi_{m-1} \phi_{m+1} d\eta = \int_0^1 (1-\eta)^3 (1+3\eta+3\eta^2-3\eta^3) d\eta = \frac{3}{7}$$

$$a_{14} = \int_0^1 \phi_{m-1} \phi_{m+2} d\eta = \int_0^1 (1-\eta)^3 \eta^3 d\eta = \frac{1}{140}$$

$$a_{21} = \int_0^1 \phi_m \phi_{m-1} d\eta = \int_0^1 (1-\eta)^3 (1+3(1-\eta)+3(1-\eta)^2-3(1-\eta)^3) d\eta = \frac{129}{140}$$

$$a_{22} = \int_0^1 \phi_m \phi_m d\eta = \int_0^1 \left(1 + 3(1-\eta) + 3(1-\eta)^2 - 3(1-\eta)^3\right)^2 d\eta = \frac{297}{35}$$

$$a_{23} = \int_0^1 \phi_m \phi_{m+1} d\eta = \int_0^1 \left(1 + 3(1-\eta) + 3(1-\eta)^2 - 3(1-\eta)^3\right) (1 + 3\eta + 3\eta^2 - 3\eta^3) d\eta = \frac{933}{140}$$

$$a_{24} = \int_0^1 \phi_m \phi_{m+2} d\eta = \int_0^1 \left(1 + 3(1-\eta) + 3(1-\eta)^2 - 3(1-\eta)^3\right) \eta^3 d\eta = \frac{3}{7}$$

$$a_{31} = \int_0^1 \phi_{m+1} \phi_{m-1} d\eta = \int_0^1 (1 + 3\eta + 3\eta^2 - 3\eta^3) (1-\eta)^3 d\eta = \frac{3}{7}$$

$$a_{32} = \int_0^1 \phi_{m+1} \phi_m d\eta = \int_0^1 \left(1 + 3(1-\eta) + 3(1-\eta)^2 - 3(1-\eta)^3\right) (1 + 3\eta + 3\eta^2 - 3\eta^3) d\eta = \frac{933}{140}$$

$$a_{33} = \int_0^1 \phi_{m+1} \phi_{m+1} d\eta = \int_0^1 (1 + 3\eta + 3\eta^2 - 3\eta^3)^2 d\eta = \frac{297}{30}$$

$$a_{34} = \int_0^1 \phi_{m+1} \phi_{m+2} d\eta = \int_0^1 (1 + 3\eta + 3\eta^2 - 3\eta^3) \eta^3 d\eta = \frac{129}{140}$$

$$a_{41} = \int_0^1 \phi_{m+2} \phi_{m-1} d\eta = \int_0^1 (1-\eta)^3 \eta^3 d\eta = \frac{1}{140}$$

$$a_{42} = \int_0^1 \phi_{m+2} \phi_m d\eta = \int_0^1 \left(1 + 3(1-\eta) + 3(1-\eta)^2 - 3(1-\eta)^3\right) \eta^3 d\eta = \frac{3}{7}$$

$$a_{43} = \int_0^1 \phi_{m+2} \phi_{m+1} d\eta = \int_0^1 (1 + 3\eta + 3\eta^2 - 3\eta^3) \eta^3 d\eta = \frac{129}{140}$$

$$a_{44} = \int_0^1 \phi_{m+2} \phi_{m+2} d\eta = \int_0^1 (\eta^3)^2 d\eta = \frac{1}{7}$$

$$A_{ij}^e = \int_0^1 \phi_j \phi_i d\eta = \frac{1}{140} \begin{bmatrix} 20 & 129 & 60 & 1 \\ 129 & 1188 & 933 & 60 \\ 60 & 933 & 1188 & 129 \\ 1 & 60 & 129 & 20 \end{bmatrix}$$

$$B^e_{ij} = \int_0^1 \phi'_j \phi'_i d\eta = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$

$$b_{11} = \int_0^1 \phi'_{m-1} \phi'_{m-1} d\eta = \int_0^1 \left(-3(\eta-1)^2 \right)^2 d\eta = \frac{9}{5}$$

$$b_{12} = \int_0^1 \phi'_{m-1} \phi'_m d\eta = \int_0^1 \left(-3(\eta-1)^2 \right) \left(6\eta + 9(\eta-1)^2 - 9 \right) d\eta = \frac{21}{10}$$

$$b_{13} = \int_0^1 \phi'_{m-1} \phi'_{m+1} d\eta = \int_0^1 \left(-3(\eta-1)^2 \right) \left(-9\eta^2 + 6\eta + 3 \right) d\eta = \frac{-18}{5}$$

$$b_{14} = \int_0^1 \phi'_{m-1} \phi'_{m+2} d\eta = \int_0^1 \left(-3(\eta-1)^2 \right) \left(3\eta^2 \right) d\eta = -\frac{3}{10}$$

$$b_{21} = \int_0^1 \phi'_m \phi'_{m-1} d\eta = \int_0^1 \left(-3(\eta-1)^2 \right) \left(6\eta + 9(\eta-1)^2 - 9 \right) d\eta = \frac{21}{10}$$

$$b_{22} = \int_0^1 \phi'_m \phi'_m d\eta = \int_0^1 \left(6\eta + 9(\eta-1)^2 - 9 \right)^2 d\eta = \frac{51}{5}$$

$$b_{23} = \int_0^1 \phi'_m \phi'_{m+1} d\eta = \int_0^1 \left(6\eta + 9(\eta-1)^2 - 9 \right) \left(-9\eta^2 + 6\eta + 3 \right) d\eta = -\frac{87}{10}$$

$$b_{24} = \int_0^1 \phi'_m \phi'_{m+2} d\eta = \int_0^1 \left(6\eta + 9(\eta-1)^2 - 9 \right) \left(3\eta^2 \right) d\eta = -\frac{18}{5}$$

$$b_{31} = \int_0^1 \phi'_{m+1} \phi'_{m-1} d\eta = \int_0^1 \left(-3(\eta-1)^2 \right) \left(-9\eta^2 + 6\eta + 3 \right) d\eta = \frac{-18}{5}$$

$$b_{32} = \int_0^1 \phi'_{m+1} \phi'_m d\eta = \int_0^1 \left(6\eta + 9(\eta-1)^2 - 9 \right) \left(-9\eta^2 + 6\eta + 3 \right) d\eta = -\frac{87}{10}$$

$$b_{33} = \int_0^1 \phi'_{m+1} \phi'_{m+1} d\eta = \int_0^1 \left(-9\eta^2 + 6\eta + 3 \right)^2 d\eta = \frac{51}{5}$$

$$b_{34} = \int_0^1 \phi'_{m+1} \phi'_{m+2} d\eta = \int_0^1 (-9\eta^2 + 6\eta + 3)(3\eta^2) d\eta = \frac{21}{10}$$

$$b_{41} = \int_0^1 \phi'_{m+2} \phi'_{m-1} d\eta = \int_0^1 (-3(\eta-1)^2)(3\eta^2) d\eta = -\frac{3}{10}$$

$$b_{42} = \int_0^1 \phi'_{m+2} \phi'_m d\eta = \int_0^1 (6\eta + 9(\eta-1)^2 - 9)(3\eta^2) d\eta = -\frac{18}{5}$$

$$b_{43} = \int_0^1 \phi'_{m+2} \phi'_{m+1} d\eta = \int_0^1 (-9\eta^2 + 6\eta + 3)(3\eta^2) d\eta = \frac{21}{10}$$

$$b_{44} = \int_0^1 \phi'_{m+2} \phi'_{m+2} d\eta = \int_0^1 (3\eta^2)^2 d\eta = \frac{9}{5}$$

$$B^e_{ij} = \int_0^1 \phi'_j \phi'_i d\eta = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 18 & 21 & -36 & -3 \\ 21 & 102 & -87 & -36 \\ -36 & -87 & 102 & 12 \\ -3 & -36 & 21 & 18 \end{bmatrix}$$

$$C^e_{ij} = \int_0^1 \phi''_j \phi''_i d\eta = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = \int_0^1 \phi''_{m-1} \phi''_{m-1} d\eta = \int_0^1 (6-6\eta)^2 d\eta = 12$$

$$c_{12} = \int_0^1 \phi''_{m-1} \phi''_m d\eta = \int_0^1 (6-6\eta)(18\eta-12) d\eta = -18$$

$$c_{13} = \int_0^1 \phi''_{m-1} \phi''_{m+1} d\eta = \int_0^1 (6-6\eta)(-18\eta+6) d\eta = 0$$

$$c_{14} = \int_0^1 \phi''_{m-1} \phi''_{m+2} d\eta = \int_0^1 (6-6\eta)6\eta d\eta = 6$$

$$c_{21} = \int_0^1 \phi_m'' \phi_{m-1}'' d\eta = \int_0^1 (6-6\eta)(18\eta-12) d\eta = -18$$

$$c_{22} = \int_0^1 \phi_m'' \phi_m'' d\eta = \int_0^1 (18\eta-12)^2 d\eta = 36$$

$$c_{23} = \int_0^1 \phi_m'' \phi_{m+1}'' d\eta = \int_0^1 (18\eta-12)(-18\eta+6) d\eta = -18$$

$$c_{24} = \int_0^1 \phi_m'' \phi_{m+2}'' d\eta = \int_0^1 6\eta(18\eta-12)6\eta d\eta = 0$$

$$c_{31} = \int_0^1 \phi_{m+1}'' \phi_{m-1}'' d\eta = \int_0^1 (6-6\eta)(-18\eta+6) d\eta = 0$$

$$c_{32} = \int_0^1 \phi_{m+1}'' \phi_m'' d\eta = \int_0^1 (18\eta-12)(-18\eta+6) d\eta = -18$$

$$c_{33} = \int_0^1 \phi_{m+1}'' \phi_{m+1}'' d\eta = \int_0^1 (-18\eta+6)^2 d\eta = 36$$

$$c_{34} = \int_0^1 \phi_{m+1}'' \phi_{m+2}'' d\eta = \int_0^1 (-18\eta+6)6\eta d\eta = -18$$

$$c_{41} = \int_0^1 \phi_{m+2}'' \phi_{m-1}'' d\eta = \int_0^1 6\eta(6-6\eta) d\eta = 6$$

$$c_{42} = \int_0^1 \phi_{m+2}'' \phi_m'' d\eta = \int_0^1 6\eta(18\eta-12) d\eta = 0$$

$$c_{43} = \int_0^1 \phi_{m+2}'' \phi_{m+1}'' d\eta = \int_0^1 6\eta(-18\eta+6) d\eta = -18$$

$$c_{44} = \int_0^1 \phi_{m+2}'' \phi_{m+2}'' d\eta = \int_0^1 (6\eta)^2 d\eta = 12$$

$$C^e_{ij} = \int_0^1 \phi_j' \phi_i'' d\eta = \begin{bmatrix} 12 & -18 & 0 & 6 \\ -18 & 36 & -18 & 0 \\ 0 & -18 & 36 & -18 \\ 6 & 0 & -18 & 12 \end{bmatrix}$$

$$D^e_{ij} = \int_0^1 \phi_i \phi_j' d\eta = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix}$$

$$d_{11} = \int_0^1 \phi_{m-1} \phi_{m-1}' d\eta = \int_0^1 (1-\eta)^3 (-3(\eta-1)^2) d\eta = -\frac{1}{2}$$

$$d_{12} = \int_0^1 \phi_{m-1} \phi_m' d\eta = \int_0^1 (1-\eta)^3 (6\eta + 9(\eta-1)^2 - 9) d\eta = -\frac{9}{20}$$

$$d_{13} = \int_0^1 \phi_{m-1} \phi_{m+1}' d\eta = \int_0^1 (1-\eta)^3 (-9\eta^2 + 6\eta + 3) d\eta = \frac{9}{10}$$

$$d_{14} = \int_0^1 \phi_{m-1} \phi_{m+2}' d\eta = \int_0^1 (1-\eta)^3 (3\eta^2) d\eta = \frac{1}{20}$$

$$d_{21} = \int_0^1 \phi_m \phi_{m-1}' d\eta = \int_0^1 (1+3(1-\eta)+3(1-\eta)^2-3(1-\eta)^3) (-3(\eta-1)^2) d\eta = -\frac{71}{20}$$

$$d_{22} = \int_0^1 \phi_m \phi_m' d\eta = \int_0^1 (1+3(1-\eta)+3(1-\eta)^2-3(1-\eta)^3) (6\eta+9(\eta-1)^2-9) d\eta = -\frac{15}{2}$$

$$d_{23} = \int_0^1 \phi_m \phi_{m+1}' d\eta = \int_0^1 (1+3(1-\eta)+3(1-\eta)^2-3(1-\eta)^3) (-9\eta^2+6\eta+3) d\eta = \frac{183}{20}$$

$$d_{24} = \int_0^1 \phi_m \phi_{m+2}' d\eta = \int_0^1 (1+3(1-\eta)+3(1-\eta)^2-3(1-\eta)^3) (3\eta^2) d\eta = \frac{19}{10}$$

$$d_{31} = \int_0^1 \phi_{m+1} \phi_{m-1}' d\eta = \int_0^1 (1+3\eta+3\eta^2-3\eta^3) (-3(\eta-1)^2) d\eta = -\frac{19}{10}$$

$$d_{32} = \int_0^1 \phi_{m+1} \phi'_m d\eta = \int_0^1 (1+3\eta+3\eta^2-3\eta^3) (6\mu+9(\eta-1)^2-9) d\eta = -\frac{183}{20}$$

$$d_{33} = \int_0^1 \phi_{m+1} \phi'_{m+1} d\eta = \int_0^1 (1+3\eta+3\eta^2-3\eta^3) (-9\eta^2+6\eta+3) d\eta = \frac{15}{2}$$

$$d_{34} = \int_0^1 \phi_{m+1} \phi'_{m+2} d\eta = \int_0^1 (1+3\eta+3\eta^2-3\eta^3) (3\eta^2) d\eta = \frac{71}{20}$$

$$d_{41} = \int_0^1 \phi_{m+2} \phi'_{m-1} d\eta = \int_0^1 (-3(\eta-1)^2) \eta^3 d\eta = -\frac{1}{20}$$

$$d_{42} = \int_0^1 \phi_{m+2} \phi'_m d\eta = \int_0^1 (6\eta+9(\eta-1)^2-9) \eta^3 d\eta = -\frac{9}{10}$$

$$d_{43} = \int_0^1 \phi_{m+2} \phi'_{m+1} d\eta = \int_0^1 (-9\eta^2+6\eta+3) \eta^3 d\eta = \frac{9}{20}$$

$$d_{44} = \int_0^1 \phi_{m+2} \phi'_{m+2} d\eta = \int_0^1 \eta^3 (3\eta^2) d\eta = \frac{1}{2}$$

$$D^e_{ij} = \int_0^1 \phi_i \phi'_j d\eta = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} -10 & -9 & 18 & 1 \\ -71 & -150 & 183 & 38 \\ -38 & -183 & 150 & 71 \\ -1 & -18 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

$$E^e_{ij} = \int_0^1 \phi'_i \phi''_j d\eta = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{11} & \mathbf{e}_{12} & \mathbf{e}_{13} & \mathbf{e}_{14} \\ \mathbf{e}_{21} & \mathbf{e}_{22} & \mathbf{e}_{23} & \mathbf{e}_{24} \\ \mathbf{e}_{31} & \mathbf{e}_{32} & \mathbf{e}_{33} & \mathbf{e}_{34} \\ \mathbf{e}_{41} & \mathbf{e}_{42} & \mathbf{e}_{43} & \mathbf{e}_{44} \end{bmatrix}$$

$$e_{11} = \int_0^1 \phi'_{m-1} \phi''_{m-1} d\eta = \int_0^1 (-3(\eta-1)^2) (6-6\eta) d\eta = -\frac{9}{2}$$

$$e_{12} = \int_0^1 \phi'_{m-1} \phi''_m d\eta = \int_0^1 (-3(\eta-1)^2) (18\eta-12) d\eta = \frac{15}{2}$$

$$e_{13} = \int_0^1 \phi'_{m-1} \phi''_{m+1} d\eta = \int_0^1 \left(-3(\eta-1)^2 \right) (-18\eta+6) d\eta = -\frac{3}{2}$$

$$e_{14} = \int_0^1 \phi'_{m-1} \phi''_{m+2} d\eta = \int_0^1 \left(-3(\eta-1)^2 \right) 6\eta d\eta = -\frac{3}{2}$$

$$e_{21} = \int_0^1 \phi'_m \phi''_{m-1} d\eta = \int_0^1 \left(6\eta+9(\eta-1)^2-9 \right) (6-6\eta) d\eta = -\frac{15}{2}$$

$$e_{22} = \int_0^1 \phi'_m \phi''_m d\eta = \int_0^1 \left(6\eta+9(\eta-1)^2-9 \right) (18\eta-12) d\eta = \frac{9}{2}$$

$$e_{23} = \int_0^1 \phi'_m \phi''_{m+1} d\eta = \int_0^1 \left(6\eta+9(\eta-1)^2-9 \right) (-18\eta+6) d\eta = \frac{27}{2}$$

$$e_{24} = \int_0^1 \phi'_m \phi''_{m+2} d\eta = \int_0^1 \left(6\eta+9(\eta-1)^2-9 \right) 6\eta d\eta = -\frac{21}{2}$$

$$e_{31} = \int_0^1 \phi'_{m+1} \phi''_{m-1} d\eta = \int_0^1 \left(-9\eta^2+6\eta+3 \right) (6-6\eta) d\eta = \frac{21}{2}$$

$$e_{32} = \int_0^1 \phi'_{m+1} \phi''_m d\eta = \int_0^1 \left(-9\eta^2+6\eta+3 \right) (18\eta-12) d\eta = -\frac{27}{2}$$

$$e_{33} = \int_0^1 \phi'_{m+1} \phi''_{m+1} d\eta = \int_0^1 \left(-9\eta^2+6\eta+3 \right) (-18\eta+6) d\eta = -\frac{9}{2}$$

$$e_{34} = \int_0^1 \phi'_{m+1} \phi''_{m+2} d\eta = \int_0^1 \left(-9\eta^2+6\eta+3 \right) 6\eta d\eta = \frac{15}{2}$$

$$e_{41} = \int_0^1 \phi'_{m+2} \phi''_{m-1} d\eta = \int_0^1 \left(3\eta^2 \right) (6-6\eta) d\eta = \frac{3}{2}$$

$$e_{42} = \int_0^1 \phi'_{m+2} \phi''_m d\eta = \int_0^1 \left(3\eta^2 \right) (18\eta-12) d\eta = \frac{3}{2}$$

$$e_{43} = \int_0^1 \phi_{m+2}' \phi_{m+1}'' d\eta = \int_0^1 (3\eta^2)(-18\eta+6) d\eta = -\frac{15}{2}$$

$$e_{44} = \int_0^1 \phi_{m+2}' \phi_{m+2}'' d\eta = \int_0^1 (3\eta^2)6\eta d\eta = \frac{9}{2}$$

$$E^e_{ij} = \int_0^1 \phi_i' \phi_j'' d\eta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -9 & 15 & -3 & -3 \\ -15 & 9 & 27 & -21 \\ 21 & -27 & -9 & 15 \\ 3 & 3 & -15 & 9 \end{bmatrix}$$

$$F^e_{ij} = (\phi_j \phi_i' + \phi_j' \phi_i) \Big|_0^1 = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix}$$

$$f_{11} = (\phi_{m-1} \phi_{m-1}' + \phi_{m-1}' \phi_{m-1}) \Big|_0^1 = 6$$

$$f_{12} = (\phi_{m-1} \phi_m' + \phi_{m-1}' \phi_m) \Big|_0^1 = 12$$

$$f_{13} = (\phi_{m-1} \phi_{m+1}' + \phi_{m-1}' \phi_{m+1}) \Big|_0^1 = 0$$

$$f_{14} = (\phi_{m-1} \phi_{m+2}' + \phi_{m-1}' \phi_{m+2}) = 0$$

$$f_{21} = (\phi_m \phi_{m-1}' + \phi_m' \phi_{m-1}) \Big|_0^1 = 12$$

$$f_{22} = (\phi_m \phi_m' + \phi_m' \phi_m) \Big|_0^1 = -9$$

$$f_{23} = (\phi_m \phi_{m+1}' + \phi_m' \phi_{m+1}) \Big|_0^1 = -24$$

$$f_{24} = (\phi_m \phi_{m+2}' + \phi_m' \phi_{m+2}) = 0$$

$$f_{31} = (\phi_{m+1} \phi_{m-1}' + \phi_{m+1}' \phi_{m-1}) \Big|_0^1 = 0$$

$$f_{32} = (\phi_{m+1} \phi_m' + \phi_{m+1}' \phi_m) \Big|_0^1 = -24$$

$$f_{33} = \left(\phi_{m+1} \phi'_{m+1} + \phi'_{m+1} \phi_{m+1} \right) \Big|_0^1 = -9$$

$$f_{34} = \left(\phi_{m+1} \phi'_{m+2} + \phi'_{m+1} \phi_{m+2} \right) \Big|_0^1 = 12$$

$$f_{41} = \left(\phi_{m+2} \phi'_{m-1} + \phi'_{m+2} \phi_{m-1} \right) \Big|_0^1 = 0$$

$$f_{42} = \left(\phi_{m+2} \phi'_m + \phi'_{m+2} \phi_m \right) \Big|_0^1 =$$

$$f_{43} = \left(\phi_{m+2} \phi'_{m+1} + \phi'_{m+2} \phi_{m+1} \right) \Big|_0^1 = 12$$

$$f_{44} = \left(\phi_{m+2} \phi'_{m+2} + \phi'_{m+2} \phi_{m+2} \right) \Big|_0^1 = 6$$

$$F^e_{ij} = \left(\phi_j \phi'_i + \phi'_j \phi_i \right) \Big|_0^1 = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 0 & 0 \\ 12 & -9 & -24 & 0 \\ 0 & -24 & -9 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

Bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde oluşturulan bu matris ifadesi, bütün çözüm bölgesi üzerine genişletilirse RLW denklemi için

$$\begin{aligned} & \left[A + \left(2b + \frac{\nu^2}{3} \right) B + b^2 C + \frac{\nu}{2} (D + D^T) - \frac{\nu b}{2} (E + E^T) - bF \right] \Delta \sigma_j \\ & + \left[\nu D + \frac{\nu^2}{2} B - b\nu E^T \right] \sigma_j = 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

global matris denklemi bulunur. Burada $\sigma = (\sigma_{-1}, \sigma_0, \dots, \sigma_N, \sigma_{N+1})^T$ bilinmeyen vektörü, A, B, C, D ve E ise ilgili eleman matrislerinden türetilen global matrislerdir.

(5.16) denkleminde $\sigma = \sigma^n$, $\Delta \sigma = \sigma^{n+1} - \sigma^n$ tanımlanırsa, bu denklem

$$\begin{aligned} & \left[A + 2bB + \frac{\nu^2}{3} B + b^2 C + \frac{\nu}{2} (D + D^T) - \frac{\nu b}{2} (E + E^T) - bF \right] \sigma^{n+1} \\ & = \\ & \left[A + 2bB - \frac{\nu^2}{6} B + b^2 C + \frac{\nu}{2} (-D + D^T) + \frac{b\nu}{2} (-E + E^T) - bF \right] \sigma^n \end{aligned}$$

halini alır. Böylece ardışık iki zaman adımında çözüm parametrelerinin bulunmasına olanak sağlayacak şekildeki tekrarlı bağıntı elde edilmiş olur. Bu son eşitliğin ifade ettiği denklem sisteminde standard bir denklem

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \sigma_{m-3}^{n+1} + \alpha_2 \sigma_{m-2}^{n+1} + \alpha_3 \sigma_{m-1}^{n+1} + \alpha_4 \sigma_m^{n+1} + \alpha_3 \sigma_{m+1}^{n+1} + \alpha_2 \sigma_{m+2}^{n+1} + \alpha_1 \sigma_{m+3}^{n+1} \\ & = \\ & \alpha_5 \sigma_{m-3}^n + \alpha_6 \sigma_{m-2}^n + \alpha_7 \sigma_{m-1}^n + \alpha_8 \sigma_m^n + \alpha_7 \sigma_{m+1}^n + \alpha_6 \sigma_{m+2}^n + \alpha_5 \sigma_{m+3}^n \end{aligned}$$

şeklindedir ve buradaki katsayılar da aşağıda verilmiştir:

$$\alpha_1 = \frac{1}{140} - \frac{3}{5}b - \frac{1}{10}v^2 + 6b^2, \quad \alpha_2 = \frac{6}{7} - \frac{72}{5}b - \frac{12}{5}v^2$$

$$\alpha_3 = \frac{1191}{140} - 9b - \frac{3}{2}v^2 - 54b^2, \quad \alpha_4 = \frac{604}{35} + 48b + 8v^2 + 96b^2$$

$$\alpha_3 = \frac{1191}{140} - 9b - \frac{3}{2}v^2 - 54b^2, \quad \alpha_4 = \frac{604}{35} + 48b + 8v^2 + 96b^2$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{140} - \frac{3}{5}b + \frac{1}{20}v^2 + 6b^2, \quad \alpha_6 = \frac{6}{7} - \frac{72}{5}b + \frac{6}{5}v^2,$$

$$\alpha_7 = \frac{1191}{140} - 9b + \frac{3}{4}v^2 - 54b^2, \quad \alpha_8 = \frac{604}{35} + 48b - 4v^2 + 96b^2$$

$(N + 3)$ denklem ve $(N + 3)$ bilinmeyenden oluşan bu sisteme RLW denkleminin sınır koşullarının adapte edilmesi ile RLW denkleminin kübik B-spline en küçük kareler formu elde edilmiş olur.

Elde edilen bu tekrarlı bağıntı ile iterasyona başlayabilmek için başlangıç çözümlerinin bilinmesi gerekir. Bu çözümler RLW denkleminin başlangıç koşulundan elde edilir.

RLW denkleminde lineer olmayan terimde U fonksiyonunun yerel sabit olarak alınması ile ortaya çıkan hatayı azaltmak için her bir zaman adımında

$$\sigma^n = \sigma^n + \frac{1}{2}(\sigma^n - \sigma^{n-1})$$

iç iterasyonu 2 yada 3 kez uygulanır.

5.1 Kararlılık Analizi

Elde edilen tekrarlı bağıntıda

$$\sigma^n = g e^{im\theta}$$

Fourier modu kullanılırsa

$$g = \frac{233 + 210b - 35v^2 + 420b^2}{233 + 210b + 35v^2 + 420b^2}$$

bulunur. Böylece büyüme çarpanı için $|g| < 1$ olacağından kullanılan yöntem koşulsuz kararlı olur [32, 33].

5.2 Test Problemleri

Bu kısımda RLW denkleminin çözümü için önerilen en küçük kareler yöntemi, bilinen örnekler ile test edilecektir. Bunun için

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j^{analitik} - (U_N)_j|^2}$$

$$L_\infty = U_j^{analitik} - (U_N)_j = \max_j |U_j^{analitik} - (U_N)_j|$$

hata normları ile ikinci bölümde verilen C_1 , C_2 , C_3 korunum kanunları kullanılacaktır. Yapılan hesaplamalarda, parametre seçimleri ise literatürde yer alan çalışmalar ile uyumlu olacak şekilde yapılacaktır. Böylece elde edilen sonuçlar için bir karşılaştırma imkanı doğacaktır.

5.2.1 Problem 1: Tek soliter dalga hareketi

RLW denkleminin bilinen bir analitik çözümü

$$U(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2(k[x - x_0 - vt]), \quad k = \sqrt{\frac{\epsilon c}{4\mu v}}$$

şeklindedir. Burada 3 cile soliter dalganın genliği, $v = 1 + \epsilon c$ ile de hızı gösterilmektedir. x_0 ise başlangıç dalgasının merkezidir.

Bu problemin başlangıç koşulu, analitik çözümde $t = 0$ alınmasıyla

$$U(x, 0) = 3c \operatorname{sech}^2(k[x - x_0])$$

şeklinde tanımlanır. Sınır koşulları için ise (2.2) eşitliklerinde $\beta_1 = 0$ ve $\beta_2 = 0$ seçilebilir [33].

Bu problemde, hesaplamalar için ilgili parametre ler

$$\mu = 1 \text{ ve } \varepsilon = 1$$

alındı. $\Delta t = 0.1$ seçilerek hem $h = 0.1$ hem de $h = 0.125$ için

$-40 \leq x \leq 60$ aralığında farklı dalga hızlarına sahip ($c = 0.1$ ve $c = 0.03$) $x_0 = 0$ başlangıç merkezli çözümler araştırıldı. Böylece elde edilen sonuçlar Çizelge 5.1 ve Çizelge 5.2 ile verilmiştir.

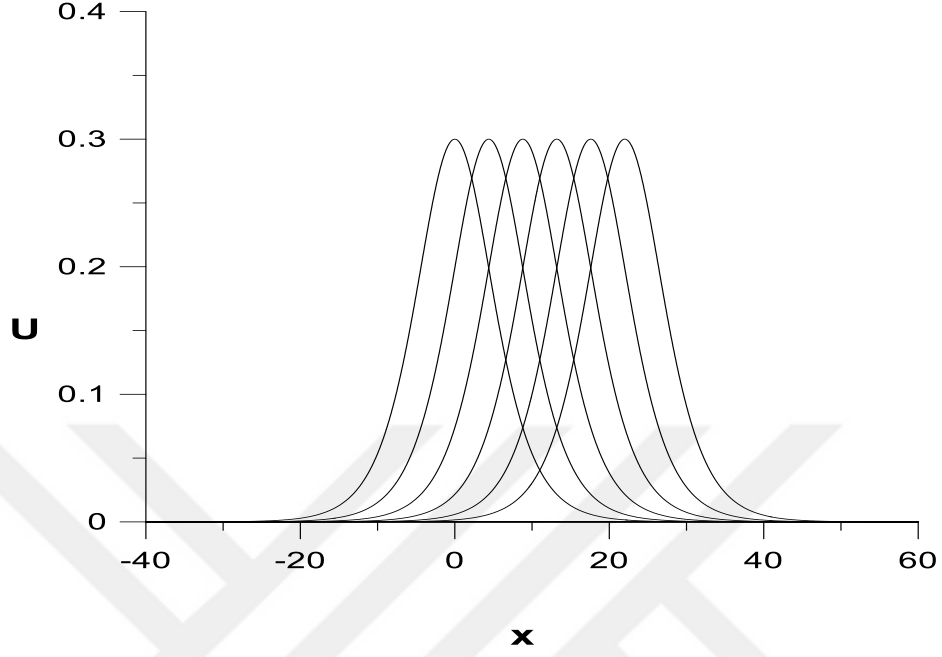
Çizelge 5.1: Hata normları ve korunum kanunları ($c=0.1$, $h=0.125$, $\Delta t = 0.1$)

Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
0	0.000000	0.000000	3.979927	0.810462	2.579007
4	0.130648	0.061126	3.980364	0.810611	2.579497
8	0.254290	0.116974	3.980797	0.810759	2.579987
12	0.370463	0.164610	3.981229	0.810908	2.580477
16	0.479305	0.204422	3.981655	0.811056	2.580966
20	0.581459	0.237648	3.982055	0.811204	2.581456

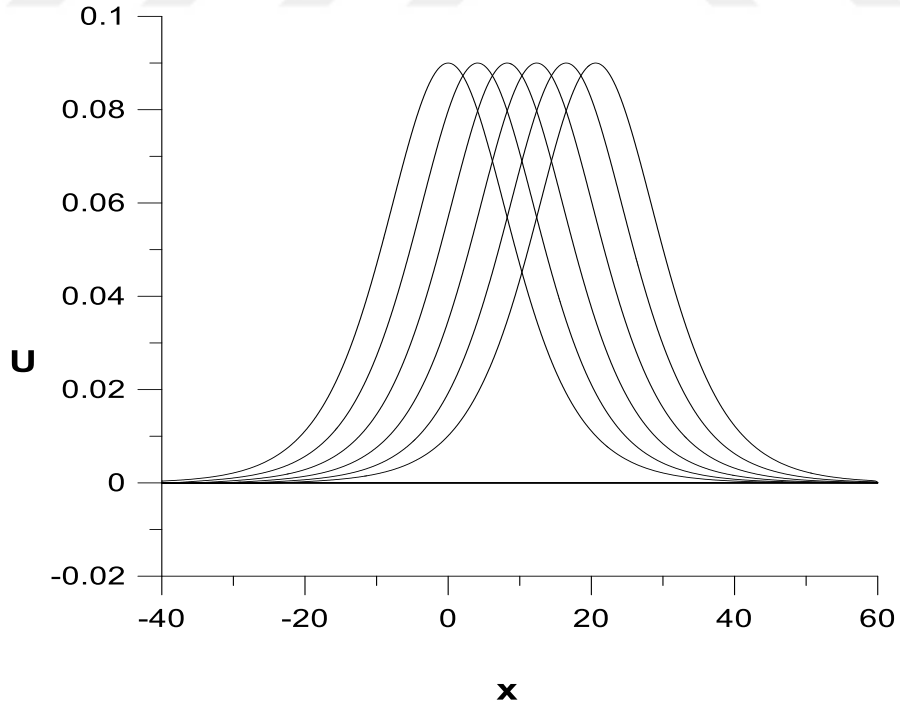
Çizelge 5.2: Hata normları ve korunum sabitleri ($c=0.03$, $h=0.125$, $\Delta t = 0.1$)

Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
0	0.000000	0.000000	2.107072	0.127301	0.388805
4	0.412933	0.230190	2.107130	0.127304	0.388814
8	0.512433	0.221349	2.106959	0.127308	0.388825
12	0.537471	0.212868	2.106642	0.12731	0.388835
16	0.546048	0.213871	2.106047	0.127315	0.388845
20	0.568450	0.431512	2.104750	0.127318	0.388854

Başlangıç anından $t = 20$ anında kadar tek soliter dalganın hareket profili Şekil 5.1. ve Şekil 5.2. ile verilmiştir. Bu şekillerde, $t = 0, 4, 8, 12, 16$ ve 20 için çözüm profilleri görülmektedir

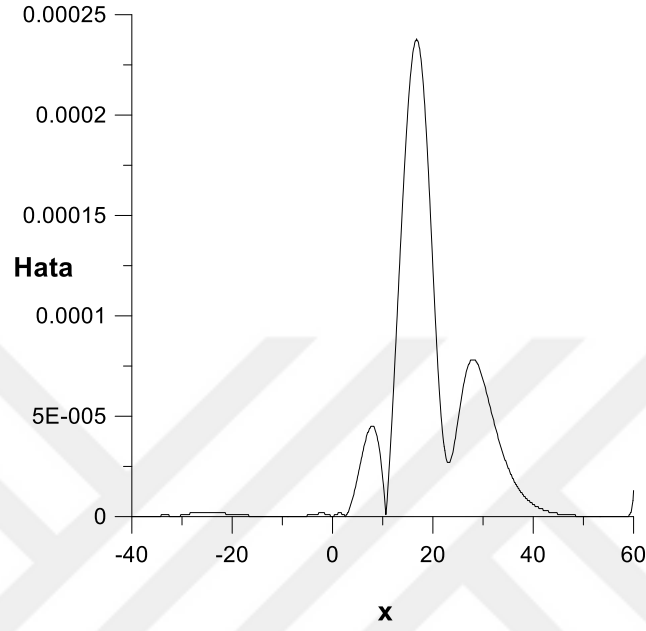


Şekil 5.1: Tek soliter dalga ($c=0.1$)

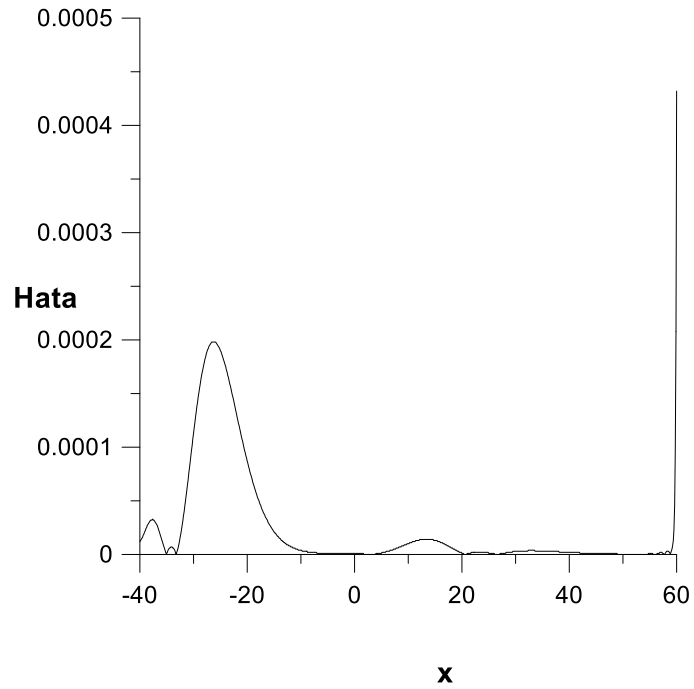


Şekil 5.2: Tek soliter dalga ($c=0.03$)

$t=20$ anında yöntemin hatasına ilişkin grafik ise Şekil 5.3 ve Şekil 5.4 ile verilmiştir.



Şekil 5.3: Tek soliter dalga için hata grafiği ($c=0.1$)



Şekil 5.4: Tek soliter dalga için hata grafiği ($c=0.03$)

Hesaplanan sonuçların literatürde yer alan diğer bazı çalışmalar ile bir karşılaştırması Çizelge 5.3 ve Çizelge 5.4 ile sunulmuştur.

Çizelge 5.3: Hata normları ve korunum sabitlerinin karşılaştırması (c=0.1)

	h	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
KBEKK	0.125	0.581459	0.237648	3.982055	0.811204	2.581456
Kaynak.[34]		0.192	0.073	3.97989	0.81046	2.57901
Kaynak.[36]		2.157		3.99046	0.82346	2.67399
kaynak.[40]		0.221	0.085	3.98002	0.81046	2.57901
Kaynak.[41]		0.378	0.140	3.97995	0.81046	2.57900
Kaynak.[39]		0.719	0.254	3.97989	0.80925	2.57501
KBEKK	0.1	0.585064	0.239999	3.978439	0.809965	2.577366
Kaynak.[34]		0.192	0.074	3.97989	0.81047	2.57901
Kaynak.[38]		0.217	0.084	3.97989	0.81046	2.57901
Kaynak.[37]		0.220	0.086	3.97989	0.81047	2.57902
Kaynak.[39]		0.515	0.181	3.97781	0.80963	2.5762
Kaynak.[40]		0.221	0.085	3.98002	0.81046	2.57901

Çizelge 5.4: Hata normları ve korunum sabitlerinin karşılaştırması (c=0.03)

	h	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
KBEKK	0.125	0.568450	0.431512	2.104750	0.127318	0.388854
Kaynak.[34]		0.542	0.199	2.10467	0.12730	0.38880
Kaynak.[36]		0.013		2.10471	0.12759	0.39203
Kaynak.[40]		1.274	0.365	2.11229	0.12730	0.38881
Kaynak.[41]		0.547	0.432	2.10902	0.12731	0.38881
Kaynak.[47]		0.242	0.125	2.10641	0.12723	0.38859
KBEKK	0.1	0.564428	0.431512	2.104571	0.127299	0.388795
Kaynak.[34]		0.541	0.199	2.10707	0.12730	0.38880
Kaynak.[38]		0.527	0.432	2.10503	0.12730	0.38880
Kaynak.[37]		0.563	0.432	2.1050	0.12730	0.38880
Kaynak.[39]		0.417	0.232	2.10760	0.12730	0.38879
Kaynak.[40]		1.271	0.364	2.11228	0.12730	0.38881

Elde edilen bu sonuçlar incelendiğinde nümerik yöntemin tek soliter dalga örneğinde Kabul edilebilir doğrulukta ve karşılaştırma yapılabilir sonuçlar ürettiği görülmektedir.

5.2.2 Problem 2: Dalga undulasyonu

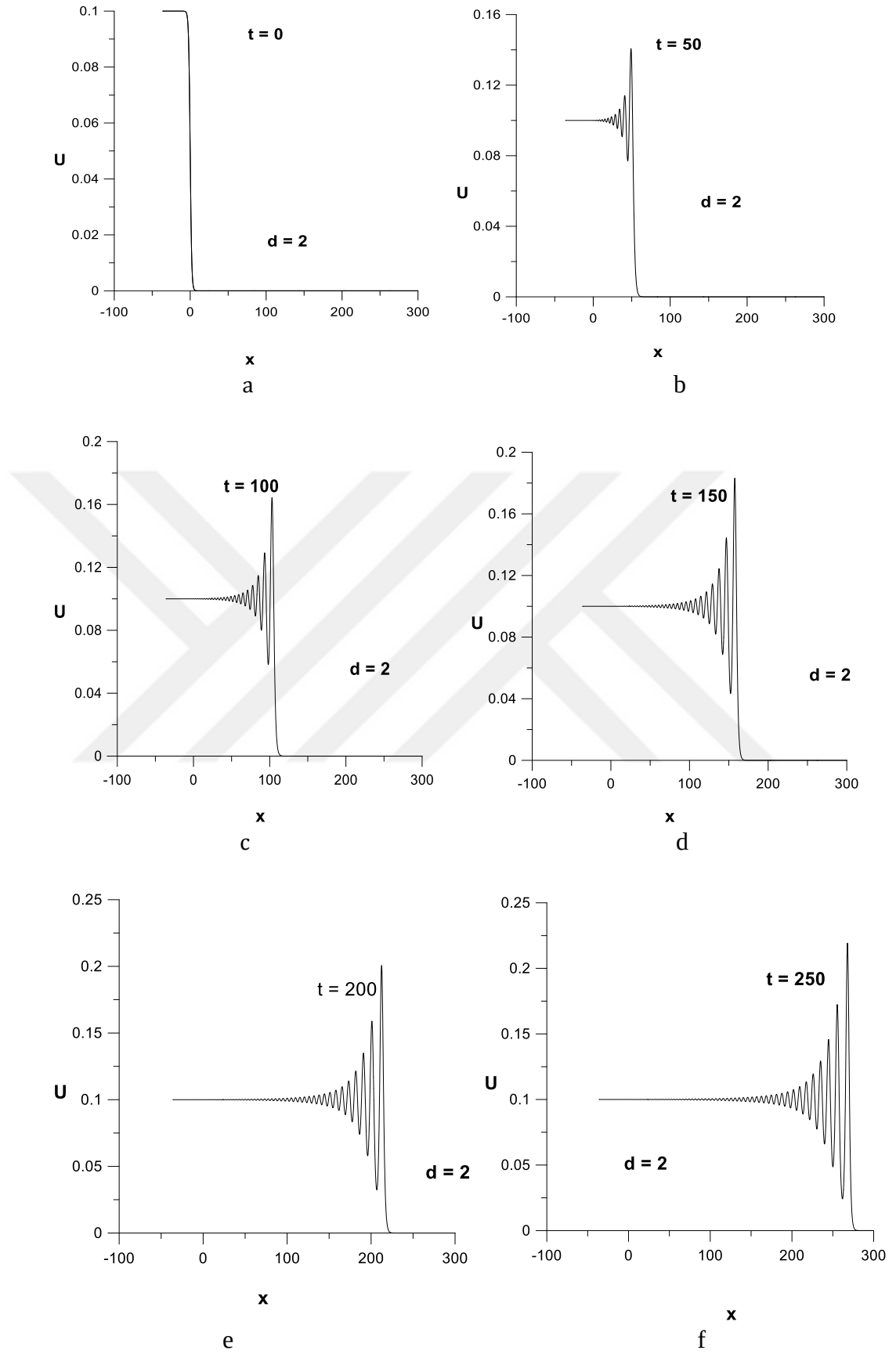
Bu kısımda, RLW denkleminin

$$U(x, 0) = 0.5U_0 \left[1 - \tanh\left(\frac{x - x_c}{d}\right) \right]$$

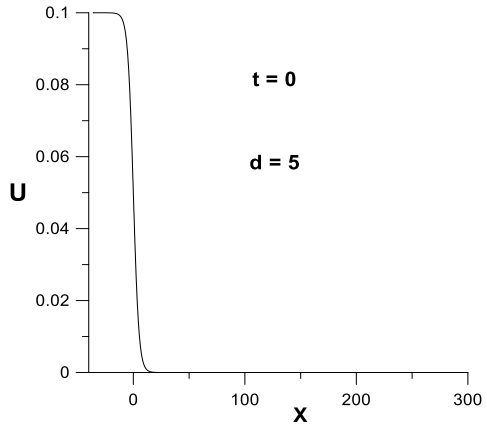
başlangıç şartı altındaki çözümleri incelenecektir. Bu problemde $x = x_c$ merkezli su seviyesindeki değişimin büyüklüğü U_0 ile gösterilmiştir ve durgun su ile derin su arasındaki eğim d olarak ölçülmüştür.

Denklemin sınır koşullarında $\beta_1 = U_0$, $\beta_2 = 0$ alınarak elde edilen çözümlerin farklı zamanlardaki grafikleri verilmiştir.

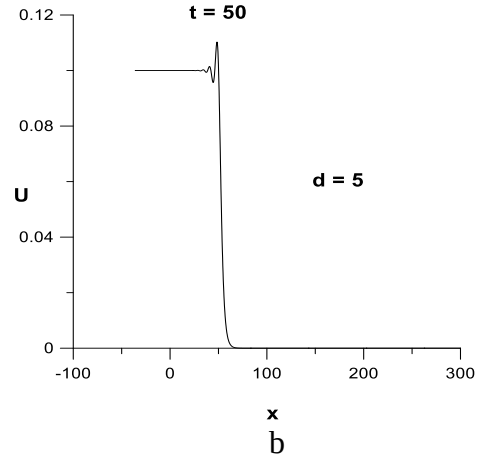
Şekil 5.5 ile $d = 2$ için ve Şekil 5.6 ile de $d = 5$ için çözüm profilleri verilmiştir.



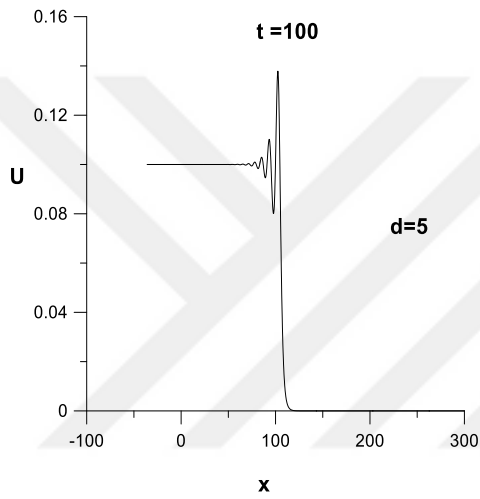
Şekil 5.5: (a), (b), (c), (d), (e), (f) dalga undulasyonu $d=2$



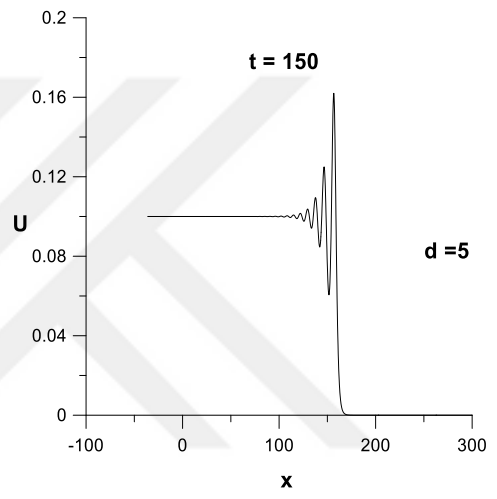
a



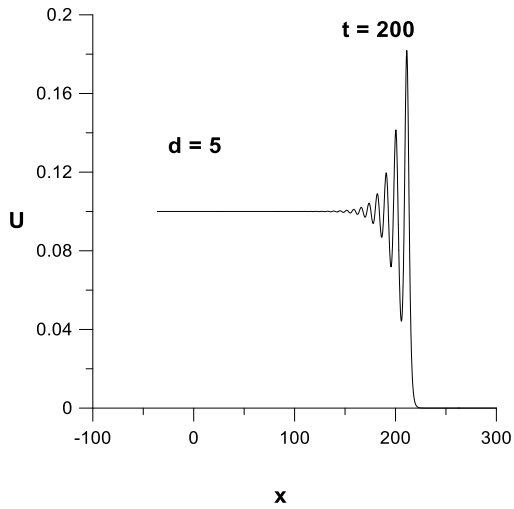
b



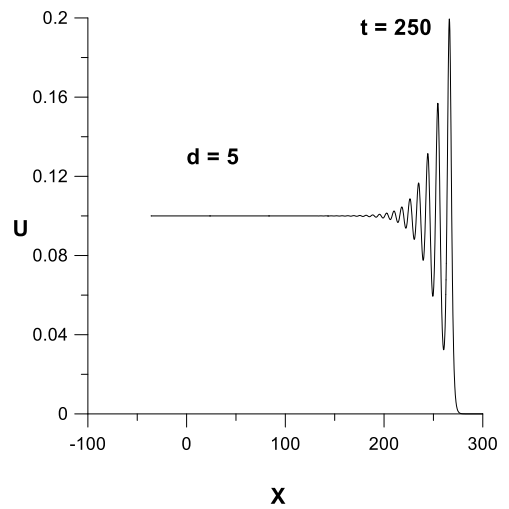
c



d



e



f

Şekil 5.6: (a), (b), (c), (d), (e), (f) dalga undulasyonu $d=5$

Dalga undulasyonu için hesaplanan korunum sabitleri iki farklı d değeri için Çizelge 5.5 ile verilmiştir.

Çizelge 5.5: Dalga undulasyonu için korunum sabitleri

Zaman	C_1	C_2	C_3
d=2			
0	3.612000	0.351478	1.088220
50	9.003647	0.904080	2.801418
100	14.417842	1.461618	4.529980
150	19.861951	2.025945	6.279951
200	25.341676	2.598775	8.056942
250	30.862500	3.182114	9.867540
d=5			
0	3.612000	0.336311	1.040970
50	8.991926	0.886862	2.748170
100	14.379753	1.438867	4.459666
150	19.785774	1.994749	6.183092
200	25.219520	2.556896	7.926207
250	30.687597	3.127201	9.695225

Korunum sabitlerinde ortaya çıkan değişim aşağıdaki şekilde analitik olarak hesaplanabilir [33].

$$M_1 = \frac{d}{dt} C_1 = \frac{d}{dt} \int_a^b U dx = U_0 + \frac{\varepsilon}{2} U_0^2 = 0.1075$$

$$M_2 = \frac{d}{dt} C_2 = \frac{d}{dt} \int_a^b \left(U^2 + \mu (U_x)^2 \right) dx = U_0^2 + \frac{2\varepsilon}{3} U_0^3 = 0.011$$

$$M_3 = \frac{d}{dt} C_3 = \frac{d}{dt} \int_a^b \left(U^3 + 3U^2 \right) dx = 3U_0^2 + (1 + 2\varepsilon) U_0^3 + \frac{3\varepsilon}{4} U_0^4 = 0.034113$$

Bu değerlerin önerilen yöntem için nümerik değerleri ise

$$M_i^N = \frac{C_i(t=250) - C_i(t=0)}{\text{running time}}, \quad i=1,2,3$$

$$M_1^N = \frac{C_1^{250} - C_1^0}{250}, \quad M_2^N = \frac{C_2^{250} - C_2^0}{250}, \quad M_3^N = \frac{C_3^{250} - C_3^0}{250}$$

ile hesaplanabilir. Buna göre, $d = 2$ için

$$M_1^n = 0.109002, \quad M_2^n = 0.011322544, \quad M_3^n = 0.03511728$$

ve $d = 5$ için

$$M_1^n = 0.108302388, \quad M_2^n = 0.01116356, \quad M_3^n = 0.03461702$$

bulunur. Böylece nümerik değerlerin teorik olanlarla karşılaştırıldığında birbirlerine yakın değerler oldukları görülür.

6. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında RLW denkleminin nümerik çözümleri, en küçük kareler sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edildi. Sonlu elemanlar yönteminde taban fonksiyonu olarak kübik B-spline fonksiyonlar seçildi. Problemin zaman ayrıştırmasında Crank-Nicolson yöntemi kullanıldı. Bu sayede RLW denklemi, ardışık iki zaman adımını içeren bir tekrarlı bağıntı haline getirildi. von-Neumann kararlılık analizi ile yöntemin kararlı olduğu görüldü. Sunulan nümerik yöntem, ilk olarak analitik çözümü bilinen tek soliter problemi üzerinde test edildi ve farklı dalga hızları için sonuçlar verildi. Daha sonra ise dalga undulasyonu çalışıldı. Elde edilen sonuçlar literatürde yer alan bazı çalışmalar ile karşılaştırıldı ve en küçük kareler yönteminin kabul edilebilir sonuçlar verdiği gözlemlendi. Nümerik yöntemin uygulanması ile ortaya çıkan matris denkleminde matrislerin band matris oluşu hesaplama maliyeti açısından bir avantaj olarak not edilebilir. Diğer yandan yapılan hesaplamalar sonucunda yöntemin tek soliter dalga ve dalga undulasyonunda iyi sonuçlar verdiği görülürken iki soliter dalgaın çarpışması probleminde iyi sonuç vermediği görüldü. Bu ise bir zayıf yön olarak vurgulanabilir.

KAYNAKÇA

1. Ito, K. ve Kappel, F. 2002. Evolution equations ve approximations (Vol. 61).World Scientific.
2. Walker, J.A. 1980. Dynamical Systems ve Evolution Equations, volume 20 of Mathematical Concepts ve Methods in Science ve Engineering.
3. Li, Y. A. Hyman, J. M, ve Choi, W. 2004. A numerical study of the exact evolution equations for surface waves in water of finite depth. Studies in Applied Mathematics, 113, 3,303-324.
4. Uğurlu, Y. ve İnan, İ. E.2014.Traveling Wave Solutions of the RLW ve Boussinesq Equations. New Trends in Mathematical Sciences, 2, 2, 69-77.
5. Lamb Jr, G. L. 1980.Elements of soliton theory. New York, Wiley-Interscience, 1980. 300. \$29.95.
6. Lomdahl, P. S. 1984. What is a soliton. Los Alamos Science, 10, 27-31.
7. Hereman, W. 2012. Shallow water waves ve solitary waves. InMathematics of Complexity ve Dynamical Systems .1520-1532.Springer New York.
8. Grimshaw, R. ve Iooss, G. 2003. Solitary waves of a coupled Korteweg-de Vries system. Mathematics ve Computers in Simulation, 62, 1, 31- 40.
9. Grimshaw, R. (Ed.). 2007. Solitary waves in fluids (Vol. 47). Wit Pr/Computational Mechanics.
10. Peregrine, D. H. 1966. Calculations of the development of an undular bore.Journal of Fluid Mechanics, 25, 02, 321-330.
11. Al-Zaid, N. A. Bakodah, H. O., ve Hendi, F. A. 2013. Numerical Solutions of the Regularized Long-Wave (RLW) Equation Using New Modification of Laplace-Decomposition Method. Advances in Pure Mathematics, 3, 01, 159.
12. Dogan, A. 2001. Numerical solution of regularized long wave equation using Petrov-Galerkin method. Communications in numerical methods in engineering, 17, 7, 485-494

13. Dağ, İ. Saka, B. ve Irk, D. 2004. Application of cubic B-splines for numerical solution of the RLW equation. Applied mathematics ve computation, 159, 2, 373-389.
14. Dağ, İ. ve Özer, M.N. 2001. Approximation of the RLW equation by the least square cubic B-spline finite element method. Applied Mathematical Modelling, 25, 3, pp.221-231.
15. Gardner, L.R.T. Gardner, G.A. ve Dag, I. 1995. AB-spline finite element method for the regularized long wave equation. Communications in numerical methods in engineering, 11, 1, 59-68.
16. Ramos, J. I. 2006. Explicit finite difference methods for the EW ve RLW equations. Applied mathematics ve computation, 179, 2, 622-638
17. Kutluay, S. ve Esen, A. 2006. A finite difference solution of the regularized long-wave equation. Mathematical Problems in Engineering, 2006
18. Ben-Yu, G. ve Manoranjan, V. S. 1985. A spectral method for solving the RLW equation. IMA Journal of Numerical Analysis, 5, 3, 307-318
19. Burnett, D.S. 1987. Finite Element Analysis - From Concepts to Applications AddisonWesleyPublishing Company, 305-327
20. Hrennikoff, A. 1941. Solution of problems of elasticity by the framework method. Journal of applied mechanics, 8, 4, 169-175.
21. Argyris, J. H. 1954, ve 1955. Energy Theorems ve Structural Analysis, Aircraft Engineering.
22. Argyris, J. H. 1955. Energy theorems ve structural analysis: a generalized discourse with applications on energy principles of structural analysis including the effects of temperature ve non-linear stress-strain relations part I. General theory. Aircraft engineering ve Aerospace Technology, 27, 2, 42-58.
23. Turner, M. J. 2012. Stiffness ve deflection analysis of complex structures, journal of the Aeronautical Sciences.

24. Clough, R. W. 1960. The Finite Element Method in Plane Stress Analysis, Proceedings, American Society of Civil Engineers, 2nd Conference on Electronic Computation, Pittsburgh, PA, 345-378.
25. Martin, H. C. 1961. 'Plane Elasticity Problems ve the Direct Stiffness Method. The trend in Engineering, 13, 5-19.
26. Melosh, R. J. 1963. Structural analysis of solids. Journal of the Structural Division, 89, 4, 205-248.
27. Zumpe, G. 1965. JH Argyris, Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis. (Progress in Aeronautical Sciences, Volume 4) XIII+ 187 S. m. Abb. u. Fig. Oxford/London/New York/Paris 1964. Pergamon Press. Preis geb. 60 s. net. ZAMM-Journal of Applied Mathematics ve Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 45, 5, 366-367.
28. Mechanics/Zeitschrift für Angewvete Mathematik und Mechanik, 45, 5, 366-367.
29. Kardestuncer, H. ve Norrie, D. H. 1987. Finite element hvebook. McGraw-Hill, Inc.
30. Prenter, P. M. 2008. Splines ve variational methods. Courier Corporation
31. Joy, K. I. 2008. Definition of A B-Spline Curve.
32. Saka, B. Şahin, A., ve Dağ, İ. 2011. B-spline collocation algorithms for numerical solution of the RLW equation. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 27, 3, 581-607.
33. Dağ, İ. ve Özer, M. N. 2001. Approximation of the RLW equation by the least square cubic B-spline finite element method. Applied Mathematical Modelling, 25, 3, 221-231.
34. Saka, B. Dağ, İ. ve Doğan, A. 2004. Galerkin method for the numerical solution of the RLW equation using quadratic B-splines. International Journal of Computer Mathematics, 81, 6, 727-739.

35. Kutluay, S. ve Esen, A. 2006. A finite difference solution of the regularized long-wave equation. *Mathematical Problems in Engineering*, 2006.
36. Dağ, İ. 2000. Least-squares quadratic B-spline finite element method for the regularised long wave equation. *Computer Methods in Applied Mechanics ve Engineering*, 182, 1, 205-215.
37. Gardner, L. R. T. Gardner, G. A, ve Dag, I. 1995. AB-spline finite element method for the regularized long wave equation. *Communications in numerical methods in engineering*, 11, 1, 59-68.
38. Gardner, L. R. T, ve Dag, I. 1995. The boundary-forced regularised long-wave equation. *Il Nuovo Cimento B* 1971-1996, 110, 12, 1487-1496.
39. Zaki, S.I.2001. Solitary waves of the splitted RLW equation. *Computer Physics Communications*, 138, 1, 80-91.
40. Dag, İ. Doğan, A, ve Saka, B. 2003. B-spline collocation methods for numerical solutions of the RLW equation. *International journal of computer mathematics*, 80, 6, 743-757.
41. Saka, B, ve Dag, I. 2005. A collocation method for the numerical solution of the RLW equation using cubic B-spline basis. *Arabian Journal for Science ve Engineering*, 30, 1, 39-50.
42. Jain, M. K. *Numerical solution of differential equations*. 1984.
43. Saka, B. 2002, RLW ve K-S denklemlerinin B-spline kolokeyşin metodları ile çözümleri, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi.
44. De Boor, C. De Boor, C. De Boor, C. ve De Boor, C. 1978. A practical guide to splines (Vol. 27, p. 325). New York: Springer-Verlag.
45. Schoenberg, I. J. 1946. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, Part B: On the problem of osculatory interpolation, a second class of analytic approximation formulae. *Quart. Appl. Math*, 4, 2, 112-141.
46. Prenter, P. M. 2008. *Splines ve variational methods*. Courier Corporation.

47. Dag, I. 1994, Studies of B-spline finite elements, PhD thesis, University of Wales, Bangor, U.K.
48. Şahin, A. 2009. Numerical Solutions of the Reaction-Diffusion Equations with B-spline Finite Element Method. Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı:

REBAZ HADI HAMA AMEEN

Doğum tarihi/doğum yeri:

01.08.1984 Sulaimani/ Iraq

E-mail:

rebazhady84@gmail.com

Eğitim:

**lisans. in Sulaimani University, Faculty of
Science ve Science Education, mathematics
Dept. Sulaimani/IRAQ (2007-2013).**

Yüksek lisans:

AksarayUniversity, 2014-2016