

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORAY OR

EN KÜÇÜK KARELER YAKLAŞIMI

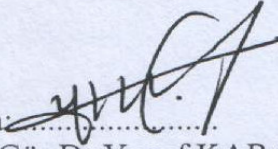
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EN KÜÇÜK KARELER YAKLAŞIMI

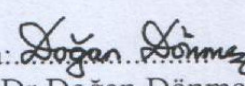
ORAY OR
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 08/06/2006 Tarihinde Aşağıda Adı Geçen Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği İle Kabul Edilmiştir.

İmza: 

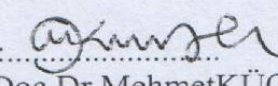
Öğr.Gör.Dr.Yusuf KARAKUŞ

DANIŞMAN

İmza: 

Doç.Dr.Doğan Dönmez

ÜYE

İmza: 

Yrd.Doç.Dr.Mehmet KÜÇÜKASLAN

ÜYE

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında Hazırlanmıştır.

Kod No: 6811




Prof.Dr.Aziz ERTUNÇ
Enstitü Müdürü

İmza ve Mühür

Not : Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin ve şekillerin kaynak gösterilmeden kullanımı ,5846 sayılı Fikir ve Sanat eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EN KÜÇÜK KARELER YAKLAŞIMI

ORAY OR

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Öğr.Gör.Dr.Yusuf Karakuş

Yıl : 2006, Sayfa:98

Jüri : Öğr.Gör.Dr.Yusuf KARAKUŞ

Doç.Dr.Doğan Dönmez

Yrd.Doç.Dr.Mehmet KÜÇÜKASLAN

Bu çalışmada Yaklaşım Teorisi içinde önemli yeri olan ‘En Küçük Kare Yaklaşımları incelenmiştir. Ayrıca, En Küçük Kare Yaklaşımları ile ‘Gram Matrisleri ve Determinantları’ arasındaki ilişki de incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: İç Çarpım Uzayı , En Küçük Kareler yaklaşımı, Normlu Uzaylar , Polinomlarla yaklaşım, Fourier Serileri.

ABSTRACT

MSc THESIS

LEAST SQUARES APPROXIMATION

ORAY OR

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor : Öğr.Gör.Dr.Yusuf KARAKUŞ

Year : 2006, Pages:99

Jury : Öğr.Gör.Dr.Yusuf Karakuş

Assoc.Prof.Doğan DÖNMEZ

Yrd.Doç.Dr.Mehmet KÜÇÜKASLAN

In this thesis, Least Square Approximation, which as got an important part in approximation theory, is studied in details. In addition, the relations between Least Square Approximation and Gram Matrices and Determinants are studied.

Key Words : Inner Product Space , Least Squares Approximation,
Normed Spaces , Approximation by Polynomials , Fourier Series.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması sırasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, çalışmanın her aşamasında yardımlarını esirgemeyen ve çalışmanın tamamlanmasını sağlayan , saygıdeğer hocam Sayın Öğr. Gör. Dr. Yusuf KARAKUŞ'a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca , yardımlarından dolayı tüm Matematik Bölümü akademik personeline ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZ.....	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	2
2.1. İç Çarpım Uzayları.....	2
2.2. İç Çarpım Uzayları İçin Açık Geometri.....	8
2.3. Ortonormal Sistemler.....	11
2.4. Fourier (Ortogonal) Açılımları.....	21
2.5. Fourier Açılımlarının Minimum Özellikleri.....	24
3. EN KÜÇÜK KARELER YAKLAŞIMI.....	29
3.1. En Küçük Kareler Yaklaşımı.....	29
3.2. Normal Denklemler.....	36
3.3. Gram Matrisi ve Determinantı.....	39
3.4. Gram Determinantın Özellikleri.....	60
3.5. Kapalılık ve Sonuçları.....	67
3.6. Tam İç Çarpım Uzayının Geometrik Özellikleri.....	86
KAYNAKLAR.....	94
ÖZGEÇMİŞ.....	95

1.GİRİŞ

Yaklaşım Teorisi genel hatları ile Matematiksel Analiz içinde yer alır. Bu Teori içinde önemli bir yeri olan ‘ En Küçük Kareler Yaklaşımı’ bu tezde incelenmiştir.

Tezin birinci bölümünde iç çarpım uzaylarındaki en iyi yaklaşım yani En Küçük Kareler Yaklaşımının yanında , en küçük kareler yaklaşımı ile Gram Matrisi ve Determinantı arasındaki ilişki de incelenmiştir.

Tezin ikinci bölümünde çalışmamızın kaynağını oluşturan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde ise bazı uzaylarda En Küçük Kareler yaklaşımı, normal denklemler , Gram Matrisi ve Determinantı , kapalılık kavramı ve tam iç çarpım uzayı konularına yer verilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1 İç Çarpım Uzayları

En Küçük Kareler Yaklaşımı'nı tanımlamadan önce iç çarpım uzayları tanımlanarak temel özellikleri verilecektir.

Tanım 2.1.1 : X bir reel vektör uzayı olsun. $X \times X$ kümesinden R reel sayılar kümesine tanımlanan ve $\forall x, y, z \in X$ için ;

$$\left. \begin{array}{ll} a) & (x + y, z) = (x, z) + (y, z) \quad (Lineerlik) \\ b) & (x, y) = (y, x) \quad (Simetri) \\ c) & (\alpha x, y) = \alpha(x, y) \quad (Homojenlik) \\ d) & (x, x) \geq 0 \quad , \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (Pozitiflik) \end{array} \right\} \quad (2.1.1)$$

özelliklerini sağlayan $(\cdot, \cdot)$ fonksiyonuna bir **iç çarpım** ve X vektör uzayına da bir **iç çarpım uzayı** denir.

Benzer tanım $\mathcal{C}$ kompleks sayılar kümesi olmak üzere kompleks vektör uzayları için de yapılabilir. Ancak bu durumda (x, y) iç çarpımı bir kompleks sayı olur ve 2.1.1(b) eşitliği

$$b') \quad (x, y) = \overline{(y, x)} \quad (\text{Hermitiyen Simetri}) \quad (2.1.1)$$

b' eşitliği ile yer değiştirir. Burada sağdaki üst çizgi kompleks eşleniği göstermektedir.

Örnek 2.1.1: $X = R^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ve $w_i, i = 1, \dots, n$ pozitif sayıları olsun. R^n 'de (x, y) iç çarpımı

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n w_i x_i y_i$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.1.2: $X = \mathbb{C}^n$ kompleks Öklid uzayı , $x, y \in \mathbb{C}^n$ ve $w_i, i = 1, \dots, n$ pozitif sayılar olmak üzere , $\mathbb{C}^n$ 'de (x, y) iç çarpımı

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n w_i x_i \overline{y_i}$$

şeklinde tanımlanır.

Gerçekten ;

$$\begin{aligned} \text{a) } (x + y, z) &= \sum_{i=1}^n w_i (x_i + y_i) \overline{z_i} = \sum_{i=1}^n w_i (x_i \overline{z_i} + y_i \overline{z_i}) = \sum_{i=1}^n w_i (x_i \overline{z_i}) + \sum_{i=1}^n w_i (y_i \overline{z_i}) \\ &= (x, z) + (y, z) \end{aligned}$$

$$\text{b) } (x, y) = \sum_{i=1}^n w_i (x_i \overline{y_i}) = \sum_{i=1}^n \overline{\overline{w_i (x_i \overline{y_i})}} = \sum_{i=1}^n \overline{w_i (y_i \overline{x_i})} = \overline{(y, x)}$$

$$\text{c) } (\alpha x, y) = \sum_{i=1}^n w_i (\alpha x_i) \overline{y_i} = \alpha \sum_{i=1}^n w_i x_i \overline{y_i} = \alpha (x, y)$$

$$\text{d) } (x, x) = \sum_{i=1}^n w_i x_i \overline{x_i} = w_i (x_1 \overline{x_1} + \dots + x_n \overline{x_n}) = w_i (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2) \geq 0 \quad (*)$$

olur.

$(x, x) = 0$ olsun. Bu durumda w_i pozitif bir sayı olduğundan $(*)$ eşitliğinde her $x_i = 0$ olur. Yani ;

$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ dır. O halde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ olur.

4 özellik sağlanır ve Öklid uzayının bir iç çarpım uzayı olduğu görülür.

Örnek 2.1.3: $X = C[a, b]$ olmak üzere eğer $x = f(t)$ ve $y = g(t)$ ise (x, y) iç çarpımı

$$(x, y) = (f, g) = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.1.4: $X = L^2[a, b]$ olmak üzere bu uzay üzerindeki iç çarpım;

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1.1 (Schwarz Eşitsizliği) :

Bir iç çarpım uzayında

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$$

dır. Eşitlik hali ancak ve ancak x ve y lineer bağımlı ise mümkündür.

İspat : Eğer $y = 0$ ise $(x, 0) = 0$ olup ispat açıktır.

λ keyfi bir kompleks sayı olsun. (1.1.1)(d) ' den

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) \geq 0$$

dır. Bu ifade

$$(x, x) + \lambda(x, y) + \lambda\lambda(y, y) \geq 0$$

şeklinde yazılır. Bu eşitsizlik özellikle

$$\lambda = -\frac{(x, y)}{(y, y)}$$

sayısı için doğrudur. Böylece

$$(x, x) - \frac{(x, y)(y, x)}{(y, y)} - \frac{(x, y)(y, x)}{(y, y)} + \frac{(x, y)(y, x)}{(y, y)^2}(y, y) \geq 0$$

dır. O zaman

$$(x, x) - \frac{(x, y)(y, x)}{(y, y)} \geq 0$$

olur. Buradan her iki taraf (y, y) ile çarpılırsa ;

$$(x, x)(y, y) - (x, y)(y, x) \geq 0$$

$$(x, y)(y, x) \leq (x, x)(y, y)$$

olur. Şimdi (2.1.1)(b') kullanılırsa ,

$$(x, y)\overline{(x, y)} \leq (x, x)(y, y)$$

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$$

bulunur. Farzedelim ki burada

$$|(x, y)|^2 = (x, x)(y, y)$$

eşitlik hali sağlansın. Eğer $y = 0$ olursa eşitlik açıktır.

O halde $y \neq 0$ alalım. Bu durumda $\lambda = -(x, y)/(y, y)$ olmak üzere

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) = 0$$

olur. Böylece (2.1.1)(d) 'den

$$x + \lambda y = 0 \Rightarrow x = -\lambda y \Rightarrow x = \frac{(x, y)}{(y, y)} y$$

bulunur. Sonuç olarak $x = \alpha y$ ise o zaman;

$$|(x, y)|^2 = |\alpha|^2 (y, y)^2 = (x, x)(y, y)$$

dır.

Teorem 2.1.2: X bir iç çarpım uzay ise

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

eşitliği X 'de bir norm tanımlar ve X bu norm ile bir normlu vektör uzayı olur.

İspat : $\sqrt{(x, x)}$ niceliği norm şartlarını ;

$$i) \|x\| \geq 0$$

$$i) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$iii) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad \alpha \text{ skaler}$$

$$iv) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{Üçgen eşitsizliği})$$

sağlamalıdır. İlk 3 şart aşıkardır.Üçgen eşitsizliğini sağladığını gösterelim.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) \\ &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \\ &= \|x\|^2 + 2R(x, y) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

dır ve böylece

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

olur.

Teorem 2.1.3 (Paralelkenar Teoremi):

Bir X iç ve $\|\cdot\|$ Teorem 2.1.2 'deki gibi tanımlansın.Bu durumda;

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

dır.

$$\begin{aligned} \text{İspat: } \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= (x + y, x + y) + (x - y, x - y) \\ &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) + (x, x) - \\ &\quad - (x, y) - (y, x) + (y, y) \end{aligned}$$

$$= 2(\| \cdot \| ^2 \cdot \| \cdot \| ^2)$$

$$= 2 \| x \| ^2 + 2 \| y \| ^2$$

dir.

Bu teorem aynı zamanda X üzerindeki normun bir iç çarpım tarafından üretilip üretilmediğini söyler.

2.2. İç Çarpım Uzayları için Açı Geometri

Reel iç çarpım uzayındaki sıfırdan farklı iki eleman için 2.1.2 'den

$$-1 \leq \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|} \leq 1$$

olur. Sonuç olarak

$$\cos \theta = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}$$

değerini sağlayan tek bir $\theta \in [0, \pi]$ değeri vardır.

Tanım 2.2.1: Reel bir iç çarpım uzayındaki x ve y elemanları arasında kalan θ açısı

$$\cos \theta = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (2.2.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Kompleks iç çarpım olması durumunda bu tanım

$$\cos \theta = \frac{|(x, y)|}{\|x\| \|y\|} \quad (2.2.2)$$

Burada özellikle iki durum dikkate değerdir.

A) $\theta = 0$ ise; bu durumda $\cos \theta = 1$ ve buradan $|(x, y)| = \|x\| \|y\|$ olur. Teorem 2.1.1' e göre x ve y elemanları lineer bağımlıdır: $\alpha x = y \beta$. Buradan da x ve y ' nin paralel olduklarını söyleyebiliriz.

B) $\theta = \pi/2$ ise ; x ve y elemanları dik (ortogonal) tir. Çünkü $\cos \theta = 0$ olup

$$\cos \theta = \frac{|(x, y)|}{\|x\| \|y\|} = 0$$

olur. Bu da gösterir ki $(x, y) = 0$ 'dır.

Tanım 2.2.2: $x \perp y$ ancak ve ancak $(x, y) = 0$ 'dır.

Tanıma dayalı olarak şunları söyleyebiliriz:

- a) Kendisine ortogonal olan tek eleman 0 'dır.
- b) $x \perp y \Rightarrow y \perp x$ 'dir.
- c) $y \perp x_1, x_2, \dots, x_n$ ise $a_1, \dots, a_n \in R$ olmak üzere, $y \perp a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ olur.

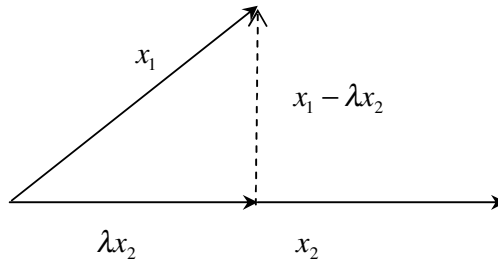
Örnek 2.2.1 (Kosinüs Teoremi): x ve y reel bir iç çarpım uzayının elemanları olmak üzere,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|\cos\theta$$

dır.

$$\begin{aligned} \text{Çözüm: } \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \\ &= \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\|\cos\theta + \|y\|^2 \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.



Şekil 2.2.1

x_1 ve x_2 sıfırdan farklı elemanlar olsunlar. λx_2 , x_1 'in x_2 üzerine izdüşümü olacak şekilde λ skalerini seçelim. O zaman

$$\lambda x_2 \perp x_1 - \lambda x_2$$

dır.Bunun anlamı

$$(\lambda x_2, x_1 - \lambda x_2) = 0$$

olmasıdır. O halde

$$\lambda(x_2, x_1) - \lambda \bar{\lambda}(x_2, x_2) = 0 \quad \text{ve} \quad \lambda = \frac{(x_1, x_2)}{(x_2, x_2)} x_2$$

dır.Bunun anlamı $x_2 = 0$ olmak üzere;

$$x_1 \text{ 'in } x_2 \text{ üzerine izdüşümü} = \frac{(x_1, x_2)}{(x_2, x_2)} x_2 \quad (2.2.3)$$

dir. Bu eşitlik izdüşümü kısaca tanımlamamıza yardımcı olur.

x_2 elemanı $\|x_2\| = (x_2, x_2) = 1$ uzunluk değerine sahipse o zaman

$$x_1 \text{ 'in } x_2 \text{ üzerine izdüşümü} = (x_1, x_2) x_2 \quad (2.2.4)$$

dir.

2.3 Ortonormal Sistemler

Tanım 2.3.1: S , X iç çarpım uzayının elemanlarının bir kümesi olsun. Eğer $\forall x, y \in S$ için

$$(x, y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ 1 & x = y \end{cases} \quad x, y \in S \quad (2.3.1)$$

ise, S kümesine ortonormaldir denir.

Ancak, eğer $x \neq y$ için $(x, y) = 0$ ise bu kümeye ortogonaldır denir.

Örnek 2.3.1: R^n 'de (x, y) iç çarpımı $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ olmak üzere

$$(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$$

birim vektörleri bir ortonormal küme oluştururlar.

Örnek 2.3.2: $C[-\pi, \pi]$ veya $L^2[-\pi, \pi]$ uzayında $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ iç çarpımıyla birlikte

$$(2\pi)^{-1/2}, (\pi)^{-1/2} \cos x, (\pi)^{-1/2} \sin x, (\pi)^{-1/2} \cos 2x, (\pi)^{-1/2} \sin 2x, \dots,$$

fonksiyonları ortonormal bir küme oluştururlar.

Örnek 2.3.3: $C[-1, 1]$ veya $L^2[-1, 1]$ 'de $(f, g) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x)g(x)dx$

iç çarpımı ile birlikte,

$$U_m(x) = \frac{\sin[(m+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}, \quad m = 0, 1, \dots,$$

fonksiyonları ortogonal bir küme oluşturur. Gerçekten ;

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_m(x) U_n(x) dx = \int_0^\pi \sin(m+1)\theta \sin(n+1)\theta d\theta = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi/2, & m = n \end{cases}$$

dir. O halde $\sqrt{2/\pi} U_m(x)$ fonksiyonları ortogonaldir.

Teorem 2.3.1 (Pisagor Teoremi):

Eğer $x_1, x_2, \dots, x_n$ ' ler ortogonal ise o zaman

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2 \quad (2.3.2)$$

dir.

İspat : x_i ' ler ortogonal olduğundan $j \neq k$ iken $(x_j, x_k) = 0$ dır. Dolayısıyla

$$\left\| \sum_{j=1}^n x_j \right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{j=1}^n x_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i, x_j) = \sum_{j=1}^n (x_j, x_j) = \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2$$

olup 2.3.2 sağlanır.

Sonuç 2.3.2 : $x \perp y$ ise $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ dir.

İspat : Teorem 2.3.1 ' de , $n = 2$ için

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

olur. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.3.3: Sıfırdan farklı $x_1, x_2, \dots, x_n$ ortogonal elemanların kümesi lineer bağımsızdır.

İspat : Farz edelim ki $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0, a_i \neq 0$ olsun. Yani a_i 'lerin hepsi sıfır olmasın. O zaman

$$0 = (0, x_k) = (a_1x_1 + \dots + a_nx_n, x_k) = a_k(x_k, x_k)$$

olur. Bu ise $\|x_k\|^2 = 0 \Rightarrow x_k = 0$ olduğunu söyler. Bu ise hipotez ile çelişir.

Bu teoremin tersi önemlidir. Yani lineer bağımsız bir küme ortonormalleştirilebilir.

Teorem 2.3.4: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ sonlu veya sonsuz elemlerin bir dizisi öyle ki her bir $x_1, x_2, \dots, x_n$ lineer bağımsız olsun. O zaman ;

$$\left. \begin{aligned} x_1^* &= a_{11}x_1 \\ x_2^* &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ x_3^* &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (2.3.3)$$

ve

$$(x_i^*, x_j^*) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (2.3.4)$$

olacak şekilde

$$a_{ij}, \quad 1 \leq j \leq i$$

sabitlerini bulabiliriz.

İspat: Ardışık olarak ,

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= x_1 & \text{ve} & & x_1^* &= y_1 / \|y_1\| \\ y_2 &= x_2 - (x_2, x_1^*) x_1^* & \text{ve} & & x_2^* &= y_2 / \|y_2\| \\ &\vdots & & & & \\ y_{n+1} &= x_{n+1} - \sum_{i=1}^n (x_{n+1}, x_i^*) x_i^* & \text{ve} & & x_{n+1}^* &= y_{n+1} / \|y_{n+1}\| \end{aligned} \right\} \quad (2.3.5)$$

kuralım. Bu yapının tekrar edilmesinden y_{n+1} ve böylece x_{n+1}^* 'in $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ 'in bir lineer kombinasyonu olduğu açıktır. Madem ki y_i sıfır olamaz, o halde

$\|y_i\|$ 'de sıfır olamaz. Bu işlem y_n 'i verir ve daha sonra y_n , $\frac{1}{\|y_n\|}$ ile

çarpılarak normu 1 olan bir vektör elde edilir. $y_n = 0$ olsaydı son satır x_n^* 'in, $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$ cümlesinin bir lineer kombinasyonu olduğunu gösterirdi. Dolayısıyla $x_n, x_1, \dots, x_{n-1}$ 'in bir lineer kombinasyonu olurdu ki bu durum $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 'in lineer bağımsız olmasıyla çelişir. x_i^* 'lar normaldir:

$$(x_i^*, x_i^*) = (y_i / \|y_i\|, y_i / \|y_i\|) = \frac{1}{\|y_i\|^2} (y_i, y_i) = 1$$

Şimdi de x_{n+1} (veya y_{n+1}) ile $x_n^*, x_{n-1}^*, \dots, x_1^*$ 'in ortogonal olduğunu göstermeliyiz.

Basit bir hesapla $(y_2, x_1^*) = 0$ dır.

Farzedelim ki $i \leq n$, $j < i$ için,

$$(y_i, x_j^*) = 0,$$

olsun. O zaman $j \leq n$ için,

$$\begin{aligned}
(x_{n+1}, x_j^*) &= (x_{n+1} - \sum_{k=1}^n (x_{n+1}, x_k^*) x_k, x_j^*) \\
&= (x_{n+1}, x_j^*) - \sum_{k=1}^n (x_{n+1}, x_k^*) (x_k, x_j^*) \\
&= (x_{n+1}, x_j^*) - (x_{n+1}, x_j^*) \\
&= 0
\end{aligned}$$

dır.

Sonuç 2.3.5 : a_{ii} başkatsayıları pozitifdir. $a_{ii} = (\|y_{ii}\|)^{-1}$ dır.

Sonuç 2.3.6 :

$$\begin{aligned}
x_1 &= b_{11} x_1^* \\
x_2 &= b_{21} x_1^* + b_{22} x_2^* \\
&\vdots \\
x_n &= b_{n1} x_1^* + b_{n2} x_2^* + \dots + b_{nn} x_n^*
\end{aligned}$$

olacak şekilde $b_{ii} > 0$ olmak üzere

$$b_{ij}, \quad 1 \leq j \leq i$$

sabitlerini bulabiliriz.

İspat: $x_1 = \frac{1}{a_{11}} x_1^* \quad \text{öyle ki} \quad b_{11} = \frac{1}{a_{11}}$

$$x_2 = \frac{-a_{21}}{a_{22}} x_1 + \frac{1}{a_{22}} x_2^*$$

$$= -\frac{a_{21}}{a_{22}a_{11}} x_1^* + \frac{1}{a_{22}} x_2^* \quad \text{öyle ki} \quad b_{22} = \frac{1}{a_{22}}$$

dır. Tümevarımla, $a_{ii} > 0$ için ;

$$c_j = \frac{1}{\|y_j\|} > 0 \quad j = 1, 2, \dots$$

dır.

Sonuç 2.3.7 : $x_n^* \perp x_1, x_n^* \perp x_2, \dots, x_n^* \perp x_{n-1}$ dır.

İspat : $x_k = b_{k1}x_1^* + b_{k2}x_2^* + \dots + b_{kk}x_k^*$

öyle ki $k < n$ olmak üzere

$$(x_n^*, x_k) = \left(x_n^*, \sum_{i=1}^n b_{ki}x_i^* \right) = \sum_{i=1}^n b_{ki}(x_n^*, x_i^*) = 0$$

dır.

Eğer $x_1, x_2, \dots, x_n$ ve $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ (2.3.3) tarafından bağlandırılmış ve sonrakilerin ortonormal olması istenir ve $a_{kk} > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$ ise o zaman a_{ij} sabitleri tek olarak belirlenirdi. Gram-Schmidt işlemi bunları belirlemek için yalnızca bir yöntemdir.

Diğer taraftan, eğer

$$x_k^* = \alpha_{k1}x_1 + \alpha_{k2}x_2 + \dots + \alpha_{kn}x_n, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

ise, o zaman α_{ij} sabitlerinin seçiminde daha özgür oluruz.

Örnek 2.3.4: $1, x, x^2, x^3, \dots$ kuvvet fonksiyonları $C[a, b]$ uzayında lineer bağımsızdır. Eğer

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \equiv 0, \quad a \leq x \leq b$$

ise o zaman $a_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ dır.

$w(x)$, $[a, b]$ üzerinde tanımlanmış pozitif integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere, $C[a, b]$ 'de ağırlıklı iç çarpım

$$(f, g) = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx$$

şeklinde tanımlanır.

Kuvvet fonksiyonlarının bu iç çarpım ile ortonormalleştirilmesi ile

$$P_n(x) = k_n x^n + \dots, \quad n=0,1,2,\dots \text{ ve } k_n > 0$$

ortonormal polinomların kümesi elde edilir.

$$\int_a^b w(x) P_m^*(x) P_n^*(x) dx = \delta_{mn}, \quad m, n = 0, 1, \dots$$

Örnek 2.3.5: $a = -1, b = 1$ ve $w(x) = 1$ olmak üzere Legendre polinomları teorem 2.3.3'teki yöntem ile hesaplanır.

$$x_1 = 1, x_2 = x, x_3 = x^2 \text{ olsun.}$$

$y_1 = x_1 = 1$ olur. Buradan;

$$\|y_1\| = \left(\int_{-1}^{+1} dx \right)^{1/2} = \sqrt{2} \text{ olur ve } x_1^* = \frac{y_1}{\|y_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y_2 = x_2 - (x_2, x_1^*) x_1^* = x - \left(x, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Burada

$$\left(x, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{+1} x dx = 0$$

olur. Buradan;

$$y_2 = x \text{ ve böylece } \|y_2\| = \left(\int_{-1}^{+1} x^2 dx \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ olur.}$$

Böylece $x_2^* = \sqrt{\frac{3}{2}} x$ olur.

$$y_3 = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\|y_3\| = \left(\int_{-1}^{+1} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right)^2 dx \right)^{1/2} = \left(\frac{2}{15} \right) \sqrt{10} \quad \text{ve} \quad x_3^* = \frac{3}{4} \sqrt{10} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right)$$

olur.

Örnek 2.3.6: $a = -1$, $b = 1$ ve $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ olarak

$T_0(x), T_1(x), \dots$, 1. tür Chebyshev polinomlarını hesaplayalım.

$x_0 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = x^2$, $x_3 = x^3, \dots$ olsun.

$$y_0 = x_0 = 1, \quad x_0^* = \frac{y_0}{\|y_0\|}$$

olur.

$$\|y_0\| = [(y_0, y_0)]^{1/2} = \left(\int_{-1}^1 \frac{1 \cdot 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx \right)^{1/2} = \sqrt{\pi}$$

ve

$$x_0^* = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \pi^{-1/2} T_0(x)$$

dır. Şimdi de x_1^* 'i bulalım.

$$y_1 = x_1 - (x_1, x_0^*) x_0^*$$

$$= x - \pi^{-1} \int_{-1}^1 \frac{x \cdot 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

Bu son kısımdaki integrale I dersek;

$$I = \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = 0$$

olur.

Burada $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$ dönüşümü yapılmıştır ve $\pi/2$ ve $-\pi/2$ sınırları elde edilmiştir. Dolayısıyla buradan ;

$$y_1 = x - 0 = x$$

elde edilir.

$$\|y_1\| = (y_1, y_1) = (x, x) = \left(\int_{-1}^1 \frac{x \cdot x}{\sqrt{1-x^2}} dx \right)^{1/2} = \left(\int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \right)^{1/2} = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2}$$

olur. Burada yine ;

$$x = \sin t, dx = \cos t dt \quad \text{ve} \quad \sin t = -1 \Rightarrow t = -\pi/2, \sin t = 1 \Rightarrow t = \pi/2 \quad \text{dönüşümleri}$$

yapılmıştır.

Buradan;

$$x_1^* = \frac{y_1}{\|y_1\|} = \frac{x}{\left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2}} = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{-1/2} x = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{-1/2} T_1(x)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} y_2 &= x_2 - (x_2, x_1^*) x_1^* - (x_2, x_0^*) x_0^* \\ &= x^2 - \left(\frac{\pi}{2} \right)^{-1} \left(\int_{-1}^1 \frac{x^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx \right) x - (\pi)^{-1} \left(\int_{-1}^1 \frac{x^2 \cdot 1}{\sqrt{1-x^2}} dx \right) \end{aligned}$$

Bu eşitlikteki ilk integrale I_1 ve ikinci integrale I_2 dersek ;

$$I_2 = \frac{\pi}{2} \quad (\text{daha önce gösterildi})$$

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{x^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$$

bulunur. Çünkü burada , $\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$ tek fonksiyondur. Buradan;

$$\begin{aligned}
 y_2 &= x^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1} \cdot 0x - (\pi)^{-1} \left(\frac{\pi}{2}\right) \\
 &= x^2 - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi,

$$\|y_2\| = \int_{-1}^1 \frac{(x^2 - 1/2)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}$$

Böylece;

$$x_2^* = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \frac{x^2 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1/2} (2x^2 - 1) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1/2} T_2(x)$$

elde edilir.

2.4 Fourier (Ortogonal) Açılımları

Tanım 2.4.1 : $x_1^*, x_2^*, \dots$, ortonormal elemanların sonlu veya sonsuz bir dizisi olsun. y keyfi seçilmiş bir eleman olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} (y, x_n^*) x_n^*$$

ifadesine y için bir Fourier serisi denir. (Eğer dizi sonlu ise sonlu toplam kullanılır.)

Burada ; (y, x_n^*) sabitleri y ' nin Fourier katsayıları olarak adlandırılır. y elemanının Fourier serisi

$$y \sim \sum_{n=1}^{\infty} (y, x_n^*) x_n^* \quad (2.4.1)$$

şeklinde gösterilir.

(2.2.4) göz önünde bulundurularak (2.4.1) ;

$$y \sim \sum_{n=1}^{\infty} (y, x_n^*) x_n^* \quad (2.4.2)$$

şeklinde yorumlanabilir ve böylece bir elemanın Fourier serisi yalnız ortonormal elemanların bir sistemi üzerindeki elemanların izdüşümlerinin toplamıdır.

Eğer $x_1, x_2, \dots, \neq 0$ ortogonal ise o zaman ,

$$x_k^* = \frac{x_k}{\|x_k\|} \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.4.3)$$

şeklinde seçilebilir öyle ki (2.4.1)

$$y \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(y, \frac{x_k}{\|x_k\|} \right) \frac{x_k}{\|x_k\|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y, x_k)}{(x_k, x_k)} x_k \quad (2.4.4)$$

olur.

Yeniden , (2.2.3) ' ten

$$y \sim \sum_{n=1}^{\infty} (y, x_n) x_n \quad (2.4.5)$$

anlamı çıkarılabilir.

Örnek 2.4.1 : R^3 ' te (x, y) iç çarpımı $(x, y) = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$ olmak üzere ,

$$x_1^* = (1,0,0), \quad x_2^* = (0,1,0), \quad x_3^* = (0,0,1)$$

seçelim. Bir $y = (a, b, c) \in R^3$ için ;

$$(y, x_1^*) = a, \quad (y, x_2^*) = b, \quad (y, x_3^*) = c$$

olduğundan ;

$$(a, b, c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$$

toplamı y ' nin Fourier açılımıdır.

Örnek 2.4.2 : $C[-\pi, \pi]$ veya $L^2[-\pi, \pi]$ uzaylarını ,

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \quad \text{iç çarpımıyla ele alalım.}$$

Ortonormal sistem : $(2\pi)^{-1/2}, (\pi)^{-1/2} \sin x, (\pi)^{-1/2} \cos x, (\pi)^{-1/2} \sin 2x, \dots$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad \text{ve} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad \text{olmak üzere;}$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (2.4.6)$$

dır. Buna Fourier Serisi denir.

Örnek 2.4.3 : $C[-1, 1]$ uzayında, $(f, g) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$ olsun.

Ortonormal sistem:

$$(\pi)^{-1/2} T_0(x), \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1/2} T_1(x), \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1/2} T_2(x), \dots,$$

olmak üzere ;

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i T_i(x) \quad , \quad a_i = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(x) T_i(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2.4.7)$$

dır. Buna Chebyshev-Fourier serisi adı verilir.

Sonlu boyutlu uzaylar olması durumunda, bir eleman ile onun Fourier açılımı çakışıktır. Bunun için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.4.1 : $x_1, x_2, \dots, x_n$ lineer bağımsız ve x_i^* 'lar x_i 'lerin ortonormalleştirilmişleri olsun. Eğer $w = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ ise , o zaman ,

$$w = \sum_{k=1}^n (w, x_k^*) x_k^* \quad (2.4.8)$$

dır.

İspat : Sonuç 2.3.6 ' ten ,

$$\begin{aligned} w &= a_1 (b_{11} x_1^*) + a_2 (b_{21} x_1^* + b_{22} x_2^*) + \dots + a_n (b_{n1} x_1^* + \dots + b_{nn} x_n^*) \\ &= c_1 x_1^* + c_2 x_2^* + \dots + c_n x_n^* = \sum_{k=1}^n c_k x_k^* \end{aligned}$$

yazabiliriz. Şimdi , $1 \leq k \leq n$ için ;

$$\begin{aligned} (w, x_k^*) &= (c_1 x_1^* + \dots + c_n x_n^*, x_k^*) \\ &= c_1 (x_1^*, x_k^*) + \dots + c_k (x_k^*, x_k^*) + \dots + c_n (x_n^*, x_k^*) \\ &= c_k \end{aligned}$$

olur. Buradan ;

$$w = (w, x_1^*) x_1^* + \dots + (w, x_n^*) x_n^* = \sum_{k=1}^n (w, x_k^*) x_k^* = \sum_{k=1}^n c_k x_k^*$$

(2.4.8) elde edilmiş olur.

2.5 Fourier Açılımlarının Minimum Özellikleri

Fourier açılımları aşağıdaki minimum özelliğine sahiptir.

Teorem 2.5.1 : Bir X iç çarpım uzayında , $x_1^*, x_2^*, \dots$ ortonormal bir sistem ve y keyfi seçilmiş olsun. O zaman $a_1, a_2, \dots, a_N$ sabitlerinin her seçimi için ;

$$\left\| y - \sum_{i=1}^N (y, x_i^*) x_i^* \right\| \leq \left\| y - \sum_{i=1}^N a_i x_i^* \right\| \quad (2.5.1)$$

dır.

İspat:

$$\begin{aligned} \left\| y - \sum_{i=1}^N a_i x_i^* \right\|^2 &= \left(y - \sum_{i=1}^N a_i x_i^*, y - \sum_{i=1}^N a_i x_i^* \right) \\ &= (y, y) - \sum_{i=1}^N a_i (x_i^*, y) - \sum_{i=1}^N \overline{a_i} (y, x_i^*) + \sum_{i,j=1}^N a_i \overline{a_j} (x_i^*, x_j^*) \\ &= (y, y) - \sum_{i=1}^N a_i (x_i^*, y) - \sum_{i=1}^N \overline{a_i} (y, x_i^*) + \sum_{i=1}^N |a_i|^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^N (x_i^*, y)(y, x_i^*) - \sum_{i=1}^N (x_i^*, y)(y, x_i^*) \\ &= (y, y) - \sum_{i=1}^N |(y, x_i^*)|^2 + \sum_{i=1}^N |a_i - (y, x_i^*)|^2 \end{aligned}$$

dır. Son ifadenin ilk iki terimi a ' lardan bağımsız olduğu için ;

$$\left\| y - \sum_{i=1}^N a_i x_i^* \right\|^2$$

ifadesinin yalnız ve yalnız

$$a_i = (y, x_i^*), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.5.2)$$

olduğu zaman, yani a ' lar y ' nin katsayıları olduğu zaman, minimum değerinin elde edileceği açıktır. Bir başka deyişle , bir iç çarpım uzayının sonlu boyutlu bir alt uzayında, y ' ye en yakın lineer kombinasyon, y için Fourier serisinin n. kısmi toplamıdır.

Nümerik analizin en küçük kare problemi, uygun bir iç çarpım uzayında , $\min_{a_i} \left\| y - \sum_{i=1}^N a_i x_i \right\|$ ' nin terimlerini bulmak ile formüle edilebilir. Bir sonraki sonuç bu tür problemlerin çözümünü verir.

Sonuç 2.5.2 : $x_1, x_2, \dots, x_N$ bir iç çarpım uzayında lineer bağımsız elemanların bir kümesi olsun. $\left\| y - \sum_{i=1}^N a_i x_i \right\|$ 'e minimize edilmiş $x_1, x_2, \dots, x_N$ 'nin lineer kombinasyonunu bulma problemi ,

$$\sum_{i=1}^N (y, x_i^*) x_i^*$$

tarafından çözülür.

x_i^* ' lar , x ' lerin ortonormalleştirilmişleridir ve yukarıdaki problemin çözümü taktır. Bu bize her en küçük kare probleminin , uygun bir Fourier serisi tarafından çözüldüğünü söyler.

$$\text{Sonuç 2.5.3 : } \min_{a_i} \left\| y - \sum_{i=1}^N a_i x_i^* \right\|^2 = \|y\|^2 - \sum_{i=1}^N |(y, x_i^*)|^2 \quad \text{dır.}$$

İspat : Teorem 2.5.1 ' in son eşitliğinde $a_i = (y, x_i^*)$ yazalım . Böylece ifade etmiş olduğumuz eşitlik elde edilir.

Sonuç 2.5.4 (Bessel Eşitsizliği) : Eğer x_i^* ' lar ortonormal ise , o zaman,

$$\sum_{i=1}^N |(y, x_i^*)|^2 \leq \|y\|^2 \quad (2.5.3)$$

dır.

İspat : Sonuç 2.5.3 'den ;

$$0 \leq \min_{a_i} \left\| y - \sum_{i=1}^N a_i x_i^* \right\|^2 = \|y\|^2 - \sum_{i=1}^N |(y, x_i^*)|^2$$

dır ve ispat aşıkardır..

Sonuç 2.5.5 : Eğer x_i^* ' lar ortonormal elemanların sonsuz bir dizisi ise, o zaman ,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(y, x_i^*)|^2 \leq \|y\|^2$$

(2.5.4)

dır.

İspat : Sonuç 2.5.4 ' ten sonlu ortonormal elemanlar için Bessel eşitsizliğinden her $N > 0$ için ;

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(y, x_i^*)|^2$$

serinin kısmi toplamlar dizisi sınırlıdır ve dolayısıyla yakınsaktır. Böylece (2.5.3) eşitsizliğinin her iki tarafının $n \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa (2.5.4) elde edilir.

Sonuç 2.5.6 : Eğer x_i^* ' lar ortonormal elemanların sonsuz bir dizisi ise, o zaman ,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (y, x_i^*) = 0 \quad (2.5.5)$$

dır. Yani, y 'nin Fourier katsayıları sıfıra yaklaşır.

İspat : (2.5.4) eşitsizliğinin solundaki ifade yakınsak olup genel terimi $n \rightarrow \infty$ için sıfıra yakınsar. Böylece $\lim_{i \rightarrow \infty} |(y, x_i^*)|^2 = 0$ olur. Buradan $\lim_{i \rightarrow \infty} (y, x_i^*) = 0$ olur.

Sonuç 2.5.7 (Ortogonal Elemanların Minimum Özelliği) : $x_1, x_2, \dots, x_n$ lineer bağımsız olsun. $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$, x_k ' ların Teorem 2.3.3 ' teki tasarına göre ortonormalleştirilmişleri olsun. O zaman, $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ sabitlerinin tüm seçimleri için ;

$$\|y_n\| = \left\| \frac{x_n^*}{a_{nn}} \right\| \leq \|a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} + x_n\|$$

dır.

İspat :

$$\begin{aligned} \|a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} + x_n\| &= \|x_n - (-a_1 x_1 - a_2 x_2 - \dots - a_{n-1} x_{n-1})\| \\ &= \|x_n - (b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_{n-1} x_{n-1})\| \end{aligned}$$

yazılabilir. Sonuç 2.5.2 ' den ;

$$\min_{b_i} \|x_n - (b_1 x_1 + \dots + b_{n-1} x_{n-1})\|$$

probleminin çözümü

$$\sum_{k=1}^{n-1} (x_n, x_k^*) x_k^*$$

dır. (2.5.1) ' den ise ;

$$\left\| x_n - \sum_{k=1}^{n-1} (x_n, x_k^*) x_k^* \right\| \leq \left\| x_n - \sum_{k=1}^{n-1} b_k x_k^* \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{n-1} a_k x_k^* + x_n \right\|$$

olur. (2.3.6) ' dan ;

$$y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} (x_n, x_k^*) x_k^* \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} (x_n, x_k^*) x_k^* = x_n - y_n$$

olduğundan ;

$$\| x_n - (x_n - y_n) \| \leq \left\| \sum_{k=1}^{n-1} a_k x_k^* + x_n \right\|$$

$$\| y_n \| \leq \left\| \sum_{k=1}^{n-1} a_k x_k^* + x_n \right\|$$

olur. Sonuç 2.3.4 ve (2.3.6) ' dan ;

$$x_i^* = \frac{y_i}{\| y_i \|} \quad \text{ve} \quad a_{ii} = \frac{1}{\| y_i \|}$$

olup,

$$y_i = \frac{x_i^*}{a_{ii}}$$

dır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3. EN KÜÇÜK KARELER YAKLAŞIMI

3.1. En Küçük Kareler Yaklaşımı

Bir y elemanının en küçük kareler yaklaşımı (yani bir iç çarpım uzayındaki y 'ye en yakın elemanın bulunması problemi) verilen lineer bağımsız $x_1, x_2, \dots, x_n$ elemanlarının bir kombinasyonu tarafından birkaç yoldan ifade edilebilir :

- (1) Verilen elemanların $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ şeklindeki bir lineer kombinasyon olarak ,
- (2) x ' lerin ortonormalleştirilmişlerinin $b_1x_1^* + b_2x_2^* + \dots + b_nx_n^*$ şeklindeki lineer kombinasyonu olarak.

Örnek 3.1.1 : Eğer $f \in C[-\pi, \pi]$, o zaman,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0$$

dır. Bu Riemann teoremidir ve Sonuç 2.5.5 ' in bir sonucudur.

Çözüm : Bu uzaylarda Bessel eşitsizliği ,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad , \quad n = 1, 2, \dots,$$

olmak üzere ,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \|f\|^2$$

dır. (2.5.5) 'den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^2 = 0$$

olur ve böylece çözüm tamamlanır.

Örnek 3.1.2 : $P_n^*(x)$ ' ler Legendre polinomları olsunlar. Eğer $f \in C[-1,1]$

ise , o zaman ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f(x) P_n^*(x) dx = 0$$

dır.

Çözüm : Legendre polinomları $C[-1,1]$ ' de $1, x, x^2, \dots$ şeklindeki lineer bağımsız elemanların ortonormalleştirilmişleridirler. Yani , $C[-1,1]$ ' de bir ortonormal sistem belirtirler. O halde Sonuç 2.5.6 ' dan ;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f(x) P_n^*(x) dx = 0$$

dır.

Örnek 3.1.3 : Eğer $f \in L^2[a,b]$ ise ,

$$\min_{a_i} \int_a^b \left(f(x) - \sum_{i=0}^n a_i x^i \right)^2 dx$$

problemi tek çözüme sahiptir.

Çözüm : Sonuç 2.5.3 ' te $y = f(x)$ ve $x_i = x^i$ alınır ;

$$\begin{aligned} \min_{a_i} \left\| y - \sum_{i=0}^N a_i x^i \right\|^2 &= \min_{a_i} \int_a^b \left(f(x) - \sum_{i=0}^N a_i x^i \right)^2 dx \\ &= \| f \|^2 - \sum_{i=0}^N (f(x), x_i^*)^2 \end{aligned}$$

dır. Sağ taraf pozitif ve sabittir. Ve x_i^* ortonormal elemanları Gram-Schmidt yöntemiyle tek olarak belirlendiğinden bu tek çözüme sahiptir.

Örnek 3.1.4 : $\min_{a_i} \int_{-1}^1 (e^x - a_0 - a_1x - a_2x^2)^2 dx$ problemini çözelim.

Çözüm : Burada $y = e^x$ olarak alıyoruz. Yani ;

$\min_{a_i} \left\| y - \sum_{i=1}^N a_i x_i \right\|$ probleminin çözümü $\sum_{i=1}^N (y, x_i^*) x_i^*$ olduğundan ;

$$\min_{a_i} \int_{-1}^1 \left(e^x - \sum_{i=0}^2 a_i x^i \right)^2 dx$$

probleminin çözümü

$$\sum_{i=0}^2 (e^x, x_i^*) x_i^*$$

olur. Daha önceki bilgilerimizden $1, x, x^2, \dots$ polinomlar sisteminin ortonormaleştirilmesiyle ($a=1, b=-1, w(x)=1$ olmak üzere) Legendre polinomları elde edileceğinden x_i^* ' lar yerine Legendre polinomlarını kullanabiliriz. Yani;

$$x_1^* = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad , \quad x_2^* = \sqrt{\frac{3}{2}} x \quad , \quad x_3^* = \frac{3}{4} \sqrt{10} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right)$$

polinomlarını kullanalım.

e^x ' in Fourier katsayıları ;

$$b_0 = \int_{-1}^1 e^x \sqrt{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{\frac{1}{2}} (e - e^{-1})$$

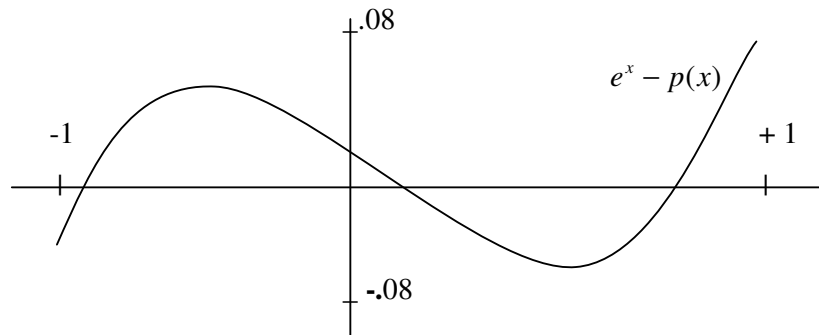
$$b_1 = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{3}{2}} x e^x dx = \sqrt{\frac{3}{2}} (2e^{-1})$$

$$b_2 = \int_{-1}^1 \frac{3}{4} \sqrt{10} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) e^x dx = \frac{3\sqrt{10}}{4} \left(\frac{2e}{3} - \frac{14e^{-1}}{3} \right)$$

b_1 ve b_2 değerleri hesaplanırken kısmi integrasyon yöntemi kullanılmıştır.

Böylece ;

$$\begin{aligned} P(x) &= b_1 x_1^* + b_2 x_2^* + b_3 x_3^* \\ &= \frac{1}{2} (e - e^{-1}) + 3e^{-1}x + \frac{90}{16} \left(\frac{2e - 14e^{-1}}{3} \right) \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{15}{4} (e - 7e^{-1}) x^2 + 3e^{-1}x + \frac{33}{4} e^{-1} - \frac{3}{4} e \\ &\approx 0,537x^2 + 1,104x + 0,996 \end{aligned}$$



Şekil 3.1.1 e^x 'e Parabolle En Küçük Kare Yaklaşımındaki Hata

Örnek 3.1.5 : $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \dots$ Chebyshev polinomları olsun. O zaman , a ' ların tüm seçimleri için ;

$$\frac{1}{2^{2n-2}} \int_{-1}^1 \frac{(T_n(x))^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \leq \int_{-1}^1 \frac{(x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (3.1.2)$$

dır. Burada $n \geq 1$ 'dir.

Çözüm : $(f, g) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$ iç çarpımını ele alalım.

$$(\pi)^{-1/2}T_0, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1/2}T_1, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1/2}T_2, \dots,$$

ortonormal sistem olmak üzere ;

$$\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1/2}T_n, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1/2}T_n \right) = 1$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1}(T_n, T_n) = 1$$

$$(T_n, T_n) = \frac{\pi}{2}$$

olur. Dolayısıyla

$$\frac{1}{2^{2n-2}} \int_{-1}^1 \frac{(T_n(x))^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2^{2n-2}} (T_n, T_n) = \frac{1}{2^{2n-2}} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2^{2n-1}}$$

elde edilir. Bir önceki örnekteki gibi Sonuç 2.5.7 'den (3.1.2) sağlanır.

Örnek 3.1.6 : Eğer $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k(x)$ sürekli bir $f(x)$ fonksiyonunun

Chebyshev - Fourier serileri ise, o zaman,

$$\min_{b_i} \int_{-1}^{+1} \left(f(x) - \sum_{k=0}^n b_k x^k \right)^2 (1-x^2)^{-1/2} dx$$

minimum bulma problemini

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k T_k(x)$$

kısmi toplamı çözer. Ancak bu kısmi toplam

$$\min_{b_i} \max_{-1 \leq x \leq 1} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n b_k x^k \right|$$

probleminin çözümüne çok yakındır. Bunun için ;

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 T_1(x) + \dots + a_n T_n(x) + a_{n+1} T_{n+1}(x)$$

artı ihmal ettiğimiz bir artan yazdığımızı varsayalım. O zaman ;

$$f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + a_1 T_1(x) + \dots + a_n T_n(x) \right) = a_{n+1} T_{n+1}(x)$$

dır. $a_{n+1} T_{n+1}(x)$, sıralı bir dizide alterne olarak $n+2$ tane eş maxima ve minima ' ya sahip olduğundan (DAVIS,P.J., 'Interpolation and Approximation', Dover Publication, Inc.,New York (1975)) Teorem 7.6.4 bize , parantez içinin P_n ' den $f(x)$ 'e en iyi düzgün yaklaşım olduğunu söyler. Bunun için kısmi Chebyshev – Fourier serileri, bazen en iyi düzgün yaklaşımları tanımlamaktaki başlangıç noktası olarak kullanılır.

Eğer f bir polinom ise , onun Chebyshev- Fourier açılımları kuvvetlerin , Chebyshev polinomlarının kombinasyonları olarak bulunabilir.

Örnek 3.1.7 : $[-1,1]$ aralığı üzerinde $f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^5}{6}$

fonksiyonu için izin verilen hata payı $\varepsilon = 0.05$ dir. Gerçekten ;

$$\begin{aligned} f(x) &= T_0 + \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(T_0 + T_1) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}(3T_1 + T_3) + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8}(3T_0 + 4T_2 + T_4) \\ &\quad + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{16}(10T_1 + 5T_3 + T_5) \\ &= \frac{149}{20}T_0 + \frac{76}{90}T_1 + \frac{32}{120}T_2 + \frac{11}{96}T_3 + \frac{3}{120}T_4 + \frac{1}{96}T_5 \end{aligned}$$

dır.

$$|T_n(x)| = |\cos(n \arccos x)| \leq 1$$

olduğundan son iki terimi silebiliriz ve en fazla

$$\frac{3}{120} - \frac{1}{96} < 0.05$$

hatasını yakalarız. Böylece

$$\frac{149}{20}T_0 + \frac{76}{96}T_1 + \frac{32}{120}T_2 + \frac{11}{96}T_3$$

P_3 ' dedir ve $[-1,1]$ üzerinde $f(x)$ ' e 0.05 'den daha az bir hata ile yaklaşır.

3.2 Normal Denklemler

Teorem 3.2.1 : Bir X iç çarpım uzayında $x_1, x_2, \dots, x_n$ lineer bağımsız elemanlar ve $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ ortonormal sistem olsun. O zaman , her $y \in X$ elemanı için ;

$$\left(y - \sum_{k=1}^n (y, x_k^*) x_k^* \right) \perp x_j^*$$

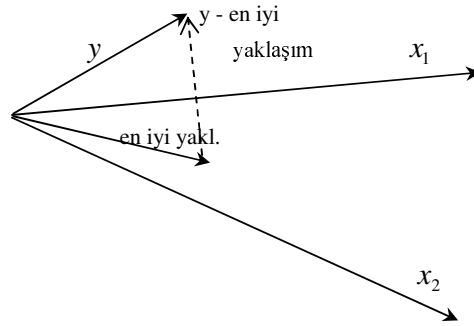
dır.

İspat :

$$\begin{aligned} \left(y - \sum_{k=1}^n (y, x_k^*) x_k^* , x_j^* \right) &= (y, x_j^*) - \sum_{k=1}^n (y, x_k^*) (x_k^*, x_j^*) \\ &= (y, x_j^*) - (y, x_j^*) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.2 : y ile onun , $x_1, x_2, \dots, x_n$ 'ler tarafından oluşturulan lineer kombinasyonların en iyi yaklaşımının farkı her x_j 'e ortogonaldır.



Şekil 3.2.1

Geometrik dilde , $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ şeklindeki tüm mümkün olan lineer kombinasyonların kümesinin bir lineer manifold olduğunu söyleriz. Bir lineer manifold orjinden geçen bir düzlem kavramının genelleştirilmiştir. Ve bu sonuç sabit bir elemandan, bir lineer manifoldun bir noktasına en kısa uzaklığın , manifolda dik bir elemanın uzunluğu olduğunu ifade eder.

Teorem 3.2.3 : $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ (lineer bağımsız olduğu farzedilsin) lineer kombinasyonlarının içinden , y ' ye en iyi yaklaşım olsun. O zaman a_i katsayıları aşağıdaki eşitlik sisteminin çözümleridir.

$$\left. \begin{aligned} a_1(x_1, x_1) + a_2(x_2, x_1) + \dots + a_n(x_n, x_1) &= (y, x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n(x_1, x_n) + a_2(x_2, x_n) + \dots + a_n(x_n, x_n) &= (y, x_n) \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Bu eşitlikler **normal denklemler** olarak bilinirler.

İspat : Sonuç 3.2.2 'den

$$\left(y - \sum_{k=1}^n a_k x_k, x_j \right) = 0$$

dır. Bu ifade açıldığında ;

$$(y, x_j) - a_1 (x_1, x_j) - \dots - a_n (x_n, x_j) = 0$$

$$(y, x_j) = a_1 (x_1, x_j) + \dots + a_n (x_n, x_j)$$

elde edilir. Bu ise (2.6.1) sisteminin j. eşitliğidir.

3.3 Gram Matrisi ve Determinantı

Tanım 3.3.1 : $x_1, x_2, \dots, x_n$, bir iç çarpım uzayında verilen elemanların bir dizisi olsun. $n \times n$ matrisi

$$G = ((x_i, x_j)) = \begin{bmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \dots & (x_1, x_n) \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \dots & (x_n, x_n) \end{bmatrix} \quad (3.3.1)$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ ' lerin Gram matrisi olarak bilinir. Determinantı ;

$$g = g(x_1, \dots, x_n) = |(x_i, x_j)| = |(x_j, x_i)| \quad (3.3.2)$$

elemanların Gram determinantı olarak bilinir.

Gram matris , normal eşitliklerin katsayıları matrisinin transpozudur. Bu aynı zamanda

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n, b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n) = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j (x_i, x_j) \quad (3.3.3)$$

bilineer formun matrisidir. Burada gerçekten ;

$$X = a_1x_1 + \dots + a_nx_n \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$Y = b_1 y_1 + \dots + b_n y_n \Leftrightarrow Y = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

ve

$$A = \begin{bmatrix} (x_1, x_1) & \dots & (x_1, x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (x_n, x_1) & \dots & (x_n, x_n) \end{bmatrix} = ((x_i, x_j))_{n \times n}$$

olmak üzere K^n üzerinde bilineer formu $f : K^n \times K^n$ şeklinde bir fonksiyon olup ;

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= (a_1 x_1 + \dots + a_n x_n, b_1 x_1 + \dots + b_n x_n) \\ &= X^T \cdot A \cdot Y \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot A \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_i b_j (x_i, x_j) \end{aligned}$$

(3.3.3) elde edilir. Buradaki bilineer formun A matrisi Gram matristir.

Burada $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ argümentlerinin simetrik fonksiyonudur. Bunun için , $g(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$ 'i düşünelim ve x_i ve x_j 'nin yer değiştirdiğini varsayalım. Yani , $g(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$ olsun. Bu , son ifadenin determinant açılımında i. ve j. sütunlar yer değiştirdiğini , ilk ifade için ise i. ve j. satırların yer değiştirdiğini gösterir.

Lemma 3.3.1 : $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$, $i = 1, 2, \dots, n$ olsun. A , (a_{ij}) matrisini

göstereyin ve $\tilde{A}$, onun konjuge transpozunu $(\overline{a_{ji}})$ olsun. O zaman ;

$$G(y_1, y_2, \dots, y_n) = A G(x_1, x_2, \dots, x_n) \tilde{A} \quad (3.3.4)$$

ve

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = |\det A|^2 g(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.3.5)$$

dır.

İspat :

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n$$

$$\vdots$$

$$y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n$$

olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} (x_1, y_1) & (x_1, y_2) & \dots & (x_1, y_n) \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ (x_n, y_1) & (x_n, y_2) & \dots & (x_n, y_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1, a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n) & \dots & (x_1, a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ (x_n, a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n) & \dots & (x_n, a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \dots & (x_1, x_n) \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \dots & (x_n, x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \dots & \overline{a_{n1}} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \dots & \overline{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

$$= G(x_1, x_2, \dots, x_n) \tilde{A}$$

dır. Hatta ;

$$\begin{aligned}
& A.G.\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1, y_1) & (x_1, y_2) & \dots & (x_1, y_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_n, y_1) & (x_n, y_2) & \dots & (x_n, y_n) \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} a_{11}(x_1, y_1) + \dots + a_{1n}(x_n, y_1) & \dots & a_{11}(x_1, y_n) + \dots + a_{1n}(x_n, y_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x_1, y_1) + \dots + a_{nn}(x_n, y_1) & \dots & a_{n1}(x_1, y_n) + \dots + a_{nn}(x_n, y_n) \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, y_1) & \dots & (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, y_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n, y_1) & \dots & (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n, y_n) \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} (y_1, y_1) & \dots & (y_1, y_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ (y_n, y_1) & \dots & (y_n, y_n) \end{bmatrix} \\
& = G(y_1, y_2, \dots, y_n)
\end{aligned}$$

dir.

Bu iki eşitliği birleştirerek lemmanın ilk özdeşliğini elde ederiz. İkinci kısım determinant almaktan gelir ve burada $|\tilde{A}| = |\bar{A}|$ dır.

Özel durum olarak;

$$g(\sigma_1 x_1, \sigma_2 x_2, \dots, \sigma_n x_n) = |\sigma_1|^2 |\sigma_2|^2 \dots |\sigma_n|^2 g(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.3.6)$$

dır.

Teorem 3.3.2 : $x_1, x_2, \dots, x_n \neq 0$ olsun. O zaman ;

$$\text{i)} \quad 0 \leq g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \dots \|x_n\|^2 \quad (3.3.7)$$

dır.

ii) Alt sınır $g = 0$ hali ancak ve ancak x_i 'ler lineer bağımlı ise meydana gelir. Üst sınır ancak ve ancak bu elemanlar ortogonal ise meydana gelir.

Eğer elemanlar normalleştirilmişler ise , yani $\|x_i\| = 1$ ise, o zaman ,

$$0 \leq g \leq 1 \quad (3.3.8)$$

dır.

İspat : **i)** Farzedelim ki x 'ler lineer bağımlı olsun. O zaman

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$ iken hepsi sıfır olmayan $a_1, a_2, \dots, a_n$ sabitlerini

bulabiliriz. Farzedelim ki $a_j \neq 0$ olsun ve

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{j-1} = x_{j-1} \\ y_j = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0 \\ y_{j+1} = x_{j+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n = x_n \end{array} \right\} \quad (3.3.9)$$

dönüşümlerini düşünelim.

$(y_j, y_i) = (0, y_i) = 0$ olduğundan , $g(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$ olur. Şimdi ;

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

determinantı j . satırın minörüne göre açılırsa

$$|A| = 0 + 0 + \dots + a_j \cdot 1 + 0 + \dots + 0 = a_j \neq 0$$

olur. Lemma 3.3.1 'den ;

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

olur. Çünkü ;

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = \underbrace{|\det A|^2}_{\neq 0} g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dır.

Şimdi de x 'lerin lineer bağımsız olduğunu düşünelim. O zaman Teorem 2.3.3 ' den ;

$$x_k^* = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kk}x_k \quad , \quad a_{kk} > 0$$

olacak şekilde ortonormal olan a_{ij} sabitlerini bulabiliriz. Lemmamızdan ;

$$1 = |\delta_{ij}| = g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) |A|^2$$

olup , burada

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$$

dır. Böylece ,

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{|A|^2} = \frac{1}{a_{11}^2} \frac{1}{a_{22}^2} \dots \frac{1}{a_{nn}^2} > 0 \quad (3.3.10)$$

dır. Böylece x 'ler ancak lineer bağımlı olduğu zaman $g = 0$ olur.

Bundan sonraki adımda

$$\frac{1}{a_{kk}^2} \leq \|x_k\|^2 \quad (3.3.11)$$

olduğunu göstereceğiz.

(2.3.5) 'dan ;

$$\frac{1}{a_{kk}^2} = \|y_k\|^2 = \left\| x_k - \sum_{j=1}^{k-1} (x_k, x_j^*) x_j^* \right\|^2 \leq \|x_k\|^2$$

dır. Çünkü teorem (2.5.1) 'den ve $a_i = 0$ olmasından , yani ,

$$a_i = (y, x_i^*) = (x_k, x_i^*) = 0 \quad , i = 1, \dots, k-1$$

olmasından ;

$$\left\| x_k - \sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i \right\| \leq \|x_k\|$$

dır.

ii) ($\Rightarrow$) Eğer x_i 'ler ortogonal ise , o zaman G , köşegeni $\|x_i\|^2$ olan ve diğer her taraf sıfır olan bir matris olur. Yani ;

$$G = \begin{bmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \dots & (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \dots & (x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \dots & (x_n, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|x_1\|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \|x_2\|^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \|x_n\|^2 \end{bmatrix}$$

olur. Bu takdirde ;

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \dots \|x_n\|^2$$

olur. Böylece elemanların ortogonal olma halinde üst sınırdaki eşitlik vardır.

($\Leftarrow$) Varsayalım ki ,

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \dots \|x_n\|^2$$

olsun. (3.3.10) 'dan ;

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{a_{11}^2} \frac{1}{a_{22}^2} \dots \frac{1}{a_{nn}^2}$$

dır. Şimdi de ,

$$\frac{1}{a_{kk}^2} \leq \|x_k\|^2$$

olduğundan ;

$$\|y_k\|^2 = \frac{1}{a_{kk}^2} = \|x_k\|^2, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

olur. Ancak (2.3.5) 'dan ve Sonuç 2.5.3 'ten ;

$$\begin{aligned}
\|y_k\|^2 &= \left\| x_k - \sum_{j=1}^{k-1} (x_k, x_j^*) x_j^* \right\|^2 \\
&= \min_{a_i} \left\| x_k - \sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i \right\|^2 \\
&= \|x_k\|^2 - \sum_{i=1}^{k-1} |(x_k, x_i^*)|^2
\end{aligned}$$

olur. Böylece , $\|y_k\|^2 = \|x_k\|^2$ olduğundan ;

$$\sum_{i=1}^{k-1} |(x_k, x_i^*)|^2 = 0 \quad , \quad k = 1, 2, \dots, n$$

dır. Bu ise $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörlerinin ortogonalliğini gösterir.

Sonuç 3.3.3 (Hadamard 'ın Determinant Eşitsizliği) : $D = (a_{ij})$ kompleks elemanlı $n \times n$ tipinde bir matris olsun. O zaman ,

$$|D|^2 \leq \prod_{k=1}^n (|a_{k1}|^2 + |a_{k2}|^2 + \dots + |a_{kn}|^2) \quad (3.3.12)$$

dır.

Eğer a_{ij} elemanları $|a_{ij}| \leq M$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ şartını sağlarsa o zaman ,

$$|D| \leq M^n n^{n/2} \quad (3.3.13)$$

olur.

İspat : x_i , $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ vektörünü belirtsin. C_n 'de

$$(x_i, x_j) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \overline{a_{jk}}$$

Hermitian iç çarpımını kullanalım. Eğer $\tilde{D} = \overline{a_{ji}}$, D 'nin konjuge transpozunu belirtirse o zaman,

$$D\tilde{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \dots & \overline{a_{n1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \dots & \overline{a_{nn}} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \dots & \overline{a_{nn}} \end{vmatrix}$$

$$|D|^2 = \begin{vmatrix} a_{11}\overline{a_{11}} & \dots & a_{1n}\overline{a_{1n}} & \dots & a_{11}\overline{a_{n1}} & \dots & a_{1n}\overline{a_{nn}} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{n1}\overline{a_{11}} & \dots & a_{nn}\overline{a_{n1}} & \dots & a_{n1}\overline{a_{n1}} & \dots & a_{nn}\overline{a_{nn}} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \dots & (x_1, x_n) \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \dots & (x_n, x_n) \end{vmatrix}$$

$$= |(x_i, x_j)| = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \dots \|x_n\|^2$$

dır. Şimdi

$$\|x_i\|^2 = (x_i, x_i) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \overline{a_{ik}} = \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2$$

dır. Ve $|\tilde{D}| = |\overline{D}|$ olduğundan $|D| |\tilde{D}| = |D|^2$

olur. Böylece ,

$$\begin{aligned}
|D|^2 &\leq \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \dots \|x_n\|^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^n |a_{1k}|^2 \sum_{k=1}^n |a_{2k}|^2 \dots \sum_{k=1}^n |a_{nk}|^2 \\
&\leq \prod_{k=1}^n (|a_{1k}|^2 + |a_{2k}|^2 + \dots + |a_{nk}|^2) \\
&\leq \prod_{k=1}^n (|a_{k1}|^2 + |a_{k2}|^2 + \dots + |a_{kn}|^2) \quad (*)
\end{aligned}$$

olur. Böylece (3.3.12) elde edilir.

Eğer $|a_{ij}| \leq M$ ise o zaman ;

$$|a_{ij}|^2 \leq M^2$$

dır. Buradan ;

$$|a_{k1}|^2 \leq M^2$$

$$|a_{k2}|^2 \leq M^2$$

.

.

.

$$|a_{kn}|^2 \leq M^2$$

eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa ,

$$|a_{k1}|^2 + |a_{k2}|^2 + \dots + |a_{kn}|^2 \leq n M^2$$

elde edilir. Şimdi her iki tarafın n. kuvveti alınır ;

$$(|a_{k1}|^2 + |a_{k2}|^2 + \dots + |a_{kn}|^2)^n \leq n^n M^{2n}$$

olur. (*) 'dan ;

$$|D|^2 \leq (|a_{k1}|^2 + |a_{k2}|^2 + \dots + |a_{kn}|^2)^n = \prod_{k=1}^n (|a_{k1}|^2 + |a_{k2}|^2 + \dots + |a_{kn}|^2)$$

olduğundan ,

$$|D| \leq n^n M^{n/2}$$

olur. Buradan ,

$$|D| \leq M^n n^{n/2}$$

dır.

Teorem 3.3.4 : Bir iç çarpım uzayında , $x_1, x_2, \dots, x_n$ lineer bağımsız olsun.

Eğer

$$\delta = \min_{a_i} \|y - (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n)\| \quad (3.3.14)$$

ise, o zaman ,

$$\delta^2 = \frac{g(x_1, x_2, \dots, x_n, y)}{g(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad (3.3.15)$$

dır.

İspat : Minimize edilmiş $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ elemanı s olsun. O zaman ,

$$\delta^2 = \|y - s\|^2 = (y - s, y - s) = (y - s, y) - (y - s, s)$$

olup (3.2.1) 'den $(y - s, s) = 0$ 'dır. Buradan ;

$$\delta^2 = (y - s, y) = (y, y) - (s, y)$$

ve

$$(s, y) = (y, y) - \delta^2 \quad (3.3.16)$$

olur. Normal denklemleri aşağıdaki formda yazar ve (3.3.16) 'nın açılmış halini bunlara eklersek ,

$$\left. \begin{aligned}
 a_1(x_1, x_1) + a_2(x_2, x_1) + \dots + a_n(x_n, x_1) - (y, x_1) &= 0 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 a_1(x_n, x_1) + a_2(x_n, x_2) + \dots + a_n(x_n, x_n) - (y, x_n) &= 0 \\
 \\
 a_1(x_1, y) + a_2(x_2, y) + \dots + a_n(x_n, y) + [\delta^2 - (y, y)] &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (3.3.17)$$

elde edilir. Böylece bu sistem $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}(=1)$ gibi biri belli $n+1$ bilinmeyen, $n+1$ denklemden oluşan homojen denklem sistemi olur. $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ $n+1$ 'lisi $(0, 0, \dots, 0)$ 'dan farklı aşık olmaya bir çözüme sahip olduğundan katsayılar determinantı sıfır olmak zorundadır. (Aksi takdirde katsayıların hepsi sıfır olurdu.)

$$\begin{vmatrix}
 (x_1, x_1) & (x_2, x_1) & \dots & (x_n, x_1) & 0 - (y, x_1) \\
 \cdot & & & & \\
 \cdot & & & & \\
 \cdot & & & & \\
 (x_1, x_n) & (x_2, x_n) & \dots & (x_n, x_n) & 0 - (y, x_n) \\
 (x_1, y) & (x_2, y) & \dots & (x_n, y) & \delta^2 - (y, y)
 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix}
 (x_1, x_1) & (x_2, x_1) & \dots & (x_n, x_1) & 0 \\
 \cdot & & & & \cdot \\
 \cdot & & & & \cdot \\
 \cdot & & & & \cdot \\
 (x_1, x_n) & (x_2, x_n) & \dots & (x_n, x_n) & 0 \\
 (x_1, y) & (x_2, y) & \dots & (x_n, y) & \delta^2
 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
 (x_1, x_1) & \dots & (x_n, x_1) & -(y, x_1) \\
 \cdot & & & \cdot \\
 \cdot & & & \cdot \\
 \cdot & & & \cdot \\
 (x_1, x_n) & \dots & (x_n, x_n) & -(y, x_n) \\
 (x_1, y) & \dots & (x_n, y) & -(y, y)
 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} (x_1, x_1) & \dots & (x_n, x_1) & 0 \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ (x_1, x_n) & \dots & (x_n, x_n) & 0 \\ (x_1, y) & \dots & (x_n, y) & \delta^2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & \dots & (x_n, x_1) & (y, x_1) \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ (x_1, x_n) & \dots & (x_n, x_n) & (y, x_n) \\ (x_1, y) & \dots & (x_n, y) & (y, y) \end{vmatrix} = 0$$

Buradan ;

$$\begin{vmatrix} (x_1, x_1) & \dots & (x_n, x_1) & 0 \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ (x_1, x_n) & \dots & (x_n, x_n) & 0 \\ (x_1, y) & \dots & (x_n, y) & \delta^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & \dots & (x_n, x_1) & (y, x_1) \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ (x_1, x_n) & \dots & (x_n, x_n) & (y, x_n) \\ (x_1, y) & \dots & (x_n, y) & (y, y) \end{vmatrix}$$

ve dolayısıyla ;

$$\delta^2 g(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$$

$$\delta^2 = \frac{g(x_1, x_2, \dots, x_n, y)}{g(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

elde edilir.

Teorem 3.3.5 : Bir iç çarpım uzayında , $x_1, x_2, \dots, x_n$ lineer bağımsız olsun.

$$\min_{a_i} \| y - (a_1 x_1 + \dots + a_n x_n) \|$$

probleminin çözümü s ,

$$s = - \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_2, x_1) & \dots & (x_n, x_1) & (y, x_1) \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ (x_1, x_n) & (x_2, x_n) & \dots & (x_n, x_n) & (y, x_n) \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & y \end{vmatrix} \div g(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.3.18)$$

dır. $y - s$ hatası ,

$$y - s = - \frac{\begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_2, x_1) & \dots & (x_n, x_1) & (y, x_1) \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ (x_1, x_n) & (x_2, x_n) & \dots & (x_n, x_n) & (y, x_n) \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_2, x_1) & \dots & (x_n, x_1) \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ (x_1, x_n) & (x_2, x_n) & \dots & (x_n, x_n) \end{vmatrix}} \div g(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.3.19)$$

ile verilir.

İspat : (3.2.1) normal denklemlerden ve Cramer Kuralı 'ndan, yani ; a_1 için

$$\begin{bmatrix} (x_1, x_1) \\ (x_1, x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (x_1, x_n) \end{bmatrix} \quad \text{sütunu yerine} \quad \begin{bmatrix} (y, x_1) \\ (y, x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (y, x_n) \end{bmatrix} \quad \text{yazılarak ;}$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} (y, x_1) & (x_2, x_1) & \dots & (x_n, x_1) \\ (y, x_2) & (x_2, x_2) & \dots & (x_n, x_2) \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ (y, x_n) & (x_2, x_n) & \dots & (x_n, x_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_2, x_1) & \dots & (x_n, x_1) \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ (x_1, x_n) & (x_2, x_n) & \dots & (x_n, x_n) \end{vmatrix}} \div g(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.3.20)$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (y, x_1) & \dots & (x_n, x_1) \\ (x_1, x_2) & (y, x_2) & \dots & (x_n, x_2) \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ (x_1, x_n) & (y, x_n) & \dots & (x_n, x_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_2, x_1) & \dots & (x_n, x_1) \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ (x_1, x_n) & (x_2, x_n) & \dots & (x_n, x_n) \end{vmatrix}} \div g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$a_n = \frac{\begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_2, x_1) & \dots & (y, x_1) \\ (x_1, x_2) & (x_2, x_2) & \dots & (y, x_2) \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ (x_1, x_n) & (x_2, x_n) & \dots & (y, x_n) \end{vmatrix}}{g(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

olur. Eğer (3.3.18) determinantını son satırın minörüne göre açarsak ;

$$s = - \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & \dots & (x_n, x_1) & (y, x_1) \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ (x_1, x_n) & \dots & (x_n, x_n) & (y, x_n) \\ x_1 & \dots & x_n & 0 \end{vmatrix} \div g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= \frac{x_1 \begin{vmatrix} (x_2, x_1) & \dots & (x_n, x_1) & (y, x_1) \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ (x_2, x_n) & \dots & (x_n, x_n) & (y, x_n) \end{vmatrix}}{g(x_1, x_2, \dots, x_n)} + \dots + \frac{x_n \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & \dots & (x_{n-1}, x_1) & (y, x_1) \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ (x_1, x_n) & \dots & (x_{n-1}, x_n) & (y, x_n) \end{vmatrix}}{g(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

$$= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

elde edilir.

$$y \cdot \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_2, x_1) & \dots & (x_n, x_1) & 0 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ (x_1, x_n) & (x_2, x_n) & \dots & (x_n, x_n) & 0 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & y \end{vmatrix} = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.3.21)$$

yazılabilir. Çünkü ; (3.3.21) n. sütuna göre açılırsa ;

$$y \cdot g(x_1, x_2, \dots, x_n) \div g(x_1, x_2, \dots, x_n) = y$$

olur. Şimdi (3.3.21) 'e , (3.3.18) eklenerek ;

$$y + (-s) = \frac{\begin{vmatrix} (x_1, x_1) & \dots & (x_n, x_1) & 0 \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ (x_1, x_n) & \dots & (x_n, x_n) & 0 \\ x_1 & \dots & x_n & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & \dots & (x_n, x_1) & (y, x_1) \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ (x_1, x_n) & \dots & (x_n, x_n) & (y, x_n) \\ x_1 & \dots & x_n & 0 \end{vmatrix}}{g(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

$$= \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_2, x_1) & \dots & (x_n, x_1) & (y, x_1) \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ (x_1, x_n) & (x_2, x_n) & \dots & (x_n, x_n) & (y, x_n) \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & y \end{vmatrix} \div g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

(3.3.19) elde edilir.

Sonuç 3.3.6 : $x_1, x_2, \dots$, lineer bağımsız ve $x_1^*, x_2^*, \dots$ 'lar , $x_1, x_2, \dots$ 'lerin Gram-Schmidt 'e göre ortonormalleştirilmişleri olsunlar. O zaman ;

$$x_n^* = \frac{1}{\sqrt{g(x_1, \dots, x_{n-1})g(x_1, \dots, x_n)}} \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_2, x_1) & \dots & (x_n, x_1) \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ (x_1, x_{n-1}) & (x_2, x_{n-1}) & \dots & (x_n, x_{n-1}) \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{vmatrix} \quad (3.3.22)$$

$n > 1$,

$$x_1^* = \frac{x_1}{\sqrt{g(x_1)}}$$

dir.

x_n^* 'daki a_{nn} başkatsayısı

$$a_{nn} = \sqrt{\frac{g(x_1, \dots, x_{n-1})}{g(x_1, \dots, x_n)}} \quad , \quad n > 1 \quad (3.3.23)$$

şeklinde verilir.

$$\textbf{İspat :} \quad \min_{a_i} \|x_n - (a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_{n-1})\|$$

minimum problemini düşünelim. Sonuç 2.5.7 'ye uygun olarak bu minimum probleminin çözümü ;

$$\frac{x_n^*}{a_{nn}} = x_n - (a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_{n-1}) \quad , \quad a_{nn} > 0 \quad (3.3.24)$$

şeklinde verilir. Yani , $a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_{n-1}$ kombinasyonu

$$\sum_{k=1}^{n-1} (x_n, x_k^*) x_k^*$$

ifadesine eşit olduğu zaman , bu kombinasyon x_n^* 'ye bir en iyi yaklaşıktır. (2.3.6) 'ya göre ,

$$y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} (x_n, x_k^*) x_k^* \quad \text{ve} \quad y_n = \frac{x_n^*}{a_{nn}}$$

olur. Buradan ;

$$\sum_{k=1}^{n-1} (x_n, x_k^*) x_k^* = x_n - y_n = x_n - \frac{x_n^*}{a_{nn}}$$

$$a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} = x_n - \frac{x_n^*}{a_{nn}}$$

(3.3.24) yazılabilir. (3.3.19) 'a göre ,

$$x_n - (a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_{n-1}) = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & \dots & (x_{n-1}, x_1) & (x_n, x_1) \\ \vdots & & & \\ (x_1, x_{n-1}) & \dots & (x_{n-1}, x_{n-1}) & (x_n, x_{n-1}) \\ x_1 & \dots & x_{n-1} & x_n \end{vmatrix} \div g(x_1, \dots, x_{n-1})$$

(3.3.25)

dır. Sonuç 2.3.5 'ten ;

$$y_n = \frac{1}{a_{nn}}$$

olup , (3.3.24) 'ün her iki tarafın normu ve minimumu alınır ve Sonuç 2.5.7'den ;

$$\frac{1}{a_{nn}} = \left\| \frac{x_n^*}{a_{nn}} \right\| = \min_{a_i} \| x_n - (a_1 x_1 + \dots + a_n x_n) \|$$

elde edilir. Teorem 3.3.4 'ten ;

$$\delta^2 = \frac{g(x_1, \dots, x_n, y)}{g(x_1, \dots, x_n)}$$

olduğundan ,

$$\text{bu minimum} = \sqrt{\frac{g(x_1, \dots, x_n)}{g(x_1, \dots, x_{n-1})}}$$

olur. Buradan

$$\frac{1}{a_{nn}} = \sqrt{\frac{g(x_1, \dots, x_n)}{g(x_1, \dots, x_{n-1})}} \Rightarrow a_{nn} = \sqrt{\frac{g(x_1, \dots, x_{n-1})}{g(x_1, \dots, x_n)}}$$

olur ve böylece (3.3.23) elde edilir. Dolayısıyla ,

$$\frac{x_n^*}{a_{nn}} = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & \dots & (x_{n-1}, x_1) & (x_n, x_1) \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ (x_1, x_{n-1}) & \dots & (x_{n-1}, x_{n-1}) & (x_n, x_{n-1}) \\ x_1 & \dots & x_{n-1} & x_n \end{vmatrix} \div g(x_1, \dots, x_n)$$

olur. Burada a_{nn} yerine yazılır ve gerekli düzenleme yapılırsa ,

$$x_n^* = \frac{1}{\sqrt{g(x_1, \dots, x_{n-1})g(x_1, \dots, x_n)}} \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_2, x_1) & \dots & (x_n, x_1) \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ (x_1, x_{n-1}) & (x_2, x_{n-1}) & \dots & (x_n, x_{n-1}) \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{vmatrix}$$

(3.3.22) elde edilir.

Örnek 3.3.1 : $x_1 = 1, x_2 = x, x_3 = x^2, \dots$ olmak üzere , Legendre polinomları

Sonuç 3.3.6 'dan da elde edilebilir.

$$P_0^*(x) = \frac{x_1}{\sqrt{g(x_1)}} = \frac{1}{\sqrt{g(1)}} = \frac{1}{\sqrt{(1,1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}
P_1^*(x) &= \frac{1}{\sqrt{g(x_1)g(x_1, x_2)}} \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_2, x_1) \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (1,1) & (x,1) \\ 1 & x \end{vmatrix} \\
&= \sqrt{\frac{3}{2}} x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2^*(x) &= \frac{1}{\sqrt{g(x_1, x_2)g(x_1, x_2, x_3)}} \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_2, x_1) & (x_3, x_1) \\ (x_1, x_2) & (x_2, x_2) & (x_3, x_2) \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}} \sqrt{\frac{32}{135}}} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{3}{4} \sqrt{10} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklinde devam edilerek Legendre polinomları elde edilir.

3.4 Gram Determinantın Özellikleri

Teorem 3.4.1 : Gram determinantı $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$\left. \begin{array}{l} (a) \quad g, \text{ argümentlerinin simetrik fonksiyonudur.} \\ (b) \quad g(x_1, \dots, \sigma x_j, \dots, x_n) = |\sigma|^2 g(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ (c) \quad g(x_1, \dots, x_j + \sigma x_k, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad , \quad j \neq k \\ (d) \quad g^{1/2}(x_1' + x_1'', x_2, \dots, x_n) \leq g^{1/2}(x_1', x_2, \dots, x_n) + g^{1/2}(x_1'', x_2, \dots, x_n) \\ (e) \quad g(x_1, \dots, x_n) \leq g(x_1, \dots, x_p) g(x_{p+1}, \dots, x_n) \quad , \quad 1 \leq p < n \end{array} \right\} \quad (3.4.1)$$

(e) 'deki eşitlik hali ancak ve ancak

$$(x_i, x_j) = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq p \quad , \quad p+1 \leq j \leq n$$

olması durumunda sağlanır.

İspat : (a) ve (b) durumları daha önce gösterildi.

(c) (3.4.1)(c) şıkkında verilen eşitsizliğin sol tarafındaki determinanta (1), sağ tarafındaki determinanta (2) diyelim.

$$(1) \quad g(x_1, \dots, x_k, \dots, x_j, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & \dots & (x_1, x_k) & \dots & (x_1, x_j) & \dots & (x_1, x_n) \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ (x_k, x_1) & \dots & (x_k, x_k) & \dots & (x_k, x_j) & \dots & (x_k, x_n) \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ (x_j, x_1) & \dots & (x_j, x_k) & \dots & (x_j, x_j) & \dots & (x_j, x_n) \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ (x_n, x_1) & \dots & (x_n, x_k) & \dots & (x_n, x_j) & \dots & (x_n, x_n) \end{vmatrix}$$

(2)

$$g(x_1, \dots, x_k, \dots, x_j + \sigma x_k, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & \dots & (x_1, x_j + \sigma x_k) & \dots & (x_1, x_n) \\ \vdots & & & & \vdots \\ (x_j + \sigma x_k, x_1) & \dots & (x_j + \sigma x_k, x_j + \sigma x_k) & \dots & (x_j + \sigma x_k, x_n) \\ \vdots & & & & \vdots \\ (x_n, x_1) & \dots & (x_n, x_j + \sigma x_k) & \dots & (x_n, x_n) \end{vmatrix}$$

Önce j. sütun elemanları , örneğin ;

$$(x_i, x_j + \sigma x_k) = (x_i, x_j) + \overline{\sigma}(x_i, x_k)$$

olduğundan , (2) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{vmatrix} (x_1, x_1) & \dots & (x_1, x_k) & \dots & (x_1, x_j + \sigma x_k) & \dots & (x_1, x_n) \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ (x_k, x_1) & \dots & (x_k, x_k) & \dots & (x_k, x_j + \sigma x_k) & \dots & (x_k, x_n) \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ (x_j, x_1) & \dots & (x_j, x_k) & & (x_j + \sigma x_k, x_j + \sigma x_k) & \dots & (x_j, x_n) \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ (x_n, x_1) & \dots & (x_n, x_k) & \dots & (x_n, x_j + \sigma x_k) & \dots & (x_n, x_n) \end{vmatrix}$$

dır. j. satır elemanları da ,

$$(x_j + \sigma x_k, x_i) = (x_j, x_i) + \sigma(x_k, x_i)$$

olmak üzere , yukarıda j. sütun için yapılanlar j. satır için yapılsa ve sağ taraf

yeniden yazılırsa (1) determinanı elde edilir. Böylece (c) sağlanmış olur.

(d) Burada $x_2, x_3, \dots, x_n$ 'in lineer bağımsız olduğunu varsayabiliriz. Aksi takdirde

(3.4.1)(d) 'nin elemanları sıfır olur ve hem de eşitsizlik aşkar olur. Şimdi ,

$x_2, x_3, \dots, x_n$ 'leri ortonormalleştirilim ve $x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*$ ortonormal vektörleri adını

verelim. O zaman Teorem 2.5.1 ve (3.3.15) 'den ,

$$\delta = \min_{a_i} \left\| x_1' + x_1'' - (a_2 x_2 + \dots + a_n x_n) \right\| = \left\| x_1' + x_1'' - \sum_{i=1}^n \left(x_1' + x_1'', x_i^* \right) x_i^* \right\|$$

ve

$$\delta^2 = \frac{g(x_1, \dots, x_n, x_1' + x_1'')}{g(x_2, \dots, x_n)} \Rightarrow \delta = \frac{g^{1/2}(x_1' + x_1'', x_2, \dots, x_n)}{g^{1/2}(x_2, \dots, x_n)}$$

olur. Dolayısıyla buradan ;

$$\begin{aligned} \frac{g^{1/2}(x_1' + x_1'', x_2, \dots, x_n)}{g^{1/2}(x_2, \dots, x_n)} &= \min_{a_i} \|x_1' + x_1'' - (a_2 x_2 + \dots + a_n x_n)\| \\ &= \left\| x_1' + x_1'' - \sum_{k=2}^n (x_1' + x_1'', x_k^*) x_k^* \right\| \\ &= \left\| x_1' + x_1'' - \sum_{k=2}^n (x_1', x_k^*) x_k^* - \sum_{k=2}^n (x_1'', x_k^*) x_k^* \right\| \\ &= \left\| x_1' - \sum_{k=2}^n (x_1', x_k^*) x_k^* + x_1'' - \sum_{k=2}^n (x_1'', x_k^*) x_k^* \right\| \\ &\leq \left\| x_1' - \sum_{k=2}^n (x_1', x_k^*) x_k^* \right\| + \left\| x_1'' - \sum_{k=2}^n (x_1'', x_k^*) x_k^* \right\| \\ &\leq \frac{g^{1/2}(x_1', x_2, \dots, x_n)}{g^{1/2}(x_2, \dots, x_n)} + \frac{g^{1/2}(x_1'', x_2, \dots, x_n)}{g^{1/2}(x_2, \dots, x_n)} \end{aligned}$$

olur. Buradan ;

$$g^{1/2}(x_1' + x_1'', x_2, \dots, x_n) \leq g^{1/2}(x_1', x_2, \dots, x_n) + g^{1/2}(x_1'', x_2, \dots, x_n)$$

elde edilir ve böylece (d) sağlanır.

(e) k , $1 \leq k < p$ şartını sağlasın. O zaman sol tarafta daha fazla terim olduğundan ,

$$\min_{a_i} \|x_k - (a_{k-1}x_{k-1} + \dots + a_p x_p + a_n x_n)\|^2 \leq \min_{b_j} \|x_k - (b_{k-1}x_{k-1} + \dots + b_p x_p)\|^2$$

olur. Benzer şekilde ,

$$\min_{c_j} \|x_p - (c_{p+1}x_{p+1} + \dots + c_n x_n)\|^2 \leq \|x_p\|^2$$

olur. Teorem 2.7.4 'ten ,

$$\frac{g(x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)}{g(x_{k+1}, \dots, x_n)} \leq \frac{g(x_k, x_{k+1}, \dots, x_p)}{g(x_{k+1}, \dots, x_p)} \quad (3.4.2)$$

ve

$$\frac{g(x_p, x_{p+1}, \dots, x_n)}{g(x_{p+1}, \dots, x_n)} \leq g(x_p) \quad (3.4.3)$$

olur. Özellikle (2.8.2) 'de $k=1, k=2, \dots, k=p-1$ için ;

$$\left. \begin{aligned} \frac{g(x_1, \dots, x_n)}{g(x_2, \dots, x_n)} &\leq \frac{g(x_1, \dots, x_p)}{g(x_2, \dots, x_p)} \\ \frac{g(x_2, \dots, x_n)}{g(x_3, \dots, x_n)} &\leq \frac{g(x_2, \dots, x_p)}{g(x_3, \dots, x_p)} \\ &\vdots \\ \frac{g(x_p, \dots, x_n)}{g(x_{p+1}, \dots, x_n)} &\leq g(x_p) \end{aligned} \right\} \quad (3.4.4)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikleri taraf tarafa çarparsak ;

$$\frac{g(x_1, \dots, x_n)}{g(x_{p+1}, \dots, x_n)} \leq g(x_1, \dots, x_p)$$

veya

$$g(x_1, \dots, x_n) \leq g(x_1, \dots, x_p)g(x_{p+1}, \dots, x_n) \quad (3.4.5)$$

elde edilir. Şimdi ;

(3.4.5) 'deki eşitlik hali sağlanabilir $\Leftrightarrow$ (3.4.4) 'deki her bir bağıntı sağlanmalıdır. Yani , ancak ve ancak

$$\min_{c_j} \|x_p - (c_{p+1}x_{p+1} + \dots + c_nx_n)\|^2 = \|x_p\|^2 \quad (3.4.6)$$

ve

$$\min_{a_j} \|x_k - (a_{k+1}x_{k+1} + \dots + a_nx_n)\| = \min_{b_j} \|x_k - (b_{k+1}x_{k+1} + \dots + b_px_p)\|^2, \quad k = 1, 2, \dots, p-1 \quad (3.4.7)$$

olmalıdır. Sonuç 2.5.3 'ten

$$\min_{a_i} \left\| y - \sum_{i=1}^N a_i x_i \right\|^2 = \|y\|^2 - \sum_{i=1}^N |(y, x_i^*)|^2$$

ifadesi ancak $a_i = (y, x_i^*)$ ise sağlanırdı. Dolayısıyla , (3.4.6) ancak ve ancak

$$(x_p, x_j) = 0, \quad j = p+1, \dots, n$$

ise sağlanır. Çünkü ; Teorem 2.5.3 'ten;

$$\min_{c_j} \|x_p - (c_{p+1}x_{p+1} + \dots + c_nx_n)\|^2 = \|x_p\|^2 - \sum_{j=p+1}^n |(x_p, x_j^*)|^2$$

dır. Şimdi de $k = p-1$ için (3.4.7)

$$\begin{aligned}
\min_{a_j} \|x_{p-1} - (a_p x_p + \dots + a_n x_n)\|^2 &= \min_{b_p} \|x_{p-1} - b_p x_p\|^2 \\
\|x_{p-1}\|^2 - \sum_{i=p}^n |(x_{p-1}, x_i^*)|^2 &= \|x_{p-1}\|^2 - |(x_{p-1}, x_p^*)|^2 \\
\sum_{i=p}^n |(x_{p-1}, x_i^*)|^2 &= |(x_{p-1}, x_p^*)|^2 \\
|(x_{p-1}, x_p^*)|^2 + |(x_{p-1}, x_p^*)|^2 + \dots + |(x_{p-1}, x_n^*)|^2 &= |(x_{p-1}, x_p^*)|^2 \\
\sum_{i=p+1}^n |(x_{p-1}, x_i^*)|^2 &= 0
\end{aligned}$$

olur. Buradan ;

$$|(x_{p-1}, x_i^*)|^2 = 0 \Rightarrow |(x_{p-1}, x_i^*)| = 0 \Rightarrow (x_{p-1}, x_i^*) = 0, \quad j = p+1, p+2, \dots, n$$

olur. Böylece ;

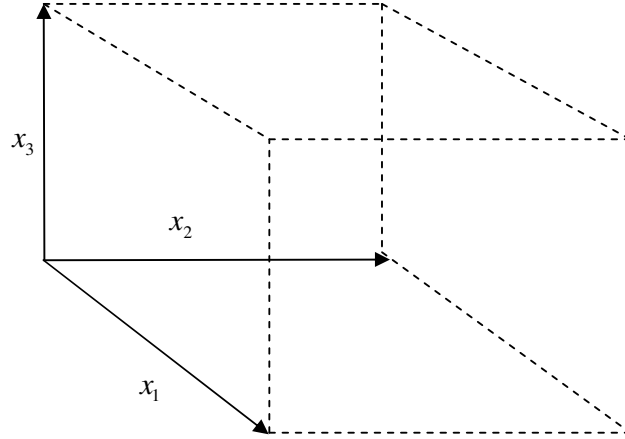
$$x_{p-1} \perp x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$$

olur. $k = p-2, p-3, \dots, 1$ alınarak benzer sonuçla elde edilir ve ortogonalite durumları sağlanır.

Gram determinanı çok dikkat çekici bir geometrik yoruma sahiptir. R^n 'de $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ şeklinde n vektör verilsin. Bu vektörler, hacmi $V = V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tarafından belirlenmiş olan belirli n boyutlu bir paralelyüzün köşeleridir. V ,

$$V = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{determinantının açık değeri} \quad (3.4.8)$$

şeklinde gösterilebilir.

Şekil 3.4.1 R^3 'te paralelyüz

(3.4.8) 'deki determinanı transpozu ile çarparsak ;

$$V^2 = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \dots & (x_1, x_n) \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \dots & (x_n, x_n) \end{vmatrix} = g(x_1, \dots, x_n) \quad (3.4.9)$$

determinantını elde ederiz. Böylece ,

$$V(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{g(x_1, \dots, x_n)} \quad (3.4.10)$$

olur.

3.5 Kapalılık ve Sonuçları

Tanım 3.5.1 : X normlu bir vektör uzayı ve X 'de elemanların sonlu veya sonsuz bir sistemi $x_1, x_2, \dots$, olsun. Her $x \in X$ elemanına x_i 'lerin sonlu lineer kombinasyonu ile keyfi olacak şekilde yaklaşabiliyorsa bu sonlu veya sonsuz sisteme kapalıdır denir. Yani, $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için ;

$$\|x - (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)\| \leq \varepsilon \quad (3.5.1)$$

olacak şekilde $a_1, a_2, \dots, a_n$ sabitlerini bulabiliriz.

Örnek 3.5.1 : R^n veya C^n 'de n bağımsız vektörün her kümesi kapalıdır. x_i 'ler lineer bağımsız olduğundan ;

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$$

dır. Eğer

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$$

ise , o zaman ,

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{x_{11}} & \dots & \overline{x_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{x_{n1}} & \dots & \overline{x_{nn}} \end{vmatrix} > 0$$

dır ve buradan $|x_{ij}| \neq 0$ dır. Verilen her y ,

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

sistemi a_i 'ler için çözülmüştür.

Örnek 3.5.2 : $X = C[a, b]$, $\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ normu ile tanımlanmış

olsun. $1, x, x^2, \dots$, sistemi $C[a, b]$ 'de kapalıdır.

Çözüm : f sürekli olduğundan , Weierstrass Teoreminden (Teorem 6.1.1 DAVIS,P.J., ‘Interpolation and Approximation’, Dover Publication, Inc.,New York (1975)) $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\|f(x) - P_n(x)\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ vardır. Dolayısıyla $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ kapalıdır.

Örnek 3.5.3 : , $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$ normuyla tanımlanmış

olsun. sistemi $C[a, b]$ 'de kapalıdır.

(mutlak değeri p. dereceden integrallenebilir fonksiyonlar uzayı)
bir vektör uzayı olmak üzere , (DAVIS,P.J., ‘Interpolation and Approximation’,
Dover Publication, Inc.,New York (1975)) Teorem 1.4.0 (e) yani ;

Eğer olmak üzere $f \in L^p(a, b)$, , ise , o zaman , her $\varepsilon > 0$ için

$$\left| \int_a^b |f(x)|^p dx \right| - \left| \int_a^b |f(x)|^p dx \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde sürekli bir $g(x)$ fonksiyonu bulabiliriz.

f sürekli olduğundan , ————— için polinomu öyle ki
için

dir. Son ifadede her iki tarafın integrali alınırsa ,

dır. Böylece ; integraller için (7.2.17) Minkowski eşitsizliğinden (DAVIS,P.J.,
'Interpolation and Approximation', Dover Publication, Inc.,New York (1975)) ;

olur.

Örnek 3.5.4 : , 'de olan analitik fonksiyonların kümesi olsun.

olmak üzere , 'de kapalı değildirler . Eğer kapalı olsalardı , her
için ;

olacak şekilde sabitleri bulunabilirdi. Eşitsizlikte , özellikle
konulursa

olur. Bu ise seçilirse bir çelişkidir.

Kapanışın anlamına bakmadan önce , bazı genel topolojik kavramları hatırlatmak yararlı olacak.

, uzaklık fonksiyonu ile tanımlı bir metrik uzay olsun . Eğer ise , şartını sağlayan elemanlarının tümünü içeren kümesine bir **açık yuvar** adı verilir.

bir metrik uzay ve olsun. Eğer olacak şekilde bir sayısı varsa , 'ye 'nin bir **iç elemanı** denir.

Bir metrik uzayda ve dolayısıyla normlu bir vektör uzayında yakınsaklık şu şekilde tanımlanabilir.

Tanım 3.5.2 : bir metrik uzay ve , 'de elemanların bir dizisi olsun. Eğer için ,

$$(3.5.2)$$

ise , dizisine elemanına yakınsaktır denir.

Normlu bir uzayda (3.5.2) ,

$$(3.5.)$$

ifadesine eşit olur.

Yakınsak bir dizinin limiti vardır. Kabul edelim ki dizisinin iki limiti olsun. Yani ;

ve

olsun. Metrik uzay olma eşitsizliklerinden olan üçgen eşitsizliğinden ;

dır. için elde ederiz ve böylece

olur.

Sonuç olarak $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ ise, $\{x_n\}$ dizisinin limiti L 'dir denir ve

(3.5.3)

şeklinde gösterilir.

(3.5.) normda yakınsaklık olarak adlandırılır. Eğer norm bir integral ile tanımlanmış ise yakınsaklık ortalama yakınsaklık olarak adlandırılır.

Fonksiyonların normlu vektör uzayları olması halinde , yakınsaklık türleri (noktasal,düzgün) diğer yakınsaklık türlerinden farklıdır. Normlu uzayda fonksiyonların bir dizisi noktasal yakınsak olmadan yakınsak olabilir. Bu nedenle , bu ayırım her zaman yapılmalıdır.

X bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ olsun. x ile $\{x_n\}$ 'nin kapanışını göstermek üzere x , $\{x_n\}$ 'nin yakınsak dizilerinin bütün limitlerinin kümesi olarak tanımlanır.

olduğu açıktır. (Çünkü ; $x_n \rightarrow x$ olmak üzere x alırsak

olup x dir.)

Eğer x ise $\{x_n\}$ 'ye **kapalıdır** denir. x ise $\{x_n\}$ kümesine x 'de **yoğundur** denir. x sayılabilir yoğun bir alt kümeye sahip ise $\{x_n\}$ 'e **ayrılabilir** denir.

Eğer x ise , o zaman ,

olduğundan bütün x için

yazabiliriz. Ancak rasyonel sayıların metrik uzayı olarak alındığı takdirde

bunun tersi doğru değildir. Önemli olan bunun doğru olduğu uzaylarda tartışmaktır.

Tanım 3.5.3 : bir metrik uzay ve , 'in elemanlarının bir dizisi olsun. Her ve tüm için

olacak şekilde bir sayısı varsa 'e bir **Cauchy dizisi** denir. Eğer her Cauchy dizisi 'de bir limite sahipse uzayına **tamdır** denir.

Eğer tam normlu bir vektör uzayı ise ve her için ,

(3.5.4)

olacak şekilde sayısı bulunabiliyorsa o zaman ,

(3.5.5)

olacak şekilde bir vardır.

Tam normlu bir vektör uzayı **Banach uzayı** olarak adlandırılır.

Örnek 3.5.5 : uzayı normu ile verilsin.

olsun. O zaman ,

dır. Çünkü için dır.

Noktasal yakınsak ise için dır. O halde

olmalıdır. Ancak , 'dur.

Örnek 3.5.6 : kompleks Öklid uzayı tamdır ve böylece bir Banach uzayıdır.

, 'de bir Cauchy dizisi olsun. 'nin tamlığı bilindiğinden ve gerçel sayı dizileri Cauchy dizisidirler ve yakınsaktırlar.

dır. Dolayısıyla tamdır.

Örnek 3.5.7 : uzayı üzerinde normu tanımlansın.

Bu uzay tamdır.

Eğer ;

(*)

ise , o zaman , dizisi üzerinde düzgün yakınsaktır. Herhangi bir

için de ,

dır. Bu ise 'nin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Hatta

dizisi reel terimli bir Cauchy dizisidir. tam olduğundan bu dizi yakınsaktır.

için olur. Bu şekilde her noktasıyla bir tek reel

sayısı eşleyebiliriz. Bu ise üzerinde bir fonksiyonu tanımlar. (*)

'da için ,

olacak şekilde fonksiyonu vardır ve bu 'nin 'e bu normda

yakınsadığını gösterir. 'lerin sürekli ve yakınsaklığın düzgün olması nedeniyle,

limit fonksiyonu olan f 'de X üzerinde sürekli. O halde f 'dir. O halde f tamdır.

Örnek 3.5.8 : $C(X)$ uzayı , $\| \cdot \|_\infty$ normu ile

tanımlanmış ise f tam değildir. Bu, X 'de bir elemana yakınsak olmayan bir Cauchy dizisi bularak gösterilebilir.

Çözüm : Kolaylaştırmak için $X = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$ alalım ve f_n sürekli fonksiyonu

olsun. f_n ,

sürekli olmayan fonksiyon olsun. Şimdi

olur. Bundan dolayı

olur. (f_n) (normda) f 'e yakınsaktır ve üstelik ,

olduğundan $\{f_n\}$ bir Cauchy dizisidir . Yakınsadığı L^2 ise bu uzayın bir elemanı olmadığından , L^2 uzayı tam değildir.

Teorem 3.5.1 : $\{f_n\}$ 'ler bir L^2 iç çarpım uzayında ortonormal elemanların bir dizisi olsun. Bu dizi yalnızca sonlu sayıda elemanlardan da oluşmuş olabilir. Aşağıdaki yedi ifadeyi göz önüne alalım.

(A) $\{f_n\}$ 'lar L^2 'de kapalıdır.

(B) Her $f \in L^2$ elemanının Fourier serisi normda L^2 'ye yakınsar ; yani ,

(3.5.6)

dır.

(C) Parseval özdeşliği sağlanır. Yani , her $f \in L^2$ için ,

(3.5.7)

(D) Genişletilmiş Parseval özdeşliği sağlanır. Yani , her $f \in L^2$ için ,

(3.5.8)

dır.

(E) $\{f_n\}$ 'ı içeren daha büyük ortonormal sistem yoktur.

(E) elemanları tamlik özelliğine sahiptir. Yani ve
ise 'dır.

(F) 'in bir elemanı , onun Fourier katsayıları tarafından tek olarak belirlenir. Yani ,
eğer ise , o zaman dir.

O halde

(3.5.9)

olur. Eğer tam bir iç çarpım uzayı ise olur ve böylece tüm bu yedi durum denktirler. Yani ,

(3.5.10)

olur.

İspat : A B olduğunu gösterelim.

A doğru olsun. (2.5.1) 'den ;

dır. A 'dan dolayı ve (3.5.1) gereğince son ifade

şeklinde yazılabilir. Bu da B 'nin yani (3.5.6) 'nın sağlanması demektir. Çünkü , her
ve için

olacak şekilde bir vardır. O halde

dır. A B sağlanır.

B doğru olsun. O halde , bir elemanına onun Fourier serileriyle yaklaşabiliriz. Böylece B A sağlanır.

O halde A B dir.

B olduğunu gösterelim.

B sağlansın. Ortogonallikten ;

Schwarz eşitsizliğinden ;

dır. B sağlandığından sağ tarfataki her iki ifade de için sıfıra yaklaşır.
Buradan

olur. Böylece ,

olur. Dolayısıyla B dir.

Her için sağlandığından , 'nde seçilerek son ifade

şeklinde yazılır. Bu ise

demektir. Buradan C sağlanır.

Şimdi C B olduğunu gösterelim.

C sağlansın. Sonuç 2.5.3 'ten

olup, için her iki tarafın limiti alınırsa ;

olur. (3.5.7) 'den bu

olur. Buradan ;

olur. O halde C B sağlanır. Böylece

A B C

sağlanmış olur.

Şimdi de A D olduğunu gösterelim.

A B olduğunu biliyoruz. ((B) 'deki gibi)

olup , limit alınırsa ((B) 'deki gibi)

olur. ve alınırsa

(1)

olur. (2.9.8) 'den

(2)

olur. (1) ve (2) den

olur. olduğundan bu bir çelişkidir. O halde A D sağlanır.

Şimdi D E olduğunu gösterelim.

() Burada D E yerine olduğunu göstereceğiz.

Varsayalım ki ve olacak şekilde var olsun. O halde

sistemi , sisteminden daha geniş bir ortonormal

sistem olmuş olur. Bu ise 'ünü verir. O halde olur.

Olmayana ergi metodundan D E sağlanır.

() E doğru olsun. Yani $\{e_i\}$ ve $\{f_i\}$ olsun. O halde $\{e_i\}$; $\{f_i\}$ 'dan daha geniş bir ortonormal sistem olamaz. Çünkü ; $\{e_i\}$ 'dır. Dolayısıyla $\{f_i\}$ şeklinde bir vektör bulamayız. O halde $E = D$

sağlanır.

Böylece $D = E$ sağlanmış olur.

Şimdi de $E = F$ olduğunu gösterelim.

() E doğru olsun. Farzedelim ki $\{e_i\}$ olsun. O zaman

olur. $E = F$ 'den dolayı

dir. Böylece $E = F$ sağlanır.

() Burada yine olmayana ergi metodunu kullanarak , $F = E$ yerine olduğunu göstereceğiz.

E yanlış olsun. Yani ,

olacak şekilde bir $\{f_i\}$ bulabiliriz. Her i için ,

dır. Çünkü , olup , kabulden dır. Böylece ve aynı Fourier katsayılı iki farklı eleman olur. Bu ise 'ünü verir. Dolayısıyla $F = E$ sağlanmış olur. Böylece (3.5.9) zinciri tamamlanmış olur.

Şimdi $F = B$ olduğunu göstereceğiz ve böylece (3.5.10) 'daki zinciri kurmuş olacağız.

Farzedelim ki tam ve F doğru olsun. olsun ve

(3.5.11)

elemanlarını düşünelim. için ,

yazabiliriz öyle ki

(3.5.12)

dır. Gerçekten ;

dır.

(2.5.3) Bessel eşitsizliğinde limit alınırsa ;

olur. Bu serinin kısmi toplamlar dizisi sınırlı ve dolayısıyla yakınsak olacağından

ve için ,

olacak şekilde bir bulabiliriz. Böylece bir Cauchy dizisidir ve 'in tamlığından bir elemanına yakınsar. Yani ,

(3.5.13)

dır. sabit ve olsun. O zaman ,

dır. Çünkü ;

olduğundan

dır. Schwarz eşitsizliğinden ,

dır. Bu ifadede limit alınır ve (3.5.13) göz önünde bulundurulursa ;

olup

elde edilir. F 'den bu olduğunu gösterir ve (3.5.13)

şeklinde yazılır. Bu ise kesinlikle B 'dir. O halde $F \subset B$ sağlanır.
Böylece (3.5.10) zinciri tamamlanır.

Tanım 3.5.4 : bir iç çarpım uzayı ve olsun.

Eğer için ;

(3.5.14)

iken ise 'ye tamdır denir.

Gördüğümüz gibi, tam bir iç çarpım uzayında tamlık ve kapalılık denk kavramlardır.

Örnek 3.5.9 : , şeklinde tanımlanmış

olsun. Bir ve için, sürekli olduğundan Teorem 6.1.1

Weierstrass Yaklaşım Teoremi 'nden (DAVIS,P.J., 'Interpolation and Approximation', Dover Publication, Inc.,New York (1975)) ;

olacak şekilde sabitlerini bulabiliriz.

Son ifadede her iki tarafın integrali alınırsa ;

olur. Bu ifade ise ,

olup , buradan $\mathcal{H}$ 'de kapalıdır.

elemanlarını Legendre polinomları ile değiştirerek tüm Teorem 3.5.1 A-F durumları izlenir. Özellikle , eğer $\{f_n\}$ ve eğer $\{f_n\}$

ise , o zaman , Teorem 3.5.1 (E) 'den $\mathcal{H}$ dır.

Teorem 3.5.2 (Riesz) : $\mathcal{H}$ bir tam iç çarpım uzayı ve $\{f_n\}$ dizisi

koşulunu sağlayan bir dizi ve $\{g_n\}$ ortonormal sistem olsun. Bu durumda

$$(3.5.15)$$

olacak şekilde bir $\{g_n\}$ vardır.

İspat : $\{f_n\}$ elemanlarını göz önüne alalım.

dır. $\{f_n\}$ serisi hipotezden yakınsak olduğundan , $\{f_n\}$ bir Cauchy dizisidir ve

olacak şekilde bir ϵ vardır. (Çünkü ;

ϵ olan kısmi toplamlar dizisi yakınsaktır. Dolayısıyla bir

Cauchy dizisidir. Yani , n için , m olacak şekilde bir N bulunabilir. Buradan ,

olduğundan $\{a_n\}$ bir Cauchy dizisidir.)

ϵ sabit ve ϵ ile Schwarz 'dan ;

dır. Son ifadede ϵ için limit alınırsa

olur. Dolayısıyla ,

olup (3.5.15) sağlanır.

3.6 Tam İç Çarpım Uzaylarının Geometrik Özellikleri

Teorem 2.5.1 'de verilen bir elemandan bir lineer manifolda minimum bir uzaklığın var olduğunu gördük. Bu kısımda bunu daha genel alt kümelerle nasıl genişletebileceğimizi inceleyeceğiz. Teorem 3.6.1 bunun için büyük önemde yeterli bir durum sağlar.

Teorem 3.6.1 : X tam bir iç çarpım uzayı olsun. U , X 'in kapalı (topolojik olarak), konveks ve boş olmayan bir alt kümesi olsun. U ve U° (3.6.1)

şeklinde kuralım. O zaman U° 'de ; (3.6.2)

olacak şekilde tek bir x vardır.

d

Şekil 3.6.1

İspat : (3.6.1) 'den U° 'de (3.6.3)

olacak şekilde elemanlarının bir dizisini bulabiliriz. Teorem 2.1.3

Paralelkenar teoreminden ;

olur. M konveks olduğundan 'dir.Böylece

elde edilir. Çünkü ;

ile arasındaki uzaklığın en küçüğü ise, herhangi bir eleman için bu uzaklık 'den büyük veya en fazla eşit olur.
Dolayısıyla ,

dir. (3.6.3) ile için ,

dır. Bunun anlamı dizisinin bir Cauchy dizisi olmasıdır. tam olduğundan
(her Cauchy dizisi yakınsaktır)

olacak şekilde vardır. kapalı olduğundan , 'dedir.

Şimdi ,

(1)

dır. Diğer taraftan , (3.6.1) 'den

(2)

dir. Öyleyse (1) ve (2) 'den

dir.

Şimdi de 'ın tek olduğunu gösterelim.

Farzedelim ki ,

olacak şekilde ve 'e sahip olalım. konveks olduğundan ,
'dedir. Böylece

olur. Buradan

dir. Paralelkenar teoreminden

olur. Öyleyse dir.

Teorem 3.6.2 : tam bir iç çarpım uzayı ve , 'den farklı kapalı bir alt vektör uzayı olsun. Bu durumda sıfırdan farklı bir elemanı vardır. Yani ,
için

dır.

İspat : olsun. ,

şeklinde tanımlansın. Teorem 3.6.1 'den , 'de

olacak şekilde bir elemanı vardır . diyelim. 'dır. Aksi

taktirde olup kabulümüzle çelişir.

vektör uzayı olduğundan , tüm ve tüm 'ler için ,

' dir. Böylece

olur. O zaman ,

ve

dır. Bu ,

olduğundan ;

anlamına gelir. Özel olarak , burada gerçel sayı olmak üzere

seçilirse, o zaman tüm 'lar için ,

dır. Ancak ve yeterince küçükler için ,

negatiftir. Böylece , negatif olamayacağından , olur.

Dolayısıyla ,

dır.

Sonuç 3.6.3 : tam bir iç çarpım uzayı ve , 'den farklı kapalı bir alt vektör uzayı olsun. 'in , dışındaki bir elemanını 'nin elemanlarına birleştiren vektörler arasında minimal uzunluğa sahip olan , 'ye diktir.

Teorem 3.6.4 : , üzerinde konveks olan , derecesi olan polinomların kümesini belirtsin. olsun. O zaman ,

(3.6.4)

problemi tek bir çözüme sahiptir.

İspat : Teorem 3.2.1 (DAVIS,P.J., 'Interpolation and Approximation', Dover Publication, Inc.,New York (1975)) 'den ;

Bir polinomu üzerinde konvektir ancak ve ancak üzerinde dır.

Eğer x ve y , S üzerinde konveks iseler, o zaman

S de x için S üzerinde konvektir. Hatta

S olup buradan S konvektir. S böylece konvektir.

Şimdi de S 'nin, S nin kapalı bir alt kümesi olduğunu göstereceğiz.

x , S ye yakınsak olsun, yani,

olsun. x , S 'e S 'de en iyi yaklaşan eleman olsun.(Sonuç 2.5.2 'deki gibi)

O zaman,

x için

olur, öyle ki x 'de S olur. O halde S dir.

Şimdi de ;

S polinomları S aralığındaki dereceleri S olacak

şekilde ortonormal polinomlar olsun. O zaman, bazı c_i sabitleri için

yazılabilir ve böylece ,

dır. Böylece ;

olur. Şimdi ,

dır. Çünkü ;

, çemberinde analitik olsun. O zaman

'de düzgün olarak yakınsar. Böylece verilen bir için, bu kuvvet

serisinin yeterince elemanlarını alabilir ve için

olacak şekilde

polinomuna varırız. Keyfi bir gerçel aralığı üzerinde

dir. Ancak analitik olmayan fonksiyonlar için kuvvet serilerinde böyle bir genişleme söz konusu değildir.

Böylece kompleks düzlemdeki her sınırlı bölge üzerinde düzgün olarak yakınsar. Buradan ;

o bölge üzerinde düzgün olarak yakınsar ve üzerinde olduğundan o bölge üzerinde olur. Yakınsadığı fonksiyon polinom olduğundan limiti de içinde olur. O halde kapalıdır. Böylece , (3.6.1) teoreminden konveks , kapalı ve 'nin boştan farklı bir alt kümesi olduğundan

probleminin tek bir çözümü vardır.

KAYNAKLAR

CHENEY,E.W., 1966 . ‘Introduction to Approximation Theory’, McGraw-Hill Book Company, New York.

DAVIS,P.J., 1975 . ‘Interpolation and Approximation’, Dover Publication, Inc., New York .

HAASER,N.B. ; SULLIVAN,J.A., 1971. ‘Real Analysis’ Van Nostrand Reinhold Company , New York .

RIVLIN,T.J., 1966. ‘An Introduction to The Approximation of Functions’, Blaisdell Publishing Company,Printed in the U.S.A .

_____, 1974 . ‘The Chebyshev Polynomials’, John Wiley and Sons Inc. , Printed in United States of America .

SMARZEWSKI,R., 1987 . ‘On Best Approximation in Spaces’, Journal of Approximation Theory ,49: 93-98.

UBHAYA,V.A., 1990 . ‘Best Piecewise Monotone Uniform Approximation’,Journal of Approximation Theory, 63:375-383.

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Mersin’de doğdum. Öğrenimimi sırasıyla Cumhuriyet İlkokulu , Mobil Ortaokulu , Hacı Sabancı Lisesi ’nde tamamladım. 1999 yılında Süleyman Demirel Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girdim. 2003 yılında mezun olup Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yüksek lisans yapmaya başladım.