



ENERGY–MOMENTUM TENSÖRÜ ÜZERİNE

Süleyman KARANLIK

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Dr. Öğr. Üyesi Serhan EKER

AĞRI-2020

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SüleymanKARANLIK

ENERGY–MOMENTUM TENSÖRÜ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ
Dr. Öğr. Üyesi SerhanEKER

AĞRI-2020



T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü



TEZ ONAY FORMU

ENERGY- MOMENTUM TENSÖRÜ ÜZERİNE

Dr.Öğr.Üyesi Serhan EKER danışmanlığında, Süleyman KARANLIK tarafından hazırlanan bu çalışma, 09/01/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği / oy çokluğu (X/...)** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Doç.Dr. Ali ÇAKMAK

İmza :

Üye : Doç.Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

İmza :

Üye : Dr.öğr.Üyesi Serhan EKER

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu .../.../201.. tarih ve / nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim HAN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ ENERGY–MOMENTUM TENSÖRÜ ÜZERİNE

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Serhan EKER

2020, 60 sayfa

Jüri: Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Doç. Dr. Ali ÇAKMAK

Dr. Öğr. Üyesi Serhan EKER

Bu tez çalışmasında Spin manifoldları üzerinde inşa edilmiş olan Dirac operatörünün özdeğerlerine O. Hijazi tarafından getirilmiş olan alt sınır değerleri irdelenmiştir. Spin manifoldları üzerinde inşa edilmiş olan spinor demeti temel alınarak tanımlanmış olan Energy–Momentum tensörü incelenmiştir. Buna bağlı olarak Energy–Momentum tensörünün izi lokal olarak elde edilmiştir.

Bu çalışma beş ana bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde manifold teorisi ve Dirac operatörleri üzerinde yapılan çalışmalar hakkında kısa bir tarihsel taslak sunuldu. İkinci bölümde ise tezimiz için temel teşkil eden vektör alanları, 1 –formlar, tensörler gibi gerekli tanım ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde vektör demetinin ve asli lif demetinin tanımı verildi. Daha sonra Spin manifoldunun nasıl inşa edildiği hakkında temel bilgilere değinildi. Ayrıca, Spin manifoldları üzerindeki spinor demetleri inşa edildi. Bu bölümün sonunda ise Dirac operatörünün tanımı verildi. Dördüncü bölümde ise Spin manifoldları üzerinde inşa edilen Dirac operatörünün özdeğerleri için elde edilen alt sınır ile ilgili Energy–Momentum tensörüne bağlı olarak araştırma bulguları verildi ve bu alt sınırın limit durumu incelendi. Son bölümde ise araştırılan konunun alanında ilk olmasından dolayı, elde edilen sonuçların bir sonraki çalışmalara nasıl temel teşkil edeceği konusu üzerinde tartışıldı.

2020, 60 sayfa

Anahtar sözcükler: Spin manifoldları, Dirac operator, özdeğerler, Energy–momentum tensörü, konformal geometri.

ABSTRACT

MASTER
ON THE ENERGY–MOMENTUM TENSOR
Advisor: Dr. Teaching Member Serhan EKER
2020, Page:60
Jury: Assoc. Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR
Dr. Teaching Member Ali ÇAKMAK
Dr. Teaching Member Serhan EKER

In this thesis, the lower bounds which were obtained by O. Hijazi for the eigenvalues of the Dirac operator constructed on spin manifolds are examined. Energy-Momentum tensor, which is defined on the basis of spinor bundle built on Spin manifolds, is examined. Accordingly, the trace of the Energy–Momentum tensor is obtained locally.

This study consists of five main sections. In the introduction, a brief historical outline of the work on manifold theory and Dirac operators is presented. In the second part, necessary definitions and concepts such as vector fields, 1-forms and tensors are given which are the basis for our thesis. In the third chapter, the definition of vector bundles and principle bundles are given. Afterwards, basic information about how to construct Spin manifold is mentioned. Moreover, spinor bundles are constructed on Spin manifolds. At the end of this section, the definition of Dirac operator is given. In the fourth chapter, the research findings of the lower bound for the eigenvalues of the Dirac operator constructed on the spin manifolds are given and the limiting case of this lower bound is investigated. In the last chapter, since the first subject of the researched subject is the first one in the field, it is discussed how the results will form the basis for the next studies.

2020, 60 pages

Keywords: Spin manifolds, Dirac operator, eigenvalues, Energy–momentum tensor, conformal geometry.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimim boyunca, insani ve ahlaki değerleri ile örnek edindiğim, yanında çalışmaktan onur duyduğum, benden bilgi ve deneyimlerini esirgemeyen, kıymetli bilgileriyle çalışmamda etkin katkısı bulunan, çalışmalarımın tamamlanabilmesi için bana her türlü desteği sunan çok değerli ve hümanist danışman hocam, Dr. Öğr. Üyesi Serhan EKER’eteşekkürlerimive şükranlarımı sunarım.

Eğitim hayatımın tüm süreçlerinde her türlü destekleriyle beni hiç yalnız bırakmayan aileme sonsuz teşekkür ederim.

09/01/2020

Süleyman KARANLIK

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	İİ
ABSTRACT.....	İİİ
TEŞEKKÜR.....	İV
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	Vİ
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	3
3. MATERYAL VE YÖNTEM	15
3.1. Vektör Demetleri ve Asli Lif Demetleri.....	15
3.2. Yerel Aşık Demetler ve Asli Lif Demetleri	22
3.3. Riemann Manifoldları Üzerinde Spin Yapısı ve Spinor Demeti	26
3.3.1. Clifford Cebirleri	26
3.3.2. Riemann Manifoldları Üzerinde Spin Yapısı ve Spinor Demeti.....	29
3.3.3. Spinor Demeti Üzerinde Vektör Alanı ile Spinor Alanının Çarpımı	32
3.3.4. Spinor Demeti Üzerinde Kovaryant Türev.....	34
3.3.5. Dirac Operatörü D_A	35
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	41
4.1. Dirac Operatörünün Özdeğerlerine Alt Sınır	41
4.2. Levi- Civita Konneksiyonunun Modifikasyonu.....	43
4.3. Özdeğer Tahminleri.....	45
4.4 Konformal Geometri ve Özdeğer Tahminleri	47
4.5. Özdeğerlerin Limit Durumu	54
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	58
KAYNAKLAR	59
ÖZGEÇMİŞ	61

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

(V, Q)	Kuadratik uzay
$Cl(V, Q)$	(V, Q) Kuadratik uzayına karşılık gelen Clifford cebiri
Cl_n	Reel Clifford cebiri
$\mathbb{C}l_n$	Kompleks Clifford cebiri
$Spin(n)$	Reel spin grubu
$Spin^c(n)$	Kompleks Spin grubu
κ	Clifford Cebirinin temsili
κ_n	$Spin(n)$ grubunun spinor temsili
TM	M manifoldu üzerindeki tanjant demeti
T^*M	M manifoldu üzerindeki kotanjant demeti
$\mathcal{X}(M)$	M manifoldu üzerindeki vektör alanlarının kümesi
$C^\infty(M, \mathbb{R})$	M manifoldundan $\mathbb{R}$ ye düzgün fonksiyonların kümesi
$\nabla_X Y$	Konneksiyon, kovaryant türev operatörü
$\Gamma(E)$	E vektör demeti üzerindeki kesitlerin kümesi
∇	Kovaryant türev
$Gl(n, \mathbb{R})$	Genel lineer grup
$\mathfrak{g}$	G Lie grubunun Lie cebiri
$O(n)$	Ortogonal grup
$SO(n)$	Özel ortogonal grup
$P \times_\rho V$	Asosye vektör demeti

$\mathbb{S}$	Spinor demeti
$End(V)$	V den V ye giden lineer dönüşümlerin uzayı



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. S^2 birim küresi üzerinde stereografik izdüşüm.....	5
Şekil 2.2. M topolojik manifoldu üzerinde tanımlı örtüşme dönüşümleri.....	6
Şekil 2.3. M ve N diferensiyellenebilir manifoldları arasında tanımlanan dönüşümün türevlenebilirliği.....	9
Şekil 3.1. φ dönüşümünün değişmeli diyagramı.....	15
Şekil 3.2. $M \times \mathbb{R}^k$ üzerinde tanımlı φ dönüşümünün değişmeli diyagramı.....	16
Şekil 3.3. φ_α dönüşümünün değişmeli diyagramı.....	19
Şekil 3.4. Λ dönüşümünün değişmeli diyagramı.....	29
Şekil 3.5. $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ dönüşümünün değişmeli diyagramı.....	30
Şekil 3.6. $P_{Spin(n)}$ için Λ dönüşümünün değişmeli diyagramı.....	31
Şekil 3.7. $P_{Spin(n)}$ için Λ dönüşümünün yerel değişmeli diyagramı.....	31
Şekil 3.8. $Spin(n)$ üzerinde tanımlı değişmeli diyagramlar.....	33
Şekil 3.9: Z konneksiyon 1 –formunun değişmeli diyagramı.....	34

1. GİRİŞ

Manifold kavramı, geometrinin ve modern matematiksel fiziğin merkezinde yer alır. Çünkü karmaşık yapıların Öklid uzayının daha basit yerel topolojik özellikleri açısından tanımlanmasına ve anlaşılmasına olanak sağlar. Manifoldlar doğal olarak denklem sistemlerinin çözüm kümeleri ve fonksiyonların grafikleri olarak ortaya çıkar.

Manifoldlar ek bir yapıya sahip olabilir. Manifold üzerinde ek bir yapı tanımlamak için kart ailesinden oluşan atlas kullanılabilir. Yapı önce bu atlası ait kartlar üzerinde tanımlanır. Daha sonra bu kartlar yardımıyla tanımlanan tüm geçiş fonksiyonları bu kartlar ile uyumlu ise yapı manifold üzerine taşınabilir. Örneğin diferensiyellenebilir manifoldların tanımlanması bu standart yol ile yapılır. Zira manifoldun diferensiyellenebilirolması demek, manifold üzerinde alınan tüm geçiş fonksiyonlarının diferensiyellenebilir olmasıdır. Buna göre, diferensiyellenebilir manifoldların sahip olduğu diferensiyellenebilir yapı kalkülüsün manifoldlar üzerinde yapılmasına olanak sağladığından, manifoldların önemli bir sınıfını teşkil etmektedir.

Herhangi bir diferensiyellenebilir manifold Riemann metriği ile donatılabilir ve bu metrik ile donatılan diferensiyellenebilir manifold üzerinde tensörler, Levi–Civita kovaryant türevi gibi manifoldun geometrisini anlamamızı kolaylaştıran özel dönüşümler tanımlanabilir.

Manifold üzerindeki Spin yapısının kesin tanımı, lif demeti kavramı çıktıktan sonra, Andre Haeffliger (1956) tarafından yönlendirilebilir Riemann manifoldu üzerinde Spin yapısının varlığına yönelik topolojik engelleri bulduktan sonra mümkün oldu. Bu sonuç daha sonra Max Karoubi (1968) tarafından yönlendirilemeyen pseudo Riemann manifoldlarına uygulandı.

Yönlendirilebilir Riemann manifoldları üzerinde Spin yapısının tanımlanması bizim de bu tezde kullanacağımız vektör demetleri, spinor demetleri inşa edilmesine olanak sağlamıştır. Spin yapısına sahip manifold üzerinde spinor demetinin

inşaedilmesi de manifoldun geometrisini anlamamızı kolaylaştıracak olan Dirac operatörünün tanımlanmasına olanak sağlamıştır.

Spinor demeti üzerinde inşa edilen Dirac operatörü gerek fizikçiler gerekse matematikçiler için önemli çalışma alanlarından biridir. Bu çalışma alanlarından biri de Dirac operatörünün spectrumunun incelenmesidir. Çünkü, matematikçilerin manifoldun geometrisine dair aramış oldukları cevaplara yardımcı bir araç olarak kullanılabilmektedir. Bu alanda ilk önemli çalışma A. Lichnerowicz (1963) tarafından Dirac operatörlerinin özdeğerlerine alt sınır getirmektir. Alt sınır elde edilirken Schrödinger–Lichnerowicz formülü kullanılmıştır.

1980 yılında Thomas Friedrich , A. Lichnerowicz tarafından elde edilen alt sınırı spinor demeti üzerinde tanımlanmış olan spinorial Levi–Civita konneksiyonunu modifiye ederek daha optimal bir sınıra taşımıştır. Üstelik, bu sınırın limit durumunu göz önüne alarak manifoldun geometrisi hakkında ince bilgiler elde etmiştir.

Thomas Friedrich’ in elde etmiş olduğu bu alt sınır,Yamabe sayısı anlamında yeni bir geometrik invaryant kullanılarak Oussama Hijazi (1986) tarafından,daha da geliştirilmiştir. Bu sonuç sadece pozitif skaler eğriliğe sahip manifoldlar üzerinde anlamlı olduğundan, bu durumu aşmak için yeni bir geometrik invaryant olan Energy–Momentum tensörü ilk defa Oussama Hijazi (1995) tarafından kullanılmış ve Spin manifoldları üzerinde tanımlanan Dirac operatörünün özdeğerlerine optimal bir alt sınır getirilmiştir.

Yukarıda anlatıldığı gibi bu çalışmanın araştırma bulgularının büyük bir kısmı Oussama Hijazi’ nin 1995 yılında yayımlamış olduğu makaledeki ispatları ile verilen teoremlerin yeniden incelenmesi ve örneklerin güncellenmesi ile oluşturulmuştur.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde topolojik manifold ve onun tanımından doğal olarak gelen kartlara bağlı olarak tanımlanan atlas kavramı verilecektir. Zira atlastan alınan herhangi iki kart ile tanımlanan örtüşme fonksiyonları manifoldun düzgün bir manifold olup olmadığını belirlememize yardımcı olmaktadır. Bu kartlara bağlı olarak manifoldun düzgün bir manifold olduğunu belirledikten sonra da tanjant ve kotanjant vektör tanımlarını vereceğiz. Daha sonra bu kavramları sırasıyla her noktaya karşı bir tanjant vektörü veya kotanjant vektörü karşılık getiren vektör alanları ile 1 –forma taşıyacağız. Buna ek olarak vektör alanları ve 1 –formlar yardımı ile tensör tanımını vereceğiz. Son olarak manifoldun geometrisini belirlememize yardımcı olacak olan Riemann metriği ve Riemann eğrilik tensörüne değineceğiz.

Tanım 2.1: M bir topolojik uzay olsun. Eğer M topolojik uzayı aşağıdaki koşulları sağlarsa, n -boyutlu topolojik manifold olarak adlandırılır (Naber 1996, Lee 2003):

- i. M topolojik uzayı aynı zamanda bir Hausdorff uzayıdır.
- ii. M topolojik uzayı, 2. Sayılabilirdir: Yani M nin topolojisi için sayılabilir bir tabanı vardır.
- iii. M topolojik uzayı, n –boyutlu yerel öklidyendir: Yani $\forall p \in M$ için $\exists p \in U \subseteq M$ de açık bir alt kümesi var, öyle ki

$$\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$$

dönüşümü bir homeomorfizmdir.

Burada $\forall p \in M$ için (U, φ) ikilisine M topolojik manifoldunun kartı veya koordinat komşuluğu denir. Ayrıca, $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ ailesine de M topolojik manifoldunun atlası denir.

(U_i, φ_i) yerel bir koordinat komşuluğu ve $p \in M$ olsun. O halde

$$\varphi_i(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)) \in V_i \subset \mathbb{R}^n,$$

noktasının bileşenleri olan $x^j(p), j = 1, \dots, n$ reel sayılarına p noktasının yerel koordinatları, $x^j: U_i \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarına yerel koordinat fonksiyonları ve $(x^1, \dots, x^n)$ e de p noktasının civarında yerel koordinat sistemi denir.

Örnek 2.2: $M = (0,1) \subset \mathbb{R}$ de tanımlanan standart topolojiye göre açık bir alt küme olsun. O halde, M aşağıdaki gibi tanımlanan

$$\begin{aligned} \varphi: U &\rightarrow U' \subseteq \mathbb{R} \\ x &\mapsto \varphi(x) = x \end{aligned}$$

homeomorfizmi ile tek kartlı ve boyutu 1 olan topolojik bir manifolddur.

Örnek 2.3: $M = \{(\sin x, x) | x \in \mathbb{R}\}$ üzerinde tanımlanan

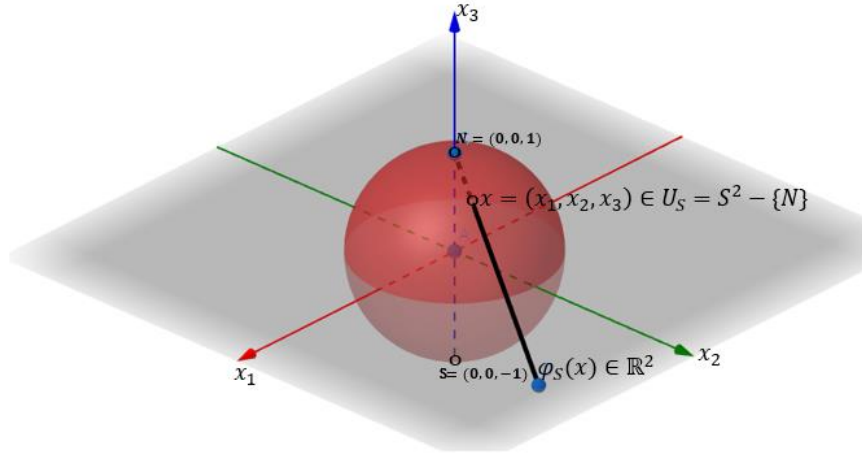
$$\begin{aligned} \varphi: M &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \varphi(x) = x \end{aligned}$$

homeomorfizmi ile birlikte topolojik manifolddur. Üstelik 1-boyutludur. Dikkat edilecek olunursa, bir manifoldun boyutunu φ homeomorfizminin görüntü uzayının boyutu belirler.

Bazı durumlarda yukarıdaki topolojik manifoldu tek bir kart ile ifade edebilmek mümkün olamayabilir. Bunun için aşağıdaki gibi manifold tanımını sağlayacak şekilde birden fazla kart tanımlamak gerekebilir.

Örnek 2.4: $\mathbb{R}^3$ üzerinde verilen standart topolojiye göre, $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ birim küresi, 2 –boyutlu topolojik bir manifolddur.

S^2 birim küresi $\mathbb{R}^3$ üzerindeki standart topolojiden indirgenen topoloji bir topolojik uzaydır. Dahası $\mathbb{R}^3$ Hausdorff uzayı olduğundan, S^2 de Hausdorff uzayıdır. O halde geriye sadece yerel öklidyenliği göstermek kalacaktır. Bunun için ise S^2 birim küresi üzerinde



Şekil 2.1: S^2 birim küresi üzerinde stereografik izdüşüm

Şekil 2.1 deki stereografik izdüşüm yardımı ile $U_S = S^2 - \{N\}$ açığı üzerinde

$$\begin{aligned} \varphi_S: U_S = S^2 - \{N\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right) \end{aligned}$$

dönüşümünü ve $U_N = S^2 - \{S\}$ açığı üzerinde de

$$\begin{aligned} \varphi_N: U_N = S^2 - \{S\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \left(\frac{x_1}{1 + x_3}, \frac{x_2}{1 + x_3} \right) \end{aligned}$$

dönüşümünü göz önünde bulunduralım. Burada dikkat edilmesi gereken diğer bir husus da

$$\begin{aligned} \varphi_S^{-1}: \mathbb{R}^2 &\rightarrow U_S = S^2 - \{N\} \\ (y_1, y_2) &\mapsto \frac{1}{1 + \|y\|^2} (2y_1, 2y_2, \|y\|^2 - 1) \end{aligned}$$

dönüşümünün $(\varphi_S \circ \varphi_S^{-1}) = I_d$ birim dönüşümü şeklinde yazılabildiğinden, φ_S dönüşümünün 1-1, örten ve sürekli bir dönüşüm olduğu gibi, tersinde sürekli olduğu yani bir homeomorfizm olduğudur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \varphi_N^{-1}: \mathbb{R}^2 &\rightarrow U_N = S^2 - \{S\} \\ (y_1, y_2) &\mapsto \frac{1}{1 + \|y\|^2} (2y_1, 2y_2, 1 - \|y\|^2) \end{aligned}$$

dönüşümü ile φ_N dönüşümü de bir homeomorfizm belirtir. Dolayısıyla S^2 , manifold tanımındaki şartları sağladığından dolayı 2-boyutlu topolojik bir manifolddur.

Tanım 2.5: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ üzerinde açık bir alt küme olmak üzere, $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlı fonksiyonun $p = (p^1, \dots, p^n) \in U$ noktasındaki i .kısımlı türevi

$$D_i f(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p^1, \dots, p^i + h, \dots, p^n) - f(p^1, \dots, p^i, \dots, p^n)}{h}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer f fonksiyonu $p = (p^1, \dots, p^n) \in U$ noktasında her mertebeden kısmi türevleri mevcut ve sürekli ise f fonksiyonuna p noktasında diferensiyellenebilir denir. Ayrıca, $\forall p \in U$ için f fonksiyonunun her mertebeden kısmi türevleri mevcut ise f fonksiyonuna C^∞ –sınıfındandır denir (Naber 1996).

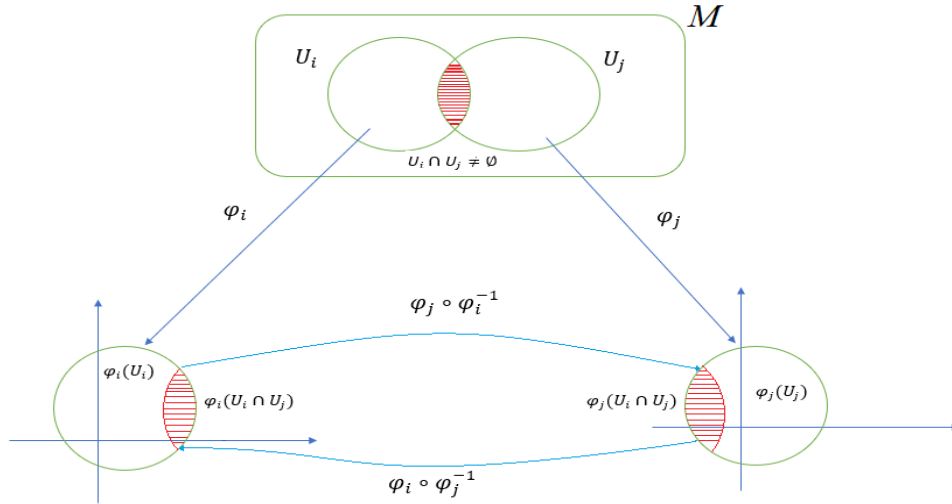
Tanım 2.6: $M, \mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ atlası ile birlikte verilen topolojik bir manifold olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa, $\mathcal{A}$ atlasına C^k –sınıfındandır ($k \geq 1$) denir (Naber 1996, Lee 2003):

$U_i \cap U_j \neq \emptyset$ olmak üzere $\forall i, j \in I$ için

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j),$$

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j),$$

örtüşme (koordinat) fonksiyonları C^k –sınıfındandır. $\mathcal{A}$ atlası M topolojik manifoldu üzerinde C^k –sınıfından ise $\mathcal{A}$ atlasına M topolojik manifoldu üzerinde C^k –sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı denir.



Şekil 2.2: M topolojik manifoldu üzerinde tanımlı örtüşme dönüşümleri

Tanım 2.7: M, n –boyutlu topolojik manifold olsun. $\mathcal{A}$ atlası M topolojik manifoldu üzerinde C^k –sınıfından ise M ye n –boyutlu diferensiyellenebilir manifold denir.

Bundan sonra tezimizin kalan bölümünde diferensiyellenebilir manifold yerine düzgün manifold kavramı kullanılacaktır.

Örnek 2.8: $\mathbb{R}^3$ de verilen $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ birim küresinin 2 –boyutlu topolojik bir manifold olduğunu Örnek 2.4 de gösterdik, S^2 birim küresi üzerinde verilen $\mathcal{A} = \{(U_S, \varphi_S), (U_N, \varphi_N)\}$ atlası, $\mathcal{C}^\infty$ –sınıfındandır. Zira, $\mathcal{A}$ atlas ailesinden alınan kartlara bağlı olarak, elde edilen

$$\begin{aligned} \varphi_S \circ \varphi_N^{-1}: \quad \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \\ (y_1, y_2) &\mapsto \left(\frac{y_1}{y_1^2 + y_2^2}, \frac{y_2}{y_1^2 + y_2^2} \right) \end{aligned}$$

örtüşme dönüşümü ile

$$\begin{aligned} \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}: \quad \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \\ (y_1, y_2) &\mapsto \left(\frac{y_1}{y_1^2 + y_2^2}, \frac{y_2}{y_1^2 + y_2^2} \right) \end{aligned}$$

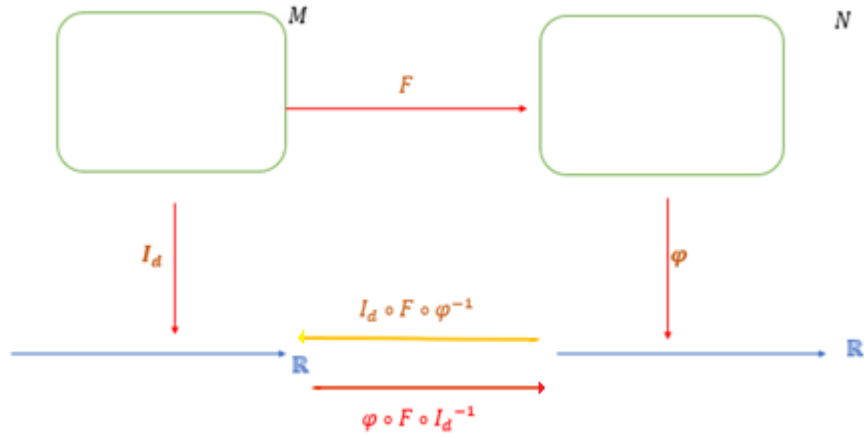
örtüşme dönüşümün, $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ üzerinde sürekli ve her mertebeden kısmi türevleri mevcuttur. Bu yüzden $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ birim küresi, 2 –boyutlu düzgün bir manifolddur.

Tanım 2.9: M ve N düzgün manifoldlar olmak üzere, $F: M \rightarrow N$ birebir örten ve $F \in \mathcal{C}^k(M, N)$ ve $F^{-1} \in \mathcal{C}^k(N, M)$ ise F dönüşümüne diffeomorfizm denir. M ve N ye de diffeomorftir denir.

Örnek 2.10: $M = \mathbb{R}$ için $\mathcal{A}_1 = \{(\mathbb{R}, I_d)\}$ atlası ve $N = \mathbb{R}$ için $\mathcal{A}_2 = \{(\mathbb{R}, \varphi(x) = x^3)\}$ atlası verilsin. O halde

$$\begin{aligned} F: M &\rightarrow N \\ x &\mapsto F(x) = x^{1/3} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan F fonksiyonu bir diffeomorfizm olduğu aşağıdaki gibi kolaylıkla gösterilebilir:



Şekil 2.3: M ve N diferensiyellenebilir manifoldları arasında tanımlanan dönüşümün türevlenebilirliği

$$(\varphi \circ F \circ I_d^{-1})(x) = (\varphi \circ F)(x) = \varphi(x^{1/3}) = x \in C^\infty(M, N)$$

ve

$$(I_d \circ F \circ \varphi^{-1})(x) = (I_d \circ F)(\sqrt[3]{x}) = I_d(x) = x \in C^\infty(M, N).$$

O halde M ile N de diffeomorfiktir.

Tanım 2.11: M düzgün bir manifold ve $p \in M$ olsun. M düzgün manifoldunun p noktasındaki tanjant vektörü

$$V_p: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

ye tanımlı aşağıdaki koşulları sağlayan bir dönüşümdür (O' neil 198):

- i. $\mathbb{R}$ -lineerlik: $V_p(af + bg) = aV_p(f) + bV_p(g), \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}),$
- ii. Leibnitz çarpım kuralı : $V_p(f \cdot g) = f(p)V_p(g) + V_p(f)g(p), \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}).$

M düzgün manifoldunun p noktasındaki tüm tanjant vektörlerinin kümesi de $T_p M$ ile gösterilir ve M düzgün manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı olarak adlandırılır. $T_p M$ aşağıdaki gibi verilen vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemleri altında $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır(O' neil 1983):

$$\oplus \quad T_p M \times T_p M \quad \rightarrow \quad T_p M$$

$$(V_p, W_p) \mapsto \oplus(V_p, W_p) := (V_p + W_p): C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \odot \quad \mathbb{R} \times T_p M &\rightarrow T_p M \\ (\lambda, V_p) &\mapsto \odot(\lambda, V_p) := (\lambda V_p): C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tanım 2.12: Herhangi bir $p \in U$ noktası için (U, φ) , n –boyutlu düzgün M manifoldunun bir kartı ve $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ koordinat fonksiyonları olsun. $1 \leq i \leq n$ için $p \in U$ noktasında aşağıdaki gibi tanımlı

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p(f) \end{aligned}$$

dönüşümüne p nin i . koordinat vektörü denir. Bu şekilde tanımlanmış olan koordinat vektörü Tanım 2.10 daki iki koşulu sağladığından dolayı bir tanjant vektörüdür.

Ayrıca

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p : 1 \leq i \leq n \right\}$$

kümesi $T_p M$ tanjant uzayının bir tabanıdır. Buna göre $\forall V_p \in T_p M$,

$$V_p = \sum_{i=1}^n V_p(x^i) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p,$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.13: $U \subset M$ açık bir alt küme olmak üzere $\forall p \in U$ noktasına $V(p) := V_p$ olacak şekilde tanjant vektörü atayan, yani

$$V: U \rightarrow \bigcup_{p \in M} T_p(M)$$

fonksiyonuna U üzerinde vektör alanı denir (Lee 2003).

Yukarıdaki tanımda U açık alt kümesi yerine M alınırsa, M düzgün manifoldu üzerindeki düzgün vektör alanlarının kümesini $\mathcal{X}(M)$ ile gösterilir.

Herhangi bir $V, W \in \mathcal{X}(M)$, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki gibi verilen

$$\begin{aligned} (V + W)(p) &:= V_p + W_p \\ (\alpha V)(p) &:= \alpha V_p \end{aligned}$$

vektörel toplam ve skalerle çarpım işlemleri altında $\mathcal{X}(M)$, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde reel bir vektör uzayı iken,

$$(V + W)(p) := V_p + W_p$$

$$(fV)(p) := f(p)V_p$$

$C^\infty(M, \mathbb{R})$ halkası üzerinde ise bir modüldür (O'Neil 1983).

Tanım 2.14: $\mathcal{D}: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonu;

i. $\mathbb{R}$ -lineerlik: $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\mathcal{D}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{D}(f) + \beta \mathcal{D}(g),$$

ii. $\mathcal{D}(f \cdot g) = f \mathcal{D}(g) + g \mathcal{D}(f),$

koşullarını sağlıyorsa $\mathcal{D}$ ye bir derivasyon denir (O'Neil 1983).

Tanım 2.15: $[V, W] := VW - WV$ şeklinde tanımlanan dönüşüme $V, W \in \mathcal{X}(M)$ nin Lie Bracketi denir. Bu tanıma göre $[V, W] \in \mathcal{X}(M)$, ayrıca M düzgün manifoldu üzerinde bir derivasyondur.

Tanım 2.16: M düzgün manifoldu üzerinde $p \in M$ noktası verilsin. Buna göre, p noktasındaki kotanjant uzayı

$$T_p^*M = \{\theta_p \mid \theta_p: T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{R} - \text{lineer}\}$$

şeklinde ifade edilir. Burada T_p^*M kotanjant uzayı, T_pM tanjant uzayının dual uzayıdır (O'Neil 1983, Morita 2001).

n -boyutlu düzgün M manifoldu üzerinde (U, φ) kartı ile birlikte $p \in U$ noktası ve $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ koordinat fonksiyonları verilmiş olsun. Buna göre,

$$\{dx_p^i: 1 \leq i \leq n\}$$

T_p^*M için tabandır ve bu tabana göre, $\theta \in T_p^*M$ yerel olarak

$$\theta_p = \sum_{i=1}^n \theta_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) dx^i \Big|_p$$

şeklinde yazılır. Burada $\theta_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) \in \mathbb{R}$ dir.

Tanım 2.17: M düzgün manifoldu üzerinde $\forall p \in M$ noktasına $\theta_p \in T_p^*M$ olacak şekilde bir kotanjant vektörüne götüren dönüşüme M üzerinde 1-form denir. M üzerindeki düzgün 1-formların kümesini $\mathcal{X}^*(M)$ ile göstereceğiz. Buna göre, herhangi bir $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{X}^*(M)$, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki gibi verilen

$$(\theta_1 + \theta_2)(p) := \theta_{1p} + \theta_{2p}$$

$$(\alpha \theta_1)(p) := \alpha \theta_{1p}$$

vektörel toplam ve skalerle çarpım işlemleri altında $\mathcal{X}^*(M)$, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde reel bir vektör uzayı iken,

$$(\theta_1 + \theta_2)(p) := \theta_{1p} + \theta_{2p}$$

$$(f\theta_1)(p) := f(p)\theta_{1p}$$

$C^\infty(M, \mathbb{R})$ halkası üzerinde ise bir modüldür (O'Neil 1983).

Tanım 2.18: M düzgün manifoldu üzerinde, aşağıdaki koşulları sağlayan

$$d: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{X}^*(M)$$

$$d \mapsto df$$

dönüşümüne dış (exterior) türev denir (O'Neil 1983):

$$\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \text{ ve } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ için}$$

- i. $\mathbb{R}$ -lineerlik: $d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg$,
- ii. $d(f \cdot g) = f dg + g df$.

Tanım 2.19: M düzgün manifoldu üzerinde, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olsun.

$$(df)_p: T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$V_p \mapsto (df)_p(V_p) = V_p(f)$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümüne f nin diferensiyeli denir (O'Neil 1983).

Tanım 2.20: $V_1, V_2, \dots, V_n$ ve W uzayları aynı $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı vektör uzayları olsunlar. O halde

$$T: V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow W$$

dönüşümü aşağıdaki koşulu sağlarsa bu dönüşüme i . bileşene göre lineerdir denir.

$$v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \dots, v_{i-1} \in V_{i-1}, v, v' \in V_i, v_{i+1} \in V_{i+1}, \dots, v_n \in V_n \text{ ve } \alpha, \beta \in \mathbb{F} \text{ için}$$

$$\begin{aligned} T(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, \alpha v + \beta v', v_{i+1}, \dots, v_n) &= \alpha T(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_n) \\ &\quad + \beta T(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v', v_{i+1}, \dots, v_n), \end{aligned}$$

$\forall i = 1, \dots, n$ için bu özellik sağlanıyorsa T fonksiyonuna n -lineer dönüşüm denir (O'Neil 1983, Lee 2003).

Tanım 2.21: V bir reel vektör uzayı ve V^* da onun dual uzayı olsun.

$$T: \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{r\text{-tane}} \times \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_{s\text{-tane}} \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanan her bir $(r + s)$ -lineer dönüşümüne V üzerinde (r, s) -tipinden bir tensör denir. V üzerinde (r, s) -tipinden tensörlerin kümesi $\mathcal{T}_s^r(V)$ ile gösterilir.

Hatırlanacak olursa $T_p(M)$ üzerinde tanımlanan vektörel toplam ve skalerle çarpım

işlemleri altında $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı yapısına sahiptir. Dolayısıyla V yerine $T_p(M)$ alınacak olunursa M nin p noktasındaki $\mathcal{T}_s^r(T_p(M))$ tensör uzayı elde edilir ve bu uzayın her bir elemanına da p noktasında (r, s) –tipinden bir tensör denir.

Tanım 2.22: M düzgün bir manifoldu üzerinde alınan her bir noktasına

(r, s) –tipinden bir tensör karşılık getiren dönüşüme M üzerinde (r, s) –tipinden bir tensör alanı denir. Buna göre, $X_1, \dots, X_r \in \mathcal{X}(M), \omega_1, \dots, \omega_s \in \mathcal{X}(M)^*$ için

$$\begin{aligned} T: \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M)}_{r\text{-tane}} \times \underbrace{\mathcal{X}(M)^* \times \dots \times \mathcal{X}(M)^*}_{s\text{-tane}} &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (X_1, \dots, X_r, \omega_1, \dots, \omega_s) &\mapsto T(X_1, \dots, X_r, \omega_1, \dots, \omega_s) \end{aligned}$$

dönüşümü $C^\infty(M, \mathbb{R})$ –değerli (r, s) –tipinden lineer bir dönüşümdür (O’ neil 1983, Lee 2003).

Bundan sonra M üzerinde tensör alanların kümesini literatürde olduğu gibi $\mathcal{T}_s^r(M)$ ile göstereceğiz. Dahası $\mathcal{T}_s^r(M)$ nin bir T elemanına (r, s) –tipinden bir tensör alanı diyeceğiz. Özel olarak da

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0^0(M) &= C^\infty(M, \mathbb{R}), \\ \mathcal{T}_0^1(M) &= \mathcal{X}(M), \\ \mathcal{T}_1^0(M) &= \mathcal{X}(M)^*, \end{aligned}$$

şeklinde ifade edeceğiz.

Tanım 2.23: M düzgün manifoldu üzerinde

$$\begin{aligned} g: \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (V, W) &\mapsto g(V, W) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $(2,0)$ –tipinde tanımlı bir tensör alanı, M düzgün manifoldunun üzerinde alınan herhangi bir p noktası için

$$g_p: T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

biçiminde simetrik, pozitif tanımlı, bilineer ve non–dejenere olan $(2,0)$ –tipinde bir tensöre karşılık getirirse g ye M düzgün manifoldu üzerinde bir Riemann metriği ve (M, g) ikilisine de bir Riemann manifoldu denir (O’ neil 1983, Lee 2003).

n –boyutlu düzgün M manifoldu üzerinde g Riemann metriği yerel koordinatlara bağlı olarak

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.24: M düzgün bir manifold olsun. Buna göre, $(\mathcal{X}(M), C^\infty(M, \mathbb{R}))$ vektör alanı modülünde aşağıdaki koşulları sağlayan

$$\begin{aligned}\nabla: \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow \mathcal{X}(M) \\ (V, W) &\mapsto \nabla(V, W) := \nabla_V W\end{aligned}$$

dönüşümüne M düzgün manifoldu üzerinde konneksiyon denir (O'neil 1983).

$\forall V, V_1, V_2, W, W_1, W_2 \in \mathcal{X}(M), \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

- i. $C^\infty(M, \mathbb{R})$ –lineerlik: $\nabla_{(fV_1+gV_2)} W = f\nabla_{V_1} W + g\nabla_{V_2} W$,
- ii. $\mathbb{R}$ –lineerlik: $\nabla_V(\alpha W_1 + \beta W_2) = \alpha\nabla_V W_1 + \beta\nabla_V W_2$,
- iii. $\nabla_{fV} W = f\nabla_V W$,
- iv. $\nabla_V fW = V(f)W + f\nabla_V W$.

Burada ∇_V ifadesine ∇ konneksiyonunun kovaryant türevi denir. Dolayısıyla da $\nabla_V W$ ifadesi W nun V ye göre kovaryant türevidir.

Ayrıca,

- v. $\nabla_V W - \nabla_W V = [V, W]$ (sıfır torsiyon özelliği)
- vi. $Vg(W, Z) = g(\nabla_V W, Z) + g(W, \nabla_V Z)$ (metrik uyumluluk)

şartları da sağlanıyorsa, ∇ konneksiyonuna M düzgün manifoldu üzerinde Levi–Civita denir ve aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned}2g(\nabla_V W, Z) = Vg(W, Z) + Wg(Z, V) - Zg(V, W) - g(V, [W, Z]) \\ - g(W, [Z, X]) + g(Z, [X, Y])\end{aligned}$$

Kozsul formülü ile karakterize edilir.

Tanım 2.25: (M, g) Riemann manifoldu olsun.

$$\begin{aligned}\mathcal{R}: \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow \mathcal{X}(M) \\ (V, W, Z) &\mapsto \mathcal{R}(V, W, Z) = \nabla_V \nabla_W Z - \nabla_W \nabla_V Z - \nabla_{[V, W]} Z\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $(3,1)$ –tipindeki $\mathcal{R}$ tensör alanına (M, g) Riemann manifoldunun eğrilik tensör alanı denir.

g metriği kullanılarak $\mathcal{R}$ eğrilik tensörü aşağıdaki gibi $(4,0)$ –tipinde bir tensör alanı olarak da ifade edilebilir:

$$\mathcal{R}(X, Y, Z, W) = g(\mathcal{R}(X, Y, Z), W).$$

Tanım 2.26: (M, g) Riemann manifoldu ve $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathcal{X}(M)$ nin yerel çatısı olsun. Aşağıdaki gibi tanımlanan

$$Ric: \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(V, W) \mapsto Ric(V, W) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, V)W, e_i)$$

$(2,0)$ –tipindeki tensör alanına Ricci eğriliği denir.



3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Vektör Demetleri ve Asli Lif Demetleri

Tanım 3.1.1: E ve M düzgün manifoldlar olsunlar. Buna göre $\pi: E \rightarrow M$ sürekli ve örten düzgün dönüşümü verilsin.

Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa E düzgün manifolduna M düzgün manifoldu üzerinde rankı k olan vektör demeti denir.

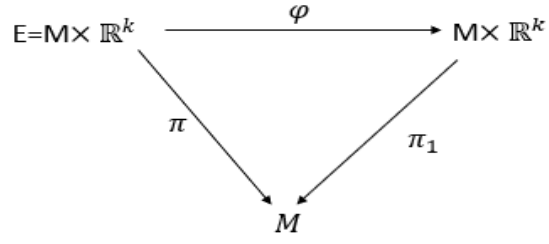
- i. M düzgün manifoldu üzerinde alınan her p noktası için $E_p = \pi^{-1}(p) \subset E$ alt kümesi k -boyutlu reel vektör uzayı yapısına sahiptir.
- ii. M düzgün manifoldu üzerinde alınan her p noktasının öyle bir U komşuluğu vardır öyle ki $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ dönüşümü bir diffeomorfizmdir ve Şekil 3.1 de verilen diyagram değişme özelliğine sahiptir:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times \mathbb{R}^k \\ & \searrow \pi|_{\pi^{-1}(U)} & \swarrow \pi_1 \\ & U & \end{array}$$

Şekil 3.1: φ dönüşümünün değişmeli diyagramı

yani $\pi_1 \circ \varphi = \pi$ dir. Burada π_1 , 1. izdüşüm dönüşümüdür. Ayrıca, $p \in U$ için φ nin E_p kısıtlanmış $\varphi|_{\pi^{-1}(p)}: E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$ lineer bir izomorfizmdir. Vektör demetinin kartları da (U, φ) çifti ile gösterilir (Lee 2003).

Örnek 3.1.2: $E = M \times \mathbb{R}^k$ ve M düzgün manifoldları için $\pi: E = M \times \mathbb{R}^k \rightarrow M$ dönüşümün sürekli, örten ve düzgün bir dönüşüm olduğu aşikardır. Dahası yukarıda verilen iki koşulu da sağlar. Dolayısıyla $E = M \times \mathbb{R}^k$ düzgün manifoldu, M düzgün manifoldu üzerinde rankı k olan aşikar bir vektör demetidir (Lee 2003).



Şekil 3.2: $M \times \mathbb{R}^k$ üzerinde tanımlı φ dönüşümünün değişmeli diyagramı

Aşağıdaki teorem, M düzgün manifoldu üzerinde tanımlanan geçiş dönüşümlerinin, $G \subset GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{n \times n} | \det(A) \neq 0\}$ genel lineer grubu üzerinde değer alması durumunda vektör demeti inşa edilebileceğini ifade etmektedir.

Teorem 3.1.3: E, M düzgün manifoldu üzerinde rankı k olan düzgün bir vektör demeti olsun. O halde $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ise, E nin aşağıdaki gibi tanımlanmış düzgün yerel trivilizasyonları :

$$\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k \text{ ve } \varphi_\beta: \pi^{-1}(U_\beta) \rightarrow U_\beta \times \mathbb{R}^k$$

için $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$ düzgün dönüşümü vardır öyle ki,

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}: U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{R}^k &\rightarrow U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{R}^k \\ (p, v) &\mapsto (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(p, v) = (p, g_{\alpha\beta}(p)(v)) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $g_{\alpha\beta}(p)v$, $k \times k$ tipindeki matrisin $v \in \mathbb{R}^k$ vektörü üzerine doğal etkisidir.

Yukarıdaki önermede $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ yerel trivilizasyonları ile tanımlanan

$$g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$$

düzgün dönüşümüne $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ arasındaki geçiş dönüşümü denir ve $\forall p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ için

- i. $g_{\alpha\alpha}(p) = I_d$,
- ii. $g_{\alpha\beta}(p) \cdot g_{\beta\gamma}(p) = g_{\alpha\gamma}(p)$,

koşullarını sağlar (Lee 2003).

Tanım 3.1.4: $\pi: E \rightarrow M$ ve $\pi': E' \rightarrow M'$ verilen düzgün iki vektör demeti olsun.

Buna göre $F: E \rightarrow E'$ ve $f: M \rightarrow M'$ düzgün dönüşümleri

- i. $\pi' \circ F = f \circ \pi$
- ii. $F|_{E_p}: E_p \rightarrow E'_{f(p)} \mathbb{R}$ -lineer

koşullarını sağlarsa (F, f) ikilisine E ve E' vektör demetleri arasındaki demet dönüşümü denir. Özel olarak $F^{-1}: E' \rightarrow E$ ve $f^{-1}: M' \rightarrow M$ düzgün dönüşümleri var ise E ve E' vektör demetlerine izomorfiktir denir (Lee 2003)..

Teorem 3.1.5: (Vektör Demeti Kurma Lemması) M düzgün manifoldu üzerinde aşağıdaki özellikler sağlansın:

- i. M düzgün manifoldu üzerinde alınan her p noktası için, E_p k – boyutlu reel vektör uzayı yapısına sahip olsun.
- ii. I indis kümesi için $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ M düzgün manifoldunun açık bir örtüsü olsun.
- iii. $E = \bigcup_{p \in M} E_p$ ve $\pi: E \rightarrow M$, $\pi(E_p) = p$ olacak şekilde tanımlansın.
- iv. $\forall \alpha \in I$ için $\pi^{-1}(U_\alpha) \subset E$ olmak üzere,

$$\phi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$$

birebir örten,

$$\phi_\alpha|_{E_p}: E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k$$

lineer izomorfizm olsun.

5. $\forall \alpha, \beta \in I$ için, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ iken

$g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$ düzgün dönüşümü ve

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k$$

$$(p, v) \rightarrow (p, g_{\alpha\beta}(p)(v))$$

şeklinde tanımlı bileşke dönüşümü var olsun. O halde, yukarıda verilen tüm bu özellikler varsa E , tek bir düzgün manifold yapısına ve M üzerinde k – ranklı düzgün vektör demeti yapısına sahiptir (Lee 2003).

Teorem 3.1.6: $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, M düzgün manifoldunun açık bir örtüsü olsun. $\forall \alpha, \beta \in I$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ iken

$$g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$$

düzgün geçiş dönüşümleri mevcut olsun. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in I$ ve $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ için

$$g_{\alpha\beta}(p)g_{\beta\gamma}(p) = g_{\alpha\gamma}(p)$$

koşulu sağlanırsa, aşağıdaki gibi geçiş fonksiyonları $g_{\alpha\beta}$ olan

$$\phi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$$

düzgün lokal dönüşümleri ile rankı k olan $\pi: E \rightarrow M$ düzgün vektör demeti vardır ve başka bir vektör demeti varsa da, bu demet E vektör demetine izomorfiktir (Lee 2003).

İspat:

Adım 1: V, k –boyutlu reel vektör uzayı ve $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ M düzgün manifoldunun açık bir örtüsü olsun. Ayrıca, $\forall \alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ iken

$$g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$$

teoremden belirtilen koşulları sağlasın. Buna göre

$$\check{E} = \{(p, \alpha, v) \in M \times A \times V \mid p \in U_\alpha\}$$

kümesini tanımlayalım ve küme üzerindeki denklik bağıntısını

$$(p, \alpha, v) \sim (q, \beta, w) \Leftrightarrow p = g_{\beta\alpha}(p)v = g_{\alpha\beta}(p)w$$

şeklinde tanımlayalım. Bu bağıntının denklik bağıntısı olduğu, aşağıdaki gibi kolaylıkla gösterilebilir:

- i. $(p, \alpha, v) \sim (p, \alpha, v) \Rightarrow p = p = g_{\alpha\alpha}(p)v = v$ olduğundan $\sim$ bağıntısı yansıma özelliğini sağlar.
- ii. $(p, \alpha, v) \sim (q, \beta, w) \Rightarrow p = g_{\beta\alpha}(p)v = g_{\alpha\beta}(p)w$ ya da $g_{\alpha\beta}(p)w = g_{\beta\alpha}(p)v$ olarak yazılırsa

$$g_{\alpha\beta}(p)w = g_{\alpha\beta}(p)g_{\beta\alpha}(p)v = g_{\alpha\alpha}(p)v = v$$

elde edilir ki, bu $(q, \beta, w) \sim (p, \alpha, v)$ anlamına gelir öyle ki $\sim$ bağıntısı simetri özelliğini sağlar.

- iii. Son olarak da $(p, \alpha, v) \sim (q, \beta, w)$ ve $(q, \beta, w) \sim (r, \gamma, z) \Rightarrow (p, \alpha, v) \sim (r, \gamma, z)$ koşulunu sağladığını yani $\sim$ bağıntısının geçişken bir bağıntı olduğunu aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

Yukarıda verilenlere göre $p = q, w = g_{\alpha\beta}(p)v$ ve $q = r, z = g_{\beta\gamma}(p)w$ sağlanır. O halde $p = q = r$ iken,

$$z = g_{\beta\gamma}(p)w = g_{\beta\gamma}(p)g_{\alpha\beta}(p)v \text{ yerine yazılırsa:}$$

$$z = g_{\beta\gamma}(p)g_{\beta\alpha}(p)v = g_{\alpha\gamma}(p)v.$$

olduğundan $(p, \alpha, v) \sim (r, \gamma, z)$ dir. O halde $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır ve $[p, \alpha, v]$ ile gösterilir.

Bu bağıntıya göre M düzgün manifoldu üzerinde alınan her bir p noktası için

$E_p = \pi^{-1}(p) = \{[p, \alpha, v] \mid p \in U_\alpha, v \in V\}$ k –boyutlu reel vektör uzayı yapısına sahip ve

$$\begin{aligned}\lambda[p, \alpha, v] + [p, \beta, w] &= \lambda[p, \alpha, v] + [p, \alpha, g_{\alpha\beta}(p)w] \\ &= [p, \alpha, \lambda v + g_{\alpha\beta}(p)w].\end{aligned}$$

Her bir $g_{\alpha\beta}(p)$ geçiş dönüşümü lineer bir izomorfizm olduğundan bu yapı özel bir seçime bağlı değildir.

Adım 2: E için yerel trivilizasyonlar:

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) &\longrightarrow U_\alpha \times V \subset M \times V \\ [p, \alpha, v] &\longmapsto (p, v)\end{aligned}$$

dönüşümü 1 – 1 dir. Yani

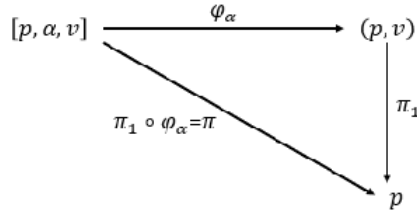
$$\varphi_\alpha([p, \alpha, v]) = \varphi_\alpha([q, \beta, w]) \Rightarrow (p, v) = (q, w) \Rightarrow p = q \text{ ve } w = g_{\alpha\beta}(p)v$$

olduğundan

$$[p, \alpha, v] = [q, \beta, w]$$

elde edilir.

Örtenlik ise kolaylıkla görülür. φ_α yerel trivilizasyondur. Çünkü istenilen lineerlik özelliği ile bir diffeomorfizmdir. Ayrıca $\pi: E \rightarrow M$ düzgün bir dönüşümdür. Çünkü düzgün fonksiyonların bileşkesinden oluşmaktadır:



Şekil 3.3: φ_α dönüşümünün değişmeli diyagramı

E vektör demetinin geçiş fonksiyonları da gerçekten de vektör demetini inşa ederken kullandığımız $g_{\alpha\beta}$ geçiş dönüşümleridir.

Yani, $\forall p \in U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ için

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}: U_\alpha \cap U_\beta \times V &\longrightarrow U_\alpha \cap U_\beta \times V \\ (p, w) &\longmapsto (p, g_{\alpha\beta}(p)w)\end{aligned}$$

bileşke dönüşümünün bir diffeomorfizm olduğu aşağıdaki gibi kolaylıkla görülebilir:

Yani, $g_{\alpha\beta}$ geçiş dönüşümleri düzgün olduğundan

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(p, w) &= \varphi_\alpha([p, \beta, w]) = \varphi_\alpha([p, \alpha, g_{\alpha\beta}(p)w]) \\
&= (p, g_{\alpha\beta}(p)w), \\
\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(p, u) &= \varphi_\beta([p, \alpha, w]) = \varphi_\beta([p, \beta, g_{\beta\alpha}(p)w]) \\
&= (p, g_{\beta\alpha}(p)u)
\end{aligned}$$

dönüşümleri de düzgündür. O halde, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ bir diffeomorfizmdir.

Adım 3: $\{(U_i, \psi_i) | i \in I\}$ ailesi M düzgün manifoldu için verilen bir atlas olsun.

$\{(\pi^{-1}(U_i \cap U_\alpha), (\psi_i \circ I_\alpha) \circ \varphi_\alpha) | i \in I, \alpha \in A, U_i \cap U_\alpha \neq \emptyset\}$ ailesi E düzgün manifoldu için bir atlasır. Buna göre E düzgün manifoldu $n + k$ –boyutludur.

Adım 4: Aynı $\{g_{\alpha\beta}\}$ geçiş dönüşümleri kullanılarak inşa edilen iki vektör demeti düzgün olarak denktir:

$\pi: E \rightarrow M$ yukarıda gösterildiği gibi düzgün bir vektör demeti ve $\pi': E' \rightarrow M$ ise $\{g_{\alpha\beta}\}$ geçiş fonksiyonları ve $\{\phi_\alpha\}$ lokal trivilizasyonu ile inşa edilmiş E den farklı düzgün bir vektör demeti olsun.

Buna göre $F: E \rightarrow E'$ düzgün dönüşümü $\forall p \in M$ için $F|_{E_p}: E_p \rightarrow E'_p$ lineer bir izomorfizm olsun.

$p \in U_\alpha, v \in V$ için

$$\begin{aligned}
F_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) &\rightarrow (\pi')^{-1}(U_\alpha) \\
[p, \alpha, v] &\mapsto \phi_\alpha^{-1}(p, v)
\end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu tanıma göre F_α lineer izomorfizmdir.

$\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ üzerinde $F_\alpha = F_\beta$ mıdır?

Biliyoruz ki $[p, \alpha, v] = [p, \beta, w] \Rightarrow w = g_{\alpha\beta}(p)v$ dir.

O halde

$$\begin{aligned}
F_\beta([p, \beta, w]) &= \phi_\beta^{-1}(p, w) = \phi_\beta^{-1}(p, g_{\alpha\beta}(p)v) \\
&= \phi_\alpha^{-1} \circ (\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})(p, g_{\alpha\beta}(p)v) \\
&= \phi_\alpha^{-1}(p, g_{\alpha\beta}(p)g_{\beta\alpha}(p)v) \\
&= F_\alpha([p, \alpha, v])
\end{aligned}$$

elde edilir.

Buna bağlı olarak $F: E \rightarrow E'$ düzgün dönüşümü $\pi^{-1}(U_\alpha)$ üzerinde F_α dönüşümüne eşit olan dönüşüm olarak tanımlanabilir. Dahası F_α dönüşümleri, $F_\alpha = \phi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha$ düzgün dönüşümlerin bileşkesi olduklarından, düzgün dönüşümlerdir.

Tanım 3.1.7: $\pi: E \rightarrow M$ düzgün bir vektör demeti ve $U \subset M$ düzgün manifoldunun açık bir alt kümesi olsun. O halde $\forall p \in U$ noktası için $\sigma: U \rightarrow E$ dönüşümü $(\pi \circ \sigma)(p) = p$ koşulunu sağlıyorsa σ dönüşümüne yerel kesit denir. U açık alt kümesi yerine, M alınması durumunda ise, σ dönüşümüne global kesit denir.

Özel olarak $E = TM$ olarak alınırsa, TM tanjant demetinin kesitleri vektör alanı olurken $E = T^*M$ alınması durumunda ise T^*M kotanjant demetinin kesitleri 1 –formlar olur (Lee 2003).

Tanım 3.1.8: M , boyutu n olan düzgün bir manifold olsun. Buna göre, TM tanjant demetinin $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}$ atlasının kartlarına karşılık gelen $g_{\alpha\beta}$ geçiş fonksiyonları

$$g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$$

olacak şekilde $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ alt grubunda değer alıyorsa, M düzgün manifolduna G grup yapısına sahiptir denir.

G alt grubunun yapısına bağlı olarak n –boyutlu düzgün M manifoldunun geometisi için aşağıdaki durumlar geçerlidir (Karappazar 2008):

- i. $G = GL(n, \mathbb{R})^+ = \{A \in M_{n \times n} | \det(A) > 0\}$ ise M düzgün manifoldu yönlendirilebilir.
- ii. $G = O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) | A^T \cdot A = I_{n \times n}\}$ ise M düzgün manifoldu Riemann metriği ile donatılabilir.
- iii. $G = SO(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) | A^T \cdot A = I_{n \times n}\}$ ise M düzgün manifoldu yönlendirilebilir ve Riemann metriği ile donatılabilir.
- iv. $n = 2m$ iken $G = GL(m, \mathbb{C})$ olması durumunda M düzgün manifoldu $J: TM \rightarrow TM$ olacak şekilde $J^2 = -I_d$ özelliğini sağlayan (2,1) –tipinde bir tensör alanına sahiptir. Yani M düzgün manifoldu $J: TM \rightarrow TM$ şeklinde tanımlı kompleks yapı ile donatılabilir (Kobayashi 1969).

Özel olarak $G = U(m) = \{A \in GL(m, \mathbb{C}) | A^* A = I\}$ olması durumunda M manifoldu kompleks bir manifolddur ve Hermityen metriği ile donatılabilir (Kobayashi 1969).

3.2. Yerel Aşıkardemetler ve Asli Lif Demetleri

Bu bölümde asli demetlerini inşa etmeden önce bölüm uzayı, yerel demet gibi bazı temel kavramlara değineceğiz.

(X, τ) topolojik uzay ve Y boştan farklı bir küme olsun. Buna göre $Q: X \rightarrow Y$ örten bir dönüşümü verilsin. Q dönüşümüne bağlı olarak elde edilen Y üzerindeki alt kümelerin ailesi aşağıdaki gibi seçilsin:

$$\tau_Q = \{U \subset Y \mid Q^{-1}(U) \in \tau\}.$$

O halde τ_Q , Y üzerinde aşağıdaki gibi bir topoloji belirtir:

- i. $Q^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$ ve $Q^{-1}(Y) = X \in \tau$ olduğundan $\emptyset, Y \in \tau_Q$.
- ii. I indis kümesi olmak üzere aşağıdaki gibi keyfi birleşimler için
 $\{U\}_{i \in I} \in \tau_Q \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau_Q$ dur.
Çünkü $\{U\}_{i \in I} \in \tau_Q \Rightarrow Q^{-1}(U) \in \tau$ ve $Q^{-1}(\bigcup_{i \in I} U_i) = \bigcup_{i \in I} Q^{-1}(U_i) \in \tau$ olduğundan $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau_Q$ dur.
- iii. I sonlu bir indis kümesi olmak üzere aşağıdaki gibi sonlu kesişimler için
 $Q^{-1}(U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_i) = Q^{-1}(U_1) \cap Q^{-1}(U_2) \cap \dots \cap Q^{-1}(U_i) \in \tau$ olduğundan dolayı $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_i \in \tau_Q$.

Tanım 3.2.1: (X, τ) topolojik bir uzay, Y boştan farklı bir küme ve $Q: X \rightarrow Y$ örten bir dönüşüm olsun. O halde Y üzerinde tanımlanan

$$\tau_Q = \{U \subset Y \mid Q^{-1}(U) \in \tau\}$$

Topolojisine, Q dönüşümüne karşılık gelen bölüm topolojisi ve (Y, τ_Q) uzayına da bölüm uzayı denir. Buna göre $Q: X \rightarrow Y$ bölüm dönüşümü, τ_Q topolojisinin tanımından dolayı sürekli bir bölüm dönüşümüdür.

Tanım 3.2.2: $Q: X \rightarrow Y$ bölüm dönüşümü olsun. $y \in Y$ olmak üzere, aşağıdaki gibi tanımlı

$$Q^{-1}(y) = \{x \in X \mid Q(x) = y\} \subset X$$

kümesine Q dönüşümünün Y üzerindeki lifi (*fiber*) denir.

Tanım 3.2.3: $\mathbb{F}$ bir cisim olsun. Buna göre $\mathbb{F}^n - \{0\}$ üzerinde aşağıdaki gibi bir denklik bağıntısı tanımlansın.

$x, y \in \mathbb{F}^n - \{0\}$ için $x \sim y \Leftrightarrow y = x \cdot a$ olacak şekilde $\exists a \in \mathbb{F}^n - \{0\}$ vardır.

O halde $\mathbb{F}^n - \{0\} / \sim = \mathbb{F}P^{n-1}$ bölüm uzayına $\mathbb{F}$ üzerinde $(n - 1)$ -boyutlu projektif uzay denir.

Tanım 3.2.4: P topolojik uzay, X Hausdorff uzayı ve

$$\mathcal{P}: P \rightarrow X$$

sürekli ve örten bir dönüşüm olsun. Eğer, X Hausdorff uzayının her bir x_0 noktasını içeren Y Hausdorff uzayının bir V açığı mevcut ve $\mathcal{P} \circ \Phi(x, y) = x$ şartını sağlayan

$$\Phi: V \times Y \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(V)$$

homeomorfizmi bulunabiliyorsa $(P, X, \mathcal{P}, Y)$ dörtlüsüne yerel aşıkardemet denir. Bazı kaynaklarda X, Y Hausdorff uzaylarına sırasıyla taban uzay ve lif (fiber) denir.

Dikkat edilecek olursa $\mathcal{P}^{-1}(x_0) = \{p \in P \mid \mathcal{P}(p) = x_0\}$ şeklindedir. Dahası $\mathcal{P}$ dönüşümünün sürekliliğinden dolayı $\mathcal{P}^{-1}(V) \subset P$ topolojik uzayının açık bir alt kümesidir. Ayrıca, $\Phi|_{\{x_0\} \times Y}$ bir homeomorfizm olduğundan dolayı $Y \cong \mathcal{P}^{-1}(x_0)$ dır.

Örnek 3.2.5: X, Y Hausdorff uzayları yardımıyla, $P = X \times Y$ şeklinde tanımlansın ve $\mathcal{P}$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlı izdüşüm dönüşümü olsun:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}: X \times Y &\rightarrow X \\ (x, y) &\mapsto \mathcal{P}(x, y) = x. \end{aligned}$$

O halde $I_d = \Phi: X \times Y \rightarrow X \times Y$ homeomorfizmi ile birlikte $(P, X, \mathcal{P}, Y)$ dörtlüsü yerel aşıkardemet belirtir.

Aşağıda aslı lif demetinin tanımında da yer alacak olan Lie grubu tanımlanmıştır.

Tanım 3.2.6: $\mathfrak{G}$ düzgün bir manifold ve ayrıca bir grup olsun. Buna göre, $\mathfrak{G}$ üzerinde tanımlanan çarpma

$$(x, y) \mapsto xy: \mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$$

ve tersine götürme

$$x \mapsto x^{-1}: \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$$

işlemleri C^∞ ise $\mathfrak{G}$ grubuna, Lie grubu denir.

Tanım 3.2.7: M, P düzgün manifoldlar ve $\mathfrak{G}$ Lie grubu olsun. Ayrıca, $\mathcal{P}: P \rightarrow M$ düzgün örten bir dönüşüm ve $\mathfrak{G}$ Lie grubunun P düzgün manifoldu üzerine sağ etkisi aşağıdaki gibi tanımlansın

$$\begin{aligned}\sigma: P \times \mathfrak{S} &\rightarrow P \\ (p, q) &\mapsto \sigma(p, q) := p \cdot q.\end{aligned}$$

Aşağıdaki koşullar sağlanırsa P düzgün manifolduna M düzgün manifoldu üzerinde yapı grubu $\mathfrak{S}$ olan asli lif demeti denir ve $(P, M, \mathfrak{S})$ üçlüsü ile gösterilir (Naber 1996).

- i. $\sigma: P \times \mathfrak{S} \rightarrow P$ dönüşümü $\mathcal{P}$ düzgün dönüşümünün liflerini korur, yani $\forall p \in P$ ve $q \in \mathfrak{S}$ için $p \cdot q \in P$, $\mathcal{P}(p) = \mathcal{P}(p \cdot q)$ sağlanır.
- ii. (Yerel Triviallik) M düzgün manifoldunun her bir x_0 noktası için en az bir V açık alt kümesi var ve

$$\begin{aligned}\Phi: \mathcal{P}^{-1}(V) &\rightarrow V \times \mathfrak{S} \\ p &\mapsto \Phi(p) = (\mathcal{P}(p), \Psi(p))\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümü bir diffeomorfizmdir. Öyle ki, $\Psi: \mathcal{P}^{-1}(V) \rightarrow \mathfrak{S}$ dönüşümü de, $\forall p \in P$ ve $q \in \mathfrak{S}$ için $\Psi(p \cdot q) = \Psi(p) \cdot q$ eşitliğini sağlar.

Yukarıda da görüldüğü gibi Asli lif demeti aslında yerel bir aşıkardemettir.

Örnek 3.2.8: M düzgün manifold ve $\mathfrak{S}$ Lie grubu olmak üzere $P = M \times \mathfrak{S}$, M üzerinde aşıkasli $\mathfrak{S}$ -lif demetidir.

İspat: $\forall x \in M$ ve $g \in \mathfrak{S}$ için

$$\begin{aligned}\mathcal{P}: M \times \mathfrak{S} &\rightarrow M \\ (x, g) &\mapsto \mathcal{P}(x, g) = x\end{aligned}$$

düzgün örten dönüşümü ve $\mathfrak{S}$ nin $M \times \mathfrak{S}$ üzerinde sağ etkisi

$$\begin{aligned}\sigma: (M \times \mathfrak{S}) \times \mathfrak{S} &\rightarrow (M \times \mathfrak{S}) \\ ((x, g), h) &\mapsto \sigma((x, g), h) = (x, g \cdot h)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre $\forall p \in (x, g) \in (M \times \mathfrak{S})$ için

$$\mathcal{P}(p \cdot h) = \mathcal{P}((x, g), h) = \mathcal{P}(x, g \cdot h) = x = \mathcal{P}(p) \text{ sağlanır.}$$

Ayrıca $\forall x \in M$ ve $g \in \mathfrak{S}$ için

$$\begin{aligned}\Phi: (M \times \mathfrak{S}) &\rightarrow (M \times \mathfrak{S}) \\ (x, g) &\mapsto \Phi(x, g) = (x, g)\end{aligned}$$

birim dönüşümdür, öyle ki

$$\Psi(p, h) = \Psi((x, g), h) = \Psi(x, g \cdot h) = h \cdot g = \Psi(p) \cdot h.$$

Buna göre $P = (M \times \mathfrak{S})$, M düzgün manifoldu üzerinde aşıkasli $\mathfrak{S}$ -lif demetidir.

Teorem 3.2.9: M düzgün manifold ve $\mathfrak{S}$ Lie grubu olsun. $\{V_i\}_{i \in I}$, M düzgün manifoldunun açık bir örtüsü olsun. O halde, $\forall i, j \in I, V_i \cap V_j \neq \emptyset$ olmak üzere $g_{\alpha\beta}: U_i \cap U_j \rightarrow \mathfrak{S}$ olacak şekilde düzgün geçiş dönüşümleri var ve $\forall i, j, k \in I, p \in V_i \cap V_j \cap V_k \neq \emptyset$ için

$$g_{ij}(p)g_{jk}(p) = g_{ik}(p)$$

koşulu sağlanırsa, M üzerinde denklik dışında tek türlü belirli $\mathfrak{S}$ –asli lif demeti inşa edilebilir (Naber 1996).

Yukarıdaki teoremde bahsi geçen $\mathfrak{S}$ Lie grubuna bağlı olarak n –boyutlu M düzgün manifoldu üzerinde aşağıda verilen asli lif demetleri inşa edilebilir (Karapazar 2004):

- i. $\mathfrak{S} = GL(n, \mathbb{R})$ olması durumunda M üzerinde $GL(n, \mathbb{R})$ –asli lif demeti inşa edilir ve $P_{GL(n, \mathbb{R})}$ ile gösterilir.
- ii. $\mathfrak{S} = GL(n, \mathbb{R})^+$ olması durumunda M üzerinde $GL(n, \mathbb{R})^+$ –asli lif demeti inşa edilir ve $P_{GL(n, \mathbb{R})^+}$ ile gösterilir.
- iii. $\mathfrak{S} = O(n)$ olması durumunda M üzerinde $O(n)$ –asli lif demeti inşa edilir ve $P_{O(n)}$ ile gösterilir.
- iv. $\mathfrak{S} = SO(n)$ olması durumunda M üzerinde $SO(n)$ –asli lif demeti inşa edilir ve $P_{SO(n)}$ ile gösterilir.
- v. $n = 2m$ için, $\mathfrak{S} = U(m)$ olması durumunda M üzerinde $U(m)$ – asli lif demeti inşa edilir ve $P_{U(m)}$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.10: P, M düzgün manifoldu üzerinde $\mathfrak{S}$ –asli lif demeti ve $\rho: G \times V \rightarrow V, \mathfrak{S}$ – Lie grubunun V vektör uzayı üzerine etkisi olsun. Buna göre,

$$(p, v) \sim (p \cdot g, \rho(g^{-1})(v))$$

denklik bağıntısı ile tanımlanan $P \times V/G$ bölümuzayı kullanılarak elde edilen $\mathcal{P}_G: P \times V/G \rightarrow M$ dönüşümü düzgün ve örten dönüşümdür. $P \times V/G$ ise M üzerinde belirli $\mathcal{P}: P \rightarrow M$ asli lif demetine karşılık gelen asosye vektör demetidir ve $P \times_{\rho} V$ ile gösterilir (Naber 1996).

Örnek 3.2.11: M, n –boyutlu yönlendirilebilir Riemann manifoldu üzerinde $P_{SO(n)}$ asli lif demeti olsun. O halde $\rho_n: SO(n) \rightarrow Aut(\mathbb{R}^n)$ standart temsili ile elde edilen $P_{SO(n)} \times_{\rho_n} \mathbb{R}^n$ asosye vektör demeti, M üzerinde inşa edilen TM tanjant demetine izomorftur (Naber 1996).

3.3. Riemann Manifoldları Üzerinde Spin Yapısı ve Spinor Demeti

Bu bölümde başlangıç olarak reel ve kompleks Clifford cebirlerinden bahsedeceğiz. Daha sonra Clifford cebirinden yararlanarak Spin grubu tanımını vereceğiz. Son olarak da verilen bir Riemann manifoldunun Spin yapısına sahip olabilmesi için gerekli koşulların neler olduğuna kısaca değineceğiz. Spin yapısına sahip herhangi bir Riemann manifoldu üzerinde de Spinor demeti tanımlayacağız.

3.3.1. Clifford Cebirleri

Tanım 3.3.1.1: $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2, \quad (n = p + q)$$

şeklinde tanımlı dejenere olmayan kuadratik formunu alalım. O halde, $\mathbb{R}^n$ üzerinde $Q(x)$ kuadratik formuna karşılık gelen Clifford cebirine Reel Clifford cebiri denir ve $Cl_{p,q}$ ile gösterilir. Özel olarak da $p = 0$ veya $q = 0$ değerlerini alması durumunda, sırasıyla Cl_n ve Cl'_n gösterimi kullanılacaktır. Biz tezimizin bundan sonraki bölümlerinde yalnızca Cl_n ile ilgileneceğiz (Friedrich 2000).

Teorem 3.3.1.2: $\mathbb{R}^n$, vektör uzayının tabanı $\{e_1 \dots e_n\}$ ve $I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_k\}$ indis kümesi olsun. Buna göre $e_I = e_{i_1} \cdot e_{i_2} \cdot \dots \cdot e_{i_k}$ çarpımı $e_\emptyset = 1$ ile birlikte $Cl_{p,q}$ için bir tabandır.

Tanım 3.3.1.3: $\forall z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ için

$$Q: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto Q(z) = z_1^2 + \dots + z_n^2$$

şeklinde tanımlı dejenere olmayan kuadratik formunu alalım. O halde, $\mathbb{C}^n$ üzerinde $Q(z)$ kuadratik formuna karşılık gelen Clifford cebirine kompleks Clifford cebiri denir ve $\mathbb{C}l_n$ ile gösterilir (Friedrich 2000).

Tanım 3.3.1.4: Δ_n kompleksn spinorların vektör uzayı olmak üzere, $n = 2k$ veya $n = 2k + 1$ durumunda $\Delta_n = \mathbb{C}^{2^k}$, kompleks boyutludur. Burada Δ_n kompleksn spinorların vektör uzayının elemanlarını da kompleks spinorlar denir.

Aşağıda Spin yapısı üzerinde inşa edilen Spinor demeti için yararlı olacak bir yardımcı teorem verilecektir.

Yardımcı Teorem 3.3.1.5:

- i. $n = 2k$ boyutlu olması durumunda $\mathbb{C}l_n \cong \text{End}(\Delta_n)$ izomorfizmi vardır.
- ii. $n = 2k + 1$ boyutlu olması durumunda ise $\mathbb{C}l_n \cong \text{End}(\Delta_n) \oplus \text{End}(\Delta_n)$ izomorfizmi elde edilir (Friedrich 2000).

Yukarıdaki yardımcı teorem yardımıyla aşağıdaki izomorfizm tablosu yazılabilir:

$\mathbb{C}l_1$	$\mathbb{C}l_2$	$\mathbb{C}l_3$	$\mathbb{C}l_4$	$\mathbb{C}l_5$	$\mathbb{C}l_6$	$\mathbb{C}l_7$	$\mathbb{C}l_8$
$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(2) \oplus \mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(4) \oplus \mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(8) \oplus \mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(16)$

burada $\mathbb{C}(n)$, $n \times n$ tipindeki kompleks matrisleri temsil etmektedir.

Kompleks Clifford cebirinin temsilleri aşağıdaki gibi verilmiştir:

- i. $n = 2k$ olması durumunda, $\mathbb{C}l_n$ kompleks Clifford cebirinin temsili aşağıdaki gibi

$$\kappa: \mathbb{C}l_n \rightarrow \text{End}(\Delta_n)$$

şeklinde tanımlı bir izomorfizmdir.

- i. $n = 2k+1$ olması durumunda, $\mathbb{C}l_n$ kompleks Clifford cebirinin temsili aşağıdaki gibi

$$\kappa: \mathbb{C}l_n \xrightarrow{\Phi_n} \text{End}(\Delta_n) \oplus \text{End}(\Delta_n) \xrightarrow{pr_1} \text{End}(\Delta_n)$$

şeklinde tanımlı bileşke dönüşümü ile ifade edilir.

Aşağıda Spin grupları hakkında kısa temel bilgi verilecektir. Daha ayrıntılı bir bilgi için (Friedrich, 2000) bakınız.

$V, \mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı vektör uzayı ve Q kuadratik form olsun. $Cl(V, Q)$ cebiride (V, Q) kuadratik uzayına karşılık gelen cebir olsun. O halde, $\forall x_1, \dots, x_k \in V$ için,

$$\begin{aligned}\gamma: Cl(V, Q) &\rightarrow Cl(V, Q) \\ x_1 \cdot \dots \cdot x_k &\mapsto \gamma(x_1 \cdot \dots \cdot x_k) = (-1)^k x_1 \cdot \dots \cdot x_k\end{aligned}$$

dönüşümü yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilen

$$\begin{aligned}Cl^0(V, Q) &= \{\alpha \in Cl(V, Q) | \gamma(\alpha) = \alpha\} \\ Cl^1(V, Q) &= \{\alpha \in Cl(V, Q) | \gamma(\alpha) = -\alpha\}\end{aligned}$$

uzayları, $Cl(V, Q)$ cebirinin alt uzaylarıdır.

Tanım 3.3.1.6: (V, Q) kuadratik uzayına karşılık gelen Clifford cebri $Cl(V, Q)$ olsun.

Buna göre,

$$\begin{aligned}\beta: Cl(V, Q) &\rightarrow Cl(V, Q) \\ x_1 \cdot \dots \cdot x_k &\mapsto \beta(x_1 \cdot \dots \cdot x_k) = x_k \cdot \dots \cdot x_1\end{aligned}$$

dönüşümü yardımıyla

$$\begin{aligned}* = \beta \circ \gamma: Cl(V, Q) &\rightarrow Cl(V, Q) \\ x_1 \cdot \dots \cdot x_k &\mapsto *(x_1 \cdot \dots \cdot x_k) = (-1)^k x_k \cdot \dots \cdot x_1\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $* = \beta \circ \gamma$ bileşke dönüşümüne konjugasyon denir.

Tanım 3.3.1.7: (V, Q) kuadratik uzayına karşılık gelen Clifford cebri üzerinde Spin grubu

$$Spin(Q) = \{v \in Cl^0(V, Q) | \forall x \in V, v \cdot x \cdot v^* \subset V \text{ ve } v \cdot v^* = 1\},$$

şeklinde tanımlanır.

Özel olarak $V = \mathbb{R}^n$ reel vektör uzayı ve

$$\begin{aligned}Q: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto Q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2\end{aligned}$$

dejenere olmayan kuadratik formu alınırsa, bu kuadratik uzaya karşılık gelen Clifford cebri ve Spin grubu sırasıyla Cl_n ve $Spin(n)$ dir. Buna göre $Spin(n) \subset Cl_n$ grubu aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$Spin(n) = \{v \in Cl_n^0 | \forall x \in \mathbb{R}^n, v \cdot x \cdot v^* \subset \mathbb{R}^n \text{ ve } v \cdot v^* = 1\},$$

yada

$$Spin(n) = \{v_1 \cdot \dots \cdot v_{2k} | \forall v_i \in \mathbb{R}^n, Q(v_i) = -1\}.$$

Yardımcı Teorem 3.3.1.8: V reel veya kompleks vektör uzayı ve Q kuadratik formu da V vektör uzayı üzerinde tanımlı olsun. Buna göre aşağıdaki gibi tanımlanan

$$\lambda: Spin(Q) \rightarrow SO(Q),$$

dönüşümü çekirdeği $\{-1,1\}$ olan 2: 1 örten bir grup homomorfizmidir (Fulton 1991).

Buna göre,

$\forall v \in Spin(Q)$ için

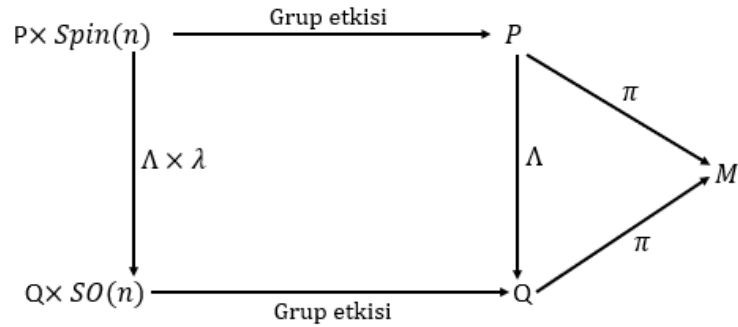
$$\lambda(v)x = v \cdot x \cdot v^*$$

şeklinde ifade edilen $\lambda(v): V \rightarrow V$ endomorfizmidir.

3.3.2. Riemann Manifoldları Üzerinde Spin Yapısı ve Spinor Demeti

$(Q, \pi, M, SO(n))$, M bağlantılı Riemann manifoldu üzerinde $SO(n)$ asli lif demeti olsun. Buna göre Spinyapısı aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 3.3.2.1: Q asli lif demeti üzerindeki Spinyapısı (P, Λ) çifti ile verilir ki burada P asli lif demeti iken $\Lambda: P \rightarrow Q$ dönüşümü de grup etkisini koruyan iki katlı örtü dönüşümüdür öyle ki Λ aşağıdaki diyagramı değişmeli yapar (Salamon 1995, Friedrich 2000):



Şekil 3.4: Λ dönüşümünün değişmeli diyagramı

Buna göre, M, n –boyutlu yönlendirilebilir Riemann manifold üzerinde Spinyapısı aşağıdaki gibi verilir:

M, n –boyutlu yönlendirilebilir Riemann manifold olduğundan yapı grubu $SO(n)$ dir. Buna bağlı olarak M nin $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ açık örtüsü ile TM tanjant demetinin kartları $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \phi_\alpha)\}$ şeklindedir. Bu kartlara karşılık gelen geçiş fonksiyonları ise $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ iken

$$g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow SO(n)$$

şeklinde tanımlanır.

$g_{\alpha\beta}$ geçiş fonksiyonları kullanılarak M üzerinde $P_{SO(n)} = \cup_\alpha U_\alpha \times SO(n) / \sim$ bölüm

uzayı aşağıdaki denklik bağıntısı ile tanımlanır:

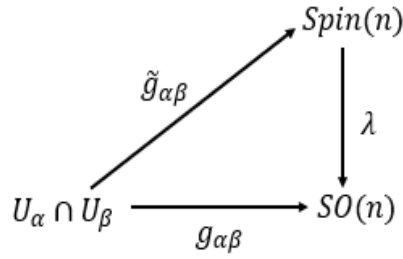
$$(\alpha, x, g) \sim (\beta, y, h) \Leftrightarrow \alpha = \beta, y = x, h = g_{\alpha\beta}(x)g.$$

Bu durumda asli–lif demeti yardımıyla geçiş fonksiyonları $g_{\alpha\beta}$ lar olan bir $P_{SO(n)}$ asli $SO(n)$ lif demeti inşa edilebilir üstelik $P_{SO(n)}$ asli $SO(n)$ lif demeti denklik bakımından da tektir.

Dahası $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ iken

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow Spin(n)$$

düzgün fonksiyonları mevcut ve



Şekil 3.5: $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ dönüşümünün değişmeli diyagramı

diyagramı değişmeli yani $\lambda \circ \tilde{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$.

O halde $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ iken $\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ için

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(x) \circ \tilde{g}_{\beta\gamma}(x) = \tilde{g}_{\alpha\gamma}(x)$$

cocycle koşulu sağlanıyorsa Mn –boyutlu yönlendirilebilir Riemann manifoldu üzerinde asli–lif demeti kurma teoremini kullanarak aşağıdaki gibi asli–lif demeti inşa edilebilir (Naber, 1996):

$\tilde{g}_{\alpha\beta}$ geçiş fonksiyonları yardımıyla

$$P_{Spin(n)} = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \times Spin(n) / \sim$$

bölüm uzayı aşağıdaki denklik bağıntısı ile tanımlanır:

$$(\alpha, x, g) \sim (\beta, y, h) \Leftrightarrow \alpha = \beta, y = x, h = \tilde{g}_{\alpha\beta}(x)g.$$

Bu durumda geçiş fonksiyonları $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ lar olan bir $P_{Spin(n)}$ asli $Spin(n)$ lif demeti vardır ve denklik bakımından tektir.

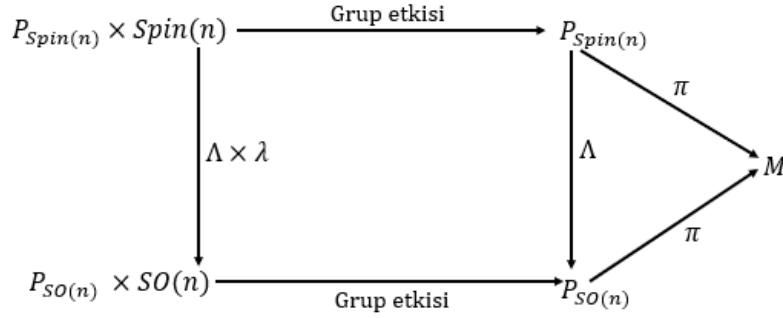
Adönüşümü de aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Lambda: P_{Spin(n)} \rightarrow P_{SO(n)}$$

$$[\alpha, x, g] \mapsto [\alpha, x, \lambda(g)]$$

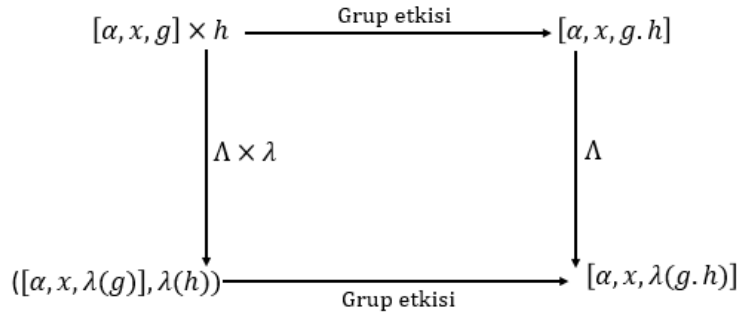
Buna göre Λ dönüşümü 2: 1 örtü dönüşümüdür. Bu da λ nın 2: 1 olmasından gelir.

Geriye sadece aşağıdaki diyagramın değişmeli olduğunu göstermek kalır:



Şekil 3.6: $P_{Spin(n)}$ için Λ dönüşümünün değişmeli diyagramı

Yukarıdaki diyagramın girdilerini veren diyagram aşağıdaki gibi ifade edilebilir:



Şekil 3.7: $P_{Spin(n)}$ için Λ dönüşümünün yerel değişmeli diyagramı

Buna göre diyagramın değişmeli olduğunu göstermek için

$$\begin{aligned} ([\alpha, x, \lambda(g)], \lambda(h)) &= [\alpha, x, \lambda(g) \cdot \lambda(h)], \lambda \text{ bir homomorfizm olduğundan} \\ &= [\alpha, x, \lambda(g \cdot h)] \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ki bu da yukarıdaki diyagramın değişmeli olduğunu gösterir. O halde $(P_{Spin(n)}, \Lambda)$, $P_{SO(n)}$ asli–lif demeti üzerinde bir Spinyapısıdır. Dahası, M ye Spin manifoldu denir (Bazen M manifoldu Spinyapısına sahiptir denir).

n –boyutlu yönlendirilebilir Riemann manifoldu M üzerinde tanımlı

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow Spin(n)$$

geçiş fonksiyonları ve $S^1 = U(1) \subset Aut(\mathbb{C})$ yardımıyla asosye vektör demeti aşağıdaki gibi verilir:

$$TM = P_{Spin(n)} \times_{U(1)} \mathbb{C}.$$

M üzerinde

$$\kappa_n: Spin(n) \rightarrow Aut(\Delta_n)$$

spinor temsili yardımıyla $\mathbb{S} = P_{Spin(n)} \times \Delta_n / \sim$ bölüm uzayı aşağıdaki denklik bağıntısı ile tanımlanır:

$$(p, v) \sim (p', v') \Leftrightarrow p' = p \cdot g, v' = (\kappa_n(g))^{-1}(v).$$

Bu durumda $\mathbb{S} = P_{Spin(n)} \times \Delta_n / \sim$ bölüm uzayı, asosye vektör demetidir ve $\mathbb{S} = P_{Spin(n)} \times_{\kappa_n} \Delta_n$ ile gösterilir. Yukarıdaki gibi tanımlanan $\mathbb{S}$ Spinor demetinin kesitlerine de M üzerinde spinor alanları denir.

κ_n spinor temsili yardımıyla elde edilen $\mathbb{S} = P_{Spin(n)} \times_{\kappa_n} \Delta_n$ spinor demeti kompleks spinor demetidir. $\mathbb{S}$ kompleks spinor demetinin kesitleri üzerinde aşağıdaki gibi $\Delta_n = \mathbb{C}^{2^k}$ boyutlu Hermityen iç çarpım tanımlanabilir (Lawson, 1989):

$$\begin{aligned} (,): \Gamma(\mathbb{S}) \times \Gamma(\mathbb{S}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ ([p, \Psi], [p, \Phi]) &\mapsto (\Psi, \Phi). \end{aligned}$$

O halde, $\forall [p, g, \kappa(g^{-1})\Psi], [p, g, \kappa(g^{-1})\Phi] \in \Gamma(\mathbb{S})$ için

$$\begin{aligned} ([p, g, \kappa(g^{-1})\Psi], [p, g, \kappa(g^{-1})\Phi]) &= (\kappa(g^{-1})\Psi, g, \kappa(g^{-1})\Phi) \\ &= (\Psi, \Phi) \end{aligned}$$

temsilciden bağımsız olduğundan $\mathbb{S}$ spinor demeti üzerinde tanımlanan iç çarpım iyi tanımlıdır.

3.3.3. Spinor Demeti Üzerinde Vektör Alanı ile Spinor Alanının Çarpımı

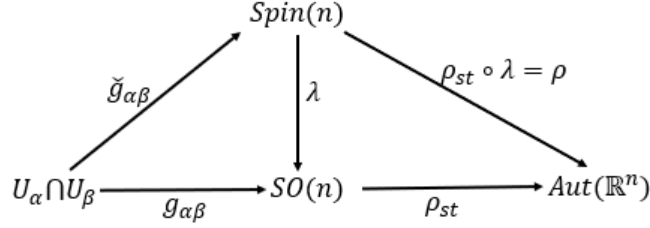
$$\begin{aligned} \kappa: \mathbb{R}^n &\rightarrow End(\Delta_n) \\ v &\mapsto \kappa(v): \Delta_n \rightarrow \Delta_n \\ \Psi &\mapsto \kappa(v)\Psi = v \cdot \Psi \end{aligned}$$

κ temsili için $\kappa(v): \Delta_n \rightarrow \Delta_n$ $\mathbb{R}$ -lineer bir dönüşümdür.

Ayrıca, $\forall v \in \mathbb{R}^n$ için κ dönüşümü

1. $\kappa(v)^* + \kappa(v) = 0$
2. $\kappa(v)^* \kappa(v) = |v|^2$

koşullarını sağlar.



Şekil 3.8: $Spin(n)$ üzerinde tanımlı değişmeli diyagramlar

κ dönüşümü, tanjant demeti üzerindeki $\kappa: TM \rightarrow End(\mathbb{S})$ dönüşümüne genişletmek için

$$\rho_{st}: SO(n) \rightarrow Aut(\mathbb{R}^n)$$

ve

$$\rho: Spin(n) \xrightarrow{\lambda} SO(n) \xrightarrow{\rho_{st}} Aut(\mathbb{R}^n)$$

temsiller olmak üzere, $TM = P_{Spin} \times_{\rho} \mathbb{R}^n$ asosye vektör demeti üzerinde tanjant vektörleri denklik sınıfları şeklinde de düşünülebilir. Buna göre

$$\begin{aligned}
 \kappa: TM &\rightarrow End(\mathbb{S}) \\
 ([p, v]) &\mapsto \kappa([p, v]): \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S} \\
 ([p, \Psi]) &\mapsto \kappa([p, v])([p, \Psi]) = [p, v. \Psi]
 \end{aligned}$$

dönüşümü iyi tanımlıdır (Friedrich 2000).

Bazı kaynaklarda bu koşulları sağlayan

$$\kappa: TM \rightarrow End(\mathbb{S})$$

dönüşümü M manifoldu üzerinde Spinyapısı olarak adlandırılır (Friedrich 2000).

$\kappa: TM \rightarrow End(\mathbb{S})$ dönüşümü yardımıyla

$$\rho: \Lambda^2(T^*M) \rightarrow End(\mathbb{S})$$

dönüşümü ortonormal çatılar üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanır:

$U \subset M$ açık alt kümesi üzerinde $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormal çatı olmak üzere

$$\eta = \sum_{i < j} \eta_{ij} e^i \wedge e^j \rightarrow \rho(\eta) = \sum_{i < j} \eta_{ij} \kappa(e_i) \kappa(e_j)$$

dir. Bu dönüşüm aynı şekilde kompleks değerli 2 –formlara genişletilebilir (Salamon 1995).

3.3.4. Spinor Demeti Üzerinde Kovaryant Türev

(M, g) Riemann manifoldu üzerindeki ∇^g Levi–Civita konneksiyonu yardımıyla $P_{SO(n)}$ asli –lif demeti üzerinde ω 1 –formunu belirlendikten sonra, $P_{Spin(n)}$ üzerinde, aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak şekilde Z konneksiyon 1 –formu aşağıdaki gibi tanımlanabilir (Friedrich 2000):

$$\begin{array}{ccc} T_p P_{Spin(n)} & \xrightarrow{Z} & \mathfrak{spin}(n) \\ \downarrow \Lambda_* & & \downarrow \lambda_* \\ T_{\Lambda(p)} P_{SO(n)} & \xrightarrow{\omega} & \mathfrak{so}(n) \end{array}$$

Şekil 3.9: Z konneksiyon 1 –formunun değişmeli diyagramı

$p \in P_{Spin(n)}$ ve $v \in T_p P_{Spin(n)}$ için

$$Z(v) = \lambda_*^{-1} \circ \omega \circ \Lambda_*(v).$$

Buna göre, Z konneksiyon 1 –formu yardımıyla $\mathbb{S} = P_{Spin(n)} \times_{\kappa_n} \Delta_n$ spinor demeti üzerindeki $\nabla^{\mathbb{S}}$ kovaryant türev operatörü $\forall \Psi \in \Gamma(\mathbb{S}), X \in \mathcal{X}(M)$ için aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\nabla_X^{\mathbb{S}} \Psi = d\Psi(X) + \frac{1}{2} \sum_{i < j} \omega_{ij}(X) e_i e_j \Psi.$$

Tanım 3.3.4.1: Kabul edelim ki, (M^n, g) Riemannian Spin manifold olsun. Buna göre

- i. Clifford çarpımı, kompleks bir doğrusal vektör demeti homomorfizmasıdır, yani $X \in \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ ve $\Psi \in \Gamma(\mathbb{S})$ için

$$\begin{aligned}\mu: T^*M \otimes \Gamma(\mathbb{S}) &\rightarrow \Gamma(\mathbb{S}) \\ X^b \otimes \Psi &\mapsto X \cdot \Psi\end{aligned}$$

öyle ki

$$X \cdot (Y \cdot \Psi) + Y \cdot (X \cdot \Psi) = -2g(X, Y)\Psi,$$

dir.

- ii. $\nabla, (M^n, g)$ üzerinde tanımlı Levi–Civita konneksiyonu olmak üzere, $\Gamma(\mathbb{S})$ üzerinde tanımlı $\nabla^{\mathbb{S}}$ kovaryant türevi aşağıdaki koşulu sağlar:

$$\nabla_X^{\mathbb{S}}(Y \cdot \Psi) = (\nabla_X Y) \cdot \Psi + Y \cdot \nabla_X^{\mathbb{S}}\Psi.$$

Gösterimde kolaylık olması açısından $\Gamma(\mathbb{S})$ üzerinde tanımlı olan $\nabla^{\mathbb{S}}$ kovaryant türev operatörünü ∇ ile göstereceğiz.

- iii. $\Gamma(\mathbb{S})$ üzerinde tanımlanmış olan Hermityen iç çarpımı aşağıdaki koşulu sağlar (Lawson 1989):

Her $X \in \mathcal{X}(M)$ ve $\varphi, \Psi \in \Gamma(\mathbb{S})$ için

$$(X \cdot \varphi, \Psi) = -(\varphi, X \cdot \Psi) \text{ dir.}$$

3.3.5. Dirac Operatörü D_A

$\kappa: \mathbb{R}^n \rightarrow \text{End}(\Delta_n)$ lineer dönüşümü $\mu_0: \mathbb{R}^n \times \Delta_n \rightarrow \Delta_n$ bilineer dönüşümü belirler. μ_0 dönüşümü bilineer olduğundan bu dönüşüm tensor çarpımının evrensellik özelliğinden $\mu_0: \mathbb{R}^n \otimes \Delta_n \rightarrow \Delta_n$ şeklinde lineer dönüşüme genişler. Bu dönüşüm de

$$\mu: TM \otimes \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$$

$$([p, v], [p, \Psi]) \mapsto [p, \mu_0(v \otimes \Psi)]$$

şeklinde demet dönüşümü belirler.

(M, g) Riemann manifold üzerindeki Dirac operatörü aşağıdaki gibi

$$D_A = \mu \circ \nabla^A: \Gamma(\mathbb{S}) \xrightarrow{\nabla^A} \Gamma(T^*M \otimes \mathbb{S}) \cong \Gamma(TM \otimes \mathbb{S}) \xrightarrow{\mu} \Gamma(\mathbb{S})$$

bileşke işlemi ile tanımlanır. Burada T^*M ve TM arasındaki geçiş g metriği ile yapılır.

M manifoldu üzerinde $U \subset M$ açık alt kümesi olmak üzere, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ yerel ortonormal çatı verildiğinde Dirac operatörünün lokal ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$D_A \Psi = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \nabla_{e_i}^A \Psi.$$

Sipinor demeti üzerinde tanımlanan kovaryant türevinin R^∇ spinor eğriliği, (M^n, g) üzerinde tanımlı Levi–Civita kovaryant türevinin R eğrilik tensörü ile TM tanjant demetinin herhangi bir ortonormal tabanı $\{e_j\}, 1 \leq j \leq n$ ile aşağıdaki gibi gösterilir:

$$R_{X,Y}^\nabla \Psi = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(R_{X,Y} e_j, e_k) e_j \cdot e_k \cdot \Psi, \quad (3.1)$$

ki burada $X, Y \in TM$ ve $\Psi \in \Gamma(\mathbb{S})$ (Friedrich 2000, Nicolas 2009).

Özel olarak, $n = 2$ olması durumunda özdeşlik aşağıdaki gibi olur:

$$R_{X,Y}^\nabla \Psi = \frac{S}{8} (X \cdot Y - Y \cdot X) \cdot \Psi,$$

ki burada $S, (M^n, g)$ nin skaler eğriliğidir.

Aşağıdaki çok kullanışlı formül (3.1) eşitliğinden çıkarılabilir.

Yardımcı Teorem 3.3.5.1: Ric , n –boyutlu yönlendirilebilir Rieman Spin manifoldu (M^n, g) nin Ricci eğrilik tensörü olsun. O halde $\forall X \in TM$ ve $\Psi \in \Gamma(\mathbb{S})$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır (Nicolas 2009):

$$\sum_{j=1}^n e_j \cdot R_{X,e_j}^\nabla \Psi = \frac{1}{2} Ric(X) \cdot \Psi.$$

İspat: Birinci Bianchi özdeşliği şunu ima eder:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n e_j \cdot R_{X,e_j}^\nabla \Psi &= \frac{1}{4} \sum_{j,k,l=1}^n g(R_{X,e_j} e_k, e_l) e_j \cdot e_k \cdot e_l \cdot \Psi \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{j,k,l=1}^n g(R_{e_j,e_k} X, e_l) e_j \cdot e_k \cdot e_l \cdot \Psi \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{j,k,l=1}^n g(R_{e_k,X} e_j, e_l) e_j \cdot e_k \cdot e_l \cdot \Psi \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{j,k,l=1}^n g(R_{X,e_j} e_k, e_l) (e_k \cdot e_l \cdot e_j - e_k \cdot e_j \cdot e_l) \cdot \Psi, \\ e_k \cdot e_l \cdot e_j - e_k \cdot e_j \cdot e_l &= -e_k \cdot e_j \cdot e_l - 2\delta_{jl} e_k + e_j \cdot e_k \cdot e_l + 2\delta_{ij} e_l \\ &= 2e_j \cdot e_k \cdot e_l + 4\delta_{jk} e_l - 2\delta_{jl} e_k \end{aligned}$$

ile birlikte aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$\begin{aligned}
3 \sum_{j=1}^n e_j \cdot R_{X,e_j}^\nabla \Psi &= - \sum_{j,l=1}^n g(R_{X,e_j} e_l, e_l) e_j \cdot \Psi \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n g(R_{X,e_j} e_k, e_j) e_k \cdot \Psi \\
&= \sum_{l=1}^n g(Ric(X), e_l) e_l \cdot \Psi + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g(Ric(X), e_l) e_l \cdot \Psi \\
&= \frac{3}{2} Ric(X) \cdot \Psi.
\end{aligned}$$

Aşağıda, spektrumun bir sonraki çalışması için temel olan Dirac operatörünün özelliklerine değinilecektir. Öncelikle, Dirac operatörünün komütatörünü bir fonksiyonla hesaplayan bir formüle ihtiyacımız var. Bir sonraki yardımcı teoremden, Dirac operatörünü içeren ve aşağıda gerekecek olan komütatörlerin veya anti-komütatörlerin hesaplamasını dahil ediyoruz.

Yardımcı Teorem 3.3.5.2: Herhangi $\Psi \in \Gamma(\mathcal{S})$, $\xi \in \mathcal{X}(M)$ ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için aşağıdaki koşullar sağlanır (Nicolas 2009):

i. $D(f\Psi) = grad(f) \cdot \Psi + fD\Psi$

ki burada $grad(f)$, (M^n, g) üzerinde vektör alanını gösterir.

ii. $D(\xi \cdot \Psi) = -\xi \cdot D\Psi - 2\nabla_\xi \Psi + (d + \delta)\xi^\flat \cdot \Psi$

Ki burada d ve δ sırasıyla (M^n, g) üzerinde dış türev ve codiferensiyeli gösterir.

iii. $D^2(f\Psi) = fD^2\Psi - 2\nabla_{grad(f)}\Psi + (\Delta f)\Psi$

Yukarıdaki eşitlikte $\Delta := \delta d = -\text{tr}(\text{Hess}g(\cdot))$, (M^n, g) üzerinde skaler laplacianı göstermektedir.

İspat: $\{e_j\}, 1 \leq j \leq n$ TM tanjant demetinin lokal ortonormal tabanı olsun. Buna göre

$$\begin{aligned}
D(f \cdot \Psi) &= \sum_{j=1}^n e_j \cdot \nabla_{e_j} (f \cdot \Psi) \\
&= \sum_{j=1}^n e_j \cdot (e_j(f)) \Psi + f \nabla_{e_j} \Psi \\
&= grad(f) \cdot \Psi + fD\Psi
\end{aligned}$$

ki bu birinci koşulu sağlar. Dahası

$$\begin{aligned}
D(\xi \cdot \Psi) &= \sum_{j=1}^n e_j \cdot \nabla_{e_j} (\xi \cdot \Psi) \\
&= \sum_{j=1}^n e_j \cdot \nabla_{e_j} \xi \cdot \Psi + e_j \cdot \xi \cdot \nabla_{e_j} \Psi \\
&= \sum_{j=1}^n e_j \cdot \nabla_{e_j} \xi \cdot \Psi - \xi \cdot \sum_{j=1}^n e_j \cdot \nabla_{e_j} \Psi - 2 \sum_{j=1}^n g(\xi, e_j) \nabla_{e_j} \Psi \\
&= \sum_{j=1}^n (e_j \wedge \nabla_{e_j} \xi^b) \cdot \Psi - \left(\sum_{j=1}^n e_j^\perp \nabla_{e_j} \xi^b \right) \cdot \Psi - \xi \cdot \sum_{j=1}^n e_j \cdot \nabla_{e_j} \Psi \\
&\quad - 2 \sum_{j=1}^n g(\xi, e_j) \nabla_{e_j} \Psi \\
&= -\xi \cdot D\Psi - 2\nabla_\xi \Psi + (d + \delta)\xi^b \cdot \Psi
\end{aligned}$$

bu da ikinci koşulun ispatını verir. Son olarak

$$\begin{aligned}
D^2(f \cdot \Psi) &= D(df \cdot \Psi + fD\Psi) \\
&= -df \cdot D\Psi - 2\nabla_{grad(f)} \Psi + (d + \delta)df \cdot \Psi + df \cdot D\Psi + fD^2\Psi \\
&= fD^2\Psi - 2\nabla_{grad(f)} \Psi + (\Delta f)\Psi,
\end{aligned}$$

Burada g –metriği ile 1 –formları vektör alanları ile tanımladık. Buda ispatı tamamlar.

Yardımcı Teorem 3.3.5.3: Riemannian Spin manifoldunun Dirac operatörü birinci dereceden eliptik ve self–adjoint lineer diferansiyel bir operatördür (Nicolas 2009).

İspat: Yardımcı Teorem 3.3.2.5.2 den D nin asıl sembolü

$$\begin{aligned}
T^*M &\longrightarrow End(\Gamma(\mathbb{S})) \\
\xi &\longmapsto \xi^\# .
\end{aligned}$$

olan birinci dereceden lineer bir diferansiyel operatör olduğunu tespit ettik ki burada $\forall X \in TM$ için $g(\xi^\#, X) := \xi(X)$ dir. Herhangi bir $\xi \in T^*M \setminus \{0\}$ için $\xi^\# \cdot$ dönüşümü $\xi^\# \cdot \xi^\# \cdot \Psi = -g(\xi, \xi)\Psi$ olduğundan dolayı $\Gamma(\mathbb{S})$ nin bir otomorfizmidir. Bu yüzden D eliptiktir.

Kabul edelim ki $\varphi, \Psi \in \Gamma(\mathbb{S})$ olsun. O halde $(\cdot, \cdot)$ Hermityen iç çarpımı, " $\cdot$ " Clifford çarpımı ve $\Gamma(\mathbb{S})$ üzerinde tanımlı ∇ arasındaki karşılıklı uyumluluk ilişkisini kullanarak aşağıdaki sonuca ulaşırız:

$$\begin{aligned}
(D\varphi, \Psi) &= \sum_{j=1}^n (e_j \cdot \nabla_{e_j} \varphi, \Psi) \\
&= - \sum_{j=1}^n (\nabla_{e_j} \varphi, e_j \cdot \Psi) \\
&= \sum_{j=1}^n -e_j \cdot (\varphi, e_j \cdot \Psi) + (\varphi, \nabla_{e_j} e_j \cdot \Psi) + \sum_{j=1}^n (\varphi, e_j \cdot \nabla_{e_j} \Psi) \\
&= \operatorname{div} V_{\varphi\Psi} + (\varphi, D\Psi)
\end{aligned}$$

burada $V_{\varphi\Psi} \in \Gamma(TM \otimes \mathbb{C})$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$\forall X \in TM$ için

$$(g \otimes Id_{\mathbb{C}})(V_{\varphi\Psi}, X) := (\varphi, X \cdot \Psi)$$

dir.

Özellikle, eğer φ veya Ψ M üzerinde kompakt bir desteğe sahipse (M nin sınırı üzerinde sıfırlanır), buna bağlı olarak Green formülünü uygularsak

$$\int_M (D\varphi, \Psi) v_g = \int_M (\varphi, D\Psi) v_g$$

bu yüzden D self-adjointtir.

Yardımcı Teorem 3.3.5.4: (M^n, g) Riemannian Spin manifoldunun Dirac operatörü D , Schrödinger–Lichnerowicz formülünü sağlar (Nicolas 2009):

$$D^2 = \nabla^* \nabla + \frac{S}{4},$$

ki burada S , (M^n, g) Riemannian Spin manifoldunun skaler eğriliğidir.

İspat: $\{e_j\}$, $1 \leq j \leq n$ TM tanjant demetinin lokal ortonormal tabanı olsun. O halde

$$\begin{aligned}
D^2\Psi &= \sum_{j,k=1}^n e_j \cdot \nabla_{e_j} (e_k \cdot \nabla_{e_k} \Psi) \\
&= \sum_{j,k=1}^n e_j \nabla_{e_j} e_k \cdot \nabla_{e_k} \Psi + e_j \cdot e_k \cdot \nabla_{e_j} \nabla_{e_k} \Psi \\
&= - \sum_{j,k=1}^n e_j \cdot e_k \cdot \nabla_{\nabla_{e_j} e_k} \Psi + \sum_{j,k=1}^n e_j \cdot e_k \cdot \nabla_{e_j} \nabla_{e_k} \Psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \left(\nabla_{\nabla_{e_j} e_j} - \nabla_{e_j} \nabla_{e_j} \right) \Psi \\
&\quad + \sum_{1 \leq j < k \leq n} e_j \cdot e_k \cdot \left(\nabla_{e_j} \nabla_{e_k} - \nabla_{e_k} \nabla_{e_j} - \nabla_{\nabla_{e_j} e_k} + \nabla_{\nabla_{e_k} e_j} \right) \Psi \\
&= \nabla^* \nabla \Psi - \sum_{1 \leq j < k \leq n} e_j \cdot e_k \cdot \left(\nabla_{[e_j, e_k]} - [\nabla_{e_j}, \nabla_{e_k}] \right) \Psi \\
&= \nabla^* \nabla \Psi - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n e_j \cdot e_k \cdot R_{e_j, e_k}^\nabla \Psi
\end{aligned}$$

Yardımcı Teorem 3.3.2.5.2 den

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=1}^n e_j \cdot e_k \cdot R_{e_j, e_k}^\nabla \Psi &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n e_j \cdot Ric(e_j) \cdot \Psi \\
&= \frac{S}{2} \Psi,
\end{aligned}$$

ki bu da ispatı verir.

Özellikle Dirac operatörünün karesi, altta yatan manifoldun skaler eğriliği kaybolur kaybolmaz, spinorler üzerine etki eden Laplacian ile çakışmaktadır. Bu, Dirac' ın Öklid uzayı üzerindeki orijinal sorusuna cevap sağlar.

Schrödinger–Lichnerowicz formülünün özdeğer tahminlerine uygulamaları sonraki bölümde tartışılacaktır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Dirac Operatörünün Özdeğerlerine Alt Sınır

Bu bölümde, kompakt Riemann Spin manifoldu üzerinde tanımlanan Dirac operatörünün özdeğerlerine manifoldun skaler eğriliği ve Energy–Momentum tensörünün normu anlamında bir alt sınır vereceğiz. Daha sonra bu alt sınırı limit durumunda inceleyeceğiz.

1980 yılında, kompakt Riemann Spin manifoldu üzerinde tanımlanan Dirac operatörünün özdeğerlerine ilişkin ilk alt sınır T. Friedrich tarafından Schrödinger–Lichnerowicz formülü yardımıyla aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 4.1.1: Kabul edelim ki, (M^n, g) $n \geq 2$ – boyutluk kompakt Riemann Spin manifoldu ve λ, D Dirac operatörünün özdeğeri olsun. O halde, λ özdeğerinin karesi için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır (Friedrich 1980):

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4} \frac{n}{n-1} S. \quad (4.1)$$

İspat: İspat fikri spinor demeti üzerinde tanımlanan Levi–Civita konneksiyonunun aşağıdaki gibi $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}$, reel değerli fonksiyonuna bağlı olarak modifiye edilmesine dayanır:

$$\nabla_X^f \Psi = \nabla_X \Psi + fX \cdot \Psi. \quad (4.2)$$

Dikkat edilecek olunursa ∇^f modifiye edilmiş spinorial Levi–Civita konneksiyonu S spinor demeti üzerinde tanımlanan Hermityen iç çarpıma göre metrik uyumludur.

Yani,

$$\begin{aligned} X(\Psi_1, \Psi_2) &= (\nabla_X^f \Psi_1, \Psi_2) + (\Psi_1, \nabla_X^f \Psi_2) \\ &= (\nabla_X \Psi_1 + fX \cdot \Psi_1, \Psi_2) + (\Psi_1, \nabla_X \Psi_2 + fX \cdot \Psi_2) \\ &= (\nabla_X \Psi_1, \Psi_2) + (fX \cdot \Psi_1, \Psi_2) + (\Psi_1, \nabla_X \Psi_2) + (\Psi_1, fX \cdot \Psi_2), \\ (X \cdot \Psi_1, \Psi_2) &= -(\Psi_1, X \cdot \Psi_2) \text{ olduğundan,} \end{aligned}$$

$$X(\Psi_1, \Psi_2) = (\nabla_X \Psi_1, \Psi_2) + (\Psi_1, \nabla_X \Psi_2)$$

eşitliği sağlanır.

Şimdi, kabul edelim ki ∇^f modifiye edilmiş spinorial Levi–Civita konneksiyonuna karşılık gelen Laplace operatörü:

$$\begin{aligned}
\Delta^f \Psi &= - \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i}^f \nabla_{e_i}^f \Psi - \sum_{i=1}^n \operatorname{div}(e_i) \nabla_{e_i}^f \Psi, \\
&= - \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} + f e_i) (\nabla_{e_i} \Psi + f e_i \cdot \Psi) - \sum_{i=1}^n \operatorname{div}(e_i) (\nabla_{e_i} \Psi + f e_i \cdot \Psi) \\
&= \Delta \Psi - f e_i \cdot \nabla_{e_i} \Psi - \nabla_{e_i} (f e_i) \cdot \Psi - f e_i \cdot \nabla_{e_i} \Psi + n f^2 \Psi - \operatorname{div}(e_i) f e_i \cdot \Psi \\
\operatorname{div}(e_i) &= 0 \text{ olduğundan,} \\
\Delta^f \Psi &= \Delta \Psi - 2 f D \Psi - \operatorname{grad}(f) \Psi + n f^2 \Psi \tag{4.3}
\end{aligned}$$

şeklindedir, ∇^f , nin normu

$$|\nabla^f \Psi|^2 = \sum_{i=1}^n |\nabla_{e_i}^f \Psi|^2 = \sum_{i=1}^n |\nabla_{e_i} \Psi + f e_i \cdot \Psi|^2$$

Şimdi de Dirac operatörünün özdeğerlerine alt sınır vermemizde kullanılacak olan aşağıdaki eşitliği elde edeceğiz:

$$\begin{aligned}
(D - f)^2 \Psi &= (D - f)(D - f) \Psi = (D - f)(D \Psi - f \Psi) \\
&= D^2 \Psi - D(f \Psi) - f D \Psi + f^2 \Psi
\end{aligned}$$

$D(f \Psi) = \operatorname{grad}(f) \cdot \Psi + f D \Psi$ olduğundan

$$(D - f)^2 \Psi = D^2 \Psi - 2 f D \Psi - \operatorname{grad}(f) \cdot \Psi + f^2 \Psi.$$

Schrödinger–Lichnerowicz formülünü (Lichnerowicz 1963) kullanarak da yukarıdaki eşitlik aşağıdaki forma indirgenir:

$$(D - f)^2 \Psi = \Delta \Psi + \frac{S}{4} \Psi - 2 f D \Psi - \operatorname{grad}(f) \cdot \Psi + f^2 \Psi. \tag{4.4}$$

Yukarıdaki eşitlik, (4.3) de verilen eşitlik ile kombine edilirse:

$$(D - f)^2 \Psi = \Delta^f \Psi + \frac{S}{4} \Psi - (1 - n) f^2 \Psi$$

elde edilir ki bu eşitliğin her iki tarafı Ψ ile Hermityen iç çarpımı alınıp, M^n üzerinde integrali alınırsa, aşağıdaki formül elde edilir:

$$\int_{M^n} ((D - f)^2 \Psi, \Psi) = \int_{M^n} \left\{ |\nabla^f \Psi|^2 + \frac{S}{4} |\Psi|^2 + (1 - n) f^2 |\Psi|^2 \right\}.$$

Kabul edelim ki $D \Psi = \lambda \Psi$ ve $f = \frac{\lambda}{n}$ olsun. O halde $|\nabla^f \Psi|^2 \geq 0$ olduğundan

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4} \frac{n}{n-1} S$$

elde edilir.

1984 yılında, O. Hijazi yukarıda elde edilen eşitsizliği Yamabe operatörünün özdeğerine bağlı olarak aşağıdaki gibi geliştirmiştir:

Teorem 4.1.2: (M^n, g) $n \geq 3$ – boyutlukompakt Riemann Spin manifoldu ve λ, D Dirac operatörünün özdeğeri olsun. O halde, λ özdeğerinin karesi için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır (Hijazi 1984):

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4} \frac{n}{n-1} \mu_1, \quad (4.5)$$

ki burada μ_1 fonksiyonlar üzerine etki eden konformal laplasyanın ilk özdeğeridir. Eşitsizlik (4.4) ve (4.5) sadece skaler eğriliğin pozitif olması durumunda anlamlıdır.

Aşağıdaki bölümde, spinorial Levi–Civita konneksiyonunu Energy–Momentum tensörüne bağlı olarak uygun bir şekilde modifiye ederek, Dirac operatörünün özdeğerlerine bir alt sınır getireceğiz.

4.2. Levi- Civita Konneksiyonunun Modifikasyonu

Tanım 4.2.1: ℓ tanjant demetinin simetrik bir endomorfizmi olsun. O halde herhangi bir X vektör alanı ve Ψ spinor alanı için modifiye edilmiş ∇^ℓ konneksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\nabla_X^\ell \Psi = \nabla_X \Psi + \ell(X) \cdot \Psi. \quad (4.6)$$

Modifiye edilmiş ∇^ℓ spinorial Levi–Civita konneksiyonunun metrik uyumluluğu aşağıdaki gibi gösterilir.

Yardımcı Teorem 4.2.1: Modifiye edilmiş spinorial Levi–Civita konneksiyonu ∇^ℓ , metrik uyumludur. Yani $\forall X \in \mathcal{X}(M)$ ve $\forall \Psi, \varphi \in \Gamma(\mathbb{S})$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır,

$$X(\Psi, \varphi) = (\nabla_X^\ell \Psi, \varphi) + (\Psi, \nabla_X^\ell \varphi).$$

İspat:

$$\begin{aligned} (\nabla_X^\ell \Psi, \varphi) &= (\nabla_X \Psi + \ell(X) \cdot \Psi, \varphi) + (\Psi, \nabla_X \varphi + \ell(X) \cdot \varphi) + (\Psi, \nabla_X^\ell \varphi) \\ &= (\nabla_X \Psi, \varphi) + (\ell(X) \cdot \Psi, \varphi) + (\Psi, \nabla_X \varphi) + (\Psi, \ell(X) \cdot \varphi) \\ (\ell(X) \cdot \Psi, \varphi) &= -(\Psi, \ell(X) \cdot \varphi) \text{ olduğundan,} \\ (\nabla_X^\ell \Psi, \varphi) &= (\nabla_X \Psi, \varphi) + (\Psi, \nabla_X \varphi) + (\Psi, \nabla_X^\ell \varphi) \end{aligned}$$

$$= X(\Psi, \varphi).$$

Yardımcı Teorem 4.2.2: $\nabla^{\ell*} \nabla^\ell: \Gamma(\mathbb{S}) \rightarrow \Gamma(\mathbb{S})$ operatörü negatif olmayan ve self-adjoint operatördür. Özellikle kompakt manifold üzerinde, $\forall \Psi \in \Gamma(\mathbb{S})$ için

$$\int_M (\nabla^{\ell*} \nabla^\ell \Psi, \varphi) = \int_M (\nabla^\ell \Psi, \nabla^\ell \varphi), \quad (4.7)$$

eşitliği sağlanır (Hijazi 1995).

İspat:

$$\begin{aligned} (\nabla^{\ell*} \nabla^\ell \Psi, \varphi) &= - \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i}^\ell \nabla_{e_i}^\ell \Psi, \varphi) \\ &= - \sum_{i=1}^n \{e_i(\nabla_{e_i}^\ell \Psi, \varphi) - (\nabla_{e_i}^\ell \Psi, \nabla_{e_i}^\ell \varphi)\} \\ &= \operatorname{div}(X) + (\nabla_{e_i}^\ell \Psi, \nabla_{e_i}^\ell \varphi). \end{aligned}$$

Burada X , aşağıdaki gibi tanımlanan bir tanjant vektör alanıdır:

$$\forall Y \in \Gamma(TM), \quad g(X, Y) = (\nabla_Y^\ell \Psi, \varphi).$$

Aslında verilen bir noktada X tanjant vektör alanının diverjansı,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(X) &= - \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_i) \\ &= - \sum_{i=1}^n e_i g(X, e_i) \\ &= - \sum_{i=1}^n e_i (\nabla_{e_i}^\ell \Psi, \varphi). \end{aligned}$$

Bu integrasyon ile (4.7) de verilen eşitlik elde edilir.

Önerme 4.2.3: Tanjant demetinin herhangi bir ℓ lineer endomorfizmi ve $\Psi \in \Gamma(\mathbb{S})$ spinor alanı için aşağıdaki özdeşlik sağlanır (Hijazi 1995):

$$\begin{aligned} |\nabla^\ell \Psi|^2 &:= \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i}^\ell \Psi, \nabla_{e_i}^\ell \Psi) \\ &= |\nabla \Psi|^2 + |\ell|^2 |\Psi|^2 - 2 \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n (\ell(e_i) \cdot \nabla_{e_i} \Psi, \Psi). \end{aligned} \quad (4.8)$$

İspat:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |\nabla_{e_i}^\ell \Psi|^2 &= \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} \Psi + \ell(e_i) \cdot \Psi, \nabla_{e_i} \Psi + \ell(e_i) \cdot \Psi) \\
&= |\nabla \Psi|^2 + \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} \Psi, \ell(e_i) \cdot \Psi) + \sum_{i=1}^n (\ell(e_i) \cdot \Psi, \nabla_{e_i} \Psi) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n (\ell(e_i) \cdot \Psi, \ell(e_i) \cdot \Psi) \\
&= |\nabla \Psi|^2 - 2 \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n (\ell(e_i) \cdot \nabla_{e_i} \Psi, \Psi) + |\ell|^2 |\Psi|^2.
\end{aligned}$$

4.3. Özdeğer Tahminleri

Şimdi Önerme 4.2.3 de verilen uygun bir simetrik ℓ endomorfizm seçimi için kompakt Riemann manifoldları üzerinde tanımlı Dirac operatörünün ilk özdeğerine optimal bir tahmin verilecektir. Bunun için öncelikle Q_Ψ ile gösterilen Energy–Momentum tensörü tanımlanacaktır.

Tanım 4.3.1: Ψ Spinor alanının sıfırlarının kümesinin tümleyeni üzerinde herhangi X ve Y vektör alanları için simetrik bilineer tensör alanı Q_Ψ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$Q_\Psi(X, Y) = g(\ell(X), Y) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (X \cdot \nabla_Y \Psi + Y \cdot \nabla_X \Psi, \Psi / |\Psi|^2). \quad (4.9)$$

Ayrıca $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormal çatısı seçilirse, Q_Ψ köşegensel olur ve ilişkili kuadratik formu

$$Q_\Psi(e_i) = \operatorname{Re} \left(e_i \cdot \nabla_{e_i} \Psi, \frac{\Psi}{|\Psi|^2} \right),$$

ve Energy– Momentum tensörünün izi $\operatorname{tr}(Q_\Psi) = \operatorname{Re}(D\Psi, \Psi / |\Psi|^2)$ dir. Eğer $D\Psi = \lambda \Psi$ ise $\operatorname{tr}(Q_\Psi) = \lambda$ dır.

Energy–Momentum tensörünün izinin ifadesi $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormal tabanlarına bağlı olarak aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^n Q_\Psi(e_i, e_j) e_i \cdot e_j &= \sum_{i < j} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(e_i \cdot \nabla_{e_j} \Psi + e_j \cdot \nabla_{e_i} \Psi, \frac{\Psi}{|\Psi|^2} \right) e_i \cdot e_j \\
&\quad + \sum_{j < i} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(e_i \cdot \nabla_{e_j} \Psi + e_j \cdot \nabla_{e_i} \Psi, \frac{\Psi}{|\Psi|^2} \right) e_i \cdot e_j \\
&\quad + \sum_{i=j} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(e_i \cdot \nabla_{e_i} \Psi + e_i \cdot \nabla_{e_i} \Psi, \frac{\Psi}{|\Psi|^2} \right) e_i \cdot e_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i < j} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(e_i \cdot \nabla_{e_j} \Psi + e_j \cdot \nabla_{e_i} \Psi, \frac{\Psi}{|\Psi|^2} \right) e_i \cdot e_j \\
&\quad + \sum_{i < j} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(e_j \cdot \nabla_{e_i} \Psi + e_i \cdot \nabla_{e_j} \Psi, \frac{\Psi}{|\Psi|^2} \right) e_j \cdot e_i \\
&\quad - \sum_{i=j} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(e_i \cdot \nabla_{e_i} \Psi, \frac{\Psi}{|\Psi|^2} \right) \\
&= \sum_{i < j} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(e_i \cdot \nabla_{e_j} \Psi + e_j \cdot \nabla_{e_i} \Psi, \frac{\Psi}{|\Psi|^2} \right) e_i \cdot e_j \\
&\quad - \sum_{i < j} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(e_i \cdot \nabla_j \Psi + e_j \cdot \nabla_{e_i} \Psi, \frac{\Psi}{|\Psi|^2} \right) e_i \cdot e_j \\
&\quad - \sum_{i=j} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(e_i \cdot \nabla_{e_i} \Psi, \frac{\Psi}{|\Psi|^2} \right) \\
&= - \sum_{i=j} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(e_i \cdot \nabla_{e_i} \Psi, \frac{\Psi}{|\Psi|^2} \right) = \operatorname{tr}(Q_\Psi).
\end{aligned}$$

Teorem 4.3.2: $n \geq 2$ boyutlu kompakt Riemann Spin manifoldu üzerinde tanımlı Dirac operatörünün Ψ öz spinörü ile ilişkili λ özdeğerinin karesi aşağıdaki eşitsizliği sağlar (Hijazi 1995):

$$\begin{aligned}
\lambda^2 \geq \inf_M \left(\frac{1}{4} S \right. \\
\left. + |\ell_\Psi|^2 \right). \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Burada S , (M^n, g) nin skalar eğriliği ve ℓ_Ψ de kuadratik formların alanı ile ilişkili simetrik endomorfizm alanıdır.

İspat: Önerme 4.2.3' ükullanarak aşağıdaki eşitlik kolaylıkla elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
|\nabla^{\ell_\Psi} \Psi|^2 &= |\nabla \Psi|^2 - 2 \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n (\ell_\Psi(e_i) \cdot \nabla_{e_i} \Psi, \Psi) + |\ell_\Psi|^2 |\Psi|^2 \\
&= |D\Psi|^2 - \frac{1}{4} S |\Psi|^2 - 2 \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n (\ell_\Psi(e_i) \cdot \nabla_{e_i} \Psi, \Psi) + |\ell_\Psi|^2 |\Psi|^2 \\
&= |D\Psi|^2 - \frac{1}{4} S |\Psi|^2 - 2 \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n (g(\ell_\Psi(e_i), e_j) e_j \cdot \nabla_{e_i} \Psi, \Psi) + |\ell_\Psi|^2 |\Psi|^2 \\
&= |D\Psi|^2 - \frac{1}{4} S |\Psi|^2 - 2 \sum_{i,j=1}^n g(\ell_\Psi(e_i), e_j) g(\ell_\Psi(e_i), e_j) |\Psi|^2 + |\ell_\Psi|^2 |\Psi|^2 \\
&= |D\Psi|^2 - \frac{1}{4} S |\Psi|^2 - |\ell_\Psi|^2 |\Psi|^2.
\end{aligned}$$

Dahası M üzerinde yukarıdaki denklemin integrali alınırsa, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}\int_M |D\Psi|^2 v_g &= \int_M |\nabla^\ell \Psi|^2 v_g + \int_M \frac{1}{4} S |\Psi|^2 v_g + \int_M |\ell_\Psi|^2 |\Psi|^2 v_g \\ &\geq \int_M \frac{1}{4} S |\Psi|^2 v_g + \int_M |\ell_\Psi|^2 |\Psi|^2 v_g\end{aligned}$$

$D\Psi = \lambda\Psi$ olduğundan, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır

$$\lambda^2 \geq \inf_M \left(\frac{1}{4} S + |\ell_\Psi|^2 \right).$$

Sonuç 4.3.3: Teorem 4.3.2 nin koşulları altında, D Dirac operatörünün λ özdeğerleri için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4} \frac{n}{n-1} \inf_M S. \quad (4.11)$$

İspat: Cauchy–Schwarz eşitsizliği ile Energy–Momentum tensörü aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$|\ell_\Psi|^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n e_i \cdot \ell_\Psi(e_i), \sum_{i=1}^n e_i \cdot \ell_\Psi(e_i) \right) = \frac{(tr \ell_\Psi)^2}{n} = \frac{\lambda^2}{n}, \quad (4.12)$$

Yukarıdaki eşitliliği (4.10) eşitsizliğinde yerine yazarsak (4.11) eşitsizliği elde edilir.

Not 1: Eşitsizlik (4.11) sadece $\inf_M S$ pozitif olan durumlarda ilgi çekici iken, (4.10) eşitsizliği $\inf_M S$ pozitif olmayan durumlarda Dirac operatörünün ilk özdeğeri hakkında bilgi verebilir.

4.4 Konformal Geometri ve Özdeğer Tahminleri

Bu bölümde, Yamabe operatörünün ilk özdeğerine göre (4.10) eşitsizliğinden daha optimal bir tahmin elde etmek için Riemann metriğinin konformal değişimlerini göz önünde bulundurarak (Hijazi 1986, Hijazi 1991) deki teknikleri uyguluyoruz. Tezimizde (Hijazi 1986) daki gösterimleri ve sonuçları kullanıyoruz.

(M^n, g) , n –boyutlu Riemannian Spinmanifoldu olsun. O halde aşağıdaki gibi verilen

$$\bar{g} := e^{2u} g, \quad u: M \rightarrow \mathbb{R},$$

konformal değişim metriği için, (M^n, g) üzerindeki Spinyapısı $(M^n, \bar{g})$ üzerine bir Spinyapısı indirger. Bu metriğe göre, iki $P_{SO(n)}$ asli–lif demeti arasındaki izomorfizm aşığıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} G_u: P_{SO(n)_g} &\rightarrow P_{SO(n)_{\bar{g}}} \\ \varepsilon = (e_1, \dots, e_n) &\mapsto \bar{\varepsilon} = (e^{-u}e_1, \dots, e^{-u}e_n) \end{aligned}$$

ki burada $\varepsilon = (e_1, \dots, e_n), P_{SO(n)_g}$ asli lif demetinin kesitleri iken $\bar{\varepsilon} = (e^{-u}e_1, \dots, e^{-u}e_n)$ de $P_{SO(n)_{\bar{g}}}$ asli lif demetinin kesitleridir.

$(M^n, \bar{g})$ üzerine indirgenen Spinyapısı izomorfizma ile aşığıdaki değişmeli diyagramla tanımlanır:

$$\begin{array}{ccc} P_{Spin(n)_g} & \xrightarrow{\tilde{G}_u} & P_{Spin(n)_{\bar{g}}} \\ \eta_g \downarrow & & \downarrow n_{\bar{g}} \\ P_{SO(n)_g} & \xrightarrow{G_u} & P_{SO(n)_{\bar{g}}} \end{array}$$

Diyagramdaki tüm okların grup etkisi altında değişmez olduğu farz edilmiştir.

$\kappa_n: Spin(n) \rightarrow Aut(\Delta_n)$ spinor temsili olsun. Spinor temsiline bağlı olarak

tanımlanan Spinor demetleri arasındaki izomorfizm $\tilde{F}_u: \mathbb{S} = P_{Spin(n)_g} \times_{\kappa_n} \Delta_n \rightarrow$

$\bar{\mathbb{S}} = P_{Spin(n)_{\bar{g}}} \times_{\kappa_n} \Delta_n$ dönüşümü ile verilir. Buna göre $\Psi \in \Gamma(\mathbb{S})$ spinor alanı $\Gamma(\bar{\mathbb{S}})$

nin spinor alanı olarak $\bar{\Psi} = G_u \Psi$ şeklinde yazılır. Dahası $\Gamma(\bar{\mathbb{S}})$ deki Clifford

çarpımı, $X \in \Gamma(TM)$ ve $\Psi \in \Gamma(\mathbb{S})$ için

$$\bar{X} \cdot \bar{\Psi} = \overline{X \cdot \Psi}$$

şeklinde verilir. Buna ek olarak herhangi Ψ, φ spinor alanları $\Gamma(\mathbb{S})$ ve $\Gamma(\bar{\mathbb{S}})$ spinor demetleri üzerinde tanımlı doğal Hermitiyen iç çarpımı $(\cdot, \cdot)$ aşığıdaki eşitliği sağlar:

$$(\bar{\Psi}, \bar{\varphi}) = (\Psi, \varphi).$$

$\bar{\mathbb{S}}$ spinor demeti üzerinde $\bar{g}$ konformal değişim metriğine göre elde edilen $\bar{\nabla}$ spinorial Levi–Civita konneksiyonu ve $\mathbb{S}$ spinor demeti üzerinde standart g metriğine göre elde edilen spinorial Levi–Civita konneksiyonları arasında aşığıdaki ilişki vardır:

$$\bar{\nabla}_X \bar{\Psi} = \overline{\nabla_X \Psi} - \frac{1}{2} \overline{X \cdot du \cdot \Psi} - \frac{1}{2} X(u) \bar{\Psi}. \quad (4.13)$$

Buna göre (Hitchin 1974, Baum 1981), Dirac operatörü

$$\bar{D}(e^{-(n-1)u/2} \bar{\Psi}) = e^{-(n+1)u/2} \bar{D} \bar{\Psi}. \quad (4.14)$$

$D\Psi = \lambda\Psi$ için, $\varphi = e^{-(n-1)u/2}\Psi$ ile birlikte $\bar{D}\bar{\varphi} = \lambda e^{-u}\bar{\varphi}$ elde edilir. Bu çalışmada $|\ell_{\bar{\varphi}}|$, $\bar{g}$ şeklinde tanımlanan metriğe göre $\ell_{\bar{\varphi}}$ endomorfizm alanının normu iken $|\ell_{\varphi}|$ de g metriğine göre hesaplanmış normdur.

Önerme 4.4.1: Konformal değişim metriği $\bar{g} = e^{2u}g$ altında, herhangi bir $\varphi = e^{-(n-1)u/2}\Psi$ spinor alanı için aşağıdaki ilişkiler geçerlidir (Hijazi 1995):

$$|\ell_{\bar{\varphi}}|^2 = e^{-2u}|\ell_{\varphi}|^2 = e^{-2u}|\ell_{\Psi}|^2. \quad (4.15)$$

İspat: (4.13) eşitliği ve $Q_{\bar{\varphi}}(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$ 'nin tanımını kullanarak, aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} Q_{\bar{\varphi}}(\bar{e}_i, \bar{e}_j) &= \frac{1}{2} \text{Re} \left(\bar{e}_i \cdot \bar{\nabla}_{\bar{e}_j} \bar{\varphi} + \bar{e}_j \cdot \bar{\nabla}_{\bar{e}_i} \bar{\varphi}, \bar{\varphi} / |\bar{\varphi}|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{-u} \text{Re} \left(\bar{e}_i \cdot \bar{\nabla}_{e_j} \varphi + \bar{e}_j \cdot \bar{\nabla}_{e_i} \varphi, \bar{\varphi} / |\bar{\varphi}|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{-u} \text{Re} \left(\bar{e}_i \cdot \left[\overline{\nabla_{e_j} \varphi} - \frac{1}{2} e_j \cdot du \cdot \varphi - \frac{1}{2} e_j(u) \varphi \right] \right. \\ &\quad \left. + e_j \cdot \left[\overline{\nabla_{e_i} \varphi} - \frac{1}{2} e_i \cdot du \cdot \varphi - \frac{1}{2} e_i(u) \varphi \right], \bar{\varphi} / |\bar{\varphi}|^2 \right) \end{aligned}$$

$e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i = -2\delta_{ij}$ ile aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} Q_{\bar{\varphi}}(e_i, e_j) &= \frac{1}{2} e^{-u} \text{Re} \left(\bar{e}_i \cdot \overline{\nabla_{e_j} \varphi} + \bar{e}_j \cdot \overline{\nabla_{e_i} \varphi}, \bar{\varphi} / |\bar{\varphi}|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{-u} \text{Re} \left(\overline{e_i \cdot \nabla_{e_j} \varphi + e_j \cdot \nabla_{e_i} \varphi}, \bar{\varphi} / |\bar{\varphi}|^2 \right). \end{aligned}$$

g ve $\bar{g}$ metrikleri ile ilişkili spinor demetleri arasındaki izomorfizm bir izometri olduğundan, Hermityen skaler çarpıma göre aşağıdaki durum elde edilir

$$\begin{aligned} Q_{\bar{\varphi}}(\bar{e}_i, \bar{e}_j) &= \frac{1}{2} e^{-u} \text{Re} \left(e_i \cdot \nabla_{e_j} \varphi + e_j \cdot \nabla_{e_i} \varphi, \varphi / |\varphi|^2 \right) \\ &= e^{-u} Q_{\varphi}(e_i, e_j). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Öte yandan $\varphi = e^{-(n-1)u/2}\Psi$ olduğundan, $(\alpha \cdot \Psi, \varphi) = (-1)^{k(k+1)/2}$ özdeşliği ile

$$\begin{aligned} Q_{\varphi}(e_i, e_j) &= \frac{1}{2} \text{Re} \left(e_i \cdot \nabla_{e_j} \varphi + e_j \cdot \nabla_{e_i} \varphi, \varphi / |\varphi|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{-(n-1)u} \text{Re} \left(e_i \cdot \nabla_{e_j} \Psi + e_j \cdot \nabla_{e_i} \Psi, \frac{\Psi}{|\varphi|^2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} (n-1) e^{-(n-1)u} \text{Re} (e_j(u) e_i \cdot \Psi + e_i(u) e_j \cdot \Psi, \Psi / |\varphi|^2) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(e_i \cdot \nabla_{e_j} \Psi + e_j \cdot \nabla_{e_i} \Psi, \Psi / |\Psi|^2 \right)$$

$$= Q_\varphi(e_i, e_j) \text{dır.}$$

Dolayısıyla (4.16) yardımıyla

$$Q_{\bar{\varphi}}(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = e^{-u} Q_\Psi(e_i, e_j) \quad (4.17)$$

elde edilir.

Önermenin ispatını bitirebilmek için, $\ell_{\bar{\varphi}}$ ile ℓ_Ψ yi karşılaştıracğız. (4.17) yardımıyla ve ℓ_Ψ ile Q_Ψ arasındaki ilişkiyi kullanarak, aşağıdaki eşitlik bulunur

$$\begin{aligned} \bar{g}(\ell_{\bar{\varphi}}(\bar{e}_i), \bar{e}_j) &= Q_{\bar{\varphi}}(\bar{e}_i, \bar{e}_j) \\ &= e^{-u} Q_\Psi(e_i, e_j) \\ &= e^{-u} g(\ell_\Psi(e_i), e_j) \end{aligned}$$

Yukarıdaki özdeşlik, (4.15) eşitliğini veren aşağıdaki durumu ima eder

$$\ell_{\bar{\varphi}} = e^{-u} \ell_\Psi.$$

Teorem 4.4.2: $n \geq 3$ boyutlu kompakt Riemannian Spin manifoldu (M^n, g) üzerinde, Dirac operatörünün Ψ öz spinörü ile ilişkili herhangi bir λ özdeğeri aşağıdaki eşitsizliği sağlar (Hijazi 1995):

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4} u_1 + \inf_M |\ell_\Psi|^2,$$

ki burada u_1 Yamabe operatörünün ilk özdeğeridir, yani

$$L := 4 \cdot \frac{n-1}{n-2} \Delta + S$$

fonksiyon üzerine etki eder ve ℓ_Ψ ,

$$Q_\Psi(X) = \operatorname{Re}(X \cdot \nabla_X \Psi, \Psi / |\Psi|^2)$$

kuadratik formların alanı ile ilişkili simetrik endomorfizmlerin alanıdır.

İspat: $\bar{g} = e^{2u} g$ metriğine göre (4.8) eşitliğine, $\ell = \ell_{\bar{\varphi}}$ için $\bar{\varphi}$ spinor alanı uygulanırsa, M^n üzerinde integrali alındıktan sonra aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$\int_M |\bar{\nabla}^{\ell_{\bar{\varphi}}} \bar{\varphi}|^2 = \int_M |\bar{D} \bar{\varphi}|^2 - \int_M \left(\frac{1}{4} \bar{S} + |\ell_{\bar{\varphi}}|^2 \right) |\bar{\varphi}|^2,$$

ki burada $\bar{S}$, (M^n, g) nin skaler eğriliğidir. $\varphi = e^{-(n-1)u/2} \Psi$ ve $D\Psi = \lambda\Psi$ için,

$\bar{D} \bar{\varphi} = \lambda e^{-u} \bar{\varphi}$ elde edilir ve bu Önerme 4.4.1 ile birleştirildiğinde aşağıdaki eşitliği verir:

$$\int_M |\bar{\nabla}^{\ell_{\bar{\varphi}}} \bar{\varphi}|^2 = \int_M \left[\lambda^2 - \left(\frac{1}{4} \bar{S} e^{2u} + |\ell_{\bar{\varphi}}|^2 e^{2u} \right) \right] e^{-2u} |\bar{\varphi}|^2$$

$$= \int_M \left[\lambda^2 - \left(\frac{1}{4} \bar{S} e^{2u} + |\ell_\Psi|^2 \right) \right] e^{-2u} |\bar{\varphi}|^2 \quad (4.18)$$

$|\bar{\nabla}^{\ell_\Psi} \bar{\varphi}|^2 \geq 0$ olduğundan, herhangi bir u fonksiyonu için, (4.18) eşitliğinde verilen eşitlik aşağıdaki gibi indirgenir

$$\begin{aligned} \lambda^2 &\geq \inf_M \left(\frac{1}{4} \bar{S} e^{2u} + |\ell_\Psi|^2 \right) \\ &\geq \frac{1}{4} \inf_M (\bar{S} e^{2u}) + \inf_M |\ell_\Psi|^2 \\ &\geq \frac{1}{4} \sup_u \inf_M (\bar{S} e^{2u}) + \inf_M |\ell_\Psi|^2. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Metriğin $\bar{g} = e^{2u} g$ Konformal değişimine göre, S ve $\bar{S}$ skaler eğrilikleri arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$\bar{S} e^{2u} = S + 2(n-1)\Delta u - (n-1)(n-2)|du|^2. \quad (4.20)$$

$n \geq 3$ için, h fonksiyonu

$$h^{4/n-2} = e^{2u} \quad (4.21)$$

şeklinde tanımlanırsa, (4.20) denklemi

$$\begin{aligned} \bar{S} h^{4/n-2} &= h^{-1} Lh := 4 \frac{n-1}{n-2} h^{-1} \Delta h + S \\ &= \bar{S} h^4 / (n-2) = \bar{S} e^{2u} = S + 2(n-1)\Delta u - (n-1)(n-2)|du|^2 \end{aligned}$$

şekline indirgenir. Konformal sınıfta pozitif skaler eğriliğine sahip bir metrik varsa, L 'nin μ_1 özdeğeri ile ilişkili h_1 öz fonksiyonu ve μ_1 özdeğeri pozitif seçilebilir. O halde $h_1 > 0$ için,

$$h_1^{-1} Lh_1 = \mu_1 > 0 \text{dır.}$$

Şimdi u_1 'i (4.21) deki h_1 öz fonksiyonu ile ilişkili olarak alalım.

O halde,

$$\bar{S} e^{2u_1} = \bar{S} h_1^{4/(n-2)} = h_1^{-1} Lh_1 = \mu_1$$

dir.

(Hijazi 1991) ile, ki bu da $\bar{S} e^{2u_1} = \text{sabit}$ olduğu anlamına gelir.

O halde $\bar{S} e^{2u_1} = \sup_u \inf_M (\bar{S} e^{2u})$ elde edilir. Sonuç olarak (4.19) eşitsizliği kullanılırsa

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4} \mu_1 + \inf_M |\ell_\Psi|^2, \quad (4.22)$$

elde edilir.

Sonuç 4.4.3: Teorem 4.4.2 de verilen koşullar altında, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4} \mu \{Vol(M^n, g)\}^{-2/n} + \inf_M |\ell_\Psi|^2, \quad (4.23)$$

burada μ Yamabe operatörü olarak adlandırılan ve aşağıdaki gibi tanımlanan konformal bir invaryanttır:

$$\mu := \inf_{n \geq 2} \inf_{\bar{g} \in [g]} \frac{\int_M \bar{S} v_{\bar{g}}}{\{Vol(M^n, \bar{g})\}^{(n-2)/n}} := \inf_{n \geq 3} \inf_{h > 0} \frac{\int_M h L(h) v_g}{\|h\|_{2n/(n-2)}^2},$$

ki burada

$$\|h\|_{2n/(n-2)}^2 = \left(\int_M h^{2n/(n-2)} v_g \right)^{(n-2)/n}.$$

İspat:

Hölder eşitsizliği ile

$$\int_M h^2 v_g \leq Vol(M^n, \bar{g})^{2/n} \left(\int_M h^{2n/(n-2)} v_g \right)^{(n-2)/n}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik yardımı ile

$$\mu_1 \geq \frac{\mu}{Vol(M^n, g)^{\frac{2}{n}}} \quad (4.24)$$

eşitliği elde edilir. Yukarıda elde edilen eşitsizlik (4.22) eşitsizliğinde yerine yazılırsa (4.24) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.4.4: $n = 2$ için, Teorem 4.4.2 de verilen koşullar altında, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\lambda^2 \geq \frac{2\pi\chi(M)}{Area(M)} + \inf_M |\ell_\Psi|^2, \quad (4.25)$$

ki burada $\chi(M), M^n$ Riemanian Spin manifoldunun Euler karakteristiğidir.

İspat: $n = 2$ için, konformal değişim metriği $\bar{g}$ ile S skaler eğriliğinin değişimi

$$\bar{S} e^{2u} = S + 2\Delta u$$

olur.

Stokes ve Gauss–Bonnet teoremi aşağıdaki eşitsizliği verir:

$$\begin{aligned} \inf_M (\bar{S} e^{2u}) &\leq \frac{1}{Area(M^2, g)} \int_{M^2} \bar{S} e^{2u} v_g = \frac{1}{Area(M^2, g)} \int_{M^2} (S + 2\Delta u) v_g \\ &\leq \frac{1}{Area(M^2, g)} \int_{M^2} S v_g \end{aligned}$$

$$= \frac{4\pi\chi(M^2)}{Area(M^2, g)}.$$

Kabul edelim ki u_1

$$2\Delta u = \left(\frac{1}{Area(M^2, g)} \int_{M^2} S v_g \right) - S$$

eşitliğinin bir çözümü olsun. O halde,

$$\bar{S}e^{2u_1} = S + \Delta u_1 = \frac{1}{Area(M^2, g)} \int_{M^2} S v_g = \frac{4\pi\chi(M^2)}{Area(M^2, g)}$$

elde edilir. Buna göre yukarıdaki eşitlik (4.19) eşitsizliğinde yerine yazılırsa (4.25) de verilen alt sınır elde edilir (Bar 1992, Bar 1993, Hijazi 1991).

Yardımcı Teorem 4.4.5: Kabul edelim ki, $\mathcal{R}^{l_\psi}$ ve $\mathcal{R}$ spinorial eğrilik tensörleri ile ilişkili $\mathbb{S}$ spinor demetinin spinorial Levi–Civita konneksiyonları sırasıyla ∇^{l_ψ} ve ∇ olsun. Buna göre, $\mathbb{S}$ spinor demeti üzerinde, ∇^{l_ψ} modifiye edilmiş spinorial Levi–Civita konneksiyonu ile ilişkili $\mathcal{R}^{l_\psi}$ eğrilik tensörü aşağıdaki gibi ifade edilir (Hijazi 1995):

$$\mathcal{R}_{X,Y}^{l_\psi} \Psi = \mathcal{R}_{X,Y} \Psi + d\ell_\psi(X, Y) \cdot \Psi + [\ell_\psi(X), \ell_\psi(Y)] \cdot \Psi. \quad (4.26)$$

İspat: Spinorial eğriliğin tanımını kullanarak,

$$\begin{aligned} R_{X,Y}^{l_\psi} \Psi &= \nabla_X^{l_\psi} \nabla_Y \Psi - \nabla_Y^{l_\psi} \nabla_X \Psi - \nabla_{[X,Y]}^{l_\psi} \Psi \\ &= (\nabla_X + \ell_\psi(X) \cdot)(\nabla_Y + \ell_\psi(Y) \cdot) \Psi - (\nabla_Y + \ell_\psi(Y) \cdot)(\nabla_X + \ell_\psi(X) \cdot) \Psi \\ &\quad - \nabla_{[X,Y]} \Psi - \ell_\psi([X, Y]) \cdot \Psi \\ &= \nabla_X \nabla_Y \Psi + \nabla_X(\ell_\psi(Y) \cdot \Psi) + \ell_\psi(X) \cdot \nabla_Y \Psi + \ell_\psi(X) \cdot \ell_\psi(Y) \cdot \Psi - \nabla_Y \nabla_X \Psi \\ &\quad - \nabla_Y(\ell_\psi(X) \cdot \Psi) - \ell_\psi(Y) \cdot \nabla_X \Psi - \ell_\psi(Y) \cdot \ell_\psi(X) \cdot \Psi - \nabla_{[X,Y]} \Psi \\ &\quad - \ell_\psi([X, Y]) \cdot \Psi \\ &= \nabla_X \nabla_Y \Psi - \nabla_Y \nabla_X \Psi - \nabla_{[X,Y]} \Psi + \ell_\psi(Y) \cdot \nabla_X \Psi + \nabla_X \ell_\psi(Y) \cdot \Psi + \ell_\psi(X) \cdot \nabla_Y \Psi \\ &\quad + \ell_\psi(X) \cdot \ell_\psi(Y) \cdot \Psi - \ell_\psi(Y) \nabla_X \Psi - \ell_\psi(Y) \cdot \ell_\psi(X) \cdot \Psi - \ell_\psi([X, Y]) \cdot \Psi \\ &\quad - \nabla_Y \ell_\psi(X) \cdot \Psi - \ell_\psi(X) \cdot \nabla_Y \Psi. \\ \nabla_X(\ell_\psi(Y)) &= (\nabla_X \ell_\psi)(Y) + \ell_\psi(\nabla_X)Y \text{ ile} \\ R_{X,Y}^{l_\psi} \Psi &= \mathcal{R}_{X,Y} \Psi + ((\nabla_X \ell_\psi)(Y) - (\nabla_Y \ell_\psi)(X)) \cdot \Psi \\ &\quad + (\ell_\psi(X) \cdot \ell_\psi(Y) - \ell_\psi(Y) \cdot \ell_\psi(X)) \cdot \Psi \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte de $d\ell_\psi(X, Y) \cdot \Psi = ((\nabla_X \ell_\psi)(Y) - (\nabla_Y \ell_\psi)(X)) \cdot \Psi$ kullanılırsa

$$R_{X,Y}^{\ell_\psi} \Psi = \mathcal{R}_{X,Y} \Psi + d\ell_\psi(X, Y) \cdot \Psi + (\ell_\psi(X) \cdot \ell_\psi(Y) - \ell_\psi(Y) \cdot \ell_\psi(X)) \cdot \Psi$$

elde edilir.

4.5. Özdeğerlerin Limit Durumu

Bu bölümde (4.19) eşitsizliğinde elde edilen alt sınırın limit durumunu ele alacağız.

Önerme 5.5.1: Sıfırdan farklı Ψ spinörü için, $\nabla^{\ell_\psi} \Psi \equiv 0$ ise $|\Psi|^2$ sabittir ve

$$(tr \ell_\psi)^2 := f^2 = \frac{1}{4} S + |\ell_\psi|^2, \quad (4.27)$$

$$f = -div \ell_\psi, \quad (4.28)$$

eşitlikleri sağlanır (Hijazi 1995).

İspat: Yardımcı Teorem 4.2.1 de verilen metrik uyumluk ve $\nabla^{\ell_\psi} \Psi \equiv 0$ durumu $|\Psi|^2$ nin sabit olduğunu ima eder. ∇ ve ∇^{ℓ_ψ} konneksiyonları ile ilişkili spinor demeti üzerindeki eğrilik tensörü sırasıyla $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{R}^{\ell_\psi}$ ile gösterilecektir. Buna göre (4.26) eşitliğinde $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{R}^{\ell_\psi}$ eğrilik tensörleri arasındaki aşağıdaki ilişkiyi göz önünde bulunduralım:

$$R_{X,Y}^{\ell_\psi} \Psi = \mathcal{R}_{X,Y} \Psi + d\ell_\psi(X, Y) \cdot \Psi + [\ell_\psi(X), \ell_\psi(Y)] \cdot \Psi \quad (4.29)$$

burada $d\ell_\psi$, $\Gamma(TM)$ deki değerleri ile birlikte ve $[X, Y] = X \cdot Y - Y \cdot X$ ile bir 2-formdur

Şimdi, (4.29) eşitliğinde $Y = e_i$ aldıktan sonra bu eşitliğin e_i ile Clifford çarpımı alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned} \sum_i e_i \cdot R_{X,e_i}^{\ell_\psi} \Psi &= -\frac{1}{2} Ric(X) \cdot \Psi + \sum_i e_i \cdot d\ell_\psi(X, e_i) \cdot \Psi \\ &\quad + \sum_i e_i \cdot [\ell_\psi(X), \ell_\psi(e_i)] \cdot \Psi, \end{aligned} \quad (4.30)$$

ki burada Ric , tanjant demeti üzerindeki Ricci eğriliğidir. Yukarıdaki eşitliğin Ψ ile skaler çarpımını aldığımızda reel ve imajiner şeklinde ayırmak için bu eşitliğin son iki terimini, $X \in \mathcal{X}(M)$ ve α da bir k -form olmak üzere

$$X \cdot \alpha = X \wedge \alpha - i_X \alpha \quad (4.31)$$

eşitliğini kullanarak ayrıştıracağız. Burada i_X , X vektör alanı ile interior çarpımdır. (4.30) yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\sum_i e_i \cdot d\ell_\Psi(X, e_i) \cdot \Psi &= \sum_i e_i \cdot [(\nabla_X \ell_\Psi)(e_i) - (\nabla_{e_i} \ell_\Psi)(X)] \cdot \Psi \\
&= \sum_i [e_i \wedge (\nabla_X \ell_\Psi)(e_i) - e_i \wedge (\nabla_{e_i} \ell_\Psi)(X)] \cdot \Psi \\
&\quad - \sum_i [(\nabla_X \ell_\Psi)(e_i, e_i) - (\nabla_{e_i} \ell_\Psi)(X, e_i)] \cdot \Psi \\
&= \sum_i [e_i \wedge d\ell_\Psi(X, e_i)] \cdot \Psi - [X(tr\ell_\Psi) + div\ell_\Psi(X)]\Psi,
\end{aligned} \tag{4.32}$$

eşitliği elde edilir.

Son terim için, $X \cdot Y + Y \cdot X = -2g(X, Y)$ olduğundan, aşağıdaki elde edilir

$$\begin{aligned}
\sum_i e_i \cdot [\ell_\Psi(X), \ell_\Psi(e_i)] \cdot \Psi &= \sum_i e_i \cdot [\ell_\Psi(X) \cdot \ell_\Psi(e_i) - \ell_\Psi(e_i) \cdot \ell_\Psi(X)] \cdot \Psi \\
&= - \sum_i [\ell_\Psi(X) \cdot e_i \cdot \ell_\Psi(e_i) + 2g(\ell_\Psi(X), e_i) \cdot \Psi] \\
&\quad - \sum_i e_i \cdot \ell_\Psi(e_i) \cdot \ell_\Psi(X) \cdot \Psi \\
&= 2(tr\ell_\Psi)\ell_\Psi(X) \cdot \Psi \\
&\quad - 2 \sum_i g(X, \ell_\Psi(e_i)) \ell_\Psi(e_i) \cdot \Psi.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

(4.31), (4.32) ve (4.33) eşitliklerini birleştirirsek;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} Ric(X) \cdot \Psi &= \sum_i [e_i \wedge d\ell_\Psi(X, e_i)] \cdot \Psi + 2(tr\ell_\Psi)\ell_\Psi(X) \cdot \Psi \\
&\quad - 2 \sum_i g(X, \ell_\Psi(e_i)) \ell_\Psi(e_i) \cdot \Psi - (X(tr\ell_\Psi) + div\ell_\Psi(X))\Psi
\end{aligned} \tag{4.34}$$

elde edilir. Yukarıda elde edilen eşitliğin Ψ ile skaler çarpımını aldıktan sonra reel ve imajiner kısımları ayırdıktan sonra, her bir X vektör alanı için aşağıdaki ilişkiler elde edilir:

$$X(tr\ell_\Psi) = -div\ell_\Psi(X), \tag{4.35}$$

$$\frac{1}{2} Ric(X) \cdot \Psi = \sum_i [e_i \wedge d\ell_\Psi(X, e_i)] \cdot \Psi + 2(tr\ell_\Psi)\ell_\Psi(X) \cdot \Psi$$

$$- 2 \sum_i g(X, \ell_\Psi(e_i)) \ell_\Psi(e_i) \cdot \Psi. \quad (4.36)$$

Burada (4.35) eşitliği (4.28) da verilen eşitliğe denktir. Yukarıdaki eşitlikte $X=e_j$ aldıktan sonra e_j ile Clifford çarpımı alınır

$$-\frac{1}{2} S\Psi = \sum_{i,j} e_i \cdot (e_j \wedge d\ell_\Psi(e_i, e_j)) \cdot \Psi - 2(tr\ell_\Psi)^2 \Psi + 2\|\ell_\Psi\|^2 \Psi, \quad (4.37)$$

elde edilir.

(4.31)deki özdeşlik aşağıdaki eşitliği ima eder,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} e_i \cdot (e_j \wedge d\ell_\Psi(e_i, e_j)) \cdot \Psi &= \left(\sum_{i,j} e_i \wedge e_j \wedge d\ell_\Psi(e_i, e_j) \right) \cdot \Psi \\ &\quad - \sum_{i,j} \iota_{e_i} \wedge e_j \wedge d\ell_\Psi(e_i, e_j) \cdot \Psi. \end{aligned} \quad (4.38)$$

(4.38) eşitliğinin sağ tarafında yer alan ilk terim ℓ_Ψ simetrik olduğundan sıfır değerini alır ve ikinci terim vektör alanı ile Ψ spinor alanının Clifford çarpımı olduğundan, ki bu Ψ ile skaler çarpımı alınır imajiner değer verir. Bu yüzden ikinci ifadede sıfır değerini alır. Sonuç olarak (4.37) deki eşitliğin Ψ ile skaler çarpımı alındığında (4.27) de verilen eşitlik bulunur.

Şimdi (4.19) eşitsizliğinde elde edilen alt sınırın limit durumunu ele alacağız.

Önerme 5.5.2: (M^n, g) kompakt Riemannian Spin manifoldu üzerinde, kabul edelim ki λ, Ψ öz spinörü ile ilişkili Dirac operatörünün özdeğeri aşağıdaki eşitliği sağlasın

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}\mu_1 + \frac{inf}{M} |\ell_\Psi|^2.$$

O halde $|\ell_\Psi|$ sabittir ve u_1 de, μ_1 ile ilişkili Yamabe operatörünün öz fonksiyonunu ise, herhangi bir X vektör alanı için

$$g(X, \ell_\Psi(du_1) - \lambda du_1) = g(\lambda X - \ell_\Psi(X) du_1) = 0, \quad (4.39)$$

eşitliği sağlanır (Hijazi 1995).

İspat: Eğer (4.19) da verilen eşitlik sağlanırsa, o halde (4.18) deki eşitlik $u = u_1$ ile $|\ell_\Psi|$ nin sabit olduğunu ve $\bar{\nabla}^{\ell_\Psi} \bar{\varphi} \equiv 0$ olduğunu gösterir. Önerme 5.5.1 ile,

$$(tr\ell_\Psi)^2 := f^2 = \frac{1}{4} \bar{S} + |\ell_\Psi|^2, \quad (4.40)$$

$$grad f = -div \ell_\Psi. \quad (4.41)$$

elde edilir. Önerme 4.4.1 ve eşitlik (4.40), (4.19) daki eşitliği ima eder. (4.41) eşitliği ile birlikte Önerme 4.4.1 in (4.39) eşitliğini verdiğini görmek kolaydır.



5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Son yıllarda Dirac operatörünün özdeğerlerine alt sınır getirme matematiksel fizikte, topolojide ve geometride yoğun olarak çalışılmaktadır. Bunun nedeni de Dirac operatörünün manifoldun topolojisi ve geometrisi hakkında bilgiler taşımasıdır.

Dirac operatörünün özdeğerine alt sınır getirme ilk olarak A. Lichnerowicz tarafından 1963 yılında yapılmıştır. 1980 yılında da T. Friedrich Kompakt Riemannian Spin manifoldları üzerinde modifiye edilmiş spinorial Levi–Civita konneksiyonunu kullanarak A.Lichnerowicz’ in elde etmiş olduğu alt sınırı geliştirtirdi. Son olarak, 1986 yılında O. Hijazi T. Friedrich’ in öne sürmüş olduğu alt sınırı Yamabe operatörünün ilk özdeğerine bağlı olarak daha da geliştirmekle kalmamış alt sınırı Energy–Momentum tensörünün normunun karesini bağlı olarak daha da mükemmel bir noktaya taşıdı.

Tüm bu gelişmelerin yanında ise 1992 yılında C. Bar 2 –boyutlu Riemannian Spin manifoldları üzerinde Dirac operatörünün özdeğerlerine, manifoldun Euler–Poincare karakteristiğine bağlı olarak alt sınır getirdi.

Bu noktadan hareketle çalışmamızda Spin manifoldları üzerinde tanımlanan Energy–Momentum tensörü üzerine elde edilmiş olan alt sınırların irdelenmesi ve daha sonraki çalışmalara bir kaynak olması amaçlanmıştır.

Bu tezde, Spin manifoldları üzerinde tanımlanan Dirac operatörünün özdeğerlerinin minimum değerini alması durumunda manifoldun geometrisi hakkında ne gibi ince bilgiler verdiği incelenmiştir. Ayrıca, optimal alt sınır elde etmek için birden fazla yol kullanılabileceğine dair Thomas Friedrich’ in yaklaşımı sunulmuştur.

Son olarak, Energy–Momentum tensörünün gerek Spin gerekse Spin^C manifoldları üzerinde, Dirac operatörünün özdeğerlerini elde etmede kullanılan temel araç olmasından dolayı, bahsi geçen manifoldlar üzerinde optimal bir alt sınır elde etmede nasıl yararlanılabileceği irdelenmiştir.

KAYNAKLAR

- Bar, C., 1992. Lower eigenvalue estimates for Dirac operators. Math. Ann. 293, 39–46.
- Bar, C., 1993. Real Killing spinors and holonomy. Comm. Math. Phys., 154, 509–521.
- Baum, H., 1981. Spin-Strukturen und Dirac-Operatoren fiber pseudo- Riemannschen Mannigfaltigkeiten, Teubner-Texte zur Mathematik, Band 41, (Teubner Leipzig).
- Friedrich, T., 1980. Der erste Eigenwert des Dirac-Operators einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit nichtnegativer Skalarkrümmung, Math. Nach. 97, 117-146.
- Friedrich, T., 2000. Dirac operators in Riemannian geometry. Graduate Studies in mathematics 25, American Mathematical Society.
- Fulton, W. And Harris, J., 1991. Representation theory. A first course, Springer-Verlag, New York.
- Karapazar, Ş., 2004. Reel Clifford cebirlerinin temsilleri. Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Haefliger, A., 1956. Sur l'extension du groupe structural d'un espace fibré. C. R. Acad. Sci. Paris. 243: 558–560.
- Hijazi, O., 1984. Opérateurs de Dirac sur les variétés riemanniennes: Minoration des valeurs propres, Thèse de 3ème Cycle, Ecole Polytechnique.
- Hijazi, O., 1986. A conformal lower bound for the smallest eigenvalue of the Dirac operator and Killing spinors, Commun. Math. Phys. 104, 151-162.
- Hijazi, O., 1991. Première valeur propre de l'opérateur de Dirac et nombre de Yamabe, C. R. Acad. Sci. Paris 313, Série I, 865-868.
- Hijazi, O., 1995. Lower bounds for the eigenvalues of the Dirac operator. Journal of geometry and Physics, 16, 27-38.
- Hitchin, N., 1974. Harmonic spinors, Adv. Math. 14, 1-55.
- Karapazar, Ş., 2008. Kahler Norden manifoldları üzerinde spinorlar ve Dirac Operatörü. Anadolu Üniversitesi fen Bilimleri Enstitüsü.

- Kobayashi, S. And Nomizu, K., 1969. Foundations of differential geometry, 2, Interscience Publishers.
- Lawson, H.B. and Michelsohn, M.L., 1989. Spin Geometry, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Lee, J.M., (2003). Introduction to smooth manifolds. Springer-Verlag.
- Lichnerowicz, A., 1963. Spineurs harmoniques, C.R. Acad. Sci. Paris 257, Série I, 7-9.
- Morita, S., 2001. Geometry of differential forms, AMS.
- Naber, G.L., 1996. Topology, geometry and gauge fields. New York: Springer-Verlag.
- Nicolas, G., 2009. The dirac spectrum. Springer Science & Business Media.
- O'Neil, B., 1983. Semi-Riemannian geometry. Academic Press.
- Salamon, D., 1995. Spin geometry and Seiberg-Witten invariants, Zürich:ETH.
- Witten, E., 1994. Monopole and four-manifolds. Math. Res. Lett. 1, 769-796.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	SüleymanKARANLIK
Doğum Yeri ve Tarihi	Erciş / Van- 01/01/1980
Eğitim Durumu	
Lisans Öğrenimi	Azerbaycan DevletPedegoji Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü(2004);
Yüksek Lisans Öğrenimi	Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
Bildiği Yabancı Diller	İngilizce-Rusça
İş Deneyimi	
Çalıştığı Kurumlar	Milli Eğitim Kurumunda Matematik Öğretmeni, Özel Birey Dergisi Dershanesi Matematik Öğretmeni
İletişim	
E-posta Adresi	hazarli65.65@gmail.com
Mezuniyet Tarihi	
2020	