



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

**ENERJİYE İLİŞKİN KUANTUM SAYILARI KARELERİNİN
TOPLAMLARINDAN OLUŞAN DAĞILIMIN KLASİK
DAĞILIMLARLA KARŞILAŞTIRILMASI**

Şefika ÇOKCOŞKUN

Fizik Anabilim Dalı

Nükleer Fizik Programı

**DANIŞMAN
Prof. Dr. Baki AKKUŞ**

**II. DANIŞMAN
Prof. Dr. Tolga YARMAN**

Aralık, 2018

İSTANBUL

Bu çalışma, 21.12.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı, Nükleer Fizik Programında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof. Dr. Baki AKKUŞ(Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. R. Burcu ÇAKIRLI MUTLU
Üniversite
Fakülte

Doç. Dr. Kutsal BOZKURT
Üniversite
Fakülte

Unvan Adı SOYADI
Üniversite
Fakülte

Unvan Adı SOYADI
Üniversite
Fakülte



20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi’nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü’nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Lisans ve yüksek lisans dönemim boyunca desteklerini her zaman hissettiğim değerli danışman hocalarım Prof. Dr. Tolga YARMAN ve Prof. Dr. Baki AKKUŞ'a sınırsız teşekkür ederim.

Yüksek lisans dönemim boyunca hiç bir sorumu yanıtsız bırakmayan, beni hep destekleyen, ufkumu açan, Mathematica programı ile çalışan kodların hazırlanmasında destek olan Prof. Dr. Ozan YARMAN'a, bu bağlamda sorularımızı içtenlikle yanıtlayan Prof. Dr. Bill SETHARES'e minnettarlığımı iletiyorum.

Eczacıbaşı Topluluğu Yönetim Kurulu Başkan Yardımcısı Faruk ECZACIBAŞI'na tez çalışmam boyunca esirgemediği desteğinden dolayı şükranlarımı sunuyorum.

Eczacıbaşı Topluluğu İnsan Kaynakları Grup Başkanı Ata SELÇUK'a ve çalışma arkadaşlarım Cihan GÜMÜŞ, Gökçen TAŞDEMİR SATIR ve Dr. Zafer OKATAN ve desteğini hep hissettiğim tüm çalışma arkadaşlarıma ve tezimin tüm aşamasında yanımda olan yakın arkadaşım Zeynep KULECİ'ye yürekten teşekkür ederim.

Üniversite hayatım boyunca bana hep katkıları olan, yardımlarını eksik etmeyen ve her daim yanımda olan Agageldi MUHAMMETGULYYEV'e, M. Gökçe ERDOĞAN SÜTLAŞ'a, Yrd. Doç. Dr. Gülfem SÜSOY DOĞAN'a, F. Çağla Öztürk'e, Nurgül HAFIZOĞLU ALKAN'a ve Ecem ÇEVİK'e teşekkürü borç bilirim.

Her koşulda yanımda olan, Annem Aynur Öztürk, Babam Halil ÖZTÜRK, Kardeşlerim Şeyma Nur ÖZTÜRK, Yasin ÖZTÜRK'e, Değerli Hayat Arkadaşım Güneş ÇOKCOŞKUN'a şükranlarımı sunuyorum.

Yüksek lisans tezimi Prof. Dr. Tolga Yarman'a ithaf ediyorum.

Aralık 2018

Şefika ÇOKCOŞKUN

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER.....	v
ŞEKİL LİSTESİ	vii
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ.....	ix
ÖZET	x
SUMMARY	xii
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL KISIMLAR.....	5
2.1 ÜÇ BOYUTLU SCHRÖDİNGER DALGA DENKLEMİ VE BUNUN KUTUYA HAPSOLMUŞ ÇÖZÜMÜ: ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYON	5
2.2 PAULİ PRENSİBİ.....	8
2.3 ENERJİ DAĞILIM FONKSİYONU	9
[2.3 BULGULADIĞIMIZ DAĞILIMIN MAXWELL DAĞILIMI İLE BENZERLİĞİ	11
3. MALZEME VE YÖNTEM.....	14
3.1 1 VE 2 SAYISININ DAĞILIM GRAFİĞİNİN WOLFRAM MATHEMATICA PROGRAMI İLE ÇİZDİRİLMESİ	14
4. BULGULAR.....	20
4.1 BELİRLENEN ENERJİ ARALIKLARININ WOLFRAM MATHEMATICA PROGRAMI İLE ÇİZDİRİLMESİ	20
4.1.1 3 Boyutlu Çizimlerin Gösterilmesi.....	20
4.1.2 4 Boyutlu Çizimlerin Gösterilmesi.....	23
4.1.3 2 Boyutlu Çizimlerin Gösterilmesi.....	24
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	25
KAYNAKLAR.....	26
EKLER	28
EK:A1 20 ile 40 sayısının 3 boyutlu olarak Wolfram Mathematica programında gösterimi	28
EK:A2 1 ve 50 sayısının 3 boyutlu olarak Wolfram Mathematica programında gösterimi	30
EK:A3 100 200 sayısının 3 boyutlu olarak Wolfram Mathematica programında gösterimi	32

EK:B1 20 ve 40 sayılarının 3 boyutta küçükten büyüğe sıralanışları ve görünüm sıklığı	34
EK:B2 20 ve 40 sayılarının 2 boyutta ve $m=1/2$ için küçükten büyüğe sıralanışları ve görünüm sıklığı	39
EK:B3 90 ve 100 sayılarının 3 boyutta için küçükten büyüğe sıralanışları ve görünüm sıklığı	40
EK:C1 20 ile 40 sayısının 4 boyutlu $\frac{1}{2}$. kuvvetinin Wolfram Mathematica programında gösterimi	42
EK:C2 20 ile 40 sayısının 3 boyutlu küp kuvvetinin Wolfram Mathematica programında gösterimi	44
EK:D1 20 ile 40 sayısının 2 boyutlu olarak Wolfram Mathematica programında gösterimi	46
EK:E1 20 ile 40 sayısının 4 boyutlu olarak Wolfram Mathematica programında gösterimi	48
EK:F1 Sırasıyla 2, 3 ve 4 boyutta 20 ile 40 sayılarının yerleştirildiği eksen takımları zemininde yapılan uygulama sonuçlarının karşılaştırılması	51
ÖZGEÇMİŞ	52

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1: Bir boyutta kutuya hapsedilmiş m kütleli parçacık v parçacığının belli seviyedeki hızı olup, $p=mv$, olmaktadır.	5
Şekil 2.2: 3 boyutlu kutu içindeki parçacık [2].	7
Şekil 2.3: Üç boyutlu kutuda bir gaz parçacığının hareketi [8].	10
Şekil 2.4: MB, BE ve FD dağılımlarının özellikleri [10].	11
Şekil 2.5: Örnek Maxwell Enerji Dağılımı.	13
Şekil 3.1: 1 ve 2 sayılarının Wolfram Mathematica programında tanımlanması.	15
Şekil 3.2: 1 ve 2 sayısının Wolfram Mathematica programında üçlü sıralı dizilip, dizilimin karesinin alınması.	15
Şekil 3.3: Wolfram Mathematica programında kareleri alınan 8 eşleniğin kendi arasında toplama işlemi yapıp, sınıflandırılması.	16
Şekil 3.4: Wolfram Mathematica programında elde edilen sonucun sıklıklarının karşılaştırılması.	16
Şekil 3.5: 1 ve 2 sayılarının Wolfram Mathematica programında enerji dağılımı.	17
Şekil 3.6: 1 ve 2 sayılarının Wolfram Mathematica programında ‘mean’ komutuyla enerji dağılımı.	17
Şekil 4.1: 1 ile 50 arası sayıların enerji dağılımı.	19
Şekil 4.2: 20 ile 40 arası sayıların enerji dağılımları.	20
Şekil 4.3: 20 ile 50 arası sayıların enerji dağılımı.	20
Şekil 4.4: 20 ile 70 arası sayıların enerji dağılımı.	21
Şekil 4.5: 1 ile 100 sayılarının enerji dağılımı.	19

Şekil 4.6: 30 ile 100 sayılarının enerji dağılımı.	21
Şekil 4.7: 100 ile 200 sayılarının enerji dağılımı.	21
Şekil 4.8: 300 ile 400 arası sayıların enerji dağılımı.	21
Şekil 4.9: 900 ile 1000 arası sayıların enerji dağılımları.	22
Şekil 4.10: 9900 ile 10000 arası sayıların enerji dağılımları.	22
Şekil 4.11: 99900 ile 100000 arası sayıların enerji dağılımları.	22
Şekil 4.12: 4 boyutta 20 ile 40 arası sayıların enerji dağılımları.	23
Şekil 4.13: 2 boyutta 20 ile 40 arası sayıların enerji dağılımları.	23

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
A	: Dalga fonksiyonunun genliği
E	: Kutudaki parçacığın enerjisi
h	: Plank sabiti
$\hbar$	: $\frac{h}{2\pi}$
k	: Boltzman sabiti
E	: Parçacığın enerjisi
L	: Kutunun bir kenar uzunluğu
m	: Parçacığın kütlesi
n	: Kuvantum sayısı
N_A	: Avagadro sayısı
P:	: Basınç
P(n):	: Enerji dağılım olasılığı
R	: Gaz sabiti
Ψ	: Dalga fonksiyonu
T	: Sıcaklık
V(x)	: Potansiyel Enerji
v:	: Parçacığın Hızı
V:	: Hacim
K:	: Kelvin Sıcaklık Birimi

Kisaltmalar	Açıklama
B.E.	: Bose Einstein Dağılımı
M.B.	: Maxwell Boltzman Dağılımı
F.D.	: Fermi-Dirac Dağılımı

ÖZET

ENERJİYE İLİŞKİN KUANTUM SAYILARI KARELERİNİN TOPLAMLARINDAN OLUŞAN DAĞILIMIN KLASİK DAĞILIMLARLA KARŞILAŞTIRILMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şefika ÇOKCOŞKUN

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Baki AKKUŞ

II. Danışman : Prof. Dr. Tolga YARMAN

Tezin ana konusu, önceden belirlediğimiz sabit bir enerji aralığına bağlı olarak çözülen Schrödinger Denklemi'nin üç boyutta hapsedilen bir parçacığın kuvantum seviyelerinin enerji olasılık dağılımının belirlenmesidir. Böyle bir bakış açısı çeşitli açılardan ilginçtir:

- i) Elde ettiğimiz dağılımın grafiği klasik bir olan Maxwell Dağılımına çok benzemektedir.
- ii) Açıkladığımız dağılım, kutuda, Pauli prensibine göre (yani, hiçbir parçacık çifti, karşılık gelen kuvantum sayıları kümesiyle temsil edilen aynı enerji seviyesini işgal edemez) önceden belirlenmiş alt sınır enerji seviyesi ile üst sınır enerji seviyesi arasında yerleşmiş kuvantum düzeylerinin sayısı kadar, çok sayıda serbest

parçacık; söz konusu kutuda hapsedilen parçacıkların topluluğunun enerji olasılık dağılımı haline gelir.

- iii) Hatta hâlâ kuvantizasyon ve Pauli Prensipli'nin varsayıldığı bir odadaki moleküllerde olduğu gibi serbest parçacıklar arasındaki 'elastik çarpışmaların' olduğu öngörülebilir; açığa çıkardığımız sonucun, bir odada bulunan moleküller dengede sergilenecek olan enerji olasılık dağılımı ile pratikçe aynı olmasını beklemekteyiz.
- iv) Kuantize enerji, sırasıyla, her bir uzaysal boyut ile ilişkili üç adet kare tam sayının toplamı ile orantılıdır; kesinlikle ortaya koyduğumuz özellik, tam sayıların matematiği açısından bilhassa dikkat çekicidir - o kadar ki, olasılık dağılımı sonucuna ilişkin yaklaşımın, 3'ten daha yüksek boyutlar için aynı kalacağını görmeyi, başka bir deyişle ister boyut sayısı ile oynansın ister tam sayıların üstleriyle oynanmasını söz konusu tam sayıların belli bir üstte olarak toplamalarının, bulguladığımız sonucunun uzak düşmemekte olduğunun ifade edebilmekteyiz.

Aralık 2018, 65 sayfa.

Anahtar kelimeler: Maxwell enerji dağılımı, Mathematica Programı, Schrödinger Denklemi

SUMMARY

COMPARISION OF THE DISTRIBUTION OF THE SUM OF THE SQUARES OF QUANTUM NUMBERS RELATED TO THE ENERGY WITH THE CLASSICAL DISTRIBUTIONS *

M.Sc. THESIS

Şefika ÇOKCOŞKUN

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Science and Engineering

Department of Physics

Supervisor : Prof. Dr. Baki AKKUŞ

Co-Supervisor : Prof. Dr. Tolga YARMAN

The energy probability distribution of the quantum levels of a particle imprisoned in three dimensions in the manner of Schrödinger's common setup engenders; as contingent upon a fixed energy range, that we determine beforehand, will be the subject of this essay. Such an outlook is interesting from several angles: i) It looks very much like a classical Maxwellian distribution. ii) In the case we have as many free particles in the box as the number of levels depicted by the number of quantum levels in between the predetermined lower bound energy level and the upperbound energy level, all the while assuming that the Pauli Exclusion Principle holds (i.e., "that no pair of particles can occupy the same energy level represented by the corresponding set of quantum numbers"); the distribution we disclose becomes the energy probability distribution of the ensemble of particles imprisoned in the given box. iii) It

can even be guessed that, if elastic collisions between the free particles in question, were allowed, just like is the case for molecules in a room, and still assuming quantization and the Pauli Principle, the outcome we disclose should be about the same as that of the energy probability distribution, molecules in a room would display in equilibrium. iv) The quantized energy being proportional to the sum of three squared integers associated with respectively, each of the spatial dimensions; the property we reveal certainly becomes remarkable from the point of view of mathematics of integer numbers – so much so that we further disclose how the approach pertaining to the probability distribution output remains the same for higher dimensions than 3, i.e. the sum of, say, four squared integers yields, be this qualitatively, the same output.

* : This summary was taken from the article T. Yarman et. al, wrote out of the content of this thesis.

December 2018, 65 pages.

Keywords: Maxwell energy distribution, Mathematica program, Schrodinger equation

1. GİRİŞ

Kütlesi m olan ve potansiyel enerjisi 0 olarak seçilmiş, L_x , L_y ve L_z boyutlarındaki bir kutuda hapsolmuş bulunan bir parçacığın Shrödinger Denklemi'nin bilinen özdeğer çözümünden yola çıkıyoruz. Bu çözüm, yani parçacığın hareket enerjisi E , her üç boyutla, ayrı ayrı ilişkilendirilmiş, n_x , n_y ve n_z diyeceğimiz, kuvantum sayılarının karelerinin toplamını ($n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$) içermektedir. Her üç kenarda kolaylık sağlamak üzere L 'ye eşit olsun. O halde, söz konusu karelerin toplamı, parçacığın hareket enerjisi E ile orantılıdır. Orantı katsayısı; h Plank, sabiti olarak kübik geometride $\frac{h^2}{8mL^2}$ olmaktadır.

Bu tezde öncelikle üç boyutlu bir kutuda hapsolmuş tek bir parçacığın bulunabileceği enerji seviyelerini hesap etmeyi öne çeksek dahi, kutumuzda birden fazla parçacığın bulunması halinde, bunların herhangi ikisinin aynı enerji seviyesinde bulunamayacağını, varsayıyoruz.

Enerji seviyeleri, yukarıdaki denklemden görüldüğü üzere, mümkün kuvantum sayılarının ayrı ayrı ve üçer üçer kombinasyonları zemininde tasvir edilmektedir. Her üç boyuta ilişkin üçerli kuvantum sayılarını bir araya getirilerek, bunların karelerin toplanması ile elde edilen sonuçların, bazılarının, aynı olabileceği, hemen görülebilmektedir.

Buna kolay bir örnek olarak, her üç boyutta da, kuvantum sayısı olarak ve sadece 1 ile 2 sayılarının mümkün kılındığını düşünelim. Bunları üçer üçer eşleştirilince şu 8 seçenekle karşı karşıya kalıyoruz.

(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (1, 2, 2) ve (2, 2, 2) .

Bunlar, göz önüne aldığımız basit halde, parçacığın işgal edebileceği enerji seviyelerini belirleyen ve her biri üç ayrı boyuttan seçilen üç kuvantum sayıdan oluşan, “kuvantum demetler” olmaktadır.

Bu demetlerdeki tam sayıların karelerinin toplamalarını yazalım:

$$(1, 1, 1) \rightarrow (1^2 + 1^2 + 1^2) = 3$$

$$(1, 1, 2) \rightarrow (1^2 + 1^2 + 2^2) = 6$$

$$(1, 2, 1) \rightarrow (1^{2+}2^2+1^2)= 6$$

$$(2, 1, 1) \rightarrow (2^{2+}1^2+1^2)= 6$$

$$(2, 1, 2) \rightarrow (2^{2+}1^2+2^2)= 9$$

$$(2, 2, 1) \rightarrow (2^{2+}2^2+1^2)= 9$$

$$(1, 2, 2) \rightarrow (1^{2+}2^2+2^2)= 9$$

$$(2, 2, 2) \rightarrow (2^{2+}2^2+2^2)= 12$$

Bu durumda görüleceği üzere toplamda, 8 seçenekten ,

- o 1 seçenek 3 sayısını,
- o 1 seçenek 12 sayısını,
- o 3 seçenek 6 sayısını,
- o 3 seçenek 9 sayısını

vermektedir.

Bu durum göstermektedir ki; kutumuzda çok sayıda, diyelim ki, her üç boyutta da 1'den N'ye kadar kuvantum sayılarımız yer alırsa, toplamda parçacıkların olası enerjilerine dönük olarak N^3 tane enerji seviyesi olacaktır. Fakat; 'iki parçacık aynı bir (n_{x0}, n_{y0}, n_{z0}) kuvantum sayılar demetine sahip bulunamayacağına" dair, kısıtımız nedeniyle; parçacıklar ancak, ayrı ayrı üçerli kuvantum sayılarıyla temsil edilen farklı farklı katlara yerleşmek durumunda, olacaklardır.

Bununla beraber, işte, kimi üçerli kuvantum sayılarının karelerinin toplamaları, aynı olabilecektir. Yani, birçok parçacık farklı farklı kuvantum seviyelerde bulunsalar da, son toplamda aynı bir hareket enerjisine sahip olabileceklerdir.

Bu çerçevede tıpkı yukarıda dikkate getirdiğimiz örnekte olduğu gibi, belli bir enerjiye dönük belli bir sayı, veya aynı anlamda belli bir enerjiye dönük, belli bir olasılık, ortaya çıkmaktadır.

Bu tezde, ele alınan kutuda, çok yüksek sayıda parçacığın yer alması halinde ortaya çıkacak enerji dağılımı, hesaplanmaktadır ve gösterilmektedir.

Hesap ettiğimiz, enerji dağılımları, görmekteyiz ki, Maxwell Enerji Dağılımı'na şaşırtıcı derecede benzemektedir. Dikkate getirmek istediğimiz olgu, esasen, budur.

Konuyu matematiksel olarak özetlemede çok yarar vardır. Kübik, her üç boyutta, yalnızca tam sayılardan oluşan N tane sayımız bulunuyor. Bunlar, demek ki üç boyutta, toplamda $N \times N \times N = N^3$ uzaysal noktayı işaret ediyor. Bu her noktaya şimdi, bunun koordinatlarının karelerinin toplamından oluşan sayıyı yazıyoruz. Koordinatları farklı olacak olmakla beraber söz konusu sayı, üç boyutlu uzayımızın başka kimi noktalarında karşımıza çıkıyor. Bu sayı karşımıza eğer toplamda n defa çıkıyorsa; bunu, tüm benzer şekilde hesap edilmiş olacak, sayıların içinde bulma olasılığımız (P), demek ki

$$P = \frac{n}{N^3} \quad (1.2)$$

oluyor.

Bu tezde aradığımız, işte, tam da, $P=f(n)$ fonksiyonu olmaktadır. Bu fonksiyon, gerçekten de, Maxwell Dağılımı'nı çok andırıyor, demiştik. O kadar ki, N tane sayıyı her bir eksende 1'den N 'ye kadar yerleştirebileceğimiz gibi, diyelim ki, 100'den $N + 100$ 'e kadar olacak şekilde de yerleştirebiliriz.

Bu noktada üzerinde durulmaya değer bir ayrıntı şudur: Söz konusu kutunun içindeki, zaten enerjilerinin ortalamada yüksek olması ihtimali kuvvetli olan ve "homojen" dağıldıklarını varsayabileceğimiz moleküllerin sayıca fazlalığı; çok çok düşük enerjili moleküllerin mevcudiyet ihtimalini neredeye imkansızlaştıracak olup, bu durumda, her bir boyutta, 1 ila 100'e kadarki bir diziyi almak yerine, sözgelimi, 20'den 120'e kadarki bir diziyi gözetmek, göreceli olarak daha gerçekçi olacaktır. Bu son durumda, ayrıca, elde edilecek sonuçlar Maxwell Dağılımı'yla daha yakın örtüşme sergileyen bir resim sunuluyor.

Demek ki, böyle yapmamız halinde, $P=f(n)$ dağılımı, tıpkı Maxwell Dağılımı'nın sıcaklığın yükseltilmesine bağlı olarak, sağa doğru enerji ekseninde kayması örneğindeki gibi, sağa kayıverecektir.

Tam sayılar âleminde böyle bir özelliğin ortaya çıkması, 'matematik dünyayı' yakinen ilgilendirecektir, kanaatindeyiz.

Dahası, sözkonusu ettiğimiz bulgular, yalnız üç boyutlu tam sayılar âleminde değil, dört boyutlu, beş boyutlu ve daha üst boyuttaki ‘farazi’ tamsayılar âlemlerinde de, aynı olmaktadır.

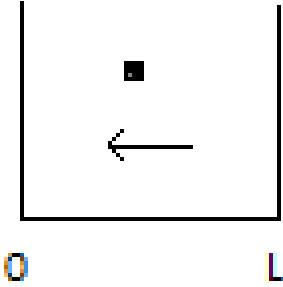
Bu tezde, bu konu ayrıca işlenmektedir.



2. GENEL KISIMLAR

2.1 ÜÇ BOYUTLU SCHRÖDİNGER DALGA DENKLEMİ VE BUNUN KUTUYA HAPSOLMUŞ ÇÖZÜMÜ: ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYON

Düşüncemize en basitten başlayarak, yatkinlık sağlamak üzere, ilk önce, Şekil 2.1.'de gösterildiği gibi sonsuz yükseklikli kutuda hapsolmuş parçacığın bir boyutlu Schrödinger Denklemi'ni ve bunun çözümünü yazıyoruz.



Şekil 2.1: Bir boyutta kutuya hapsolmuş m kütleli parçacık v parçacığın belli seviyedeki hızı olup, $p=mv$, olmaktadır.

Bu parçacığın Schrödinger Denklemi'ni alışılmış notasyonla yazıyoruz [1]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d}{dx} \right)^2 \Psi(x) = E \Psi(x) . \quad (2.1)$$

Bu denklemde; kutu içinde potansiyel enerji, 0 alınmış olup, haliyle yer almamaktadır. Buna karşılık, parçacık kutunun dışına çıkamama kısıtındadır.

Burada geçen büyüklükler aşağıdaki gibidir.

$\hbar$: Planck sabiti / 2π

Ψ : Parçacığın dalga fonksiyonu

E : Parçacığın kinetik enerjisi

m : Parçacığın kütlesi

Kutunun uzunluğu L 'dir.

Denklem (2.1)'in çözümü şudur [1];

$$E = \frac{n^2 h^2}{8mL^2} \quad n=1, 2, 3, \dots \quad ; \quad (2.2)$$

burada n kuantum sayısıdır.

Bulunacak E değeri denklemimizin, özdeğeridir. Denklemimizin özfonksiyonu alışılmış notasyonla [1];

$$\Psi(x) = A \sin kx , \quad (2.3)$$

olmaktadır. Buradaki çözüm Denklem 2.4'te olduğu gibi Born formülasyonuna formülüne göre bulunmakta ve aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır [1]. Bu çerçevede,

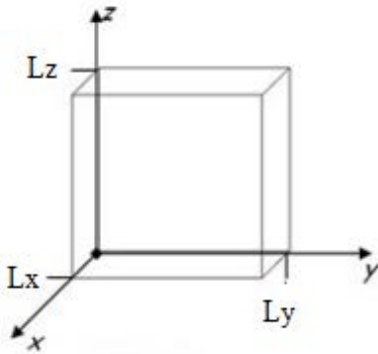
$$\int_0^L \Psi^2(x) dx = 1 , \quad (2.4)$$

$$|A|^2 = \frac{2}{a} , \quad (2.5)$$

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} , \quad (2.6)$$

olmaktadır [1].

Biz bu tezde, esas olarak Şekil 2.2'de olduğu gibi üç boyutlu ve sıfır potansiyel enerjiyi haiz $[(V(r)=0)]$, bir kutuya hapsedilmiş bir parçacık zemininde çalışmayı, hedefliyoruz.



Şekil 2.2: 3 boyutlu kutu içindeki parçacık [2].

Bu düşünce ile 3 boyutta Schrödinger Denklemini yazalım [1]. Rölativistik olmayan Schrödinger Denklemi, belirli bir enerji seviyesindeki kutudaki partikülün enerjisini sağlar [3]:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi(r) + V(r)\Psi(r) = E\Psi(r) \quad (2.7)$$

Denklemimizin özdeğer ve öz fonksiyonları, alışılmış notasyonla şöyledir:

$$\Psi_{x^2}(x) = \left(\frac{2}{L_x}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L_x}\right), \quad n_x=1, 2, 3... \quad E_{n_x} = \frac{\hbar^2 (n_x)^2}{8mL_x^2}, \quad (2.8)$$

$$\Psi_{y^2}(y) = \left(\frac{2}{L_y}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L_y}\right), \quad n_y=1, 2, 3... \quad E_y = \frac{\hbar^2 (n_y)^2}{8mL_y^2}, \quad (2.9)$$

$$\Psi_{z^2}(z) = \left(\frac{2}{L_z}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L_z}\right), \quad n_z=1, 2, 3... \quad E_{n_z} = \frac{\hbar^2 (n_z)^2}{8mL_z^2}. \quad (2.10)$$

n_x, n_y, n_z sırasıyla x, y, z yönlerinde dalga fonksiyonuyla ilişkili kuantum sayılarıdır [3].

$$E_n = \frac{\hbar^2}{8m} \left(\frac{(n_x)^2}{L_x^2} + \frac{(n_y)^2}{L_y^2} + \frac{(n_z)^2}{L_z^2} \right) \quad (2.11)$$

Kolaylık sağlamak amacıyla, bu şekilde dikdörtgenler prizması yerine L kenar uzunluğuna sahip bir küp gözetmekteyiz ($L_x = L_y = L_z = L$). Bu durumda [1];

$$E_{x,y,z} = \frac{\hbar^2}{8m(L^2)} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad n=1,2,3, ... \quad (2.12)$$

olacaktır.

2.2 PAULI PRENSİBİ

Atomlar genellikle çoklu-elektronludurlar. Nötr atomlarda, bir protona karşılık bir elektron bulunur; bu durum atomu, ‘nötr’ kılar. ‘Nötr’, toplamda ‘yüksüz’ demektir. Elektronlar, atomun çekirdeğinden ne kadar uzakta konumlandıklarına bağlı olarak, farklı enerji seviyelerinde bulunabilirler [4].

Bir atomdaki her bir elektronun, ‘benzersiz’ bir ‘kuvantum sayıları demeti’ vardır. Bu demet, genelde birden fazla kuvantum sayısı ile ifade edilir. Bir atomdaki tüm elektronların tüm kuvantum sayılarının kombinasyonu, Schrödinger Denklemi’ne, uyan bir dalga fonksiyonuyla tanımlanır [4].

1945 yılında Pauli’ye Nobel ödülü kazandıran Pauli Dışlama Prensibi’ne göre, iki elektron, aynı bir kuvantum sayıları demetini paylaşamaz [5]. Her elektronun kendine özgü bir halde olması gerektiğini, başka bir deyişle, bir atomdaki hiç bir elektronun aynı kuvantum sayı topluluğuna sahip olmayacağını, öne sürülmektedir [6].

Bu tezde, söz konusu prensip, kutuya hapsedilmiş ve aralarında etkileşme varsaymayacağımız parçacıklara uygulanabilir, varsaymaktadır. Başka bir deyişle, kutudaki iki parçacık, işte, aynı kuvantum sayıları demetini haiz olmayacaktır.

2.3 ENERJİ DAĞILIM FONKSİYONU

Klasik termodinamiğin ‘ideal gaz’ yaklaşımıyla birlikte çalıştığı bilinmekte ve burada gazın oluşturduğu moleküllerin birbiriyle etkileşmediği varsayılmaktadır. İdeal gazın tanımlanmasına yönelik yasalar çok uzun zaman önce çatılmıştır [3]. Gazın bir molekülden oluştuğunu düşünerek, Boyle ve Mariotte ideal gaz yasasını, yazalım [7];

$$PV = n_m RT = kNT \quad (2.13)$$

Burada, P gazın basıncı, V gazın hacmi, T gazın sıcaklığı, n_m gazın mol sayısı, N Avogadro sayısı, R=831 Joules/°K olan gaz sabitidir. Burada,

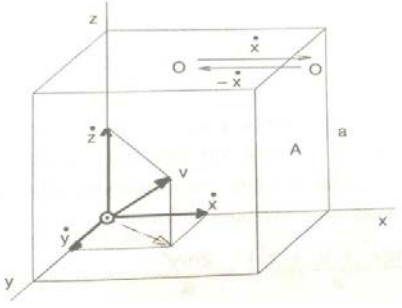
$$k = \frac{R}{N}, \quad (2.14)$$

olmaktadır. k Boltzman sabiti ve N Avogadro sayısıdır [7].

Kapalı bir kaptaki bulunan moleküller, onları sınırlayan duvarlarla etkileşme halinde olacaklardır, fakat birbirleriyle etkileşmeyeceklerdir. Böylece her molekül, sonsuz yüksek potansiyele haiz kapalı bir kutuda tek bir kuantum mekaniksel parçacık gibi davranacaktır [3]. Gazların kinetik teorisine göre, bir kaptaki bulunan gaz Şekil 2.3’te olduğu gibi, kabın duvarlarına çarpıp geri döndükçe, her molekülde ayrı ayrı momentum değişimi gözlenir ve Denklem (2.13)’nin Denklem 2.15’te olduğu gibi, $\bar{E} = \frac{3}{2}kT$ formülü de kullanılarak türetilmesini sağlar [7].

$$PV = \frac{N}{3} m \overline{v^2} = \frac{2}{3} N \bar{E} \quad (2.15)$$

$\frac{m \overline{v^2}}{2} = \bar{E}$ ortalama transfer olan moleküllerin enerjisi, m kütle, $\overline{v^2}$ hızın ortalama karesidir [7].



Şekil 2.3: Üç boyutlu kutuda bir gaz parçacığının hareketi [8].

Kapalı kutuya hapsettiğimiz parçacığın enerji dağılım fonksiyonu inceleyip; ilk olarak $P(E_i)$ E_i 'ye karşı olarak tanımlayalım:

$$p(E_i) = \frac{f(E_i)}{N} \quad (2.16)$$

$f(E_i)$, enerji değeri (E_i) 'nin N olası enerji değerlerinden meydana gelme sıklığıdır.

Gazların istatistik termodinamik yaklaşımında, esas olarak üç tür dağılım mevcuttur. Bu dağılımlar, Maxwell – Boltzmann (MB), Bose – Einstein (BE) ve Fermi – Dirac (FD) olarak isimlendirilen dağılımlardır [9].

Aralarındaki uzaklıklar, birbirlerinde ayırt edilmeleri için yeterli olan özdeş parçacıklardan bahsediyorsak, örneğin gaz molekülleri diyelim. Bu tür parçacıklar için Maxwell-Boltzman dağılımı fonksiyonunu tanımlıyoruz.

Dalga fonksiyonları örtüştüğü için birbirinden ayırt edilemeyen ‘0’ veya ‘tam sayı’ spinli (dönülü) özdeş parçacıklar bozon adı verilen bu tür parçacıklar dışarlama ilkesine uymadıklarından onlar için Bose-Einstein Dağılımı geçerli olmaktadır.

Aynı şekilde birbirinden ayırt edilemeyen spinleri buçuklu $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots)$ olan özdeş parçacıklar fermiyon adı verilen bu tür parçacıklar dışarlama ilkesine uyduklarından (örneğin elektron) onlar için Fermi-Dirac Dağılımını kullanmaktayız [6].

Maxwell-Boltzmann (klasik)	Bose-Einstein (kuantum)	Fermi-Dirac (kuantum)
$f(E) = \frac{1}{Ae^{E/KT}}$	$f(E) = \frac{1}{Ae^{E/KT} - 1}$	$f(E) = \frac{1}{Ae^{E/KT} + 1}$
özdeş, fakat ayırdedilebilir partiküller	özdeş ayırdedilemez partiküller; tam spinli (bozonlar)	özdeş ayırdedilemez partiküller; yarım spinli (fermiyonlar)
örnekler: moleküler hız dağılımı	örnekler: termal ısıma, spesifik ısı	örnekler: bir metalde elektronlar, yarıiletkenlerde iletim

Şekil 2.4: MB, BE ve FD dağılımlarının özellikleri [10].

[2.3 BULGULADIĞIMIZ DAĞILIMIN MAXWELL DAĞILIMI İLE BENZERLİĞİ

19. yüzyılda İngiliz bilim adamı James Clerk Maxwell ve Avusturyalı Fizikçi Ludwig Boltzmann gazların kinetik teorisini oluşturmaya öncülük ettiler. Maxwell-Boltzmann dağılım fonksiyonu, T mutlak sıcaklığındaki bir parçacık sisteminde ϵ enerjili bir durumdaki $f_{mb}(\epsilon)$ ortalama parçacık sayısının ;

$$f_{mb}(\epsilon) = Ae^{\frac{-\epsilon}{KT}} \quad (2.17)$$

formülüyle verildiğini ve A'nın değeri sistemdeki parçacık sayısına bağlı olup, bir dalga fonksiyonun normlama sabitine benzer şekildedir. k (2.14)'te verildiği gibi Boltzmann

sabitidir öyle ki, $k = 1.381 \times 10^{-23} \frac{J}{K}$ 'dir.

Gaz moleküllerinin enerji dağılımları, makroskopik boyutta, kapalı bir kutuda, bulunan relativistik olmayan etkileşimli parçacıklar olarak ele alındı. L boyutunda bir kapalı küp kutu içinde bulunan m kütleli parçacık için yazılmış ve sırasıyla üç boyut ile ilişkili kuvantum sayılarıyla $[n_x, n_y, n_z]$ betimlenen belli enerji seviyesinde bulunan Schrödinger Denkleminin E enerji özdeğeri Denklem (2.2) ile tanımlanmıştı.

Bu tanım ile ilgili, belli E'nin gerçekleşmesi; farklı $[n_x, n_y, n_z]$ kümelerin zemininde olabilmektedir. Tezde, $[n_x, n_y, n_z]$ kümelerini (n^2) durumunu referans alarak kare kuvantum sayılarının ortalamasıyla aramamızın nedeni, ortalama moleküller ile doğrudan bağlantılı olmasıdır. Buna göre, E'yi basitleştirebiliriz [11].

Basit durum için kuvantum sayılarını 1 ve 2 seçelim, ve bu sayılar üç boyutta tüm yönlerde olacaklardır. Böylece, 1 ve 2, öteleme yönü boyunca, 1 ve 2, O_y yönü boyunca ve 1 ve 2, O_z yönü boyunca, izin verilen kuvantize edilmiş enerji seviyelerinde, $N = 2^3 = 8$ şeklinde farklı kuvantum noktalarına işaret edeceklerdir. Verilen yönlerde tamsayı kuvantum sayılarını taşıyan koordinat sistemi $[O_x, O_y, O_z]$ tarafından temsil edilir ve bu koordinat sistemini 1 ve 2 sayılarından oluşturacak isek,

(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,1), (1,2,2), (2,2,2)

olacaktır.

Yukarıda ki gibi 8 adet olan eşleniklerin her birinin karesini aşağıdaki gibi alıp, toplayalım.

$$(1, 1, 1) \rightarrow (1^2+1^2+1^2)=3, \quad (2, 2, 2) \rightarrow (2^2+2^2+2^2)=12$$

$$(2, 1, 2) \rightarrow (2^2+1^2+2^2)=9, \quad (1, 1, 2) \rightarrow (1^2+1^2+2^2)=6$$

$$(1, 2, 2) \rightarrow (1^2+2^2+2^2)=9, \quad (1, 2, 1) \rightarrow (1^2+2^2+1^2)=6$$

$$(2, 2, 1) \rightarrow (2^2+2^2+1^2)=9, \quad (2, 1, 1) \rightarrow (2^2+1^2+1^2)=6$$

Bu durum gösteriyor ki, üçlü olarak 8 farklı kuvantum noktasına sahip olmamıza rağmen; kuvantum kare toplamalarının bazılarının aynı sayı değeri çıktığını gözlemleyebiliriz. 3, 6, 9 ve 12' ye, 8 enerji enerji değerinden , 8 durum için,

- ☐ 1 seçenek 3 sayısını,
- ☐ 1 seçenek 12 sayısını,
- ☐ 3 seçenek 6 sayısını,
- ☐ 3 seçenek 9 sayısını

vermektedir.

Denklem (2.16) da verilen kuvantum konumlarının her biri için kuantum tam sayılarının karelerinin toplanmasının emsalli tatbikatından çıkarılan sayılar ile orantılı olanlar arasındaki enerji numaraları için sıfır olasılığına yol açabileceği açıktır. Nitekim, 3, 6, 9, 12 numaralı nihai sayılardır ve 2, 4, 5, 7, 8, 10 ve 11 sayılarını bu nedenle ele almadık. Bu özellik daha az önem kazanmasına karşın, her yönde çok sayıda tamsayı seçmemiz durumunda, yine de enerji

olasılık dağılımı fonksiyonunun tanımını geliştirebiliriz. Böylece bir kuvantum enerji seviyesi bulma olasılığı olarak $p(E) dE$ 'yi tanımlayabiliriz. Enerji E değerini taşıyan enerji aralığı dE , E etrafında yerleştirilir.

$$p(E) = \frac{f(E)}{N} \quad (2.18)$$

$f(E)$, enerjinin birim aralığı içinde yer alan bir enerjinin ortaya çıkış frekansıdır, söz konusu tam enerji aralığı E civarındadır.

(2.13) ve (2.14) Denklemlerinin dışında aşağıdaki ilişkileri de yazabileceğimiz açıktır.

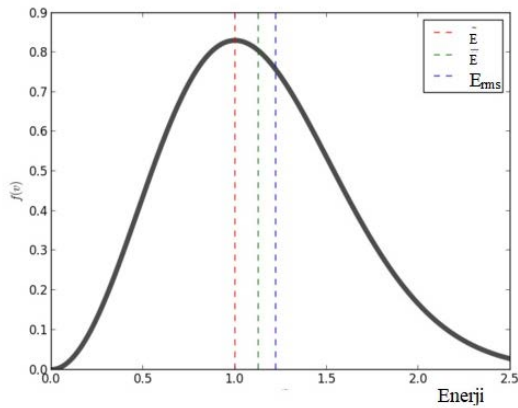
$$\sum_{i=1}^I p(E_i) = 1 = \sum_{i=1}^I \frac{f(E_i)}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^I f(E_i) = \frac{N}{N} = 1, \quad (2.18)$$

$$\int_{E_{min}}^{E_{max}} p(E) dE = 1 = \int_{E_{min}}^{E_{max}} \frac{f(E)}{N} dE = \frac{1}{N} \int_{E_{min}}^{E_{max}} f(E) dE = \frac{N}{N} = 1, \quad (2.19)$$

Her halükarda, enerji E 'ye göre enerji olasılık dağılımı fonksiyonu $p(E)$, Maxwellian Enerji Dağılımı'na çok benzer görünmektedir. Aşağıda sunacağımız çizimlerden bellidir; $p(E)$ 'nin zirvesine tekabül eden enerji E_{peak} 'in ortalama enerjinin solunda yer almasıdır.

$$\bar{E} = \int_{E_{min}}^{E_{max}} E p(E) dE. \quad (2.20)$$

olacaktır. Örnek, Maxwell Dağılım grafiği Şekil 2.5'te gösterilmiştir.



Şekil 2.5: Örnek Maxwell enerji dağılımı [12].

3. MALZEME VE YÖNTEM

3.1 1 VE 2 SAYISININ DAĞILIM GRAFİĞİNİN WOLFRAM MATHEMATICA PROGRAMI İLE ÇİZDİRİLMESİ

Üç boyuttaki bir parçacığın, hava ile çarpışma olmaksızın kapalı bir kaptaki olduğunu ve elektronların Pauli Prensipleri kısıtıyla, kuantum enerji seviyelerine yerleştiğini farzediyoruz. Kolay olması amacıyla ilk olarak '1' ve '2' kuantum sayılarının enerji seviyelerini inceliyoruz. Bu kuantum sayılarının her yönde (x, y, z) olabileceği aşikardır. O halde, 1 ve 2 'x' yönünde, 1 ve 2 'y' yönünde ve 1 ve 2 'z' yönünde izin verilen kuantize edilmiş enerji seviyelerinde ' $N = 2^2 = 8$ ' kadar farklı kuantum noktalarında bulunacaklardır. Bu 8 farklı kuantum noktalarının (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (1, 2, 2) ve (2, 2, 2) şeklinde olacağı hesaplanabilir. Bu aşamadan sonra; her bir üçlü sıralı eşleniğin aşağıdaki şekliyle kendi aralarında karesini alıp, kendi aralarında toplama işlemi yapıyoruz. Kareleri alınıp toplanan durumda, eşleniklerin bazılarının aşağıdaki gibi tekrarlandığını görebiliyoruz.

$$(1, 1, 1) \rightarrow (1^2+1^2+1^2)=3 \quad (2, 2, 2) \rightarrow (2^2+2^2+2^2)=12$$

$$(1, 1, 2) \rightarrow (1^2+1^2+2^2)=6 \quad (1, 2, 1) \rightarrow (1^2+2^2+1^2)=6 \quad (2, 1, 1) \rightarrow (2^2+1^2+1^2)=6$$

$$(2, 1, 2) \rightarrow (2^2+1^2+2^2)=9 \quad (2, 2, 1) \rightarrow (2^2+2^2+1^2)=9 \quad (1, 2, 2) \rightarrow (1^2+2^2+2^2)=9$$

Bu durumda görüleceği üzere toplamda 8 seçenekten

- o 1 seçenek 3 sayısını,
- o 1 seçenek 12 sayısını,
- o 3 seçenek 6 sayısını,
- o 3 seçenek 9 sayısını

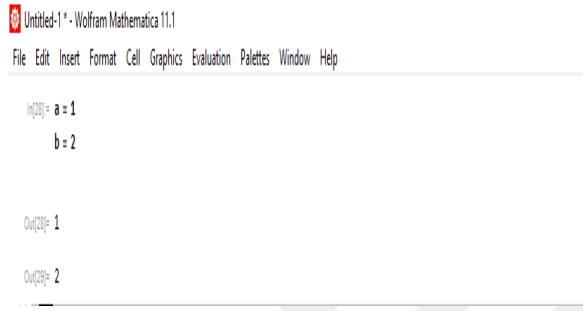
vermektedir.

Yukarıda bahsi geçen konunun, dağılım grafiğini oluşturmak adına ‘Wolfram Mathematica’ 11.1.1 programını kullanarak enerji dağılımını elde edeceğiz. Bu programda yapılan kodlamalar aşağıdaki gibidir.

Öncelikle a ve b olmak üzere 1 ve 2 tam sayısını programda tanımlayarak başlıyoruz.

a=1

b=2



Şekil 3.1: 1 ve 2 sayılarının Wolfram Mathematica programında tanımlanması.

‘a’ ve ‘b’ sayısı olarak tanımladığımız 1 ve 2 sayılarını, ‘ $\text{Tuples}[\{a^2, b^2\}, 3]$ ’ kodu ile herbiri üçlü olarak (x, y, z) eşlenmiş şekilde ve eşlenmiş her üçlünün karesi alınmış olarak sıralıyoruz. Programın bize vermiş olduğu sonuç, Şekil 3.2’de de görüleceği üzere $\{1, 1, 1\}, \{1, 1, 4\}, \{1, 4, 1\}, \{1, 4, 4\}, \{4, 1, 1\}, \{4, 1, 4\}, \{4, 4, 1\}, \{4, 4, 4\}$ olacaktır.

```

Untitled-1 * - Wolfram Mathematica 11.1
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

In[28]:= a = 1
         b = 2

Out[28]= 1

Out[29]= 2

In[39]:= Tuples[{a^2, b^2}, 3]

Out[39]= {{1, 1, 1}, {1, 1, 4}, {1, 4, 1}, {1, 4, 4}, {4, 1, 1}, {4, 1, 4}, {4, 4, 1}, {4, 4, 4}}

```

Şekil 3.2: 1 ve 2 sayısının Wolfram Mathematica programında üçlü sıralı dizilip, dizilimin karesinin alınması.

Bir sonraki adımda, her eşleniği kendi arasında, (parantezler arası) toplama işlemini 'total' komutu yapıyoruz. Şekil 3.3'te de görüleceği şekilde, bu komut sonrası program çıktısında; 6 ve 9 sayılarından üçer tane 3 ve 12 sayılarından birer tane olmaktadır.

```

Untitled-1 * - Wolfram Mathematica 11.1
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

In[28]:= a = 1
         b = 2

Out[28]= 1

Out[29]= 2

In[39]:= Tuples[{a^2, b^2}, 3]

Out[39]= {{1, 1, 1}, {1, 1, 4}, {1, 4, 1}, {1, 4, 4}, {4, 1, 1}, {4, 1, 4}, {4, 4, 1}, {4, 4, 4}}

In[47]:= Sort[Total[Table[Tuples[set, 3], {set}], {2}]]

Out[47]= {3, 6, 6, 6, 9, 9, 9, 12}

```

Şekil 3.3: Wolfram Mathematica programında kareleri alınan 8 eşleniğin kendi arasında toplama işlemi yapılıp, sınıflandırılması.

Elde edilen sınıflandırmanın dağılım grafiğini çizebilmek adına tekrarlayan sayıları ve kaç defa tekrarladığını 'Counts' komutuyla Şekil 3.4'te olduğu gibi gösteriyoruz. Beklendiği gibi, 3 sayısından 1 tane, 6 sayısından 3 tane, 9 sayısından 3 tane ve 12 sayısından 1 tane olduğunu programın çıktısında görünüyor.

```

Untitled-1* - Wolfram Mathematica 11.1
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

In[28]:= a = 1
         b = 2

Out[28]= 1

Out[29]= 2

In[39]:= Tuples[{a^2, b^2}, 3]
Out[39]= {{1, 1, 1}, {1, 1, 4}, {1, 4, 1}, {1, 4, 4}, {4, 1, 1}, {4, 1, 4}, {4, 4, 1}, {4, 4, 4}}

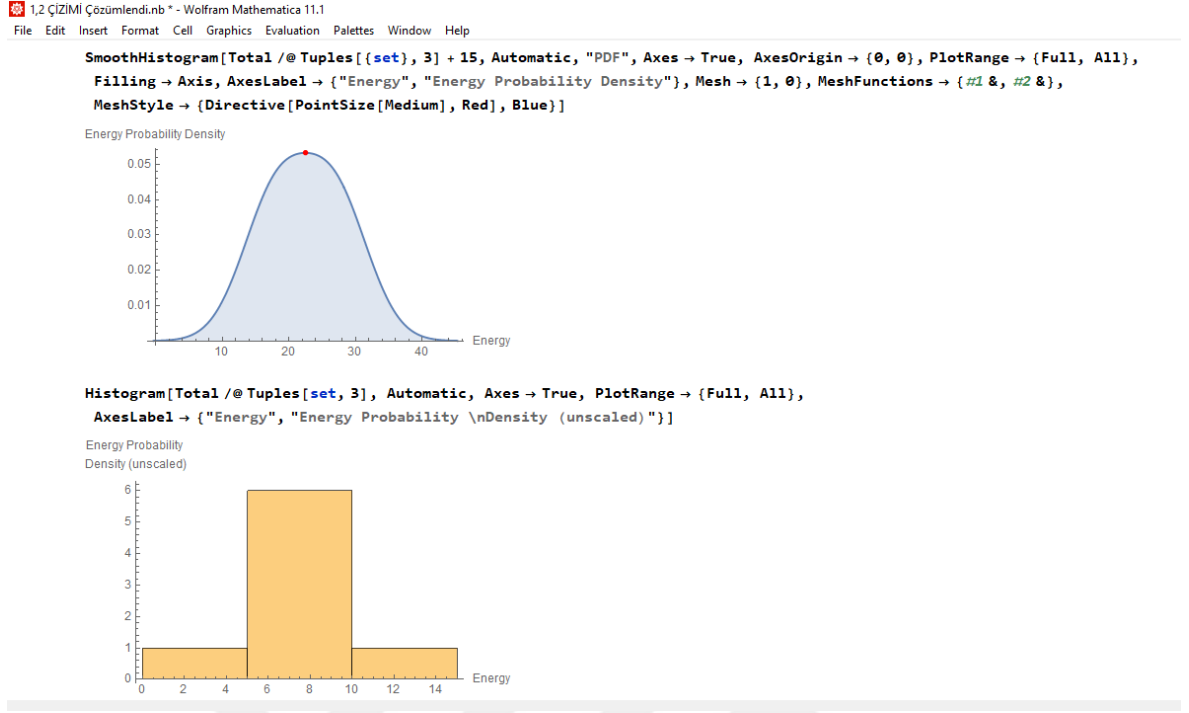
In[47]:= Sort[Total[Table[Tuples[set, 3], {2}]]]
Out[47]= {3, 6, 6, 6, 9, 9, 9, 12}

In[48]:= Counts[Sort[Total[Table[Tuples[set, 3], {2}]]]]
Out[48]= <| 3 -> 1, 6 -> 3, 9 -> 3, 12 -> 1 |>

```

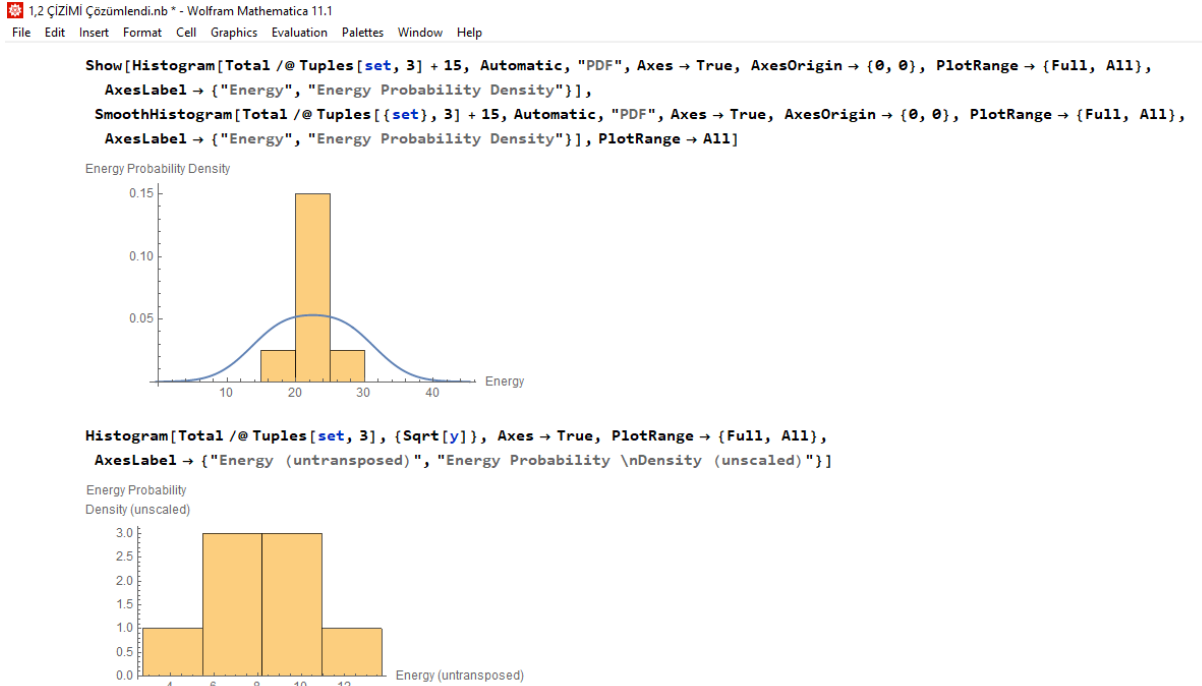
Şekil 3.4: Wolfram Mathematica programında elde edilen sonucun sıklıklarının karşılaştırılması.

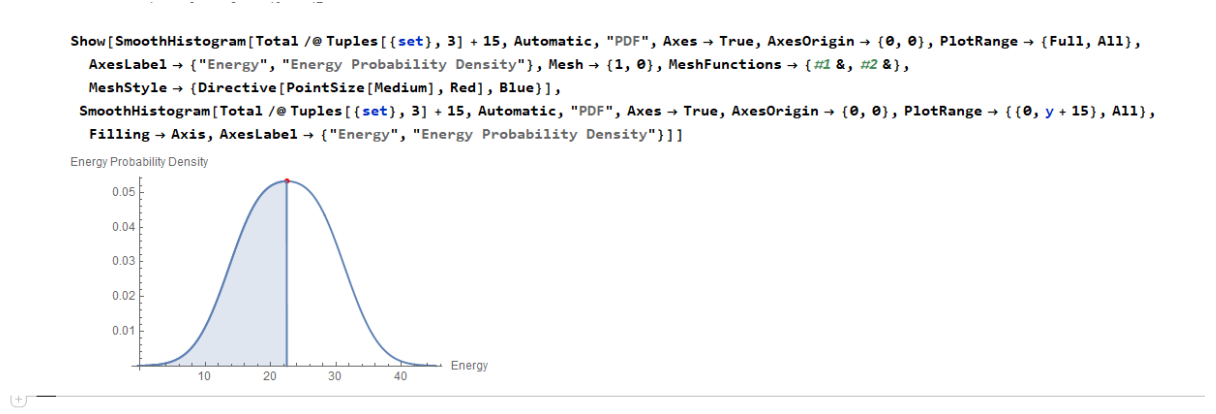
Karşılaştırma sonrası grafiğimiz eksenlerini tanımlamak adına; ‘x’ eksenine kareleri alınıp, toplama işlemi yaptığımız sayıların değerlerini (3, 6, 9 ve 12) yazıyoruz. Aynı zamanda bu eksen ‘enerji eksen’ olarak adlandırıyoruz. Grafiğin ‘y eksen’ ise sonuçların kaç kere tekrar ettiğini belirten sayıları (1 ve 3) konumlandırarak ve ‘enerji olasılık yoğunluğu’ olarak adlandırıyoruz. 1 ve 2 sayılarının üçlü sıralı eşleniklerinin kareleri alınıp toplama işlemi sonrası tekrarlı olan sayıların oluştuğu ve bu işlemin dağılımı gösterilmiştir. Elde edilen dağılımın Şekil 3.5’te gösterimiştir.



Şekil 3.5: 1 ve 2 sayılarının Wolfram Mathematica programında enerji dağılımı.

Elde edilen grafik sonrası, grafiğin altında kalan alanı aritmetik olarak ikiye bölmek amacıyla, Şekil 3.5'te olduğu gibi 'mean' komutu kullanıyoruz. Bunu kullanmamızda ki amaç grafiğin alt alanının yarısının nereden kesildiğini tespit etmektir. Böylece dağılımın hangi dağılım olduğunu gözlemleyebilmeyi amaçlıyoruz.





Şekil 3.6: 1 ve 2 sayılarının Wolfram Mathematica programında ‘mean’ komutuyla enerji dağılımı.

1 ve 2 sayılarıyla 3 boyutta denenmiş olan bu çalışma, istenen her enerji aralığında yapılabilir. Yine matematik dünyada ilgi çekeceğini düşündüğümüz, 4 boyutta da, hatta enerji aralığının kuvveti değiştirilerekte bu işlemler tekrarlanabilir.

4. BULGULAR

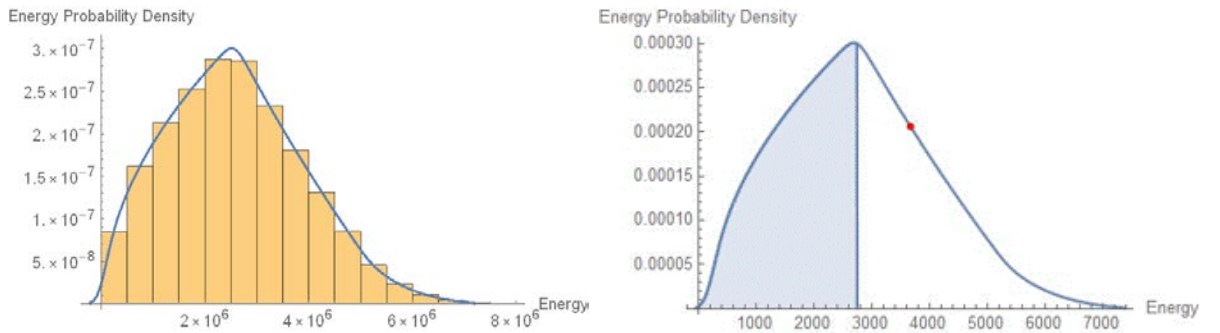
4.1 BELİRLENEN ENERJİ ARALIKLARININ WOLFRAM MATHEMATICA PROGRAMI İLE ÇİZDİRİLMESİ

4.1.1 3 Boyutlu Çizimlerin Gösterilmesi

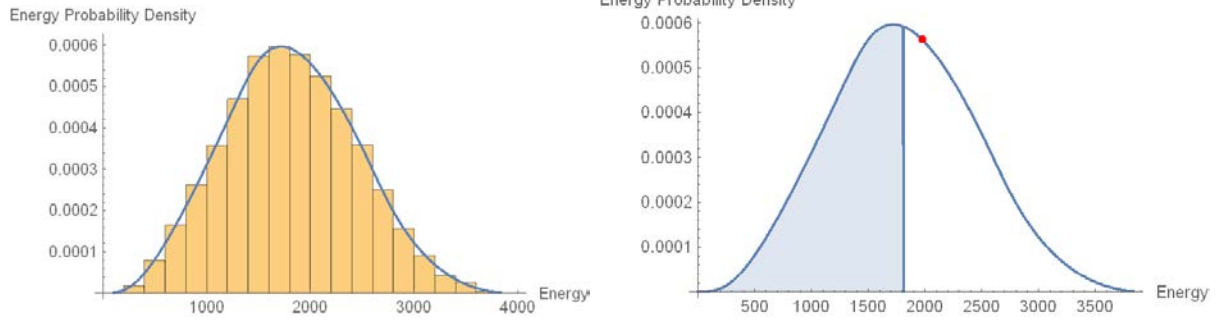
‘Kuantize enerji’, sırasıyla, uzaysal boyutların her biri ile ilişkili üç kare tamsayıların toplamı ile orantılıdır; açığa çıkardığımız özellik kesinlikle tam sayıların matematiği açısından dikkat çekicidir.

1 ve 2 sayılarında uygulamış olduğumuz programlama sırasını ‘Malzeme ve Yöntem’ bölümünde açıkça ifade ettiğimiz şekliyle, enerji aralığını değiştirdiğimiz kuantum sayı değerlerine aşağıdaki örneklerde olduğu şekilde uyguladık. Grafikler çizdirdikten sonra, tüm grafiklerin yorumlanmasının kolay olması adına, sola doğru y ekseninde transpoze işlemi yapılmıştır.

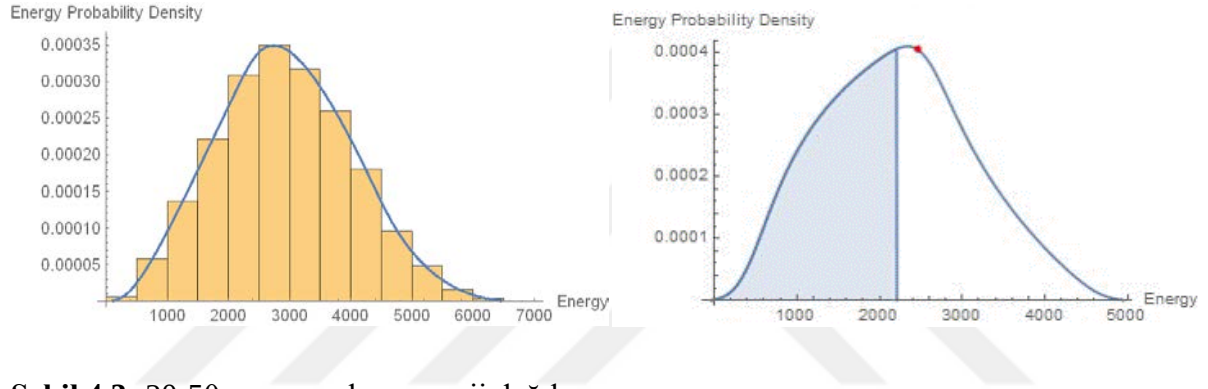
Bu tezde, matematiksek olarak ilginç olduğunu düşündüğümüz için boyut ve üstler de değişiklikler yapıldı. 1 ve 2 sayıları ile başladığımız enerji aralığını, aşağıdaki şekillerde olduğu gibi bir çok aralıkta (örneğin:1-50, 300-400 vb.) değiştirdiğimizde Mathematica programında elde ettiğimiz klasik dağılımlarla ulaştık. Özellikle aşağıdaki şekillerde görüleceği üzere göz kararıyla bakıldığında Şekil 4.2, Şekil 4.4, Şekil 4.6 ve Şekil 4.7 de Maxwell Dağılıma benzemektedir. Daha sonrasında ise nasıl bir manzara ile karşılaşacağımız tezimizin dışında bir konudur.



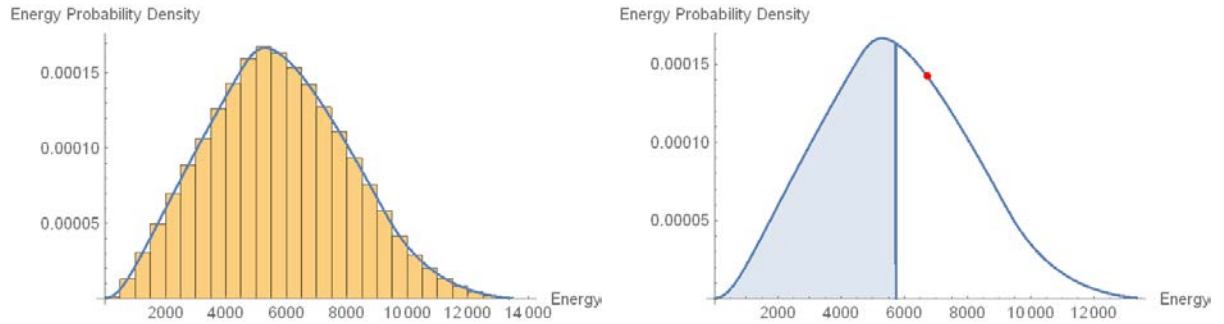
Şekil 4.1: 1-50 arası sayıların enerji dağılımı.



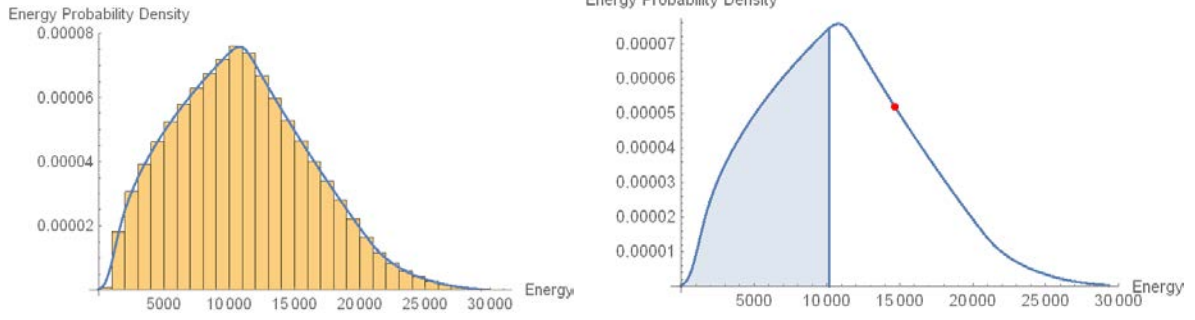
Şekil 4.2: 20 ile 40 arası sayıların enerji dağılımları.



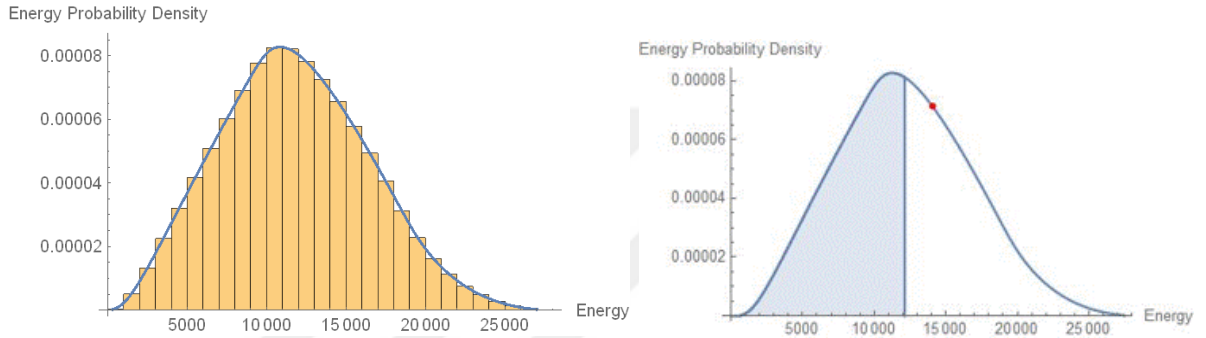
Şekil 4.3: 20-50 arası sayıların enerji dağılımı.



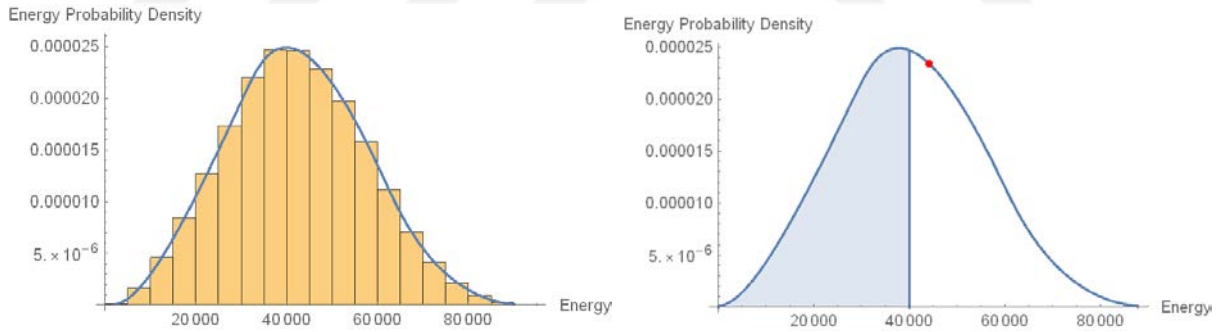
Şekil 4.4: 20-70 arası sayıların enerji dağılımı.



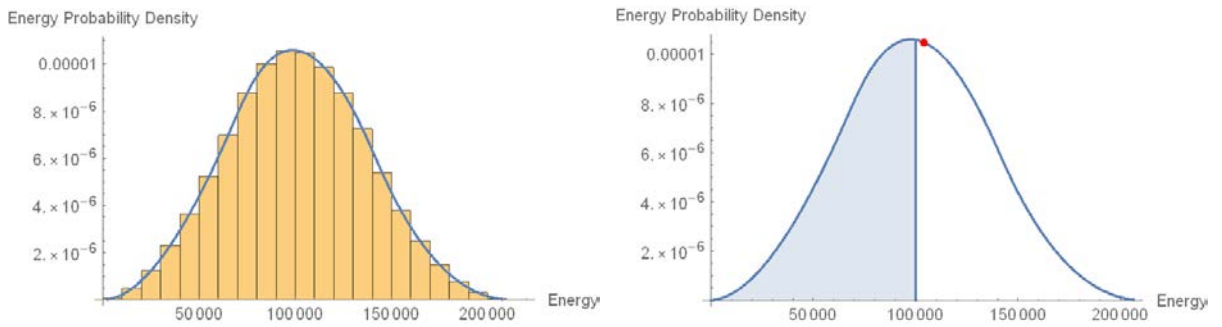
Şekil 4.5: 1-100 arası sayıların enerji dağılımı.



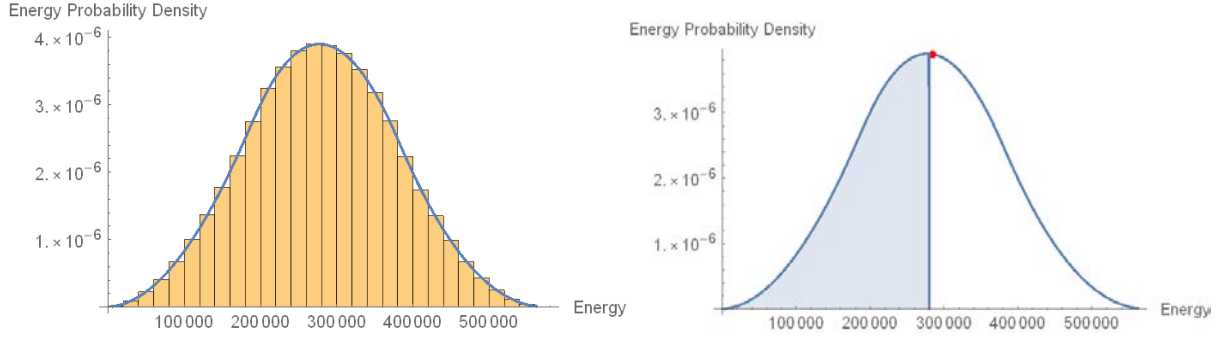
Şekil 4.6: 30 ile 100 arası sayıların enerji dağılımları.



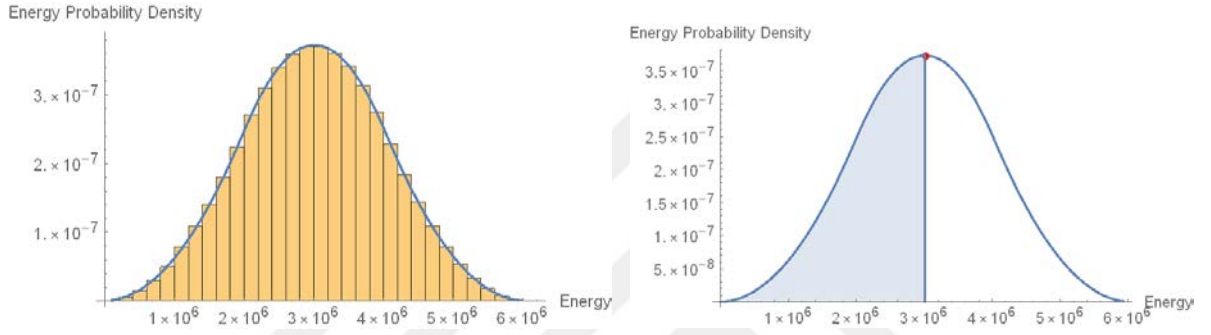
Şekil 4.7: 100 ile 200 arası sayıların enerji dağılımı.



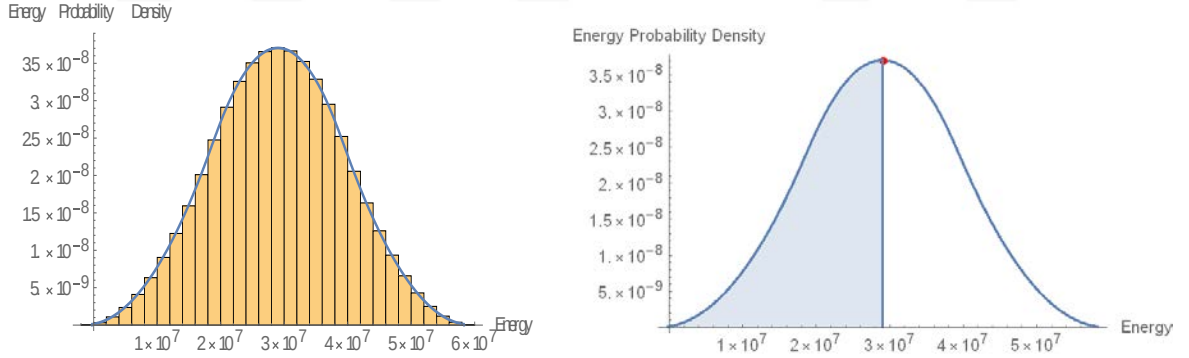
Şekil 4.8: 300 ile 400 arası sayıların enerji dağılımı.



Şekil 4.9: 900 ile 1000 sayılarının enerji dağılımı.



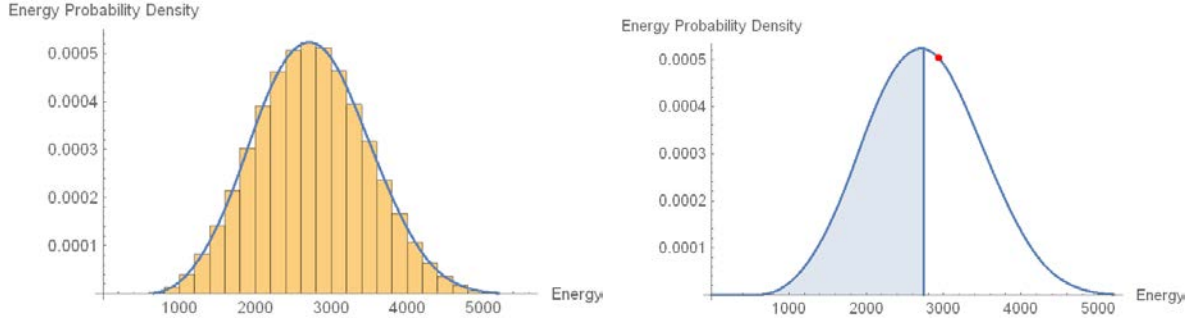
Şekil 4.10: 9900 ile 10000 sayılarının enerji dağılımı.



Şekil 4.11: 99900 ile 100000 sayılarının enerji dağılımı.

4.1.2 4 Boyutlu Çizimlerin Gösterilmesi

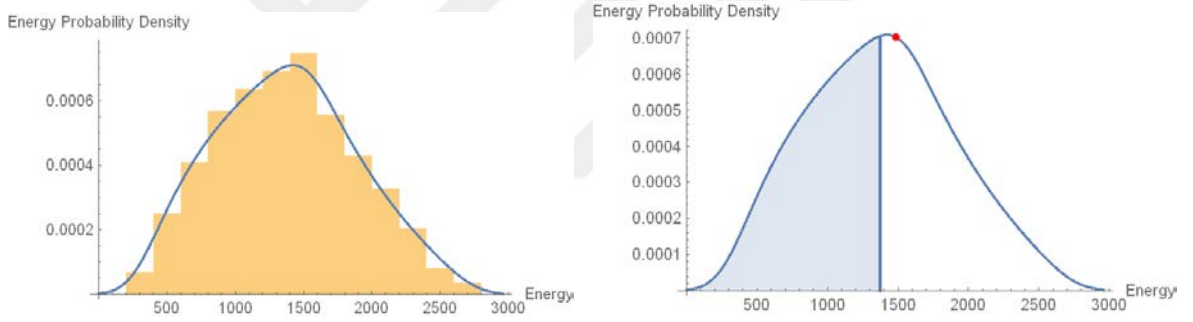
Matematiksel olarak ilginç olduğunu düşündüğümüz için 3 boyutlu yaptığımız çalışmayı, 4 boyutlu olarakta yapmayı denedik. Program da sadece boyut kısmına '3' yerine '4' yazarak aşağıdaki gibi Şekil 4.1 de olduğu gibi aynı grafik ile karşılaştık.



Şekil 4.12: 4 boyutta 20 ile 40 arası sayıların enerji dağılımları.

4.1.3 2 Boyutlu Çizimlerin Gösterilmesi

Matematiksel olarak ilginç olduğunu düşündüğümüz için 3 boyutlu yaptığımız çalışmayı, 2 boyutlu olarak yapmayı denedik. Program da sadece boyut kısmına '3' yerine '2' yazarak aşağıdaki gibi Şekil 4.1 ve Şekil 4.9' da olduğu gibi aynı grafik ile karşılaştık.



Şekil 4.13: 2 boyutta 20 ile 40 arası sayıların enerji dağılımı.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde, sabit enerji aralıklarını belirlediğimiz, üç boyutlu olarak hapsedilen parçacığın, kuvantum seviyelerinin ‘Schrödinger Denklemi’ni’ göz önüne aldık.

Bulduğumuz sonuç bir çok açıdan ilginçtir:

- i) Herşeyden önce, çıkan grafikler, klasik bir Maxwell dağılımını andırıyor.
- ii) Aynı zamanda, Bose-Einstein, Fermi-Dirac gibi istatistiksel dağılımlara ışık tutmaktadır. Sonraki durumda, kimi üçerli kuvantum sayılarının karelerinin toplamaları, aynı olabileceği saptanmış, diğer bir deyişle birçok parçacık farklı farklı kuvantum seviyelerde bulunsalar da, son toplamda aynı bir hareket enerjisine sahip olabileceklerdir.
- iii) Ele alınan kutuda, çok yüksek sayıda parçacığın yer alması halinde ortaya çıkacak enerji dağılımı, hesaplanmış ve gösterilmiştir.

Soyut matematiksel bir bakış açısıyla, birkaç boyut ve özellikle 4 boyutta, ayrıca kuvantum sayılarının kuvvetlerini 2' nin üzerinde ve 2' nin altında bir üst m ile birlikte, $m = 1/2$ ve benzerleri dahil olarak, benzer aralıklar içinde, birkaç simülasyon yaptık. Tezde paylaşılan tüm grafiklerde çizilenler Maxwell Dağılımı ya da benzeri dağılımları andırdığını bulguladık.

Bu tezde esasen ortaya koyduğumuz olgu budur.

KAYNAKLAR

- [1]. Griffiths, D., J., 2010, Kuantum Mekaniğine Giriş, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, ISBN: 978-605-395-361-6.
- [2]. Griffin, R., 2007, Açık Ders Fizikokimya 1 Sonbahar Dönemi, <http://www.acikders.org.tr/file.php/8/LectureNotes/B16.pdf> [Ziyaret Tarihi: 01 Ekim 2018].
- [3]. Yarman, T., Kholmetskii, A., L., 2011, How Do Quantum Numbers Generally vary in an adiabatic transformation of an ideal gas?, Chinese Physics B, 20, 10, Turkey.
- [4]. [https://phys.libretexts.org/TextBooks_and_TextMaps/College_Physics/Book%3A_College_Physics_\(OpenStax\)/30%3A_Atomic_Physics/30.9%3A_The_Pauli_Exclusion_Principle](https://phys.libretexts.org/TextBooks_and_TextMaps/College_Physics/Book%3A_College_Physics_(OpenStax)/30%3A_Atomic_Physics/30.9%3A_The_Pauli_Exclusion_Principle) [Ziyaret Tarihi: 05 Ekim 2018].
- [5]. Altunbulak, M, 2008, The Pauli Principle, Representation Theory, And Geometry of Flag Varieties, Doktora, Bilkent Üniversitesi.
- [6]. Beiser, A., 2008 Modern Fiziğin Kavramları, Akademi Yayıncılık, Ankara, ISBN: 978-975-6885-14-7.
- [7]. Yarman, T., 2010, Kholmetskii, A., L., KORFALI, O., The Classical Adiabatic Constancy of PV For an Ideal Gas, Can Be Shown To Be A Quantum Mechanical Occurrence, Which Yields The Particular Value of The Constant, In Question, Result in Physics, 10, 818-821, Turkey.
- [8]. Uslu, İ., Kinetik Teori ve Yayılma Hızı, http://www.academia.edu/2036627/Gazlar%C4%B1n_yay%C4%B1lmas%C4%B1_-_Dif%C3%BCzyon_ve_Ef%C3%BCzyon [Ziyaret Tarihi: 5 Ekim 2018].
- [9]. Karabetoğlu, S., 2010, Tek ve Çift Atomlu Gazların Kriyojenik Sıcaklıklarda Termodinamik Özelliklerinin Modellenmesi, Yüksek Lisans, İstanbul Teknik Üniversitesi.

- [10]. Beşergil, B., Enerji Dağılım Fonksiyonu (Energy Distribution Function), http://bilsenbesergil.blogspot.com/p/enerji-daglm-fonksiyonu-energy_30.html [Ziyaret Tarihi: 10 Ekim 2018].
- [11]. Yarman, T., Kholmetskii, A., L., Yarman, O., Arık, M., Yarman, F., 2018, Second Law of Thermodynamics is Ingrained Within Quantum Mechanics, Result in Physics, 10, 818-821, İstanbul.
- [12]. R. Vave, Georgia Eyalet Üniversitesi, <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Kinetic/kintem.html>, [Ziyaret Tarihi: 15 Ekim 2018].



EKLER

EK:A1 20 ile 40 sayısının 3 boyutlu olarak Wolfram Mathematica programında gösterimi

```
In[20]:= ClearAll["Global`*"]
```

```
In[21]:= set=Range[20,40]^2
```

```
Out[21]={400,441,484,529,576,625,676,729,784,841,900,961,1024,1089,1156,1225,1296,1369,1444,1521,1600}
```

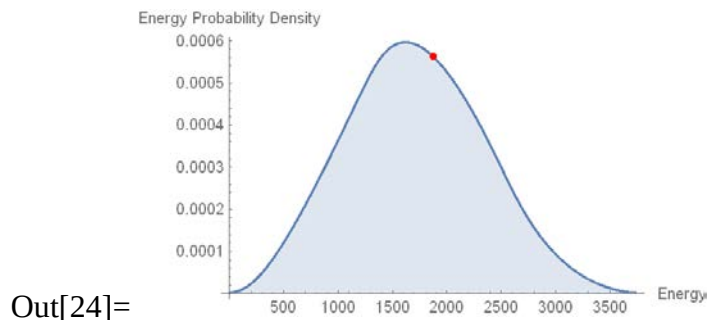
```
In[22]:= y=Mean[Total/@Tuples[set,3]]/N
```

```
Out[22]= 2810
```

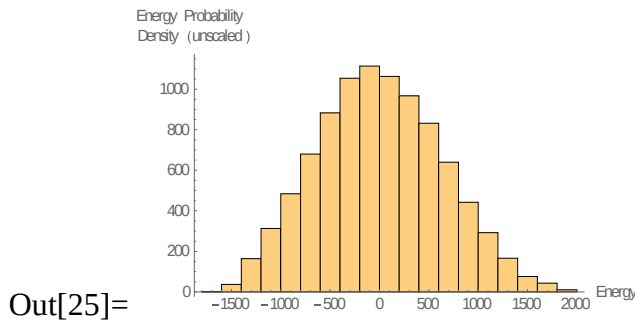
```
In[23]:= z=Median[Commonest[Total/@Tuples[set,3]]]
```

```
Out[23]= 2804
```

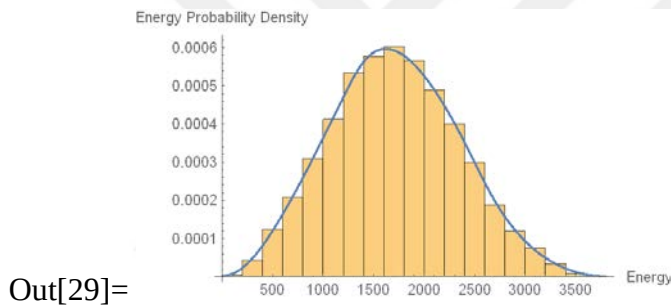
```
In[24]:= SmoothHistogram[Total/@Tuples[set,3] -1100, Automatic, "PDF", Axes->True,
AxesOrigin->{0,0}, PlotRange->{Full, All}, Filling->Axis, AxesLabel->{"Energy", "Energy
Probability Density"}, Mesh->{1,0}, MeshFunctions->{#1&,#2&}, MeshStyle->{Directive[PointSize[Medium],Red],Blue}]
```



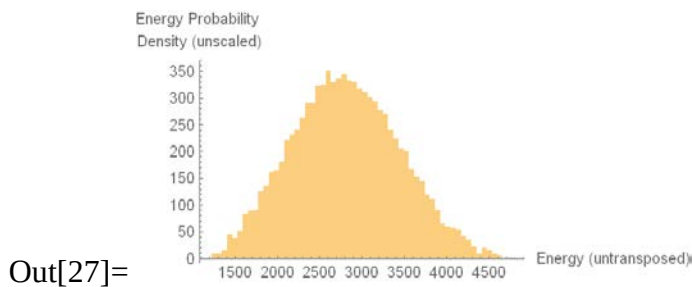
```
In[25]:= Histogram[Total/@Tuples[set,3]-y, Automatic, Axes->True, PlotRange->{Full, All},
AxesLabel->{"Energy", "Energy Probability \nDensity (unscaled)"}]
```



```
In[29]:= Show[Histogram[Total/@Tuples[set,3]-1100, Automatic,"PDF",Axes->True,
AxesOrigin->{0,0}, PlotRange->{Full, All}, AxesLabel->{"Energy","Energy Probability
Density"}],SmoothHistogram[Total/@Tuples[set,3]-1100,Automatic,"PDF",Axes->True,
AxesOrigin->{0,0}, PlotRange->{Full, All}, AxesLabel->{"Energy","Energy Probability
Density"}],PlotRange->All]
```

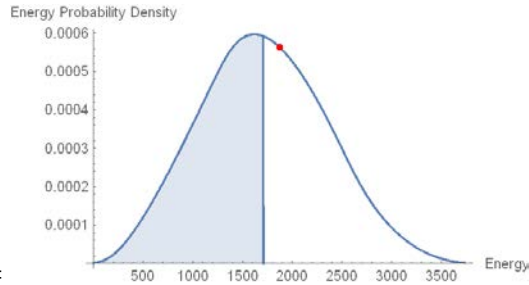


```
In[27]:= Histogram[Total/@Tuples[set,3],{Sqrt[y]}, Axes->True, PlotRange->{Full, All},
AxesLabel->{"Energy (untransposed)","Energy Probability \nDensity (unscaled)"}]
```



```
In[30]:= Show[SmoothHistogram[Total/@Tuples[set,3]-1100,Automatic,"PDF",Axes-
>True,AxesOrigin->{0,0},PlotRange->{Full,All},AxesLabel->{"Energy","Energy Probability
Density"},Mesh->{1,0},MeshFunctions->{#1&,#2&},MeshStyle-
>{Directive[PointSize[Medium],Red],Blue}],SmoothHistogram[Total/@Tuples[set,3]-
```

```
1100, Automatic, "PDF", Axes->True, AxesOrigin->{0,0}, PlotRange->{{0,y
1100}, All}, Filling->Axis, AxesLabel->{"Energy", "Energy Probability Density"}]]
```



Out[30]=

EK:A2 1 ve 50 sayısının 3 boyutlu olarak Wolfram Mathematica programında gösterimi

```
In[77]:= ClearAll["Global`*"]
```

```
In[78]:= set=Range[1,50]^2
```

```
Out[78]={1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,144,169,196,225,256,289,324,361,400,441,484,52
9,576,625,676,729,784,841,900,961,1024,1089,1156,1225,1296,1369,1444,1521,1600,1681,1
764,1849,1936,2025,2116,2209,2304,2401,2500}
```

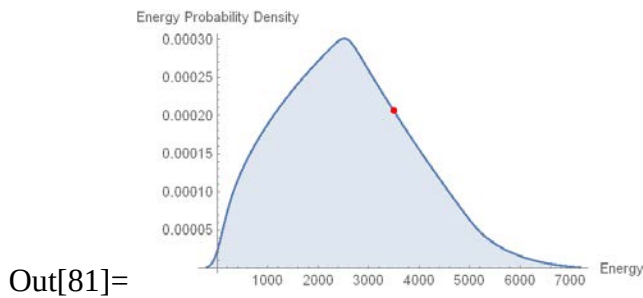
```
In[79]:= y=Mean[Total/@Tuples[set,3]]/N
```

Out[79]= 2575.5

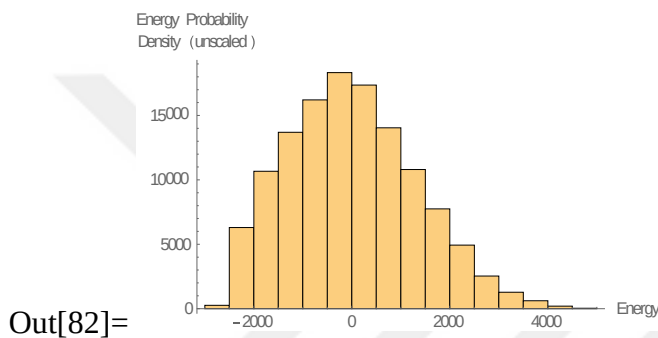
```
In[80]:= z=Median[Commonest[Total/@Tuples[set,3]]]
```

Out[80]= 2609

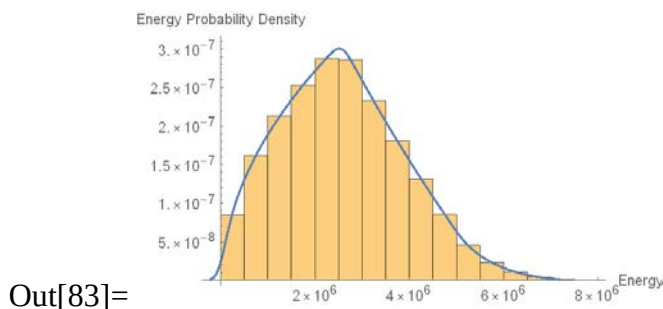
```
In[81]:= SmoothHistogram[Total/@Tuples[set,3], Automatic, "PDF", Axes->True, AxesOrigin-
>{0,0}, PlotRange->{Full, All}, Filling->Axis, AxesLabel->{"Energy", "Energy Probability
Density"}, Mesh->{1,0}, MeshFunctions->{#1&,#2&}, MeshStyle-
>{Directive[PointSize[Medium],Red],Blue}]
```



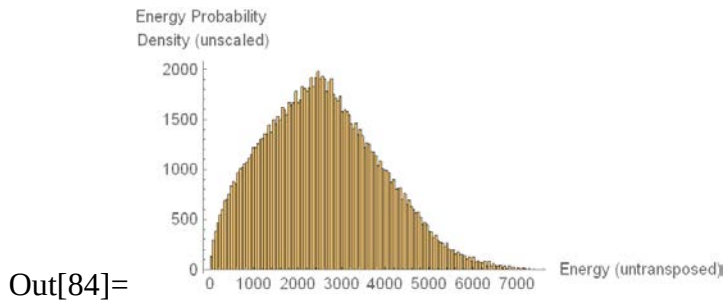
```
In[82]:= Histogram[Total/@Tuples[set,3]-y, Automatic, Axes->True, PlotRange->{Full, All},
AxesLabel->{"Energy","Energy Probability \nDensity (unscaled)"}]
```



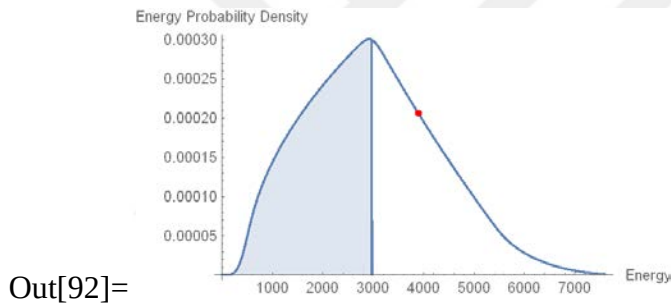
```
In[83]:= Show[Histogram[Total/@Tuples[set,3]1000, Automatic,"PDF",Axes->True,
AxesOrigin->{0,0}, PlotRange->{Full, All}, AxesLabel->{"Energy","Energy Probability
Density",FontSize-
>Large}],SmoothHistogram[Total/@Tuples[set,3]1000,Automatic,"PDF",Axes->True,
AxesOrigin->{0,0}, PlotRange->{Full, All}, AxesLabel->{"Energy","Energy Probability
Density",FontSize->Large}],PlotRange->All]
```



```
In[84]:= Histogram[Total/@Tuples[set,3],{Sqrt[y]}, Axes->True, PlotRange->{Full, All},
AxesLabel->{"Energy (untransposed)","Energy Probability \nDensity (unscaled)"}]
```



```
In[92]:= Show[SmoothHistogram[Total/@Tuples[set,3]+400, Automatic, "PDF", Axes-
>True, AxesOrigin->{0,0}, PlotRange->{Full, All}, AxesLabel->{"Energy", "Energy Probability
Density", FontSize->Large}, Mesh->{1,0}, MeshFunctions->{#1&,#2&}, MeshStyle-
>{Directive[PointSize[Medium], Red], Blue}], SmoothHistogram[Total/@Tuples[set,3]+400, A
utomatic, "PDF", Axes->True, AxesOrigin->{0,0}, PlotRange->{{0,y+400}, All}, Filling-
>Axis, AxesLabel->{"Energy", "Energy Probability Density", FontSize->Large}]]
```



EK:A3 100 200 sayısının 3 boyutlu olarak Wolfram Mathematica programında gösterimi

```
ClearAll["Global`*"]
```

```
set=Range[100,200]^2
```

```
{10000,10201,10404,10609,10816,11025,11236,11449,11664,11881,12100,12321,12544,127
69,12996,13225,13456,13689,13924,14161,14400,14641,14884,15129,15376,15625,15876,1
6129,16384,16641,16900,17161,17424,17689,17956,18225,18496,18769,19044,19321,19600
,19881,20164,20449,20736,21025,21316,21609,21904,22201,22500,22801,23104,23409,237
16,24025,24336,24649,24964,25281,25600,25921,26244,26569,26896,27225,27556,27889,2
8224,28561,28900,29241,29584,29929,30276,30625,30976,31329,31684,32041,32400,32761
,33124,33489,33856,34225,34596,34969,35344,35721,36100,36481,36864,37249,37636,380
25,38416,38809,39204,39601,40000}
```

```
y=Mean[Total/@Tuples[set,3]]/N
```

```
70050.
```

```
z=Median[Commonest[Total/@Tuples[set,3]]]
```

```
71861
```

```
SmoothHistogram[Total/@Tuples[set,3],Automatic,"PDF",Axes->True, AxesOrigin->{0,0},PlotRange->{Full, All}, Filling->Axis,AxesLabel->{"Energy","Energy Probability Density"},Mesh->{1,0},MeshFunctions->{#1&,#2&},MeshStyle->{Directive[PointSize[Medium],Red],Blue}]
```

```
Histogram[Total/@Tuples[set,3]-y, Automatic, Axes->True, PlotRange->{Full, All}, AxesLabel->{"Energy","Energy Probability \nDensity (unscaled)"}]
```

```
Show[Histogram[Total/@Tuples[set,3]1000, Automatic,"PDF",Axes->True, AxesOrigin->{0,0}, PlotRange->{Full, All}, AxesLabel->{"Energy","Energy Probability Density"},FontSize->Large]],SmoothHistogram[Total/@Tuples[set,3]1000,Automatic,"PDF",Axes->True, AxesOrigin->{0,0}, PlotRange->{Full, All}, AxesLabel->{"Energy","Energy Probability Density"},FontSize->Large]],PlotRange->All]
```

```
Histogram[Total/@Tuples[set,3],{Sqrt[y]}, Axes->True, PlotRange->{Full, All}, AxesLabel->{"Energy (untransposed)","Energy Probability \nDensity (unscaled)"}]
```

```
Show[SmoothHistogram[Total/@Tuples[set,3]-30000,Automatic,"PDF",Axes->True,AxesOrigin->{0,0},PlotRange->{Full,All},AxesLabel->{"Energy","Energy Probability Density"},FontSize->Large],Mesh->{1,0},MeshFunctions->{#1&,#2&},MeshStyle-
```

```
>{Directive[PointSize[Medium],Red],Blue}},SmoothHistogram[Total/@Tuples[set,3]-
30000,Automatic,"PDF",Axes->True,AxesOrigin->{0,0},PlotRange->{{0,y-
30000},All},Filling->Axis,AxesLabel->{"Energy","Energy Probability Density",FontSize-
>Large}]]
```

EK:B1 20 ve 40 sayılarının 3 boyutta küçükten büyüğe sıralanışları ve görünüm sıklığı

```
In[10]:= ClearAll["Global`*"]
```

```
set=Range[20,40]^2
```

```
Sort[Total[Table[Tuples[set,3]],{2}]]
```

```
Out[11]={400,441,484,529,576,625,676,729,784,841,900,961,1024,1089,1156,1225,1296,13
69,1444,1521,1600}
```

```
Out[12]={1200,1241,1241,1241,1282,1282,1282,1284,1284,1284,1323,1325,1325,1325,1325
,1325,1325,1329,1329,1329,1366,1366,1366,1368,1368,1368,1370,1370,1370,1370,137
0,1376,1376,1376,1409,1409,1409,1411,1411,1411,1413,1413,1413,1413,1413,1413,1417,14
17,1417,1417,1417,1417,1425,1425,1425,1452,1454,1454,1454,1454,1454,1454,1458,1458,
...9131...,4346,4346,4346,4346,4346,4346,4356,4356,4356,4409,4409,4409,4411,4411,4411,
4413,4413,4413,4413,4413,4413,4417,4417,4417,4417,4417,4417,4425,4425,4425,4486,448
6,4486,4488,4488,4488,4490,4490,4490,4490,4490,4490,4496,4496,4496,4563,4565,4565,45
65,4565,4565,4565,4569,4569,4569,4642,4642,4642,4644,4644,4644,4721,4721,4721,4800}
```

```
In[14]:= Counts[Sort[Total[Table[Tuples[set,3]],{2}]]]
```

```
Out[14]= <|1200->1,1241->3,1282->3,1284->3,1323->1,1325->6,1329->3,1366->3,1368-
>3,1370->6,1376->3,1409->3,1411->3,1413->6,1417->6,1425->3,1452->1,1454->6,1458-
>6,1460->6,1466->6,1476->3,1497->3,1499->3,1501->6,1505->6,1507->3,1509->6,1517-
>6,1529->3,1542->3,1544->3,1546->6,1550->6,1552->3,1554->6,1558->3,1560->6,1570-
>6,1584->3,1587->1,1589->6,1593->6,1595->6,1601->12,1605->6,1611->3,1613->6,1625-
>6,1634->3,1636->3,1638->6,1641->3,1642->6,1644->3,1646->6,1650->3,1652->6,1654-
>6,1658->6,1666->3,1668->6,1681->3,1682->6,1683->3,1685->6,1689->6,1691->3,1693-
>6,1697->3,1699->6,1700->3,1701->6,1705->6,1709->6,1713->6,1723->3,1725->6,1728-
```

>1,1730->6,1734->6,1736->6,1741->6,1742->12,1746->6,1752->6,1754->12,1760->6,1761-
 >3,1766->6,1770->6,1777->3,1779->3,1781->6,1782->3,1784->6,1785->6,1787->3,1789-
 >6,1793->3,1795->6,1797->6,1801->6,1802->6,1805->6,1809->9,1811->6,1817->6,1824-
 >3,1825->6,1826->3,1828->3,1829->6,1830->6,1834->6,1836->3,1838->6,1842->3,1843-
 >3,1844->6,1845->6,1846->6,1850->6,1854->6,1858->9,1860->6,1865->6,1866->6,1868-
 >3,1870->6,1875->1,1876->6,1877->6,1881->6,1883->6,1886->6,1889->15,1890->6,1893-
 >6,1899->6,1901->12,1906->3,1907->6,1908->6,1913->12,1917->12,1925->6,1926-
 >3,1928->3,1929->3,1930->12,1931->6,1934->6,1936->3,1937->6,1938->6,1942->3,1944-
 >6,1946->6,1949->6,1950->6,1953->6,1954->6,1956->3,1958->9,1960->6,1966->6,1968-
 >3,1970->6,1971->3,1973->6,1974->6,1976->6,1977->3,1978->6,1979->3,1981->6,1985-
 >6,1986->6,1987->3,1989->6,1992->3,1993->3,1994->6,1995->6,1997->12,2000->6,2001-
 >6,2005->6,2009->9,2011->6,2014->6,2017->6,2018->6,2019->3,2021->6,2025->9,2027-
 >6,2028->1,2029->6,2030->6,2034->6,2036->6,2037->12,2038->3,2040->6,2041->6,2042-
 >12,2046->6,2049->6,2052->6,2054->12,2057->3,2059->6,2060->6,2065->6,2066-
 >18,2070->12,2078->6,2081->9,2082->6,2083->3,2084->12,2085->12,2089->6,2090-
 >12,2091->3,2093->6,2096->3,2097->3,2099->6,2100->6,2101->6,2102->6,2105->6,2106-
 >6,2107->3,2109->12,2113->9,2114->6,2115->6,2121->6,2123->3,2124->3,2125->6,2126-
 >6,2129->6,2131->6,2132->6,2133->6,2134->3,2136->3,2137->6,2138->6,2141->12,2142-
 >6,2144->3,2145->6,2146->6,2147->3,2149->6,2150->9,2152->6,2153->6,2154->12,2155-
 >6,2158->6,2162->6,2165->6,2166->9,2168->6,2169->9,2173->6,2174->6,2176->3,2178-
 >9,2180->6,2181->6,2182->6,2184->6,2186->6,2187->1,2189->6,2193->9,2194->12,2195-
 >12,2198->6,2200->3,2201->18,2202->6,2205->6,2206->6,2208->6,2210->6,2211->6,2213-
 >12,2214->3,2216->6,2218->6,2219->6,2221->6,2222->6,2225->18,2229->12,2232-
 >6,2237->6,2238->6,2241->6,2242->9,2243->12,2244->6,2246->6,2249->12,2250-
 >12,2251->3,2252->3,2253->6,2254->6,2258->3,2259->6,2260->6,2261->12,2262->6,2264-
 >3,2265->12,2266->12,2270->6,2272->6,2273->12,2274->9,2276->6,2282->6,2283-
 >3,2284->3,2285->18,2286->6,2290->6,2291->6,2292->6,2294->12,2297->3,2298->6,2299-
 >3,2301->12,2302->12,2305->6,2306->6,2307->3,2308->3,2309->12,2310->6,2313-
 >9,2314->6,2315->6,2316->6,2317->6,2321->15,2322->3,2324->6,2325->6,2326->9,2328-
 >6,2329->9,2330->12,2331->6,2334->6,2337->9,2339->9,2340->6,2341->6,2342->6,2345-
 >12,2347->6,2349->6,2352->1,2354->15,2356->6,2357->12,2358->6,2360->6,2361-
 >6,2362->12,2363->3,2365->6,2366->12,2369->12,2370->6,2371->6,2372->6,2373-

>6,2376->6,2377->3,2378->12,2379->6,2381->6,2382->6,2384->6,2385->12,2386->6,2389-
 >6,2390->12,2394->18,2395->6,2397->6,2400->3,2401->6,2402->6,2403->3,2405-
 >12,2406->6,2408->12,2409->9,2411->3,2412->3,2413->12,2414->18,2417->6,2419-
 >3,2420->6,2421->6,2424->6,2425->9,2426->12,2427->9,2429->12,2430->12,2433-
 >6,2435->6,2437->6,2438->12,2441->15,2443->6,2445->6,2446->6,2448->6,2449->6,2450-
 >24,2451->3,2453->6,2456->12,2457->12,2459->6,2461->12,2466->15,2468->3,2469-
 >18,2470->6,2473->6,2474->12,2475->3,2476->3,2477->6,2478->12,2480->6,2481-
 >6,2482->6,2483->6,2484->12,2486->12,2489->6,2490->6,2491->12,2493->6,2494-
 >6,2497->18,2498->15,2500->6,2501->6,2502->3,2504->6,2506->6,2507->6,2508->3,2509-
 >6,2510->12,2513->6,2514->6,2516->6,2517->6,2518->6,2520->6,2521->9,2523->7,2525-
 >18,2526->12,2529->18,2530->6,2531->6,2532->3,2534->12,2537->18,2538->12,2539-
 >6,2540->6,2541->6,2546->9,2547->6,2548->6,2549->18,2550->6,2553->12,2554-
 >12,2555->6,2558->6,2561->18,2564->6,2565->12,2566->6,2568->3,2570->12,2573-
 >12,2574->6,2576->6,2577->6,2578->9,2579->15,2580->6,2581->6,2582->9,2584->3,2585-
 >12,2586->12,2587->6,2590->6,2592->3,2594->12,2595->6,2596->9,2597->18,2598-
 >9,2600->6,2601->12,2602->6,2604->6,2606->6,2609->12,2610->12,2613->6,2614-
 >15,2616->6,2617->6,2619->6,2621->18,2622->6,2624->3,2625->6,2626->12,2627-
 >12,2628->6,2630->12,2632->6,2634->6,2637->12,2638->6,2641->3,2642->12,2643-
 >3,2645->18,2646->6,2648->3,2649->18,2650->12,2651->9,2653->6,2654->6,2656-
 >6,2657->15,2658->3,2659->6,2660->6,2661->6,2662->3,2664->6,2665->6,2666->12,2669-
 >18,2670->12,2673->12,2674->6,2675->12,2676->6,2680->6,2681->12,2682->6,2683-
 >3,2685->12,2686->6,2689->6,2690->6,2691->12,2693->6,2694->9,2696->6,2698->6,2700-
 >1,2701->12,2702->12,2705->18,2706->6,2707->3,2708->6,2709->12,2710->6,2712-
 >9,2713->6,2714->18,2715->6,2717->6,2718->6,2720->6,2721->3,2722->6,2723->6,2724-
 >6,2725->6,2726->24,2729->18,2730->6,2732->6,2733->6,2734->6,2738->12,2739-
 >6,2741->6,2742->12,2744->6,2745->6,2746->6,2749->6,2750->6,2752->3,2753->9,2754-
 >12,2755->6,2756->12,2757->6,2760->6,2761->9,2762->18,2763->3,2765->6,2769-
 >12,2770->6,2771->12,2772->6,2773->12,2774->12,2777->3,2778->12,2779->12,2781-
 >12,2784->6,2785->18,2786->12,2789->12,2793->15,2795->6,2796->6,2798->18,2801-
 >12,2803->9,2804->12,2805->18,2809->6,2811->6,2813->12,2814->12,2821->18,2822-
 >15,2824->3,2825->12,2826->18,2827->3,2828->6,2829->6,2830->6,2832->3,2833-
 >6,2834->18,2835->6,2838->3,2840->6,2841->9,2842->6,2843->6,2845->6,2846->18,2849-

>12,2850->12,2852->12,2853->6,2854->9,2856->6,2858->12,2859->6,2861->6,2862-
 >12,2864->3,2865->6,2866->6,2868->12,2869->6,2870->6,2872->6,2873->9,2874->6,2875-
 >6,2877->6,2881->6,2882->24,2883->1,2885->6,2886->6,2888->3,2889->12,2890->6,2891-
 >15,2893->6,2894->6,2896->6,2897->12,2899->6,2900->6,2901->12,2902->3,2904-
 >6,2905->12,2906->6,2907->6,2909->18,2910->12,2913->6,2914->6,2915->6,2920-
 >6,2921->18,2922->6,2923->6,2925->24,2926->6,2930->6,2933->12,2934->9,2936-
 >6,2937->6,2938->6,2939->12,2941->6,2942->6,2945->18,2946->3,2948->3,2950-
 >12,2952->9,2954->12,2955->6,2956->3,2957->12,2958->6,2960->6,2961->18,2962-
 >9,2964->6,2966->18,2969->12,2970->12,2974->12,2978->9,2979->6,2980->6,2981-
 >18,2984->6,2986->12,2987->12,2988->3,2990->6,2992->3,2994->12,2996->6,2997-
 >12,2998->6,3000->6,3002->6,3005->12,3006->12,3009->15,3010->12,3011->9,3012-
 >3,3013->6,3014->6,3017->18,3018->6,3019->3,3020->6,3021->6,3024->6,3025->3,3026-
 >3,3027->6,3028->6,3029->18,3030->6,3033->9,3034->12,3035->6,3037->6,3038->6,3041-
 >15,3043->6,3044->6,3045->6,3046->6,3049->6,3050->6,3051->9,3053->6,3054->6,3057-
 >6,3058->9,3059->6,3060->6,3061->6,3062->6,3065->12,3066->6,3069->18,3072->1,3073-
 >6,3074->12,3075->3,3076->9,3077->12,3078->12,3080->6,3081->6,3083->6,3084-
 >6,3086->12,3089->9,3090->12,3091->6,3093->6,3094->6,3096->6,3097->12,3098-
 >12,3101->6,3104->6,3106->6,3107->6,3108->6,3109->6,3110->18,3113->6,3114-
 >12,3117->6,3118->6,3121->9,3122->6,3123->6,3125->6,3126->6,3128->12,3129->6,3130-
 >6,3134->12,3137->9,3138->3,3139->9,3140->6,3141->6,3144->6,3145->6,3146->18,3147-
 >3,3149->12,3150->12,3153->15,3155->6,3156->6,3157->6,3158->12,3161->12,3165-
 >6,3168->6,3169->9,3170->18,3171->6,3173->6,3176->12,3177->6,3179->6,3181-
 >12,3185->6,3186->12,3187->12,3189->6,3194->6,3197->18,3198->6,3200->6,3201-
 >6,3202->3,3203->3,3204->3,3205->6,3206->12,3209->6,3210->6,3211->6,3212->3,3213-
 >6,3214->6,3217->9,3218->9,3219->6,3220->6,3221->6,3222->9,3224->6,3225->18,3226-
 >6,3229->6,3230->12,3234->9,3235->6,3236->6,3237->6,3240->6,3241->6,3242->6,3244-
 >3,3245->6,3246->6,3249->6,3250->6,3252->6,3253->6,3254->12,3258->6,3262->12,3265-
 >6,3266->12,3267->4,3268->3,3269->12,3270->6,3273->6,3274->6,3275->12,3276-
 >6,3281->12,3282->3,3284->6,3285->12,3286->6,3288->3,3290->18,3291->6,3293-
 >12,3294->6,3296->6,3297->6,3299->6,3300->6,3301->6,3302->6,3305->12,3309-
 >18,3314->9,3316->6,3317->6,3321->6,3322->6,3323->12,3329->15,3331->6,3332-
 >6,3334->3,3336->3,3337->6,3338->6,3339->6,3341->12,3342->12,3344->3,3345-

>12,3346->12,3350->3,3352->6,3353->12,3354->12,3358->6,3362->6,3363->3,3365-
 >18,3366->9,3368->6,3369->6,3371->6,3372->3,3374->12,3376->3,3378->6,3380->6,3381-
 >6,3382->6,3384->6,3386->6,3389->6,3393->6,3394->12,3398->6,3400->3,3401->9,3402-
 >6,3403->3,3405->6,3406->12,3408->6,3409->6,3410->6,3411->3,3413->6,3414->3,3416-
 >6,3417->6,3418->6,3419->12,3421->6,3422->6,3425->12,3429->6,3432->6,3433->9,3435-
 >6,3438->6,3441->6,3442->9,3443->3,3444->6,3445->6,3449->12,3450->6,3451->6,3453-
 >12,3461->12,3464->3,3465->6,3466->6,3467->3,3468->1,3469->6,3470->6,3472->6,3473-
 >6,3474->6,3475->6,3476->6,3482->12,3483->3,3485->12,3486->6,3489->6,3492->6,3493-
 >6,3494->18,3498->6,3500->6,3501->6,3506->12,3510->12,3513->3,3515->6,3518-
 >6,3521->12,3522->6,3524->12,3526->3,3528->6,3530->12,3537->3,3539->3,3540-
 >6,3541->12,3542->6,3545->12,3546->6,3547->3,3549->6,3553->3,3554->6,3555->6,3557-
 >6,3561->6,3562->6,3564->3,3565->6,3566->6,3569->9,3571->9,3572->6,3573->6,3577-
 >6,3579->3,3581->6,3585->6,3587->6,3589->6,3590->6,3594->6,3597->12,3600->3,3601-
 >6,3605->6,3606->3,3608->3,3609->6,3610->6,3614->6,3616->3,3617->3,3618->9,3619-
 >6,3620->6,3622->3,3624->6,3625->6,3626->6,3630->6,3634->6,3638->9,3640->6,3641-
 >9,3645->6,3646->6,3648->3,3650->12,3654->6,3656->6,3658->6,3666->6,3667->3,3669-
 >6,3672->3,3674->6,3675->1,3677->6,3680->6,3681->6,3683->6,3684->3,3689->12,3693-
 >6,3694->6,3697->6,3698->6,3699->6,3701->12,3707->6,3713->12,3717->12,3718-
 >3,3720->6,3725->6,3729->6,3731->6,3737->6,3746->9,3748->3,3749->6,3750->6,3753-
 >6,3754->6,3756->3,3758->6,3762->3,3764->6,3766->6,3770->6,3771->3,3773->6,3774-
 >6,3776->3,3778->9,3780->6,3786->6,3788->3,3790->6,3796->6,3797->6,3806->6,3810-
 >6,3817->3,3819->3,3821->6,3825->9,3826->3,3827->3,3828->6,3829->6,3833->3,3835-
 >6,3837->6,3841->6,3845->6,3849->9,3850->6,3851->6,3857->6,3865->6,3869->6,3876-
 >3,3883->3,3885->6,3888->1,3890->6,3894->6,3896->6,3902->12,3905->6,3906->6,3912-
 >6,3914->12,3920->6,3926->6,3929->3,3930->6,3942->3,3944->6,3961->3,3962->6,3963-
 >3,3965->6,3969->6,3971->3,3973->6,3977->3,3979->6,3981->6,3984->3,3985->6,3989-
 >6,3993->6,4003->3,4005->6,4021->6,4034->3,4036->3,4038->6,4041->3,4042->6,4044-
 >3,4046->6,4050->3,4052->6,4054->6,4058->6,4066->3,4068->6,4082->6,4100->3,4107-
 >1,4109->6,4113->6,4115->6,4121->12,4125->6,4131->3,4133->6,4145->6,4161->3,4182-
 >3,4184->3,4186->6,4190->6,4192->3,4194->6,4198->3,4200->6,4210->6,4224->3,4257-
 >3,4259->3,4261->6,4265->6,4267->3,4269->6,4277->6,4289->3,4332->1,4334->6,4338-

>6,4340->6,4346->6,4356->3,4409->3,4411->3,4413->6,4417->6,4425->3,4486->3,4488->3,4490->6,4496->3,4563->1,4565->6,4569->3,4642->3,4644->3,4721->3,4800->1|>

EK:B2 20 ve 40 sayılarının 2 boyutta ve $m=1/2$ için küçükten büyüğe sıralanışları ve görünüm sıklığı

```
In[25]:= ClearAll["Global`*"]
```

```
set=Range[20,40]^1/2
```

```
Sort[Total[Table[Tuples[set,4]],{2}]]
```

Out[26]={10,21/2,11,23/2,12,25/2,13,27/2,14,29/2,15,31/2,16,33/2,17,35/2,18,37/2,19,39/2,20}

```
Out[27]={40,81/2,81/2,81/2,81/2,41,41,41,41,41,41,41,41,83/2,83/2,83/2,83/2,83/2,83/  
2,83/2,83/2,83/2,83/2,83/2,83/2,83/2,83/2,83/2,83/2,83/2,83/2,42,42,42,42,42,42,42,  
42,42,42,42,42,42,42,42,42,42,42,42,42,42,42,42,42,42,42,42,42,42,85/2,8  
5/2,85/2,85/2,85/2,85/2,85/2,85/2,85/2,85/2,85/2,85/2,85/2,85/2,85/2,85/2,85/2,    ...194307...  
,155/2,155/2,155/2,155/2,155/2,155/2,155/2,155/2,155/2,155/2,155/2,155/2,155/2,155/2,155/  
2,155/2,155/2,78,78,78,78,78,78,78,78,78,78,78,78,78,78,78,78,78,78,78,78,78,78,78,78,78,78,7  
8,78,78,78,78,78,78,78,78,157/2,157/2,157/2,157/2,157/2,157/2,157/2,157/2,157/2,157/2,1  
57/2,157/2,157/2,157/2,157/2,157/2,157/2,157/2,157/2,157/2,79,79,79,79,79,79,79,79,79,79,1  
59/2,159/2,159/2,159/2,80}
```

```
In[28]:= Intersection[Total[Table[Tuples[set,4]],{2}]]
```

$$\text{Out}[28]=\{40,81/2,41,83/2,42,85/2,43,87/2,44,89/2,45,91/2,46,93/2,47,95/2,48,97/2,49,99/2,50,101/2,51,103/2,52,105/2,53,107/2,54,109/2,55,111/2,56,113/2,57,115/2,58,117/2,59,119/2,60,121/2,61,123/2,62,125/2,63,127/2,64,129/2,65,131/2,66,133/2,67,135/2,68,137/2,69,139/2,70,141/2,71,143/2,72,145/2,73,147/2,74,149/2,75,151/2,76,153/2,77,155/2,78,157/2,79,159/2,80\}$$

```
In[29]:= Counts[Sort[Total[Table[Tuples[set,4]],{2}]]]
```

Out[29]= <|40->1,81/2->4,41->10,83/2->20,42->35,85/2->56,43->84,87/2->120,44->165,89/2->220,45->286,91/2->364,46->455,93/2->560,47->680,95/2->816,48->969,97/2-

>1140,49->1330,99/2->1540,50->1771,101/2->2020,51->2284,103/2->2560,52->2845,105/2->
 >3136,53->3430,107/2->3724,54->4015,109/2->4300,55->4576,111/2->4840,56->
 >5089,113/2->5320,57->5530,115/2->5716,58->5875,117/2->6004,59->6100,119/2->
 >6160,60->6181,121/2->6160,61->6100,123/2->6004,62->5875,125/2->5716,63->
 >5530,127/2->5320,64->5089,129/2->4840,65->4576,131/2->4300,66->4015,133/2->
 >3724,67->3430,135/2->3136,68->2845,137/2->2560,69->2284,139/2->2020,70->
 >1771,141/2->1540,71->1330,143/2->1140,72->969,145/2->816,73->680,147/2->560,74->
 >455,149/2->364,75->286,151/2->220,76->165,153/2->120,77->84,155/2->56,78->35,157/2->
 >20,79->10,159/2->4,80->1|>

EK:B3 90 ve 100 sayılarının 3 boyutta için küçükten büyüğe sıralanışları ve görünüm sıklığı

ClearAll["Global`*"]

set=Range[90,100]^2

Sort[Total[Table[Tuples[set,3]],{2}]]

{8100,8281,8464,8649,8836,9025,9216,9409,9604,9801,10000}

Intersection[Total[Table[Tuples[set,3]],{2}]]

{24300,24481,24662,24664,24843,24845,24849,25026,25028,25030,25036,25209,25211,25213,25217,25225,25392,25394,25398,25400,25406,25416,25577,25579,25581,25585,25587,25589,25597,25609,25762,25764,25766,25770,25772,25774,25778,25780,25790,25804,25947,25949,25953,25955,25961,25965,25971,25973,25985,26001,26134,26136,26138,26142,26144,26146,26150,26152,26154,26158,26166,26168,26182,26200,26321,26323,26325,26329,26331,26333,26337,26339,26341,26345,26349,26353,26363,26365,26381,26508,26510,26514,26516,26522,26526,26532,26534,26540,26546,26550,26562,26564,26697,26699,26701,26705,26707,26709,26713,26715,26717,26721,26725,26729,26731,26737,26745,26749,26886,26888,26890,26894,26896,26898,26902,26904,26906,26910,26914,26918,26920,26926,26928,26930,26936,27075,27077,27081,27083,27089,27093,27099,27101,27107,27113,27117,27125,27266,27268,27270,27274,27276,27278,27282,27284,27286,27290,27294,27298,27300,27306,27308,27310,27316,27457,27459,27461,27465,27467,27469,27473,27475,27477,27481}

,27485,27489,27491,27497,27505,27509,27648,27650,27654,27656,27662,27666,27672,27674,27680,27686,27690,27702,27704,27841,27843,27845,27849,27851,27853,27857,27859,27861,27865,27869,27873,27883,27885,27901,28034,28036,28038,28042,28044,28046,28050,28052,28054,28058,28066,28068,28082,28100,28227,28229,28233,28235,28241,28245,28251,28253,28265,28281,28422,28424,28426,28430,28432,28434,28438,28440,28450,28464,28617,28619,28621,28625,28627,28629,28637,28649,28812,28814,28818,28820,28826,28836,29009,29011,29013,29017,29025,29206,29208,29210,29216,29403,29405,29409,29602,29604,29801,30000}

Counts[Sort[Total[Table[Tuples[set,3]],{2}]]]

<|24300->1,24481->3,24662->3,24664->3,24843->1,24845->6,24849->3,25026->3,25028->3,25030->6,25036->3,25209->3,25211->3,25213->6,25217->6,25225->3,25392->1,25394->6,25398->6,25400->6,25406->6,25416->3,25577->3,25579->3,25581->6,25585->6,25587->3,25589->6,25597->6,25609->3,25762->3,25764->3,25766->6,25770->6,25772->3,25774->6,25778->3,25780->6,25790->6,25804->3,25947->1,25949->6,25953->6,25955->6,25961->12,25965->6,25971->3,25973->6,25985->6,26001->3,26134->3,26136->3,26138->6,26142->6,26144->3,26146->6,26150->3,26152->6,26154->6,26158->6,26166->3,26168->6,26182->6,26200->3,26321->3,26323->3,26325->6,26329->6,26331->3,26333->6,26337->3,26339->6,26341->6,26345->6,26349->6,26353->6,26363->3,26365->6,26381->6,26508->1,26510->6,26514->6,26516->6,26522->12,26526->6,26532->6,26534->12,26540->6,26546->6,26550->6,26562->3,26564->6,26697->3,26699->3,26701->6,26705->6,26707->3,26709->6,26713->3,26715->6,26717->6,26721->6,26725->6,26729->9,26731->6,26737->6,26745->6,26749->6,26886->3,26888->3,26890->6,26894->6,26896->3,26898->6,26902->3,26904->6,26906->6,26910->6,26914->6,26918->9,26920->6,26926->6,26928->3,26930->6,26936->6,27075->1,27077->6,27081->6,27083->6,27089->12,27093->6,27099->6,27101->12,27107->6,27113->12,27117->12,27125->6,27266->3,27268->3,27270->6,27274->6,27276->3,27278->6,27282->3,27284->6,27286->6,27290->6,27294->6,27298->9,27300->6,27306->6,27308->3,27310->6,27316->6,27457->3,27459->3,27461->6,27465->6,27467->3,27469->6,27473->3,27475->6,27477->6,27481->6,27485->6,27489->9,27491->6,27497->6,27505->6,27509->6,27648->1,27650->6,27654->6,27656->6,27662->12,27666->6,27672->6,27674->12,27680->6,27686->6,27690->6,27702->3,27704->6,27841->3,27843->3,27845->6,27849->6,27851->3,27853->6,27857->3,27859->6,27861-

```
>6,27865->6,27869->6,27873->6,27883->3,27885->6,27901->6,28034->3,28036->3,28038-
>6,28042->6,28044->3,28046->6,28050->3,28052->6,28054->6,28058->6,28066->3,28068-
>6,28082->6,28100->3,28227->1,28229->6,28233->6,28235->6,28241->12,28245-
>6,28251->3,28253->6,28265->6,28281->3,28422->3,28424->3,28426->6,28430->6,28432-
>3,28434->6,28438->3,28440->6,28450->6,28464->3,28617->3,28619->3,28621->6,28625-
>6,28627->3,28629->6,28637->6,28649->3,28812->1,28814->6,28818->6,28820->6,28826-
>6,28836->3,29009->3,29011->3,29013->6,29017->6,29025->3,29206->3,29208->3,29210-
>6,29216->3,29403->1,29405->6,29409->3,29602->3,29604->3,29801->3,30000->1|>
```

EK:C1 20 ile 40 sayısının 4 boyutlu $\frac{1}{2}$. kuvvetinin Wolfram Mathematica programında gösterimi

```
In[4]:= ClearAll["Global`*"]
```

```
In[5]:= set=Range[20,40]^1/2
```

```
Out[5]=
```

```
{10,21/2,11,23/2,12,25/2,13,27/2,14,29/2,15,31/2,16,33/2,17,35/2,18,37/2,19,39/2,20}
```

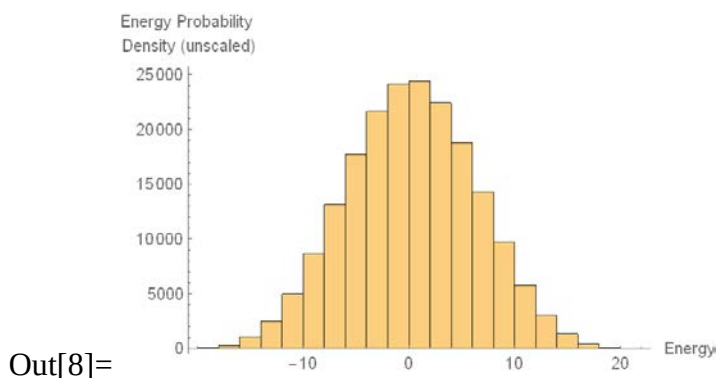
```
In[6]:= y=Mean[Total/@Tuples[set,4]]/N
```

```
Out[6]= 60.
```

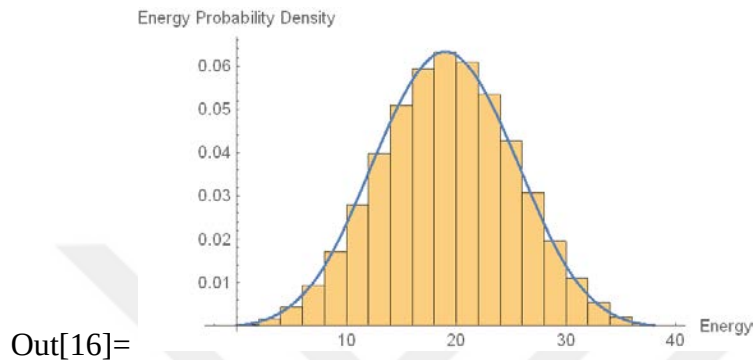
```
In[7]:= z=Median[Commonest[Total/@Tuples[set,4]]]
```

```
Out[7]= 60
```

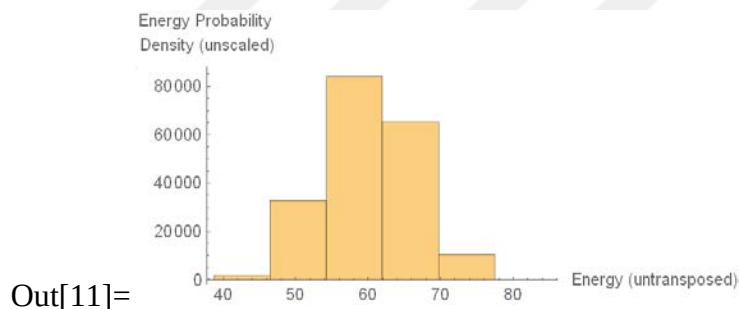
```
In[8]:= Histogram[Total/@Tuples[set,4]-y, Automatic, Axes->True, PlotRange->{Full, All},
AxesLabel->{"Energy","Energy Probability \nDensity (unscaled)"}]
```



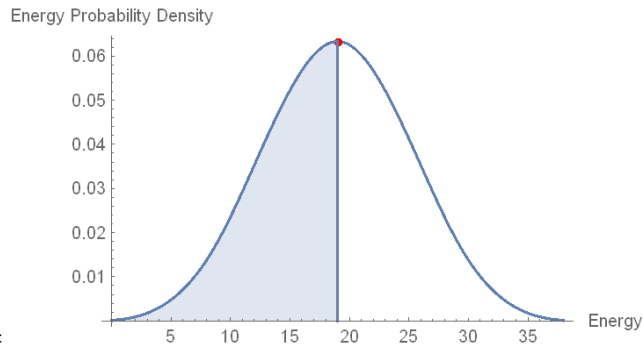
```
In[16]:= Show[Histogram[Total/@Tuples[set,4]-41, Automatic,"PDF",Axes->True,
AxesOrigin->{0,0}, PlotRange->{Full, All}, AxesLabel->{"Energy","Energy Probability
Density"}],SmoothHistogram[Total/@Tuples[set,4]-41,Automatic,"PDF",Axes->True,
AxesOrigin->{0,0}, PlotRange->{Full, All}, AxesLabel->{"Energy","Energy Probability
Density"}],PlotRange->All]
```



```
In[11]:= Histogram[Total/@Tuples[set,4],{Sqrt[y]}, Axes->True, PlotRange->{Full, All},
AxesLabel->{"Energy (untransposed)","Energy Probability \nDensity (unscaled)"}]
```



```
In[17]:= Show[SmoothHistogram[Total/@Tuples[set,4]-41,Automatic,"PDF",Axes-
>True,AxesOrigin->{0,0},PlotRange->{Full,All},AxesLabel->{"Energy","Energy Probability
Density"},Mesh->{1,0},MeshFunctions->{#1&,#2&},MeshStyle-
>{Directive[PointSize[Medium],Red],Blue}],SmoothHistogram[Total/@Tuples[set,4]-
41,Automatic,"PDF",Axes->True,AxesOrigin->{0,0},PlotRange->{{0,y-41},All},Filling-
>Axis,AxesLabel->{"Energy","Energy Probability Density"}]]
```

Out[17]=

EK:C2 20 ile 40 sayısının 3 boyutlu küp kuvvetinin Wolfram Mathematica programında gösterimi

```
In[134]:= ClearAll["Global`*"]
```

```
In[135]:= set=Range[20,40]^3
```

Out[135]=

```
{8000,9261,10648,12167,13824,15625,17576,19683,21952,24389,27000,29791,32768,35937,39304,42875,46656,50653,54872,59319,64000}
```

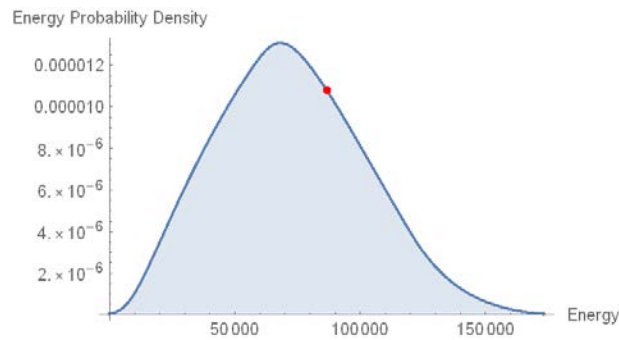
```
In[136]:= y=Mean[Total/@Tuples[set,3]]/N
```

Out[136]= 90900.

```
In[137]:= z=Median[Commonest[Total/@Tuples[set,3]]]
```

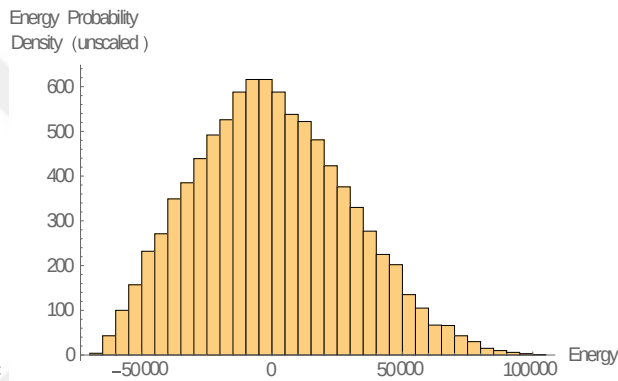
Out[137]= 180811/2

```
In[138]:= SmoothHistogram[Total/@Tuples[set,3] -18500, Automatic, "PDF", Axes->True,
AxesOrigin->{0,0}, PlotRange->{Full, All}, Filling->Axis, AxesLabel->{"Energy", "Energy
Probability Density"}, Mesh->{1,0}, MeshFunctions->{#1&,#2&}, MeshStyle->{Directive[PointSize[Medium],Red],Blue}]
```



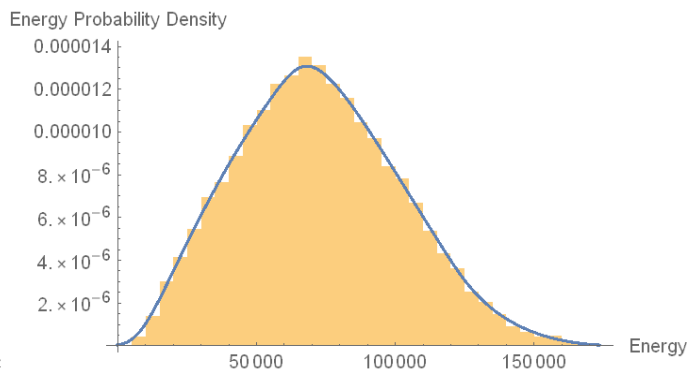
Out[138]=

```
In[139]:= Histogram[Total/@Tuples[set,3]-y, Automatic, Axes->True, PlotRange->{Full, All}, AxesLabel->{"Energy","Energy Probability \nDensity (unscaled)"}]
```



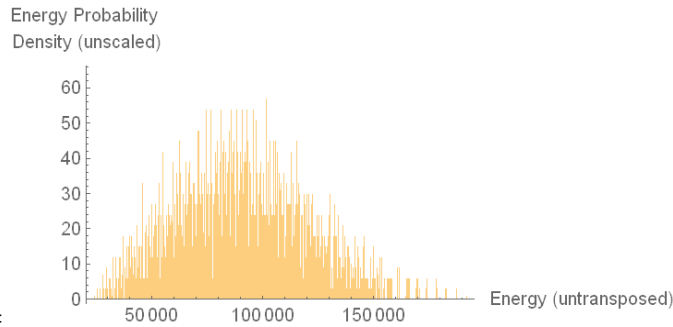
Out[139]=

```
In[140]:= Show[Histogram[Total/@Tuples[set,3]-18500, Automatic,"PDF",Axes->True, AxesOrigin->{0,0}, PlotRange->{Full, All}, AxesLabel->{"Energy","Energy Probability Density"}],SmoothHistogram[Total/@Tuples[set,3]-18500,Automatic,"PDF",Axes->True, AxesOrigin->{0,0}, PlotRange->{Full, All}, AxesLabel->{"Energy","Energy Probability Density"}],PlotRange->All]
```



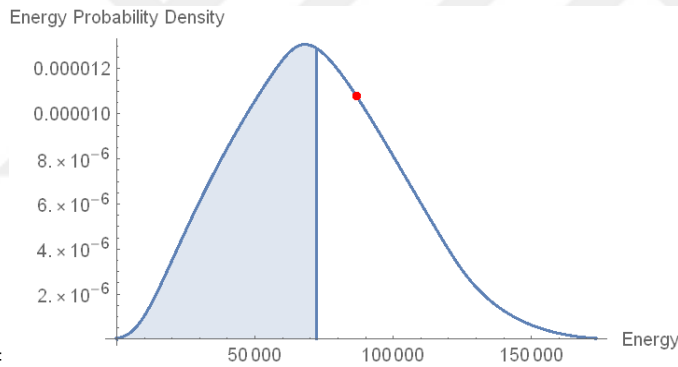
Out[140]=

```
In[142]:= Histogram[Total/@Tuples[set,3],{Sqrt[y]}, Axes->True, PlotRange->{Full, All}, AxesLabel->{"Energy (untransposed)","Energy Probability \nDensity (unscaled)"}]
```



Out[142]=

```
In[143]:= Show[SmoothHistogram[Total/@Tuples[set,3]-15500,Automatic,"PDF",Axes-
>True,AxesOrigin->{0,0},PlotRange->{Full,All},AxesLabel->{"Energy","Energy Probability
Density"},Mesh->{1,0},MeshFunctions->{#1&,#2&},MeshStyle-
>{Directive[PointSize[Medium],Red],Blue}],SmoothHistogram[Total/@Tuples[set,3]-
15500,Automatic,"PDF",Axes->True,AxesOrigin->{0,0},PlotRange->{{0,y-
15500},All},Filling->Axis,AxesLabel->{"Energy","Energy Probability Density"}]]
```



Out[143]=

EK:D1 20 ile 40 sayısının 2 boyutlu olarak Wolfram Mathematica programında gösterimi

```
ClearAll["Global`*"]
```

```
In[6]:= set=Range[20,40]^2
```

```
Out[6]={400,441,484,529,576,625,676,729,784,841,900,961,1024,1089,1156,1225,1296,136
9,1444,1521,1600}
```

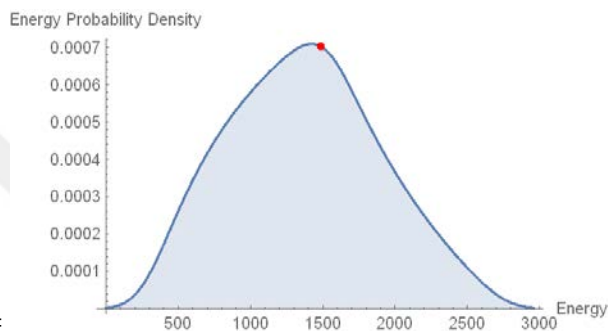
```
In[7]:= y=Mean[Total/@Tuples[set,2]]/N
```

```
Out[7]= 1873.33
```

```
In[8]:= z=Median[Commonest[Total/@Tuples[set,2]]]
```

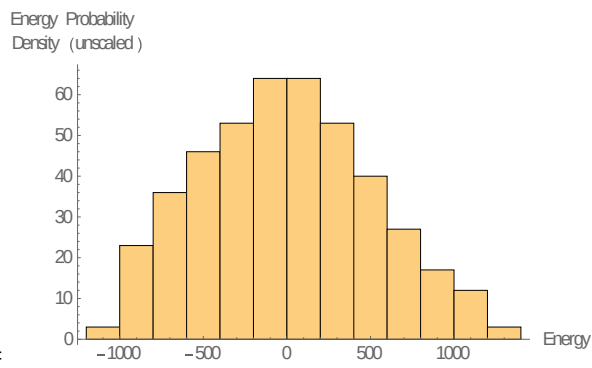
```
Out[8]= 1903
```

```
In[9]:= SmoothHistogram[Total/@Tuples[set,2] -500, Automatic,"PDF",Axes->True,
AxesOrigin->{0,0},PlotRange->{Full, All}, Filling->Axis,AxesLabel->{"Energy","Energy
Probability Density"},Mesh->{1,0},MeshFunctions->{#1&,#2&},MeshStyle-
>{Directive[PointSize[Medium],Red],Blue}]
```



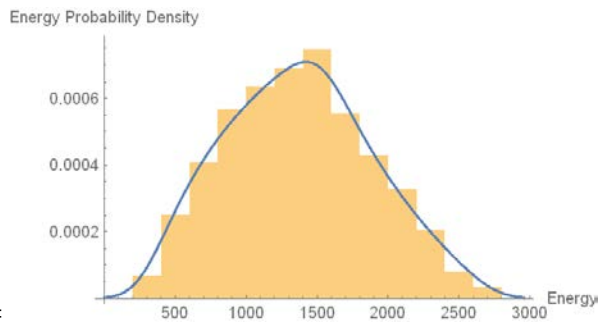
```
Out[9]=
```

```
In[10]:= Histogram[Total/@Tuples[set,2]-y, Automatic, Axes->True, PlotRange->{Full, All},
AxesLabel->{"Energy","Energy Probability \nDensity (unscaled)"}]
```



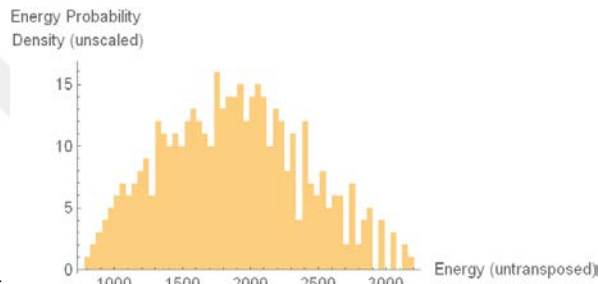
```
Out[10]=
```

```
In[13]:= Show[Histogram[Total/@Tuples[set,2]-500, Automatic,"PDF",Axes->True,
AxesOrigin->{0,0}, PlotRange->{Full, All}, AxesLabel->{"Energy","Energy Probability
Density"}],SmoothHistogram[Total/@Tuples[set,2]-500,Automatic,"PDF",Axes->True,
AxesOrigin->{0,0}, PlotRange->{Full, All}, AxesLabel->{"Energy","Energy Probability
Density"}],PlotRange->All]
```



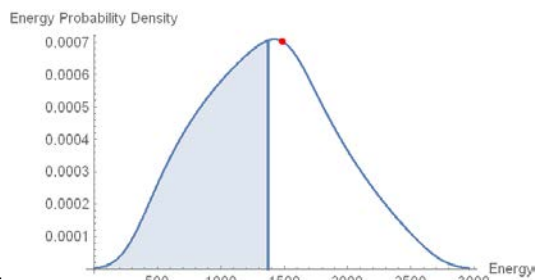
Out[13]=

```
In[14]:= Histogram[Total/@Tuples[set,2],{Sqrt[y]}, Axes->True, PlotRange->{Full, All},
AxesLabel->{"Energy (untransposed)","Energy Probability \nDensity (unscaled)"}]
```



Out[14]=

```
In[15]:= Show[SmoothHistogram[Total/@Tuples[set,2]-500,Automatic,"PDF",Axes-
>True,AxesOrigin->{0,0},PlotRange->{Full,All},AxesLabel->{"Energy","Energy Probability
Density"},Mesh->{1,0},MeshFunctions->{#1&,#2&},MeshStyle-
>{Directive[PointSize[Medium],Red],Blue}],SmoothHistogram[Total/@Tuples[set,2]-
500,Automatic,"PDF",Axes->True,AxesOrigin->{0,0},PlotRange->{{0,y-500},All},Filling-
>Axis,AxesLabel->{"Energy","Energy Probability Density"}]]
```



Out[15]=

EK:E1 20 ile 40 sayısının 4 boyutlu olarak Wolfram Mathematica programında gösterimi

```
ClearAll["Global`*"]
```

```
set=Range[20,40]^2
```

```
{400,441,484,529,576,625,676,729,784,841,900,961,1024,1089,1156,1225,1296,1369,1444,1521,1600}
```

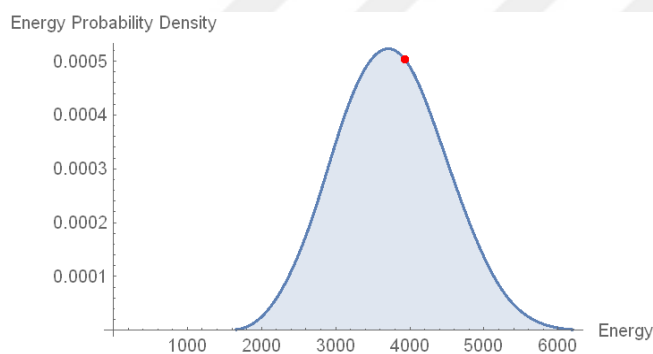
```
y=Mean[Total/@Tuples[set,4]]/N
```

```
3746.67
```

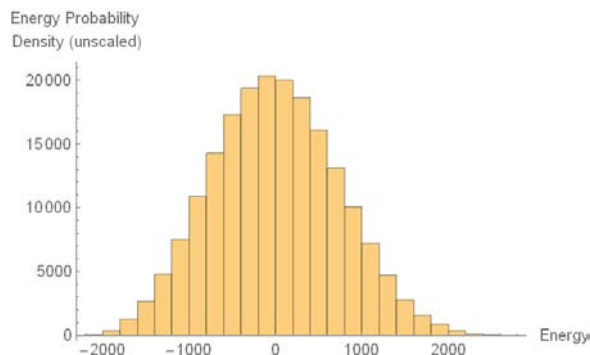
```
z=Median[Commonest[Total/@Tuples[set,4]]]
```

```
3510
```

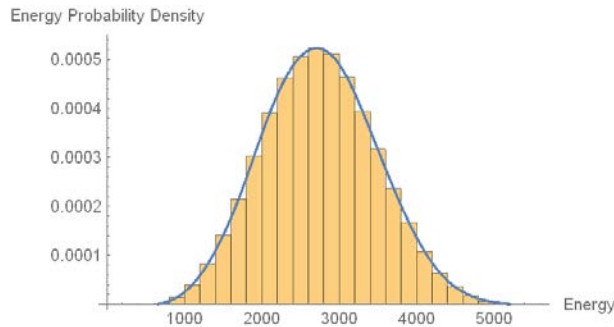
```
SmoothHistogram[Total/@Tuples[set,4],Automatic,"PDF",Axes->True, AxesOrigin->{0,0},PlotRange->{Full, All}, Filling->Axis,AxesLabel->{"Energy","Energy Probability Density"},Mesh->{1,0},MeshFunctions->{#1&,#2&},MeshStyle->{Directive[PointSize[Medium],Red],Blue}]
```



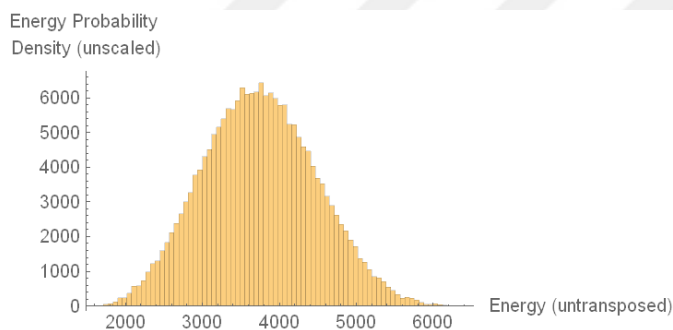
```
Histogram[Total/@Tuples[set,4]-y, Automatic, Axes->True, PlotRange->{Full, All}, AxesLabel->{"Energy","Energy Probability \nDensity (unscaled)"}]
```



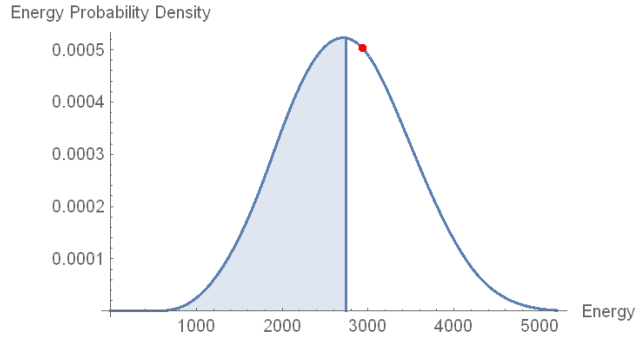
```
Show[Histogram[Total/@Tuples[set,4]-1000, Automatic,"PDF",Axes->True, AxesOrigin->{0,0}, PlotRange->{Full, All}, AxesLabel->{"Energy","Energy Probability Density"}],SmoothHistogram[Total/@Tuples[set,4]-1000,Automatic,"PDF",Axes->True, AxesOrigin->{0,0}, PlotRange->{Full, All}, AxesLabel->{"Energy","Energy Probability Density"}],PlotRange->All]
```



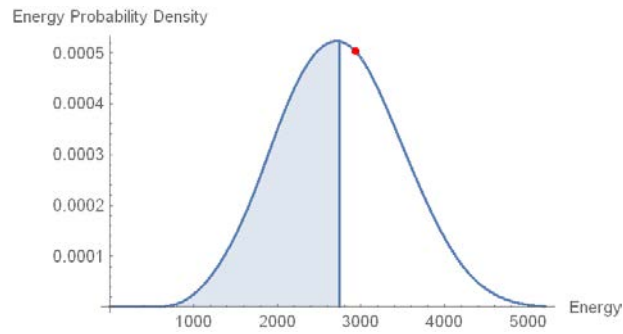
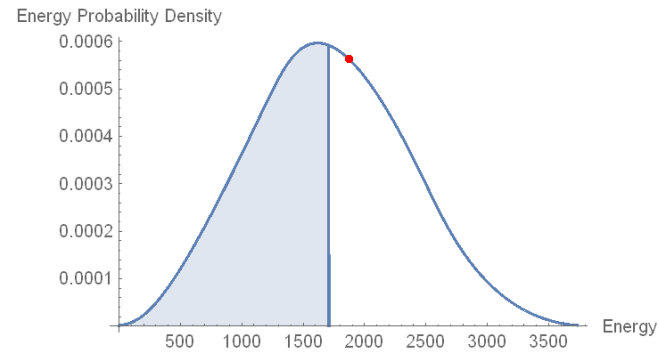
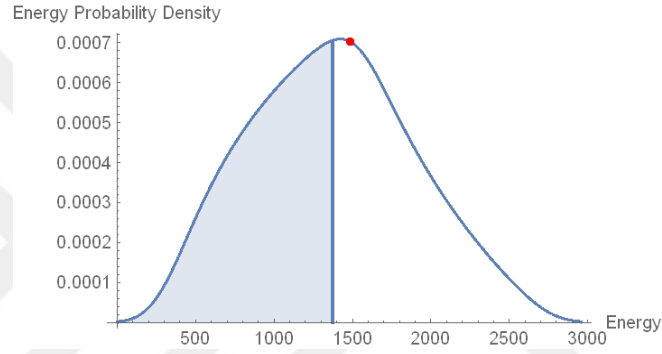
```
Histogram[Total/@Tuples[set,4],{Sqrt[y]}, Axes->True, PlotRange->{Full, All}, AxesLabel->{"Energy (untransposed)","Energy Probability \nDensity (unscaled)"}]
```



```
Show[SmoothHistogram[Total/@Tuples[set,4]-1000,Automatic,"PDF",Axes->True,AxesOrigin->{0,0},PlotRange->{Full,All},AxesLabel->{"Energy","Energy Probability Density"}],Mesh->{1,0},MeshFunctions->{#1&,#2&},MeshStyle->{Directive[PointSize[Medium],Red],Blue}],SmoothHistogram[Total/@Tuples[set,4]-1000,Automatic,"PDF",Axes->True,AxesOrigin->{0,0},PlotRange->{{0,y-1000},All},Filling->Axis,AxesLabel->{"Energy","Energy Probability Density"}]]
```



EK:F1 Sırasıyla 2, 3 ve 4 boyutta 20 ile 40 sayılarının yerleştirildiği eksen takımları zemininde yapılan uygulama sonuçlarının karşılaştırılması



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	ŞEFİKA ÇOKCOŞKUN
Doğum Yeri	EFLANİ/KARABÜK
Doğum Tarihi	17.08.1990
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:
Telefon	0533 717 77 03
E-Posta Adresi	sefikacokcoskun@gmail.com
Web Adresi	



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Fizik Bölümü
Mezuniyet Yılı	13.07.2013

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Fakültesi
Anabilim Dalı	Fizik Bölümü
Programı	Nükleer Fizik Programı