



**ERKEN CEBİR ÖĞRENİMİNDE GÖRSEL
DÜŞÜNMEYE DAYALI PROBLEM ÇÖZME
YÖNTEMİNİN KULLANIMI**

Doktora Tezi

Merve ATASAY SUNAY

Eskişehir 2024

**ERKEN CEBİR ÖĞRENİMİNDE GÖRSEL DÜŞÜNMEYE DAYALI PROBLEM
ÇÖZME YÖNTEMİNİN KULLANIMI**

Merve ATASAY SUNAY

DOKTORA TEZİ

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı

Matematik Eğitimi Doktora Programı

Danışman: Prof. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN

Eskişehir

Anadolu Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Mart 2024

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Merve ATASAY SUNAY'ın "**Erken Cebir Öğretiminde Görsel Düşünmeye Dayalı Problem Çözme Yönteminin**

Kullanımı" başlıklı tezi **26 Mart 2024** tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin 37. Maddesi uyarınca **Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Programı'nda, Doktora** tezi olarak değerlendirilerek kabul edilmiştir.

İmza,

Üye (Tez Danışmanı) : **Prof. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN**

Üye : **Prof. Dr. Dilek TANIŞLI**

Üye : **Prof. Dr. Mine IŞIKSAL BOSTAN**

Üye : **Doç. Dr. Zerrin TOKER**

Üye : **Dr.Öğr.Üy. Zeynep AKKURT DENİZLİ**

Prof. Dr. Saime ÖNCE
Anadolu Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

ÖZET

ERKEN CEBİR ÖĞRENİMİNDE GÖRSEL DÜŞÜNMEYE DAYALI PROBLEM ÇÖZME YÖNTEMİNİN KULLANIMI

Merve ATASAY SUNAY

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Mart 2024

Danışman: Prof. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN

Bu çalışma, görsel düşünmeye dayalı problem çözme yöntemi olarak geliştirilmiş Donguri yönteminin erken cebir öğrenimi sürecinde kullanımını incelemeyi amaçlamaktadır. Bu amaçla, öğrencilerin Donguri yöntemini uygulama sürecinde kullandıkları temsil türleri ve bu temsiller üzerinden gerçekleşen soyutlamalarının gelişimi incelenmiştir. Öğrencilerin temsil kullanma becerilerindeki gelişimin bireysel olarak incelenmesi amacıyla radikal yapılandırmacı öğretim deneyi uygulanmıştır. Araştırma, 2022-2023 öğretim yılı güz döneminde Eskişehir ilinin merkez ilçesindeki bir devlet ilkokulunun 3. sınıfına devam etmekte olan dört öğrencinin katılımıyla gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin problem çözme durumlarının belirlenmesi amacıyla ilk üç seans durum belirleme aşaması gerçekleştirilmiş, ardından altı aritmetik ve altı erken cebir probleminin Donguri yöntemiyle çözüldüğü 12 seanslık öğretim bölümü aşaması uygulanmıştır. Donguri yönteminin öğrenilmesinin ardından, öğrencilerin problem çözme yaklaşımlarını nasıl değiştirdiğinin anlaşılması amacıyla altı hafta arayla iki seanslık durum belirleme aşaması gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın sonucunda öğrencilerin, durum belirleme aşamasında soyut sembolik temsilleri ağırlıklı olarak kullanırken, Donguri yönteminin uygulanması sürecinde somut resimsel ve dilsel temsilleri kullanarak başladıkları ve ilişkileri genellemek için simgesel temsiller kullandıkları, bunların ardından sembolik temsillere geçiş yaptıkları görülmüştür. Böylece, bu süreçte öğrenciler somut temsillerden başlayarak ve adım adım soyut temsillere geçerek soyutlamalarını gerçekleştirmiştir. Erken cebir problemlerinde yer alan ilişkişel düşünme, niceliksel muhakeme, fonksiyonel düşünme gibi çeşitli düşünme becerileri Donguri yönteminin uygulamasında belirgin bir şekilde ortaya çıkmıştır.

Anahtar Kelimeler: Donguri, Erken cebir öğrenimi, Görsel düşünme, Temsil kullanımı, Soyutlamanın gelişimi

ABSTRACT

THE USE OF VISUAL THINKING BASED PROBLEM SOLVING METHOD IN EARLY ALGEBRA LEARNING

Merve ATASAY SUNAY

Department of Mathematics and Sciences Education

Anadolu University, Graduate School, March 2024

Supervisor: Prof. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN

This study aims to examine the use of the Donguri method, developed as a problem solving method based on visual thinking, in the early algebra learning process. For this purpose, the types of representations that students used in the process of applying the Donguri method and their development of abstraction through these representations were examined. A radical constructivist teaching experiment was used to individually examine students' representation development. The research was conducted with the participation of four students attending the 3rd grade of a public primary school in the central district of Eskişehir province in the fall semester of the 2022-2023 academic year. Determining the problem-solving conditions of the students, the condition determination phase was carried out in the first three sessions, and then a 12-session teaching phase was implemented, in which six arithmetic and six early algebra problems were solved with the Donguri method. Understanding how learning the Donguri method changed students' problem-solving approaches, a condition determination phase was carried out in two sessions, six weeks apart. As a result of the study, it was observed that while the students mainly used abstract symbolic representations in the condition determination phase, they started by using concrete pictorial and linguistic representations in the application of the Donguri method and used figurative representations to generalize the relationships, and then switched to symbolic representations. Thus, in this process, students realized their abstractions, starting from concrete representations and moving to abstract representations step by step. Various thinking skills such as relational thinking, quantitative reasoning, and functional thinking, which were included in early algebra problems, emerged clearly in the process of applying the Donguri method.

Keywords: Donguri, Early algebra learning, Visual thinking, Use of representation, Development of abstraction

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın ortaya çıkma serüveni, doktora eğitimime başladığım sırada çalıştığım kurumda Donguri yöntemiyle tanışmamla başladı. Tepebaşı Belediyesi bünyesinde açılan Matematik Evi'nin kurucusu olan ve Donguri yöntemiyle tanışmamıza vesile olan değerli hocam Prof. Dr. Şahin KOÇAK'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Kendisinin öğrenme merakı ve tutkusu sayesinde oldukça yenilikçi bir öğrenme yöntemi olan Donguri yöntemini derinlemesine inceleme ve deneyimleme fırsatı bulmamın yanında, bu yöntemi tez konusu yapmam yönündeki önerileri ve teşvikleri sayesinde bu tez ortaya çıkmış oldu. Kendisiyle çalışma fırsatı bulmuş olmaktan ve öğrencisi olmaktan onur duyuyorum.

Bir akşam saatinde Matematik Evi'ne gelerek tüm heyecanımla bizi Donguri yöntemiyle tanıştıran ve saatler süren seminerler vererek yöntemin tüm ayrıntılarını bıkmadan yorulmadan defalarca anlatan sevgili Akemi BÜLBÜL'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Donguri yöntemiyle ilgili tüm kaynaklara ulaşmamı sağladığı ve tezi yazmam konusundaki destekleri için ayrıca teşekkür ederim. Sevgili Akemi ile tanışmamış olsaydım bu tez de ortaya çıkmamış olacaktı.

Tez konusundan ilk bahsettiğim günden itibaren en az benim kadar heyecan duyan ve bu konuda çalışmam konusunda önümü açarak her aşamasında beni destekleyen değerli danışman hocam Prof. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez izleme komitesinde yer alan ve tüm süreç boyunca tezimin daha iyi olması konusunda önemli yardımları bulunan, verdikleri önerilerle tezimin güçlenmesini sağlayan değerli hocalarım Prof. Dr. Dilek TANIŞLI ve Prof. Dr. Mine IŞIKSAL BOSTAN'a çok teşekkür ederim.

Tezimi detaylı bir şekilde okuyarak ayrıntılı dönütler ve öneriler vererek tezimin iyileşmesini sağlayan değerli jüri üyeleri Doç. Dr. Zerrin TOKER ve Dr.Öğr.Üy. Zeynep AKKURT DENİZLİ'ye teşekkürlerimi sunarım.

Okul ortamında çalışmam konusunda her türlü kolaylığı sağlayan ve veri toplamam için rahat bir ortam oluşturmama yardımcı olan sayın okul müdürü İbrahim ŞAHİN'e teşekkür ederim. Ayrıca benimle her türlü iş birliği yapan, uygulama problemlerimi değerlendiren ve veri toplama sürecimi kolaylaştıran değerli öğretmenlere teşekkürlerimi sunarım.

TÜBİTAK Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı'na (BİDEB) 2211-Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı kapsamında maddi olarak beni destekleyerek tezime odaklanmamı sağladığı için teşekkür ederim.

Doktora eğitimimin bana kattığı en güzel dostluklardan biri olan sevgili Ayşe İLHAN'a teşekkür ederim. Bu süreçte birçok şeyi onunla birlikte öğrendim ve desteğini her zaman hissettim.

Hayatımın her anını güzelleştiren ve hayattaki en değerli danışmanım, yoldaşım ve sevgili eşim Yağız SUNAY'a destekleri için sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Eşimin destekleri ve önerileri olmasaydı bu tezi yazamazdım. Bu süreçte gösterdiği özveri ve sabır için ayrıca teşekkür ederim.

Tezimin veri toplama sürecinde bize harika bir sürpriz yaparak gelen biricik bebeğim Özgün SUNAY'a özverisi ve sakinliği için teşekkür ederim. Onunla birlikte tezimi yazmak bana çok şey öğretti. Bu tezi Özgün'üme ithaf ediyorum.

Eğitim hayatım boyunca beni her aşamada destekleyen ve bana güç veren sevgili aileme teşekkür ederim.

02.04.2024

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmamın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Merve ATASAY SUNAY

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
ÖNSÖZ	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	vii
İÇİNDEKİLER	viii
TABLolar DİZİNİ.....	xi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xii
1. GİRİŞ	1
1.1. Görsel Düşünme ve Matematik	2
1.2. Matematik Eğitiminde Görsel Düşünme ve Erken Cebir	9
1.3. Görsel Düşünmeye Dayalı Problem Çözme Yöntemi: Donguri	20
1.4. Donguri Yöntemi ve Erken Cebir Öğrenimi	32
2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE: ERKEN CEBİR ÖĞRENİMİNDE GÖRSEL DÜŞÜNMEYE DAYALI TEMSİL GELİŞİMİ	36
3. ÇALIŞMANIN AMACI	48
4. ÇALIŞMANIN ÖNEMİ	49
5. YÖNTEM	51
5.1. Öğretim Deneyi Aşamaları	52
5.2. Uygulamada Kullanılan Problemlerin Hazırlanması	54
5.3. Keşfedici Öğretim Aşaması	59
5.4. Çalışmanın Katılımcıları	64
5.5. Öğretim Bölümleri	65
5.6. Ortamın Tasarlanması	71
5.7. Verilerin Toplanması	74
5.8. Verilerin Analizi	75
5.9. İnandırıcılık ve Aktarılabilirlik	80

5.10. Etik Konular	82
6. BULGULAR VE YORUM	84
6.1. Donguri Yöntemi Öncesindeki Durum Belirleme Aşamasında Öğrencilerin Kullandıkları Temsiller	84
6.2. Donguri Yönteminin Uygulandığı Öğretim Bölümünde Öğrencilerin Kullandıkları Temsiller	95
6.2.1. Öğrencilerin aritmetik problemlerini çözme sürecinde kullandıkları temsiller	96
6.2.2. Öğrencilerin erken cebir problemlerini çözme sürecinde kullandıkları temsiller	108
6.3. Donguri Yöntemi Sonrasındaki Durum Belirleme Aşamasında Öğrencilerin Kullandıkları Temsiller	127
6.4. Öğrencilerin Problemlerin Çözümünde Kullandıkları Temsillerle Soyutlamanın Gelişimi	133
6.4.1. Aritmetik probleminin çözümünde kullanılan temsillerle soyutlamanın gelişimi.....	133
6.4.2. Erken cebir probleminin çözümünde kullanılan temsillerle soyutlamanın gelişimi	143
7. SONUÇ	158
7.1. Uygulama Boyunca Öğrencilerin Kullandığı Temsil Türlerine Yönelik Sonuçlar	158
7.2. Öğrencilerin Problemlerin Çözümünde Kullandıkları Temsillerle Soyutlamanın Gelişimine Yönelik Sonuçlar	163
7.3. Uygulama Boyunca Öğrencilerin Erken Cebir Problemlerindeki Düşünme Becerilerine Yönelik Sonuçlar	167
7.4. Uygulama Sonrasında Öğrencilerin Donguri Yöntemini Problem Çözme Sürecine Yansıtmalarına Yönelik Sonuçlar	171
8. SINIRLILIKLAR	174
9. TARTIŞMA	175
9.1. Görsel Düşünme ve Donguri Yöntemine Yönelik Tartışma	175
9.2. Temsil Türleri ve Soyutlamanın Gelişimine Yönelik Tartışma.....	179

9.3. Erken Cebir Problemlerindeki Düşünme Becerilerine Yönelik Tartışma	185
10. ÖNERİLER	188
10.1. Öğretmenlere Yönelik Öneriler	188
10.2. Araştırmacılara Yönelik Öneriler	193
KAYNAKÇA	196
EKLER	
ÖZGEÇMİŞ	



TABLÖLAR DİZİNİ

	Sayfa
Tablo 5.1. Öğretim deneyi kapsamında gerçekleşen uygulama adımları	66
Tablo 5.2. Öğretim bölümünde gerçekleşen uygulama süreci	68
Tablo 6.1. Durum belirleme aşamasında öğrencilerin problemleri çözme doğruluğu...	84
Tablo 6.2. Uygulama sonrası öğrencilerin problemleri çözme doğruluğu.....	127



ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 1.1. 0MX17 kodlu problemin farklı çözüm yolları	25
Şekil 1.2. 0MX17 birinci cümlenin çizimi	25
Şekil 1.3. 0MX17 ikinci cümleden sonraki çizimler	26
Şekil 1.4. 0MX17 üçüncü cümleden sonraki çizimler	26
Şekil 1.5. 0MX17 dördüncü cümleden sonraki çizimler	27
Şekil 1.6. 0MX17 işlemlerinin eklenmesi	28
Şekil 1.7. 5MX32 kodlu problemin farklı çözüm yolları	29
Şekil 1.8. 5MX32 birinci cümlenin çizimi	30
Şekil 1.9. 5MX32 ikinci cümleden sonraki çizim	30
Şekil 1.10. 5MX32 üçüncü cümleden sonraki çizim	30
Şekil 1.11. 5MX32 dördüncü cümleden sonraki çizim	31
Şekil 2.1. Resim, simge, sembol gelişimi.....	41
Şekil 2.2. Temsiller aracılığıyla soyutlamanın gelişimi	42
Şekil 2.3. Duval tarafından semiyotik temsil dağılımının sınıflandırılması (Duval 2017, s.85)	44
Şekil 2.4. Erken cebir bağlamında temsil türlerinin sınıflandırılması.....	46
Şekil 2.5. Donguri yöntemiyle problemlerin çözümünde kullanılan temsil türleri	47
Şekil 5.1. Keşfedici öğretim aşamasının genel akışı	61
Şekil 5.2. Kontrol etme aşamasında öğretmenin yaptığı eklemelere örnekler	70
Şekil 5.3. Veri toplama ortamının bir tasviri	75
Şekil 5.4. Derya 10. seansa ait ön analiz örneği	76
Şekil 5.5. Derya 10. seansın kavramsal çerçeveye göre analizi	78
Şekil 5.6. Verilerin analizinde süreç boyunca izlenen aşamalar	79
Şekil 6.1. Kenan'ın 1. durum belirleme (solda) ve Derya'nın 2. durum belirlemedeki (sağda) aritmetik problemlerini çözümleri	86
Şekil 6.2. Arzu'nun 1. durum belirleme (solda) ve Mert'in 2. durum belirlemedeki (sağda) erken cebir problemlerini çözümleri	87
Şekil 6.3. Mert'in 1. durum belirlemede 10. problemi çözümü	87
Şekil 6.4. Kenan'ın 1. durum belirlemede 9. problemi çözümü	89
Şekil 6.5. Kenan'ın ilk iki seansta problemlerin kenarına çizdiği resimlerden örnekler	90
Şekil 6.6. Derya'nın 3. durum belirlemede işleme uygun resim çizerek çözümü	91

Şekil 6.7. Arzu'nun 3. durum belirlemede kullandığı simgesel temsil örnekleri	92
Şekil 6.8. Mert'in 3. durum belirlemede kullandığı simgesel temsiller	93
Şekil 6.9. Kenan'ın 3. durum belirlemede resim çizmeyi kullanarak problem çözmesi	94
Şekil 6.10. Mert'in 5. seanstaki problemi çözümü	98
Şekil 6.11. Derya'nın 6. seanstaki problemi çözümü	100
Şekil 6.12. Kenan'ın 6. seanstaki problemi çözümü	102
Şekil 6.13. Arzu'nun 7. seanstaki problemi çözümü	104
Şekil 6.14. Kenan'ın 8. seanstaki problemi çözümü	106
Şekil 6.15. Sırasıyla Arzu'nun, Kenan'ın, Mert'in ve Derya'nın 21 karınca temsiller	107
Şekil 6.16. Sırasıyla Arzu'nun, Kenan'ın, Mert'in ve Derya'nın karıncaları 3'erli gruplama temsilleri	107
Şekil 6.17. Mert'in 10. seanstaki problemi çözümü	109
Şekil 6.18. Derya'nın (solda) ve Mert'in (sağda) adımları parmaklarıyla canlandırması	110
Şekil 6.19. Derya (solda) ve Mert'in (sağda) parmaklarıyla adımlamalarının çizim ile gösterimi	110
Şekil 6.20. Kenan'ın 10. seanstaki problemi çözümü	112
Şekil 6.21. Kenan'ın (solda) ve Arzu'nun (sağda) belirli bir sayı şeker ile ilişkiyi ve işlemleri göstermesi	113
Şekil 6.22. Derya'nın (solda) ve Mert'in (sağda) kutularda eşit sayıda şeker olduğunu eşittir işareti kullanarak göstermesi	114
Şekil 6.23. Derya'nın (solda) ve Mert'in (sağda) bir kutudan diğerine 3 şeker gittiğini göstermesi	114
Şekil 6.24. Mert'in bilinmeyen sayı yerine çeşitli simgesel temsilleri kullanımı	114
Şekil 6.25. Öğretmenin ellerini kullanarak değişimi anlatması ve bunu çizerek görselleştirmesi (solda ve ortada) ile Kenan'ın değişimi elleriyle göstermesi (sağda)	115
Şekil 6.26. Öğrencilerin 3 kat ilişkisini gösterme şekilleri (soldan sağa sırayla Mert'in, Arzu'nun ve Kenan'ın resimleri)	115
Şekil 6.27. Arzu'nun (solda) ve Derya'nın (sağda) toplam 28'e ulaşana kadar adım adım erikleri çizimleri	117
Şekil 6.28. Mert'in toplam 28 eriği uygun şekilde paylaşması	117
Şekil 6.29. Kenan'ın erikleri kat ilişkisine uygun ve 28'e ulaşana kadar çizimi	118
Şekil 6.30. Öğrencilerin puanları 3+ ve 1- şeklinde sembolle ifadeleri	119

Şekil 6.31. Mert'in 13. seans problemini çözümü ve işlemleri	119
Şekil 6.32. Arzu'nun (sol üst), Derya'nın (sağ üst) ve Kenan'ın (alt) 13. seans problemini resimsel temsille çözümleri	120
Şekil 6.33. Arzu'nun (solda), Derya'nın (ortada) ve Kenan'ın (sağda) 13. seans problemini sembolik temsille çözümleri	120
Şekil 6.34. Kenan'ın (sol üst), Derya'nın (sağ üst), Mert'in (sol alt) ve Arzu'nun (sağ alt) 14. seans problemindeki el sıkışmalarını resimsel temsille çözümleri	122
Şekil 6.35. Mert'in 15. seans probleminde adım ve marul sayılarını çizimi.....	123
Şekil 6.36. Derya'nın 15. seans probleminde Arya'nın topladığı ve tavşanın topladığı marulları çizimi	124
Şekil 6.37. Kenan'ın 15. seans probleminde adım ve marulları çizimi	125
Şekil 6.38. Arzu'nun 15. seans probleminde tavşanın adımlarını çiziminin öncesi (solda) ve sonrası (sağda)	126
Şekil 6.39. Derya'nın 3. seanstaki (üstte) ve 16. seanstaki (altta) problemleri çözerken kullandığı temsiller	129
Şekil 6.40. Kenan'ın 16. seanstaki 9. problemi çözümü	130
Şekil 6.41. 17. seansta öğrencilerin problemleri çözerken kullandıkları görsel temsillere örnekler (Üstte Arzu ve Kenan'ın, altta Derya ve Mert'in çözümleri).....	131
Şekil 6.42. Arzu'nun 1. durum belirleme aşamasında 5. problemi çözümü.....	134
Şekil 6.43. Arzu'nun 2. durum belirleme aşamasında 5. problemi çözümü	136
Şekil 6.44. Arzu'nun 3. durum belirleme aşamasında 5. problemi çözümü	138
Şekil 6.45. Arzu'nun öğretim bölümü aşamasında paralel problemi Donguri yöntemiyle çözümü	140
Şekil 6.46. Arzu'nun 16. seansta 5. problemi çözümü	142
Şekil 6.47. Kenan'ın 1. durum belirleme aşamasında 9. problemi çözümü	145
Şekil 6.48. Kenan'ın 2. durum belirleme aşamasında 9. problemi çözümü	147
Şekil 6.49. Kenan'ın 3. durum belirleme aşamasında 9. problemi çözümü	149
Şekil 6.50. Kenan'ın öğretim bölümü aşamasında paralel problemi Donguri yöntemiyle çözümü	151
Şekil 6.51. Kenan'ın 16. seansta 9. problemi çözümü	153
Şekil 6.52. Kenan'ın 17. seanstaki kat problemini çözümü	155
Şekil 6.53. Öğretmenin 11. seansta çizgiler ile eşitliği anlatımı (en solda) sonrasında Derya'nın sırasıyla 12., 13. ve 15. seans problemlerinde bu gösterimi kullanması	157

Şekil 7.1. Durum belirleme aşamasında öğrencilerin kullandığı temsil türleri	159
Şekil 7.2. Öğretim bölümü aşamasında öğrencilerin kullandığı temsil türleri	162
Şekil 7.3. Durum belirleme aşamasında temsillerle soyutlamanın gelişimi	164
Şekil 7.4. Öğretim bölümü aşamasında temsillerle soyutlamanın gelişimi	166
Şekil 9.1. Görsel düşünmeye dayalı kullanılan temsil türleri dağarcığı	181
Şekil 9.2. Görsel düşünmeye dayalı temsil türleri bağlamında soyutlamanın gelişimi	184



1. GİRİŞ

Ulusal ve uluslararası standartlarda matematik eğitiminin bir ideali, tüm öğrencilerin matematiksel kavramları ve işlemleri anlayarak öğrenmelerini sağlamaktır (Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018; Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA], 2019; National Council of Teacher of Mathematics [NCTM], 2000). Bunun için NCTM (2000), okul matematiğinin odağının problem çözme olduğunu ifade etmektedir. Problem çözme becerisinin temel bir hayati beceri olduğu; çeşitli deneyimler, iletişim kurma ve zihinde canlandırma aracılığıyla geliştiği belirtilmektedir (Cheeseman vd., 2020). Aynı zamanda problem çözme, matematiksel düşünmeyi desteklediği için de teşvik edilmektedir (Schoenfeld, 2016). Bu nedenle matematik eğitiminde, çocukların matematiksel kavram ve ilişkileri gerçek yaşam durumları üzerinden keşfetmelerini sağlayarak bir matematikçi gibi çalışmasına fırsat veren otantik problem çözme durumlarının yer verilmesi önerilmektedir (Cheeseman vd., 2020; Schoenfeld, 2016; Palm, 2008).

Matematik eğitiminde problem çözmeye, öğrencilerin buluşsal bir süreç geçirerek kendi strateji ve bilgilerini yapılandırmalarına, matematiksel temsil sistemlerini geliştirmelerine, matematiksel sezgilerini ve görsel imgelerini güçlendirmelerine fırsat verecek şekilde yer verilmesinin gerektiği belirtilmektedir (Koichu, 2014). Problem çözmede en temel yöntemleri açıklayan Polya (2017), problemi anlamak ve başarılı bir çözüm bulabilmek için şekil çizmenin önemini vurgulamaktadır. Polya (2017), şekil çizme önerisini sadece geometri içerikli problemler için değil, karşılaşılan tüm problem durumları için sunmaktadır. Problem çözmede anlamamanın ve düşünmenin önemi ve gerekliliği bilinmektedir. Anlamamanın ve düşünmenin bir göstergesi olarak, şekil çizme gibi yöntemleri ve çok daha fazlasını içeren, görsel düşünme ele alınmaktadır (Arnheim, 1969). Matematik eğitiminde, ele alınan kavramların anlaşılmasında, karşılaşılan problemlerin çözümü sürecinde yer alan düşüncelerin görünür olmasında ve bu düşüncelerin ifade edilmesinde görsel düşünmenin önemli olacağı düşünülmektedir (Presmeg, 2020). Bu anlamda matematik eğitimi çalışmalarında görsel düşünmeyi temel alan yaklaşımların incelenmesine ihtiyaç vardır. Problem çözmeyi öğrenmenin merkezine alan ve resim çizerek problem çözmeyi içeren Donguri yöntemi de bu bağlamda görsel düşünmeyi ele alan temel bir yaklaşım olarak araştırmaya açık bir konudur. Bu nedenle bu çalışmada, görsel düşünmenin matematik eğitimi için öneminin ve görsel düşünme temelli geliştirilmiş olan Donguri yönteminin incelenmesi gerekli görülmüştür.

Görsel düşünmenin, matematiğin tarihsel gelişim sürecinde çeşitli temsillerin kullanımı ve bu temsillere bağlı olarak matematiksel sembollerin gelişimi sürecinde önemli bir rol oynadığı görülmektedir. Bu bölümdeki alt başlıklarda, öncelikle görsel düşünmenin ne olduğu temel kavramlarıyla ele alınmakla birlikte matematikte temsil kullanımı ve sembolleştirmenin gelişimi süreçlerinde görselleştirmenin oynadığı rol açıklanmaktadır. Matematik eğitimi çalışmalarında görsel düşünmenin nasıl ele alındığı ve öğretimde görselleştirme yaklaşımlarının kullanımı özetlenmektedir. Matematikte görsel düşünmenin yer aldığı temsil kullanımı ve sembolleştirmenin gelişimi süreci, somut temsillerden soyut matematiksel sembollere geçişin yaşanmasıyla bir soyutlama sürecini de içermektedir. Buna paralel olarak matematik eğitiminde sembolleştirmenin gelişimini ve soyutlamayı içeren bir süreç olarak erken cebir öğrenimi ele alınmaktadır. Erken cebir öğreniminin temel yaklaşımları ve bileşenlerinin tanıtılmasının ardından, temsillerin gelişimini ve rolünü, ders sürecinde temsillerin nasıl kullanıldıklarını, karşılaşılan zorlukların ve önleme yöntemlerinin neler olduğunu içeren araştırmalar sunulmaktadır. Bunların ardından görsel düşünmeyi temel alan bir öğretim yöntemi olan Donguri yöntemi, uygulama adımları ve temel kuralları ile tanıtılmaktadır. Bölümün sonunda Donguri yönteminin erken cebir öğretimi için potansiyeli değerlendirilmektedir.

1.1. Görsel Düşünme ve Matematik

Görsel düşünmenin temeli görme duyusuna dayanmaktadır ve görme duyusunun bireyin anlaması üzerindeki etkisini vurgulamaktadır. Birçok dilde “görmek” kelimesi “anlamak” anlamında kullanılmaktadır. Örneğin İngilizce “I see”, “anlıyorum” anlamına gelirken benzer şekilde Fransızca görmek anlamına gelen “voir” kelimesinin “Je vois” olarak kullanımı “anladım” anlamına gelmektedir. Türkçe dilinde de benzer şekilde “gördün mü?” diye sormak “anladın mı?” anlamında kullanılmaktadır. Bir şeyi görüyor olmanın, anlamının bir göstergesi olduğu düşünülebilir. Benzer şekilde “düşünmek” ile “görmek” arasında da bir bağlantı olduğu söylenebilir. İngilizce “düşünce” anlamına gelen “idea” kelimesinin Yunanca “görmek” anlamına geldiği ifade edilmektedir (McKim, 1980). Benzer köklerden gelmesinin yanında bir şeyin anlaşılmasının ve düşünülmesinin, onların zihinde görülmesi olarak ifade edildiği anlaşılmaktadır.

Sanat üzerine yaptığı çalışmalarıyla tanınan Arnheim (1969), duyular ile düşünce arasında yapılan ayrımın eksikliğini vurgulayarak algı ve düşünmenin birlikte gerçekleştiğini, özellikle de görmenin anlamının başlıca mekanizmalarını sağladığını

belirtmektedir. Arnheim (1969), düşünmenin fiziksel olarak ele alınabilen veya algılanabilen nesnelerle gerçekleştiğini, nesnelerin olmadığı durumlarda bunların yerini imgelerin aldığını ve düşünmenin imgeler aleminde gerçekleştiğini, bu imgelerin sadece fiziksel dünyanın bir kopyası şeklinde değil, farklı soyutlama düzeylerinde olabileceğini belirtmektedir. İmgeler aleminde gerçekleşen bu süreci görsel düşünme olarak ifade etmektedir. İmge kavramını Kosslyn (1996), tasvir edici zihinsel temsiller ve bilgi işlemede kullanılan içsel temsiller olarak ifade ederken, Giaquinto (2007) deneyimleri görselleştirmeye yarayan öğeler içeren “olağanüstü görüntüler” olarak tanımlamaktadır. Arnheim (1969), görsel algı ile görsel düşünmenin aynı şey olduğunu, algının yalnızca gözlerin kaydettikleri ile sınırlandırılmayacağını, aynı zamanda algı ediniminin geçmişte yapılmış ve bellekte yaşayan benzer birçok edinimden oluştuğunu, algıdaki düşünce öğeleri ile düşüncedeki algısal öğelerin birbirini tamamlayarak kuramsal bilgiye ulaşmanın her düzeyinde soyutlama içeren bütünsel bir süreç içerdiğini açıklamaktadır. Algı ile düşünme arasında somut ile soyut arasındaki gibi bir ayrım yapıldığını ve algılanabilir olan şeyler için somut, duyulara erişemeyen bir şeyi betimlemek içinse soyut kullanıldığını ve bunun sadece fiziksel olana somut, zihinsel olana soyut demek kadar yanıltıcı olduğunu belirtmekte ve zihin içi algı verilerinin de zihin dışı algı verileri kadar somut olduğunu kabul etmek gerektiğini vurgulamaktadır. Zihnin doğal eğiliminin bilgiye ulaşmak olduğunu, bilgiye de özel durumlardan hareketle ayırma ve gruplama gibi süreçler ile ulaştığını, bunun soyutlamanın bir derecesi olurken bu bilgileri başka durumlara yaymanın genelleme olduğunu açıklamaktadır. Soyutlamanın bağlamdan çıkarmak olduğunu, özel örneklerden öznitelik özelliklerinin ortaya çıkarılarak tümevarım yoluyla yapıldığını ve sonunda kavram oluşmasını sağlayan bir tanım ile tamamlandığını belirtmektedir. Genellemenin ise daha kapsamlı bir bütünün keşfedilmesi yoluyla yeniden yapılandırma edinimi olduğunu belirtmektedir. Arnheim (1969) soyutlamanın, algılama ve düşünme arasında vazgeçilmez bir halka olduğunu, algılama ve düşünmenin en temel ortak özelliğinin soyutlama olduğunu, “soyutlama olmadan görme yetisinin (vision) kör, görme yetisi olmadan soyutlamanın boş” olduğunu vurgulamaktadır (s.213). McKim (1980) ise gerçeklik ve düşünce arasında bağlantıyı sağlayan bir “soyutlama merdiveni” betimlemekte ve gerçeklikten her adımda bir derece soyutlama yapılarak en sonunda soyutlama düzeyi en yüksek olan soyut düşünce bulutuna ulaşıldığını göstermektedir.

McKim (1980), görsel düşünmenin görme, zihinde canlandırma ve çizmeyle gerçekleşebileceğini, bunların hepsinin imge oluşturmaya içerdiğini belirtmektedir. Bunların arasında çizmenin içsel imgelerin anlaşılmasına yardımcı olduğunu, bununla birlikte ilerleyen düşünce akışının bir kaydını sağladığını belirtmektedir. Arnheim (1969) resimsel temsillerin, zihinsel imgelerin kimi özelliklerini yansıttığını ve soyut akıl yürütmeye uygun araçlar olduklarını göstermekte ve çizim, resim gibi temsillerin yalnızca bitmiş düşünceleri görünür modellere çevirmeye hizmet etmediğini aynı zamanda problemlerin çözüm sürecine de katkıda bulunduğunu açıklamaktadır.

Buraya kadar söylenenlerden hareketle görsel düşünmenin bir tanımını yapabiliriz. Buna göre görsel düşünme, zihinsel imgeleri anlamamanın ve düşünmenin temel aracı olarak kabul ederek imgelerin oluşturulmasını, geliştirilmesini ve yansıtılmasını sağlayan görsel temsillerin oluşturulmasını ve kullanımını içermektedir. Görsel imgeler, görsel düşünmenin zihinsel temsillerini oluştururken, çeşitli çizimler, söylemler ve hareketler bu temsillerin bir yansımasını oluşturmaktadır. Bu çeşitli görsel temsillerin oluşturulma ve kullanılma süreci ise görselleştirme olarak ifade edilmektedir. Görsel düşünmenin ve görselleştirmenin matematikte nasıl yer aldığını inceleyelim.

Matematiğin ortaya çıktığı ilk zamanlardan günümüze kadar olan zamanda görselleştirmenin matematikte kullanıldığı belirtilmektedir (Giaquinto, 2020; Mancosu, Jorgensen ve Pedersen, 2005). Giaquinto (2020), matematik çalışmalarında görsel düşünmenin ve görselleştirilmiş imgelerin yaygın olduğunu, kullanılan bu görsellerin kimi durumlarda gereksiz veya değiştirilebilir yapıda olsalar da (örn. bir matematikçinin tasviri) kimi durumlarda tamamen gerekli ve değiştirilemez bir biçimde zorunlu olarak yer aldıklarını (örn. matematiksel bir denklem formu) göstermektedir. Aynı zamanda matematikte önemli bir unsur olan ispat yapma sürecinde kullanılan görselleştirmelerin (sözsüz ispatların) matematiksel bir doğruluğun ispatını içermiyor olsa bile bu ispatın ve ispat stratejisinin keşfedilmesine önemli bir katkı sağladığını belirtmektedir. Bu noktada Giaquinto (2007) bir ispat ile bir ispatın sunumu arasında ayrım yapılması gerektiğini, bir ispatın birden fazla şekilde sunulabileceğini ve bunların görselleştirme öğeleri içerebileceğini açıklamaktadır. Buna tarihsel bir örneği Arnheim (1969) Aristoteles'ten vermekte ve onun geometrik kanıtlamalarda resimsel temsillerin kullanımında niceliğin belirli olması durumundan kanıt amacıyla yararlanmamamıza karşın, yine de onu nicelik halinde belirli olarak çizeriz ve onu nicelikten soyutlanmış olarak düşünmemize karşın niceliksel olarak tasavvur ederiz sözüne atıf yapmaktadır. Özellikle matematiksel

nesnelerin ve yapıların fark edilmesinde ve anlamının gelişmesinde görsel düşünmenin ve buna bağlı olarak zihinsel olarak gelişen fikirleri temsil eden diyagram ve resimlerin kullanılmasının çok kritik olduğu belirtilmektedir (Carter, 2008). Mancosu, Jorgensen ve Pedersen (2005) matematik ve mantıktaki gelişmelerin görselleştirmeye ve diyagramatik akıl yürütmeye, sezgisel anlamının ve buluşsal yaklaşımın ötesinde, daha temelde yapısal bir gereklilik olarak ihtiyaç duyulduğunu tartışmakta ve bunun matematiğin tarihsel gelişim sürecindeki her aşamasında yer aldığını göstermektedir. Özellikle matematiksel eşitliklerin anlaşılmasını ve doğruluklarının herhangi bir açıklama yapılmadan tek bir resim ile gösterilmesini sağlayan sözsüz ispatların bu anlamda değerlendirilmesi gerektiği vurgulanmaktadır.

Görsel düşünmenin matematikteki kullanımını incelediği çalışmasında Giaquinto (2007), görsel imgeler veya diyagramların bir tanımın örneklerini gösterebildiğini, böylece onun uygulamaları hakkında daha canlı bir fikir verebildiğini; matematiksel bir durumun tanımını veya cümle cümle verilen bazı akıl yürütmelerdeki adımları anlamamıza yardımcı olabildiğini; sorgulama için bir öneri veya bir kanıt için bir fikir verebileceğini matematikten örneklerle açıklamaktadır. Görselleştirmenin bir tür içsel deney olduğunu hem deneyi gerçekleştirmeyi hem de sonucunu gözlemlemeyi içeren bir süreç olarak düşünülebileceğini de belirtmektedir. Giaquinto (2007) zihinsel süreçte gerçekleşen görsel deneyimlerin ya da imge dediğimiz kısımların resim ile aynı şey olmadığını ve bu nedenle resimler için doğru olanın tüm görsel deneyimler için de doğru olacağını varsayamayacağımızı belirtmektedir. Kullanılan temsili resimler görsel imgeleri yansıtarak düşünsel süreçte oluşturulan yapı hakkında fikir vermekle birlikte, görsel imgenin tüm özelliklerini içermemektedir. Bu nedenle temsili resimler fikirlerin, nesnelerin ve kavramların özelliklerini açıklamada yardımcı olurken bunları tüm yönleriyle göstermek konusunda eksiklikler içerebilmektedir. Giaquinto (2007), görsel imgeler ile temsili resimler arasındaki analojinin, yararlı olduğu kadar tehlikeli de olabildiğini vurgulamakta ve bir resmin temsil ettiği belli bir miktar olurken, görsel imgelerin belirli bir miktarı gerektirmediğini ve daha genel durumları kapsadığını belirtmektedir.

Bir temsil, bir nesneyi, bir işareti, bir karakteri içerebileceği gibi bunların bütüncül bir kullanımını da içerebilir. Temsil sistemleri, matematiğin yapısının ve bireysel öğrenmelerin anlaşılması açısından önem arz etmektedir (Goldin ve Shteingold, 2001). Bireyin psikolojik temsil gelişimi iki süreç içermektedir: Bunlar zihinsel süreçlerini

yansıtan, kişisel doğal dillerini, görsel imgelerini, problem çözme stratejilerini içeren simgeleştirme yapılarını ve matematiksel gösterimleri anlamlandırmalarını gösteren temsilin içsel sistemi ve bu anlamalarını yansıtan daha yapılandırılmış sözlü ya da yazılı olabilen ifadeleri içeren temsilin dışsal sistemidir (Goldin ve Shteingold, 2001). Dışsal temsillerin temelde matematiğin geleneksel sembol sisteminden farklılaştığı ancak içsel temsillerin bir yansıması olarak çeşitli formal notasyonları içerebildiği belirtilmektedir. Dışsal temsiller metinleri, resimleri, grafikleri, tabloları, animasyonları, ses ve müziği içerecek şekilde çeşitli formlarda ve bunların bir bileşimiyle çoklu şekilde oluşabilmektedir (Schnotz ve Kürschner, 2008). Bir bireyin sunulan bir dışsal temsili anlaması sürecinde, birden fazla içsel temsilin işe koşulduğu belirtilmekle birlikte sunulan dışsal temsilin de anlamayı etkilediği ve özellikle görsel temsillerin anlamayı sağlamada önemli olduğu ifade edilmektedir (Schnotz ve Kürschner, 2008). Buna göre Giaquinto'nun (2007) görsel imgeler ve temsili resimler arasında yaptığı ayrım, içsel ve dışsal temsil ayrımıyla açıklanabilir. Görsel imgeler bireyin içsel temsil sistemini oluştururken, bunları yansıtan temsili resimler ise dışsal temsil sisteminin bir ögesini oluşturmaktadır.

Schnotz ve Bannert (2003), matematiksel temsilleri tanımlayıcı ve betimleyici temsiller olmak üzere ikiye ayırmaktadır. Buna göre tanımlayıcı temsil, bir nesneyi veya kavramı tanımlayan, sözlü ve yazılı metinler, matematiksel denklemler ve mantıksal ifadeler gibi sembolleri içermektedir. Betimleyici temsiller ise bir nesnenin veya kavramın yapısal özelliklerinin anlaşılması ve ilişkilendirilmesini sağlayan resim, heykel, fiziksel model gibi ikonik işaretleri içermektedir. Buna göre matematikte kullanılan görsel temsiller, ele alınan kavramın yapısının ve özelliklerinin anlaşılmasında betimleyici temsil rolü görürken, bu kavramın matematiksel sembollerle ifade edilmesi tanımlayıcı temsil olarak görülebilir. Burada sadece dışsal temsilleri değil, içsel temsilleri de tanımlayıcı ve betimleyici şekilde ayırdıkları çalışmada Schnotz ve Bannert (2003), zihinde sözlü ve yazılı olarak oluşan semboller ile temsil edilen yapıları içsel tanımlamalar şeklinde, görsel imge ve zihinsel modelleri ise içsel betimlemeler olarak ifade etmektedir. Tanımlayıcı ve betimleyici temsil ayrımını metin ve resim temsilleri şeklinde ayırmakla birlikte bunlar ile öğrenmenin bir modelini ortaya koymaktadır. Bu modele göre metin temsiliyle başlayan kavramsal düzenleme sürecinde, metin temsili ile anlamsal işleme ile tutarlı bir önermesel temsile dönüşmesi sonucunda bir zihinsel modelin inşası gerçekleşmektedir. Resim temsiliyle başlayan süreçte ise resim temsili

algısal işleme ile görsel algı ve imgelere dönüşmesi sonucunda bir zihinsel modelin inşası gerçekleşmektedir (Schnotz ve Bannert, 2003). Bu temsil çeşitleri arasında etkileşim ile zihinsel modelin geliştiği ve tek bir temsil çeşidinin kullanılması yerine çoklu temsillerin bir arada etkileşimle kullanılmasının faydalı olduğu gösterilmektedir (Schnotz, 2005).

Diğer taraftan, matematikte görsel imgeler, semboller kadar önemli görülmektedir. Görsel imgeler, matematiksel dil ve sembollerle oluşturulmaya çalışılan gerçekliğin sezgisel olarak anlaşılmasına hizmet etmektedir (O'Halloran, 2005). Matematik tarihi boyunca görsel imgeler her aşamada kullanılmakla birlikte matematiksel sembollerin gelişmesine ve şekiller, grafikler, diyagramlar, tablolar gibi standart görsel temsillerin oluşmasına katkı sağlamıştır (Cajori, 2014/1919; O'Halloran, 2005). Bu anlamda görsel imgelerin, sözel, yazılı, sembolik ve görsel temsillerin oluşturulmasında, anlamlandırılmasında ve geliştirilmesinde etkili olduğu söylenebilir. Matematiksel fikirlerin ve kavramların anlaşılmasında, ifade edilmesinde görsel imgelerin gösterilmesini, oluşturulmasını ve geliştirilmesini sağlayan süreç görselleştirmeyi içermektedir (Nardi, 2014).

Matematiksel fikirleri ifade etmeye ve göstermeye yarayan matematiksel söylemler; dili, matematiksel sembolleri ve görsel imgeleri içermektedir (O'Halloran, 2005). Matematiksel sembollerin doğası birçok matematikçi tarafından yeniden formüle edilerek zamanla geliştirilmiş ve günümüzdeki halini almıştır. Matematiğin dili olarak ifade edilen ve çeşitli sembollerin kullanımıyla temsil edilen cebirin gelişim süreci üç evrede gerçekleşmiştir (Cajori, 2014/1919): Problemlerin ifadesinde ve çözümünde açıklamaların sözel dil olarak yer aldığı ve matematiğin ortaya çıktığı ilk yıllardan yaklaşık 16. yüzyıla kadar kullanımını sürdüren retorik cebir; niceliklerin ve işlemlerin sembolleştirilerek kullanılmaya başlandığı, çeşitli kısaltmalar ve işlem işaretlerini içeren 3. yüzyıl civarında gelişmeye başlayan senkoplu cebir; ve 16. yüzyıl itibarıyla matematiksel sembolizmin gösterge olarak geliştiği son evre olan sembolik cebir evresidir. Sözel ve sembolik dilin yer almasından çok daha öncesinde matematiğin ortaya çıktığı zamanlardan itibaren görsel imgelerin ve diyagramların kullanıldığı belirtilmektedir (Rival, 1987). Matematik tarihinde yazılmış ilk kitaplardan biri olan Euclid'in Elemanlar kitabı incelendiğinde tamamen retorik bir şekilde yazılmasıyla birlikte şekil temsillerini de içerdiği ve bu temsillere bakılmaksızın argümanların ve ispatların takip edilemeyeceği görülmektedir (Stylianou, 2002). Hatta sayılar teorisinin yer aldığı bölümlerinde niceliklerin uzunluklar olarak betimlendiği görülmektedir.

Benzer bir durum Arşimed'in kitabı için de geçerlidir (O'Halloran, 2005). Zaman içinde matematiksel dil, görsel imgeler ve semboller için kullanılan farklı işaret sistemleri ortaya çıkmış, bunlar Rönesans dönemine kadar bölgeye ve kişiye göre farklılaşmayı sürdürmüş ve Rönesans sonrasında evrensel olarak kabul edilen sembol sistemleri oluşturulmuştur (O'Halloran, 2005). Sembollerin inşasını ve anlamlarının oluşturulmasını ve kullanımını içeren bu süreç sembolleştirme olarak ifade edilmektedir. Problem çözmede sembolleştirme, daha gerçekçi temsillerden sembolik bir denkleme dönüştürme sürecini içermektedir (Bartel ve Alibali, 2021).

Matematiğin tarihsel sürecindeki problemlerin çözülme şekline, çeşitli teorem ve ispatların ifade edilme yöntemlerine, dil yapısının ve sembollerinin gelişim sürecine bakıldığında, görsel düşünmenin matematik yapmanın her aşamasında yer aldığı görülmektedir (O'Halloran, 2005; Rival, 1987). Görsel düşünme, ele alınan bir olgu veya durumun zihinde canlandırılmasıyla veya çeşitli imgeler aracılığıyla anlaşılmasını sağlamanın yanında, kişinin akıl yürütme becerilerini kullanması ve çeşitli düşünme yolları geliştirmesi için araçlar sunmaktadır (Arnheim, 1969; McKim, 1980). Ayrıca bu düşüncelerini göstermek ve bunların görünür olmasını sağlamak amacıyla çeşitli dışsal temsilleri içermektedir. Bu anlamda görsel düşünmenin, bireyin anlamasını, düşünmesini ve düşüncelerini ifade etmesini sağladığı söylenebilir. Görsel düşünmeyi içeren bu sürecin zihinsel bir deney yapma süreci olduğu, gerçek hayatta deneyimle edinilen bilgilerin görsel düşünme sayesinde zihinsel bir süreçle elde edilebileceği söylenebilir. Nitekim zihinsel deneyler yapmayı içeren matematik yapma ve problem çözme süreci de görsel düşünmeyi içermektedir (Giaquinto, 2007).

Matematikte sembolleştirme sürecinin başarılı bir şekilde gerçekleştirilmesi ve formal matematiğin hızla gelişmesiyle birlikte 20. yüzyıl başlarında görsel yaklaşımlardan uzaklaşmaya ve tamamen sembolik çalışmaya yönelimin olduğu belirtilmektedir (Zimmerman ve Cunnigham, 1991). Matematiksel kavramların ve sembollerin tarihsel gelişim süreciyle çocuklardaki matematiksel fikir ve kavramların bilişsel gelişimi arasında güçlü bir paralellik olduğu ifade edilmektedir (Heeffer, 2013). Bu anlamda yukarıda bahsedilen matematik tarihindeki cebirin gelişim süreci, çocukların matematik öğrenmeleri sürecinde semboller öğrenirken geçtikleri sürece benzerlik göstermektedir. Matematik öğrenimindeki bu süreç erken cebire karşılık gelmektedir.

Matematik eğitimcileri tarafından görselleştirme, matematikteki kavram ya da problemlerin geometrik veya grafik görüntülerinin elle veya bilgisayar desteğiyle

oluşturulma ve kullanım süreci olarak tanımlanırken (Zimmerman ve Cunnigham, 1991), aynı zamanda görsel bir modelin zihinsel bir yapıya dönüşüm süreci olarak da tanımlanmaktadır (Schnotz ve Kürschner, 2008). Böylece görselleştirmenin, bireyin duyular yoluyla algıladığı yapıları zihninde canlandırması ve zihninde oluşan bir yapının herhangi bir şekilde fiziksel dünyaya aktarılması şeklinde iki yönlü gerçekleştiği ifade edilebilir. Bir sonraki başlıkta matematik eğitiminde görsel düşünmenin nasıl ele alındığı özetlenmekte ve görsel düşünmenin etkili olduğu temsil kullanımı, sembolleştirmenin gelişimi ve soyutlama süreçlerini içeren erken cebir ele alınmaktadır.

1.2. Matematik Eğitiminde Görsel Düşünme ve Erken Cebir

Matematik eğitimi çalışmalarında görsel düşünmenin ve görselleştirme yaklaşımlarının incelenmesi 1970'lerin başında başlamıştır ve ilk olarak Bishop (1973) tarafından, somut materyallerin kullanılmasının uzamsal algı ve uzamsal beceriye etkisi boyutuyla ele alınmıştır. İlerleyen çalışmalarında Bishop (1980), geometriden ziyade cebirsel matematik bağlamında Bruner'in yaklaşımını benimsemekte ve ileri derecede görsel düşünmeyi içeren problemler sunan Krutetskii'nin çalışmalarına atıf yapmaktadır. Bishop, görsel düşünmeyi içeren iki tür beceriden bahsetmektedir (Presmeg 2008; 2006): (1) *şekilsel bilgiyi yorumlama* (interpreting figural information), şekil, grafik, tablo, diyagram gibi her türlü görsel temsili ve uzamsal kelime dağarcığını anlamayı ve yorumlamayı içeren beceri, (2) *görsel işleme* (visual processing) ise soyut ilişkilerin ve şekilsel olmayan bilgilerin görsel terimlere çevrilmesi, görsel imgelerin ve temsillerin değiştirilmesi ve dönüştürülmesi becerisi, yani görselleştirme becerisidir. Bunların ilki görsel bir yapıyı okumayı ve yorumlamayı içerirken, diğeri görsel yapıları oluşturmayı ve bunlar üzerinde işlem yapmayı içermektedir. Clements'e göre (2014) görselleştirme, kişinin zihninde görüntü geliştirdiği ve kullandığı bireysel bir süreçtir. Presmeg (2006), görselleştirmenin hem zihinsel imgeleri hem de matematik yapmayı içeren uzamsal nitelikteki tüm yazım şekillerini (diyagram, tablo, semboller) oluşturma ve dönüştürme sürecini içerdiğini belirtmektedir. Presmeg (2020) görsel imgelerin, bir çizimin ya da uzamsal bir düzenlemenin yaratılmasına temel oluşturduğu fikri üzerine, içsel ve dışsal imgeler arasında ayırım yapılmaması gerektiğini, bunların birbirini içerdiği ve yansıttığını kabul etmektedir.

Presmeg (2020; 2006; 1986), bir problem veya görev karşısında kişiye bir tercih sunulduğunda görsel yöntemleri tercih ediyorsa bu kişiyi *görselleştirici* olarak

tanımlamaktadır. Bunun dışında Presmeg (1986), matematik eğitiminde görselleştirmenin kullanılmasında temel olacak birkaç kavramı da sunmaktadır. Bir matematik probleminin çözümünün görsel imgeleri kullanarak veya herhangi bir görsel imge kullanmaksızın sunulabileceğini, bir kişinin bunlar arasında tercih yaparken matematiksel görsellik derecesine göre karar verdiğini belirtmektedir. Presmeg (1986) matematiksel görselliği, bireyin bir matematik problemini çözerken görselleştirme yöntemlerini kullanma becerileri olarak ifade etmektedir. Öğretmen ve öğrencilerin görsel imgeler oluşturarak öğretimin gerçekleşmesini *görsel sunum* olarak ifade ederken, bir öğretmenin öğretim esnasında görsel sunumları kullanmasını *görselliğin öğretimi* olarak ifade etmektedir. Görsel sunumları kullanmanın bireysel bir tercih olabileceği vurgulanmaktadır. Bununla birlikte Krutetskii (1976), mantıksal analiz olmadan matematik yapılamayacağını belirterek, görsel destekler olarak ifade ettiği görselleştirmelerin kullanımının isteğe bağlı olduğu kadar matematiksel işlemlerin mantıksal analizini yansıtmada oldukça etkili olduğunu göstermektedir. Hershkowitz de görsel düşünmeyi, matematiksel düşünmenin bir şekli olarak ifade etmenin yanında görselleştirmeyi, matematiğin dillerinden biri olarak kabul etmekte ve düşüncelerin ifade edilmesini sağlayan bir araç olduğunu belirtmektedir (akt. Nardi, 2014). Bishop (1988) da matematik eğitiminde görselleştirme yaklaşımlarının sadece problem çözme bağlamında kalmaması ve bir konunun ilk öğretilme aşamasında görsel sunumlardan yararlanılması gerektiğini, ancak görselleştirmenin bireysel bir süreç olması nedeniyle öğretmenin titiz bir süreç işletmesi gerektiğini vurgulamaktadır.

Presmeg (1986, s.43-44), öğrencilerde beş farklı görsel imgeleme olduğunu belirlemiştir; (1) somut, resimsel imgeleme (zihindeki resimler), (2) örüntü imgeleme (görsel-uzamsal olarak tasvir edilen ilişkiler), (3) formülleri hatırlama imgeleri, (4) kinestetik imgeleme (kas aktivitelerini içeren), (5) dinamik (nesnelerin veya görsellerin hareketli olduğu) imgeleme. Ayrıca bu imgeleme türlerinin her öğrencide farklı kombinasyonlarda birden fazla şekilde yer alabildiğini belirtmektedir. Somut-resimsel imgeleme ve dinamik imgelemenin içsel temsilleri yansıttığı ifade edilmektedir (Lowrie, 2012). Bahsedilen bu görsel imgeleme çeşitleri, görsel imge denildiğinde yalnızca resimsel görüntülerin anlaşılmasında gerektiğini, bunların yanında çeşitli bedensel hareket ve jestlerin de dahil olduğunu göstermektedir. Ayrıca görsel imgeleme türlerine bağlı olarak görselleştirme süreçlerinin faydalarını sıralamaktadır (Presmeg, 1986, s.45); (1) her türden canlı görüntünün anımsatıcı avantajları vardır, (2) somut imgelemeler, analiz,

mantık veya formüllerin görsel olmayan basit kullanımı gibi soyut görsel olmayan durumlarla dönüşümlü olarak birbirinin yerine geçmelerinde etkilidir, (3) dinamik imgeleme etkileme potansiyeline sahiptir, (4) soyutlamaya hizmet eden imgelemeler etkilidir, bunlar bahsedilenin somutlaştırılması ve örüntü imgelemeyi içermektedir. Bahsedilen bu faydalar, görselleştirmenin çocuklarda soyutlamanın gelişimine katkı sağladığını göstermektedir. Presmeg (1986, s.44-45) görselleştiricilerin bu süreçte karşılaştığı zorlukları da belirlemiştir; (1) bir imge ya da diyagramın tek durumlu somutluğu düşüncüyü alakasız ayrıntılara bağlayabilir, hatta yanlış veriler sunabilir, (2) standart bir şekil imgesi, standart olmayan bir diyagramdaki bir kavramın tanınmasını engelleyen esnek olmayan bir düşünceye neden olabilir, (3) kontrol edilemeyen bir görüntü kalıcı olabilir, bu da daha verimli düşünce yollarının açılmasını engelleyebilir, (4) titiz analitik düşünce süreçleriyle birleştirilmeyen imgeler yararsız olabilir. Presmeg (2020) bu zorluklarla başa çıkmak için iki öneri sunmaktadır; ilki, bir somut durumun görsel imge ve ifadesinin soyut bilginin taşıyıcısı, soyut nesnenin bir işareti olması gerektiği, ikincisi ise metaforlar aracılığıyla soyut matematiksel nesnelerin alanıyla görsel imgeleri ilişkilendirmektir. Bu anlamda dinamik imgeleme ve örüntü imgelemenin yararlı olacağını önermektedir. Bahsedilen bu zorluklar ve önleme yöntemleri, matematik eğitiminde görselleştirmeyi kullanma sürecinde yol gösterici olmaktadır.

Görselleştirmenin bireysel bir tercih olması nedeniyle, bunun tercih edilmeyebileceğini belirten çalışmalar da yer almaktadır. Bazı öğrencilerin resimler aracılığıyla düşünmekten hoşlanmadıkları iddia edilmekle birlikte Terence Tao gibi üstün yetenekli bir matematikçinin görselleştirme yaklaşımlarını tercih etmediği öne sürülmektedir (Clements, 1984). Buna karşın, matematikte yetenekli çocukların görselleştirme becerilerinin yüksek olduğu gösterilmekte (Krutetskii, 1976) ve böyle çocukların görselleştirme becerisi olmasına rağmen bunu kullanmayı tercih etmeyebilecekleri ifade edilmektedir (Presmeg, 2006). Öğrencilerin matematik sorularını çözerken görselleştirme eğilimlerini inceleyen çalışmalarda, öğrenciler matematik testlerinde görsel yöntemleri kullanmasalar bile görsel temsilleri yorumlamayı, kullanmayı ve oluşturmayı içeren görselleştirme becerilerini ölçen testlerde iyi oldukları, ayrıca kendilerini görsel düşünür olarak ifade eden öğrencilerin matematik testlerinde görsel yöntemleri kullanma eğiliminde oldukları ve bu öğrencilerin genellikle matematiksel olarak daha zayıf öğrencilerden oluştukları belirtilmektedir (Clements, 2014). Çocukların resimlerle düşünmekten hoşlanmadıkları iddiasının çok genel olduğu,

resimlerin hangi dönemde ve nasıl sunulmasının beklendiği konusunun daha titiz incelenmesi gereken bir konu olduğu belirtilmektedir (Clements, 2014; Presmeg, 2006). Ayrıca Presmeg (2020), bir görevin nasıl karşılanacağını belirleyen faktörleri belirtmekte; görevin kendisi, görevi belirli bir şekilde yapmanın talimatları, bireysel tercihler ve görselleştirmeye değer verilip verilmemesini içeren matematik öğrenme ortamı kültürünün çocukların görselleştirme yaklaşımlarını kullanmalarında belirleyici faktörler olduğunu ifade etmektedir. Nardi (2014), görsel yaklaşıma alışık olmayan çocukların bunu pek yararlı bulmayabileceğini, görselleştirmenin uygulanmasına yönelik kuralların öğrenciler için de açık hâle gelmesini sağlayacak bir didaktik sözleşmeye ihtiyaç olduğunu vurgulamaktadır. Ayrıca görselleştirme yaklaşımlarının sembolizmle çalışmaya kıyasla daha çok zaman alabileceği, ancak bir iç görü sağlama ve soyutlama gücümüzü desteklemesiyle bunun ileride telafi edileceği belirtilmektedir.

Matematik eğitiminde görsel düşünme ve görselleştirmenin kullanılmasının etkili ve gerekli olmasının nedeni olarak, imgelemenin matematiksel soyutlama ve genelleme süreçlerine yardımcı olması ve desteklemesi gösterilmektedir (Presmeg, 2006). Öğrencinin bir kavramı öğrenmesinde temel olan kavram imajı teriminin, kavramla ilgili öğrencinin zihinsel resimlerini içeren bilişsel yapı olduğu ve görsel imgelemenin bunun için temel teşkil ettiği belirtilmektedir (Tall ve Vinner, 1981). Öğrencilerin bilişsel anlamalarının bir göstergesi olan içsel temsillerin, kavram imajlarının oluşmasında ve bir görevin tamamlanmasında kendi temsillerini oluşturma esnasında bilgi kodlama sürecini içerdiği ve bu sürecin anlamlı bir şekilde öğrenmeyi sağladığı belirtilmektedir (Lowrie, 2012). Bir bilginin görsel olarak temsil edilmesi kodlama ve görsel temsille sunulan bilginin anlaşılması kod çözme olarak ifade edilmektedir. Sözlü olarak ifade edilen problemler için bir diyagram çizilmesi gibi görsel temsillerinin oluşturulması bilginin kodlanması olurken, sunulan diyagram ve temsillerdeki gömülü bilginin çıkartılması kod çözme olarak ifade edilmekte ve son zamanlarda problem durumlarının sözel olarak ifade edilmek yerine görsellere dayalı olarak sunulduğu da belirtilmektedir (Lowrie, 2012). Öğrencilerin kodlama becerileri üzerine yapılan çalışmalar problemleri anlamlandırmak için resimleri ve diyagramları ne ölçüde kullandıklarını incelerken, kod çözme becerilerini inceleyen çalışmalar sunulan farklı yapı ve diyagramları ne ölçüde anlamlandırdıklarını incelemektedir (Lowrie, 2012). Özellikle yeni ve karmaşık bir problemle karşılaşılması durumunda, daha görsel ve somut temsillerin oluşturulmasına izin verilmesinin problemin çözümünü kolaylaştıracağı ve kod çözme içeren

problemlerin çözümünü de olumlu etkileyeceği belirtilmektedir (Lowrie, 2012). Ayrıca öğrencilerin kendi çizdikleri resimlerin ve diyagramların kendi iç dünyalarını da yansıttığı için problemi anlamalarında daha güvenilir bir rehber olduğu, özellikle karmaşık problemlerin çözümünde kodlama becerilerinin kullanımının teşvik edilmesi gerektiği ifade edilmektedir (Lowrie, 2012). Bu anlamda görsel düşünmenin ve görselleştirmenin kullanılması, kavramların anlamlandırılmasının yanında problem çözme süreçlerini de desteklemektedir.

Problem sunumunda kullanılan resim temsillerinin problem çözme sürecindeki etkisini meta analiz çalışmasıyla inceleyen Hu vd. (2021), problemlerde resimlerin dört işlevde kullanıldığını belirtmektedir: Dekoratif, temsili, organizasyonel ve bilgilendirici. Buna göre dekoratif resimler problem durumuyla hiç ilgisi olmayan veya çok az ilgili olan, sadece ilgi çekmek için kullanılan resimlerdir. Temsili resimler metindeki bilginin somut illüstrasyonlarını içeren problem bağlamıyla yakından ilgili olan ve problemin anlaşılmasında etkili olan resimlerdir. Organizasyonel resimler metindeki bilgi yapılarını sunan ve bunları çeşitli şekillerde şematize eden resimlerdir. Bilgilendirici resimler ise problemi çözmeye yardımcı olan diyagram, çizelge gibi detayları içeren ve problem durumuyla resimlerin iç içe sunulduğu resimlerdir. Hu vd. (2021), bazı problemlerde birden fazla işleve sahip resim temsillerinin kullanıldığını belirtmekle birlikte, dekoratif resimlerin belirgin bir işlevi olmadığını, temsili resimlerin problem metnini yorumlamayı sağlamakla birlikte sınırlandırıcı da olduğunu, bilgilendirici resimlerin metin ve resmin birbirini tamamlayarak zengin bir içerik sunduğunu ve organizasyonel resimlerin zihinsel modellerin oluşmasında tamamlayıcı ve derin anlamayı inşa etmede yardımcı olduğunu ifade etmektedir. Çalışmanın sonuçları arasında problem çözmeye, dekoratif haricindeki resimlerin kullanılmasının öğrencilerin problem çözme hızlarını ve akıcılıklarını artırdığı yer almaktadır (Hu vd., 2021). Benzer bir yaklaşımla, iki ve üç işlemli hikâye içeren problemlerin çözümünde diyagramların kullanımının, sembolleştirmenin gelişimi açısından incelenen çalışmada Bartel ve Alibali (2021), diyagramların kullanımının kavramsal olarak doğru eşitliklerin oluşturulmasını desteklediğini ve özellikle kullanılan diyagramların ayrı bir şekilde sunulması yerine işlemlerle entegre olarak sunulmasının daha etkili olduğunu belirtmektedir. Böylece problem çözme sürecinde görselleştirmenin kullanım şekillerinin problem çözmeyi doğrudan etkilediği görülmektedir.

Buraya kadar anlatılanlardan hareketle, matematik eğitiminde kavramların öğrenimi ve problem çözme süreçlerinde görsel düşünme yaklaşımlarının etkili olduğu,

özellikle soyutlama ve genelleme süreçlerinin yaşanmasını desteklediği söylenebilir. Matematik eğitiminde aritmetikten cebire geçişte sembolleştirmenin öğreniminin yanında soyutlama ve genelleme süreçlerinin yaşandığı evre erken cebir olarak ifade edilmektedir. Bu anlamda erken cebir sürecinde görsel düşünmenin kullanımının etkili olabileceği düşünülmektedir.

Tarihsel süreçte cebirin, sayılar ve hesaplamalarla ilgilenen aritmetiğin genelleştirilmiş ilişki ve kuralları şeklinde sonradan ortaya çıktığı belirtilmekle birlikte, aritmetiğin bitip cebirin başladığı bir ayrım noktasının olmadığı, ikisinin birlikte yapılandırıldığı da vurgulanmaktadır (Carreher vd., 2006; Mason, 2008). Ancak Kilpatrick ve Izsák (2008), matematik öğrenme sürecinde aritmetik kullanarak ve cebir kullanarak problem çözme arasında öğrencilerin deneyimlerinde bir kopuş yaşandığını, öğrencilerin aritmetik yaparken yakaladıkları deneyim fırsatlarını genelleştirme ve cebirsel semboller kullanma etkinliklerinde yakalayamadıklarını ve bu nedenle de öğrenciler için cebirin zor olduğunu belirtmektedir. Öğrencilerin aritmetik deneyimleri esnasında yapıları kavrayıp, hipotezler geliştirip, bunları test etmeyi yaşamaları önerilmekte ve bunun sonrasında cebirle karşılaştıklarında da aynı şeyleri yapmaya hazır olacakları öngörülmektedir (Schoenfeld, 2008). İlkokul programında yer verilen cebir, özellikle cebirsel düşünmenin geliştirilmesini içeren ve “sayıların ve niceliklerin genelleştirilmiş aritmetiği” şeklinde erken cebir olarak yer almaktadır (Carraher, Schliemann, Brizuela ve Earnest, 2006, s.88). Bu anlamda cebirsel düşünmenin aritmetik öğretiminden itibaren geliştirilmesinde erken cebir öğreniminin önemli olduğu düşünülmektedir (Carreher vd., 2006; Mason, 2008).

Ding (2021, s.xi) örnek temelli problem çözme yaklaşımını kullandığı çalışmasında cebirsel düşünmenin geliştirilmesinde erken cebiri, “temel matematiksel fikirlere odaklanma ve matematiğin altında yatan derin yapısını anlamaya çalışma” olarak ifade etmektedir. Yaklaşımında ise örneklerle çalışma, temsilleri kullanma ve derinlemesine sorular sorma bileşenlerine yer vermekte ve matematiğin iki temel fikri olarak işlemlerin temel özellikleri ve ters ilişkiler konularına odaklanmaktadır (Ding, 2021).

Cebirsel düşünme, erken cebir aşamasında aritmetik işlemlerinin özelliklerinin bir genelleştirilmesi olarak ifade edilmektedir (Kaput, 2008). Bu anlamda ilişkisel düşünmenin, aritmetiksel düşünme ile cebirsel düşünme arasında bir köprü rolü gördüğü, sayılar arasında ilişki kurmayı, işlemlerin temel özelliklerini kullanmayı ve eşittir işaretinin anlamını bilmeyi içermesinin yanında stratejik kararlar vermeyi de içerdiği

belirtilmektedir (Andini ve Prabawanto, 2021). Diğer yandan, durumları ve problemleri niceliksel olarak anlamlandırmanın bir yönü olan niceliksel muhakeme, cebirsel düşünmenin geliştirilmesinde bir bileşen olarak ele alınmaktadır (Carraher, Schliemann ve Schwartz, 2008; Smith ve Thompson, 2008). Niceliksel muhakemenin aritmetiksel düşünme ve sayısal muhakemeler ile cebirsel düşünmeye geçişte önemli bir denge kuracağı ifade edilmektedir (Smith ve Thompson, 2008). Sunulan bir durumda değişen çokluklara göre nasıl bir değişimin olduğunun incelenmesini içeren fonksiyonel düşünme ise cebirsel düşünmenin genelleştirilmiş aritmetik ve modelleme yaklaşımının temelinde yer aldığı düşünülmektedir (Carraher ve Schliemann, 2018). Smith (2008), cebirsel düşünmeyi, bireysel yaratıların ve zihinsel süreçlerin gösterildiği *temsili düşünme* ve kurallı bir sembol sisteminin kullanıldığı *sembolik düşünme* olmak üzere iki sürece ayırmakta ve bunlar arasındaki ilişkinin cebirsel düşünmeyi içerdiğini belirtmektedir. Ayrıca, değişen nicelikler arasındaki ilişkilerin genelleştirilmiş bir sunumu olarak temsili düşünmenin fonksiyonel düşünme içerdiğini belirtmektedir. İlkokul seviyesinde örüntülerin incelenmesi ve genellenmesi sürecinde öğrencilerin sembolik cebirsel düşünme gelişimini inceleyen Radford (2018), semiyotik göstergelere dikkat çekerek öğrencilerin sembolik olmayan göstergelerle başlayıp sembolik göstergelere geçiş yaptıklarını göstermektedir. Kieran (2011) ise “aritmetiğin kendisine cebir gözüyle bakılması gerektiğini” vurgulamakta ve belirtilen tüm bu yaklaşımları bütüncül düşünerek cebirsel düşünmenin, özelden genele düşünmeyi, örüntüler hakkında kural bazlı düşünmeyi, ilişkisel düşünmeyi, temsili düşünmeyi, işlemleri kavramsal olarak düşünmeyi, tahmin etme varsayımında bulunma ve gerekçelendirmeyi, jest ve mimikler ile görselleştirme ve dil içerdiğini belirtmektedir.

Erken cebir öğretiminde matematiksel sembollerin gelişimini ve sembolleştirmenin doğasını Kaput, Blanton ve Moreno (2008) temelde dört adımlı bir süreç olarak sunmaktadır. Buna göre, öncelikle bir durumun, fenomenin, olayın deneyimlenmesi, incelenmesi, tanımlanması ve anlaşılmasını içeren bir durumun yaşandığı; bu durumun incelenmesi ve tartışılması sonucunda sözlü, yazılı ya da çizili şekilde tanımlanması ile informal şekilde temsil edildiği; karşılıklı etkileşimin artması ve sembolleştirmenin dinamik sürecinin devam etmesiyle daha rafine ve sistematik fiziksel temsillerin oluşturulduğu; bu sürecin devam etmesiyle daha sıradan ve soyut temsil şekillerinin oluşturulduğu bir süreç ile temsillerin inşa edildiği açıklanmaktadır.

Öğrencilerin bilgilerini yapılandırma sürecinde temsillerin, öğrencinin bilgisini tamamlayan bir parça olduğu belirtilmektedir. Bilginin yapılandırılmasıyla ilgili olarak Smith (2008), bireylerin zihinsel süreçte kendi temsil sistemlerini geliştirdiği ve bunların olgunlaşması ile geleneksel sembol sistemlerine dönüştüklerini ifade etmektedir. Daha somut ve fiziksel olan modeller gibi temsil formları da dâhil, tüm temsiller bir dönüşüm (translation) ve soyutlama (abstraction) içermektedir (Warren ve Cooper, 2009). Buradaki dönüşüm daha somut düzeydeki yapılardan daha soyut düzeydeki yapılara geçmeyi içerirken, soyutlama ise bu yapılar üzerinde gerçekleştirilen matematiksel işlemlerin keşfedilmesi ve kullanılmasını ifade etmektedir. Warren ve Cooper (2009) bu matematiksel yapıların ve soyutlamanın yapılabilmesini öğrencinin belirli örneklerden genel kurallara genelleme ve gerçek yaşam durumlarından soyut temsillere geçebilme yeteneğine bağlı olduğunu belirtmektedir. Burada kritik olanın, öğrencilerin özel olanı algılamak ve bunu geneli kavramak için kullandığı, sırasıyla kavrama ve ifade etme olarak belirtilen bu iki bileşen olduğu vurgulanmaktadır. Genellemeleri ifade etme durumunda ise sembolik ifadelerin yanı sıra bağlamsal dil kullanımıyla veya semiyotik olarak jest ve mimiklerin kullanımı da yer alabilmektedir (Radford, 2018).

Cebirsel ifadelerin ve ilişkilerin ilköğretim seviyesindeki çocuklar tarafından fark edilmesi ve anlaşılmasının, sunulan yapıların soyutlama derecesiyle doğrudan ilişkili olduğu ifade edilmektedir (Goldenberg, 2014). Örneğin, sunulan iki ifadenin karşılaştırılmasının istendiği bir çalışmada ikinci sınıf öğrencileri, $7+5 ? 7+4$ şeklinde sunulduğunda hesaplama yaparak $<$, $>$ veya $=$ işaretlerinden birinin geleceğine karar verirken, bu ilişki $\clubsuit +5 ? \clubsuit +4$ şeklinde birbirine eş simgeler ile verildiğinde çocukların aritmetikten ziyade yapıya odaklanacakları ve hangisinin daha büyük olduğunu ifade edecekleri gösterilmektedir (Goldenberg, 2014, s.149-150). Çocukların yapıları anlamalarında ve düşünmelerinin gelişmesinde somuttan soyuta doğru bir yaklaşımın izlenmesi gerektiği bilinmektedir (Bruner, 1966; Beth ve Piaget, 1974). Genel anlamda, karşılaşılan durumları, fikirleri, işlemleri benzerliklerine göre sınıflandırıp, ortak özellikleri bakımından onları genellemek ve belli bir şema altında tanımlamak, başlangıç seviyesinde soyutlama yapmak olarak ifade edilmektedir (Skemp, 1987; Mitchelmore ve White, 2007).

Piaget soyutlamayı, duyular aracılığıyla deneysel olarak bilinebilen nesnelerin özelliklerine odaklanan *deneysel soyutlama* (empirical abstraction) ve nesneler arasındaki benzerlik ve ilişkilere odaklanan zihinsel eylemler aracılığıyla gerçekleşen *yapıcı*

soyutlama (constructive abstraction) şeklinde iki türe ayırmaktadır (Kamii, Kirkland ve Lewis, 2001). Yapıcı soyutlamanın, deneysel soyutlamaya göre daha üst düzey bir soyutlama olduğu, ancak deneysel soyutlamadan bağımsız olarak gerçekleşmeyeceği belirtilmektedir. Yapıcı soyutlamanın inşasında, nesnelerin dışsal gerçeklikteki bilgisini içeren *fiziksel bilgi*, nesneler üzerine insanlar tarafından üretilmiş ve üzerinde uzlaşılmış *sosyal bilgi*, nesneler arasındaki ilişkinin anlaşılmasında zihinsel ilişkilerden oluşan *mantıksal-matematiksel bilgi* olmak üzere üç bilgi türü yer almaktadır (Kamii, Kirkland ve Lewis, 2001). Aritmetik becerilerini geliştirme sürecinde çocuklar, somut nesneler ile çalışmaya başlayarak, resim gibi yarısomut yapılarla devam edip sonunda soyut sembollere geçmektedir. Erken cebir sürecinde de benzer bir sürecin izlenerek somut ilişki ve yapılardan başlanarak bu ilişkileri temsil eden soyut sembollere geçilmesi gerekmektedir. Piaget, soyutlama sürecinde kullanılan temsilleri sınıflandırmakta, temsil edilen nesneye benzeyen ve çocuklar tarafından üretilen resimler ve çizgiler gibi temsilleri *simgeler* ve temsil edilen nesneden farklı olarak insanlar tarafından geliştirilmiş ve çocukların kendi üretemeyecekleri temsilleri *semboller* olarak ifade etmektedir (Kamii, Kirkland ve Lewis, 2001). Kamii, Kirkland ve Lewis (2001, s.28) 4-6 yaşındaki çocuklarla yapılan çalışmalar sonucunda, istenen çoklukların gösterilmesinde çocukların kullandıkları notasyonların altı farklı şekilde olduğunu göstermişlerdir: 1) miktarın genel temsili, 2) nesne türünün temsili, 3) sembollerle bire bir örtüşme, 4) rakamlarla bire bir örtüşme, 5) tek başına kardinal değer, 6) kardinal değer ve nesne türü. Çocukların kullandıkları bu temsil farklılıklarının sembollerden işaretlere doğru değiştiği ve soyutlaştığı görülmektedir. Bu temsil çeşitleri Duval (2008) tarafından sunulan semiyotik temsil sınıflamasıyla paralellik göstermektedir.

Erken Cebirsel Düşünme Projesi (Early Algebraic Thinking Project, EATP) sonrasında genelleme ve soyutlama yapma sürecinde öğrenme-öğretme yol haritalarındaki model ve temsillerin kullanımına ilişkin altı hipotez içeren bir teori geliştirilmiştir (Warren ve Cooper, 2009, s.91-92; Cooper ve Warren, 2011, s.209-211): (1) Soyutlamaya geçiş bir temsil içinde değil, yapılandırılmış bir dizi temsiller arasındaki geçiş ile gerçekleşir; soyutlama temsilden temsile genellemedir. (2) Etkili temsiller matematiksel fikirlerin altında yatan yapıyı gösterir ve bir temsilin etkili olmasındaki en önemli kriter içsel zihinsel temsilin en önemli yönlerini kapsayan ve onu en iyi yansıtan dışsal temsillerin kullanılmasıdır. (3) Temsilleri soyutlamaya genellemek için yapısal olarak geçilen süreç; somuttan dinamiğe, statikten sembollere şekilde artan esneklik;

eylemdeki genel yapıdan görselde ima edilen yapıya ve zihinde görselleştirilen yapıya azalan aşikâr yapı; sonraki temsillerin önceki temsillerin sınırlılıklarını telafi ettiği artan kapsam; temsilin biçimini her zaman gerçek yaşam durumuyla ilişkilendirerek gerçeğe bağlılık içermektedir. (4) Ardışık temsiller birbiriyle iç içe geçmiş ve birbirinin alt kümesi olacak şekilde gelişmelidir. (5) Birden fazla temsil entegre edilerek karmaşık prosedürler kolaylaştırılabilir, ancak bu hassas bir dengedir. (6) Zihinsel modelin özünü oluşturan ortak noktaların belirlenmesi için aynı zihinsel modelin farklı temsilleri karşılaştırılarak soyutlama kolaylaştırılabilir, aynı zamanda matematiksel fikrin gelişimi için en az iki temsil arasında geçiş ile yapılandırılmalıdır. Sunulan bu altı hipotez ile temsillerden genellemeye soyutlamanın nasıl gerçekleştiği açıklanmaktadır.

Aritmetik öğrenimini de içeren erken cebir öğreniminde dikkat edilmesi gereken noktalar ve ileride öğrenciler cebir çalışmalarına geçtiklerinde oluşabilecek kavram yanlışlarını önlemek için yapılması gerekenler birçok çalışma tarafından belirtilmektedir. Matematikteki öğrenme zorluklarının ve anlama eksiklerinin en çok dillendirilen ve en önemli nedeninin matematikte sembolleştirmenin kullanımı olduğu ifade edilmektedir (Heeffer, 2013). Sembolleştirmenin böyle bir zorluk olarak görülmesinin temel nedeninin matematiğin epistemolojik bir engeli olduğu, matematiğin tarihsel gelişiminde de benzer zorlukların yaşandığı gösterilmektedir (Brousseau, 2002; Heeffer, 2013). Sembolleştirmenin matematik öğretim programlarında ne zaman ve nasıl yer verildiğinin önemli olduğu, çok erken yaşlarda verilmesi durumunda sembolleştirmenin anlamını ve nedenini anlamalarında eksikler olabileceği, çok geç yaşlarda verilmesi durumunda ise matematiksel yöntem ve kavramların semboller aracılığıyla öğretilmeyeceği vurgulanmaktadır (Heeffer, 2013).

Welder (2012), erken cebir öğretiminde karşılaşılan zorlukları derlediği çalışmasında sembolik temsillerin kullanımına yönelik dört temel zorluğun, parantez kullanımı, eşittir işareti, işlem sembolleri ve harflerin kullanımı olduğunu belirtmekte ve bunların önlenmesine yönelik önerileri de sıralamaktadır. Bu sembollerin yalnızca verilen işlemsel durumlar üzerinden öğretilmesi durumunda anlamsız olacağı, sunulan bir problem durumunda öncelikle somut olarak anlaşılmasının ardından sembollerin kullanılması gerektiği vurgulanmaktadır. Byrd ve arkadaşları (2015), özellikle eşittir işaretinin çocukların erken cebir öğrenimini çok temelden etkilediğini göstermektedir. Draper ve Lott (2020), öğrencilerde oluşan kavram yanlışlarının ve yanlış anlamaların temel nedeni olarak öğretimde ağırlıklı olarak işlemsel becerilere odaklanması ve

işlemlerin altında yatan matematiksel fikirlere yeterince bağlanmadan anlatılması olarak belirtmektedir. Öğrencilerin kendi kavram yanılgılarını, yanlış anlamalarını ve hatalarını fark ettiklerinde ve bunların neler olduğunu keşfettiklerinde öğrenmenin daha kalıcı olarak gerçekleştiğini vurgulamaktadırlar. Erken cebir öğretimini bireyi geleceğe hazırlamada bir eşik bekçisi olarak gören Knuth vd. (2016), cebirde başarı için kritik olan üç noktayı; bilinmeyenleri veya değişen miktarları temsil etmek için değişkenleri kullanma yeteneği, eşittir işaretinin iki eşdeğer miktar arasındaki ilişkiyi temsil ettiğinin kavranması, örüntüleri tespit etme, oluşturma ve sembolik olarak genelleştirme becerisi şeklinde sıralamaktadır. Ayrıca gerçekleştirdikleri projede (LEAP – Learning through an Early Algebra Progression) erken cebir öğretiminde 3.-5. sınıf seviyelerinin en kritik dönem olduğunu belirtmektedirler.

Mason (2008), çocukların cebirsel düşünme becerilerini geliştirmek için onlarda halihazırda var olan güçlerin kullanılması gerektiğini belirtmektedir. İnsanın deneyimlerini anlamlandırarak öğrendiğini ve “anlamak” için görme, duyma, dokunma gibi duyularını kullandığını böylece fiziksel ve duygusal anlamının gerçekleştiğini belirtmektedir. İnsanın doğasında bulunan bu anlama yetisinin yalnızca fiziksel şekilde değil, hayal etmeyle, hatırlamayla, yeniden oluşturmaya, mecazi durumlarla da gerçekleşen doğal bir güç olduğunu belirtmekte ve Dewey’e atıf yaparak bunun, çocukların öğrenmesi için bir başlangıç noktası olduğunu vurgulamaktadır (Mason, 2008, s.59). Hayal etme gücünün, duyuların herhangi birinin veya tümünün kullanıldığı, imgelemenin en geniş anlamıyla yer aldığı ve herkesin sahip olduğu bir güç olduğunu, aynı zamanda bunun matematiksel düşünmenin gelişmesi için önemli bir temel olduğunu belirtmektedir. Çocukların öncelikle zihinde canlandırma güçlerini kullandıklarını ve bu hayal etme ürünlerini konuşarak, sesle, hareketle, resimle, yazıyla ve hatta matematiksel sembollerle ifade edebildiklerini söylemektedir. Bu sürecin Goldin ve Shteingold’un (2001) ifade ettiği, temsillerin içsel ve dışsal sistemleri ile paralellik gösterdiği söylenebilir. Çocukların sahip olduğu imgeleme gücünü içeren görsel düşünmenin öğrenmek için iyi bir başlangıç noktası olduğu düşünülebilir.

Matematik eğitimi çalışmalarında ve özelde erken cebir öğretimini konu edinen çalışmalarda görsel düşünme, imgeleme ve görselleştirmenin gerekliliği ve faydaları anlatılmakla birlikte, görsel düşünme yaklaşımını benimseyen bir matematik öğretim yöntemi bulunmamaktadır. Görselleştirmenin çeşitli yollarla kullanıldığı çalışmalar olmakla birlikte kapsamlı bir öğretim yöntemine ihtiyaç vardır. Bir sonraki başlıkta,

görsel düşünmeyi temel alarak geliştirilmiş ve problem çözmeyi öğrenmenin merkezine alan bir yaklaşım sunan Donguri yöntemi incelenmektedir.

1.3. Görsel Düşünmeye Dayalı Problem Çözme Yöntemi: Donguri

Japonya’da İngilizce öğretmeni olan Taizou Itoyama, çocukların düşünme şekilleri ve öğrenme deneyimlerinden yola çıkarak ve eğitimin hayattan tat almanın öğrenilmesinde bir araç olduğunu savunarak görsel düşünmeyi içeren bir öğretim yöntemi geliştirmiştir (Itoyama, 2000). Japonca meşe palamudu anlamına gelen “Donguri” yöntemi, düşünmenin zihinde kelimelerle değil imgelerle gerçekleştiği ve zihnin dilinin görsel imgeler olduğu fikri üzerine temellenmektedir. İletişimin temelinde yer alan kelimelerin, görsel imgelere kılavuzluk eden birer anahtardan daha fazlası olmadığını ifade etmektedir (Itoyama, 2000). Donguri yöntemine göre “okumak” yazılanları telaffuz etmek; “anlamak” telaffuz edilenlerin zihinde canlandırılması ve görülmesi; “düşünmek” ise zihinde canlandırılanların hareket ettirilmesi ve dönüştürülmesi anlamına gelmektedir (Itoyama, 2000). Okumanın, anlamamanın ve düşünmenin bu anlamlarını bir örnek üzerinde açıklamaktadır. Bu örnek Türkçe’ye “Elma-Elba” olarak uyarlanmıştır (Bülbül, 2019). Çocukların bildikleri ve daha önce hiç duymadıkları iki şey üzerinden (Elma ve Elba) anlamamanın nasıl gerçekleştiğini göstermektedir. Buna göre hiç bilmedikleri “Elba” kelimesini okuyabilmelerine ve telaffuz edebilmelerine rağmen zihinlerinde canlandıramadıkları ve anlayamadıkları, ancak onun hakkında birkaç şey anlatıldığında ve resmi çizildiğinde zihinlerinde onu canlandırabildikleri ve anlamaya başladıkları gösterilmektedir. Devamında küçük bir balık olan Elba’nın elmayı nasıl yiyeceği sorulmakta ve ağzını açması, elmanın boyutunun küçültülmesi, küçük parçalara ayrılması gibi fikirler ile düşünmenin nasıl gerçekleştiği örneklenmektedir. Resimlerin, zihinde canlandırılan imgeleri ve gerçekleşen hareketleri yansıtmanın en iyi aracı olduğu belirtilmektedir (Itoyama, 2000).

Gözleri kullanarak düşünmeyi içeren Donguri yönteminde, düşünmeyi temsil eden imgeleri manipüle etmenin dört farklı şekli olduğu belirtilmektedir (Itoyama ve Magaña-Takashima, 2022): Bunlar kopyalama (copy), taşıma (move), dönüştürme (transform) ve karşılaştırma (compare) olarak ifade edilmektedir. Bir şeyi tekrar tekrar çizmek onu kopyalamak; bir yere çizilen bir şeyi başka bir yere yeniden çizmek taşımak; çizilen şeyin boyutunu, şeklini, yapısını değiştirerek çizmek dönüştürmek; iki çokluğu miktarı bakımından kıyaslamak ise karşılaştırmak olarak ifade edilmektedir. İmgeler üzerinde

gözlerle düşünürken bu eylemlerden birinin veya birkaçının farklı şekillerde gerçekleştirildiği belirtilmektedir (Itoyama ve Magaña-Takashima, 2022).

Resim çizerek problemlerin anlaşılması ve çözülmesini içeren Donguri yönteminde 5 yaşından itibaren her yaş seviyesine uygun problemler yer almaktadır. Özellikle bir bireyin 12 yaşına kadar zihinsel gelişimini tamamladığı ve 9 yaşın kritik bir kırılma noktası olduğu, bilimsel çalışmalara dayanılarak (Shaw, vd., 2006), belirtilmektedir (Itoyama, 2000). Buna dayalı olarak Donguri uygulamasına 5 yaşında başlanması gerektiği ve uygun şekilde ilerlenerek 12 yaşına kadar bu sürecin tamamlanması gerektiği önerilmektedir.

Donguri yöntemi temelde problemin cümle cümle okunmasını, probleme uygun resmin çizilmesini ve resim aracılığıyla cevaba ulaşılmasını içermektedir (Itoyama, 2000; Bülbül, 2019). Itoyama ve Magaña-Takashima (2022), Donguri yöntemini anlatan kitapta problemleri çözerken dikkat edilmesi gerekenleri ve yöntemin uygulanma talimatlarını sıralamaktadır: (1) Haftada bir veya iki problem çözmek idealdir; (2) Problemler acele etmeden, keyif alarak ve dikkatli bir şekilde çözülmelidir; (3) Donguri yönteminde hızlı yapmak, tekrar etmek veya ezberlemek yoktur; (4) Başlangıçta çocuklara cümleler tek tek okunarak yöntem uygulanmalıdır; (5) Cümlelerin yalnızca bir kez okunması gerekir; (6) Görsel imgeler kullanarak ve görselleştirerek düşünmeye dikkat edilmelidir; (7) Çocukların zihinden işlem yapması yerine parmaklarını kullanarak işlem yapmalarına izin verilmelidir; (8) Çocukların hemen “bilmiyorum”, “yapamıyorum” demelerine izin verilmemeli, onun yerine üzerine düşünüp uğraşması konusunda teşvik edilmelidir; (9) Çocukların hatalarının görülmesi ve düşünme süreçlerinin izlenebilmesi için silgi kullanılmasına izin verilmemektedir; (10) Çözilemeyen sorular ileride tekrar çözülmek için ayrılmalıdır. Belirtilen bu talimatlar benzer şekilde Bülbül (2019) tarafından da sunulmaktadır. Her okunan cümle sonrasında çocukların nasıl hayal ettilerse resim çizerek göstermelerini istemek, nasıl anladıklarını göstermekte ve birkaç cümleden oluşan bir problemi adım adım anlamalarını sağlamaktadır. Problemin son cümlesine kadar uygun şekilde resim çizmeye devam edildiğinde, problemin içinde yer alan sorunun cevabı da resimde ortaya çıkacaktır ve “cevap” olarak ayrıca belirtilmesi istenmektedir (Bülbül, 2019). Bu noktada Bülbül (2019), cevap olarak sadece istenen şeyin sayısının yazılmasının yeterli olmadığını, neyin sayısı olduğunu belirten sayının bilgisinin (nesne adı, ölçü birimi gibi) eklenmesi gerektiğini belirtmektedir. Eğer çocuk bu yöntemde yeterli olgunluğa ulaşmışsa problem içinde geçen durumların matematiksel olarak hangi

işlemleri içerdiğini göstermesi de istenmektedir. Ancak başlangıç aşamasında işlemlerin yazımı istenmemektedir, çünkü öncelikle çocuğun zihnindekileri resim çizerek göstermeye alışması sağlanmaya çalışılmaktadır.

Donguri yönteminde, Itoyama tarafından geliştirilmiş, 0M, 1M, 2M, 3M, 4M, 5M ve 6M şeklinde yedi seviyeden oluşan ve her seviyede 100 sorunun yer aldığı problemler kullanılmaktadır. Belirlenen bu kodların evrensel olduğu ve yazılan koda sahip problemin dünyadaki farklı çocuklar tarafından yapılmış çizimlerinin görülebileceği söylenmektedir. 0M seviyesindeki problemlerin 5 yaşından itibaren Donguri yöntemine yeni başlayan herkesin çözmesi gereken problemler olduğu, ardından kendi hızlarına ve ilerlemelerine göre diğer seviyelere geçmeleri gerektiği belirtilmektedir (Bülbül, 2019). Beş yaşında Donguri yöntemine başlayan bir çocuğun uygun şekilde problemleri haftada bir veya iki tane çözerek ilerlemesiyle 6M seviyesindeki sorulara 12 yaşında gelebileceği beklenmektedir (Itoyama, 2000). Her seviyeden birer problem örneği aşağıda sunulmaktadır:

<0MX28> Hayaletler, çiçek seyretme partisine katılıyorlarmış. Dün partiye katılan hayaletlerden 6 tane daha fazla hayalet bugün partiye gelmiş. Bugün partide 13 hayalet varmış. Dün ve bugün gelen hayaletler toplam kaç tanedir?

<1MX34> Uğur böceği İ.Ö.Okulunun 1.sınıfında 20 kişi var. Kırmızı şube, mavi şube, yeşil şube olarak 3 ayrı sıraya girmişler. Kırmızı şube, mavi şubeden 5 kişi fazladır. Yeşil şube, kırmızı şubeden 2 kişi azdır. Bu durumda, 3 şubede kaç kişi bulunuyor?

<2MX21> Minik karınca 1 adımla 3 mm, küçük karınca 1 adımla 5 mm ilerliyor. Bugün hava güzel olduğu için yürüyüşe çıktılar. Gidilecek yer, evlerinden 90 cm uzakta olan bir yapraktır. İki karınca aynı anda yola çıktılar ve 2 saniyede 1 adım atarlarsa hangisi yaprağa kaç saniye geç gider?

<3MX12> Kiraz ağacının kenarına pikniğe gelen dev adamlar var. Dana ve kuzu çevirme yapıyorlar. Dana, kuzunun 3 katı ağırdır. Öğleye doğru dana ve kuzunun yarısını yiyince kalan etin ağırlığı toplam 120 kg geldi. Dananın asıl ağırlığı kaçtır?

<4MX22> 10 saniyede 2'şer adet yumurtlayan 5 canavar tavuk var. Bu yumurtalar küre gibi yuvarlak ve yarıçapı 2500 mm'dir. Bunları üst üste koyup 2 km 400 m'lik bir kule yapacağız. Tavuklar yumurtlamaya saat 11:40'ta başlarsa saat kaçta yeterli yumurta sayısını elde edebiliriz?

<5MX18> Şenlikte Hamstercık 2 tabak makarna ve 12 tane sarmayı 680 kuruşa aldı. Farecik, 3 tabak makarna ve 6 tane sarmayı 840 kuruşa aldı. O kadar güzeldi ki, bu sefer Hamster ve Fare 10 tabak makarna ve 100 tane sarmayı birlikte aldılar. Ödemeyi eşit olarak paylaştıklarına göre kaç kuruş vermişlerdir?

<6MX31> Hacmi 192 litre olan dev bir bardağa 2 çeşit meyve suyu doldurup karışım yapıyorum. Musluk A'dan dakikada 1.200 ml, musluk B'den dakikada 2.400 ml farklı meyve suyu dolduruluyor.

Saat 11:00'de iki tane musluk A ve üç tane musluk B'yi aynı zamanda açıp meyve suyu doldurulacaksa saat kaçta (saat, dakika, saniye) 192 litrelik meyve suyu karışımı yapılır?

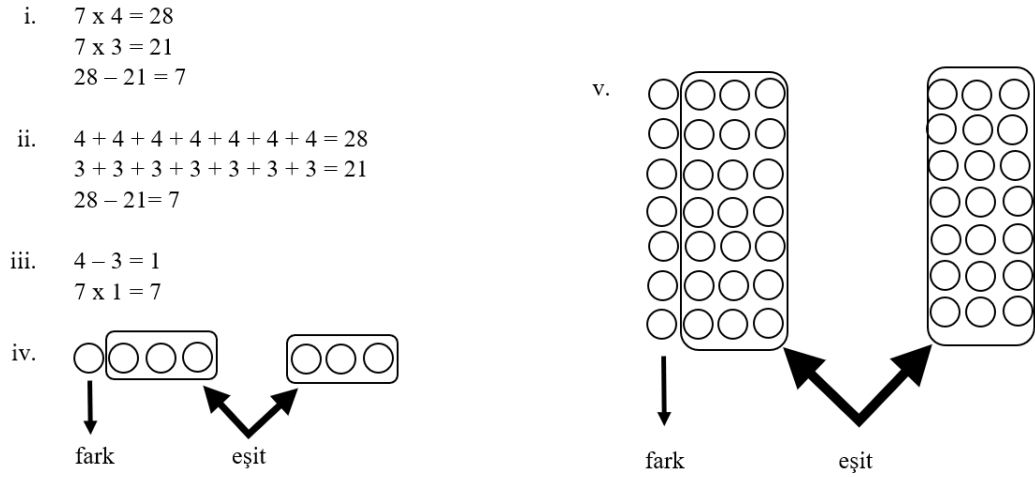
Donguri problemleri incelendiğinde sunulan bağlamların zihinde canlandırma ve resim çizmeye uygun olarak bir hikâye bağlamı içerdiği görülmektedir. Ayrıca sunulan bilgilerin sırayla cümle cümle verildiği, problemlerin seviyeleri arttıkça bir cümle içinde birden fazla bilginin verilmeye başlandığı dikkat çekmektedir. Problem seviyelerine göre incelendiğinde ise 0M seviyesindeki problemlerin çoklukları içeren ve dört işlem gerektiren problemlerin yoğunlukta olduğu görülmekte, dün, bugün, yarın gibi veya haftanın kaç gün olması gibi zaman bilgisini ve saati dakika bazında içeren problemler yer almaktadır. Onlar basamağını içeren sayıların yer aldığı, para birimi olarak lira ve kuruşun olduğu, uzunluk birimlerinin yer almadığı onun yerine adım gibi standart olmayan ölçme birimine yer verildiği görülmektedir. 1M seviyesindeki problemlerin ise çokluklar arasında ilişki kurmayı içeren, çoklukların birbiriyle ilişkili olarak sunulduğu problemlerin yoğunlukta olduğu görülmektedir. Bu seviyede sıraya girmeyi ve önden arkadan sıra sayılarının verildiği problemlerin olduğu görülmektedir. Problemlerde 100'den küçük sayıların kullanıldığı, uzunluk ölçme birimi olarak adım gibi standart olmayan birimin yanında milimetre, santimetre ve metre birimlerinin, zaman ölçme birimi olarak dakika ve saatin, para birimi olarak kuruşun yer aldığı görülmektedir. 2M seviyesindeki problemlerin önceki seviyelerde sunulan problemlerde yer verilenlerin yanında uzunluk ölçme için kilometre birimi, zaman ölçme için saniye birimi, ağırlık ölçüsü olarak gram ve kilogram birimleri, sıvı ölçü birimleri olan mililitre, desilitre ve litre birimlerinin yer aldığı görülmekle birlikte binler basamağını içeren sayıların da olduğu görülmektedir. Bu seviyede iki ve ikiden fazla çokluğun karşılaştırılması ve birbiriyle ilişkili olarak sunulmasını içeren problemlerin yoğunlukta olduğu görülmektedir. 3M seviyesindeki problemlerin ise önceki seviyelerde verilen problemlerin daha geliştirilerek ve değiştirilerek sorulmasını içerdiği, on binler basamağını içeren sayıların yer aldığı görülmektedir. Bu seviyede uzunluk ve para birimlerini içeren problemlerin yoğunluklu olduğu görülmektedir. Ayrıca yaklaşık değer bulmayı ve cevabın sayı aralığı olarak verilmesinin istendiği problemlerin de yer aldığı görülmektedir. 4M seviyesindeki problemlerde kesirli ifadelerin yer aldığı, sayıların önceki problemlerdekine göre büyümesiyle birlikte milyonlar basamağını içeren sayılara da yer verildiği ve çoklukların çoğunlukla birbiriyle ilişkilendirilerek sunulduğu

görülmektedir. Ayrıca verilen rakamları kullanarak istenen şartları sağlayan sayıların oluşturulmasını ve açı ölçmeyi içeren problemlerin yer aldığı görülmektedir. 5M seviyesinde ise önceki seviyede yer alan problemlerin sayılarının daha büyütülmüş ve daha kompleks hale gelmiş şekilleri yer almaktadır. Ayrıca rasyonel sayıların ve ondalık gösterimlerin yer aldığı, EBOB-EKOK sorularını ve alan formüllerini kullanmayı içeren problemlerin yer aldığı görülmektedir. Bunların yanında analog saatleri ve saatin kadranlarının farklı şekilde hareket etmesini içeren veya akrep ve yelkovanın ne zaman üst üste geleceğini soran problemler de yer almaktadır. 6M seviyesindeki problemlerin yüzde hesaplamaları, işçi-havuz problemleri, hız problemleri tarzında problemler içerdiği görülmektedir. Bu problemlerin hepsi incelendiğinde aslında rutin olan problemlerin, otantik bağlamlarda resim çizmeye uygun olduğu, adım adım anlamayı sağlayan cümlelere ayrılmış bir şekilde sunulduğu ve gelişimsel süreç göz önünde bulundurularak seviyelendirildiği anlaşılmaktadır.

Donguri yönteminin nasıl uygulandığı örnek bir problem çözme süreciyle gösterilebilir. Bunun için Itoyama tarafından geliştirilen ve Akemi Bülbül tarafından Türkçe'ye çevrilmiş olan Donguri problemlerinden 0MX17 kodlu problem örnek olarak sunulacaktır (bkz. <https://japonmatematik.wordpress.com>). Donguri yönteminde çocukların resimlerini istedikleri gibi rahatça çizmeleri için resim defteri kullanmaları önerilmektedir.

<0MX17> Japon balığı günde 4 rüya görüyormuş. Karınca günde 3 rüya görüyormuş. Bir hafta bittiğinde hangisi daha çok rüya görmüş olur? Kaç fazla rüya görmüş olur?

Ele alınan bu problemin öncelikle kaç farklı şekilde çözülebileceğine yönelik bir ön analiz yapılmıştır. Böylece problemin olası çözüm yollarının anlaşılması ve bir problemi çözmenin birden farklı yolu olduğunun gösterilmesi amaçlanmaktadır. Şekil 1.1'de sunulan çözüm yolları en soyut olan çözümden daha somut temsiller kullanılarak nasıl çözülebileceğine dair fikir vermektedir.



Şekil 1.1. 0MX17 kodlu problemin farklı çözüm yolları

Donguri yöntemine göre öncelikle ilk cümle okunur ve çocuğun bu cümlede geçenleri hayal ettiği şekilde çizmesi istenir. Burada araştırmacı tarafından bilgisayar ortamında Paint 3D programı kullanılarak yapılmış örnek bir çizim sunulmaktadır (Şekil 1.2).



Şekil 1.2. 0MX17 birinci cümlenin çizimi

İlk cümlede geçenlerin çizilmesinin ardından ikinci cümle okunur ve bu cümlede geçenlerle birlikte hayal edilenlerin çizilmesine devam edilir (Şekil 1.3).



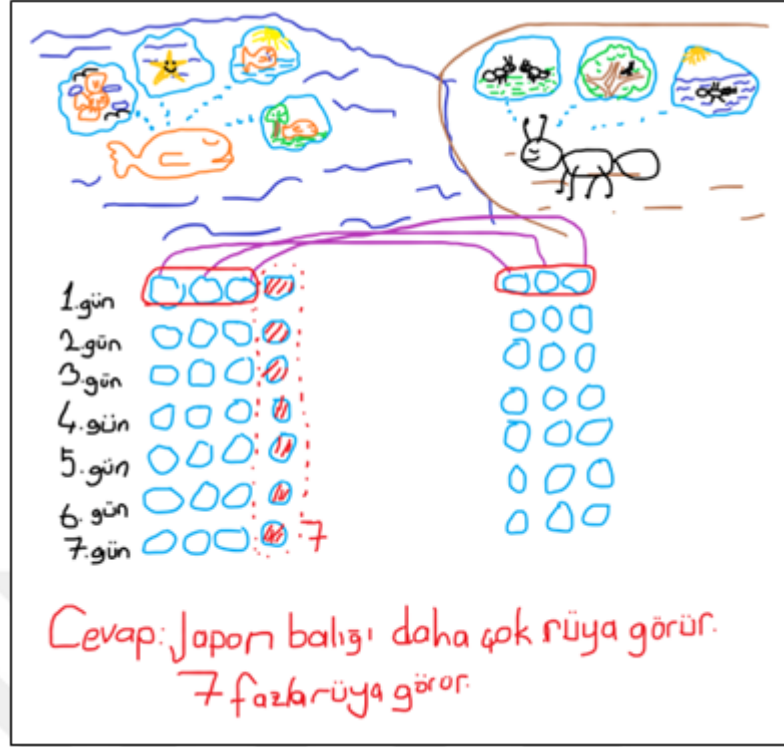
Şekil 1.3. 0MX17 ikinci cümleden sonraki çizimler

İkinci cümlede geçenlerin de resmedilmesinin ardından üçüncü cümle okunur ve bu cümlede geçenlerden anlaşılanların da resmedilmesi istenir. Bu cümlede bir soru yer aldığı için sorunun cevabını gösterecek şekilde resmin çizilmiş olmasına ve bulunan cevabın “cevap” olarak belirtilerek yazılmasına dikkat edilir (Şekil 1.4).



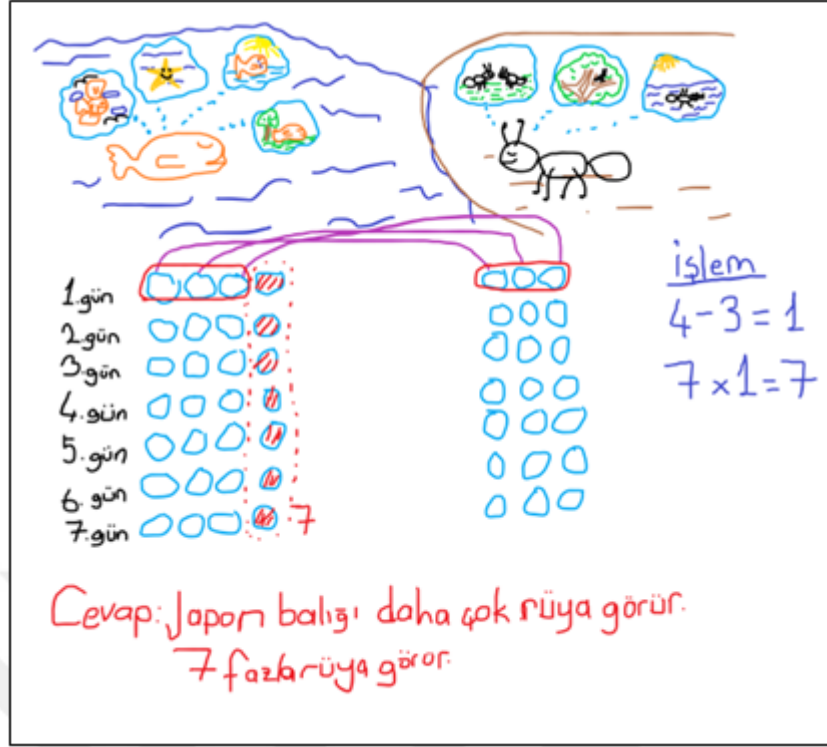
Şekil 1.4. 0MX17 üçüncü cümleden sonraki çizimler

Problemin dördüncü cümlesinde ikinci bir soru yer almaktadır. Bu sorunun çözümünü içerecek şekilde çizimler ve yeni cevap eklenir (Şekil 1.5).



Şekil 1.5. OMX17 dördüncü cümleden sonraki çizimler

Problemin resim çizerek çözülmesinin ardından, eğer yeterli olgunluğa ulaşılmışsa, problem durumunda yer alan matematiksel işlemlerin neler olduğu ve cevaba ulaşılırken hangi işlemlerin uygulandığının ifade edilmesi istenir (Şekil 1.6).



Şekil 1.6. 0MX17 işlemlerinin eklenmesi

Yukarıdaki resimler (Şekil 1.2 – Şekil 1.6), Donguri yöntemi esasları dikkate alınarak ve bir resim üzerinde çizimlere devam edilerek ele alınan bir problemin nasıl çözüleceğini göstermektedir. Donguri yöntemi kullanılarak yapılan çözüm ve Şekil 1.1’de sunulan olası çözümler incelendiğinde, Şekil 1.1’de en somut olduğu düşünülen çözüm yolunun dahi bir derece soyutlama içerdiği, Donguri yöntemi kullanılarak yapılan çözümün zihinde oluşan imgeleri daha gerçekçi ve somut bir şekilde yansıttığı görülmektedir.

Benzer bir inceleme, Donguri problemlerinin daha üst seviyesindeki bir problem için de yapılabilir. Donguri problemlerinden 5MX32 kodlu problem örnek olarak çözülecektir.

<5MX32> Saatte 1 km hızla koşan Acelecı kaplumbağa, 07:02’de 600 m uzakta olan postaneye mektup atmaya gitti. Postaneye vardığında mektubu yolda kaybettiğini fark edip hemen geri döndü. Yolun 1/3’ini geri döndüğünde mektubu buldu. Acelecı kaplumbağanın tekrar postaneye varacağı saati bulalım.

Öncelikle bu problemi Donguri yöntemi kullanmadan çözebileceğimiz yollarını inceleyebiliriz. Sunulan problemin en soyuttan en somuta olası çözümleri Şekil 1.7’de sunulmuştur.

i. $\frac{1000 \text{ m}}{60 \text{ dk}} = \frac{600 \text{ m}}{? \text{ dk}}$

$$\frac{60 \text{ dk}}{1000 \text{ m}} \times 600 \text{ m} = 36 \text{ dk}$$

$$600 \text{ m} \times \frac{1}{3} = 200 \text{ m}$$

$$\frac{60 \text{ dk}}{1000 \text{ m}} \times 200 \text{ m} = 12 \text{ dk} \quad \vee \quad 36 \text{ dk} \times \frac{1}{3} = 12 \text{ dk}$$

$$12 + 12 = 24 \text{ dk}$$

$$36 + 24 = 60 \text{ dk} = 1 \text{ saat}$$

$$\begin{array}{r} 07:02 \\ + 01:00 \\ \hline 08:02 \end{array}$$

ii. $\left. \begin{array}{l} 1 \text{ km} = 1000 \text{ m} \\ / 10 \\ 100 \text{ m} \\ \times 6 \\ 600 \text{ m} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 60 \text{ dk} \\ / 10 \\ 6 \text{ dk} \\ \times 6 \\ 36 \text{ dk} \end{array}$

$$\begin{array}{r} 07:02 \\ + 00:36 \\ \hline 07:38 \end{array}$$

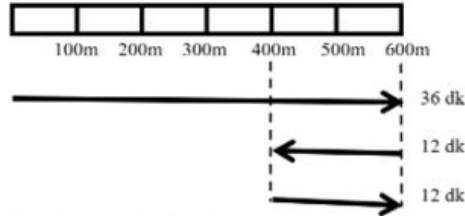
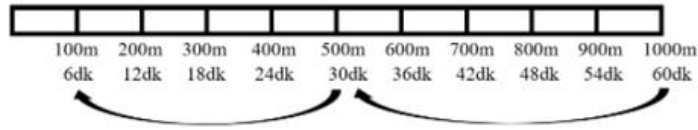
$$600 / 3 = 200 \text{ m}$$

$$\left(\begin{array}{l} 100 \text{ m} \\ \times 2 \\ 200 \text{ m} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} 6 \text{ dk} \\ \times 2 \\ 12 \text{ dk} \end{array} \right)$$

$$12 \times 2 = 24 \text{ dk}$$

$$\begin{array}{r} 07:38 \\ + 00:24 \\ \hline 08:02 \end{array}$$

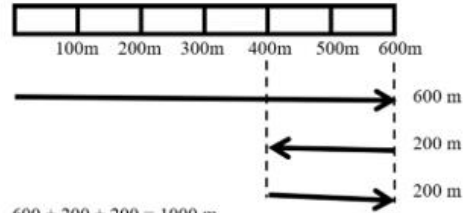
iii. $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$



$$36 + 12 + 12 = 60 \text{ dk} = 1 \text{ saat}$$

$$\begin{array}{r} 07:02 \\ + 01:00 \\ \hline 08:02 \end{array}$$

v.



$$600 + 200 + 200 = 1000 \text{ m}$$

$$\begin{array}{r} 07:02 \\ + 01:00 \\ \hline 08:02 \end{array}$$

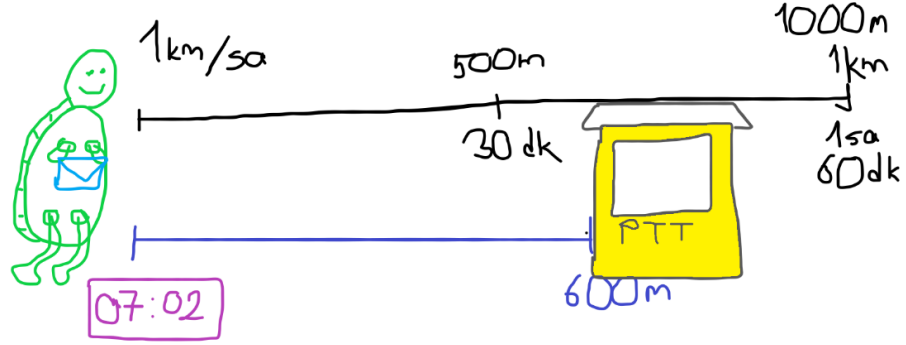
iv. $600 / 3 = 200 \text{ m}$

$$600 + 200 + 200 = 1000 \text{ m}$$

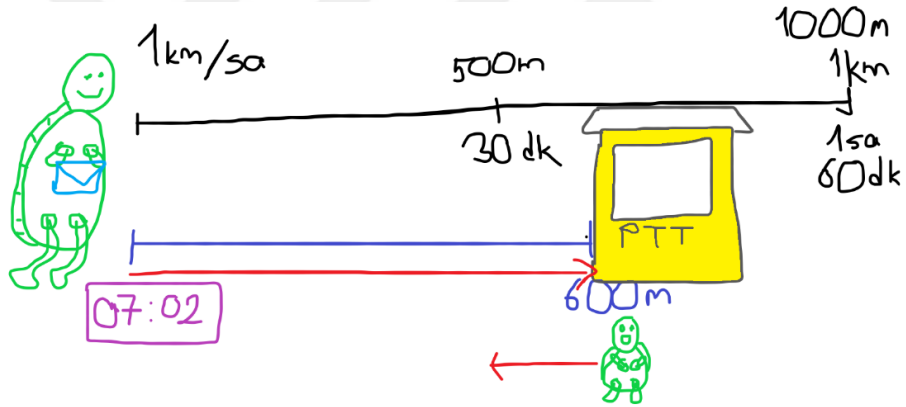
$$\begin{array}{r} 07:02 \\ + 01:00 \\ \hline 08:02 \end{array}$$

Şekil 1.7. 5MX32 kodlu problemin farklı çözüm yolları

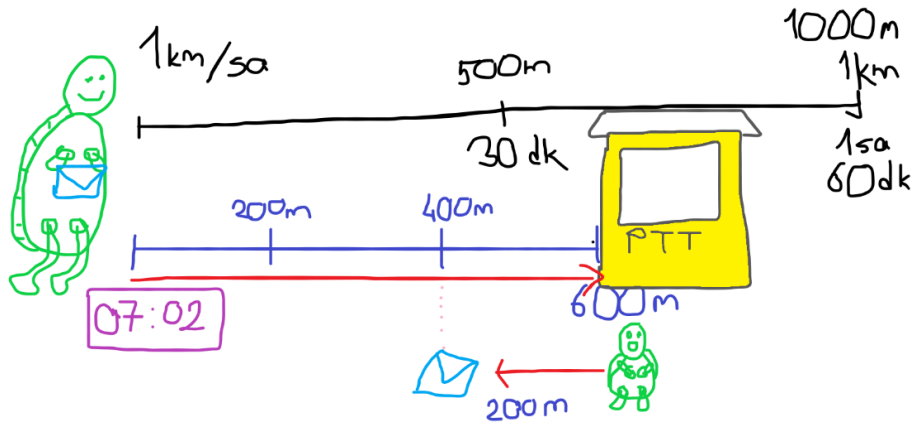
Donguri yöntemine uygun olarak, cümle cümle ilerlenerek yapılabilecek çizimler sırasıyla Şekil 1.8, Şekil 1.9, Şekil 1.10 ve Şekil 1.11’de gösterilmektedir.



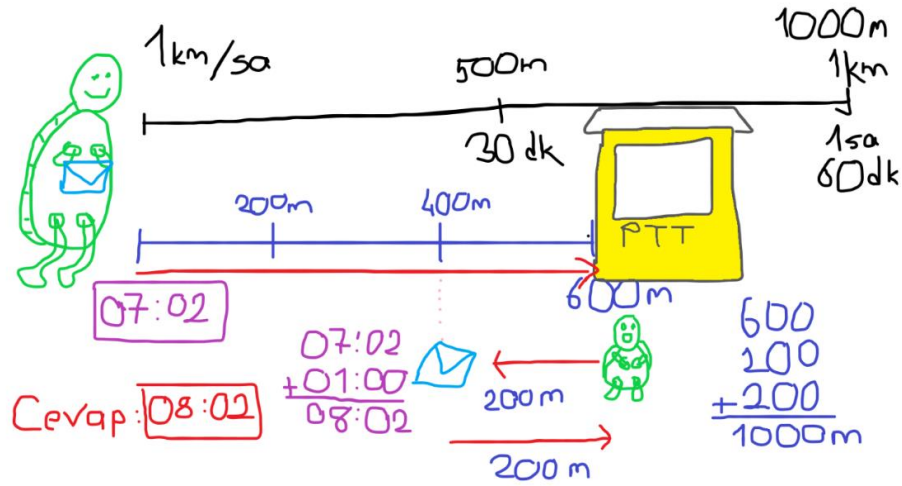
Şekil 1.8. 5MX32 birinci cümlenin çizimi



Şekil 1.9. 5MX32 ikinci cümleden sonraki çizim



Şekil 1.10. 5MX32 üçüncü cümlenin eklenmesi



Şekil 1.11. 5MX32 dördüncü cümleden sonraki çizim

5MX32 kodlu problemin çözümleri incelendiğinde, işlemsel çözümlerin yoğunlukta olduğu, öğrencinin bu çözümleri yaparken işlem hatasını yapmamaya özen göstermesi gerektiği görülmektedir. Nispeten daha kolay görünen çözümler olan Şekil 1.7'deki iv ve v numaralı çözümler de soruyu hemen okuyunca fark edilmeyen, daha somut temsiller ile düşünölmeye başlandığında bulunan çözümlerdir. Donguri yöntemi kullanılarak yapılan çözüm de daha basit ilişkilere odaklanmayı kolaylaştırmaktadır. Donguri yönteminin kullanılmasının amacı da çocuğun en somut çözümden başlayarak en soyut olan çözüme kendi bilgisini yapılandırarak ulaşmasını sağlamaktır. Böylece çocuk, hazır olduğu zaman kendisi daha soyut çözümlere geçmeyi veya somut temsiller üzerinden çözüm yolunu bulmayı tercih edebilecektir.

Donguri yönteminin temeli görsel düşünmeye dayanmakla birlikte, bireylerin problem çözüme bağlamında kendi görsel temsillerini ve görsel sunumlarını oluşturmasını ve geliştirmesini içeren bir yöntemdir. Ayrıca öğretmenin de yöntemin öğretiminde ve ilerlemesinde problemleri resim çizerek çözmesiyle, görselleştirmenin öğretimini ve geliştirilmesini içeren bir yaklaşım benimsemektedir. Başlangıçta Donguri yönteminin kurallarının öğrencilere açıklanması ile kendi resimlerini oluşturarak problem çözüme sorumluluğu kendilerine verilmektedir. İlginç ve ilişkileri ortaya çıkaran bağlamların sunulmuş olması da önemli bir yönüdür. Tüm bu yönleriyle Donguri yönteminin matematik eğitiminde görsel düşünmeyi inceleyen çalışmaların önerdiği birçok öğeyi içerdiği söylenebilir. Bu anlamda Donguri yönteminin erken cebir öğreniminde kullanımı bir sonraki başlık altında tartışılmaktadır.

1.4. Donguri Yöntemi ve Erken Cebir Öğrenimi

Öğrencilerin matematiksel kavramları ve işlemleri anlayarak, çeşitli deneyimler yoluyla zihinlerinde ilişkileri canlandırarak, kendi bilgi ve stratejilerini yapılandırarak, matematiksel temsil sistemlerini kullanarak ve bunları anlamlandırarak matematiği öğrenmeleri gerektiği göz önünde bulunduğunda görsel düşünme becerisi matematik eğitimi için kritik bir öneme sahip olmaktadır. Öğrencilerin kavram imajlarının oluşmasında, içsel temsillerinin gelişmesinde ve bilişsel anlamalarının bir yansımasını sunmada görselleştirmenin kullanımı etkili olmaktadır (Lowrie, 2012; Presmeg, 2020). Zihnin düşünme araçlarının ve ifade etme şeklinin görsel imgelere dayandığı, kelimelerle ifade edilen şeylerin bu görsel imgelerin birer yansımasını içerdiği fikri üzerine temellenen Donguri yöntemi, görsel düşünmeyi zihnin en temel düşünme aracı olarak almaktadır (Itoyama, 2000). Donguri, matematik eğitiminin merkezine problem çözme olarak, çocukların ilgisini ve hayal güçlerini canlandıracak otantik problem durumları içeren, görsel düşünmenin bileşenlerini temel alarak tasarlanmış bir öğrenme yöntemidir (Itoyama, 2000). Bu bağlamda Donguri yöntemi çocukların görsel düşünmeyi kullanarak matematiği öğrenmelerine ortam hazırlamaktadır. Matematik yapmanın problem çözme öğrenme süreci olmasının yanında, matematiksel dili öğrenme ve sembolleştirmenin gelişim süreci olduğu göz önüne alındığında, matematik eğitiminde bu süreci destekleyecek çeşitli bileşenlerin uygun şekilde yer alması gerekmektedir (Bickmore-Brand, 1990). Donguri yönteminin uygulanma şekli ve yöntemin bileşenleri incelendiğinde, çocukların ilgisini çekecek ve kavramları anlamalarını sağlayan problem bağlamlarının sunulduğu, kendi bilgilerini yapılandırmalarına ve kendi modellerini oluşturmalarına fırsat verildiği, öğrenme sorumluluğunu almalarını sağlamanın yanında özgürce hareket etmeleri ve risk almalarını destekleyen bir öğrenme ortamının olduğu, kendi düşüncelerini takip etmelerini sağlayan üstbiliş becerilerinin desteklenmesinin yanında düşüncelerinin ötesine geçmelerini teşvik edici yönlendirmelerin olduğu görülmektedir. Bu anlamda Donguri yöntemi, matematiksel sembolleştirmenin ve kavramsal öğrenmenin gerçekleşmesinde elverişli bir öğrenme ortamı tasarımı içermektedir.

Donguri yöntemi, görsel düşünmenin dışsal temsillerinin üretiminde resim çizmeyi etkili bir araç olarak kullanmakta ve zihinde oluşan imgeleri ve gerçekleşen işlemleri en iyi yansıtan aracın resimler olduğunu belirtmektedir (Itoyama, 2000). Kullanılan resim

temsilleri çocukların karşılaştıkları durumları daha iyi anlamalarını sağlamanın yanında, kendilerinin ürettiği temsiller aracılığıyla da zihinlerinde oluşan imgelerin yansımaları içererek kendilerini daha iyi ifade etmelerini sağlamaktadır (Schnotz ve Kürschner, 2008). Çocukların oluşturduğu dışsal temsiller onların zihinsel imgelerinin ve içsel temsillerinin bir yansımaları sunmakla birlikte bu imgeleri yeniden düzenlemelerine ve yapılandırmalarına da fırsat vermektedir (Presmeg, 2020). Bu sayede zihinsel modellerin inşası daha görünür olmaktadır. Aynı zamanda standart temsillere geçilmeden, çocukların kendi temsillerini üretmesi ve bu temsillerden hareketle daha standart temsillere geçilmesi kendi bilgilerini yapılandırmalarında ve somuttan soyuta geçerek kendi soyutlamalarını oluşturmalarında etkili olmaktadır (Warren ve Cooper, 2009). Bu anlamda Donguri yöntemi temsillerin inşası ile soyutlamanın gelişimini desteklemede önemli bir potansiyele sahiptir.

Erken cebir öğreniminde ve cebirsel düşünmenin geliştirilmesini içeren çalışmalarda, öğrencilerin sayılar ile yapılan işlemler yerine akıl yürütmelerine odaklanmaları için resimsel temsillerin kullanılması önerilmekte ve kendi oluşturdukları resimsel temsillerin, öğrencilerin düşüncelerinin nasıl geliştiğini ve yanlış anlamalarının fark edilmesini kolaylaştırdığı ifade edilmektedir (Lubinski ve Otto, 1999; Blanton, 2008). Çocukların resimlerinin onların zihinlerine açılan bir pencere olarak, zihinlerinden geçenlerin ve anlamalarının su yüzüne çıkmasında ve kendilerini ifade etmelerinde bir araç ve dil olarak kullanılabileceği gösterilmektedir (Woleck, 2001). Matematik eğitiminde başarılı olarak değerlendirilen Singapur'un ders kitaplarında ilkokulun ilk yıllarından itibaren resimsel temsillerin ve denklem çözmede modellere yer verilmesinin yaygın olarak kullanıldığı, bu modellerin daha sonra daha soyut çubuk modellerine dönüştüğü gösterilmekte ve bunun cebirsel denklemleri anlamada etkili olduğu açıklanmaktadır (Cai ve Moyer, 2008). Ancak öğrenciler için başta soyut gelen çeşitli temsillerin onlara sunulmadan önce, kendi geliştirdikleri onlar için somut olabilecek resimsel temsiller ile başlamak daha doğal bir başlangıç olacaktır. Böylece daha soyut olan diğer temsil çeşitlerine adım adım geçilmesi anlamlı öğrenmenin gerçekleşmesi için önemli olacaktır. Bu açıdan bakıldığında da Donguri yöntemi, çocukların kendi temsillerini geliştirmelerine fırsat vererek zihinsel süreçlerinin, düşünme şekillerinin ve soyutlamalarının görünür olmasını sağlamaktadır.

Erken cebir, en temel haliyle matematiğin yapısını anlamaya çalışma ve temel matematiksel fikirlere odaklanmayı içermekle birlikte (Ding, 2021), cebirsel düşünme

becerilerin geliştirilmesini içeren bir süreci içermektedir (Kieran, 2011). Bu süreç aynı zamanda matematiksel sembollerin gelişimini içeren, bireyin zihinsel temsillerinden kurallı sembol sistemine geçmeyi içeren (Smith, 2008), bunu yaparken çeşitli semiyotik göstergelerin kullanıldığı bir süreci içermektedir (Radford, 2018). Erken cebir bağlamında sunulan bir problem durumunun öncelikle somut olarak anlaşılmasının ardından sembollerin kullanımına geçilmesi (Welder, 2012), böylece altta yatan matematiksel fikirlerin anlaşılması sonrasında işlemlerin yapılması, kavram yanılgılarını ve yanlış anlamaları önlemek amacıyla önerilmektedir (Draper ve Lott, 2020). Temsillerin gelişimiyle sunulan yapıların anlaşılması, ilişkilerin fark edilmesi süreci ise soyutlama yapmayı içermektedir (Goldenberg, 2014). Bu süreçte çocukların somut temsillerden başlayıp, bunları adım adım soyutlaştırarak önce yarı somut, daha sonra soyut temsillere geçmeleri gerektiği (Beth ve Piaget, 1974), bu sayede kendi ürettikleri temsillerden başlayarak kendilerinin üretebilecekleri sembolere anlamlı bir geçiş yapacakları belirtilmektedir (Kamii, Kirkland ve Lewis, 2001). Bu anlamda matematiksel bilginin yapılandırması ve soyutlamanın sağlanması için öğrencilerin belirli örnekler üzerinde ilişkileri genellemesi, gerçekçi durumlarla başlanıp daha sonra soyut temsillere geçilmesi (Warren ve Cooper, 2009), bu süreçte çeşitli bağlamsal dil, semiyotik temsil ve jestlerin kullanımı önerilmektedir (Radford, 2018). Erken cebir öğrenimini içeren tüm bu süreçler göz önüne alındığında, Donguri yöntemi matematiksel ilişkilerin ve yapıların anlaşılmasında çocukların kendi temsillerini oluşturmalarını sağlayan, bu temsillerin kullanımında herhangi bir kısıtlama yapmadan çeşitli resimsel, simgesel, dilsel ve semiyotik temsilin yer almasına fırsat tanıyan, bunların ardından çocukların hazır olduğu zaman sembolik temsillere geçilmesinin istendiği bir süreç içermektedir. Sonuç olarak Donguri yönteminin, erken cebir öğrenimi için uygun bir ortam tasarımı içerdiği, cebirsel düşünme, genelleme ve soyutlamanın gelişimi için uygun bir yöntem olduğu söylenebilir.

Donguri yöntemi, başlangıçta erken cebir öğrenimi için tasarlanmış bir yöntem değildir. Ancak yöntemin uygulanma şekli ve resim çizerek öğrencilerin kendi temsillerini oluşturmalarını içeren bir süreç içermesi nedeniyle erken cebir öğrenimi için bir potansiyel içerdiği düşünülmektedir. Donguri yöntemi 5 yaşından itibaren uygulanmaya başlanarak 12 yaşına kadar bir çocuğun uygulayabileceği içeriğe sahiptir ve bu yaş aralığı erken matematik ve erken cebir çalışmaları için uygun bir dönemdir. Bu anlamda Donguri yönteminin erken cebir öğrenimine de uyarlanabileceği düşünülmektedir. Böylece erken cebir öğreniminde temsillerin gelişimi ve

sembolleştirmenin sağlanması amacıyla Donguri yöntemindeki görselleştirme yaklaşımı kullanılabilir.

Donguri yönteminde hali hazırda var olan problemler erken cebir öğrenimi özelinde hazırlanmamış olmakla birlikte, erken cebir problemlerine benzer nitelikte problemler içermektedir. Ancak erken cebir öğrenimi özelinde ve Donguri yönteminin uygulama şeklini yansıtan problemlerin oluşturulması gerekmektedir. Bu problemlerin oluşturulmasında hedeflenen öğrenim seviyesine uygun kavramların, bilgi ve becerilerin yer almasına dikkat edilmekle birlikte, problemlerin sunulma sıralamasında sembolleştirmenin gelişim süreci göz önünde bulundurulacaktır. Erken cebirde niceliksel muhakeme, ilişkisel ve fonksiyonel düşünme gerektiren problem durumları kullanılmaktadır ve bu problemlere paralel problemler Donguri yöntemine uygun şekilde düzenlenecektir. Böylece uygulamanın adımlarının nasıl gelişeceği ve bu adımlardaki problemlerin nasıl olması gerektiği konusunda fikir verecektir. Donguri yönteminin erken cebir bağlamında kullanılmasını içeren teorik bir temele ihtiyaç vardır. Erken cebir bağlamında bahsedilen gelişimsel süreçleri, düşünme becerilerini, sembolleştirme ve soyutlamayı içeren süreçlerin Donguri yöntemini temel alarak açıklanmasına ihtiyaç vardır. Kavramsal çerçeve başlığı altında, Donguri yönteminin erken cebir bağlamında matematik öğretimi için temel oluşturacak teoriksel altyapısı oluşturulmaya çalışılmıştır.

2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE: ERKEN CEBİR ÖĞRENİMİNDE GÖRSEL DÜŞÜNMEYE DAYALI TEMSİL GELİŞİMİ

Matematik eğitiminin merkezine problem çözmeyi almak ve karşılaşılan problemleri öğrenme için bir araç ve fırsat olarak görmek daha kalıcı ve zengin bir öğrenme ortamı için gerekli görülmektedir (Cheeseman vd., 2020; Schoenfeld, 2016; Koichu, 2014; Palm, 2008). Ding'in (2021) çalışmasında ele aldığı şekliyle problem çözmeyi, temel matematiksel fikirlerin öğrenilmesinde bir araç olarak almak ve bunu yaparken çeşitli sorgulamalarla bilgileri yapılandırmak, küçük yaşlardan itibaren her seviyede matematik eğitimi için gerekli görülmektedir. Problem çözme sürecinde önemli olan unsur etkili düşünme becerilerinin işe koşularak, sunulan bağlamın anlaşılmasını, bunun üzerinde çeşitli çözüm yollarının bulunmasını ve geliştirilmesini, bunun ardından elde edilen çözümle ulaşılan matematiksel bilginin ortaya koyulması sonucunda bir matematik yapma sürecinin yaşanmasını içermelidir. Böyle bir süreçte anlamayı, düşünmeyi ve düşünme ürünlerinin ifade edilmesini sağlamada etkili araçlar sunan görsel düşünme ön plana çıkmaktadır. Matematik eğitiminde görsel düşünmenin temelde iki şekilde yer aldığı ifade edilebilir (Bishop, 1980; Presmeg 2008; 2006; Lowrie, 2012): Bunlar bireyin düşüncelerini görsel temsilleri oluşturarak görselleştirmesi ve sunulan görsel temsilleri yorumlayarak bilgiye ulaşması şeklinde ifade edilebilir. Küçük yaşlardaki öğrenciler için resimle görselleştirme yaklaşımının kullanılması ve buna yönelik öğretmenlerin öğretimlerinde yer vermesi önerilmektedir (Lowrie, 2012). Görsel düşünme, matematikte problem çözmeye önemli birer unsur olan temsillerin kullanımı ve sembolleştirmenin gelişimi sürecinde etkili olmaktadır. Bu süreç aynı zamanda problem bağlamını yansıtan somut öğelerden başlayarak daha soyut matematiksel sembollerin üretimini gerektirdiği için soyutlama yapmayı da içermektedir. Matematik yapma sürecinde yaşanan bu süreç matematik eğitiminde erken cebir öğrenimi sürecine denk düşmektedir. Erken cebir, aritmetik işlemlerinin ve kavramların altında yatan matematiksel fikirlerin anlaşılmasında çeşitli cebirsel düşünme becerilerinin geliştirilmesini içermekle birlikte (Kieran, 2011), bu fikirlerin matematiksel olarak ifade edilmesinde sembolleştirmenin gelişimini de içermektedir (Kaput, Blanton ve Moreno, 2008). Matematiksel fikirlerin ve sembollerin gelişmesinde çeşitli göstergeler, içsel ve dışsal temsiller önemli olmakta ve bunlar arasındaki ilişki ve etkileşimlerle bu süreç inşa edilmektedir (Goldin ve Shteingold, 2001; Smith, 2008; Warren ve Cooper, 2009). Bu temsillerin birbiriyle ilişkili olarak gelişmesi soyutlamanın gelişimi için de kritik

olmaktadır (Warren ve Cooper, 2009; Cooper ve Warren, 2011). Bu anlamda erken cebir öğrenimi sürecinde çeşitli cebirsel düşünme becerilerinin geliştirilmesi, sembolleştirmenin ve soyutlamanın gelişimi için görsel düşünmenin etkili olacağı düşünülmektedir.

Görsel düşünmeyi temel alarak geliştirilmiş bir yöntem olan Donguri yöntemi, erken cebir öğrenimi için uygun bir potansiyele sahiptir. Itoyama (2000) tarafından geliştirilmiş olan Donguri yöntemi, problem çözmeyi merkeze alarak ve çocukların anlamalarını ve düşüncelerini geliştirmek için resim çizmeyi görselleştirmenin bir aracı olarak kullanmakta, ayrıca matematiksel sembollerin gelişimini onların altında yatan anlamların öğrenilmesiyle geçilmesi gereken bir süreç olarak şekillendirerek erken cebir öğretimi için uygun bir yaklaşım sunmaktadır. Donguri yöntemi, önceden hazırlanmış bir temsilin sunumundan ziyade, çocukların kendi zihinlerinde geçen imgeleri temsil etmelerini içeren bireyselleştirilmiş bir temsil etme yöntemi içermektedir. Böylece çocukların anlamaları ve düşünceleri çizdikleri resimler aracılığıyla daha görünür hâle gelmektedir.

Görsel düşünmenin kullanıldığı görselleştirme yaklaşımları, bireyin işitme, görme, dokunma gibi duyular yoluyla algıladığı yapıları zihninde canlandırmasını ve zihninde oluşan yapıları materyal, resim, semiyotik gibi çeşitli temsillerle fiziksel dünyaya aktarmasını içeren bir süreç içermektedir. Bu süreç bireyin karşılaştığı durumu anlamasını sağlamanın yanında, bu durum üzerine etkili düşünmesi ve kendi düşüncelerini açıkça ifade etmesi için de araçlar sunmaktadır. Oluşturulan bu temsillerin geliştirilmesi, dönüştürülmesi ve zamanla soyutlaşması süreci ise sembolleştirmenin gelişimi sürecini içermektedir (Kaput, Blanton ve Moreno, 2008). Matematiksel dil olarak ifade edilen cebirin gelişimi süreci ile çocukların erken cebir öğrenme evrelerinin paralel olduğu söylenebilir (Heeffer, 2013). Matematikğin ilk ortaya çıktığı yıllardan itibaren uzun bir süre sözel dil kullanılarak problemlerin ifade edildiği ve çeşitli görselleştirmeler yardımıyla problemlerin çözüldüğü, ardından bu sözel ifadelerin çeşitli kısaltmalar ve işaretler içererek düzenlenmeye başlandığı, uzun bir süre sonrasında matematiksel sembollerin geliştirildiği bilinmektedir (Cajori, 2014/1919). Matematik tarihinde yaşanan bu sembolleştirmenin gelişim sürecinin bir benzerini çocukların da yaşayarak deneyimlemesi, matematik dilini ve sembollerin anlamını öğrenmelerinde önemli olacaktır. Matematikte sembolleştirmenin kullanımı ve öğrenimi en çok zorlanılan ve öğrenme güçlüğü yaratan unsurlardan biridir (Heeffer, 2013). Bu durum matematik

tarihi boyunca da benzer zorluklara neden olmakla birlikte sembolleştirmenin nasıl ve ne şekilde öğretildiğiyle de ilgili olmaktadır. Tall (2007; 2008) bireyin, küçük yaşlardan itibaren ileri matematik bilgisini inşasına kadar süren matematik öğrenme sürecinde matematiksel düşünmenin, matematiğin üç dünyasını yaşayarak gerçekleştiğini göstermektedir. Buna göre insanın doğuştan gelen tanıma, tekrar etme ve dil becerileri sayesinde gerçek dünyada görülen nesnelerin özelliklerinin algılanması ve yansıtılmasına dayanan ve sonrasında zihinde hayal edilebilen *kavramsal somut dünya*; somutlaşmış dünyanın eylemler (sayma gibi) aracılığıyla büyümesiyle ve hem üzerine düşünülebilen hem de işlem yapılabilen (sayı gibi) kavramlar olarak sembolleştirilen *algısal sembolik dünya*; anlam oluşturma sırasını, bilinen nesnelere dayalı tanımlardan teorik tanımlara dayalı formal kavramlara dönüştüren, formal tanımlamalara ve kanıta dayalı *aksiyomatik formal dünya* yer almaktadır. Kavramsal somutlaştırmayla başlayan bilişsel gelişim sürecinin algısal sembolleştirme ile ilişkilendirilerek gelişen ve bu iki dünyadaki gelişim sonrasında formalizm dünyasına geçildiği açıklanmaktadır. Oluşturulan bu teorik çerçevede somutlaştırmadan sembolizme geçişin, aritmetikten cebire geçişte karşılaşılan zorlukların önlenerek gerçekleşmesi için düşünüldüğü ifade edilmektedir (Tall, 2007). Sembolleştirmenin gelişim sürecinde görülebilecek aşamaların bir skalasını da sunmaktadır (Tall, 2007; 2008). Sırasıyla: *İşlem öncesi* aşama, çözümün olmadığı veya kısmen bir çözümün olduğu; *işlem* aşaması, rutin bir problemin adım adım çözümünün yer aldığı; *çoklu işlem* aşaması, en verimli çözümün seçiminin gerçekleştiği; *işlemler süreci* aşaması, kavramsal alternatifleriyle birlikte esnek çözümün olduğu; *procept* aşaması ise matematiği tamamen sembolik olarak düşünebilme yeteneğinin geliştiği aşama olarak açıklanmaktadır. Kavramsal somut dünyadaki bir çocuğun, bir şeyin doğruluğunu spesifik resimlerle temsil ederek göstermeye başlayabileceği, sonrasında bu özelliği gösteren daha kapsamlı genel bir resme dönüştürebileceği ifade edilmektedir (Tall, 2007; 2008). Spesifik resimler, spesifik aritmetik sembolleri üretirken daha kapsamlı resimler, kapsamlı aritmetiğin üretilmesini sağlamaktadır. Buradan hareketle sözlü olarak ifade edilen yapıların genel cebir ifadelerinin sembollerle oluşmasını sağlayacağı belirtilmektedir. Erken cebir öğrenimi sürecinde sembolleştirmenin gelişimi de bu süreçle paralel bir şekilde sunulmaktadır (Kaput, Blanton ve Moreno, 2008). Buna göre, öncelikle matematiksel kavramı yansıtan bir durumun tanımlanmasını ve anlaşılmasını içeren deneyimin yaşanması, bu durumu yansıtan çeşitli informal temsillerin üretilmesi, ardından daha sistematik temsillerin oluşturulması ve son aşamada

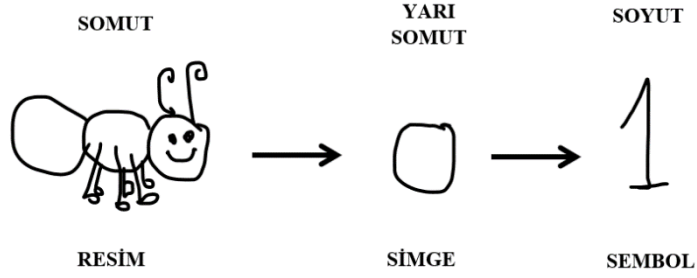
soyut temsillerin sunulması süreçlerinin yaşanması sonucunda sembollerin inşa edileceği belirtilmektedir. Nitekim Donguri yöntemi karşılaşılan problem durumunun adım adım anlaşılması için, okunan her cümlenin zihinde canlandırılması ve zihinde oluşanların resim çizilerek gösterilmesini içermektedir. Oluşturulan bu resimlerin istendiği şekilde yeniden düzenlenerek ve çeşitli dönüştürmeler ile farklı temsillerin üretilmesine fırsat vermektedir. Görsel temsiller üzerinde çalışılması sonucu problemin çözümünün yapılmasını ve cevaba ulaşılmasını öneren Donguri yöntemi, problem bağlamını yansıtan matematiksel işlemlerin en son kullanılması gerektiğini, ancak çocuğun buna hazır olduğu zaman kendi üretimi sonucunda yazılması gerektiğini belirtmektedir. Bu anlamda Tall (2007; 2008) tarafından ifade edilen gelişim sürecinin ve Kaput, Blanton ve Moreno (2008) tarafından sunulan sembolleştirmenin doğasının bir benzeri Donguri yönteminin uygulanma sürecinde yer alacağı beklenmektedir. Donguri yönteminin, çocukların matematik dilini ve sembolleştirmeyi öğrenmelerinde gelişimsel süreçlerini içererek, onları destekleyeceği düşünülmektedir.

Erken cebir öğrenimi sürecinde önemli bir bileşen cebirsel düşünmenin geliştirilmesidir. Cebirsel düşünme ilişkisel, niceliksel, fonksiyonel, temsili ve sembolik düşüncelerin hepsini içinde barındıran bütüncül bir yaklaşımla ele alınmalıdır (Kieran, 2011). İlişkisel düşünme, sayılar arasında çeşitli ilişkiler kurmayı, aritmetik işlemlerinin anlamlarını bilmeyi ve temel özelliklerini kullanmayı, eşittir işaretinin anlamını bilmeyi içermenin yanında sayılar ve işlemleri kullanırken çeşitli stratejiler geliştirmeyi de içermektedir (Andini ve Prabawanto, 2021). Niceliksel muhakeme, karşılaşılan durumları niceliksel olarak anlamlandırmayı, sayı duygusunu etkili kullanmayı, nicelikleri karşılaştırmayı ve birbiriyle ilişkilendirmeyi, kat ilişkilerini yorumlamayı içermektedir (Carragher, Schliemann ve Schwartz, 2008; Smith ve Thompson, 2008). Fonksiyonel düşünme ise değişen çokluklar arasında nasıl bir bağlantının olduğunu, birbirine bağlı veya bağımsız olarak değişen çoklukların fark edilmesini, çokluklar arasındaki ilişkinin anlaşılması ve ifade edilmesini içermektedir (Carragher ve Schliemann, 2018). Temsili ve sembolik düşünme ise cebirsel düşünmeyi içeren zihinsel süreçlerin gösterilmesinde kullanılan göstergeleri sınıflandırmakta ve bireysel yaratıların temsili düşünmeyi, kurallı sembol sisteminin kullanılmasının ise sembolik düşünmeyi içerdiği belirtilmektedir (Smith, 2008). Çocukların sembolik olmayan göstergelerle başlayıp sembolik göstergelere geçiş yaptığı gösterilmekle birlikte temsili düşünmeyle başlanıp daha sonra sembolik düşünmenin geliştiği açıklanmaktadır (Radford, 2018). Bahsedilen bu cebirsel

düşünme unsurlarının hepsi, karşılaşılan durumların çeşitli somut temsillerle başlanarak ifade edilmesini ve görselleştirmenin araçlarını kullanarak düşünülmesini içermektedir. Bu anlamda görsel düşünme kullanılarak gerçekleştirilen bir erken cebir öğreniminde cebirsel düşünme becerilerinin de destekleneceği düşünülmektedir.

Çocukların yapıları anlamaları ve düşünmelerinde temel olan becerinin soyutlama becerisi olduğu ifade edilmektedir (Bruner, 1966; Beth ve Piaget, 1974; Skemp, 1987; Kamii, Kirkland ve Lewis, 2001; Mitchelmore ve White, 2007; Goldenberg, 2014). Soyutlama, somut temsillerin diğer temsillere dönüşmesi ve bu temsiller arasındaki geçiş sonucunda ulaşılan genellemeler ile gerçekleşmektedir (Cooper ve Warren, 2011). Soyutlamada en önemli unsur olan temsillerin kullanımı görsel düşünmeyi içermektedir. Görsel düşünmenin temel araçları olan imgeler ile soyutlamanın gelişimi sağlanmaktadır (Kosslyn, 1996; Giaquinto, 2007). Düşünmenin temel bileşeninin imgeler olduğu ve bu imgelerin çeşitli soyutlama düzeyleriyle oluştuğu ve geliştiği, böylece bilgilere ve düşüncelere dönüştüğü (Arnheim, 1969; McKim, 1980) göz önünde bulundurularak bu süreçte çocukların anlamaları ve düşünmeleri desteklenebilir. Arnheim (1969) görsel düşünmenin nesneleri olan imgelerin, gösterge, resim ve simge şeklinde üç işlevde ortaya çıkabileceğini açıklamaktadır. Bir imge, bir içeriğin ayırt edici özelliklerini görsel olarak yansıtmaksızın onun yerine geçiyorsa sadece bir gösterge, imgenin kendisinden daha somut bir şekilde betimliyorsa resim, daha soyut bir şekilde betimliyorsa simge olarak ifade edilebilir. Göstergeler sadece dolaylı araçlar olarak hizmet edebilirler ve yerine geçtikleri şeylere gönderme yapmaktadırlar, cebirde kullanılan harfler göstergelere örnektir. Buna göre zihinsel olarak oluşan bir imgenin somut bir temsilini bir resim oluştururken, daha soyut bir temsilini simge oluşturmaktadır. Buna benzer şekilde temsilleri Piaget simge ve sembol olarak ayırmaktadır (Kamii vd., 2001). Piaget, soyutluk derecesi olarak düşük olan temsilleri çocukların kendilerinin ürettikleri simgeler olarak ifade ederken, soyutluk derecesi daha yüksek olan temsilleri sembol olarak ifade etmektedir. Resimler ve simgeler, deneyimleri imgelerin yardımıyla betimlemektedir. Örneğin bir simge, oldukça gerçekçi olan imgede var olan fikirleri ete kemiğe bürüyerek daha görünür hâle dönüştürebilir. Arnheim'in gösterge ve Piaget'in sembol olarak ifade ettiği temsiller, aynı anlamı taşımakta ve matematiksel olarak sembolle ifade etme anlamına gelmektedir. Oldukça soyut olan göstergelerin anlamlarının açıklayıcı bir bağlama dayanması gerekmektedir, aksi takdirde bağlamsız olarak kullanılan göstergelerin ne kastettiği de anlaşılamayabilir. Bunlardan hareketle bir soyutlama

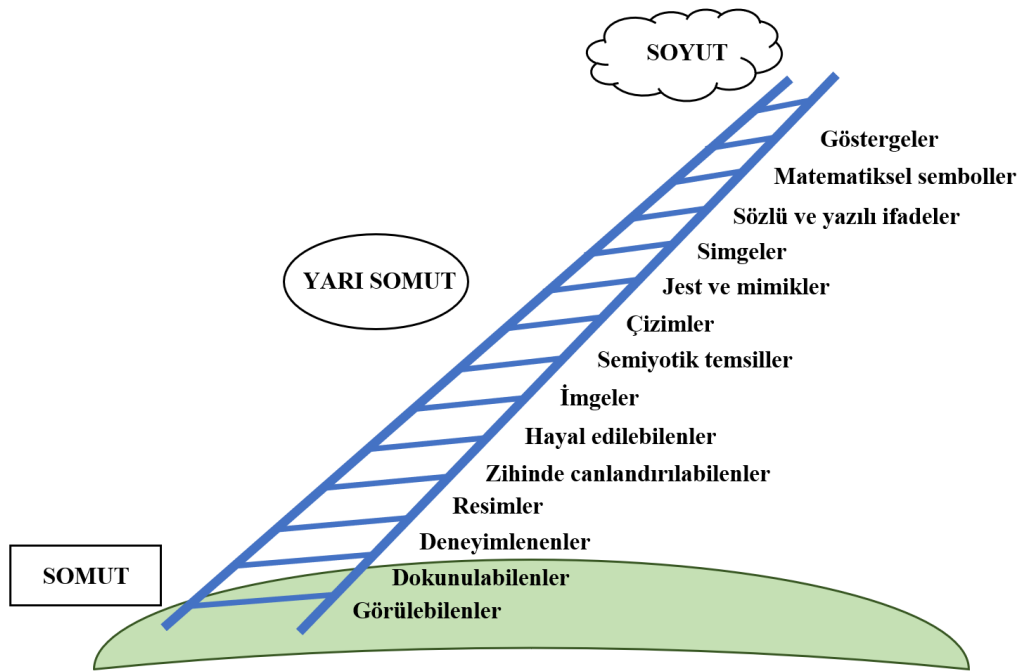
sıralaması yapmak gerekirse en somut olan temsiller resimler, bunların yarı somut halleri simgeler ve en soyut olarak temsil edilen halleri ise semboller olmaktadır. Bu anlamda, imgeleri yansıtan her türlü resim, simge ve sembol temsillerinin kullanımının, bireyin anlaması ve düşünmesi için gerekli olduğu düşünülmektedir. Şekil 2.1’de resim, simge ve sembollerin temsil edilmesindeki soyutlama dereceleri gösterilmektedir.



Şekil 2.1. Resim, simge, sembol gelişimi

Anlamanın ve düşünmenin temel bileşeni olan imgelerin çeşitli soyutlama derecelerinde oluşması ve gelişmesi süreci, Piaget’nin ifade ettiği somut, yarı somut ve soyut geçişi içermektedir (Kamii, Kirkland ve Lewis, 2001). Bu süreç aynı zamanda sembolleştiririnin gelişimi doğasına paralel şekilde çocukların önce kendi informal temsillerini somut resimler ile oluşturmalarını, ardından bunların daha sistematikleştirilerek yarı somut temsillerin simge olarak üretilmesini ve son aşamada bunların matematiksel semboller kullanılarak ifade edilmesini içermektedir (Kaput, Blanton ve Moreno, 2008). Görsel düşünmede anlamanın bir unsuru olan zihinde canlandırma süreci, hayal etme ve önceki deneyimlerin anısal olarak zihinde canlanması ile kendiliğinden oluşan veya duyu organlarıyla algılananların taklit edilmesi ve benzetme yoluyla yeniden üretilmesi şeklinde ortaya çıkan zihinsel imgeleri içermektedir (Arnheim, 1969; Duval, 1999). Bu zihinsel imgeler aynı zamanda görselleştirmeyi sağlayan resim, simge, jest gibi çeşitli analogik temsillerin ve analogik olmayan sözlü ve yazılı ifadeler, semboller, göstergeler gibi çeşitli söylemsel temsillerin kasıtlı olarak oluşturulmasında etkilidir (Duval, 1999). Temsillerin ortaya çıkma şekli ve temsil çeşitlerine yer vererek, görsel düşünme ve imgelerin soyutlamadaki rolü üzerine fikirler bir soyutlama merdiveni metaforu üzerinde gösterilebilir (McKim, 1980). Temsiller aracılığıyla soyutlamanın gelişimini yansıtan bu süreç Şekil 2.2’de gösterilmektedir. Sunulan bu sürece göre görülebilir, dokunulabilir ve deneyimlenen şeyler birey için en

somut yapıları oluşturmaktadır. Resimler, zihinde canlandırılanlar, hayal edilenler, yaşanan bu somut deneyimlerin bir yansıması sonucunda oluşan yarı somut yapılar olmakla birlikte bireyin zihninde oluşan en somut temsillerdir ve bu süreç sonunda imgeler oluşmaktadır. Bu süreç ile somutluktan yavaşça soyutluğa doğru ilerledikleri ve yarı somut temsillere geçiş yaptıkları görülmektedir. Soyutlama merdiveninde adım adım ilerlendiğinde semiyotik temsillerin, çizimlerin, jest ve mimiklerin ve simgelerin yarı somut temsiller olarak ortaya çıktığı, ardından fikirleri temsil etmede kullanılan sözlü ve yazılı ifadelerin, matematiksel sembollerin ve çeşitli göstergelerin soyut temsiller olarak ortaya çıktıkları görülmektedir. Sunulan bu yapı, temsillerin illaki bu sırada ortaya çıkacağını iddia etmemekle birlikte, temsillerin soyutlama derecesini yansıtmadaki rolünü göstermek amacıyla sunulmuştur.



Şekil 2.2. Temsiller aracılığıyla soyutlamanın gelişimi

Duval (2017), belli bir matematik problemini çözen birinin, bu süreçte kullandığı matematiksel kavramları nasıl anladığının zihinsel temsilleriyle ilgili olduğunu, ancak başkalarının zihnini okuyamayacağımız için bu zihinsel temsillerin daha üstü kapalı bir yansımasını sunan sözel, şekilsel, bedensel semiyotik ifadeleri yorumlayabileceğimizi açıklamaktadır. Aynı zamanda matematiksel sembollerin matematiksel fikirlerin ortaya koyulmasında önemli temsiller olduklarını ama bunların tek gösterge olamayacağını, bu

sürece kadar bilişsel olarak gerçekleşen işlemlerin çeşitli temsiller ile incelenebileceğini ifade etmektedir. Semiyotik anlamda ortaya koyulan her türlü işaretin (söylem, sembol, simge, resim, jest gibi) birer temsil olarak nasıl ortaya çıktığı, birbirlerinin ortaya çıkmasını nasıl etkilediği ve işaret ettiği nesneyle veya kavramla nasıl bir ilişkisi olduğu incelenebilmektedir. Duval (2017), matematiksel problem çözme sürecinde kullanılan temsillerin neler olabileceğini gösteren semiyotik dağarcık türlerini sınıflamaktadır. Buna göre temsilleri temelde sözlü ve yazılı öğeler içermesi yönüyle söylemsel olan kayıtlar ve şekilsel öğeler içermesi yönüyle söylemsel olmayan kayıtlar olarak ayırmanın yanında, matematiğin dışında yaygın kullanılan temsilleri çok fonksiyonlu kayıtlar ve matematik özelinde kullanılan temsilleri tek fonksiyonlu kayıtlar şeklinde sınıflamaktadır. Aynı zamanda çok fonksiyonlu kayıtları algoritmik olmayan temsiller olarak, tek fonksiyonlu kayıtları ise algoritmik temsiller olarak ifade etmektedir (Şekil 2.3). Burada temsil olarak ifade edilen göstergeler için “register” terimini kullanmaktadır. Türkçe karşılığı “kayıt” olan bu kelimenin teorik çerçevede kullanım amacı, matematiksel problemin çözümünde kullanılan çeşitli göstergelerin sunulmasındaki kaydetme şekillerini ifade etmekle birlikte, aslında kullanılan semiyotik temsil dağarcığını içermektedir. Bu sınıflama bir matematik problemini çözerken kullanılabilecek temsil çeşitleri konusunda fikir vermektedir. Ayrıca Duval (2017), temsil çeşidi olarak ele aldığı diller, şekilsel yapılar, semboller ve grafikler gibi temsil türlerinin birbirlerine dönüşmesi sonucunda anlam kazandığını ve bilginin yapılandırılarak oluştuğunu göstermektedir. Temsiller arasındaki bu geçişin bireysel bir süreç içerdiği, kişiye göre veya ele alınan problem durumuna göre değişen yaklaşımlar içerebileceği belirtilmektedir.

	SÖYLEMSEL kayıtlar Kelime ve sembol dizilerini üretmek ve düzenlemek için <i>birbirini takip etmeye</i> <i>dayanan doğrusallık</i>	SÖYLEMSEL OLMAYAN kayıtlar <i>n-boyutlu biçimsel birimlerin</i> <i>iki-boyutlu düzenlenmesinin eş</i> <i>zamanlı kavranması</i>
ÇOK FONKSİYONLU kayıtlar: <i>ifadelerin dönüşümleri</i> ALGORİTMİK DEĞİL	DOĞAL DİLLER <i>Hiyerarşik olarak yapılan üç işlem</i> <i>(nesneleri adlandırma,</i> <i>telafluz ve muhakeme) onlara</i> <i>karşılık gelen anlam birimleriyle</i> <i>birlikte</i> <i>İki fenomenolojik üretim tarzı:</i> <i>sözlü veya yazılı</i>	İKONİK: İMGELER <i>nesnenin parçalarının karakteristik</i> <i>topolojik ilişkilerinin içsel korunması</i> <i>ve serbest üretimi.</i> İKONİK OLMAYAN: GEOMETRİK ŞEKİLLER <i>Üç bağımsız işlem: enstrümantal yapı,</i> <i>mereolojik (bütünün parçalarını ayrı</i> <i>ayrı düşünerek) yeniden yapılandırma</i> <i>ve 2-boyutlu şekillerin yapısökümü.</i>
	(Serbest dışsal işlemler için yardımcı geçiş temsilleri)	
TEK FONKSİYONLU kayıtlar: <i>ifadelerin dönüşümleri</i> ALGORİTMİK	SEMBOLİK YAZI <i>sınırsız yerine koyma işlemi için:</i> <i>numaralandırma sistemi, cebirsel</i> <i>yazı, formal diller</i> <i>Tek bir fenomenolojik üretim tarzı:</i> <i>yazı</i>	KARTEZYEN GRAFİKLER, DİYAGRAMLAR <i>hareketler ve ok birleştirme işaretleri</i> <i>veya çizgeleri</i> <i>Grafikler için: yakınlaştırma,</i> <i>interpolasyon (ara değer bulma), eksen</i> <i>değiştirme işlemleri.</i>

Şekil 2.3. Duval tarafından semiyotik temsil dağarcığının sınıflandırılması (Duval 2017, s.85)

Duval (2017), matematiksel bir problemin çözümü esnasında kullanılan temsil türlerini belirlemek ve bu temsillerin hangi sırayla ortaya çıktığına bağlı olarak birbirlerinin gelişimini nasıl etkilediğini incelemek için kullanışlı bir analiz çerçevesi sunmaktadır. Ancak sunduğu bu çerçeve erken cebir bağlamı özelinde hazırlanmamıştır ve ayrıca kullanılan temsillerin soyutlama dereceleriyle ilgili de bir ayrım içermemektedir. Burada kullanılan temsil türleri ortaokul ve üstü seviyelerdeki matematik problemlerinin bir analizini içermekle birlikte, geometrik yapıları içeren problemlerin analizlerine ve daha çok formal matematiksel şekil, tablo ve grafik örneklerine yer vermektedir. Duval'ın çerçevesinde kullanılan ikonik imgeler görsel düşünme bağlamında resimlere denk düşerken, ikonik olmayan şekiller ise simgeleri içermekte ve bu ikisi de aynı semiyotik temsil sınıfında çok fonksiyonlu kayıtlar olarak yer almaktadır. Fakat erken cebir bağlamında düşündüğümüzde bu temsillerin üretimi

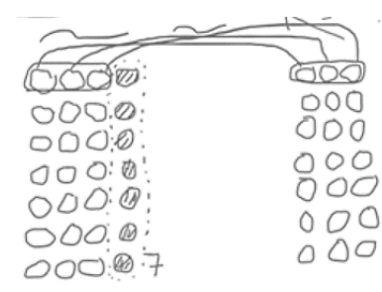
farklı soyutlama dereceleri içermektedir. Bu anlamda Duval'in sunduğu bu çerçeve problem çözme sürecinde üretilen temsillerin belirlenmesi konusunda iyi bir analiz çerçevesi sunmakla birlikte erken cebir bağlamına uyarlanmasına ihtiyaç vardır. Bu amaçla Duval'in sunduğu semiyotik temsil dağarcığı çerçevesinden yararlanılarak Şekil 2.1 ve 2.2'de sunulan soyutlamanın gelişiminde resim, simge, sembol gibi temsillerin söylemsel olan ve olmayan şeklinde bir sınıflaması yapılmıştır (Şekil 2.4). Ayrıca Duval'in algoritmik olmayan diye ifade ettiği çok fonksiyonlu temsiller, problem bağlamında kalan ve problemi anlamak, açıklamak ve çözüm bulmak için kullanılan temsilleri ifade etmektedir. Bu durum erken cebir bağlamında düşünüldüğünde daha somut olan temsilleri içermektedir. Bu nedenle Duval'in çerçevesinde algoritmik olmayan olarak ifade ettiği sınıflama bu çerçevede somut olarak alınmıştır. Benzer şekilde algoritmik olarak ifade ettiği sınıflama ise matematiksel sembol, ifade ve şekilleri içerdiği için bu çerçevede soyut temsillerin sınıfına uygun düşmektedir. Şekil 2.4'te sunulan sınıflama erken cebir öğretimi bağlamında bir bilginin yapılandırılması sürecinde ortaya çıkabilecek temsil türlerini sunmaktadır. Bilginin üretilmesi ve yapılandırılmasında farklı temsil türlerinin birbirine dönüşerek ve birlikte ortaya çıkmaları etkili olmaktadır. Bu çerçeveye göre sözlü ve yazılı temsilleri içeren söylemsel temsiller, günlük dil kullanımını içeren daha somut olan dilsel temsillerin kullanımı ve matematiksel ifadeleri içeren daha soyut sembolik temsillerin kullanımı şeklinde iki gruba ayrılmıştır. Biçimsel ve şekilsel yapıları içeren söylemsel olmayan temsiller ise zihinde oluşan imgeleri yansıtan resimsel temsiller ve bunların yapısal özelliklerini yansıtacak ama karakteristik özelliklerine yer vermeyecek şekilde soyutlanmış olan çizgi, çubuk, yuvarlak gibi simgesel temsiller olarak iki gruba ayrılmıştır. Görsel düşünme bağlamında söylemsel olmayan temsiller, görsel temsiller olarak da ifade edilebilir. Belirtilen bu temsil sınıfları arasında sadece yatayda ve dikeyde değil, aynı zamanda çapraz olarak da bir dönüşüm olabileceği gibi tek yönlü bir geçiş de söz konusu olmayabilir. Şöyle ki ortaya çıkan temsillerin somuttan soyuta, söylemsel olmayandan söylemsele dönüşebileceği gibi tam tersi yönlerde de soyuttan somuta ve söylemselden söylemsel olmayana bir dönüşüm gerçekleşebilir. Bu anlamda Şekil 2.2'de sunulan soyutlama merdiveninde de sadece tek yönlü şekilde yukarıya çıkış hareketi olmayacağı, bireyin karşılaştığı durumu anlamlandırmak için kimi zaman alt basamaklara inerek kimi zaman daha üst basamağa çıkarak düşünebileceği söylenebilir.

	SÖYLEMSEL temsiller Kelime ve sembol dizilerini üretmek ve düzenlemek	SÖYLEMSEL OLMAYAN temsiller Biçimsel ve şekilsel yapıları üretmek ve düzenlemek
SOMUT	DİLSEL TEMSİLLER Nesneleri adlandırmak, ifade etmek, akıl yürütmek için kullanılan sözlü ve yazılı ifadeler	RESİMSEL TEMSİLLER Nesnenin zihinsel üretimini oluşturan imgeler ve karakteristik özelliklerinin resimsel gösterimi
SOYUT	SEMBOLİK TEMSİLLER Sayı sistemlerinin kullanımı, kardinal ve ordinal değerler, cebirsal ve formal ifadeler	SİMGESEL TEMSİLLER Nesnenin temel özelliklerini gösteren çizgi, çubuk, yuvarlak gibi gösterimler

Şekil 2.4. Erken cebir bağlamında temsil türlerinin sınıflandırılması

Görsel düşünme ve görselleştirme yaklaşımıyla düşünüldüğünde Şekil 2.4'te sunulan çerçevedeki resimsel temsillerin kullanılarak başlanması ve bu temsillerden hareketle diğer dilsel, simgesel ve sembolik temsillere geçilmesi benimsenmektedir. Böylece somuttan soyuta bir geçişin yaşandığı ve bunlar üzerine üretilen simgesel, dilsel ve sembolik temsillerin anlamlandırılarak yapılandırılacağı düşünülebilir.

Donguri yönteminin uygulanması boyunca öğrencilerin resim temsillerini üretmeleri bu temsillerle işlemler yaparak sorunun cevabına ulaşmaları ve en sonunda matematiksel işlem temsilleriyle ifade etmeleri istenmektedir. Bu anlamda Şekil 2.4'te sunulan temsil türlerinin bir Donguri probleminin çözümünde nasıl ortaya çıkabileceği daha önce sunulan bir problemin çözümünün incelenmesiyle Şekil 2.5'te gösterilmektedir. Sunulan bu çerçeve ile Donguri yönteminin kullanıldığı bir problemin çözümünde kullanılan temsil türlerinin neler olduğu ve birbirlerine dönüşme şekillerinin nasıl gerçekleştiği anlaşılabilmektedir.

	SÖYLEMSEL	SÖYLEMSEL OLMAYAN
SOMUT	DİLSEL ① Problemin yazılı ve sözlü ifadesi Nesnenin türünün ve miktarının yazılı ifadesi (4 Rüya, 3 Rüya) ④ Cevabın ifadesi Cevap: Japon balığı daha çok rüya görür. 7 fazla rüya görür.	② RESİMSEL 
SOYUT	SEMBOLİK ⑤ İşlem ifadeleri 1. Yol: $4-3=1$ $7 \times 1=7$ 2. Yol: $7 \times 4=28$ $7 \times 3=21$ $28-21=7$	③ SİMGESEL 

Şekil 2.5. Donguri yöntemiyle problemlerin çözümünde kullanılan temsil türleri
 Problem: Japon balığı günde 4 rüya görüyormuş. Karınca günde 3 rüya görüyormuş.
 Bir hafta bittiğinde hangisi daha çok rüya görmüş olur? Kaç fazla rüya görmüş olur?

Şekil 2.5’te sunulan problemin çözümünde öncelikle problemin yazılı ve sözlü sunumunun olduğu dilssel temsil ile başlanıp buna uygun bir resimsel temsil üretilmiş ve bu resim temsilindeki yapılar “4 rüya”, “3 rüya” şeklinde ifade edilerek dilssel temsille de gösterilmiştir. Ardından bir hafta sonundaki durumun sorulmasıyla simgesel temsille ifade edilmiş ve bu simgesel temsilden cevap bulunarak dilssel temsille gösterilmiştir. Simgesel temsil üzerinde yapılan işlemlerin sembolik olarak ifade edilmesine geçilmiş ve problemin işlemleri sunularak problem bitirilmiştir. Her problem durumunda farklı bir yol izlenebileceği gibi, Donguri yönteminin kullanıldığı problemlerin çözümünde çoğunlukla buna benzer bir yol izleneceği düşünülmektedir. Ayrıca belirlenen bu temsillerin erken cebir bağlamında öğrencilerin zihinsel olarak neler düşündüklerini sözlü açıklamalarının yanında, niceliksel muhakeme, fonksiyonel düşünme, ilişkisel muhakeme ve aritmetiğin genellemesi anlamında neler yaptıklarını göstermesi açısından da önemli görülmektedir.

3. ÇALIŞMANIN AMACI

Bu çalışma en genel anlamda, matematik eğitiminde görsel düşünmenin önemini ve değerini anlamayı amaçlamaktadır. Görsel düşünmeyi temel alarak geliştirilmiş bir yöntem olan Donguri yönteminin, küçük yaşlarda matematiğin yapısının öğrenildiği erken cebir öğreniminde kullanımını incelemeyi amaçlamaktadır.

Çalışmanın ana amacı, Donguri yönteminin uygulandığı problem çözme etkinlikleri aracılığıyla erken cebir sürecinde öğrencilerin görsel düşünmeye dayalı temsil kullanımlarını ve buna bağlı soyutlamalarının gelişimini incelemektir. Görsel düşünmeye dayalı temsillerin incelenmesinde, Duval (2017) tarafından geliştirilen ve erken cebir bağlamına uyarlanan temsil türlerinin sınıflandırılması çerçevesi kullanılmıştır. Donguri yönteminin erken cebir problemlerini çözme sürecinde öğrenciler tarafından nasıl kullanıldığının incelenmesi de çalışmanın amaçları arasındadır.

Belirtilen amaçlar doğrultusunda cevap aranan ana problemler ve alt problemler şunlardır:

1. Erken cebir bağlamında Donguri yönteminin uygulandığı problem çözme sürecinde öğrencilerin temsil kullanımları nasıldır?
 - 1.1. Donguri yöntemi uygulanmadan önce, öğrenciler erken cebir problemlerinin çözümünde ne tür temsiller kullanmaktadır?
 - 1.2. Donguri yönteminin uygulandığı problem çözme sürecinde, öğrenciler ne tür temsiller kullanmaktadır?
 - 1.3. Donguri yönteminin uygulandığı problem çözme sürecinde, öğrencilerin kullandıkları temsillerle soyutlamanın gelişimi nasıl gerçekleşmektedir?
2. Uygulama boyunca, öğrencilerin erken cebir problemlerini çözme sürecinde hangi cebirsel düşünme becerileri, nasıl ortaya çıkmıştır?
3. Donguri yöntemi uygulandıktan sonra, öğrencilerin erken cebir problemlerini çözme sürecinde temsil kullanımları nasıldır?

Çalışmanın sonucunda, öğrencilerin Donguri yöntemini kullanarak erken cebir problemlerini çözme becerilerinin gelişmesi, somut resimsel temsillerden soyut sembolik temsillere geçmeleri ve bunları anlamlı kullanımları beklenmiştir.

4. ÇALIŞMANIN ÖNEMİ

Matematik eğitiminde okuma anlama ve problem çözme becerilerin önemli olduğu vurgulanmaktadır ve bu becerileri geliştirmeye yönelik çalışmalar önerilmektedir. Bu çalışma kapsamında ele alınacak olan resim çizerek problem çözme yöntemi içeren Donguri yönteminin çocukların görsel düşünme becerilerini kullanarak anlamalarına ve düşünme becerilerinin gelişmesine fırsat sağlayacağı düşünülmektedir.

Türkiye'nin, 4. ve 8. sınıf öğrencilerinin katıldığı ve öğrenme alanları ile bilme, uygulama, akıl yürütme gibi çeşitli bilişsel alanların incelendiği Uluslararası Matematik ve Fen Eğilimleri Araştırması (TIMSS) ve 15 yaşındaki öğrencilerin katıldığı okuma becerileri, matematik okuryazarlığı ve fen okuryazarlığının ölçüldüğü Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı (PISA) değerlendirmelerinde yıllardır OECD ülkeleri arasında ortalamanın altında kaldığı görülmektedir (MEB, 2019; 2020). Bu uluslararası değerlendirmelerin temelinde çocukların okuma anlama becerilerinin ve etkili problem çözme becerilerinin ölçülmesi yer almaktadır. Türkiye'deki çocukların ilköğretim seviyesinden itibaren anlayarak ve anlamlı bir şekilde kavramları öğrenmelerine ve düşünme becerileri geliştirecekleri problem çözme ortamlarının sunulmasına imkân sağlanmalıdır. Bu anlamda Donguri yönteminin matematik eğitiminde gereksinim duyulan anlama ve düşünme becerilerinin geliştirilmesinde ihtiyaçları karşılayacağı öngörülmektedir. Matematik eğitiminde görsel düşünme temelinde geliştirilmiş benzer bir yaklaşım bulunmamaktadır. Donguri yönteminin incelenmesi sonucunda matematik öğretimi pratiklerini değiştirerek ve dönüştürerek çocukların matematiği öğrenmesinde yeni yaklaşımların oluşmasında etkili olacağı düşünülmektedir. Donguri yönteminin uygulanması, görsel düşünmeye dayalı matematik eğitimi uygulamalarına örnek teşkil etmesi bakımından değerli görülmektedir.

Donguri yöntemi, görsel düşünmeyi temel alarak geliştirilmiş olmasının yanında herhangi bir kuramsal temele dayanmamaktadır. Yöntemin geliştiricisi, kendi deneyimleri üzerine dayalı, çeşitli pratikleri ve yaklaşımları içeren pedagojik bir yöntem olarak sunmaktadır (Itoyama, 2000). Bu çalışma Donguri yöntemini kuramsal bir temele oturtarak bilimsel bir boyut kazandırmaktadır. Bu anlamda çalışmanın, görsel düşünmeye dayalı matematik eğitimi uygulamaları için bilimsel bir altyapı sunması bakımından önemli olduğu düşünülmektedir.

Resim çizerek problem çözme yöntemini içeren Japon Donguri yönteminin incelendiği herhangi bir bilimsel çalışmaya rastlanmamıştır. Bu anlamda, Donguri

yönteminin incelenmesi bu çalışmanın özgün değerini oluşturmaktadır. Görsel düşünmenin matematik eğitiminde kullanılmasında Donguri yönteminin önemli sonuçlar sunduğu düşünülmektedir. Bu çalışma kapsamında Japonya’da ortaya çıkmış olan Donguri yönteminin, Türkiye’deki çocukların kazanım ve kültürlerine uygun bir şekilde uyarlanması gerçekleştirilmiştir. Böylece bu çalışmada geliştirilen problemler, gelecekte Donguri üzerine yapılabilecek çalışmalara örnek oluşturmaktadır.

Donguri yöntemi, erken cebir öğretimi özelinde hazırlanmış bir yöntem değildir. Bu çalışma kapsamında erken cebir problemlerinin çözümünde, Donguri yönteminin uygulanma adımları benimsenerek problem tarzlarına uygun bir uyarlama gerçekleştirilmiştir. Bu anlamda çalışmanın sonucunda ortaya çıkacak ürünlerin erken cebir öğretimi sürecine yeni bir yaklaşım sunacağı beklenmektedir.

Çalışmada, erken cebir öğretiminde görsel düşünmeye dayalı temsillerin, soyutlamanın gelişimini desteklemesi kavramsal çerçeve olarak belirlenmiştir. Geliştirilen bu çerçevenin, ileride yapılacak erken cebir öğretimi ve görsel düşünme ile matematik eğitimi çalışmalarına yol göstereceği beklenmektedir.

5. YÖNTEM

Bu çalışmada, resim çizerek problem çözme yöntemi olan Donguri'nin uygulandığı erken cebir sürecinde öğrencilerin kullandıkları temsil türlerinin incelenmesi amaçlanmaktadır. Bu amaçla, tasarlanan bir öğrenme ortamında öğrencilerin matematiksel bilgilerini nasıl inşa ettiklerini, bu bilgilerin nasıl değişim ve gelişim gösterdiğini, sürecin adımlarını modelleyerek yakından deneyimlemeyi sağlayan, öğretim temelli bir araştırma deseni olan öğretim deneyi yöntemi kullanılmıştır (Steffe ve Ulrich, 2014). Yapılandırmacı yaklaşımı temel alan öğretim deneyleri öğrencilerin sınıf ortamında kendi bilgisini yapılandırma süreçlerini incelerken, radikal yapılandırmacı yaklaşım ise bireysel bağlamda her bireyin kendi zihninde düzenlenen bilişsel süreçler sonucunda kendi matematiksel bilgisini oluşturduğunu öne sürmektedir (Steffe, 1991; Steffe ve Thompson, 2000). Radikal yapılandırmacı öğretim deneyi yaklaşımı, Piaget'nin uyguladığı klinik görüşme yönteminin öğretim deneyi yöntemine uyarlanması sonucunda “birebir öğretim deneyi” şeklinde ortaya çıkmıştır (Steffe ve Thompson, 2000; Uygan, 2019). Radikal yapılandırmacı yaklaşımın bir öğretim teorisi değil, bir öğrenme teorisi olduğu vurgulanmakta ve öğrencinin kendi öğrenme sürecine odaklanılmaktadır (Steffe, 2016). Erken cebir sürecinde görsel düşünmeye dayalı Donguri yönteminin uygulanmasında öğrencilerin temsil gelişimlerinin bireysel olarak incelenmesini amaçlayan bu çalışmada radikal yapılandırmacı öğretim deneyi yaklaşımı benimsenmiştir.

Öğretim deneyi araştırmalarının temel amacı, öğrencilerin kendi matematiksel bilgilerini yapılandırma süreçlerini incelemek ve öğrencinin matematiksel gerçekliği olan “öğrenci matematiği”ni anlamaya çalışmaktır (Steffe ve Thompson, 2000; Steffe ve Ulrich, 2014). Ancak öğrencinin kendi zihninde oluşan “öğrenci matematiği”ni dışarıdan bir gözlemci olarak bir öğretmen veya araştırmacının tüm boyutlarıyla anlamasının mümkün olmadığı, bunun yerine onu yorumlayabileceği ifade edilmektedir. Öğrenci matematiğini gözleyen kişinin matematiksel gerçekliğiyle öğrencinin matematiksel gerçekliğinin farklı olabileceği vurgulanmaktadır. Bu anlamda öğrencinin sahip olduğu matematiksel bilgi “birinci dereceden öğrenci matematiğinin bilgisi” olarak ifade edilirken, öğretmenin/araştırmacının öğrencinin matematiğine yönelik bilgisi “ikinci dereceden öğrenci matematiği bilgisi” olarak ifade edilmekte ve ikincisinin gözleyen öğretmen/araştırmacının öğrenci matematiği hakkındaki bilgisi olduğu belirtilmektedir (Steffe, 2016; Uygan, 2019). Bununla birlikte Steffe (2016), öğretmenin bir

gözlemci/araştırmacı olarak bulunacağı öğretim deneyinde üç farklı durumda bulunabileceğini açıklamaktadır. Bunların ilkinde, öğretmenin uygulama esnasında eylem ve etkileşimlerde aktif rol aldığında, bu etkileşimler içinde öğrenci eylemlerini kendi eylemleri ile harmanlayarak bunları birbirinden ayırt edemeyebileceğini ve kendi bilgisi ile öğrenci bilgisini karıştırabileceğini belirtmektedir. Böyle bir durumda, öğretmenin bir gözlemci değil de bir aktör olduğunu söylemektedir. İkinci durumda, öğretmenin öğretme sorumluluğunun dışına çıkarak öğrencilerin söylem ve eylemlerinin birinci dereceden gözlemcisi olabileceğini ve onların düşüncelerini analiz etmeye odaklanabileceğini belirtmektedir. Buradaki öğretmen müdahalelerinin tamamen öğrencinin matematiğinin bir modelini oluşturmak amacıyla olduğunu ve analitik etkileşim içerdiğini belirtmektedir. Son durumda ise öğretmenin, öğrencinin öğrenmesini geliştirmeyi hedeflemesinden dolayı, öğrenme durumlarını yaratmaya odaklanabileceği ve bunları öğrenci matematiği veya öğretmenin matematiksel bilgisi olarak alabileceği belirtilmektedir. Böyle bir durumda öğretmenin ikinci dereceden gözlemci konumunda olduğu ifade edilmektedir (Steffe, 2016). Bu çalışmada öğrencilerin kendi oluşturdukları temsil gelişim süreci inceleneceği için öğretmen/araştırmacı, ikinci durumda bahsedilen birinci dereceden gözlemci konumunda yer almıştır.

Öğrenci matematiğinin incelendiği yapılandırmacı öğretim deneyi araştırmalarında, öğrencileri yakından tanıyan bir tanık gözlemcinin (bir öğretmen ya da ikinci bir araştırmacı) veri toplama sürecinde ortamda bulunması önerilmektedir (Steffe ve Thompson, 2000). Böylece öğretmen/araştırmacının gözünden kaçabilecek veya onun yanlış yorumlayabileceği durumları önlemek amaçlanmaktadır (Uygan, 2019). Bu çalışma kapsamında uygulanacak öğretim bölümleri esnasında, öğrencilerin kendini daha rahat hissetmesi ve herhangi bir şekilde düşüncelerini açıklamaktan çekinmemeleri için kendi öğretmenlerinin, çalışma ortamında bulunması istenmemiştir.

5.1. Öğretim Deneyi Aşamaları

Öğretim deneyi yönteminde öğretim süreçlerinin gerçekleştiği, öğrenci etkinliklerinin gözlemlendiği ve verilerin toplandığı öğretim bölümleri yer almaktadır. Öğretim deneyi boyunca öğretim bölümleri uygulama deneyimleri ve verilerin analizi sonucunda yapılandırılarak gerçekleştirilmektedir (Steffe ve Thompson, 2000). Başlangıçta ilgili araştırmaların sonuçlarını ve araştırmacının deneyimlerini temel alarak öğrencilerin öğrenme süreçlerine ilişkin öncül hipotezler oluşturulmaktadır. Öncül

hipotezler temelde öğretim sürecinin nasıl gerçekleşeceğine, beklentilerin ve çıktıların neler olabileceğine yönelik tahminleri içermektedir. Öncül hipotezlere uygun öğrenme ortamının hazırlanması, öğretimin gerçekleştirilmesi, verilerin analiziyle birlikte öncül hipotezlerin değerlendirilmesi ve ileriye dönük yeni hipotezlerin oluşturulması, öğrenme ortamının buna göre düzenlenmesi, öğretimin gerçekleştirilmesi, verilerin analiz edilmesi şeklinde aşamalar döngüsel olarak devam etmektedir (Uygan, 2019).

Bu çalışma kapsamında gerçekleştirilen öğretim deneyi, ilkokul 3. sınıf öğrencilerinin erken cebir kazanımlarına uygun olarak, resim çizerek problem çözme etkinliklerinin uygulanmasını içeren radikal yapılandırmacı öğretim deneyidir. Bu çalışma kapsamında, aritmetiğin temel kavramlarının öğrenildiği ve erken cebir öğretiminin başladığı seviye olarak belirtilen 3. sınıf seviyesindeki çocukların uygun yaş grubunda olduğu düşünülmektedir (Knuth vd., 2016). Resim çizerek problem çözme yaklaşımını içeren Donguri yönteminin daha önce bilimsel bir çalışmada incelenmemiş olması ve bu yöntemin uygulanma sürecinde öğrencilerin eylemlerinin ayrıntılı olarak incelenmesi amacıyla, öğrencileri birebir gözlemlemeyi sağlayan radikal yapılandırmacı yaklaşım benimsenmektedir.

Öğretim deneyi araştırmalarında, daha önce öğretim deneyi yürütmemiş veya çalışılacak öğrenci grubuyla ilgili deneyimi olmayan araştırmacıların, keşfedici öğretim aşamasını gerçekleştirmeleri önerilmektedir (Steffe ve Thompson, 2000). Keşfedici öğretim aşamasının temel amaçlarından biri, öğrencilerin matematik bilgisi hakkında fikir sahibi olup, burada kazanılan deneyim ile öğretim bölümleriyle ilgili öncül hipotezlerin oluşmasını sağlamaktır (Steffe ve Ulrich, 2014). Resim çizerek problem çözmeyi içeren Donguri yönteminin ilk kez bir bilimsel çalışmada kullanılacak olması nedeniyle, uygulama esnasında neler yaşandığının ve öğrenci davranışlarının anlaşılması, hazırlanan problem durumlarının öğrencilerin yaş seviyesi için ve resim çizerek çözmeye uygun olup olmadığının anlaşılması amacıyla keşfedici öğretim aşaması gerçekleştirilmiştir. Araştırmacı, yaklaşık üç yıldır Donguri yöntemini 2. sınıftan 6. sınıf seviyesine kadar birçok öğrenci ile uygulama deneyimine sahiptir. Bununla birlikte araştırmacının, 3. sınıf seviyesiyle ve belirlenen problemler ile uygulama yapma konusunda keşfedici öğretim aşamasında deneyim kazanması sağlanmıştır. Böylece asıl uygulama olan öğretim bölümlerinin nasıl uygulanabileceği konusunda fikir edinilmiştir.

Keşfedici öğretim aşaması öncesinde, uygulamada kullanılan problemlerin oluşturulma süreci bir sonraki başlıkta açıklanmaktadır.

5.2. Uygulamada Kullanılan Problemlerin Hazırlanması

İtoyama tarafından hazırlanan Donguri problemleri incelendiğinde hazırlanan seviyelerdeki soruların Türkiye’deki çocukların kazanımlarına tam denk düşmediği ve kültürel olarak da Japon kültürünü yansıtan, bu nedenle Türkiye’deki çocuklara yabancı gelebilecek bağlamların yer aldığı görülmektedir. Türkiye’de uygulanacak bu çalışma için 3. sınıf öğrencilerin kazanımlarına ve erken cebir öğretimine uygun olarak problemlerin yeniden hazırlanması gerekliliği görülmüştür. Bu problemlerin hazırlanmasında Donguri sorularındaki gibi hayvan karakterlerin olmasına ve resmetmeye teşvik edecek bağlamların yer almasına özen gösterilmiştir. Ayrıca, problemlerin 3. sınıf seviyesinin ders kitaplarında yer alan problem tarzlarını yansıtmasına özen gösterilmiştir. Bu anlamda kültürel farklar göz önüne alınarak, Donguri yaklaşımının aslına uygun şekilde ve çalışmanın amaçları doğrultusunda uyarlamalar yapılmıştır.

Tall (2007; 2008) tarafından geliştirilen problemlerdeki işlemlerin gelişimiyle sembolleştirmenin gelişimini içeren çerçeve göz önünde bulundurularak problemler geliştirilmiş ve sıralanmıştır. Buna göre, öncelikle tek işlemli problemlerin yer verilmesi, toplama ve çıkarma işlemleriyle başlanarak bunları içeren iki ve daha fazla işlemli problemlere geçilmesi, sonrasında çarpma işleminin yer aldığı tek işlemli problemlere ve toplama ve çıkarmayı da dahil eden çok adımlı problemlere yer verilmesi, ardından bölme işlemini içeren tek işlemli ve çok adımlı problemlere geçilmesi planlanmıştır. Sonrasında ise birden fazla yolla çözülebilen problemlere yer verilmiştir. Bu amaçla Donguri sorularının uygun şekilde uyarlanması dışında, literatürde ve ders kitaplarında 3. sınıf öğrencilerine uygun hazırlanan erken cebir problemleri de incelenerek (Blanton, 2008; Kaput, Carraher ve Blanton, 2008) bir uyarlama yapılmıştır.

Erken cebir bağlamında problem çözmeyi içeren bu çalışmada, öğrencilerin Covid-19 pandemi dönemi sürecinde büyük oranda uzaktan çevrimiçi eğitim aldığı da göz önünde bulundurularak ve erken cebire geçişte temel aritmetik becerilerinin önemli olduğu düşünülerek öncelikle dört temel işlem olan toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini içeren problemlere yer verilmiştir. Böylece hem aritmetik becerilerini ve işlemlerin anlamlarını doğru bir şekilde uygulayabildiklerinden emin olmak hem de erken cebir problemlerine geçmeden önce resim çizerek problem çözme yöntemi olan Donguri’ye alışmış olmaları istenmektedir.

Donguri yönteminin öğretiminin başlangıcında, söylenen her cümlelerin nasıl resme dönüştürüleceğinin gösterilmesi ve yöntemin kurallarının açıklanması amacıyla uygulanan Elma-Elba etkinliğine benzer olarak öğretmen tarafından çözülmesi için bir içerik hazırlanmıştır. Buna göre tasarlanan Arya karakteri anlatılmakta ve uygulama boyunca bu karakter üzerinden problemler sunulacağı için problem bağlamının anlaşılması sağlanmaktadır. Bu amaçla ilk içerik bir problem durumu sormakla birlikte bağlamı anlatan bir hikâye tarzındadır:

Bir zamanlar bir ormanın içindeki küçük kulübesinde Arya isimli bir çocuk yaşamış.

Arya ne çok büyük ne çok küçükmüş.

Turuncu renkli kıvrık saçları varmış.

Kocaman mavi gözleri ve küçücük bir burnu varmış.

Tüm zamanını hayvan dostlarıyla ormanın içinde dolaşarak, çiçekler ve meyveler toplayarak, dağlara tırmanarak, ırmakta yüzerek geçirirmiş.

Arya, yağmur sonrasında çıkan gökkuşağını seyretmeyi çok severmiş.

Bir gün iki ayrı gökkuşağının aynı anda çıkmış olduğunu görmüş.

Her gökkuşağında 7 renk olduğuna göre Arya kaç renk görmüştür?

Donguri yönteminde yer alan problemlerdeki cümleler satırlara ayrılmış bir şekilde sunulmamasına rağmen, öğrencilerin cümle cümle okumaya teşvik edilmesi ve cümleleri birbirinden daha rahat ayırabilmeleri amacıyla cümleler satırlara ayrılarak sunulmuştur. Öğrencilerin çözmelerinin istendiği problem durumları sırasıyla aşağıda sunulmaktadır.

Toplama işlemi içeren problem:

Bir gün Arya, ormandaki arkadaşlarını evine davet etmiş.

2 kız ve 3 erkek arkadaşı varmış.

Ardından 4 arkadaşı daha gelmiş.

Davette Arya ile birlikte kaç kişi vardır?

Çıkarma işlemi içeren problem:

Arya ormandaki davet için 8 tane meyve suyu ve 8 tane kek hazırlamıştır.

Arya'nın davetine 12 arkadaşı katılmıştır.

Arya, davete gelen her arkadaşına 1 meyve suyu ve 1 kek ikram etmiştir.

Herkese yetecek kadar olması için daha kaç tane meyve suyu ve kek hazırlaması gerekir?

Toplama ve çıkarma işlemlerini çok adımlı içeren problem:

Arya'nın 75 tane kalemi vardır.

Üç arkadaşına kalemlerini vermek istemiştir.

Bir arkadaşı 14 kalemi beğenip almıştır.
Diğer arkadaşı da 28 tane kalemi almak istemiştir.
Kalan kalemleri de üçüncü arkadaşına vermiştir.
Üçüncü arkadaşına kaç kalem vermiştir?

Çarpma işlemini içeren problem:

Arya, ormanda çiçek topluyor.
Her bir adım attığında 3 tane çiçek topluyor.
5 adım attığında kaç çiçek toplamış olur?

Çarpma ve toplama-çıkarma işlemlerini çok adımlı içeren problem:

Arya, her sabah açan kabak çiçeklerinden toplamak ister.
Arya, bu zamana kadar 12 tane kabak çiçeği toplamıştır.
Her sabah bahçesinde 6 yeni kabak çiçeği açmaktadır.
Buna göre bir hafta sonra kaç tane kabak çiçeği toplamış olur?

Bölme işlemini içeren problem:

Arya'nın 21 tane karınca arkadaşı var.
Arya, karınca arkadaşlarından 3'erli sıraya girmelerini istiyor.
Kaç sıra karınca olur?

Erken cebirde niceliksel muhakeme, ilişkisel ve fonksiyonel düşünme gerektiren problem durumları kullanılmaktadır. Bu amaçla niceliksel muhakeme için Carraher, Schliemann, Schwartz (2008) tarafından sunulan bir problemten, ilişkisel düşünme ve fonksiyonel düşünme için de literatürdeki benzer problemlerden uyarlama yapılmıştır (Moss, Beatty, Barkin ve Shillolo, 2008; Smith ve Thompson, 2008; Van den Heuvel-Panhuizen, Kolovou ve Robitzsch, 2013):

İlişkisel düşünmeyi içeren problem:

Arya, arkadaşı tavşanla yürüyüşe çıkar.
Arya 3 adım atarken tavşan 2 adım atıyor.
Arya 18 adım attığında tavşan kaç adım atar?

Niceliksel muhakeme ve ilişkisel düşünme içeren problem:

Arya ve arkadaşı Maya'da birer kutu şeker vardır.
Kutularında eşit sayıda şeker bulunmaktadır.
Arya, Maya'nın kutusundan 3 tane şekerini alıp kendi kutusuna atmıştır.
Hangisinin kutusunda kaç tane fazla şeker vardır?

Niceliksel muhakeme içeren problem:

Arya ve bir arkadaşı erik toplamaya karar verirler.

Arya'nın topladığı erik sayısı arkadaşının topladıklarının 3 katı kadardır.

İkisi toplamda 28 erik topladığına göre Arya kaç tane erik toplamıştır?

Fonksiyonel düşünme içeren problem:

Arya, belirlenen bir hedefe taş atmayı içeren bir oyun oynamaktadır.

Bu oyunda isabet eden her taş için 3 puan kazanılmaktadır.

Kaçırılan her taş için 1 puan kaybedilmektedir.

Herkesin 5 taş atma hakkı vardır.

Arya oyunda 7 puan kazandığına göre kaç atışı isabet ettirmiştir?

Fonksiyonel düşünme içeren problem:

Arya ormanda büyük bir davet düzenliyor.

İlk gelen tavşan arkadaşının elini sıkarak onunla selamlaşıyor.

Ardından sincap arkadaşı geliyor ve onun da elini sıkarak selamlaşıyor.

Sincap, tavşanın da elini sıkarak onunla selamlaşıyor.

Bu şekilde Arya her gelen arkadaşının elini sıkarak onunla selamlaşıyor ve her arkadaş da diğer arkadaşlarının elini sıkıyor.

Davette Arya ile birlikte 5 kişi olduğuna ve herkes birer kez el sıkıştığına göre toplam kaç kez el sıkışılmıştır?

Fonksiyonel düşünme ve niceliksel muhakeme içeren problem:

Arya, arkadaşı tavşanla marul toplamaya karar verir.

Arya 3 adım atıp 1 marul toplar.

Tavşan ise 2 adım atıp 1 marul toplar.

Arya 12 marul toplamıştır.

Arya ile tavşan eşit sayıda adım attığına göre tavşan kaç marul toplamıştır?

Donguri uygulamasının ilk seanslarında yer verilen aritmetik problemleri, öğrencilerin cebirsel düşünmeye geçişte, aritmetik işlemlerinin temel özelliklerini genellemelerine, sayılar arasında ilişki kurmalarına ve sayı duyularını geliştirmelerine fırsat vermek amacıyla sunulmuştur. İlişkisel düşünmeyi içeren bu süreçte dört işlemin her birinin anlamını ve temel özelliklerini içeren problem durumları sunulmuş ve öğrencilerin erken cebir problemlerini çözmeye hazırlanması amaçlanmıştır. Erken cebir problemlerinin ilki olarak sunulan, adım sayılarının birbiriyle ilişkili olarak düşünülmesini ve ulaşılan adım sayısının birim adım sayısı ile ilişkilendirilmesini içeren problem durumu ilişkisel düşünmeye yer vermektedir. Eşit sayıda şeker kutularındaki

değişimin incelenmesini içeren problem durumu ise belirli bir miktar verilmeden niceliklerin arasındaki değişim miktarının belirlenmesini içermesi bakımından niceliksel muhakemeyi içermektedir. Bunun yanında nicelikler arasındaki farkın değişimle ilişkili düşünmesini içermesi ve buradaki eşitliğin anlaşılması açısından ilişkisel düşünmeye yer vermektedir. Problem durumlarında verilen birden fazla çokluğun birbiri ile ilişkili bir şekilde düşünülmesi, verilen çoklukların uygun sayıda gösterilmesi ve bu çoklukların karşılaştırılması niceliksel muhakemeyi içeren süreçlerdir. Kat problemi olarak sunulan problem durumu, verilen çokluklar arasındaki kat ilişkisinin korunarak nicelikleri ifade etmeyi içermesi yönüyle niceliksel muhakemeyi gerektirmektedir. Atılan bir taşın isabet etme durumuna bağlı olarak kazanılan puanın nasıl değiştiğinin incelenmesini gerektiren taş atma problemi fonksiyonel düşünmeyi içermektedir. Bu problemin genel cebirsel çözümü şu şekilde olabilir:

$$\begin{aligned}3x - (5 - x) &= 7 \\4x - 5 &= 7 \\4x &= 12 \\x &= 3\end{aligned}$$

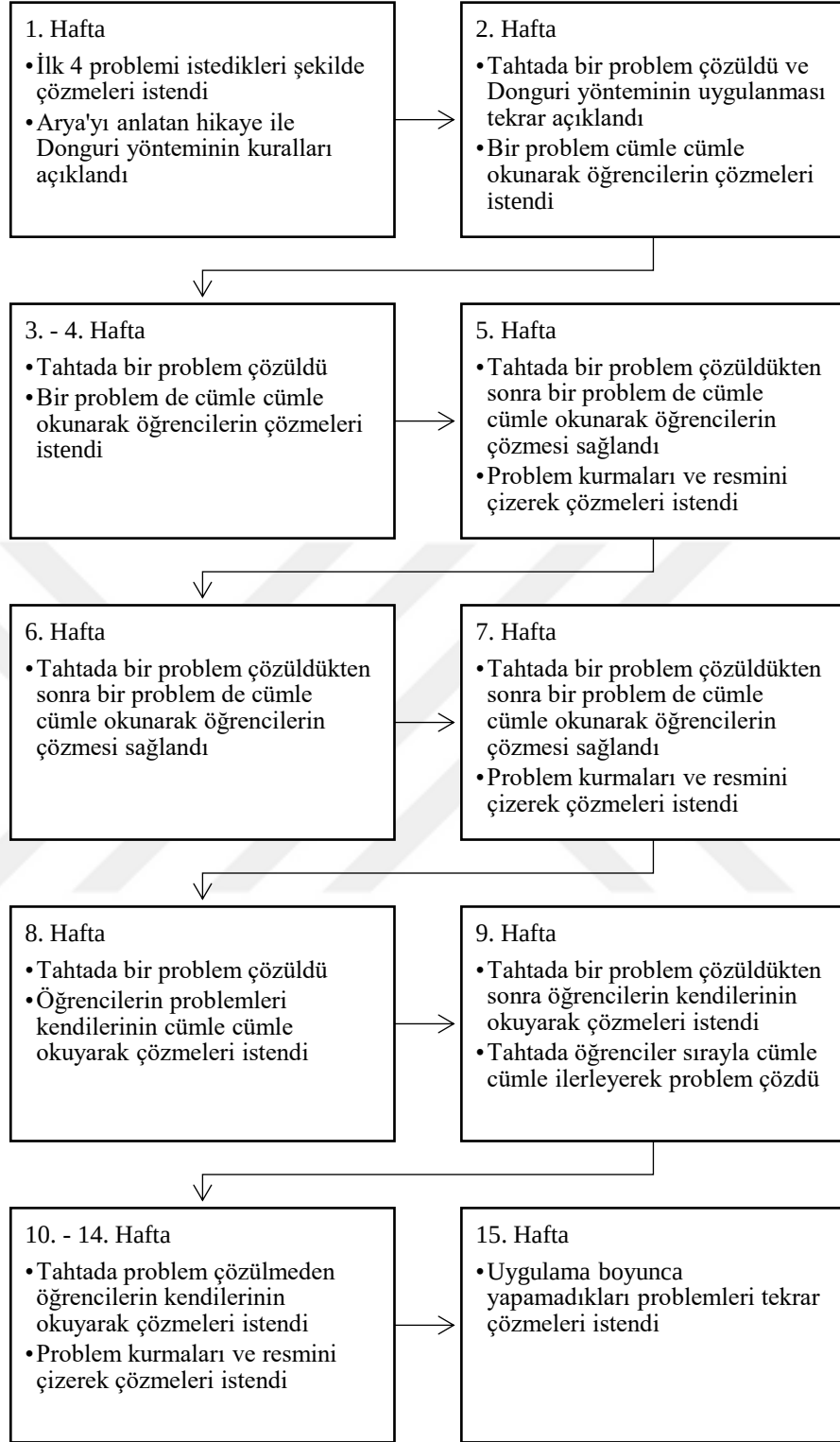
Ancak bu çözüm öğrencilerin bu yaş seviyesinde yapabileceği ve anlayabileceği bir çözüm olmamakla birlikte, problem durumunda yer alan bağımlı ve bağımsız değişkenleri göstermektedir. Bu problem, öğrencilerin bu değişkenleri düşünerek problemi çözmelerine fırsat vermektedir. Benzer şekilde el sıkışma probleminde de gelen kişi sayısına bağlı olarak kaç el sıkışması olacağını incelerken fonksiyonel düşünmeden yararlanılmaktadır. Adım sayısına bağlı olarak marul toplamayı içeren problem durumu ise hem fonksiyonel düşünmeyi hem de niceliksel muhakemeyi bir arada içermektedir. Buna göre öğrencilerin önce marul sayısına bağlı olarak adım sayısının ne olması gerektiğini, adım sayısına bağlı marul sayısının fonksiyonunu tersten düşünerek, yani bir ters fonksiyon yaratarak düşünmelerini içermektedir. Daha sonra bulunan bu adım sayısına göre tavşanın adımlaması ile kaç marul toplandığının bulunması gerekmektedir ve bu süreçte Arya'nın adımları ile tavşanın adımlarının niceliksel olarak ilişkilendirmesine ihtiyaç vardır. Çalışma boyunca yer verilen erken cebir problemlerinin hepsinde birden fazla düşünme becerisinin yer aldığı söylenebilir. Verilen çoklukların karşılaştırılması ve ilişkilendirilmesinde niceliksel muhakeme yer alırken, değişen durumlara göre sonucun nasıl değiştiğini incelemek fonksiyonel düşünmeyi içermekte ve verilen durumları yansıtan işlemlere karar verilmesi ise ilişkisel düşünmeyi içermektedir.

Hazırlanan bu problemleri, Donguri yönteminin kuralları ve uygulanma şekli göz önünde bulundurularak öğrencilerin çözmeleri sağlanmıştır. Bu problemlerin öğrencilerin seviyelerine uygun olup olmadığı açısından incelenmesi için alanda uzman olan akademisyen ve sınıf öğretmenlerinin görüşlerinin alınması amacıyla uzman değerlendirme formu hazırlanmıştır (EK-1). Uzman değerlendirme formlarının öğretmenlere sunulması esnasında, 3. sınıfa öğrenim yapmakta olan deneyimli (25-37 yıl) öğretmenler belirlenerek yüz yüze görüşülmüş ve problemleri öğrencilerine sormaları sağlanmıştır. Akademisyenlerin belirlenmesinde ise erken cebir alanında ve ilkokul seviyesinde çalışma yapmış olmaları dikkate alınmıştır. Böylece 4'ü öğretmen, 5'i akademisyen olmak üzere 9 uzmandan görüş alınmıştır. Bunlara ek olarak hazırlanan problemlerin 3. sınıf öğrencileri tarafından doğru anlaşılıp anlaşılmadığının öğrenilmesi ve gerekli düzenlemelerin yapılması için keşfedici öğretim aşamasında öğrenciler tarafından çözülmesi sağlanmış ve gerekli düzeltmeler yapılmıştır. Öğretim deneyi araştırmalarında, veri doygunluğuna ulaşılan kadar uygulamanın devam edeceği göz önünde bulundurularak hazırlanan bu problemlerin dışında yedek erken cebir problemleri de hazırlanmıştır. Tüm bu değerlendirmelerin sonunda uygulamada sorulan nihai problemler EK-2'de sunulmaktadır.

5.3. Keşfedici Öğretim Aşaması

Bu çalışmada uygulanacak olan resim çizerek problem çözmeyi içeren Donguri yönteminin ilk kez akademik bir çalışmada incelenecek olması ve kullanılacak problemlerin 3. sınıf öğrencileri ile ilk defa uygulanacak olması nedeniyle keşfedici öğretim aşaması gerçekleştirilmiştir. Bu aşamada araştırmacı, araştırmacının asıl katılımcılarından farklı olan 3. sınıf öğrencisi ikisi kız, ikisi erkek dört katılımcı ile Donguri yönteminin sınıf içinde bir uygulamasını gerçekleştirmiştir. Uygulamaya katılan öğrencilerin hepsi Eskişehir ilinin merkez bir ilçesinde yer alan dört farklı ilkokula devam etmektedir. Keşfedici öğretim aşamasında amaç, asıl araştırmacının bir ön uygulaması olmasından ziyade, sınıf içi bir uygulamayla Donguri yönteminin nasıl uygulanabileceğinin ve öğrencilerin bu süreçteki davranış ve problem çözme şekillerinin ne olacağının incelenmesidir. Keşfedici öğretim deneyi, 2021-2022 öğretim yılı içerisinde okul dışı bir ortamda gerçekleştirilmiştir. Araştırmacının çalışmakta olduğu kuruma kendi istekleriyle gelen bu dört öğrenci ile bir sınıf ortamı oluşturulmuştur.

Keşfedici öğretim aşaması haftada bir gün bir saatlik (60 dk) dersler şeklinde planlanmıştır. Uygulamanın başında, öğrencilerin hali hazırda problem çözme becerilerinin anlaşılması amacıyla öğrencilere yöntemi öğretmeden önce ilk dört problem seçilerek öğrencilere sunulmuş ve istedikleri şekilde çözmeleri istenmiştir. Ardından Donguri yöntemi anlatılmış, kuralları ve nasıl uygulanacağı, uygulama boyunca problem bağlamlarında yer alan Arya karakterinin tanıtıldığı hikâye üzerinden anlatılmıştır. Her hafta, bir problemin öğretmen tarafından çizilerek öğrencilerle birlikte çözülmesi ve bir problemin de öğrenciler tarafından çözülmesi planlanmıştır. İlk haftalarda bu uygulama gerçekleştirilmiş, ilerleyen haftalarda ise öğrencilerin isteklerine ve problem çözme durumlarına göre değişiklikler yapılmıştır. Problemlerin başlangıçta öğretmen tarafından cümle cümle okunması ile her cümle sonunda öğrencilerin resimleri fotoğraflanarak ilerlemeleri gözlemlenmiştir. Ayrıca uygulama boyunca ses kaydı alınarak veri toplanmıştır. Sınıf öğretim deneyi yaklaşımıyla şekillendirilen keşfedici öğretim aşaması, toplam 15 haftalık bir süreçte gerçekleşmiştir. Keşfedici öğretim aşamasının genel akışı Şekil 5.1’de sunulmaktadır.



Şekil 5.1. Keşfedici öğretim aşamasının genel akışı

Keşfedici öğretim aşamasının ilk haftasında ilk dört problem öğrencilere verilmiştir ve istedikleri şekilde çözmeleri istenmiştir. Öğrencilerin çözümleri bitince onlarla tek tek görüşülüp neler yaptıkları ve nasıl düşündükleri sorulmuştur. Sonrasında Arya'nın

anlatıldığı ve Donguri yönteminin açıklandığı etkinliğe geçilmiştir. Öğrencilere ilk hafta Donguri yöntemiyle problem çözdürülmemiş ve ders bitirilmiştir. İkinci hafta tahtada bir problem çözülerek başlanmış ve Donguri yönteminin kuralları tekrar hatırlatılmıştır. Sonrasında öğrencilere kâğıtlar dağıtılarak onların bir problemi Donguri yöntemiyle çözmeleri istenmiştir. Bu aşamada öğretmen problemin her cümlesini sırayla okumuş, öğrenciler cümleyi çizmeyi tamamladığını söylediklerinde yeni cümleye geçilerek devam edilmiştir. Bu süreçte her cümle sonrasında neler çizdiklerinin anlaşılması için araştırmacı tarafından resimlerinin fotoğrafı çekilmiştir. Bitiren öğrencilere problemin metni verilerek tek tek resimleri kontrol edilmiş ve nasıl yaptıklarını açıklamaları istenmiştir. Uygulamada 2. haftadan itibaren 8. haftaya kadar süren altı hafta boyunca her derste bir problem araştırmacı öğretmen tarafından tahtada çizilerek tüm sınıfla birlikte çözülmüş ve sonrasında öğrencilere bir problem cümle cümle okunarak çözmeleri sağlanmıştır. Öğrencilerin resim çizerek problem çözme yöntemine alıştıkça problemleri daha hızlı bitirmeye başladıkları görülmüştür. Uygulamanın 5. hafta ve 7. hafta derslerinde daha ders süresinin bitmesine yaklaşık 15 dakika kalması nedeniyle öğrencilerin boş bir kâğıtta kendi problem durumlarını kurları ve bu problemi resimle göstererek çözmeleri istenmiştir. Kurdukları problemin resmini ve çözümünü bitiren öğrencilerin problemlerini anlatmaları istenmiştir. Keşfedici öğretim aşamasının 9. haftasında tahtada bir problem çözülmesi ve öğrencilerin bir problemi çözmelerinin ardından kalan zamanda öğrencilerle tahtada bir problem daha çözülmüştür. Bu kez öğrenciler problemin cümlelerini sırayla tahtaya gelerek çizmişler ve birbirlerinin çizimlerinden hareketle sonraki cümledeki eklemelerle devam etmişlerdir. Böylece hem birbirlerinin çizim tarzlarını görmüşler hem de bir önceki durumu, yeni söylenenlere göre uyarlamışlardır. Uygulamanın 8. haftasıyla birlikte problem öğrencilere, öğretmen tarafından okunmamış, bunun yerine problem metinleri dağıtılarak kendilerinin cümle cümle okuması ve bir cümlenin resmini çizdikten sonra sıradaki cümleye geçmeleri istenmiştir. Kendilerinin okumaları problemleri kendi hızlarında çözmeleri ve herkesin kendi istediği cümleye odaklanmasını sağlamıştır. Ayrıca 10. haftadan sonra tahtada problem çözümü bırakılmıştır. Öğrenciler birkaç kez sıkıldıklarını ifade ettikleri için bir değişiklik amacıyla ve öğrencilerin artık resimle problem çözmeye alıştıkları düşünüldüğü için tahtada çözmeye karar verilmiştir. Uygulamanın 15. haftasına kadar tahtada problem çözülmeden ve öğrencilerin problemi kendilerinin okuyarak çözmeleri istenerek devam edilmiş, öğrencilerin erken bitirdiği zamanlarda da problem kurları

ve resim çizerek çözmeleri istenmiştir. Son hafta olan 15. haftada uygulama boyunca öğrencilerin yanlış çözdüğü veya zorlandığı problemler belirlenmiş ve onlar tekrar sunulmuştur. Öğrencilerin bu kez problemi daha kolay bularak ve resimleri daha etkili kullanarak çözebildikleri görülmüştür.

Keşfedici öğretim aşamasında toplanan veriler ile öğrencilerin problemi çözerken bir cümleyi çizmelerinin ve problemi tamamlamalarının ortalama ne kadar sürdüğü, tahtada tüm sınıfla çözülen problemlerin ortalama ne kadar sürdüğü, bu süreçte öğrencilerin karşılaştıkları zorlukların ve uygulamanın akışını etkileyen durumların neler olduğu, sınıf etkinliği olarak nelerin yapıldığı gibi sorulara yanıt verecek şekilde analiz edilmiştir. Ayrıca öğretim bölümleri esnasında kullanılacak, öğrenci resimlerindeki temsil türlerinin ve gelişiminin analizi de yapılmıştır. Keşfedici öğretim aşamasında kazanılan deneyimler, öncül hipotezlerin oluşturulmasında ve öğretim bölümlerinin tasarlanmasında katkı sağlamıştır.

Keşfedici öğretim aşaması boyunca gerçekleşen deneyimler ile çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlardan biri hazırlanan problemlerin Donguri yöntemi kullanılarak 3.sınıf öğrencileri tarafından çözülme süreleri üzerinedir. Sınıf içinde dört öğrenciyle gerçekleştirilen uygulama boyunca öğretmenin tahtada bir problem çözmesi yaklaşık 15-20 dakika, öğrencilerin problemleri çözmeleri ise ilk haftalardaki işlem bilgilerini içeren problemlerde 15-20 dakika, son haftalarda sunulan erken cebir problemlerini çözmeleri 30-50 dakika sürmüştür. Bu süreler, çözülen problem durumuna göre değişmekle birlikte, Milli Eğitim okullarındaki 40 dakikalık ders sürecinde uygulanabilir olduğunu göstermektedir. Ayrıca keşfedici öğretim aşaması boyunca öğrencilerin problem çözme için erken bitirmeleri nedeniyle kalan zamanı değerlendirmek için kendilerinin bir problem kurmaları, bunu resim çizerek göstermeleri ve çözmeleri veya öğrencilerin bir problemi sırayla tahtaya gelerek cümle cümle çizmeleri ve birlikte çözmeleri istenmiştir. Gerçekleştirilen bu iki uygulama Donguri yönteminin içinde yer alan uygulamalar değildir ve süreç içerisinde geliştirilmiştir. Bu uygulamaların resim çizerek problem çözmenin kullanıldığı sınıf içi etkinlikleri zenginleştireceği düşünülmektedir.

Öğrencilere ilk hafta çözmeleri için sunulan problemlerde zorlandıkları ve çözemedikleri problemleri, resim çizerek çözmeleri için sunulduğunda doğru bir şekilde anlayıp çözebildikleri görülmüştür. Bu anlamda resim çizerek problemleri görselleştirmenin problem durumunun ve bileşenlerinin anlaşılmasına yardımcı olduğu söylenebilir. Kendilerinin problemi okuyarak çözmeye başlamaları ile kendi hızlarında

ilerlediklerinde sıkılmadıkları görülmüştür. Tahtada öğretmenle çözülen problemler esnasında da son haftalarda sıkılmaya başladıkları görülmüş ve öğrencilerin resim çizerek problem çözmeye alıştıkları düşünülmüş 10. haftadan sonra tahtada problem çözümü bırakılmıştır. Ayrıca bu haftadan sonra erken cebir problemlerine geçilmesi nedeniyle öğrencilerin bu problemleri çözmeye odaklanmaları için yeterli zamanın olması sağlanmıştır.

Öğrencilerin uygulamanın başından itibaren resimlerinde kullandıkları temsil çeşitlerinin büyük oranda değişmediği, resim kullanmayı seven öğrencilerin kullanmaya devam ettiği ama ilk haftalarda da daha az resimle ve daha çok işlemle temsil eden öğrencilerin de aynı şekilde devam ettiği görülmüştür. Bu anlamda resim çizerek problem çözmelerinde öğrencilerin bireysel farklılıklarının da göz önünde bulundurularak, resim çizmeyi sevmeyen öğrencilerin resim çizmeye zorlanmaması veya istedikleri şekilde ve istedikleri kadarıyla çizmelerine izin verilmesi gerektiği düşünülmüştür. Ayrıca ilk haftalarda daha detaylı ve renklendirerek çizmeye özen gösterdikleri, zamanla yöntemi kullanmaya alıştıkça renklendirmeyi bırakıp sadece verilenleri gösterecek şekilde resimleri kullandıkları gözlemlenmiştir. Bu değişimin temsillerin soyutlanmasının gelişimi için önemli olduğu düşünülmüştür.

Uygulama boyunca tahtada çözülen ve öğrencilere sunulan problemlerin hiçbirinde anlaşılmayan veya yanlış anlaşılan bir durumun olmadığı gözlenmiştir. Öğrenciler son haftalara doğru sürekli Arya'nın geçtiği problemlerden sıkıldıklarını ifade etmişlerdir. Bunun üzerine onlara tanıtılmayan ve kendilerinin istedikleri gibi hayal edebilecekleri Aliş adlı farklı bir karakterin yer alması sağlanmıştır.

5.4. Çalışmanın Katılımcıları

Çalışmanın uygulamasının yapılması için, Eskişehir ilinin merkez ilçesinde yer alan, sosyoekonomik durumu orta-yüksek seviyede olan bir devlet ilkokulu belirlenmiştir. Bu okulun belirlenmesinde araştırmacının ulaşımının kolay olması ve okul müdürünün çalışmaya sıcak bakması belirleyici olmuştur. Çalışmanın katılımcı grubu olarak erken cebir öğreniminde kritik olduğu düşünülen 3. sınıf seviyesi belirlenmiştir. Katılımcıların bulunmasında, belirlenen okuldaki 3. sınıf seviyesine öğretim yapan iki öğretmenden yardım istenmiştir. Öğretmenlerin sınıflarındaki öğrenciler arasından evi okula yakın olan, okul saatleri dışında da okula gelip gitmekte zorluk yaşamayacak biri kız biri erkek iki öğrenci belirlemeleri istenmiştir. Öğrencilerin belirlenmesinde başarı bir

ölçüt olarak seçilmemiş, onun yerine kendini rahat ifade edebilen, dışa dönük öğrenciler olmaları istenmiştir. Öğretmenlerin belirlediği öğrenciler ve velileri ile tek tek görüşülerek çalışmanın amaçları açıklanmış ve katılmaya gönüllü olmalı üzerine katılımcı olmuşlardır. Böylece ikisi kız (Arzu ve Derya), ikisi erkek (Mert ve Kenan) dört öğrenci katılımcı olarak belirlenmiştir.

Katılımcı öğrencilerin sosyoekonomik durumları orta-üst seviyede olmakla birlikte, genel başarı durumları da ortalamanın üzerindedir. Çalışmada resim çizilerek problem çözüleceğinden başlangıçta bahsedilmiş olması nedeniyle, öğretmenler genellikle resim çizmeyi seven öğrencileri belirlediklerini belirtmişlerdir. Katılımcılardan Mert okulun resim yarışmalarında birincilikleri bulunan bir öğrenciyken, Kenan da matematik çalışma kâğıtlarına çeşitli resimler çizmeyi seven bir öğrencidir. Arzu ve Derya ise resim çizmeyi sevdiklerini belirtmişlerdir. Ayrıca öğrenciler, kitap okumayı çok sevdiklerini söylemişlerdir. Katılımcılardan Arzu okulun kütüphanesinde görev alırken, Kenan da her hafta okuduğu farklı kitaplardan bahsetmektedir. Katılımcılar arasında Mert oldukça aktif ve yoğun bir öğrencidir, okul saatleri dışında da okulun futbol ve bando takımına katılmaktadır. Bununla birlikte Mert ve Kenan çeşitli bilim projeleri hazırlama gruplarında yer almaktadır. Katılımcıların profilleri incelendiğinde, resim çizmeyi ve kitap okumayı seven, matematiğe ilgili ve başarı düzeyi iyi olan öğrencilerden oluştuğu söylenebilir.

5.5. Öğretim Bölümleri

Keşfedici öğretim aşamasında kazanılan deneyimlerden hareketle öğretim bölümlerinin neler olabileceği konusunda taslak bir plan hazırlanmıştır. Öğretim deneyi araştırmalarında öğretim bölümleri, toplanan verilerin analizleri ile birlikte düzenlenip planlanarak ilerlediği için taslak bir akış olarak düşünülmüş ve uygulama esnasında değişebileceği göz önünde bulundurulmuştur. Uygulama boyunca her seans dört öğrenci ile bireysel olarak gerçekleşmiştir. Uygulama boyunca her adımı içeren seanslar dört kez tekrarlanmıştır. Öğretim bölümündeki bir problem durumu bir öğrenci ile çözüldükten sonra gerçekleşen seansın ön analizleri yapılmış ve aynı problemin diğer öğrencilerle çözülmesinde gerekli görülen düzenlemeler yapılmıştır. Bu süreçte bir seans ilk olarak Mert ile yapılmış, bu seansta yaşananların ön analizlerinin ardından Arzu ile aynı seans gerçekleştirilmiş, ön analizler tekrar yapılarak Kenan ile çalışılmış ve en son Derya ile görüşülmüştür. Her öğrenci ile yapılan görüşmelerde edinilen deneyimler bir sonraki

öğrenci görüşmesi için kullanılmıştır. Dört öğrenci ile sırayla görüşülerek bir seansın tamamlanmasının ardından tekrar genel bir analiz yapılarak sonraki seans adımına geçilmiştir. Seansların her öğrenci ile uygulanması ve analiz edilmesi döngüsel bir süreç izlenerek tamamlanmıştır. Uygulamada gerçekleşen adımların akışı Tablo 5.1’de sunulmaktadır.

Tablo 5.1. Öğretim deneyi kapsamında gerçekleşen uygulama adımları

Uygulama Adımı	Yapılan Etkinlik	Süre
1. Durum Belirleme	Öğrencilerin problem çözme becerilerini ve pratiklerini öğrenmek amacıyla, hazırlanan problemlere paralel 10 problemi istediği şekilde çözmeleri istenmiştir. Çözüm yöntemlerini ve neler düşündüklerini açıklamaları istenmiştir. Öğrencilere doğru ya da yanlış yaptıkları yönünde herhangi bir dönüt verilmemiştir.	1 seans
Çözülen problemler analiz edilmiştir. Hangi problemlerde zorlandıkları belirlenmiştir.		
2. Durum Belirleme	Problemleri cümlelere ayırarak sunmanın nasıl bir etkisi olduğunun anlaşılması amacıyla, problemlere paralel, cümle cümle sunularak hazırlanmış 10 problemi istedikleri şekilde çözmeleri istenmiştir. Çözüm yöntemlerini ve neler düşündüklerini açıklamaları istenmiştir. Öğrencilere doğru ya da yanlış yaptıkları yönünde herhangi bir dönüt verilmemiştir.	1 seans
İlk iki seansta çözülen problemler karşılaştırmalı analiz edilmiştir. Hangi problemlerde zorlandıkları belirlenmiştir.		
3. Durum Belirleme	Önceki seanslarda sunulan problemlerden zorlandıkları 5 problem belirlenerek bunları resim çizerek çözmeleri istenmiştir. Neler çizdiklerini ve düşündüklerini açıklamaları istenmiştir. Öğrencilere doğru ya da yanlış yaptıkları yönünde herhangi bir dönüt verilmemiştir.	1 seans
Önceki çözümleri ile karşılaştırmalı analiz edilmiştir. Resim çizmeyi nasıl kullandıkları incelenmiştir.		
Öğretim Bölümü	İlk seans araştırmacı tarafından örnek bir uygulama yapılarak Donguri yöntemi tanıtılmış ve ardından öğrencinin bir problemi Donguri yöntemi ile çözmesi istenmiştir. Bu öğretim bölümü boyunca her seansta bir problemin öğrenci tarafından Donguri yöntemi ile çözülmesi sağlanmıştır. Bu seanslarda araştırmacı problemi cümle cümle okumuş ve her cümlede öğrencinin resim çizmesi için gerekli zamanı tanımıştır. Öğrenci problemi bitirdiğini söyleyene veya takıldığını ifade edene kadar herhangi bir müdahale yapılmamıştır. Sonrasında öğrencinin çizimini ve çözümünü anlatması istenmiş ve araştırmacı tarafından da kontrol edilmiştir. Doğru veya yanlış yapılan kısımlar belirtilmiştir.	12 seans
Her seanstaki çözümler analiz edilmiştir. Önceki seanslarda sunulan paralel problemlerle karşılaştırmalı analiz edilmiştir.		
4. Durum Belirleme	Donguri yönteminin öğrencilerin problem çözme becerilerine nasıl bir etkisi olduğunu anlamak amacıyla ilk üç seansta sunulan problemlerden zorlandıkları belirlenen 5 problemi istedikleri şekilde çözmeleri istenmiştir. Neler düşündükleri ve çözüm yöntemlerini açıklamaları istenmiştir. Öğrencilere doğru ya da yanlış yaptıkları yönünde herhangi bir dönüt verilmemiştir.	1 seans
Problemlerin çözümünde Donguri yöntemini nasıl kullandıkları incelenmiştir. Önceki seanslardaki çözümleriyle karşılaştırmalı analiz edilmiştir.		
5. Durum Belirleme	Donguri yönteminin öğrencilerdeki kalıcılığını incelemek amacıyla uygulamanın son seansından 6 hafta geçtikten sonra bir seans daha yapılmıştır. Öğretim bölümü boyunca çözülen problemlerden zorlandıkları 4 problem belirlenerek istedikleri şekilde çözmeleri istenmiştir. Düşüncelerini ve çözümlerini açıklamaları istenmiştir.	1 seans
Donguri yöntemini kullanmada sorulan problem tarzının etkisinin olup olmadığı incelenmiştir. İlk seanslardan itibaren çözümleri karşılaştırmalı analiz edilmiştir.		

Çalışmaya katılan öğrencilerin öncelikle problem çözme ve görselleştirme konusundaki hazır bulunuşluklarının öğrenilmesi amacıyla durum belirleme olarak belirtilen bölümlerle, Donguri yöntemi öğretilmeden önce, uygulamada sunulacak problemlere paralel problemleri istedikleri şekilde çözmeleri istenmiştir. Keşfedici öğretim aşamasından farklı olarak bu aşamada uygulama boyunca kullanılacak problemlerin aynısı yerine paralel problemler oluşturularak bunları çözmeleri istenmiştir (EK-2 1. Aşama ve 2. Aşama Problemleri). Böylece uygulama başlangıcında öğrencinin hangi problem türlerini zaten çözebildiği veya çözemediği anlaşılmaya çalışılmıştır. İlk seansta ders kitaplarında da standart olarak karşılaştıkları şekilde problemler sunulmuştur (EK-2 1. Aşama Problemleri). İkinci seansta benzer kazanıma sahip problemler cümlelere ayrılmış bir şekilde sunulmuştur (EK-2 2. Aşama Problemleri). Böylece problemlerin cümlelere ayrılmış bir şekilde sunulmasının öğrencilerin problem çözme becerilerini nasıl değiştirdiği incelenmiştir. Her öğrenci için ilk iki seansta çözmekte zorlandıkları problemler belirlenerek üçüncü seansta bu problemleri resim çizerek çözmeleri istenmiştir. Böylece daha Donguri yöntemini öğrenmeden de resim çizmeyi problem çözmeye nasıl kullandıkları ve resim çizmenin problemleri çözmelerinde bir etkisinin olup olmadığı incelenmiştir. Her seansta öğrencilerin problemleri nasıl çözdüklerini açıklamaları istenmiş ve çözümlerinin doğruluğu hakkında herhangi bir dönüt verilmemiştir.

Dördüncü seanstan itibaren Donguri yöntemi açıklanmış ve bundan sonraki on iki seans boyunca öğrencilerden Donguri yöntemini kullanarak problemleri çözmeleri istenmiştir (EK-2 3. Aşama Problemleri). Öğretim bölümü olarak gerçekleşen uygulama sürecinin akışı Tablo 5.2’de sunulmaktadır. Her öğrenciyle gerçekleşen seans sonrasında ön analizler yapılarak öğrencilerin yaptıkları ve anlamakta zorlandıkları noktalar belirlenmiştir. Buna göre aynı problemin çözüldüğü bir sonraki öğrenci seansında bu noktalara dikkat edilmiştir. Özellikle kontrol etme aşamasında öğretmenin yaptığı müdahaleler, her öğrenci görüşmesinden sonra yeniden gözden geçirilmiş ve gerekli değişiklikler yapılmıştır.

Tablo 5.2. Öğretim bölümünde gerçekleşen uygulama süreci

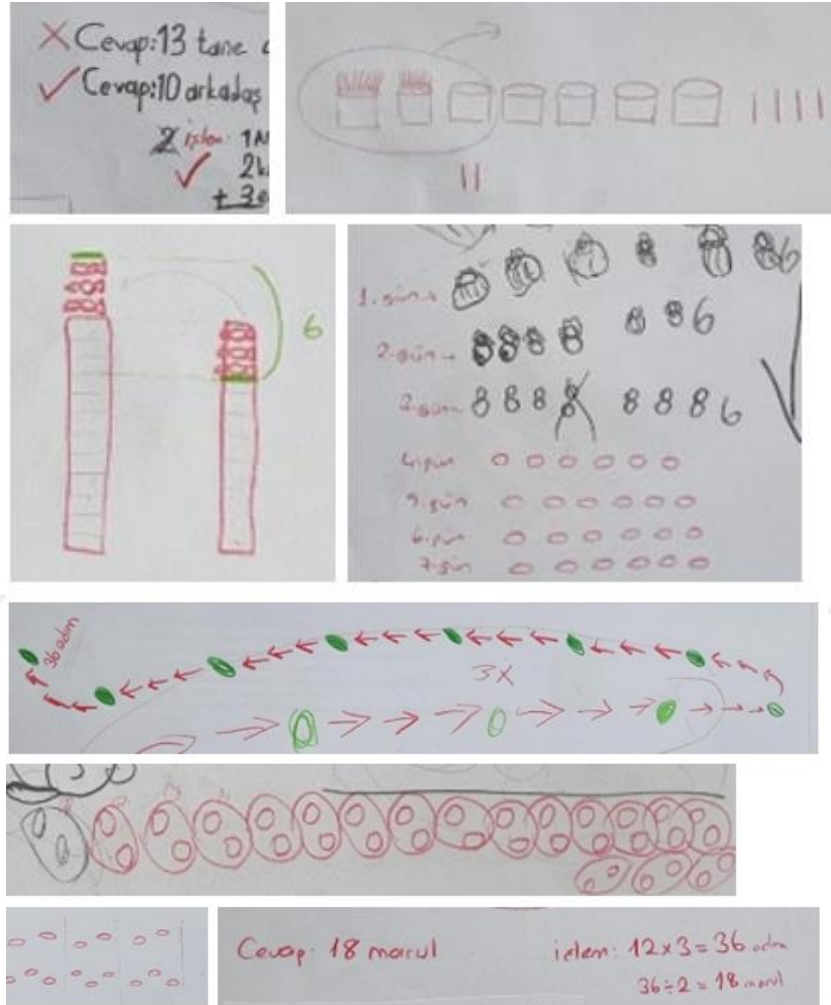
Seans No	Yapılan Etkinlik
Aritmetik Problemlerinin Çözümü	4. Seans Arya'yı tanıtan problem durumu öğretmen tarafından, Donguri yönteminin uygulama kuralları ile birlikte resim çizerek çözülmüştür. Bu aşamada öğrencilere resim çizerek nasıl problem çözecekleri ve Donguri yönteminde uyulması gereken kurallar açıklanmıştır. Buna göre her cümle için bir kez okunacağı ve her okunan cümlede geçenlerin anlaşıldığı şekilde resim çizerek gösterileceği, silgi kullanılmayacağı, problemde yer alan sorunun resim kullanılarak çözülmesinin ardından cevabın yazılacağı, eğer çözümdeki işlemler bulundursa bunların işlem olarak belirtilerek yazılacağı açıklanmıştır. Öğrencilerin yöntemin kurallarını anladıklarını söylemesinin ardından bir problemi de kendilerinin çözmeleri istenmiştir. Toplama işlemini içeren problem durumu sunulmuş ve öğretmen tarafından her cümle için okunmasının sonrasında öğrencilerin resimle göstermeleri için gerekli zaman tanınmıştır. Problemin son cümlesinin okunmasıyla öğrencilerin soruyu çözmeleri beklenmiş ve bitirdiklerini ifade etmeleri sonrasında kontrol etme aşamasına geçilmiştir.
	Ön analizler yapılarak her öğrenci seansı için düzenlemeler yapılmıştır.
	5. Seans Çıkarma işlemini içeren problem durumu öğretmen tarafından cümle cümle okunarak her cümle için sonrasında öğrencilerin resimle göstermeleri beklenmiştir. Öğrencilerin problemi bitirdiğini ifade etmelerinin ardından kontrol etme aşamasına geçilmiştir.
	Ön analizler yapılarak her öğrenci seansı için düzenlemeler yapılmıştır.
	6. Seans Toplama ve çıkarma işlemini içeren kalem probleminin Donguri yöntemi ile çözülmesi istenmiştir. Öğretmen tarafından problem cümleleri tek tek okunmuş ve gerekli süre tanınmıştır. Öğrencilerin problemi çözmeyi bitirmelerinin ardından kontrol etme aşamasına geçilmiştir.
	Ön analizler yapılarak her öğrenci seansı için düzenlemeler yapılmıştır.
	7. Seans Çarpma işlemini içeren problem durumunun Donguri yöntemi ile çözülmesi istenmiştir. Öğretmen tarafından problem cümleleri tek tek okunmuş ve gerekli süre tanınmıştır. Öğrencilerin problemi çözmeyi bitirmelerinin ardından kontrol etme aşamasına geçilmiştir.
	Ön analizler yapılarak her öğrenci seansı için düzenlemeler yapılmıştır.
	8. Seans Çarpma ve toplama işlemlerini içeren kabak çiçeği probleminin Donguri yöntemi ile çözülmesi istenmiştir. Öğretmen tarafından problem cümleleri tek tek okunmuş ve gerekli süre tanınmıştır. Öğrencilerin problemi çözmeyi bitirmelerinin ardından kontrol etme aşamasına geçilmiştir.
Erken cebir problemlerinin çözümü	Ön analizler yapılarak her öğrenci seansı için düzenlemeler yapılmıştır.
	9. Seans Bölme işlemini içeren problemin Donguri yöntemi ile çözülmesi istenmiştir. Öğretmen tarafından problem cümleleri tek tek okunmuş ve gerekli süre tanınmıştır. Öğrencilerin problemi çözmeyi bitirmelerinin ardından kontrol etme aşamasına geçilmiştir.
	Ön analizler yapılarak her öğrenci seansı için düzenlemeler yapılmıştır.
	10. Seans İlişkisel düşünmeyi içeren adım sayısı probleminin Donguri yöntemi ile çözülmesi istenmiştir. Öğretmen tarafından problem cümleleri tek tek okunmuş ve gerekli süre tanınmıştır. Öğrencilerin problemi çözmeyi bitirmelerinin ardından kontrol etme aşamasına geçilmiştir.
	Ön analizler yapılarak her öğrenci seansı için düzenlemeler yapılmıştır.
Erken cebir problemlerinin çözümü	11. Seans Niceliksel muhakeme ve ilişkisel düşünmeyi içeren eşit sayıda şeker probleminin Donguri yöntemi ile çözülmesi istenmiştir. Öğretmen tarafından problem cümleleri tek tek okunmuş ve gerekli süre tanınmıştır. Öğrencilerin problemi çözmeyi bitirmelerinin ardından kontrol etme aşamasına geçilmiştir.
	Ön analizler yapılarak her öğrenci seansı için düzenlemeler yapılmıştır.
	12. Seans Niceliksel muhakeme içeren kat probleminin Donguri yöntemi ile çözülmesi istenmiştir. Öğretmen tarafından problem cümleleri tek tek okunmuş ve gerekli süre tanınmıştır. Öğrencilerin problemi çözmeyi bitirmelerinin ardından kontrol etme aşamasına geçilmiştir.
Erken cebir problemlerinin çözümü	Ön analizler yapılarak her öğrenci seansı için düzenlemeler yapılmıştır.

Tablo 5.2. (Devam) *Öğretim bölümünde gerçekleşen uygulama süreci*

Erken cebir problemlerinin çözümü	13. Seans	Fonksiyonel düşünme içeren taş atma probleminin Donguri yöntemi ile çözülmesi istenmiştir. Öğretmen tarafından problem cümleleri tek tek okunmuş ve gerekli süre tanınmıştır. Öğrencilerin problemi çözmeyi bitirmelerinin ardından kontrol etme aşamasına geçilmiştir.
	Ön analizler yapılarak her öğrenci seansı için düzenlemeler yapılmıştır.	
	14. Seans	Fonksiyonel düşünme içeren el sıkışma probleminin Donguri yöntemi ile çözülmesi istenmiştir. Öğretmen tarafından problem cümleleri tek tek okunmuş ve gerekli süre tanınmıştır. Öğrencilerin problemi çözmeyi bitirmelerinin ardından kontrol etme aşamasına geçilmiştir.
	Ön analizler yapılarak her öğrenci seansı için düzenlemeler yapılmıştır.	
	15. Seans	Fonksiyonel düşünme ve niceliksel muhakeme içeren adım sayısına bağlı marul toplama probleminin Donguri yöntemi ile çözülmesi istenmiştir. Öğretmen tarafından problem cümleleri tek tek okunmuş ve gerekli süre tanınmıştır. Öğrencilerin problemi çözmeyi bitirmelerinin ardından kontrol etme aşamasına geçilmiştir.

Öğretim bölümünü oluşturan bu seansların ilkinde Donguri yöntemini anlatan ve Arya'yı tanıtan problem durumu ile araştırmacı tarafından bir çizim yapılarak yöntem açıklanmıştır. Bu seansın bir örneği “Ortaman Tasarlanması” başlığı altında sunulmaktadır. Donguri yönteminin açıklanmasının ardından öğrencilerin bir problemi resim çizerek çözmeleri izlenmiştir. Öğretim bölümündeki seansların her birinde bir problem çözülmüştür. Problemlerin çözümü aşamasında öğretmen tarafından problem cümleleri tek tek okunmuş ve öğrencilere söylenenleri resimle göstermeleri için gerekli zaman verilmiştir. Bu aşamada her cümle yalnız bir kez okunmuş, tekrar edilmesi istendiğinde tekrar okunmamış, hatırladıkları şekilde yapmaları istenmiştir. Problem çözümleri bitene kadar araştırmacı tarafından hiçbir müdahalede bulunulmamış, bitirdiklerini veya daha fazla bir şey yapamayacaklarını söylemeleri sonrasında kontrol etme aşamasına geçilmiştir. Bu aşamada problem sorusu resim defterlerine yapıştırılarak araştırmacı tarafından problem tekrar cümle cümle okunarak çizimleri kontrol edilmiş ve öğrencilerin yaptıklarını açıklamaları istenmiştir. Bu kontroller sırasında öğrencilerin eksiklerini veya hatalarını fark etmeleri durumunda istedikleri düzeltmeleri yapmalarına fırsat verilmiştir. Kontrol etme aşamasında araştırmacı tarafından kırmızı kalem kullanılarak çizimlerinin doğru, eksik ya da fazla kısımları belirtilmiş ve gerekli görüldüğünde nasıl bir görselleştirme yapılabileceği gösterilmiştir. Bu süreçte öğrencilerin de eksiklerini ve hatalarını fark ederek çizimlerini ve cevaplarını düzenledikleri görülmüştür. Bu kontrol etme süreci görselleştirmenin öğrencilere öğretilmesi amacıyla her problem çözümünde benzer şekilde uygulanmıştır. Kontrol etme aşamasında öğretmen tarafından eklenen çizimlere örnekler Şekil 5.2’de sunulmaktadır.

Buna göre öğrencilerin yazdıkları cevap ve işlemlerinin doğruluğu tik veya çarpı konularak belirtilmiş, gerekli görülmesi durumunda görselleştirmenin nasıl yapılabileceği örnek bir çizimle gösterilmiştir. Eğer öğrencilerin cevap veya işlemleri eksik kaldıysa ve kontrol etme aşamasında da bulamadılarsa öğretmen tarafından bunlar eklenmiştir.



Şekil 5.2. Kontrol etme aşamasında öğretmenin yaptığı eklemelere örnekler

Bu öğretim bölümünün tamamlanması ile başlangıçtaki üç seansta sorulan problemlerden öğrencilerin zorlandıkları ve öğretim bölümünde de Donguri yöntemini kullanarak da çözmekte zorlandıkları problemlerin paralelleri seçilerek 5 problem sorulmuş ve istedikleri şekilde çözmeleri istenmiştir. Böylece Donguri yöntemiyle uygulanan sürecin öğrencilerin problem çözme becerilerini nasıl değiştirdiğinin bir durum belirlemesinin yapılması amaçlanmıştır. Bu uygulama sürecinin bitmesinden 6

hafta sonra son bir seans daha yapılmıştır. Bu seansta Donguri yönteminin uygulanması sırasında sorulan problemlerden öğrencilerin en çok zorlandıkları 4 problem belirlenmiş, bunların kişi isimleri ve sayıları değiştirilerek sorulmuş ve istedikleri şekilde çözmeleri istenmiştir (EK-2 4. Aşama Problemleri). Böylece belli bir zaman geçmiş olmasına rağmen, Donguri özelinde hazırlanan problemler sorulduğunda Donguri yöntemini kullanıp kullanmadıkları ve ne şekilde kullandıkları incelenmiştir. Bu son seans ile uygulama bitirilmiştir. Toplamda 17 seanstan oluşan bir uygulama gerçekleştirilmiştir.

5.6. Ortamın Tasarlanması

Çalışmanın öğretim bölümlerinin uygulanması aşamasında öğrencilerle birebir klinik görüşmeler şeklinde ilerlenmiştir. Yapılan uygulamanın öğrenciler tarafından önemsenmesini sağlamak ve çalışma ortamının öğrencilerin daha aşına oldukları bir ortamda yapılmasını sağlamak amacıyla okullarında yer alan uygun bir boş sınıf (kütüphane veya özel eğitim sınıfı gibi) çalışma ortamı olarak belirlenmiştir. Öğrencilerin ders saatlerinin dışında bir saatte öğrenciler ile bu sınıf ortamında buluşmuş ve birebir görüşmeler yapılmıştır. Uygulamanın başında, öğrencilerin kendini bir değerlendirme ortamında hissetmemesi ve bir bilimsel çalışmaya katkı sunduklarını açıklamak amaçlı bir konuşma yapılmıştır. Bu konuşmanın amacı hem uygulama sürecinin nasıl gerçekleşeceği, ne kadar süreceği, öğrenciden beklentilerin neler olduğu ve neler olmadığı konularında öğrenciyi bilgilendirmektir. Böylece öğrencinin de kendini bu konuda hazır hissedip hissetmediği, uygulamaya katılmak isteyip istemediği konusunda bir anlaşma yapılmıştır. İlk görüşmede gerçekleşen senaryo genel olarak şu şekilde olmuştur:

Merhaba, öncelikle çalışmaya katılmayı kabul ettiğin ve geldiğin için teşekkür ederim. Ben üniversite eğitimim sonrası daha üst bir eğitim olan doktora eğitimime devam ediyorum ve onun için bu çalışmayı yürütüyorum. Bu çalışma sayesinde matematik eğitime katkıda bulunmayı umuyorum. Bu çalışmada senin yardımına ve düşüncelerine ihtiyacım olacak. Bu çalışmanın amacı kesinlikle seni değerlendirmek, sana not vermek, yaptıklarını yanlış veya doğru şeklinde yargılamak değil, tam tersine senin nasıl düşündüğünü anlamaya çalışmaktır. Bu nedenle düşüncelerin benim için çok değerli, düşüncelerini her zaman istediğin şekilde ve özgürce ifade edebilirsin. Bu konuda tamamen rahat olabilirsin. Bu çalışma kapsamında sana problemler vereceğim ve bu problemleri çözmeni isteyeceğim. Ancak bu problemler de seni değerlendirmek amaçlı değil, nasıl çözdüğünü, neler

düşündüğünü öğrenmek amaçlıdır. Yapamadığın ve anlamadığın noktalarda bana söyleyebilirsin veya öylece bırakabilirsin. Çalışma boyunca farklı problemler çözeceğiz. Çalışmamız haftada iki gün birer saat kadar sürecek ve yaklaşık 8 hafta boyunca devam edecek. İlk üç seans 10'ar problem çözmeni isteyeceğim. Sonraki haftalarda farklı bir yöntem öğreneceğiz ve o yöntemle her seansta bir problem çözerek ilerleyeceğiz. Çalışmanın sonunda ise yine birden fazla problemi çözmeni isteyeceğim. Sonrasında çalışmamız bitecek. Çalışma boyunca çalışmanı nasıl gerçekleştirdiğini anlamak ve sonrasında da izleyebilmek amacıyla video kamerayla çekim yapacağım. Videoda yaptığın çalışmanın görünmesine özen göstereceğim. Çalışmamız bu şekilde gerçekleşecek, katılmayı onaylıyor musun?

İlk görüşmede çalışmanın genel akışından bahsedildikten sonra onay veren öğrencilerle çalışmaya başlanmıştır. Çalışmanın dördüncü seansında Donguri yöntemine geçilmiş ve yöntemin kuralları bir hikâye bağlamında anlatılmıştır. Bu anlatım her öğrenci için benzer bir içeriğe sahiptir. Resim çizmeyi içeren bu yöntem öğretildikten sonra öğrencinin resim çizerek problem çözmeye devam etmek isteyip istemediği, resim çizmekten hoşlanıp hoşlanmadığı sorulmuştur. Bu aşamada resim çizmek istemeyen veya bu yöntemi uygulamak istemeyen bir öğrenci olmamıştır. Donguri yönteminin anlatımı şu şekilde gerçekleşmiştir:

Seni bir arkadaşım ile tanıştırmak istiyorum. Sen Arya diye birini tanıyor musun? Arya deyince zihninde neler canlanıyor? İstersen sana Arya'yı anlatabilirim. Arya'yı sana cümle cümle tanıtacağım ve her cümlede geçenleri zihninizde canlandırdığımız şekilde resmini çizerek göstereceğim. Böylece zihninizde canlananları daha görünür hâle getirmiş olacağız. Ben cümleleri okurken sen gözlerini kapatarak hayal edebilirsin ve hayalinde canlananları bana söyleyebilirsin. İlk cümlemiz şöyle: *Bir zamanlar bir ormanın içindeki küçük kulübesinde Arya isimli bir çocuk yaşamış.* Şimdi neler hayal ettin? Bir ormanda olduğu için ağaçlar çizebiliriz. Küçük bir kulübeden de bahsediyor, kulübeler ahşaptan olduğu için şöyle çizebiliriz. Arya'yı da kulübenin yanına çizebiliriz. Arya nasıl biri sence, nasıl çizmeliyiz? Bahsettiği ve hayal ettiğin başka bir şey var mıydı, başka neler çizebiliriz? Bu cümleyi çizdiğimizi düşünüyorsan devamını okuyabilirim. Devamındaki cümlede şöyle diyor: *Arya ne çok büyük ne çok küçükmüş.* Şimdi ne ekleyebiliriz? Arya'nın boyu uygun oldu mu sence? Olduğunu düşünüyorsan devamını okuyabilirim: *Turuncu renkli kıvrıcık saçları varmış.* Öyleyse saçlarını turuncuya boyayabiliriz. Kıvrıcık şekilde de düzeltebiliriz. Cümlede geçenler resmimizde gözükecek şekilde düzenlemeler yapabiliriz.

Bittiyse devamını okuyabilirim: *Kocaman mavi gözleri ve küçücük bir burnu varmış. Gözlerini biraz daha büyütüp mavi ile boyayabilirim. Burnunu zaten küçük yapmışım onu değiştirmeye gerek yok sanırım. Öyleyse devam edelim: Tüm zamanını hayvan dostlarıyla ormanın içinde dolaşarak, çiçekler ve meyveler toplayarak, dağlara tırmanarak, ırmakta yüzerek geçirirmiş. Neler yapıyormuş, neler hayal ettin, onları çizebiliriz. Hayvan arkadaşları varmış, bir kuş arkadaşı, bir kedi arkadaşı olabilir. Çiçekler varmış, bahçesine çiçekleri çizebiliriz. Bir ırmaktan bahsediyordu, belki evinin arkasından bir ırmak geçebilir. Dağlar da varmış, dağları unutmayalım. Meyveler topluyormuş, meyve ağaçları olabilir. Eline bir sepet çizebiliriz, ona topluyordur. Sanırım söylenenleri gösterdik devamını okuyabiliriz: Arya, yağmur sonrasında çıkan gökkuşağını seyretmeyi çok severmiş. Bir gökkuşağı çıktığını gösterebiliriz. Gökkuşağı nasıl olur peki, nasıl çizelim? Şu dağın tepesinde gökkuşağı görünüyor olabilir. Bunu da gösterdiğimizize göre devamını okuyorum: Bir gün iki ayrı gökkuşağının aynı anda çıkmış olduğunu görmüş. Bunu nasıl gösterebiliriz? Sen hiç aynı anda iki gökkuşağının çıktığını gördün mü? Ben geçenlerde görmüştüm. Bir gökkuşağının üstünde bir tane daha gökkuşağı çıkmıştı. Bu da ona benzer olabilir. Öyleyse şuraya bir tane daha gökkuşağı yapabiliriz. Devamında ne diyor acaba, bakalım mı: Her gökkuşağında 7 renk olduğuna göre Arya kaç renk görmüştür? Gökkuşaklarını yedi renkli olarak gösterdik mi? Öyleyse bize sorduğu soruyu yanıtlayabilir miyiz? Bulduğumuz cevabı “cevap” şeklinde belirterek yazmamız gerekiyor. Şimdi cevabımızı yazalım, cevap: 14 renk görmüştür. Evet, hikâyeyi tamamen okuduk ve hikâyede geçen her şeyin resmini çizerek göstermiş olduk. Böylece hikâyede neler geçtiğini görebiliyoruz ve neler olduğunu hatırlamak zorunda kalmıyoruz. Resmimizi hikâyeye uygun olarak çizdiğimiz için de bize sorduğu sorunun cevabı da resmimizde gözüktüyor aslında. Sadece cevabı yazmamız yeterli oluyor. Şimdi burada sorduğu soruyu işlem yaparak nasıl çözebilirdik onu da düşünelim mi? İki tane gökkuşağı var ve her gökkuşağında 7 renk varmış. O zaman iki tane 7 renk olacağı için $7+7$ işlemiyle 14 olduğunu bulabiliriz. Öyleyse bunu da işlem diye belirterek yazalım, işlem: $7+7=14$. Başka bir işlem de aklına geliyorsa söyleyebilirsin. İki tane 7 demek 2 kere 7 anlamına da geliyor. Böylece $2 \times 7=14$ şeklinde de yazabiliriz. Evet problemimizi resim çizerek gösterdik ve cevabını bulduk. İşlemle de nasıl olabileceğini gösterdik. Bundan sonra çözeceğimiz problemlerde bu yöntemi kullanacağız. Yöntemde problemi cümle cümle okudum ve her cümlemin resmini çizerek gösterdim. Resmimizin çok güzel olmasına gerek yok, amacımız sadece problemde geçenleri göstermek. Problemdeki sorunun cevabını resmim de zaten görebildim ve “cevap” diye belirterek yazdım. Cevabı bulduktan sonra da işlemle nasıl yapardım diye düşündüm ve işlemi yazdım. Bunları yaparken de hiç silgi kullanmadım. Bu yöntemde silgiyi hiç kullanmayacağız, çünkü silmek düşüncelerimizi yok etmeye neden oluyor. Bir*

düşüncemizin veya çizimimizin yanlış da olsa öylece kalması ve görünür olması bizim o hatamızdan ders almamızı ve bir daha aynı hatayı yapmamamızı sağlar. Eğer onu silersek yaptığımız hatayı veya düşüncelerimizi unutabilir ve tekrar tekrar aynı şeyleri yapmaya devam edebiliriz. Düzeltmek istediğin bir şeyi tekrar tekrar yeniden çizebilirsin. Eğer yaptığının yanlış olduğunu düşünüyorsan ve onun göz ardı edilmesini istiyorsan üzerine çarpı koyabilir veya onu başka bir şeye dönüştürebilirsin. Böylece onu görmezden gelebiliriz ve silmeden ondan kurtulmuş oluruz. Bundan sonraki haftalarda da bu yöntemi uygulayarak problemleri çözmeni isteyeceğim. Her hafta yalnızca bir problem çözeceksin. Bu yöntemi nasıl buldun? Resim çizerek problem çözmek ister misin? Çalışmamıza devam etmek ister misin?

Donguri yönteminin anlatımı gerçekleştirildikten sonra öğrencinin de bir problemi benzer şekilde çözmesi istenmiştir. Öğretim bölümleri boyunca bir problemi öğrenciler Donguri yöntemini kullanarak çözmüşlerdir. Bu süreçte problemler öğretmen tarafından cümle cümle okunmuş ve her cümle sonunda öğrencilerin çizimleri için gerekli süre tanınmıştır. Öğrencilerin tüm cümleleri çizmeyi bitirip problemi çözmelerinin ardından öğretmen tarafından kontrol etme aşamasına geçilmiştir.

5.7. Verilerin Toplanması

Çalışmanın uygulama süreci 2022-2023 öğretim yılı güz dönemi içerisinde gerçekleştirilmiştir. Bu süreçte uygulamanın çok uzun sürmesinden kaynaklı veri kaybını önlemek amacıyla her öğrenci ile haftada iki gün birer seanslık görüşmeler yapılmıştır. Böylece uygulamanın 16 seansı yaklaşık 9 hafta kadar sürmüştür. Son seans için 6 haftalık bir sürenin geçmesi beklenmiş ve bir seans daha yapılmıştır. Veri toplama süreci toplam 15 haftalık süreç sonunda bitirilmiştir.

Radikal yapılandırmacı öğretim deneyindeki öğretim bölümleri boyunca veriler, klinik görüşmeler esnasında öğrenci eylem ve söylemlerini gösteren video kamera, öğrenci çizimlerini gösteren resimler, öğrencilerin çözümleri hakkındaki anlatımları, araştırma boyunca araştırmacının her seans sonunda yaşananları özetlediği ve ön analizlerini içeren gözlem notları aracılığıyla toplanmıştır. Uygulama boyunca her öğrenciye ait 17 kayıt olmak üzere toplamda 68 video kaydı arşivlenmiştir. Her öğrenciden 12 problemin resminin bulunduğu 4 ayrı resim defteri ve 5 seansta (1, 2, 3, 16 ve 17. seanslar) birden fazla problem çözdükleri kağıtlar veri olarak toplanmıştır. Toplanan dokümanların ham halleri EK-3'te sunulmaktadır.

Derya 10. Seans Ön Analiz

Derya bugün biraz yorgundu ve soruyu anlamakta zorluk yaşadı. Arya ve Tavşanı çizdi ama adım sayılarını üzerlerine sayıyla yazarak gösterdi. Resimle göstermediği için aralarındaki ilişkiyi anlamakta zorlandı.

Toplamsal bir ilişki olduğunu düşünerek aralarındaki farkın 1 olacağını ve cevabın 17 olacağını söyledi ama emin değildi.

Resim çizmeye yönlendirdim ve adımları göstermesini istedim. Başta hayal etmesini istedim ama hayalini nasıl çizeceğini bilmediğini söyledi. Adımları çift ayaklar şeklinde gösterdi. Adımın bir ayak ile olduğunu belirtince her adım için bir ayak yaparak devam etti. Ama bu seferde 3 adım tam gözükmedi. Bunu da 3 ayak yan yana çizerek ve 6'ya kadar bunları yaparak 18 adımı gösterdi. Bununla eşleşen Tavşanın 2 adımını da fazla çizdiği için eşleştiremedi.

Sonra ellerini kullanarak parmaklarını adım adım yürüterek gösterdi. Parmaklarının dokunduğu şekilde adımları çizdim ve eş zamanlı olanları grupladık. Böylece devamını çizdi ve doğru cevaba ulaştı.

İşlemleri de birlikte düşündük ve doğru bir şekilde yazabildi.

Şekil 5.4. Derya 10. seansa ait ön analiz örneği

Geriye dönük analizler ise uygulamanın tamamlanması sonrasında yapılmıştır. Uygulama boyunca elde edilen tüm verilerin analizinde öğrencilerin bilişsel süreçlerini modellemek amacıyla içerik analizi yapılmıştır. İçerik analizi, hacimli olan nitel veri setini anlamlı ve tutarlı bir şekilde anlamlandırma işlemi içermektedir. İçerik analizi, veri içindeki örüntülerin, temaların ve kategorilerin belirlenerek keşfedilmesini içeren tümevarımsal analiz şeklinde yapılabileceği gibi mevcut çerçevelerin ve kavramların kullanılarak analiz edildiği tümdengelimsel analiz şeklinde de yapılabilir (Patton, 2014). Bu çalışmada analiz çerçevesi olarak, Duval (2017) tarafından geliştirilen semiyotik temsil dağarcığının sınıflandırılmasının erken cebir bağlamında temsil türlerinin sınıflamasına uyarlaması yapılarak geliştirilen çerçeve kullanılmıştır. Buna göre analiz süreci başlangıçta ele alınan bir teoriden türetilmiş kavramların kullanıldığı ve yarı-tümdengelimsel analiz şeklinde yapılmıştır. Yarı-tümdengelimsel denmesinin sebebi, Duval tarafından sunulan çerçevedeki kavramların doğrudan kullanılması yerine, erken cebir bağlamında kavramların yeniden uyarlanarak düzenlenmiş olmasıdır. Bu analizlerin ardından, sunulan çerçevede keşfedilmemiş örüntülerin, kavramların ve yeni anlayışların bulunmasıyla tümevarımsal analize geçiş yapılmıştır.

Öğrenci resimleri, video ve ses kayıtları ile toplanan tüm veriler, dökümünün alınması ile birlikte oluşturulan temsil sınıflaması çerçevesi kullanılarak tümdengelimsel analiz edilmiştir. Analizler esnasında ortaya çıkan temsillerin türlerine göre

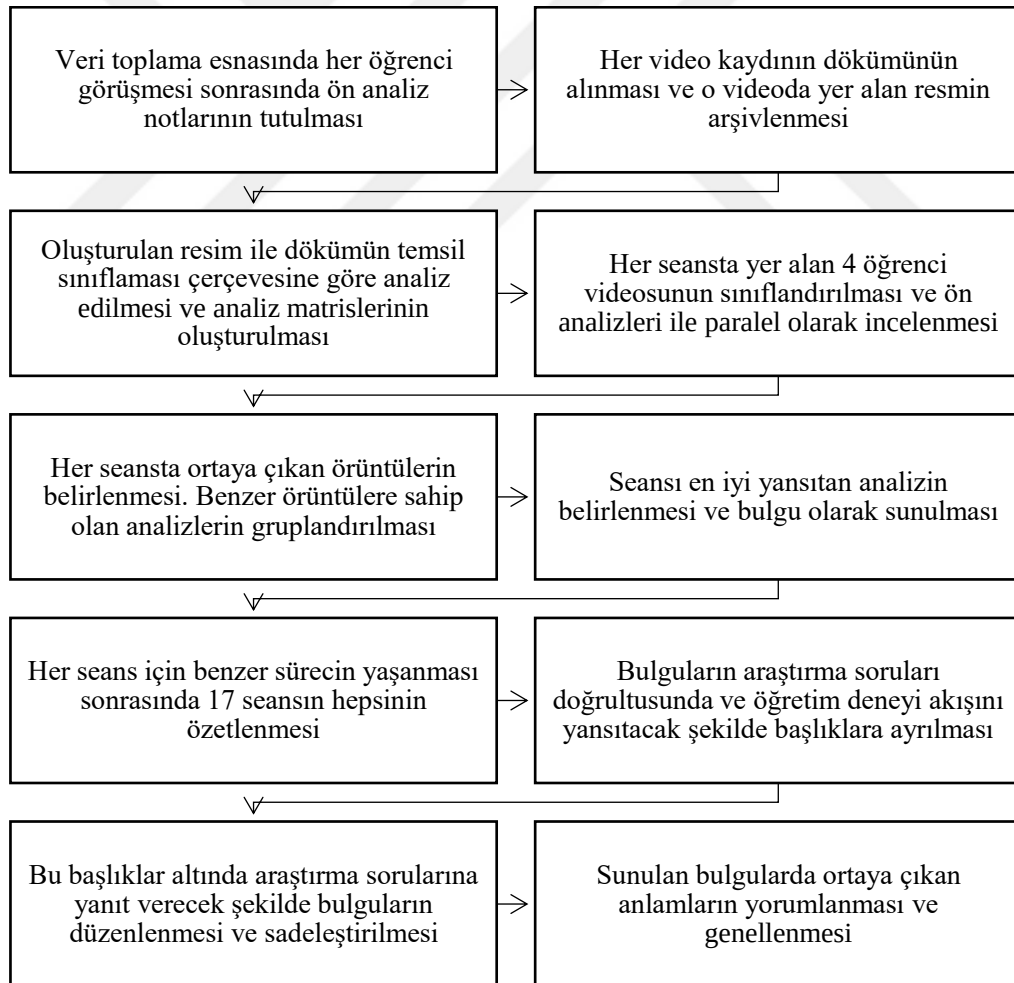
sınıflandırılması bir matris kullanılarak yapılmıştır. Bu esnada temsillerin ortaya çıkma sıraları numaralandırılarak belirtilmiştir. Temsillerin ortaya çıkma sıralarına göre diğer temsillerin oluşmasını nasıl etkilediği, temsillerin birbirine nasıl dönüştüğü veya birbirlerini nasıl desteklediği oklar kullanılarak gösterilmiştir. Eğer bir temsilin ortaya çıkması sonrasında başka bir temsil ortaya çıkıyorsa tek taraflı ok kullanılmıştır. Ancak temsillerin eş zamanlı olarak birbirini etkileyecek ve destekleyecek şekilde ortaya çıkması durumunda çift taraflı oklar kullanılmıştır. Temsillerin ortaya çıkma şekillerinin problemi çözmede nasıl bir araç olduğu incelenmiştir. Bir öğrenciye ait bir seansın analiz süreci Şekil 5.5’te sunulmaktadır. Bu analizler esnasında, öğrencilerin sözlü ve yazılı tüm eylemleri analiz çerçevesine yerleştirilmiştir. Ortaya çıkan eylemin sözlü ve yazılı bir açıklama içermesi durumunda dilsel temsil, somut çizimler içermesi durumunda resimsel temsil, soyut çizimler içermesi durumunda simgesel temsil ve matematiksel işlemleri içermesi durumunda sembolik temsil kategorisine ait bölmeye dahil edilmiştir. Tüm eylemler ve söylemler ortaya çıkma sıraları göz önünde bulundurularak numaralandırılmıştır. İki ayrı eylemin eş zamanlı olarak ortaya çıkması durumunda çift taraflı ok kullanılarak bunların birbiriyle ilişkili olduğu belirtilmiştir. Örneğin öğrenci bir çizim yaparken aynı zamanda bu yaptığı çizimi sözlü olarak da açıklıyorsa bunlar eş zamanlı eylemler olarak değerlendirilmiştir. Problemde yer alan cümlelerin tek tek okunması öğrencilerin eylem adımlarını ve her eylemin birbirinden ayrılmasını kolaylaştırmıştır. Her okunan cümledeki eylemler tek bir eylem olarak değerlendirilmiştir. Ancak aynı cümle içinde birden fazla eylemde bulunuyorlarsa, bu eylem aralıkları ve farklı bir eyleme geçtiği belirtilmek için yeni satır başı yapılarak ve yeni bir numarayla gösterilerek belirtilmiştir. Bu eylem aralıklarında öğretmen tarafından bir soru sorularak bir müdahalede bulunulmuşsa, bu müdahaleler parantez içinde belirtilmiştir. Problemin öğrenci tarafından çözülmesi sonrasında kontrol etme aşamasına geçildikten sonra “**kontrol ederken**” şeklinde belirtilerek eylemler numaralandırılmaya devam edilmiştir. Böylece bu numaradan sonra ortaya çıkan eylemler kontrol etme aşamasında gerçekleşmiştir. Bu aşamada öğretmen tarafından yapılan çizimler de belirtilerek analizlere dâhil edilmiştir. Seansların analizlerinin örneği EK-4’te sunulmaktadır.

	Söylensel	Söylensel Olmayan
Somut	① Arya'yı bu sefer yine yüzü dönük çizeceğim, yani yüzü bize bakıyor. Bir de yanına küçük şirin bir tavşan. Arya'nın saçları kıvrıktı, ben neden düz yaptım? İşte... ③ Üç adım atıyor. Bu da iki adım. İşte öğretmenim. ⑤ Bir tavşanın ayaklarını çizdim. Arya'nınkileri daha uzun çizdim. Böyle gösterebilirdim yani... Ben öyle yaptım, onların merak etmeyin. ⑦ Arya 18 adım atığında... Hı 18'i bence 2'ye bölmemiz gerekiyor. Benim görüşüme göre. ⑧ Valla yok bende... (Resimle zihninde canlandırmaya çalışır). Düşünüyorum, hatta görüyorum aklımda ama nasıl resmedeceğimi bulamıyorum. ⑨ Aa durun aklıma fikir geldi. Arya'nın bacakları olsun bu, bu da tavşanın bacakları. Aklıma bir fikir geldi, harika bir fikir. Bundan 18 tane ayak çizeceğim. Bir, iki, üç, dört, beş, altı... O zaman buraya çizeyim. Bunları böyle söyleyim ya. İşte 18 ayak. ⑪ Şöyle de bir daire çizeceğim. Arya'nın adını. İşte öğretmenim bitti. Şimdi tavşanın adını nasıl gösterebilirim? Çünkü ne kadar adım attığını bilmiyorum. Şimdi ilk 18 tane ayak çizdim. Bunlar Arya'nın adımları. Adım. Arya burada bir adım atıyor, iki adım atıyor, üç adım... Bu bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi, sekiz, dokuz, on, on bir, on iki, on üç, ... ⑬ İki, dört, altı, sekiz, on, on iki, on dört, on altı, on sekiz. Ya da şunu böyle kessem olmaz mı? Yani üçer üçer adım olsun. 18. İki, dört, altı, sekiz, on, on iki, on dört, on altı, şunu da ekleyelim. Bunlar yanlış olanlar. Sayılmaz. ⑮ Tavşan, Arya'nın adımlarının bir eksiğini atıyor. Çünkü bakın 3 ve 2. Yani bir küçük adım atıyor desem daha açıklayıcı olur aslında. Başka bir ilişki olabilir bence ama ben bulamadım, yardım edin. Tavşanın adımlarını birer birer gösterirdim. Kafam karıştı. Arya 3 adım atarsa... Ya da bunu üçerli çizsek? Tavşanınkini iki, üçerli çizsek? Bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi... Şimdilik sadece 8 tane çizdim. Bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi, sekiz... Bu da 18 adım atmış oluyor aslında. Evet 18, 18 yaptım. Arya 18 atıyorsa bunun... Cevap 17 olabilir mi ya, şu an onların arasında kararsız kaldım. Ben soruyu bırakabilir miyim? Benim kafam biraz karışık çünkü, yorulduğum için böyle olabilir. (Kontrol ederken) ⑮ Hı... Aklıma bir şey geldi, beşer beşer sayarsam ne olur? Arya 18 adım atarsa... Üç, altı, dokuz, on iki, on beş, on sekiz. 18. Şimdi Arya 18 atarken... Aklıma bir fikir gelmişti ama şimdi hatırlamıyorum, çok sinir bozucu, sanırım çözme yardımcı olabilirdi. Şu anda düşünüyorum, yani yeni fikirler ortaya çıkartıyorum. ⑲ Parmaklarımı işaret yapabilir miyim? Parmaklar bana yardımcı olabilir, tamam. Bir, iki, üç... Bir, iki. Bir, iki, üç; bir, iki. Hı hı... Burada yine böyle giderken, tavşan böyle gidiyor. Eğer Arya, bir, iki, üç... dokuz adım da tavşan altı adım gidiyor. Aralarında üç eksik var, şimdi benim gördüğüm üzere. Hı, eğer 18'den 3 çıkartırsam bence bulabilirim. Düşünüyorum ama bulamıyorum. Üç, altı, dokuz, on iki. İki, dört, altı, sekiz. Sekiz adım attı. Şimdi de burada 10 attı, Arya 15 atarken. Çok karışık bir soru. 18 attı şimdi Arya. Bir, iki, üç, dört, beş, altı. 12 adım atmış. 12 adım atmış. Cevap 12 o zaman. Yani cevabın 12 olduğunu düşünüyorum. 50.12 İşlemi nasıl yapabilirim? Ya da işlem yapmak zorunlu değildi. Arya 3 adım atıyor, tavşan iki adım atıyor. İki, iki, üç, üç... Ama aklıma bir şey gelmiyor. Bırakacağım. 18. 6 kere. Evet, 6 kere 2 adım attı. 12. 12 tavşan adım. 50.12 tavşan adım Aa aklıma bir işlem geldi, doğrusu yazalım diyeceğim. Burada ikisi de altı altı yapıyor ya, burada 6 kere 3 yapıyoruz 18 ediyor... Bölme, 18'i 3'e böleriz. Tavşanı nasıl yaparız? Şimdi onu düşünüyordum. Arya eğer 6 kere 3 adım atarsa 18'e ulaşır. Aa aynı anda yürüdüğü için bu da altı altı gidecek, ama bu sefer bölme yapmayacağız. Tavşan. İkisi de 6 adım attığı için bu da 6 gidecek bir de bunun 2 adımı var, çarpınca 12 olur. İşlem yazalım. Şuraya 1 şuraya 2 yazalım. Sonunda anladım, teşekkür ederim.	② ④ ⑥ ⑩ ⑫ ⑭ ⑰ ⑲ ⑳ ㉒ ㉔ (Öğretmen tarafından çizilir) ㉖
Soyut	③① ③②	㉔ ㉖

Şekil 5.5. Derya 10. seansın kavramsal çerçeveye göre analizi

Problem: Arya, arkadaşı tavşanla yürüyüşe çıkar. Arya 3 adım atarken tavşan 2 adım atıyor. Arya 18 adım attığında tavşan kaç adım atar?

Elde edilen veriler benzerlikleri yönünden seans bazında sınıflara ayrılmıştır. Her seansta 4 öğrencinin analizleri, ön analizlerle birlikte yeniden gözden geçirilerek belirgin örüntüler keşfedilmeye çalışılmıştır. Bu aşamada her seansın analizlerinde tekrarlayan düzenlilikler belirlenerek seansın benzer yönlerini en iyi yansıtan analiz seçilmiştir. Aynı seans içinde farklı örüntülerin ortaya çıkması durumunda bunlar kendi içinde yeniden gruplanmış ve bu grubu en iyi yansıtan analiz belirlenmiştir. Bu analizler sonucunda elde edilen bilgilerle tüm veriler yeniden gözden geçirilmiştir. Böylece bir doğrulama yapmak ve toplanan verilerde bir sonuca ulaşmak amaçlanmıştır. Verilerin analizinde süreç boyunca izlenen aşamalar Şekil 5.6’da gösterilmektedir.



Şekil 5.6. Verilerin analizinde süreç boyunca izlenen aşamalar

5.9. İnandırıcılık ve Aktarılabilirlik

Nitel araştırmalarda geçerlik ve güvenirlik olarak ifade edilen ve bilimsel bir araştırma için önemli olan bu ölçütler, nitel araştırmalarda inandırıcılık ve aktarılabilirlik olarak ifade edilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Buna göre araştırma sonuçlarının gerçeği yansıtması inandırıcılığı içerirken, sonuçların uygulanabilir olması aktarılabilirliği içermektedir. Bir araştırmada inandırıcılığın ve aktarılabilirliğin sağlanması için birtakım stratejilerin kullanılabileceği belirtilmektedir. Nitel bir çalışmada araştırmacının veri kaynağına yakın olması, alandaki gerçekliği yaşaması ve verilerin doğasına uygun yöntemler kullanarak veri toplaması araştırma sonuçlarının geçerliğini ve buna bağlı olarak inandırıcılığını artıran unsurlardır (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Nitel araştırmalarda araştırmacı ve veri kaynakları olan bireylerin karşılıklı olarak birbirini etkilemesi beklenen bir durumdur ve bunun araştırma verileri ve sonuçları üzerindeki olası etkisinin göz ardı edilmemesi gerekmektedir. Araştırmacının katılımcı gözlemci olarak bulunduğu bu araştırma sürecinde, öğrencilerin problem çözme süreçleri boyunca araştırmacı herhangi bir müdahalede bulunmamaya çalışmış, müdahalede bulunması durumunda bu, analiz sürecinde belirtilmiştir. Öğretim deneyini içeren bu çalışmada, araştırmacının kaçınılmaz müdahaleleri ve etkileri olmuştur. Araştırmanın analizlerinin yapılması, bulgu ve sonuçlarının yapılması sürecinde bu etkiler göz önünde bulundurulmuştur.

Bu çalışmada inandırıcılık ve aktarılabilirliğin sağlanmasının yanında teyit edilebilirlik ve tutarlık sağlamak için kullanılan stratejiler aşağıda belirtilmektedir.

İnandırıcılık için kullanılan stratejiler:

- *Uzun süreli etkileşim*; araştırmacı doğrudan veri toplama ortamında bulunarak veri kaynakları ile yeterli süre etkileşim içinde bulunmuştur. Bunun için 17 seanslık bir uygulama yapılarak her öğrenci ile 17 kez görüşülmüş ve toplamda 16 haftayı bulan veri toplama süreci gerçekleştirilmiştir. Aynı katılımcılar ile geniş bir zamana yayılarak birçok görüşme yapılması, araştırmacı ile katılımcı öğrenciler arasında bir güven ve samimiyet ortamının oluşmasını sağlamıştır. Uygulamanın yapılmasının ardından 6 hafta gibi bir süre sonra tekrar veri kaynaklarına ve veri toplama ortamına dönülmüştür. Böylece devamlı bir etkileşim sonucunda oluşabilecek yanlıgıların önlenmesi ve elde edilen sonuçların dönemsel ve geçici olmadığının sağlanması çalışılmıştır.

- *Derinlik odaklı veri toplama*; araştırma boyunca 4 farklı öğrenciden toplanan tüm veriler araştırma soruları odağında karşılaştırmalı olarak analiz edilmiş ve yorumlanmıştır. Böylece verilerde yer alan belli örüntüler ortaya çıkarılmaya ve kavramsallaştırılmaya çalışılmıştır. Elde edilen tüm sonuçlar uygun veri örnekleriyle desteklenmiştir.
- *Çeşitleme*; araştırmada veri kaynağı olarak alınan öğrencilerin farklı deneyimlere, bakış açılarına sahip olmalarına dikkat edilmiştir. Bunun için iki farklı öğretmenden eğitim almakta olan ikisi kız, ikisi erkek dört öğrenci katılımcı olarak belirlenmiştir. Aynı zamanda her öğrenciyle yapılan görüşmeler boyunca eylem ve söylemlerinin video kayıtları alınarak, öğrencilerin çizimlerini yaptıkları dokümanlar toplanarak ve araştırmacının gözlem ve izlenimlerini yazdığı notları ile veri çeşitlemesi yapılmıştır. Farklı yöntemler kullanılarak toplanan verilerin hepsi birbirini destekleyecek ve teyit edecek şekilde kullanılmıştır.
- *Uzman incelemesi*; araştırma konusu hakkında genel bilgiye sahip 3 uzman araştırmacı araştırma süreci boyunca araştırma soruları, veri toplama süreci, verilerin analizi ve yorumlanması gibi araştırmanın çeşitli boyutlarını eleştirel bir gözle incelemiş, geri bildirimler ve önerilerde bulunmuştur.

Aktarılabilirlik için kullanılan stratejiler:

- *Ayrıntılı betimleme*; elde edilen ham veriler analiz çerçevesine göre düzenlendikten sonra mümkün olduğu ölçüde verinin doğasına sadık kalınarak ve yorum katmadan ayrıntılı betimlemeler ile sunulmaya çalışılmıştır. Bunun için öğrenci ifadelerinden doğrudan alıntılar, öğrencilerin çizim görselleri ve video kayıtlarında elde edilen görüntüler kullanılmıştır.
- *Amaçlı örnekleme*; araştırmaya dâhil edilen katılımcıların farklılığı yansıtacak şekilde seçilmesine önem verilmiştir. Bunun için farklı öğretmenden eğitim almalarına ve cinsiyet farklılıklarına dikkat edilmiştir.

Teyit edilebilirlik için kullanılan stratejiler:

- Aynı konuda çalışacak araştırmacılara fikir vermesi amacıyla, araştırma sürecinde araştırmacının konumu ve eylemleri açık bir şekilde sunulmuştur.
- Veri kaynağı olan katılımcıların özellikleri ve seçilme tercihleri açık bir biçimde tanıtılmıştır.

- Araştırma sürecinin ortamı, süreç boyunca yapılan uygulamalar örnekleriyle açık bir şekilde tanımlanmıştır.
- Elde edilen verilerin analizinde kullanılan kavramsal çerçeve açıklanmıştır.
- Veri toplama ve analiz süreci ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır.
- Araştırma boyunca uygulamada kullanılan problemler, ham veri olarak elde edilen öğrenci çizimleri, analiz sürecine ait örnekler ek olarak sunulmuştur. Böylece ulaşılan yorum ve sonuçların ham verilere gidilerek teyit edilebilmesi sağlanmıştır. Aynı zamanda elde edilen veri seti gerektiğinde incelenmeye sunmak için araştırmacı tarafından saklanmaktadır.

Tutarlık için kullanılan stratejiler:

- Araştırmacı, katılımcı öğrencilerin problem çözme süreçlerini izlerken yaptığı gözlemlerden elde ettiği bilgilerin bir doğrulamasını yapmak amacıyla, her seansta öğrencilerin çalışmanın sonunda neler yaptıklarını ve düşündüklerini açıklamalarını istemiş, gerekli gördüğü yerlerde sorular sorarak öğrenci eylemlerini doğru anlamaya çalışmıştır. Böylece katılımcıların kendilerinden de yaptıklarının bir teyidi alınmaya çalışılmıştır.
- Tüm araştırma boyunca veriler benzer bir süreç izlenerek toplanmıştır. Böylece veri toplamada bir tutarlık sağlanmıştır.
- Elde edilen veriler önceden oluşturulmuş ve ayrıntılı olarak tanımlanmış bir kavramsal çerçeveye bağlı olarak analiz edilmiştir. Verilerin analiz süreci tüm veri seti için benzer şekilde ve aynı çerçeve kullanılarak yapılmıştır. Böylece analiz sürecinde tutarlık sağlanmıştır.
- Toplanan veriler öncelikle herhangi bir yorum katılmadan doğrudan alıntılar ve görsellerle desteklenerek betimlenmiş ve yorumlar sona bırakılmıştır. Böylece verilerin sonuçlarla ilişkili olması sağlanmıştır.

5.10. Etik Konular

Araştırmanın başında Anadolu Üniversitesi Sosyal ve Beşeri Bilimler Bilimsel Araştırma ve Yayın Etik Kurulundan olumlu onayı alınmıştır (EK-5). Araştırmanın Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı bir okulda yapılacağından dolayı MEB Araştırma, Yarışma ve Sosyal Etkinlik izni de alınmıştır (EK-6).

Keşfedici araştırma dâhil çalışmanın tüm katılımcılarına ve velilerine öncesinde araştırma sürecinin nasıl yürütüleceği açıklanmış ve tüm katılımcı ve velilerine Araştırma Gönüllü Katılım Formu imzalatılmıştır (EK-7). Uygulama boyunca toplanan verilerin yalnızca bilimsel çalışma olarak kullanılacağı ve kimseyle paylaşılmayacağı taahhüt edilmiştir. Uygulamada alınan video kayıtlarında öğrencilerin yüzlerinin görünmemesine, bunun yerine eylemlerinin görünmesine özen gösterilmiştir. Uygulamaya katılan tüm öğrencilerin kimlikleri saklı tutulmuş ve rapor yazma aşamasında isimleri değiştirilmiştir. Araştırmanın bitiminde temel sonuçlar, katılımcı öğrenciler ve aileleri ile paylaşılmıştır.

Araştırma raporunun yazımı boyunca kullanılan tüm kaynaklara uygun şekilde atıf yapılmış ve bu kaynaklar kaynakça başlığında belirtilmiştir. Araştırma raporu, enstitü tarafından intihal belirleme programında taratılmış ve benzerlik oranı %2 olarak belirlenmiştir.

6. BULGULAR VE YORUM

Çalışmanın bulguları, uygulanan öğretim bölümlerine uygun bir akışta ve araştırma sorularına cevap verecek şekilde başlıklara ayrılarak sunulmuştur. Buna göre, çalışmanın amacı bölümünde sunulan #1.1 numaralı araştırma sorusu “Donguri yöntemi öncesindeki durum belirleme aşamasında öğrencilerin kullandıkları temsiller” başlığı altında, #1.2 ve #2 numaralı araştırma soruları “Donguri yönteminin uygulandığı öğretim bölümünde öğrencilerin kullandıkları temsiller” başlığı ve bu başlığın içerdiği alt başlıklar altında, #3 numaralı araştırma sorusu “Donguri yöntemi sonrasındaki durum belirleme aşamasında öğrencilerin kullandıkları temsiller” başlığı altında ve son olarak #1.3 numaralı araştırma sorusu “öğrencilerin kullandıkları temsillerle soyutlamanın gelişimi” başlığı ve alt başlıkları altında incelenmiştir.

6.1. Donguri Yöntemi Öncesindeki Durum Belirleme Aşamasında Öğrencilerin Kullandıkları Temsiller

Uygulamanın ilk üç seansı, öğrencilerin problem çözme durumlarını belirlemek amacıyla Donguri uygulamasında sunulacak problemlere paralel problemleri çözmelerinin istendiği durum belirleme aşaması olarak gerçekleşmiştir. İlk seansta standart şekilde tek cümle formatında sunulan problemler, ikinci seansta cümlelere ayrılmış bir şekilde sunulurken, üçüncü seansta da önceki seanslarda zorlandıkları belirlenen beş problemi resim çizerek çözmeleri istenmiştir. İlk seans her öğrenci ile ortalama 23 dakika, ikinci seans ortalama 22 dakika ve üçüncü seans da ortalama 21 dakika sürmüştür. Araştırmacı tarafından öğrencilere cevaplarının doğruluğu hakkında herhangi bir dönütün verilmediği bu aşamada, öğrencilerin problemleri çözme doğrulukları Tablo 6.1’de sunulmaktadır.

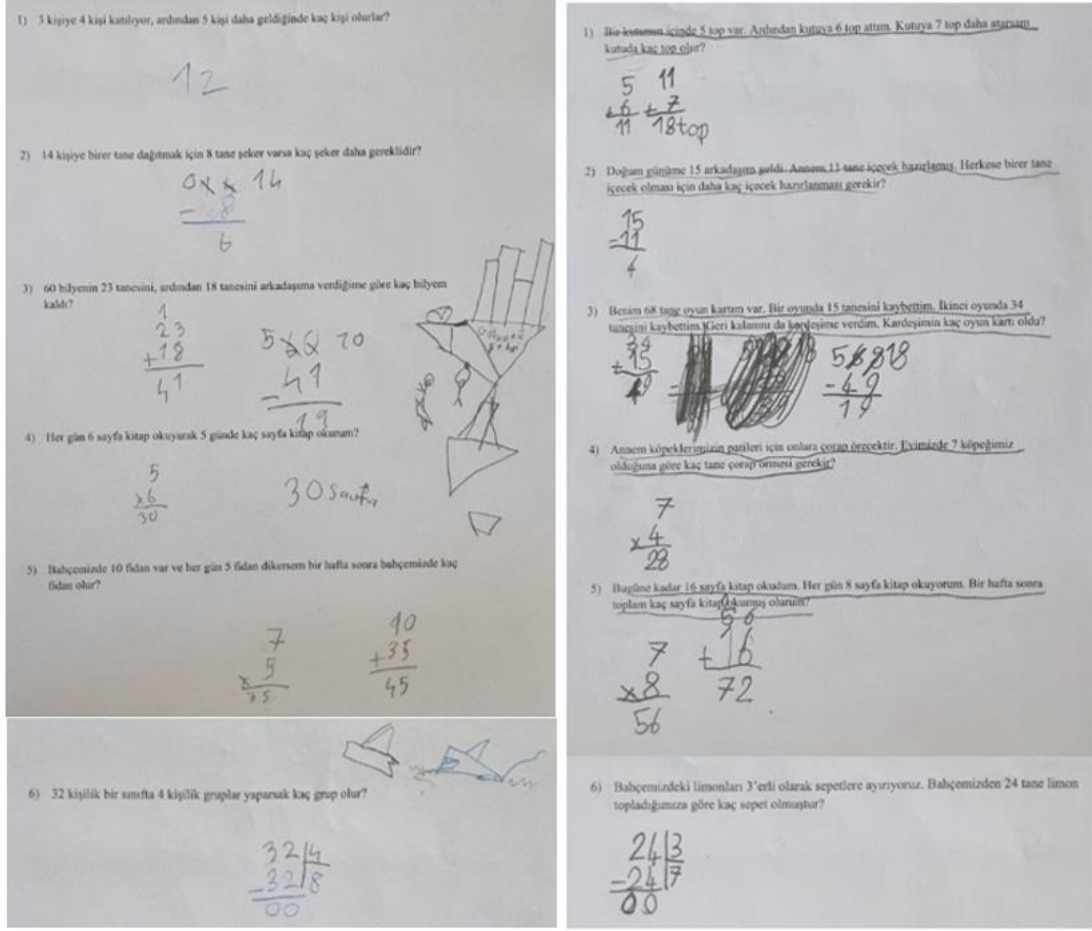
Tablo 6.1. *Durum belirleme aşamasında öğrencilerin problemleri çözme doğruluğu*

Problemler	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mert	1. durum belirleme	+	-	+	+	+	-	-	-	-
	2. durum belirleme	+	+	+	+	-	+	-	-	+
	3. durum belirleme				+	-	-		-	+
Arzu	1. durum belirleme	+	+	+	+	+	-	-	-	-
	2. durum belirleme	+	+	+	+	-	+	-	-	+
	3. durum belirleme					+	+	-	-	+

Tablo 6.1. (Devam) *Durum belirleme aşamasında öğrencilerin problemleri çözme doğruluğu*

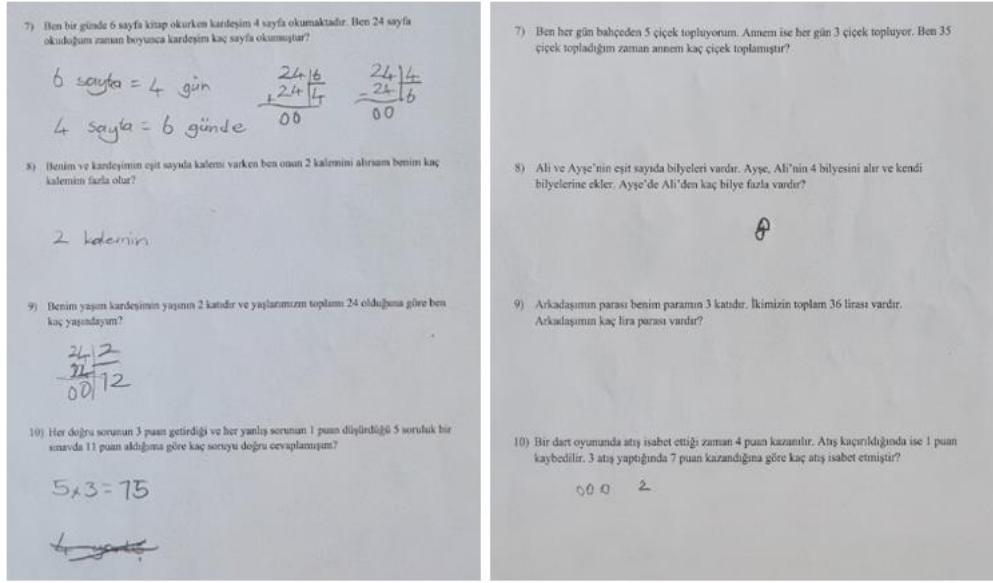
Kenan	1. durum belirleme	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	2. durum belirleme	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+
	3. durum belirleme			-		-		+		-	+
Derya	1. durum belirleme	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-
	2. durum belirleme	+	+	+	+	+	-	-	+	-	-
	3. durum belirleme						-	-	-	-	-

Tablo 6.1 incelendiğinde, öğrencilerin sunulan 10 problemten aritmetik işlem ağırlıklı sunulan ilk altı problemi büyük oranda doğru bir şekilde çözdükleri, ancak erken cebir problemi olarak sunulan son dört problemi çözmekte zorlandıkları ve büyük oranda yanlış yaptıkları görülmektedir. Sunulan problemlerin çözümünde öğrencilerin sembolik temsilleri ağırlıklı olarak kullandıkları belirlenmiştir. Aritmetik problemlerini sembolik temsiller ile çözerken, işlemleri yapma esnasında parmak saymayı kullandıkları görülmüştür. Parmak sayma eylemi, sayıların somut bir temsili olarak parmakların kullanılmasını içermesi yönünden söylemsel olmayan somut temsil olduğu için resimsel temsil sınıfına dâhil edilmiştir. Durum belirleme seansları boyunca öğrencilerin çözüm yaklaşımlarını genel olarak yansıtması amacıyla öğrencilerin çalışma kağıtlarından örnek resimler sunulmaktadır. Şekil 6.1’de Kenan’ın 1. durum belirlemedeki ve Derya’nın 2. durum belirlemedeki aritmetik problemlerini çözme örnekleri verilmiştir. Kenan’ın ilk problemi okumasıyla birlikte çok kolay bulduğu ve işlemi yazmadan zihninden yaparak yalnızca cevabı yazdığı görülmektedir. Derya’nın ise işlem hatası yapması durumunda karalayarak yeniden işlemleri yazdığı görülmekle birlikte, 6. problemde yaptığı işlem hatasını sözlü açıklamaları esnasında da fark etmediği belirlenmiştir. Öğrencilerin yalnızca sembolik temsil ve parmak saymayı kullanarak çözüm yaptıkları bu süreçte problemlerin çözümünde tek tip temsil kullandıkları görülmektedir.



Şekil 6.1. Kenan'ın 1. durum belirleme (solda) ve Derya'nın 2. durum belirlemedeki (sağda) aritmetik problemlerini çözümleri

Erken cebir problemlerinde ise durumu anlamakta zorlandıkları, sembolik işlemler kullanarak çözmeye çalıştıkları ve hangi işlemi yapacaklarına karar veremediklerinde boş bıraktıkları belirlenmiştir. Şekil 6.2'de Arzu'nun 1. durum belirleme ve Mert'in 2. durum belirlemedeki erken cebir problemlerini çözmeye örnekleri verilmiştir. Buna göre Arzu'nun erken cebir problemlerinde verilen sayılarla ilişkileri yansıtmayan çeşitli işlemler yaptığı, dilsel temsillerle de ilişkileri ifade etmeye çalıştığı veya cevap yazdığı görülmektedir. Öğrencilerin Mert'in ne yapacağını bilemediği için boş bıraktığı görülmektedir. Öğrencilerin yaptıklarını açıklamaları istenmesi üzerine sözel dilsel temsilleri işlemlerini açıklamakta kullandıkları belirlenmiştir. Bu aşamada erken cebir problemlerini çözmelerinde sembolik temsillerin yetersiz kaldığı görülmektedir.



Şekil 6.2. Arzu'nun 1. durum belirleme (solda) ve Mert'in 2. durum belirlemedeki (sağda) erken cebir problemlerini çözümleri

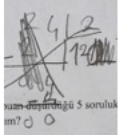
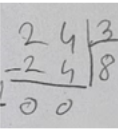
Erken cebir problemlerinin çözümünde çeşitli görselleştirmeler kullandıkları da belirlenmiştir. Bunlardan biri 1. durum belirlemede Mert'in 10. problemi çözme yöntemidir ki yanlış çözmesine rağmen problem durumunu temsil etmek ve anlamak için simgesel temsil kullanmıştır. Şekil 6.3'te sunulan Mert'in çözümü incelendiğinde, problemi okumasının ardından ilk eyleminin beş yuvarlak çizmek olduğu, bunlar üzerinde sayma yaparak sonucu yazdığı ve bu şekilde söylemsel olmayan temsilleri kullanarak çözüm yaptığı görülmektedir (1-2. adımlar).

	Söylemsel	Söylemsel Olmayan
Somit	③ 3 Soru (Çözümü anlatırken) Ben şimdi buraya, bunları soru olarak düşündüm. Birinci doğru, ikinci ve üçüncü de doğru, çünkü 9, ama buradan 12'ye çıkıyor, buradan bir eksiltmem gerekiyor. Ama bunu beş, bir eksiltsek 10 olacak. Bu işlemden pek emin değilim.	② Yuvarlaklar üzerinde sayma yapar.
Soyut		①

Şekil 6.3. Mert'in 1. durum belirlemede 10. problemi çözümü

Problem: Her doğru sorunun 3 puan getirdiği ve her yanlış sorunun 1 puan düşürdüğü 5 soruluk bir sınavda 11 puan aldığıma göre kaç soruyu doğru cevaplamışım?

Öğrenciler arasında en farklı yaklaşımı benimseyen Kenan olmuştur. Kenan'ın sezgisel bir yaklaşımı olmakla birlikte, erken cebir problemlerini doğru bir şekilde çözdüğü belirlenmiştir. Erken cebir problemi olarak sunulan 1. durum belirlemedeki 9. problemin çözümünde ise babasından öğrendiğini ifade ettiği cebirsel denklem çözme yaklaşımını kullanmıştır. Şekil 6.4'te sunulan bu çözüm yöntemi incelendiğinde, Kenan'ın sölemsel temsiller kullandığı, cebirsel denklemleri soyut sembolik temsil olarak kullanırken bunları dilsel temsilleri ile açıkladığı görülmektedir (1-4. adımlar). Cebirsel denklemlerde bilinmeyen olarak kullandığı ifadelerin problemde verilenlerin baş harflerinden oluşan kısaltmalar içerdiği, bu denklemleri çözerken aritmetik işlemler kullandığı ve işlemleri parmak sayarak yaptığı görülmektedir (5-7. adımlar). Ancak bu denklem ifadelerini doğru bir şekilde yazmış olmasına rağmen başlangıçta işlemleri yanlış yorumladığı ve yanlış sonuca ulaştığı, biraz daha düşünmesi sonrasında doğru işlemleri yapabildiği görülmektedir. Bu anlamda Kenan'ın denklem kurmayı bildiği, ancak denklem çözme konusunda yeterli bilgisinin olmadığı söylenebilir. Sembolik temsiller kullanarak çözmeye başladığı problemi dilsel temsilleri kullanarak açıklaması sonrasında doğru bir şekilde sonuca ulaşabildiği görülmektedir.

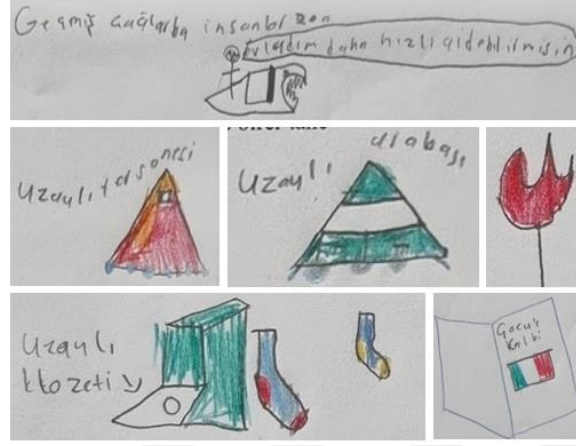
	Söylemsel	Söylemsel Olmayan
Somut	① Bu problem için ilk önce bir tane denklem kurmamız gerekiyor. Çok iyi biliyorum. Şimdi... B artı Ç eşittir 24. Evet. ③ İki ç 24 demektir. ⑥ Ç 12'ymiş. ⑨  (Çözümü anlatırken) Benim yaşım kardeşimin yaşının iki katıdır ve yaşlarımızın toplamı yirmi dört olduğuna göre ben kaç yaşındayım? Ben kaç yaşındayım, diyor. İlk önce bu problemde, bu problemi çözmemizin temel şeyi aslında bir tane denklem bulmalıyız. Babam öğretti. Şimdi, Benim ve bu da çıkan, çıkanın baş harfi. Benim yaşım kardeşimin yaşının iki katıdır. Denklem kurdum ilk önce. B eşittir 2 tane Ç. ⑩ Kardeşinin, B eşittir iki tane Ç. B ve Ç'nin toplamı da 24 ediyor. Şimdi ilk önce bunu yaptım, fakat bu işlemi... Bu işlemi doğru, ilk önce bu işlemi yaptım, daha sonra 24'ü 3'e bölünce 8 çıkıyor. O yüzden onu yaptım. Daha sonra, Ç 8 ise o zaman, B de 3 tane 8 anlamına geliyor. Sekiz, on..., sekiz... Ç yani Ç'nin yaşı oldu. Şimdi... 8, 16, 24, 24. Dur, 8, 24, ay, 8, 16. 16. Bu Ç'nin yaşı, bu B'nin yaşı. ⑪ 	⑧  Parmaklarıyla sayar.
Soyut	② $B + Ç = 24$ ④ $B = 2 \times Ç$ ⑤  ⑦ 	

Şekil 6.4. Kenan'ın 1. durum belirlemede 9. problemi çözümü

Problem: Benim yaşım kardeşimin yaşının 2 katıdır ve yaşlarımızın toplamı 24 olduğuna göre ben kaç yaşındayım?

İlk iki seansta sadece Kenan'ın, problemlerde çeşitli resimsel temsiller kullandığı görülmüştür. Problem çözerken resim çizmeyi sevdiğini ifade eden Kenan'ın bu resimlerinin, problemin bağlamını yansıtan resimler olmadığı, kendi hayal gücünü veya

problemde geçen bir nesneyi (çorap, çiçek, kitap gibi) içeren çeşitli dekoratif çizimler oldukları belirlenmiştir (Şekil 6.5).

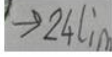
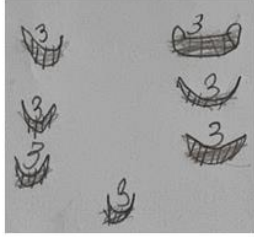
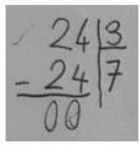


Şekil 6.5. Kenan'ın ilk iki seansta problemlerin kenarına çizdiği resimlerden örnekler

Problemlerin cümlelere ayrılarak sunulduğu 2. durum belirleme aşamasında öğrencilerin, önceki seansta doğru bir şekilde çözdükleri görülen 5. problemi bu seansta çözmekte zorlandıkları ve büyük oranda yanlış çözdükleri, ancak erken cebir problemlerinden olan 10. problemi ise doğru çözdükleri görülmüştür. Çarpma ve toplama işlemlerini sırayla yapmayı gerektiren 5. problemin çözümünde ya bir işlemi yapmayı unuttukları ya da işlem hataları yapmaları nedeniyle sonucu yanlış buldukları fark edilmiştir. Onuncu problemde ise ilk seansta 5 birimli sorulan problem burada 3 birimli olarak sorulduğu ve sayının daha küçük olması nedeniyle işlem yapmadan zihinden bulunmasının daha muhtemel olması nedeniyle doğru yaptıkları görülmüştür. İlk seanstaki çözümleri ile karşılaştırıldığında problem çözme yaklaşımlarında bir değişiklik olmadığı, söylemsel ağırlıklı soyut sembolik temsiller ile problemleri çözdükleri, söylemsel olmayan temsilleri ise nesneleri ve parmaklarını saymayı içeren eylemleri olduğu belirlenmiştir. Problemlerin cümlelere ayrılarak sunulmuş olmasının öğrencilerin problem çözme becerilerinde ve yaklaşımlarında bir fark yaratmadığı gözlemlenmiştir.

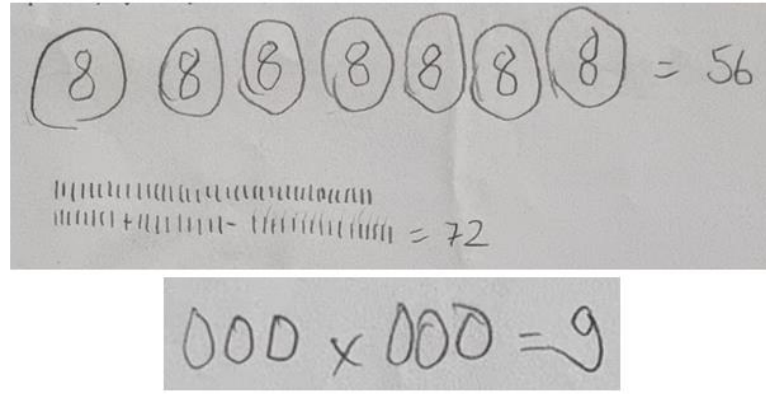
Öğrencilerin ilk iki seansta zorlandıkları belirlenen beş problemin seçilip resim çizerek çözmelerinin istendiği 3. durum belirleme aşamasında, öğrencilerin çizimlerinde resmi bir problem çözme aracı olarak değil, yaptıkları işlemleri gösteren birer temsil olarak kullandıkları belirlenmiştir. Bu nedenle resim çizmelerinin problemlerin çözümünde pek de yardımcı olmadığı gözlemlenmiştir. Örneğin, Derya 6. problemin

çözümünde sembolik temsille yaptığı bölme işlemini resimsel temsil kullanarak göstermiştir, ancak bölme işlemini başta yanlış yaptığı için resmi de buna uygun olarak eksik olmuştur. Bu problemin çözümünün analizinin sunulduğu Şekil 6.6 incelendiğinde, Derya'nın öncelikle bölme işlemini yaptığı, ancak işlemin sonucunu yanlış bulmasıyla resimsel temsilini de buna uydurduğu ve problemi çözmede resim çizmeyi bir araç olarak kullanmadığı görülmektedir (1-6. adımlar).

	Söylemsel	Söylemsel Olmayan
Somut	⑤  ⑦ <i>(Çözümü anlatırken)</i> Şimdi, önce ağaca 24 tane limon çizdim. Sonra da 7 tane sepet çizdim. Çünkü hepsine 3 getiriyorum. 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3.	②  ③  ④  ⑥ 
Soyut	① 	

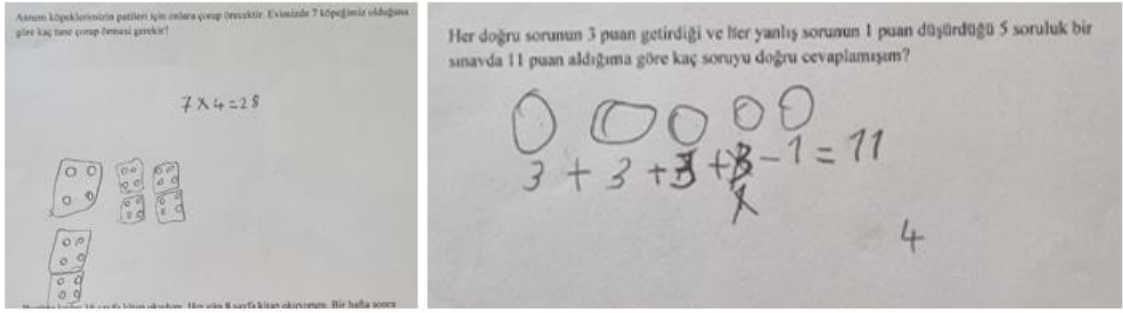
Şekil 6.6. Derya'nın 3. durum belirlemede işleme uygun resim çizerek çözümünü
 Problem: Bahçemizdeki limonları 3'erli olarak sepetlere ayırıyoruz. Bahçemizden 24 tane limon topladığımıza göre kaç sepet olmuştur?

Ayrıca öğrencilerin resimlerinde somut temsillerden ziyade daha soyut simgesel çizgi ve yuvarlakları kullandıkları görülmüştür. Örneğin Arzu'nun çizimlerinde sayı yerine o sayı kadar çubuk veya yuvarlak çizdiği ve aralarına işlem işareti koyduğu görülmüştür (Şekil 6.7). Bu simgesel temsillerin, ifade etmeye çalıştığı işlemleri anlamsal olarak karşılamadığı, aksine yanlış anlamaya yol açabilecek nitelikte temsiller oldukları görülmektedir.



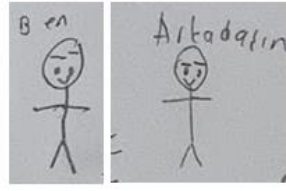
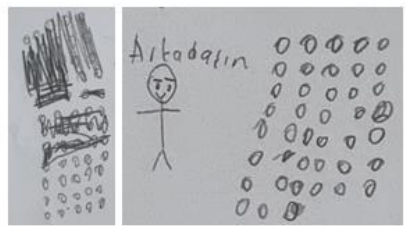
Şekil 6.7. Arzu'nun 3. durum belirlemede kullandığı simgesel temsil örnekleri

Mert'in 3. durum belirleme aşamasında doğru olarak yaptığı iki problemin çözümünde de simgesel temsiller kullandığı belirlenmiştir. Bunların ilkinde önce çarpma işlemini sembolik temsil kullanarak yapmış, ardından bu problemi açıklaması esnasında zihninde canlanan görseli yuvarlaklar kullanarak simgesel temsille çizmiş ve bunları gruplamıştır. Diğerinde ise problemi çözme esnasında hemen yuvarlakları çizmiş ve bu simgesel temsil üzerinden puanları belirleyerek problemi çözmüştür. Mert'in bu iki problemi çözümü Şekil 6.8'de görülmektedir. Buna göre ilk problemde kullandığı simgesel temsiller çarpma işleminin anlamını yansıtan bir görselleştirme içerirken, ikinci problemdeki yuvarlaklar problem durumunda sunulan nesnenin yerine geçerek problemi çözmesine yardımcı birer unsur olmuştur.



Şekil 6.8. Mert'in 3. durum belirlemede kullandığı simgesel temsiller

Problem çözümünde resim çizmeyi bir araç olarak kullanan bir öğrenci Kenan olmuştur. Bu problemleri çözerken işlemleri içeren sembolik temsilleri kullanmamıştır. Verilen sayıları yuvarlaklar kullanarak simgesel temsiller ile göstermiş ve verilen çokluğa ulaşana kadar adım adım çizmiştir. Bu çizimleri sonucunda ulaştığı sayıyı problemin cevabı olarak ifade etmiştir. Örneğin, 3. problemde verilen bilye sayılarını tek tek doğru bir şekilde göstermiş ancak sonucu bulurken karaladığı bir tane bilyeyi fark etmediği için cevabı bir fazla olarak bulmuştur. Şekil 6.9'da gösterilen bu çözüm yöntemi incelendiğinde problemi çözmede bir araç olarak söylemsel olmayan temsilleri ağırlıklı olarak kullandığı görülmektedir (1-7. adımlar). Ancak bu aşamada düzenli çizimler yapmadığı ve çeşitli karalamalar ile çıkarma işlemini gösterdiği için yuvarlakların sayısını karıştırdığı belirlenmiştir. İlk iki seansta problemleri büyük oranda doğru bir şekilde çözen Kenan'ın, resim çizerek problemleri çözmesinin istenmesi durumunda zorluk yaşadığı ve yanlış sonuçlara ulaştığı görülmüştür.

	Söylemsel	Söylemsel Olmayan
Somut	⑧  (Çözümü anlatırken) Şimdi ben, bende 60 bilye vardı başta. Arkadaşımda da bilmiyorum ne kadar bilye vardı. Orada arkadaşıyla bir tane anlaşma yaptığımda arkadaşına 23 tanesini vermiş ve profillerinde 23... Orada arkadaşına verdim. Daha sonra arkadaşımda, ondaki kalan bilyeleri yazıp, sayıp oraya yazdım. 20 olacak.	①  ②  ③  ⑥ 
Soyut		④  ⑤  ⑦ 

Şekil 6.9. Kenan'ın 3. durum belirlemede resim çizmeyi kullanarak problem çözmesi
Problem: 60 bilyenin 23 tanesini, ardından 18 tanesini arkadaşıma verdiğime göre kaç bilyem kaldı?

Bu aşamada öğrencilerin problem çözmede işlem yapmaya alışık olmaları nedeniyle, önce sembolik temsiller kullanarak işlemleri yazdıkları, daha sonra işlemlerine uygun söylemsel olmayan temsiller geliştirmeye çalıştıkları belirlenmiştir. Bu aşamada

izimlerini işlemelerini yansıtacak şekilde yapmaya çalıştıkları, işlemine de bulamadıkları noktada resim de izemedikleri görülmüştür. izimlerinin ubuk ve yuvarlak gibi soyut simgesel temsiller içerdiği belirlenmiştir. Bu çizimlerini belirli bir düzende yapamadıkları için verilen sayıda çokluğu göstermekte zorlanmışlar ve çoklukların sayılarını karıştırmışlardır. Öğrencilere resim çizerek nasıl problem çözeceklerini öğretmeden, sadece resim çizmelerini istemenin, problem çözmelerine yardımcı bir unsur olmadığı belirlenmiştir.

Durum belirleme aşaması olarak gerçekleşen ilk üç seans boyunca öğrencilerin söylemsel temsilleri ağırlıklı olarak kullandıkları, özellikle sembolik temsilleri kullanarak problemleri çözmeye çalıştıkları görülmektedir. Aritmetik problemlerini çözerken sembolik temsilleri yoğun bir şekilde kullanırlarken, yazdıkları işlemlerin sonucu hesaplamada parmak saymayı sıklıkla kullandıkları ve işlemlerin anlamlarını dilsel temsiller kullanarak açıkladıkları belirlenmiştir. Erken cebir problemlerini ise anlamakta ve çözmekte zorlandıkları, bu problemleri çözerken sembolik temsilleri daha az kullandıkları ve simgesel temsiller kullanma eğiliminde oldukları görülmektedir. Bu süreçte problemlerin cümlelere ayrılarak sunulmasının veya problem çözümlerinde resim çizmeyi kullanmalarının istenmesinin öğrencilerin problem çözme becerilerinde bir fark yaratmadığı belirlenmiştir.

6.2. Donguri Yönteminin Uygulandığı ğretim Bölümünde ğrencilerin Kullandıkları Temsiller

Uygulamanın 4. seansı itibariyle resim çizerek problem çözme yaklaşımı olan Donguri yönteminin öğretilmesi ve uygulanmasını içeren ğretim bölümü başlamış ve toplamda 12 seans sürerek 15. seansta bitirilmiştir. Öğretim bölümünün ilk seansı olan 4. seansta Donguri yöntemi araştırmacı tarafından tanıtılmış, yöntemin temel kuralları belirtilmiştir. Arya'yı tanıtan problem ile Donguri yönteminin açıklanmasını içeren bu seans, her ğrenci görüşmesinde benzer şekilde gerçekleşmiş ve ortalama 47 dakika sürmüştür. Donguri yönteminin açıklandığı ve Arya karakterinin tanıtıldığı problemin ardından, bu seansın sonunda aritmetik işlem içeren bir problemi de öğrencilerin çözmeleri istenmiştir. Donguri yönteminin uygulandığı bu süreçte öğrencilerin aritmetik problemlerini çözme sürecinde ve erken cebir problemlerini çözme sürecinde elde edilen bulgular ayrı başlıklar altında sunulmaktadır.

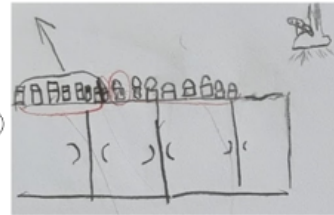
6.2.1. Öğrencilerin aritmetik problemlerini çözme sürecinde kullandıkları temsiller

Uygulamanın 4. seansından 9. seansına kadar olan süreçte 6 aritmetik problemine yer verilmiştir. Bunlar sırasıyla toplama, çıkarma, toplama ve çıkarma işlemini birlikte, çarpma, çarpma ve toplama işlemini birlikte ve bölme işlemini içeren problemlerdir. Bu seanslar ortalama en fazla 33 dakika en az 9 dakika sürmüştür. İlk seanslar daha uzun sürerken sonraki seansların süreleri kısalmıştır.

Donguri yönteminin açıklandığı 4. seansta Arya karakterinin tanıtıldığı problemin ardından, bir problemi de öğrencilerin çözmeleri istenmiştir. Arya'nın arkadaşlarının art arda gelmesiyle toplama işlemini içeren problemin çözümünde Derya ve Mert'in çizimlerinde fazla karakter kullanmasıyla cevabı fazla buldukları, Arzu'nun söylenen sayıdan daha az çocuk çizmesiyle cevabı eksik bulduğu, Kenan'ın ise çizimi doğru yapmasına rağmen Arya'yı saymayı unuttuğu için cevabı eksik bulduğu görülmüştür. Öğrencilerin resimlerinde temsil ettikleri sayıları cevap olarak belirledikleri ve yaptıkları resimsel temsillerin problemin sonucuna karar vermelerinde etkili olduğu görülmüştür. İşlemlerinde ise Kenan dışındaki öğrencilerin problemde gelen çocukların sayılarına dikkat etmeden, çocuklar birer birer gelmiş gibi işlemleri (1x10 gibi) düşünerek, cevaplarına uygun işlem yaptıkları görülmüştür. Donguri yönteminin uygulandığı ilk seansta resimsel temsillere fazla odaklandıkları için problem durumundaki işlemleri yansıtacak şekilde temsiller kullanmakta zorlanmışlardır.

Uygulamanın 5. seansında kek ve meyve suyu sayısının kişi sayısı ile karşılaştırıldığı ve çıkarma işlemini içeren problemi çözmeleri istenmiştir. Bu problemi çözümleri incelendiğinde öğrencilerin hepsinin söylenen sayıda kek ve meyve suyu ile davete gelen kişi sayısını resimsel temsiller kullanarak çizdikleri ve problemin cevabını doğru bir şekilde bulduktan sonra işlemini de doğru bir şekilde yaptıkları görülmüştür. Bu problemde sayılara uygun olarak çizmelerine rağmen kek ve meyve sularını ve davete gelenleri dağınık çizmeleri nedeniyle bunların sayılarını eşleştirme konusunda zorluk yaşadıkları görülmüştür. Eşleştirme zorluğunu yaşamayan Arzu, kek ve meyve suyunu verilen sayı kadar çocuğun eline çizmiş ve böylece çocuk sayıları ile kek ve meyve suyu sayılarını karıştırmamıştır. Aynı zamanda davete gelenlerin sayısını fazla bulmaları nedeniyle detaylı çizimlerinin ardından daha basit çizimlere yer verdikleri görülmüştür. Örneğin, Şekil 6.10'da sunulan Mert'in çözümünde davete gelen yedi çocuk tek bir koltukta sadece kafaları belirtilerek çizilmiştir (3-6. adımlar). Mert'in çözümü incelendiğinde, resimsel temsillerinde gelen 12 çocuğu parça parça çizdiği ve bunların

arasına Arya'nın dâhil olup olmadığı konusunda karışıklık yaşadığı dilsel temsillerinde görülmektedir (7-12. adımlar). Ayrıca problemde söylenenden ziyade kendi çizimlerinde çocukları çizme sırasına göre onların geldiğini düşünmektedir, yani 12 çocuğun aynı anda gelmediğini, ayrı ayrı geldiklerini düşünmüştür (13. adım). Benzer şekilde Kenan da resimsel temsillerinde çocukları dağınık çizmiş ve bunlara kek ve meyve suyunu dağıtırken çeşitli oklar kullanmıştır. Bu nedenle hangi çocuklara kek ve meyve suyu gelmediğinin resimsel temsillerinde görülmesinde zorlanmıştır. Derya ise kek ve meyve sularını resimsel temsillerinde birbiriyle eşleştirirken bunların sayısını çocuk sayısı ile eşleştirmiştir. Çıkarma işleminin, karşılaştırma içeren bir işlem olduğu ve eldeki çokluktan azaltılarak yapıldığı resimsel temsillerinde görülmektedir. Tüm öğrencilerin problemin cevabını doğru bir şekilde dilsel temsille ifade ettiği ve işlemleri sembolik temsillerle doğru bir şekilde gösterdikleri görülmüştür. Resimlerini belli bir düzende çizmedikleri ve dağınık şekilde verilenleri gösterdikleri için karışıklık yaşadıkları, bu nedenle resimle problem çözmenin daha zor olduğunu düşündükleri belirlenmiştir. Problemde yer alan işlem kolay geldiği için işlemle cevaba ulaşmak, resim ile göstermekten daha kolay gelmiştir. Bu aşamada problem çözmede resimsel temsilleri ağırlıklı olarak kullansalar da bunları işlevsel kullanma konusunda zorluk yaşamışlardır.

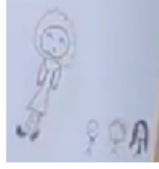
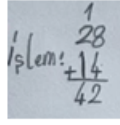
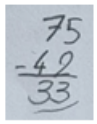
	Söylemsel	Söylemsel Olmayan
Somut	① Hazırladığını mı çizeyim? Buraya mutfak yapsam, evin içi yapsam. Bir, iki, üç, dört... ③ On iki kişi. Kişi mi çizeceğim şimdi? Şey yapsam olur mu? Şimdi birkaç kişi hani on kişi var, onlar evin içinde, iki kişi de kapıdan girmiş gibi olur mu? On iki kişi olmuştur. İki. Aa şöyle bir şey yapabilirim. Tamam ama çok uzun sürecek. On iki kişi daha geldi değil di mi? Vardır diye hatırlıyorum. Televizyon yaptım. Aklıma bir soru takıldı. On bir kişi oluyor değil mi, Arya'yla birlikte on iki? On iki kişi gelmiştir. Yani Arya yok. Bizim serviste yaşadığımızı yaşasınlar. Tek kişilik koltuğa on kişi otursun. Benim iki kişilik koltuğa altı kişi oturduğum oldu. Bir, iki, üç, dört, beş, altı. Altı kişi oldu. Bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi. ⑦ İki kişi daha çizeceğim. Onlar da... Bu da kız olması gerek. ⑨ Arya da var. Bunu keşke sonda söylemeseydi, hepsini yemek masasında yapardım. ⑪ Sandalye çizmek dünyanın en zor işi geliyor. Ya da sadece şey çizecektim, masaya kırıntılar çizecektim, sadece şu iki kişiyi oturtacaktım, onlar yemiş gibi. Sonra başka bir şey dese ne olacak? Şurada iki kişi. Sandalyeyle insan çizmek daha zor. Şimdi bunlar on kişiydi, iki kişi daha geldi, iki. İki daha yazayım mı cevaba? ⑬ Hayır. Daha çok vardı. Sekiz tane, dört. <i>cevap: 4 meyve suyu ke</i> Çünkü sekiz kek, sekiz meyve suyu diyor. Diğer kişilere yetmiş olması için dört. ⑭ On ikiden sekizi de çıkartabilirim, sekizin üzerine dört de ekleyebilirim ama öyle olmaz. İşlem, eşittir. Sekize... On iki eksi sekiz eşittir dört.	     
Soyut	⑮ <i>işlem: 12 - 8 = 4</i>	

Şekil 6.10. Mert'in 5. seanstaki problemi çözümü

Problem: Arya ormandaki davet için 8 tane meyve suyu ve 8 tane kek hazırlamıştır. Arya'nın davetine 12 arkadaşı katılmıştır. Arya, davete gelen her arkadaşına 1 meyve suyu ve 1 kek ikram etmiştir. Herkese yetecek kadar olması için daha kaç tane meyve suyu ve kek hazırlaması gerekir?

Uygulamanın 6. seansında, çizimi nispeten daha zor olacak büyüklükte çoklukları içeren toplama ve çıkarma işlemlerini yapmayı gerektiren bir problem sorulmuştur. Bu

problemin çözümünde öğrencilerin 75 gibi büyük bir çokluğu birlikler yerine onluk gruplara ayırarak çizimleri beklenmiştir. Öğrencilerin çözümleri incelendiğinde verilen kalem sayısının büyük olmasından dolayı başta zorlandıkları ve sadece sayıyı yazarak gösterme eğiliminde oldukları görülmüştür (Şekil 6.11, 1-3. adımlar; Şekil 6.12, 1-2. adımlar). Araştırmacının resimle nasıl gösterebileceğini sorması üzerine Arzu ve Derya kalemleri tek tek çizmiştir. Arzu somut bir şekilde resimsel bir temsil kullanırken, Derya soyut olarak simgesel çubuk temsillerini kullanarak göstermiştir. Ancak ikisi de kalemleri belirli bir düzende çizmedikleri için her seferinde tekrar sayma ihtiyacı duymuşlardır. Arzu resimsel olarak çizdiği kalemleri çocuklara paylaştırırken, söylenen sayıda kalemi yuvarlak içine alarak gruplamaya çalışmıştır. Şekil 6.11’de sunulan Derya’nın çözümü incelendiğinde, başlangıçta çizdiği çubukları, üç arkadaşına dağıtma esnasında adım adım kullanmadığı, arkadaşlarının kalem sayılarını sadece sayıları yazarak not ettiği (6-9. adımlar), sonrasında çizdiği çubuklardan eksiltme yaparak bunları dağıtmaya çalıştığı görülmektedir (12-13. adımlar). Soyut simgesel temsille düzensiz çizdiği çubukları sayarak doğru sonuca ulaşmakta biraz zorlanmış, başlangıçta yanlış bir cevap bulmuş, işlemleri yaptıktan sonra ulaştığı sonucu tekrar sayarak bulmaya çalışmış ama aynı cevabı çubukları sayarak elde etmekte zorlanmıştır (14-20. adımlar). Cevabının doğru olduğundan işlemler sayesinde emin olmuştur (20-27. adımlar). Arzu ve Derya’nın işlemleri belirlemede görsel temsilleri yardımcı olmuştur. İkisinin söylemsel olmayan temsillerinde de çıkarma işleminin eldeki kümeden azaltılarak yapılan bir işlem olduğu görülmektedir.

	Söylemsel	Söylemsel Olmayan
Somut	1 75 tane kalem mi çizeceğiz şimdi? Ya da bir kalem, 75 çarpı kalem yazalım. 3 Neyse 75 tane kalem çizelim bari. Çubuk çubuk çizelim mi kalemi? 4 Çizdim 75 tane. 5, 10, 15, 20, 25, 30... Ben öyle düşünüyorum, çünkü saydım. 4 Üç arkadaşına kalemleri vermek. Üç tane arkadaş çizeceğim. Arya'yı çizeceğim. Arkadaşları da böyle çizelim. 6 Şuna 14 yazacağım. 8 28 tane. İstemiştir diyor sadece. 10 Soruyu anladım. Yani böyle yapacağım. İşte soru buydu. Ben işlemle çözdüm. 12 Şimdi buradan 14 tanesini alırdım, buna koyardım. Buradan da 28 tanesini alırdım buna yapardım. Buradakileri de sayar... Bu kalemler bu çocuğa. Bu kalemler bu çocuğa. Buna da 30 tane kalıyormuş. Bu da 30. 14 Ben sonucumdan emin değilim. Doğru değil, daha fazla kalmalıydı. 16 32 oldu. İşte bu doğru sayı. 18 Çünkü 4 ile 8'i toplarsak 12 eder. Ama 42 olmalıydı. Aa Doğru, bunları da onlara göre yapmadım değil mi? Burada 3 fazla. Burada 3'ü de katılacak. 35 olacak. 20 42 olması gerekiyor ama. Çünkü bunları topladığımızda 42, aa doğru, çıkarma yapacağız. Buldum ben şimdi. Önce kolaylık olsun diye bunları toplayacağım. 22 Ben şimdi bunların toplam sayılarını buldum. 75'ten de 42'yi çıkaracağım. 24 33 kalem olması lazım. Bu sefer bir hata yaptım. Bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi, sekiz, dokuz, ... İki fazla. 26 İşlemlere göre doğru ama buradakilere göre. Ben işlemlere güveniyorum. 33 olacak, çünkü işlemler her zaman güvenilirdir. 27 Cevap 33 tane kalem	5  7  9  11  13  17 
Soyut	21  23 	2  15 Yeniden kalemleri sayar. 19 Baştan kalemleri sayar. 25 

Şekil 6.11. Derya'nın 6. seanstaki problemi çözümü

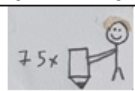
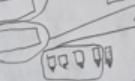
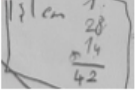
Problem: Arya'nın 75 tane kalemi vardır. Üç arkadaşına kalemlerini vermek istemiştir.

Bir arkadaş 14 kalemi beğenip almıştır. Diğer arkadaş da 28 tane kalemi almak

istemiştir. Kalan kalemleri de üçüncü arkadaşına vermiştir. Üçüncü arkadaşına kaç

kalem vermiştir?

Kenan ve Mert de başlangıçta birerli olarak çizmeye başlasalar da sayının fazla gelmesiyle sıkılmaya başlamışlar ve araştırmacının daha kolay nasıl gösterilebileceğini sorması üzerine onlukları bir kalem kutu şeklinde göstermeyi düşünmüşlerdir. Ancak Mert'in çizimlerini çok düzenli yapmaması ve Kenan'ın da eksilen ve kalan kalemleri çiziminde gözden kaçırmaması nedeniyle başlangıçta cevaplarını bir eksik olarak belirtmişlerdir. Şekil 6.12'de sunulan Kenan'ın çözümü incelendiğinde, başlangıçta yalnızca sayının yanına kalem çizerek gösterdiği, ardından tek tek kalemleri çizdiği ve sonrasında bunları onluk gruplar şeklinde grupladığı görülmektedir (1-8. adımlar). Daha sonra 28 kalemi arkadaşına verirken, 3 onluktan 2 kalemin kalacağını belirttiği ve resimsel temsille gösterdiği görülmektedir (13-14. adımlar). Öncelikle resim üzerinde düşünerek ve söylenenleri resminde düzenleyerek cevaba ulaşmıştır. Ancak kalan kalemleri sayarken resminde altta kalan bir kalemi gözden kaçırdığı için sonucu bir eksik olarak bulmuştur (18. adım). Ardından tekrar düşününce resminde kalan kalemi fark etmiştir (19. adım). İşlemleri yapmadan sadece resim üzerinde düşünerek cevaba ulaşmış ve kontrol etme aşamasında eksik kalan işlemlerini fark edip tamamlamıştır (22-24. adımlar). Böylece resimsel temsilleri problemi çözmede etkili bir araç olarak kullanmıştır.

	Söylemsel	Söylemsel Olmayan
Somut	① Çok fazla. Yetmiş beş kalemi nasıl çizsem? Heh. Yetmiş beş çarpı. Şöyle tamam. Elinde tutuyor kalemi. Aslında yetmiş beş tane kalem. Yetmiş beş çarpı yazınca o zaman. ③ Yedi tane on. Buraya çizeyim. Uff. Otuz tane çizdim. Şimdi. Şöyle. ⑤ Pratik yöntem. Aaa. Buldum resmini. Ya da şu ikisi... Onluk kalem kutu. İşte. ⑦ İşte burada kalem kutular. Şöyle ellerini de yapayım. Evet, oldu oldu. Yetmiş kaç kalemi vardı? Aa yetmiş beş. ⑨ Şöyle, arkadaşlarının kafasını şöyle çizeyim. Şöyle kolları. Tamam. Ay iki arkadaşı var. Tamam, oldu, şöyle. ⑪ On dört, çok fazla. Bu kalemleri ve bunu bu almış. Yirmi... İki tane bu onluk. Bir tane de burada iki tane kaldı. Bunun bu kadarını almış. ⑬ Yanına iki tane kalem çizerim. Bunları da bu aldı yok, kenarından getirelim. Evet yaptım. Arya'nın kaç kalemi kalmıştır? ⑮ Üçüncü arkadaşı da mı var? Neyse üçüncü arkadaşını da çizelim. Üçüncü arkadaşmış. Kalan tüm bu kalemleri de o arkadaş almış. Oldu. On... Yetmiş beş, yetmiş beş. Bir tane arkadaş yirmi sekiz. Yirmi sekizle on dörtü toplayacağım. İn... Otuz iki. ⑰ Burada, bu kalem kutuda iki tane kaldı, onları üçüncü arkadaşına verdi. Şöyle. Kaçtı? Otuz iki, otuz iki. Otuz iki. ⑱ Onların aldıkları kalem yirmi sekiz, yirmi sekiz ve on dört. Aa otuz üç olmalıydı. Çünkü bu kalem de kaldı. Tamam, oldu. ⑲ Hi hi. Tamam. Oldu, oldu. (Kontrol ederken) ⑳ Kırk iki. Bir tane işlemi yapmayı unutmuşum. Yetmiş beşten kırk ikiyi çıkartalım. Üç. Ayy, çıkartma. Otuz üç. ㉒ Şimdi burada iki tane arkadaşının kalemlerini topladım kırk iki oldu. Yetmiş beşten de kırk ikiyi çıkarttım otuz üç kaldı. O da bu dev arkadaşım.	②  ④  ⑥  ⑧  ⑩  ⑫  ⑭  ⑯ 
Soyut	⑳  ㉒ 	

Şekil 6.12. Kenan'ın 6. seanstaki problemi çözümü

Problem: Arya'nın 75 tane kalemi vardır. Üç arkadaşına kalemlerini vermek istemiştir.

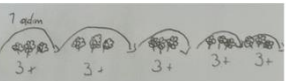
Bir arkadaşı 14 kalemi beğenip almıştır. Diğer arkadaşı da 28 tane kalemi almak

istemiştir. Kalan kalemleri de üçüncü arkadaşına vermiştir. Üçüncü arkadaşına kaç

kalem vermiştir?

Bu problem durumunda öğrenciler öncelikle birlikler şeklinde kalemleri çizerken istenen sayıya ulaşmak için bunları onluk gruplara ayırmaları gerektiğini fark etmişlerdir. Sayıları onluklara ve birliklere ayırarak göstermenin gerekliliği ve kolaylığını göstermek amacıyla gerçekleştirilen bu problem durumunda, öğrencilerin çoklukların miktarını anlamaları için görselleştirmenin doğru bir şekilde yapılmış olmasının önemi de anlaşılmıştır. Aynı zamanda verilen bir çokluğun miktarının niceliksel olarak değerini resimsel temsilleri kullanarak göstermişlerdir. Sayı duyusunu içeren bu süreçte öğrenciler nesnelerin miktarını uygun sayıda göstermek için farklı stratejiler geliştirmişlerdir. Problemin kontrol edilmesinin ardından, araştırmacı tarafından büyük sayıların onluklar ve birlikler şeklinde nasıl görselleştirilebileceği kırmızı kalem kullanılarak gösterilmiştir. Öğrencilerin problemi çözümlerinde ağırlıklı olarak somut dilsel ve resimsel temsili eş zamanlı kullandıkları, bunun yanında Derya'nın söylemsel olmayan soyut simgesel temsil kullandığı görülmüştür.

Uygulamanın 7. seansında çarpma işlemini içeren bir problem sunulmuştur. Her adımda üç çiçek toplamayı içeren ve beş adımda toplanan çiçek sayısını soran problemin çiziminde öğrenciler adım sayılarını ok ile veya çiçekleri üçerli gruplayarak resimsel temsille göstermişlerdir (Şekil 6.13, 10. adım). Büyük oranda resimsel temsil kullanmışlar ve ardından cevabı ve işlemleri doğru bir şekilde bularak söylemsel temsillerle ifade etmişlerdir. Bu çizimleri esnasında dilsel olarak kullandıkları temsilleri de çarpma işleminin anlamını veren tekrarlı toplamayı yansıtmaktadır. Örneğin Derya, *“Şimdi burada üç çiçek topladı. Burada üç tane topladı. Burada üç tane topladı. Burada üç tane topladı. Burada üç tane topladı.”* şeklinde açıklamasını yaparak çizimini yaparken, Arzu *“Bir adım, üç artı. Yani hani üç tane artıyormuş ya adım attığında, üç artıyor, üç artıyor, üç artıyor, üç artıyor, üç artıyor.”* şeklinde çizimini açıklamıştır (9. adım). Bu söylemlerinin 5 kere 3 işlemini yansıttığı görülmektedir. Ancak Arzu çiziminde adım için soyut simgesel ok temsili kullandığı ve çiçekleri çizmeden “3+” yazdığı için cevabı da *“15 adım”* olarak belirtmiştir (3-7. adımlar). Daha sonra kontrol etme aşamasında burada çiçeklerin olması gerektiğini fark edip resmini ve cevabını düzenlemiştir (11. adım). Öğrencilerin kullandıkları resimsel temsiller, verilen sayıların neyin sayısı olduğunu gösterirken daha soyut temsillerde sayıların neyi ifade ettiği karışabilmektedir.

	Söylemsel	Söylemsel Olmayan
Somut	Her bir adım. ③ Eline üç tane çiçek çizdim. Nasıl yapayım? ⑦ <i>Cevap 15</i> (Kontrol ederken) Bir adım, üç artı. Yani hani üç tane artıyormuş ya adım attığında, üç artıyor, üç artıyor, üç artıyor, üç artıyor, üç artıyor. Bunlar çiçek. Yazayım mı çiçek? Ay 15 çiçek. ⑪ <i>Cevap 15</i>	①  ②  ⑥ Parmaklarıyla sayar. ⑩ 
Soyut	⑧ <i>İşlem: 3 x 5 = 15</i> <i>✓ 3+3+3+3+3 = 15</i>	④  ⑤ 

Şekil 6.13. Arzu'nun 7. seanstaki problemi çözümü

Problem: Arya, ormanda çiçek topluyor. Her bir adım attığında 3 tane çiçek topluyor. 5 adım attığında kaç çiçek toplamış olur?

Uygulamanın 8. seansında her sabah altı tane açan kabak çiçeklerinden bir hafta boyunca toplamayı ve öncesinde topladığı on iki kabak çiçeğini eklemeyi içeren problem sorulmuştur. Öğrenciler yedi kere altı çiçek toplanacağını fark etmişler ve resimlerinde bu tekrarlı durumu göstermişlerdir. Yedi kere altı işleminin cevabını ise Arzu çizdiği çiçekleri tek tek sayarak, Kenan ve Mert altışarlı ritmik sayarak bulmuşlardır. Şekil 6.14'te sunulan Kenan'ın çözümü incelendiğinde, önceden topladığı on iki çiçeği evin yanına çizerek, ardından her gün açan altı çiçeği yedi gün boyunca belirterek resimsel temsille gösterdiği görülmektedir (3-8. adımlar). Sorunun cevabını ise ilk olarak yalnızca işlem yaparak bulmaya çalıştığı ve yedi kere altıyı altmış altı olarak bulduğu (9-10. adımlar), yanlış yaptığını fark edince çizdiği çiçekler üzerinden sayarak doğru cevaba ulaştığı görülmektedir (11. adım). Bu aşamada resimsel ve dilsel temsillerin eş zamanlı olarak birbirini desteklediği görülmektedir. Kontrol etme aşamasında ise daha önce toplanan on iki çiçeği eklemeyi unuttuğunu fark etmiş ve sembolik temsille işlemlerini

ekleyerek cevabını düzenlemiştir (14-15. adımlar). Derya ise çiziminde çiçeklerin sayısını ve yedi kere topladığını resimsel temsil yerine daha soyut simgesel ve “6” sayısını kullanarak sembolik temsille göstermiş, yalnızca işlem yaparak cevaba ulaşmıştır. Önceden topladığı on iki çiçeği öğrencilerin hepsi resimlerinde göstermişlerdir, ancak Derya dışında diğer öğrenciler cevaplarına bunu eklemeyi unutmuşlardır. Kenan ve Mert resimlerinde küçük ve daha belirsiz çizdiği için bu çiçekleri unuttuklarını belirtmişlerdir. Arzu ise kontrol etme aşamasında bu çiçeklerin sayısını 42’nin üzerine 12 sayarak bulmuş ve sonrasında işlemi yazmıştır. Çarpma işlemini yapmalarını içeren bu problemde işlemin sonucunu doğru bulabilmek için resimsel temsillerinden yararlanmışlardır. Bu resimsel temsilleri, dilsel olarak gerçekleştirdikleri ritmik saymanın bir aracı olarak kullandıkları görülmüştür.

	Söylemsel	Söylemsel Olmayan
Somut	Arya'nın evini çizelim ilk önce. İşte tam şurada da bir tane kabak çiçeği varmış. Köyde hiç yaşamadığım için görmedim hiç kabak çiçeği. Kabak çiçeği şöyle sarı renkte açan çiçekler. Dur, dağları da çizelim. Şöyle ırmağı da çizelim. Dur, kabak çiçeklerini... Bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi, sekiz, dokuz, on, on bir, on iki, tamam. Dur, şöyle kabak çiçeklerini daha çok çizelim. Şöyle, tamam. Her gün... Burada, gene altı tane açıyormuş şimdi çiçek. Tamam. Her açan çiçeği topluyor muymuş? Şimdi bu bir, ikincisini yapacağım. Üçüncüyü, dördüncü altıyı, beşinci, altıncı ve yedinci altıyı yapacağım. Kabak çiçeklerini toplarsa o zaman o kabaklar nasıl açacak? Bak şu birinci gün. İkinci gün... Nehrin kollarını da çizelim. Dördüncü gün. Azıcık da hangara götürmüş şimdi. Dördüncü gün şunları... Kaç? Beşinci günü mü yapmıştım. Altıncı gün. Ve yedinci günde ırmağın kollarına ayrıldığı... Buraya da köprüyle geçebiliyormuş. Şimdi burada kaç tane çiçek topladığını söylemişti. İlk önce işlemi yazalım şuraya. Altmış... Altmış altı. Altmışarlı saymayı bildiğim için... Ay ay ay ay... Altı, on iki, on sekiz, yirmi dört, otuz, otuz altı, kırk iki. Kırk iki. Sonuç... Sonuç 42 kabak çiçeği Sonuç 54 kabak çiçeği Küçük küçük yaptığım için herhalde unutmuşum.	2 4 6 8
Soyut	10 12 (Kontrol ederken) 14	

Şekil 6.14. Kenan'ın 8. seanstaki problemi çözümü

Problem: Arya, her sabah açan kabak çiçeklerinden toplamak ister. Arya, bu zamana kadar 12 tane kabak çiçeği toplamıştır. Her sabah bahçesinde 6 yeni kabak çiçeği açmaktadır. Buna göre bir hafta sonra toplam kaç tane kabak çiçeği toplamış olur?

Uygulamanın 9. seansında bölmenin gruptama anlamını içeren problem durumu yer almaktadır. Öğrencilerin hepsi gruptamanın bölme işlemini ifade ettiğini dilsel ve

resimsel temsilleriyle belirtmişler ve doğru bir şekilde problemi çözmüşlerdir. 21 karıncanın gösterilmesinde Arzu ve Kenan 21 tane çizgi çizerken, Mert iki tane onluk grup bir tane birlik grup şeklinde simgesel temsille göstermiş, Derya bir tane karınca resminin yanına “21x” yazarak sembolik temsille sayısını not etmiştir (Şekil 6.15). Niceliksel olarak Derya’nın temsili diğerlerine göre soyut kalırken, Mert’in önceki problemlerde yapılan taban gruplamasını kullanması da bir derece soyutlama yaptığını göstermektedir. Başlangıçta dağınık çizilen karıncalar, 3’erli sıraya girmelerinin istenmesi üzerine öğrenciler tarafından gruplandırılarak görsel temsille gösterilmiştir (Şekil 6.16). Böylece 21’in içinde 7 tane 3 olduğu görsel temsillerinde görülmüştür. Arzu ve Kenan işlemlerinin sonucunu yazmadan önce tekrar resim üzerinde sıra sayısını sayarak cevaptan emin olmak istemişlerdir, burada işlemin sonucunu kontrol etmek amacıyla görsel temsillerini kullanmışlardır. Hatta Kenan önce parmaklarıyla sayarak sonucu bulacakken vazgeçip resim üzerinde sayarak bulmuştur. Mert ise işlemlerini sembolik temsille yazarken yanlış sayılar yazmış ve bunların yanlış olduğunu sonradan fark edip düzeltmiştir. Bu problemde bölme işleminin anlamı ve sonucu görsellerinde görünürken, bunları sembolik olarak temsil etmeleri aşamasında görsellerinden yararlanmışlardır.



Şekil 6.15. Sırasıyla Arzu’nun, Kenan’ın, Mert’in ve Derya’nın 21 karınca temsilleri



Şekil 6.16. Sırasıyla Arzu’nun, Kenan’ın, Mert’in ve Derya’nın karıncaları 3’erli gruplama temsilleri

Problem: Arya’nın 21 tane karınca arkadaşı var. Arya, karınca arkadaşlarından 3’erli sıraya girmelerini istiyor. Kaç sıra karınca olur?

Aritmetik işlemlerini içeren problemlerin çözümünde Donguri yönteminin kullanımı incelendiğinde, öğrencilerin yalnızca işlemlere odaklandıklarında

ezberledikleri sayılar üzerinden hareket ettikleri ve basit hatalar yapabildikleri veya sonuçlarını bulmak için parmak sayma gibi bir somutlaştırma aracına ihtiyaç duydukları görülmüştür. Yer alan işlemleri resimsel olarak temsil ettiklerinde işlemin kendisi ve sonucu da görünür olduğu için işlemlerin sonuçlarını doğru bulmalarında etkili olduğu belirlenmiştir. Ayrıca parmak sayma yerine geçen bir sayma aracı olarak resimlerini kullandıkları görülmüştür. Problemlerin çözümünde resimsel temsiller kullanmaları sayesinde zihinlerinden geçen işlemleri daha anlaşılır bir şekilde ifade ettikleri belirlenmiştir.

6.2.2. Öğrencilerin erken cebir problemlerini çözme sürecinde kullandıkları temsiller

Uygulamanın 10. seansından 15. seansına kadar olan süreçte 6 erken cebir problemine yer verilmiştir. Bu seanslar ortalama en uzun 28 dakika, en kısa 14 dakika sürmüştür. Seansların süreleri yer alan probleme göre farklılık göstermektedir.

Uygulamanın 10. seansında adım sayıları arasındaki ilişkiyi içeren problemin çözümünde öğrencilerin önceki problemlere göre nispeten zorlandıkları görülmüştür. Derya resimsel temsille adımları nasıl göstereceğini bilemeyerek her bir adımı iki ayak şeklinde çizmiştir, bu nedenle başlangıçta ilişkiyi görmekte zorlanmıştır. Mert de 3 adım ile 2 adım arasındaki ilişkiyi 1 eksik olarak ifade etmiştir. Derya ve Mert başlangıçta toplamsal bir ilişki düşünerek cevabın 18'in 1 eksiği 17 olacağını tahmin etmişlerdir. Ancak Mert Şekil 6.17'de sunulan çözümünde görüldüğü gibi tek tek adımları çizerken akıl yürütmelerini sözlü olarak ifade etmiş ve dilsel temsilleri ile resimsel temsillerini eş zamanlı kullanarak cevaba ulaşmıştır (5-12. adımlar).

	Söylemsel	Söylemsel Olmayan
Somut	Arkadaşı tavşan... Tavşan mıydı? ① Evet, ikinci cümle. Hı Arya'yı çizmeyi unuttum. Arya'nın boyu tavşandan kısa olsun. Boylarının ölçüsünü de yazabilir miyim? 3.40, 1 cm tamam. Arya üç adım atarken... Nasıl yani? Arya şimdi 3 adım attığında, Arya 3 adım atmış oluyor, tavşan 2 adım atıyor. Arya'nın bir adımı da ölçme santim uzaklık değil, o zaman 3 adımında, üç adım, bir, iki, üç. Bu da 2 adım mı oluyordu? Aslında bunun bundan çok gitmesi lazım, bacaklarının boyu... Arya 18 adım attığında tavşan 17... Tamam resimle... Aa gösteremezdim. Evet, Arya'nın 3 adımı, yani 1 adımı, 1 adımında tavşan hiç adım atmamış oluyor. 2 adımında 1 adım. Arya 3 adım attığında tavşan 2 adım atıyorsa, yani Arya ona göre biraz ondan önde gitmesi gerekiyor. ⑤ Hı... 1 adımında o zaman beş olur. Bu soru çok zor. 3 o zaman, 3, 3 daha 6, o kaç olur? Beş. Tavşan sürekli 2 adım atıyor. Arya sürekli 3 adım atıyor. Yani 3, 18'i 3'e böldüğümde 6 çıkar. O zaman bunu 6 kez yaptığına göre, şimdi 6 kez hayal edelim. ⑥ Doğru. 6 oldu. 9 oldu. Tavşanı hareket ettirelim. Bu 9'sa bu 8... (adım adım çizmesi önerilir) Arya 3 adım attı, tavşan 2 adım attı. Arya 3 adım daha attı, tavşan 2 adım daha attı. Gene 2. İki... bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi, sekiz, dokuz, on, on bir, on iki. 12 olduğunda tavşan da 2 adım daha atar. Sonra Arya bir, iki, üç, bir şey yaptığında bir daha yapar. Sonra bir daha böyle, böyle, böyle yaptığında bu böyle, böyle yapar. Ama kaç oldu? Üç, bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi, sekiz, dokuz, on, on bir, on iki, on üç, on dört, on beş, on altı, on yedi... Bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi, sekiz, dokuz, on, on bir, on iki, on üç, on dört, on beş, on altı, on yedi, tamam on sekiz. ⑧ Sonra o üç adım attığında bu kaç adım, bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi, sekiz, dokuz, on, on bir, on iki. Üçer on iki... Bu iki tane daha dört atacak, çünkü on ikideyken çizmişim bırakmışım. Bir bakalım. Üç, bu iki oldu; üç, bu iki oldu; üç, bu iki oldu... Öyle hissediyorum sonuç yanlış çıkacak. Bu üçe bu ikiydi. Sonra bu üçe bu ikiydi. Sonra bu üçe bu ikiydi. Sonra bu üçe bu ikiydi. Bu kaç oldu? Bir, iki, üç, o zaman yani üç, altı, dokuz, on iki, on beş, on sekiz. Bununla bu oldu, bununla da bunlar oldu. Bu fazla. ⑩ Yani şimdi ikisini de sayacağız. Ama, şimdi bak, 18 adım daha attı, yani bunun üzerine mi yapacağız. Hı 18 adım attığında tamam. İki, dört, altı, sekiz, on, on iki. Tavşan on iki. Üç, altı, dokuz, on iki, on beş, on sekiz. Neydi? Tavşan on iki o zaman... Kızın adı neydi? Arya on sekiz. ⑫ Yanlış ama kesin yanlış. Cevap 12. Cevap 12, on iki. ⑬ Bu üçüncü sınıf konusu mu? Çünkü çözemedim. Ama sekizinci sınıf sorusu çözüyorsam bunu nasıl çözemedim? Bir tane, bir de bir yaptım. O kadar zordu ki ikincisini yapasım gelmedi. O yüzden böyle bir şey yaptım. Evet anlatın, hiç anlamadım. (Kontrol ederken) ⑮ Bu Arya, bu tavşan. Bu böyle, bu böyle. Tam şöyle falan oluyor. Bir iki, bir iki üç... Hı adım büyüklüğüyle mi bu? ⑯ Anladım. ⑰ 18 bölü 3, 6. 18'i 3'e böldüm. 18 bölü 3 eşittir 6. ⑱ 6 kere 3 adım. 6 kere 2 adım. 6 kere 2, 12. 6 çarpı 2 eşittir 12. Doğruymuş sonucum. On iki adım. Yani doğru. Yüppi.	② ④ ⑦ ⑨ ⑪ ⑬ ⑮ ⑰
Soyut	⑳ $18 \div 3 = 6$ ㉑ $6 \times 2 = 12$	

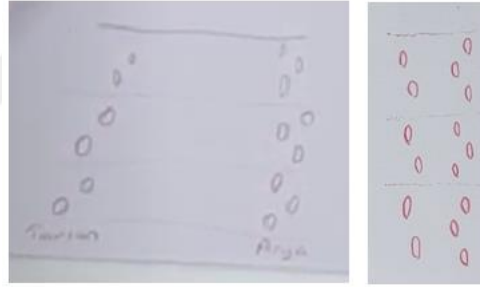
Şekil 6.17. Mert'in 10. seanstaki problemi çözümü

Problem: Arya, arkadaşı tavşanla yürüyüşe çıkar. Arya 3 adım atarken tavşan 2 adım atıyor. Arya 18 adım attığında tavşan kaç adım atar?

Derya ve Mert problemi anlamadıklarını ve zorlandıklarını söylemişlerdir. Kontrol etme esnasında adımlamaları parmaklarıyla canlandırmışlar ve bu jestler sayesinde Arya ve tavşanın adımlarını anlayabilmişlerdir (Şekil 6.18). Parmaklarıyla yaptıkları adım hareketlerinin kâğıt üzerinde izlerini göstermek amacıyla öğretmen tarafından çizimler yapılmış, bunun sonucunda nasıl olması gerektiğini anladıklarını ifade etmişlerdir (Şekil 6.19).



Şekil 6.18. Derya'nın (solda) ve Mert'in (sağda) adımları parmaklarıyla canlandırması

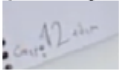
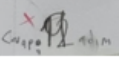
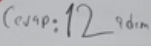
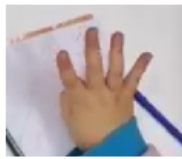
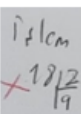
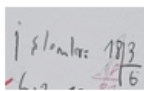


Şekil 6.19. Derya (solda) ve Mert'in (sağda) parmaklarıyla adımlamalarının çizim ile gösterimi

Arzu ve Kenan ise Arya'nın adım sayılarını 3'erli gruplayarak ve her 3 adım için tavşanın 2 adım atacağını paralel olarak düşünerek resimsel temsillerini oluşturmuşlardır. İkisi de resimlerinde bağlamı uygun bir şekilde göstererek cevaba doğru bir şekilde ulaşmıştır. İşlemleri sembolik temsille yazma aşamasında Arzu doğru bir şekilde yazarken, Kenan işlemini $18:2$ olarak ifade etmiş ve bu durumda 12 olarak bulduğu cevabını 9 olarak değiştirmiştir (Şekil 6.20, 8-11. adımlar). Şekil 6.20'de sunulan Kenan'ın çözümü incelendiğinde, öncelikle dilsel temsillerle akıl yürütmelerini sözlü olarak açıklayarak sonucu bulmaya çalıştığı (5. adım), ardından oklarla gösterdiği simgesel adım temsillerini kullanarak çizim ile doğru cevaba ulaştığı (6-7. adımlar), ancak sembolik temsille işlemini düşündüğünde yanlış yorumlayarak farklı bir sonuca

ulaştığı görülmektedir (8-11. adımlar). Kontrol etme aşamasında işleminin yanlış olduğunu fark etmiş ve resmini yeniden incelemesi sonucunda doğru işlemleri sembolik olarak temsil etmiştir (13-22. adımlar). Kenan işlemleri yapma esnasında başta parmaklarını saymaya başlamış, ardından resmindeki grup sayılarını sayarak bölme işleminin sonucuna ulaşmıştır (18. adım). Problemin çözümünde oluşturduğu görsel temsiller problemi doğru anlamasına, çözmesine ve işlemleri belirlemesine yardımcı birer araç olmuştur.

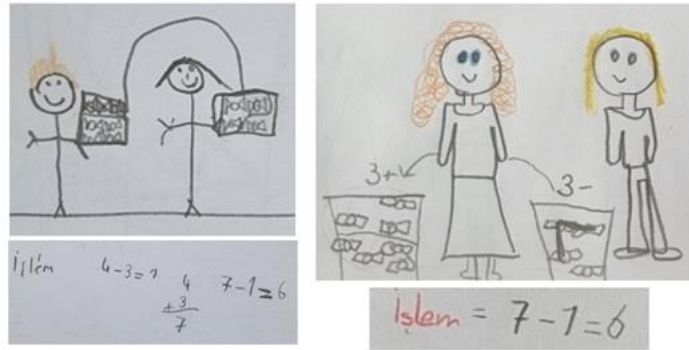


	Söylemsel	Söylemsel Olmayan
Somut	① Şöyle çizeyim. Tavşanı da çizeyim. Tavşanı da çizdim. O vakit tavşanı da çizdim, ne kadar da sevimli. Beyaz kalsın. Ağaçlar. Evet, tamam şimdi bitti. ③ Bir, iki, üç. Sonra tavşanın da... Arya'nın ilerledikleri şunlar, tavşanı da iki tane adım atıyor. Evet. Tavşan... Bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi, sekiz, ..., on beş, on altı, on yedi, on sekiz. Tavşanın da iki tane adım atıyordu. Her üç adımda tavşanın iki adım atıyor. Gene şu üç adım için iki tane adım atar. Gene bu üç adım için bunları. Sonra şu, şu, bunlar için iki adım atıyor. Sonra bunlar için. (Kontrol eder ve sayar). On adım. On olmaz değil mi? On değil. On iki, on iki. On dört, on dört. ⑤ Görürüm. Dur. (Resminde kontrol eder, gruplayarak sayar). Cevabı yazsam. ⑦  ⑧ İşlemi de şuraya yapayım. On sekizi ikiye bölersek... Dokuz adım olsa... Dokuz... Yaptım herhalde. Dokuz. ⑪  (Kontrol ederken) ⑫ Arya üç tane adım atmış, sonra bu okları da o üç okla birleştirdim. Siyahlar Arya'nın okları, diğerleri de tavşanın okları. ⑬ Tamam, dur şöyle Arya'nın bunlar... (Tavşanın adımlarını sayınca) Aa... ⑮  ⑯ (İşlemini açıklar) 18 Arya'nın attığı tüm adımlar, 2 de tavşanın attığı adımlar. ⑰ (İşlemleri tekrar düşünür) İlk önce 18'i 3'e böleceğiz. 18'i 3'e bölünce o zaman Arya'nın attığı adımları buldum. ⑲ 6'yı da 2'yle, 6 çarpı 2 eşittir... ⑳ Çünkü tavşanın attığı adımlarla 2'yi çarpacağız.	②  ⑨ <i>Parmaklarıyla sayar.</i>  ⑮  (Parmak saymanın ardından resminde grup sayısına bakarak işlemi yazar)
	⑩  ⑰  ⑳ 	④  ⑥  ⑭ 

Şekil 6.20. Kenan'ın 10. seanstaki problemi çözümü

Problem: Arya, arkadaşı tavşanla yürüyüşe çıkar. Arya 3 adım atarken tavşan 2 adım atıyor. Arya 18 adım attığında tavşan kaç adım atar?

Uygulamanın 11. seansında yer alan şeker değişim problemi, öğrencilere ilk haftalarda sorulduğunda büyük oranda zorlandıkları bir problem olmuştur. Resim çizerek çözülmesi istendiğinde ise bilinmeyen bir sayıdaki şekeri göstermekte zorlanmışlar, bunun yerine kendi belirledikleri bir sayıda şekeri resimsel temsil kullanarak aradaki ilişkiyi göstermeye çalışmışlardır. Arzu ve Kenan resimlerinde belirli bir sayı kullanarak buradaki ilişkiyi sembolik temsillerle aritmetiksel olarak ifade etmişlerdir (Şekil 6.21).



Şekil 6.21. Kenan'ın (solda) ve Arzu'nun (sağda) belirli bir sayı şeker ile ilişkiyi ve işlemleri göstermesi

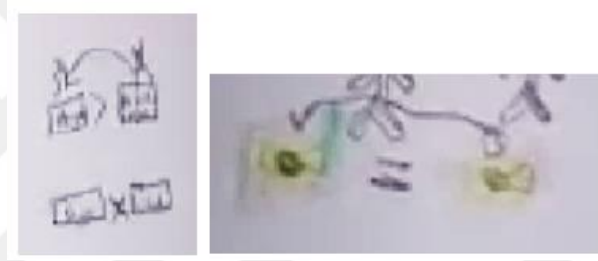
Problem: Arya ve arkadaşı Maya'da birer kutu şeker vardır. Kutularında eşit sayıda şeker bulunmaktadır. Arya, Maya'nın kutusundan 3 tane şekeri alıp kendi kutusuna atmıştır. Hangisinin kutusunda kaç tane fazla şeker vardır?

Derya ve Mert kutularda eşit sayıda şeker olduğunu, eşit sayıda şeker çizmek yerine kutular arasına eşittir işareti koyarak sembolik temsille göstermişlerdir (Şekil 6.22). Derya eşittir sembolünü kullanımını şu şekilde ifade etmiştir: “Eşit sayıda. O zaman şöyle yapayım. Biz matematik işlemlerinde eşit olan şeylerde böyle yaparız. Eşit olduğunu böyle anımsatırız. Yani ben de resimle böyle yaptım. Bu da resim sayılır.” Şekerlerin yer değiştirmesi sonrasında Derya'nın açıklamaları şu şekildedir: “Hıı... O zaman eşitlik bozuldu. Şimdi o zaman büyüktür işareti yapacağım. Ben matematik işlemine çevirdim resmi. Arkadaşı yazacağım. Tamam. Arya'nın eşitmiş eskiden arkadaşıyla. Sonra buradan 3 şekeri buraya getirmiş, oldu mu? Burada artık 3 şeker yok.” Eşittir sembolünün sadece işlemlerin sonucunu gösteren bir sembol olmadığını ve bir denklik ifade ettiğini gösteren bu sembolik kullanım şeker sayılarındaki değişimi göstermeleri noktasında kullanışlı olmamıştır.



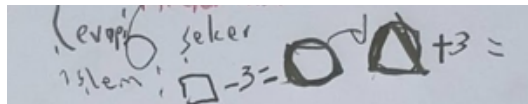
Şekil 6.22. Derya'nın (solda) ve Mert'in (sağda) kutularda eşit sayıda şeker olduğunu eşittir işareti kullanarak göstermesi

Şeker sayılarını göstermeden yapılan temsillerde, şeker sayılarındaki değişimi göstermek için artışı düşünürken diğer kutudan azalması gerektiğini fark etmekte zorlanmışlardır. Şekil 6.23'te öğrencilerin bir kutudan diğerine 3 şeker gittiğini simgesel temsil içeren okla gösterdikleri görülmektedir. Ancak bu simgesel gösterim şeker sayılarında nasıl bir değişim olduğunu yansıtmamaktadır.



Şekil 6.23. Derya'nın (solda) ve Mert'in (sağda) bir kutudan diğerine 3 şeker gittiğini göstermesi

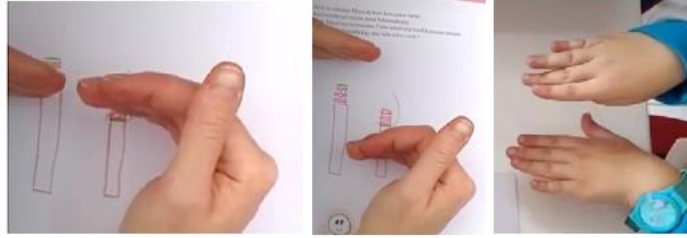
Şeker sayılarını çizmeyen Mert ise bilinmeyen sayıda oldukları için kare, yuvarlak ve üçgen gibi simgesel temsiller kullanarak göstermek istemiştir, ancak bu simgesel temsiller arasındaki ilişkiyi doğru bir şekilde ifade edemediği için anlayamamıştır. Örneğin, başlangıçta iki kutuda da eşit sayıda olduğunu ikisinde de kare simgesi ile göstermek yerine birinde kare sayıda diğerinde üçgen sayıda olarak göstermiştir (Şekil 6.24).



Şekil 6.24. Mert'in bilinmeyen sayı yerine çeşitli simgesel temsilleri kullanımı

Öğrencilerin çözümlerinin bitmesi sonrasında öğretmen, kontrol etme aşamasında şeker kutuları arasındaki artma ve azalma ilişkisini ellerini kullanarak göstermiş ve

jestleri içeren bu gösterimin resimsel bir temsiline çizimini yapmıştır. Bu temsillerin ardından öğrencilerin aradaki ilişkiyi anladıkları ve onların da değişimi benzer şekilde jestler kullanarak göstermeye çalıştığı görülmüştür (Şekil 6.25). Görselleştirmenin öğretimini içeren bu aşamada jestlerin kullanımı öğrencilerin şeker sayıları arasındaki değişim ilişkisini daha iyi anlamalarını sağlamıştır.



Şekil 6.25. Öğretmenin ellerini kullanarak değişimi anlatması ve bunu çizerek görselleştirmesi (solda ve ortada) ile Kenan'ın değişimi elleriyle göstermesi (sağda)

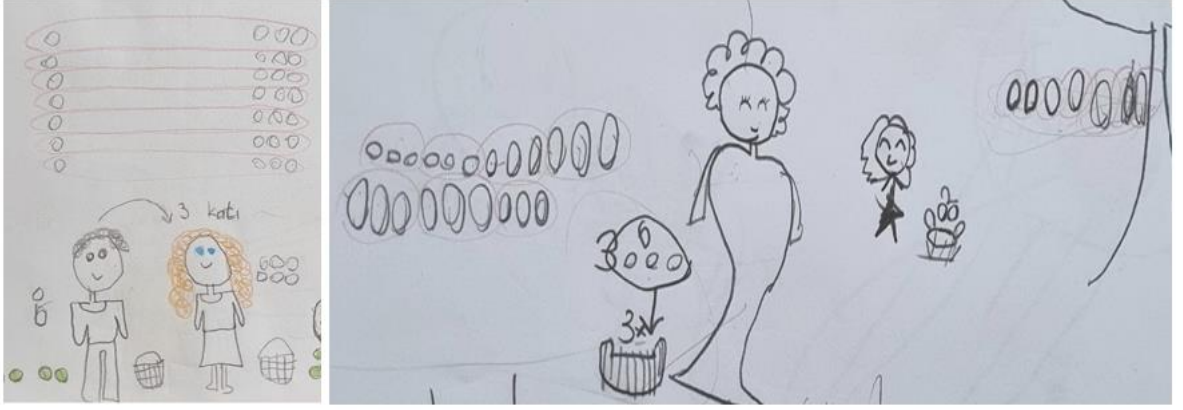
Uygulamanın 12. seansında, kat ilişkisi içeren erik toplama probleminde öğrencilerin 3 kat ilişkisini göstermekte zorlandıkları görülmüştür. Resimsel temsillerinde kat ilişkisini en basit haliyle göstermek yerine (1'e 3 olacak şekilde) daha büyük sayılarla göstermeyi tercih etmişlerdir; Mert 3'e 9 şeklinde gösterirken, Arzu ve Kenan 5'e 15 şeklinde göstermiştir (Şekil 6.26). En basit ilişkiden başlamadan düşünmeleri, aradaki ilişki korunarak artışın nasıl olacağını anlamalarını zorlaştırmıştır.



Şekil 6.26. Öğrencilerin 3 kat ilişkisini gösterme şekilleri (soldan sağa sırayla Mert'in, Arzu'nun ve Kenan'ın resimleri)

Problem: Arya ve bir arkadaşı erik toplamaya karar verirler. Arya'nın topladığı erik sayısı arkadaşının topladıklarının 3 katı kadardır. İkisi toplamda 28 erik topladığına göre Arya kaç tane erik toplamıştır?

En basit birim ilişkiden başlamadıkları için toplamaları olan 28 sayısı verilince tahmin etme ve deneme yanılma yoluna gitmişlerdir. Arzu, 3 katı ifadesinden hareketle toplamalarının bir sayının 3 katı olacağını düşünerek başlamıştır ve düşüncelerini dilsel temsille şu şekilde ifade etmiştir: *“Şimdi bunun içindeki bütün sayıları deneyeceğiz... Şimdi burada bütün olabilecek sayıları denedim. Mesela 8 denedim, 3’le çarptım, 28 olmadı, demek ki 8 olmayacak. Yani 28 olmadığı için... Hayır, ikisinin toplamı 28 olacak ya o yüzden. Sonra, bu sefer 9’u denedim. 9 oluyordu. Arkadaşı diyelim 9 topladı. 3 tane daha, 3 tane 9 da 28 eder. 9 kere 3, 28 etmez mi?”* devamında parmaklarıyla sayarak 9 kere 3’ün 27 ettiğini bulmuş ve bu düşüncesinden vazgeçmiştir. Derya ise kat ilişkisini başlangıçta toplamsal olarak düşünmüş, ardından toplam sayıyı 3’e bölmeye çalışmıştır ve düşüncelerini dilsel temsille şu şekilde ifade etmiştir: *“Toplam 28. Hu... Bu biraz zormuş. 28’i 3’e bölersem... Aa bir şey söyleyeceğim, tahmine gerek yok. Eğer 3 katıysa ondan 3 tane azını bulmalıyım, değil mi? Mantık olarak. Aslında çıkarma demek ama 28 diye bir şey yoktur yani. 27 var. Bu, bunun 3 azıdır.”* Ancak öğretmen tarafından resimle göstermeleri konusunda yönlendirilince 28’e ulaşana kadar sırayla erikleri uygun kat ilişkisini gösterecek şekilde resimsel temsillerle çizmişler ve böylece cevaba ulaşmışlardır. Bu süreçte Arzu resimsel temsillerine paralel olarak dilsel temsillerle de çizim yaparken düşündüğü ilişkiyi açıklamıştır: *“Burada 2 topladı, bu da 6 topladı. Bir tane daha topladı, bu yine 3 tane topladı. Yani o 1 topluyorsa, o 3 topluyor, o 1 topluyorsa, o 3 topluyor.”* Benzer şekilde Derya da resimsel temsillerini adım adım çizerken aynı zamanda dilsel temsillerle erik sayılarının nasıl değiştiğini açıklamıştır: *“Arkadaşınkiler burada, Arya’nınkiler burada. 2 tane topladı. (Toplamları) Sekiz. 28’e. Üç. Dokuz. Bura 9 oldu, bura da 3 oldu. 9’la 3’ü toplarsam 12 eder. Bu bir tane 3 daha toplansın, bu 1 tane daha toplansın. Burası 12 oldu, 12’yle de 4’ü toplarsam 16 olur. Yanlış mı? 16 olur. Arya 3 tane daha erik aldığında da burası 15 erik oldu. 15’e 5 ekledim, 20 oldu. 20’ye 3 ekledim, 23, 24. 24 sayımız şimdi. Burası bir tane daha topluyor. 28 oldu şu anda toplamaları.”* Şekil 6.27’de Arzu ve Derya’nın toplam 28’e ulaşana kadar adım adım erikleri çizimleri görülmektedir. Arzu’nun ve Derya’nın başlangıçta işlemsel düşündüklerinde durumu yanlış yorumladıkları ve anlamakta zorlandıkları görülürken, resimsel temsiller ve dilsel temsiller kullanarak düşünmeye başladıklarında doğru bir şekilde ilişkiyi gösterdikleri ve sonuca ulaştıkları görülmektedir. Resimsel temsilleri sonucunda erik sayıları arasındaki niceliksel ilişkiyi doğru yorumladıkları belirlenmiştir.



Şekil 6.27. Arzu'nun (solda) ve Derya'nın (sağda) toplam 28'e ulaşana kadar adım adım erikleri çizimleri

Mert ise 3 kat ilişkisini 3'e 9 erik olacak şekilde resimsel temsille göstermenin sonrasında nasıl devam edeceğine karar vermekte zorlanmış ve toplam 28 eriği resimsel temsille yeniden çizerek bunları 3'e 9 şeklinde gruplamış ve oklarla Arya'yla arkadaşına paylaşmıştır. Kalan 4 eriği ise 1'e 3 şeklinde paylaşırma konusunda başta zorlandığı görülse de resimsel temsilini kullanarak buradaki ilişkiyi fark etmiş ve cevaba ulaşmıştır (Şekil 6.28).



Şekil 6.28. Mert'in toplam 28 eriği uygun şekilde paylaşması

Kenan ise başlangıçta resimsel temsille çizdiği beş erik ağacından erikleri topladıklarını düşünerek kat ilişkisini 5'e 15 erik olacak şekilde resimsel temsille göstermiştir. Toplamlarının 28 olacağının söylenmesi üzerine de 28 olana kadar aynı ilişkide çizmeye devam etmiş ve böylece resimsel temsilleri aracılığıyla cevaba ulaşmıştır (Şekil 6.29). Öğrencilerin başlangıçta kat ilişkisini nasıl yorumladıkları ve gösterdikleri

problemi çözme aşamasında nasıl ilerleyeceklerini de etkilemiştir. Bu süreçte kullandıkları resimsel temsiller problemi anlamalarında ve doğru cevaba ulaşmalarında önemli bir unsur olmuştur.

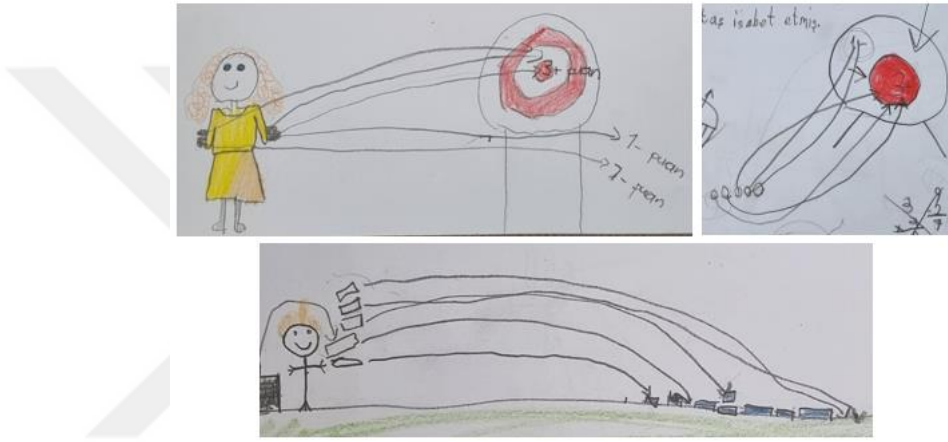


Şekil 6.29. Kenan'ın erikleri kat ilişkisine uygun ve 28'e ulaşana kadar çizimi

Tüm öğrenciler verilen 3 kat ilişkisini bir sayıyı 3'le çarpma veya bölme şeklinde bir işlem olarak yorumlamışlardır ve resimsel temsiller kullanarak çözme sonrasında doğru cevaba ulaşmışlardır. Ancak resimle yaptıkları eylemlere karşılık gelen işlemleri sembolik temsille ifade etmekte zorlanmışlar ve kontrol etme aşamasında öğretmenin yönlendirmeleri sonucu işlemleri yazabilmişlerdir. Mert cevabı yazdıktan sonra “İşlem yapmayacağım. Evet, çünkü bunu çok zor yaptım. Resimle matematik daha kolay.” diyerek işlem yapmamış ve kontrol etme aşamasında işlemleri sembolik temsille yazdıktan sonra “Evet. Kolaymış. Şimdi anladım.” diyerek problem durumundaki işlemleri anladığını ifade etmiştir.

Fonksiyonel düşünmeyi içeren taş atma probleminin yer aldığı 13. seansta öğrencilerin hepsi kazanılan 3 puanı “3+” ile kaybedilen 1 puanı ise “1-” şeklinde sembolik temsille göstermişlerdir (Şekil 6.30). Burada öğrenciler + ve – sembollerini işlem işareti olarak düşündükleri için sayılardan sonra koyarak yazmışlardır.

Diğer öğrenciler ise Mert'in dilsel temsille ifade ettiği sürecin bir benzerini resimsel temsilleri aracılığıyla düşünerek ve taşları sırayla çizerek cevaba ulaşmışlardır (Şekil 6.32). Mert'in dilsel olarak gerçekleştirdiği akıl yürütmesini diğer öğrenciler resimsel temsiller aracılığıyla gerçekleştirmiştir. Bu resimsel temsillerinde taşın isabet ettiği yerin puanını gösterdikleri sembolik temsilleri de eş zamanlı olarak kullandıkları ve ulaşılan puanı bu şekilde belirledikleri görülmektedir. Bu sayede bir taşın geldiği yere bağlı olarak alınan puanın nasıl değişeceğini resimsel temsilleri aracılığıyla göstermişlerdir.

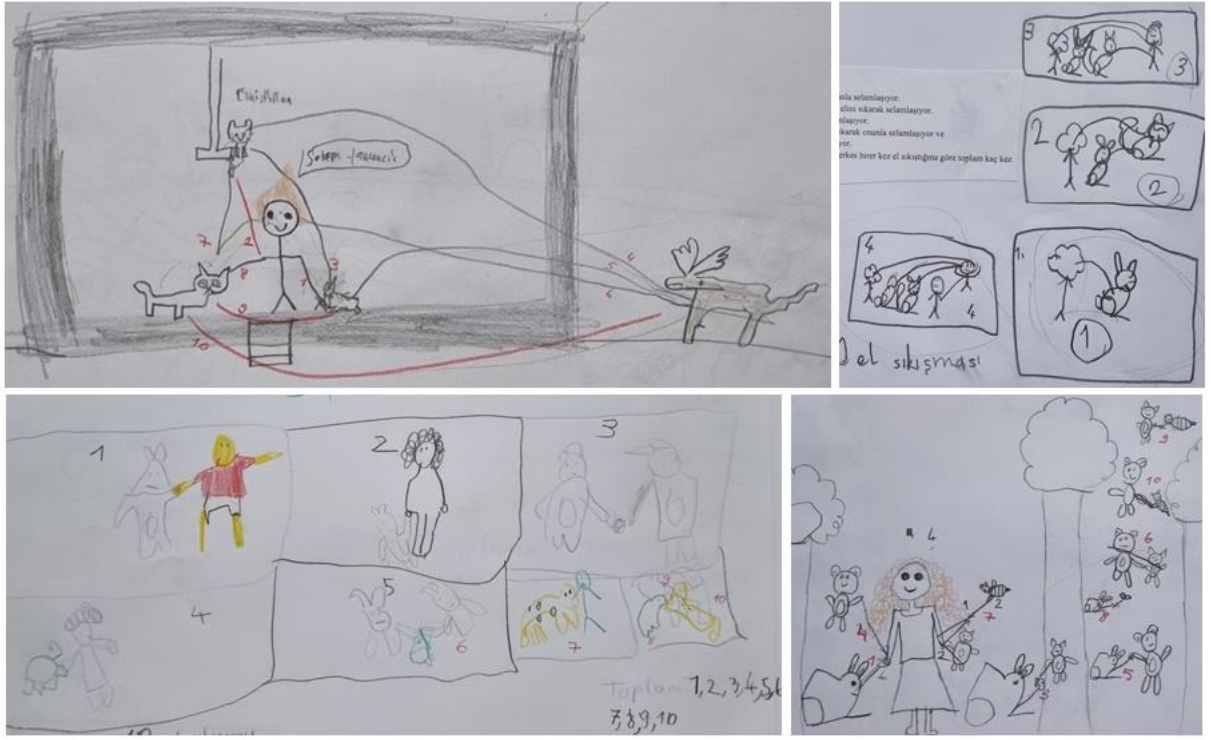


Şekil 6.32. Arzu'nun (sol üst), Derya'nın (sağ üst) ve Kenan'ın (alt) 13. seans problemini resimsel temsille çözümleri

Öğrenciler burada yer alan işlemleri sembolik temsille nasıl yazacaklarına karar vermekte zorlanmışlardır. Resimsel temsilleri üzerinde düşünmelerinin ardından, büyük oranda kontrol etme aşamasında öğretmenin açıklamaları sonrasında işlemleri sembolik temsille ifade ettikleri görülmüştür. Şekil 6.33'te sunulan sembolik temsille yazdıkları bu işlemlerin resimsel ve dilsel temsillerinde yer alan ilişkileri yansıtmakta yetersiz kaldığı görülmektedir.

Şekil 6.33. Arzu'nun (solda), Derya'nın (ortada) ve Kenan'ın (sağda) 13. seans problemini sembolik temsille çözümleri

El sıkışma problemini içeren 14. seansta öğrenciler, problemde sorulan el sıkışma sayısını kişilerin kaç kez el sıkışması şeklinde yorumlamışlardır ve herkesin beş kez el sıkışacağını düşünerek cevaplamaya çalışmışlardır. Bu düşünceleri nedeniyle hemen işleme yönelip $5 \times 5 = 25$ olacağını dilsel temsille sözlü olarak ifade etmişlerdir. Ancak el sıkışmanın, iki kişi arasında geçen bir el sıkışması şeklinde olacağının öğretmen tarafından açıklanmasının ardından el sıkışmalarını resimsel temsille göstermeye başlamışlardır. Resimsel temsillerinin ardından problem durumunu doğru anladıkları belirlenmiştir. Öğrenciler el sıkışmalarını, her gelen arkadaşı çizerek ve el sıkışanlar arasında çizgiler ile el sıkışmasını göstererek (Kenan ve Derya) veya her el sıkışması için tek tek çizerek (Mert ve Arzu) resimsel temsille göstermişlerdir (Şekil 6.34). Böylece resimsel temsilleri üzerinden el sıkışmalarını sayarak cevaba ulaşmışlardır. Mert resmi üzerinden el sıkışmalarını sözlü olarak *“Bu birinci, bu iki, bu üçüncü. Dördüncü, dört. Hepsi bir sıkışacak. Sincapla bu sıkıştı beş, kaplumbağayla tavşan sıkıştı altı oldu. Leopar geldi Arya’yla bir sıkıştı yedi oldu. Sonra hepsi, sincapla leopar sıkıştı sekiz oldu, tavşanla leopar sıkıştı dokuz oldu, kaplumbağayla leopar sıkıştı on oldu.”* şeklinde dilsel temsil kullanarak saymıştır. Derya çizimi sonrasında işlemleri sembolik temsille kendisi yazarken, diğer öğrenciler işlemlere karar verememişler ve kontrol etme aşamasında öğretmenle birlikte yazmışlardır. Sunulan problem durumunun doğru anlaşılmasında ve çözümün yapılmasında resimsel temsiller önemli bir araç olmuştur. Resimsel temsiller kullanılmadan sadece işlemsel olarak düşünmeye başladıklarında yanlış yorumladıkları, ancak çizimleri ile bağlamı doğru bir şekilde göstererek cevaba ulaştıkları görülmektedir. Aynı zamanda gelen kişi sayısına bağlı olarak el sıkışma sayısının nasıl değiştiği de resimsel temsilleri aracılığıyla görünür olmuştur. Ancak resimleri ile cevaba ulaşmaları sonrasında dahi buradaki toplama işlemlerini fark etmekte zorlanmışlardır. Bu anlamda resim çizerek problem çözmek, problem durumunu anlamalarını sağlarken, sadece işlemler ile düşünmek yanlış yorumlamalarına neden olmuştur.



Şekil 6.34. Kenan 'ın (sol üst), Derya 'nın (sağ üst), Mert 'in (sol alt) ve Arzu 'nun (sağ alt) 14. seans problemindeki el sıkışmalarını resimsel temsille çözümleri

Problem: Arya ormanda büyük bir davet düzenliyor. İlk gelen tavşan arkadaşının elini sıkarak onunla selamlaşıyor. Ardından sincap arkadaşı geliyor ve onun da elini sıkarak selamlaşıyor. Sincap, tavşanın da elini sıkarak onunla selamlaşıyor. Bu şekilde Arya her gelen arkadaşının elini sıkarak onunla selamlaşıyor ve her arkadaş da diğer arkadaşlarının elini sıkıyor. Davette Arya ile birlikte 5 kişi olduğuna ve herkes birer kez el sıkıştığına göre toplam kaç kez el sıkışılmıştır?

Adım sayılarına bağlı olarak marul toplanan problemin yer aldığı 15. seansta öğrenciler sayıları ilk duyduklarında bunların resimlerini göstermek yerine işlemleri sözlü olarak dilsel temsillerle ifade etmişler, ancak bu sayıların neyin sayısı olduğunu veya işlem sonucunda neyi bulduklarını anlamakta zorlanmışlardır. Örneğin Mert, Arya'nın attığı 3'erli adımlar ile 12 marulu birbirine karıştırarak, Arya'nın 3'erli 12 adım attığını düşünerek 4 marul toplayacağını söylemiş, sonradan 12 marul olacağını fark etse de bunu resimsel temsilde uygun şekilde göstermediği için aralarındaki ilişkiyi anlamakta zorlanmıştır. Mert'in Şekil 6.35'te sunulan resimsel temsilde Arya'nın 3 adımda bir marul topladığı, ancak bunu yalnızca 4 marula kadar devam ettirdiği ve 12 adım attığı görülmektedir. Aynı zamanda Arya'nın önünde sembolik olarak 12 yazdığı

ama bunun neyin sayısı olduğu anlaşılmadığı, daha sonra Arya'nın eline çeşitli sayıda marul çizdiği ama bunların sayısının da belirgin olmadığı görülmektedir. Devamında Mert dilsel temsille “3 gitti bir topladı, 3 gitti bir topladı, 3 gitti bir topladı, 3 oldu, 3 gitti bir topladı 4 oldu. 3 gitti bir topladı 5 oldu, 3 gitti bir topladı 6 oldu, 3 gitti bir topladı 7 oldu, 3 gitti bir topladı 8 oldu, 3 gitti bir topladı 9 oldu, 3 gitti bir topladı 10 oldu, 3 gitti bir topladı 11 oldu, 3 gitti bir topladı 12. 12 tane şey toplamış ve kaç adım attığını bulacağım. Bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi, sekiz, dokuz, on, on bir, on iki. 4 tane 3'ü çarpacağım, 12 adımda 12 şey toplamış. Bu kadar şey toplamış. Bu da 6 adım gidecek. 12 tane... Hiç anlayamadım.” şeklinde düşüncelerini ifade etmesine rağmen bunları resimsel temsille göstererek devam etmediği için neyin sayısını bulduğunu doğru yorumlayamamıştır. Söylenen sayıları resminde uygun şekilde göstermemiş olması o sayıların neyi temsil ettiğini anlamasını etkilemiştir. Dilsel temsillerle ifade ettiği ilişkiler, resimsel temsillerle desteklenerek görünür olmadığı için anlamakta zorlanmıştır. Verilen iki ayrı çokluk arasındaki niceliksel muhakemeyi içeren bu süreçte, adım sayıları ile marul sayıları arasındaki ilişkinin resimsel temsillerinde uygun şekilde gösterilmiş olması anlamalarında etkili olmuştur.

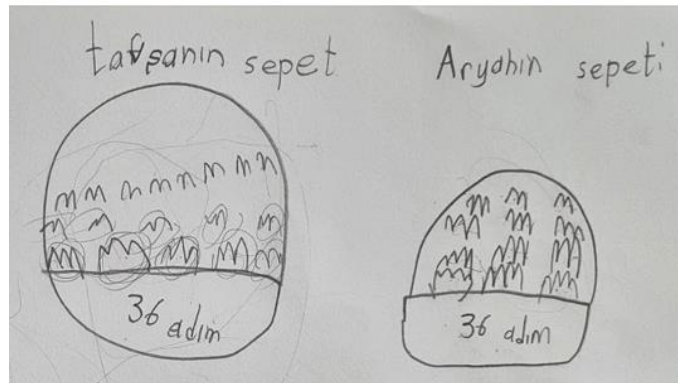


Şekil 6.35. Mert'in 15. seans probleminde adım ve marul sayılarını çizimi

Problem: Arya, arkadaşı tavşanla marul toplamaya karar verir. Arya 3 adım atıp 1 marul toplar. Tavşan ise 2 adım atıp 1 marul toplar. Arya 12 marul toplamıştır. Arya ile tavşan eşit sayıda adım attığına göre tavşan kaç marul toplamıştır?

Derya ise Arya'nın marul sayılarını bir sepete resimsel temsille çizerken adım sayısıyla ilişkilendirmemiş ve işlemsel olarak dilsel temsille ritmik sayarak adım sayısını bulmuştur. Tavşan için de benzer şekilde 36 adıma ulaşana kadar dilsel temsille 2'şerli ritmik sayarak marullarını resimsel temsille çizmiştir. Şekil 6.36'da sunulan resimsel

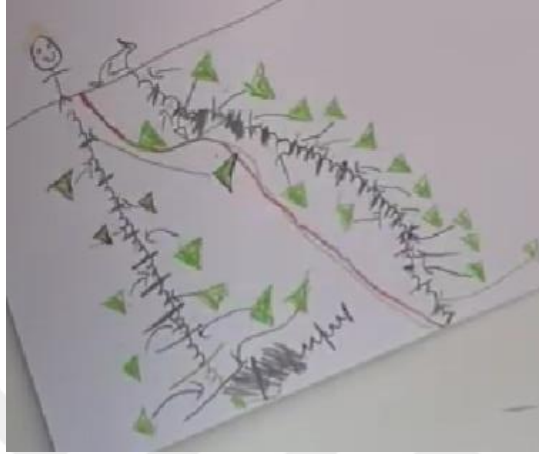
temsilinde Arya'nın 36 adım atarken 12 marul topladığı ve tavşanın da 36 adım atarken 18 marul topladığı görülmektedir. Ancak bu resimsel temsillerde marul sayıları görülürken, adım sayısını dilsel temsille yazılı olarak ifade edildiği için marul ve adım sayıları arasındaki ilişki görülmemektedir. Derya düşüncesini dilsel temsille “*Tamam, şimdi tavşan da 36 adım attı. Şimdi kaç tane marul topladığını... 2 adımda topladığı marulları çizdim. Yani 2 adım atıyor bir tane marul topluyor, 2 adım atıyor bir tane marul topluyor, 2 adım atıyor bir marul topluyor. Evet, ikişer ikişer sayarak marul çizdim. İkisi de 36 adım atıyor. Tavşan kaç tane marul topladığı işte burada. Ama ikisi 36 marul topladı. Ben marulların sayısını, adımların sayısını yapmadım. Marulların sayısını yaptım ve ikisi de eşit topladı. Kafam karıştı. Bir daha okur musunuz?*” şeklinde ifade etmiştir. İkisinin de 36 adım attığını yazmış olmasına rağmen marul sayılarını eşit olarak yaptığını düşünmüştür. Adım sayısı ile marul sayıları arasındaki ilişkiyi nasıl kurduğunu resimsel temsilde göremediği için daha sonrasında nasıl yaptığını karıştırmış ve resminde cevaba ulaşmış olmasına rağmen bunu fark etmekte zorlanmıştır. Burada kullandığı resimsel temsillerin eksik olması ve ilişkili bir şekilde çizilmemiş olması anlamakta zorlanmasına neden olmuştur. Adım sayılarına bağlı olarak marul sayısının belirlenmesini içeren bu süreçte resimsel temsillerin uygun şekilde adım ve marul sayılarının ilişkili gösterilmesi anlamalarında etkili olmuştur.



Şekil 6.36. Derya'nın 15. seans probleminde Arya'nın topladığı ve tavşanın topladığı marulları çizimi

Kenan, Arya'nın marul sayısını duyduktan sonra hemen işlemsel olarak 3 tane 12 olacağını dilsel temsille sözlü olarak ifade etmiş ancak başlangıçta 36 marul olarak ifade ettiği sayının adım sayısı olduğunu daha sonra fark etmiştir. Bu adımları ve marulları çizirken zorlanmış ve daha düzgün çizmek için farklı bir sayfada yeniden çizmek

istemiştir. Doğru sayıda çizdiğinden emin olmak için defalarca adım ve marul sayılarını saymış, ancak yine de doğru sayıda çizememiştir (Şekil 6.37). Burada resimsel temsilleri belirli bir düzende çizmemiş olması ve ilişkili olan adım ve marulları birbiriyle paralel olarak ilişkili çizmemiş olması zorlanmasına neden olmuştur.



Şekil 6.37. Kenan'ın 15. seans probleminde adım ve marulları çizimi

Benzer şekilde Arzu da adım sayılarını dilsel temsille ritmik sayma yaparak doğru bulmasına rağmen, bunları resimsel temsille çizerken eksik çizmiş ve tavşanın adımlarını buna bağlı olarak 2'şerli gruplarken cevabı yanlış bulmuştur. Tavşanın adımlarını resimsel temsille başlangıçta 34 tane olarak göstermesi nedeniyle cevabı 17 marul olarak bulduğu, ardından adım sayısı çizimini kontrol ederek eksik yaptığını fark edip düzenlediği ve cevabı 18 marul olarak düzelttiği görülmüştür (Şekil 6.38). Böylece cevabını ve işlemlerini doğru bir şekilde ifade edebilmiş ve sembolik temsille yazmıştır. Problemden verilen adım ve marul sayısının büyük olması ve çizimlerini belirli bir düzende yapmamaları nedeniyle sayıları resimsel temsille doğru bir şekilde göstermekte zorlanmışlardır. Arzu dışındaki diğer öğrenciler, öğretmen ile kontrol etme aşamasında resimsel temsillerini düzenledikten sonra işlemleri anlamlandırabilmiş ve sembolik temsille yazabilmişlerdir. Resimsel temsillerini ilişkileri gösterecek şekilde çizmedikleri zaman buradaki işlemleri sembolik temsille ifade etmekte de zorlanmışlardır.



Şekil 6.38. Arzu'nun 15. seans probleminde tavşanın adımlarını çiziminin öncesi (solda) ve sonrası (sağda)

Erken cebir problemlerini Donguri yöntemiyle çözme süreçlerinde öğrencilerin problemi anlamak için resimsel temsillerden yararlandıkları, bu resimsel temsillerini oluşturmaları sürecinde dilsel temsille akıl yürütmeler yaparak problemi çözebildikleri görülmektedir. Problem bağlamında yer alan ilişkileri resimsel temsille göstermeden yalnızca dilsel temsillerle açıkladıklarında bu ilişkileri tam olarak anlayamadıkları veya karıştırdıkları belirlenmiştir. Böylece resimsel ve dilsel temsilleri birbirini destekleyecek şekilde ortaya çıkması sonrasında buradaki ilişkileri sembolik temsille de ifade edebildikleri görülmüştür.

Donguri uygulamasının yer aldığı bu öğretim bölümünün sonunda öğrencilere resim çizerek problem çözme yöntemini nasıl buldukları sorulmuştur. Arzu “*Bence çok güzel bir yöntem, çünkü böyle mesela öğretmenler bunu yapsa çok güzel olur. Mesela bir problemi çocuklar anlamadı, çocuklara böyle çizerek göstermek.*” diyerek beğendiğini ifade etmiş ve zorlandığı bir problem olması durumunda bu yöntemi kullanmayı düşündüğünü söylemiştir. Derya ise yöntemle bayıldığını söyleyerek yöntemi kullanmayı düşündüğünü ve yöntemin beğendiği yönlerini “*Evet, yani işlemle bulamadığım zaman ilk önce şeyim o olur diye düşünüyorum. Ve asla silgi kullanmayacağım. Karalسام daha iyi olacak. Yani bu böyle de düşündüm ama sonra böyle düşündüm diye de gösterebilirim. Sınavlarda öyle yapacağım. Karalamak yerine çarpı atmak daha akıllıca.*” şeklinde ifade etmiştir. Kenan yöntemi iyi bulduğunu ve zor problemlerde kullanabileceğini söylemiştir. Mert ise yöntemin faydalı olduğunu, evde test çözerken birkaç kez kullandığını ama okulda bu tarz problemler çözmedikleri için kullanmadığını belirtmiştir.

6.3. Donguri Yöntemi Sonrasındaki Durum Belirleme Aşamasında Öğrencilerin Kullandıkları Temsiller

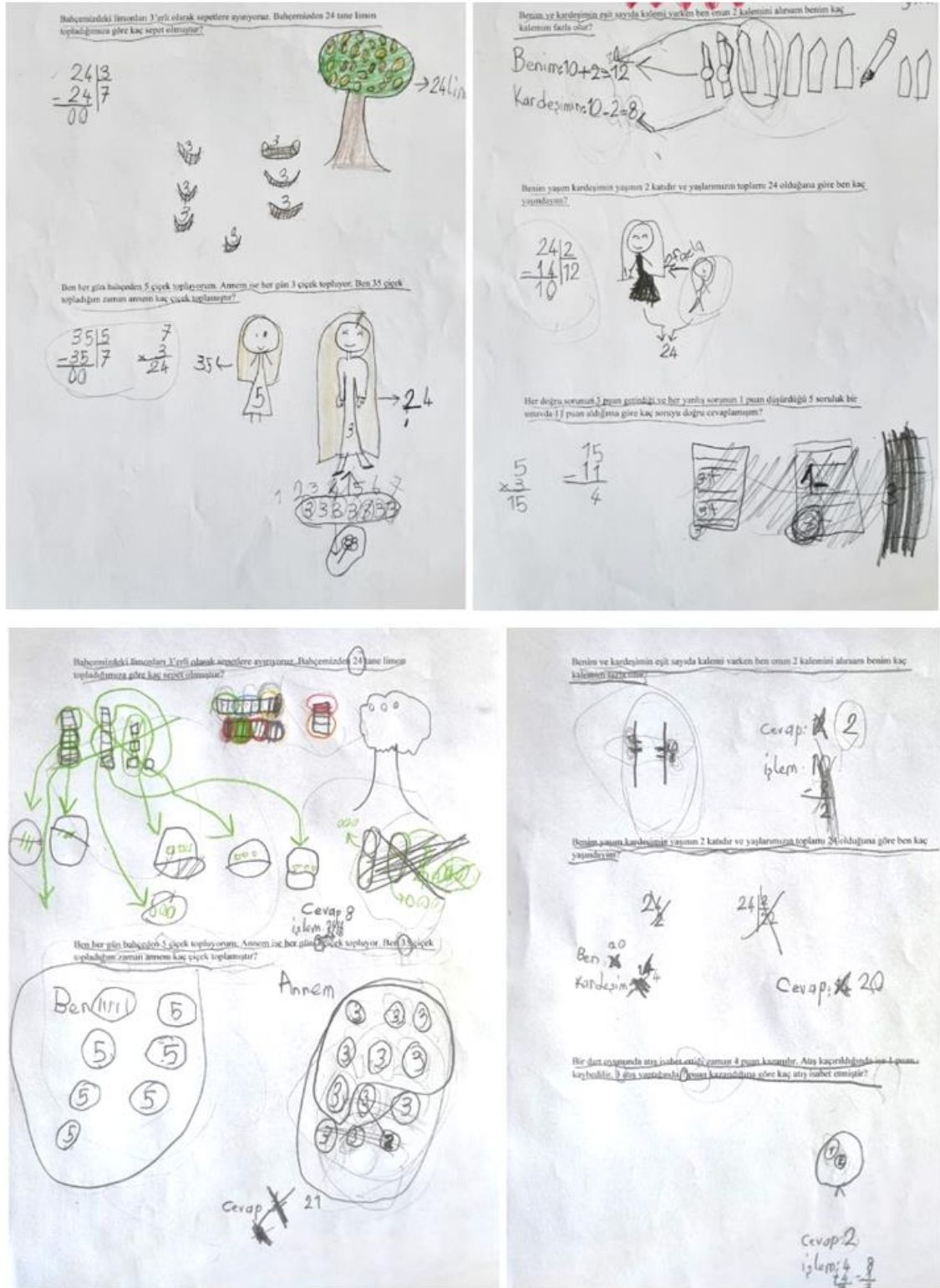
Donguri uygulamasının bitmesi sonrasında öğrencilerden durum belirleme aşamasının 3. seansında çözmeleri istenen 5 problemi 16. seansta tekrar çözmeleri istenmiştir. Böylece Donguri uygulamasının öğrencilerin problem çözme pratiklerinde bir değişime neden olup olmadığı anlaşılmaya çalışılmıştır. Buna göre Tablo 6.2’de öğrencilerin 3. seanstaki ve 16. seanstaki problemleri çözme doğrulukları karşılaştırılmıştır.

Tablo 6.2. *Uygulama sonrası öğrencilerin problemleri çözme doğruluğu*

Problemler	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mert	3. seans			+	-		-		-	+
	16. seans		+		+		+		-	+
Arzu	3. seans				+		+	-	-	+
	16. seans				+		+	+	-	+
Kenan	3. seans		-		-		+		-	+
	16. seans		+		-		+		-	+
Derya	3. seans					-	-	-	-	-
	16. seans					+	+	-	-	+

Tablo 6.2 incelendiğinde öğrencilerin 3. seansta yapamadığı belirlenen birkaç problemi 16. seansta doğru bir şekilde çözdükleri görülmektedir. 3. seansta öğrencilerin daha fazla işlem hatası yaptığı belirlenirken ve 16. seanstaki çözümlerinde kimi sayıları karıştırdıkları için (56 yerine 59 yazdıkları veya 16 yerine 18 yazdıkları için) yanlış cevaba ulaştıkları, bunun dışında çok az işlem hatası yaptıkları belirlenmiştir. Bu aşamada öğrenciler ağırlıklı olarak sembolik temsiller kullanarak problemleri çözmüşler ve somut temsil olarak değerlendirilen parmak saymayı kullanmışlardır. Derya neredeyse tüm problemleri resimsel ve simgesel temsiller kullanarak çözmeye çalışırken, Kenan 9. ve 10. problemin çözümünde, Arzu ise 8. problemin çözümünde resimsel temsil kullanmıştır. Bu anlamda zorlandıkları problem durumlarında söylemsel olmayan temsilleri kullanmayı tercih ettikleri söylenebilir. Derya 3. seansta sembolik temsille yazdığı işlemlerine göre resimsel temsiller üretirken ve resimlerini dekoratif amaçlı kullanırken, bu aşamada miktarları uygun şekilde gösteren görsel temsiller üretmiş, bu temsiller üzerine düşünerek cevaba ulaşmış ve sonrasında işlemlerini sembolik temsille yazmıştır. Şekil 6.39’da Derya’nın 3. seans ve 16. seansta problemleri çözerken

kullandığı temsilleri görülmektedir. Derya'nın 16. seansta yaptığı resimleri incelendiğinde 24 sayısını 2 onluk 4 birlik şeklinde simgesel olarak temsil ettiği, bunlardan 3'ler çıkararak bölme işlemini resimsel temsiller aracılığıyla yaptığı ve sonuca ulaştığı görülmektedir. Benzer şekilde 5'er çiçek toplayarak 35'e ulaşmak için 7 tane 5 olması gerektiğini simgesel ve dilsel temsille bulmuş, bunların gün sayısını ifade ettiğini fark edip annesi için de aynı sayıda 3 olacağını yine simgesel ve dilsel temsille belirleyerek cevaba ulaşmıştır. Ancak bu problemin çözümünde miktarları simgesel temsiller yerine dilsel temsiller ile gösterdiği için başlangıçta neyin sayısını göstereceğini karıştırmış, annesi için de 35'e kadar 3'ler yazmıştır. Bu nedenle başlangıçta yanlış bulduğu sonucu, problemi tekrar okuduğunda fark edip düzenlemiştir. Buradaki işlemlerini sembolik temsille yazmamış sadece somut temsilleri üzerinde düşünmüştür. Eşit sayıda şeker problemini ise Donguri uygulaması esnasında kullandığı simgesel çizgi temsili ile göstermiştir. Bu çizgi temsilinde şeker sayılarına istediği bir değeri vererek değişimleri doğru göstermiş, ancak işlemleri sembolik temsille yazarken yanlış yorumladığı için doğru cevaba ulaşamamıştır. Bu aşamada Derya resim çizmeyi ve görsel temsiller üretmeyi bir problem çözme aracı olarak kullanmıştır. Ancak görsel temsillerinde nispeten daha soyut temsiller kullandığı görülmektedir. Ayrıca Donguri yönteminde uygulanan cevap ve işlem şeklinde yazmayı da kullanmıştır. Donguri yönteminin uygulanmasının öğrencilerin problemleri çözmelerinde olumlu bir değişim yarattığı söylenebilir.



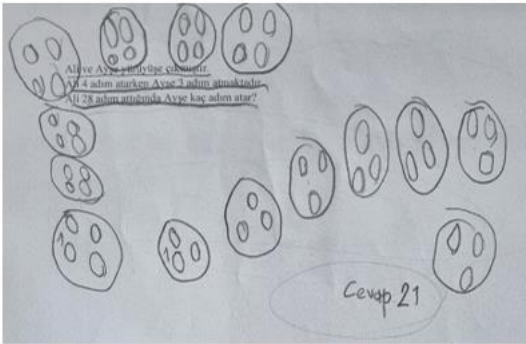
Şekil 6.39. Derya'nın 3. seanstaki (üstte) ve 16. seanstaki (altta) problemleri çözerken kullandığı temsiller

Tablo 6.2 incelendiğinde öğrencilerin en çok zorlandığı problemin kat problemini içeren 9. problem olduğu görülmektedir. Bu problemde yer alan kat ilişkisini anlamakta zorlanmışlardır. Bu problemde verilen 3 kat ilişkisini, bir sayıyı 3 ile çarpmaları gerektiği şeklinde yorumlamışlardır. Bu nedenle verilen toplam sayıyı da 3'e bölmeyi düşünmüşlerdir. Bu problemin çözümünde Kenan sembolik temsille ifade ettiği denklem kurmaktan yararlanmıştır. Benzer bir problemin sunulduğu 1. seansta, babasından öğrendiğini ifade ettiği denklem kurma yöntemini kullanarak problemi sembolik temsille doğru bir şekilde çözmüştür (Şekil 6.4). Bu seansta da benzer yöntemleri kullanarak sembolik temsille doğru denklemleri kurmasına rağmen bu denklemleri kullanamamış ve problemi doğru bir şekilde çözememiştir (Şekil 6.40). Denklemden kullandığı A ve B ifadelerinin arkadaşın A'sı ve benin B'si şeklinde baş harfler olduğunu söylemiştir. Bu kullanım Şekil 6.4'te sunulan önceki denklem çözümünde de görülmektedir. Problemi öğretmene anlatması sonrasında, öğretmen resim çizerek çözebilir misin diye sormuş ve bunun üzerine boş bir sayfaya 36 tane simgesel temsille kutu çizmiş ve bunları 3 onluk 6 birlik şeklinde dilsel temsille belirtmiştir. Ancak bu simgesel temsilleri problemi çözmekte kullanamamış ve bu şekilde bırakmıştır. Kenan'ın denklem kurmayı ezbere bir şekilde öğrendiği, ilişkileri sembolik olarak göstermenin yanında bu ilişkileri nasıl kullanacağını ve denklem çözmenin mantığını yeteri kadar içselleştirmediği söylenebilir.

Şekil 6.40. Kenan'ın 16. seanstaki 9. problemi çözümü

Uygulamanın bitmesinden 6 hafta sonra öğrencilerle bir görüşme daha yapılmıştır. Bu seansta öğrencilere Donguri yönteminde sorulan erken cebir problemlerine benzer problemler hazırlanarak sorulmuştur (EK-2 4. Aşama Problemleri). Öğrencilerin, istedikleri şekilde çözmeleri söylenen bu problemlerde büyük oranda görsel temsiller

sında bunu fark edip simgesel temsille gösterdiği adım sayılarını düzenlemiştir. Bu aşamada sembolik temsille yazdığı önceki işlemlerinin yanlış olduğunu görmüş ve görsel temsillerini tekrar yaparken $45 \div 5$ işleminin sonucunun 9 olduğunu görmüş, buna göre görsel temsille çizdiğinde cevabının yanlış olduğunu görmüş, sonrasında cevabını 9 olacak şekilde yeniden düzenlemiştir.



temsillere örnekler (Üstte Arzu ve Kenan'ın, altta Derya ve Mert'in çözümleri)

Görsel temsilleri kısmen daha az kullanan Kenan ise daha sezgisel bir şekilde problemleri çözerken işlemleri sembolik temsille yazmamış ve parmak saymayı daha çok kullanmıştır. Problemleri dilsel temsille anlatma esnasında kimi işlemlerin aklına geldiğini söyleyip bunları sembolik temsille eklemiştir, zihninde işlemlerin canlandığını bu nedenle yazma ihtiyacı hissetmediğini belirtmiştir. Problemi anlamadıklarını söyledikleri kat probleminde ise hiç görsel temsil çizmeyi düşünmediklerini, çünkü anlamadıkları için zihinlerinde bir şey canlanmadığını, bu nedenle ne çizeceklerine karar veremediklerini ifade etmişlerdir. Kat problemini doğru yapan tek öğrenci Kenan olmuştur. O da başlangıçta hiçbir işlemi sembolik temsille yazmamış ve parmaklarıyla sayarak cevabı bulmuştur. Daha sonra problemi nasıl yaptığını dilsel temsille açıklarken işlemler aklına gelmiş ve *“Tam olarak hangi sayının 3 katıyla 1 katının toplamı 32 ediyor. 3 kat artı 1 kat eşittir 32. 3 kat artı 1 kat şöyle 4 kat. Hangi sayının 4 katı 32 olabilir diye düşünmüştüm. Aklıma yeni bir tane yöntem geldi. 32, 4 katı... 8. 8 kere 4. Şey aslında şimdi aklıma geldi. Önceden aklıma gelmemişti... Şey 8 kere 3, 24. 24 şey hangi sayının 3'le çarpıldığı ile 1 katı 32 eder diye düşünmüştüm. Burada 8 bulmuştum cevabı. 8 arkadaşını. Şimdi bunu Meltem'in olması için 8'i 3'le çarpmalıyız. 8'i 3'le çarparsak 24 çıkar. Cevabımız 24.”* şeklinde açıklarken işlemlerini de sembolik temsille yazmıştır. Bu anlamda Kenan dilsel temsil kullanarak problemi çözmüştür. Ayrıca daha önceki seanslarda zorlandıkları belirlenen eşit şeker kutusu problemini bu seansta tüm öğrenciler resimsel temsil ile göstermiş ve doğru bir şekilde cevaba ulaşmışlardır. Aradaki farkın değişim miktarının iki katı olacağını ifade etmişlerdir. Son aşamada yer alan bu problem çözme sürecinde öğrencilerin söylemsel olmayan resimsel ve simgesel temsilleri yoğun bir şekilde kullandıkları, bunları kullanırken dilsel temsillerden yararlanırken sembolik temsillere gerek duymadıkları görülmektedir. Öğrenciler bu aşamada görsel temsillerle çizmeyi bir problem çözme aracı olarak kullanmışlardır. Donguri yönteminin uygulanmasından sonra 6 hafta gibi bir süre geçmiş olmasına rağmen öğrencilere sunulan erken cebir problemlerinde resim çizerek problem çözme yöntemini kullandıkları belirlenmiştir. Bu anlamda öğrencilerin Donguri yöntemini öğrendikten sonra hemen unutmadıkları ve kullanmaya devam ettikleri söylenebilir.

Çalışmanın sonunda öğrencilere resim çizerek problem çözme yöntemini geçtiğimiz süreçte okulda veya okul dışı bir ortamda kullanıp kullanmadıkları sorulmuştur. Bu soruya Arzu *“Mesela beynimde canlandırarak iki üç kez kullanmıştım.”*

şeklinde cevap vermiş ve genelde çözdükleri problemlerin buradaki gibi olmadığını ve bu kadar yer olmadığı için de pek çizim yapmadığını belirtmiştir. Derya ise problem çözerken işlemlerin zihninde canlandığını ve bu nedenle resim çizmeye hiç ihtiyaç duymadığını belirtmiştir. Kenan, problemler zor olduğunda biraz çizdiğini ama yeterli yer olmadığı ve zaman kaybı olacağını düşündüğü için pek kullanmadığını ifade etmiştir. Mert ise problemleri çözerken birkaç kez kullandığını ve ara ara kullanmaya devam ettiğini söylemiş ancak yer olmadığı için küçük çizdiğini belirtmiştir.

6.4. Öğrencilerin Problemlerin Çözümünde Kullandıkları Temsillerle Soyutlamanın Gelişimi

Çalışma boyunca öğrencilerin problemleri çözme sürecinde kullandıkları temsiller onların zihinlerindeki soyutlama sürecinin bir yansımasını sunmaktadır. Öğrencilerin zihinlerinde gerçekleşen bu soyutlama gelişiminin temsiller aracılığıyla nasıl gerçekleştiğinin derinlemesine incelenmesi amacıyla, bir öğrencinin benzer içeriğe sahip problem durumunu uygulamanın başından sonuna kadar hangi temsilleri kullanarak nasıl çözdüğü analiz edilmiştir. Bu amaçla öğrencilerin özellikle çözmekte zorlandığı veya farklı yollarla çözdükleri bir aritmetik ve bir erken cebir problemi belirlenmiştir. Seçilen bu problemleri uygulama boyunca çeşitli şekillerde çözmeye çalıştığı belirlenen bir öğrencinin kullandığı temsiller üzerinden soyutlamanın gelişimi incelenmiştir. Aritmetik probleminin çözümünde kullandığı temsil çeşitliliği yönünden bir öğrencinin yaklaşımı daha farklı olurken, erken cebir probleminde farklı bir öğrencinin yaklaşımı dikkat çekmiştir. Bu nedenle iki ayrı problem durumu için iki ayrı öğrencinin çözümleri incelemeye alınmıştır. Buna göre elde edilen bulgular, aritmetik probleminin çözümünde kullanılan temsillerle soyutlamanın gelişimi ve erken cebir probleminin çözümünde kullanılan temsillerle soyutlamanın gelişimi başlıkları altında sunulmaktadır.

6.4.1. Aritmetik probleminin çözümünde kullanılan temsillerle soyutlamanın gelişimi

Her öğrencinin her problemi çözme süreci farklılık göstermekle birlikte, aritmetik problemlerinin çözüm sürecinde öğrenciler benzer yaklaşımlar göstermişlerdir. Bu nedenle bir öğrencinin yalnızca bir aritmetik problemini uygulama boyunca çözme sürecinde kullandığı temsiller üzerinden soyutlamanın gelişimi incelenmiştir. Bu amaçla durum belirleme aşamasında öğrencilerin en çok zorlandıkları 5. aritmetik problemi ele

alınmıştır. Diğer aritmetik problemlerinden farklı bir yaklaşımla problemi çözdüğü belirlenen Arzu'nun bu problemin benzer içeriğe sahip paralel problemlerini uygulamanın her aşamasında nasıl çözdüğü incelenmiştir. Buna göre durum belirleme aşamalarında ve Donguri yönteminin uygulandığı aşamada bu problemin çözümünde kullandığı temsiller sırayla analiz edilmiştir.

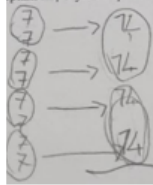
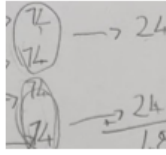
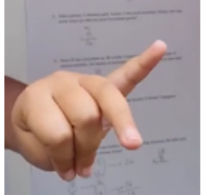
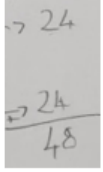
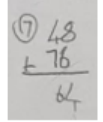
Arzu'nun 1. durum belirleme aşamasındaki 5. problemi çözümünün analizi Şekil 6.42'de sunulmaktadır. Buna göre Arzu'nun problemi okuduktan sonra doğrudan sembolik temsiller ile işlemleri yazdığı görülmektedir (1-2. adımlar). Yaptıklarını açıklamasının istenmesi aşamasında problem cümlesini okumuş ve ardından yaptığı işlemleri açıklayan dilsel temsiller kullanmıştır (3. adım). Bu dilsel temsille yaptığı açıklamalar, sembolik temsille yaptığı işlemlerin nedenini ve anlamını göstermektedir. Bu aşamada yalnızca söylemsel olan temsilleri kullanmıştır. Soyut temsiller kullanarak problemi doğru bir şekilde çözmüş ve bunların anlamını somut dilsel temsillerle görünür kılmıştır. Problemi çözmesinde yalnızca soyut temsiller kullandığı belirlenmiştir.

	Söylemsel	Söylemsel Olmayan
Somit	(Çözümü anlatırken) Bahçemizde on fidan var ve her gün beş fidan dikersem bir hafta sonra bahçemizde kaç fidan olur? ③ Yani her gün, zaten her gün beş fidan dikmiş bir hafta boyunca. Bir hafta yedi gün, otuz beş tane fidan dikmiş. On tane varmış zaten. Otuz beş tane dikmiş, kırk beş olmuş.	
Soyut	① $7 \times 5 = 35$ ② $\begin{array}{r} 10 \\ + 35 \\ \hline 45 \end{array}$	

Şekil 6.42. Arzu'nun 1. durum belirleme aşamasında 5. problemi çözümü

Problem: Bahçemizde 10 fidan var ve her gün 5 fidan dikersem bir hafta sonra bahçemizde kaç fidan olur?

Arzu'nun 2. durum belirleme aşamasında benzer içeriğe sahip 5. problemi çözümünün analizi Şekil 6.43'te sunulmaktadır. Bu çözüm incelendiğinde, Arzu'nun çarpma işlemini öncelikle sembolik olarak yapmak yerine sayıları dilsel temsille yazarak, tekrarlı toplama şeklinde hesapladığı görülmektedir (1-3. adımlar). 7 kere 8 çarpma işlemini gösterirken, 8 tane 7 yazmış, bu 7'leri ikişerli toplayarak 4 tane 14 bulmuş ve bu 14'lerin toplamını 24 olarak yazmıştır. Problemi çözümünü anlatması esnasında da görüleceği gibi burada çarpma işleminin sonucunu önceden bilmediği ve çarpılan sayıları ritmik olarak saymayı bilmediği için bu şekilde tekrarlı toplama olarak çarpma işlemini ifade etmiştir (8-9. adımlar). Ancak, bu toplama işlemleri esnasında bir işlem hatası yapmış ve bu nedenle sonucunu yanlış bulmuştur. Bu işlem hatasını, anlatırken de fark etmemiş ve öğretmenin sorması sonrasında yanlış olduğunu fark etmiştir (10. adım). Daha sonraki toplama işlemini de bu sonuca göre yapmıştır ve bu toplama işlemi esnasında parmaklarını sayarak sonucu hesaplamıştır. Bu problemin çözümünde öğrencinin verilen çarpma işleminin sonucunu bilmiyor olması nedeniyle öncelikle somut dilsel temsillerden yararlanarak işlemi yaptığı görülmektedir. Sembolik temsille işlemleri ifade etmesi aşamasında ise somut temsil olarak değerlendirilen parmak saymayı kullanmıştır. Bu problemin çözümünde öncelikle somut temsillerle başladığı, bunların ardından soyut temsillere geçiş yaptığı görülmektedir.

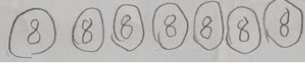
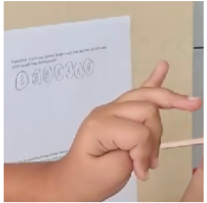
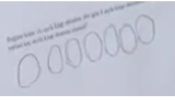
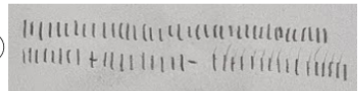
	Söylemsel	Söylemsel Olmayan
Somut	①  ②  ③  ⑦ (Çözümü anlatırken) Buraya çok fazla gereksiz işlem yaptım. ⑧ Bugüne kadar 16 sayfa kitap okudum. Her gün 8 sayfa kitap okuyorum. Bir hafta sonra toplam kaç sayfa kitap okumuş olurum? Ben böyle 8'er 8'er, 7'şer saymayı bilmediğim için çarpma işlemi yapmadım. ⑨ Bir hafta 7 gün ya, 8 tane 7 var burada. Yani 8 tane 7. Aa ben, tamam işte 8 tane 7. Çarpma yapmadım, böyle kısa kısa toplayarak gittim. ⑩ Burada 8 tane 7 var. Bu ikisi 14 ediyor. Bu ikisi de 14 ediyor. Bu ikisi de 14 ediyor. Ondan sonra bu 14'le bu 14, 24 ediyor, bu 14'le bu 14, 24 ediyor. 24'le 24 de 48 eder. (14'le 14'ü toplarsak 24 mü eder?) Ay pardon, o 12'yeydi di mi? Yani baştan silip yapmam lazım. ⑪ Sonra, bir hafta sonra toplam dediği için, e bir haftada bu kadar okumuş, diğer haftada bu kadar okumuş, yani toplam bu kadar okumuş.	⑥  (Parmak sayarak sonucu bulur)
Soyut	④  ⑤ 	

Şekil 6.43. Arzu'nun 2. durum belirleme aşamasında 5. problemi çözümü

Problem: Bugüne kadar 16 sayfa kitap okudum. Her gün 8 sayfa kitap okuyorum. Bir hafta sonra toplam kaç sayfa kitap okumuş olurum?

Aynı problemi bu kez resim çizerek çözmesinin istendiği 3. durum belirleme aşamasındaki çözümü Şekil 6.44'te sunulmaktadır. Bu çözümünde 7 kere 8 işlemini,

simgesel temsille 7 tane yuvarlak çizip içlerine dilsel temsille 8 yazarak gösterdiği, bu işlemi parmak saymayı kullanarak hesapladığı ve işlemin sonucunu sembolik temsille yazdığı görülmektedir (1-4. adımlar). Problemi resim çizerek çözmesinin istenmesi nedeniyle çarpma işlemini sembolik temsille yazmayı tercih etmediği, bunun yerine simgesel, dilsel ve sembolik temsilleri eş zamanlı kullanarak işlemi yaptığı görülmektedir. Ancak bu temsil çeşitleri çarpma işleminin anlamını tam olarak yansıtmamakla birlikte işlemin sonucunu bulmasında da yararlı olmamıştır. Çünkü işlemin sonucunu yine parmak saymayı kullanarak bulmuştur. Ardından gelen 56 ile 16'yı toplama işlemini ise bu sayılar kadar küçük çizgiler çizerek simgesel temsille gösterdiği ve 56'nın üzerine 16 çizgiyi sayarak toplamının sonucunu 72 olarak bulup bunu sembolik temsille yazdığı görülmektedir (5-6. adımlar). Problemin cevabını bu temsilleri kullanarak doğru bir şekilde bulmuştur. Bu problemin çözümünde soyut temsilleri daha ağırlıklı kullandığı, soyut simgesel temsilleri kullanarak işlemleri gösterdiği ve işlemlerin sonuçlarını soyut sembolik temsille yazdığı görülmektedir. Somut dilsel temsiller ise bu soyut temsillerin bir açıklaması niteliğinde ortaya çıkmıştır.

	Söylemsel	Söylemsel Olmayan
Somut	②  (Çözümü anlatırken) Bugüne kadar 16 sayfa kitap okudum. Her gün 8 sayfa kitap okuyorum. Bir hafta sonra toplam kaç sayfa kitap okumuş olurum? Demiş. Yani bir hafta 7 gün, yani 7 tane yuvarlak çizdim. Her gün 8, bunları gün olarak düşünürsek, 8, 8, 8, 8, öyle 56 sayfa kitap okumuş. Ondandan sonra 56'yla da şeyi topladım, 16'yı topladım. Ondandan sonra da böyle aralarına tire koydum karışmasını diye. 16'yı da buraya şey yaptım, toplam 72 sayfa kitap okumuştur. ⑦	③  (Parmaklarıyla sayar)
Soyut	④  ⑥ 	①  ⑤  (Çizgileri sayar)

Şekil 6.44. Arzu'nun 3. durum belirleme aşamasında 5. problemi çözümü

Problem: Bugüne kadar 16 sayfa kitap okudum. Her gün 8 sayfa kitap okuyorum. Bir hafta sonra toplam kaç sayfa kitap okumuş olurum?

Yukarıda sunulan problemin paraleli olarak sunulan ve öğretim bölümünde Donguri yöntemini kullanarak çözülmesi istenen problemi Arzu'nun çözümü Şekil 6.45'te sunulmaktadır. Bu çözüm incelendiğinde, öncelikle resimsel temsillerle her gün toplanan 6 çiçeği ve daha önce topladığı 12 çiçeği gösterdiği görülmektedir (1-4. adımlar). Daha sonra yedi gün boyunca kaç çiçek topladığının sorulması üzerine toplanan tüm çiçekleri çizmeden önce işlemini yapmayı sormuş, ancak işlemle yapmak yerine çiçekleri tek tek resimsel temsille çizmiş ve bunları sayarak sonuca ulaşmıştır (5-8. adımlar). Bu aşamada önceden toplanan 12 çiçeği çizmiş olmasına rağmen onları eklemeyi unutmuş ve cevabını eksik olarak yazmıştır. Resimsel temsille gerçekleştirdiği bu işlemi daha sonra sembolik temsille hem çarpma işlemi hem de tekrarlı toplama işlemi olarak ifade etmiştir (9. adım).

Kontrol etme aşamasında problemin tekrar okunmasıyla 12 çiçeği eklemeyi unuttuğunu fark etmiş ve bu çiçekleri de bulduğu toplamın üzerine sayarak cevabı yazmıştır (10-12. adımlar). Ardından bu üzerine sayma işlemini sembolik temsille toplama işlemi olarak yazmıştır (13-14. adımlar). Bu çözümünde problemde yer alan işlemleri somut resimsel temsiller aracılığıyla gösterip cevaba ulaşırken, soyut sembolik temsilleri bu işlemlerin matematiksel birer ifadesi olarak sonradan kullanmıştır. Bu anlamda Donguri yöntemini kullanarak problemi çözerken öncelikle somut temsiller ile problemi çözmüş, ardından soyut temsillere geçiş yapmıştır.



	Söylemsel	Söylemsel Olmayan
Somut	Kabak çiçeği... ① Böyle büyük, yaprakları uzun gibi, ayçiçeğine benziyor gibi... ④ Buket buket çiziyorum buraya da. Üç, altı, dokuz, on iki. ⑥ Resmini çizicek miyim bunlardan yedi tane daha yoksa direkt işlemi mi yapayım? Tamam, bitti. Şimdi cevap... ⑧ Bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi, sekiz, dokuz, on, ... , kırk iki. Cevap = 42 kabak çiçeği (Kontrol ederken) ⑩ Tekrar cevap yazalım. ⑫ Cevap = 54 kabak çiçeği İşlem de yapacağım. ⑬ Şöyle, bunlar kırk ikiydi, bunları da ekledim, yani bunları da üzerine saydım kırk ikinin, elli dört buldum.	②  ③  ⑤  ⑦  ⑪ 42'nin üzerine 12 çiçeği daha sayar.
Soyut	⑨ İşlem = $7 \times 6 = 42$ ⑭ İşlem = $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 42$ İşlem = $7 \times 6 = 42$ 42 + 12 54	

Şekil 6.45. Arzu'nun öğretim bölümü aşamasında paralel problemi Donguri yöntemiyle çözümü

Problem: Arya, her sabah açan kabak çiçeklerinden toplamak ister. Arya, bu zamana kadar 12 tane kabak çiçeği toplamıştır. Her sabah bahçesinde 6 yeni kabak çiçeği açmaktadır. Buna göre bir hafta sonra toplam kaç tane kabak çiçeği toplamış olur?

Donguri yönteminin uygulanması sonrasında 4. durum belirleme aşaması olarak gerçekleştirilen 16. seansta aynı problemi tekrar çözmeleri istenmiştir. Bu aşamada

Arzu'nun bu problemi çözümü Şekil 6.46'da sunulmaktadır. Bu çözümünde 7×8 işlemini sembolik temsille yazarak başladığı, ancak çarpma işlemini yine tekrarlı toplama şeklinde 7 tane 8'i alt alta yazarak bulmaya çalıştığı görülmektedir (1-2. adımlar). Bu toplama esnasında dilsel temsille 8'leri ikişerli toplayarak gittiği, ikişerli grupları yaparken 8 tane 8 varmış gibi düşünerek toplamanın sonucunu 64 bulduğu görülmektedir (3. adım). Ardından parmaklarıyla 8'er 8'er sayarak kontrol etmiş ve sonucu 56 olarak değiştirmiştir (4-5. adımlar). Çarpma işleminin sonucunu da bu şekilde bularak yazmıştır. Sonrasında önceki okuduğu kitap sayısını sembolik temsille eklemiş, ancak burada 16 sayfa yerine 18 olduğunu düşünmüş, işlemin sonucunu parmak sayarak hesaplamış ama cevabını yanlış bulmuştur (6-7. adımlar). Problemi anlatma esnasında sayıları yanlış yazdığını fark edip yeniden düzenlemiştir (8-9. adımlar). Bu aşamada birbirine benzettiği sayıları yazarken karıştırdığını ifade etmiştir. Bu problemin çözümünde Arzu'nun işlemleri sembolik temsiller ağırlıklı yazdığı, bu işlemlerin sonucunu hesaplarken de parmak saymayı kullandığı görülmektedir. Bu anlamda soyut temsiller ile başlayıp, işlemleri hesaplama esnasında somut temsillerden destek aldığı belirlenmiştir.

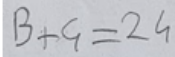
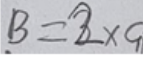
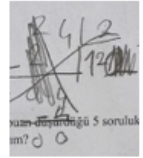
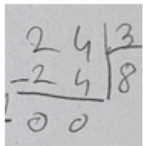
destekleyecek şekilde dilsel temsiller kullandığı ya da parmak sayma eylemi ile somut resimsel temsillere geçiş yaptığı görülmektedir. Donguri yönteminin uygulanması dışındaki tüm problem çözme sürecinde önce soyut temsillerden başlandığı ardından bunları desteklemek ve açıklamak amacıyla somut temsillerin kullanıldığı belirlenmiştir. Bu süreçte soyut temsiller kullanılarak çözüme başlansa da somut temsillerin desteğiyle sonuca ulaşıldığı görülmektedir. Donguri yönteminin uygulandığı süreçte ise somut resimsel temsiller kullanılarak başlanmış ve problemde yer alan işlemler resimsel temsillerle ifade edilerek sonuca ulaşılmıştır. Ardından bu işlemlerin sembolik temsillerini yazarak soyut temsillere geçiş yapıldığı görülmektedir. Diğer öğrencilerin aritmetik problemlerini çözme süreçlerinde kullandıkları temsil türlerinin benzer süreçler izlediği belirlenmiştir. Aritmetik problemlerinin çözümünde, Donguri yönteminin uygulanmadığı aşamalarda öğrenciler soyut temsiller kullanarak başlamalarına rağmen parmak sayma ve düşüncelerini açıklama gibi somut temsillerden yararlanarak sonuca ulaşırken, Donguri yönteminin uygulandığı süreçte öğrencilerin somut temsillerden başlayarak buradaki işlemleri anlamlandırması sonrasında soyut temsillerle ifade ettikleri belirlenmiştir. Her iki aşamada da somut temsillerin kullanılması sonrasında soyut temsillerin işlevsel olduğu görülmektedir.

6.4.2. Erken cebir probleminin çözümünde kullanılan temsillerle soyutlamanın gelişimi

Erken cebir problemlerinin her birinin çözüm süreci farklılıklar içermekle birlikte, öğrencilerin erken cebir problemlerini çözerken benzer yaklaşımlar gösterdiği görülmüştür. Erken cebir problemlerinin çözümünde soyutlamanın gelişiminin nasıl gerçekleştiğinin derinlemesine daha iyi anlaşılması amacıyla bir öğrencinin bir problemi uygulama boyunca çözme yaklaşımı, kullandığı temsiller üzerinden incelenmiştir. Bu süreçte öğrencilerin en çok zorlandığı belirlenen erken cebir problemi olan kat problemi incelemeye konu edilmiştir. Durum belirleme aşamalarında 9. problem olarak sunulan problemi öğrencilerin çoğu anlamakta zorlanmış ve bir çözüm yolu bulamayarak boş bırakmıştır. Bu problemi en farklı yaklaşımla çözdüğü belirlenen Kenan'ın uygulamanın başından itibaren hangi temsilleri kullanarak nasıl çözdüğü analiz edilmiştir.

Kenan'ın 1. durum belirleme aşamasında 9. problem olarak sunulan kat problemini çözümü Şekil 6.47'de sunulmaktadır. Kenan'ın problem durumunu okumasının ardından doğrudan denklem kurması gerektiğini ifade ettiği görülmektedir. Babasından

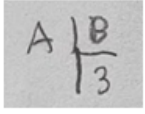
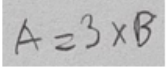
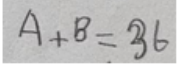
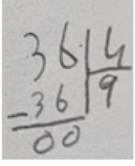
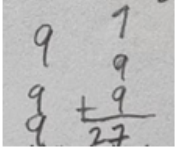
öğrendiğini ifade ettiği denklem kurmayı kullanarak problemde verilenleri doğru bir şekilde sembolik temsille yazmıştır (1-4. adımlar). Denklemleri kurarken bilinmeyen değerler yerine B ve Ç gibi harfli ifadeler kullandığı görülmektedir. Bilinmeyen bu değerler arasındaki ilişkiyi denklemlerle doğru bir şekilde ifade etmiştir. Ancak başlangıçta 2 kat ilişkisini toplamı 2'ye bölerek bulacağını düşünmüş, ardından bunun yanlış olduğunu fark edip toplam değeri 3'e bölmüştür (5-7. adımlar). Sembolik temsiller kullanarak çözdüğü bu süreçte bölme işlemini yaparken parmak saymayı kullanmış ve sonuca bu şekilde ulaşmıştır (8. adım). Çözümünü anlatma esnasında ise dilsel temsillerle düşüncelerini açıklarken cevabı eksik bulduğunu fark etmiş ve devamında dilsel temsiller kullanarak buradaki kat ilişkisini bulmuştur (10. adım). Dilsel temsille ritmik sayarak yaptığı çarpma işlemini sembolik temsille ayrıca yazmamış ve bulduğu cevabı yalnızca dilsel temsille belirtmiştir. Bu problemin çözümünde Kenan'ın soyut sembolik temsiller ile problemi çözmeye başlarken somut dilsel temsilleri kullanarak akıl yürütmeye ve işlemleri yapmaya devam ettiği görülmektedir. Soyut temsilleri ağırlıklı olarak kullanmış olsa da somut temsiller problemi çözmesinde önemli bir rol oynamıştır. Bu süreçte soyut temsillerden başlayıp somut temsillere doğru bir geçiş yaptığı belirlenmiştir.

	Söylemsel	Söylemsel Olmayan
Somut	① Bu problem için ilk önce bir tane denklem kurmamız gerekiyor. Çok iyi biliyorum. Şimdi... B artı Ç eşittir 24. Evet. ③ İki ç 24 demektir. ⑥ Ç 12'ymiş. ⑨  (Çözümü anlatırken) Benim yaşıım kardeşimin yaşının iki katıdır ve yaşlarımızın toplamı yirmi dört olduğuna göre ben kaç yaşıındayım? Ben kaç yaşıındayım, diyor. İlk önce bu problemde, bu problemi çözmemizin temel şeyi aslında bir tane denklem bulmalıyız. Babam öğretti. Şimdi, Benim ve bu da çıkan, çıkanın baş harfi. Benim yaşıım kardeşimin yaşının iki katıdır. Denklem kurdum ilk önce. B eşittir 2 tane Ç. ⑩ Kardeşinin, B eşittir iki tane Ç. B ve Ç'nin toplamı da 24 ediyor. Şimdi ilk önce bunu yaptım, fakat bu işlemi... Bu işlemi doğru, ilk önce bu işlemi yaptım, daha sonra 24'ü 3'e bölünce 8 çıkıyor. O yüzden onu yaptım. Daha sonra, Ç 8 ise o zaman, B de 3 tane 8 anlamına geliyor. Sekiz, on..., sekiz... Ç yani Ç'nin yaşı oldu. Şimdi... 8, 16, 24. 24. Dur, 8, 24, ay, 8, 16. 16. Bu Ç'nin yaşı, bu B'nin yaşı. ⑪ 	⑧  Parmaklarıyla sayar.
Soyut	②  ④  ⑤  ⑦ 	

Şekil 6.47. Kenan'ın 1. durum belirleme aşamasında 9. problemi çözümü

Problem: Benim yaşıım kardeşimin yaşının 2 katıdır ve yaşlarımızın toplamı 24 olduğuna göre ben kaç yaşıındayım?

Çalışmanın 2. durum belirleme aşamasında Kenan'ın 9. problemi çözümü Şekil 6.48'de sunulmaktadır. Bu çözüm incelendiğinde ilk olarak sembolik temsiller ile başladığı, problem durumunda sunulan ilişkileri denklem kurarak doğru bir şekilde ifade ettiği görülmektedir (1-3. adımlar). Problemin çözümünde sembolik temsilleri ağırlıklı olarak kullanmış ve bu temsillerle ifade ettiği işlemlerin sonucunu bulma esnasında parmak saymadan yararlanmıştır (4-6. adımlar). Problemi çözmeyi bitirdiğini düşündükten sonra da bir para resmi çizmiştir, ancak dekoratif amaçlı çizilen bu resimsel temsilin problemi çözmesinde herhangi bir etkisinin olmadığı görülmektedir (8. adım). Problemi anlatma esnasında ise dilsel temsille işlemlerini açıklarken daha önce yaptığı sembolik işlemlerle bulduğu sonucun eksik olduğunu fark etmiş ve devamındaki çarpma işlemini toplamsal olarak sembolik temsille yazarken, sonucunu dilsel temsille ritmik sayarak bulmuştur (9-12. adımlar). Bu çözümünde soyut temsillerle problemi çözmeye başladığı, ardından somut temsilleri kullanarak cevaba ulaştığı görülmektedir. Bu problemi ilk iki seanstaki çözümlerinin birbirine benzer olduğu söylenebilir. Soyut temsillerle problemi çözmeye başlarken somut temsillere geçiş yaparak problemi çözmüştür.

	Söylemsel	Söylemsel Olmayan
Somut	⑦  (Çözümü anlatırken) Arkadaşımın, buraya dolar yazdım. Dolar çizdim. Arkadaşımın parası benim paramın 3 katıdır. İkimizin toplam 36 lirası vardır. Arkadaşımın kaç lira parası vardır? ⑨ Arkadaşımın ve Ben nin başı. Arkadaşımı ve beni bölersek, arkadaşımın benden 3 tane varmış. A eşittir, yani arkadaşım eşittir 3 tane ben. Bir de A artı B eşittir 36. 36'yı 4'e böldüm 9 çıktı. ⑩ 9 benim sayısı olmuş oluyor. 9 benim sayısı olmuş oluyor. ⑫ 3 tane 9 da... 9, 18, hıh, 27. 27 lirası olmuş. Daha sonra aklıma dolar geldi. Dolar çizdim.	④  (Parmaklarını sayar) ⑥  (Parmaklarını sayar) ⑧ 
Soyut	①  ②  ③  ⑤  ⑪ 	

Şekil 6.48. Kenan'ın 2. durum belirleme aşamasında 9. problemi çözümü

Problem: Arkadaşımın parası benim paramın 3 katıdır. İkimizin toplam 36 lirası vardır. Arkadaşımın kaç lira parası vardır?

Aynı problemi resim çizerek çözmesinin istendiği 3. durum belirleme aşamasında Kenan'ın çözümü Şekil 6.49'da sunulmaktadır. Bu aşamada, problemi çözümünde yuvarlak simgesel temsiller kullanarak ve adım adım kat ilişkisini göstererek çizimler yapmıştır. Buna göre öncelikle yuvarlakların sayısını tam olarak ilişkili çizemezken, biraz düşündükten sonra 9'a 3 (4. adım), 12'e 4 (5. adım), 15'e 5 (6. adım) şeklinde 3 kat ilişkisini gösterecek şekilde yuvarlakları çizmiştir. Ancak sonrasında son bir yuvarlak daha ekleyip cevabı "16 TL" olarak belirtmiştir (7-8. adımlar). Çözümünü anlatma esnasında yanlış yaptığını fark edip tekrar yuvarlakları sayıp çizmeye devam etmiş ve yuvarlakların sayısını 18'e 9 olacak şekilde çizip bırakmıştır (12. adım). Problemi anlayamadığını ifade edip bu şekilde çözümü sonlandırmıştır. Resim çizerek çözmesinin istendiği bu aşamada soyut simgesel temsilleri ağırlıklı olarak kullanarak problemi çözmeye çalışmış, sembolik temsilleri hiç kullanmamıştır. Burada somut temsil olarak kullandığı dilsel temsilleri ise problemi çözmesinde bir rol oynamamıştır. Resim çizmenin istenmesinin öğrencileri söylemsel olmayan temsillere yönlendirdiği söylenebilir. Problemi soyut simgesel temsiller kullanarak çözmeye çalışmış ve diğer temsillere geçiş yapmamıştır. Bu anlamda tek temsil türünü kullanarak çözmeye çalıştığı belirlenmiştir.

	Söylemsel	Söylemsel Olmayan
Somut	① Arkadaşım Ben ⑧ 16 TL (Çözümü anlatırken) ⑨ Arkadaşımın parası benim paramın 3 tane katıdır. İkimizin toplam 36 lirası vardır. Arkadaşımın kaç... O yuvarlaklar paraları temsil ediyor. Herhalde yanlış olmuş olabilir bu problem. ⑪ Şey şimdi arkadaşımın beni toplarsam o zaman şey ediyor, on... 36 ediyor. Arkadaşımın kaç lira parası vardır? ... Neyse. 9. ⑬ Anlayamadım herhalde bu soruyu ben. Evet. 16 olarak düşündüm. Sonraki soruya geçelim.	
Soyut		② Arkadaşım ○○○ ○○○ ③ Ben Arkadaşım ○○○ ○○○ ④ Arkadaşım Ben ○○○ ○○○ ○○○ ○○○ (Çizdiği yuvarlakları sayar) ⑤ Arkadaşım Ben ○○○ ○○○ ○○○ ○○○ ⑥ Arkadaşım Ben ○○○ ○○○ ○○○ ○○○ ⑦ Arkadaşım ○○○ ○○○ ○○○ ○○○ (Yuvarlakları sayar) ⑩ Yuvarlakları sayar. ⑫ Arkadaşım Ben ○○○ ○○○ ○○○ ○○○

Şekil 6.49. Kenan'ın 3. durum belirleme aşamasında 9. problemi çözümü

Problem: Arkadaşımın parası benim paramın 3 katıdır. İkimizin toplam 36 lirası vardır.

Arkadaşımın kaç lira parası vardır?

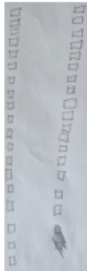
Donguri yönteminin uygulandığı öğretim bölümünde sunulan kat problemini Kenan'ın çözümü Şekil 6.50'de sunulmaktadır. Bu problemin çözümünde öncelikle dilsel ve resimsel somut temsillerle çözüme başladığı görülmektedir. Problem bağlamında sunulan durumu kendi yaşantısında karşılaştığı durumla ilişkilendirmiştir (1-2. adımlar). Bu anlamda somut bir temsille problemi çözmeye başlamıştır. Daha sonra verilen 3 kat ilişkisini, çizdiği beş ağacın her birinden aynı oranda erik toplandığını düşünerek 5'e 15 şeklinde göstermiştir (3-4. adımlar). Burada kullandığı somut resimsel temsilleri kat ilişkisini göstermekte de kullanmıştır. Toplam sayının söylenmesi üzerine bu toplam sayıya ulaşana kadar 1'e 3 oranında erikleri çizmeye devam etmiş ve bu resimsel temsili üzerinden cevaba ulaşmıştır (5-7. adımlar). Resimsel temsil kullanarak cevaba ulaşması sonrasında elde ettiği sayılar üzerinden sembolik temsille işlemler yapmıştır (8. adım). Burada yazdığı sembolik işlemler, problemde elde ettiği sonucun bir doğrulaması niteliğindedir. Problemde verilenlerden hareketle yapılması gereken işlemleri, kontrol etme aşamasında öğretmenin yönlendirmeleri sonrasında bulmuştur. Kontrol etme aşamasında bu işlemleri sembolik temsille yazmış ve bölme işleminin sonucunu parmaklarını sayarak hesaplamıştır (12-17. adımlar). Bu problemin çözümünde somut temsilleri, özellikle de resimsel temsilleri problem çözmede etkili bir şekilde kullanmış ve bunların ardından soyut sembolik temsilleri anlamlandırarak geçiş yapabilmıştır. Bu anlamda somut temsillerle problem durumunu anlayıp çözdükten sonra soyut temsillere geçiş yapmıştır.

	Söylemsel	Söylemsel Olmayan
Somut	Şöyle ufuk çizgisini çizeyim. Bir arkadaş da derken Maya'yı kastediyordu değil mi? Maya'yı düşünüyorum da ben. Tamam. Şuraya da erik ağaçları çizelim. Eriklerin yaprakları da kızıl oluyor. Olgunlaşmayan erikler çok ekşiydi. Aldık bir tanesini sonra olgunlaştılar. Şöyle kızıl yapraklar, ama tamamen kızıl değil, kızıl mor arası. İşte tamam bitti. Şöyle... İki kat mıydı üç kat mıydı neydi? İki üç katıydı üç katıydı. (Ağaçlardan oklar çıkarır ve ağaçları sayar, sonra erik çizer, 15 tane Arya'ya, 5 tane Maya'ya) Tamam. 28 mi? (Çizdiği erikleri sayar. 3 tane Arya'ya çizer, 1 tane Maya'ya çizer. 3 tane daha Arya'ya çizer ve erikleri sayar. Sonra Maya'ya 1 tane daha çizer. Arya'nın eriklerini sayar). 21. Erik. Buldum cevabı. (Kontrol ederken) Bu birkaç tane üç yetmediği için geri toplamış. (Her ağaçtan toplamının sonrasında) (20 erik çizmişti, 28 erik deyince nasıl yaptın?) Onları da okla göstermeden yaptım. Burada (Arya'da) şu iki taneyi (iki tane üçlüyü) göstermeden çizdim. Ama burada Arya'nın arkadaşını da toplayabilirim, toplayınca zaten sonuca ulaşıyor. İşlem de Arya 3 tane topluyor, eğer 7 tane toplarsa 21 eder, 7 kere toplarsa 21 eder. Sonra arkadaş da 7 kere, o 3'ten 2 çıkartırsak 1 kalır, 7 kere 1 7. 21'le 7'yi toplarsam 28 eder. (Ağaca her seferinde gidince 4 tane topluyorlar, bunu kaç kez yaparsınlar ki 28'e ulaşsınlar, bu hangi işlemidir?) Çarpma işlemidir. 4'le... Kaç kez toplayacaklarını 28'i 4'e bölerek bulabiliriz. 28'i 4'e... Evet evet 4 kere 7, 28. 28'ten 28'i çıktım sıfır kaldı. Her gittiğinde Arya 3 tane erik topluyor, arkadaş da 1 tane erik topluyor. (Arya'nın kaç tane erik topladığını nasıl buluruz?) 28'den 7'yi çıkartırız. 28 onların topladığı şeyler. 7 de arkadaşının topladığı sayı. 28'den 7'yi çıkarırsak 21. Arkadaşı olmasaydı o zaman belki 21 tane erik toplardı. Buradaki işlem 7 kere 3. 21.	   
Soyut	İşlem 3 21 7 + 7 21 28 28 4 - 28 7 00 28 7 21	

Şekil 6.50. Kenan'ın öğretim bölümü aşamasında paralel problemi Donguri yöntemiyle çözümü

Problem: Arya ve bir arkadaşı erik toplamaya karar verirler. Arya'nın topladığı erik sayısı arkadaşının topladıklarının 3 katı kadardır. İkisi toplamda 28 erik topladığına göre Arya kaç tane erik toplamıştır?

Donguri uygulaması sonrasında gerçekleşen 4. durum belirleme aşamasında, problemlerin tekrar çözülmesinin istendiği 16. seansta, kat problemi olan 9. problemi Kenan'ın çözümü Şekil 6.51'de sunulmaktadır. Bu problemin çözümünde yine denklem kurarak sembolik temsilleri kullanarak başladığı görülmektedir (1-2. adımlar). Doğru bir şekilde ifade ettiği bu iki denklemi birbiriyle ilişkilendirerek kullanamamış ve hangi işlemi yapacağına karar verememiştir. Bu esnada parmak sayarak çeşitli hesaplamalar yapmıştır (3. adım). Bu hesaplamaların ardından toplam değeri 3'e bölerek 3 kat ilişkisini çözmeye çalışmıştır ve sembolik temsille yazdığı bu bölme işleminin sonucunu parmak sayarak bulmuştur (4-5. adımlar). Ardından problemi anlamadığını ifade etmiş ve problemde verilen sayıları dilsel temsille yazarak bunlar üzerine düşünmüştür (6-8. adımlar). Biraz düşünme sürecinden sonra iki çokluk arasındaki kat ilişkisini farklı bir denklemle sembolik olarak yazarak doğru bir şekilde ifade etmiştir (9. adım). Ancak ardından 36'a ulaşabileceği çeşitli sayıları denemeye başlamış ve bunu yaparken ritmik saymayı kullanmıştır (10-12. adımlar). Dilsel temsille ifade ettiği bu ritmik saymalarda önce 8'leri denemesinin ve 36'yı elde edememesinin ardından 7'leri denemiş ve 36 sayısına ulaşmayı incelediği için 7'nin katı olarak 35 yerine 36 olacağını düşünmüştür (12. adım). Ancak bu çözümünden emin olamamış bu şekilde çözümü bırakmıştır. Bu yaptıklarını dilsel temsille açıklaması esnasında “*Arkadaşımın parası benim 3 tane, 3 şeye eşittir*” şeklindeki ifadesi 3 kat ilişkisini doğru bir şekilde anladığını göstermektedir (13. adım). Kat ilişkisini çeşitli sembolik ve dilsel temsiller kullanarak ifade etmiş olmasına rağmen bu ilişkiyi çözmesinde bu temsiller etkili olmamıştır. Öğretmenin, zihninde herhangi bir resim canlanıp canlanmadığı sorması üzerine Kenan resim çizmeyi düşünmüş ve bunun için çeşitli kutular çizmeye başlamıştır (14-18. adımlar). Boş bir sayfayı kullandığı bu çizimlerinde 3 onluk 6 birlik olarak ifade ettiği 36 tane kutuyu simgesel temsille çizmiştir. Bu kutuları rastgele çizdiğini ifade ederek bunları kat ilişkisini göstermekte bir temsil olarak kullanmamıştır. Bu temsillerin ardından da yine deneme yanılma yoluna gitmiş ama cevabı bulamadığı için çözmeyi bırakmıştır (19. adım). Bu problemi çözme süreci boyunca soyut temsilleri ağırlıklı olarak kullanmıştır, ancak problemi çözmesinde bu soyut temsillerin etkili olmadığı belirlenmiştir.

	Söylemsel	Söylemsel Olmayan
Somut	⑥ ? ⑦ Bu soruyu anlamadım. Arkadaşımın parası... Dur bitmedi bitmedi. ⑧ $\begin{array}{r} 36 \\ 3 \end{array}$ ⑪ $8-16-24-32$ ⑫ $17-15-13-11-9-7-5-3-1$ Neyse anlamadım. (Çözümü anlatırken) Şey ilk önce burada denklem kurmak aklıma geldi ama sonra... A artı B 36 dedim. Sonra... A arkadaşım ve benim toplam lirası 36'dır. Arkadaşımın parası benim 3 tane, 3 şeyime eşittir. Arkadaşımın parasını benim parama bölersem o zaman 3 kalır gibi denklemler. Sonra 18'i 18'e bölersem 36 olur diye... Ay 18'le 18'i toplarsam yani 18'i 2'yle çarparsam 36 olur diye düşündüm. Sonra bundan vazgeçtim. 36'yı 3'e böldüm 12 çıktı. Ama o zaman bana çok mantıklı gelmemişti. Sonra da onu kafamdan sildim. 36'yı 3'e böldüğümüzde bizim paramızın toplamı. Sonra belki saymalar olabilir diye düşündüm. Bunlar da belki bir şeyle 3'ü toplarsam 36 edebilir diye yazmıştım. Onları da aynı 8'er sayma için gibi yapmıştım. Ay 28, 35, 35. $17-15-13-11-9-7-5-3-1$ Burada şeye bakmak istiyorum, bunlarla bir şeyi toplarsam 36 eder mi diye bakmak için yazmıştım, fakat vazgeçtim. ⑭ (Peki burada zihninde hiç resim yapmak canlandı mı?) Aa bak bu belki olabilirdi. Yoo canlanmadı. ⑮ Kalemli göstermek için çizmişim. Şu müsveddeyi... Şimdi arkadaşın... Bunları şimdi rastgele çiziyorum. Paraları göstermek için çizdim. Onları sonradan ayırabilirim ben diye düşündüm. ⑯ $36 \div 12 = 3$ Şimdi... ⑰ Bir de ben 12 liram varsa arkadaşın... 12 olabilir mi? Yo. Aklıma bir şey gelmedi.	③  Parmaklarıyla hesaplama yapar. ⑤  Parmak sayar.
Soyut	① $A + B = 36$ ② $A = 3 \times B$ ④ $\begin{array}{r} 36 \\ 3 \overline{) 12} \\ 00 \end{array}$ ⑨ $A \div B = 3$ ⑩ $\begin{array}{r} 1 \\ 18 \\ 18 \\ \hline 36 \end{array}$	⑮  ⑰  Kutuları sayar.

Şekil 6.51. Kenan'ın 16. seansta 9. problemi çözümü

Problem: Arkadaşımanın parası benim paramın 3 katıdır. İkimizin toplam 36 lirası vardır. Arkadaşımanın kaç lira parası vardır?

Uygulamanın üzerinden belli bir süre geçtikten sonra erken cebir problemlerinin benzerinin çözülmesinin istendiği 17. seanstaki kat problemini Kenan'ın çözümü Şekil 6.52'de sunulmaktadır. Kenan'ın problemi okumasının ardından bir ağaç çizimini resimsel temsille dekoratif amaçlı yaparak başladığı, ardından parmaklarıyla hesaplama yaparak 3 kat ilişkisini düşündüğü görülmektedir (1-2. adımlar). Toplam sayıyı 2'ye bölmeyi sembolik temsille düşünmüş, ancak sonrasında bundan vazgeçmiştir (3. adım). Ardından parmaklarıyla çeşitli hesaplamalar yaparak soruda yazan 3 kat ilişkisini bulmaya çalışmıştır ve birkaç parmak sayma sonrasında cevabı 24 incir olarak ifade etmiştir (4-8. adımlar). Problemi çözümünü anlatması esnasında parmak sayarken düşündüklerini dilsel temsille açıklamıştır (9. adım). Bu ifadelerinde toplam değerden hareketle 3 kat ilişkisini nasıl düşündüğünü açıklamaktadır: *“Hangi sayıyı 3 ile çarparsak ve bir katını da toplarsak 32 eder diye düşündüm”* ifadesi problem durumunda verilen ilişkinin dilsel bir temsilini sunmaktadır. Bu düşüncesi sonrasında 8 sayısına ulaşmıştır. Daha sonra bu düşüncesini daha detaylı açıklamaya çalışırken yazılı olarak da dilsel temsille bu ilişkiyi ifade etmiştir (10. adım). Bu dilsel temsili esnasında bu durumu ifade eden bölme ve çarpma işlemlerinin sembolik temsilleri aklına gelmiş ve bu şekilde onları da eklemiştir (11-14. adımlar). Bu çözümü esnasında Kenan somut temsilleri ağırlıklı olarak kullanırken, resimsel ve dilsel temsillerini problemi anlamada ve çözmede birer araç olarak kullanmıştır. Soyut sembolik temsillere ise problemi çözmesinin ardından düşüncelerini açıklarken geçiş yapmıştır. Bu anlamda problemi somut temsilleri kullanarak çözerken, somut temsillerinden hareketle soyut temsilleri anlamlandırıp doğru bir şekilde ifade ettiği görülmektedir.

	Söylemsel	Söylemsel Olmayan
Somut	5. Kar verince. 8. n topladıklarının 3 katı kadardır. Aklım ka tane incir toplamıştır? (Çözümü anlatırken) İlk önce buradan. Meltem ve bir arkadaşı incir toplamaya karar vermişler. Topladıklarının 3 tanesini, ilk önce 3 tanesi kaç olabilir diye düşünmüştüm. Hangi sayıyı 3 ile çarparsak ve bir katını da toplarsak 32 eder diye düşünmüştüm. Cevabı 8 bulmuştum. 9. 8 Hangi sayının 3 ile çarpımı 24'tür diye düşünmüştüm. Aa 24'ü aslında bulmamıştım diyelim. İlk önce 8'i buldum. Tam olarak hangi sayının 3 katıyla 1 katının toplamı 32 ediyor. 3 kat artı 1 kat eşittir 32. 3 kat artı 1 kat şöyle 4 kat. 10. 3 kat + 1 kat = 32 Hangi sayının 4 katı 32 olabilir diye düşünmüştüm. Aklıma yeni bir tane yöntem geldi. 32 4 katı... 8. 8 kere 4. 8 arkadaşının sayısı. 8 Şimdi bunu da 3'le çarpalım. 13. Şey aslında şimdi aklıma geldi. Önceden aklıma gelmemişti... Şey 8 kere 3 24. 24 şey hangi sayının 3'le çarpıldığı ile 1 katı 32 eder diye düşünmüştüm. Burada 8 bulmuştum cevabı. 8 arkadaşınındı. Şimdi bunu Meltem'in olması için 8'i 3'le çarpmalıyız. 8'i 3'le çarparsak 24 çıkar. Cevabımız 24.	1. 2. Parmaklarıyla hesaplama yapar. 4. Parmaklarıyla hesaplama yapar. 6. Parmaklarıyla hesaplama yapar. 7. Parmaklarıyla hesaplama yapar. 12. Parmak sayarak sonucu bulur.
Soyut	3. 11. 14.	

Şekil 6.52. Kenan'ın 17. seanstaki kat problemini çözümü

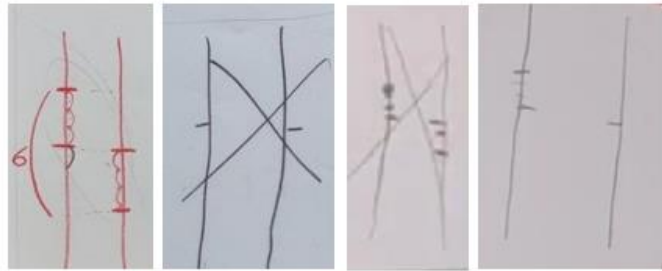
Problem: Meltem ve bir arkadaşı incir toplamaya karar verirler. Meltem'in topladığı incir sayısı arkadaşının topladıklarının 3 katı kadardır. İki toplamda 32 incir topladığına göre Meltem kaç tane incir toplamıştır?

Kenan'ın belirlenen erken cebir problemini ilk seanstan itibaren çözüm yaklaşımı incelendiğinde, 1. ve 2. durum belirleme aşamalarında soyut sembolik temsilleri ağırlıklı olarak kullandığı, 3. durum belirleme aşamasında ise soyut simgesel temsilleri kullanmasının yanında, tüm bu temsilleri problemi çözmede anlamlı olarak kullanamadığı görülmektedir. Donguri yönteminin uygulandığı öğretim bölümü aşamasında somut olan resimsel ve dilsel temsilleri kullanarak problemi çözmesinin ardından gerçekleşen 4. durum belirleme aşamasında somut dilsel temsillerin daha yoğun olarak ortaya çıktığı görülmekle birlikte problemi çözmede simgesel temsillerin de kullanılmaya başlandığı görülmektedir. Son seans olarak uygulanan 5. durum belirleme aşamasında ise problemi çeşitli zihinsel süreçlerle yaptığı hesaplamalar sonrasında doğru bir şekilde bulmuş ve bunları açıklama aşamasında bu zihinsel süreçleri yansıtan işlemleri dilsel ve sembolik olarak ifade etmiştir. Kenan'ın bu problemi çözme sürecine baktığımızda, başlangıçta her ne kadar soyut temsiller kullanarak çözmeye çalışsa da yer alan ilişkileri tam olarak anlamlandıramadığı, Donguri yöntemiyle çalışma sürecinde buradaki ilişkileri daha somut temsillerle gösterdiği görülmektedir. Bunun ardından gerçekleşen aşamalarda ilişkileri daha doğru bir şekilde ifade etmesinin yanında, bu ilişkileri resimsel olarak temsil etmeden zihinsel olarak da görebildiği belirlenmiştir. Böylece öğrencinin belirli bir derece soyutlama yaptığı söylenebilir.

Erken cebir problemlerini çözme sürecinde bütün öğrencilerin benzer süreçlerden geçtiği görülmektedir. Erken cebir problemlerinin çözümü sürecinde her ne kadar soyut temsillerle çözmeye başlandığı durumlar olsa da bu temsillerin problemin çözülmesinde yeterli olmadığı, çözüm için dilsel ve resimsel somut temsillerden destek alındığı görülmektedir. Somut temsiller aracılığıyla problem durumunda yer alan ilişkinin doğru bir şekilde anlamlandırıldığı belirlenmiştir. Resimsel temsil olarak çeşitli çizimler kullanmasının yanında, böyle çizimlerin yapılmadığı durumlarda da parmakların somut birer araç olarak ilişkiyi çözmede kullanıldığı görülmektedir. Probleme yer alan işlemlerin anlamlarının ortaya çıkarılmasında ve çeşitli akıl yürütmelerin görünür olmasında dilsel temsillerin etkili olduğu belirlenmiştir.

Donguri yönteminin uygulandığı öğretim bölümü boyunca kontrol etme aşamalarında görselleştirmenin öğretimi amacıyla öğretmenin kullandığı çeşitli temsillerin de öğrencilerin temsillerini etkilediği görülmüştür. Bu temsillerden biri uygulamanın 11. seansında yer alan eşit sayıda şeker probleminde öğretmenin kullandığı

çizgi şeklindeki simgesel temsildir. Bu problemi Derya'nın çözümü sonrasındaki kontrol etme aşamasında, öğretmen eşitliği anlatmak için çizgi şeklinde simgesel bir temsil kullanmıştır. Bu temsil şekli öğrencinin çizimlerine göre çok daha soyut kalmıştır. Bu gösterim şeklinden Derya çok etkilenmiş ve bundan sonraki bütün problemlerin çözümünde bu çizgi şeklindeki eşitliğin gösterimini kullanmaya çalışmıştır (Şekil 6.53). Ancak öğretmen tarafından yalnızca o problem durumunu açıklamak için sunulan bu temsil öğrenci tarafından yeterince anlaşılmadığı için fazla genellenmiş ve her durumda kullanması gereken bir gösterimmiş gibi düşünülmüştür. Kullanılan temsilin bağlamı somut bir şekilde yansıtacak şekilde sunulması yerine, daha soyut genel bir ilişkiyi yansıtacak şekilde sunulmuş olması öğrencilerin yanlış anlamasına ve bu temsilin her durumda geçerli genel bir temsil şekli olarak değerlendirilmesine neden olmuştur. Bu duruma neden olan bir diğer faktör de öğretmenin öğrencinin temsillerinden hareketle bir soyutlama yapmak yerine kendi zihinsel soyut temsilini kullanmış olmasıdır. Öğrencilerin daha soyut temsillere geçmeye hazır olduklarının işaretleri görülmeden ve yeterince soyutlama deneyimi yaşanmadan sunulan soyut temsillerin yanlış anlamaya sebep olabileceği görülmektedir. Bu anlamda görselleştirmenin öğretimi amacıyla kullanılan temsillerin soyutluk derecelerinin de öğrencilerin kullandıkları temsillerle soyutlama süreçlerini etkilediği belirlenmiştir.



Şekil 6.53. Öğretmenin 11. seansta çizgiler ile eşitliği anlatımı (en solda) sonrasında Derya'nın sırasıyla 12., 13. ve 15. seans problemlerinde bu gösterimi kullanması

7. SONUÇ

Sunulan bulgular ışığında çalışmanın sonuçları araştırma sorularına cevap verecek şekilde başlıklara ayrılarak sunulmuştur. Buna göre, uygulama boyunca öğrencilerin kullandığı temsil türlerine yönelik sonuçlar; öğrencilerin problemlerin çözümünde kullandıkları temsillerle soyutlamanın gelişimine yönelik sonuçlar; uygulama boyunca öğrencilerin erken cebir problemlerini çözme becerilerine yönelik sonuçlar; uygulama sonrasında öğrencilerin Donguri yöntemini problem çözme sürecine yansıtmalarına yönelik sonuçlar başlıkları altında çalışmanın sonuçları sunulmuştur.

7.1. Uygulama Boyunca Öğrencilerin Kullandığı Temsil Türlerine Yönelik Sonuçlar

Uygulama boyunca öğrencilerin problem çözme süreçlerinde kullandıkları temsil türleri incelendiğinde, uygulamanın farklı aşamalarında öğrencilerin problem çözmede kullandıkları temsil türlerinin farklılaştığı belirlenmiştir. Uygulamanın başında gerçekleştirilen durum belirleme aşaması ile Donguri yönteminin uygulandığı öğretim bölümü aşamasında öğrencilerin problem çözmede kullandıkları temsil türlerinin farklılık gösterdiği görülmektedir. Bu aşamaların kendi içinde aritmetik ve erken cebir problemlerini çözme süreçlerinde öğrencilerin kullandıkları temsil türleri açısından benzerlikler olduğu görülmektedir. Bu nedenle uygulama boyunca öğrencilerin kullandığı temsil türleri, durum belirleme aşamasında kullandıkları temsil türleri ve Donguri yönteminin uygulandığı öğretim bölümü aşamasında kullandıkları temsil türleri olarak incelenmiştir.

Donguri yönteminin uygulanması öncesinde çalışmaya katılan 3. sınıf öğrencilerin problem çözme durumlarının ve problemleri çözerken ne tür temsiller kullandıklarının belirlenmesi, problemlerin sunuş şeklinin değiştirilmesi veya resim çizerek çözmelerinin istenmesi durumunda problem çözme becerilerinde nasıl bir değişiklik olacağının incelenmesi amacıyla üç seanslık bir durum belirleme aşaması gerçekleştirilmiştir. Bu aşamada elde edilen bulgularda öğrencilerin problemlerde yer alan işlemleri soyut sembolik temsiller kullanarak çözdükleri ve bu işlemleri yapma esnasında somut temsil olarak değerlendirilen parmak saymayı sıklıkla kullandıkları belirlenmiştir. Durum belirleme aşamasında öğrencilerin problem çözme sürecinde kullandıkları temsil türleri Şekil 7.1’de genellenmiştir. Buna göre durum belirleme aşamasında öğrencilerin ağırlıklı olarak söylemsel temsiller kullandıkları, özellikle sembolik olan işlem temsilleri ile

başladıkları ve bunları açıklayan dilsel temsillere geçtikleri belirlenmiştir. Dilsel temsil olarak, sembolik temsille yazdıkları işlemlerin açıklamalarının yanında ritmik saymayı kullandıkları ve problemde yer alan sayıları rakamla yazılı olarak not ettikleri görülmüştür. Söylemsel olmayan temsilleri ise nadiren kullandıkları, resim çizmelerinin istenmesi durumunda dahi sadece problem durumunda geçen nesnenin resmini dekoratif olarak göstermek için resimsel veya söylenen miktarı gösteren simgesel temsiller kullandıkları görülmüştür. Öğrencilerin işlemleri yaparken sıklıkla parmak saymayı kullanması ise söylemsel olmayan somut temsil olarak değerlendirilmiştir. Ancak söylemsel olmayan bu temsilleri problem çözmelerinde bir araç olarak kullanmaktan ziyade işlemlerine yardımcı temsiller olarak kullandıkları belirlenmiştir.

	SÖYLEMSEL	SÖYLEMSEL OLMAYAN
SOMUT	DİLSEL İşlemin sözlü açıklaması Ritmik sayma Rakamlı ifadeler	RESİMSSEL Saymada parmakları kullanma Problem durumunda geçen nesnenin resmi
SOYUT	SEMBOLİK İşlemlerin matematik sembolleriyle ifadeleri	SİMGESEL Yuvarlak veya çubuk ile nesnelerin miktarının temsili

Şekil 7.1. Durum belirleme aşamasında öğrencilerin kullandığı temsil türleri

Durum belirleme aşamasında aritmetik işlemleri içeren problemleri büyük oranda sembolik temsilleri kullanarak çözerken, erken cebir problemlerini anlamakta zorlandıkları, burada yer alan matematiksel işleme karar veremedikleri için bu problemleri boş bıraktıkları veya yanlış çözdükleri belirlenmiştir. Ayrıca, problemlerin sunuş şeklini değiştirmenin, yani Donguri yönteminde olduğu gibi verilenleri ve istenenleri cümlelere ayırarak sunmanın, problem çözme becerilerinde bir fark yaratmadığı saptanmıştır. Problemleri resim çizerek çözmelerinin istenmesi de problemleri çözmelerinde bir fark yaratmamakla birlikte öğrencileri söylemsel olmayan temsilleri kullanmaya yöneltmiştir. Bu aşamada kullandıkları söylemsel olmayan

temsillerin simgesel temsiller oldukları görülmüştür. Simgesel temsillerinde problemde sunulan nesnelerin miktarını göstermek amacıyla yuvarlak ve çizgi şekillerini kullanmışlardır. Bu simgeleri belirli bir düzende çizmedikleri için simgelerin sayısını düzenlemekte zorlandıkları ve bu nedenle simgesel temsillerin, cevabı doğru bir şekilde bulmalarına yardımcı olmadığı belirlenmiştir. Ayrıca, problemleri sembolik temsillerle işlem yaparak çözmeye alışık oldukları için önce işlemleri düşünüp sonrasında işlemlerine uygun çizimler yapmaya çalışmalarından dolayı resmi problem çözmede bir araç olarak kullanmadıkları belirlenmiş ve bu nedenle resimleri işlevsiz kalmıştır. Durum belirleme aşaması boyunca kullandıkları farklı türdeki temsilleri birbirlerini destekleyecek şekilde eş zamanlı olarak kullanmak yerine, ayrı zamanlarda tek tek kullandıkları belirlenmiştir. Örneğin, Mert'in 1. durum belirlemedeki 10. problemi çözerken (Şekil 6.3) simgesel temsilleri kullanması ancak bunlar üzerinde sayma yaparken herhangi bir dilsel temsil kullanmaması ve en son dilsel temsillerle yaptıklarını açıklarken çözümüne dair açıklamalarının eksik kalması, kullanılan temsillerin ilişkilendirilmeden ve birbirini desteklemeden kullanılmasını yansıtmaktadır. Bu durumun problemleri anlamalarında ve çözmelerinde etkili olduğu düşünülmektedir.

Donguri yönteminin uygulandığı öğretim bölümünün ilk altı seansında aritmetik problemlerinin çözümünde öğrencilerin somut resimsel temsiller ile başladıkları, bunları destekleyen ve düşüncelerini açıklayan somut dilsel temsilleri ise resimsel temsilleriyle paralel kullandıkları görülmektedir. Problem durumunda yer alan nesnelerin miktarının fazla olması durumunda veya atılan adım sayısını belirtmek için çeşitli çizgi, ok, yarım daire gibi soyut simgesel temsiller kullansalar da bunları resimsel temsilleriyle destekledikleri için somut temsiller şeklinde oldukları belirlenmiştir. Matematiksel işlemleri ifade ettikleri soyut sembolik temsilleri ise tüm bu temsillerin sonunda ortaya çıkmıştır.

Öğretim bölümünde erken cebir problemlerinin sunulduğu altı seans boyunca öğrenciler problem durumunu resim çizerek göstermiş ve resimsel temsiller kullanarak cevaplara ulaşabilmiştir. Bu resimlerin çizimi esnasında dilsel temsil olan sözlü açıklamaları da eş zamanlı kullanmışlardır. Bu anlamda aritmetik problemlerinin çözümünüyle erken cebir problemlerin çözümü esnasında temsillerin ortaya çıkma şekli benzerlik göstermektedir. Ancak erken cebir problemlerinde dilsel temsilleri daha yoğun olarak kullandıkları, yaptıkları resimsel temsilleri açıklamanın yanında akıl yürütmelerini de içerdiği belirlenmiştir. Uygulamanın 12. seansındaki Arzu ve Derya'nın problem

çözümleri (Şekil 6.27) ve 13. seanstaki Mert'in problemi çözümü (Şekil 6.31) dilsel temsillerin akıl yürütmeleri göstermesine iyi birer örnektir. Dilsel temsil olarak görselleştirme adımlarının sesli betimlemesini içeren sözlü ifadeleri, problemleri çözerken kullandıkları akıl yürütmelerini de görünür kılmıştır. Aynı zamanda dilsel temsil olarak sözlü ve yazılı ritmik saymaları kullanmalarının yanında, Donguri yönteminin bir uygulaması olan cevap ifadelerini yazmaları dilsel temsil olarak değerlendirilmiştir. Öğrencilerin resimsel temsilleri, problem durumunda geçen nesnelerin ve bu nesneler arasındaki ilişkilerin görselleştirilmesi amacıyla kullandıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin bu süreçte zorlandıkları yerlerde jestleri de etkili bir şekilde kullandıkları görülmektedir (Şekil 6.17, 6.18, 6.25). Resimsel temsiller gibi öğrencilerin zihinlerinde somut olarak ilişkilerin canlanmasını sağladığı, değişimleri ve ilerlemeleri dramatize etmeyi sağladığı için bu tür jestler, somut söylemsel olmayan resimsel temsil olarak değerlendirilmiştir. El hareketlerini içeren bu jestler öğrencilerin problem bağlamındaki durumları daha iyi anlamalarını sağlamıştır. Öğrencilerin problemlerin çözümünde adım sayılarını veya nesneleri gösteren temsillerinin yarım daire, ok veya yuvarlak gibi somut nesnelerin sayısının biraz soyutlaştırılarak çizimlerini içeren simgesel temsiller kullandıkları görülmektedir. Ancak bu simgesel temsillerin, somut resimlerle ilişkili kullanılarak resimsel temsillerinin miktarının çokluğundan kaynaklanan bir soyutlama olduğu belirlenmiştir. Bu nedenle somut olan resimsel temsiller olarak da değerlendirilebilir. Öğrencilerin erken cebir problemleri boyunca matematiksel işlemleri belirlemekte zorlandıkları, resimsel temsiller sonucunda ulaştıkları çözümü yansıtan işlemleri içeren sembolik temsilleri en son aşamada, genellikle de kontrol etme aşamasında kullandıkları görülmektedir. Öğrencilerin Donguri yöntemini uyguladıkları öğretim bölümü aşamasında kullandıkları temsil türleri Şekil 7.2'de genellenmiştir. Buna göre öğrencilerin, Donguri yöntemi ile problem çözme sürecinde daha çeşitli temsiller kullandıkları ve bu temsilleri problem durumunu anlamalarında ve çözmelerinde etkili birer araç olarak kullandıkları söylenebilir.

	SÖYLEMSEL	SÖYLEMSEL OLMAYAN
SOMUT	DİLSEL Yapılan çizimlerin betimlenmesi Akıl yürütme ifadeleri İşlemlerin dilsel ifadeleri Ritmik sayma Cevap ifadeleri	RESİMSEL Problem durumunda geçen nesnelerin ve miktarlarının temsili Nesneler arasındaki ilişkilerin temsili Jestler
SOYUT	SEMBOLİK İşlemlerin matematik sembolleriyle ifadeleri	SİMGESEL Nesnelerin miktarının yarım daire, ok, yuvarlak, çizgi ile temsili İlişkilerin genel temsili

Şekil 7.2. Öğretim bölümü aşamasında öğrencilerin kullandığı temsil türleri

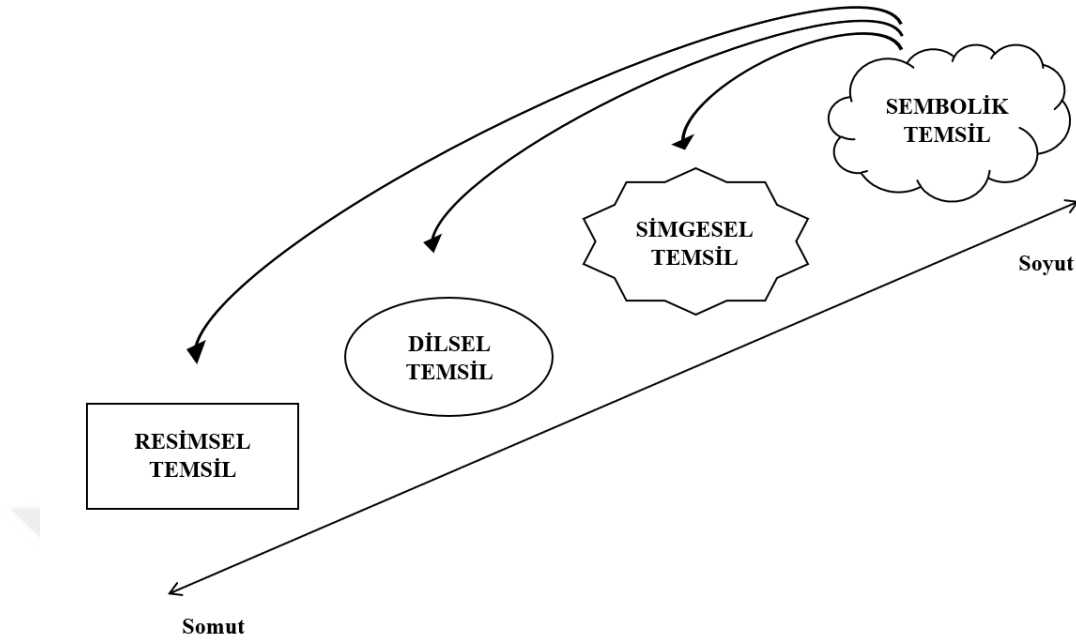
Öğrencilerin durum belirleme aşamasında (Şekil 7.1) ve Donguri uygulamasının gerçekleştiği öğretim bölümü aşamasında (Şekil 7.2) kullandıkları temsil türleri karşılaştırıldığında, problemleri çözme süreçlerinde temsillerin ortaya çıkma sırasının ve çeşitliliğinin farklılık gösterdiği görülmektedir. Durum belirleme aşamasında öğrenciler problem çözmede matematiksel işlem ağırlıklı sembolik temsilleri yoğun bir şekilde kullanırken, Donguri uygulaması esnasında resimsel temsiller ile başlamışlar ve bunları çizerken düşündükleri akıl yürütmelerini dilsel temsillerle sözlü olarak desteklemişlerdir. Bu dilsel temsiller problem çözmelerinde önemli bir rol oynamıştır. Resimsel ve dilsel temsillerin paralel olarak etkileşimli bir şekilde ortaya çıktığı bu süreçte, nesnelerin miktarını göstermek için simgesel temsiller kullanmışlar ve en son aşamada bu temsilleri ifade eden işlemi yazmak için sembolik temsile geçiş yapmışlardır. Donguri uygulaması boyunca öğrencilerin resimsel, dilsel, simgesel ve sembolik temsilleri birbirini destekleyecek şekilde etkileşimli kullandıkları görülmektedir. Durum belirleme aşamasında sembolik temsiller ağırlıklı olarak kullanılırken, söylemsel olmayan temsiller yalnızca sembolik temsille ifade edilen işlemleri desteklemek amacıyla kullanılmıştır. Donguri yönteminin uygulaması boyunca ise tüm temsil çeşitlerinin birbiriyle etkileşimli olarak ortaya çıktığı görülmektedir. Donguri uygulaması esnasında resimsel temsillerle başlandığı ve burada yer alan ilişkilerin dilsel ve simgesel temsiller kullanılarak gösterilmesi sonrasında en son aşamada matematiksel işlemlerin sembolik temsiller

kullanılarak ifade edildiği görülmektedir. Durum belirleme aşamasında öğrenciler söylemsel olmayan temsilleri problem çözmede bir araç olarak işlevsel kullanamazken, Donguri uygulamasında bu temsilleri problem çözme aracı olarak kullanmışlardır.

7.2. Öğrencilerin Problemlerin Çözümünde Kullandıkları Temsillerle Soyutlamanın Gelişimine Yönelik Sonuçlar

Uygulama boyunca öğrencilerin kullandıkları temsil türleri somut veya soyut olmaları açısından değerlendirildiğinde problem çözme sürecinde soyutlamanın nasıl gerçekleştiği görülebilmektedir. Bu amaçla öğrencilerin problemleri çözmede kullandıkları temsillerin soyutluk dereceleri incelenmiştir. Aynı zamanda bu temsillerin ortaya çıkma sırası ve temsiller arasındaki geçişin nasıl gerçekleştiği de soyutlamanın gelişimini göstermektedir. Uygulama boyunca öğrencilerin aritmetik ve erken cebir problemlerini çözme süreçlerine genel olarak bakıldığında, durum belirleme aşaması ve öğretim bölümü aşamasına göre benzerlikler içerdiği belirlenmiştir. Bu nedenle öğrencilerin problemleri çözerken kullandıkları temsillerle soyutlamanın gelişimi bu iki aşama süreci altında incelenmiştir.

Donguri yönteminin uygulanmadığı durum belirleme aşamalarında söylemsel ağırlıklı temsillerin ortaya çıktığı ve özellikle soyut sembolik temsillerin kullanılarak problemlerin çözülmeye başlandığı görülmektedir. Bu aşamada, özellikle işlemlere karar veremedikleri durumlarda dilsel temsillere geçiş yaptıkları ve bu sayede akıl yürütmeler yaptıkları veya işlemin sonucunu hesaplamak için somut temsil olarak parmak saymayı kullandıkları belirlenmiştir. Özellikle erken cebir problemlerini çözerken soyut sembolik temsilleri tek başına kullanmış olmaları, problemi çözememiş olmalarında etkili olmuştur. Durum belirleme aşamasında resim çizerek problemleri çözmeleri istendiğinde ise soyut simgesel temsiller kullandıkları, bu temsilleri aracılığıyla problemi çözerken işlemleri sembolik temsille yazmaya ihtiyaç duymadıkları görülmektedir. Bu süreçte ayrıca önce sembolik temsille işlemleri yazmaları sonrasında bu işlemi ifade eden resimsel ve simgesel temsilleri ürettikleri belirlenmiştir. Bu aşamada her ne kadar soyut temsiller kullanarak problem çözmeye başlasalar da bu temsillerini somut temsillere geçiş yaparak destekledikleri görülmektedir. Bu anlamda soyut sembolik temsilleri anlamlandırmak ve soyutlama yapmak için daha somut olan temsilleri kullanmışlardır. Durum belirleme aşamasında öğrencilerin kullandıkları temsillerle soyutlamanın gelişimi Şekil 7.3'te genellenmiştir.

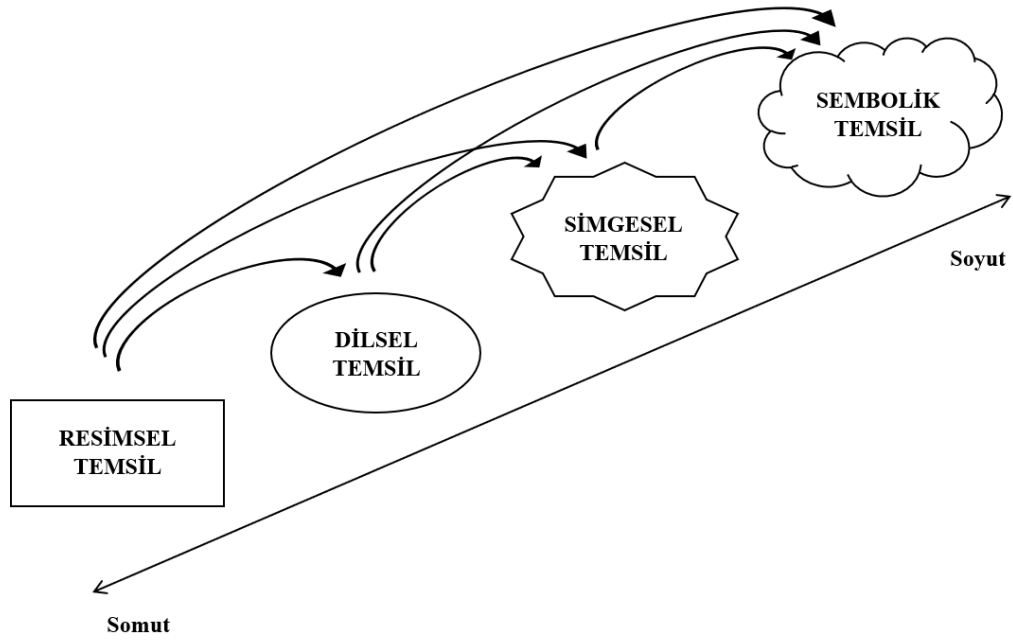


Şekil 7.3. *Durum belirleme aşamasında temsillerle soyutlamanın gelişimi*

Şekil 7.3'te durum belirleme aşamasında öğrencilerin soyut sembolik temsillerle problemi çözmeye başlarken, bu sembolik temsille ifade ettikleri işlemleri anlamlandırmak için dilsel temsillere, sonucu hesaplamak için resimsel temsillere veya görselleştirmek için simgesel temsillere geçiş yaptıkları görülmektedir. Bu anlamda öğrenciler soyut temsiller ile problemi çözmeye başlarken, bu soyut temsille yapmaya çalıştıkları işlemleri daha somut temsillerden yararlanarak anlamlandırmaya ve sonuçlandırmaya çalışmışlardır. Öğrenciler karşılaştıkları problemleri sembolik temsiller kullanarak işlemler ile çözmeye alışık oldukları için durum belirleme aşamasında da ilk olarak işlemleri sembolik temsille yazmayı tercih etmişlerdir. Ancak yapmak istedikleri işlemin sonucunu ezbere bilmedikleri durumlarda farklı temsil türlerini kullanmaya ihtiyaç duydukları görülmektedir. Örneğin Arzu'nun 5. problemi çözümü incelendiğinde, 5×7 işleminin sonucunu bildiği için doğrudan sembolik temsille yazıp cevaba ulaşırken, 7×8 işleminin sonucunu ezbere bilmediği için ve bu çarpma işlemini yapmakta zorlandığı için çeşitli dilsel, resimsel ve simgesel temsilleri kullanmaya ihtiyaç duyduğu görülmektedir (Şekil 6.42 – 6.46). Bu durum, öğrencilerin önceden ezberledikleri veya sonucunu bildikleri işlemleri yaparken ya da daha önceden soyutladıkları ilişkileri düşünürken, soyut temsillerle cevaba ulaşabildiklerini, ancak henüz ezberlemedikleri ya

da böyle bir soyutlama yapmadıkları işlemlerle karşılaştıklarında cevaba ulaşabilmek için daha somut temsillere ihtiyaç duyduklarını göstermektedir. Aynı zamanda, öğrencilerin karşılaştıkları bir işlemin sonucunu, yalnızca ezberledikleri için mi yoksa bu işlemi artık soyutladıkları için mi sonucunu doğru bir şekilde bulabildikleri ayrımı, daha somut temsillerin kullanılmasıyla görünür olmaktadır. Yalnızca sembolik temsillerin kullanılarak bu işlemlerin ifade edilmesi, bu ilişkilerin ne derece soyutlanmış olduğu konusunda yeterli bilgi sağlamamaktadır.

Donguri yönteminin uygulandığı öğretim bölümü aşamasında ise somut resimsel temsillerle problemi çözmeye başladıkları ve ağırlıklı olarak somut temsilleri kullandıkları görülmektedir. Bu aşamada resimsel temsillerle dilsel temsilleri birbirini destekleyecek şekilde eş zamanlı olarak kullandıkları, bu şekilde problemi çözmelerinin ardından yer alan işlemleri sembolik temsille ifade ettikleri belirlenmiştir. Bu aşamadaki aritmetik problemlerin çözümünde öğrencilerin sembolik temsilleri kullanarak işlemleri yazmalarından sonra eğer işlemlerinde herhangi bir eksik veya hata varsa bunları dilsel temsilleriyle açıklamalarının ardından tekrar sembolik olarak düzenlemişler veya gerek duymaları halinde dilsel temsillerini resimsel veya simgesel temsillerle yeniden desteklemelerinin ardından sembolik temsillere geçmişlerdir. Erken cebir problemlerinde ise resimsel ve dilsel temsillerini yoğun bir şekilde kullanarak ve buradaki ilişkileri göstermede simgesel temsillerden yararlanarak problemi çözerken, sembolik temsillere geçmek için çoğunlukla öğretmenin desteğine ihtiyaç duymuşlardır. Böylece resimsel, dilsel ve simgesel temsilleriyle problemi çözmelerinin ardından sembolik temsillere geçtikleri görülmüştür. Bu sayede soyut sembolik temsil içeren işlemleri somut temsillerinin ardından bunlarla ilişkili olarak yapılandırmışlardır. Bu anlamda öğretim bölümü aşamasında öğrencilerin somut temsiller kullanarak problem durumunda yer alan ilişkilerin anlamlarını ortaya çıkarırken, devamında bu ilişkileri ifade eden matematiksel işlemleri soyut sembolik temsillere geçiş yaparak yazdıkları görülmektedir. Donguri yönteminin uygulandığı öğretim bölümü aşamasında öğrencilerin kullandıkları temsillerle soyutlamanın gelişimi Şekil 7.4'te genellenmiştir.



Şekil 7.4. Öğretim bölümü aşamasında temsillerle soyutlamanın gelişimi

Şekil 7.4'te sunulan Donguri yönteminin uygulandığı öğretim bölümü aşamasındaki temsiller incelendiğinde, öğrencilerin öncelikle somut resimsel temsiller kullanarak problemi anlamaya ve çözmeye başladığı, bu resimsel temsillerini dilsel temsiller ile desteklediği, gerek duyulan yerlerde resimsel temsillerdeki ilişkileri genellemek ve miktarları göstermek için simgesel temsiller kullandıkları ve bu şekilde problemi çözmelerinin ardından en son aşamada burada yer alan ilişkileri ifade eden matematiksel işlemleri anlamlandırarak sembolik temsille yazdıkları görülmektedir. Donguri yönteminin uygulandığı bu aşamada öğrencilerin temsilleri en somuttan başlayarak ve adım adım soyutlaştırarak kullandıkları belirlenmiştir.

Erken cebir problemlerinin çözümü sürecinde somut resimsel ve dilsel temsiller kullanarak problem durumunu çözerek cevaba ulaşırken, burada yer alan ilişkileri soyut sembolik temsiller kullanarak ifade etme noktasında zorlandıkları görülmüştür. Bu süreçte kontrol etme aşamasında öğretmenin müdahaleleri ve görselleştirmenin öğretimi amacıyla yaptığı çeşitli resimsel ve simgesel temsilleri sonrasında sembolik temsillere geçiş yaptıkları belirlenmiştir. Öğretmenin bu süreçte kullandığı her türlü temsil şeklinin öğrencilerin temsil kullanımlarını ve temsillerle soyutlama süreçlerini etkilediği görülmektedir. Bunun en iyi örneği, eşit sayıda şeker probleminde, öğretmenin kullandığı simgesel temsil sonrasında Derya'nın bu temsil şeklini her durumda kullanabileceği bir

temsil olarak genellemesi durumudur (Şekil 6.53). Öğrencinin kendi somut temsillerinden hareketle adım adım soyutlaştırılarak üretilmeyen her soyut temsil, öğrenciler tarafından anlaşılmadan kullanılmaya devam edilebilir. Bu nedenle görselleştirmenin öğretimi aşamasında da soyutlamanın gelişimini destekleyecek şekilde somut temsillerden hareketle soyut temsillere geçilmesi gerekmektedir.

Durum belirleme aşaması boyunca öğrencilerin sembolik temsillerle işlemleri yazarak problemleri çözmesi durumunda dahi zihinlerinde resimsel, dilsel veya simgesel temsillerle çeşitli somutlaştırmaların yer aldığı belirlenmiştir. Öğrencilere farklı temsiller kullanarak çözmelerine fırsat verilmesi durumunda zihinlerinde oluşan bu somut temsiller daha görünür olmaktadır. Donguri yönteminin uygulandığı öğretim bölümü aşamasında, benzer problemlerin çözümünde öğrencilerin daha serbest bir şekilde çeşitli temsilleri kullanmasına fırsat verilmesi durumunda, somut temsilleri kullanmayı tercih ettikleri ve bu temsiller aracılığıyla zihinlerinden geçenleri daha açık bir şekilde ifade ettikleri görülmektedir.

Durum belirleme aşamasında öğrenciler soyut temsilleri ağırlıklı olarak kullanırken, Donguri yönteminin uygulandığı öğretim bölümü aşamasında somut temsillerle başlayıp bunlardan adım adım soyut temsillere geçiş yaptıkları görülmektedir. Bu anlamda Donguri yönteminin, öğrencilerin somuttan soyuta geçerek ve kendi temsillerini üretmelerine fırsat tanıyarak soyutlamanın gelişimine katkı sağladığı söylenebilir.

7.3. Uygulama Boyunca Öğrencilerin Erken Cebir Problemlerindeki Düşünme Becerilerine Yönelik Sonuçlar

Öğrenciler uygulamanın ilk üç seansında sorulan erken cebir problemlerini anlamakta ve çözmekte zorlanırken Donguri yöntemi ile sunulan benzer problemleri anlayabildikleri ve doğru cevaba ulaşarak çözebildikleri görülmüştür. Donguri yönteminde yer alan ve görsel düşünmeyi içeren, problem bağlamında söylenenlerin zihinde canlandırılması ve resminin çizilerek gösterilmesi süreci, öğrencilerin durumları ve ilişkileri daha iyi anlamalarını sağladığı söylenebilir.

Donguri uygulamasının ilk seanslarında dört işlemin her birinin anlamını ve temel özelliklerini içeren aritmetik problemlerinde, öğrencilerin bu işlemlerin kavramsal özelliklerini yansıtacak şekilde resimler yaptıkları görülmüştür. Problemlerde verilen çoklukların öncelikle somut resimler ile gösterilmeye çalışılması, miktarların fazla

gelmesi durumunda bunların onluk gruplar şeklinde gösterilme ihtiyacının doğması, öğrencilerin onluk taban yapısını kavramalarına ve bu çoklukları görselleştirerek sayı duyularını geliştirmelerine fırsat vermiştir. Çıkarma işlemi içeren problemlerde, çıkarmanın eldeki çokluktan azaltılarak yapılan bir işlem olduğu resimlerinde görülmektedir (Şekil 6.10 – 6.12). Benzer şekilde çarpma işleminin tekrarlı toplama olduğu Donguri yöntemi ile yaptıkları resimlerde görülürken (Şekil 6.13 – 6.14) uygulama öncesindeki çizimlerinde iki çokluk temsilinin arasına çarpı işareti koyarak veya sayıları tekrarlı yazarak çarpma işlemini temsil ettikleri görülmektedir (Şekil 6.7). Aynı şekilde, bölme işleminin anlamlarından olan eş gruplara ayırma, Donguri yönteminin uygulandığı resim temsillerinde görülmektedir (Şekil 6.16). Donguri yöntemi ile yapılan bu çizimlerde dört işlemin kavramsal anlamı görselleştirilmiştir. Öğrencilerin bu görselleştirmeleri kendilerinin oluşturdukları göz önüne alındığında öğrencilerin işlemleri yapılandırmasında Donguri yönteminin etkili olduğu söylenebilir. Bu süreçte öğrenciler verilen çoklukları göstermekte kendi yöntemlerini belirlemişler ve resimlerini uygun şekilde düzenlemede stratejik kararlar almışlardır. Örneğin, bazı problemlerde bir çokluğu sadece sayı temsiliyle göstermenin yeterli olmadığını fark etmişler ve verilen çokluk kadar nesneyi çizmişlerdir. Verilen nesnelerin miktarlarını sadece sayı ile göstermeleri durumunda, bu sayının neyin sayısı olduğunu karıştırdıkları, özellikle iki bileşenli sorularda (adım ve marul gibi) hangisinin sayısını buldukları konusunda karışıklık yaşadıkları görülmüştür. Ulaştıkları sayının, neyin sayısı olduğunu fark etmeleri, o sayının ve yapılan işlemin anlamını da belirlemektedir. Böylece nesneleri uygun sayıda çizerek karışıklık yaşamaktan kurtulmuşlardır. Sayı duyusunu da geliştiren bu süreçte verilen çokluğu, çizim için fazla geldiği durumlarda onluk gruplara ayırarak göstermeyi tercih etmişlerdir. Aynı zamanda işlemsel olarak hata yaptıkları durumlarda, sonucu bulmak için resimlerinden yararlandıkları ve işlemlerin cevaplarını bu şekilde doğruladıkları görülmüştür. Problem bağlamında yer alan ilişkiler anlaşılmadan, matematiksel işlemleri düşünerek çözmeye başladıklarında verilen sayılarla makul gelen işlemleri yapma eğiliminde oldukları, bu nedenle bağlamı yansıtmayan işlemler yaptıkları görülmüştür. Problem bağlamını resimleri ile görselleştirmeleri, ilişkileri anlamaları ve işlemlere karar vermeleri açısından önemli bir rol oynamıştır. Bu sayede işlemlerin anlamları ve o işlemlerin neden yapıldığı açıklık kazanmıştır. İlişkisel düşünmeyi içeren bu süreç, Donguri yönteminin uygulanması boyunca öğrencilerin eylem ve söylemlerinde yer almaktadır.

İlişkisel düşünmeyi içeren bir diğer durum, eşit sayıda şekerin yer aldığı problem durumudur. Burada öğrenciler eşittir sembolünü eşitliği göstermek amacıyla kullanmışlardır (Şekil 6.22). Bu anlamda eşittir sembolünün yalnızca işlemlerin sonucunu gösteren bir sembol olmadığı, iki çokluğun eşitliği durumunda da kullanılabileceği öğrenciler tarafından gösterilmiştir. Ancak eşittir işareti ile gösterim, şeker sayılarının değişimini göstermekte etkili olmamıştır. Aynı zamanda bilinmeyen değerler için kutu, üçgen, yuvarlak gibi çeşitli şekilleri kullanmak tek başına cebirsel düşünmeyi içermemektedir. Bunları birbiriyle ilişkili bir şekilde ifade etmek de önem kazanmaktadır. Uygulamada Mert'in yaptığı (Şekil 6.24) bu gösterimler birbiriyle ilişkilendirilmediği için cebirsel düşünme içermemektedir. Öğrenciler bu problemde yer alan değişim ilişkisini belirli sayıda şeker üzerinden aritmetiksel olarak görselleştirip çözmüş olmalarına rağmen, öğretmen tarafından çeşitli jestler ve resimsel temsiller kullanılarak açıklanması sonrasında, öğrencilerin buradaki değişimin giden şeker sayısı ile iki kat ilişki içerdiğini fark ettikleri belirlenmiştir. Nitekim bu problemin uygulama sonrasında tekrar sorulması esnasında bu ilişkiyi belirterek problemi doğru bir şekilde çözdükleri görülmektedir. Bu anlamda resimsel temsillerin yanında kullanılan jestlerin de problemi anlamalarında etkili olduğu söylenebilir.

Uygulama boyunca yer alan problemlerde verilen çoklukların miktarının resimlerle temsil edilmesi niceliksel muhakemeyi destekleyen bir etmen olmuştur. Verilen durumlar sonrasında çoklukların nasıl değiştiği, aralarındaki ilişki korunarak bunların nasıl devam ettiği öğrencilerin resimlerinde görülmektedir. Niceliksel muhakemenin yer aldığı kat probleminde, toplanan erik sayıları arasındaki kat ilişkisi resimlerinde görülmektedir (Şekil 6.26 – 6.29). Benzer şekilde eşit sayıda şeker probleminde öğrenciler başta değer vererek aralarındaki farkı bulmaya çalışırken, Donguri yönteminin uygulanmasında buradaki niceliksel değişimin nasıl olması gerektiği resimsel temsiller ve jestlerle daha anlaşılır olmuştur (Şekil 6.25). El ve vücut hareketlerini içeren jestlerin yer aldığı bu süreç görselleştirmeyi içermekte ve öğrencilerin anlamasını desteklemektedir. Donguri yönteminin de önerdiği bu jestlerin kullanımının niceliksel muhakeme ve fonksiyonel düşünmeyi desteklediği söylenebilir.

Öğrencilerin erik toplamayı içeren kat problemini Donguri yöntemi ile çözmeleri incelendiğinde (Şekil 6.26 – 6.29), başlangıçta verilen kat ilişkisini birim ilişkiden başlayacak şekilde gösterip, toplam sayıya ulaşana kadar bu ilişkiyi devam ettirerek göstermek yerine, toplam sayıdan hareketle bunun bir sayının üç katı olduğunu

düşündükleri ve bunu bulabilmek için de çeşitli tahmin ve deneme yanılma yaptıkları görülmektedir. Ancak resimsel temsiller kullanarak verilen ilişkiyi göstererek erik sayılarını uygun şekilde dağıtmaya başladıktan ve toplam sayıya ulaşana kadar bu dağılımı uygun şekilde yaptıktan sonra cevaba kolayca ulaşabilmişlerdir. Cevaba ulaşmaları sonrasında dahi buradaki işlemlere karar vermekte zorlanmışlar ve öğretmenle kontrol etme aşamasında işlemleri doğru bir şekilde ifade edebilmişlerdir. Öğrencilerin çözümleri, kat ilişkisi içeren problemleri yalnızca verilen sayının istenen katını bulmak şeklinde düşündüklerini, iki çokluğun birbirinin katı olarak ifade edilmesine alışık olmadıklarını göstermektedir. Niceliksel muhakeme için önemli olan kat ilişkisini içeren bu problem durumu, kat ifadelerinin yalnızca verilen sayıların çarpımı ve bölümü işlemlerini ifade etmediğini öğrencilere göstermiştir. Donguri uygulaması sonrasında sunulan problemler arasında en çok zorlandıkları problem yine kat problemi olmuştur. Bu aşamada sadece işlemsel olarak düşünmeleri nedeniyle ve problem durumunu anlamadıkları için zihinlerinde herhangi bir resimsel temsilin canlanmaması nedeniyle problemi çözememişlerdir. Nitekim Donguri uygulaması esnasında kat ilişkilerini doğru bir şekilde anlamlandırıp resimsel temsilleri aracılığıyla doğru bir şekilde çözerken, Donguri uygulaması dışında bu problemi anlamakta dahi zorlandıkları görülmektedir. Donguri yöntemi öğrencilerin problem durumunu anlamalarının yanında, niceliksel muhakeme becerilerini kullanmalarına ve geliştirmelerine uygun bir ortam sunmaktadır.

Fonksiyonel düşünmenin yer aldığı taş atma probleminde (Şekil 6.30 – 6.33), öğrenciler bir taşın gelebileceği yere göre puanın nasıl değiştiğini anlamaya çalışmışlar ve istenen puanın elde edilmesi için taşların nereye gelmesi gerektiğine karar vermişlerdir. Bu problemi Donguri uygulaması öncesinde ve sırasında işlemle yapmak yerine resimsel veya simgesel temsiller kullanarak çözmüşlerdir. Donguri uygulamasında öğrencilerin çözümlerinde kullandıkları “3+” ve “1-” ifadeleri problemi ifade eden denklemde sunulan ve taşın geldiği isabet durumunu gösteren bilinmeyen katsayılarını oluşturmaktadır. Öğrenciler bu ifadeleri aritmetik temelleri nedeniyle işlem işareti gibi yazmış olsalar da bunları kullanırlarken, taşın geldiği yere göre sonucu değiştiren bir etmen olarak almışlardır. Benzer şekilde fonksiyonel düşünmeyi içeren el sıkışma probleminde, kişilerin tek tek gelmesi durumunda el sıkışma sayılarının nasıl değiştiği resimlerinde adım adım gösterilmiştir (Şekil 6.34). El sıkışma probleminin başında öğrenciler hemen işlemsel olarak düşünerek problem bağlamını yanlış ifade ederken, resimsel temsiller kullanmaları sonrasında problem durumunu doğru anlamışlar ve

cevaba resimleri aracılığıyla ulaşmışlardır. Resimleri sonrasında dahi işlemlerine karar vermekte zorlanmışlardır. Bu anlamda fonksiyonel ilişkileri içeren bu tarz problem durumlarında, öğrencilerden sembolik temsiller ile çözüm beklemek yerine söylemsel olmayan temsilleri kullanarak problemi anlamalarını ve çözmelerini beklemek daha uygun olmaktadır. Donguri yöntemi öğrencilerin fonksiyonel düşünme içeren ilişkileri ve değişimleri göstermelerine fırsat vermektedir. Nitekim Donguri yönteminin, fonksiyonel ilişki içeren problemlerin anlaşılması ve çözümünde uygun bir yöntem olduğu söylenebilir.

Hem fonksiyonel düşünmeyi hem de niceliksel muhakemeyi içeren marul toplama probleminde öğrenciler, Arya'nın adım sayısını bulduktan sonra, bu adım sayında tavşanı ilerleterek onun marul toplamasını bulmuşlardır (Şekil 6.36). Diğer erken cebir problemleri gibi bu problemi de öğrencilerin yalnızca işlemleri düşünerek çözmesi mümkün görülmemektedir. Sunulan problem durumunu ve ilişkileri anlamaları için somut temsiller kullanarak göstermelerine ihtiyaç vardır. Nitekim öğrenciler de çeşitli dilsel ve resimsel temsiller kullanarak problem durumunda yer alan ilişkileri anlamışlardır. Resimlerini çizerken kullandıkları simgesel temsilleri belirli bir düzen içinde çizmemeleri nedeniyle zorluk yaşamış olsalar da sonunda problemi bu temsiller aracılığıyla çözebilmişlerdir. Bu anlamda erken cebir problemleri gibi farklı düşünme becerilerinin bir arada bulunduğu problemlerin çözümünde Donguri yöntemi iyi bir çözüm aracı sunmaktadır.

Sunulan problemlerde yer alan bu düşünme becerilerinin, Donguri yönteminin kullanılması sayesinde belirgin bir şekilde ortaya çıktığı söylenebilir. Nitekim problem durumunda sunulan ilişkilerin anlaşılmasında ve bu ilişkileri ifade eden işlemlerin anlamlandırılmasında öğrencilerin geliştirdikleri resimler etkili birer araç olmuştur. Bu anlamda Donguri yönteminin kullanımı, erken cebir problemlerinin çözümünde öğrencilerin çeşitli düşünme becerilerini desteklemede etkili bir yöntem olmuştur.

7.4. Uygulama Sonrasında Öğrencilerin Donguri Yöntemini Problem Çözme Sürecine Yansıtma Yönelik Sonuçlar

Donguri yönteminin uygulanmasının ardından öğrencilerin problem çözme yaklaşımlarında nasıl bir değişimin olduğunun incelendiği aşamada, öğrencilerin problem çözerken resim çizmeyi tercih ettiği ve resimlerini problemlerde sunulan miktarları ve ilişkileri temsil edecek şekilde kullandıkları görülmektedir. Bu anlamda resim çizmeyi

bir problem çözme aracı olarak kullanmışlardır. Daha önce yapamadıkları veya anlamadıkları belirlenen problemleri resim çizerek daha iyi anladıkları ve doğru yapabildikleri belirlenmiştir. Donguri yönteminin öğrencilerin problem durumlarını anlamalarını ve çözüm yolları geliştirmelerini desteklediği söylenebilir. Öğrencilerin bu aşamada kullandıkları temsillerin somut resimsel temsillerden ziyade soyut simgesel temsiller oldukları görülmektedir. Problemlerin çözümünde verilen her nesne için yuvarlaklar gibi soyut simgesel temsiller kullandıklarında, özellikle iki bileşenli sorularda (adım ve çiçek, iki ayrı adım gibi) neyin sayısını gösterdiklerini karıştırmışlar ve bu nedenle cevaba ulaşmakta zorlanmışlardır. Problem durumunda sunulanlar ile kendi çizimlerini yeniden düşünerek ilişkilendirmeleri sonrasında miktarları fark edip düzenleyerek sonuca ulaşmışlardır. Bu nedenle simgesel temsillerin, problemin bağlamı anlaşılmadan kullanılmasının karışıklık yaratabileceği, önce daha somut resimsel temsillerle ilişkilerin anlaşılması sonrasında simgesel temsillere geçilmesi gerektiği söylenebilir. Bu temsillerin yanında somut dilsel temsiller de problemleri anlatmaları esnasında etkili olurken, soyut sembolik temsilleri çok az kullandıkları, birçok işlemi resimsel veya simgesel temsilleri sonrasında yazdıkları belirlenmiştir. Hatta resim temsilleri varken işlemlere gerek duymadıklarını, işlemlerin bu şekilde görüldüğünü ifade etmişlerdir. Bu durum öğrencilerin problem çözerken her zaman işlemleri düşünmediklerini, işlemlerin dışında zihinlerinde farklı ilişkiler kurarak da çözebildiklerini göstermektedir. Bu anlamda Donguri yöntemi, öğrencilere tek problem çözme şeklinin işlemler olmadığını göstermiştir. Ayrıca işlemlerin ne anlama geldiğini, ne için yapıldığını, sayılar arasındaki ilişkilerin ne olduğunu ve bulunan sonuçların ne ifade ettiğini daha iyi anlamalarına ve bunları fark etmelerine fırsat vermiştir.

Öğrencilerin problemleri çözmeleri esnasında işlemleri ya parmaklarıyla sayarak yaptıkları ya da önceden ezberledikleri sonuçları hatırlamaya çalıştıkları görülmektedir. İşlemlerin sonuçlarını yanlış hatırlamaları durumunda sonuçları yanlış bulurken, bu işlemleri resmederek temsil ettiklerinde doğru cevaba ulaşabildikleri görülmektedir. Parmak saymayı kullanmaları ise bu işlemleri görselleştirmelerinin bir başka yöntemi olarak değerlendirilmektedir. Öğrencilerin resimsel temsiller kullanmaları süresince parmak saymayı kullanmadıkları, ama resim temsili kullanmadan işlemleri düşündüklerinde parmak saymayı kullandıkları belirlenmiştir. Bu anlamda parmak sayma da işlemleri temsil etmenin somut bir yöntemi olarak değerlendirilebilir.

Görsel düşünmeye dayalı resim çizerek problem çözme yöntemi Donguri uygulamasının, belli bir süre öğrencilerle uygulanmasının ardından öğrencilerin problem çözme yaklaşımlarını olumlu yönde değiştirdiği ve gelişmelerine yardımcı olduğu söylenebilir. Uygulamanın bitmesinin ardından belli bir süre geçse de öğrenciler bu yöntemi kullanmaya devam etmişlerdir. Uygun problem durumları ve ortam sağlanması durumunda öğrencilerin bu yöntemi kullanmayı tercih ettiği söylenebilir.



8. SINIRLILIKLAR

Yapılan araştırma çeşitli yönlerden sınırlılıklar içermektedir. Araştırmanın sonuçları bu sınırlılıklar göz önünde bulundurularak değerlendirilmelidir.

Çalışma Eskişehir ilinin merkezinde yer alan sosyoekonomik düzeyi orta-üst seviyede olan bir ilkokula devam eden dört 3. sınıf öğrencisi ile gerçekleşmiştir. Bu anlamda çalışma bu katılımcı öğrencilerle sınırlıdır. Çalışmaya yalnızca dört öğrenci katılmış ve bunlar klinik görüşmeler ile derinlemesine incelenmiştir. Ancak çalışmada elde edilen bulgular ve sonuçlar bu öğrencilerin davranışları ve ifadeleri ile sınırlıdır. Çalışmanın daha fazla sayıda öğrenci ile uygulanmasına ihtiyaç vardır. Aynı zamanda bir sınıf ortamı gibi birçok öğrencinin etkileşim içinde bulunduğu bir ortamda da çalışmanın uygulanması gerekmektedir.

Çalışma, toplamda 17 seanstan oluşan 14 haftalık bir süreçte uygulanmıştır. Donguri yönteminin öğrenciler tarafından ilk kez uygulandığı ve görselleştirmenin öğrenildiği bu süreç bu süreyle sınırlı kalmıştır. Ayrıca uygulamanın bir dönemden fazla uzamasını önlemek için her hafta 2 seans yapılarak haftada 2 problem çözülmüştür. Ancak Donguri yönteminde her hafta yalnızca 1 problem çözülmesi önerilmektedir. Öğrencilerin yöntemi daha iyi öğrenmesi ve etkili kullanılması için daha fazla zamana ihtiyaç vardır. Donguri yönteminde, yapılamayan problemlerin daha sonra öğrenci tarafından yeniden çözülmesi istenmektedir. Ancak bu çalışmanın süre sınırlaması olması ve amaçları doğrultusunda buna ihtiyaç duyulmaması nedeniyle uygulanmamıştır. Donguri yönteminin daha doğru değerlendirilebilmesi için bu uygulamanın da yapılmasına ihtiyaç vardır.

Donguri yöntemi başlangıç seviyesinden itibaren uygulanabilecek 700 soruluk bir içeriğe sahiptir. Ancak bu problemler ülkemizde uygulanan öğretim programıyla tam olarak uyumlu değildir. Bu nedenle bu çalışmada araştırmacı tarafından uygun problemler geliştirilmiş ve bunlar kullanılmıştır. Bu anlamda çalışma bu problemler ile sınırlıdır.

9. TARTIŞMA

Çalışmada elde bulgu ve sonuçlar, bu bölümde üç başlık altında tartışılmaktadır. Buna göre tartışma bölümü, görsel düşünme ve Donguri yöntemine yönelik tartışma; temsil türleri ve soyutlamanın gelişimine yönelik tartışma; erken cebir problemlerindeki düşünme becerilerine yönelik tartışma başlıkları altında sunulmaktadır.

9.1. Görsel Düşünme ve Donguri Yöntemine Yönelik Tartışma

Matematikte görsel düşünme denilince ilk olarak geometrik yapıları ve şekilleri kapsayan temsiller, uzamsal düşünme, perspektif gibi beceriler akla gelebilir. Ancak görsel düşünme matematiğin her alanı için önem arz eden, matematik yapmak için gerekli olan bir beceridir (Giaquinto, 2007; 2020). Benzer şekilde, matematik eğitiminde çocukların kendi bilgilerini yapılandırarak buluşsal bir süreç içinde matematik yapmalarında görsel düşünme önemli ve gerekli olmaktadır. Matematikte görsel düşünmenin etkili olduğu temsillerin kullanımı ve sembolleştirmenin gelişimi ile soyutlama süreçlerinin matematik eğitimindeki karşılığı erken cebir öğrenme süreci olmaktadır (Heeffer, 2013). Bu süreçte çocukların matematiksel yapıları ve ilişkileri anlamalarında, bu yapılar ve ilişkiler üzerine düşünmelerinde, düşündüklerini çeşitli şekillerde ifade etmelerinde ve yansıtmalarında görsel düşünme etkili ve önemli olmaktadır. Donguri yöntemi, problem çözmeyi merkeze alarak, karşılaşılan problem durumunun anlaşılmasında, çözüm yollarının geliştirilmesinde ve bulunan fikirlerin ifade edilmesinde görsel düşünmeyi etkili bir araç olarak kullanmaktadır. Bu anlamda matematik eğitiminde görsel düşünmenin kullanılmasında Donguri yöntemi elverişli bir yaklaşım sunmaktadır.

Donguri yönteminin temel yaklaşımı incelendiğinde, görme duyusunu anlamanın ve düşünmenin bir aracı olarak kullandığı, bununla birlikte zihinde canlandırmayı, hayal etmeyi ve bu sayede imgeleri oluşturmayı ve bunlar üzerinden düşünmeyi içerdiği görülmektedir. Oluşturulan bu imgeler üzerinde kopyalama, taşıma, dönüştürme ve karşılaştırma gibi eylemlerin yapılmasını sağlayarak düşünmenin gerçekleştiğini belirtmektedir (Itoyama ve Magaña-Takashima, 2022). Bu eylemler çocukların matematiksel işlemleri görselleştirmelerinde etkili olmaktadır. Örneğin, taşıma eylemi ile toplama işleminin nesnelerin bir araya gelmesiyle oluştuğunu gösterebilirken, karşılaştırma eylemi ile çıkarma işlemi, kopyalama eylemi ile nesnelerin tekrarlanmasıyla çarpma işlemi görselleştirilebilmektedir. Dönüştürme eylemi ise nesnelerin yeniden

düzenlenmesini içererek bölme işleminin görselleştirilmesine fırsat verirken, çoklukların farklı formlarda ifade edilmesini sağlayarak miktarların düzenlenmesini ve farklı çözüm yollarının geliştirilmesini içermektedir. Bunlara ek olarak Donguri yönteminde yer alan kurallar arasında, çocuklar kendini hazır hissettiğinde, matematiksel işlemlerin problemin resimle çözülmesinin ardından en son aşamada yapılması, işlemleri anlamlandırmalarında ve işlemlerin verilen sayılarla yapılan herhangi bir şey olmadığını fark etmelerinde etkili olmaktadır. İlköğretim seviyesindeki öğrencilerin dört işlemi kullanma becerilerinin ve yaptıkları hataların belirlendiği çalışmalar incelendiğinde, işlemlerin yalnızca sayısal değerlerle sunulması durumunda öğrencilerin pek çok işlem hatası yaptıkları, işlemleri anlamlandıramadıkları ve sunulan sayılarla rastgele işlemler yaptıkları görülmektedir (Ekici ve Demir, 2018; Önal ve Aydın, 2022; Özdemir Baki, 2023). Bu çalışmalarda öğrencilerin hatalarını önlemek ve gidermek için çeşitli modelleme çalışmalarının ve görselleştirme yaklaşımlarının kullanılması ve anlamlı problem bağlamlarının sunulması önerilmektedir. Bu anlamda Donguri, işlemlerin anlamlarını sunan problem bağlamlarına yer vermesi ve bunların çözümünde çocukların kendi görsel temsillerini kullanarak görselleştirme yaklaşımını içermesi yönünden öğrencilerin işlemleri öğrenmesinde etkili bir yöntem sunmaktadır. Bu çalışmanın sonuçları incelendiğinde, öğrencilerin sunulan aritmetik problemlerindeki işlemlerin anlamlarını yansıtan görselleştirmeler kullandıkları görülmektedir. Aynı zamanda, öğrencilerin işlemleri yaparken çeşitli işlem hataları yapabildikleri, bunların da büyük oranda işlemlerin ezberledikleri sonuçlarını hatırlayarak yapmalarından kaynaklandığı, işlemlerdeki sayıların ilişkisine dikkat etmedikleri fark edilmiştir. Bu anlamda Donguri yönteminde yer alan önce çokluklar arasındaki ilişkilerin resim kullanılarak gösterilmesinin, çocukların işlemleri anlamlandırmasını ve sonuçlarını çizimlerinde görerek bulmalarını, bu sayede işlemlerin sonuçlarını hatırlamak yerine kendilerinin bulabileceklerini fark etmelerini sağlamaktadır. Resim ile ilişkilerin gösterilmesinin ardından bu ilişkiyi içeren işlemin sonradan yazılması, işlemlerin anlamlarını doğru yorumlamalarına ve işlemlerin verilen sayılar arasında rastgele yapılan bir şey olmadığını anlamalarına fırsat vermektedir.

Donguri yönteminde çocukların işlemleri ezberlemeleri veya zihinden işlem yapmaları yerine parmaklarını kullanarak işlemleri yapmalarına izin verilmesi gerektiği belirtilmektedir (Itoyama ve Magaña-Takashima, 2022). Çalışmada elde edilen bulgularda da öğrencilerin işlemleri yaparken parmak saymayı sıklıkla kullandıkları,

ancak Donguri yönteminin uygulandığı süreçte parmak saymayı kullanmak yerine çizdikleri nesneleri saymayı tercih ettikleri görülmektedir. Parmak sayma, çocukların zihinlerinde sayıları ve işlemleri görselleştirmenin bir aracı ve modeli olarak ortaya çıkmaktadır. Saymada ve hesaplamada parmakları kullanmak çocukların sayıların niceliksel anlamını öğrenmelerinde ve aritmetik işlemler için ilk stratejilerini geliştirmelerinde güçlü bir etkiye sahiptir (Bender ve Beller, 2012). Resim çizmenin kullanılmasıyla birlikte nesnelerin miktarını ve nicelikleri resim aracılığıyla göstermek, çocukların parmaklarını kullanmak yerine yeni sayma araçları olarak resim temsillerini kullanmalarını sağlamıştır. Bu yöntem, parmakların saymaya veya hesaplamaya yetmediği daha büyük sayıları temsil etme durumunda daha işlevsel olmaktadır. Ayrıca çocukların parmakları kullanmayı bırakarak yeni sayma stratejileri geliştirmelerine ve zihinlerinde bu miktarları yeniden düzenlemelerine fırsat vermektedir. Örneğin, çalışmada sunulan 75 kalemin temsil edilmesini içeren problem durumunda öğrenciler bu sayıda nesneyi çizmenin zor olacağını fark ettiklerinde bunları onluklar ve birlikler şeklinde düzenlemeye karar vermişlerdir. Böylece parmak sayısını aşan büyük sayıların görselleştirilmesinde resim temsilleri kullanışlı olmuştur.

Donguri yönteminde yer alan silgi kullanılmasına izin verilmemesi kuralı ise çocukların hatalarını fark etmelerinde, bu hataların silinerek yok olmadığı için görünür olmasında ve düşünme süreçleri boyunca geçtikleri yolların nasıl olduğunun hatırlanmasında etkili olmaktadır (Itoyama ve Magaña-Takashima, 2022). Çocukların işlemsel becerilerinin gelişmesinde, kavram yanılgılarının, yanlış anlamalarının ve hatalarının fark edilmesinde, önlenmesinde ve giderilmesinde bunların görünür olmasının ve kendileri tarafından keşfedilmesinin daha kalıcı bir öğrenme sağladığı belirtilmektedir (Draper ve Lott, 2020). Çalışmada yer alan bir öğrenci de silgi kullanmama uygulamasını çok sevdiğini, daha önceki düşüncelerinin de görünür olması açısından önemli bulduğunu ifade etmiştir. Bu anlamda düşünce akışının görülmesinin yanında hataların da görünür olması, bunların fark edilmesini ve hatırlanmasını sağlayarak tekrar aynı hataların yapılmasını önlemede etkili olmaktadır.

Donguri yönteminin en önemli yönü ise herhangi bir aceleyle yer vermeden, yavaş, tekrarsız ve ezbersiz bir şekilde çocukların kendi hızlarında ilerlemelerine fırsat vermesidir. Haftada yalnızca bir veya en fazla iki problem çözülmesi önerilmektedir (Itoyama ve Magaña-Takashima, 2022). Bu problemler de aynı işlemlerin tekrar tekrar yer aldığı rutin problemler değil, her problemde yeni bir durumun yer aldığı, çocukların

keyif alarak çözmelerine fırsat veren problemlerdir. Çalışma boyunca öğrencilere problemleri çözmeleri için istedikleri kadar süre verilmiştir ve Donguri uygulaması sürecinde problemleri çözme sürelerine bakıldığında bir ders saati olan 40 dakikalık süreyi aşmadığı, hatta yöneme alışmaları sonrasında kimi problemlerde bu sürelerin oldukça kısaldığı görülmektedir. Resim çizerek problem çözmenin zaman kaybettireceği düşünülebilir, ancak çocukların problemleri daha iyi anlamaya başlamaları sonrasında problemleri çözme hızları giderek artacağı için başlarda kaybedilmiş gibi görülen süreler zamanla kısalmaktadır. Bu anlamda, Donguri yönteminin okullardaki ders saatlerinde uygulanmasının önünde zaman sınırlaması bir engel teşkil etmemektedir. Aynı zamanda, her çocuğun öğrenme ve anlama hızının farklı olduğu göz önüne alındığında Donguri yöntemi bireyselleştirilmiş bir öğrenme ortamı sunmaktadır.

Donguri yöntemi problem çözme sürecinde sadece resimlerin kullanılmasına indirgenecek bir yöntem değildir. Sunulan problemlerde cümlelerin tek tek okunarak ve her okunan cümlede geçenlerin zihinde canlandırılması sonrasında bunların resminin en somut şekilde çizilmesini sağlayarak problemin çözülmesini içermektedir (Bülbül, 2019). Yöntemin ilk öğrenilmesi aşamasında amaç, problemlerin çözümünden ziyade, söylenenlerin görselleştirilmesinin öğrenilmesini sağlamaktır. Bu amaçla, öncelikle çocuğun zihninde canlandırdıklarını nasıl görselleştireceğini öğrenmesi beklenmekte ve herhangi bir matematiksel işlem yapması istenmemektedir. Zihinden geçenlerin resme dökülmesi belirli bir beceri ve gelişim süreci gerektirmektedir. Bu çalışmanın başında durum belirleme olarak tasarlanan aşamada öğrencilere herhangi bir yöntem öğretilmeden önce sunulan problemleri resim çizerek çözmeleri istenmiştir. Ancak öğrencilerin bu süreçte yaptıkları resimlerin bağlamı ve ilişkileri yansıtmadığı, problem çözümünde faydalanabilecekleri bir niteliğe sahip olmadığı ve çizimlerinin işlevsiz kaldığı görülmektedir. Bir problemi okurken cümlelere tek tek dikkat etmenin nasıl olması gerektiği ve resim çizerek problem çözmenin nasıl yapılması gerektiği öğretilmeden, sadece bunların sunulması ve istenmesinin öğrencilerin problem çözme becerilerine bir etkisi olmadığı görülmektedir. Donguri yönteminin içerisinde yer alan bu yaklaşımlar öğrencilerde kendiliğinden ortaya çıkmamakta ve öğrenilmesi gerekmektedir. Bunlara ek olarak öğrencilerin problemleri kendileri okurken sayıları yanlış okuyabildiği, miktarları ve ilişkileri gösteren kimi ifadelerle çok dikkat etmedikleri fark edilmiştir. Bunların, öğrencilerin problem bağlamını ve çokluklar arasındaki ilişkileri anlamalarında etkili olduğu düşünülmektedir. Donguri yönteminde yer alan

cümleleri tek tek okumanın ve okunan her cümlede geçenlerin zihinde canlandırılarak anlaşılması sonrasında söylenenlerin resminin çizilmesinin istenmesi, öğrencilerde karşılaşılan dikkatsizliklerin önlenmesinde etkili olacağı düşünülmektedir. Bununla birlikte yapılan çizimlerde neyin sayısının gösterildiği, sadece yuvarlak veya çizgi temsillerinden ziyade daha somut şekilde temsil edilerek gösterilmesi durumunda, nesneler arasındaki ilişkilerin daha açık ve anlamlı olacağı görülmektedir. Bu çizimler sonucunda neyin sayısına ulaşıldığı görünür olmakla birlikte, ulaşılan cevapta da neyin sayısı olduğunun birimi ile yazılması gerekmektedir (Bülbül, 2019). Böylece sadece sayı ile belirtilen şeyin neyin sayısı olduğunun anlaşılması ve problem durumunda geçen farklı sayılar arasındaki farkın ve ilişkinin anlaşılması sağlanmaya çalışılmaktadır.

Donguri yönteminin uygulandığı ilk seanslarda öğrencilerin problemleri resimle göstermekte zorlandıkları, nasıl temsil edeceklerini bilemedikleri için ya çok detaylı resimler çizdikleri ya da çizimlerini belirli bir düzende yapmamalarından dolayı karışıklık yaşadıkları görülmüştür. Problem çözmede ilk kez karşılaştıkları bu yöntemin uygulanmasının başında bu tarz durumların yaşanması beklenen bir durumdur. Ancak ilerleyen haftalarda resim çizmeye ve problem durumunda söylenen miktarları göstermeye alışmaları sayesinde bu zorlukların çoğu aşılmıştır. Resimlerinde çoklukları düzenli çizmemeleri durumunda karışıklık yaşamış olsalar da bu karışıklıklar onlara resimlerini düzenlemeleri ve yeni yöntemlerle yeniden çizmeleri konusunda güdüleyici olmuştur. Öğrencilerin miktarları çizmelerinde zamanla bir düzenin oturması, zihinlerinde de bu çoklukları yapılandırmaya başladıklarını göstermektedir.

9.2. Temsil Türleri ve Soyutlamanın Gelişimine Yönelik Tartışma

Zihinde oluşan imgelerin resim aracılığıyla temsil edilmesi çocukların zihninde oluşan yapıların görünür kılınmasını sağlamanın yanında anlamalarının ve düşünmelerinin bir sürecini de yansıtmaktadır. Zihinde oluşan ve bu imgeler üzerinde uygulanan kimi eylemlerin resim üzerinde gösterilmesi ise düşünme sürecinde uygulanan işlemleri görünür kılmaktadır. Bu sayede çocukların düşünme süreçleri boyunca geliştirdikleri düşünceleri çeşitli şekillerde temsil edilmiş ve ortaya çıkan bu temsillerin nasıl dönüştüğü görülmüş olmaktadır. Çocukların kendi geliştirdikleri bu temsillerin neler olduğu, temsillerin birbiriyle nasıl ilişkili şekilde ortaya çıktığı ve ne tür temsillerin üretildiği zihinsel süreçlerin anlaşılmasında önemli olmaktadır (Duval, 2006; 2008). Çalışmanın sonuçları incelendiğinde, Donguri yönteminin uygulanması sürecinde

öğrencilerin daha çeşitli temsiller ürettikleri, sözel ve yazılı dili içeren dilsel temsilleri, çeşitli görselleştirmeleri içeren resimsel temsilleri, jestleri, simgesel temsilleri ve matematiksel sembolik temsilleri birbirleriyle etkileşimli bir şekilde kullandıkları belirlenmiştir. Bununla birlikte resimsel somut temsillerini dilsel temsillerle destekleyerek geliştirdikleri, ardından bunları ifade eden daha soyut temsiller olan sembolik temsillere geçiş yaptıkları görülmektedir. Bu şekilde çoklu temsillerin birbiriyle etkileşimli olarak kullanılması ve somuttan soyuta doğru bir gelişim içermesi, çocukların zihinsel modellerini geliştirmelerinde oldukça faydalı olmaktadır (Schnotz, 2005). Bu anlamda Donguri yöntemi çocukların, kendi temsillerini üretmesinin yanında, çoklu temsillerin kullanılmasını ve bunlar arasında etkileşim kurarak farklı temsiller ile ilişkileri ifade etmelerine fırsat vererek zihinsel modellerin ve kavram imajlarının gelişmesinde etkili bir yöntem sunmaktadır.

Bu çalışmada öğrencilerin kullandıkları temsillerin belirlenmesinde ve sınıflandırılmasında Duval (2017) tarafından geliştirilen semiyotik temsil dağarcığı çerçevesinden yararlanılmıştır. Duval'ın geliştirdiği bu analiz çerçevesinin daha çok geometrik yapıları içeren problem durumlarının incelenmesinde kullanıldığı görülmektedir (Bernabeu, Moreno ve Llinares, 2021; Çeziktürk ve Özdemir, 2021). Ancak sunulan çerçeve, matematik problemlerinin hepsi için temsillerin sınıflandırılmasını içerecek niteliğe sahiptir. Bu çalışma kapsamında erken cebir bağlamında temsillerin kullanımları üzerinden soyutlamanın gelişimini yansıtacak şekilde uyarlanmıştır. Bu uyarlama sonucunda elde edilen analiz çerçevesi, Donguri yönteminin uygulandığı bu süreçte çocukların temsillerini analiz etmede kullanışlı olmuştur. Duval'ın çerçevesinde söylemsel olmayan kayıtlar olarak, ikonik imgeler ve ikonik olmayan geometrik şekiller şeklinde belirtilen yapılar, erken cebir bağlamında somut resimsel temsiller olarak ele alınmıştır. Resimsel temsillerin karakteristik özelliklerinden soyutlanarak daha genel ilişkileri gösterecek şekilde kullanılması ise simgesel temsiller olarak ifade edilmiştir. Görsel düşünme bağlamında ifade etmek gerekirse, söylemsel olmayan bu temsiller görsel temsil olarak ifade edilebilir. Donguri uygulaması sürecinde öğrencilerin görsel temsiller olan resimsel temsillerle simgesel temsilleri birlikte kullandıkları görülmüştür. Bu süreçteki kimi resimsel ve simgesel temsillerin birbiri arasındaki geçişe yardımcı olan yarı somut temsiller içerdikleri de fark edilmiştir. Örneğin, öğrencilerin beden hareketlerini kullandığı jestler ve parmaklarını sayma eylemleri böyle bir yarı somut temsil olarak değerlendirilebilir. Çeşitli parmak

hareketleriyle sayma eylemini birlikte içeren ve bu sayede miktarların birer temsili olarak kabul edilen parmak sayma, somut bir temsille miktarları göstermenin bir derece daha soyutlaşmış hâli olarak düşünülebilir. Bu konuda parmak sayma, onluk sayı sistemine geçişte miktarları gruplayarak temsil etmenin bir aracı olarak kabul edilmektedir (Di Luca ve Pesenti, 2011). Çocukların düşüncelerini ifade etmelerinde de jestlerin önemli birer temsil olduğu belirtilmektedir (Radford, 2018). Benzer şekilde söylemsel temsiller arasında öğrencilerin dilsel olarak kullandıkları sözlü ve yazılı kimi sayı ifadeleri veya matematiksel bir işlemi yazmadan kullandıkları semboller, dilsel temsiller ile sembolik temsiller arasında bir geçiş sağlayan yarı somut temsiller olarak değerlendirilebilir. Uyarlanan analiz çerçevesinde böyle bir geçiş temsiline yer verilmemiş olmasına rağmen, Duval tarafından sunulan çerçevede yardımcı geçiş temsillerine yer verildiği görülmektedir. Bu anlamda yarı somut temsiller bu şekilde bir geçiş temsili olarak değerlendirilebilir. İfade edilen bu değişikliklerle görsel düşünmeye dayalı problem çözme sürecinde kullanılan temsil türlerinin dağılımı Şekil 9.1’de sunulmaktadır.

	SÖYLEMSEL Temsiller Kelime ve sembol dizilerini üretmek ve düzenlemek	GÖRSEL Temsiller Biçimsel ve şekilsel yapıları üretmek ve düzenlemek
SOMUT Temsiller Zihin içi ve zihin dışı algı verileri	DİLSEL TEMSİLLER Nesneleri adlandırmak, ifade etmek, akıl yürütmek için kullanılan sözlü ve yazılı ifadeler	RESİMSSEL TEMSİLLER Nesnenin zihinsel üretimini oluşturan imgeler ve karakteristik özelliklerinin resimsel gösterimi
YARI SOMUT Temsiller Geçişe yardımcı temsiller	RAKAMLI İFADELER Matematiksel işlem içermeyen rakamlı ifadeler veya semboller Ritmik sayma	JESTLER Bedeni kullanarak yapılan ve parmak sayma gibi eylemler
SOYUT Temsiller Bağlamdan çıkarılmış veriler	SEMBOLİK TEMSİLLER Sayı sistemlerinin kullanımı, kardinal ve ordinal değerler, cebirsal ve formal ifadeler	SİMGESEL TEMSİLLER Nesnenin temel özelliklerini gösteren çizgi, çubuk, yuvarlak gibi gösterimler

Şekil 9.1. Görsel düşünmeye dayalı kullanılan temsil türleri dağılımı

Çalışma boyunca öğrencilerin kullandıkları temsiller incelendiğinde, durum belirleme aşamasındaki temsillerinin soyut sembolik ağırlıklı temsiller olduğu ve diğer temsillere pek geçiş yapmadıkları görülmektedir. Böyle bir problem çözme süreci somuttan soyuta geçişi ve temsiller arası geçişi içermemektedir. Aynı zamanda böyle bir süreçte öğrencilerin problem durumlarını doğru anlamlandıramadığı belirlenmiştir. Özellikle erken cebir problemlerini anlamadıkları ve herhangi bir işlem yapamadıkları görülmektedir. Donguri uygulaması boyunca somut olan resimsel ve dilsel temsilleri ağırlıklı olarak kullandıkları görülmektedir. Özellikle dilsel temsiller zorlandıkları problem durumlarında zihinlerinden geçenleri ifade etmelerinde, akıl yürütmelerinin görünür olmasında ve işlemlerini yansıtan ifadeler kullanmalarında etkili olmuştur. Görsel temsillerinin aracılığıyla problemleri çözmelerinin ardından son aşamada sembolik temsilleri kullanmışlardır. Erken cebir problemlerinin çoğunda ise sembolik temsilleri yazmamayı tercih etmişlerdir. Bu süreçte kontrol etme aşamasında dilsel temsiller ile düşüncelerini ve yaptıkları çizimleri açıklarken işlemlerin neler olacağını fark ettikleri ve bunun sonrasında sembolik temsillerle işlemleri yazdıkları görülmektedir. Matematik problemlerinin çözümünde sesli düşünme yaklaşımlarının kullanılmasının öğrencilerin problemleri doğru anlamalarında, farklı çözüm yolları geliştirmelerinde ve düşüncelerinin görünür olmasında etkili olduğu belirtilmektedir (Pepper vd., 2018). Erken cebir problemlerinin çözümünde yer alan dilsel temsiller çoğunlukla sesli düşünceleri içermektedir. Dilsel temsiller öğrencilerin problemleri çözmesinde resimsel temsillerinden sonra en işlevsel temsilleri olmuştur. Bunların yanında öğrencilerin problem durumundaki ilişkileri ve değişimleri anlamadıkları durumlarda jestlerin kullanılmasının etkili olduğu belirlenmiştir. Durumu dramatize ederek canlandırmayı içeren jestlerin kullanımı görselleştirmenin farklı bir yolu olarak değerlendirilmiştir. Donguri yönteminde de bu tür dramaların kullanılması, beden hareketleri yardımıyla çocukların ilişkileri zihinlerinde canlandırmalarını kolaylaştırması bakımından önerilmektedir (Bülbül, 2019). Çeşitli el ve vücut hareketlerini içeren jestler, görselleştirmenin bir yöntemi olarak kinestetik imgeleme kategorisinde yer alırken (Presmeg, 1986), matematiksel ifadelerin ve işlemlerin anlatılmasında, fikirlerin iletilmesinde ve bunların hatırlanmasında çeşitli jestlerin önemli bir yeri olduğu belirtilmektedir (Congdon vd., 2017). Bu anlamda jestlerin kullanımı durumların ve düşüncelerin ifade edilmesinde yarı somut temsiller olarak değerlendirilebilir. Bu

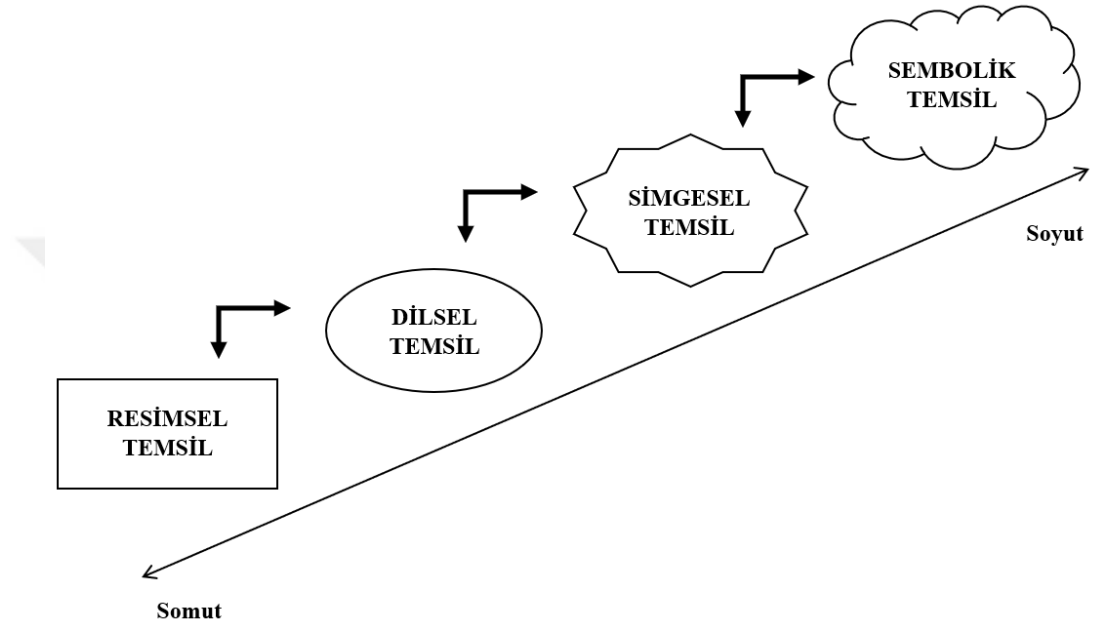
çalışmada ortaya çıkan jestler resimsel temsiller olarak değerlendirilmiştir. Ancak jestlerin yer aldığı bu temsillerin yarı somut birer geçiş temsili olduğu düşünülebilir.

Öğretmen tarafından görselleştirmenin öğretimi sürecinde, ilişkilerin genel yapısını göstermek amacıyla sunulan temsiller daha soyut çizgisel ve grafiksel temsilleri içermektedir. Böylece öğrencilerin kendi ürettikleri somut temsilleri adım adım yarı somut temsillere dönüştürmeleri sonrasında soyut sembolik temsillere geçmelerinin ardından öğretmen tarafından daha soyut temsiller sunulmuştur. Bu süreç temsillerin somuttan soyuta gelişimi üzerinden soyutlamanın yapılandırılmasını içermektedir. Uygulama boyunca problemleri kontrol etme sürecinde öğrencilere verilen dönütlerin ve görselleştirmenin öğretimi amacıyla yapılan çizimlerin, öğrencilerin yöntemi öğrenmesinde, resimlerini daha etkili kullanmalarında ve temsillerinin gelişiminde faydalı olduğu görülmüştür.

Sonuç olarak uygulama boyunca öğrencilerin problemleri çözümünde çoklu temsiller kullanması, önce somut temsillerle başlanması sonrasında yarı somut temsillerin ardından daha soyut temsillere geçilmesi problemleri anlamalarında, düşünme yolları geliştirmelerinde ve düşüncelerini ifade etmelerinde etkili olmuştur. Ancak öğrencilerin nispeten daha aşına oldukları ve problem durumunu duydukları anda işlemlere karar verebildikleri aritmetik işlemleri içeren problem durumlarında, resim çizerek göstermek ve bu yolla cevaba ulaşmak onlara daha kafa karıştırıcı geldiği de görülmektedir. Çünkü bu tarz problemleri işlemle yapmaya alıştıkları ve işlemle daha hızlı cevaba ulaştıkları için resim çizmek bu aşamada onlara zaman kaybı gibi görünmüştür. Ancak ilerleyen seanslarda erken cebir problemlerine geçilmesiyle problemleri resim kullanarak çözmeye başladıkları ve resim ile cevaba ulaşırken matematiksel işlemleri bulmakta zorlandıkları da görülmektedir. Buradan hareketle Donguri yönteminin, yeni kavramların ve durumların öğrenilmesinde etkili olurken, daha önceden öğrenilmiş ve bir derece soyutlanmış kavramların kullanılmasında daha yanıltıcı olabildiği söylenebilir. Bu nedenle Donguri yönteminin, öğrenilmiş kavramların bir uygulaması olarak kullanılmasından ziyade, yeni kavramların öğrenilmesinde bir araç olarak kullanılması daha etkili olacaktır.

Donguri yönteminin uygulanması sürecinde öğrencilerin öncelikle detaylı ve daha somut resim temsilleri ile başladıkları, zamanla bu resim temsillerinin de çeşitli simgesel temsillere dönüşmeye başladığı ve bu sayede soyutlaşarak daha genel bağlamları içeren ilişkileri göstermeye başladıkları görülmektedir. Öncelikle problem durumunun

anlaşılmasını içeren resimsel temsillerin daha sonra ilişkileri göstermeye yönelik daha sistematik çizimlere ve simgesel temsillere dönüştüğü, bunların dilsel temsillerle desteklenmesinin yanında en son aşamada sembolik temsillere geçildiği görülmektedir. Temsil kullanımına dayalı soyutlamanın gelişimini yansıtan bu süreç Şekil 9.2’de genellenmektedir.



Şekil 9.2. Görsel düşünmeye dayalı temsil türleri bağlamında soyutlamanın gelişimi

Soyutlamanın gelişimini yansıtan bu sürecin Tall (2007, 2008) tarafından ifade edilen matematiksel bilginin yapılandırılmasında geçilen matematiğin üç dünyasını içerdiği söylenebilir. Buna göre kavramsal somut dünya resimsel temsilleri içerirken, algısal sembolik dünya dilsel ve simgesel temsilleri içermekte ve aksiyomatik formal dünya ise sembolik temsilleri içermektedir. Ayrıca sunulan bu soyutlamanın gelişim sürecinin, Kaput ve çalışma arkadaşları (2008) tarafından sunulan sembolleştirmenin doğasındaki süreçleri içeren dört adımın bir benzerini içerdiği görülmektedir. Buna göre bir deneyimin yaşanması ve durumun anlaşılması resimsel temsillere; bu durumun sözlü ve yazılı şekilde informal temsil edilmesi dilsel temsillere; daha sistematik fiziksel temsillerin üretilmesi simgesel temsillere ve son olarak soyut temsiller ile sembollerin kullanılması sembolik temsillere karşılık gelmektedir. Bu anlamda aksiyomatik formal dünyayı içeren ve soyut matematiksel sembollerin kullanıldığı sembolik temsillere geçiş

aşaması öğretmenin müdahale ve açıklamaları sonrasında da gerçekleşebilir. Donguri yönteminin kullanıldığı bu çalışmanın verileri soyutlamanın gelişimini içeren bu süreci desteklemektedir. Donguri yönteminin, çocukların matematik dilini ve sembolleştirmeyi öğrenmelerinde, gelişimsel süreçlerini içererek ve somuttan soyuta adım adım geçerek soyutlamanın gelişimini desteklediği söylenebilir.

9.3. Erken Cebir Problemlerindeki Düşünme Becerilerine Yönelik Tartışma

Donguri yönteminin uygulandığı süreç boyunca öğrencilerin, aritmetik problemlerini çözümlerinde işlemlerin anlamını doğru yansıtacak görselleştirmeler ile ilişkisel düşüncelerini destekledikleri ve söylenen miktarları yansıtan görselleştirmeler ile sayı duyularını geliştirdikleri görülmektedir. Erken cebir problemlerinin çözümünde ilişkileri ve değişimleri anlamak için görsel temsillerini etkili kullandıkları görülmektedir. Erken cebir problemlerinde yer alan ilişkiler, aritmetik işlemlerle temsil edilmenin ötesinde ilişkiler içeren problem durumlarını içermektedir. Niceliksel muhakeme ve ilişkisel düşünmeyi içeren eşit şeker kutuları problemi aritmetik olarak çözülebilmesinin yanında şeker sayılarından bağımsız olarak bir değişim ilişkisini de içermektedir. Carraher ve meslektaşları (2008) bu problemi çocuklara kapalı birer kutu şeker vererek sunmuşlardır, çocukların çözümlerinde bu kutulardaki şeker sayılarını tahmin etmeye çalıştıkları ve resimsel temsiller kullanarak değişimi gösterdikleri belirtilmektedir. Bu çalışmada da öğrencilerin aritmetik yaklaşımlarının yanında resimsel temsiller kullanarak değişimi gösterdikleri görülmektedir. Mert'in şeker probleminde üçgen yuvarlak gibi temsiller kullanarak bilinmeyen sayıları göstermeye çalıştığı görülmüştür. Ancak bu şekilleri birbiriyle ilişkili kullanmamış olması nedeniyle çizimlerini anlayamamış ve problemi çözmede işlevsiz kalmıştır. Ancak el hareketleri kullanılarak yapılan görselleştirmeler sonucunda öğrencilerin değişimin nasıl gerçekleşeceğini ve şeker sayısındaki değişime bağlı kat ilişkisini daha iyi anladıkları görülmüştür.

Niceliksel muhakeme içeren kat probleminin çözümünde öğrencilerin aritmetiksel yöntemlerle cebirsel yöntemler arasında gidip geldikleri görülmektedir. Nitekim niceliksel muhakemenin aritmetiksel düşünme ile cebirsel düşünme arasında bir geçiş sağlamada köprü rolü gördüğü belirtilmektedir (Smith ve Thompson, 2008). Bu problemde görsel temsiller öğrencilerin cebirsel ilişkileri fark etmelerinde ve problemi doğru yorumlayıp çözmelerinde etkili olmuştur. Kat probleminin çözümünde Kenan'ın çeşitli denklemler kurarak çözmesi ise cebirsel düşünmeye sahip olduğunu yeteri kadar

göstermemektedir. Çünkü bu yöntemleri ezbere bir şekilde öğrenmiş ve yeteri kadar içselleştirememiştir. Denklemleri doğru bir şekilde kurmasına rağmen, bunları nasıl kullanacağını ve çözeceğini tam olarak bilmemektedir. Bu nedenle bu yaş grubundaki öğrencilere bu şekilde denklem kurmanın ve çözmenin öğretiminden önce bu denklemlerdeki ilişkileri gösterecek somut temsillerin oluşturulması ve bunların yapılandırılması sonrasında soyut denklem temsillerine geçiş yapılması daha uygun olacaktır.

Sunulan bir durumu yeterli somut temsille desteklemeden daha soyut temsillerle ifade etmek öğrencilerin bu temsilleri yanlış yorumlamasına sebep olabilir. Çalışmada buna benzer bir durum şeker problemindeki değişimin öğretmen tarafından çizgisel bir grafikte sunulması sonrasında yaşanmıştır. Derya bu soyut temsili diğer her problemde kullanabileceği bir temsil olarak algılamış ve problem durumuna uymasa da her problemin çözümünde kullanmaya çalışmıştır. Bu nedenle somut yapılar kullanılarak bağlamsal olarak ilişkilerin anlaşılması sonrasında bunların adım adım soyutlanarak daha genel temsillere geçilmesi önerilmektedir.

Fonksiyonel düşünme içeren problem durumlarında ise görsel temsillerin kullanımı problemlerin anlaşılması ve çözümünde çok etkili olmuştur. Özellikle bu problemlerde öğrencilerin sembolik işlemlerle ifade etmeyi tercih etmediği, resimsel temsillerinin problemin çözümünde yeterli olduğunu düşündükleri görülmektedir. Bu aşamada sesli düşünceleri sonucu akıl yürütmelerini göstermede dilsel temsilleri de etkili olmuştur. Moss ve arkadaşları (2008) tarafından sunulan el sıkışma probleminin çözümünde de öğrencilerin kendi çözüm teorilerini açıklamalarında dilsel temsilleri etkili kullandıkları görülmektedir. Erken cebir problemlerinin çözümünde çeşitli resimsel, dilsel veya semiyotik olan somut temsillerin kullanılmasının problem durumlarının anlaşılmasında, düşüncelerin ortaya çıkmasında ve ifade edilmesinde daha etkili olduğu görülmektedir. Bu süreçte kullanılan görselleştirmelerin erken cebir problemlerinde yer alan ilişkisel düşünme, niceliksel muhakeme ve fonksiyonel düşünme becerilerini desteklediği ve bunların görünür olmasını sağladığı belirlenmiştir.

Bunlara ek olarak Donguri yöntemi kullanılarak yapılan çözümlerin bağlamı daha gerçekçi olarak sunmada, anlamada ve çözmede daha etkili olduğu görülmektedir. Aynı zamanda öğrencilerin yaratıcı düşünme becerilerini destekleyerek kendilerinin farklı yollar geliştirmesine fırsat vermektedir. Görsel düşünme kullanılarak problem çözme, daha önce fark edilmeyen ilişkilerin ve akla gelmeyen yöntemlerin geliştirilmesini

sağlamaktadır. Çalışmanın sonuçları incelendiğinde, öğrencilerin başlangıçta anlamakta zorlandıkları ve herhangi bir çözüm yolu geliştiremedikleri problem durumlarını Donguri yöntemini kullanarak çözmeye çalıştıklarında anladıkları ve farklı çözüm yolları geliştirdikleri görülmektedir. Bunun yanında Donguri yönteminde kullanılan problemlere benzer olarak çalışmada geliştirilen problem durumlarının, öğrencilerin işlemsel becerilerinin yanında, ilişkisel düşünme, niceliksel muhakeme, sayı duygusu, fonksiyonel düşünme gibi çeşitli cebirsel düşünme becerilerini desteklediği belirlenmiştir.



10. ÖNERİLER

Çalışmanın uygulanma süreci ve araştırma boyunca elde edilen deneyim ve bilgilerden hareketle, ileride yapılacak benzer çalışmalar için çeşitli öneriler sunulmaktadır. Bu öneriler, Donguri yöntemini öğretimde kullanacak öğretmenlere yönelik öneriler ve ileride yapılacak bilimsel çalışmalar için araştırmacılara yönelik öneriler şeklinde iki başlık altında toplanmıştır.

10.1. Öğretmenlere Yönelik Öneriler

Donguri yöntemi, somut materyallere ve modellemelere dayalı eğitim yapmayı içeren Montessori veya Waldolf yaklaşımları gibi bir yaklaşım sunmaktadır. Ancak Donguri, görsel düşünmeyi temel alarak ve çalışma materyali olarak yalnızca kâğıt kalemin yeterli olmasının yanında bol miktarda hayal gücünün kullanıldığı bir öğretim modeli olmasıyla bu yaklaşımlardan farklılaşmaktadır. Öğrenme ortamlarında farklılaştırılmış öğretim yaklaşımları kullanmak isteyen öğretmenler için az materyal ve bol hayal gücüyle her türlü yapının görselleştirilmesine fırsat veren öğrenci merkezli bir ortam tasarımı sunmaktadır. Her öğrencinin kendi hızında ilerleyebileceği bireyselleştirilmiş bir yaklaşım olması nedeniyle kalabalık sınıf ortamları için uygun bir yaklaşım olduğu düşünülmektedir. Çalışmanın sonucunda elde edilen bulgular, bir problemin Donguri yöntemiyle resim çizerek çözülmesi için bir ders saatinin yeterli olduğunu göstermektedir. Hatta ilerleyen zamanlarda öğrencilerin hızlı çözmesiyle birlikte bir ders saatinde iki problemin çözülebileceği görülmüştür. Böylece öğrencilerin görselleştirmeyi öğrenme süreçlerinde ilk olarak öğretmenin tahtada bir problemi çözmesinin ardından öğrencilerin kendi defterlerinde bir problemi çözmelerinin istenmesi sağlanabilir. Öğrencilerin yöntemi öğrenmesi ve görselleştirmeye alışmaları sonrasında öğretmenin tahtadaki çözümleri azalabilir ve bunun yerine öğrencilerin tahtada ortaklaşa bir problemi çözmeleri istenebilir. Bunlara ek olarak her öğrencinin aynı soruyu çözmesini istemek yerine, öğrencilerin kendi istedikleri bir soruyu seçip çözmesine de fırsat verilebilir. Bunun yanında her öğrencinin yapamadığı problemlere tekrar dönmesi sağlanabilir.

Görsel düşünmeye dayalı bir matematik öğrenimi sürecinde oluşturulan görselleştirmeler kişinin zihinsel görüntülerini içerdiği için bireysel bir süreç olarak değerlendirilmektedir (Clements, 2014). Bu anlamda görsel düşünme her bireyin kendi zihinsel modellerini anlamlandırmasını, yapılandırmasını ve sunmasını içermektedir. Bu

süreçte oluşturulan her görsel sunumun bireysel olduğu unutulmamalıdır. Aynı zamanda her bireyin görselleştirme ve görsel imgeleme şekli ve süreci farklılık gösterebilir (Presmeg, 1986). Biri resimsel temsilleri iyi kullanabilirken, başkası kinestetik ve dinamik imgeleme ile daha iyi anlayabilir. Çalışmada elde edilen sonuçlarda öğrencilerin anlamadıkları durumlarda resimsel temsil üretemedikleri, bu durumları çeşitli el hareketleri ve jestler kullanarak anlayabildikleri görülmektedir. Bu nedenle her durumda sadece resimsel temsil kullanmak yerine çeşitli drama ve jestlerin kullanılması da farklı imgeleme şekillerini içererek öğrencilerin görsel düşünmesini destekleyecektir.

Öğrenciler tarafından oluşturulan her bir temsil onların kendi zihinsel süreçlerinin bir ürünü olarak değerlendirilmelidir. Benzer şekilde öğretmen tarafından sunulan ve görselleştirmenin öğretimini içeren süreçte kullanılan temsiller, öğretmenin kendi zihinsel temsillerini oluşturmaktadır. Sunulan bir temsil şekli biri tarafından çok iyi anlaşılırken bir diğeri tarafından yanlış yorumlanabilir veya yeteri kadar açıklayıcı olmayabilir. Çalışmada öğretmen tarafından eşit şeker kutularının bir çizgi şeklinde gösterilmesi bir öğrenci tarafından farklı yorumlanmış ve her durumda kullanabileceği bir temsil olarak düşünülmüştür. Bu nedenle öğretmenlerin de öğretimde görselleştirme yaparken ve görselleştirmenin öğretiminde görsel sunumları değerlendirirken ve kullanırken öğrencilerin kendi temsillerini kullanmaları ve bunlar üzerinden temsillerin adım adım soyutlaştırılarak standart temsillere geçilmesinin sağlanması önemli olmaktadır. Bu anlamda Donguri yöntemi, yalnızca bir öğretmenin temsillerle sunum yapmasından ziyade çocukların kendi sunumlarını üreterek bunları düzenlemelerini ve geliştirmelerini içermektedir.

Presmeg (1986, 2020) görsel sunumların üretiminde ve görselleştirmeyi öğrenme sürecinde karşılaşılabilecek zorlukları açıklamakta ve bunlarla başa çıkmak için öneriler sunmaktadır. Buna göre Donguri uygulaması boyunca karşılaşılan durumlar arasında öğrencilerin detaylı resimler çizmesi ve bu detaylardaki ayrıntılara takılmaları, çizimlerin titiz ve düzenli yapılmamasından kaynaklanan karışıklıkların yaşanması, niceliklerin ve ilişkilerin gösterilmesi yerine yalnızca nesnelerin resminin çizilmesi, somut olmayan anlamların daha soyut temsiller ile gösterilmesi sonucu soyutlaştırmanın engellenmesi ve kalıcı bir görüntünün oluşmasına neden olması gibi durumlar yer almaktadır. Çünkü görsel düşünmeye dayalı çeşitli görselleştirmeler kullanarak problem çözme süreci kendiliğinden ortaya çıkan veya bir anda kavranarak uygulanmaya başlanan bir beceri değildir. Aksine görsel düşünme becerisi zamanla gelişebilecek, farklı deneyimler ve

uygulamalar sonrasında olgunlaşarak verimli kullanılacak bir yöntemdir. Nitekim araştırmanın başında öğrencilerden resim çizerek problemleri çözmeleri istendiğinde kullandıkları temsillerin yetersiz ve verimsiz olduğu görülmektedir.

Görsel düşünme sadece resimlerin kullanılmasına indirgenecek bir yöntemden çok daha fazlasını içermektedir. Aynı şekilde Donguri yöntemi de sadece problem çözme sürecinde resim çizmenin ötesinde, zihinsel olarak görsel imgelerin geliştirilmesi, ilişkilerin zihinde canlandırılması, bu zihinsel imgelerin gelişimi için resim, simge, drama, jestler ve söylemler gibi çeşitli dışsal temsillerin kullanılmasını ve bunların belirli bir sistematik içinde düzenlenmesini içeren bir yöntem sunmaktadır. Bu nedenle Donguri yönteminin içselleştirilerek etkili bir şekilde kullanılması belli bir zaman almaktadır. Resim çizerek problem çözmeyi içeren bu süreçte resimleri etkili kullanma ve görsel düşünme becerisi zamanla kazanılan ve geliştirilen bir beceridir. Bu anlamda öğrencilere kendi ilerlemelerine göre yeterli zamanın verilmesi gerekmektedir. Bu süreç içinde de çeşitli zorluklarla karşılaşmak normaldir. Önemli olan karşılaşılabilecek zorlukların farkında olup öğrencilerin bunları aşması için gerekli zaman verilip uygun yönlendirmelerin yapılmasıdır. Aynı zamanda görsel düşünmeyi içeren bu yaklaşım yalnızca problem çözme sürecinde değil, bir konunun öğretiminin ilk aşamasından itibaren de kullanılabilir. Bu şekilde konuların anlatımında görsel sunumlardan yararlanılması öğrencilerin görselleştirme ve görsel düşünme becerilerini destekleyecektir (Bishop, 1988).

Görsel düşünmeyi içeren öğretim sürecinde karşılaşılabilecek bir diğer zorluk da çocukların resim çizmekten hoşlanmaması veya resim çizmeyi tercih etmemesi olabilir. Ancak bu durumun resimlerin hangi dönemde, nasıl sunulduğuna ve öğrenciden beklentilerin neler olduğuna bağlı olarak değişebileceği belirtilmektedir (Clements, 2014; Presmeg, 2006, 2020). Çalışmada öğrenciler, resim çizmekten hoşlandıklarını ve yöntemi sevdiklerini ifade etmiş olsalar da resimleri çizerken aceleci davrandıkları, resim çizerken zaman kaybı olacağını düşündükleri görülmüştür. Okul dışı bir zamanda uygulanan bu yöntemi okuldaki uygulamaları ile bağdaştıramamışlar ve okuldaki problem çözme süreçlerine bu yöntemi yansıtamamışlardır. Bunun nedenleri arasında okulda uygulanan yaklaşımlarda görsel düşünmeye uygun şekilde yer verilmemesi, daha hızlı ve daha çok soru çözenin yer alması, soruların yalnızca cevap içerecek şekilde sıkı sunulması veya sadece işlem yapacak kadar çok az yer bırakılarak sunulması, soruların herhangi bir görsel sunum içermeden sadece sözel olarak sunulmasının yanında herhangi bir

görselleştirmenin yapılmasına fırsat verecek şekilde sunulmamış olması gibi unsurlar sayılabilir. Görsel düşünmenin öğrenme ortamında yer verilmesinin, görselleştirmeye değer verilmesinin, çocukların bireysel tercihlerine saygı duyulmasının, çocuklardan beklenenlerin açık bir şekilde sunulmasının ve verilen görevlerin görselleştirmeye uygun olmasının çocukların resim çizmeye ve görsel düşünmeye karşı tutum ve inançlarını etkileyeceği belirtilmektedir (Presmeg, 2020). Donguri çalışmasının en başında görsel düşünmenin önemini göstermek ve neden resim çizerek problem çözüleceği konusunda çocukları ikna etmek için “Elma-Elba” etkinliği yapılmakta, böylece anlamak ve düşünmek için zihinsel imgelerin ve bunların görünür olmasını sağlayan resimlerin öneminin çocuklar tarafından da kabul edilmesi sağlanmaktadır. Donguri yönteminin uygulanmasını içeren kurallar, uygulamanın başında öğretmen tarafından açıklanmaktadır, böylece soruların cümle cümle okunarak ilerleneceği, her cümleden anlaşılanların resim ile gösterileceği, bilgi kullanılmayacağı, bulunan cevabın “cevap” diye belirtilmesi gerektiği ve işlemlerin en son ekleneceği gibi kurallar çocuklara açıklanmakta ve öğretmen de tahtada bir soru çözerken aynı kuralları gözetmektedir. Bu anlamda Donguri uygulaması çocuklara yapmaları ve yapmamaları gereken noktaları başlangıçta açıkça belirterek çocuklardan beklenenleri açıklamakta ve çocukları sıkmadan daha esnek bir çalışma ortamı sunmaktadır. Çocuklar bu kuralları açık bir şekilde bilerek uygulamaya başlamaktadır. Ayrıca öğretmenin tahtada resim çizerek soru çözmesini içerdiği için çocukların soruya uygun resimleri nasıl çizecekleri hakkında fikir vermekte ve görselleştirmenin öğretimini içermektedir. Çocukların görsel düşünmeyi kullanarak nasıl problem çözeceklerine yönelik talimatları uygulamanın başında açıklayarak çocuklardan beklenenleri açık bir şekilde sunmakta ve öğrenme sorumluluğunu kendilerine vererek bir didaktik sözleşme içermektedir. Bu anlamda Nardi (2014), görsel düşünme yaklaşımı içeren sürecin daha çok zaman alabileceğini belirtmekle birlikte, açık bir didaktik sözleşme yapılmasının ve uygun bir öğrenme kültürünün yaratılmasının ardından çocukların soyutlama gücünün gelişmesiyle kaybedilen zamanın telafi edilerek daha hızlı bir şekilde ilerleneceğini vurgulamaktadır.

Öğrencilerin problemleri çözmeyi bitirmesi sonrasında öğretmen tarafından yapılan çizimlerin çoğu simgesel temsilleri içermektedir. Görselleştirmenin öğretimini içeren bu aşamada öğrencilerin resimsel temsillerinin bir derece soyutlamasını içeren bu simgesel temsiller, ilişkilerin genellenmesi amacıyla kullanılmıştır. Ancak yeterli somut temsille desteklenmeden öğretmen tarafından sunulan bu soyut temsiller, öğrenciler tarafından

yanlış anlaşılabilir. Ayrıca öğretmenin her durumda müdahale etmeden, öğrencilere yeterli zamanı verip onların kendi çözümlerini geliştirmesine fırsat vermesi, öğrencilerin daha iyi anlamasını ve daha az hata yapmasını sağlamaktadır. Bu nedenle öğretmenin en son aşamada kontrol etme amaçlı dönütler vermesi ve öğrencilerin kendi geliştirdikleri temsiller üzerinden anlaşılmayan kısımları anlatmaya veya bunlardan hareketle genelleştirmeye çalışması daha verimli olmaktadır.

Donguri yönteminde, problemlerin sunumunda verilenlerin ayrı ayrı cümleler halinde sunulması problemin adım adım anlaşılması yer almaktadır. Çalışmanın sonuçlarının gösterdiği gibi problemleri sadece cümlelere ayırarak sunmuş olmak öğrencilerin problemleri anlamasında ve çözmesinde tek başına etkili olmamakla birlikte, problem çözme pratiklerini geliştirmede önemli bir etmen olduğu düşünülmektedir. Nitekim problem çözme temelli öğrenme ortamı tasarımlarında problemlerin cümlelere ayrılarak sunulduğu görülmektedir (Carpenter vd., 2015). Bu nedenle matematik derslerinde sunulan sözel problemlerin verilenler ve istenenlerin ayrı ayrı cümlelerde yer alacak şekilde sunulması önerilmektedir. Ancak problemleri böyle sunmanın yanında öğrencilerin problemleri nasıl okumaları gerektiğinin de öğretilmesine ihtiyaç vardır. Çalışmada yer alan öğrencilerin problemleri kendileri okurken, tüm cümleleri hızlıca okudukları, sonra tekrar dönüp okuma ihtiyacı hissettikleri veya cümlelerin altını çizerek okudukları görülmüştür. Bu şekilde okumak tek seferde okuduğunu anlamamanın önüne geçmekte ve tekrar tekrar okuma ihtiyacına neden olmaktadır. Bu nedenle cümlelere tek tek dikkat ederek okunması gerektiği, her okunan cümlede söylenenlerin neler olduğunun anlaşılması sonrasında diğer cümleye geçilmesi gerektiği vurgulanabilir. Bu aşamada her okunan cümlelerin zihinde canlandırılması ve mümkünse görsel temsiller ile gösterilmesi istenebilir.

Son yıllarda matematiksel problemlerin sunuluş şekline bakıldığında yalnızca sözel ifadelerin kullanılmasından ziyade görsellere dayalı bir şekilde sunulduğu, görsel temsillerin problemi anlamada ve çözmede etkili olduğu görülmektedir (Lowrie, 2012). Bununla ilgili olarak Hu vd. (2021), problemlerde yer alan resimlerin dekoratif, temsili, organizasyonel ve bilgilendirici işlevlerde olduğunu, bunlar arasında dekoratif resimler dışındakilerin öğrencilerin problemi anlama ve çözme becerilerini etkilediğini belirtmektedir. Dekoratif resimler işlevsiz olmakla birlikte, organizasyonel ve bilgilendirici olan temsillerin okunmasında ve işlevsel bir şekilde kullanılmasında görsel düşünme becerileri etkili olmaktadır. Ülkemizdeki ders kitapları incelendiğinde, yaygın

bir şekilde sözel olarak sunulan problemlerin daha çok temsili resimler içerdiği (İncikabı ve Biber, 2018), bunların dışında standart olan temsiller ile işlemsel temsilleri içerdiği (Usta, 2018), günlük hayat temsillerine ve öğrencilerin kendi soyutlamalarını gerçekleştirmelerine fırsat verecek nitelikte temsillere yer verilmemesinin yanında (Kılıçoğlu, 2020) görsel düşünme becerilerini destekleyecek nitelikte olmadıkları görülmektedir. Ayrıca kitaplarda yer alan problemlerin bilişsel beceriler yönünden incelendiği çalışmalarda, ilişkilendirmeye dayanmayan türdeki problemlerin yoğunlukta olduğu (Reçber, 2012; Usta, 2018), ilişkisel düşünmeyi geliştirmede yetersiz kaldıkları (Köse ve Tanışlı, 2011), öğrencileri zorlayacak ve üst düzey düşünme becerilerini geliştirecek nitelikte problemlerin çok sınırlı olduğu (Tertemiz vd., 2015), kendi bilgilerini yapılandırmalarına ve yaratıcı düşünme becerilerini kullanmalarına fırsat verecek etkinliklerin yer almadığı belirtilmektedir (Kılıçoğlu, 2020). Ülkemizdeki ders kitaplarının diğer ülkelerde matematik ders kitaplarıyla karşılaştırıldığı çalışmalarda ise ülkemizdeki ders kitaplarında üst düzey bilişsel beceriler yerine işlemsel becerilerin yoğunlukta olduğu (Kar ve Işık, 2015), görsel yoğunluğunun fazla olmasına rağmen bunların ilişkisiz ve yersiz görseller olduğu (Ata Özer, 2018) belirtilmektedir. Tüm bu durumlar göz önünde bulundurulduğunda ülkemizdeki ders kitaplarında kullanılan problem türlerinin ve temsil çeşitlerinin geliştirilmesine ihtiyaç olduğu görülmektedir. Öğrencilerin görsel düşünme becerilerini destekleyecek nitelikte problem ve etkinliklerin ders kitaplarında yer alması gerekmektedir. Donguri yönteminde kullanılan problemler incelendiğinde, öğrencilerin en basit işlemsel ilişkilerden başlayarak kendi bilgilerini yapılandırıp kendi hızlarında ilerleyerek daha karmaşık ve üst düzey düşünme becerileri gerektiren problem durumlarıyla karşılaştıkları, sunulan problemlerin çeşitli temsiller üretmeye elverişli olduğu görülmektedir. Örnek olarak çözümü yapılan Donguri problemlerinin ön analizlerinde sunulan çözüm yaklaşımları bile problem durumlarının en somut çözümden en soyut çözüme farklı yaklaşımlarla çözme potansiyeline sahip olduğunu göstermektedir. Bu anlamda Donguri yöntemine, derslerin işlenişini yansıtan ders kitaplarında da uygun şekilde yer verilmesi faydalı olacaktır.

10.2. Araştırmacılara Yönelik Öneriler

Görsel düşünmeye dayalı problem çözme yaklaşımı olan Donguri yönteminin uygulandığı bu çalışmada, öğrencilerin bu süreçte kullandıkları temsillerin türleri incelenmiştir. Çalışmanın sonunda görsel düşünmeye dayalı temsil türleri dağarcığı

sunulmuştur (Şekil 9.1). Buna göre ileride yapılacak çalışmalarda Donguri yönteminin uygulandığı süreçte öğrencilerin kullandıkları temsiller, önerilen bu temsil türleri dağılcığı kullanılarak analiz edilebilir.

Bu çalışmada Donguri yönteminin erken cebir öğreniminde kullanımı incelenmiştir. Ancak Donguri yöntemi erken cebir özelinde geliştirilmiş bir yaklaşım değildir. Matematik eğitimi kapsamlı bir şekilde ele almakta ve 5 yaşından itibaren çocukların karşılaşabileceği tüm kavramları içermektedir. Bu çalışmada Donguri yöntemi erken cebir öğreniminin başladığı düşünülen 3. sınıf seviyesindeki öğrencilerle uygulanmıştır. Ancak ilköğretimin ilk seviyesinden başlanarak çocukların karşılaştığı tüm matematik kavramlarının öğretiminde bu yöntemin uygulanması incelenebilir. Hatta Donguri yönteminin önerdiği gibi 5 yaş içeren okul öncesinden itibaren bu yöntemin kullanışlılığı incelenebilir. Böylece 5 yaşındaki bir çocuğun, karşılaştığı matematik kavramlarını öğrenmesinde Donguri yönteminin ne kadar kullanışlı olduğu ve bu yöntemin o seviyedeki çocuklarla uygulanmasının uygun olup olmadığı araştırılabilir. Bu sayede Donguri yönteminin en alt seviyeden başlanarak uygulanması boyunca boylamsal olarak bir incelemesi yapılabilir.

Bu çalışmada öğrencilerin Donguri yöntemini kullanmalarının derinlemesine incelenmesi amacıyla klinik görüşmelerle öğrencilerin eylemleri bireysel olarak incelenmiştir. Ancak bu yöntemin bir sınıf ortamı gibi birçok öğrencinin etkileşim içinde bulunduğu bir ortamda nasıl gerçekleşeceğinin incelenmesine ihtiyaç vardır. Bir sınıf ortamında öğrencilerin etkileşimli olarak bu yöntemi kullanmasının yanında böyle bir ortamda bireysel olarak öğrencilerin nasıl çalıştıkları da incelenebilir. Özellikle sınıf mevcudunun kalabalık olduğu sınıf ortamlarında, matematik dersinin işleyişi sürecinde Donguri yönteminin konuların öğretiminde bir araç olarak kullanıldığı çalışmalar yapılabilir.

Donguri yönteminde uygulama materyali olarak herhangi bir şeye ihtiyaç duyulmamakta, sadece kâğıt ve kalemin olması yeterli görülmektedir. Bu sayede sosyoekonomik düzeyi düşük olan ve imkânların daha yetersiz olduğu düşünülen ortamlarda bu yöntemin uygulanması incelenebilir. Çeşitli somut materyallerin veya teknolojik araçların kullanılmasına elverişli olmayan öğretim ortamlarında, yalnızca öğrencilere geniş bir kâğıt verilerek resim çizmelerini istemek, öğrencilerin hayal güçlerini kullanarak çeşitli temsiller geliştirmelerine fırsat vereceği düşünülmektedir. Benzer şekilde böyle bir ortamda öğretmen de herhangi bir materyal desteği olmadan

kendi çizimleriyle çeşitli temsiller üretebilecektir. Ancak çeşitli yetersizliklerin bulunduğu böyle ortamlarda farklı sosyal, kültürel ve çevresel faktörün de eğitime etkisi göz önünde bulundurularak bu yöntemin kullanılabilirliğinin incelenmesine ihtiyaç vardır.

Donguri yöntemi bireyselleştirilmiş bir öğrenme ortamı tasarımı içermektedir. Bu sayede özel eğitimde farklı ihtiyaçlara sahip çocukların bireyselleştirilmiş öğretim programlarının hazırlanmasında Donguri yönteminden faydalanılabilir. Özel eğitime gereksinim duyan ve matematik öğrenme güçlüğü yaşayan otizm, disleksi, diskalkuli, zihinsel engelli, işitme engelli, down sendromlu gibi çeşitli gruplar ile bu yöntemin uygulanması denenebilir. Böyle bir süreçte Donguri yönteminin avantajları ve dezavantajları çeşitli nitel ve nicel çalışmalarla incelenebilir.

Bu çalışmada Donguri yönteminin kendi problemleri kullanılmamış, onun yerine benzer tarzda problem durumları üretilmiştir. Donguri yönteminin kendi problemlerinin ülkemizdeki öğretim ortamlarında kullanımı incelenebilir. Japon kültüründen öğeler barındıran bu problem durumlarının ülkemizdeki çocuklar tarafından nasıl çözüldüğü ayrıca incelenebilir. Böyle bir ortamda öğrencileri zorlayan ve anlamalarını etkileyen durumlar nedenleriyle analiz edilebilir.

Donguri yönteminin uygulanmasının öğrencilerin matematiğe yönelik bakış açılarını, tutum ve inançlarını nasıl değiştirdiğine yönelik çalışmalar yapılabilir.

Donguri yönteminde geometri içerikli soruların daha az yer aldığı görülmektedir. Geometri konularının öğretiminde Donguri yönteminin nasıl kullanılabileceği ve bu yöntemin geometrik yapıları anlamada ne kadar etkili olduğu incelemeye açık bir konudur. Bu çalışmada analiz çerçevesi olarak Duval'den (2017) uyarlanan temsil sınıflaması çerçevesinin geometri problemlerinin analizinde kullanımı denenebilir. Bu noktada çerçevenin eksik kaldığı noktalar giderilerek çerçeve yeniden düzenlenebilir.

Donguri yönteminin öğrencilerin problem çözme becerilerine etkisi deneysel çalışmalarla da incelenebilir. Uluslararası çapta çeşitli problem çözme becerilerini ölçen PISA ve TIMSS gibi sınavlarda kullanılan problemleri, öğrencilerin Donguri yöntemini kullanarak çözmeleri ölçülebilir. Yapılacak deneysel araştırmalardaki ön test ve son test sonuçları arasındaki farklılıklar incelenerek öğrencilerin gelişimleri takip edilebilir.

KAYNAKÇA

- Andini, M., & Prabawanto, S. (2021, March). Relational thinking in early algebra learning: a systematic literature review. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1806, No. 1, p. 012086). IOP Publishing.
- Arnheim, R. (1969). *Visual thinking*. Univ of California Press.
- Ata Özer, A. (2018). *Türkiye 8. sınıf matematik konularına göre Türkiye, Singapur ve ABD matematik ders kitaplarının içerik ve görsellik açısından incelenmesi* (Yüksek Lisans Tezi), Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitü. <https://acikbilim.yok.gov.tr/handle/20.500.12812/596263>
- Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA]. (2019). *Program of research: Key findings from four international comparative studies*. <https://www.australiancurriculum.edu.au/media/4394/ac-bcc-fncc-sc-nzc-key-findings.pdf> adresinden 02.09.2021 tarihinde alınmıştır.
- Bartel, A. N., & Alibali, M. W. (2021). Symbolizing algebraic story problems: Are diagrams helpful? *Applied Cognitive Psychology*, 35(6), 1427-1442. <https://doi.org/10.1002/acp.3874>
- Bender, A. & Beller, S. (2012). Nature and culture of finger counting: Diversity and representational effects of an embodied cognitive tool. *Cognition*, 124 (2), 156-182. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2012.05.005>
- Bernabeu, M., Moreno, M. & Llinares, S. (2021). Primary school students' understanding of polygons and the relationships between polygons. *Educational Studies in Mathematics*, 106, 251-270. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10012-1>
- Beth, E. W., & Piaget, J. (1974). *Mathematical epistemology and psychology*. Springer Science & Business Media.
- Bickmore-Brand, J. (1990). Implications from recent research in language arts for mathematical teaching. *Language in mathematics*, 1-9. Portsmouth: Heinemann
- Bishop, A. J. (1973). Use of structural apparatus and spatial ability: A possible relationship. *Research in Education*, 9(1), 43-49.
- Bishop, A. J. (1980). Spatial abilities and mathematics education: A review. *Educational studies in mathematics*, 11(3), 257-269. <https://doi.org/10.1007/BF00697739>
- Bishop, A. J. (1988). Review of research on visualization in mathematics education. (Ed. B. Andrea), Proceedings of the Annual Conference of the International Group for

- the Psychology of Mathematics Education (12th, Veszprem, Hungary, July 20-25, 1988), Volume 1, 170-176.
- Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth, NA: Heinemann.
- Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990*. (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland and V. Warfield, Çev.). New York: Kluwer Academic Publishers.
- Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge, MA: Harvard University Press
- Bülbül, A. (2019). *Japon donguri yöntemi: çizerek matematik*. Tepebaşı Belediyesi Kent Enstitüsü Matematik Evi Yayınları, 2. <http://www.tepebasi.bel.tr/Japondonguriyontemi.pdf>
- Byrd, C. E., McNeil, N. M., Chesney, D. L., & Matthews, P. G. (2015). A specific misconception of the equal sign acts as a barrier to children's learning of early algebra. *Learning and Individual Differences*, 38, 61-67. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2015.01.001>
- Cai, J., & Moyer, J. (2008). Developing algebraic thinking in earlier grades: Some insights from international comparative studies. (Eds. C. E. Greenes, R. Rubenstein) *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics: Seventieth Yearbook*, (169-180). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Cajori, F. (2014/1919). *Matematik tarihi* (2. Basım). Ankara: ODTÜ Yayıncılık
- Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (2015). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. (Second Edition). Portsmouth, NH: Heinemann
- Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2018). Cultivating early algebraic thinking. (Ed. C. Kieran) In *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds* (107-138). ICME-13 Monographs, https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_5
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics education*, 37(2), 87-115.

- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. L. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. (Ed. J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton), *Algebra in the early grades*, (235-272). New York: Lawrence Erlbaum Ass.
- Carter, J. (2008). Visualization and understanding in mathematics. In *Proceedings of the second international symposium on mathematics and its connections to the arts and sciences* (pp. 223-232). Information Age Pub Inc.
- Cheeseman, J., Downton, A., Roche, A., & Ferguson, S. (2020). Investigating young students' multiplicative thinking: The 12 little ducks problem. *The Journal of Mathematical Behavior*, 60, 100817. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100817>
- Clements, M. A. (2014). Fifty years of thinking about visualization and visualizing in mathematics education: A historical overview. In: Fried M., Dreyfus T. (eds) *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground*, 177-192. Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7473-5_11
- Clements, M. A. (1984). Terence Tao. *Educ Stud Math*, 15, 213–238. <https://doi.org/10.1007/BF00312075>
- Congdon, E. L., Novack, M. A., Brooks, N., Hemani-Lopez, N., O'Keefe, L., & Goldin-Meadow, S. (2017). Better together: Simultaneous presentation of speech and gesture in math instruction supports generalization and retention. *Learning and Instruction*, 50, 65-74. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2017.03.005>
- Cooper, T. J., & Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: Models, representations and theory for teaching and learning. In Cai J., Knuth E. (eds) *Early Algebraization* 187–214. Advances in Mathematics Education. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_12
- Çeziktürk, O., & Özdemir, A. Ş. (2021). Treatments and Conversions in Student Written Solutions to Wasan Geometry Problems. *Acta Didactica Napocensia*, 14(2), 110-125. <https://doi.org/10.24193/adn.14.2.9>
- Di Luca, S., & Pesenti, M. (2011). Finger numeral representations: more than just another symbolic code. *Front. Psychology*, 2(272), 1-3. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2011.00272>
- Ding, M. (2021). *Teaching Early Algebra through Example-Based Problem Solving: Insights from Chinese and US Elementary Classrooms*. Routledge.
- Draper, C., & Lott, J. W. (2020). Addressing early algebra misconceptions and misinformation in classrooms. *Wisconsin Teacher of Mathematics*, 1, 32-35.

- Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking-The registers of semiotic representations*. Switzerland: Springer International Publishing.
- Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. In Radford, L., Schubring, G., Seeger, F. (Eds) *Semiotics in Mathematics Education*, 39-61. Rotterdam: Sense Publishers.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131. DOI: 10.1007/s10649-006-0400-z
- Duval, R. (1999). Representation, vision, and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In: Hitt F, Santos M (eds) *Proceedings of the 21st North American PME Conference, Vol 1*, 3–26.
- Ekici, B., & Demir, M. K. (2018). İlkokul 4. sınıf öğrencilerinin dört işlem problemlerini çözerken yaptıkları matematiksel hatalar. *Eğitimde Kuram ve Uygulama*, 14(1), 61-80. doi:10.17244/eku.338880
- Giaquinto, M. (2020). The epistemology of visual thinking in mathematics. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2020 Edition). URL: <https://plato.stanford.edu/archives/spr2020/entries/epistemology-visual-thinking/>
- Giaquinto, M. (2007). *Visual thinking in mathematics: An epistemological study*. Oxford University Press.
- Goldenberg, E. P. (2014). “Mathematical literacy”: an inadequate metaphor. (Eds. M.N. Fried, T. Dreyfus), *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground*, (139-156). https://doi.org/10.1007/978-94-007-7473-5_9. Springer, Dordrecht.
- Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. *The roles of representation in school mathematics, 2001*, 1-23. NCTM 2001 Yearbook
- Heeffer, A. (2013). Algebraic symbolism as a conceptual barrier in learning mathematics. In M. Inprasitha (Ed.), *6th East Asia Regional Conference on Mathematics Education*, Proceedings (Vol. 3, pp. 2–10).
- Hu, L., Chen, G., Li, P., & Huang, J. (2021). Multimedia effect in problem solving: A meta-analysis. *Educational Psychology Review*, 33, 1717–1747. <https://doi.org/10.1007/s10648-021-09610-z>

- Itoyama, T. (2000). 思考の臨界期・縮刷版 (Critical period of thinking, reduced edition). Presented by DONGURI-CLUB. <https://reonreon.com/period-omake.html>
- Itoyama, T., & Magaña-Takashima, N. (2022). Donguri: Guía práctica stem de enseñanza de matemáticas japonesa. Círculo Rojo.
- İncikabı, S., & Biber, A. Ç. (2018). Ortaokul matematik ders kitaplarında yer verilen temsiller arası ilişkilendirmeler. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 26(3), 729-740. DOI: 10.24106/kefdergi.41569
- Kamii, C., Kirkland, L., & Lewis, B. A. (2001). Representation and abstraction in young children's numerical reasoning. *The roles of representation in school mathematics, 2001*, 24-34. NCTM 2001 Yearbook
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? what is algebraic reasoning? (Ed. J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton), *Algebra in the early grades*, (5-18). New York: Lawrence Erlbaum Ass.
- Kaput, J. J., Blanton, M. L., & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. (Ed. J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton), *Algebra in the early grades*, (19-56). New York: Lawrence Erlbaum Ass.
- Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the early grades*. New York: Lawrence Erlbaum Ass.
- Kar, T., & Işık, C. (2015). Türk ve amerikan yedinci sınıf matematik ders kitaplarının tamsayılarla toplama ve çıkarma işlemleri üzerinden karşılaştırılması. *Eğitim ve Bilim*, 40 (177), 75-92.
- Kılıçoğlu, E. (2020). Ortaokul matematik ders kitabı etkinliklerinde soyutlama becerisinin incelenmesi. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 16(3), 628-650. <https://doi.org/10.17860/mersinefd.736764>
- Kieran, C. (2011). Overall commentary on early algebraization: Perspectives for research and teaching. In *Early algebraization* (579-593). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: University of Chicago Press.
- Knuth, E., Stephens, A., Blanton, M., & Gardiner, A. (2016). Building an early foundation for algebra success. *Phi Delta Kappan*, 97(6), 65–68.
- Koichu, B. (2014). Reflections on problem-solving. (With contributions by G. A. Goldin, A. I. Weinzwieg, S. Vinner, N. Jerusalem, R. Leikin). (Eds. M.N. Fried, T. Dreyfus)

- Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground*, (113-135). Springer, Dordrecht.
- Kosslyn, S. M. (1996). *Image and brain: The resolution of the imagery debate*. MIT press.
- Köse, N. Y., & Tanışlı, D. (2011). İlköğretim matematik ders kitaplarında eşit işareti ve ilişkisel düşünme. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 5(2), 251-277. <https://dergipark.org.tr/en/pub/balikesirnef/issue/3373/465>
- Lowrie, T. (2012). Visual and spatial reasoning: The changing form of mathematics representation and communication. In *Reasoning, communication and connections in mathematics: Yearbook 2012, Association of Mathematics Educators* (pp. 149-168).
- Lubinski, C. A., & Otto, A. D. (1999). Literature and algebraic reasoning. (Ed. B. Moses) *Algebraic Thinking, Grades K-12: Reading from NCTM's School-Based Journals and Other Publications*. (99-105). Reston: NCTM.
- Mancosu, P., Jorgensen, K. F., & Pedersen, S. A. (2005). *Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics*. Netherlands: Springer.
- Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. (Ed. J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton), *Algebra in the early grades*. (57-94). New York: Lawrence Erlbaum Ass.
- McKim, R. H. (1980). *Experiences in visual thinking*. Brooks. Cole, Monterey, CA.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018). *Matematik dersi öğretim programı (ilkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. sınıflar)*. Ankara: MEB.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2019). PISA 2018 Türkiye ön raporu. *Eğitim Analiz ve Değerlendirme Raporları Serisi 10*, Aralık 2019. Ankara: MEB
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2020). TIMSS 2019 Türkiye ön raporu. *Eğitim Analiz ve Değerlendirme Raporları Serisi 15*, Aralık 2020. Ankara: MEB
- Mitchelmore, M., & White, P. (2007). Abstraction in mathematics learning. *Mathematics Education Research Journal*, 19(2), 1–9. <https://doi.org/10.1007/bf03217452>
- Moss, J., Beatty, R., Barkin, S., & Shillolo, G. (2008). What is your theory? What is your rule?" fourth graders build an understanding of functions through patterns and generalizing problems. (Eds. C. E. Greenes, R. Rubenstein) *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics: Seventieth Yearbook*, (155-168). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

- Nardi, E. (2014). Reflections on visualization in mathematics and in mathematics education. In: Fried M., Dreyfus T. (eds) *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground*, 193-220. Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7473-5_12
- National Council of Teacher of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.
- O'Halloran, K. (2005). *Mathematical discourse: Language, symbolism and visual images*. London: Continuum.
- Önal, H., & Aydın, O. (2022). İlkokul öğrencilerinin dört işlem işlemsel hatalarının belirlenmesi ve çözüm önerileri. *Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 23(Özel Sayı), 177-210. <https://doi.org/10.29299/kefad.995959>
- Özdemir Baki, G. (2023). Making Sense of Multiplication by Primary School Second Grade Students. *Dynamics in Social Sciences and Humanities*, 4(1): 24-30. <https://doi.org/10.5152/OJFHSS.2022.230325>
- Palm, T. (2008). *Impact of authenticity on sense making in word problem solving. Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 37–58. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9083-3>
- Patton, M. Q. (2014). *Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri*. (Çev. Ed. Mesut Bütün, Selçuk Beşir Demir). Ankara: Pegem Akademi.
- Pepper, D., Hodgen, J., Lamesoo, K., Köiv, P., & Tolboom, J. (2018). Think aloud: using cognitive interviewing to validate the PISA assessment of student self-efficacy in mathematics. *International Journal of Research & Method in Education*, 41(1), 3-16. <https://doi.org/10.1080/1743727X.2016.1238891>
- Polya, G. (2017). *Nasıl çözmeli? Matematiksel yönteme yeni bir bakış*. (Çev. B. S. Soyer). Ankara: TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları.
- Presmeg, N. (2020). Visualization and learning in mathematics education. In: Lerman S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_161
- Presmeg, N. (2008). Spatial abilities research as a foundation for visualization in teaching and learning mathematics. (Eds. P. Clarkson, N. Presmeg), In *Critical Issues in Mathematics Education: Major Contributions of Alan Bishop*, (pp. 83-95). Boston: Springer.

- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. In *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, (pp. 205-235). Brill Sense. https://doi.org/10.1163/9789087901127_009
- Presmeg, N. C. (1986). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6(3), 42-46. <http://www.jstor.org/stable/40247826>
- Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds* (3-25). Springer, Cham.
- Reçber, H. (2012). *Türkiye 8. sınıf matematik ders kitabındaki etkinliklerin bilişsel düzeylerinin programdakilerle ve ülkeler arası karşılaştırılması*. (Yüksek Lisans Tezi). Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Anabilim Dalı. <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi>
- Rival, I. (1987). Picture puzzling: Mathematicians are rediscovering the power of pictorial reasoning. *The Sciences*, 27(1), 40-46.
- Schnotz, W. (2005). An integrated model of text and picture comprehension. (Ed. R. E. Mayer), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning*, 49-69. Cambridge University Press.
- Schnotz, W., & Bannert, M. (2003). Construction and interference in learning from multiple representation. *Learning and instruction*, 13(2), 141-156. [https://doi.org/10.1016/S0959-4752\(02\)00017-8](https://doi.org/10.1016/S0959-4752(02)00017-8)
- Schnotz, W., & Kürschner, C. (2008). External and internal representations in the acquisition and use of knowledge: visualization effects on mental model construction. *Instructional Science*, 36(3), 175-190. <https://doi.org/10.1007/s11251-007-9029-2>
- Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of Education*, 196(2), 1-38. <https://doi.org/10.1177/002205741619600202>
- Schoenfeld, A. H. (2008). Early algebra as mathematical sense making. (Ed. J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton), *Algebra in the early grades*. 479-510. New York: Lawrence Erlbaum Ass.
- Shaw, P., Greenstein, D., Lerch, J., Clasen, L., Lenroot, R., Gogtay, N., Evans, A., Rapoport, J., & Giedd, J. (2006). Intellectual ability and cortical development in

- children and adolescents. *Nature*, 440(7084), 676-679.
<https://doi.org/10.1038/nature04513>
- Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum
- Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*. 133-163. New York: Lawrence Erlbaum Ass.
- Smith, J., & Thompson, P. W. (2008). Quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning. (Ed. J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton), *Algebra in the early grades*. 95-132. New York: Lawrence Erlbaum Ass.
- Steffe, L. P. (1991). The constructivist teaching experiment: Implication and illustrations. E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education*, 177–194. Dordrecht, Netherlands: Kluwer.
- Steffe L. P. (2016). Toward a model of constructivist mathematics teaching. *Constructivist Foundations*, 12(1): 75–77. <http://constructivist.info/12/1/075>
- Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. R. Lesh, & A. E. Kelly (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education*, 267–307. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Steffe L.P., & Ulrich C. (2014). Constructivist teaching experiment. In: Lerman S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*, 102-107. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_32
- Stylianou, D. A. (2002). On the interaction of visualization and analysis: the negotiation of a visual representation in expert problem solving. *The Journal of Mathematical Behavior*, 21(3), 303–317. [https://doi.org/10.1016/s0732-3123\(02\)00131-1](https://doi.org/10.1016/s0732-3123(02)00131-1)
- Tall, D. (2007). Embodiment, symbolism and formalism in undergraduate mathematics education, Plenary at 10th Conference of the Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education, Feb 22–27, 2007, San Diego, California, USA. <http://cresmet.asu.edu/crume2007/eproc.html>
- Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 5-24. <https://doi.org/10.1007/BF03217474>

- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, 12(2), 151-169. <https://doi.org/10.1007/BF00305619>
- Tertemiz, N., Özkan, T., Çoban Sural, Ü., & Ünlütürk Akçakın, H. (2015). İlkokul (1-4) matematik ders kitaplarında yer alan dört işlem becerisine dayalı problem yapılarının incelenmesi. *Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 2015(5), 119-137. <https://dergipark.org.tr/en/pub/goputeb/issue/34517/3816>
- Usta, A. (2018). *İlkokul matematik ders kitaplarındaki doğal sayılarla çarpma ve bölme işlemleriyle ilgili problemlerin incelenmesi*. (Yüksek Lisans Tezi). Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Temel Eğitim Anabilim Dalı. <http://acikerisim.erdogan.edu.tr/xmlui/bitstream/handle/11436/197/532543.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Uygan, C. (2019). Öğrenci matematiğini araştırmada öğretim deneyi yöntemi: Kuramsal temeller ve örnek bir uygulamadan yansımalar. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi – Journal of Qualitative Research in Education*, 7(2), 792-825. doi: 10.14689/issn.2148-2624.1.7c.2s.14m
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., Kolovou, A., & Robitzsch, A. (2013). Primary school students' strategies in early algebra problem solving supported by an online game. *Educational Studies in Mathematics*, 84(3), 281–307. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9483-5>
- Warren, E., & Cooper, T. J. (2009). Developing mathematics understanding and abstraction: The case of equivalence in the elementary years. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 76-95. <https://doi.org/10.1007/BF03217546>
- Welder, R. M. (2012). Improving algebra preparation: Implications from research on student misconceptions and difficulties. *School Science and Mathematics*, 112(4), 255-264. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2012.00136.x>
- Woleck, K. R. (2001). Listen to their pictures: An investigation of children's mathematical drawings. *The roles of representation in school mathematics*, 215-227. NCTM 2001 Yearbook
- Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2018). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. (11. Baskı) Seçkin Yayıncılık.
- Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). Editor's introduction: What is mathematical visualization. W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.),

Visualization in teaching and learning mathematics, 1-7. Mathematical Association of America



EK-1

Uzman Değerlendirme Formu (Öğretmen)

Bu belge, Prof. Dr. Abdulkadir Erdoğan'ın danışmanlığında yürüttüğüm "ERKEN CEBİR ÖĞRETİMİNDE RESİM ÇİZEREK PROBLEM ÇÖZME YAKLAŞIMININ KULLANIMI" başlıklı doktora tezimin verilerinin toplanması amacıyla geliştirilmiş problemlerin alanda uzman kişiler tarafından değerlendirilmesi için hazırlanmıştır.

Bu çalışma, Japonya'da ortaya çıkmış resim çizerek problem çözmeyi içeren Donguri yönteminin erken cebir öğretiminde kullanılmasını içermektedir. Donguri yöntemi, öğrencilerin ilgisini çekecek ve hayal etmelerini sağlayacak problem bağlamlarını cümle cümle sunarak ve her cümleyi resmederek problemi çözmeyi içermektedir. Aritmetiğin temel kavramlarının öğrenildiği ve erken cebir öğretiminin başladığı seviye olarak belirtilen 3. sınıf seviyesiyle çalışılması planlanmaktadır. Donguri yönteminde kullanılan problemler, Türkiye'deki 3. sınıf seviyesi kazanımlarına uygun ve erken cebir problemlerini yansıtacak şekilde uyarlanmıştır.

Bu araştırmaya katılan 3. sınıf seviyesindeki çocukların öncelikle problem çözme ve görselleştirme konusundaki hazır bulunuşluklarının öğrenilmesi amacıyla çalışmanın 1. Aşamasında Donguri yöntemi öğretilmeden önce sunulan problemleri istedikleri şekilde çözmeleri istenecektir. Donguri yönteminde problemlerin cümle cümle sunulmasının nasıl bir etkisinin olduğunun anlaşılması için öncelikle daha bütüncül sunulan bir problem durumunda çalışmaları (1. Aşama problemleri), 2. Aşamada benzer bir problemin cümle cümle şeklinde sunulmasıyla ve cümle cümle ilerlemesi istendiğinde problemi çözme durumunun nasıl değişeceği incelenecektir (2. Aşama problemleri). Bu aşamanın sonuçlanmasıyla katılımcı öğrencilere Donguri yöntemi öğretilecek ve bu yöntemi kullanarak, resim çizerek problemleri nasıl çözecekleri örnek problem üzerinden anlatılacaktır. Bu anlatım sonrasında katılımcı öğrencilerden problemleri Donguri yöntemine uygun olarak çözmeleri istenecektir ve bu süreçteki davranışları incelenecektir (3. Aşama).

Öncelikle tek işlemli problemlerin yer verilmesi, toplama ve çıkarma işlemleriyle başlanarak bunları içeren iki ve daha fazla işlemli problemlere geçilmesi, sonrasında çarpma işleminin yer aldığı tek işlemli problemlere ve toplama ve çıkarmayı da dahil eden çok adımlı problemlere yer verilmesi, ardından bölme işlemini içeren tek işlemli ve çok adımlı problemlere geçilmesi planlanmaktadır. Sonrasında ise birden fazla yolla çözülebilen problemlerin yer alması planlanmaktadır. Bu amaçla Donguri sorularının uygun şekilde uyarlanması dışında, literatürde ve ders kitaplarında 3. sınıf öğrencilerine uygun hazırlanan erken cebir problemleri de incelenerek bir uyarlama yapılmıştır.

Belirlenen bu uygulama aşamalarında 3. sınıf öğrencilerine sunulacak problemler aşağıda sunulmaktadır. Hazırlanan problemlerin, 3. sınıf seviyesine uygunluğu ve kapsam olarak geçerliği öğrenilmek istenmektedir. Her aşamada sunulan sorular sırasıyla işlemsel olarak birbirine paralel olarak hazırlanmıştır. Bu anlamda da kontrol edilmesi gerekmektedir. Lütfen gerekli gördüğünüz değişiklikleri ve problemin uygun olmadığı noktaları açıkça belirtiniz.

İlgi ve görüşleriniz için teşekkür ederim.

Merve ATASAY SUNAY

1. Aşama Problemi	2. Aşama Problemi	3. Aşama Problemi
3 kişiye 4 kişi katılıp 5 kişi daha gelirse kaç kişi olurlar?	Bir kutunun içine 5 top attım. Ardından kutuya 6 top attım. Kutuya 7 top daha atarsam kutuda kaç top olur?	Bir gün Arya, ormandaki arkadaşlarını davet etmiş. 2 kız ve 3 erkek arkadaşı gelmiş. Ardından 4 arkadaşı daha gelmiş. Davette Arya ile birlikte kaç kişi vardır?
<i>Problemler 3. sınıf seviyesine uygun mu?</i>		
<i>Problemler içerdikleri işlemler ve zorluk seviyesi olarak birbirine paralel mi?</i>		

1. Aşama Problemi	2. Aşama Problemi	3. Aşama Problemi
14 kişiye dağıtmak için 8 tane şeker varsa kaç şeker daha gereklidir?	Doğum gününe 15 arkadaşım geldi. Annem 11 tane içecek hazırlamış. Herkese yetecek kadar içecek olması için daha kaç içecek hazırlaması gerekir?	Arya ormandaki davet için 10 tane meyve suyu ve 10 tane kek hazırlamıştır. Arya'nın davetine 12 kişi katılmıştır. Arya, davete gelen arkadaşlarına 1 meyve suyu ve 1 kek ikram etmiştir. Herkese yetecek kadar olması için daha kaç tane meyve suyu ve kek hazırlaması gerekir?
<i>Problemler 3. sınıf seviyesine uygun mu?</i>		
<i>Problemler içerdikleri işlemler ve zorluk seviyesi olarak birbirine paralel mi?</i>		

1. Aşama Problemi	2. Aşama Problemi	3. Aşama Problemi
60 bilyenin 23 tanesini, ardından 18 tanesini kaybettiğine göre kaç bilyem kaldı?	Benim 68 tane oyun kartım var. Bir oyunda 15 tanesini kaybettim. İkinci oyunda 34 tanesini kaybettim. Geri kalanını da kardeşime verdim. Kardeşimin kaç oyun kartı oldu?	Arya'nın 75 tane kalemi vardır. Üç arkadaşına kalemlerini vermek istemiştir. Bir arkadaşı 14 kalemi beğenip almıştır. Diğer arkadaşı da 28 tane kalemi almak istemiştir. Kalan kalemleri de üçüncü arkadaşına vermiştir. Üçüncü arkadaşına kaç kalem vermiştir?
<i>Problemler 3. sınıf seviyesine uygun mu?</i>		
<i>Problemler içerdikleri işlemler ve zorluk seviyesi olarak birbirine paralel mi?</i>		

1. Aşama Problemi	2. Aşama Problemi	3. Aşama Problemi
Her gün 6 sayfa kitap okuyarak 5 günde kaç sayfa kitap okurum?	Annem köpeklerimizin patileri için onlara çorap örecektir. Evimizde 7 köpeğimiz olduğuna göre kaç tane çorap örmesi gerekir?	Arya, ormanda çiçek topluyor. Her bir adım attığında 3 tane çiçek topluyor. 5 adım attığında kaç çiçek toplamış olur?
<i>Problemler 3. sınıf seviyesine uygun mu?</i>		
<i>Problemler içerdikleri işlemler ve zorluk seviyesi olarak birbirine paralel mi?</i>		

1. Aşama Problemi	2. Aşama Problemi	3. Aşama Problemi
Bahçemizde 10 fidan var ve her gün 5 fidan dikersem bir hafta sonra bahçemizde kaç fidan olur?	Her gün 8 sayfa kitap okuyorum. Bugüne kadar 16 sayfa kitap okudum. Bir hafta sonra kaç sayfa kitap okumuş olurum?	Arya, her sabah açan kabak çiçeklerinden toplamak ister. Her sabah bahçesinde 6 yeni kabak çiçeği açmaktadır. Arya, bu zamana kadar 12 tane kabak çiçeği toplamıştır. Buna göre bir hafta sonra kaç tane kabak çiçeği toplamış olur?
Problemler 3. sınıf seviyesine uygun mu?		
Problemler içerdikleri işlemler ve zorluk seviyesi olarak birbirine paralel mi?		

1. Aşama Problemi	2. Aşama Problemi	3. Aşama Problemi
32 kişilik bir sınıfta 4 kişilik kümeler yaparsak kaç küme olur?	Bahçemizdeki limonları 3'lü olarak filelere ayırıyoruz. Bahçemizde 24 tane limon olduğuna göre kaç file olmuştur?	Arya'nın 21 tane karınca arkadaşı var. Arya, karınca arkadaşlarından üçerli sıraya girmelerini istiyor. Kaç sıra karınca olur?
<i>Problemler 3. sınıf seviyesine uygun mu?</i>		
<i>Problemler içerdikleri işlemler ve zorluk seviyesi olarak birbirine paralel mi?</i>		

1. Aşama Problemi	2. Aşama Problemi	3. Aşama Problemi
Ben bir günde 6 sayfa kitap okurken kardeşim 4 sayfa okumaktadır. Ben 24 sayfa okuduğum zaman boyunca kardeşim kaç sayfa okumuştur?	Ben her gün bahçeden 5 çiçek topluyorum. Annem ise her gün 3 çiçek topluyor. Ben 35 çiçek topladığım zaman annem kaç çiçek toplamıştır?	Arya, arkadaşı tavşanla marul toplamaya karar verir. Arya 3 adım atıp 1 marul toplar. Tavşan ise 2 adım atıp 1 marul toplar. Arya 12 marul toplamıştır. Arya ile tavşan eşit sayıda adım attığına göre tavşan kaç marul toplamıştır?
<i>Problemler 3. sınıf seviyesine uygun mu?</i>		
<i>Problemler içerdikleri işlemler ve zorluk seviyesi olarak birbirine paralel mi?</i>		

1. Aşama Problemi	2. Aşama Problemi	3. Aşama Problemi
Benim ve kardeşimin eşit sayıda kalemi varken ben onun 2 kalemini alırsam kalemlerimiz arasındaki fark kaç olur?	Ali ve Ayşe'nin eşit sayıda bilyeleri vardır. Ayşe, Ali'nin 4 bilyesini alır ve kendi bilyelerine ekler. Ayşe'de Ali'den kaç bilye fazla vardır?	Arya ve arkadaşı Maya'da birer kutu şeker vardır. Kutularında eşit sayıda şeker bulunmaktadır. Arya, Maya'nın kutusundan 3 tane şekeri alıp kendi kutusuna atmıştır. Hangisinin kutusunda daha fazla şeker vardır? Kaç tane fazla şeker vardır?
<i>Problemler 3. sınıf seviyesine uygun mu?</i>		
<i>Problemler içerdikleri işlemler ve zorluk seviyesi olarak birbirine paralel mi?</i>		

1. Aşama Problemi	2. Aşama Problemi	3. Aşama Problemi
Benim yaşıım kardeşimin yaşının 2 katıdır ve yaşlarımızın toplamı 24 olduğuna göre ben kaç yaşıındayım?	Arkadaşıımın parası benim paramın 3 katıdır. İkimizin toplam 36 lirası vardır. Arkadaşıımın kaç lira parası vardır?	Arya ve bir arkadaşı erik toplamaya karar verirler. Arya'nın topladığı erik sayısı arkadaşının topladıklarının 3 katı kadardır. İkisi toplamda 28 erik topladığına göre Arya kaç tane erik toplamıştır?
<i>Problemler 3. sınıf seviyesine uygun mu?</i>		
<i>Problemler içerdikleri işlemler ve zorluk seviyesi olarak birbirine paralel mi?</i>		

1. Aşama Problemi	2. Aşama Problemi	3. Aşama Problemi
Her doğru sorunun 3 puan getirdiği ve her yanlış sorunun 1 puan düşürdüğü 5 soruluk bir sınavda 11 puan aldığımı göre kaç soruyu doğru cevaplamışım?	Bir dart oyununda atış isabet ettiği zaman 4 puan kazanılır. Atış kaçırıldığında ise 1 puan kaybedilir. 3 atış yaptığımda 7 puan kazandığına göre kaç atış isabet etmiştir?	Arya, belirlenen bir hedefe taş atmayı içeren bir oyun oynamaktadır. Bu oyunda isabet eden her taş için 5 puan kazanılmaktadır. Kaçırılan her taş için 2 puan kaybedilmektedir. Herkesin 5 taş atma hakkı vardır. Arya oyununda 11 puan kazandığına göre kaç atışı isabet ettirmiştir?
<i>Problemler 3. sınıf seviyesine uygun mu?</i>		
<i>Problemler içerdikleri işlemler ve zorluk seviyesi olarak birbirine paralel mi?</i>		
<i>Sınıfınızda yukarıdaki problem türlerinden hangisi veya hangilerine yer veriyorsunuz?</i>		
<i>Ders kitaplarında yukarıdaki problem türlerinden daha çok hangisine veya hangilerine yer verildiğini gözlemliyorsunuz?</i>		

3. Aşama Problemi

Arya ormanda büyük bir davet düzenliyor.
İlk gelen tavşan arkadaşının elini sıkarak onunla selamlaşıyor.
Ardından sincap arkadaşı geliyor ve onun da elini sıkarak selamlaşıyor.
Sincap, tavşanın da elini sıkarak onunla selamlaşıyor.
Bu şekilde Arya her gelen arkadaşının elini sıkarak onunla selamlaşıyor ve her arkadaşı da diğer arkadaşlarının elini sıkıyor.
Davette Arya ile birlikte 5 kişi olduğuna göre toplam kaç kez el sıkışılmıştır?

Problem 3. sınıf seviyesine uygun mu?

Benzar bir problemi 3. sınıf seviyesinde hiç çözdünüz mü?

Uzman Değerlendirme Formu (Akademisyen)

Bu belge, Prof. Dr. Abdulkadir Erdoğan'ın danışmanlığında yürüttüğüm “ERKEN CEBİR ÖĞRETİMİNDE RESİM ÇİZEREK PROBLEM ÇÖZME YAKLAŞIMININ KULLANIMI” başlıklı doktora tezimin verilerinin toplanması amacıyla geliştirilmiş problemlerin alanda uzman kişiler tarafından değerlendirilmesi için hazırlanmıştır.

Bu çalışma, Japonya’da ortaya çıkmış resim çizerek problem çözmeyi içeren Donguri yönteminin erken cebir öğretiminde kullanılmasını içermektedir. Donguri yöntemi, öğrencilerin ilgisini çekecek ve hayal etmelerini sağlayacak problem bağlamalarını cümle cümle sunarak ve her cümleyi resmederek problemi çözmeyi içermektedir. Aritmetiğin temel kavramlarının öğrenildiği ve erken cebir öğretiminin başladığı seviye olarak belirtilen 3. sınıf seviyesiyle çalışılması planlanmaktadır. Donguri yönteminde kullanılan problemler, Türkiye’deki 3. sınıf seviyesi kazanımlarına uygun ve erken cebir problemlerini yansıtacak şekilde uyarlanmıştır.

Bu araştırmaya katılan 3. sınıf seviyesindeki çocukların öncelikle problem çözme ve görselleştirme konusundaki hazır bulunuşluklarının öğrenilmesi amacıyla çalışmanın 1. Aşamasında Donguri yöntemi öğretilmeden önce sunulan problemleri istedikleri şekilde çözmeleri istenecektir. Donguri yönteminde problemlerin cümle cümle sunulmasının nasıl bir etkisinin olduğunun anlaşılması için öncelikle daha bütüncül sunulan bir problem durumunda çalışmaları (1. Aşama problemleri), 2. Aşamada benzer bir problemin cümle cümle şeklinde sunulmasıyla ve cümle cümle ilerlemesi istendiğinde problemi çözme durumunun nasıl değişeceği incelenecektir (2. Aşama problemleri). Bu aşamanın sonuçlanmasıyla katılımcı öğrencilere Donguri yöntemi öğretilecek ve bu yöntemi kullanarak, resim çizerek problemleri nasıl çözecekleri örnek problem üzerinden anlatılacaktır. Bu anlatım sonrasında katılımcı öğrencilerden problemleri Donguri yöntemine uygun olarak çizmeleri istenecektir ve bu süreçteki davranışları incelenecektir (3. Aşama).

Erken cebir çalışmalarına geçişte basitten karmaşığa aritmetik işlemlerini içeren problemlerin yer alması önemli görülmektedir. Buna göre öncelikle tek işlemli problemlerin yer verilmesi, toplama ve çıkarma işlemleriyle başlanarak bunları içeren iki ve daha fazla işlemli problemlere geçilmesi, sonrasında çarpma işleminin yer aldığı tek işlemli problemlere ve toplama ve çıkarmayı da dahil eden çok adımlı problemlere yer verilmesi, ardından bölme işlemini içeren tek işlemli ve çok adımlı problemlere geçilmesi planlanmaktadır. Sonrasında ise birden fazla yolla çözülebilen erken cebir problemlerinin yer alması planlanmaktadır. Bu amaçla Donguri sorularının uygun şekilde uyarlanmasının yanında, literatürde ve ders kitaplarında 3. sınıf öğrencilerine uygun hazırlanan erken cebir problemleri de incelenerek bir uyarlama yapılmıştır.

Belirlenen bu uygulama aşamalarında 3. sınıf öğrencilerine sunulacak problemler aşağıda verilmektedir. Hazırlanan problemlerin, 3. sınıf seviyesine uygunluğu ve kapsam olarak geçerliği öğrenilmek istenmektedir. Her aşamada sunulan sorular sırasıyla işlemsel olarak birbirine paralel olarak hazırlanmıştır. Bu anlamda da kontrol edilmesi gerekmektedir. Lütfen gerekli gördüğünüz değişiklikleri ve problemin uygun olmadığı noktaları açıkça belirtiniz.

İlgi ve görüşleriniz için teşekkür ederim.

Merve ATASAY SUNAY

1. Aşama Problemi	2. Aşama Problemi	3. Aşama Problemi
3 kişiye 4 kişi katılıp 5 kişi daha gelirse kaç kişi olurlar?	Bir kutunun içine 5 top attım. Ardından kutuya 6 top attım. Kutuya 7 top daha atarsam kutuda kaç top olur?	Bir gün Arya, ormandaki arkadaşlarını davet etmiş. 2 kız ve 3 erkek arkadaşı gelmiş. Ardından 4 arkadaşı daha gelmiş. Davette Arya ile birlikte kaç kişi vardır?
Problemler 3. sınıf seviyesine uygun mu? Birbirine paralel olarak aynı bilgi, beceri ve davranışı içeriyor mu?		
<i>Uygun</i>	<i>Uygun</i>	<i>Uygun</i>
<i>Uygun değil</i>	<i>Uygun değil</i>	<i>Uygun değil</i>
<i>Düzeltilme gerekli</i>	<i>Düzeltilme gerekli</i>	<i>Düzeltilme gerekli</i>
Problemler 3.sınıf seviyesinde erken cebire hazırlama aşamasında aritmetik becerilerini geliştirmeyi karşılıyor mu?		
<i>Uygun</i>	<i>Uygun</i>	<i>Uygun</i>
<i>Uygun değil</i>	<i>Uygun değil</i>	<i>Uygun değil</i>
<i>Düzeltilme gerekli</i>	<i>Düzeltilme gerekli</i>	<i>Düzeltilme gerekli</i>

1. Aşama Problemi	2. Aşama Problemi	3. Aşama Problemi
14 kişiye vermek için 8 tane şeker varsa kaç şeker daha gereklidir?	Doğum gününe 15 arkadaşım geldi. Annem 11 tane içecek hazırlamış. Herkese yetecek kadar içecek olması için daha kaç içecek hazırlaması gerekir?	Arya ormandaki davet için 10 tane meyve suyu ve 10 tane kek hazırlamıştır. Arya'nın davetine 12 kişi katılmıştır. Arya, davete gelen arkadaşlarına 1 meyve suyu ve 1 kek ikram etmiştir. Herkese yetecek kadar olması için daha kaç tane meyve suyu ve kek hazırlaması gerekir?
Problemler 3. sınıf seviyesine uygun mu? Birbirine paralel olarak aynı bilgi, beceri ve davranışı içeriyor mu?		
Uygun	Uygun	Uygun
Uygun değil	Uygun değil	Uygun değil
Düzeltilme gerekli	Düzeltilme gerekli	Düzeltilme gerekli
Problemler 3.sınıf seviyesinde erken cebire hazırlama aşamasında aritmetik becerilerini geliştirmeyi karşılıyor mu?		
Uygun	Uygun	Uygun
Uygun değil	Uygun değil	Uygun değil
Düzeltilme gerekli	Düzeltilme gerekli	Düzeltilme gerekli

1. Aşama Problemi	2. Aşama Problemi	3. Aşama Problemi
60 bilyenin 23 tanesini, ardından 18 tanesini kaybettiğime göre kaç bilyem kaldı?	Benim 68 tane oyun kartım var. Bir oyunda 15 tanesini kaybettim. İkinci oyunda 34 tanesini kaybettim. Geri kalanını da kardeşime verdim. Kardeşimin kaç oyun kartı oldu?	Arya'nın 75 tane kalemi vardır. Üç arkadaşına kalemlerini vermek istemiştir. Bir arkadaşı 14 kalemi beğenip almıştır. Diğer arkadaşı da 28 tane kalemi almak istemiştir. Kalan kalemleri de üçüncü arkadaşına vermiştir. Üçüncü arkadaşına kaç kalem vermiştir?
Problemler 3. sınıf seviyesine uygun mu? Birbirine paralel olarak aynı bilgi, beceri ve davranışı içeriyor mu?		
Uygun	Uygun	Uygun
Uygun değil	Uygun değil	Uygun değil
Düzeltilme gerekli	Düzeltilme gerekli	Düzeltilme gerekli
Problemler 3.sınıf seviyesinde erken cebire hazırlama aşamasında aritmetik becerilerini geliştirmeyi karşılıyor mu?		
Uygun	Uygun	Uygun
Uygun değil	Uygun değil	Uygun değil
Düzeltilme gerekli	Düzeltilme gerekli	Düzeltilme gerekli

1. Aşama Problemi	2. Aşama Problemi	3. Aşama Problemi
Her gün 6 sayfa kitap okuyarak 5 günde kaç sayfa kitap okurum?	Annem köpeklerimizin patileri için onlara çorap örecektir. Evimizde 7 köpeğimiz olduğuna göre kaç tane çorap örmesi gerekir?	Arya, ormanda çiçek topluyor. Her bir adım attığında 3 tane çiçek topluyor. 5 adım attığında kaç çiçek toplamış olur?
Problemler 3. sınıf seviyesine uygun mu? Birbirine paralel olarak aynı bilgi, beceri ve davranışı içeriyor mu?		
<i>Uygun</i>	<i>Uygun</i>	<i>Uygun</i>
<i>Uygun değil</i>	<i>Uygun değil</i>	<i>Uygun değil</i>
<i>Düzeltilme gerekli</i>	<i>Düzeltilme gerekli</i>	<i>Düzeltilme gerekli</i>
Problemler 3.sınıf seviyesinde erken cebire hazırlama aşamasında aritmetik becerilerini geliştirmeyi karşılıyor mu?		
<i>Uygun</i>	<i>Uygun</i>	<i>Uygun</i>
<i>Uygun değil</i>	<i>Uygun değil</i>	<i>Uygun değil</i>
<i>Düzeltilme gerekli</i>	<i>Düzeltilme gerekli</i>	<i>Düzeltilme gerekli</i>

1. Aşama Problemi	2. Aşama Problemi	3. Aşama Problemi
Bahçemizde 10 fidan var ve her gün 5 fidan dikersem bir hafta sonra bahçemizde kaç fidan olur?	Her gün 8 sayfa kitap okuyorum. Bugüne kadar 16 sayfa kitap okudum. Bir hafta sonra toplam kaç sayfa kitap okumuş olurum?	Arya, her sabah açan kabak çiçeklerinden toplamak ister. Her sabah bahçesinde 6 yeni kabak çiçeği açmaktadır. Arya, bu zamana kadar 12 tane kabak çiçeği toplamıştır. Buna göre bir hafta sonra toplam kaç tane kabak çiçeği toplamış olur?
Problemler 3. sınıf seviyesine uygun mu? Birbirine paralel olarak aynı bilgi, beceri ve davranışı içeriyor mu?		
<i>Uygun</i>	<i>Uygun</i>	<i>Uygun</i>
<i>Uygun değil</i>	<i>Uygun değil</i>	<i>Uygun değil</i>
<i>Düzeltilme gerekli</i>	<i>Düzeltilme gerekli</i>	<i>Düzeltilme gerekli</i>
Problemler 3.sınıf seviyesinde erken cebire hazırlama aşamasında aritmetik becerilerini geliştirmeyi karşılıyor mu?		
<i>Uygun</i>	<i>Uygun</i>	<i>Uygun</i>
<i>Uygun değil</i>	<i>Uygun değil</i>	<i>Uygun değil</i>
<i>Düzeltilme gerekli</i>	<i>Düzeltilme gerekli</i>	<i>Düzeltilme gerekli</i>

1. Aşama Problemi	2. Aşama Problemi	3. Aşama Problemi
32 kişilik bir sınıfta 4 kişilik kümeler yaparsak kaç küme olur?	Bahçemizdeki limonları 3'lü olarak sepetlere ayırıyoruz. Bahçemizde 24 tane limon olduğuna göre kaç sepet olmuştur?	Arya'nın 21 tane karınca arkadaşı var. Arya, karınca arkadaşlarından üçerli sıraya girmelerini istiyor. Kaç sıra karınca olur?
Problemler 3. sınıf seviyesine uygun mu? Birbirine paralel olarak aynı bilgi, beceri ve davranışı içeriyor mu?		
<i>Uygun</i>	<i>Uygun</i>	<i>Uygun</i>
<i>Uygun değil</i>	<i>Uygun değil</i>	<i>Uygun değil</i>
<i>Düzeltilme gerekli</i>	<i>Düzeltilme gerekli</i>	<i>Düzeltilme gerekli</i>
Problemler 3.sınıf seviyesinde erken cebire hazırlama aşamasında aritmetik becerilerini geliştirmeyi karşılıyor mu?		
<i>Uygun</i>	<i>Uygun</i>	<i>Uygun</i>
<i>Uygun değil</i>	<i>Uygun değil</i>	<i>Uygun değil</i>
<i>Düzeltilme gerekli</i>	<i>Düzeltilme gerekli</i>	<i>Düzeltilme gerekli</i>

1. Aşama Problemi	2. Aşama Problemi	3. Aşama Problemi
Ben bir günde 6 sayfa kitap okurken kardeşim 4 sayfa okumaktadır. Ben 24 sayfa okuduğum zaman boyunca kardeşim kaç sayfa okumuştur?	Ben her gün bahçeden 5 çiçek topluyorum. Annem ise her gün 3 çiçek topluyor. Ben 35 çiçek topladığım zaman annem kaç çiçek toplamıştır?	Arya, arkadaşı tavşanla marul toplamaya karar verir. Arya 3 adım atıp 1 marul toplar. Tavşan ise 2 adım atıp 1 marul toplar. Arya 12 marul toplamıştır. Arya ile tavşan eşit sayıda adım attığına göre tavşan kaç marul toplamıştır?
Problemler 3. sınıf seviyesine uygun mu? Birbirine paralel olarak aynı bilgi, beceri ve davranışı içeriyor mu?		
Uygun	Uygun	Uygun
Uygun değil	Uygun değil	Uygun değil
Düzeltilme gerekli	Düzeltilme gerekli	Düzeltilme gerekli
Problemler 3.sınıf seviyesinde erken cebire hazırlama aşamasında aritmetik becerilerini geliştirmeyi karşılıyor mu?		
Uygun	Uygun	Uygun
Uygun değil	Uygun değil	Uygun değil
Düzeltilme gerekli	Düzeltilme gerekli	Düzeltilme gerekli

1. Aşama Problemi	2. Aşama Problemi	3. Aşama Problemi
Benim ve kardeşimin eşit sayıda kalemi varken ben onun 2 kalemini alırsam kalemlerimizin arasındaki fark kaç olur?	Ali ve Ayşe'nin eşit sayıda bilyeleri vardır. Ayşe, Ali'nin 4 bilyesini alır ve kendi bilyelerine ekler. Ayşe'de Ali'den kaç bilye fazla vardır?	Arya ve arkadaşı Maya'da birer kutu şeker vardır. Kutularında eşit sayıda şeker bulunmaktadır. Arya, Maya'nın kutusundan 3 tane şekerini alıp kendi kutusuna atmıştır. Hangisinin kutusunda daha fazla şeker vardır? Kaç tane fazla şeker vardır?
Problemler 3. sınıf seviyesine uygun mu? Birbirine paralel olarak aynı bilgi, beceri ve davranışı içeriyor mu?		
Uygun	Uygun	Uygun
Uygun değil	Uygun değil	Uygun değil
Düzeltilme gerekli	Düzeltilme gerekli	Düzeltilme gerekli
Problemler 3. sınıf seviyesinde erken cebir çalışması için uygun mu?		
Uygun	Uygun	Uygun
Uygun değil	Uygun değil	Uygun değil
Düzeltilme gerekli	Düzeltilme gerekli	Düzeltilme gerekli

1. Aşama Problemi	2. Aşama Problemi	3. Aşama Problemi
Benim yaşıım kardeşimin yaşının 2 katıdır ve yaşlarımızın toplamı 24 olduğuna göre ben kaç yaşıındayım?	Arkadaşıımın parası benim paramın 3 katıdır. İkimizin toplam 36 lirası vardır. Arkadaşıımın kaç lira parası vardır?	Arya ve bir arkadaşı erik toplamaya karar verirler. Arya'nın topladığı erik sayısı arkadaşının topladıklarının 3 katı kadardır. İkiisi toplamda 28 erik topladığına göre Arya kaç tane erik toplamıştır?
Problemler 3. sınıf seviyesine uygun mu? Birbirine paralel olarak aynı bilgi, beceri ve davranışı içeriyor mu?		
<i>Uygun</i>	<i>Uygun</i>	<i>Uygun</i>
<i>Uygun değil</i>	<i>Uygun değil</i>	<i>Uygun değil</i>
<i>Düzeltilme gerekli</i>	<i>Düzeltilme gerekli</i>	<i>Düzeltilme gerekli</i>
Problemler 3. sınıf seviyesinde erken cebir çalışması için uygun mu?		
<i>Uygun</i>	<i>Uygun</i>	<i>Uygun</i>
<i>Uygun değil</i>	<i>Uygun değil</i>	<i>Uygun değil</i>
<i>Düzeltilme gerekli</i>	<i>Düzeltilme gerekli</i>	<i>Düzeltilme gerekli</i>

1. Aşama Problemi	2. Aşama Problemi	3. Aşama Problemi
Her doğru sorunun 3 puan getirdiği ve her yanlış sorunun 1 puan düşürdüğü 5 soruluk bir sınavda 11 puan aldığımıza göre kaç soruyu doğru cevaplamışım?	Bir dart oyununda atış isabet ettiği zaman 4 puan kazanılır. Atış kaçırıldığında ise 1 puan kaybedilir. 3 atış yaptığımda 7 puan kazandığına göre kaç atış isabet etmiştir?	Arya, belirlenen bir hedefe taş atmayı içeren bir oyun oynamaktadır. Bu oyunda isabet eden her taş için 5 puan kazanılmaktadır. Kaçırılan her taş için 2 puan kaybedilmektedir. Herkesin 5 taş atma hakkı vardır. Arya oyunda 11 puan kazandığına göre kaç atışı isabet ettirmiştir?
Problemler 3. sınıf seviyesine uygun mu? Birbirine paralel olarak aynı bilgi, beceri ve davranışı içeriyor mu?		
Uygun	Uygun	Uygun
Uygun değil	Uygun değil	Uygun değil
Düzeltilme gerekli	Düzeltilme gerekli	Düzeltilme gerekli
Problemler 3. sınıf seviyesinde erken cebir çalışması için uygun mu?		
Uygun	Uygun	Uygun
Uygun değil	Uygun değil	Uygun değil
Düzeltilme gerekli	Düzeltilme gerekli	Düzeltilme gerekli

3. Aşama Problemi

Arya ormanda büyük bir davet düzenliyor.
İlk gelen tavşan arkadaşının elini sıkarak onunla selamlaşıyor.
Ardından sincap arkadaşı geliyor ve onun da elini sıkarak selamlaşıyor.
Sincap, tavşanın da elini sıkarak onunla selamlaşıyor.
Bu şekilde Arya her gelen arkadaşının elini sıkarak onunla selamlaşıyor ve her arkadaşı da diğer arkadaşlarının elini sıkıyor.
Davette Arya ile birlikte 5 kişi olduğuna ve herkes birer kez el sıkıştığına göre toplam kaç kez el sıkışılmıştır?

Problem 3. sınıf seviyesine uygun mu?

Uygun

Uygun değil

Düzeltilme gerekli

Problem 3. sınıf seviyesinde erken cebir çalışması için uygun mu?

Uygun

Uygun değil

Düzeltilme gerekli

EK-2. Uygulamada Sorulan Problemler

1. Aşama Problemleri

- 1) 3 kişiye 4 kişi katılıyor, ardından 5 kişi daha geldiğinde kaç kişi olurlar?
- 2) 14 kişiye birer tane dağıtmak için 8 tane şeker varsa kaç şeker daha gereklidir?
- 3) 60 bilyenin 23 tanesini, ardından 18 tanesini arkadaşına verdiği göre kaç bilyem kaldı?
- 4) Her gün 6 sayfa kitap okuyarak 5 günde kaç sayfa kitap okurum?
- 5) Bahçemizde 10 fidan var ve her gün 5 fidan dikersem bir hafta sonra bahçemizde kaç fidan olur?
- 6) 32 kişilik bir sınıfta 4 kişilik gruplar yaparsak kaç grup olur?
- 7) Ben bir günde 6 sayfa kitap okurken kardeşim 4 sayfa okumaktadır. Ben 24 sayfa okuduğum zaman boyunca kardeşim kaç sayfa okumuştur?
- 8) Benim ve kardeşimin eşit sayıda kalemi varken ben onun 2 kalemini alırsam benim kaç kalemim fazla olur?
- 9) Benim yaşıım kardeşimin yaşının 2 katıdır ve yaşlarımızın toplamı 24 olduğuna göre ben kaç yaşındayım?
- 10) Her doğru sorunun 3 puan getirdiği ve her yanlış sorunun 1 puan düşürdüğü 5 soruluk bir sınavda 11 puan aldığıma göre kaç soruyu doğru cevaplamışım?

2. Aşama Problemleri

- 1) Bir kutunun içinde 5 top var. Ardından kutuya 6 top attım. Kutuya 7 top daha atarsam kutuda kaç top olur?
- 2) Doğum gününe 15 arkadaşım geldi. Annem 11 tane içecek hazırlamış. Herkese birer tane içecek olması için daha kaç içecek hazırlanması gerekir?
- 3) Benim 68 tane oyun kartım var. Bir oyunda 15 tanesini kaybettim. İkinci oyunda 34 tanesini kaybettim. Geri kalanını da kardeşime verdim. Kardeşimin kaç oyun kartı oldu?
- 4) Annem köpeklerimizin patileri için onlara çorap örecektir. Evimizde 7 köpeğimiz olduğuna göre kaç tane çorap örmesi gerekir?
- 5) Bugüne kadar 16 sayfa kitap okudum. Her gün 8 sayfa kitap okuyorum. Bir hafta sonra toplam kaç sayfa kitap okumuş olurum?
- 6) Bahçemizdeki limonları 3'erli olarak sepetlere ayırıyoruz. Bahçemizden 24 tane limon topladığımıza göre kaç sepet olmuştur?
- 7) Ben her gün bahçeden 5 çiçek topluyorum. Annem ise her gün 3 çiçek topluyor. Ben 35 çiçek topladığım zaman annem kaç çiçek toplamıştır?
- 8) Ali ve Ayşe'nin eşit sayıda bilyeleri vardır. Ayşe, Ali'nin 4 bilyesini alır ve kendi bilyelerine ekler. Ayşe'de Ali'den kaç bilye fazla vardır?
- 9) Arkadaşımın parası benim paramın 3 katıdır. İkimizin toplam 36 lirası vardır. Arkadaşımın kaç lira parası vardır?
- 10) Bir dart oyununda atış isabet ettiği zaman 4 puan kazanılır. Atış kaçırıldığında ise 1 puan kaybedilir. 3 atış yaptığında 7 puan kazandığına göre kaç atış isabet etmiştir?

3. Aşama Problemleri

- 1) Bir gün Arya, ormandaki arkadaşlarını evine davet etmiş.
2 kız ve 3 erkek arkadaşı varmış.
Ardından 4 arkadaşı daha gelmiş.
Davette Arya ile birlikte kaç kişi vardır?
- 2) Arya ormandaki davet için 8 tane meyve suyu ve 8 tane kek hazırlamıştır.
Arya'nın davetine 12 arkadaşı katılmıştır.
Arya, davete gelen her arkadaşına 1 meyve suyu ve 1 kek ikram etmiştir.
Herkese yetecek kadar olması için daha kaç tane meyve suyu ve kek hazırlaması gerekir?
- 3) Arya'nın 75 tane kalemi vardır.
Üç arkadaşına kalemlerini vermek istemiştir.
Bir arkadaşı 14 kalem beğenip almıştır.
Diğer arkadaşı da 28 tane kalem almak istemiştir.
Kalan kalemleri de üçüncü arkadaşına vermiştir.
Üçüncü arkadaşına kaç kalem vermiştir?
- 4) Arya, ormanda çiçek topluyor.
Her bir adım attığında 3 tane çiçek topluyor.
5 adım attığında kaç çiçek toplamış olur?
- 5) Arya, her sabah açan kabak çiçeklerinden toplamak ister.
Arya, bu zamana kadar 12 tane kabak çiçeği toplamıştır.
Her sabah bahçesinde 6 yeni kabak çiçeği açmaktadır.
Buna göre bir hafta sonra toplam kaç tane kabak çiçeği toplamış olur?
- 6) Arya'nın 21 tane karınca arkadaşı var.
Arya, karınca arkadaşlarından 3'erli sıraya girmelerini istiyor.
Kaç sıra karınca olur?
- 7) Arya, arkadaşı tavşanla yürüyüşe çıkar.
Arya 3 adım atarken tavşan 2 adım atıyor.
Arya 18 adım attığında tavşan kaç adım atar?
- 8) Arya ve arkadaşı Maya'da birer kutu şeker vardır.
Kutularında eşit sayıda şeker bulunmaktadır.
Arya, Maya'nın kutusundan 3 tane şekeri alıp kendi kutusuna atmıştır.
Hangisinin kutusunda kaç tane fazla şeker vardır?
- 9) Arya ve bir arkadaşı erik toplamaya karar verirler.
Arya'nın topladığı erik sayısı arkadaşının topladıklarının 3 katı kadardır.
İkisi toplamda 28 erik topladığına göre Arya kaç tane erik toplamıştır?

- 10) Arya, belirlenen bir hedefe taş atmayı içeren bir oyun oynamaktadır.
Bu oyunda isabet eden her taş için 5 puan kazanılmaktadır.
Kaçırılan her taş için 2 puan kaybedilmektedir.
Herkesin 5 taş atma hakkı vardır.
Arya oyunda 11 puan kazandığına göre kaç atışı isabet ettirmiştir?
- 11) Arya ormanda büyük bir davet düzenliyor.
İlk gelen tavşan arkadaşının elini sıkarak onunla selamlaşıyor.
Ardından sincap arkadaşı geliyor ve onun da elini sıkarak selamlaşıyor.
Sincap, tavşanın da elini sıkarak onunla selamlaşıyor.
Bu şekilde Arya her gelen arkadaşının elini sıkarak onunla selamlaşıyor ve her arkadaş da diğer arkadaşlarının elini sıkıyor.
Davette Arya ile birlikte 5 kişi olduğuna ve herkes birer kez el sıkıştığına göre toplam kaç kez el sıkışılmıştır?
- 12) Arya, arkadaşı tavşanla marul toplamaya karar verir.
Arya 3 adım atıp 1 marul toplar.
Tavşan ise 2 adım atıp 1 marul toplar.
Arya 12 marul toplamıştır.
Arya ile tavşan eşit sayıda adım attığına göre tavşan kaç marul toplamıştır?

4. Aşama Problemleri

- 1) Ali ve Ayşe yürüyüşe çıkmıştır.
Ali 4 adım atarken Ayşe 3 adım atmaktadır.
Ali 28 adım attığında Ayşe kaç adım atar?
- 2) Mert ve Banu'da birer kutu şeker vardır.
Kutularında eşit sayıda şeker bulunmaktadır.
Mert, Banu'nun kutusundan 4 tane şekerini alıp kendi kutusuna atmıştır.
Hangisinin kutusunda kaç tane fazla şeker vardır?
- 3) Meltem ve bir arkadaşı incir toplamaya karar verirler.
Meltem'in topladığı incir sayısı arkadaşının topladıklarının 3 katı kadardır.
İkisi toplamda 32 incir topladığına göre Meltem kaç tane incir toplamıştır?
- 4) Beril ve Özgün çiçek toplamaya karar verir.
Beril 3 adım atıp 1 çiçek toplar.
Özgün ise 5 adım atıp 1 çiçek toplar.
Beril 15 çiçek toplamıştır.
Beril ile Özgün eşit sayıda adım attığına göre Özgün kaç çiçek toplamıştır?

EK-3. Ham Veriler

Arzu 1. Seans Verileri

1) 3 kişiye 4 kişi katılıyor, ardından 5 kişi daha geldiğinde kaç kişi olurlar?

$$3 + 4 = 7 \quad \begin{array}{r} 7 \\ + 5 \\ \hline 12 \end{array}$$

2) 14 kişiye birer tane dağıtmak için 8 tane şeker varsa kaç şeker daha gereklidir?

$$\begin{array}{r} 14 \\ - 8 \\ \hline 6 \end{array}$$

3) 60 bilyenin 23 tanesini, ardından 18 tanesini arkadaşına verdiğine göre kaç bilyem kaldı?

$$\begin{array}{r} 60 \\ - 23 \\ \hline 37 \end{array} \quad \begin{array}{r} 50 \\ - 19 \\ \hline 31 \end{array}$$

4) Her gün 6 sayfa kitap okuyarak 5 günde kaç sayfa kitap okurum?

$$5 \times 6 = 30$$

5) Bahçemizde 10 fidan var ve her gün 5 fidan dikesem bir hafta sonra bahçemizde kaç fidan olur?

$$7 \times 5 = 35 \quad \begin{array}{r} 10 \\ + 35 \\ \hline 45 \end{array}$$

6) 32 kişilik bir sınıfta 4 kişilik gruplar yaparsak kaç grup olur?

$$\begin{array}{r} 32 \\ \div 4 \\ \hline 8 \end{array}$$

7) Ben bir günde 6 sayfa kitap okurken kardeşim 4 sayfa okumaktadır. Ben 24 sayfa okuduğum zaman boyunca kardeşim kaç sayfa okumuştur?

$$6 \text{ sayfa} = 4 \text{ gün} \quad \begin{array}{r} 24 \\ \div 6 \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 24 \\ \div 4 \\ \hline 6 \end{array}$$

8) Benim ve kardeşimin eşit sayıda kalemi varken ben onun 2 kalemini alırsam benim kaç kalemin fazla olur?

$$2 \text{ kalemin}$$

9) Benim yaşımlı kardeşimin yaşımlı 2 katıdır ve yaşlarımızın toplamı 24 olduğuna göre ben kaç yaşındayım?

$$\begin{array}{r} 24 \\ \div 3 \\ \hline 8 \end{array}$$

10) Her doğru sorunun 3 puan getirdiği ve her yanlış sorunun 1 puan düşürdüğü 5 soruluk bir sınavda 11 puan aldığımıza göre kaç soruyu doğru cevaplamışım?

$$5 \times 3 = 15$$

~~4 yanlış~~

Mert 1. Seans Verileri

1) 3 kişiye 4 kişi katılıyor, ardından 5 kişi daha geldiğinde kaç kişi olurlar?

$$3 + 4 = 7 \quad 7 + 5 = 12$$

2) 14 kişiye birer tane dağıtmak için 8 tane şeker varsa kaç şeker daha gereklidir?

$$14 \div 8 = 1 \text{ tane} \quad 14$$

3) 60 bilyenin 23 tanesini, ardından 18 tanesini arkadaşına verdiğine göre kaç bilyem kaldı?

$$\begin{array}{r} 60 \\ - 23 \\ \hline 37 \end{array} \quad \begin{array}{r} 37 \\ - 18 \\ \hline 19 \end{array}$$

4) Her gün 6 sayfa kitap okuyarak 5 günde kaç sayfa kitap okurum?

$$5 \times 6 = 30$$

5) Bahçemizde 10 fidan var ve her gün 5 fidan dikesem bir hafta sonra bahçemizde kaç fidan olur?

$$7 \times 6 = 42 \quad 42 + 10 = 52$$

6) 32 kişilik bir sınıfta 4 kişilik gruplar yaparsak kaç grup olur?

$$32 \div 4 = 8$$

7) Ben bir günde 6 sayfa kitap okurken kardeşim 4 sayfa okumaktadır. Ben 24 sayfa okuduğum zaman boyunca kardeşim kaç sayfa okumuştur?

$$24 \div 6 = 4$$

8) Benim ve kardeşimin eşit sayıda kalemi varken ben onun 2 kalemini alırsam benim kaç kalemin fazla olur?

$$2$$

9) Benim yaşımlı kardeşimin yaşımlı 2 katıdır ve yaşlarımızın toplamı 24 olduğuna göre ben kaç yaşındayım?

$$24 \div 3 = 8$$

10) Her doğru sorunun 3 puan getirdiği ve her yanlış sorunun 1 puan düşürdüğü 5 soruluk bir sınavda 11 puan aldığımıza göre kaç soruyu doğru cevaplamışım?

$$11 \div 3 = 3 \text{ Soru}$$

Kenan 1. Seans Verileri

1) 3 kişiye 4 kişi katılıyor, ardından 5 kişi daha geldiğinde kaç kişi olurlar?

12

2) 14 kişiye birer tane dağıtmak için 8 tane şeker varsa kaç şeker daha gereklidir?

0×14
 $- 8$
 6

3) 60 bilyenin 23 tanesini, ardından 18 tanesini arkadaşına verdiğine göre kaç bilyem kaldı?

$\begin{array}{r} 1 \\ 23 \\ + 18 \\ \hline 41 \end{array}$ 5×10
 $- 41$
 9

4) Her gün 6 sayfa kitap okuyarak 5 günde kaç sayfa kitap okurum?

$\begin{array}{r} 5 \\ \times 6 \\ \hline 30 \end{array}$ 30 sayfa

5) Bahçemizde 10 fidan var ve her gün 5 fidan dikersen bir hafta sonra bahçemizde kaç fidan olur?

$\begin{array}{r} 7 \\ \times 5 \\ \hline 35 \end{array}$ $\begin{array}{r} 10 \\ + 35 \\ \hline 45 \end{array}$

6) 32 kişilik bir sınıfta 4 kişilik gruplar yaparsak kaç grup olur?

$\begin{array}{r} 32 \\ 4 \\ \hline 8 \end{array}$

7) Ben bir günde 6 sayfa kitap okurken kardeşim 4 sayfa okumaktadır. Ben 24 sayfa okudugum zaman boyunca kardeşim kaç sayfa okumuştur?

$\begin{array}{r} 4 \\ \times 4 \\ \hline 16 \end{array}$ 16 sayfa

8) Benim ve kardeşimin eşit sayıda kalemi varken ben onun 2 kalemini alırsam benim kaç kalemin fazla olur?

$\begin{array}{r} 4 \\ \times 4 \\ \hline 16 \end{array}$

9) Benim yaşımlı kardeşimin yaşımlı 2 katıdır ve yaşlarımızın toplamı 24 olduğuna göre ben kaç yaşımdayım?

$B = 2 \times G$
 $B + G = 24$
 $\begin{array}{r} 24 \\ - 16 \\ \hline 8 \end{array}$ 8

10) Her doğru sorunun 3 puan getirdiği ve her yanlış sorunun 1 puan düşürdüğü 5 soruluk bir sınavda 11 puan aldığımıza göre kaç soruyu doğru cevapladık?

4 15 5 4 soru

Derya 1. Seans Verileri

1) 3 kişiye 4 kişi katılıyor, ardından 5 kişi daha geldiğinde kaç kişi olurlar?

$\begin{array}{r} 12 \\ + 4 \\ \hline 16 \end{array}$ 16

2) 14 kişiye birer tane dağıtmak için 8 tane şeker varsa kaç şeker daha gereklidir?

$\begin{array}{r} 14 \\ - 8 \\ \hline 6 \end{array}$ 6 şeker

3) 60 bilyenin 23 tanesini, ardından 18 tanesini arkadaşına verdiğine göre kaç bilyem kaldı?

$\begin{array}{r} 1 \\ 23 \\ + 18 \\ \hline 41 \end{array}$ 5×10
 $- 41$
 9

4) Her gün 6 sayfa kitap okuyarak 5 günde kaç sayfa kitap okurum?

$\begin{array}{r} 6 \\ \times 5 \\ \hline 30 \end{array}$

5) Bahçemizde 10 fidan var ve her gün 5 fidan dikersen bir hafta sonra bahçemizde kaç fidan olur?

$\begin{array}{r} 7 \\ \times 5 \\ \hline 35 \end{array}$ $\begin{array}{r} 35 \\ + 10 \\ \hline 45 \end{array}$

6) 32 kişilik bir sınıfta 4 kişilik gruplar yaparsak kaç grup olur?

$\begin{array}{r} 32 \\ 4 \\ \hline 8 \end{array}$

7) Ben bir günde 6 sayfa kitap okurken kardeşim 4 sayfa okumaktadır. Ben 24 sayfa okudugum zaman boyunca kardeşim kaç sayfa okumuştur?

$\begin{array}{r} 24 \\ 6 \\ \hline 4 \end{array}$ 4 gün

8) Benim ve kardeşimin eşit sayıda kalemi varken ben onun 2 kalemini alırsam benim kaç kalemin fazla olur?

$\begin{array}{r} 4 \\ \times 4 \\ \hline 16 \end{array}$ 16 sayfa

9) Benim yaşımlı kardeşimin yaşımlı 2 katıdır ve yaşlarımızın toplamı 24 olduğuna göre ben kaç yaşımdayım?

$B = 2 \times G$
 $B + G = 24$
 $\begin{array}{r} 24 \\ - 16 \\ \hline 8 \end{array}$ 8

10) Her doğru sorunun 3 puan getirdiği ve her yanlış sorunun 1 puan düşürdüğü 5 soruluk bir sınavda 11 puan aldığımıza göre kaç soruyu doğru cevapladık?

$\begin{array}{r} 5 \\ \times 3 \\ \hline 15 \end{array}$ 15

Arzu 2. Seans Verileri

1) Bir kutunun içinde 5 top var. Ardından kutuya 6 top attım. Kutuya 7 top daha atarsam kutuda kaç top olur?

$$5 + 6 = 11 \quad \begin{array}{r} 11 \\ + 7 \\ \hline 18 \end{array}$$

2) Doğum günümde 15 arkadaşım geldi. Annem 11 tane içecek hazırlamış. Herkese birer tane içecek olması için daha kaç içecek hazırlanması gerekir?

$$\begin{array}{r} 15 \\ - 11 \\ \hline 04 \end{array}$$

3) Benim 68 tane oyun kartım var. Bir oyunda 15 tanesini kaybettim. İkinci oyunda 34 tanesini kaybettim. Geri kalanını da kardeşime verdim. Kardeşimin kaç oyun kartı oldu?

$$\begin{array}{r} 68 \\ - 15 \\ \hline 53 \end{array} \quad \begin{array}{r} 453 \\ - 34 \\ \hline 419 \end{array} \quad 73$$

4) Annem köpeklerimizin patileri için onlara çorap örecektir. Evimizde 7 köpeğimiz olduğuna göre kaç tane çorap örmesi gerekir?

$$7 \times 4 = 28$$

5) Bugüne kadar 16 sayfa kitap okudum. Her gün 8 sayfa kitap okuyorum. Bir hafta sonra toplam kaç sayfa kitap okumuş olurum?

$$\begin{array}{l} \text{7} \rightarrow 7 \\ \text{7} \rightarrow 7 \\ \text{7} \rightarrow 7 \\ \text{7} \rightarrow 7 \end{array} \rightarrow 24 \quad \begin{array}{r} 16 \\ + 8 \\ \hline 24 \end{array}$$

6) Bahçemizdeki limonları 3'erli olarak sepetlere ayırıyoruz. Bahçemizden 24 tane limon topladığımıza göre kaç sepet olmuştur?

$$24 \div 3 = 8$$

7) Ben her gün bahçeden 5 çiçek topluyorum. Annem ise her gün 3 çiçek topluyor. Ben 35 çiçek topladığım zaman annem kaç çiçek toplamıştır?

$$5 - 70 - 75 - 20 - 25 - 30 - 35 \quad 20 \text{ çiçek}$$

$$3 - 6 - 9 - 12 - 15 - 18 - 20$$

8) Ali ve Ayşe'nin eşit sayıda bilyeleri vardır. Ayşe, Ali'nin 4 bilyesini alır ve kendi bilyelerine ekler. Ayşe'de Ali'den kaç bilye fazla vardır?

4 fazla $\text{O} \text{O} \text{O} \text{O}$

9) Arkadaşımın parası benim paramın 3 katıdır. İkimizin toplam 36 lirası vardır. Arkadaşımın kaç lira parası vardır?

10) Bir dart oyununda atış isabet ettiği zaman 4 puan kazanılır. Atış kaçırıldığında ise 1 puan kaybedilir. 3 atış yaptığında 7 puan kazandığına göre kaç atış isabet etmiştir?

2 atış

Mert 2. Seans Verileri

1) Bir kutunun içinde 5 top var. Ardından kutuya 6 top attım. Kutuya 7 top daha atarsam kutuda kaç top olur?

$$5 + 6 = 11 \quad 11 + 7 = 18$$

2) Doğum günümde 15 arkadaşım geldi. Annem 11 tane içecek hazırlamış. Herkese birer tane içecek olması için daha kaç içecek hazırlanması gerekir?

$$\begin{array}{r} 15 \\ - 11 \\ \hline 04 \end{array}$$

3) Benim 68 tane oyun kartım var. Bir oyunda 15 tanesini kaybettim. İkinci oyunda 34 tanesini kaybettim. Geri kalanını da kardeşime verdim. Kardeşimin kaç oyun kartı oldu?

$$15 + 34 = 49 \quad \begin{array}{r} 568 \\ - 49 \\ \hline 519 \end{array}$$

4) Annem köpeklerimizin patileri için onlara çorap örecektir. Evimizde 7 köpeğimiz olduğuna göre kaç tane çorap örmesi gerekir?

$$7 \times 4 = 28$$

5) Bugüne kadar 16 sayfa kitap okudum. Her gün 8 sayfa kitap okuyorum. Bir hafta sonra toplam kaç sayfa kitap okumuş olurum?

$$7 \times 8 = 63$$

6) Bahçemizdeki limonları 3'erli olarak sepetlere ayırıyoruz. Bahçemizden 24 tane limon topladığımıza göre kaç sepet olmuştur?

$$24 \div 3 = 8$$

7) Ben her gün bahçeden 5 çiçek topluyorum. Annem ise her gün 3 çiçek topluyor. Ben 35 çiçek topladığım zaman annem kaç çiçek toplamıştır?

8) Ali ve Ayşe'nin eşit sayıda bilyeleri vardır. Ayşe, Ali'nin 4 bilyesini alır ve kendi bilyelerine ekler. Ayşe'de Ali'den kaç bilye fazla vardır?

0

9) Arkadaşımın parası benim paramın 3 katıdır. İkimizin toplam 36 lirası vardır. Arkadaşımın kaç lira parası vardır?

10) Bir dart oyununda atış isabet ettiği zaman 4 puan kazanılır. Atış kaçırıldığında ise 1 puan kaybedilir. 3 atış yaptığında 7 puan kazandığına göre kaç atış isabet etmiştir?

0 0 2

Kenan 2. Seans Verileri

1) Bir kutunun içinde 5 top var. Ardından kutuya 6 top attım. Kutuya 7 top daha atarsam kutuda kaç top olur?

$$\begin{array}{r} 5 \\ +6 \\ \hline 11 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11 \\ +7 \\ \hline 18 \end{array}$$

2) Doğum gününe 15 arkadaşım geldi. Annem 11 tane içecek hazırlamış. Herkese birer tane içecek olması için daha kaç içecek hazırlanması gerekir?

$$\begin{array}{r} 15 \\ -11 \\ \hline 4 \end{array}$$

3) Benim 68 tane oyun kartım var. Bir oyunda 15 tanesini kaybettim. İkinci oyunda 34 tanesini kaybettim. Geri kalanına da kardeşime verdim. Kardeşimin kaç oyun kartı oldu?

$$\begin{array}{r} 68 \\ -15 \\ \hline 53 \end{array} \quad \begin{array}{r} 53 \\ -34 \\ \hline 19 \end{array}$$

4) Annem köpeklerimizin patileri için onlara çorap örecektir. Evimizde 7 köpeğimiz olduğuna göre kaç tane çorap örmesi gerekir?

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times 4 \\ \hline 28 \end{array}$$

5) Bugüne kadar 16 sayfa kitap okudum. Her gün 8 sayfa kitap okuyorum. Bir hafta sonra toplam kaç sayfa kitap okumuş olurum?

$$\begin{array}{r} 16 \\ +56 \\ \hline 72 \end{array}$$

6) Bahçemizdeki limonları 3'erli olarak sepetlere ayırıyoruz. Bahçemizden 24 tane limon topladığımıza göre kaç sepet olmuştur?

$$\begin{array}{r} 24 \\ \div 3 \\ \hline 8 \end{array}$$

7) Ben her gün bahçeden 5 çiçek topluyorum. Annem ise her gün 3 çiçek topluyor. Ben 35 çiçek topladığım zaman annem kaç çiçek toplamıştır?

$$\begin{array}{r} 35 \\ \div 5 \\ \hline 7 \end{array}$$

8) Ali ve Ayşe'nin eşit sayıda bilyeleri vardır. Ayşe, Ali'nin 4 bilyesini alır ve kendi bilyelerine ekler. Ayşe'de Ali'den kaç bilye fazla vardır?

9) Arkadaşımın parası benim paramın 3 katıdır. İkimizin toplam 36 lirası vardır. Arkadaşımın kaç lira parası vardır?

$$\begin{array}{r} 36 \\ \div 4 \\ \hline 9 \end{array}$$

10) Bir dart oyununda atış isabet ettiği zaman 4 puan kazanılır. Atış kaçırıldığında ise 1 puan kaybedilir. 3 atış yaptığında 7 puan kazandığına göre kaç atış isabet etmiştir?

Derya 2. Seans Verileri

1) Bir kutunun içinde 5 top var. Ardından kutuya 6 top attım. Kutuya 7 top daha atarsam kutuda kaç top olur?

$$\begin{array}{r} 5 \\ +6 \\ \hline 11 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11 \\ +7 \\ \hline 18 \end{array}$$

2) Doğum gününe 15 arkadaşım geldi. Annem 11 tane içecek hazırlamış. Herkese birer tane içecek olması için daha kaç içecek hazırlanması gerekir?

$$\begin{array}{r} 15 \\ -11 \\ \hline 4 \end{array}$$

3) Benim 68 tane oyun kartım var. Bir oyunda 15 tanesini kaybettim. İkinci oyunda 34 tanesini kaybettim. Geri kalanına da kardeşime verdim. Kardeşimin kaç oyun kartı oldu?

$$\begin{array}{r} 68 \\ -15 \\ \hline 53 \end{array} \quad \begin{array}{r} 53 \\ -34 \\ \hline 19 \end{array}$$

4) Annem köpeklerimizin patileri için onlara çorap örecektir. Evimizde 7 köpeğimiz olduğuna göre kaç tane çorap örmesi gerekir?

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times 4 \\ \hline 28 \end{array}$$

5) Bugüne kadar 16 sayfa kitap okudum. Her gün 8 sayfa kitap okuyorum. Bir hafta sonra toplam kaç sayfa kitap okumuş olurum?

$$\begin{array}{r} 16 \\ +56 \\ \hline 72 \end{array}$$

6) Bahçemizdeki limonları 3'erli olarak sepetlere ayırıyoruz. Bahçemizden 24 tane limon topladığımıza göre kaç sepet olmuştur?

$$\begin{array}{r} 24 \\ \div 3 \\ \hline 8 \end{array}$$

7) Ben her gün bahçeden 5 çiçek topluyorum. Annem ise her gün 3 çiçek topluyor. Ben 35 çiçek topladığım zaman annem kaç çiçek toplamıştır?

$$\begin{array}{r} 35 \\ \div 5 \\ \hline 7 \end{array}$$

8) Ali ve Ayşe'nin eşit sayıda bilyeleri vardır. Ayşe, Ali'nin 4 bilyesini alır ve kendi bilyelerine ekler. Ayşe'de Ali'den kaç bilye fazla vardır?

$$10 - 4 = 6$$

9) Arkadaşımın parası benim paramın 3 katıdır. İkimizin toplam 36 lirası vardır. Arkadaşımın kaç lira parası vardır?

$$\begin{array}{r} 36 \\ \div 4 \\ \hline 9 \end{array}$$

10) Bir dart oyununda atış isabet ettiği zaman 4 puan kazanılır. Atış kaçırıldığında ise 1 puan kaybedilir. 3 atış yaptığında 7 puan kazandığına göre kaç atış isabet etmiştir?

Arzu 3. Seans Verileri

Bugüne kadar 16 sayfa kitap okudum. Her gün 8 sayfa kitap okuyorum. Bir hafta sonra toplam kaç sayfa kitap okumuş olurum?

$(8)(8)(8)(8)(8)(8)(8) = 56$

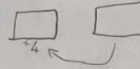
$$11111111 + 11111111 - 11111111 = 72$$

Ben bir günde 6 sayfa kitap okurken kardeşim 4 sayfa okumaktadır. Ben 24 sayfa okuduğum zaman boyunca kardeşim kaç sayfa okumuştur?

$$\textcircled{6} \textcircled{6} \textcircled{6} \textcircled{6} = 24$$

$4 \times 4 = 16$ sayılar

Ali ve Ayşe'nin eşit sayıda bilyeleri vardır. Ayşe, Ali'nin 4 bilyesini alır ve kendi bilyelerine ekler. Ayşe'de Ali'den kaç bilye fazla vardır?



4 bilye

Arkadaşımın parası benim paramın 3 katıdır. İkimizin toplam 36 lirası vardır. Arkadaşımın kaç lira parası vardır?

$$000 \times 000 = 9$$

Her doğru sorunun 3 puan getirdiği ve her yanlış sorunun 1 puan düşürdüğü 5 soruluk bir sınavda 11 puan aldığımı göre kaç soruyu doğru cevapladım?

3 3 3 3

Mert 3. Seans Verileri

Ben bir günde 6 sayfa kitap okurken kardeşim 4 sayfa okumaktadır. Ben 24 sayfa okuduğum zaman boyunca kardeşim kaç sayfa okumuştur?

B K
||||| ||||| $24 - 2 = 22$

$$24 \div 6 = 4$$

Benim yaşımlı kardeşimin yaşının 2 katıdır ve yaşlarımızın toplamı 24 olduğuna göre ben kaç yaşındayım?

7
 $24 - 4 = 20$

2

Her doğru sorunun 3 puan getirdiği ve her yanlış sorunun 1 puan düşürdüğü 5 soruluk bir sınavda 11 puan aldığıma göre kaç soruyu doğru cevaplamışım?



 $3 + 3 + \cancel{3} + \cancel{3} - 1 = 11$

Annem köpeklerimizin patileri için onlara çorap örecektir. Evimizde 7 köpeğimiz olduğuna göre kaç tane çorap örmesi gerekir?

$$7 \times 4 = 28$$



Bugüne kadar 16 sayfa kitap okudum. Her gün 8 sayfa kitap okuyorum. Bir hafta sonra toplam kaç sayfa kitap okumuş olurum?

$$7 - 2 = 5$$

$$5 \times 8 = 45 \text{ sayfa}$$

$\begin{array}{c} 16 \\ 8+8 \end{array}$
 $\textcircled{00}8000000 = 75$

$$45 + 16 = 71$$

Kenan 3. Seans Verileri

Ben bir günde 6 sayfa kitap okurken kardeşim 4 sayfa okumaktadır. Ben 24 sayfa okuduğum zaman boyunca kardeşim kaç sayfa okumuştur?

Ben 24 sayfa okudum
Kardeşim 4 sayfa okudu
Günde 6 sayfa okudum

16

Arkadaşımın parası benim paramın 3 katıdır. İkimizin toplam 36 lirası vardır. Arkadaşımın kaç lira parası vardır?

Arkadaşım Ben

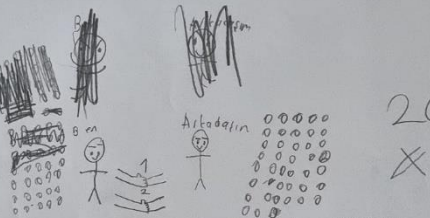
16 TL

Her doğru sorunun 3 puan getirdiği ve her yanlış sorunun 1 puan düşürdüğü 5 soruluk bir sınavda 11 puan aldığımıza göre kaç soruyu doğru cevaplamışım?

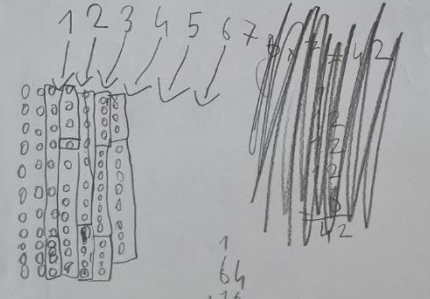
✓ = 3 X = 1 4 soru

11 4

60 bilyenin 23 tanesini, ardından 18 tanesini arkadaşşıma verdiğime göre kaç bilyem kaldı?



Buğüne kadar 16 sayfa kitap okudum. Her gün 8 sayfa kitap okuyorum. Bir hafta sonra toplam kaç sayfa kitap okumuş olurum?

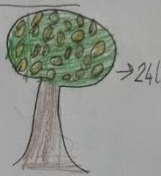


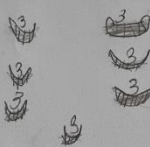
1 64
+ 170
80

Derya 3. Seans Verileri

Bahçemizdeki limonları 3'erli olarak sepetlere ayırıyoruz. Bahçemizden 24 tane limon topladığımıza göre kaç sepet olmuştur?

$$\begin{array}{r} 24 \overline{) 72} \\ \underline{- 48} \\ 24 \\ \underline{- 24} \\ 00 \end{array}$$

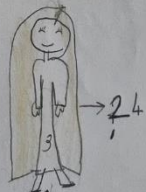


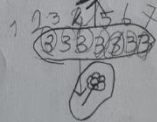


Ben her gün bahçeden 5 çiçek topluyorum. Annem ise her gün 3 çiçek topluyor. Ben 35 çiçek topladığım zaman annem kaç çiçek toplamıştır?

$$\begin{array}{r} 35 \overline{) 70} \\ \underline{- 35} \\ 35 \\ \underline{- 35} \\ 00 \end{array}$$







Her hafta 2 defa öğretmenim sizi çok seviyor
 Benim ve kardeşimin eşit sayıda kalemni varken ben onun 2 kalemni alirsam benim kac
 kalemim fazla olur?

Benim: $10 + 2 = 12$
 Kardeşimin: $10 - 2 = 8$

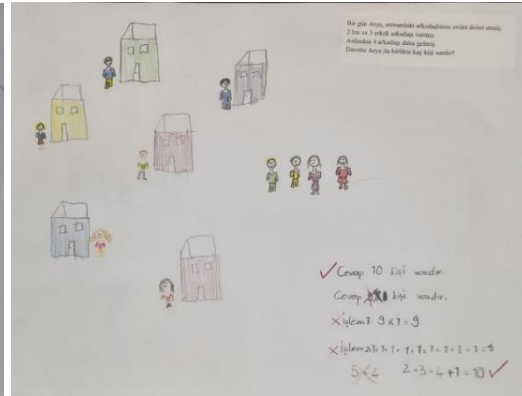
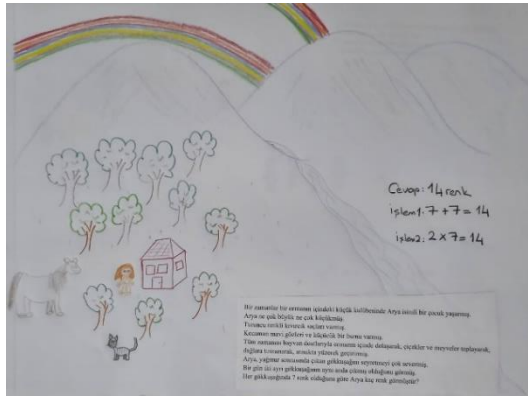
Benim yaşıım kardeşimin yaşıının 2 katıdır ve yaşlarımızın toplamı 24 olduğuna göre ben kaç
 yaşındayım?

$$\begin{array}{r} 24 \\ 2 \\ \hline 12 \end{array}$$

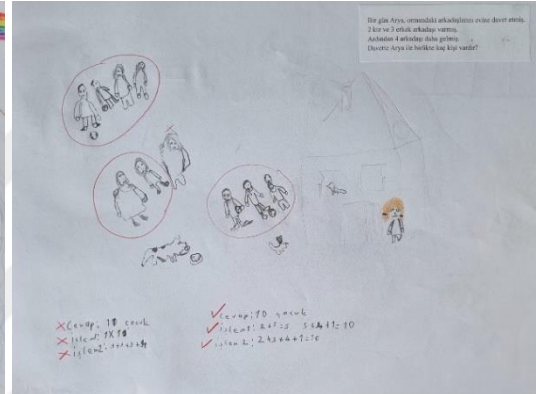
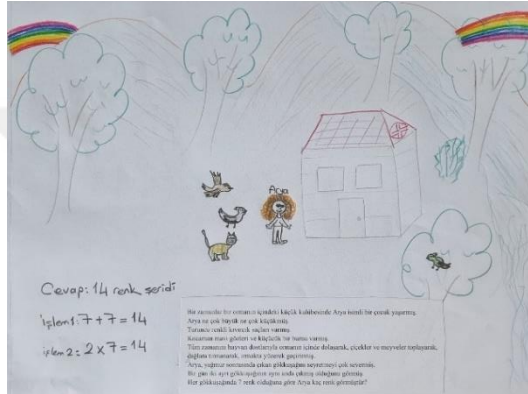
Her doğru sorunun 3 puan getirdiği ve her yanlış sorunun 1 puan düşürdüğü 5 soruluk bir
 sınavda 17 puan aldığımıza göre kaç soruyu doğru cevaplamışım?

$$\begin{array}{r} 15 \\ - 11 \\ \hline 4 \end{array}$$

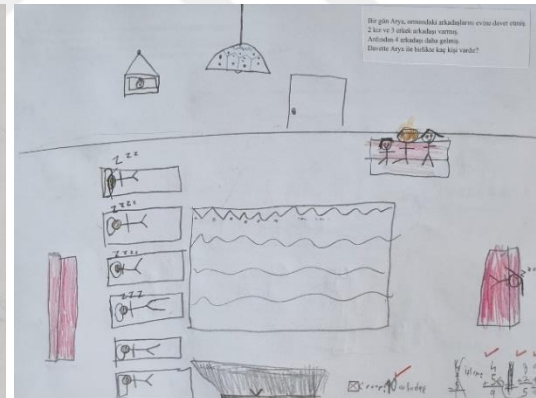
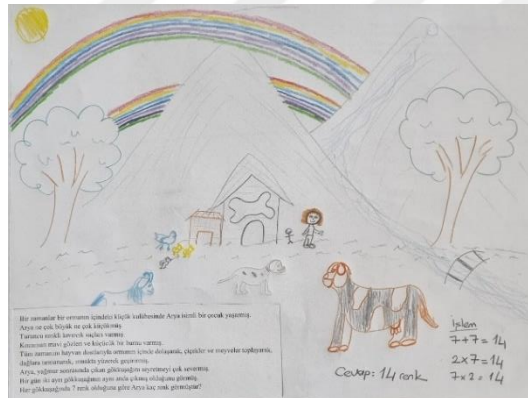
Arzu 4. Seans Verileri



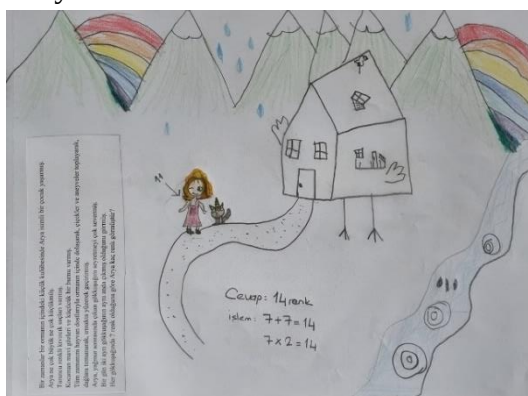
Mert 4. Seans Verileri



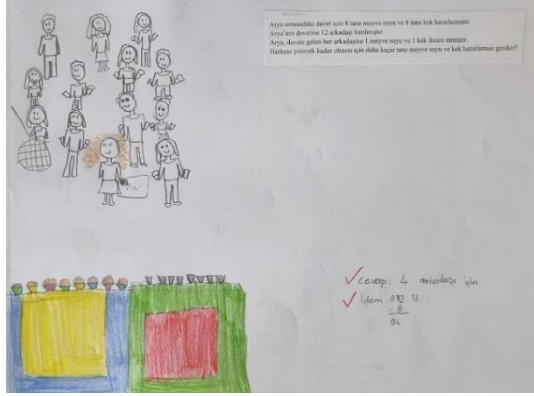
Kenan 4. Seans Verileri



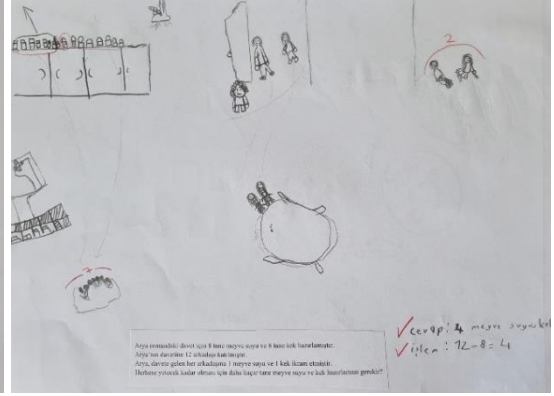
Derya 4. Seans Verileri



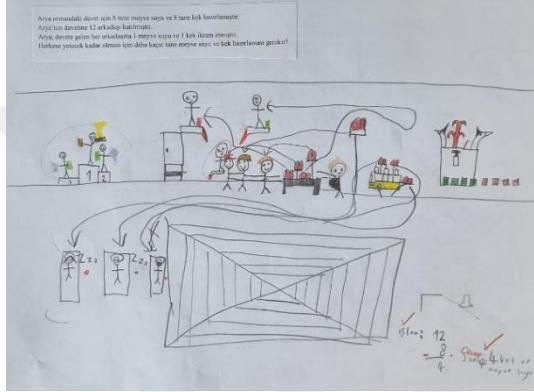
Arzu 5. Seans Verileri



Mert 5. Seans Verileri



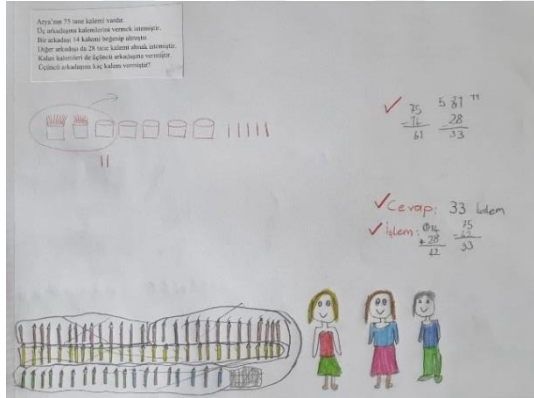
Kenan 5. Seans Verileri



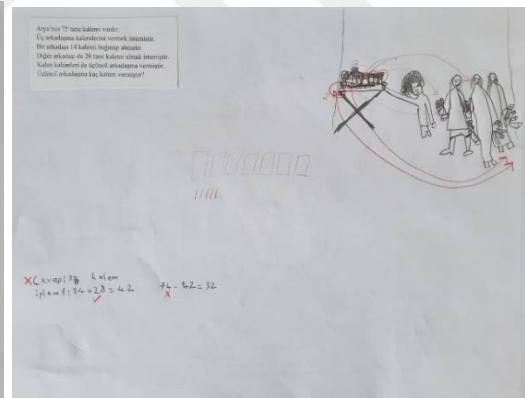
Derya 5. Seans Verileri



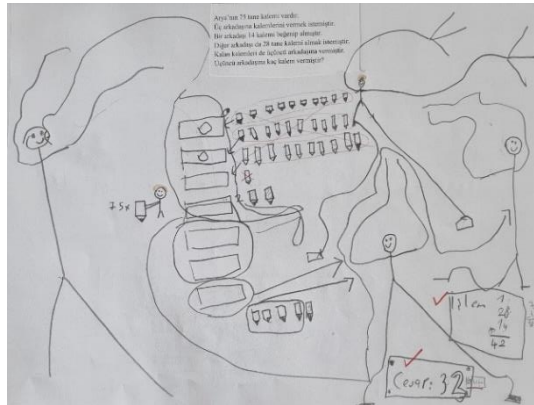
Arzu 6. Seans Verileri



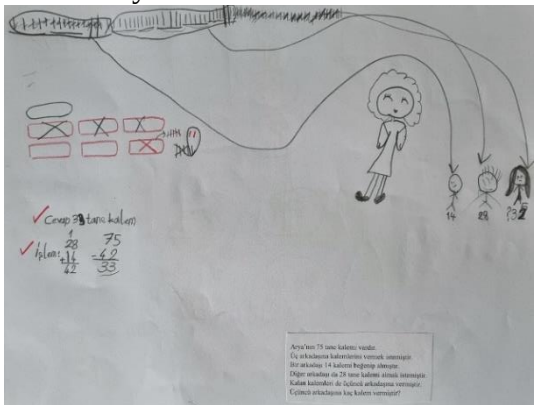
Mert 6. Seans Verileri



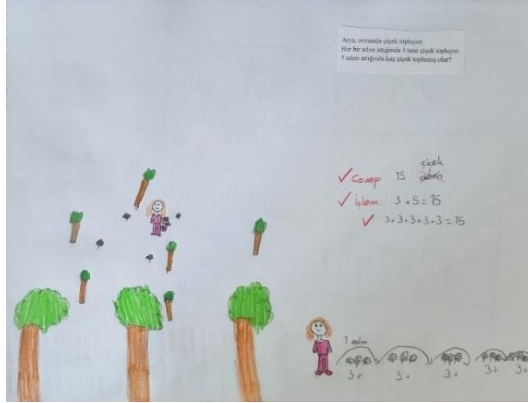
Kenan 6. Seans Verileri



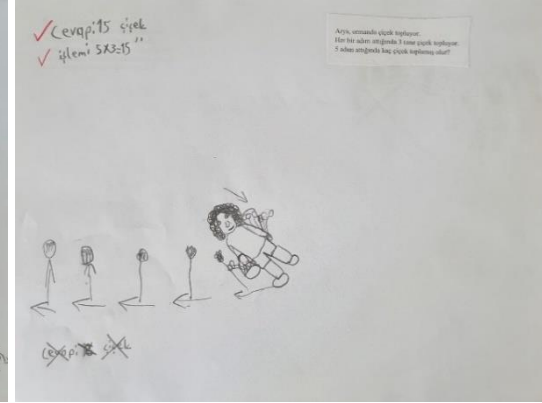
Derya 6. Seans Verileri



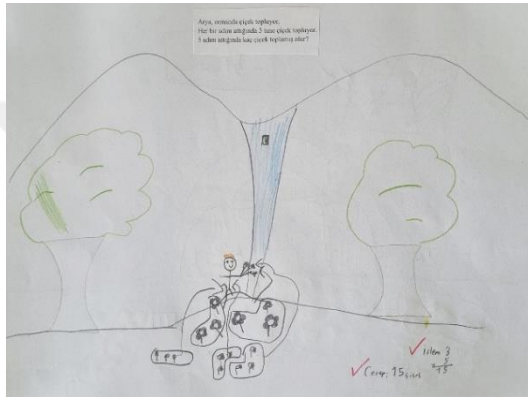
Arzu 7. Seans Verileri



Mert 7. Seans Verileri



Kenan 7. Seans Verileri



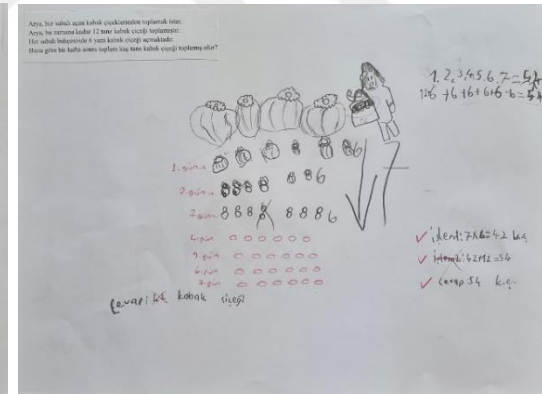
Derya 7. Seans Verileri



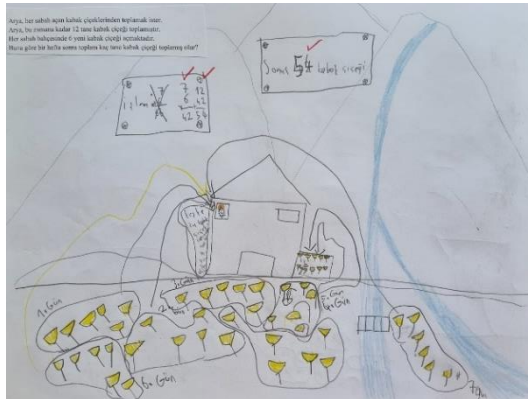
Arzu 8. Seans Verileri



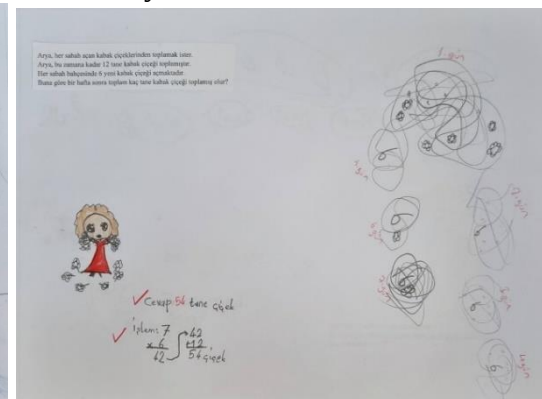
Mert 8. Seans Verileri



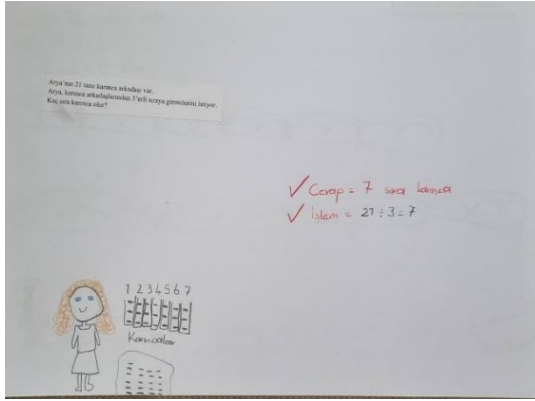
Kenan 8. Seans Verileri



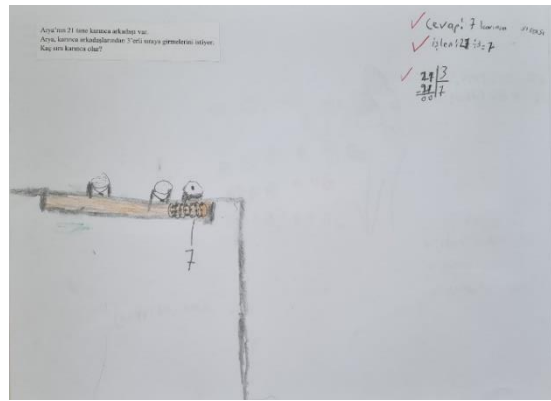
Derya 8. Seans Verileri



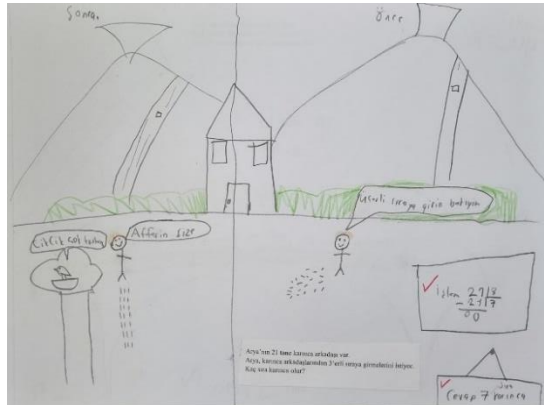
Arzu 9. Seans Verileri



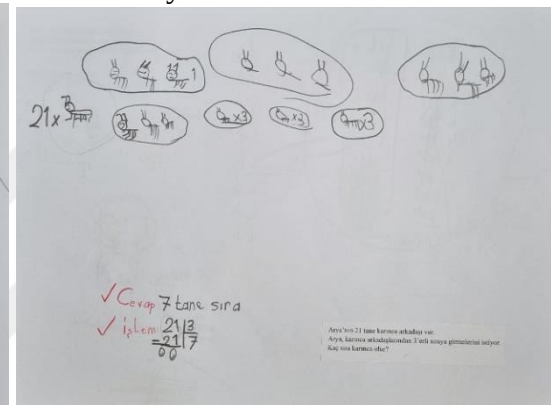
Mert 9. Seans Verileri



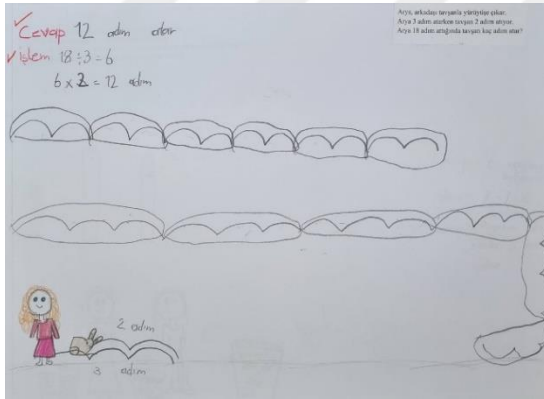
Kenan 9. Seans Verileri



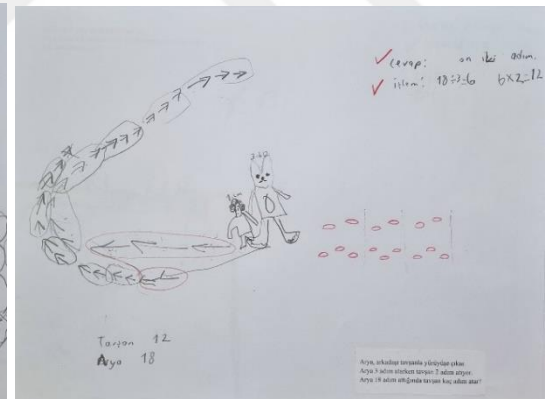
Derya 9. Seans Verileri



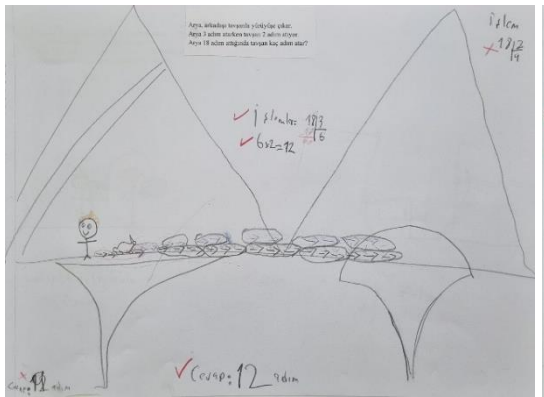
Arzu 10. Seans Verileri



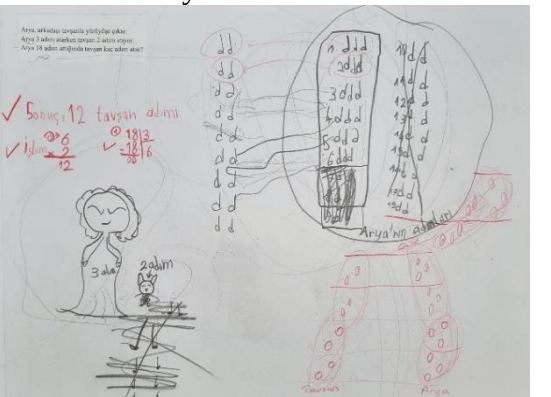
Mert 10. Seans Verileri



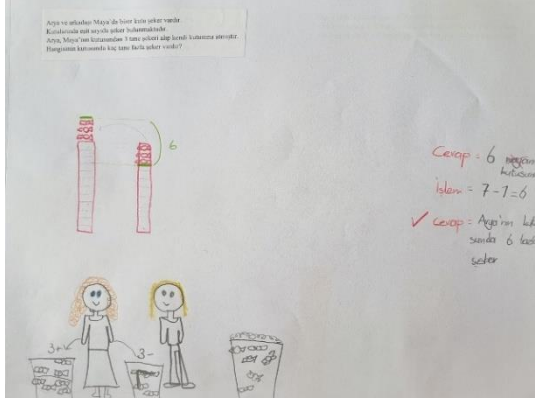
Kenan 10. Seans Verileri



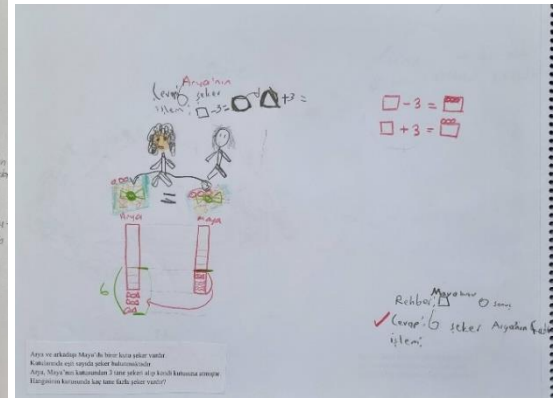
Derya 10. Seans Verileri



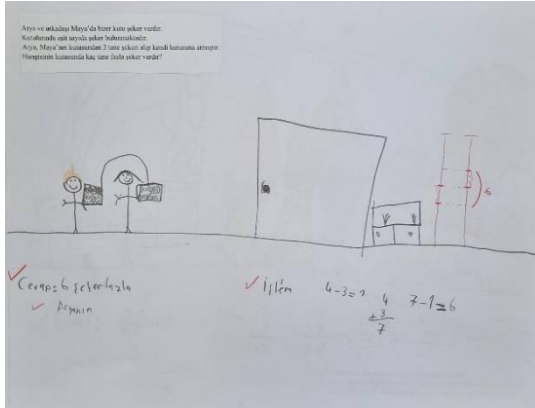
Arzu 11. Seans Verileri



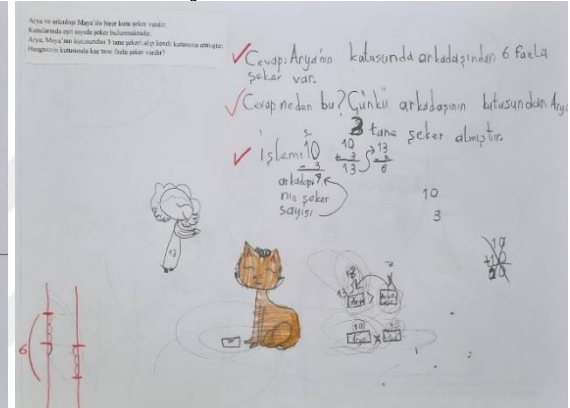
Mert 11. Seans Verileri



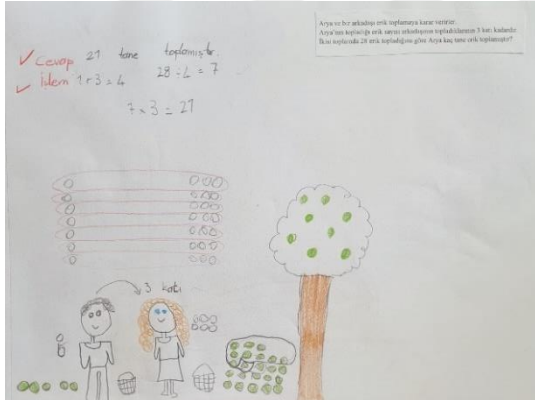
Kenan 11. Seans Verileri



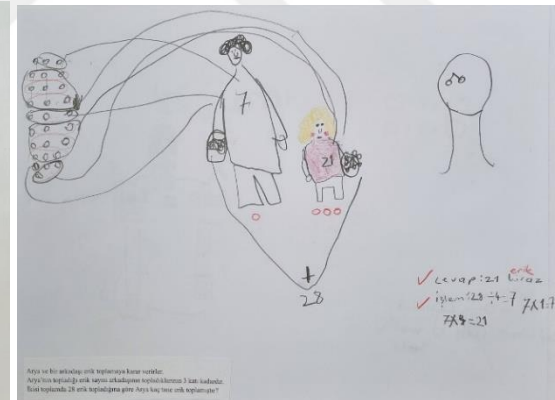
Derya 11. Seans Verileri



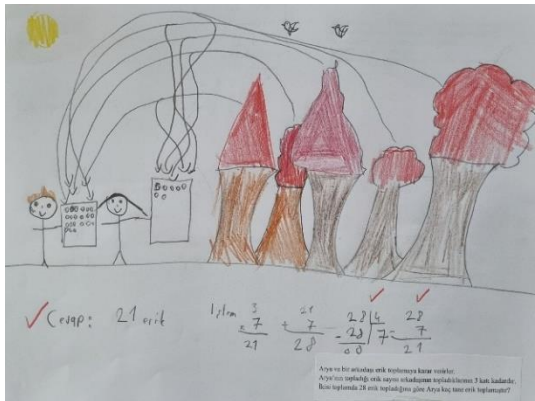
Arzu 12. Seans Verileri



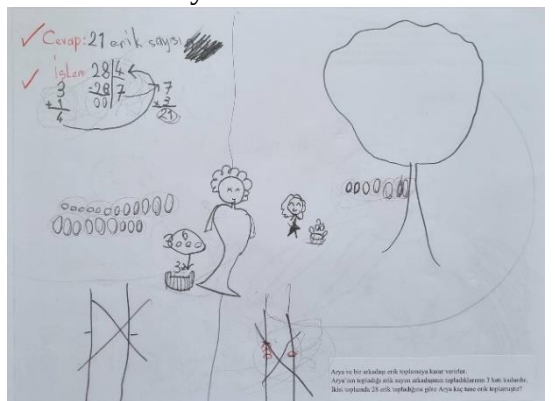
Mert 12. Seans Verileri



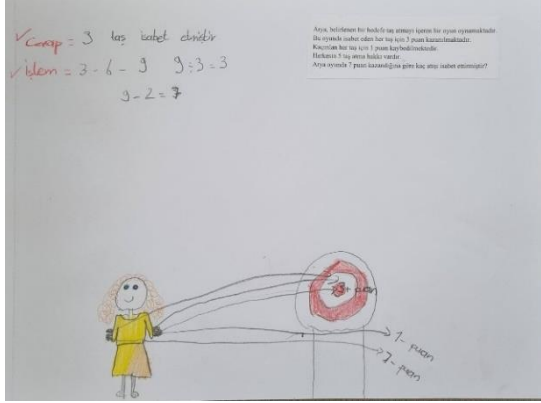
Kenan 12. Seans Verileri



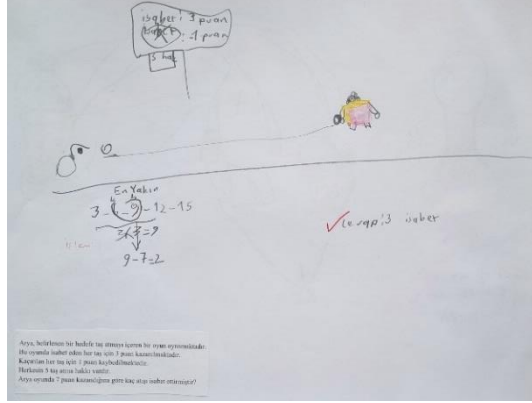
Derya 12. Seans Verileri



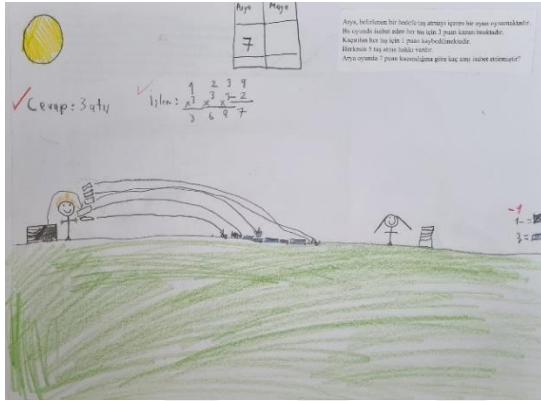
Arzu 13. Seans Verileri



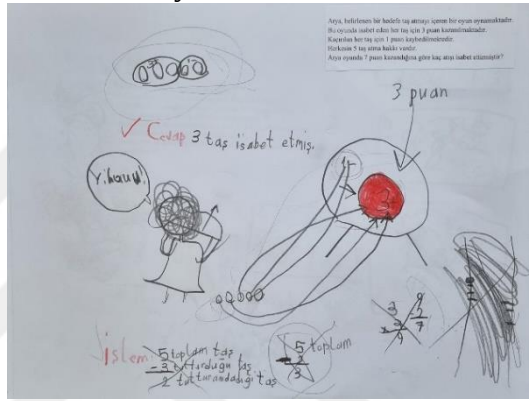
Mert 13. Seans Verileri



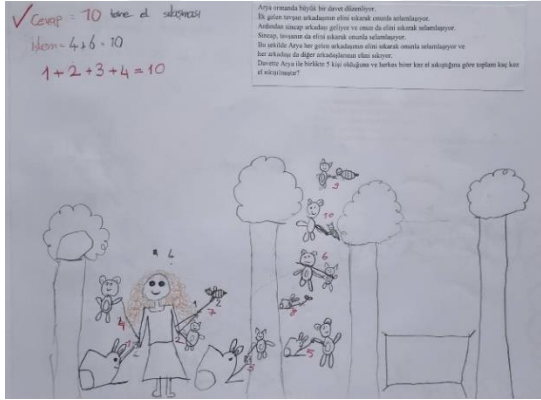
Kenan 13. Seans Verileri



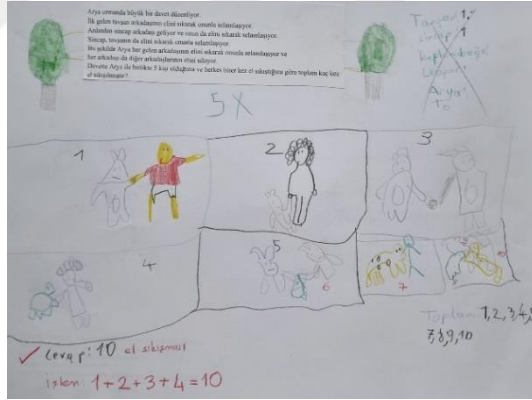
Derya 13. Seans Verileri



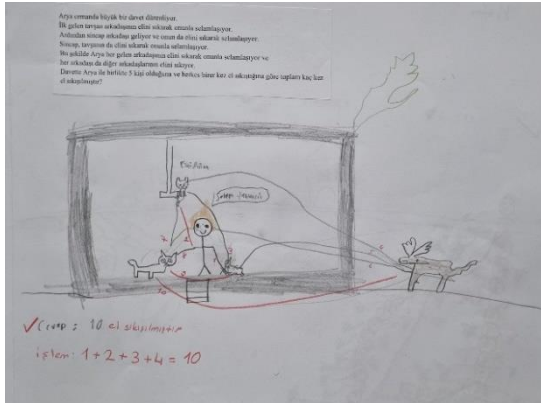
Arzu 14. Seans Verileri



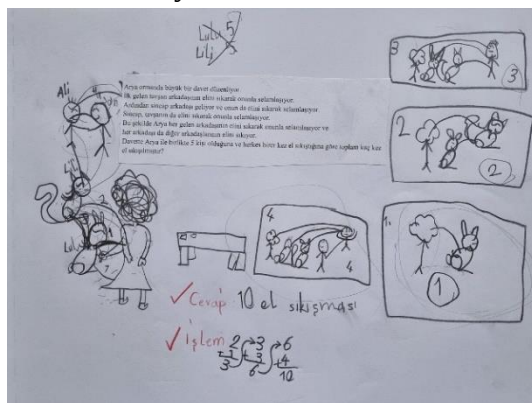
Mert 14. Seans Verileri



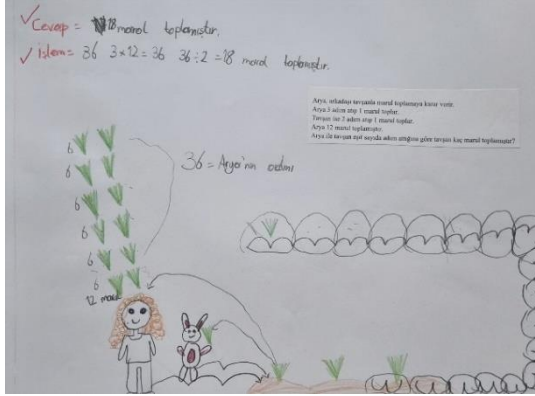
Kenan 14. Seans Verileri



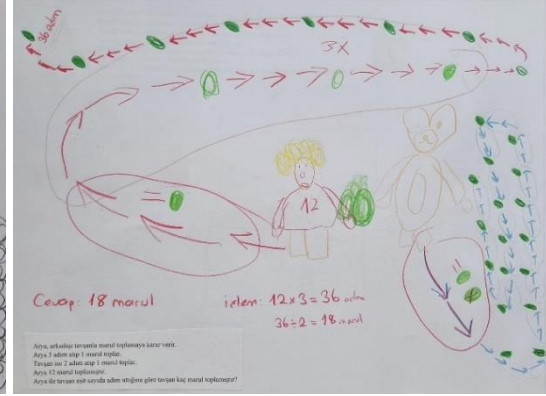
Derya 14. Seans Verileri



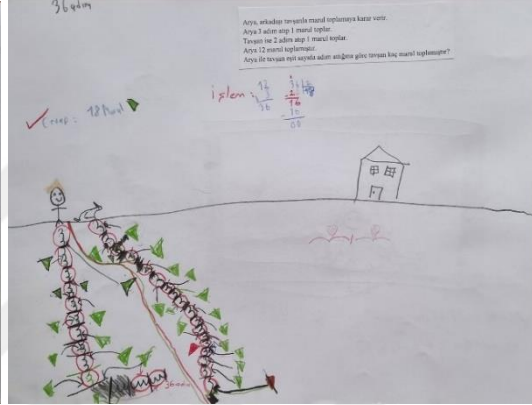
Arzu 15. Seans Verileri



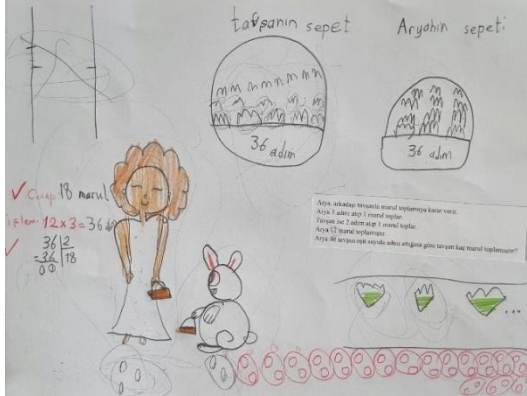
Mert 15. Seans Verileri



Kenan 15. Seans Verileri



Derya 15. Seans Verileri



Arzu 16. Seans Verileri

Bugüne kadar 16 sayfa kitap okudum. Her gün 8 sayfa kitap okuyorum. Bir hafta sonra toplam kaç sayfa kitap okumuş olurum?

$$7 \times 8 = 56$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ + 56 \\ \hline 74 \end{array} \text{ sayfa}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ + 56 \\ \hline 72 \end{array} \text{ sayfa}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \\ + \\ \hline 56 \end{array}$$

Ben bir günde 6 sayfa kitap okurken kardeşim 4 sayfa okumaktadır. Ben 24 sayfa okuduğum zaman boyunca kardeşim kaç sayfa okumuştur?

$$24 \div 6 = 4$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ - 4 \\ \hline 2 \end{array} \text{ sayfa}$$

$$4 \times 4 = 16 \text{ sayfa}$$

Ali ve Ayşe'nin eşit sayıda bilyeleri vardır. Ayşe, Ali'nin 4 bilyesini alır ve kendi bilyelerine ekler. Ayşe'de Ali'den kaç bilye fazla vardır?

$$\begin{array}{r} 4 \\ 10 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ 10 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ - 4 \\ \hline 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ + 4 \\ \hline 14 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ - 6 \\ \hline 8 \end{array} \text{ bilye}$$

Arkadaşımın parası benim paramın 3 katıdır. İkimizin toplam 36 lirası vardır. Arkadaşımın kaç lira parası vardır?

$$\begin{array}{r} 36 \\ + 36 \\ \hline 72 \end{array} \text{ lira}$$

Bir dart oyununda atış isabet ettiği zaman 4 puan kazanılır. Atış kaçırıldığında ise 1 puan kaybedilir. 3 atış yaptığında 7 puan kazandığına göre kaç atış isabet etmiştir?

$$4 + 4 = 8 \quad 8 - 1 = 7$$

$$2 \text{ atış}$$

Mert 16. Seans Verileri

Ben bir günde 6 sayfa kitap okurken kardeşim 4 sayfa okumaktadır. Ben 24 sayfa okuduğum zaman boyunca kardeşim kaç sayfa okumuştur?

$$24 \div 6 = 4$$

$$4 \times 4 = 16$$

Benim yaşı kardeşimin yaşının 2 katıdır ve yaşlarımızın toplamı 24 olduğuna göre ben kaç yaşıdayım?

$$\begin{array}{r} 24 \\ - 20 \\ \hline 4 \end{array} \quad 24 \div 2 = 12$$

Bir dart oyununda atış isabet ettiği zaman 4 puan kazanılır. Atış kaçırıldığında ise 1 puan kaybedilir. 3 atış yaptığında 7 puan kazandığına göre kaç atış isabet etmiştir?

$$2$$

Benim 68 tane oyun kartım var. Bir oyunda 15 tanesini kaybettim. İkinci oyunda 34 tanesini kaybettim. Geri kalanını da kardeşime verdim. Kardeşimin kaç oyun kartı oldu?

$$15 + 34 = 49$$

$$\begin{array}{r} 68 \\ - 49 \\ \hline 19 \end{array}$$

Bugüne kadar 16 sayfa kitap okudum. Her gün 8 sayfa kitap okuyorum. Bir hafta sonra toplam kaç sayfa kitap okumuş olurum?

$$7 \times 8$$

$$8 - 16 - 24 - 32 - 40 - 48 - 56 - 64 - 72 - 80$$

$$56 + 16 = 72$$

Kenan 16. Seans Verileri

60 bilyenin 23 tanesini, ardından 18 tanesini arkadaşına verdiğine göre kaç bilyem kaldı?

19 Bilye

$$\begin{array}{r} 560 \\ - 18 \\ \hline 542 \end{array}$$

Bugüne kadar 16 sayfa kitap okudum. Her gün 8 sayfa kitap okuyorum. Bir hafta sonra toplam kaç sayfa kitap okumuş olurum?

$$\begin{array}{r} 112 \\ + 16 \\ \hline 128 \end{array}$$

Ben bir günde 6 sayfa kitap okurken (kardeşim 4 sayfa okumaktadır. Ben 24 sayfa okuduğum zaman boyunca kardeşim kaç sayfa okumuştur?

24 / 6 = 4

4 x 4 = 16 sayfa

Arkadaşımın parası benim paramın 3 katıdır. İkimizin toplam 36 lirası vardır. Arkadaşımın kaç lira parası vardır?

A + B = 36

A = 3 x B

A ÷ B = 3

8 - 16 - 24 - 32

Bir dart oyununda atış isabet ettiği zaman 4 puan kazanılır. Atış kaçırıldığında ise 1 puan kaybedilir. 3 atış yaptığında 7 puan kazandığına göre kaç atış isabet etmiştir?

8 olmuştur 7 azaldı

30 tane 6 birlik

30 tane 6 birlik

Derya 16. Seans Verileri

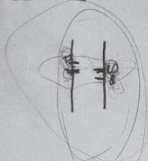
Bahçemizdeki limonların 3'erli olarak sepetlere avırıyoruz. Bahçemizde 24 tane limon topladığımızı göre kaç sepet olmuştur?

~~Cevap 8~~
işlem 24/3

Ben her gün bahçeden 5 çiçek topluyorum. Annem ise her gün 3 çiçek topluyor. Ben 53 çiçek topladığım zaman annem kaç çiçek toplamıştır?

~~Cevap 21~~

Benim ve kardeşimin eşit sayıda kalemi varken ben onun 2 kalemini alırsam benim kaç kalemin kalır?



Cevap: ~~2~~ 2
İşlem: ~~10~~ 10 - 2

Benim ya da kardeşimin yaşının 2 katıdır ve yaşlarımızın toplamı 24 olduğuna göre ben kaç yaşıyordum?

$2\frac{1}{2}$ $24\frac{1}{2}$

Ben ²⁰ ~~2~~
Kardeşim ¹⁴ ~~2~~

Cevap: ~~2~~ 20

Bir dört çeyrimde atış isabet ettiler zaman 4 puan kazanılır. Atış kaçırıldığında ise 1 puan kaybedilir. 3 atış yapıldığında 3 puan kazandığına göre kaç atış isabet etmiştir?



Cevap: 2
İşlem: $4 - 2 = 2$

Arzu 17. Seans Verileri

Ali ve Ayşe yürüyüşe çıkmıştır.
Ali 4 adım atarken Ayşe 3 adım atmaktadır.
Ali 28 adım attığında Ayşe kaç adım atar?

$4 - 5 = 12 - 16 = 20 - 24 = 28$
↓
 7×4

$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 21$ adım

Mert ve Banu'da birer kutu şeker vardır.
Kutularında eşit sayıda şeker bulunmaktadır.
Mert, Banu'nun kutusundan 4 tane şekeri alıp kendi kutusuna atmıştır.
Hangisinin kutusunda kaç tane fazla şeker vardır?

Mert'in 8 fazla
$$\begin{array}{r} + \\ 4 \\ \hline 8 \end{array}$$

[illegible]

Mert 17. Seans Verileri

Ali ve Ayşe yürüyüşe çıkmıştır.
Ali 4 adım atarken Ayşe 3 adım atmaktadır.
Ali 28 adım attığında Ayşe kaç adım atar?

9 adım
atıyor

Mert ve Banu'da birer kutu şeker vardır.
Kutularında eşit sayıda şeker bulunmaktadır.
Mert, Banu'nun kutusundan 4 tane şeker alıp kendi kutusuna atmıştır.
Hangisinin kutusunda kaç tane fazla şeker vardır?

8 Fazladır,

Meltem ve bir arkadaşı incir toplamaya karar verirler.
Meltem'in topladığı incir sayısı arkadaşının topladıklarının 3 katı kadardır.
İkisi toplamda 32 incir topladığına göre Meltem kaç tane incir toplamıştır?

32 ÷ 2 = 16
16 ÷ 2 = 8
8 ÷ 2 = 4

Beril ve Özgün çiçek toplamaya karar verir.
Beril 3 adım atıp 1 çiçek toplar.
Özgün ise 5 adım atıp 1 çiçek toplar.
Beril 15 çiçek toplamıştır.
Beril ile Özgün eşit sayıda adım attığına göre Özgün kaç çiçek toplamıştır?

15 ÷ 3 = 5
5 × 5 = 25
25 + 15 = 40

Kenan 17. Seans Verileri

Ali ve Ayşe yürüyüşe çıkmıştır.
Ali 4 adım atarken Ayşe 3 adım atmaktadır.
Ali 28 adım attığında Ayşe kaç adım atar?

21 ADIM

Mert ve Banu'da birer kutu şeker vardır.
Kutularında eşit sayıda şeker bulunmaktadır.
Mert, Banu'nun kutusundan 4 tane şeker alıp kendi kutusuna atmıştır.
Hangisinin kutusunda kaç tane fazla şeker vardır?

Mert'in kutusunda
8 fazla

A > B 8 tane

Meltem ve bir arkadaşı incir toplamaya karar verirler.
Meltem'in topladığı incir sayısı arkadaşının topladıklarının 3 katı kadardır.
İkisi toplamda 32 incir topladığına göre Meltem kaç tane incir toplamıştır?

32 ÷ 2 = 16
16 ÷ 2 = 8
8 ÷ 2 = 4

Beril ve Özgün çiçek toplamaya karar verir.
Beril 3 adım atıp 1 çiçek toplar.
Özgün ise 5 adım atıp 1 çiçek toplar.
Beril 15 çiçek toplamıştır.
Beril ile Özgün eşit sayıda adım attığına göre Özgün kaç çiçek toplamıştır?

15 ÷ 3 = 5
5 × 5 = 25
25 + 15 = 40

Derya 17. Seans Verileri

Afife Ayşe yürüyüşe çıkmıştır.
 4. adım atarken Ayşe 3. adım atmaktadır.
 28. adım atıldığında Ayşe kaç adım atar?

Cevap: 21

Mert ve Banu'da birer kutu şeker vardır.
 Kutularında eşit sayıda şeker bulunmaktadır.
 Mert, Banu'nun kutusundaki 4 şeker alıp kendi kutusuna atmıştır.
 Hangisinin kutusunda kaç tane fazla şeker vardır?

Cevap: 4

Mehmet ve bir arkadaşı incir toplamaya karar verirler.
 Mehmet 11 topladığı incir sayısı arkadaşının topladıklarının 3 katı kadardır.
 İkisi toplamda 32 incir topladığına göre Mehmet kaç tane incir toplamıştır?

Cevap: 11

Beril ve Özgül çiçek toplamaya karar verir.
 Beril 15 adım atıp 1 çiçek toplar.
 Özgül ise 5 adım atıp 1 çiçek toplar.
 Beril 15 çiçek toplamıştır.
 Beril ile Özgül eşit sayıda adım attığına göre Özgül kaç çiçek toplamıştır?

Cevap: 15

EK-4. Seans Döküm ve Analiz Örnekleri

Kenan 2. Seans Dökümü			
Süre	Kişi	Konuşma	Betimleme
00.00	Ar.	Evet Kenancığım, şimdi bu hafta da geçen hafta yaptığımızın aslında bir benzerini yapacağız. Tamam mı?	
	Kenan	Tamam.	
	Ar.	Bu seferki sorular tabii biraz farklı ama aynı şekilde on tane problem var, tamam mı?	
	K.	Tamam.	
	Ar.	Bu on tane problemi yine istediğin şekilde çözmeni isteyeceğim. Bunlar, evet, bunları böyle istediğin şekilde çözebilirsin. Bittiği zaman bana haber verebilirsin.	Soru kağıtlarını verir.
	K.	Tamam.	

Kenan'ın yaptıkları:

01.40 1.soru: Soruyu okur. Başta kurşun kalem almıştır ama onu bırakıp renkli bir kalem alır. Tekrar kurşun kalem alır ve sorunun üst kısmına bir şeyler çizer. Renkli kalemi alarak sorunun altına 5 tane yuvarlak çizer. Ardından $5+6=11$ ve $11+7=18$ işlemlerini yazar. Sonra 5 yuvarlağın altına üçgen gibi bir çizim yapar ve sorunun kenarına 6 tane yuvarlak çizerek onların da üstüne üçgen çizerek onu bir dağa benzetir ve renkli kalemlerle bunu boyar.

05.15 2.soru: Eline kurşun kalem alıp soruyu okur. Ardından $15-11=4$ işlemini yazar.

05.40 3.soru: Soruyu okur. Altına $15+34$ işlemini yazar ama sonucu hesaplarken 34'ün 4'ünü 5'e çevirir, sonra bunu tekrar düzeltmek ister ama işlemin üzerini karalar. $15+34=49$ işlemini tekrar yazar. Ardından $68-49=19$ işlemini ekler ve biraz düşünerek sonucunu yazar. Önceki çizdiği dağ resmine yazı ekler. 2.sorunun yanına bir üçgen çizerek onu da farklı şekilde boyar.

09.30 4.soru: Kurşun kaleme dönerek soruyu okur. Ardından 7×4 işlemini yazar ve sonucu bir süre düşünür. Parmaklarıyla hesaplayarak sonucu 28 olarak yazar. Sonra 3.sorunun yanına bir üçgen çizer ve onu boyar. Çizdiği resimlere yazılar da ekler. Ardından 28 sayısının yanına çorap diye yazar ve bir çorap resmi çizer. Ardından iki çorap daha çizip onları boyar.

13.27 5.soru: Kurşun kalemini alır ve soruyu okur. 8×7 işlemini yazar. Sonucu yazmadan yanına dört tane 14'ü alt alta yazarak toplar ve sonucu 56 bulur. Çarpımın sonucuna da 56 yazar. Ardından 4.sorunun altına farklı bir şekil çizmeye başlar. Şeklin ne olduğunu yazar ve boyar. Sonra 5.sorunun altına da bir kitap resmi çizer. Diğer sayfaya geçerken bu sayfanın arkasını çevirir ve oraya da 23 yazıp üçgen şekilleri çizer. (Çizdiği şekillerin soruların çözümüyle ilgisi yoktur)

17.12 6.soru: Diğer kağıda geçer, soruyu okumadan önce renkli kalemle sayfanın başına bir şekil çizer. Kurşun kalemini alıp soruyu okur. Ardından $24:3$ işlemini yazar, sonucunu parmaklarıyla hesaplayarak bulur ve 8 yazar. Ardından renkli bir kalem ile sepet resmi çizer.

19.26 7.soru: Soruyu okur. Ardından parmaklarını sayarak bir hesap yapar. Sonra 7×3 işlemini yazar, biraz düşündükten sonra sonucu 21 olarak yazar ve yanına da 21 diye tekrar yazar. Ardından çiçeğe benzer bir şekil çizip boyar.

21.00 8.soru: Soruyu okur ve 8 bilge diye yazar.

21.15 9.soru: Soruyu okur. Ax yazar biraz düşününce bunu karalar. Ardından A:B=3 yazar. Sonra A=3xB yazar. A+B=36 yazar. Biraz düşünür ve parmaklarıyla saymaya başlar. Biraz daha düşündükten sonra 36:4 işlemini yazar. Sonucu parmaklarıyla hesaplayarak bulur ve 9 yazar. Sonra kocaman bir 9 yazar. Ardından bir para resmi çizer ve boyar.

25.45 10.soru: Soruyu okur ve ardından 2 atış diye yazar.

Geçmiş gününke İstanbul'a

1) Bir kutunun içinde 5 top var. Ardından kutuya 6 top attım. Kutuya 7 top daha atarsam kutuda kaç top olur?

$$\begin{array}{r} 5 \\ +6 \\ \hline 11 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11 \\ +7 \\ \hline 18 \end{array}$$

2) Doğum gününe 15 arkadaşım geldi. Annem 11 tane içecek hazırlamış. Herkese birer tane içecek olması için daha kaç içecek hazırlanması gerekir?

$$\begin{array}{r} 15 \\ -11 \\ \hline 4 \end{array}$$

3) Benim 68 tane oyun kartım var. Bir oyunda 15 tanesini kaybettim. İkinci oyunda 34 tanesini kaybettim. Geri kalanı da kardeşime verdim. Kardeşimin kaç oyun kartı oldu?

$$\begin{array}{r} 68 \\ -15 \\ \hline 53 \end{array} \quad \begin{array}{r} 53 \\ -34 \\ \hline 19 \end{array}$$

4) Annem köpeklerimizin patileri için onlara çorap örecek. Evimizde 7 köpeğimiz olduğuna göre kaç tane çorap örmesi gerekir?

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times 4 \\ \hline 28 \end{array}$$

5) Bugüne kadar 16 sayfa kitap okudum. Her gün 8 sayfa kitap okuyorum. Bir hafta sonra toplam kaç sayfa kitap okuması olurum?

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 7 \\ \hline 56 \end{array}$$

6) Bahçemizdeki limonları 3'erli olarak sepetlere ayırıyoruz. Bahçemizden 24 tane limon topladığımıza göre kaç sepet olmuştur?

$$\begin{array}{r} 24 \\ :3 \\ \hline 8 \end{array}$$

7) Ben her gün bahçeden 5 çiçek topluyorum. Annem ise her gün 3 çiçek topluyor. Ben 35 çiçek topladığım zaman annem kaç çiçek toplamıştır?

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times 3 \\ \hline 21 \end{array}$$

8) Ali ve Ayşe'nin eşit sayıda bilyeleri vardır. Ayşe, Ali'nin 4 bilyesini alır ve kendi bilyelerine ekler. Ayşe'de Ali'den kaç bilye fazla vardır?

8 bilye

9) Arkadaşımın parası benim paramın 3 katıdır. İkimizin toplam 36 lirası vardır. Arkadaşımın kaç lira parası vardır?

$$\begin{array}{r} A \\ \times 3 \\ \hline B \end{array} \quad A+B=36 \quad \begin{array}{r} 36 \\ :4 \\ \hline 9 \end{array}$$

10) Bir dart oyununda atış isabet ettiği zaman 4 puan kazanılır. Atış kaçırıldığında ise 1 puan kaybedilir. 3 atış yaptığında 7 puan kazandığına göre kaç atış isabet etmiştir?

2 atış

26.00	K.	Bitti.	
	Ar.	Bitti mi? Tamam. Şimdi bana anlatabilir misin peki neler yaptığını? Daha iyi anlamak için senin neler yaptığını. En baştan neler düşündün, neler yaptın?	
	K.	Uzaylıların tersanelerini çizdim. Uzaylı arabası var, uzaylı ufosu var. Uzaylı klozeti.	Çizdiği resimleri gösterir.
	Ar.	Pekala neler yaptın biraz anlatabilir misin?	
27.00	K.	Bir kutunun içinde 5 tane top var. Daha sonra onları topladım 11 ediyor. 11 ve 7 toplarsam da 18 ediyor.	1.soruyu anlatır. 5+6=11 ve 11+7=18 işlemlerini gösterir.
	Ar.	Pekala devam edebilirsin. Anlatarak ilerleyebilirsin.	
27.24	K.	Doğum gününe 15 arkadaşım gelmiş. Annem 11 tane içecek hazırlamış. Herkese birer tane içecek olması için kaç içecek daha hazırlaması gerekir? 15'ten 11 çıkardığımda 4 kalır.	2.soruyu anlatır. 15-11=4 işlemini gösterir.

27.44	K.	Benim 68 tane oyun kartım var. Bir oyunda 15 ikinci oyunda 34 tanesini kaybettim. Geri kalanını da kardeşime verdim. Kardeşimin kaç oyun kartı olur? İlk önce 15 ve 34'ü topluyorum. 49 ediyor. 68'den de 49'u çıkartıyorum, 19 kalıyor. 19 kartı kardeşinin.	3.soruyu anlatır. 15+34=49 işlemini gösterir. 68-49=19 işlemini gösterir.
	Ar.	Burada ne yapmıştın? Onu neden karaladın? Hatırlıyor musun?	Karaladığı yeri sorar.
	K.	Şey, o yanlışlıkla olmuşta, mesela 33 yazmışım mesela oraya, bir an kafam karıştı, 33 yazmışım onu karaladım.	
	Ar.	Tamam.	
28.37	K.	Annem köpeklerimizin patileri için onlara, gerçekten de çorap örüyorlar mı köpeklerin...	4.soruyu anlatır.
	Ar.	Görmedin mi hiç köpeklerin patilerine giydirilen çoraplar?	
	K.	Kıyafetlerini gördüm fakat çoraplarını görmedim.	
	Ar.	Olabilir yani.	
	K.	Onlara çorap öğrecek. Evimizde 7 köpeğimiz olduğuna göre kaç çorap örmesi gerekir? 4'le 7'yi ya da 7'yle 4'ü çarparsak 28 çorap olması gerekiyor.	
29.25	K.	Şimdi, bugüne kadar 16 sayfa okudum. Her gün 8 sayfa kitap okuyorum. Bir hafta sonra toplam kaç sayfa kitap okumuş olurum? Diyor. Her gün 8 sayfa kitap okuyormuş. Bir hafta sonra toplam kaç sayfa kitap okuyormuş? 56 olarak yazıyordu. Daha güzel yazayım. 56. 56, 8'le 7'nin çarpımı 56. Çünkü kolay olmadığı için yanına bu işlemi yaparak yazdım.	5.soruyu anlatır. Toplamanın sonucundaki 56'yı gösterir.
	Ar.	Bu işlemi nasıl düşündün? 8 ile 7'yi çarpmak için neden 14'leri topladın?	
	K.	7'nin iki, 7 ve 7'yi toplarsam 14 eder. Neden 8 tane 7 yazmadım? Çünkü çok zor oluyor 8 tane 7 yazınca. Daha sonra bu ikiliği kullanmak istedim. İki 7, iki 7 daha 56 ediyor. Oraya da 56 yazdım.	4 tane 14 toplamını gösterir.
	Ar.	Cevap 56 mı?	
	K.	Evet 56. Bir de burada İtalyan bir tane kitap olan Çocuk Kalbini çizdim.	Resmi gösterir.
	Ar.	Pekala buraya geçelim mi şimdi?	
	K.	Geçelim.	
	Ar.	Bir de bunun arkasına da bir şey yaptın sanki. Bu ne? Neden böyle bir şey yaptın?	Sayfanın arkasını sorar.
	K.	Bu da bir tane üçgen şehir.	
	Ar.	Tamam, pekala.	

K.	Buraya limon çizdim. Dur azıcık daha güzel çizeyim sepeti. Tamam şimdi.	Diğer sayfayı gösterir.
32.25 K.	Bahçemizdeki limonları 3'erli sepetlere ayırıyoruz. 24'ü 3'e böldüm. Bahçemizdeki limonları 3'erli olarak... 24 tane limon topladığımıza göre kaç sepet olmuştur? 24'ü 3'e böldüm, 8 çıktı.	6.soruyu anlatır. 24:3=8 işlemini gösterir.
32.55 K.	Her gün bahçeden 5 çiçek topluyorum. Annem ise her gün 3 çiçek topluyor. Ben 35 çiçek topladığım zaman annem kaç çiçek toplamıştır? Burada parmaklarımı kullandığımı kamerada ayrıntılı biçimde gözükür zaten. 35'i 7 kez toplamış. Yani 7'yi 3'le çarparsam 21, annesi de 21 çiçek toplamış.	7.soruyu anlatır. Parmaklarıyla yeniden sayar. 7x3=21 işlemini gösterir.
33.37 K.	Ali ve Ayşe'nin eşit sayıda bilyeleri vardır. Ayşe, Ali'nin 4 bilyesini alır ve kendi bilyelerine ekler. Ayşe'de Ali'den kaç fazla bilye vardır? Şimdi bunun sayısı neden 8, neden 4 değil? Çünkü 8, aldı ondan onun bilyeleri azaldı, Ali'nin bilyeleri azaldı, Ayşe'nin bilyeleri arttı. O yüzden böyle, 8 bilye.	8.soruyu anlatır.
34.15 K.	Arkadaşıma, buraya dolar yazdım. Dolar çizdim. Arkadaşıma parası benim paramın 3 katıdır. İkimizin toplam 36 lirası vardır. Arkadaşıma kaç lira parası vardır? Arkadaşıma ve Ben nin başı. Arkadaşıma ve beni bölersek, arkadaşımın benden 3 tane varmış. A eşittir, yani arkadaşım eşittir 3 tane ben. Bir de A artı B eşittir 36. 36'yı 4'e böldüm 9 çıktı.	9.soruyu anlatır. Para resmini gösterir. A ve B harflerini gösterir.
Ar.	9 neyin sayısı olmuş oluyor?	
K.	9 benim sayısı olmuş oluyor. 9 benim sayısı olmuş oluyor. 3 tane 9 da... 9, 18, hıh, 27. 27 lirası olmuş. Daha sonra aklıma dolar geldi. Dolar çizdim.	Eline kalem alır, alt alta 3 tane 9 yazıp toplar, 27 yazar.
35.37 K.	Bir dart oyununda atış isabet, dart neydi?	10.soruyu anlatır.
Ar.	Bu ok atılan, duvarda yuvarlak bir şey oluyor, ona ok atıyorsun. Orada puanlar oluyor.	
K.	Hatırladım. Bir dart oyununda atış isabet ettiği zaman 4 puan kazanılır. Atış kaçırıldığında ise 1 puan kaybedilir. 3 atış yaptığında 7 puan kazandığına göre kaç atış isabet etmiştir? Şimdi... Ben bu soruda bir kişinin 3 atış yaptığında 7 puan kazandığına göre kaç atış isabet etmiştir? 2 atış olur. Çünkü 2, 8 olur. Üçüncüsünü duvara savurmuştur ve 1 tane puanı gider ve bu 7 olur.	Parmaklarıyla iki yapar.

	Ar.	Evet. Bu kadar sanırım değil mi?	
	K.	Evet.	
37.18	Ar.	Tebrik ediyorum seni, çok güzel açıkladın. Tamam ekleyeceğin bir Şey yoksa bitirelim hadi.	Kayıt biter.

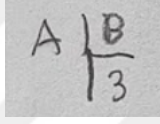
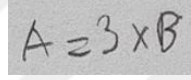
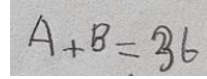
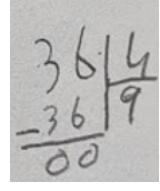
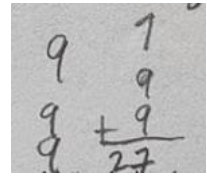


Analizler

Soru No	Değerlendirme	Sonuç
1	İşlemler doğru ve tam	doğru
2	İşlem doğru ve tam	doğru
3	İşlemler doğru ve tam	doğru
4	İşlem doğru ve tam	doğru
5	İşlem doğru ama eksik işlem yaptı	yanlış
6	İşlem doğru ve tam	doğru
7	Bölme işlemini zihinden yaptı, işlem doğru	doğru
8	İşlem yapmadı, zihinden çözdü	doğru
9	Cebirsel ifadeler doğru, işlemler de doğru ve tam	doğru
10	İşlem yapmadı, zihinden çözdü	doğru



9. sorunun analizi

	Söylemsel	Söylemsel Olmayan
Somut	Arkadaşımın ve Ben nin başı. Arkadaşımı ve beni bölersek, ⑨ arkadaşımın benden 3 tane varmış. A eşittir, yani arkadaşım eşittir 3 tane ben. Bir de A artı B eşittir 36. 36'yı 4'e böldüm 9 çıktı. ⑩ 9 benim sayısı olmuş oluyor. 9 benim sayısı olmuş oluyor. ⑫ 3 tane 9 da... 9, 18, hıh, 27. 27 lirası olmuş. Daha sonra aklıma dolar geldi. Dolar çizdim.	④ Parmaklarını sayar. ⑥ Parmaklarını sayar. ⑧ 
Soyut	①  ②  ③  ⑤  ⑦  ⑪ 	

Arzu 5. Seans Dökümü

Süre	Kişi	Konuşma	Betimleme
00.00	Ar.	Önce nasıl yaptığımızı bir hatırlayalım istersen. Ben sana şey sormuştum, Arya diye birini biliyor musun, Arya deyince ne geliyor aklına diye, senin aklına pek bir şey gelmemiştii öyle değil mi? Ama şimdi Arya deyince aklında ne canlanıyor?	
	A.	Ormanda yaşayan, küçük, o kadar da küçük olmayan, arkadaşları olan bir kız.	
	Ar.	Evet, bir şey canlanıyor aklında değil mi? Hayal edebiliyorsun Arya'nın nasıl bir şey olduğu hakkında fikrin var. Başta okulda da böyle oluyor, bize hiç bilmediğimiz yeni kelimeler söylüyorlar değil mi, yeni bir şeyler anlatıyorlar. İlk duyduğumuzda zihnimizde bir şey canlanmayabilir. Bu anlamadığımızı gösteriyor tamam mı? İlk duyduğumuz bir şey zihnimizde canlanmıyorsa anlamıyoruz anlamına geliyor. Ama onun hakkında bir şeyler öğrendiğimiz zaman zihnimizde bir şeyler canlanıyor değil mi? Onun üzerine düşünebiliyoruz, bu anladığımız anlamına geliyor. Şimdi biz de bu resimleri neden kullanacağız aslında, daha iyi anlayabilmek için. Böylece bu problem bağlamlarını daha iyi anlayabileceğiz. Bunun için resim kullanacağız. Söylenenleri resmettiğimizde nasıl bir ilişki var daha iyi anlamış oluyoruz. Problemlerimizi bir cümle okuyarak o cümlenin resmini çizerek çözüyorduk. Bu şekilde devam ediyorduk ve sorunun cevabını da resimde buluyorduk ve cevap diye belirtip yazıyorduk. Öyleyse hazırsan başlayalım probleme.	
	A.	Hazırım.	
02.00	Ar.	İlk cümlemiz şöyle: Arya ormandaki davet için sekiz tane meyve suyu ve sekiz tane kek hazırlamıştır.	İlk cümleyi okur.
	A.	Arya. Arya'nın bir kısmını evinin içi yapabilir miyim? Tezgâh yani.	Masa çizer. Kek çizer. Meyve suyu çizer. Boyar.
	Ar.	Nasıl istersen.	
	A.	Çocuk ya bunlar rengarenk olsun. Tamam. Diğer cümleye geçelim.	
12.00	Ar.	Tamam mı? Diğer cümleye geçelim. Devamında diyor ki: Arya'nın davetine on iki arkadaşı katılmıştır.	İkinci cümleyi okur.
	A.	On iki arkadaşı. Biraz küçük çizecektim. Bu disko topu olsun.	On üç küçük yuvarlak bir

		Bunu Arya yaptım. Diğerki soruya geçebiliriz.	büyük yuvarlak çizer. Büyük yuvarlağı topa çevirir. Küçük yuvarlakları çocuk olarak çizer.
18.45	Ar.	Tamam mı, bitti mi? Pekâlâ. Diğer cümleyi okuyalım. Diyor ki: Arya davete gelen her arkadaşına bir meyve suyu ve bir kek ikram etmiştir.	Üçüncü cümleyi okur.
	A.	Bunu nasıl göstereceğim? Elinde tepsi olsun o zaman. Şunlara göz falan çizeyim böyle zombi gibi duruyor. Bence hepsinin eline çizeyim. Tepside bitmiş. Ben hepsine çiziyorum böyle. Sekiz tane. Kaç tane çizdim, bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi, sekiz. Doğru çizdim. Diğerki cümleyi okuyabilirsiniz.	Çocukların ellerine bir meyve suyu ve kek çizer.
23.30	Ar.	Tamam. Diğer cümle şöyle diyor: Herkese yetecek kadar olması için daha kaç tane meyve suyu ve kek hazırlaması gerekir?	Dördüncü cümleyi okur.
	A.	Şimdi, herkese, dört tane daha. Dört tane daha hazırlaması gerekir. Cevap yazacağım. Nasıldı, ne yazıyorduk altına, işlem mi yazıyorduk?	Resimdeki dört çocuğu gösterir. Cevap: 4 yazar.
	Ar.	İşlemi de düşünebilirsin tabii.	
	A.	... Tamam.	İşlem: 12-8=4 yazar.
	Ar.	Bitirdin mi?	
	A.	Bitti.	
25.00	Ar.	Pekâlâ. Şimdi birlikte kontrol edeceğiz. Soruyu yapıştırıyım. Şimdi bakalım ne diyormuş. Arya ormandaki davet için sekiz tane meyve ve sekiz tane kek hazırlamıştır.	Kontrol eder.
	A.	Sekiz tane kek ve sekiz tane meyve suyu.	
	Ar.	Evet bunları böyle gösterdin. Diyor ki: Arya'nın davetine on iki arkadaş katılmıştır.	
	A.	Bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi, sekiz, dokuz, on, on bir, on iki arkadaş.	
	Ar.	Güzel. On iki arkadaş var, bu da Arya değil mi?	
	A.	Evet.	
	Ar.	Arya'nın dışında on iki arkadaş, çok güzel. Arya davete gelen her arkadaşına bir meyve suyu ve bir kek ikram etmiştir.	
	A.	Bir meyve suyu bir kek, bir meyve suyu bir kek, bir meyve suyu bir kek, böyle burada olan kekler kadar buraya yaptım.	
	Ar.	Evet, çok güzel. Ancak buradakiler kadar ikram edebilir değil mi? Bunlardan daha fazlasını ikram edemez. O zaman ne olacak, bunları	

böyle boş bırakman güzel oldu gerçekten.
Bunların eli boş kalıyor değil mi? Herkese
yetecek kadar olması için daha kaçar tane
meyve suyu ve kek hazırlaması lazım? O zaman
bu eli boş olan arkadaşlarımıza hazırlamamız
lazım değil mi?

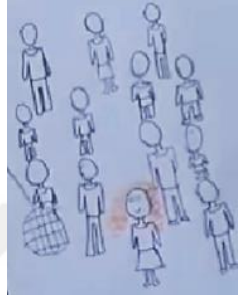
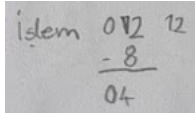
A.	Evet.	
Ar.	Öyleyse cevap dört dedik. Peki dört neyin sayısı burada, dört ne var burada? Sadece sayı yazıp bırakmıyorduk değil mi?	
A.	Dört arkadaş. Kaç nerede burada? Kaçar tane meyve suyu ve kek. Tamam. Arkadaşı.	Arkadaşı yazar.
Ar.	Dört arkadaş demek sanki dört arkadaş var gibi ya da dört arkadaş için hazırlayabilir değil mi? Ya da ne demesi gerekirdi dört tane meyve suyu ve kek aslında değil mi?	
A.	Evet. Çünkü öğretmenimiz bize demişti ki kaç veya kaçar kelimesinden sonra ne geliyorsa sayının yanına onu yazın.	İçin diye ekler.
Ar.	Evet burada meyve suyu ve kek geliyor aslında değil mi? Ama şu anda da doğru oldu tebrik ediyorum. Dört arkadaş için doğru. Peki buradaki işlem nedir diye düşündüğümüzde nasıl düşündün?	Cevaba tik koyar.
A.	İşlem on ikiden sekizi çıkartacağım. On iki arkadaş var sekiz tane dağıtılsa dört tane kalır.	
Ar.	Dört arkadaş boşta kalıyor değil mi? Onu da on ikiden sekizi çıkartarak buldun, evet, tebrikler gayet güzel oldu. Tebrik ediyorum. Ekleme istediğin bir şey var mı?	İşleme tik koyar.
A.	Yok.	
27.59	Ar.	Teşekkürler. Kayıt biter.



Arya ormandaki davet için 8 tane meyve suyu ve 8 tane kek hazırlamıştır.
Arya'nın davetine 12 arkadaşı katılmıştır.
Arya, davete gelen her arkadaşına 1 meyve suyu ve 1 kek ikram etmiştir.
Herkesi yetecek kadar olması için daha kaç tane meyve suyu ve kek hazırlaması gerekir?

✓ Cevap: 4 arkadaş için
✓ İşlem
$$\begin{array}{r} 012 \ 12 \\ - 8 \\ \hline 04 \end{array}$$

Problemin Analizi

	Söylemsel	Söylemsel Olmayan
Somut	① Arya. Arya'nın bir kısmını evinin içi yapabilir miyim? Tezgâh yani. Çocuk ya bunlar rengarenk olsun. ③ On iki arkadaşı. Biraz küçük çizecektim. Bu disko topu olsun. Bunu Arya yaptım. Bunu nasıl göstereceğim? Elinde tepsi olsun o zaman. Şunlara göz falan çizeyim böyle zombi gibi duruyor. Bence hepsinin eline çizeyim. Tepside bitmiş. ⑤ Ben hepsine çiziyorum böyle. Sekiz tane. Kaç tane çizdim, bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi, sekiz. Doğru çizdim. ⑦ Şimdi, herkese, dört tane daha. Dört tane daha hazırlaması gerekir. Cevap yazacağım. ⑧ Nasıldı, ne yazıyorduk altına, işlem mi yazıyorduk?	②  ④  ⑥ 
Soyut	⑨ 	

EK-5. Etik Kurul Onayı

Evrak Kayıt Tarihi: 08.04.2022

Protokol No: 299954

Tarih: 26.04.2022



ANADOLU ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL VE BEŞERÎ BİLİMLER BİLİMSEL ARAŞTIRMA VE YAYIN ETİĞİ KURULU
KARAR BELGESİ

ÇALIŞMANIN TÜRÜ:	Doktora Tez Çalışması
KONU:	Eğitim Bilimleri
BAŞLIK:	Erken Cebir Öğretiminde Resim Çizerek Problem Çözme Yaklaşımının Kullanımı
PROJE/TEZ YÜRÜTÜCÜSÜ:	Prof. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN
TEZ YAZARI:	Merve ATASAY SUNAY
ALT KOMİSYON GÖRÜŞÜ:	-
KARAR:	Olumlu
Prof. Dr. Saim ÖNCE (Başkan İkt. ve İdari Bil. Fak.)	
Prof. Dr. M. Erkan ÜYÜMEZ (Başkan Yardımcısı -İkt. ve İdari Bil. Fak.)	Prof. Dr. Fatime GÜNEŞ (Edebiyat Fak.)
Prof. Dr. Yıldız UZUNER (Eğitim Fak.)	Prof. Dr. İbrahim Cemil ULUKAN (Açıköğretim Fak.)
Prof. Dr. Handan DEVECİ (Eğitim Fak.)	Prof. Dr. Erkan YÜKSEL (İletişim Bil. Fak.)

EK-6. MEB Araştırma İzin ve Onayı



T.C.
ESKİŞEHİR VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : E-88074293-605.01-52948017
Konu : Merve ATASAY SUNAY'ın Araştırma İzni

28.06.2022

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜNE
(Genel Sekreterlik Yazı İşleri Müdürlüğü)

İlgi : a) Millî Eğitim Bakanlığı Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğünün 21.01.2020 tarihli ve 1563890 (2020/2) sayılı "Araştırma Uygulama İzinleri" Genelgesi.
b) 18.05.2022 tarihli ve 316962 sayılı yazınız.
c) Valilik Makamının 27.06.2022 tarihli ve 52857104 sayılı oluru.

Üniversiteniz Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı Matematik Eğitimi Doktora Programı öğrencisi Merve ATASAY SUNAY'ın, Prof. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN danışmanlığında hazırladığı "Erken Cebir Öğretiminde Resim Çizerek Problem Çözme Yaklaşımının Kullanımı" başlıklı doktora tez çalışmasına ilişkin ilgi (b) yazınız ve ekleri ile istenilen araştırma izni talebi incelenmiş, uygun görülmüş ve valilik makamından alınan ilgi (c) olur ekte gönderilmiş olup, Bakanlığımızın ilgi (a) Genelgesinin 25 inci maddesi gereği çalışmada ekteki imzalı ve mühürlü ölçme araçlarının kullanılması hususunda;

Bilgilerinizi ve gereğini arz ederim.

Osman CEBECİ
İl Millî Eğitim Müdür V.

Ek:
1-İlgi (c) Valilik Oluru (1 Sayfa)
2-Araştırma ve Değerlendirme Formu (2 Sayfa)
3-Ölçme Araçları (6 Sayfa)

Bu belge güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Adres : Büyükdere Mah. Atatürk Bulvarı No:247 Odunpazarı/ESKİŞEHİR

Belge Doğrulama Adresi : <https://www.turkiye.gov.tr/meb-ebys>

Telefon No : 0 (222) 280 27 07

E-Posta: strateji26@meb.gov.tr

Kep Adresi : meb@hs01.kep.tr

Bilgi için: Cem Murat ERSOY

Unvan : Bilgisayar İşletmeni

İnternet Adresi: eskisehir@meb.gov.tr

Faks: 2222802728

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. <https://evraksorgu.meb.gov.tr> adresinden 6345-7f75-353f-9e9a-6779 kodu ile teyit edilebilir.



T.C.
ESKİŞEHİR VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : E-88074293-605.01-52857104
Konu : Merve ATASAY SUNAY'ın
Araştırma İzni Talebi

27/06/2022

VALİLİK MAKAMINA

İlgi : a) Milli Eğitim Bakanlığı'nın 21.01.2020 tarihli ve 2020/2 Nolu Araştırma Uygulama İzinleri Genelgesi.
b) Anadolu Üniversitesi Rektörlüğü Genel Sekreterlik Yazı İşleri Müdürlüğü'nün 18.05.2022 tarihli ve 316962 sayılı yazısı.

Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı Matematik Eğitimi Doktora Programı öğrencisi Merve ATASAY SUNAY'ın, Prof. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN danışmanlığında hazırladığı "Erken Cebir Öğretiminde Resim Çizerek Problem Çözme Yaklaşımının Kullanımı" başlıklı doktora tez çalışmasına veri sağlamak amacıyla müdürlüğümüze bağlı kurumlarda araştırma yapma izin talebi Araştırma ve Sosyal Etkinlik İzinleri İnceleme Komisyonu tarafından değerlendirilmiş ve uygulanmasında sakınca görülmediği bildirilmiştir.

Müdürlüğümüze de uygun görülmüş olan söz konusu araştırma çalışmasının, 2022-2023 eğitim öğretim yılı içerisinde ve eğitim öğretimi aksatmamak kaydıyla, ilgi (a) Genelge doğrultusunda ilimizde bulunan resmi ilkokullarda uygulanmasını olurlarınıza arz ederim.

Osman CEBECİ
İl Millî Eğitim Müdür V.

O L U R
Akın AĞCA
Vali a.
Vali Yardımcısı

Ek:
1-Araştırma ve Değerlendirme Formu (2 Sayfa)
2-Ölçme Araçları (6 Sayfa)

Bu belge güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Adres : Büyükdere Mah. Atatürk Bulvarı No:247 Odunpazarı/ESKİŞEHİR

Belge Doğrulama Adresi : <https://www.turkiye.gov.tr/meb-ebys>

Telefon No : 0 (222) 280 27 07

Bilgi için: Cem Murat ERSOY

E-Posta: strateji26@meb.gov.tr

Unvan : Bilgisayar İşletmeni

Kep Adresi : meb@hs01.kep.tr

İnternet Adresi: eskisehir@meb.gov.tr

Faks: 2222802728

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. <https://evraksorgu.meb.gov.tr> adresinden 7d92-866c-3ac4-81d0-c5e2 kodu ile teyit edilebilir.



ESKİŞEHİR
İL MİLLÎ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜ

ARAŞTIRMA DEĞERLENDİRME FORMU

ARAŞTIRMA SAHİBİNİN

Adı Soyadı	Merve ATASAY SUNAY
Kurumu / Üniversitesi	Anadolu Üniversitesi
Araştırma Yapılacak Kurum	Eskişehir İl Millî Eğitim Müdürlüğü'ne bağlı resmi ilkokullar
Araştırmanın Konusu	Erken Cebir Öğretiminde Resim Çizerek Problem Çözme Yaklaşımının Kullanımı
Üniversite / Kurum Onayı	Var
Araştırma / Proje / Ödev / Tez Önerisi	Doktora Tezi
Veri Toplama Araçları	1. Haftalık Problemler (4 Sayfa) 2. Araştırma Gönüllü Katılım Formu (1 Sayfa) 3. Veli İzin Formu (1 Sayfa) Not: Çalışma kapsamında video ve ses kaydı uygulamaları yapılacaktır.
Görüş İstenecek Birimler	-

KOMİSYON GÖRÜŞÜ

İlgi: Millî Eğitim Bakanlığının 21.01.2020 tarih ve 81576613 sayılı 2020/2 Nolu Genelge Kapsamında Araştırma, Yarışma ve Sosyal Etkinlik İzinleri Genelgesi. Genelgenin ilgili maddeleri gereğince yapılan incelemede araştırmanın, 2022–2023 öğretim yılını aksatmayacak şekilde uygulanmasında bir sakınca yoktur.		
Komisyon Kararı	KABUL (oy birliği ile)	
(Varsa) Muhalif Üyenin Adı ve Soyadı	Gerekçesi :	

KOMİSYON

24/06/2022

Dr. Davut ATIŞ
Öğretmen

Dr. Fatma AVCI
Öğretmen

Ersen YOLDAÇ
Öğretmen

ANKET VE ARAŞTIRMA İZİN KOMİSYONU ARAŞTIRMA ÖN İNCELEME FORMU

Adı Soyadı : Merve ATASAY SUNAY

Kurumu : Anadolu Üniversitesi

Konu : Erken Cebir Öğretiminde Resim Çizerek Problem Çözme Yaklaşımının Kullanımı

Tarih : 24/06/2022

MEB 21.01.2020 tarih ve 81576613 sayılı 2020/2 Nolu Genelge Kapsamında Araştırma, Yarışma ve Sosyal Etkinlik İzinlerinde Dikkat Edilecek Hususlar	Uygun	Uygun Değil	Açıklama
Anayasa, Millî Eğitim Temel Kanunu ve Türk Millî Eğitiminin Genel Amaçlarına uygunluğu,	X		
Millî ve manevî değerlere uygunluğu,	X		
Kişilik haklarına uygunluğu (kişisel bilgiler istenilmemeli, ad-soyad vb.),	X		
Cinsiyet, din, dil ve ırk gibi farklılıkları istismar etmeme durumu,	X		
İnsan Hakları Evrensel Beyannamesi ve uluslararası bağlayıcılığı olan diğer belgelerce suç kabul edilen hususları içermemesi,	X		
Kişisel ve ailevi mahremiyetini ifşa eden sorular, ifadeler, resimler ve simgeler yer almaması,	X		
Veri toplama araçlarında kişi, kurum ve kuruluşlara yönelik reklâm veya tanıtım gibi ifade ve öğeler yer almaması,	X		
Araştırma önerisi ile veri toplama araçlarının tamamının idareye sunulması,	X		
Araştırma, veri toplama araçlarının okul ve kurumlarda uygulanması, eğitim-öğretim faaliyetini aksatmaması için ilk ve ikinci yarıyılın bitimine en az üç hafta kalıncaya kadar yapılması,	X		
Uygulamanın sadece Eskişehir ilinde yapılmasıdır.	X		

Komisyon Üyeleri	Uygun	Uygun Değil	İmza
Dr. Davut ATIŞ	X		
Dr. Fatma AVCI	X		
Ersen YOLDAÇ	X		

EK-7. Araştırma Gönüllü Katılım Formu

ARAŞTIRMA GÖNÜLLÜ KATILIM FORMU

Bu çalışma, Erken Cebir Öğretiminde Resim Çizerek Problem Çözme Yaklaşımının Kullanımı başlıklı bir doktora tez çalışması olup çocukların problem durumlarını nasıl görselleştirebildiğini inceleme amacını taşımaktadır. Çalışma, Merve Atasay Sunay tarafından yürütülmektedir. Sonuçları ile çocukların cebirsel düşünme gelişimine ışık tutması beklenmektedir.

- Bu çalışmaya katılımınız gönüllülük esasına dayanmaktadır.
- Çalışmanın amacı doğrultusunda yaptığınız resimler ve görüşme ortamının ses ve video kaydı alınarak sizden veriler toplanacaktır.
- İsminizi yazmak ya da kimliğinizi açığa çıkaracak bir bilgi vermek zorunda değilsiniz/araştırmada katılımcıların isimleri gizli tutulacaktır.
- Araştırma kapsamında toplanan veriler, sadece bilimsel amaçlar doğrultusunda kullanılacak, araştırmanın amacı dışında ya da bir başka araştırmada kullanılmayacak ve gerekmesi halinde, sizin (yazılı) izniniz olmadan başkalarıyla paylaşılmayacaktır.
- İstemeniz halinde sizden toplanan verileri inceleme hakkınız bulunmaktadır.
- Sizden toplanan veriler korunacak ve araştırma bitiminde arşivlenecek veya imha edilecektir.
- Veri toplama sürecinde/süreçlerinde size rahatsızlık verebilecek herhangi bir soru/talep olmayacaktır. Yine de katılımınız sırasında herhangi bir sebepten rahatsızlık hissederseniz çalışmadan istediğiniz zamanda ayrılabilirsiniz. Çalışmadan ayrılmanız durumunda sizden toplanan veriler çalışmadan çıkarılacak ve imha edilecektir.

Gönüllü katılım formunu okumak ve değerlendirmek üzere ayırdığınız zaman için teşekkür ederim. Çalışma hakkındaki sorularınızı Merve Atasay Sunay'a yöneltebilirsiniz.

Araştırmacı Adı: Merve Atasay Sunay

Adres :

Cep Tel :

Bu çalışmaya katılmayı tamamen kendi rızamla, istediğim takdirde çalışmadan ayrılabileceğimi bilerek benden alınan bilgilerin bilimsel amaçlarla kullanılmasını kabul ediyorum.

(Lütfen bu formu doldurup imzaladıktan sonra veri toplayan kişiye veriniz.)

Katılımcı Ad ve Soyadı:

İmza:

Tarih:

ARAŞTIRMA GÖNÜLLÜ KATILIM FORMU (Veli İzin Formu)

Bu çalışma, Erken Cebir Öğretiminde Resim Çizerek Problem Çözme Yaklaşımının Kullanımı başlıklı bir doktora tez çalışması olup çocukların problem durumlarını nasıl görselleştirebildiğini inceleme amacını taşımaktadır. Çalışma, Merve Atasay Sunay tarafından yürütülmektedir. Sonuçları ile çocukların cebirsel düşünme gelişimine ışık tutması beklenmektedir.

- Bu çalışmaya çocuğunuzun katılımı gönüllülük esasına dayanmaktadır.
- Çalışmanın amacı doğrultusunda çocuğunuzun yaptıkları resimler ve görüşme ortamının ses ve görüntü kaydı alınarak çocuğunuzdan veriler toplanacaktır.
- İsminizi yazmak ya da kimliğinizi açığa çıkaracak bir bilgi vermek zorunda değilsiniz, araştırmada katılımcıların isimleri gizli tutulacaktır.
- Araştırma kapsamında toplanan veriler, sadece bilimsel amaçlar doğrultusunda kullanılacak, araştırmanın amacı dışında ya da bir başka araştırmada kullanılmayacak ve gerekmesi halinde, sizin (yazılı) izniniz olmadan başkalarıyla paylaşılmayacaktır.
- İstemeniz halinde çocuklarınızdan toplanan verileri inceleme hakkınız bulunmaktadır.
- Çocuğunuzdan toplanan veriler korunacak ve araştırma bitiminde arşivlenecek veya imha edilecektir.
- Veri toplama sürecinde/süreçlerinde çocuğunuza rahatsızlık verebilecek herhangi bir soru/talep olmayacaktır. Yine de katılımınız sırasında herhangi bir sebepten rahatsızlık hissederseniz çalışmadan istediğiniz zamanda ayrılabilirsiniz. Çalışmadan ayrılmanız durumunda sizden toplanan veriler çalışmadan çıkarılacak ve imha edilecektir.

Gönüllü katılım formunu okumak ve değerlendirmek üzere ayırdığınız zaman için teşekkür ederim. Çalışma hakkındaki sorularınızı Merve Atasay Sunay'a yöneltebilirsiniz.

Araştırmacı Adı: Merve Atasay Sunay

Adres :

Cep Tel :

Bu çalışmaya çocuğumun katılmasını tamamen kendi rızamla, istediğim takdirde çalışmadan ayrılabileceğimi bilerek çocuğumdan alınan bilgilerin bilimsel amaçlarla kullanılmasını kabul ediyorum.

(Lütfen bu formu doldurup imzaladıktan sonra veri toplayan kişiye veriniz.)

Katılımcının Velisinin Ad ve Soyadı:

İmza:

Tarih:

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Merve ATASAY SUNAY
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Geçmişi

- 2011-2015, Anadolu Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü Lisans Programı
- 2015-2018, Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi Yüksek Lisans Programı
- 2018-2024, Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Eğitimi Doktora Programı

Yayınları

- Atasay Sunay, M. ve Erdoğan, A. (2024). Abstract strategy board game for mathematical reasoning: Opening the black box. *Thinking Skills and Creativity*, 52, 1-17. 10.1016/j.tsc.2024.101507
- Atasay Sunay, M., Gök, M. ve Erdoğan, A. (2024). Matematiği oyunla ilişkilendirme. A. Erdoğan (Ed.) *Matematik Öğretiminde İlişkilendirme*. Ankara: Nobel
- Erdoğan, A., Atasay Sunay, M. ve Eryılmaz Çevirgen, A. (2022). How to play board games? A framework proposal for classroom settings. *Board Game Studies Journal* 16(2), 101-122.
- Atasay Sunay, M. (2022). Köy enstitülerinde matematik eğitimi. *Abece*, 38(376-377), 19-25.
- Boaler, J. (2021). *Konumuz: Matematik*. (Çev. B. Karçık, E. Kantarcı Oğuz, M. Atasay Sunay, E. S. Yılmaz). Ankara: Nika Yayınevi
- Atasay, M. (2020). Görme engelli öğrenciler için matematik materyalleri tasarımı. *Anadolu University Journal of Education Faculty*, 4(2), 104-121.
- Erdoğan, A., Eryılmaz Çevirgen, A. ve Atasay, M. (2019). Geçmişten günümüze zekâ oyunları. *Apsistek*, Ocak 2019.

- Erdoğan, A., Eryılmaz Çevirgen, A. ve Atasay, M. (2017). Oyunlar ve matematik öğretimi: Stratejik zekâ oyunlarının sınıflandırılması. *Uşak Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 10, Özel Sayı 2, 287-311.
- Atasay, M. ve Erdoğan, A. (2017). Matematik ile sanatın ilişkilendirilmesi: Mandala desenlerinin simetri öğretiminde kullanımı. *Journal of Instructional Technologies & Teacher Education*, 6(2), 58-77.

