



**T.C.
BATMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**EŞİT GENİŞLİKLİ DALGA
DENKLEMİNİN OPERATÖR
SPLITTING TRİGONOMETRİK
B-SPLİNE KOLLOKASYON SONLU
ELEMEN YÖNTEMİYLE NÜMERİK
ÇÖZÜMLERİ**

Rabia ERKOÇ

**Eylül-2024
BATMAN**

**T.C.
BATMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**EŞİT GENİŞLİKLİ DALGA
DENKLEMİNİN OPERATÖR
SPLITTING TRİGONOMETRİK
B-SPLİNE KOLLOKASYON SONLU
ELEMEN YÖNTEMİYLE NÜMERİK
ÇÖZÜMLERİ**

Rabia ERKOÇ

**Danışman
Dr. Öğr. Üyesi İhsan ÇELİKKAYA**

**Eylül-2024
BATMAN**

TEZ KABUL VE ONAYI

Rabia ERKOÇ tarafından hazırlanan “Eşit genişlikli dalga denkleminin operatör splitting trigonometrik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle nümerik çözümleri” adlı tez çalışması 24/08/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Dr. Öğr. Üyesi İhsan ÇELİKKAYA

.....

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi İhsan ÇELİKKAYA

.....

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Gonca ÇELİKTEN

.....

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Ahmet GÜZEL

.....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Dr. Öğr. Üyesi Ömer Murat ÖTER
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Rabia ERKOÇ

Tarih: 24/08/2024

TEŐEKKÖR

Yüksek lisans çalışmamı yöneten, çalışma sürecinde desteğini ve bilgisini esirgemeyen Sayın Dr. Öğr. Üyesi İhsan ÇELİKKAYA' ya hocama, süreç içerisinde moral ve motivasyonumu arttıran dostlarıma, beni yetiştirip okumayı ve öğrenmeyi sevdiren, her koşulda desteklerini esirgemeyen, maddi manevi her fedakarlığı yapan canım aileme, ilk öğretmenim olan biricik anneme teşekkürlerimi borç bilirim.

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EŞİT GENİŞLİKLİ DALGA DENKLEMİNİN OPERATÖR SPLITTING TRİGONOMETRİK B-SPLİNE KOLLOKASYON SONLU ELEMAN YÖNTEMİYLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Rabia ERKOÇ

Batman Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi İhsan ÇELİKKAYA

2024, 76 Sayfa

Jüri

Dr. Öğr. Üyesi İhsan ÇELİKKAYA

Dr. Öğr. Üyesi Gonca ÇELİKTEN

Dr. Öğr. Üyesi Ahmet GÜZEL

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Tezin giriş bölümünde kısmi diferansiyel denklemlerin doğadaki fiziksel olaylarla olan ilişkileri hakkında bazı bilgiler verildi. Ayrıca bu bölümde nümerik çözümleri elde edilen eşit genişlikli dalga denklemi ve operatör splitting yöntemiyle ilgili kısa bir açıklama yapıldı. Tezin ikinci bölümünde; kollokasyon yöntemi, sonlu eleman yöntemi, spline fonksiyonlar, B-spline fonksiyonlar, trigonometrik kübik B-spline fonksiyonlar, operatör splitting yöntemleri hakkında detaylı bilgi verildi. Tezin üçüncü bölümünde Eşit Genişlikli Dalga (EW) denkleminin belirli başlangıç ve sınır şartları altında sağladığı beş model problem tanıtıldı. Tezin dördüncü bölümünde; EW denkleminin operatör splitting trigonometrik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle nümerik çözümleri elde edildi. EW denkleminin nümerik çözümleri hem Lie-Trotter hem de Strang splitting yöntemleriyle elde edildi. EW denkleminin sağladığı I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitleri her iki yöntemle hesaplandı ve birbirleriyle karşılaştırıldı. Ayrıca literatürde sık kullanılan L_2 ve L_∞ hata normları hem Lie-Trotter hem de Strang splitting yöntemleriyle hesaplanarak literatürdeki bazı çalışmalarla karşılaştırıldı. Beş model problemin grafikleri MATLAB 2015a programıyla çizildi. Tezin son bölümünde beş model problem için hesaplanan nümerik sonuçlarla ilgili genel bir değerlendirme yapıldı.

Anahtar Kelimeler: Eşit Genişlikli Dalga Denklemi, Kollokasyon Yöntemi, Lie-Trotter Splitting, Operatör Splitting Yöntemleri, Sonlu Eleman Yöntemi, Strang Splitting, Trigonometrik B-spline.

ABSTRACT

MS THESIS

NUMERICAL SOLUTIONS OF EQUAL WIDTH WAVE EQUATION BY OPERATOR SPLITTING TRIGONOMETRIC B-SPLINE COLLOCATION FINITE ELEMENT METHOD

Rabia ERKOÇ

Batman University Graduate Education Institute

Department of Mathematics

Advisor: Dr. Öğr. Üyesi İhsan ÇELİKKAYA

Year, 76 Pages

Jury

Dr. Öğr. Üyesi İhsan ÇELİKKAYA

Dr. Öğr. Üyesi Gonca ÇELİKTEN

Dr. Öğr. Üyesi Ahmet GÜZEL

This thesis consists of five chapters. In the introduction part of the thesis, some information has given about the relationship of partial differential equations with physical events in nature. In addition, in this section, a brief explanation has given about the equal-width wave equation and the operator splitting method, whose numerical solutions are obtained. In the second part of the thesis; Detailed information has given about the collocation method, finite element method, spline functions, B-spline functions, trigonometric cubic B-spline functions, and operator splitting methods. In the third part of the thesis, five model problems that the Equal Width Wave (EW) equation provides under certain initial and boundary conditions are introduced. In the fourth chapter of the thesis; Numerical solutions of the EW equation have obtained by operator splitting trigonometric B-spline collocation finite element method. Numerical solutions of the EW equation are obtained by both Lie-Trotter and Strang splitting methods. The conservation constants I_1 , I_2 and I_3 provided by the EW equation are calculated by both methods and compared with each other. In addition, L_2 and L_∞ error norms, which are frequently used in the literature, are calculated with both Lie-Trotter and Strang splitting methods and compared with some studies in the literature. The graphs of the five model problems are drawn with the MATLAB 2015a program.

Keywords: Collocation Method, Equal Width Wave Equation, Finite Element Method, Lie-Trotter Splitting, Operator Splitting Methods, Strang Splitting, Trigonometric B-spline

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	viii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
TABLolar DİZİNİ.....	iv
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	6
2.1. Sonlu Eleman Yöntemi	6
2.2. Kollokasyon Yöntemi.....	8
2.3. Spline Fonksiyonlar	9
2.4. Kübik B-spline Fonksiyonlar	11
2.5. Kübik Trigonometrik B-spline Fonksiyonlar	12
2.6. Splitting Yöntemler	16
2.7. Operatör Splitting Yöntemler	16
2.7.1. Bölme yöntemlerinin klasik formülasyonu	18
2.7.2. Lie-Trotter splitting yöntemi	19
2.7.3. Strang-Marchuk splitting yöntemi	21
3. EW DENKLEMİ VE MODEL PROBLEMLER	23
3.1. Giriş	23
3.2. Model Problemler.....	23
3.2.1. Problem 1: Tek solitary dalganın hareketi	24
3.2.2. Problem 2: İki solitary dalganın girişimi.....	25
3.2.3. Problem 3: Üç solitary dalganın girişimi	25
3.2.4. Problem 4: Maxwellian başlangıç şartı.....	26
3.2.5. Problem 5: Ardışık dalga oluşumu	26
4. EW DENKLEMİNİN OPERATÖR SPLITTING ÇÖZÜMLERİ	28

4.1. von Neumann Kararlılık Analizi.....	30
4.2. EW Denkleminin Lie-Trotter Splitting Şemasları ile Çözümü	32
4.2.1. Problem 1: Tek solitary dalganın hareketi	32
4.2.2. Problem 2: İki solitary dalganın girişimi.....	35
4.2.3. Problem 3: Üç solitary dalganın girişimi	37
4.2.4. Problem 4: Maxwellian başlangıç şartı.....	39
4.2.5. Problem 5: Ardışık dalga oluşumu	41
4.3. EW Denkleminin Strang Splitting Şeması ile Çözümü.....	43
4.3.1. Problem 1: Tek solitary dalganın hareketi	44
4.3.2. Problem 2: İki solitary dalganın girişimi.....	46
4.3.3. Problem 3: Üç solitary dalganın girişimi	48
4.3.4. Problem 4: Maxwellian başlangıç şartı.....	50
4.3.5. Problem 5: Ardışık dalga oluşumu	52
4.4. Lie-Trotter ve Strang Splitting Şemalarıyla Hesaplanan Nümerik Sonuçların Kendi İçinde ve Literatürdeki Çalışmalarla Karşılaştırılması	55
4.5. Model Problemlerinin Şekil Dizilimleri	64
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	70
KAYNAKLAR	71
ÖZGEÇMİŞ.....	76

SİMGELER VE KISALTMALAR

Kısaltmalar

EW

FEM

I_1

I_2

I_3

L_2 ve L_∞

Açıklama

Equal Width

Finite Element Method

Kütle korunum sabiti

Momentum korunum sabiti

Enerji korunum sabiti

Hata normları

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Bir vektör alanının bölünmesi

Şekil 2.1: FEM temel yaklaşım örneği

Şekil 2.2: Kübik B-spline şekil fonksiyonları

Şekil 2.3: Yinelemeli olmayan splitting yöntemlerinin grafiksel görselleştirilmesi

Şekil 4.1: Farklı zamanlardaki tek soliter dalganın fiziksel hareketi

Şekil 4.2. Zaman ilerledikçe iki solitary dalganın hareketi

Şekil 4.3. Üç solitary dalganın farklı zamanlardaki fiziksel davranışı

Şekil 4.4. $t = 12$ zamanında farklı μ değerleri için Maxwellian başlangıç şartı ile oluşan dalgaların fiziksel davranışı

Şekil 4.5. $d = 2$ için ardışık dalga oluşumu

Şekil 4.6. $d = 5$ için ardışık dalga oluşumu

TABLÖLER DİZİNİ

Tablo 4.1: Problem 1 için Lie-Trotter splitting şeması kullanarak $0 \leq t \leq 80$ ile $0 \leq x \leq 30$ aralığında $\Delta t = 0.05, c = 0.1, h = 0.03, h = 0.05, x_0 = 10, a = 0$ ve $b = 30$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları.

Tablo 4.2: Problem 1 için Lie-Trotter splitting şeması kullanarak $0 \leq t \leq 80$ ile $0 \leq x \leq 30$ aralığında $\Delta t = 0.01, c = 0.1, h = 0.03, h = 0.05, x_0 = 10, a = 0$ ve $b = 30$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları.

Tablo 4.3: Problem 1 için Lie-Trotter splitting şeması kullanarak $0 \leq t \leq 80$ ile $0 \leq x \leq 30$ aralığında $\Delta t = 0.01, c = 0.03, h = 0.03, h = 0.05, x_0 = 10, a = 0$ ve $b = 30$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları.

Tablo 4.4: Problem 1 için Lie-Trotter splitting şeması kullanarak $0 \leq t \leq 80$ ile $0 \leq x \leq 30$ aralığında $\Delta t = 0.05, c = 0.03, h = 0.03, h = 0.05, x_0 = 10, a = 0$ ve $b = 30$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları.

Tablo 4.5: Problem 2 için Lie-Trotter splitting şeması kullanarak $0 \leq t \leq 80$ ile $0 \leq x \leq 30$ aralığında $\Delta t = 0.01, \Delta t = 0.025, h = 0.05, h = 0.1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, x_1 = 10$ ve $x_2 = 25$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri.

Tablo 4.6: Problem 2 için Lie-Trotter splitting şeması kullanarak $0 \leq t \leq 80$ ile $0 \leq x \leq 30$ aralığında $\Delta t = 0.01, \Delta t = 0.1, h = 0.5, h = 0.1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, x_1 = 10$ ve $x_2 = 25$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri.

Tablo 4.7. Problem 3 için Lie-Trotter splitting şeması kullanarak $0 \leq t \leq 15$ ile $0 \leq x \leq 100$ aralığında $\Delta t = 0.01, \Delta t = 0.1, h = 0.05, h = 0.1, h = 0.5, c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5, x_1 = 10, x_2 = 25$ ve $x_3 = 35$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri.

Tablo 4.8. Problem 4 için Lie-Trotter splitting şeması kullanarak $0 \leq t \leq 12$ ile $0 \leq x \leq 40$ aralığında $\Delta t = 0.01, \Delta t = 0.05, h = 0.01, h = 0.05, \mu = 0.01$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri.

Tablo 4.9. Problem 4 için Lie-Trotter splitting şeması kullanarak $0 \leq t \leq 12$ ile $0 \leq x \leq 40$ aralığında $\Delta t = 0.01, \Delta t = 0.05, h = 0.01, h = 0.05, \mu = 0.05$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri.

Tablo 4.10. Problem 5 için Lie-Trotter splitting şeması kullanarak $0 \leq t \leq 800$ ile $-20 \leq x \leq 50$ aralığında $\Delta t = 0.05, \Delta t = 0.5, h = 0.07, d = 2, \mu = 0.16666667$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri.

Tablo 4.11. Problem 5 için Lie-Trotter splitting şeması kullanarak $0 \leq t \leq 800$ ile $-20 \leq x \leq 50$ aralığında $\Delta t = 0.05, \Delta t = 0.1, h = 0.1, d = 2, \mu = 0.16666667$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri.

Tablo 4.12. Problem 5 için Lie-Trotter splitting şeması kullanarak $0 \leq t \leq 800$ ile $-20 \leq x \leq 50$ aralığında $\Delta t = 0.05, \Delta t = 0.5, h = 0.07, d = 5, \mu = 0.16666667$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri.

Tablo 4.13. Problem 5 için Lie-Trotter splitting şeması kullanarak $0 \leq t \leq 800$ ile $-20 \leq x \leq 50$ aralığında $\Delta t = 0.05, \Delta t = 0.1, h = 0.1, d = 5, \mu = 0.16666667$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri.

Tablo 4.14: Problem 1 için Strang splitting şeması kullanarak $0 \leq t \leq 80$ ile $0 \leq x \leq 30$ aralığında $\Delta t = 0.05, c = 0.1, h = 0.03, h = 0.05, x_0 = 10, a = 0$ ve $b = 30$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları.

Tablo 4.15. Problem 1 için Strang splitting şeması kullanarak $0 \leq t \leq 80$ ile $0 \leq x \leq 30$ aralığında $\Delta t = 0.01, c = 0.1, h = 0.03, h = 0.05, x_0 = 10, a = 0$ ve $b = 30$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları.

Tablo 4.16. Problem 1 için Strang splitting şeması kullanarak $0 \leq t \leq 80$ ile $0 \leq x \leq 30$ aralığında $\Delta t = 0.01, c = 0.03, h = 0.03, h = 0.05, x_0 = 10, a = 0$ ve $b = 30$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları.

Tablo 4.17: Problem 1 için Strang splitting şeması kullanarak $0 \leq t \leq 80$ ile $0 \leq x \leq 30$ aralığında $\Delta t = 0.05, c = 0.03, h = 0.03$ ve $h = 0.05, x_0 = 10, a = 0$ ve $b = 30$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları.

Tablo 4.18: Problem 2 için Strang splitting şeması kullanarak $0 \leq t \leq 30$ ile $0 \leq x \leq 80$ aralığında $\Delta t = 0.01, \Delta t = 0.025, h = 0.05, h = 0.1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, x_1 = 10$ ve $x_2 = 25$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri.

Tablo 4.19: Problem 2 için Strang splitting şeması kullanarak $0 \leq t \leq 30$ ile $0 \leq x \leq 80$ aralığında $\Delta t = 0.01, \Delta t = 0.1, h = 0.5, h = 0.1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, x_1 = 10$ ve $x_2 = 25$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri.

Tablo 4.20: Problem 3 için Strang splitting şeması kullanarak $0 \leq t \leq 15$ ile $0 \leq x \leq 100$ aralığında $\Delta t = 0.01, \Delta t = 0.1, h = 0.05, h = 0.1, h = 0.5, c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5, x_1 = 10, x_2 = 25$ ve $x_3 = 35$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri.

Tablo 4.21. Problem 4 için Strang splitting şeması kullanarak $0 \leq t \leq 12$ ile $0 \leq x \leq 40$ aralığında $\Delta t = 0.01, \Delta t = 0.05, h = 0.01, h = 0.05, \mu = 0.01$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri.

Tablo 4.22. Problem 4 için Strang splitting şeması kullanarak $0 \leq t \leq 12$ ile $0 \leq x \leq 40$ aralığında $\Delta t = 0.01, \Delta t = 0.05, h = 0.01, h = 0.05, \mu = 0.05$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri.

Tablo 4.23. Problem 5 için Strang splitting şeması kullanarak $0 \leq t \leq 800$ ile $-20 \leq x \leq 50$ aralığında $\Delta t = 0.05, \Delta t = 0.5, h = 0.07, d = 2, \mu = 0.16666667$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri.

Tablo 4.24. Problem 5 için Strang splitting şeması kullanarak $0 \leq t \leq 800$ ile $-20 \leq x \leq 50$ aralığında $\Delta t = 0.05, \Delta t = 0.1, h = 0.1, d = 2, \mu = 0.16666667$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri.

Tablo 4.25. Problem 5 için Strang splitting şeması kullanarak $0 \leq t \leq 800$ ile $-20 \leq x \leq 50$ aralığında $\Delta t = 0.05, \Delta t = 0.5, h = 0.07, d = 5, \mu = 0.16666667$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri.

Tablo 4.26. Problem 5 için Strang splitting şeması kullanarak $0 \leq t \leq 800$ ile $-20 \leq x \leq 50$ aralığında $\Delta t = 0.05, \Delta t = 0.1, h = 0.1, d = 5, \mu = 0.16666667$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri.

Tablo 4.27. Problem 1'in $0 \leq t \leq 80$ $\Delta t = 0.05, h = 0.03, c = 0.1, x_0 = 10, a = 0$ ve $b = 30$ değerleri için tek solitary dalganın sayısal sonuçlarının ve hata normlarının birbirleriyle karşılaştırılması.

Tablo 4.28. Problem 1'in $0 \leq t \leq 80$ $\Delta t = 0.05, h = 0.03, c = 0.1, x_0 = 10, a = 0$ ve $b = 30$ değerleri için tek solitary dalganın sayısal sonuçlarının ve hata normlarının diğer çalışmalarla karşılaştırılması.

Tablo 4.29. Problem 2'nin $0 \leq t \leq 30$ ile $0 \leq x \leq 80$ aralığında $\Delta t = 0.1, h = 0.1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, x_1 = 10$ ve $x_2 = 25$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitlerinin birbirleriyle karşılaştırılması.

Tablo 4.30. Problem 2'nin $0 \leq t \leq 30$ ile $0 \leq x \leq 80$ aralığında $\Delta t = 0.1, h = 0.1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, x_1 = 10$ ve $x_2 = 25$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitlerinin diğer çalışmalarla karşılaştırılması.

Tablo 4.31. Problem 3'ün $0 \leq t \leq 15$ ile $0 \leq x \leq 100$ aralığında $\Delta t = 0.1, h = 0.1, c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5, x_1 = 10, x_2 = 25$ ve $x_3 = 35$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitlerinin birbirleriyle karşılaştırılması.

Tablo 4.32. Problem 3'ün $0 \leq t \leq 15$ ile $0 \leq x \leq 100$ aralığında $\Delta t = 0.1, h = 0.1, c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5, x_1 = 10, x_2 = 25$ ve $x_3 = 35$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitlerinin diğer çalışmalarla karşılaştırılması.

Tablo 4.33. Problem 4'ün $0 \leq t \leq 12$ ile $0 \leq x \leq 40$ aralığında $\Delta t = 0.025, h = 0.05, \mu = 0.01$ ve $\mu = 0.05$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitlerinin karşılaştırılması.

Tablo 4.34. Problem 4'ün $0 \leq t \leq 12$ ile $0 \leq x \leq 40$ aralığında $\Delta t = 0.025, h = 0.05, \mu = 0.01$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitlerinin diğer çalışmalarla karşılaştırılması.

Tablo 4.35. Problem 4'ün $0 \leq t \leq 12$ ile $0 \leq x \leq 40$ aralığında $\Delta t = 0.025, h = 0.05, \mu = 0.05$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitlerinin diğer çalışmalarla karşılaştırılması.

Tablo 4.36. Problem 5'in $0 \leq t \leq 800$ ile $-20 \leq x \leq 50$ aralığında $\Delta t = 0.05, h = 0.07, d = 2$ ve $d=5, \mu=0.16666667$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitlerinin karşılaştırılması.

Tablo 4.37. Problem 5'in $0 \leq t \leq 800$ ile $-20 \leq x \leq 50$ aralığında $\Delta t = 0.05, h = 0.07, d = 2, \mu = 0.16666667$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitlerinin diğer çalışmalarla karşılaştırılması.

Tablo 4.38. Problem 5'in $0 \leq t \leq 800$ ile $-20 \leq x \leq 50$ aralığında $\Delta t = 0.05, h = 0.07, d = 5, \mu = 0.16666667$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitlerinin diğer çalışmalarla karşılaştırılması.

Tablo 4.39. Problem 5'in $d = 5, d = 2, h = 0.07$ ve $k = 0.05$ değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin lineer artış oranları.

1. GİRİŞ

Günlük yaşamda karşımıza çıkan olayları daha iyi anlayabilmek, belli koşullar altında davranışlarını ön görebilmek için bilim insanları farklı yöntem ve tekniklere başvurmuşlardır. Doğadaki hemen hemen her olay fizik yasalarının yardımıyla cebirsel, diferansiyel ve integral denklemler cinsinden tanımlanabilir (Reddy, 1993:3). Bilim insanları doğadaki bu olayları matematiksel problemlere dönüştürüp çözümlerini elde etmeye çalışmışlardır. Bu problemleri çözmek için çoğunlukla bazı yöntem veya bu yöntemlerin kombinasyonlarını kullanmışlardır. Bu yöntemler teorik, deneysel ve nümerik yaklaşımlardır (Yiğit, 2021:1). Problemin analitik çözümünü veren teorik yaklaşımlardır ancak her problemin tam çözümü mevcut değildir. Deneysel yaklaşım ise problem için uygun koşullar altında deney ve gözlemlerle problemdeki nesnenin modelini kullanarak sonuca ulaşmaktır. Fakat her problem için uygun koşullar oluşturmak maliyetli ve güçtür. Her problemi deneysel olarak gözlemlemek de mümkün değildir. Nümerik yaklaşımda ise probleme diferansiyel ve integral denklemler yardımıyla yaklaşımlar yapılarak çözümler elde edilir. Gelişen bilgisayar teknolojileriyle birlikte matematiksel problemlerin programlamaları hızlı ve kolay bir hal aldığından, hesaplama yapmak kolaylaşmıştır. Bu problemleri çözerken kullandığımız denklemler çoğunlukla kısmi diferansiyel denklemlerdir. Çünkü adi diferansiyel denklemler bazı konuların incelenmesinde yetersiz kalır. Fakat kısmi diferansiyel denklemler, uygulamalı matematiğin çok geniş bir çalışma alanını oluşturduğundan analitik ve nümerik çözümler için sıklıkla kullanılır. Diferansiyel denklemlerle modellenen problemlerin özelliklerini incelemek, grafiğini çizmek, bazı noktalardaki değerlerini bulmak için nümerik yöntemlere başvururuz. Bu nümerik yöntemler varyasyonel yöntemler, sonlu fark yöntemleri ve sonlu eleman yöntemleridir (Zikanov, 2010:47).

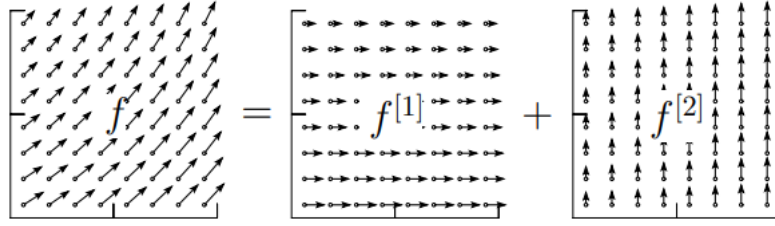
Sonlu eleman yöntemleri, mühendislik, matematik ve fizik problemlerini çözmek için kullanılan sayısal yöntemlerden biridir. Sonlu eleman yöntemleri, diğer yöntemlerden üstün olan üç temel özelliğe sahiptir. İlk olarak, problemin karmaşık olan geometrik alanı, sonlu eleman olarak adlandırılan geometrik basit alt alanların bir bütünü olarak temsil edilir. İkinci olarak, her bir sonlu eleman üzerinde yaklaşım fonksiyonları, herhangi bir sürekli fonksiyonun cebirsel polinomların doğrusal bir kombinasyonu ile temsil edilebilir. Üçüncüsü, belirlenmemiş katsayılar arasındaki cebirsel ilişkiler, yöntemi diğer yöntemlerden ayırır (Reddy, 1993:4). Her ne kadar karmaşık yapıları

tanımlamak için sonlu elemanlar yöntemi kullanılıyor olsa da ortaya çıkan çok sayıda cebirsel denklem, yöntemin kullanımını son derece zor ve kullanışsız hale getirmiştir. Ancak bilgisayarın gelişmesiyle binlerce cebirsel denklem sisteminin çözümü birkaç dakika içinde mümkün hale geldi (Logan, 2007:6). 1970’de tamamen gelişen yöntem makine, elektrik, hidrodinamik, atom, uçak gibi birçok mühendislik alanlarının yanı sıra tıpta ortopedi, kalp ve damar cerrahisi, estetik alanlarında da kullanılmaktadır (Güler, 2016:56). Kan dolaşımının tek boyutlu denklemlerini çizmek, bypass greftlerinde kan akımını iyileştirmek içinde kullanılmıştır. Bu tezde sonlu eleman yönteminin daha çok matematik, mühendislik ve fizik uygulamaları çalışılmıştır.

Sonlu elemanlar yöntemi literatürde lineer veya lineer olmayan birçok kısmi diferansiyel denkleme uygulanmıştır. Bu kısmi diferansiyel denklemlerden biri de eşit genişlikli dalga denklemdir. Bu denklemin formu aşağıdaki gibidir (Morrison, Meiss ve Cary, 1984:324):

$$U_t + UU_x - \mu U_{xxt} = 0. \quad (1.1)$$

Fiziksel sınır koşulları $x \rightarrow \pm\infty$ için $U \rightarrow 0$ dir. t zaman, x uzay koordinatları, $U(x, t)$ dalga genliğidir x ve t değişken, μ pozitif parametredir. UU_x ve U_{xxt} terimleri lineer olmayan dalganın yükselmesini ve yayılımını göstermektedir. EW denklemini çözerken kullanılacak olan operatör splitting yönteminden kısaca bahsedelim. Bir diferansiyel denklemin çözümünü hesaplamanın sayısal bir yöntemlerinden biri de splitting yöntemidir. Splitting yöntemi, orijinal denklemi bir zaman adımında iki parçaya ayırır, her parçanın çözümünü ayrı ayrı hesaplar ve daha sonra orijinal denklemin çözümünü oluşturmak için iki ayrı çözümü kontrollü bir şekilde birleştirir. Operatör splitting ise splitting yöntemlerinden biridir ve sayısal yöntemlerin uygulanması için hem daha basit hem de daha verimli olabilir. Operatör splitting yöntemi denklemin farklı parçalarını farklı özel yöntemlerle çözmeye olanak sağlar. Bunun sonucunda her bir alt denkleme farklı nümerik yöntemler uygulanarak daha basit ve daha etkili şemalar oluşturur. Dahası operatör splitting yöntemi, bilgisayardaki depolama alanını azaltır, kararlılığı artırır ve hatta yöntemin koşulsuz kararlı olmasına olanak sağlar (Holden,2010:2). Aşağıda vektör alanının nasıl bölündüğü modellenmiştir. Vektör alanı, integrallenebilir parçalara ayrıştırılır ve bu parçalar ayrı ayrı ele alınır.



Şekil 1.1. Bir vektör alanının bölünmesi

$\dot{y} = f(y)$, $\mathbb{R}^n$ 'de bir sistem olmak üzere vektör alanının Şekil 1.1'deki gibi bölündüğünü varsayalım. Burada $\dot{y}$ birinci dereceden türevi ifade etmektedir ve

$$\dot{y} = f^1(y) + f^2(y) \quad (1.2)$$

dir. Operatör splitting yönteminin temel fikri, orijinal denklemi zaman adımına göre $\dot{y} = f^1(y)$ ve $\dot{y} = f^2(y)$ şeklinde iki parçaya ayırmasıdır. y_0 başlangıç şartı değeriyle $y_{1/2}$ değerini elde etmek için birinci sistem çözülür ve y_1 'i elde etmek için bu değerle ikinci sistem birleştirilir. Bu şekilde, birinin diğerinin eşleniği olduğu sayısal yöntemler

$$\begin{aligned} \delta_h^* &= \varphi_h^2 \circ \varphi_h^1 \\ \delta_h &= \varphi_h^1 \circ \varphi_h^2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

şeklinde elde edilir. Bu şekilde (1.3) gösterilen yöntemlere genellikle Lie-Trotter splitting yöntemleri denir (Trotter, 1959:545). Taylor açılımı ile $(\varphi_h^1 \circ \varphi_h^2)y_0 = \varphi_h(y_0) + \mathcal{O}(h^2)$ olarak bulunur. Böylece her iki yöntem de (1.2) çözümüne 1. dereceden yaklaşımlar verir. Başka bir fikirde, Strang splitting (Strang, 1968:506) ve bazen de Marchuk splitting (Marchuk, 1968:103) olarak bilinen simetrik bir versiyon aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned} \delta_h^S &= \varphi_{h/2}^1 \circ \varphi_h^2 \circ \varphi_{h/2}^1 \\ \delta_h^S &= \varphi_{h/2}^2 \circ \varphi_h^1 \circ \varphi_{h/2}^2. \end{aligned} \quad (1.4)$$

(1.4)'te $\varphi_h^2 = \varphi_{h/2}^2 \circ \varphi_{h/2}^2$ 'yi parçalayarak $\delta_h^S = \delta_{h/2} \circ \delta_{h/2}^*$ 'nin Lie-Trotter splitting yöntemi ile bu yöntemin yarıya indirgenmiş adım boyutlarına sahip eşleniğinin bileşimine de Strang splitting yöntemi denir. Bu yöntem simetrik ve 2.mertebeden yaklaşımlar verir (Hairer, Lubich ve Wanner, 2002:47).

EW denkleminin nümerik çözümleri birçok araştırmacı tarafından incelendi. Bu çalışmalardan bazıları: (Gardner ve Gardner, 1992) kübik B-spline kullanarak Galerkin sonlu eleman yöntemiyle EW denkleminin yaklaşık çözümlerini elde etti. (Archilla, 1996) EW denkleminin çözümlerini bir spektral ayrıklaştırma ve yüksek mertebeden Adam metotlarını kullandı. (Gardner, vd. 1997) EW denkleminin dalga simülasyonlarını kuadratik B-spline Petrov- Galerkin yöntemi kullanarak yaptı. (Zaki, 2000) EW

denklemini en küçük kareler tekniği ile çözdü. (Zaki, 2001) EW denkleminin solitary dalga gelişimini incelemek için şekil fonksiyonlarını kuadratik B-spline fonksiyonlar olarak Petrov-Galerkin sonlu eleman şemasını kullandı. (Saka, Dağ ve Irk, 2003) kübik B-spline kollokasyon yöntemi ile EW denkleminin solitary dalga hareketini ve dalga oluşumunu inceledi. (Hamdi, vd. 2003) EW denkleminin genel formu ve genelleştirilmiş EW-Burgers denklemi için herhangi bir mertebeden lineer olmayan terimlerle soliter dalga çözümlerini elde ettiler ve genelleştirilmiş eşit genişlikli dalga denkleminin kesin çözümlerini buldular. (Dağ ve Saka, 2004) kübik B-spline fonksiyonlar kullanarak kollokasyon yöntemi ile EW denkleminin nümerik çözümlerini hesapladılar. (Raslan, 2004) Eşit genişlikli dalga denklemini sayısal olarak çözmek için kuintik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemini kullanarak çözdü. (Raslan, 2005) EW denklemini kuartik B-spline kollokasyon uygulayarak adi diferansiyel denklem sistemini Runge-Kutta yöntemiyle sayısal olarak çözdü. (Doğan, 2005) lineer B-spline Galerkin sonlu eleman yöntemi ile EW denkleminin sayısal çözümlerini elde etti. (Esen, 2005) tek soliter dalga hareketi, iki soliter dalganın girişimi ve dalga oluşumunu incelemek için kuartik B-spline sonlu eleman lumped Galerkin yöntemine dayalı bir nümerik teknik ile EW denklemini çözdü. (Esen ve Kutluay, 2006) EW dalga denkleminin nümerik çözümlerini bulmak için kapalı sonlu fark yöntemini kullandı. (Yusufoğlu ve Bekir, 2007) EW dalga denklemini varyasyonel yineleme yöntemiyle sayısal olarak çözüp ve Adomian ayrıştırma yöntemiyle karşılaştırdı. (Saka, Dağ, Dereli ve Korkmaz, 2008) Eşit genişlikli dalga (EW) denkleminin sayısal çözümlerini kuartik B-spline Galerkin, kosine açılım tabanlı bir diferansiyel kuadratur ve radyal baz fonksiyonlar kullanarak ağsız bir yöntemle elde ettiler. (Ali, 2008) EW denkleminin nümerik çözümlerini Chebyshev polinomlarına dayalı spektral kollokasyon yöntemi ile buldu. (Helvacıoğlu, 2009) EW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmek için kuadratik B-spline Galerkin ve kübik B-spline kollokasyon yöntemlerini kullandı. (Kaplan ve Dereli, 2012) EW denklemini radyal baz fonksiyonlar kullanarak kollokasyon metodu ile çözdüler. (Uddin, 2013) radyal çekirdekleri kullanarak kısmi diferansiyel denklemi adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürüp radyal baz fonksiyonları kullanarak EW denklemini nümerik olarak çözdü. (Dereli ve Schaback, 2013) EW denkleminin nümerik çözümlerini herhangi bir lineerleştirme yapmadan çizgiler yöntemi uygulayarak çözdüler. (Fazal-i, Inayet ve Shakeel, 2013) EW denkleminin nümerik çözümlerini septic B-Spline kollokasyon metodu kullanarak hesapladılar. (Mersin, 2014) EW denkleminiyle beraber bazı

diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için kübik B-spline Quasi-İnterpolasyon metodunu kullandı. (Ateş, 2014) Eşit genişlikli dalga denkleminin çözümlerini sonlu fark yöntemiyle elde etti. (Banaja ve Bakodah, 2015) EW denklemini Runge-Kutta entegrasyonuna dayalı çizgiler yöntemini (MOL) kullanarak çözdüler. (Çelikkaya, 2019) Eşit genişlikli dalga denkleminin sayısal çözümleri için operatör splitting kübik B-spline kollokasyon yöntemini önerdi. (Karakaş, 2020) Eşit genişlikli dalga denklemini Trigonometrik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle nümerik olarak çözdü.

Operatör splitting yöntemlerini kullanan bazı çalışmalar ise şöyledir: (Seydaoğlu ve Blanes, 2014) karmaşık katsayılı yüksek mertebeden splitting yöntemleri kullanarak otonom olmayan ayrılabilir parabolik denklemlerin sayısal entegrasyonunu ele aldılar. (Arnold ve Ringhofer, 1996) lineer Wigner denklemi ve birleştirilmiş Wigner-Poisson problemi için bir operatör splitting yöntemini analiz ettiler. (Zhang, vd. 2017) Boussinesq denklemine uygulanan ikinci dereceden bir operatör splitting şeması için doğrusal olmayan kararlılık ve yakınsama analizlerini öne sürdüler. (Seydaoğlu, Erdoğan ve Öziş, 2016) bir boyutlu Burgers denkleminin sayısal çözümlerini periyodik, Dirichlet, Neumann ve Robin sınır koşulları altında hesaplamak için yüksek mertebeden splitting yöntemlerini kullandılar. (Lee ve Lee, 2015) Allen-Cahn tipi denklemlerin sayısal çözümü için basit ve kararlı bir ikinci dereceden operatör splitting yöntemini önerdi.

Bu tezde eşit genişlikli dalga denklemine, operatör splitting kübik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi ile sonlu elemanlar uygulamaları yapıp nümerik çözümler elde edilecek ve literatürdeki diğer hesaplamalarla karşılaştırılacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Sonlu Eleman Yöntemi

Sonlu eleman yönteminin temel fikri, karmaşık bir problemin çözümünü daha basit bir problemle değiştirerek bulmaktır. Çözüm bulmada asıl problemin yerini daha basit bir problem aldığından, tam çözüm yerine sadece yaklaşık bir çözüm bulunur. Mevcut matematiksel yöntemler problemlerin analitik çözümünü bulmak için yeterli olmadığında sonlu eleman yöntemleri tercih edilir (Rao, 2011:3). Sonlu eleman yöntemleri, çok güçlü ve modern bir hesaplama aracıdır. Yöntem, çok sayıda hesaplama gerektirdiğinden bilgisayar kullanılmalıdır. Yapıların, farklı bazen de çok çeşitli biçimleri vardır ve çoğu zaman bir yapı çok sayıda malzemeden oluşur. Örneğin, köprüler ve uzaya yerleştirilebilir antenler birer yapıdır, ancak görünüş ve malzeme açısından birbirlerine pek benzemezler. Anten, fırlatma sırasında kapatılan ve dünya yörüngesine girdikten sonra açılan bir şemsiyeye benzer. Uzayda yerleştirilen bir antenin şemsiyeye benzer yüzeyindeki çok büyük büzülmeler antenin performansını düşürecek ve antenin amaçlanan işlevini yerine getirmesini engelleyecektir. Bu büzülmeler güneşin neden olduğu sıcaklıktan kaynaklanabilir. Çünkü çoğu malzeme ısıtıldığında gerilir ve soğutulduğunda büzülür. Eğer antenin bir kısmı ya da tamamı uzay aracı tarafından gölgede kalırsa, yanlış tasarlanmış bir anten işlevsiz hale gelerek deforme olabilir. İşte uzaya yerleştirilen bir anten için, sıcaklık değişiminin bir sonucu olarak ortaya çıkan bozulma miktarı, sıcaklıklar belirlenmeden tespit edilemez. Bazen sıcaklıklara ek olarak, belirli bir alandan ne kadar ısı akışı olduğunu da bilmemiz gerekir. Bir köprünün tasarımında mühendisler, rüzgarın kuvveti ve köprünün ağırlığının yanı sıra, köprü üzerinde hareket eden araçların ağırlığı ile oluşan gerilmelerle de ilgilenirler. Bu gerilimler önemlidir çünkü tüm malzemelerin izin verilen gerilimlerin üst sınırları vardır. Bu izin verilen gerilmeler aşıldığında, yapı artık amaçlanan işlevini yerine getiremeyebilir ve çökebilir. Bu ve buna benzer birçok karmaşık problemin çözümü için günümüzde sonlu elemanlar yöntemi kullanılmaktadır. Bu gibi karmaşık problemlere analitik olarak kesin çözümler elde etmenin mümkün olmadığı açıktır. Genellikle yetenekli bir mühendis basit varsayımlar yaparak analitik bir çözüm elde edebilir, ancak köprü ve uzaya yerleştirilebilir anten gibi bazı problemlerin doğası böyle bir yaklaşımı engelleyebilir. Düzensiz ve çeşitli geometrik yapılar, karışık sınır koşulları, değişken

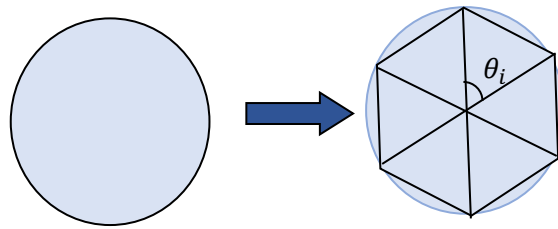
malzemeler ve değişen koşullardaki gerilme nedeniyle karmaşıklıklar ortaya çıkabilir. Sonlu elemanlar yöntemi, bu ve diğer komplikasyonların üstesinden gelmek için özellikle uygun bir yöntemdir (Stasa F.L., 1986:1).

Sonlu elemanlar yönteminin gelişimi bilgisayarın gelişi ile hızla büyümüş olmasına rağmen, parçalı yaklaşım fikri yeni değildir. Aslında ilk geometriciler π 'nin yaklaşık bir değerini belirlemek için sonlu elemanlar kullandılar. Bunu bir dairenin çeyreğini yazılı ve çevrelenmiş çokgenlerle sınırlayarak yaptılar. Düz çizgi parçaları dairenin alanına sonlu eleman yaklaşımlarıdır. Bu şekilde son derece doğru tahminlerde bulunabilirler (Rao, 2011:4). Sonlu elemanlar yönteminin ardındaki temel fikir, incelenen yapıyı, gövdeyi veya bölgeyi çok sayıda sonlu elemana veya basitçe elemana bölmektir. Bu elemanlar bir, iki veya üç boyutlu olabilir (Stasa F.L., 1986:3). Sonlu elemanlar yönteminin modellemesini Şekil 2.1'deki gibi gösterebiliriz. Dairenin alanı, üçgen elemanlara ayrılarak yaklaşık olarak hesaplanabilir. Çokgenin kenar sayısı arttıkça yaklaşık değerler gerçek değere yakınsar. Ancak hesaplama süresi ve dolayısıyla maliyet de artar.

$$S_i = \frac{1}{2} r^2 n \sin \theta_i, \quad (2.1)$$

$$S_n = \sum_{i=0}^n S_i = \frac{1}{2} r^2 n \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right), \quad \pi r^2, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

Burada; S_i : Üçgen elemanın alanı, S_n : dairenin alanı, r : daire yarıçapı, n : toplam eleman sayısıdır ("Sonlu Elemanlar Yöntemi", 2023).



Şekil 2.1. FEM temel yaklaşım örneği

Sonlu elemanların modern kullanımı yapı mühendisliği alanında başlamıştır (Rao, 2011:5). 1950'lerin ortalarından bu yana uçak endüstrisindeki mühendisler, uçak kanatlarında meydana gelen gelişmelerin tahmini için yaklaşık yöntemler geliştirmek için çalışmaktadırlar. Sonlu eleman adı ilk kez 1960 yılında Clough tarafından ortaya atılmıştır (Clough, 1960:345). Sonlu elemanlar yöntemi başlangıçta çoğunlukla sezgiye

ve fiziksel argümana dayalı olarak geliştirilmiş olsa da yöntem 1960'ların başında klasik Rayleigh-Ritz yönteminin bir biçimi olarak kabul edildi. Yöntemin matematiksel temeli anlaşıldıktan sonra, farklı problem türleri için sonlu eleman yöntemlerinin geliştirilmesi giderek arttı. Bilgisayarlar sonlu eleman yöntemlerini hesaplamayı hızlı bir şekilde gerçekleştirdiğinden yöntemlerin uygulanması da pratik olarak uygulanabilir hale geldi. Sonlu elemanlar denklemleri Galerkin yöntemi veya en küçük kareler yaklaşımı gibi ağırlıklı bir artık yöntemi kullanılarak da türetilbileceği bulunmuştur. Bu da matematikçiler arasında doğrusal ve doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözümü için sonlu elemanlar yönteminin kullanımını arttırmıştır (Rao,2011:5).

2.2. Kollokasyon Yöntemi

Sonlu elemanlar yöntemi, tüm fiziksel süreçleri değerlendirmek için tasarlanmış güçlü bir sayısal tekniktir. Aynı problemin birden fazla sonlu eleman modeli olabilir. Modelin türü, bir eleman üzerindeki belirlenmemiş katsayılar için cebirsel denklemleri (yani kullanılan ağırlıklı-integral formu) türetmek için kullanılan diferansiyel denklemlere ve yöntemlere bağlıdır. Sonlu eleman denklemlerini oluşturmak için Rayleigh-Ritz yöntemi ve polinom yaklaşımları sıklıkla kullanılmasına rağmen, cebirsel denklemleri oluşturmak için prensipte herhangi bir uygun yöntem veya yöntem kombinasyonu kullanılabilir. Bu sebeple, birincil ve ikincil değişkenlerin ayrık değerleri arasında cebirsel denklemler oluşturmak için kollokasyon yöntemi, subdomain yöntemi, sınır integrali yöntemleri vb. kullanılabilir (Reddy, 1993:16) (Logan, 2007:125).

Kollokasyon yöntemi, hatayı çözüm bölgesinin belli noktalarında sıfır yapmaya çalışan bir yöntemdir. Kollokasyon nokta sayısı arttıkça gerçek mutlak hatanın giderek küçüldüğü beklenmektedir. Sayısal çözümler bulunurken kollokasyon nokta sayısı kadar cebirsel denkleme ihtiyaç vardır. Kollokasyon yöntemini açıklamak için aşağıdaki denklemi göz önüne alalım;

$$A(u) = f. \quad (2.3)$$

Kollokasyon yönteminde (2.3) denkleminde A lineer olmayan bir operatör, u bağımlı fonksiyon, f bağımsız değişkendir. Denklem (2.3)'e yaklaşık bir çözüm olarak

$$u_N \sum_{j=1}^N c_j \Psi_j + \Psi_0 \text{ formunda aranır, } \Omega \text{ çözüm bölgesi üzerinde seçilen } N \text{ adet } x_i =$$

(x_i, y_i) kollokasyon noktası (2.4)'teki gibi kalan sıfır olacak şekilde belirlenir. Ψ_i uygun yaklaşım fonksiyonu, c_j 'ler bulunması gereken katsayılardır

$$R(x_i, y_i, c_j) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.4)$$

olmalıdır. x_i noktalarının seçimi, iyi koşullandırılmış bir denklem sistemi ve sonuçta doğru bir çözüm elde etmek için çok önemlidir.

$$\int_{\Omega} \psi_i(x, y) R(x, y, c_j) dx dy = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (2.5)$$

Denklemden Ψ_i fonksiyonunu $\delta(x - x_i)$ şeklinde gösterir ve şöyle tanımlarız;

$$\int_a^b \delta(x - x_i) dx dy = 1 \quad x = x_i$$

veya

$$\int_a^b \delta(x - x_i) dx dy = 0 \quad x \neq x_i \quad (2.6)$$

(Stasa F.L., 1986:122). Denklem (2.5)'de $\Psi_i = \delta(x - x_i)$ yerine yazılırsa;

$$\int_{\Omega} f(x) \delta(x - \xi) dx dy = f(\xi) \quad (2.7)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\int_{\Omega} \delta(x - x_i) R(x, y, c_j) dx dy = 0 \quad \text{veya} \quad R(x_i, c_j) = 0 \quad (2.8)$$

denklemleri elde edilir. Burada $\delta(x)$ Dirac delta fonksiyonudur (Reddy, 1993:55).

2.3. Spline Fonksiyonlar

Fonksiyonlar, incelenen birçok fiziksel süreci tanımlamak ve analiz etmek için kullanılan temel matematiksel araçlardır. Bazı durumlarda bu fonksiyonlar açık bir şekilde bilinirken, bazen de bu fonksiyonlara yaklaşımlar oluşturmak gerekir. Pek çok bilim adamı yaklaşım yöntemlerini matematik, fizik ve kimya gibi birçok alanda kullanmaktadır. Bu tür yaklaşım problemleri uygulamalı matematiğin temel bir parçasıdır.

Bilinmeyen fonksiyonlara iyi bir yaklaşım elde etmek için önce uygun bir fonksiyon sınıfı seçilir, sonra belirli bir probleme belirli bir fonksiyon tanımlamak için uygun bir çözüm şeması oluşturulur. Bu yaklaşımın başarılı olabilmesi için bir (f)

fonksiyonu seçelim. Seçilen (f) fonksiyonun bazı temel özelliklere sahip olması gereklidir.

1. f' 'deki fonksiyonlar nispeten düzgün olmalıdır,
2. f' 'deki fonksiyonların dijital bir bilgisayarda saklanması ve işlenmesi kolay olmalıdır,
3. f' 'deki fonksiyonların türevleri ve integralleri ile birlikte bilgisayarda değerlendirilmesi kolay olmalıdır,
4. f sınıfı, keyfi düzgün fonksiyonların f' 'nin elemanları tarafından iyi bir şekilde yaklaştırılabilmesi için yeterince büyük olmalıdır (Schumaker, 2007:1).

Veri sayısı büyük olduğunda yaklaşımlarda hesaplama sorunları ortaya çıkar. Bu sorun parçalı polinomlar kullanarak aşılabılır. Parçalı polinomlar, tanım kümesi içindeki süreksizler dışında bir yaklaşım olarak kullanılmaya uygundur. Parçalı polinomların "spline" adı verilen özel bir sınıfı vardır. Bu terim ilk olarak Schoenberg (Schoenberg,1946:45) tarafından ortaya atılmıştır ancak spline fonksiyonların ismi kullanılmadan ele alan çok sayıda makale vardır.

Spline fonksiyonlar kısaca şu özelliklere sahiptir;

1. Uygun tabanlara sahip sonlu boyutlu lineer uzaylardır.
2. Düzgün fonksiyonlardır.
3. Türevleri ve integralleri de spline fonksiyonlardır.
4. Dijital bilgisayarlarda verileri işleme, değerlendirme ve depolama açısından hesaplamalara uygundur.
5. Spline fonksiyonların kullanımıyla ortaya çıkan çeşitli matrisler, uygun işaretleri ve determinant özelliklerinden dolayı yaklaşımda kolay hesaplanabilir.
6. Düşük dereceli spline fonksiyonlar oldukça esnektir, keskin salınımlar sergilemezler.
7. Spline fonksiyonlar kullanıldığında yaklaşım yönteminin yakınsaklığını ve kararlılığını incelemek kolaydır.
8. Spline fonksiyonların türevleri de yine yaklaşık olarak hesaplanabilir (Geyikli, 1994:25).

2.4. Kübik B-spline Fonksiyonlar

$[\alpha, b]$ aralığının düzgün bir parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ olsun. $h = \frac{b-a}{N}$, $x_{m+1} = x_m + h$, $m = -1, 0, \dots, N+1$ olmak üzere bu aralık üzerinde tanımlı bir fonksiyonun bu noktalardaki değeri $g(x_0), g(x_1), \dots, g(x_N)$ ve r defa türevlenebilir fonksiyonlar kümesi $C^r[a, b]$ olarak gösterilir.

Bir $f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki üç koşulu sağlaması durumunda bir kübik spline fonksiyon olarak adlandırılır.

1. $f(x) \in C^2[a, b]$,
2. $f(x_m) = g(x_m), 0 \leq m \leq N$,
3. $f(x)$ her $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde parçalı kübik bir polinomdur (Geyikli, 1994:25).

Φ_m kübik B-spline fonksiyonları $m = -1(1)N+1$ noktaları için aşağıda verilen şekilde tanımlanır.

$$\Phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & x \in [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & x \in [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3, & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar.} \end{cases} \quad (2.9)$$

$\Phi_{m-1}(x), \Phi_m(x), \Phi_{m+1}(x), \Phi_{m+2}(x)$ fonksiyonları x_m noktalarındaki kübik B-spline fonksiyonlarını gösterir ve $[a, b]$ aralığının üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar için bir bazdır. $0 \leq \xi \leq 1$ aralığında olmak üzere, $h\xi = x - x_m$ ile verilen koordinat sistemi ξ cinsinden ve burada kübik B-spline fonksiyonları için ifadeler $\Phi_{m-1}, \Phi_m, \Phi_{m+1}, \Phi_{m+2}$ şeklindedir. (Gardner L.R.T, Gardner G. A. ve Ali, 1991:441)

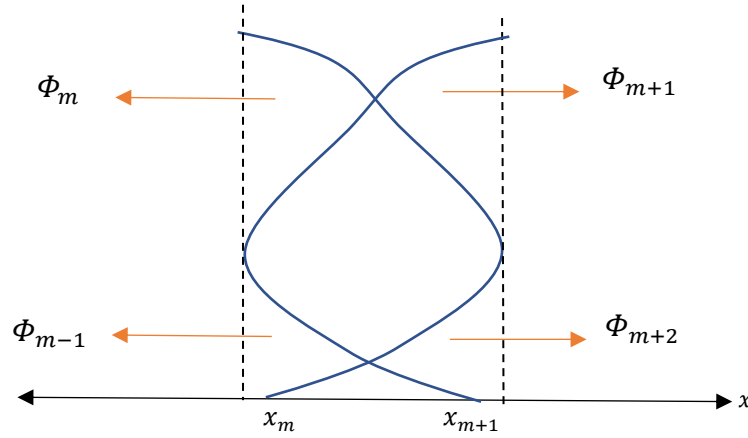
$$\Phi^e = (1 - 3\xi + 3\xi^2 - \xi^3, 4 - 6\xi^2 + 3\xi^3, 1 + 3\xi + 3\xi^2 - 3\xi^3, \xi^3)^T \quad (2.10)$$

$[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde U fonksiyonunun çözümü için aşağıdaki gibi yaklaşım çözüm alınabilir:

$$U^e = \sum_{j=m-1}^{m+2} \Phi_j \delta_j = \Phi^e \cdot d^e. \quad (2.11)$$

Burada δ_j elemandan bağımsız parametrelerdir ve kübik B-spline fonksiyonlardır. $\Phi_m(x)$ B-spline fonksiyonları ve türevi $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır. $[x_m, x_{m+1}]$

aralığında Φ_m kübik B-spline fonksiyonu ardışık dört elemanı Şekil 2.2'de görüldüğü gibi örtmektedir.



Şekil 2.2. Kübik B-spline Şekil Fonksiyonları

$x = x_m$ düğüm noktalarındaki U_m, U'_m, U''_m değerleri $\delta_m(t)$ zamana bağlı parametreler cinsinden aşağıdaki şekilde verilir:

$$\begin{aligned} U_m &= \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}, \\ hU'_m &= 3(\delta_{m+1} - \delta_{m-1}), \\ h^2U''_m &= 6(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}), \end{aligned} \quad (2.12)$$

(Geyikli, 1994:30).

2.5. Kübik Trigonometrik B-spline Fonksiyonlar

Trigonometrik spline fonksiyonlar Schoenberg (Schoenberg,1946:45) tarafından $m = 2k + 1$ boyutlu ve

$$\Phi_m = \text{span}\{1, \cos(x), \sin(x), \dots, \cos(mx), \sin(mx)\} \quad (2.13)$$

uzayında parçalı fonksiyondur. Ayrıca spline fonksiyonlar $[a, b]$ aralığını sonlu sayıda homojen ve homojen olmayan alt aralıklara böler ve birbirini örtmeyen her bir alt aralıkta düşük dereceden polinomlarla yaklaşım yapma esasına dayanır. B-spline fonksiyonlar aynı dereceye sahip spline fonksiyonlar için bir tabandır. Bu nedenle bu fonksiyonlara B-spline (basis spline) denir. $[a, b]$ aralığında sıfırıncı dereceden trigonometrik B-spline fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Phi_m^0(x) = \begin{cases} 1, & x_m \leq x \leq x_{m+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar.} \end{cases} \quad (2.14)$$

$k = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere

$$\Phi_m^k(x) = \frac{\sin\left(\frac{x-x_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_{m+k}-x_m}{2}\right)}\Phi_m^{k-1}(x) + \frac{\sin\left(\frac{x_{m+k+1}-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_{m+k+1}-x_m}{2}\right)}\Phi_{m+1}^{k-1}(x) \quad (2.15)$$

bağıntısıyla daha yüksek dereceden trigonometrik B-spline fonksiyonların elde edilebilir. Trigonometrik B-spline $\Phi_{m,k}$ bazı, Φ_m uzayında parçalı bir fonksiyondur ve $\{\Phi_{m,k}\}$ $k \in \mathbb{Z}$ fonksiyonları i . mertebeden trigonometrik spline uzayını gererler. Eğer $[a, b]$ aralığındaki parçalanma düzgün ise o zaman indirgeme bağıntısı

$$\Phi_m^k(x) = \frac{\sin\left(\frac{x-x_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kh}{2}\right)}\Phi_m^{k-1}(x) + \frac{\sin\left(\frac{x_{m+k+1}-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kh}{2}\right)}\Phi_{m+1}^{k-1}(x), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.16)$$

şeklinde yazılabilir. (2.16) ifadesinde $k = 3$ alınırsa $\Phi_m^3(x)$ kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlar $p(x_m) = \sin\left(\frac{x-x_m}{2}\right)$ olmak üzere $\Phi_m^3(x)$ ifadesi aşağıdaki formu alır

$$\Phi_m^3(x) = \frac{p(x_m)}{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)}\Phi_m^2(x) + \frac{p(x_{m+4})}{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)}\Phi_{m+1}^2(x). \quad (2.17)$$

$\Phi_m^3(x)$ kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlarını elde etmek için kullanılan kuadratik B-spline fonksiyonlar $\theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin(h)\sin\left(\frac{3h}{2}\right)$ olmak üzere;

$$\frac{p(x_m)}{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)}\Phi_m^2(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} p^3(x_m), & x_m \leq x \leq x_{m+1} \\ p^2(x_m)p(x_{m+2}) \\ -p(x_m)p(x_{m+3})p(x_{m+1}), & x_{m+1} \leq x \leq x_{m+2} \\ p(x_m)p^2(x_{m+3}), & x_{m+2} \leq x \leq x_{m+3} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \quad (2.18)$$

ve

$$-\frac{p(x_{m+4})}{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)}\Phi_{m+1}^2(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} -p(x_{m+4})p^2(x_{m+1}), & x_m \leq x \leq x_{m+1} \\ p(x_{m+4})p(x_{m+1})p(x_{m+3}) \\ -p(x_m)p(x_{m+3})p(x_{m+1}), & x_{m+1} \leq x \leq x_{m+2} \\ p^3(x_{m+4}), & x_{m+2} \leq x \leq x_{m+3} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.19)$$

olarak tanımlanır. (2.18) ve (2.19) ifadeleri kullanılarak $\Phi_m^3(x)$ kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlar aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Phi_m^3(x) = \frac{1}{\theta} \left\{ \begin{array}{ll} p^3(x_m), & x_m \leq x \leq x_{m+1} \\ -p^2(x_m)p(x_{m+2}) & \\ -p(x_m)p(x_{m+3})p(x_{m+1}) & x_{m+1} \leq x \leq x_{m+2} \\ -p(x_{m+4})p^2(x_{m+1}), & \\ p(x_m)p^2(x_{m+3}) & \\ +p(x_{m+4})p(x_{m+1})p(x_{m+3}) & x_{m+2} \leq x \leq x_{m+3} \\ +p^2(x_{m+4})p(x_{m+1}), & \\ -p^3(x_{m+4}), & x_{m+3} \leq x \leq x_{m+4} \\ 0, & \text{diğer durumlar.} \end{array} \right. \quad (2.20)$$

$p(x_m) = \sin\left(\frac{x-x_m}{2}\right)$, $\theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right) \sin(h) \sin\left(\frac{3h}{2}\right)$, $m = 0, \dots, N$ olmak üzere

$$\Phi_m^3(x) = \frac{1}{\theta} \left\{ \begin{array}{ll} p^3(x_{m-2}), & x_{m-2} \leq x \leq x_{m-1} \\ -p^2(x_{m-2})p(x_m) & \\ -p(x_{m-2})p(x_{m+1})p(x_{m-1}) & x_{m-1} \leq x \leq x_m \\ -p(x_{m+2})p^2(x_{m-1}), & \\ p(x_{m-2})p^2(x_{m+1}) & \\ +p(x_{m+2})p(x_{m-1})p(x_{m+1}) & x_m \leq x \leq x_{m+1} \\ +p^2(x_{m+2})p(x_m), & \\ -p^3(x_{m+2}), & x_{m+1} \leq x \leq x_{m+3} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{array} \right. \quad (2.21)$$

Şeklinde elde edilir. $U(x, t)$ bir problemin analitik çözümü olmak üzere $U(x, t)$ fonksiyonuna bir yaklaşım kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U(x, t) \approx U_N(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \Phi_m^3(x) \delta_m(t). \quad (2.22)$$

Burada $\Phi_m^3(x)$ ifadesi kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları gösterirken, $\delta_m(t)$ katsayıları zamana bağlı parametrelerdir. $\Phi_m^3(x)$ fonksiyonları $x_{m-2} \leq x \leq x_{m+2}$ aralığının dışında sıfırdır ve $\Phi_m^3(x)$ fonksiyonu bu aralıkta dört elemanı örter. O halde, bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı $\Phi_{m-1}^3, \Phi_m^3, \Phi_{m+1}^3, \Phi_{m+2}^3$ gibi dört kübik trigonometrik B-spline tarafından örtülmektedir. Bu eleman üzerinde tanımlı bir $U(x, t)$ fonksiyonuna bir yaklaşım

$$U(x, t) \approx U_N(x, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \Phi_j^3(x) \delta_j(t) \quad (2.23)$$

olarak yazılabilir ve açık bir şekilde

$$U(x, t) \approx \delta_{i-1}(t) \Phi_{i-1}^3(x) + \delta_i(t) \Phi_i^3(x) + \delta_{i+1}(t) \Phi_{i+1}^3(x) + \delta_{i+2}(t) \Phi_{i+2}^3(x) \quad (2.24)$$

biçiminde elde edilir. $U(x_m, t)$ fonksiyonu için kübik trigonometrik B-spline eşitlikleri kullanılarak x_m düğüm noktasındaki birinci ve ikinci mertebeden türevler için yaklaşımlar aşağıdaki gibidir:

$$U_N(x_m, t) = U_m = \sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_j \Phi_j^3(x_m), \quad (2.25)$$

$$\frac{d U_N(x, t)}{dx} = U'_m = \sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_j \frac{d \Phi_j^3(x_m)}{dx}, \quad (2.26)$$

$$\frac{d^2 U_N(x, t)}{dx^2} = U''_m = \sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_j \frac{d^2 \Phi_j^3(x_m)}{dx^2}. \quad (2.27)$$

$$\alpha_1 = \frac{\sin^2(h/2)}{\sin(h) \sin(3h/2)}, \alpha_2 = \frac{2}{1 + 2 \cos(h)} \quad (2.28)$$

$$\beta_1 = -\frac{3}{4 \sin(3h/2)}, \quad \beta_2 = \frac{3}{4 \sin(3h/2)} \quad (2.29)$$

$$\gamma_1 = \frac{3(1 + 3 \cos(h))}{16 \sin^2(h/2)(2 \cos(h/2) + \cos(3h/2))} \quad (2.30)$$

$$\gamma_2 = \frac{3 \cos^2(h/2)}{\sin^2(h/2)(2 + 4 \cos(h))} \quad (2.31)$$

olmak üzere gerekli düzenlemeler yapılırsa $U(x_m, t)$ fonksiyonun kendisi ve ikinci mertebeye kadar olan türev yaklaşımları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} U_m &= U(x_m) = \alpha_1 \delta_{m-1} + \alpha_2 \delta_m + \alpha_1 \delta_{m+1}, \\ U'_m &= U'(x_m) = \beta_1 \delta_{m-1} + \beta_2 \delta_{m+1}, \\ U''_m &= U''(x_m) = \gamma_1 \delta_{m-1} + \gamma_2 \delta_m + \gamma_1 \delta_{m+1}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

(Geiser, 2008:227) (Yiğit, 2021:12).

2.6. Splitting Yöntemler

Kısmi diferansiyel denklemler fiziksel olayların modellenmesinde oldukça önemli bir yer kapsar. Son yıllarda bilgisayarlardaki hesaplama gücünün artmasıyla birlikte, bu tür modeller neredeyse tüm fiziksel ve mühendislik problemlerine nüfuz etmektedir. Kısmi diferansiyel denklemlerle modellenen olaylar hızlı bir şekilde karmaşık bir hal aldığından, kısmi diferansiyel denklemlerde karmaşık bir yapıya sahip olmaktadır. Hesaplama yapan bilim adamları etkili bir çözüm yöntemi gerektiren yeni ve karmaşık denklemlerle karşı karşıya gelirler. Karmaşık problemlerle baş edebilme yöntemlerinden biri de “divid and conquer” yani böl ve yönet stratejisidir. Operatör splitting yaklaşımı bu konuda oldukça başarılı bir yaklaşım olmaktadır. Operatör splitting yöntemi denklemin farklı parçalarını farklı özel yöntemlerle çözmeye olanak sağlayan bir yöntemdir. Her bir alt denklemlerin kendisi için daha basit ve daha pratik algoritmaların mevcut olduğu bir türde bir dizi alt denkleme bölünür. Daha sonra her bir alt denklem için uygun bir şema seçilerek, yöntem uygulanır (Holden,2010:2).

2.7. Operatör Splitting Yöntemler

Sayısal analizde yalnızca on büyük fikrin olduğu söylenir, geri kalan her şey yalnızca bu temaların varyasyonlarıdır. Bu fikirlerden biri de splitting yapmaktır. Splitting yapmanın ardındaki genel fikir, karmaşık bir problemi, zaman adımına göre daha küçük parçalara bölmektir. Böylece farklı parçalar uygun entegrasyon formülleriyle verimli bir şekilde çözülebilir (Hundsdofer ve Verwer,2003:325). Operatör splitting, bir diferansiyel denklemin çözümünü hesaplamanın sayısal bir yöntemidir. Splitting metodu, orijinal denklemi bir zaman adımında iki parçaya ayırır, her parçanın çözümünü ayrı ayrı

hesaplar ve daha sonra orijinal denklemin çözümünü oluşturmak için iki ayrı çözümü kontrollü bir şekilde birleştirir. Bölme fikri doğal bir şekilde ikiden fazla operatör içeren denklemlere de uygulanabilir. Her durumda hesaplama avantajı vermiş olmasının altındaki etken, bölünmüş terimlerin çözümünü ayrı ayrı hesaplamaktır. Bu denklemin çözümünü doğrudan hesaplamaktan daha hızlıdır (Glowinski, Osher & Yin, 2017:635). Aşağıdaki gibi verilen bir Cauchy probleminde;

$$\frac{dU}{dx} + A(U) = 0, U(0) = U_0. \quad (2.33)$$

Burada A sonlu bir matristir ve (2.33)'ün çözümü $U(t)=e^{tA}U_0$ şeklindedir (Holden, 2010:1).

Şimdi A matrisinin $A=A_1+A_2$ şeklinde iki matrisin toplamı olarak yazılabildiğini kabul edelim. Yani,

$$\frac{dU}{dx} + A_1(U) + A_2(U) = 0, U(0) = U_0, t \in [0, T] \quad (2.34)$$

olarak yazılabilir. Burada $U(0)$ çözüm vektörü, $U_0 \in X$ başlangıç koşulundan elde edilen bir vektördür. Sonlu veya sonsuz bir X Banach uzayında olan A, A_1, A_2 operatörleri sınırlı ya da sınırsız operatörlerdir. (2.34) denkleminin formal çözümü $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ zaman adımı olmak üzere

$$U(t_{n+1}) = e^{A_1 \Delta t + A_2 \Delta t} U(t_n) \quad (2.35)$$

olarak yazılır. Taylor açılımını kullanarak bu üstel fonksiyonun çözümü

$$U(t_{n+1}) = e^{A_1 \Delta t + A_2 \Delta t} U(t_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Delta t)^k}{k!} \left(A_1 \frac{\partial}{\partial u} + A_2 \frac{\partial}{\partial u} \right)^k U(t_n) \quad (2.36)$$

şeklinde ifade edilebilir. (2.35) denkleminde $e^{A_1 \Delta t + A_2 \Delta t}$ ifadesi analitik olarak çözülemediğinden (2.34) denkleminde çözümü için splitting yaklaşımlara ihtiyaç duyulur. $e^{A_1 \Delta t + A_2 \Delta t}$ ifadesi doğrudan çözülemezken $e^{A_1 \Delta t}$ ve $e^{A_2 \Delta t}$ şeklinde ayrı ayrı hesaplayabilecek yöntemler vardır. Böylece;

$$e^{A_1 \Delta t + A_2 \Delta t} \approx e^{A_1 \Delta t} e^{A_2 \Delta t} \quad (2.37)$$

yaklaşımı yazılabilir. Burada A_1 ve A_2 bir matris ya da bir operatör olabilir. İki durumda da değişen farklı bir durum yoktur. A_1 ve A_2 matrisleri değişmeliyse (2.37) yaklaşımı tam çözümü verir. Yani $[A_1, A_2] \equiv A_1 A_2 - A_2 A_1 = 0$ ise $e^{A_1 \Delta t + A_2 \Delta t} = e^{A_1 \Delta t} e^{A_2 \Delta t}$ olur, değilse $e^{A_1 \Delta t + A_2 \Delta t} \approx e^{A_1 \Delta t} e^{A_2 \Delta t}$ yaklaşımı zaman adımına göre birinci dereceden bir yaklaşımdır. Splitting yöntemi kullanılarak (2.35) denkleminin nümerik çözümünü elde etmek için (2.35) denklemini,

$$\frac{dU}{dx} = A_1(U) \text{ ve } \frac{dU}{dx} = A_2(U) \quad (2.38)$$

şeklinde iki alt denkleme ayırıp her bir alt denklemin çözümü analitik ya da nümerik olarak hesaplanabilir (Çelikkaya,2018:17). Tüm bölme yöntemleri bu temel yapının geliştirilmiş halidir. Bu yaklaşım ilk bakışta biraz geri kalmış gibi görünebilir, ancak aslında operatör splitting yönteminin çeşitli avantajları vardır. Yeni alt modellerdeki operatörler çok farklı olabileceğinden, çok farklı sayısal ve analitik teknikler de gerektirebilirler. Operatör splitting, bu durumdan faydalanmaya olanak tanır ve ortaya çıkan sayısal yöntemin uygulanması hem daha basit hem de daha verimli olabilir (Holden,2010:2). Operatör splitting bellek gereksinimi azaltır, kararlılık aralığını arttırabilir ve koşulsuz olarak kararlı olan yöntemler sağlayabilir. Çok yüksek boyutlu problemler için tek uygun yöntem olabilir.

2.7.1. Bölme yöntemlerinin klasik formülasyonu

Geleneksel bölme yöntemlerinin gerçek hayattaki problemlerinin çözümünde yaygın olarak kullanılan çözümü aşağıdaki gibidir. İki doğrusal operatörün olduğu durumda aşağıdaki Cauchy problemini ele alınız

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + Bu(t), t \in (0, T), u(0) = u_0. \quad (2.39)$$

Burada u_0 problemle birlikte verilen başlangıç fonksiyonu, A ve B 'nin X Banach uzayında $A, B : X \rightarrow X$ olmak üzere sınırlı doğrusal operatörler olduğu varsayılmaktadır. Operatörlerin sınırsız olduğu ve fiziksel operatörlere karşılık gelen gerçek uygulamalar da vardır, örneğin konveksiyon veya difüzyon operatörü gibi (Geiser, 2008:227). Yüksek mertebeden bölme yöntemleri, daha doğru hesaplamalar için kullanılır, ancak aynı zamanda daha fazla hesaplama adımına sahiptir. Bu yöntemler, kuantum dinamiğinde kullanılan $(\exp(\tau_n(A + B)))$ operatörüne yaklaşmak için uygulanan yöntemlerden biridir (Chin ve Chen, 2002:1409). Yüksek dereceli bölme yöntemlerinin analitik bir yapısı Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) formülü yardımıyla hesaplanabilir (Yoshida, 1990:262) (Hairer, Lubich ve Wanner, 2002:31). Yeniden yapılandırma süreci aşağıdaki üstel fonksiyonların çarpımına dayanmaktadır:

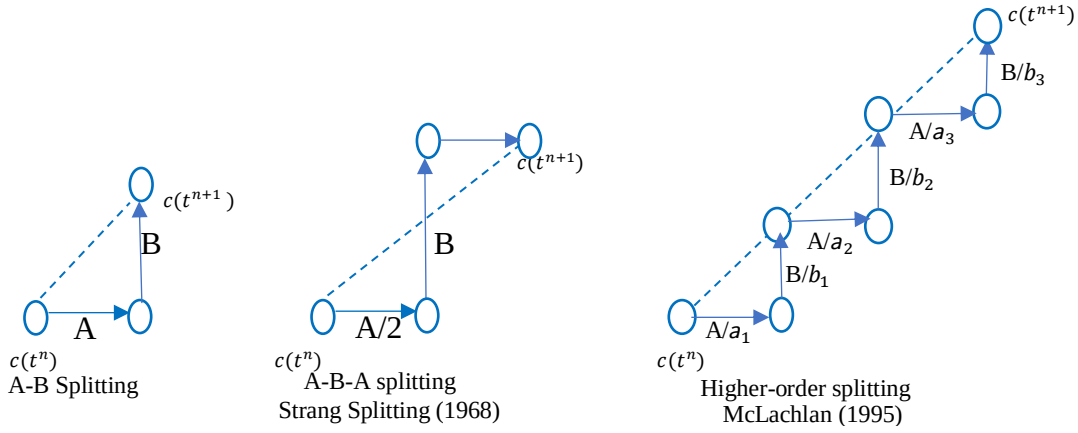
$$(\exp(\tau_n(A + B))) = \prod_{i=1}^m \exp(c_i \tau_n A) \exp(d_i \tau_n B) + \mathcal{O}(\tau_n^{m+1}) = S(\tau_n). \quad (2.40)$$

Burada A, B değişmeli olmayan operatörlerdir, τ_n eşit mesafeli bir zaman adımıdır ve $(c_1, c_2, \dots), (d_1, d_2, \dots)$ reel sayılardır. $S(\tau_n)$ ise $(A + B)$ operatörü tarafından oluşturulan bir gruptur. Bu nedenle, birinci dereceden bir yöntem elde etmek için $c_1 = d_1 = 1$ ve $m = 1$ alınabilir. Benzer şekilde dördüncü dereceden bir yöntem için aşağıdaki katsayıları kullanılabilir:

$$c_1 = c_4 = \frac{1}{2(2 - 2^{1/3})}, c_2 = c_3 = \frac{1 - 2^{1/3}}{2(2 - 2^{1/3})},$$

$$d_1 = d_3 = \frac{1}{2 - 2^{1/3}}, d_2 = \frac{-2^{1/3}}{2 - 2^{1/3}}, d_4 = 0. \quad (2.41)$$

Bu direkt yöntem simetrik integratörler kullanılarak 4, 6, 8, ... gibi daha yüksek mertebeden yöntemler elde edilebilir. Ancak bunu yapabilmek için zamanın tersine çevrilebilirliği, yani $S(\tau_n)S(-\tau_n) = S(-\tau_n)S(\tau_n)$ olması oldukça önemlidir. Bölme adımlarının görsel bir şeması Şekil 2.3'de gösterildi (Geiser, 2011:35). Bu tezde nümerik hesaplamalar için kullanılan Lie-Trotter ve Strang splitting yöntemlerinin yanında bazı farklı bölme yöntemleri aşağıdaki alt bölümlerde açıklandı.



Şekil 2.3. Yinelemeli olmayan splitting yöntemlerinin grafiksel görselleştirilmesi

2.7.2. Lie-Trotter splitting yöntemi

Lie-Trotter splitting yöntemi zamana göre birinci mertebeden splitting yöntemlerden biridir. Lie-Trotter splitting yönteminde asıl problem A ve B operatörü olarak iki alt probleme ayrılır. A operatörü ile problem ile verilen orijinal başlangıç şartı kullanılarak bir çözüm kümesi elde edilir. Oluşan bu çözüm kümesi B operatörü için başlangıç şartı olarak kabul edilir. İkinci operatör bu başlangıç şartıyla çözülür böylece

ana problemin çözümü elde edilir. (2.33) denkleminin homojen ve belirli sınır koşulları altında çözümü aşağıdaki gibidir

$$u(t_{n+1}) = e^{\tau C} u(t_n). \quad (2.42)$$

Burada $C = A + B$ ve $\tau = t_{n+1} - t_n$ dir. En basit splitting yöntemlerinden biri olan Lie-Trotter splitting aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u_{n+1} \approx e^{\tau B} e^{\tau A} u_n. \quad (2.43)$$

Lie-Trotter splitting yönteminin çözüm şeması aşağıdaki gibi ifade edilebilir

$$\frac{\partial u^*(t)}{\partial t} = Au^*(t), t \in (t_n, t_{n+1}), \quad u^*(t_n) = u_n \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial u^{**}(t)}{\partial t} = Bu^{**}(t), t \in (t_n, t_{n+1}) \quad u^{**}(t_n) = u^*(t_{n+1}). \quad (2.45)$$

Burada $n = 0, 1, \dots, N - 1$ olmak üzere $u_n = u_0$ 'dir. İstenilen zaman adımındaki yaklaşık çözümler $u_{n+1} = u^{**}(t_{n+1})$ şeklinde hesaplanır (Sportisse, 2000:140). Lineer ve sınırlandırılmış operatörler için bir Taylor açılımı uygulayarak bölme hatası analiz edilebilir (Bjorhus, 1998:419) (Geiser, 2008:30). (2.42)'nin (2.43) ile değiştirilmesi splitting hatası olarak adlandırılan bir hataya yol açar. Splitting hatasının (2.43) denkleminin sağ tarafına eklenmesiyle aşağıdaki ifade elde edilir

$$u(t_{n+1}) = e^{\tau B} e^{\tau A} u(t_n) + \tau \rho_n. \quad (2.46)$$

Burada ρ_n lokal hata, $\tau \rho_n$ her adımda ortaya çıkan bir yerel kesme hatasıdır. Bu splitting hatası Taylor açılımlarının kullanılmasıyla aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$e^{\tau C} = e^{\tau(A+B)} = I + \tau(A+B) + \frac{1}{2}\tau^2(A+B)^2 + \dots, \quad (2.47)$$

$$e^{\tau B} e^{\tau A} = I + \tau(A+B) + \frac{1}{2}\tau^2(A^2 + 2BA + B^2) + \dots, \quad (2.48)$$

$$\rho_n = \frac{1}{\tau}(e^{\tau C} - e^{\tau B} e^{\tau A})u(t_n) = \frac{1}{2}\tau[A, B]u(t_n) + \mathcal{O}(\tau^2) \quad (2.49)$$

olarak bulunur (Hundsdorfer ve Verwer, 2003:326). Burada, A ve B komütatör olarak tanımlanır ve literatürde köşeli parantezler de *Lie bracket* olarak tanımlanır ve $[A, B] = AB - BA$ dir. Denklem (2.43)'de A ve B operatörleri değişmeli değilse yöntem tamdır ve böylece bir bölme hatası da meydana çıkmaz.

2.7.3. Strang-Marchuk splitting yöntemi

En popüler ve yaygın olarak kullanılan operatör splitting yöntemlerinden biri de Strang splitting (veya Strang-Marchuk splitting) yöntemidir (Strang, 1968:506). Strang splitting yönteminde Lie-Trotter yönteminden farklı olarak A operatörü ile verilen ilk alt problem, problemde belirtilen orijinal başlangıç şartı kullanılarak yarım zaman adımı ile çözülür. İkinci alt problemin çözümü için A operatörü kullanılarak elde edilen çözümler başlangıç şartı olarak kullanılır ve B operatörü tam zaman adımıyla çözülür. B operatörü kullanılarak tam zaman adımıyla elde edilen çözümler tekrar A operatörü ile verilen alt problemde başlangıç şartı olarak kabul edilir ve yarım zaman adımıyla çözülerek sonuçlar elde edilir. (2.43) ile verilen Lie-Trotter splitting yöntemi yarım zaman adımı için operatörlerin sırası değiştirilerek bileşkesi alınır aşağıdaki Strang splitting yöntemi elde edilir:

$$u(t_{n+1}) = e^{\tau C} u(t_n) = \left(e^{\frac{1}{2}\tau A} e^{\frac{1}{2}\tau B} \right) \left(e^{\frac{1}{2}\tau B} e^{\frac{1}{2}\tau A} \right) u_n = e^{\frac{1}{2}\tau A} e^{\tau B} e^{\frac{1}{2}\tau A} u_n. \quad (2.50)$$

Bölünmedeki bu simetri fikri Strang (1968) ve Marchuk (1971) tarafından öne sürülmüştür. Fakat literatürde daha çok Strang splitting olarak bilinir (Strang, 1968:506). Strang splitting yönteminin çözüm şeması ise aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\frac{\partial u^*(t)}{\partial t} = Au^*(t), \quad t^n \leq t \leq t^{n+1/2} \text{ ile } u^*(t^n) = u_n, \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial u^{**}(t)}{\partial t} = Bu^{**}(t), \quad t^n \leq t \leq t^{n+1} \text{ ile } u^{**}(t^n) = u^*(t^{n+1/2}), \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial u^{***}(t)}{\partial t} = Au^{***}(t), \quad t^{n+1/2} \leq t \leq t^{n+1} \text{ ile } u^{***}(t^{n+1/2}) = u^{**}(t^{n+1}). \quad (2.53)$$

Burada $t^{n+1/2} = t^n + \frac{1}{2}\tau_n$ ve istenilen zaman adımındaki nümerik çözümler $u^{n+1} = u^{***}(t^{n+1})$ ile elde edilir.

Strang splitting yönteminin hata analizinde $\tau = t_{n+1} - t_n$ olmak üzere toplam hata aşağıdaki gibidir:

$$\tau \rho_n = e^{\tau(A+B)} - e^{\frac{\tau A}{2}} e^{\tau B} e^{\frac{\tau A}{2}}. \quad (2.54)$$

Yerel hata ise:

$$\rho_n = \frac{1}{\tau} \left[e^{\tau(A+B)} - e^{\frac{\tau A}{2}} e^{\tau B} e^{\frac{\tau A}{2}} \right]. \quad (2.55)$$

şeklindedir. İfadeyi düzenlersek:

$$e^{\tau(A+B)} = (I + \tau(A+B) + \frac{1}{2!}\tau^2(A+B)^2 + \dots + \mathcal{O}(\tau_n^3)) \quad (2.56)$$

$$e^{\tau \frac{A}{2}} = \left(I + \tau \frac{A}{2} + \frac{\tau^2}{2!} \left(\frac{A}{2} \right)^2 + \dots + \mathcal{O}(\tau_n^3) \right) \quad (2.57)$$

$e^{\tau B} = (I + \tau B + \frac{\tau^2}{2!}(B)^2 + \dots + \mathcal{O}(\tau_n^3))$ ifadelerini (2.54) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} & (I + \tau(A+B) + \frac{1}{2!}\tau^2(A+B)^2 + \dots + \mathcal{O}(\tau_n^3)) - \left(I + \tau \frac{A}{2} + \frac{\tau^2}{2!} \left(\frac{A}{2} \right)^2 + \dots + \mathcal{O}(\tau_n^3) \right) \\ & \left(I + \tau B + \frac{\tau^2}{2!}(B)^2 + \dots + \mathcal{O}(\tau_n^3) \right) \left(I + \tau \frac{A}{2} + \frac{\tau^2}{2!} \left(\frac{A}{2} \right)^2 + \dots + \mathcal{O}(\tau_n^3) \right) \end{aligned} \quad (2.58)$$

ifadesi elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\rho_n = \frac{1}{12}\tau^2 \left([B, [B, A]] - \frac{1}{24}\tau^2 [A, [A, B]] \right) u(t_n) + \mathcal{O}(\tau^3). \quad (2.59)$$

Lineer olmayan problemler için de aynı hususlar geçerlidir. A ve B operatörleri değişmeli değilse Strang splitting yöntemi ikinci dereceden bir yöntemdir (Strang,1968:506).

3. EW DENKLEMİ VE MODEL PROBLEMLER

3.1. Giriş

Morrison ve çalışma arkadaşlarının tek boyutlu bir dalgayı lineer olmayan bir ortamda incelerken elde ettiği eşit genişlikli dalga denklemi (EW) (Morisson, 1984:324):

$$U_t + UU_x - \mu U_{xxt} = 0 \quad (3.1)$$

Şeklinde bir kısmi diferansiyel denklemdir. Burada t zaman, x konum koordinatı, $U(x, t)$ dalga genliği, μ pozitif bir parametre ve fiziksel sınır koşulları $x \rightarrow \pm\infty$ için $U \rightarrow 0$ dır. UU_x ve U_{xxt} terimleri sırasıyla lineer olmayan dalganın yükselmesini ve yayılımını göstermektedir.

3.2. Model Problemler

Uzayda veya bir maddede yayılan ve enerji taşınmasına yol açan titreşime dalga denir. Dalgalar taşıdıkları enerjiye ve titreşimin doğrultusuna göre ikiye ayrılırlar. Ses, su, yay ve elektromanyetik dalgalar dalga çeşitlerinden bazılarıdır. Soliton dalgalar sabit hızda ilerleyen, şeklini ve hızını koruyarak yayılan, çarpışmaya karşı kararlı olan dalgalardır. Russel su tanklarına ağırlık bırakarak deneyler yaparak bu dalgaları keşfetmiştir (Russell, 1844;90). Tek solitary dalga tek salınımlı dalgalar, iki solitary dalgalar iki salınımlıdır ve çarpışmadan sonra şekillerinde bozulma olmadan yollarına devam eden dalgalardır (Kaya,2011:31). EW denkleminin belirli başlangıç ve sınır koşulları altında sağladığı problemler bu solitary dalgaların hareketlerini göstermektedir. İntegrallenebilen denklemlerin sonsuz tane korunum sabitleri varken, EW denklemi integrallenemeyen bir denklem olduğundan dolayı üç adet korunum sabiti vardır. Bu korunum sabitleri:

$$I_1 = \int_a^b U dx \cong h \sum_{m=0}^M U_m^n \quad (3.2)$$

$$I_2 = \int_a^b [U^2 + \mu(U_x)^2] dx \cong h \sum_{m=0}^M [(U_m^n)^2 + \mu((U_x)_m^n)^2], \quad (3.3)$$

$$I_3 = \int_a^b U^3 dx \cong h \sum_{m=0}^M (U_m^n)^3, \quad (3.4)$$

olarak tanımlanır. Burada I_1 , I_2 ve I_3 sırasıyla kütle, momentum ve enerji korunum sabitleri olarak adlandırılır (Olver, 1979:143). Korunum sabitlerinin gerçek değerleri aşağıda verilen formüller ile hesaplanabilir

$$I_1 = \frac{6c}{p}, \quad I_2 = \frac{12c^2}{p} + \frac{48pc^2\mu}{5}, \quad I_3 = \frac{144c^3}{5p}. \quad (3.5)$$

Bu tezde hesaplanan nümerik sonuçların doğruluğunu ve etkinliğini ölçmek için yukarıda verilen korunum sabitlerinin yanında literatürde sık kullanılan aşağıdaki hata normları da kullanıldı.

$$L_2 = \| U^{tam} - U_N \|_2 = [h \sum_{m=0}^M |U_m^{tam} - U_m|^2]^{1/2}, \quad (3.6)$$

$$L_\infty = \| U^{tam} - U_N \|_\infty = \max_{0 \leq m \leq M} |U_m^{tam} - U_m|. \quad (3.7)$$

EW denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek ve literatürde bulunan bazı çalışmalarla karşılaştırma yapabilmek için sıkça kullanılan aşağıdaki beş problem göz önüne alındı.

3.2.1. Problem 1: Tek solitary dalganın hareketi

Ew denkleminin sağladığı tek solitary dalga çözümlerini hesaplamak için $a \leq x \leq b$ sonlu aralığında $U(a, t) = U(b, t) = 0$ sınır şartı kullanıldı (Morrison, Meiss ve Cary, 1984:324). Bu problem için başlangıç şartı ve tam çözüm aşağıdaki gibi verilir:

$$U(x, 0) = 3c \operatorname{sech}^2[p(x - x_0)], \quad (3.8)$$

$$U(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2[p(x - ct - x_0)]. \quad (3.9)$$

Burada $3c$ solitary dalganın genliğini, c dalganın hızını ve $p = (1/4\mu)^{1/2}$ dalganın genişliğidir. $U(x, t)$ ise tepe noktası x_0 olan sağa doğru c sabit hızıyla hareket eden $3c$ genliğinde tek solitary dalgayı temsil etmektedir.

3.2.2. Problem 2: İki solitary dalganın girişimi

İkinci test problemi olarak EW denklemi $[a, b]$ sonlu aralığında aşağıdaki başlangıç şartı ile göz önüne alındı

$$U(x, 0) = \sum_{j=1}^2 3c_j \sec h^2 [0.5(x - x_j)]. \quad (3.10)$$

Burada başlangıç şartı, tepe noktası $x = x_1$ noktasında bulunan genliği $3c_1$ ve tepe noktası $x = x_2$ noktasında bulunan genliği $3c_2$ olan iki solitary dalgayı ifade etmektedir. Bu problemde iki solitary dalganın çarpışmasını incelemek için $c_1 > c_2$ ve $x_1 < x_2$ olarak alınmalıdır. Problemin korunum sabitleri analitik olarak aşağıdaki formüllerle hesaplanabilir:

$$I_1 = 12(c_1 + c_2), I_2 = 28.8(c_1^2 + c_2^2), I_3 = 57.6(c_1^3 + c_2^3). \quad (3.11)$$

Korunum sabitlerinin $\mu=1$, $c_1 = 1.5$, $c_2 = 0.75$, $x_1 = 10$ ve $x_2 = 25$ parametreleri için analitik değerleri $I_1 = 27$, $I_2 = 81$, $I_3 = 218.7$ olarak bulunur.

3.2.3. Problem 3: Üç solitary dalganın girişimi

Üçüncü test problemi olarak EW denklemi $[a, b]$ sonlu aralığında aşağıdaki başlangıç şartı ile göz önüne alındı:

$$U(x, 0) = \sum_{j=1}^2 3c_j \sec h^2 [0.5(x - x_j)]. \quad (3.12)$$

Burada başlangıç şartı, tepe noktası $x = x_1$ noktasında bulunan genliği $3c_1$, tepe noktası $x = x_2$ noktasında bulunan genliği $3c_2$ ve tepe noktası $x = x_3$ noktasında bulunan genliği $3c_3$ olan üç solitary dalgayı ifade etmektedir. Üç dalganın çarpışması olayını gözlemlemek için $c_1 > c_2 > c_3$ ve $x_1 < x_2 < x_3$ olarak alınmalıdır. Bu problem için korunum sabitlerinin analitik değerleri aşağıdaki formüllerle hesaplanabilir:

$$I_1 = 12(c_1 + c_2 + c_3), I_2 = 28.8(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2), I_3 = 57.6(c_1^3 + c_2^3 + c_3^3).$$

Bu problemde parametreler $\mu = 1$, $c_1 = 4.5$, $c_2 = 1.5$, $c_3 = 0.5$, $x_1 = 10$, $x_2 = 25$ ve $x_3 = 35$ olarak alındığında korunum sabitlerinin analitik değerleri $I_1 = 78$, $I_2 = 655.2$, $I_3 = 5450.4$ olarak bulunur.

3.2.4. Problem 4: Maxwellian başlangıç şartı

Dördüncü problem olarak EW denklemi $[a, b]$ sonlu aralığında aşağıdaki Maxwellian başlangıç şartı ile göz önüne alındı;

$$U(x, 0) = e^{-(x-20)^2}. \quad (3.13)$$

Maxwellian başlangıç şartı ile elde edilen nümerik çözümler μ değerlerine bağlı olarak değişmektedir.

3.2.5. Problem 5: Ardışık dalga oluşumu

Beşinci ve son problem olarak EW denklemi $[a, b]$ sonlu aralığında aşağıdaki sınır şartları ve başlangıç şartı ile birlikte göz önüne alındı:

$$U(a, t) = U_0,$$

$$U(b, t) = 0,$$

$$U(x, 0) = 0.5U_0 \left[1 - \tanh \left(\frac{x - x_0}{d} \right) \right]. \quad (3.14)$$

Burada $U(x, 0)$, $t = 0$ anında durgun su yüzeyinin üstündeki suyun yükseltisini, su seviyesindeki $U(x, 0)$ yükseklik değişimi $x = x_0$ noktasındadır. d ise durgun su ile derin su arasındaki eğimdir. Bu problem için I_1, I_2 ve I_3 büyüklükleri sabit olmadığından M_1, M_2, M_3 oranlarında lineer olarak artarlar (Gardner vd.,1997:583). M_1, M_2 ve M_3 değerleri aşağıdaki formüller ile hesaplanabilir:

$$M_1 = \frac{d}{dt} I_1 = \frac{d}{dt} \int_a^b U dx = \frac{1}{2} (U_0)^2, \quad (3.15)$$

$$M_2 = \frac{d}{dt} I_2 = \frac{d}{dt} \int_a^b [U^2 + \mu(U_x)^2] dx = \frac{2}{3} (U_0)^3, \quad (3.16)$$

$$M_3 = \frac{d}{dt} I_3 = \frac{d}{dt} \int_a^b U^3 dx = \frac{3}{4} (U_0)^4. \quad (3.17)$$

Hesaplamalar $-20 \leq x \leq 50$ aralığında $\mu = 0.16666667, U_0 = 0.1, x_0 = 0$ parametreleri kullanılarak M_1, M_2 ve M_3 'ün gerçek değerleri $M_1 = 0.005$, $M_2 = 0.000667$, $M_3 = 0.000075$ olarak bulunur. Korunum sabitlerindeki değişim aşağıdaki formüllerle hesaplanmıştır:

$$M_k = \frac{I_{k(son)} - I_{k(ilk)}}{t_{son} - t_{ilk}}, k = 1, 2, 3. \quad (3.18)$$

4. EW DENKLEMİNİN OPERATÖR SPLITTING ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde Eşit genişlikli dalga denkleminin operatör splitting trigonometrik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle numerik çözümleri verildi. Bu amaçla EW denklemi biri lineer diğeri lineer olmayan iki alt denkleme split edildi. Daha sonra her bir alt denkleme kübik trigonometrik B-spline fonksiyonların düğüm noktalarındaki değerleri kullanılarak adi diferansiyel denklem sistemleri elde edildi. Crank-Nicolson yaklaşımları elde edilen adi diferansiyel denklem sistemlerinde kullanılarak cebirsel denklem sistemleri oluşturuldu.

EW denklemini zamana bağlı terime göre splitting formu aşağıdaki gibidir:

$$A = u_t - \mu u_{xxt} = 0, \quad (4.1)$$

$$B = u_t - \mu u_{xxt} + uu_x = 0. \quad (4.2)$$

A ve B ifadelerinde (2.32) ile verilen U ve türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri yazılırsa aşağıdaki adi diferansiyel denklem sistemleri elde edilir:

$$\alpha_1 \dot{\delta}_{m-1} + \alpha_2 \dot{\delta}_m + \alpha_1 \dot{\delta}_{m+1} - \mu(\gamma_1 \dot{\delta}_{m-1} + \gamma_2 \dot{\delta}_m + \gamma_1 \dot{\delta}_{m+1}) = 0, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \dot{\delta}_{m-1} + \alpha_2 \dot{\delta}_m + \alpha_1 \dot{\delta}_{m+1} - \mu(\gamma_1 \dot{\delta}_{m-1} + \gamma_2 \dot{\delta}_m + \gamma_1 \dot{\delta}_{m+1}) + \\ &z_m(\beta_1 \delta_{m+1} - \beta_1 \delta_{m-1}) = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Burada $\bullet$ sembolü t 'ye göre birinci mertebeden türevi gösterirken $\delta_m(t)$ zamana bağlı parametrelerdir. (4.1) ve (4.4) sistemlerinde $\dot{\delta}_m = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t}$, $\delta_m = \frac{\delta_m^{n+1} + \delta_m^n}{2}$ Crank-Nicolson yaklaşımları yazılırsa aşağıdaki gibi cebirsel denklem sistemleri elde edilir:

$$\begin{aligned} A: &(\alpha_1 - \mu\gamma_1)\delta_{m-1}^{n+1} + (\alpha_2 - \mu\gamma_2)\delta_m^{n+1} + (\alpha_1 - \mu\gamma_1)\delta_{m+1}^{n+1} \\ &= (\alpha_1 - \mu\gamma_1)\delta_{m-1}^n + (\alpha_2 - \mu\gamma_2)\delta_m^n + (\alpha_1 - \mu\gamma_1)\delta_{m+1}^n \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} B: &\left(\alpha_1 - \mu\gamma_1 + \frac{z_m \Delta t \beta_1}{2}\right) \delta_{m-1}^{n+1} + (\alpha_2 - \mu\gamma_2)\delta_m^{n+1} + \left(\alpha_1 - \mu\gamma_1 + \frac{z_m \Delta t \beta_2}{2}\right) \delta_{m+1}^{n+1} \\ &= \\ &\left(\alpha_1 - \mu\gamma_1 - \frac{z_m \Delta t \beta_1}{2}\right) \delta_{m-1}^n + (\alpha_2 - \mu\gamma_2)\delta_m^n + \left(\alpha_1 - \mu\gamma_1 - \frac{z_m \Delta t \beta_2}{2}\right) \delta_{m+1}^n. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Burada $z_m = \alpha_1 \delta_{m-1} + \alpha_2 \delta_m + \alpha_1 \delta_{m+1}$ 'dir. (4.5) ve (4.6) sistemleri $(N + 1)$ tane denklem ve $(N + 3)$ tane de bilinmeyen zamana bağlı δ_m parametrelerinden

oluşmaktadır. $U(a, t) = 0$ ve $U(b, t) = 0$ sınır koşullarının kullanılmasıyla δ_{-1} ve δ_{N+1} hayali değerler aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\delta_{-1} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\delta_0 - \delta_1, \delta_{N+1} = -\delta_{N-1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\delta_N. \quad (4.7)$$

(4.5) ve (4.6) sistemlerine sınır şartlarının uygulanmasıyla $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu çözülebilir cebirsel denklem sistemleri elde edilir. Bu sistemlerin çözümlerine başlamak için bir başlangıç vektörüne ihtiyaç vardır.

Başlangıç vektörü δ_m^0 , $U(x, 0) = f(x)$ başlangıç koşulunu kullanarak aşağıdaki şekilde oluşturulur:

$$U(x_i, 0) = U_N(x_i, 0) \quad i = 0(1)N$$

$$\begin{aligned} U_m &= \alpha_1 \delta_{m-1}^0 + \alpha_2 \delta_m^0 + \alpha_1 \delta_{m+1}^0, \quad m = 0(1)N \\ U_0 &= \alpha_1 \delta_{-1}^0 + \alpha_2 \delta_0^0 + \alpha_1 \delta_1^0 \\ U_1 &= \alpha_1 \delta_0^0 + \alpha_2 \delta_1^0 + \alpha_1 \delta_2^0 \\ &\vdots \\ U_N &= \alpha_1 \delta_{N-1}^0 + \alpha_2 \delta_N^0 + \alpha_1 \delta_{N+1}^0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

(4.8) sistemi $(N + 1)$ tane denklem ve $(N + 3)$ tane de bilinmeyen δ_m^0 parametrelerinden oluşmaktadır. Bu sistemi çözülebilir hale getirmek için δ_{-1}^0 ve δ_{N+1}^0 hayali noktalarının yok edilmesi gerekir. Hayali noktaları yok etmek için $U''(a, t) = 0$ ve $U''(b, t) = 0$ sınır şartları kullanılırsa δ_{-1}^0 ve δ_{N+1}^0 parametreleri için aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$U_0'' = \gamma_1 \delta_{-1}^0 + \gamma_2 \delta_0^0 + \gamma_1 \delta_1^0 = 0, \quad (4.9)$$

$$\delta_{-1} = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\delta_0 - \delta_1, \quad (4.10)$$

ve

$$U_N'' = \gamma_1 \delta_{N-1} + \gamma_2 \delta_N + \gamma_1 \delta_{N+1} = 0, \quad (4.11)$$

$$\delta_{N+1} = -\delta_{N-1} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\delta_N. \quad (4.12)$$

(4.10) ve (4.12) ifadeleri (4.8) sisteminde kullanırsa $(N + 1)$ tane denklemden ve $(N + 1)$ tane de bilinmeyen δ_m^0 parametrelerinden oluşan aşağıdaki sistem elde edilir:

$$\begin{aligned} U_0 &= \left(-\frac{\alpha_1 \gamma_2}{\gamma_1} + \alpha_2\right)\delta_0 \\ U_1 &= \alpha_1 \delta_0 + \alpha_2 \delta_1 + \alpha_1 \delta_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$U_N = \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1 \gamma_2}{\gamma_1} \right) \delta_N. \quad (4.13)$$

(4.13) sistemi matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\alpha_1 \gamma_2}{\gamma_1} + \alpha_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \dots \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & & 0 & \alpha_2 - \frac{\alpha_1 \gamma_2}{\gamma_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0^{n+1} \\ \delta_1^{n+1} \\ \delta_{-1}^{n+1} \\ \vdots \\ \delta_{N-1}^{n+1} \\ \delta_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

4.1.von Neumann Kararlılık Analizi

(4.5) ve (4.6) sayısal şemalarının kararlılık analizi von Neumann (von Neumann ve Richtmyer, 1950:232) yöntemi kullanılarak incelendi. Bu yöntemde $\delta_m^n = \xi^n e^{i\beta m h}$ olarak alınır, burada $i = \sqrt{-1}$, β mod sayısı, ξ amplifikasyon faktörü ve h konum adım uzunluğudur. Bu yöntem lineer şemalar için geçerli olduğundan (4.6) denkleminde UU_x yerine $U = z_m$ yazılırsa lineer olamayan terim lokal bir sabit olarak hareket edecektir. (4.5) ve (4.6) sayısal şemalarının kararlılığı sırasıyla ρ_A ve ρ_B olduğunu varsayalım. Eğer (4.5) denkleminde δ_m^n yerine $\delta_m^n = \xi^n e^{i\beta m h}$ kullanılırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir. ρ_A sisteminin kararlılık durumu aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1 - \mu \gamma_1, a_2 = \alpha_2 - \mu \gamma_2 \text{ olmak üzere,} \\ a_1 \xi^{n+1} e^{i\beta(m-1)h} + a_2 \xi^{n+1} e^{i\beta m h} + a_1 \xi^{n+1} e^{i\beta(m+1)h} &= a_1 \xi^n e^{i\beta(m-1)h} + \\ a_2 \xi^n e^{i\beta m h} + a_1 \xi^n e^{i\beta(m+1)h} \end{aligned} \quad (4.15)$$

(4.15) ifadesinde ξ^{n+1} ve ξ^n ortak parantezine alırsak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\xi^{n+1} (a_1 e^{i\beta(m-1)h} + a_2 e^{i\beta m h} + a_1 e^{i\beta(m+1)h}) = \xi^n (a_1 e^{i\beta(m-1)h} + a_2 e^{i\beta m h} + a_1 e^{i\beta(m+1)h}) \quad (4.16)$$

Gerekli düzenlemeler yapılırsa:

$$\begin{aligned} \xi^{n+1} (a_1 e^{i\beta(m-1)h} + a_2 e^{i\beta m h} + a_1 e^{i\beta(m+1)h}) &= \\ \xi^n (a_1 e^{i\beta(m-1)h} + a_2 e^{i\beta m h} + a_1 e^{i\beta(m+1)h}), \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\xi^{n+1} (a_1 e^{-i\beta h} + a_2 + a_1 e^{i\beta h}) = \xi^n (a_1 e^{-i\beta h} + a_2 + a_1 e^{i\beta h}), \quad (4.18)$$

$$\xi^{n+1} (2a_1 \cos \beta h + a_2) = \xi^n (2a_1 \cos \beta h + a_2), \quad (4.19)$$

$$\rho_A \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right) = \frac{2a_1 \cos \beta h + a_2}{2a_1 \cos \beta h + a_2} = 1 \leq 1 \quad (4.20)$$

elde edilir. $\left| \rho_A \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right) \right| \leq 1$ olduğundan dolayı lineerleştirilmiş (4.5) şeması koşulsuz

olarak kararlıdır. Benzer şekilde (4.6) şemasında δ_m^n yerine $\delta_m^n = \xi_B^n e^{i\beta m h}$ yerine yazılırsa ve (2.29) ifadesine göre $\beta_2 = -\beta_1$ alınırsa ρ_B sisteminin kararlılık analizi aşağıdaki gibi incelenir:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \alpha_1 - \mu\gamma_1 + \frac{z_m \Delta_t \beta_1}{2}, \sigma_2 = \alpha_2 - \mu\gamma_2, \sigma_3 = \alpha_1 - \mu\gamma_1 - \frac{z_m \Delta_t \beta_1}{2}. \\ \sigma_1 \xi^{n+1} e^{i\beta(m-1)h} + \sigma_2 \xi^{n+1} e^{i\beta m h} + \sigma_3 \xi^{n+1} e^{i\beta(m+1)h} &= \sigma_3 \xi^n e^{i\beta(m-1)h} + \\ \sigma_2 \xi^n e^{i\beta m h} + \sigma_1 \xi^n e^{i\beta(m+1)h} \end{aligned} \quad (4.22)$$

(4.22) ifadesinde ξ^{n+1} ve ξ^n ortak parantezine alırsak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\xi^{n+1} (\sigma_1 e^{i\beta(m-1)h} + \sigma_2 e^{i\beta m h} + \sigma_3 e^{i\beta(m+1)h}) = \xi^n (\sigma_3 e^{i\beta(m-1)h} + \sigma_2 e^{i\beta m h} + \sigma_1 e^{i\beta(m+1)h}), \quad (4.23)$$

Gerekli düzenlemeler yapılsa:

$$\begin{aligned} \xi^{n+1} (\sigma_1 e^{i\beta(m-1)h} + \sigma_2 e^{i\beta m h} + \sigma_3 e^{i\beta(m+1)h}) &= \\ \xi^n (\sigma_3 e^{i\beta(m-1)h} + \sigma_2 e^{i\beta m h} + \sigma_1 e^{i\beta(m+1)h}), \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\xi^{n+1} (\sigma_1 e^{-i\beta h} + \sigma_2 + \sigma_3 e^{i\beta h}) = \xi^n (\sigma_3 e^{-i\beta h} + \sigma_2 + \sigma_1 e^{i\beta h}), \quad (4.25)$$

$$\rho_B \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right) = \frac{\sigma_3 (\cos \beta h - i \sin \beta h) + \sigma_2 + \sigma_1 (\cos \beta h + i \sin \beta h)}{\sigma_1 (\cos \beta h - i \sin \beta h) + \sigma_2 + \sigma_3 (\cos \beta h + i \sin \beta h)}, \quad (4.26)$$

$$\rho_B \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right) = \frac{(\sigma_3 + \sigma_1) \cos \beta h + \sigma_2 - (\sigma_3 - \sigma_1) i \sin \beta h}{(\sigma_3 + \sigma_1) \cos \beta h + \sigma_2 + (\sigma_3 - \sigma_1) i \sin \beta h}, \quad (4.27)$$

$X = (\sigma_3 + \sigma_1) \cos \beta h + \sigma_2$, $Y = (\sigma_3 - \sigma_1) i \sin \beta h$ olmak üzere,

$$\rho_B \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right) = \frac{X - iY}{X + iY}, \quad (4.28)$$

$$\left| \rho_B \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right) \right| = \left| \frac{X - iY}{X + iY} \right| = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \leq 1. \quad (4.29)$$

Böylece kararlılık için $\left| \rho_B \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right) \right| \leq 1$ koşulu sağladığından ρ_B şeması koşulsuz olarak kararlıdır. Lie trotter splitting yöntemi için:

$$\rho_L(\xi) = \rho_A^{n+1} \rho_B^{n+1} \text{ ve } \rho_L^*(\xi) = \rho_B^{n+1} \rho_A^{n+1}, \quad (4.30)$$

$$\rho_L(\xi) = \left| \rho_A \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right) \right| \left| \rho_B \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right) \right| \leq 1 \quad (4.31)$$

koşulu sağlandığından Lie-Trotter splitting şemaları koşulsuz kararlıdır. Strang splitting

yöntemi için:

$$\rho_S(\xi) = \rho_A^{n+1/2} \rho_B^{n+1} \rho_A^{n+1/2} \text{ ve } \rho_S^*(\xi) = \rho_B^{n+1/2} \rho_A^{n+1} \rho_B^{n+1/2}, \quad (4.32)$$

$$\rho_S(\xi) = \left| \rho_A \left(\frac{\xi^{n+1/2}}{\xi^n} \right) \right| \left| \rho_B \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right) \right| \left| \rho_A \left(\frac{\xi^{n+1/2}}{\xi^n} \right) \right| \leq 1 \quad (4.33)$$

şartı sağlandığı için Strang splitting yöntemleri şartsız kararlıdır.

4.2.EW Denkleminin Lie-Trotter Splitting Şemaları ile Çözümü

Aşağıdaki alt bölümlerde EW denkleminin nümerik çözümleri A - B ve B - A Lie-Trotter splitting şemaları ile hesaplandı. Beş problem için her iki şema ile hesaplanan nümerik sonuçlar kendi içinde karşılaştırıldı.

4.2.1. Problem 1: Tek solitary dalganın hareketi

Tek solitary dalganın hareketi için EW denklemi

$$U(x, 0) = 3c \operatorname{sech}^2[p(x - x_0)]$$

başlangıç şartı ve aşağıdaki analitik çözüm ile birlikte göz önüne alındı

$$U(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2[p(x - ct - x_0)].$$

Bu problem için hesaplamalar yapılırken $[0, 30]$ bölgesi üzerinde $\Delta t = 0.05, 0.01, h = 0.03, 0.05, \mu = 1, x_0 = 10, c = 0.1$ ve $c = 0.03$ parametreleri için EW denkleminin A - B ve B - A şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçları Tablo 4.1, Tablo 4.2, Tablo 4.3 ve Tablo 4.4'de verildi. Tek solitary dalganın sağladığı I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin yanında, L_2 ve L_∞ hata normları $t = 80$ zamanına kadar hesaplandı.

Tablo 4.1' de $\Delta t = 0.05, c = 0.1, h = 0.03, h = 0.05$ ve $x_0 = 10$ değerleri için A - B ve B - A şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçlar karşılaştırıldı. Tablo 4.1' den görüldüğü gibi I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri her iki şemayla oldukça iyi korunmaktadır. Ayrıca h küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının da azaldığı Tablo 4.1'den açıkça görülmektedir. Bunlara ek olarak zaman ilerledikçe hata normlarının da arttığı açıktır.

Tablo 4.1: Problem 1 için Lie-Trotter splitting şemasları kullanarak $0 \leq x \leq 30$ aralığında $\Delta t = 0.05, c = 0.1, h = 0.03$ ve $h = 0.05$ ve $x_0 = 10$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları.

Metot	$h = 0.03$						$h = 0.05$					
	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$
A-B	0	1.199946	0.288001	0.057600	0.0000	0.0000	0	1.199947	0.288001	0.057600	0.0000	0.0000
	5	1.199989	0.288001	0.057600	1.5737	2.0801	5	1.199989	0.288001	0.057600	1.7765	2.0393
	20	1.200040	0.288001	0.057600	3.5447	4.5713	20	1.200040	0.288001	0.057600	4.4742	4.4817
	40	1.200053	0.288001	0.057600	4.1516	5.1900	40	1.200053	0.288001	0.057600	5.8665	5.0884
	60	1.200053	0.288001	0.057600	4.3949	5.2738	60	1.200053	0.288001	0.057600	6.9021	5.1706
	80	1.200040	0.288001	0.057600	4.6093	5.2852	80	1.200041	0.288001	0.057600	7.7224	5.1818
B-A	5	1.199989	0.288001	0.057600	1.5737	2.0801	5	0.199990	0.288001	0.057600	1.7765	2.0393
	20	1.200040	0.288001	0.057600	3.5447	4.5713	20	0.200041	0.288001	0.057600	4.4742	4.4817
	40	1.200053	0.288001	0.057600	4.1516	5.1900	40	0.200053	0.288001	0.057600	5.8665	5.0884
	60	1.200053	0.288001	0.057600	4.3948	5.2738	60	1.200053	0.288001	0.057600	6.9021	5.1706
	80	1.200040	0.288001	0.057600	4.6094	5.2852	80	0.200041	0.288001	0.057600	7.7224	5.1818

Tablo 4.2: Problem 1 için Lie-Trotter splitting şeması kullanarak $0 \leq x \leq 30$ aralığında $\Delta t = 0.01, c = 0.1, h = 0.03$ ve $h = 0.05, x_0 = 10$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları

Metot	$h = 0.03$						$h = 0.05$					
	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$
A-B	0	1.199946	0.288001	0.057600	0.0000	0.0000	0	1.199947	0.288001	0.057600	0.0000	0.0000
	5	1.199989	0.288001	0.057600	1.5749	2.0801	5	1.199990	0.288001	0.057600	1.7796	2.0393
	20	1.200040	0.288001	0.057600	3.5533	4.5713	20	1.200041	0.288001	0.057600	4.4943	4.4817
	40	1.200053	0.288001	0.057600	4.1777	5.1900	40	1.200053	0.288001	0.057600	5.9216	5.0884
	60	1.200053	0.288001	0.057600	4.4315	5.2738	60	1.200053	0.288001	0.057600	6.9736	5.1706
	80	1.200040	0.288001	0.057600	4.6338	5.2852	80	1.200041	0.288001	0.057600	7.7730	5.1818
B-A	5	1.199989	0.288001	0.057600	1.5749	2.0801	5	1.199990	0.288001	0.057600	1.7796	2.0393
	20	1.200040	0.288001	0.057600	3.5533	4.5713	20	1.200041	0.288001	0.057600	4.4943	4.4817
	40	1.200053	0.288001	0.057600	4.1777	5.1900	40	1.200053	0.288001	0.057600	5.9216	5.0884
	60	1.200053	0.288001	0.057600	4.4315	5.2738	60	1.200053	0.288001	0.057600	6.9736	5.1706
	80	1.200040	0.288001	0.057600	4.6338	5.2852	80	1.200041	0.288001	0.057600	7.7730	5.1818

Tablo 4.2’ de $\Delta t = 0.01, c = 0.1, h = 0.03, h = 0.05$ ve $x_0 = 10$ değerleri için A-B ve B-A şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçlar karşılaştırıldı. Tablo 4.2’ den görüldüğü gibi I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri her iki şemada da birbirleriyle uyumludur. Ayrıca h değeri arttıkça korunum sabitlerinde kayda değer bir değişim olmazken, ortalama hata normunun arttığı, maksimum hata normunun azaldığı gözlemlendi. Tablo 4.2’yi, Tablo 4.1’e ile kıyasladığımızda Δt adım aralığı azaldıkça korunum sabitlerinin

uyum içinde olduğu, L_∞ maksimum hata normu ve L_2 ortalama hata normunda da çok az değişimler görüldü.

Tablo 4.3: Problem 1 için Lie-Trotter splitting şeması kullanarak $0 \leq x \leq 30$ aralığında $\Delta t = 0.01, c = 0.03, h = 0.03$ ve $h = 0.05, x_0 = 10$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları

Metot	$h = 0.03$						$h = 0.05$					
	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$
A-B	0	0.359984	0.025920	0.001555	0.0000	0.0000	0	0.359984	0.025920	0.001555	0.0000	0.0000
	5	0.359988	0.025920	0.001555	0.1664	0.2209	5	0.359988	0.025920	0.001555	0.1834	0.2166
	20	0.359999	0.025920	0.001555	0.5426	0.7156	20	0.359999	0.025920	0.001555	0.6179	0.7015
	40	0.360007	0.025920	0.001555	0.8492	1.1083	40	0.360007	0.025920	0.001555	1.0134	1.0866
	60	0.360011	0.025920	0.001555	1.0255	1.3239	60	0.360011	0.025920	0.001555	1.2795	1.2979
	80	0.360014	0.025920	0.001555	1.1290	1.4422	80	0.360014	0.025920	0.001555	1.4648	1.4139
B-A	5	0.359988	0.025920	0.001555	0.1664	0.2209	5	0.359989	0.025920	0.001555	0.1834	0.2166
	20	0.359999	0.025920	0.001555	0.5426	0.7156	20	0.359999	0.025920	0.001555	0.6179	0.7015
	40	0.360007	0.025920	0.001555	0.8492	1.1083	40	0.360007	0.025920	0.001555	1.0134	1.0866
	60	0.360011	0.025920	0.001555	1.0255	1.3239	60	0.360011	0.025920	0.001555	1.2795	1.2979
	80	0.360014	0.025920	0.001555	1.1290	1.4422	80	0.360014	0.025920	0.001555	1.4648	1.4139

Tablo 4.3' de $\Delta t = 0.01, c = 0.03, h = 0.03, h = 0.05$ ve $x_0 = 10$ değerleri için A-B ve B-A şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçlar karşılaştırıldı. A-B ve B-A şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçların birbirleriyle uyumlu olduğu görüldü.

Tablo 4.4: Problem 1 için Lie-Trotter splitting şeması kullanarak $0 \leq x \leq 30$ aralığında $\Delta t = 0.05, c = 0.03, h = 0.03$ ve $h = 0.05, x_0 = 10$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları

Metot	$h = 0.03$						$h = 0.05$					
	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$
A-B	0	0.359984	0.025920	0.001555	0.0000	0.0000	0	0.359984	0.025920	0.001555	0.0000	0.0000
	5	0.359988	0.025920	0.001555	0.1664	0.2209	5	0.359989	0.025920	0.001555	0.1834	0.2166
	20	0.359999	0.025920	0.001555	0.5426	0.7156	20	0.359999	0.025920	0.001555	0.6178	0.7015
	40	0.360007	0.025920	0.001555	0.8491	1.1083	40	0.360007	0.025920	0.001555	1.0131	1.0866
	60	0.360011	0.025920	0.001555	1.0253	1.3239	60	0.360011	0.025920	0.001555	1.2791	1.2979
	80	0.360014	0.025920	0.001555	1.1286	1.4422	80	0.360014	0.025920	0.001555	1.4641	1.4139
B-A	5	0.359988	0.025920	0.001555	0.1664	0.2209	5	0.359989	0.025920	0.001555	0.1834	0.2166
	20	0.359999	0.025920	0.001555	0.5426	0.7156	20	0.359999	0.025920	0.001555	0.6178	0.7015
	40	0.360007	0.025920	0.001555	0.8491	1.1083	40	0.360007	0.025920	0.001555	1.0131	1.0866
	60	0.360011	0.025920	0.001555	1.0253	1.3239	60	0.360011	0.025920	0.001555	1.2791	1.2979
	80	0.360014	0.025920	0.001555	1.1286	1.4422	80	0.360014	0.025920	0.001555	1.4641	1.4139

Tablo 4.3'ün, Tablo 4.2'ye göre c değerinin azalması dışında aynı parametrelerle hesaplanan sonuçları karşılaştırdığımızda hata normlarının küçüldüğü görülmektedir. Ayrıca, $c = 0.03$ değeri için hesaplanan korunum sabitlerinin zaman ilerledikçe oldukça

iyi korunduğu açıktır. Bunlara ek olarak, h konum adım uzunluğu azaldıkça L_2 hata normunun azaldığı fakat L_∞ hata normunda az da olsa bir artış gözlemlendi.

Tablo 4.4' de $\Delta t = 0.05, c = 0.03, h = 0.03, h = 0.05$ ve $x_0 = 10$ değerleri için $A-B$ ve $B-A$ şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçlar karşılaştırıldı. $A-B$ ve $B-A$ şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçlar birbirleriyle uyumludur. Tablo 4.4'ü Tablo 4.1 ile karşılaştırdığımızda c değerinin azalması dışında aynı parametrelerle hesaplanan hata normlarının küçüldüğü görülmektedir. Ayrıca, Tablo 4.4'den açıkça görüldüğü gibi zaman ilerledikçe L_∞ hata normunda bir değişim gözlenmezken, L_2 hata normunda az da olsa bir artış olduğu gözlemlendi. Bunlara ek olarak, $A-B$ ve $B-A$ şemalarıyla hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin zaman ilerledikçe neredeyse değişmediği görüldü.

4.2.2. Problem 2: İki solitary dalganın girişimi

İkinci test problemi olarak EW denklemi $[a, b]$ sonlu aralığında aşağıdaki başlangıç şartı ile göz önüne alındı

$$U(x, 0) = \sum_{j=1}^2 3c_j \sec h^2 [0.5(x - x_j)].$$

Bu problem için Lie-Trotter splitting şeması kullanılarak yapılan hesaplamalar $[0, 80]$ bölgesi üzerinde $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.025, h = 0.5, 0.1, 0.05, \mu = 1, x_1 = 10, x_2 = 25, c_1 = 1.5$ ve $c_2 = 0.75$ parametreleri için EW denkleminin $A-B$ ve $B-A$ şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçları Tablo 4.5 ve Tablo 4.6'da verildi. İki solitary dalganın girişimi için hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri $t = 30$ zamanına kadar hesaplandı.

Tablo 4.5' de $\Delta t = 0.01, 0.025, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, h = 0.1, 0.05, x_1 = 10$ ve $x_2 = 25$ değerleri için $A-B$ ve $B-A$ şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçlar karşılaştırıldı. Lie-Trotter $A-B$ ve $B-A$ şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçların birbirleriyle uyum içinde olduğu Tablo 4.5'den açıkça görüldü. Tablo 4.5 incelendiğinde zaman adımı Δt azaldığında korunum sabitlerinden I_2 zaman zaman artarken, I_1 ve I_3 değerleri de her zaman artmaktadır. Konum adımı x arttıkça I_1 artmakta, I_2 azalmakta, I_3 çoğunlukla artmaktadır. Genel olarak her iki şemayla elde edilen nümerik sonuçlar iyi uyum içindedir.

Tablo 4.5: Problem 2 için Lie-Trotter splitting şeması kullanarak $0 \leq x \leq 80$ aralığında $\Delta t = 0.01, \Delta t = 0.025, h = 0.05, h = 0.1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, x_1 = 10$ ve $x_2 = 25$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri

<i>Metot</i>		$h = 0.05$				$h = 0.1$			
		<i>t</i>	<i>I</i> ₁	<i>I</i> ₂	<i>I</i> ₃	<i>t</i>	<i>I</i> ₁	<i>I</i> ₂	<i>I</i> ₃
$\Delta t = 0.025$	A-B	0	26.999203	81.000322	218.701338	0	26.999223	81.000265	218.701338
		5	27.000677	80.999551	218.698020	5	27.000681	80.999435	218.698022
		10	27.000527	80.998352	218.694440	10	27.000531	80.996839	218.694449
		15	27.000425	80.995425	218.687286	15	27.000429	80.986634	218.687395
		20	27.000357	80.996658	218.689859	20	27.000361	80.992488	218.689892
		25	27.000219	80.997225	218.688188	25	27.000222	80.996803	218.688181
		30	27.000065	80.996591	218.684923	30	27.000069	80.996489	218.684911
	B-A	5	27.000523	80.998812	218.694721	5	27.000527	80.998696	218.694722
		10	27.000222	80.996883	218.687879	10	27.000226	80.995369	218.687884
		15	27.000016	80.993454	218.678519	15	27.000020	80.984662	218.678621
		20	26.999881	80.994379	218.679814	20	26.999884	80.990208	218.679839
		25	26.999603	80.994266	218.675103	25	26.999607	80.993841	218.675083
		30	26.999295	80.992892	218.668531	30	26.999298	80.992786	218.668502
$\Delta t = 0.01$	A-B	0	26.999822	81.000420	218.702832	0	26.999827	81.000423	218.702832
		5	27.000822	81.000246	218.701130	5	27.000826	81.000131	218.701131
		10	27.000814	80.999731	218.700871	10	27.000818	80.998218	218.700881
		15	27.000808	80.997273	218.699944	15	27.000812	80.988481	218.700056
		20	27.000804	80.998796	218.700475	20	27.000808	80.994633	218.700512
		25	27.000796	81.000000	218.700497	25	27.000800	80.999582	218.700498
		30	27.000786	81.000060	218.700292	30	27.000790	80.999961	218.700292
	B-A	5	27.000812	81.000199	218.700918	5	27.000816	81.000083	218.700919
		10	27.000794	80.999637	218.700450	10	27.000798	80.998124	218.700460
		15	27.000782	80.997146	218.699382	15	27.000786	80.988355	218.699494
		20	27.000773	80.998650	218.699831	20	27.000777	80.994486	218.699867
		25	27.000756	80.999811	218.699658	25	27.000760	80.999392	218.699658
		30	27.000737	80.999822	218.699241	30	27.000741	80.999724	218.699239

Tablo 4.6' da $\Delta t = 0.01, 0.1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, h = 0.1, 0.5, x_1 = 10$ ve $x_2 = 25$ değerleri için A-B ve B-A şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçlar karşılaştırıldı. Tablo 4.6' da A-B ve B-A şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçların birbirleriyle uyumlu olduğu açıktır. Tablo 4.6 incelendiğinde Δt artınca I_1 artmakta, I_2 ve I_3 azalmaktadır. h arttıkça I_1 azalmakta, I_2 çoğunlukla azalmakta, I_3 çoğunlukla önce artıp sonra azalmaktadır. Tablo 4.5 ve Tablo 4.6'da verilen nümerik sonuçlar karşılaştırıldığında, h ve Δt değerleri değiştikçe I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinde kayda değer bir değişim gözlemlenmedi. Korunum sabitlerinin zaman ilerledikçe çok fazla bir değişim göstermemesi uygulanan yöntemin etkili bir yöntem olduğunun bir göstergesidir.

Tablo 4.6: Problem 2 için Lie-Trotter splitting şeması kullanarak $0 \leq x \leq 80$ aralığında $\Delta t = 0.01, \Delta t = 0.1, h = 0.5, h = 0.1$ $c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, x_1 = 10$ ve $x_2 = 25$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri

Metot		$\Delta t = 0.01$				$\Delta t = 0.1$			
		t	I_1	I_2	I_3	t	I_1	I_2	I_3
$h = 0.1$	A-B	0	26.999223	81.000265	218.701338	0	26.999223	81.000265	218.701338
		5	27.000826	81.000131	218.701131	5	26.991048	80.953313	218.491965
		10	27.000818	80.998218	218.700881	10	26.981511	80.905446	218.281562
		15	27.000812	80.988481	218.700056	15	26.974875	80.863565	218.062298
		20	27.000808	80.994633	218.700512	20	26.970674	80.850718	218.043735
		25	27.000800	80.999582	218.700498	25	26.962017	80.813439	217.877319
	B-A	30	27.000790	80.999961	218.700292	30	26.952344	80.767547	217.671422
		5	27.000816	81.000083	218.700919	5	26.981529	80.907792	218.288815
		10	27.000798	80.998124	218.700460	10	26.962548	80.814441	217.875586
		15	27.000786	80.988355	218.699494	15	26.949277	80.740465	217.516080
		20	27.000777	80.994486	218.699867	20	26.940991	80.709352	217.421604
		25	27.000760	80.999392	218.699658	25	26.923887	80.630833	217.071722
$h = 0.5$	A-B	30	27.000741	80.999724	218.699239	30	26.904744	80.539742	216.664884
		0	26.999859	81.002507	218.702832	0	26.999859	81.002507	218.702832
		5	27.000523	81.008663	218.699090	5	26.990704	80.961045	218.489453
		10	27.000524	80.966990	218.704231	10	26.980980	80.872886	218.279121
		15	27.000526	80.725721	218.775806	15	26.974093	80.599687	218.124269
		20	27.000531	80.879468	218.723274	20	26.969784	80.728188	218.052521
	B-A	25	27.000530	81.004237	218.698602	25	26.960799	80.811394	217.851989
		30	27.000528	81.014165	218.697506	30	26.950788	80.773565	217.636411
		5	27.000513	81.008615	218.698876	5	26.981147	80.915092	218.284350
		10	27.000504	80.966894	218.703803	10	26.961784	80.780438	217.866017
		15	27.000500	80.725592	218.775228	15	26.948007	80.474341	217.563691
		20	27.000499	80.879317	218.722612	20	26.939503	80.582165	217.414130
		25	27.000489	81.004041	218.697736	25	26.921748	80.623009	217.021709
		30	27.000477	81.013919	218.696419	30	26.901933	80.538274	216.596897

4.2.3. Problem 3: Üç solitary dalganın girişimi

Üçüncü test problemi olan EW denkleminde $U(x, 0) = \sum_{j=1}^2 3c_j \sec h^2 [0.5(x - x_j)]$ başlangıç şartı ile çözüm yapıldı. Bu problem de olarak hesaplamalar $[0, 100]$ bölgesi üzerinde $\Delta t = 0.1, 0.01, h = 0.5, 0.1, 0.05, \mu = 1, x_1 = 10, x_2 = 25, x_3 = 35, c_1 = 4.5, c_2 = 1.5$ ve $c_3 = 0.5$ parametreleri için EW denkleminin A-B ve B-A şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçları Tablo 4.7’de verildi.

Tablo 4.7. Problem 3 için Lie-Trotter splitting şeması kullanarak $0 \leq x \leq 100$ aralığında $\Delta t = 0.01, \Delta t = 0.1, h = 0.05, h = 0.1, h = 0.5$ $c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5$ $x_1 = 10, x_2 = 25$ ve $x_3 = 35$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri

Metot		$\Delta t = 0.01$				$\Delta t = 0.1$			
		t	I_1	I_2	I_3	t	I_1	I_2	I_3
$h = 0.05$	A-B	0	77.997609	655.221875	5450.538839	0	77.997609	655.221875	5450.538839
		3	78.002500	655.213422	5450.514859	3	78.002052	655.206728	5448.043979
		6	78.002503	655.207473	5450.468571	6	78.001925	655.197259	5442.069870
		9	78.002506	655.219056	5450.538332	9	78.001534	655.204055	5449.932613
		12	78.002509	655.220443	5450.538997	12	78.001049	655.198359	5449.903497
		15	78.002512	655.221610	5450.539198	15	78.000564	655.192497	5449.829593
	B-A	3	78.002500	655.213422	5450.514859	3	78.001602	655.200235	5447.956457
		6	78.002503	655.207473	5450.468571	6	78.001345	655.188942	5441.958402
		9	78.002506	655.219056	5450.538332	9	78.000580	655.190310	5449.748090
		12	78.002509	655.220443	5450.538997	12	77.999626	655.177878	5449.628050
		15	78.002512	655.221610	5450.539198	15	77.998673	655.165282	5449.463236
$h = 0.1$	A-B	0	77.997669	655.221360	5450.538839	0	77.997669	655.221360	5450.538839
		3	78.002512	655.187848	5450.515605	3	78.002063	655.182167	5448.060174
		6	78.002515	655.164077	5450.470005	6	78.001935	655.149867	5442.088523
		9	78.002519	655.210369	5450.538585	9	78.001543	655.194233	5449.947029
		12	78.002522	655.215921	5450.539180	12	78.001056	655.192595	5449.917626
		15	78.002525	655.220583	5450.539345	15	78.000569	655.190289	5449.843375
	B-A	3	78.002512	655.187848	5450.515605	3	78.001613	655.175667	5447.972539
		6	78.002515	655.164077	5450.470005	6	78.001355	655.141537	5441.976877
		9	78.002519	655.210369	5450.538585	9	78.000587	655.180457	5449.762107
		12	78.002522	655.215921	5450.539180	12	77.999630	655.172065	5449.641517
		15	78.002525	655.220583	5450.539345	15	77.998674	655.163005	5449.476090
$h = 0.5$	A-B	0	77.998111	655.237868	5450.538839	0	77.998111	655.237868	5450.538839
		3	78.001625	654.525587	5450.847499	3	78.001139	654.553118	5448.845196
		6	78.001675	653.952053	5451.246442	6	78.001037	653.810836	5443.515911
		9	78.001721	655.075284	5450.549065	9	78.000640	655.024657	5450.407011
		12	78.001763	655.217660	5450.500138	12	78.000139	655.156308	5450.321459
		15	78.001802	655.331005	5450.476000	15	77.999636	655.264797	5450.211323
	B-A	3	78.001625	654.525587	5450.847499	3	78.000672	654.546346	5448.753650
		6	78.001675	653.952053	5451.246442	6	78.000428	653.802017	5443.398115
		9	78.001721	655.075284	5450.549065	9	77.999620	655.009859	5450.208376
		12	78.001763	655.217660	5450.500138	12	77.998607	655.134091	5450.022646
		15	78.001802	655.331005	5450.475999	15	77.997592	655.235164	5449.812348

Tablo 4.7’ de üç solitary dalga için girişimi için A-B ve B-A şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçlar karşılaştırıldı. Tablo 4.7’ den açıkça görüldüğü gibi A-B ve B-A şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçlar birbirleriyle uyum içindedir. Tablo 4.7 incelendiğinde $\Delta t = 0.01$, $h = 0.05$ ve $h = 0.1$ için hesaplanan nümerik sonuçlara bakıldığında I_1 ve I_3 artmakta, I_2 azalmaktadır. $\Delta t = 0.01$, $h = 0.1$ ve $h = 0.5$ değerleri için hesaplanan sonuçlara bakıldığında ise I_1 değeri azalmakta, I_2 değeri önce azalırken

sonra artmaktadır, I_3 ise artıp azalmaktadır. Zaman adım uzunluğu $\Delta t = 0.01$ 'den $\Delta t = 0.1$ 'e arttırıldığında I_1, I_2 ve I_3 azalmaktadır. Genel olarak farklı konum adım uzunluğu h ve zaman adım uzunluğu Δt değerleri için A-B ve B-A Lie-Trotter şemalarıyla hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinde zaman ilerledikçe kayda değer bir değişim gözlenmedi.

4.2.4. Problem 4: Maxwellian başlangıç şartı

Dördüncü problem olarak EW denkleminin nümerik çözümleri $U(x, 0) = e^{-(x-20)^2}$ Maxwellian başlangıç şartı kullanılarak elde edildi. Bu problem için tüm hesaplamalar $[0, 40]$ bölgesi üzerinde $\mu = 0.01, 0.05, h = 0.01, 0.05, \Delta t = 0.01, 0.05$ parametreleri kullanılarak A-B ve B-A Lie-Trotter splitting şemaları ile hesaplandı. Farklı h ve Δt değerleri için $t = 12$ zamanına kadar hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin nümerik değerleri Tablo 4.8 ve Tablo 4.9'da verildi.

Tablo 4.8' de $\Delta t = 0.01, 0.05, h = 0.01, 0.05$ ve $\mu = 0.01$ değerleri için A-B ve B-A şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçlar verildi. Tablo 4.8 incelendiğinde sonuçların birbirleriyle uyumlu olduğu ve korunum sabitlerinin başlangıç değerlerine yakın olduğu görülmektedir. Δt değeri arttıkça sonuçların başlangıç değerlerine daha da yakın olduğu korunum sabitlerinin çoğunlukla azaldığı görüldü. h değeri arttıkça I_1 ve I_3 korunum sabitleri çoğunlukla artarken I_2 sabiti ise azalmaktadır. Genel olarak farklı konum adım uzunluğu h ve zaman adım uzunluğu Δt değerleri için A-B ve B-A Lie-Trotter şemalarıyla hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinde zaman ilerledikçe kayda değer bir değişim gözlenmedi.

Tablo 4.9' da $\Delta t = 0.01, 0.05, h = 0.01, 0.05$ ve $\mu = 0.05$ değerleri için A-B ve B-A şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçlar verildi. Tablo 4.9 incelendiğinde Δt değeri azaldıkça genel olarak korunum sabitlerinin başlangıç değerlerine daha yakın olduğu görülmektedir. h değeri arttıkça genel olarak korunum sabitlerinden I_1 ve I_3 'ün az miktarda arttığı, I_2 'nin çoğunlukla azaldığı görülmektedir. Genel olarak farklı konum adım uzunluğu h ve zaman adım uzunluğu Δt değerleri için A-B ve B-A Lie-Trotter şemalarıyla hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinde zaman ilerledikçe kayda değer bir değişim gözlenmedi.

Tablo 4.8. Problem 4 için Lie-Trotter splitting şeması kullanarak $0 \leq x \leq 40$ aralığında $\Delta t = 0.01, \Delta t = 0.05, h = 0.01, h = 0.05, \mu = 0.01$, değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri

<i>Metot</i>		$\Delta t = 0.01$				$\Delta t = 0.05$			
		<i>t</i>	I_1	I_2	I_3	<i>t</i>	I_1	I_2	I_3
$h = 0.01$	A-B	0	1.772454	1.265847	1.023327	0	1.772454	1.265847	1.023327
		3	1.772449	1.265771	1.023372	3	1.772449	1.264282	1.023671
		6	1.772423	1.265696	1.023323	6	1.772425	1.263498	1.023728
		9	1.772395	1.265641	1.023255	9	1.772398	1.263254	1.023695
		12	1.772366	1.265592	1.023187	12	1.772371	1.263135	1.023637
	B-A	3	1.772444	1.265764	1.023360	3	1.771380	1.264057	1.022209
		6	1.772393	1.265646	1.023248	6	1.765396	1.254249	1.007833
		9	1.772336	1.265546	1.023113	9	1.758845	1.243940	0.992614
		12	1.772278	1.265451	1.022976	12	1.752413	1.233952	0.977979
$h = 0.05$	A-B	3	1.772449	1.264282	1.023671	3	1.771924	1.263466	1.023737
		6	1.772425	1.263498	1.023738	6	1.769037	1.258047	1.017126
		9	1.772398	1.263254	1.023695	9	1.765842	1.252845	1.009718
		12	1.772371	1.263135	1.023637	12	1.762660	1.247833	1.002414
	B-A	3	1.772445	1.264275	1.023660	3	1.771423	1.262666	1.022579
		6	1.772396	1.263452	1.023668	6	1.765753	1.252759	1.009215
		9	1.772342	1.263165	1.023561	9	1.759542	1.242896	0.994939
		12	1.772288	1.263003	1.023439	12	1.753434	1.233434	0.981164

Tablo 4.9. Problem 4 için Lie-Trotter splitting şeması kullanarak $0 \leq x \leq 40$ aralığında $\Delta t = 0.01, \Delta t = 0.05, h = 0.01, h = 0.05, \mu = 0.05$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri

<i>Metot</i>		$\Delta t = 0.01$				$\Delta t = 0.05$			
		<i>t</i>	I_1	I_2	I_3	<i>t</i>	I_1	I_2	I_3
$h = 0.01$	A-B	0	1.772454	1.315980	1.023327	0	1.772454	1.315980	1.023327
		3	1.772454	1.315967	1.023331	3	1.772427	1.315933	1.023409
		6	1.772453	1.315959	1.023333	6	1.772336	1.315797	1.023319
		9	1.772452	1.315957	1.023331	9	1.772221	1.315639	1.023121
		12	1.772451	1.315955	1.023330	12	1.771105	1.315479	1.022919
	B-A	3	1.772453	1.315966	1.023331	3	1.772401	1.315900	1.023370
		6	1.772452	1.315958	1.023331	6	1.772219	1.315636	1.023118
		9	1.772450	1.315955	1.023328	9	1.771990	1.315320	1.022719
		12	1.772448	1.315952	1.023325	12	1.771759	1.315002	1.022316
$h = 0.05$	A-B	3	1.772454	1.315663	1.023342	3	1.772427	1.315930	1.023418
		6	1.772453	1.315503	1.023348	6	1.772337	1.315344	1.023335
		9	1.772452	1.315492	1.023347	9	1.772224	1.315718	1.023139
		12	1.772451	1.315473	1.023346	12	1.771109	1.315003	1.022940
	B-A	3	1.772453	1.315663	1.023341	3	1.772401	1.315597	1.023380
		6	1.772452	1.315501	1.023347	6	1.772222	1.315184	1.023136
		9	1.772450	1.315489	1.023344	9	1.771995	1.314863	1.022743
		12	1.772448	1.315469	1.023341	12	1.771766	1.314532	1.022345

4.2.5. Problem 5: Ardışık dalga oluşumu

Beşinci problem olarak EW denklemi

$$U(x, 0) = 0.5U_0 \left[1 - \tanh\left(\frac{x - x_0}{d}\right) \right]$$

başlangıç şartı kullanılarak göz önüne alındı. Bu problem için tüm hesaplamalar $[-20, 50]$ bölgesi üzerinde $\mu = 0.16666667, \Delta t = 0.05, 0.5, h = 0.07, 0.1, d = 2, 5, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1$ parametreleri kullanılarak $A-B$ ve $B-A$ Lie-Trotter splitting şemaları ile yapıldı. $A-B$ ve $B-A$ şemalarıyla $t=800$ ' e kadar hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin $d = 2$ için nümerik değerleri Tablo 4.10 ve Tablo 4.11'de verildi.

Tablo 4.10' da $\Delta t = 0.05, 0.5, h = 0.07$ ve $\mu = 0.16666667, d = 2$ değerleri için $A-B$ ve $B-A$ şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçlar karşılaştırıldı. Tablo 4.10' da $A-B$ ve $B-A$ şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçların genel olarak birbirleriyle uyumlu olduğu gözlemlendi.

Tablo 4.10. Problem 5 için Lie-Trotter splitting şeması kullanarak $-20 \leq x \leq 50$ aralığında $\Delta t = 0.05, \Delta t = 0.5, h = 0.07, d = 2, \mu = 0.16666667$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri

Metot	$\Delta t = 0.05$				$\Delta t = 0.5$			
	t	I_1	I_2	I_3	t	I_1	I_2	I_3
A-B	0	2.003500	0.190628	0.018535	0	2.003500	0.190628	0.018535
	100	2.503481	0.257287	0.026035	100	2.503478	0.257287	0.026035
	200	3.003461	0.323940	0.033534	200	3.003429	0.323934	0.033535
	300	3.503442	0.390593	0.041034	300	3.503444	0.390574	0.041034
	400	4.003422	0.457246	0.048534	400	4.003224	0.457208	0.048531
	500	4.503403	0.523899	0.056034	500	4.503069	0.523834	0.056027
	600	5.003383	0.590552	0.063533	600	5.002878	0.590453	0.063522
	700	5.503364	0.657205	0.071033	700	5.502652	0.657066	0.071016
	800	6.003321	0.723858	0.078533	800	6.002369	0.723671	0.078509
B-A	100	2.503481	0.257287	0.026035	100	2.503475	0.257286	0.026035
	200	3.003461	0.323940	0.033534	200	3.003397	0.323928	0.033534
	300	3.503442	0.390593	0.041034	300	3.503247	0.390555	0.041030
	400	4.003422	0.457246	0.048534	400	4.003027	0.457169	0.048524
	500	4.503403	0.523899	0.056034	500	4.502735	0.523769	0.056016
	600	5.003383	0.590552	0.063533	600	5.002374	0.590355	0.063505
	700	5.503363	0.657205	0.071033	700	5.501942	0.656927	0.070992
	800	6.003320	0.723858	0.078533	800	6.001418	0.723485	0.078476

Tablo 4.10 incelendiğinde zaman adımı arttıkça korunum sabitlerinden I_3 değeri çoğunlukla azalırken I_2 değeri hep azalmaktadır, I_1 ise $t = 300$ değeri dışında

azalmaktadır. Tablo 4.11 incelendiğinde Δt zaman adımının değişmesiyle kayda değer bir değişme gözlemlenmedi. $d = 5$ için hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin nümerik değerleri Tablo 4.12 ve Tablo 4.13’ de verildi. Genel olarak farklı h ve Δt değerleri için yapılan hesaplamalara bakıldığında I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin zaman ilerledikçe lineer olarak arttığı görüldü.

Tablo 4.11. Problem 5 için Lie-Trotter splitting şeması kullanarak $-20 \leq x \leq 50$ aralığında $\Delta t = 0.05, \Delta t = 0.1, h = 0.1, d = 2, \mu = 0.16666667$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri

Metot	$\Delta t = 0.1$				$\Delta t = 0.05$			
	t	I_1	I_2	I_3	t	I_1	I_2	I_3
A-B	0	2.005000	0.190778	0.018550	0	2.005000	0.190778	0.018550
	100	2.504960	0.257429	0.026049	100	2.504960	0.257429	0.026049
	200	3.004920	0.324068	0.033549	200	3.004920	0.324068	0.033549
	300	3.504880	0.390707	0.041049	300	3.504880	0.390707	0.041049
	400	4.004839	0.457346	0.048548	400	4.004840	0.457346	0.048548
	500	4.504798	0.523985	0.056048	500	4.504800	0.523986	0.056048
	600	5.004756	0.590624	0.063547	600	5.004760	0.590625	0.063547
	700	5.504715	0.657263	0.071047	700	5.504720	0.657263	0.071047
	800	6.004650	0.723901	0.078546	800	6.004657	0.723902	0.078546
B-A	100	2.504960	0.257429	0.026049	100	2.504960	0.257429	0.026049
	200	3.004920	0.324068	0.033549	200	3.004920	0.324068	0.033549
	300	3.504879	0.390707	0.041049	300	3.504880	0.390707	0.041049
	400	4.004837	0.457346	0.048548	400	4.004840	0.457346	0.048548
	500	4.504795	0.523985	0.056048	500	4.504800	0.523985	0.056048
	600	5.004752	0.590623	0.063547	600	5.004759	0.590623	0.063547
	700	5.504709	0.657261	0.071046	700	5.504719	0.657261	0.071046
	800	6.004643	0.723900	0.078546	800	6.004656	0.723900	0.078546

Genel olarak tablolar incelendiğinde A-B ile B-A çözümleri nerdeyse aynı olup yer yer farklılıklar gözlemlenmiştir. Δt değeri arttıkça sonuçlar başlangıç değerinden uzaklaşmıştır. h değeri arttıkça korunum sabitlerinin de A-B ile B-A için değerleri artmıştır.

Tablo 4.12. Problem 5 için Lie-Trotter splitting şeması kullanarak $-20 \leq x \leq 50$ aralığında $\Delta t = 0.05, \Delta t = 0.5, h = 0.07, d = 5, \mu = 0.16666667$, değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri

Metot	$\Delta t = 0.05$				$\Delta t = 0.5$			
	t	I_1	I_2	I_3	t	I_1	I_2	I_3
A-B	0	2.003585	0.175478	0.016288	0	2.003585	0.175478	0.016288
	100	2.503369	0.242103	0.023781	100	2.503369	0.242103	0.023781
	200	3.003291	0.308750	0.031279	200	3.003286	0.308749	0.031280
	300	3.503255	0.375400	0.038779	300	3.503218	0.375393	0.038779

B-A	400	4.003230	0.442052	0.046278	400	4.003126	0.442032	0.046278
	500	4.503209	0.508705	0.053778	500	4.503001	0.508665	0.053775
	600	5.003189	0.575358	0.061278	600	5.002843	0.575291	0.061271
	700	5.503169	0.642011	0.068777	700	5.502648	0.641910	0.068766
	800	6.003148	0.708664	0.076277	800	6.002418	0.708521	0.076260
	100	2.503228	0.242075	0.023777	100	2.503228	0.242075	0.023777
	200	3.002874	0.308666	0.031267	200	3.002864	0.308665	0.031267
	300	3.502519	0.375253	0.038757	300	3.502446	0.375239	0.038756
	400	4.002164	0.441839	0.046246	400	4.001956	0.441799	0.046242
	500	4.501809	0.508425	0.053736	500	4.501395	0.508345	0.053726
B-A	600	5.001454	0.575011	0.061226	600	5.000763	0.574877	0.061207
	700	5.501099	0.641597	0.068715	700	5.500060	0.641394	0.068686
	800	6.000743	0.708183	0.076205	800	5.999286	0.708898	0.076163

Tablo 4.13. Problem 5 için Lie-Trotter splitting şeması kullanarak $-20 \leq x \leq 50$ aralığında $\Delta t = 0.05, \Delta t = 0.1, h = 0.1, d = 5, \mu = 0.16666667$, değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri

Metot	$\Delta t = 0.1$				$\Delta t = 0.05$			
	t	I_1	I_2	I_3	t	I_1	I_2	I_3
A-B	0	2.005086	0.175628	0.016303	0	2.005086	0.175628	0.016303
	100	2.504883	0.242257	0.023797	100	2.504883	0.242257	0.023797
	200	3.004815	0.308902	0.031296	200	3.004815	0.308902	0.031296
	300	3.504769	0.375541	0.038795	300	3.504770	0.375541	0.038795
	400	4.004728	0.442180	0.046295	400	4.004729	0.442181	0.046295
	500	4.504687	0.508820	0.053794	500	4.504688	0.508820	0.053794
	600	5.004646	0.575459	0.061294	600	5.004648	0.575459	0.061294
	700	5.504604	0.642097	0.068793	700	5.504608	0.642098	0.068793
	800	6.004561	0.708736	0.076293	800	6.004566	0.708737	0.076293
B-A	100	2.504708	0.242223	0.023792	100	2.504708	0.242223	0.023792
	200	3.004333	0.308805	0.031281	200	3.004333	0.308805	0.031281
	300	3.503957	0.375379	0.038771	300	3.503958	0.375379	0.038771
	400	4.003581	0.441951	0.046260	400	4.003582	0.441951	0.046260
	500	4.504687	0.508523	0.053750	500	4.503207	0.508524	0.053750
	600	5.002827	0.575095	0.061239	600	5.002831	0.575096	0.061239
	700	5.502448	0.641666	0.068729	700	5.502456	0.641668	0.068729
	800	6.002068	0.708238	0.076218	800	6.002079	0.708240	0.076218

4.3.EW Denkleminin Strang Splitting Şeması ile Çözümü

Aşağıdaki alt bölümlerde EW denkleminin nümerik çözümleri $A-B-A$ ve $B-A-B$ Strang splitting şemaları ile hesaplandı. Beş problem için $A-B-A$ ve $B-A-B$ şemaları ile hesaplanan nümerik sonuçlar kendi içinde karşılaştırıldı.

4.3.1. Problem 1: Tek solitary dalganın hareketi

Tek solitary dalganın hareketi için EW denklemi $U(x, 0) = 3c \operatorname{sech}^2[p(x - x_0)]$ başlangıç şartı. Tek solitary dalganın hareketi problemi için hesaplamalar yapılırken $[0, 30]$ bölgesi üzerinde $\Delta t = 0.05, 0.01, h = 0.03, 0.05, \mu = 1, x_0 = 10, c = 0.1$ ve $c = 0.03$ parametreleri için EW denkleminin A-B-A ve B-A-B şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçları Tablo 4.14, Tablo 4.15, Tablo 4.17 ve Tablo 4.18’de verildi. Hesaplanan yaklaşık çözümlerin I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri, L_2 ortalama hata normu, L_∞ maksimum hata normunun değerleri tablolar halinde karşılaştırıldı. Tek solitary dalganın hareketi $t = 80$ zamanına kadar gözlemlendi. Tablo 4.14’de $\Delta t = 0.05, c = 0.1, h = 0.03, h = 0.05$ ve $x_0 = 10$ değerleri için A-B-A ve B-A-B şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçlar karşılaştırıldı.

Tablo 4.14: Problem 1 için Strang splitting şeması kullanarak $0 \leq x \leq 30$ aralığında $\Delta t = 0.05, c = 0.1, h = 0.03$ ve $h = 0.05, x_0 = 10$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları

Metot	$h = 0.03$						$h = 0.05$					
	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$
A-B-A	0	1.199946	0.288001	0.057600	0.0000	0.0000	0	1.199947	0.288001	0.057600	0.0000	0.0000
	5	1.199989	0.288001	0.057600	1.5737	2.0801	5	1.199989	0.288001	0.057600	1.7765	2.0393
	20	1.200040	0.288001	0.057600	3.5448	4.5713	20	1.200041	0.288001	0.057600	4.4742	4.4817
	40	1.200053	0.288001	0.057600	4.1516	5.1900	40	1.200053	0.288001	0.057600	5.8666	5.0884
	60	1.200053	0.288001	0.057600	4.3949	5.2738	60	1.200053	0.288001	0.057600	6.9021	5.1706
	80	1.200040	0.288001	0.057600	4.6092	5.2852	80	1.200041	0.288001	0.057600	7.7224	5.1818
B-A-B	5	1.199989	0.288001	0.057600	1.5746	2.0801	5	0.199990	0.288001	0.057600	1.7789	2.0393
	20	1.200040	0.288001	0.057600	3.5513	4.5713	20	0.200041	0.288001	0.057600	4.4898	4.4817
	40	1.200053	0.288001	0.057600	4.1715	5.1900	40	0.200053	0.288001	0.057600	5.9093	5.0884
	60	1.200053	0.288001	0.057600	4.4226	5.2738	60	1.200053	0.288001	0.057600	6.9575	5.1706
	80	1.200040	0.288001	0.057600	4.6269	5.2852	80	0.200041	0.288001	0.057600	7.7610	5.1818

Tablo 4.15. Problem 1 için Strang splitting şeması kullanarak $0 \leq x \leq 30$ aralığında $\Delta t = 0.01, c = 0.1, h = 0.03, h = 0.05, x_0 = 10$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları

Metot	$h = 0.03$						$h = 0.05$					
	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$
A-B-A	0	1.199946	0.288001	0.057600	0.0000	0.0000	0	1.199947	0.288001	0.057600	0.0000	0.0000
	5	1.199989	0.288001	0.057600	1.5749	2.0801	5	1.199990	0.288001	0.057600	1.7796	2.0393
	20	1.200040	0.288001	0.057600	3.5533	4.5713	20	1.200041	0.288001	0.057600	4.4943	4.4817
	40	1.200053	0.288001	0.057600	4.1777	5.1900	40	1.200053	0.288001	0.057600	5.9216	5.0884
	60	1.200053	0.288001	0.057600	4.4315	5.2738	60	1.200053	0.288001	0.057600	6.9736	5.1706
	80	1.200040	0.288001	0.057600	4.6337	5.2852	80	1.200041	0.288001	0.057600	7.7730	5.1818
	5	1.199989	0.288001	0.057600	1.5749	2.0801	5	0.199990	0.288001	0.057600	1.7797	2.0393

B-A-B	20	1.200040	0.288001	0.057600	3.5536	4.5713	20	0.200041	0.288001	0.057600	4.4950	4.4817
	40	1.200053	0.288001	0.057600	4.1786	5.1900	40	0.200053	0.288001	0.057600	5.9234	5.0884
	60	1.200053	0.288001	0.057600	4.4328	5.2738	60	1.200053	0.288001	0.057600	6.9760	5.1706
	80	1.200040	0.288001	0.057600	4.6348	5.2852	80	0.200041	0.288001	0.057600	7.7747	5.1818

Tablo 4.16’da tüm hesaplamalar $[0,30]$ bölgesi üzerinde $\Delta t = 0.01, c = 0.03, h = 0.03, h = 0.05, \mu = 1$ ve $x_0 = 10$ değerleri için hesaplandı. A-B-A ve B-A-B Strang splitting şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçlar Tablo 4.16’da karşılaştırıldı. Tablo 4.14, 4.15 ve Tablo 4.16, 4.17’de verilen sonuçlar karşılaştırıldığında dalga genliği c değerinin azalması L_2 ve L_∞ hata normlarında kayda değer bir azalmaya neden olduğu açıkça görülmektedir. Tablo 4.16 ve Tablo 4.17’de A-B-A ve B-A-B şemalarıyla hesaplanan sonuçlara bakıldığında, h konum adım uzunluğunun azalması L_2 normunda düşüşe neden olurken, L_∞ normunda az da olsa bir artışa neden olmuştur. Bunlara ek olarak, Δt zaman adımının azalması L_2 normunda az da olsa bir artışa neden olurken, L_∞ normunda gösterilen basamaklar için bir değişikliğe neden olmamıştır.

Tablolardaki değerleri karşılaştırdığımızda farklı h değerleri için A-B-A ile B-A-B değerleri birbirleriyle uyumludur. Korunum sabitlerinde kayda değer bir değişim gözlemlenmezken, hata norm değerlerinin uyumlu olduğu görülmüştür. Tablo 4.14 ile Tablo 4.15 karşılaştırıldığında zaman adımının küçülmesi L_∞ hata normunda gösterilen basamaklar için bir değişim gözlemlenmezken, L_2 hata normunda az da olsa bir artış olduğu görüldü. Ayrıca, h konum adım uzunluğu azaldıkça L_2 hata normunda azalma görülürken L_∞ hata normunda az bir yükselme olduğu Tablo 4.14 ve Tablo 4.15’den açıkça görülmektedir. Genel olarak h ve Δt adım uzunluklarının değiştirilmesiyle elde edilen nümerik sonuçlara bakıldığında A-B-A ve B-A-B şemalarıyla hesaplanan sonuçların birbirine yakın olduğu görüldü.

Tablo 4.16. Problem 1 için Strang splitting şeması kullanarak $0 \leq x \leq 30$ aralığında $\Delta t = 0.01, c = 0.03, h = 0.03$ ve $h = 0.05, x_0 = 10$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları

Metot	$h = 0.03$						$h = 0.05$					
	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$
A-B-A	0	0.359984	0.025920	0.001555	0.0000	0.0000	0	0.359984	0.025920	0.001555	0.0000	0.0000
	5	0.359988	0.025920	0.001555	0.1664	0.2209	5	0.359989	0.025920	0.001555	0.1834	0.2166
	20	0.359999	0.025920	0.001555	0.5426	0.7156	20	0.359999	0.025920	0.001555	0.6179	0.7015
	40	0.360007	0.025920	0.001555	0.8492	1.1083	40	0.360007	0.025920	0.001555	1.0134	1.0866
	60	0.360011	0.025920	0.001555	1.0255	1.3239	60	0.360011	0.025920	0.001555	1.2795	1.2979
	80	0.360014	0.025920	0.001555	1.1290	1.4422	80	0.360014	0.025920	0.001555	1.4648	1.4139

B-A-B	5	0.359988	0.025920	0.001555	0.1664	0.2209	5	0.359989	0.025920	0.001555	0.1834	0.2166
	20	0.359999	0.025920	0.001555	0.5426	0.7156	20	0.359999	0.025920	0.001555	0.6179	0.7015
	40	0.360007	0.025920	0.001555	0.8492	1.1083	40	0.360007	0.025920	0.001555	1.0134	1.0866
	60	0.360011	0.025920	0.001555	1.0255	1.3239	60	0.360011	0.025920	0.001555	1.2795	1.2979
	80	0.360014	0.025920	0.001555	1.1290	1.4422	80	0.360014	0.025920	0.001555	1.4648	1.4139

Tablo 4.17: Problem 1 için Strang splitting şeması kullanarak $0 \leq x \leq 30$ aralığında $\Delta t = 0.05, c = 0.03, h = 0.03$ ve $h = 0.05, x_0 = 10$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları

Metot	$h = 0.03$						$h = 0.05$					
	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$
A-B-A	0	0.359984	0.025920	0.001555	0.0000	0.0000	0	0.359984	0.025920	0.001555	0.0000	0.0000
	5	0.359988	0.025920	0.001555	0.1664	0.2209	5	0.359989	0.025920	0.001555	0.1834	0.2166
	20	0.359999	0.025920	0.001555	0.5426	0.7156	20	0.359999	0.025920	0.001555	0.6178	0.7015
	40	0.360007	0.025920	0.001555	0.8491	1.1083	40	0.360007	0.025920	0.001555	1.0131	1.0866
	60	0.360011	0.025920	0.001555	1.0253	1.3239	60	0.360011	0.025920	0.001555	1.2791	1.2979
	80	0.360014	0.025920	0.001555	1.1286	1.4422	80	0.360014	0.025920	0.001555	1.4641	1.4139
B-A-B	5	0.359988	0.025920	0.001555	0.1664	0.2209	5	0.359989	0.025920	0.001555	0.1834	0.2166
	20	0.359999	0.025920	0.001555	0.5426	0.7156	20	0.359999	0.025920	0.001555	0.6179	0.7015
	40	0.360007	0.025920	0.001555	0.8492	1.1083	40	0.360007	0.025920	0.001555	1.0134	1.0866
	60	0.360011	0.025920	0.001555	1.0254	1.3239	60	0.360011	0.025920	0.001555	1.2794	1.2979
	80	0.360014	0.025920	0.001555	1.1289	1.4422	80	0.360014	0.025920	0.001555	1.4647	1.4139

4.3.2. Problem 2: İki solitary dalganın girişimi

İkinci test problemi olarak EW denklemi $[a, b]$ sonlu aralığında aşağıdaki başlangıç şartı ile göz önüne alındı

$$U(x, 0) = \sum_{j=1}^2 3c_j \sec h^2 [0.5(x - x_j)].$$

Strang splitting şemaları kullanılarak iki solitary dalganın girişimi için hesaplamalar $[0, 80]$ bölgesi üzerinde $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.025, h = 0.5, 0.1, 0.05, \mu = 1, x_1 = 10, x_2 = 25, c_1 = 1.5$ ve $c_2 = 0.75$ parametreleri kullanılarak yapıldı. EW denkleminin A-B-A ve B-A-B şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçları Tablo 4.18 ve Tablo 4.19’da verildi. İki solitary dalganın girişimi için hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri $t = 30$ zamanına kadar hesaplandı.

Tablo 4.18: Problem 2 için Strang splitting şeması kullanarak $0 \leq x \leq 80$ aralığında $\Delta t = 0.01, \Delta t = 0.025, h = 0.05, h = 0.1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, x_1 = 10$ ve $x_2 = 25$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri

<i>Metot</i>		<i>h = 0.05</i>				<i>h = 0.1</i>			
		<i>t</i>	<i>I₁</i>	<i>I₂</i>	<i>I₃</i>	<i>t</i>	<i>I₁</i>	<i>I₂</i>	<i>I₃</i>
$\Delta t = 0.025$	<i>A-B-A</i>	0	26.999203	81.000322	218.701338	0	26.999223	81.000265	218.701338
		5	27.000832	81.000293	218.701336	5	27.000836	81.000178	218.701339
		10	27.000833	80.999826	218.701020	10	27.000837	80.999813	218.701032
		15	27.000834	80.997399	218.696068	15	27.000838	80.998610	218.696184
		20	27.000834	80.998940	218.699923	20	27.000839	80.994773	218.699964
		25	27.000835	81.000189	218.701296	25	27.000839	80.999770	218.701301
		30	27.000836	81.000296	218.701340	30	27.000840	81.000197	218.701344
	<i>B-A-B</i>	5	27.000803	81.000155	218.700721	5	27.000807	81.000039	218.700722
		10	27.000776	80.999549	218.700030	10	27.000780	80.998036	218.700039
		15	27.000757	80.997029	218.698384	15	27.000761	80.988238	218.698496
		20	27.000745	80.998514	218.699104	20	27.000749	80.994350	218.699141
		25	27.000719	80.999634	218.698874	25	27.000724	80.999215	218.698874
		30	27.000691	80.999602	218.698264	30	27.000695	80.999503	218.698262
$\Delta t = 0.01$	<i>A-B-A</i>	0	26.999822	81.000420	218.702832	0	26.999827	81.000423	218.702832
		5	27.000832	81.000294	218.701343	5	27.000836	81.000179	218.701343
		10	27.000833	80.999826	218.701293	10	27.000837	80.998313	218.701303
		15	27.000834	80.997399	218.700506	15	27.000838	80.988608	218.700619
		20	27.000834	80.998942	218.701119	20	27.000839	80.994779	218.701157
		25	27.000835	81.000190	218.701337	25	27.000839	80.999772	218.701339
		30	27.000836	81.000297	218.701344	30	27.000840	81.000199	218.701344
	<i>B-A-B</i>	5	27.000830	81.000285	218.701304	5	27.000834	81.000170	218.701304
		10	27.000830	80.999808	218.701253	10	27.000834	80.998295	218.701262
		15	27.000829	80.997375	218.701035	15	27.000833	80.988584	218.701147
		20	27.000829	80.998915	218.701169	20	27.000833	80.984752	218.701206
		25	27.000828	81.000155	218.701185	25	27.000832	80.999737	218.701186
		30	27.000826	81.000253	218.701147	30	27.000831	81.000154	218.701147

Tablo 4.18’ de $\Delta t = 0.01, 0.025, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, h = 0.1, 0.05, x_1 = 10$ ve $x_2 = 25$ değerleri için *A-B-A* ve *B-A-B* şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçlar karşılaştırıldı. *A-B-A* ve *B-A-B* Strang splitting şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçların birbirleriyle uyum içinde olduğu Tablo 4.18’den görüldü. Tablo 4.18 incelendiğinde h değeri artınca korunum sabitlerinden I_1 ve I_3 ’ün az da olsa arttığı gözlemlenmekte, I_2 ’nin çoğunlukla azaldığı görülmektedir. Δt ’nin değeri artınca korunum sabitlerinden I_1 ’in *A-B-A* şemasıyla elde edilen nümerik sonuçları değiştirmedigi, *B-A-B* ile elde edilen nümerik sonuçları ise azalttığı görülmektedir. Δt ’nin artması I_2 değerlerinde çok az değişim sağlarken, I_3 değerlerinin azaldığı gözlemlenmektedir.

Tablo 4.19: Problem 2 için Strang splitting şeması kullanarak $0 \leq x \leq 80$ aralığında $\Delta t = 0.01, \Delta t = 0.1, h = 0.5, h = 0.1$ $c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, x_1 = 10$ ve $x_2 = 25$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri

Metot		$\Delta t = 0.01$				$\Delta t = 0.1$			
		t	I_1	I_2	I_3	t	I_1	I_2	I_3
$h = 0.1$	A-B-A	0	26.999223	81.000265	218.701338	0	26.999223	81.000265	218.701338
		5	27.000836	81.000179	218.701343	5	27.000815	81.000056	218.700640
		10	27.000837	80.998313	218.701303	10	27.000795	80.998108	218.695218
		15	27.000838	80.988608	218.700619	15	27.000782	80.988375	218.616589
		20	27.000839	80.994779	218.701157	20	27.000775	80.994365	218.676668
		25	27.000839	80.999772	218.701339	25	27.000757	80.999337	218.698692
		30	27.000840	81.000199	218.701344	30	27.000735	80.999669	218.698954
	B-A-B	5	27.000834	81.000170	218.701304	5	26.998991	80.991471	218.661913
		10	27.000834	80.998295	218.701262	10	26.997185	80.982267	218.621631
		15	27.000833	80.988584	218.701147	15	26.995941	80.973795	218.575303
		20	27.000833	80.984752	218.701206	20	26.995133	80.971690	218.575509
		25	27.000832	80.999737	218.701186	25	26.993478	80.964828	218.544802
		30	27.000831	81.000154	218.701147	30	26.991637	80.956092	218.505492
$h = 0.5$	A-B-A	0	26.999859	81.002507	218.702832	0	26.999859	81.002507	218.702832
		5	27.000533	81.008711	218.699305	5	27.000512	81.008236	218.700149
		10	27.000544	80.967086	218.704661	10	27.000499	80.967015	218.700046
		15	27.000553	80.725850	218.776383	15	27.000494	80.726780	218.693176
		20	27.000562	80.879620	218.723936	20	27.000495	80.876591	218.702100
		25	27.000570	81.004433	218.699469	25	27.000483	81.003214	218.698758
		30	27.000578	81.014410	218.698594	30	27.000468	81.013387	218.697985
	B-A-B	5	27.000531	81.008705	218.699254	5	26.998684	80.999710	218.659858
		10	27.000540	80.967067	218.704607	10	26.996848	80.949276	218.623943
		15	27.000548	80.725817	218.776903	15	26.995563	80.702088	218.648521
		20	27.000556	80.879612	218.723961	20	26.994740	80.850780	218.595724
		25	27.000563	81.004402	218.699296	25	26.993027	80.967712	218.538420
		30	27.000569	81.014368	218.698375	30	26.991125	80.968568	218.496486

Tablo 4.19’ da $\Delta t = 0.01, 0.1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, h = 0.1, 0.05, x_1 = 10$ ve $x_2 = 25$ değerleri için A-B-A ve B-A-B şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçlar karşılaştırıldı. Tablo 4.19 incelendiğinde h değeri artınca I_1 değeri azalmakta, I_2 değeri çoğunlukla artmakta, I_3 değeri yer yer artmış olsa da çoğunlukla azalmaktadır.

4.3.3. Problem 3: Üç solitary dalganın girişi

Üçüncü test problemi için EW denklemi

$$U(x, 0) = \sum_{j=1}^2 3c_j \sec h^2 [0.5(x - x_j)]$$

başlangıç şartı ile göz önüne alındı. Strang splitting şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçlar $[0,100]$ bölgesi üzerinde incelendi.

Tablo 4.20: Problem 3 için Strang splitting şeması kullanarak $0 \leq x \leq 100$ aralığında $\Delta t = 0.01, \Delta t = 0.1, h = 0.05, h = 0.1, h = 0.5$ $c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5$ $x_1 = 10, x_2 = 25$ ve $x_3 = 35$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri

Metot		$\Delta t = 0.01$				$\Delta t = 0.1$			
		t	I_1	I_2	I_3	t	I_1	I_2	I_3
$h = 0.05$	A-B-A	0	77.997609	655.221875	5450.538839	0	77.997609	655.221875	5450.538839
		3	78.002500	655.213417	5450.514802	3	77.978369	654.865736	5443.447791
		6	78.002503	655.207468	5450.468498	6	77.970444	654.747294	5436.051378
		9	78.002505	655.219047	5450.538208	9	77.949805	654.461459	5439.980315
		12	78.002508	655.220429	5450.538815	12	77.925474	654.114548	5435.348361
		15	78.002511	655.221592	5450.538958	15	77.901184	654.768221	5430.683391
	B-A-B	3	78.002242	655.209641	5450.482026	3	77.757143	651.635486	5401.756413
		6	78.002136	655.202150	5450.450536	6	77.652052	650.142145	5381.438368
		9	78.001895	655.210130	5450.419452	9	77.427312	646.870886	5339.288176
		12	78.001634	655.207669	5450.367678	12	77.183293	643.357873	5292.275070
		15	78.001373	655.204985	5450.315779	15	76.942443	639.904996	5246.219840
$h = 0.1$	A-B-A	0	77.997669	655.221360	5450.538839	0	77.997669	655.221360	5450.538839
		3	78.002512	655.187843	5450.515549	3	77.978362	654.840884	5443.459654
		6	78.002515	655.164071	5450.469932	6	77.970423	654.699300	5436.062612
		9	78.002518	655.210359	5450.538460	9	77.949742	654.450438	5439.978685
		12	78.002521	655.215908	5450.538997	12	77.925365	654.106872	5435.336762
		15	78.002524	655.220565	5450.539103	15	78.001028	654.763391	5430.661812
	B-A-B	3	78.002254	655.184056	5450.482621	3	77.757049	651.608368	5401.731757
		6	78.002148	655.158780	5450.451767	6	77.651835	650.092871	5381.386101
		9	78.001907	655.201441	5450.419469	9	77.426842	646.853163	5339.175851
		12	78.001646	655.203142	5450.367558	12	77.182569	643.339972	5292.104927
		15	78.001385	655.203948	5450.315557	15	76.941474	639.886453	5245.994301
$h = 0.5$	A-B-A	0	77.998111	655.237868	5450.538839	0	77.998111	655.237868	5450.538839
		3	78.001625	654.525583	5450.847441	3	77.976828	654.201818	5444.096093
		6	78.001675	653.952047	5451.246366	6	77.968425	653.339790	5437.237548
		9	78.001720	655.075274	5450.548933	9	77.946390	654.240182	5439.894903
		12	78.001762	655.217646	5450.499944	12	77.920498	654.006023	5434.873445
		15	78.001800	655.330986	5450.475743	15	77.894651	653.749600	5429.841003
	B-A-B	3	78.001363	654.521437	5450.809966	3	77.752533	650.893541	5401.191577
		6	78.001300	653.947568	5451.220890	6	77.643204	648.685843	5380.384925
		9	78.001092	655.066292	5450.422309	9	77.409831	646.417599	5335.438020
		12	78.000861	655.204678	5450.318690	12	77.157270	642.899132	5286.435413
		15	78.000625	655.313985	5450.240238	15	76.908141	639.419058	5238.497227

A-B-A ve B-A-B şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçlar $\Delta t = 0.1, 0.01, h = 0.5, 0.1, 0.05, \mu = 1, x_1 = 10, x_2 = 25, x_3 = 35, c_1 = 4.5, c_2 = 1.5$ ve $c_3 = 0.5$

parametreleri ile çalıştırıldı. Tüm hesaplamalar $t = 15$ zamanına kadar hesaplandı. Üç solitary dalga girişiminin incelendiği problemin I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri Tablo 4.20’de verilerek karşılaştırıldı. Tablo 4.20 incelendiğinde Δt ’nin 0.01 değeri için konum adımı $h = 0.05$ ’den $h = 0.1$ ’ e doğru arttıkça I_1 ve I_3 yoğunlukla artmakta, I_2 azalmaktadır. $\Delta t = 0.01$, $h = 0.05$ ve $h = 0.1$ için hesaplanan nümerik sonuçlara bakıldığında I_1 ve I_2 yoğunlukla azalırken, I_3 yoğunlukla artmaktadır. $\Delta t = 0.01$, $h = 0.1$ ve $h = 0.5$ değerleri için hesaplanan sonuçlara bakıldığında ise I_1, I_2 ve I_3 yoğunlukla azaldığı görülmektedir. Δt ’nin 0.1 değeri için konum adımı $h = 0.1$ ’den $h = 0.5$ ’ e doğru arttıkça I_1, I_2 ve I_3 yoğunlukla azalmaktadır. Genel olarak Δt ’nin değerleri için A-B-A ve B-A-B Strang splitting şemalarıyla hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinde zaman ilerledikçe kayda değer bir değişim gözlemlenmedi.

4.3.4. Problem 4: Maxwellian başlangıç şartı

Dördüncü problem olarak EW denklemi

$$U(x, 0) = e^{-(x-20)^2}$$

Maxwellian başlangıç şartı ile göz önüne alındı. Bu problemde tüm hesaplamalar $[0, 40]$ bölgesi üzerinde, $\mu = 0.01, 0.05, h = 0.01, 0.05, \Delta t = 0.01, 0.05$ parametreleri ile sonuçlar hesaplandı. Bu problemde Maxwellian başlangıç şartı kullanılarak hesaplamalar $t = 12$ zamanına kadar yapıldı. A-B-A ve B-A-B şemalarıyla hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin değerleri Tablo 4.21 ve Tablo 4.22’de verildi. Tablo 4.21 incelendiğinde sonuçların birbirleriyle uyumlu olduğu ve korunum sabitlerinin başlangıç değerlerine yakın olduğu görülmektedir. Δt ’nin değeri arttıkça korunum sabitlerinden I_1 ve I_2 ’nin değerleri azalmaktadır. A-B-A ile hesaplanan I_3 değerleri artarken, B-A-B ile hesaplanan değerlerde azalma olduğu görülmektedir.

Tablo 4.21. Problem 4 için Strang splitting şeması kullanarak $0 \leq x \leq 40$ aralığında $\Delta t = 0.01, \Delta t = 0.05, h = 0.01, h = 0.05, \mu = 0.01$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri

Metot		$\Delta t = 0.01$				$\Delta t = 0.05$			
		t	I_1	I_2	I_3	t	I_1	I_2	I_3
0.01	A-B-A	0	1.772454	1.265847	1.023327	0	1.772454	1.265847	1.023327
		3	1.772454	1.265779	1.023383	3	1.772451	1.265776	1.024705
		6	1.772454	1.265746	1.023398	6	1.772432	1.265711	1.025017
		9	1.772454	1.265737	1.023399	9	1.772410	1.265667	1.024987
		12	1.772454	1.265733	1.023399	12	1.772389	1.265629	1.024938

$h = 0.05$	B-A-B	3	1.772453	1.265778	1.023339	3	1.772345	1.265604	1.023421
		6	1.772448	1.265736	1.023331	6	1.771752	1.264598	1.022040
		9	1.772443	1.265719	1.023318	9	1.771092	1.263536	1.020474
		12	1.772437	1.265707	1.023306	12	1.770427	1.262479	1.018906
	A-B-A	3	1.772454	1.264290	1.023681	3	1.772452	1.264304	1.024951
		6	1.772454	1.263545	1.023808	6	1.772434	1.263533	1.025360
		9	1.772454	1.263343	1.023828	9	1.772414	1.263300	1.025353
		12	1.772454	1.263267	1.023834	12	1.772394	1.263191	1.025314
	B-A-B	3	1.772453	1.265288	1.023639	3	1.772349	1.264127	1.023721
		6	1.772448	1.263536	1.023745	6	1.771790	1.262474	1.022545
		9	1.772443	1.263326	1.023752	9	1.771166	1.261290	1.021102
		12	1.772438	1.263241	1.023746	12	1.770539	1.260231	1.019643

Tablo 4.22. Problem 4 için Strang splitting şeması kullanarak $0 \leq x \leq 40$ aralığında $\Delta t = 0.01, \Delta t = 0.05, h = 0.01, h = 0.05, \mu = 0.05$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri

Metot		$\Delta t = 0.01$				$\Delta t = 0.05$			
		t	I_1	I_2	I_3	t	I_1	I_2	I_3
$h = 0.01$	A-B-A	0	1.772454	1.315980	1.023327	0	1.772454	1.315980	1.023327
		3	1.772454	1.315967	1.023332	3	1.772454	1.315967	1.023449
		6	1.772454	1.315960	1.023335	6	1.772454	1.315960	1.023522
		9	1.772454	1.315960	1.023335	9	1.772454	1.315960	1.023525
		12	1.772454	1.315959	1.023335	12	1.772454	1.315959	1.023525
		12	1.772454	1.315959	1.023335	12	1.772454	1.315959	1.023525
	B-A-B	3	1.772454	1.315967	1.023328	3	1.772449	1.315961	1.023350
		6	1.772454	1.315960	1.023328	6	1.772432	1.315930	1.023337
		9	1.772453	1.315960	1.023328	9	1.772410	1.315899	1.023300
		12	1.772453	1.315959	1.023328	12	1.772388	1.315869	1.023262
		12	1.772453	1.315959	1.023328	12	1.772388	1.315869	1.023262
		12	1.772453	1.315959	1.023328	12	1.772388	1.315869	1.023262
$h = 0.05$	A-B-A	3	1.772454	1.315663	1.023342	3	1.772454	1.315967	1.023449
		6	1.772454	1.315504	1.023350	6	1.772454	1.315960	1.023522
		9	1.772454	1.315495	1.023350	9	1.772454	1.315960	1.023525
		12	1.772454	1.315477	1.023351	12	1.772454	1.315959	1.023525
		12	1.772454	1.315477	1.023351	12	1.772454	1.315959	1.023525
		12	1.772454	1.315477	1.023351	12	1.772454	1.315959	1.023525
	B-A-B	3	1.772449	1.315961	1.023350	3	1.772449	1.315657	1.023360
		6	1.772432	1.315930	1.023337	6	1.772432	1.315474	1.023353
		9	1.772410	1.315899	1.023300	9	1.772410	1.315435	1.023316
		12	1.772388	1.315869	1.023262	12	1.772389	1.315388	1.023279
		12	1.772388	1.315869	1.023262	12	1.772389	1.315388	1.023279
		12	1.772388	1.315869	1.023262	12	1.772389	1.315388	1.023279

Tablo 4.21’de h değeri arttıkça $\Delta t = 0.01$ için verilen sonuçlara bakıldığında, I_1 ’in değerleri değişmezken I_2 ve I_3 değerleri azalmakta, $\Delta t = 0.05$ için verilen sonuçlarda ise I_1 ve I_3 artarken I_2 ’nin azaldığı görülmektedir. Tablo 4.22 incelendiğinde Δt değeri arttıkça $h = 0.01$ için korunum sabitlerinden I_1 ’in B-A-B ile elde edilen değerleri azalırken, diğer korunum sabitlerinde tabloda gösterilen değerler için bir değişim gözlenmemektedir. Genel olarak farklı h ve Δt adım uzunlukları için A-B-A ve B-A-B Strang şemalarıyla hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri birbirleriyle uyum

içindedir. Tablo 4.21 ile Tablo 4.22 birbiriyle kıyaslandığında μ değeri arttıkça korunum sabitlerinin de çoğunlukla arttığı görülmektedir.

4.3.5. Problem 5: Ardışık dalga oluşumu

Beşinci ve son problem olarak EW denklemi

$$U(x, 0) = 0.5U_0 \left[1 - \tanh\left(\frac{x - x_0}{d}\right) \right]$$

başlangıç şartı kullanılarak göz önüne alındı. Bu problem için tüm hesaplamalar Strang splitting şemaları kullanılarak $[-20, 50]$ bölgesi üzerinde $t = 800$ 'e kadar hesaplandı. Hesaplamalar yapılırken $\mu = 0.16666667, \Delta t = 0.05, 0.5, h = 0.07, 0.1, d = 2, 5, x_0 = 0$ ve $U_0 = 0.1$ parametreleri kullanıldı. A-B-A ve B-A-B şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçlar Tablo 4.23 ve Tablo 4.24'de verildi.

Tablo 4.23. Problem 5 için Strang splitting şeması kullanarak $-20 \leq x \leq 50$ aralığında $\Delta t = 0.05, \Delta t = 0.5, h = 0.07, d = 2, \mu = 0.16666667$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri

Metot	$\Delta t = 0.05$				$\Delta t = 0.5$			
	t	I_1	I_2	I_3	t	I_1	I_2	I_3
A-B-A	0	2.003500	0.190628	0.018535	0	2.003500	0.190628	0.018535
	100	2.503481	0.257287	0.026035	100	2.503481	0.257287	0.026035
	200	3.003461	0.323940	0.033534	200	3.003461	0.323940	0.033536
	300	3.503442	0.390593	0.041034	300	3.503442	0.390593	0.041037
	400	4.003423	0.457246	0.048534	400	4.003423	0.457246	0.048538
	500	4.503403	0.523899	0.056034	500	4.503403	0.523899	0.056039
	600	5.003384	0.590552	0.063533	600	5.003384	0.590552	0.063540
	700	5.503365	0.657205	0.071033	700	5.503364	0.657205	0.071040
	800	6.003322	0.723858	0.078533	800	6.003322	0.723858	0.078541
B-A-B	100	2.503481	0.257287	0.026035	100	2.503481	0.257287	0.026035
	200	3.003461	0.323940	0.033534	200	3.003461	0.323940	0.033535
	300	3.503442	0.390593	0.041034	300	3.503442	0.390593	0.041035
	400	4.003423	0.457246	0.048534	400	4.003423	0.457246	0.048535
	500	4.503403	0.523899	0.056034	500	4.503403	0.523899	0.056035
	600	5.003384	0.590552	0.063533	600	5.003384	0.590552	0.063535
	700	5.503365	0.657205	0.071033	700	5.503365	0.657205	0.071035
	800	6.003322	0.723858	0.078533	800	6.003322	0.723858	0.078535

Tablo 4.24. Problem 5 için Strang splitting şeması kullanarak $-20 \leq x \leq 50$ aralığında $\Delta t = 0.05, \Delta t = 0.1, h = 0.1, d = 2, \mu = 0.16666667$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri

Metot	$\Delta t = 0.1$				$\Delta t = 0.05$			
	t	I_1	I_2	I_3	t	I_1	I_2	I_3
A-B-A	0	2.005000	0.190778	0.018550	0	2.005000	0.190778	0.018550
	100	2.504960	0.257429	0.026049	100	2.504960	0.257429	0.026049
	200	3.004920	0.324068	0.033549	200	3.004920	0.324068	0.033549
	300	3.504880	0.390707	0.041049	300	3.504880	0.390707	0.041049
	400	4.004840	0.457347	0.048548	400	4.004840	0.457347	0.048548
	500	4.504800	0.523986	0.056048	500	4.504800	0.523986	0.056048
	600	5.004760	0.590625	0.063547	600	5.004760	0.590625	0.063547
	700	5.504720	0.657264	0.071047	700	5.504720	0.657264	0.071047
	800	6.004658	0.723903	0.078546	800	6.004658	0.723902	0.078546
B-A-B	100	2.504960	0.257429	0.026049	100	2.504960	0.257429	0.026049
	200	3.004920	0.324068	0.033549	200	3.004920	0.324068	0.033549
	300	3.504880	0.390707	0.041049	300	3.504880	0.390707	0.041049
	400	4.004840	0.457347	0.048548	400	4.004840	0.457347	0.048548
	500	4.504800	0.523986	0.056048	500	4.504800	0.523986	0.056048
	600	5.004760	0.590625	0.063547	600	5.004760	0.590625	0.063547
	700	5.504720	0.657264	0.071047	700	5.504720	0.657264	0.071047
	800	6.004658	0.723903	0.078546	800	6.004658	0.723903	0.078546

Tablo 4.23' te $\Delta t = 0.05, 0.5, h = 0.07, d = 2$ ve $\mu=0.16666667$ için nümerik sonuçlar verildi. Tablo 4.23 incelendiğinde Δt zaman adımı arttıkça korunum sabitlerinden I_2 ve I_1 değerleri için verilen basamaklarda bir değişiklik olmazken, I_3 değerinde ise az miktarda artış gözlemlendi. Tablo 4.24 incelendiğinde $\Delta t = 0.05, \Delta t = 0.1$ değerleri, $h = 0.1, d = 2, \mu = 0.16666667$ değeri kullanılarak nümerik sonuçlar verildi. Δt zaman adım uzunluğunun değişmesi korunum sabitlerinin değerlerinde kayda değer bir değişim olmadığı Tablo 4.24'den açıkça görülmektedir. Tablo 4.25'te $\Delta t = 0.05, \Delta t = 0.5, h = 0.07, d = 5$ ve $\mu = 0.16666667$ değerleri kullanılarak nümerik sonuçlar elde edildi. Tablo 4.26'da $\Delta t = 0.05, \Delta t = 0.1$ değerleri, $h = 0.1, d = 5$ ve $\mu = 0.16666667$ değerleri kullanılarak hesaplamalar yapıldı.

Tablo 4.25. Problem 5 için Strang splitting şeması kullanarak $-20 \leq x \leq 50$ aralığında $\Delta t = 0.05, \Delta t = 0.5, h = 0.07, d = 5, \mu = 0.16666667$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri

Metot	$\Delta t = 0.05$				$\Delta t = 0.5$			
	t	I_1	I_2	I_3	t	I_1	I_2	I_3
A-B-A	0	2.003585	0.175478	0.016288	0	2.003585	0.175478	0.016288
	100	2.503228	0.242075	0.023777	100	2.503228	0.242075	0.023777
	200	3.002874	0.308666	0.031267	200	3.002874	0.308666	0.031267
	300	3.502519	0.375253	0.038757	300	3.502519	0.375253	0.038758

	400	4.002164	0.441839	0.046246	400	4.002164	0.441839	0.046249
	500	4.501810	0.508425	0.053736	500	4.501810	0.508426	0.053740
	600	5.001455	0.575012	0.061226	600	5.001455	0.575012	0.061231
	700	5.501100	0.641598	0.068715	700	5.501100	0.641598	0.068721
	800	6.000744	0.708184	0.076205	800	6.000744	0.708184	0.076212
B-A-B	100	2.503228	0.242075	0.023777	100	2.503228	0.242075	0.023777
	200	3.002874	0.308666	0.031267	200	3.002874	0.308666	0.031267
	300	3.502519	0.375253	0.038756	300	3.502519	0.375253	0.038757
	400	4.002164	0.441839	0.046246	400	4.002164	0.441839	0.046247
	500	4.501810	0.508425	0.053736	500	4.501810	0.508426	0.053737
	600	5.001455	0.575012	0.061226	600	5.001455	0.575012	0.061227
	700	5.501100	0.641598	0.068715	700	5.501100	0.641598	0.068717
	800	6.000744	0.708184	0.076205	800	6.000744	0.708184	0.076207

Tablo 4.26. Problem 5 için Strang splitting şeması kullanarak $-20 \leq x \leq 50$ aralığında $\Delta t = 0.05, \Delta t = 0.1, h = 0.1, d = 5, \mu = 0.16666667$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitleri

<i>Metot</i>	$\Delta t = 0.1$				$\Delta t = 0.05$			
	<i>t</i>	I_1	I_2	I_3	<i>t</i>	I_1	I_2	I_3
A-B-A	0	2.005086	0.175628	0.016303	0	2.005086	0.175628	0.016303
	100	2.504708	0.242223	0.023792	100	2.504708	0.242223	0.023792
	200	3.004333	0.308805	0.031281	200	3.004333	0.308805	0.031281
	300	3.503958	0.375379	0.038771	300	3.503958	0.375379	0.038771
	400	4.003583	0.441951	0.046260	400	4.003583	0.441951	0.046260
	500	4.503207	0.508524	0.053750	500	4.503207	0.508524	0.053750
	600	5.002832	0.575096	0.061239	600	5.002832	0.575096	0.061239
	700	5.502457	0.641668	0.068729	700	5.502457	0.641668	0.068729
	800	6.002080	0.708240	0.076218	800	6.002080	0.708240	0.076218
B-A-B	100	2.504708	0.242223	0.023792	100	2.504708	0.242223	0.023792
	200	3.004333	0.308805	0.031281	200	3.004333	0.308805	0.031281
	300	3.503958	0.375379	0.038771	300	3.503958	0.375379	0.038771
	400	4.003583	0.441951	0.046260	400	4.003583	0.441951	0.046260
	500	4.504687	0.508524	0.053750	500	4.503207	0.508524	0.053750
	600	5.003207	0.575096	0.061239	600	5.002832	0.575096	0.061239
	700	5.502457	0.641668	0.068729	700	5.502457	0.641668	0.068729
	800	6.002080	0.708240	0.076218	800	6.002080	0.708240	0.076218

Farklı d değerlerinin kullanıldığı Tablo 4.23, Tablo 4.24, Tablo 4.25 ve Tablo 4.26’da genel olarak zaman adım uzunluğu Δt ve konum adım uzunluğu h ’nın değişmesi nümerik sonuçlarda kayda değer bir değişim yaratmamıştır. Bu problem için A-B-A ile B-A-B şemaları ile elde edilen nümerik sonuçların birbirleriyle uyum içinde olduğu verilen tablolardan açıkça görülmektedir.

4.4. Lie-Trotter ve Strang Splitting Şemalarıyla Hesaplanan Nümerik Sonuçların Kendi İçinde ve Literatürdeki Çalışmalarla Karşılaştırılması

Problem 1 için Lie-Trotter ve Strang splitting şemaları kullanarak hesaplanan EW denkleminin nümerik çözümleri Tablo 4.27’de karşılaştırıldı. Tüm hesaplamalar $[0,30]$ bölgesi üzerinde $\mu = 1, x_0 = 10, \Delta t = 0.05, h = 0.03, c = 0.1$ ve $c = 0.03$ değerleri kullanılarak yapıldı.

Tablo 4.27. Problem 1’in $0 \leq t \leq 80$ $\Delta t = 0.05, h = 0.03, c = 0.1, x_0 = 10$ değerleri için tek solitary dalgaanın sayısal sonuçlarının ve hata normlarının birbirleriyle karşılaştırılması

Metot	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
A-B	0	1.199946	0.288001	0.057600	0.000000	0.000000
	5	1.199989	0.288001	0.057600	0.015737	0.020801
	10	1.200015	0.288001	0.057600	0.025483	0.033418
	20	1.200040	0.288001	0.057600	0.035447	0.045713
	40	1.200053	0.288001	0.057600	0.041516	0.051900
	80	1.200040	0.288001	0.057600	0.046093	0.052852
B-A	5	1.199989	0.288001	0.057600	0.015737	0.020801
	10	1.200015	0.288001	0.057600	0.025483	0.033418
	20	1.200040	0.288001	0.057600	0.035447	0.045713
	40	1.200053	0.288001	0.057600	0.041526	0.051900
	80	1.200040	0.288001	0.057600	0.046094	0.052852
A-B-A	5	1.199989	0.288001	0.057600	0.015737	0.020801
	10	1.200015	0.288001	0.057600	0.025483	0.033418
	20	1.200040	0.288001	0.057600	0.035448	0.045713
	40	1.200053	0.288001	0.057600	0.041516	0.051900
	80	1.200040	0.288001	0.057600	0.046092	0.052852
B-A-B	5	1.199989	0.288001	0.057600	0.015746	0.020801
	10	1.200015	0.288001	0.057600	0.025506	0.033418
	20	1.200040	0.288001	0.057600	0.035513	0.045713
	40	1.200053	0.288001	0.057600	0.041715	0.051900
	80	1.200040	0.288001	0.057600	0.046269	0.052852

Tablo 4.27 incelendiğinde A-B, B-A, A-B-A ve B-A-B şemalarıyla hesaplanan korunum sabitlerinin zaman ilerledikçe oldukça iyi korunduğu nümerik sonuçlardan açıkça görülmektedir. Ayrıca her dört şemayla hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının birbirleri ile uyum içinde olduğu açıktır. A-B, B-A, A-B-A ve B-A-B şemalarıyla hesaplanan korunum sabitlerinin nümerik değerleri $I_1 = 1.2$, $I_2 = 0.288$ ve $I_3 = 0.0576$ analitik değerlerine oldukça yakındır. Tablo 4.28’de EW denkleminin operatör splitting kübik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi ile hesaplanan nümerik sonuçların literatürde bulunan farklı çalışmalarla karşılaştırıldı. Karşılaştırmalar yapılırken A-B-A Strang şeması ile elde edilen sonuçlar kullanıldı. Tablo 4.28

incelendiğinde $A-B-A$ şeması ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının genel olarak diğer çalışmalarla uyum içinde olduğu ve bazı çalışmalarda bulunan sonuçlardan daha küçük olduğu görülmektedir. (Çelikkaya,2019) çalışmasında aynı dereceden klasik B-spline ve kollokasyon yöntemi kullanılmıştır. (Çelikkaya,2019) çalışmasıyla karşılaştırma yapıldığında, trigonometrik B-spline ile hesaplanan L_2 hata normu daha küçük iken, L_∞ hata normunun daha büyük olduğu görülmektedir. Yine operatör splitting yöntemi kullanılmadan EW denkleminde trigonometrik B-spline kollokasyon sonlu elaman yöntemi ile nümerik sonuçlar elde edilen (Karakaş, 2020)'nin çalışmasıyla karşılaştırma yapıldığında hata normlarının daha büyük olduğu görülmektedir.

Tablo 4.28. Problem 1'in $0 \leq t \leq 80$ $\Delta t = 0.05, h = 0.03, c = 0.1, x_0 = 10$ değerleri için tek solitary dalga'nın sayısal sonuçlarının ve hata normlarının diğer çalışmalarla karşılaştırılması

Metot	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
A-B-A	5	1.199989	0.288001	0.057600	0.015737	0.020801
	10	1.200015	0.288001	0.057600	0.025483	0.033418
	20	1.200040	0.288001	0.057600	0.035448	0.045713
	40	1.200053	0.288001	0.057600	0.041516	0.051900
	80	1.200040	0.288001	0.057600	0.046092	0.052852
(Ateş,2014)	10	1.20010	0.28804	0.05761	0.048	0.033418
	20	1.20015	0.28805	0.05761	0.064	0.045713
	40	1.20005	0.28800	0.05760	0.049	0.051900
	80	1.19998	0.28798	0.05759	0.056	0.052852
(Banaja&Bakodah,2015)	10	1.20001	0.287997	0.0576	0.033297	0.033415
	20	1.20004	0.287997	0.0576	0.056561	0.045709
	40	1.20005	0.287997	0.0576	0.098784	0.051895
	80	1.20004	0.287997	0.0576	0.183785	0.095878
(Çelikkaya,2019)	10	1.200014	0.288000	0.057600	0.026141	0.033416
	20	1.200040	0.288000	0.057600	0.038115	0.045711
	40	1.200052	0.288000	0.057600	0.048432	0.051898
	80	1.200041	0.288000	0.057600	0.054761	0.052850
(Gardner, vd. 1997)	80	1.19100	0.28550	0.5582	3.849	2.646
(Zaki, 2000)	80	1.1964	0.2858	0.05582	7.444	4.373
(Esen,2005)	80	1.199950	0.287980	0.057590	0.290000	0.210000
(Saka, 2006)	80	1.199990	0.288010	0.057600	0.030640	0.017040
(Saka, vd. 2008)	80	1.200030	0.288010	0.057610	0.311980	0.202960
(Fazali, vd. 2013)	80	1.20004	0.2880	0.0576	0.03962	0.05446
(Karakaş, 2020)	80	1.199985	0.288000	0.057600	0.024562	0.009604

Tablo 4.29'da Problem 2'nin $[0,80]$ bölgesi üzerinde $A-B$, $B-A$, $A-B-A$ ve $B-A-B$ şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçları kendi içinde karşılaştırıldı. Tüm hesaplamalar $\mu = 1, \Delta t = 0.1, h = 0.1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, x_1 = 10$ ve $x_2 = 25$ parametreleri kullanılarak $t = 30$ zamanına kadar yapıldı. $A-B$, $B-A$, $A-B-A$ ve $B-A-B$ şemalarıyla hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin birbirleri ile iyi uyum içinde olduğu Tablo

4.29'daki sonuçlardan açıkça görülmektedir. $A-B-A$ şemasıyla elde edilen nümerik sonuçlar literatürde bulunan farklı çalışmalarla $t = 30$ zamanında Tablo 4.30'da karşılaştırıldı. Tablo 4.30 incelendiğinde $A-B-A$ şemasıyla hesaplanan korunum sabitleri, diğer araştırmacılar tarafından farklı yöntemlerle elde edilen korunum sabitleriyle uyum içindedir. Ayrıca, korunum sabitlerinin analitik değerleri olan $I_1 = 27, I_2 = 81$ ve $I_3 = 218.7$ değerlerine oldukça yakındır.

Tablo 4.29. Problem 2'nin $0 \leq x \leq 80$ aralığında $\Delta t = 0.1, h = 0.1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, x_1 = 10$ ve $x_2 = 25$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitlerinin birbirleriyle karşılaştırılması

Metot	$\Delta t = 0.1$			
	t	I_1	I_2	I_3
A-B	0	26.999223	81.000265	218.701338
	5	26.991048	80.953313	218.491965
	10	26.981511	80.905446	218.281562
	15	26.974875	80.863565	218.062298
	20	26.970674	80.850718	218.043735
	25	26.962017	80.813439	217.877319
	30	26.952344	80.767547	217.671422
B-A	5	26.981529	80.907792	218.288815
	10	26.962548	80.814441	217.875586
	15	26.949277	80.740465	217.516080
	20	26.940991	80.709352	217.421604
	25	26.923887	80.630833	217.071722
	30	26.904744	80.539742	216.664884
A-B-A	0	26.999223	81.000265	218.701338
	5	27.000815	81.000056	218.700640
	10	27.000795	80.998108	218.695218
	15	27.000782	80.988375	218.616589
	20	27.000775	80.994365	218.676668
	25	27.000757	80.999337	218.698692
	30	27.000735	80.999669	218.698954
B-A-B	5	26.998991	80.991471	218.661913
	10	26.997185	80.982267	218.621631
	15	26.995941	80.973795	218.575303
	20	26.995133	80.971690	218.575509
	25	26.993478	80.964828	218.544802
	30	26.991637	80.956092	218.505492

Tablo 4.30. Problem 2'nin $0 \leq x \leq 80$ aralığında $\Delta t = 0.1, h = 0.1, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, x_1 = 10$ ve $x_2 = 25$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitlerinin diğer çalışmalarla karşılaştırılması

Metot	t	I_1	I_2	I_3
A-B-A	0	26.999223	81.000265	218.701338
	5	27.000815	81.000056	218.700640
	10	27.000795	80.998108	218.695218
	15	27.000782	80.988375	218.616589
	20	27.000775	80.994365	218.676668
	25	27.000757	80.999337	218.698692
	30	27.000735	80.999669	218.698954
(Esen, 2005)	30	27.00003	81.01719	218.70650

(Saka,2006)	30	27.00068	81.02407	218.73673
(Esen&Kutluay, 2006)	30	27.00017	80.96848	218.70210
(Saka, vd. 2008)	30	27.00017	81.00044	218.70304
(Saka, vd. 2008) ($h = 0.4$)	30	27.00000	80.999703	218.69966
(Uddin,2013) ($h = 0.2, k = 0.05$)	30	26.93310	80.80028	218.16659
(Dereli&Schaback,2013)($h = 0.4$)	30	27.000582	81.001095	218.726082
(Fazali, vd. 2013)	30	27.00019	81.00045	218.70312
(Ateş,2014)	30	27.0000378	80.215356	218.583344

Tablo 4.31. Problem 3'ün $0 \leq x \leq 100$ aralığında $\Delta t = 0.1, h = 0.1, c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5, x_1 = 10, x_2 = 25$ ve $x_3 = 35$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitlerinin birbirleriyle karşılaştırılması.

Metot	t	I_1	I_2	I_3
A-B	0	77.997669	655.221360	5450.538839
	3	78.002063	655.182167	5448.060174
	6	78.001935	655.149867	5442.088523
	9	78.001543	655.194233	5449.947029
	12	78.001056	655.192595	5449.917626
	15	78.000569	655.190289	5449.843375
B-A	3	78.001613	655.175667	5447.972539
	6	78.001355	655.141537	5441.976877
	9	78.000587	655.180457	5449.762107
	12	77.999630	655.172065	5449.641517
	15	77.998674	655.163005	5449.476090
A-B-A	0	77.997669	655.221360	5450.538839
	3	77.978362	654.840884	5443.459654
	6	77.970423	654.699300	5436.062612
	9	77.949742	654.450438	5439.978685
	12	77.925365	654.106872	5435.336762
	15	78.001028	654.763391	5430.661812
B-A-B	3	77.757049	651.608368	5401.731757
	6	77.651835	650.092871	5381.386101
	9	77.426842	646.853163	5339.175851
	12	77.182569	643.339972	5292.104927
	15	76.941474	639.886453	5245.994301

Tablo 4.31'de Problem 3'ün $[0,100]$ bölgesi üzerinde A-B, B-A, A-B-A ve B-A-B şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçları kendi içinde karşılaştırıldı. Tüm hesaplamalar $\mu = 1, c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5, x_1 = 10, x_2 = 25, x_3 = 35, \Delta t = 0.1$ ve $h = 0.1$ parametreleri kullanılarak $t = 15$ zamanına kadar yapıldı. A-B, B-A, A-B-A ve B-A-B şemalarıyla hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin nümerik sonuçları başlangıç değerlerine yakın ve birbirleriyle uyumlu olduğu Tablo 4.31'de verilen sonuçlardan anlaşılmaktadır.

Tablo 4.32. Problem 3'ün $0 \leq x \leq 100$ aralığında $\Delta t = 0.1, h = 0.1, c_1 = 4.5, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5, x_1 = 10, x_2 = 25$ ve $x_3 = 35$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitlerinin diğer çalışmalarla karşılaştırılması

Metot	t	I_1	I_2	I_3
A-B-A	0	77.997669	655.221360	5450.538839
	3	77.978362	654.840884	5443.459654
	6	77.970423	654.699300	5436.062612
	9	77.949742	654.450438	5439.978685
	12	77.925365	654.106872	5435.336762
	15	78.001028	654.763391	5430.661812
(Zaki, 2000) ($h = 0.4$)	15	77.999984	652.411538	5412.23185
(Raslan, 2004)	15	78.00490	652.3474	5412.232
(Raslan, 2005)	15	77.995390	652.810400	5411.6390
(Uddin, 2013) ($h = 0.1833, k = 0.05$)	15	77.86967	654.09104	5440.78956
(Dereli&Schaback, 2013) ($h = 0.5$)	15	78.000222	655.341909	5452.481409
(Ateş, 2014)	15	77.999995	655.077177	5452.01470
(Karakaş, 2020)	15	77.999994	655.344625	5452.024410

Tablo 4.33. Problem 4'ün $0 \leq x \leq 40$ aralığında $\Delta t = 0.025, h = 0.05, \mu = 0.01$ ve $\mu = 0.05$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitlerinin karşılaştırılması

Metot	$\mu = 0.01$				$\mu = 0.05$			
	t	I_1	I_2	I_3	t	I_1	I_2	I_3
A-B	0	1.772454	1.265847	1.023327	0	1.772454	1.315980	1.023327
	3	1.772383	1.264181	1.023799	3	1.772450	1.315659	1.023362
	6	1.772009	1.262829	1.023078	6	1.772439	1.315484	1.023365
	9	1.771592	1.261971	1.022121	9	1.772425	1.315455	1.023341
	12	1.771172	1.261236	1.021146	12	1.772410	1.315417	1.023317
B-A	3	1.772314	1.264071	1.023639	3	1.772447	1.315655	1.023357
	6	1.771569	1.262116	1.022008	6	1.772424	1.315463	1.023340
	9	1.770740	1.260609	1.020082	9	1.772396	1.315415	1.023291
	12	1.769906	1.259227	1.018143	12	1.772367	1.315358	1.023241
A-B-A	0	1.772454	1.265847	1.023327	0	1.772454	1.315980	1.023327
	3	1.772454	1.264294	1.023962	3	1.772454	1.315663	1.023367
	6	1.772453	1.263549	1.024158	6	1.772454	1.315504	1.023391
	9	1.772453	1.263346	1.024181	9	1.772454	1.315495	1.023392
	12	1.772452	1.263268	1.024186	12	1.772454	1.315477	1.023392
B-A-B	3	1.772440	1.264269	1.023680	3	1.772453	1.315663	1.023344
	6	1.772370	1.263409	1.023641	6	1.772451	1.315500	1.023350
	9	1.772291	1.263083	1.023476	9	1.772448	1.315487	1.023345
	12	1.772211	1.262882	1.023295	12	1.772446	1.315466	1.023341

Tablo 4.34. Problem 4'ün $0 \leq x \leq 40$ aralığında $\Delta t = 0.025, h = 0.05, \mu = 0.01$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitlerinin diğer çalışmalarla karşılaştırılması

<i>Metot</i>	$\mu = 0.01$			
	<i>t</i>	<i>I</i> ₁	<i>I</i> ₂	<i>I</i> ₃
A-B-A	0	1.772454	1.265847	1.023327
	3	1.772454	1.264294	1.023962
	6	1.772453	1.263549	1.024158
	9	1.772453	1.263346	1.024181
	12	1.772452	1.263268	1.024186
(Ateş, 2014)	3	1.77245	1.27653	1.05877
	6	1.77245	1.28282	1.07337
	9	1.77245	1.28445	1.07573
	12	1.77245	1.28512	1.07645
(Karakaş,2020)	3	1.772453	1.264292	1.023960
	6	1.772453	1.263549	1.024159
	9	1.772454	1.263549	1.024187
	12	1.772455	1.263275	1.024197
(Roshan, 2021)	3	1.77245	1.26632	1.02330
	6	1.77245	1.26599	1.02294
	9	1.77245	1.26639	1.02295
	12	1.77245	1.26567	1.02293

Tablo 4.35. Problem 4'ün $0 \leq x \leq 40$ aralığında $\Delta t = 0.025, h = 0.05, \mu = 0.05$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitlerinin diğer çalışmalarla karşılaştırılması

<i>Metot</i>	$\mu = 0.05$			
	<i>t</i>	<i>I</i> ₁	<i>I</i> ₂	<i>I</i> ₃
A-B-A	0	1.772454	1.315980	1.023327
	3	1.772454	1.315663	1.023367
	6	1.772454	1.315504	1.023391
	9	1.772454	1.315495	1.023392
	12	1.772454	1.315477	1.023392
(Ateş, 2014)	3	1.77245	1.31745	1.02823
	6	1.77245	1.31874	1.03149
	9	1.77245	1.31891	1.03170
	12	1.77245	1.31901	1.03180
(Karakaş,2020)	3	1.772454	1.315663	1.023960
	6	1.772454	1.315504	1.024159
	9	1.772454	1.315495	1.024187
	12	1.772454	1.315477	1.024197
(Roshan, 2021)	3	1.77245	1.31648	1.02333
	6	1.77245	1.31619	1.02356
	9	1.77245	1.31617	1.02340
	12	1.77245	1.31612	1.02339

$A-B-A$ şemasıyla elde edilen nümerik sonuçlar literatürde bulunan farklı çalışmalarla $t = 15$ zamanında Tablo 4.32’de karşılaştırıldı. Tablo 4.32 incelendiğinde $A-B-A$ şemasıyla hesaplanan korunum sabitleri, diğer araştırmacılar tarafından farklı yöntemlerle elde edilen korunum sabitleriyle iyi uyum içinde olduğu görülmektedir. Ayrıca, Tablo 4.32’de elde edilen I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin nümerik değerleri $I_1 = 78, I_2 = 655.2, I_3 = 5450.4$ analitik değerlerle iyi uyum içindedir. Tablo 4.33’te Problem 4 için $[0,100]$ bölgesi üzerinde $A-B, B-A, A-B-A$ ve $B-A-B$ şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçlar kendi içinde karşılaştırıldı. Tüm hesaplamalar $\Delta t = 0.025, h = 0.05, \mu = 0.01$ ve $\mu = 0.05$ parametreleri kullanılarak $t = 12$ zamanına kadar yapıldı. Korunum sabitlerinde önemli bir farklılığın görülmediği, sonuçların birbirleriyle uyum içinde olduğu Tablo 4.33’ten açıkça gözlemlenmiştir. $A-B-A$ şemasıyla hesaplanan korunum sabitleri Tablo 4.34’te $\Delta t = 0.025, h = 0.05$ ve $\mu = 0.01$ parametreleriyle elde edilen sonuçlar ve Tablo 4.35’te $\Delta t = 0.025, h = 0.05$ ve $\mu = 0.05$ parametreleriyle elde edilen nümerik sonuçlar literatürde mevcut diğer çalışmalarla karşılaştırıldı. Tablolar incelendiğinde elde edilen nümerik sonuçların mevcut çalışmalarla uyum içinde olduğu görülmektedir.

Tablo 4.36. Problem 5’in $-20 \leq x \leq 50$ aralığında $\Delta t = 0.05, h = 0.07, d = 2$ ve $d = 5, \mu = 0.16666667$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitlerinin karşılaştırılması.

Metot	$d = 2$				$d = 5$			
	t	I_1	I_2	I_3	t	I_1	I_2	I_3
A-B	0	2.003500	0.190628	0.018535	0	2.003585	0.175478	0.016288
	100	2.503481	0.257287	0.026035	100	2.503369	0.242103	0.023781
	200	3.003461	0.323940	0.033534	200	3.003291	0.308750	0.031279
	300	3.503442	0.390593	0.041034	300	3.503255	0.375400	0.038779
	400	4.003422	0.457246	0.048534	400	4.003230	0.442052	0.046278
	500	4.503403	0.523899	0.056034	500	4.503209	0.508705	0.053778
	600	5.003383	0.590552	0.063533	600	5.003189	0.575358	0.061278
	700	5.503364	0.657205	0.071033	700	5.503169	0.642011	0.068777
B-A	800	6.003321	0.723858	0.078533	800	6.003148	0.708664	0.076277
	100	2.503481	0.257287	0.026035	100	2.503228	0.242075	0.023777
	200	3.003461	0.323940	0.033534	200	3.002874	0.308666	0.031267
	300	3.503442	0.390593	0.041034	300	3.502519	0.375253	0.038757
	400	4.003422	0.457246	0.048534	400	4.002164	0.441839	0.046246
	500	4.503403	0.523899	0.056034	500	4.501809	0.508425	0.053736
	600	5.003383	0.590552	0.063533	600	5.001454	0.575011	0.061226
	700	5.503363	0.657205	0.071033	700	5.501099	0.641597	0.068715
A-B-A	800	6.003320	0.723858	0.078533	800	6.000743	0.708183	0.076205
	0	2.003500	0.190628	0.018535	0	2.003585	0.175478	0.016288
	100	2.503481	0.257287	0.026035	100	2.503228	0.242075	0.023777
	200	3.003461	0.323940	0.033534	200	3.002874	0.308666	0.031267
	300	3.503442	0.390593	0.041034	300	3.502519	0.375253	0.038757
	400	4.003423	0.457246	0.048534	400	4.002164	0.441839	0.046246

	500	4.503403	0.523899	0.056034	500	4.501810	0.508425	0.053736
	600	5.003384	0.590552	0.063533	600	5.001455	0.575012	0.061226
	700	5.503365	0.657205	0.071033	700	5.501100	0.641598	0.068715
	800	6.003322	0.723858	0.078533	800	6.000744	0.708184	0.076205
B-A-B	100	2.503481	0.257287	0.026035	100	2.503228	0.242075	0.023777
	200	3.003461	0.323940	0.033534	200	3.002874	0.308666	0.031267
	300	3.503442	0.390593	0.041034	300	3.502519	0.375253	0.038756
	400	4.003423	0.457246	0.048534	400	4.002164	0.441839	0.046246
	500	4.503403	0.523899	0.056034	500	4.501810	0.508425	0.053736
	600	5.003384	0.590552	0.063533	600	5.001455	0.575012	0.061226
	700	5.503365	0.657205	0.071033	700	5.501100	0.641598	0.068715
	800	6.003322	0.723858	0.078533	800	6.000744	0.708184	0.076205

Tablo 4.36’da Problem 5’in $[0,100]$ bölgesi üzerinde $A-B$, $B-A$, $A-B-A$ ve $B-A-B$ şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçlar kendi içinde karşılaştırıldı. Tüm hesaplamalar $\mu = 0.16666667, x_0 = 0, U_0 = 0.1, \Delta t = 0.05, h = 0.07, d = 2$ ve $d = 5$ parametreleri kullanılarak $t = 800$ zamanına kadar yapıldı. $A-B$, $B-A$, $A-B-A$ ve $B-A-B$ şemalarıyla hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin birbirleri ile iyi uyum içinde olduğu Tablo 4.36’daki sonuçlardan açıkça görülmektedir. $A-B-A$ şemasıyla elde edilen nümerik sonuçlar literatürde bulunan farklı çalışmalarla $t = 800$ zamanında Tablo 4.37’de karşılaştırıldı. Tablo 4.37 ve Tablo 4.38’de EW denkleminin operatör splitting kübik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi ile hesaplanan nümerik sonuçları literatürde bulunan farklı çalışmalarla karşılaştırıldı. Karşılaştırmalar yapılırken $A-B-A$ Strang şeması ile elde edilen nümerik sonuçlar kullanıldı. Tablo 4.39’da (3.18) formülüyle verilen lineer artış oranları analitik sonuçlarla ve literatürde verilen mevcut oranlarla karşılaştırıldı. Hesaplanan M_1, M_2 ve M_3 oranlarının gerçek değerlerine oldukça yakın ve literatürdeki mevcut çalışmalarda bulunan oranlar ile iyi uyum içinde olduğu Tablo 4.39’dan açıkça görülmektedir.

Tablo 4.37. Problem 5’in $-20 \leq x \leq 50$ aralığında $\Delta t = 0.05, h = 0.07, d = 2, \mu = 0.16666667$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitlerinin diğer çalışmalarla karşılaştırılması

Metot	$d = 2$			
	t	I_1	I_2	I_3
A-B-A	0	2.003500	0.190628	0.018535
	100	2.503481	0.257287	0.026035
	200	3.003461	0.323940	0.033534
	300	3.503442	0.390593	0.041034
	400	4.003423	0.457246	0.048534
	500	4.503403	0.523899	0.056034
	600	5.003384	0.590552	0.063533
	700	5.503365	0.657205	0.071033
	800	6.003322	0.723858	0.078533
(Dağ&Saka, 2004)	800	6.003194	0.723867	0.078534
(Doğan, 2005)	800	5.669824	0.660997	0.070677

(Esen, 2005)	800	6.003478	0.723605	0.078426
(Esen&Kutluay, 2006)	800	5.996473	0.722126	0.078465
(Saka, 2006)	800	6.00248	0.72402	0.07853
(Saka, vd.2008)	800	6.002474	0.723860	0.078525
(Ateş, 2014)	800	6.003472	0.724835	0.078793
(Karakaş, 2020)	800	6.003323	0.723859	0.078533

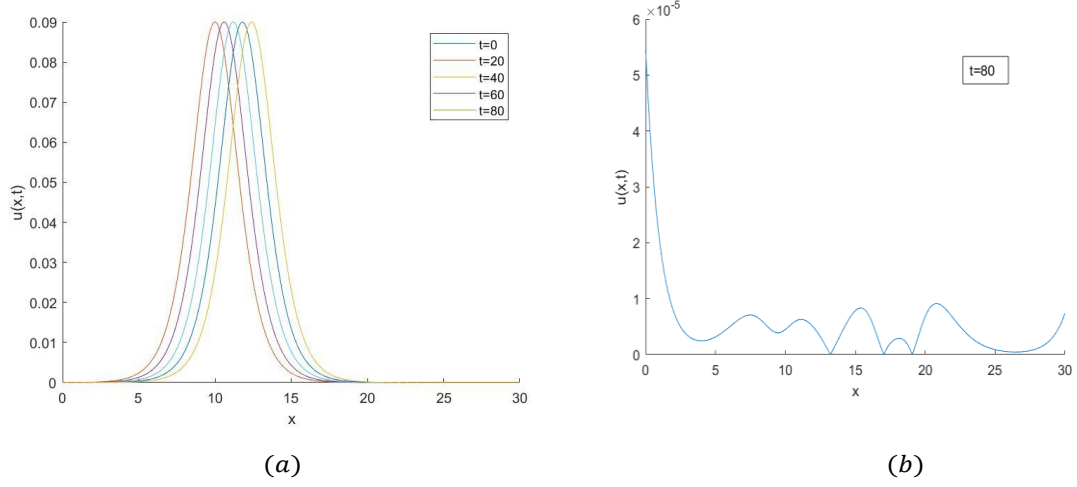
Tablo 4.38. Problem 5'in $-20 \leq x \leq 50$ aralığında $\Delta t = 0.05, h = 0.07, d = 5, \mu = 0.16666667$ değerleriyle hesaplanan korunum sabitlerinin diğer çalışmalarla karşılaştırılması

Metot	$d = 5$			
	t	I_1	I_2	I_3
A-B-A	0	2.003585	0.175478	0.016288
	100	2.503228	0.242075	0.023777
	200	3.002874	0.308666	0.031267
	300	3.502519	0.375253	0.038757
	400	4.002164	0.441839	0.046246
	500	4.501810	0.508425	0.053736
	600	5.001455	0.575012	0.061226
	700	5.501100	0.641598	0.068715
	800	6.000744	0.708184	0.076205
(Gardner, vd. 1997)	800	6.027221	0.713333	0.077000
(Saka, vd. 2003)	800	6.003096	0.708689	0.076281
(Dağ&Saka, 2004)	800	6.003096	0.708689	0.076281
(Doğan, 2005)	800	5.446117	0.606864	0.062520
(Esen, 2005)	800	6.003578	0.708498	0.076192
(Saka, 2006)	800	6.00259	0.70885	0.07628
(Esen&Kutluay, 2006)	800	5.996421	0.707090	0.076213
(Saka, vd. 2008)	800	6.002578	0.708710	0.076277
(Ateş, 2014)	800	6.003580	0.709577	0.076505
(Karakaş, 2020)	800	6.003268	0.708688	0.076281

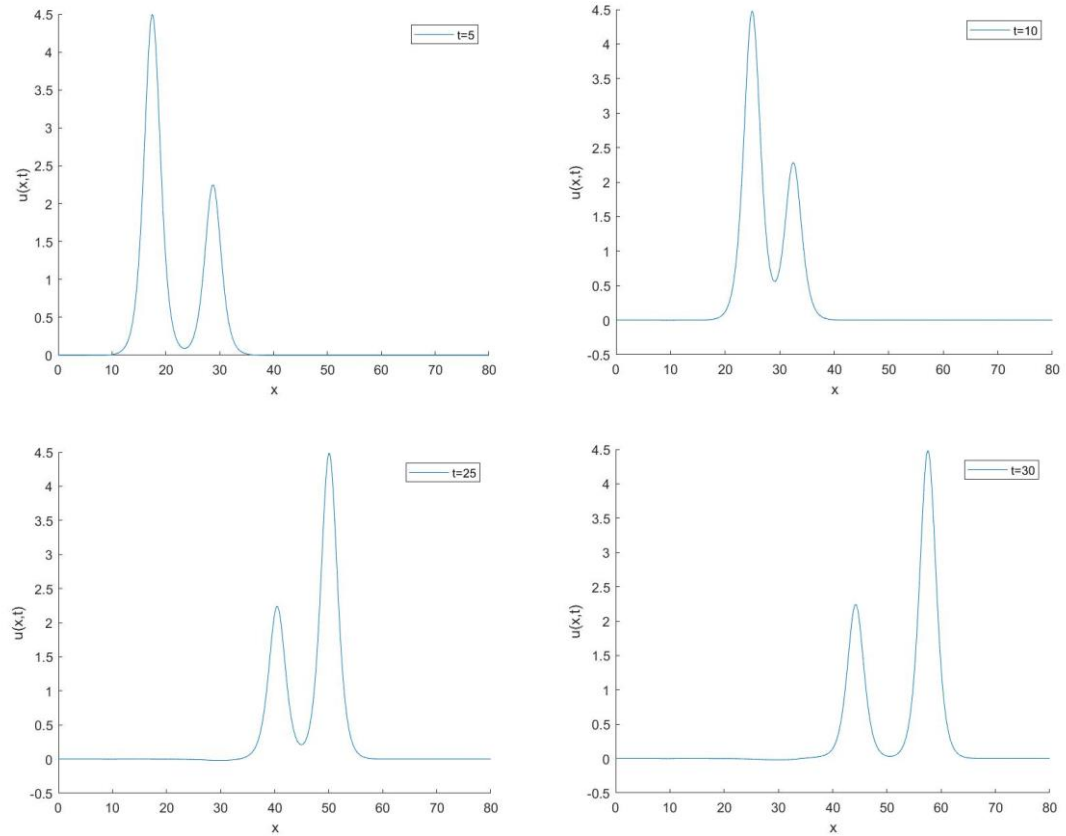
Tablo 4.39. Problem 5'in $d = 5, d = 2, h = 0.07$ ve $\Delta t = 0.05$ değerleri için hesaplanan korunum sabitlerinin lineer artış oranları

$t = 80$	$d = 5$			$d = 2$		
	$M_1 \times 10^3$	$M_2 \times 10^4$	$M_3 \times 10^5$	$M_1 \times 10^3$	$M_2 \times 10^4$	$M_3 \times 10^5$
A-B	4.99957	6.665157	7.49943	4.999771	6.665300	7.49971
B-A	4.99645	6.658686	7.48971	4.999777	6.665300	7.49971
A-B-A	4.99651	6.658700	7.48971	4.999772	6.665300	7.49971
B-A-B	4.99645	6.658700	7.48971	4.999772	6.665300	7.49971
(Karakaş, 2020)	4.999606	6.665125	7.49925	4.99978	6.665388	7.49975
(Saka, vd. 2008)	4.999990	6.666650	7.50000	4.99997	6.666650	7.50000
(Esen&Kutluay, 2006)	4.999800	6.653900	7.49930	5.00000	6.652500	7.50000
(Dağ&Saka, 2004)	5.000650	6.666390	7.50050	5.00090	6.662200	7.48630
(Ateş, 2014)	4.995664	6.676238	7.53588	4.99997	6.677588	7.54100
(Gardner, vd. 1997)	5.030800	6.724400	7.59020	4.92730	6.526900	7.29380
(Esen, 2005)	5.000000	6.662800	7.48810	5.00000	6.662200	7.48630
(Saka, 2006)	4.332000	5.396100	5.78280	4.58670	5.883400	6.52150
Analitik	5.000000	6.666667	7.50000	5.000000	6.666667	7.50000

4.5. Model Problemlerinin Şekil Dizilimleri

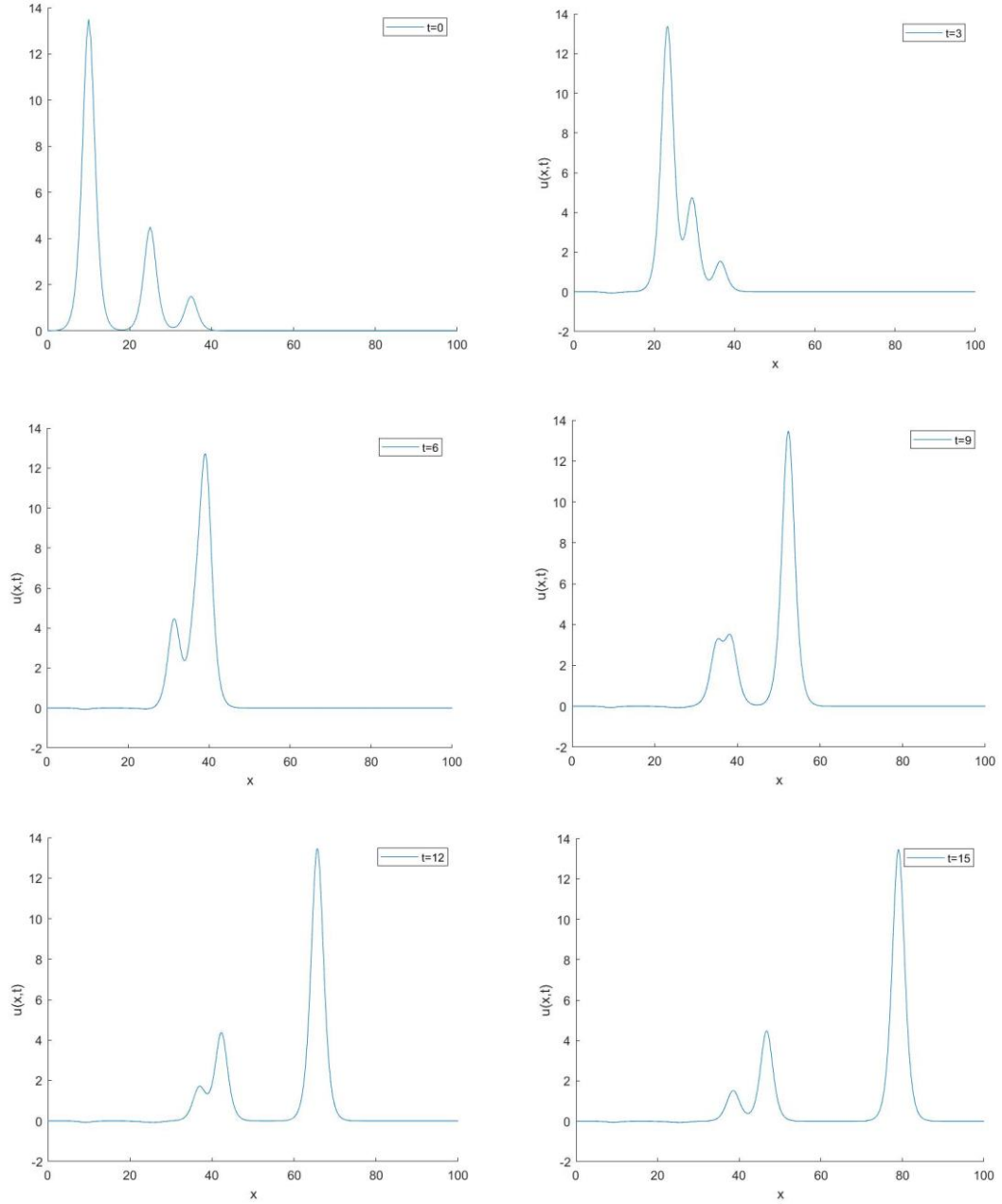


Şekil 4.1: Farklı zamanlardaki tek soliter dalganın fiziksel hareketi a) $\Delta t = 0.05$, $h = 0.03$, $c = 0.1$, $x_0 = 10$, b) Aynı değerler için $t = 80$ zamanındaki mutlak hata grafiği.



Şekil 4.2. Zaman ilerledikçe iki solitary dalga hareketi

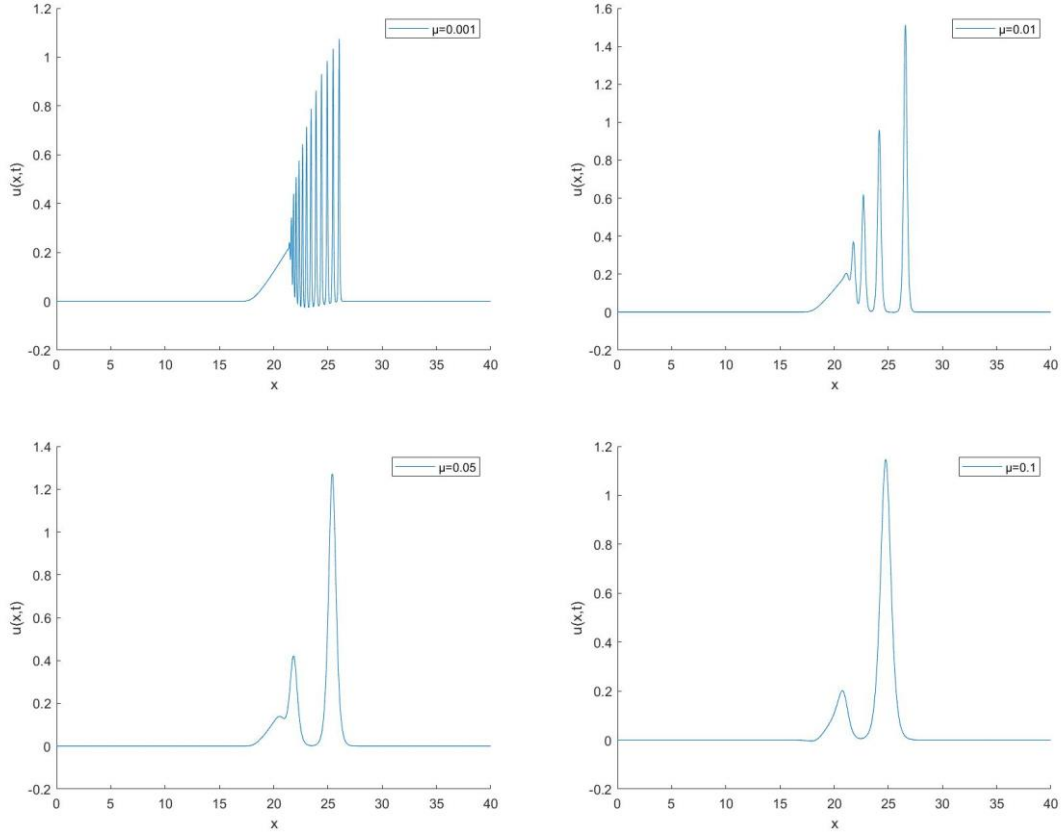
Şekil 4.1’de $A-B$ şemasıyla hesaplanan nümerik sonuçlar kullanılarak tek solitary dalganın zaman ilerledikçe fiziksel davranışı verildi. Dalganın sağa doğru genliğini ve hızını koruyarak ilerlediği Şekil 4.1’den açıkça görülmektedir. Ayrıca, en büyük mutlak hatanın çözüm bölgesinin solunda olduğu verilen mutlak hata grafiğinden açıkça görülmektedir. Şekil 4.2’de iki solitary dalganın zaman ilerledikçe fiziksel davranışı verildi. Şekil 4.2’de $\Delta t = 0.01, c_1 = 1.5, c_2 = 0.75, h = 0.1, x_1 = 10$ ve $x_2 = 25$ değerleri kullanılarak $A-B$ Lie-Trotter şeması ile elde edilen sonuçlarla çizildi. Şekil 4.2 incelendiğinde genliği büyük olan dalga, genliği küçük olan dalganın solunda yer almaktadır. Zaman ilerledikçe büyük dalganın küçük dalgayı içererek geride bıraktığı açıkça görülmektedir. Çarpışmadan sonra büyük dalganın konumu $x = 57.70$ ve genliği 4.50 iken küçük dalganın konumu $x = 44.25$ ve genliği 2.245 olarak hesaplandı.



Şekil 4.3. Üç solitary dalganın farklı zamanlardaki fiziksel davranışı.

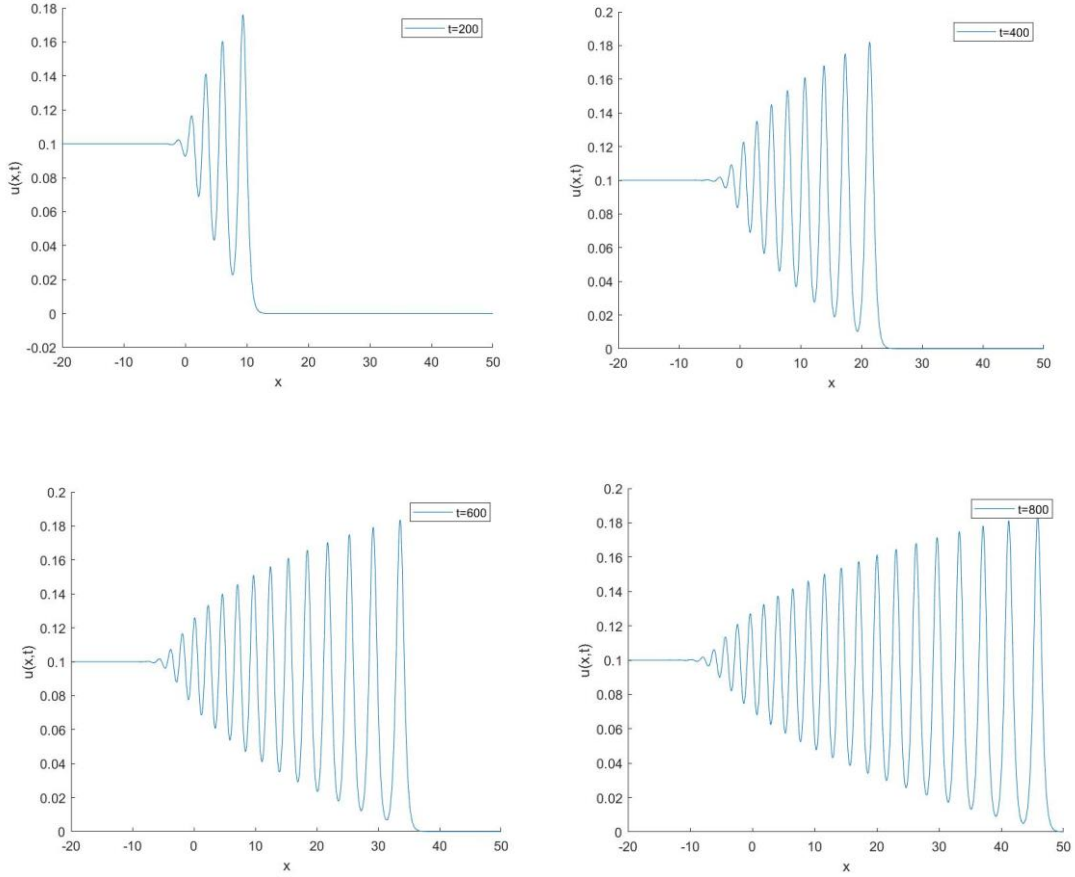
Şekil 4.3'te üç solitary dalganın zaman ilerledikçe fiziksel davranışı verildi. Şekil 4.3'te $\Delta t = 0.1$, $h = 0.05$, $\mu = 1$, $x_1 = 10$, $x_2 = 25$, $x_3 = 35$, $c_1 = 4.5$, $c_2 = 1.5$ ve $c_3 = 0.5$ parametreleri kullanılarak A-B şemasıyla elde edilen sonuçlarla çizimler yapıldı. Şekil 4.3 incelendiğinde genliği en büyük olan soliter dalga küçük olanların solunda yer almaktadır. Genliği büyük olan dalgalar, genliği küçük olanlara göre daha yüksek hıza sahiptir. Sonuç olarak, zaman geçtikçe daha büyük olan iki tek dalga küçük olanı yakalar, üç tek dalganın üst üste ilerleme süreci devam ederken, daha büyük olan tek dalga

küçükleri geride bırakır. Çarpışmadan sonra genliği büyük olan dalganın konumu olan dalganın konumu $x = 65.70$ ve genliği 13.452, orta genliğe sahip olan dalganın konumu $x = 42.30$ ve genliği 4.367 iken en küçük dalganın konumu $x = 37.05$ ve genliği 1.718 olarak hesaplandı.



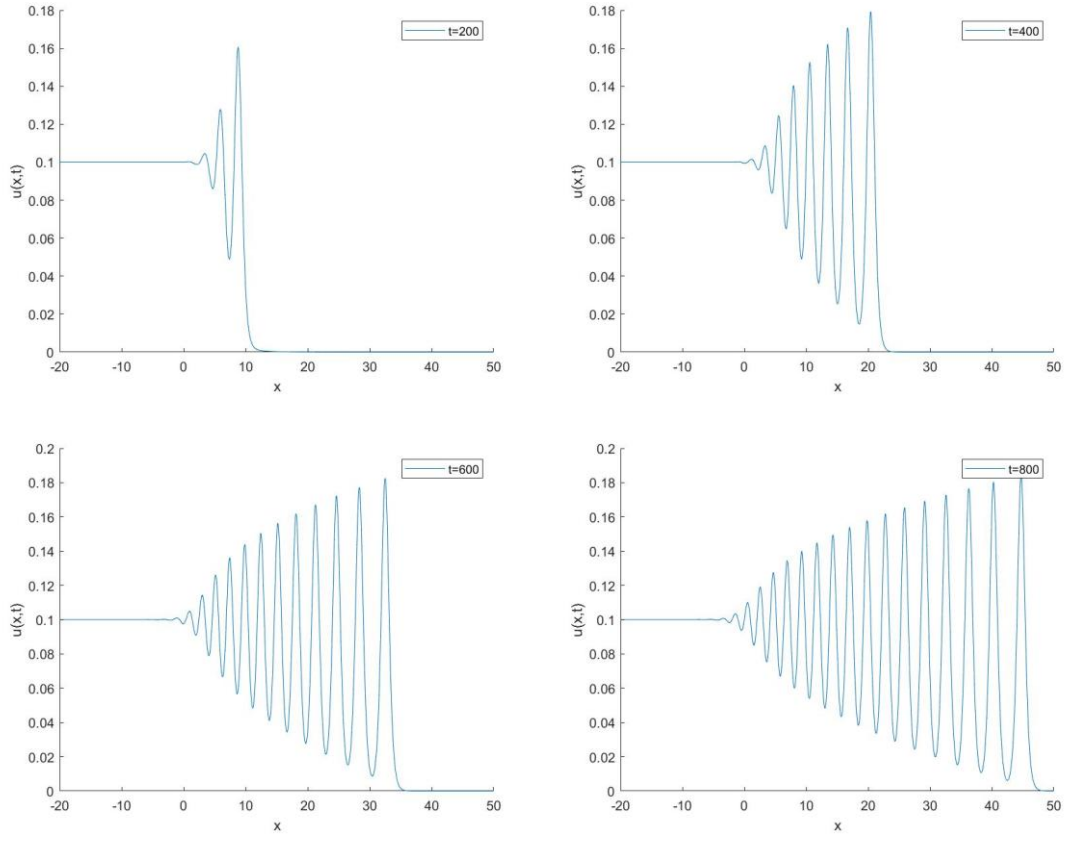
Şekil 4.4. $t = 12$ zamanında farklı μ değerleri için Maxwellian başlangıç şartı ile oluşan dalgaların fiziksel davranışı.

Şekil 4.4'te $A-B$ Lie-Trotter şeması ile hesaplanan nümerik sonuçlar kullanılarak farklı μ değerleri için Maxwellian başlangıç şartının oluşturduğu dalgalar verildi. Hesaplamalar yapılırken $\mu = 0.1, 0.01, 0.05, 0.001, h = 0.01$ ve $\Delta t = 0.01$ parametreleri kullanıldı. μ değeri küçüldükçe Maxwellian başlangıç şartının oluşturduğu dalgaların sayısının da arttığı Şekil 4.4'ten açıkça görülmektedir.



Şekil 4.5. $d = 2$ için ardışık dalga oluşumu

Şekil 4.5'te zaman ilerledikçe ardışık dalganın oluşumunun fiziksel davranışı verildi. Durgun bir suyun alanına akan daha derin bir su akışı ardışık dalga oluşturur. Şekil 4.5'te durgun su bölgenin sağında yer alır ve suyun sahip olduğu akış soldan durgun suyun içine doğru hareket eder. Şekil 4.5 A-B'nin $\Delta t = 0.05$, $h = 0.7$, $d = 2$, $\mu = 0.16666667$ parametreleriyle çizdirildi. Şekil 4.6 A-B'nin $\Delta t = 0.05$, $h = 0.7$, $d = 5$, $\mu = 0.16666667$ parametreleriyle çizdirildi. Şekil 4.5 ve Şekil 4.6'da elde edilen bulgular literatürdeki çalışmaların şekilleriyle uyumludur.



Şekil 4.6. $d = 5$ için ardışık dalga oluşumu

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde EW denkleminin sayısal çözümleri operatör splitting trigonometrik B-spline kollokasyon sonlu elemanlar yöntemiyle elde edildi. Uygulanan yöntemi test etmek ve etkinliğini ölçmek için beş model problem göz önüne alındı. Bu model problemler, tek solitary dalga hareketi, iki solitary dalganın girişi, üç solitary dalganın girişi, maxwellian başlangıç koşulu ve ardışık dalga oluşumu problemleridir. EW denkleminin nümerik çözümleri hem Lie-Trotter hem de Strang splitting yöntemleriyle elde edildi. EW denkleminin sağladığı korunum sabitleri I_1 kütle, I_2 enerji ve I_3 momentum literatürde en çok kullanılan parametreler kullanılarak Lie-Trotter ve Strang splitting yöntemleriyle hesaplandı. $A-B$, $B-A$ Lie-Trotter ve $A-B-A$, $B-A-B$ Strang splitting şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçlar birbirleriyle ve literatürde bulunan bazı çalışmalarla karşılaştırıldı. Her dört şemayla elde edilen nümerik sonuçların birbirleriyle ve literatürde bulunan mevcut sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü. Ayrıca literatürde sık kullanılan L_2 ve L_∞ hata normları hem Lie-Trotter hem de Strang splitting yöntemleriyle hesaplanarak literatürdeki bazı çalışmalarla karşılaştırıldı. Beş model problemin grafikleri MATLAB 2015a programıyla çizildi. Grafikler incelendiğinde dalgaların şekillerini koruyarak sağa doğru ilerlediği ve yine mevcut çalışmalarla uyumlu olduğu gözlemlendi. Elde edilen korunum sabitleri gayet iyi korunmuş, hata normları da bazı yerlerde daha iyi sonuç vermiştir.

Sonuç olarak tezde kullanılan bu yöntemlerle elde edilen nümerik sonuçlar literatürde bulunan diğer çalışmaların sonuçlarıyla uyumludur. Bunlara ek olarak bu yöntemler benzer problemlere de kolaylıkla uygulanabilir ve karmaşık yapıya sahip bazı problemlerin çözümlerinde kolaylık sağlayabilir.

KAYNAKLAR

- Ali, A. H. A., 2008, Spectral method for solving the equal width equation based on Chebyshev polynomials, *Nonlinear Dyn.* Vol:51, 59–70.
- Archilla, B.G., 1996, A spectral method for the equal width equation, *J. Comput. Phys.* Vol:125, 395–402.
- Arnold, A. and Ringhofer, C., 1996, An operator splitting method for the Wigner-Poisson problem, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol:33, No.4, 1622–1643.
- Ateş, M. H., 2014, Eşit Genişlikli Dalga Denkleminin Sonlu Fark Yöntemiyle Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, *İnönü Üniversitesi*.
- Banaja, M. A. and Bakodah, H. O., 2015, Runge-Kutta integration of the equal width wave equation using the method of lines, *Math. Probl. Eng.*, Vol:2015, 1-9.
- Bjorhus, M., 1998, Operator splitting for abstract Cauchy problems. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 18, 419-443.
- Chin, S.A., Chen, C.R., 2002, Gradient symplectic algorithms for solving the Schrödinger equation with time-dependent potentials. *The Journal of Chemical Physics*, 117(4), 1409–1415.
- Clough, R.W., 1960, The Finite Element Method in Plane Stress Analysis, *Proceedings, American Society of Civil Engineers, 2nd Conference on Electronic Computation, Pittsburgh, PA*, pp. 345-378.
- Çelik, H., K., Sonlu Elemanlar Yöntemi [online], Doç. Dr. H. Kürşat Çelik, <https://www.hkcelik.com/t%C3%BCrk%C3%A7e/sonlu-elemanlar-y%C3%B6ntemi#h.e859vx2bcry2> [Erişim Tarihi: 22 Nisan 2023]
- Çelikkaya, İ., 2018, B-spline Kollokasyon Yöntemi ile Bazı Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri, Doktora Tezi, *İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, 133 s.
- Çelikkaya, İ., 2019, Operator splitting method for numerical solution of modified equal width equation. *Tbilisi Mathematical Journal*, 12(3), 51-67.
- Dag, I. and Saka, B., 2004, A cubic B-spline collocation method for the EW equation, *Math. Comput. Appl.* Vol:90, 381–392.
- Davies, A. J., 2011, The Finite Element Method An Introduction with Partial Differential Equations, *Second Edition*, 12-20.
- Dereli, Y. and Schaback, R., 2013, The meshless kernel-based method of lines for solving the Equal width equation, *Appl. Math. Comput.*, Vol:219.

- Dogan, A., 2005, Application of Galerkin's method to equal width wave equation, *Applied Mathematics and Computation*, 160(1), 65–76.
- Esen, A., 2005, A numerical solution of the equal width wave equation by a lumped Galerkin method, *Applied Mathematics and Computation*, 168(1), 270–282.
- Esen, A. ve Kutluay, S., 2006, A linearized implicit finite-difference method for solving the equal width wave equation, *International Journal of Computer Mathematics*, 83(3), 319–330.
- Farago, I., Havasi, A., 2007, Consistency analysis of operator splitting methods for C_0 -semigroups, *Semigroup Forum*, 74, 125–139.
- Fazal-i, H., Inayet, A. and Shakeel, A., 2013, Septic B-Spline Collocation method for numerical solution of the Equal Width Wave (EW) equation, *Life Science Journal*, 10(1s): 253 – 260.
- Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., 1990, Solitary waves of the regularised long wave equation, *J. Comp. Phys.*, 91, 441-459.
- Gardner, L.R.T., Gardner, G. A., Ali, A. H. A., 1991, A method of lines solution for Burger's equation, in *Computational Mechanics*, ed J. II. W. Lee et al., Balkema, Rotterdam.
- Gardner, L.R.T. and Gardner, G.A., 1992, Solitary waves of the equal width wave equation, *J. Comput. Phys.* Vol:101, 218–223.
- Gardner, L.R.T., Gardner, G.A., Ayoub, F.A. ve Amein, N.K., 1997, Simulations of the EW undular bore, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 13(7), 583–592.
- Geiser, J., 2008, Iterative operator-splitting methods with higher order timeintegration methods and applications for parabolic partial differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 217, 227–242.
- Geiser, J., 2011, Iterative Splitting Methods for Differential Equations, Choi-Hong Lai and Frédéric Magoulès, *Chapman & Hall/Crc*, 25-40.
- Geyikli, T., 1994, "Finite Element Studies of the Modified KdV Equation", Ph. D. Thesis, University College of North Wales, Bangor, Gwynedd (UK), 26-32.
- Glowinski, R., Osher, S. J., & Yin, W. (Eds.), 2017, Splitting methods in communication, imaging, science, and engineering, *Springer*, (Chapter 3).
- Güler, M., & Şen, S., 2016, Sonlu Elemanlar Yöntemi Hakkında Genel Bilgiler, *Ordu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 5(1), 56-66.

- Hairer, E., Lubich, C., Wanner, G., 2002, Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations, *SCM, Springer-Verlag* Berlin-Heidelberg-New York, 30-60.
- Hamdi, S., W. H. Enright, W. E. Schiesser and J. J. Gottlieb, 2003, Exact solutions of the generalized equal width wave equation, *In Proceedings of the International Conference on Computational Science and Its Applications*, LNCS 2668 (Berlin).
- Hansen, E., Ostermann, A., 2009, Exponential splitting for unbounded operators, *Math. Comp.* 78, 1485–1496.
- Hansen E., Ostermann A., 2009, High order splitting methods for analytic semigroups exist, *BIT*, 49, 527–542.
- Helvacioğlu, Zafer, 2009, EW denkleminin B-spline Fonksiyonlar Yardımıyla Nümerik Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, *Dumlupınar Üniversitesi*.
- Holden, H., Karlsen, K.H., Lie, K.-A. and Risebro, N.H., 2010, Splitting Methods for Partial Differential Equations with Rough Solutions, *European Mathematical Society*, 1-5.
- Jahnke, T., Lubich, C., 2000, Error bounds for exponential operator splittings, *BIT Numerical Mathematics*, 40(4), 735–745.
- Kaplan, A., Dereli, Y., 2012, EW Denkleminin Radial Basis Fonksiyon Collocation Metodu ile Sayısal Çözümü. *Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 16-1, 48-55.
- Karakaş, A. S., 2020, Eşit Genişlikli Dalga Denkleminin Trigonometrik B-spline Kollokasyon Sonlu Eleman Yöntemiyle Nümerik Çözümleri. Yüksek Lisans Tezi, *İnönü Üniversitesi*.
- Kaya, S. B. G., 2011, Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Modifiye Edilmiş Eşit Genişlikli Dalga Denkleminin Sayısal Çözümleri, Doktora Tezi, *İnönü Üniversitesi*
- Lee, H.G. and Lee, J.-Y., 2015, A second order operator splitting method for Allen–Cahn type equations with nonlinear source terms, *Phys. A*, Vol:432, 24–34.
- Logan, D. L., 2007, A First Course in the Finite Element Method (Fourth Edition), *Thomson*, 1-126.
- Marchuk G., 1968, Some applications of splitting-up methods to the solution of mathematical physics problems, *Aplikace Matematiky* 13, 103–132.
- Mersin, M.A., 2014, Bazı Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri için Kübik B-spline Quasi-İnterpolasyon Metodu. Yüksek Lisans Tezi, *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi*.

- Morrison, P.J., Meiss, J.D. ve Cary, J.R., 1984, Scattering of regularized-long-wave solitary waves, *Physica D. Nonlinear Phenomena*, 11(3), 324–336.
- Olver, P.J., 1979, Euler operators and conservation laws of the BBM equation, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 85, 143— 159.
- Peregrine, D.H., 1966, Calculations of the development of an undular bore, *Journal of Fluid Mechanics*, 25(2):321-330.
- Rao, S. S., 2011, The Finite Element Method in Engineering, *Elsevier*, 1-20.
- Raslan, K. R., 2004, A computational method for the equal width equation, *International Journal of Computer Mathematics*, 81(1), 63–72.
- Raslan, K. R., 2005, Collocation method using quartic B-spline for the equal width equation, *Appl. Math. Comput.*, Vol:168, 795–805.
- Reddy, J.N., 1993, An introduction to the finite element method, *McGraw-Hill*, NewYork, 1-60.
- Roshan, T., 2011, A Petrov-Galerkin method for equal width equation, *Applied Mathematics and Computation*, 218(6), 2730–2739.
- Russell, J.S., 1844, Report on Waves, *14th meeting of the British Association for the Advancement of Science*, London: BAAS, 90-100.
- Saka, B., Irk, D. ve Dag, I., 2003, Numerical study of the equal width wave equation, *Hadronic Journal of Supplementary*, 18, 99–116.
- Saka, B., 2006, A finite element method for equal width equation, *Appl. Math. Comput.*, Vol:175, 730–747.
- Saka B., Dag I., Dereli Y. and Korkmaz A., 2008, Three different methods for numerical solution of the EW equation, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol:32, 556–566.
- Sanz-Serna, J.M., Calvo, M.P., 1994, Numerical Hamiltonian Problems, *Applied Mathematics and Mathematical Computation*, Vol. 7, Chapman & Hall, London.
- Schoenberg, I. J., 1946, Contributions to the Problem of Approximation of Equidistant Data by Analytic Functions, *Quart. Appl. Math.*, 4, 45-99.
- Schoenberg, I. J., 2007, Spline Functions Basic Theory, Third Edition, *Cambridge University*, 1-5.
- Seydaoglu, M. and Blanes, S., High, 2014, Order splitting methods for separable non-autonomous parabolic equations, *Appl. Numer. Math.*, Vol: 84, 22–32.
- Seydaoglu, M., Erdoğan, U. and Öziş, T., 2016, Numerical solution of Burgers' equation with high order splitting methods, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol: 291, 410–421.

- Sportisse, B., 2000, An analysis of operator splitting techniques in the stiff case. *Journal of Computational Physics*, 161, 140–168.
- Stasa, F.L., 1986, Applied Finite Element Analysis for Engineers, L. S. Fletcher, Florida Institute of Technology, *Japonya*, 1-5.
- Strang, G., 1968, On the construction and comparison of difference schemes, *SIAM J. Numer. Anal.*, 5, 506–517.
- Trotter H.F., 1959, On the product of semi-groups of operators, *Proc. Am. Math. Soc.* 10 545–551.
- Uddin, M., 2013, RBF-PS scheme for solving the equal width equation, *Applied Mathematics and Computation*, 222, 619–631.
- von Neumann, J. and Richtmyer, R.D., 1950, A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks, *Journal of Applied Physics*, 21, 232-237.
- Hundsdoerfer, W. and Verwer, J., 2003, Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations, *Springer*, Verlag Berlin Heidelberg GmbH , 324-330.
- Yiğit, M. K., 2021, İkili Burgers Denkleminin Trigonometrik B-spline Kollokasyon Yöntemiyle Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, *İnönü Üniversitesi*.
- Yoshida, H., 1990, Construction of higher order symplectic integrators, *Physics Letters A*, 150(5–7), 262-268.
- Yusufoglu, E. and Bekir, A., 2007, Numerical simulation of equal-width wave equation, *Comput. Math. Appl.* Vol:54, 1147–1153.
- Zaki, S.I., 2000, A least-squares finite element scheme for the EW equation, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* Vol:189, 587–594.
- Zaki, S., 2001, Solitary waves induced by the boundary forced EW equation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(37-38), 4881–4887.
- Zhang, C., Wang, H., Huang, J., Wang, C. and Yue, X., 2017, A second order operator splitting numerical scheme for the “good” Boussinesq equation, *Appl. Numer. Math.*, Vol: 119, 179–193.
- Zikanov, O., 2010, Essential computational fluid dynamics, *Wiley*, Hoboken, N.J, 47.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Rabia ERKOÇ
Uyruğu : TC

EĞİTİM

Derece	Adı	Bitirme Yılı
Üniversite	Siirt Üniversitesi	2011/2015
Yüksek Lisans	Batman Üniversitesi	
Doktora		

İŞ DENEYİMLERİ

Kurum	Görevi	Yıl
MEB	Öğretmen	2015

UZMANLIK ALANI

YABANCI DİLLER

YAYINLAR: Isarc 7. International Hasankeyf Scientific Research and Innovation Congress (Yüksek Lisans tezinden yapılmıştır)