



**EŞİTLİK VE DEĞİŞKEN KAVRAMLARINA YÖNELİK
ÖĞRENCİLERİN BİLİŞSEL SÜREÇLERİNİN
MATEMATİKSEL ÇALIŞMA UZAYI
TEORİK ÇERÇEVESİNDE İNCELENMESİ**

**Doktora Tezi
Sibel DENİZ
Eskişehir 2024**

EŞİTLİK VE DEĞİŞKEN KAVRAMLARINA YÖNELİK ÖĞRENCİLERİN
BİLİŞSEL SÜREÇLERİNİN MATEMATİKSEL ÇALIŞMA UZAYI TEORİK
ÇERÇEVESİNDE İNCELENMESİ

SİBEL DENİZ

DOKTORA TEZİ

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Emel ÖZDEMİR ERDOĞAN

Eskişehir

Anadolu Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Şubat 2024

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI BELGESİ



ÖZET

EŞİTLİK VE DEĞİŞKEN KAVRAMLARINA YÖNELİK ÖĞRENCİLERİN BİLİŞSEL SÜREÇLERİNİN MATEMATİKSEL ÇALIŞMA UZAYI TEORİK ÇERÇEVESİNDE İNCELENMESİ

SİBEL DENİZ

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Şubat 2024

Danışman: Prof. Dr. Emel ÖZDEMİR ERDOĞAN

Bu araştırmada MWS (matematiksel çalışma uzayı) teorik çerçevesinden yararlanarak eşitlik ve değişken kavramlarına yönelik tasarlanan matematiksel çalışmada öğrencilerin bilişsel süreçlerinin epistemolojik-bilişsel düzlemler arası etkileşiminin oluşumlar ve oluşumların ikiyeşerli kombinasyonu ile oluşan düzlemler bağlamında incelenmesi amaçlanmaktadır. Nitel olarak desenlenen bu araştırmada öğretim deneyi deseni benimsenmiştir. Araştırmanın katılımcıları bir devlet okulunda beşinci sınıf öğrencileri arasından amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yoluyla seçilmiştir. Araştırmada MWS, hem öğretim sürecinin tasarlanması hem de analiz sürecinde benimsenen bir teorik çerçeve olmuştur. Araştırmanın katılımcılarının öğretim sürecinde bilişsel şemalarında ve kullandığı tekniklerdeki değişimi, gelişimi ortaya koyabilmek adına hazırlanan veri toplama araçları uygulanmış, bireysel görüşmeler ve grup görüşmeleri ile elde edilen veriler analiz edilmiştir. Araştırma sonuçları öğrencilerin eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerini, terazi modelini, değişkenin farklı temsil biçimlerini etkin bir enstrüman olarak işe koşabilmede gelişme gösterdiklerini; kullandığı tekniklerin ve kavrama dair imajlarının zenginleştiğini; eşilik ve değişken kavramlarını işe koştukları çalışmalarda yer aldıkları düzlemlerde farklılaştıklarını göstermiştir.

Anahtar Sözcükler: MWS (Matematiksel Çalışma Uzayı), Eşit işareti, Değişken, İlişkisel yorumlama

ABSTRACT

INVESTIGATION OF STUDENTS' COGNITIVE PROCESSES TOWARDS THE CONCEPTS OF EQUALITY AND VARIABLES WITHIN THE THEORETICAL FRAMEWORK OF MATHEMATICAL WORKSPACE

SİBEL DENİZ

Department of Mathematics Education

Anadolu University, Graduate School, February 2024

Supervisor: Prof. Dr. Emel ÖZDEMİR ERDOĞAN

In this research, it is aimed to examine the interaction of students' cognitive processes between epistemological-cognitive planes in the mathematical study designed for the concepts of equality and variable by making use of the theoretical framework of MWS (mathematical working space) in the context of genesis and planes formed by the pairwise combination of genesis. In this qualitative research, the teaching experiment design was adopted. The participants of the study were selected through criterion sampling, one of the purposeful sampling methods, among fifth grade students at a public school. In the research, MWS became a theoretical framework adopted both in the design of the teaching process and in the analysis process. In order to reveal the change and development in the cognitive schemas and techniques used by the research participants during the teaching process, prepared data collection tools were applied, and the data obtained through individual and group interviews were analyzed. The results of the research show that the students showed improvement in using different interpretations of the equal sign, the scale model, and different representations of the variable as an effective instrument. The techniques they used and their images of the concept were enriched; It has been shown that the concepts of equality and variable differ in the planes in which they are used in their studies.

Keywords: MWS (Mathematical Working Space), Equal sign, Variable, Relational interpretation

TEŞEKKÜR

Lisans, yüksek lisans ve doktora eğitimim boyunca bana bilgi ve deneyimlerini aktaran, yoluma çıkan engelleri aşmamda her zaman yanımda olup en zor anımda bile güler yüzü ve sabrıyla beni destekleyen değerli insan Prof. Dr. Emel ÖZDEMİR ERDOĞAN'a katkı ve desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Doktora tezim boyunca bana sürekli yol göstererek değerli görüşlerini esirgemeyen, araştırmamı daha nitelikli hale getirmek için desteklerini esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Nilüfer YAVUZSOY KÖSE ve Prof. Dr. Arife Figen ERSOY'a hem hoşgörülerinden hem de sağladıkları katkılardan dolayı teşekkür ederim.

Lisansüstü eğitimim boyunca girmiş olduğum derslerde bana kazandırdıkları akademik bilgi ve düşüncelerden ötürü Anadolu Üniversitesi Matematik Eğitimi Anabilim Dalında yer alan hocalarıma teşekkür ederim.

Doktora tezimi savunma sürecinde yer alarak değerli zamanını ayıran ve değerli görüşleriyle tezime katkı sağlayan saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Tuba GÖKÇEK ve Doç. Dr. İlknur ÖZPINAR'a teşekkür ederim.

Lisans ve lisansüstü eğitim hayatım boyunca iyi veya kötü tüm anlarda yanımda olan, maddi ya da manevi değerli desteğini benden hiç esirgemeyen, umutsuzluğa düştüğüm her anda beni motive ederek yolumu açan, güler yüzlü ve hoşgörülü kişiliğiyle huzurlu bir ortam yaratan sevgili eşim Ömer DENİZ'e teşekkür ederim.

Son olarak tez araştırmamın katılımcısı olan öğrencilerime azimle, sabırla, özveriyle, severek, isteyerek katılım gösterdikleri için teşekkür ediyorum.



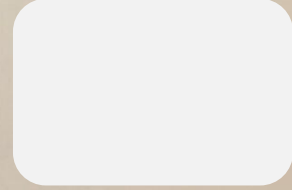
Sevgili eşim ve canım oğluma...

Tarih : 21.02.2024

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim.

Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR	vi
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	vii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xv
GÖRSELLER DİZİNİ	xvi
TABLolar DİZİNİ	xxiv
GRAFİKLER DİZİNİ	xxviii
1.GİRİŞ	1
1.1. Problem Durumu	1
1.2. Araştırmanın Amacı	3
1.3. Araştırmanın Önemi.....	4
1.4. Teorik Çerçeve	8
1.4.1. Matematiksel çalışma uzayı.....	8
1.4.1.1. Matematiksel çalışma nedir?	13
1.4.1.2. Epistemolojik ve bilişsel düzlemler	14
1.4.1.3. Oluşumlar.....	18
1.4.1.3.1. Semiyotik oluşum.....	19
1.4.1.3.2. Enstrümantal oluşum	21
1.4.1.3.3. Söylemsel oluşum	22
1.4.1.4. Oluşumların ikiyeşli kombinasyonu	22
1.4.1.5. Referans uygun ve kişisel MWS	25
1.4.1.6. MWS'nin yararları katkıları.....	27
1.4.1.7. MWS'nin uygulanmasına yönelik öneriler.....	29
1.4.1.8. MWS bağlamında literatür tarama	31
1.4.1.8.1. MWS bağlamında literatürün kısaca analizi.....	46
1.4.2. Aritmetik-cebir ilişkisi	49
1.4.2.1. Aritmetikten cebire geçiş neden zor?.....	52
1.4.2.2. Aritmetikten cebire geçişi kolaylaştıran unsurlar.....	53

1.4.2.2.1. Cebirsel gevezelik, problemleri farklı yollarla çözmek, fonksiyonel düşünme, genelleme.....	54
1.4.2.2.2. Eşit işareti ve ilişkisel düşünme.....	55
1.4.2.2.3. Değişken kavramı ve ilişkisel düşünme	58
1.4.2.3. Aritmetikten cebire geçişte öğretmenlere düşen görevler.....	59
1.4.2.4. Aritmetikten cebire geçiş bağlamında literatür tarama.....	60
1.4.2.4.1. Eşit işareti ile ilişkin araştırmalar.....	60
1.4.2.4.2. Değişken kavramına ilişkin araştırmalar	63
2. YÖNTEM	66
2.1. Araştırmanın Modeli	66
2.1.1. Öğretim deneyi	66
2.2. Pilot Çalışma.....	69
2.2.1. Pilot çalışmanın katılımcıları	69
2.2.2. Pilot çalışmaya ilişkin veri toplama	69
2.2.3. Pilot çalışmanın analizi ve bulgular	70
2.2.4. Pilot çalışmanın sonuçları.....	71
2.2.4.1. Pilot çalışmadan elde edilen veriler ışığında etkinliklere ilişkin öneriler	71
2.2.4.2. Pilot çalışmadan elde edilen veriler ışığında öğretim deneyine ilişkin çözüm önerileri	72
2.3. Esas Uygulama	73
2.3.1. Araştırma ortamı ve katılımcılar	73
2.3.2. Araştırmacının Rolü.....	76
2.3.3. Veri toplama	76
2.3.3.1. Veri toplama araçları.....	78
2.3.3.2. Öğretim deneyi sürecindeki veri toplama araçları.....	78
2.3.4. Veri analizi	82
3. BULGULAR.....	89
3.1. Eşit İşaretinin İlişkisel Yorumlanmasına İlişkin Bulgular	89
3.1.1. Kayra'nın matematiksel çalışma uzayı	89
3.1.1.1. Birinci adım: ilk değerlendirme	90
3.1.1.1.1. Kayra'nın kavramsal ve bağlamsal anlamıyla ilgili bulguları	90

3.1.1.1.2. <i>Kayra'nın matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları</i>	103
3.1.1.2. <i>İkinci adım: etkinlik-1 ve alıştırmalar</i>	110
3.1.1.2.1. <i>Kayra'nın kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları</i>	110
3.1.1.2.2. <i>Kayra'nın matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları</i>	114
3.1.1.3. <i>Üçüncü adım: etkinlik-2 ve alıştırmalar</i>	121
3.1.1.3.1. <i>Kayra'nın kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları</i>	121
3.1.1.3.2. <i>Kayra'nın matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları</i>	126
3.1.1.4. <i>Dördüncü adım: son değerlendirme</i>	129
3.1.1.4.1. <i>Kayra'nın kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları</i>	129
3.1.1.4.2. <i>Kayra'nın matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları</i>	136
3.1.1.4.3. <i>Kayra'nın bulgularına genel bakış</i>	140
3.1.2. <i>Nazlı'nın matematiksel çalışma uzayı</i>	143
3.1.2.1. <i>Birinci adım: ilk değerlendirme</i>	143
3.1.2.1.1. <i>Nazlı'nın kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları</i>	143
3.1.2.1.2. <i>Nazlı'nın matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları</i>	149
3.1.2.2. <i>İkinci adım: etkinlik-1 ve alıştırmalar</i>	157
3.1.2.2.1. <i>Nazlı'nın kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları</i>	157
3.1.2.2.2. <i>Nazlı'nın matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları</i>	161
3.1.2.3. <i>Üçüncü adım: etkinlik-2 ve alıştırmalar</i>	165
3.1.2.3.1. <i>Nazlı'nın kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları</i>	165

3.1.2.3.2. Nazlı'nın matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları	170
3.1.2.4. Dördüncü adım: son değerlendirme.....	175
3.1.2.4.1. Nazlı'nın kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları.....	175
3.1.2.4.2. Nazlı'nın matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları	181
3.1.2.4.3. Nazlı'nın bulgularına genel bakış.....	188
3.1.3. Ataberk'in matematiksel çalışma uzayı	190
3.1.3.1. Birinci adım: ilk değerlendirme	190
3.1.3.1.1. Ataberk'in kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları.....	190
3.1.3.1.2. Ataberk'in matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları	197
3.1.3.2. İkinci adım: etkinlik-1 ve alıştırmalar.....	203
3.1.3.2.1. Ataberk'in kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları.....	203
3.1.3.2.2. Ataberk'in matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları	210
3.1.3.3. Üçüncü adım: etkinlik-2 ve alıştırmalar	215
3.1.3.3.1. Ataberk'in kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları.....	215
3.1.3.3.2. Ataberk'in matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları	222
3.1.3.4. Dördüncü adım: son değerlendirme.....	225
3.1.3.4.1. Ataberk'in kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları.....	225
3.1.3.4.2. Ataberk'in matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları	232
3.1.3.4.3. Ataberk'in bulgularına genel bakış	236
3.1.4. Melda'nın matematiksel çalışma uzayı	238
3.1.4.1. Birinci adım: ilk değerlendirme	239

3.1.4.1.1. Melda'nın kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları.....	239
3.1.4.1.2. Melda'nın matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları	247
3.1.4.2. İkinci adım: etkinlik-1 ve alıştırmalar.....	253
3.1.4.2.1. Melda'nın kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları.....	253
3.1.4.2.2. Melda'nın matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları	258
3.1.4.3. Üçüncü adım: etkinlik-2 ve alıştırmalar	263
3.1.4.3.1. Melda'nın kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları.....	263
3.1.4.3.2. Melda'nın matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları	268
3.1.4.4. Dördüncü adım: son değerlendirme.....	271
3.1.4.4.1. Melda'nın kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları.....	272
3.1.4.4.2. Melda'nın matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları	280
3.1.4.4.3. Melda'nın bulgularına genel bakış	288
3.2. Değişken Kavramının İlişkisel Yorumlanmasına İlişkin bulgular.....	290
3.2.1. Kayra'nın matematiksel çalışma uzayı	290
3.2.1.1. Değişken kavramının işlemsel yorumunu anlamlandırmaya yönelik bulgular (1.,8., ve 9. Sorular)	290
3.2.1.2. Değişken kavramının ilişkisel yorumunu anlamlandırmaya yönelik bulgular (2.,3.,4.,5.,6.,7.,10. Sorular)	295
3.2.2. Nazlı'nın matematiksel çalışma uzayı.....	310
3.2.2.1. Değişken kavramının işlemsel yorumunu anlamlandırmaya yönelik bulgular (1.,8., ve 9. Sorular).....	310
3.2.2.2. Değişken kavramının ilişkisel yorumunu anlamlandırmaya yönelik bulgular (2.,3.,4.,5.,6.,7.,10. Sorular)	317
3.2.3. Ataberk'in matematiksel çalışma uzayı.....	332

3.2.3.1. <i>Değişken kavramının işlemsel yorumunu anlamlandırmaya yönelik bulgular (1.,8., ve 9. Sorular).....</i>	332
3.2.3.2. <i>Değişken kavramının ilişkisel yorumunu anlamlandırmaya yönelik bulgular (2.,3.,4.,5.,6.,7.,10. Sorular)</i>	338
3.2.4. Melda'nın matematiksel çalışma uzayı	351
3.2.4.1. <i>Değişken kavramının işlemsel yorumunu anlamlandırmaya yönelik bulgular (1.,8., ve 9. Sorular).....</i>	351
3.2.4.2. <i>Değişken kavramının ilişkisel yorumunu anlamlandırmaya yönelik bulgular (2.,3.,4.,5.,6.,7.,10. Sorular)</i>	357
4. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER.....	371
4.1. Sonuç	371
4.1.1. Eşit işaretime ilişkin sonuçlar	371
4.1.2. Değişken kavramına ilişkin sonuçlar.....	384
4.2. Tartışma	389
4.3. Öneriler	401
4.3.1. Uygulamaya yönelik öneriler	401
4.3.2. İleride yapılacak araştırmalara yönelik öneriler	402
KAYNAKÇA.....	404
EKLER	
ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1. Geometri Çalışma Uzayı (Kuzniak ve Richard,2014).....	9
Şekil 1.2. Matematiksel Çalışma Uzayı (Kuzniak ve Richard,2014).....	10
Şekil 1.3. Derouet ve Parzys (2016)'ın MWS modeli	11
Şekil 1.4. Kuzniak vd. (2016)'nin MWS modeli.....	18
Şekil 1.5. Kuzniak vd. (2016)'nin semiyotik oluşum modeli.....	20
Şekil 1.6. Kuzniak ve Richard (2014)'ın MWS düzlemler modeli	23
Şekil 1.7. Radford (2016)'ın düzlemler modeli.....	24
Şekil 1.8. Hitt vd. (2016)'nin MWS modeline katkısı.....	29
Şekil 1.9. Miranda, vd (2016)'nin MWS modeline katkısı	30
Şekil 1.10. Kuzniak ve Rauscher (2011)'in öğrenci-öğretmen-problem zinciri	31
Şekil 1.11. Miranda, Pluvinağ, ve Adjage (2016)'ın MWS modeline katkısı.....	41
Şekil 1.12. Barrera, (2013)'nın semiyotik oluşum modeli	46
Şekil 2.1. Çalışmada rehberlik edecek öğretim deneyi döngüsü	67
Şekil 2.2. Öğretim deneyi süreci	67
Şekil 2.3. Eşit işareti için öğretim deneyi döngüsü	68
Şekil 2.4. Değişken için öğretim deneyi döngüsü	68
Şekil 2.5. Verilerin analizi süreci ve üç farklı bağlamda analizi	83
Şekil 4.1. MWS modelinin çalışmamıza uyarlanması.....	388
Şekil 4.2. Miranda, Pluvinağ, ve Adjage (2016)'ın MWS modeli	397

GÖRSELLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Görsel 3.1. Kayra'nın bireysel uygulamada verdiği cevap	91
Görsel 3.2. Kayra'nın soru-3'te öğretmenin sorduğu ilave sorulara ilişkin cevabı	93
Görsel 3.3. Kayra'nın soru-5'e ilişkin cevabı	94
Görsel 3.4. Kayra'nın soru-6'ya ilişkin cevabı	96
Görsel 3.5. Kayra'nın soru-7'ye ilişkin cevabı	97
Görsel 3.6. Kayra'nın soru-8'e ilişkin cevabı	99
Görsel 3.7. Kayra'nın soru-9'a ilişkin cevabı	100
Görsel 3.8. Kayra'ya soru-9 ile ilgili öğretmen sorusu	101
Görsel 3.9. Kayra'nın soru-10'a ilişkin cevabı	102
Görsel 3.10. Kayra'nın soru-11'e ilişkin cevabı	105
Görsel 3.11. Kayra'nın soru-9'a ilişkin cevabı	109
Görsel 3.12. Etkinlik-1 soru-2.....	111
Görsel 3.13. Kayra'nın Etkinlik.1 Soru.3'e ilişkin cevabı	112
Görsel 3.14. Kayra'nın Etkinlik-1 Alıştırma-1 Soru-1'e ilişkin cevabı.....	113
Görsel 3.15. Kayra'nın Etkinlik-1 soru-1'e ilişkin cevabı.....	114
Görsel 3.16. Etkinlik.1 soru.2'ye ilişkin cevabı.....	116
Görsel 3.17. Kayra'nın etkinlik-1 soru-3'e ilişkin cevabı.....	116
Görsel 3.18. Kayra'nın Etkinlik-1 Alıştırma-1 soru-3'e ilişkin cevabı	118
Görsel 3.19. Kayra'nın Etkinlik-1 Alıştırma-1 soru-4'e ilişkin cevabı	119
Görsel 3.20. Kayra'nın Etkinlik.1 soru-1'e ilişkin cevabı	120
Görsel 3.21. Kayra'nın Etkinlik-1 soru-1'e ilişkin cevabının tartışılması	120
Görsel 3.22. Kayra'nın Etkinlik-2 soru-1'e ilişkin cevabı.....	125
Görsel 3.23. Kayra'nın Etkinlik-2 soru.3'e ilişkin cevabı	127
Görsel 3.24. Kayra'nın son değerlendirme soru-7'ye ilişkin cevabı	133
Görsel 3.25. Kayra'nın son değerlendirme soru-9'a ilişkin cevabı	134
Görsel 3.26. Kayra'nın son değerlendirme soru-6'ya ilişkin cevabı	140
Görsel 3.27. Nazlı'nın ilk değerlendirme soru-8'e ilişkin cevabı.....	149
Görsel 3.28. Nazlı'nın ilk değerlendirme soru-4'e ilişkin cevabı.....	153
Görsel 3.29. Nazlı'nın ilk değerlendirme soru-7'ye ilişkin cevabı.....	154
Görsel 3.30. Nazlı'nın Etkinlik-1 Alıştırma-1 soru-2'ye ilişkin cevabı.....	159
Görsel 3.31. Nazlı'nın 2. Adım etkinlik-1 soru-3'e ilişkin cevabı.....	159

Görsel 3.32. Nazlı'nın Etkinlik-1 soru-2'ye ilişkin cevabı	162
Görsel 3.33. Nazlı'nın Etkinlik-1 Alıştırma-2 soru-1'e ilişkin görüşme öncesi (solda) ve görüşme sonrası (sağda) cevabı.....	164
Görsel 3.34. Nazlı'nın Etkinlik-1 soru-1'e ilişkin cevabı	165
Görsel 3.35. Nazlı'nın Etkinlik-2 soru-1'e ilişkin cevabı	167
Görsel 3.36. Nazlı'nın Etkinlik-2 soru-2'ye ilişkin cevabı	168
Görsel 3.37. Nazlı'nın Etkinlik-2 Soru-1'e ilişkin cevabı	170
Görsel 3.38. Nazlı'nın Etkinlik-2 Alıştırma-1 soru-2'ye ilişkin cevabı.....	172
Görsel 3.39. Nazlı'nın Etkinlik-2 Alıştırma-1 soru-1'e ilişkin cevabı.....	173
Görsel 3.40. Nazlı'nın Etkinlik-2 Alıştırma-2 soru-1'e ilişkin cevabı.....	174
Görsel 3.41. Nazlı'nın son değerlendirme soru-3'e ilişkin cevabı.....	176
Görsel 3.42. Nazlı'nın son değerlendirme soru-11'e ilişkin cevabı.....	177
Görsel 3.43. Nazlı'nın son değerlendirme soru-11'e ilişkin önerisi	178
Görsel 3.44. Nazlı'nın son değerlendirme soru-12'ye ilişkin cevabı.....	180
Görsel 3.45. Nazlı'nın son değerlendirmede soru-1'e ilişkin cevabı.....	182
Görsel 3. 46. Nazlı'nın son değerlendirme soru-2'ye ilişkin cevabı.....	183
Görsel 3. 47. Nazlı'nın son değerlendirme soru-4'e ilişkin cevabı.....	185
Görsel 3. 48. Nazlı'nın son değerlendirme soru-7'ye ilişkin modellemesi.....	186
Görsel 3. 49. Nazlı'nın son değerlendirme soru-9'a ilişkin cevabı.....	187
Görsel 3. 50. Nazlı'nın son değerlendirme soru-10'a ilişkin cevabı.....	188
Görsel 3. 51. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-3'e ilişkin cevabı.....	192
Görsel 3. 52. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-5'e ilişkin cevabı.....	192
Görsel 3. 53. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-4'e ilişkin cevabı.....	194
Görsel 3. 54. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-6'ya ilişkin cevabı.....	195
Görsel 3. 55. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-10'a ilişkin cevabı.....	196
Görsel 3. 56. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-12'ye ilişkin cevabı.....	197
Görsel 3. 57. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-11'e ilişkin cevabı.....	199
Görsel 3. 58. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-4'e ilişkin cevabı.....	200
Görsel 3. 59. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-9'a ilişkin cevabı.....	202
Görsel 3. 60. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-12'ye ilişkin cevabı.....	203
Görsel 3. 61. Ataberk'in Etkinlik-1 soru-2'ye ilişkin cevabı.....	205
Görsel 3. 62. Ataberk'in Etkinlik-1 soru-3'e ilişkin cevabı.....	205
Görsel 3. 63. Ataberk'in Etkinlik-1 Alıştırma-2 soru-1'e ilişkin cevabı	206

Görsel 3.64. Ataberk'in Etkinlik-1 Alıştırma-1 soru-1'e ilişkin cevabı	207
Görsel 3.65. Ataberk'in Etkinlik-1 Alıştırma-1 soru-4'e ilişkin cevabı	208
Görsel 3.66. Ataberk'in Etkinlik-1 soru-1'e ilişkin cevabı.....	209
Görsel 3.67. Ataberk'in Etkinlik-1 soru-2'ye ilişkin cevabı.....	211
Görsel 3.68. Ataberk'in Etkinlik-1 soru-3'e ilişkin cevabı.....	212
Görsel 3.69. Grup ile yapılan görüşmede Etkinlik-1 Alıştırma-1 soru-1'e ilişkin....	213
Görsel 3.70. Ataberk'in Etkinlik-1 Alıştırma-1 soru-3'e ilişkin cevabı	214
Görsel 3.71. Ataberk'in Etkinlik-1 Alıştırma- soru-4'e ilişkin cevabı	214
Görsel 3.72. Ataberk'in Etkinlik-1 soru-1'e ilişkin cevabı.....	215
Görsel 3.73. Ataberk'in Etkinlik-2 soru-1'e ilişkin cevabı.....	216
Görsel 3.74. Ataberk'in Etkinlik-2 soru-2'ye ilişkin cevabı.....	217
Görsel 3.75. Ataberk'in Etkinlik-2 soru-3'e ilişkin cevabı.....	219
Görsel 3.76. Ataberk'in Etkinlik.2 Alıştırma.1 soru.1'e ilişkin cevabı	220
Görsel 3.77. Ataberk'in Etkinlik-2 soru-1'e ilişkin cevabı.....	223
Görsel 3.78. Ataberk'in Etkinlik.2 Alıştırma.1 soru.1'e ilişkin cevabı	224
Görsel 3.79. Ataberk'in son değerlendirme soru-1'e ilişkin cevabı	227
Görsel 3.80. Ataberk'in son değerlendirme soru-3'e ilişkin cevabı	228
Görsel 3.81. Ataberk'in son değerlendirme soru-5'e ilişkin cevabı	228
Görsel 3.82. Ataberk'in son değerlendirme soru-11'e ilişkin cevabı	230
Görsel 3.83. Ataberk'in son değerlendirme soru-4'e ilişkin cevabı	231
Görsel 3.84. Ataberk'in son değerlendirme soru-6'ya ilişkin cevabı	232
Görsel 3.85. Ataberk'in son değerlendirme soru-12'ye ilişkin cevabı	232
Görsel 3.86. Ataberk'in son değerlendirme soru-8'e ilişkin cevabı	235
Görsel 3.87. Ataberk'in son değerlendirme soru-9'a ilişkin cevabı	236
Görsel 3.88. Melda'nın ilk değerlendirme soru-1'e ilişkin cevabı	240
Görsel 3.89. Melda'nın ilk değerlendirme soru-3'e ilişkin cevabı	241
Görsel 3.90. Melda'nın ilk değerlendirme soru-4'e ilişkin cevabı	243
Görsel 3.91. Melda'nın ilk değerlendirme soru-8'e ilişkin cevabı	244
Görsel 3.92. Melda'nın ilk değerlendirme soru-6'ye ilişkin cevabı	251
Görsel 3.93. Melda'nın ilk değerlendirme soru-8'e ilişkin cevabı	252
Görsel 3.94. Melda'nın ilk değerlendirme soru-11'e ilişkin cevabı	253
Görsel 3.95. Melda'nın Etkinlik-1 soru-2'ye ilişkin cevabı	255
Görsel 3.96. Melda'nın Etkinlik-1 soru-3'e ilişkin cevabı.....	256

Görsel 3. 97. Melda'nın Etkinlik.1. Alıştırma.1 Soru.1'e ilişkin cevabı	257
Görsel 3. 98. Melda'nın Etkinlik-1 Alıştırma-1 soru-2'ye ilişkin cevabı	257
Görsel 3. 99. Melda'nın Etkinlik-1 soru-1'e ilişkin cevabı	258
Görsel 3. 100. Melda'nın Etkinlik-1 soru-2'ye ilişkin cevabı	260
Görsel 3. 101. Melda'nın Etkinlik-1 soru-3'e ilişkin cevabı	261
Görsel 3. 102. Melda'nın Etkinlik-1 Alıştırma-1 Soru-4'e ilişkin cevabı	262
Görsel 3. 103. Melda'nın Etkinlik-1 soru-1'e ilişkin cevabı	263
Görsel 3. 104. Melda'nın Etkinlik-2 soru-1'e ilişkin cevabı	265
Görsel 3. 105. Melda'nın Etkinlik2 soru-1'e ilişkin cevabı	266
Görsel 3. 106. Melda'nın Etkinlik-2 Alıştırma-1 soru-1'e ilişkin cevabı	267
Görsel 3. 107. Melda'nın Etkinlik-2 soru-2'ye ilişkin cevabı	269
Görsel 3. 108. Melda'nın Etkinlik-2 Alıştırma-1 soru-2'ye ilişkin cevabı	271
Görsel 3. 109. Melda'nın son değerlendirme soru-1'e ilişkin cevabı	273
Görsel 3. 110. Melda'nın son değerlendirme soru-2'ye ilişkin cevabı	273
Görsel 3. 111. Melda'nın son değerlendirme soru-3'e ilişkin cevabı	274
Görsel 3. 112. Melda'nın son değerlendirme soru-5'e ilişkin cevabı	275
Görsel 3. 113. Melda'nın son değerlendirme soru-4'e ilişkin cevabı	277
Görsel 3. 114. Melda'nın son değerlendirme soru-6'ya ilişkin cevabı	278
Görsel 3. 115. Melda'nın son değerlendirme soru-7'ye ilişkin cevabı	278
Görsel 3. 116. Melda'nın son değerlendirme soru-8'e ilişkin cevabı	279
Görsel 3. 117. Melda'nın son değerlendirme soru-9'a ilişkin cevabı	279
Görsel 3. 118. Melda'nın son değerlendirme soru-10'a ilişkin cevabı	280
Görsel 3. 119. Melda'nın soru-3'e ilişkin modellemesi	283
Görsel 3. 120. Melda'nın son değerlendirme soru-5'e ilişkin cevabı	283
Görsel 3. 121. Melda'nın son değerlendirme soru-8'e ilişkin cevabı	285
Görsel 3. 122. Melda'nın son değerlendirme soru-9'a ilişkin cevabı	286
Görsel 3. 123. Melda'nın son değerlendirme soru-9'a ilişkin bireysel görüşmede cevabı	286
Görsel 3. 124. Melda'nın son değerlendirme soru-10'a ilişkin cevabı	287
Görsel 3. 125. Kayra'nın değişken ilk değerlendirme soru-8'e ilişkin cevabı	292
Görsel 3. 126. Kayra'nın değişken son değerlendirme bireysel uygulamada soru-8'e ilişkin çözümü	292

Görsel 3. 127. Kayra'nın değişken son değerlendirme öğretmen rehberliğinden sonra soru-8'e ilişkin cebirsel temsili	293
Görsel 3. 128. Kayra'nın değişken ilk değerlendirme soru-9'a ilişkin cevabı.....	293
Görsel 3. 129. Kayra'nın değişken son değerlendirme soru-9'a ilişkin cevabı	294
Görsel 3. 130. Kayra'nın öğretmen rehberliğinden sonra kullandığı model.....	295
Görsel 3. 131. Kayra'nın değişken ilk değerlendirmede birbirine bağlı değişen nicelikler arasındaki ilişkiyi fark etmeksizin kullandığı teknik	296
Görsel 3.132. Kayra'nın değişken ilk değerlendirmede soru-3'e ilişkin cevabı.....	297
Görsel 3. 133. Kayra'nın değişken son değerlendirme soru-3'e ilişkin cevabı	298
Görsel 3. 134. Kayra'nın değişken ilk değerlendirmede soru-4'e ilişkin cevabı.....	299
Görsel 3. 135. Kayra'nın değişken son değerlendirme soru-4'e ilişkin cevabı	300
Görsel 3. 136. Kayra'nın değişken ilk değerlendirme soru-5'e ilişkin cevabı.....	301
Görsel 3. 137. Kayra'nın değişken ilk değerlendirme soru-5'e ilişkin cevabı.....	302
Görsel 3. 138. Kayra'nın son değerlendirme soru-5'e ilişkin cevabı	303
Görsel 3. 139. Kayra'nın değişken ilk değerlendirme soru-6'ya ilişkin cevabı.....	304
Görsel 3. 140. Kayra'nın değişken son değerlendirme soru-6'ya ilişkin cevabı	305
Görsel 3. 141. Kayra'nın değişken ilk değerlendirme soru-7'ye ilişkin cevabı.....	306
Görsel 3. 142. Kayra'nın değişken son değerlendirme soru-7'ye ilişkin cevabı	307
Görsel 3. 143. Kayra'nın değişken öğretmen rehberliğinden sonra problemin çözümünde işe koştugu ifade.....	307
Görsel 3. 144. Kayra'nın değişken ilk değerlendirmede soru-10'a ilişkin cevabı....	308
Görsel 3. 145. Kayra'nın değişken bireysel görüşmede soru-10'a ilişkin cevabı.....	308
Görsel 3. 146. Kayra'nın değişken son değerlendirme soru-10'a ilişkin cevabı	310
Görsel 3. 147. Nazlı'nın değişken ilk değerlendirme soru-1'e ilişkin cevabı.....	311
Görsel 3. 148. Nazlı'nın ilk değerlendirme bireysel uygulamada öğretmen rehberliğinden sonra soru-8'e ilişkin cevabı	314
Görsel 3. 149. Nazlı'nın son değerlendirme soru-8'e ilişkin cevabı.....	314
Görsel 3. 150. Nazlı'nın son değerlendirme soru-8'e ilişkin öğretmen rehberliğinden sonra cevabı.....	314
Görsel 3. 151. Nazlı'nın ilk değerlendirme bireysel uygulamada soru-9'a ilişkin cevabı.....	315
Görsel 3. 152. Nazlı'nın öğretmen rehberliğinden sonra denklem kurabildiği soru-9'a ilişkin cevabı	316

Görsel 3. 153. Nazlı'nın son değerlendirme soru-9'a ilişkin cevabı.....	317
Görsel 3. 154. Nazlı'nın öğretmen rehberliğinden sonra soru-9'a ilişkin cevabı	317
Görsel 3. 155. Nazlı'nın değişken ilk değerlendirme soru-3'e ilişkin cevabı.....	319
Görsel 3. 156. Nazlı'nın son değerlendirme soru-3'e ilişkin cevabı.....	321
Görsel 3. 157. Nazlı'nın değişken ilk değerlendirme soru-4'e ilişkin cevabı.....	322
Görsel 3. 158. Nazlı'nın son değerlendirme soru-4'e ilişkin cevabı.....	322
Görsel 3. 159. Nazlı'nın değişken ilk değerlendirme soru-5'e ilişkin cevabı.....	323
Görsel 3. 160. Nazlı'nın son değerlendirme soru-5'e ilişkin cevabı.....	324
Görsel 3. 161. Nazlı'nın değişken ilk değerlendirme soru-6'ya ilişkin bireysel uygulamada cevabı	326
Görsel 3. 162. Nazlı'nın değişken ilk değerlendirme soru-6'ya ilişkin bireysel görüşmede cevabı	326
Görsel 3. 163. Nazlı'nın son değerlendirme soru-6'ya ilişkin cevabı.....	327
Görsel 3. 164. Nazlı'nın son değerlendirme soru-6'ya ilişkin öğretmen rehberliğinden sonra cevabı.....	327
Görsel 3. 165. Nazlı'nın son değerlendirme soru-6'ya ilişkin öğretmen rehberliğinden sonra bireysel cevabı	327
Görsel 3. 166. Nazlı'nın değişken ilk değerlendirme soru-7'ye ilişkin bireysel uygulamada cevabı	328
Görsel 3. 167. Nazlı'nın son değerlendirme bireysel uygulamada soru-7'ye ilişkin cevabı.....	329
Görsel 3. 168. Nazlı'nın son değerlendirme soru-7'ye ilişkin öğretmen rehberliğinden sonra cevabı.....	329
Görsel 3. 169. Nazlı'nın ilk değerlendirme soru-10'a ilişkin bireysel uygulamada cevabı.....	330
Görsel 3. 170. Son değerlendirme soru-10'a ilişkin cevabı	331
Görsel 3. 171. Ataberk'in son değerlendirme bireysel uygulamada soru-1'e ilişkin cevabı.....	333
Görsel 3. 172. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-8'e ilişkin cevabı.....	334
Görsel 3. 173. Ataberk'in son değerlendirme soru-8'e ilişkin cevabı	335
Görsel 3. 174. Ataberk'in soru-9'a ilişkin cevabı	336
Görsel 3. 175. Ataberk'in son değerlendirme soru-9'a ilişkin cevabı	337

Görsel 3. 176. Ataberk'in son değerlendirme soru-9'a ilişkin öğretmen rehberliğinden sonra cevabı.....	338
Görsel 3. 177. Ataberk'in son değerlendirme soru-2'ye ilişkin cevabı	339
Görsel 3. 178. Ayberk'in ilk değerlendirme soru-3'e ilişkin cevabı.....	340
Görsel 3. 179. Ataberk'in son değerlendirme soru-3'e ilişkin cevabı	341
Görsel 3. 180. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-4'e ilişkin cevabı.....	342
Görsel 3. 181. Ataberk'in son değerlendirme soru-5'e ilişkin cevabı	343
Görsel 3. 182. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-5'e ilişkin cevabı.....	344
Görsel 3. 183. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-5'e ilişkin öğretmen rehberliği sonrası cevabı.....	344
Görsel 3. 184. Ataberk'in son değerlendirme soru-5'e ilişkin cevabı	345
Görsel 3. 185. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-4'e ilişkin bireysel görüşmede cevabı	346
Görsel 3. 186. Ataberk'in son değerlendirme soru-6'ya ilişkin cevabı	347
Görsel 3. 187. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-7'ye ilişkin cevabı.....	348
Görsel 3. 188. Ataberk'in son değerlendirme soru-7'ye ilişkin cevabı	348
Görsel 3. 189. Ataberk'in son değerlendirme soru-10'a ilişkin cevabı	350
Görsel 3. 190. Melda'nın ilk değerlendirme soru-1'e ilişkin cevabı	351
Görsel 3. 191. Melda'nın son değerlendirme soru-1'e ilişkin cevabı	352
Görsel 3. 192. Melda'nın ilk değerlendirme soru-8'e ilişkin cevabı	353
Görsel 3. 193. Melda'nın son değerlendirme soru-8'e ilişkin cevabı	354
Görsel 3. 194. Melda'nın son değerlendirme öğretmen rehberliğinden sonra soru-8'e ilişkin cevabı	354
Görsel 3. 195. Melda'nın ilk değerlendirme soru-9'a ilişkin cevabı	355
Görsel 3. 196. Melda'nın ilk değerlendirme soru-9'a ilişkin öğretmen rehberliğinden sonra cevabı.....	355
Görsel 3. 197. Melda'nın son değerlendirme soru-9'a ilişkin cevabı	356
Görsel 3. 198. Melda'nın son değerlendirme soru-9'a ilişkin öğretmen rehberliğinden sonra cevabı.....	356
Görsel 3. 199. Melda'nın ilk değerlendirme bireysel uygulamada soru-2'ye ilişkin cevabı.....	357
Görsel 3. 200. Melda'nın son değerlendirme soru-2'ye ilişkin cevabı	358
Görsel 3. 201. Melda'nın ilk değerlendirme soru-3'e ilişkin cevabı	359

Görsel 3. 202. Melda'nın son değerlendirme soru-3'e ilişkin cevabı	361
Görsel 3. 203. Meyra'nın ilk değerlendirme soru-4'e ilişkin cevabı	361
Görsel 3. 204. Melda'nın son değerlendirme soru-4'e ilişkin cevabı	362
Görsel 3. 205. Melda'nın ilk değerlendirme soru-5'e ilişkin cevabı	364
Görsel 3. 206. Melda'nın son değerlendirme soru-5'e ilişkin cevabı	364
Görsel 3. 207. Melda'nın ilk değerlendirme soru-6'ya ilişkin cevabı	365
Görsel 3. 208. Melda'nın son değerlendirme soru-6'ya ilişkin cevabı	366
Görsel 3. 209. Melda'nın son değerlendirme soru-6'ya ilişkin öğretmen rehberliğinden sonra cevabı.....	367
Görsel 3. 210. Melda'nın ilk değerlendirme soru-7'ye ilişkin cevabı	367
Görsel 3. 211. Melda'nın son değerlendirme soru-7'ye ilişkin cevabı	368
Görsel 3. 212. Melda'nın ilk değerlendirme soru-10'a ilişkin öğretmen rehberliğinden sonra cevabı.....	369
Görsel 3. 213. Melda'nın son değerlendirme soru-10'a ilişkin cevabı	370

TABLÖLAR DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Tablo 1.1. MWS çalışmalarının amaçlarına göre dağılımı	47
Tablo 1.2. MWS çalışmalarının yöntemlerine göre dağılımları	48
Tablo 1.3. MWS çalışmalarının alan bakımından dağılımları	48
Tablo 1.4. MWS çalışmalarının teknoloji varlığı bakımından dağılımları	48
Tablo 1.5. MWS çalışmalarının katılımcı yaşı bakımından dağılımları	49
Tablo 1.6. Jones, Inglis, Gilmore ve Dowens'in (2012) matematiksel eşitlik bilgisi için haritası	57
Tablo 1. 7. Değişken kavramının aritmetik ve cebir bakış açısıyla gelişimi	59
Tablo 1. 8. Jones, Inglis, Gilmore ve Dowens (2012)'in eşittir işareti ifade etmeye yönelik sınıflandırması	61
Tablo 2. 1. Eşit işareti ile ilişkili pilot çalışma takvimi.....	70
Tablo 2. 2. Değişken kavramına ilişkili pilot çalışma takvimi	70
Tablo 2. 3. Esas uygulama eşit işareti ile ilişkili uygulama takvimi	77
Tablo 2. 4. Esas uygulama değişken kavramına ilişkili uygulama takvimi	77
Tablo 2. 5. Eşit işareti ölçme aracıdaki temalar ve alt temaları.....	79
Tablo 2. 6. Veri analizinde kullanılmak üzere eşit işareti ile ilişkili etkinlik ve alıştırmaların analizi	80
Tablo 2. 7. Veri analizinde kullanılmak üzere değişken kavramına ilişkili ilk ve son değerlendirmenin analizi	82
Tablo 2. 8. Veri analizinde eşit işareti ile ilgili oluşumların görüldüğü durumlara ilişkili göstergeler	84
Tablo 2. 9. Veri analizinde değişken kavramı ile ilgili oluşumların görüldüğü durumlara ilişkili göstergeler.....	84
Tablo 2. 10. Veri Analizinde Eşit İşareti ile İlgili Düzlemlerin Görüldüğü Durumlara İlişkili Göstergeler	85
Tablo 2. 11. Veri Analizinde Değişken ile ilgili Düzlemlerin Görüldüğü Durumlara İlişkili Göstergeler	85
Tablo 2. 12. Eşit işareti yorumlama biçimlerine ilişkili göstergeler.....	86
Tablo 2. 13. Değişkenin yorumlama biçimlerine ilişkili göstergeler.....	86

Tablo 3.1.	Kayra'nın ilk değerlendirmede eşit işaretini yorumlama biçimleri ve sorulara göre dağılımı	90
Tablo 3.2.	Kayra'nın ilk değerlendirmede oluşumlar ve düzlemlerin sorulara göre durumu.....	103
Tablo 3.3.	Kayra'nın 2. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimlerinin sorulara göre dağılımı.....	110
Tablo 3.4.	Kayra'nın 2. Adımda oluşumlar ve düzlemlerin sorularda görülme durumu.....	115
Tablo 3.5.	Kayra'nın 3. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimlerinin sorulara göre dağılımı.....	121
Tablo 3.6.	Kayra'nın 3. Adımında oluşumlar ve düzlemlerin sorularda görülme durumu	126
Tablo 3.7.	Kayra'nın 4. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimlerinin sorulara göre dağılımı.....	129
Tablo 3.8.	Kayra'nın son değerlendirmede oluşumlar ve düzlemlerin sorularda görülme durumu	136
Tablo 3.9.	Kayra'nın tüm adımlarda eşit işaretini yorumlama biçimlerinin görülme oranları	141
Tablo 3.10.	Nazlı'nın ilk değerlendirme eşit işaretini yorumlama biçimlerinin sorulara göre dağılımı.....	143
Tablo 3.11.	Nazlı'nın ilk değerlendirmede oluşumlar ve düzlemlerin sorularda görülme durumu	150
Tablo 3.12.	Nazlı'nın 2. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimlerinin sorulara göre durumu.....	157
Tablo 3.13.	Nazlı'nın 2. Adımda oluşumlar ve düzlemlerin sorularda görülme durumları	161
Tablo 3.14.	Nazlı'nın 3. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimlerinin sorulara göre dağılımı.....	166
Tablo 3.15.	Nazlı'nın 3. Adımda oluşumlar ve düzlemlerin görülme durumunun sorulara göre dağılımı.....	171
Tablo 3.16.	Nazlı'nın 4. Adımda eşit işaretinin yorumlama biçimlerini kullama durumunun sorulara dağılımı.....	175

Tablo 3.17. Nazlı'nın 4. Adımda oluşumlar ve düzlemlerin sorulara göre dağılımı.....	181
Tablo 3.18. Ataberk'in ilk değerlendirmede eşit işaretini yorumlama biçimlerini kullanma durumunun sorulara göre dağılımı	191
Tablo 3.19. Ataberk'in ilk değerlendirmede oluşumlar ve düzlemlerinin sorulara göre dağılımı	197
Tablo 3.20. Ataberk'in 2. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimlerinin sorulara göre dağılımı	204
Tablo 3.21. Ataberk'in 2. Adımda oluşumlar ve düzlemlerinin görülme durumlarının sorulara göre dağılımı	210
Tablo 3.22. Ataberk'in 3. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimlerinin sorulara göre dağılımı	215
Tablo 3.23. Ataberk'in 3. Adımda oluşumlar ve düzlemlerinin sorulara göre görülme durumu	222
Tablo 3.24. Ataberk'in son değerlendirmede eşit işaretini yorumlama biçimlerinin sorulara dağılımı	226
Tablo 3.25. Ataberk'in 4. Adımda eşit işaretinin yorumlanmasında oluşumlar ve düzlemlerin sorulara göre dağılımı	233
Tablo 3.26. Melda'nın ilk değerlendirmede eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerini kullanma durumunun sorulara göre dağılımı..	239
Tablo 3.27. Melda'nın ilk değerlendirmede oluşumlar ve düzlemlerin görülme durumunun sorulara göre dağılımı	247
Tablo 3.28. Melda'nın 2. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimlerinin sorulara göre dağılımı	254
Tablo 3.29. Melda'nın 2. Adımda oluşumlar ve düzlemlerin sorulara göre görülme durumu	259
Tablo 3.30. Melda'nın 3. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimlerinin sorularda görülme durumu.....	264
Tablo 3.31. Melda'nın 3. Adımda oluşumlar ve düzlemlerin sorularda görülme durumu	268
Tablo 3.32. Melda'nın son değerlendirmede eşit işaretini yorumlama biçimlerinin sorularda görülme durumu	272

Tablo 3.33. Melda'nın son değerlendirmede oluşumlar ve düzlemlerin görülme durumu	281
Tablo 3.34. Melda'nın tüm adımlarda eşit işaretini yorumlama biçimlerinin görülme oranı.....	289
Tablo 4.1. Çalışmanın sonucunda: eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerini tanımlayan destekleyen ifadeler	382



GRAFİKLER DİZİNİ

Grafik 3. 1. Kayra'nın ilk değerlendirmede yorumlama biçimlerini kullanma oranı	91
Grafik 3. 2. Kayra:1. Adımda oluşumlar ve düzlemlerin görülme oranı	104
Grafik 3. 3. Kayra'nın eşit işaretini yorumlama biçimlerinin oranları	111
Grafik 3. 4. Kayra'nın 2. Adımda oluşumlar ve düzlemlerin görülme oranı	115
Grafik 3. 5. Kayra'nın 3. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimlerinin görülme oranları	122
Grafik 3. 6. Kayra'nın 3. Adımda oluşumlar ve düzlemlerin görülme oranı	127
Grafik 3. 7. Kayra'nın eşit işaretini yorumlama biçimlerinin görülme oranı	129
Grafik 3. 8. Kayra'nın son değerlendirmede oluşumlar ve düzlemlerin görülme oranı	137
Grafik 3. 9. Kayra'nın tüm adımlarda oluşumlar ve düzlemler bakımından değişimi	142
Grafik 3. 10. Kayra'nın oluşumlar ve düzlemler bağlamında genel karakteri	142
Grafik 3. 11. Nazlı'nın ilk değerlendirmede eşit işaretini yorumlama biçimlerinin kullanılma oranları	144
Grafik 3. 12. Nazlı'nın ilk değerlendirmede oluşumların ve düzlemlerin görülme oranı	150
Grafik 3. 13. Nazlı'nın 2. Adımda eşit işaretinin yorumlama biçimlerini kullanma oranları	157
Grafik 3.14. Nazlı'nın 2. Adımda oluşumlar ve düzlemlerin görülme oranları	162
Grafik 3.15. Nazlı'nın 3. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimlerini kullanma oranı	166
Grafik 3.16. Nazlı'nın 3. Adımda oluşum ve düzlemlerin görülme oranları	171
Grafik 3.17. Nazlı'nın 4. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimlerini kullanma oranı	176
Grafik 3.18. Nazlı'nın son değerlendirmede oluşumlar ve düzlemlerin görülme oranı	182
Grafik 3.19. Nazlı'nın eşit işaretini yorumlama biçimlerinin tüm adımlarda kullanılma oranlarının değişimi	188
Grafik 3.20. Nazlı'nın oluşumlar ve düzlemlerin tüm adımlarda görülme oranlarının değişimi	189

Grafik 3.21. Nazlı'nın tüm adımlarda oluşumlar ve düzlemler bağlamında genel karakteri	190
Grafik 3.22. Ataberk'in ilk değerlendirmede eşit işaretini yorumlama biçimlerini kullanma oranı	191
Grafik 3.23. Ataberk'in ilk değerlendirmede oluşumlar ve düzlemlerin görülme oranı.....	197
Grafik 3.24. Ataberk'in 2. Adımda eşit işaretinin yorumlama biçimlerini kullanma oranları	204
Grafik 3.25. Ataberk'in 2. Adımda oluşumlar ve düzlemlerin görülme oranları.....	211
Grafik 3.26. Ataberk'in 3. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimini kullanma oranları.....	216
Grafik 3.27. Ataberk'in 3. Adımda oluşumlar ve düzlemlerinin görülme oranları.....	222
Grafik 3.28. Ataberk'in 4. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimlerinin oranları.....	226
Grafik 3.29. Ataberk'in 4. Adımda oluşumlar ve düzlemlerin görülme oranı.....	233
Grafik 3.30. Ataberk'in eşit işaretini yorumlama biçimlerini tüm adımlarda kullanma oranının değişimi	236
Grafik 3.31. Ataberk'in tüm adımlarda oluşumlar ve düzlemler bağlamında genel karakteri	237
Grafik 3.32. Ataberk'in tüm adımlarda oluşumlar ve düzlemler bağlamında değişimi	238
Grafik 3.33. Melda'nın ilk değerlendirmede eşit işaretini yorumlama biçimlerini kullanma oranı	240
Grafik 3.34. Melda'nın ilk değerlendirme oluşumlar ve düzlemlerin görülme oranı.....	247
Grafik 3.35. Melda'nın 2. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimlerinin görülme oranı.....	254
Grafik 3.36. Melda'nın 2. Adımda oluşumlar ve düzlemlerin görülme oranı	259
Grafik 3.37. Melda'nın 3. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimlerinin görülme oranı	264
Grafik 3.38. Melda'nın 3. Adımda oluşumlar ve düzlemlerin görülme oranı	269

Grafik 3.39. Melda'nın son değerlendirmede eşit işaretini yorumlama biçimlerinin görülme oranı.....	272
Grafik 3.40. Melda'nın son değerlendirmede oluşumlar ve düzlemlerin görülme oranı	281
Grafik 3.41. Melda'nın eşit işaretini yorumlama biçimlerini tüm adımlarda kullanma oranının değişimi	289
Grafik 3.42. Melda'nın tüm adımlarda oluşumlar ve düzlemlerin görülme oranının değişimi	290



1.GİRİŞ

Bu bölümde problem durumu, araştırmanın amacı, araştırmanın önemi, teorik çerçeve bölümü sunulmuştur. Teorik çerçeve bölümü matematiksel çalışma uzayı ve aritmetik cebir ilişkisi başlıkları altında sunulmuş olup her bir teorik çerçeve için temel kavramların yanında ilgili araştırmalara yer verilmiştir.

1.1.Problem Durumu

Eğitimin, bilginin nesilden nesile akarılmasında önemli bir paya sahip olmasının yanında bu aktarım sürecini etkileyen unsurların başında öğrenci, öğretmen ve öğretim ortamı olduğunu söylemek mümkündür. Eğitim ve matematik eğitimi alanında yapılan çalışmaların öncelikle öğretim ortamı ve öğretmeni odağına aldığı, öğrencinin pasif bir alıcı konumunda değerlendirildiği uzun yıllardan sonra; öğrencinin bilgiyi zihninde oluşturduğu şemalarla yapılandıran aktif bir öğrenme süreci içerisinde olduğu yönünde çalışmalara yöneldiği görülmektedir. Öğrenci öğrenmesini merkeze alan Kuzniak, Nechache ve Drouhard (2016)'a göre 1970'lerin başından beri matematik öğretimi yeniden derinlemesine değerlendirilmekte, özellikle öğrenci öğrenmesi üzerine odaklanılmaktadır. Öğrenci öğrenmesi eğitim sistemindeki en büyük zorluklardan biri olarak düşünülmektedir. Öğrenci öğrenmesinde önemli olan iki unsurdan biri öğrencinin okulda öğretmenle çalışması iken ikincisi yeterli ve etkili matematiksel çalışmanın gerçekten öğrenci tarafından üretildiğine emin olunması gerektiğidir (Kuzniak vd., 2016). Burada karşımıza etkili ve verimli matematiksel çalışmanın nasıl olacağı, neler gerektirdiği sorusu gelmektedir. Bu probleme bütüncül bir bakış açısıyla cevap veren MWS (Mathematical Working Space) teorik çerçevesi hem öğrenme ortamı tasarımı hem de öğrenme sürecinde işe koşulabilecek bir model ortaya koymaktadır. Bütüncül bir matematiksel çalışma için hem öğrencinin öğrenme süreci hem de öğretmenin öğretim sürecini nasıl planlandığı ve uyguladığı göz önünde bulundurulmalıdır. Matematiksel çalışma kavramı, Matematiksel Çalışma Uzayı (Mathematical Working Space: MWS) teorik çerçevesi (modeli) ile birlikte, 10 yıldan fazla bir süredir çeşitli ülkelerden araştırmacılar arasında işbirlikçi çalışmanın amacı haline gelmektedir (Kuzniak vd.,2016). Matematiksel çalışma bilim yapma süreci ile yakından ilişkili olup bu süreçte öğrenciler tarafından takip edilmesi gereken rota semiyotik, enstrümantal ve söylemsel oluşumlarla beraber gerçekleşmektedir (Kuzniak vd.,2016). Öğrencilerin öğrenme sürecinde etkili bir matematiksel çalışma

gerçekleştirmeleri için semiyotik, enstrümantal ve söylemsel oluşumlarla beraber epistemolojik-bilişsel düzlemler arası etkileşimler önemli olmaktadır. Bununla beraber öğrencinin matematiksel çalışmada kullandığı teknikler, attığı adımları gerekçelendirme sürecinde tercihleri öğrencinin oluşumların ikiyeşerli kombinasyonu ile oluşan düzlemlerde yer alma durumunu da ortaya çıkarmaktadır. Böylelikle etkili ve verimli bir öğrenme sürecini etkileyen tüm unsurlar derinlemesine incelenmiş ve betimlenmiş olmakla beraber çalışılan konunun epistemolojik düzlemi ile öğrencinin bilişsel süreçleri arasındaki etkileşimi bağlamında da değerlendirilmesi sağlanmış olmaktadır.

Öğrenci öğrenmesini merkeze alan ve öğrenme sürecinde yaşanan zorlukları ortaya koymada etkili bir araç olan MWS teorik çerçevesi ile matematik eğitiminde öğrenci öğrenmelerinde yaşanan zorluklar da ortaya çıkarılmakta; bu zorlukları ortadan kaldırma ya da azaltmak adına yine MWS modelinin işe koşularak öğrenme ortamı tasarımıyla yararlanılabilmektedir. Kaput'a (2007) göre cebir çoğu zaman öğrenciler için zorluk kaynağı olarak görülmüştür. Cebirde öğrencilerin yaşadığı zorluğu aritmetikte var olan temel kavram ve sembollerin cebirde de yer alması ile ilişkilendiren, farklı iki alan gibi görünen bu alanların arasındaki benzerlik, farklılık ve ilişkinin öğrenciler tarafından anlamlandırılabilmesinin bu zorluğu pekiştirdiğini ortaya koyan çalışmalar yer almaktadır. Bazı araştırmacılar bu engelleri aritmetik ve cebir arasındaki bilişsel boşluğa bağlamış olsalar da, diğerleri onları okul cebirinin geç ve ani girişine bağlamışlardır (Kaput, 2007). Kieran (2004) aritmetik ve cebirin ayrık konular olduğu yönündeki yanlış algı kaldırıldığında, orta ve lise cebirine karşı direncin azaltılacağını dile getirmektedir. Kieran'ın (2004) belirttiği gibi, erken sınıflarda cebirsel düşünmenin neye benzemesi gerektiği konusunda genel bir fikir birliği olduğu görünmemektedir. Alan yazına bakıldığında aritmetikten cebire geçiş sürecini kolaylaştıran pek çok unsur ortaya koyulmakla beraber bu unsurlardan birinin de genelleme olduğu düşünülmektedir (Cai ve Knuth, 2011). Hohensee'ye (2017) göre araştırmacılar erken cebirin formal cebiri erkenden öğretmek olarak anlaşılmaması gerektiği konusunda hem fikir olup pek çoğu erken cebirin çekirdeğini şekillendirmek için aşağıdaki üç matematiksel temayı takip etmenin önemine vurgu yapmaktadır: genelleştirilmiş aritmetik, fonksiyonel ilişki, eşit işaretinin ilişkisel yorumu (Hohensee, 2017). Cai ve Moyer (2008)'e göre cebirsel düşüncenin önemli özelliklerinden biri temsil kullanarak cebirsel genelleme ve sembolizm ile ilgilidir. Bir harf sembolü yalnızca bilinmeyenler için bir yer tutucu olarak değil (örneğin, $2x-1=7$ gibi), aynı zamanda bir dizi değerin genelleştirilmiş bir

temsilcisi olarak da kullanılabilir (örneğin, $y=3x+1$). Alan yazında cebirsel düşünmede yer verilen değişken ve bilinmeyen arasındaki farkın da öğrenciler tarafından anlamlandırılmasının önemine vurgu yapılmaktadır. Alan yazına bakıldığında aritmetikten cebire geçiş süreci öğrencilerin zorlandığı bir süreç olup bu süreci kolaylaştırmaya yönelik araştırmacılar arasında ortak bir fikir birliği olmasa da pek çok öneri sunulmaktadır. Bu önerilerin eşitlik ve değişken kavramları etrafında yoğunlaştığı dikkat çekmektedir.

Öğrencilerin aritmetikten cebire geçişini kolaylaştıran eşit işaretinin ilişkisel yorumlanmasının ve değişken kavramının anlamının desteklenmesi için nasıl bir öğrenme ortamına ihtiyaç duyulduğu; bu öğrenme ortamının öğrencilerin bilişsel süreçlerine nasıl etki ettiğini derinlemesine incelemek için MWS teorik çerçevesinin epistemolojik düzlem ile bilişsel düzlem arasındaki etkileşimi semiyotik oluşum, enstrümantal oluşum ve söylemsel oluşum bağlamında ele alınarak aritmetik ve cebir alanlarında ortak kavram olarak yer bulan eşitlik ve değişken kavramlarının matematiksel çalışmalarda bütüncül ve etkin bir enstrüman olarak işe koşulmasının desteklenmesi; aynı zamanda öğrencilerin bilişsel şemalarında meydana gelen değişimlerin, kullandıkları tekniklerin matematiksel çalışmalarda yer alma tercihleri doğrultusunda teorik çerçevedeki oluşumların ikiyeşerli kombinasyonu ile oluşan düzlemler bağlamında ele alınmış olması öğrenme sürecini ve etkili, verimli bir matematiksel çalışma için gerekli bileşenleri derinlemesine betimleme fırsatı yaratmaktadır.

1.2.Araştırmanın Amacı

Bu araştırmada MWS (matematiksel çalışma uzayı) teorik çerçevesinden yararlanarak aritmetikten cebire geçiş aşamasında eşitlik ve değişken kavramlarının ilişkisel yorumlanmasına yönelik tasarlanan öğretim sürecinde öğrencilerin bilişsel süreçlerinin epistemolojik-bilişsel düzlemler arası etkileşiminin, semiyotik, söylemsel, enstrümantal oluşumlardaki dinamikliği ve oluşumların ikiyeşerli kombinasyonu ile oluşan semiyotik-enstrümantal, semiyotik-söylemsel ve enstrümantal-söylemsel düzlemler bağlamında incelenmesi hedeflenmektedir.

Aritmetikten cebire geçiş aşamasında eşitlik ve değişken kavramlarına yönelik tasarlanan öğretim sürecinde,

1. Eşitlik kavramında öğrencilerin kişisel çalışma uzayları oluşumlar ve oluşumların ikiyeşerli kombinasyonu ile oluşan düzlemler bağlamında nasıldır?
2. Değişken kavramında öğrencilerin kişisel çalışma uzayları oluşumlar ve oluşumların ikiyeşerli kombinasyonu ile oluşan düzlemler bağlamında nasıldır?

1.3.Araştırmanın Önemi

Bu araştırmada aritmetik ile cebir öğrenme alanları arasında köprü kurmayı sağlayan aritmetikten cebire geçiş bağlamında çalışılmıştır. Aritmetikten cebire geçişte iki alan arasındaki farklılıklar Kuzniak ve Richard (2014)'ın matematiksel çalışma uzayı teorik çerçevesinde ifade ettiği gibi semiyotik temsiller ve bu temsillerin epistemolojik-bilişsel düzlemlerdeki etkileşimleri semiyotik oluşum bağlamında incelendiğinde aritmetik ve cebirde ortak işaret ve sembollerin sözdizimsel, anlamsal, fonksiyonel, yapısal farklılıkları ve benzerlikleri belirlenmiş olacağından hem öğrenme hem de öğretim sürecini şekillendirmede önemli bir yere sahip olacaktır. Bununla beraber aritmetik ve cebirde benzer işaret, sembol ve kavramlar kullanılmasına rağmen aritmetik alanı ve cebir alanındaki problem durumlarında bunların işe koşulmasında öğrencilerin kullandığı teknikler ve bilişsel süreçleri farklılaşmaktadır. Bir artefactın problemi çözmek amacıyla kullanılması sürecinde geliştirilen bilişsel şemaların ve kullanılan tekniklerin incelenmesi boyutunun da önemli bir yere sahip olması sebebiyle sürecin matematiksel çalışma uzayı teorik çerçevesinin enstrümantal oluşum boyutundan da incelenmesi yerinde olacaktır. Aritmetikten cebire geçiş sürecinde öğrencilerin kullandığı teknikler ve algoritmaları neden sonuç ilişkisi kurarak, tümdengelimsel ve tümevarımsal gerekçelendirmeler yapabilmeleri öğrenme sürecine olumlu katkı sağlayacağından söylemsel oluşum boyutundan da incelenmesi anlamlı olacaktır. Bu nedenle çalışmada öğrencilerin erken cebir alanındaki bilişsel süreçleri; konunun yapısı ile yakından ilişkili olan semiyotik oluşum, öğrenenin öğrenme sürecinde kullandığı artefactları enstrümana dönüştürmesi ile ilgili olan enstrümantal oluşum ve öğrenme sürecinde kullandığı algoritmaları gerekçelendirebilmesi ile yakından ilişkili olan söylemsel oluşum boyutundan incelenmiştir. Bu amaçla uygun ve kişisel MWS'ler ortaya konup birbirleri ile etkileşimleri belirlenmeye çalışılmıştır.

Öğrenci öğrenmesini merkeze alan pek çok teorik çerçeve olmakla beraber MWS, eğitimde en büyük zorluklardan biri olarak düşünülen öğrenci öğrenmesinin bütüncül matematiksel çalışmalardan oluşması konusunda bize rehberlik etmektedir. Bu

çalışmada öğrencilerin, tasarlanmış uygun bir matematiksel çalışma uzayında etkili ve verimli bir çalışma gerçekleştirmesi MWS teorik çerçevesi bağlamında ele alınacağından alan yazında MWS ile yapılan çalışmalar incelenmiş ve bu çalışmanın alan yazına olan katkısı ortaya konmaya çalışılmıştır. MWS yeni bir teorik çerçeve ve model oluşundan dolayı gelişmeye açık ve yapılan yeni çalışmalarla katkı sağlanabilecek esnek bir yapıya sahiptir. MWS teorik çerçevesinin kullanılarak tasarlandığı ya da analiz edildiği çalışmalara bakıldığında bu çerçevenin farklı amaçlarla kullanıldığı görülmektedir (Tablo 1.1). Örneğin: ‘bilişsel süreçteki oluşumları tanımlayarak öğrenci çalışmalarının analizi için bir model olarak kullanmak’; ‘MWS’yi tanıtan açıklayan soru ve zorluklara cevap veren yararlarını bazı bağlamlarda (kanıt gibi) ortaya koyma’ ; ‘kavram yanlışlarını MWS bakımından yorumlamak ve öğretmen eğitimine bu bağlamda destek olmak’; ‘etkili ve verimli matematiksel çalışma sağlamak’; ‘bir kavramın MWS bağlamında analizi ile uygulamaya dair önerilerde bulunmak’; ‘teknoloji kullanımının MWS’ye etkisini ortaya koymak’ (Tablo 1.1). Bu çalışmada da MWS teorik çerçevesi, hem aritmetikten cebire geçişi kolaylaştıracak bir öğretim sürecini eşitlik ve değişken kavramları bağlamında tasarlamak hem de bu süreçte öğrencilerin bilişsel süreçlerini analiz etmek amacıyla kullanılmış olup; bununla beraber öğrenci zorluklarını da teorik çerçevede yer alan oluşumlar ve düzlemler bağlamında ortaya koyarak bir öğretim deneyi deseni olmasından hareketle öğretmen eğitimi ve öğretim tasarımına destek olmak hedeflenmektedir. Literatürdeki çalışmalara bakıldığında bu teorik çerçevenin önce geometri çalışma uzayı bağlamında ortaya çıktığı sonrasında matematiksel çalışma uzayı olarak genişletildiği görülmektedir. Buradan hareketle çalışmaların daha çok geometri alanına yönelik olduğu; matematik alanında yapılan çalışmaların sınırlı olduğu görülmektedir (Tablo 1.3). Bu çalışmada aritmetikten cebire geçiş sürecinde eşit işaretinin ilişkisel yorumlanması ve değişken kavramının anlamlandırılması ele alınacağından literatüre önemli bir katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Yine MWS literatürüne bakıldığında çalışmaların çoğunluğunun teknoloji içeren öğrenme ortamlarına sahip olduğu; teknoloji kullanılmayan öğrenme ortamlarına sahip olan çalışmaların bir kısmının da teoriyi açıklamaya yönelik olduğu düşünülecek olursa teknoloji içermeyen çalışmaların oldukça sınırlı sayıda olduğu görülmüştür (Tablo 1.4). Bu çalışmanın teknoloji kullanımı olmadan tasarlanmış bir öğretim ortamı tasarlaması ve öğrenme sürecini incelemiş olması yönüyle literatürdeki bu alandaki boşluğu doldurmaya önemli bir katkı sunacağı düşünülmektedir. MWS

literatüründe bir çalışma grubu-örneklem ile uygulama yapıldığı çalışmalara bakıldığında en çok ortaokul-lise düzeyinde 15-17 yaş aralığındaki öğrencilerle çalışıldığı, daha sonra öğretmen ve öğretmen adayları ile yapılan çalışmaların olduğu, en az üniversite öğrencileri ile yapılan çalışmaların olduğu görülmüştür (Tablo 1.5). Katılımcı kitlesi açısından da bu çalışmada da 10-11 yaş aralığındaki öğrencilerle çalışıldığından literatüre bu anlamda da katkı sağlayacağı düşünülmüştür.

Aritmetik ve cebir birbirinden farklı iki alan gibi görülse de ortak kullanılan işaret, sembol ve kavramların bu iki alanda kullanım, anlam, fonksiyon bakımından benzerlikleri ve farklılıkları öğrenci öğrenmesinde zorluklara neden olabilmektedir. Aritmetik, ilköğretim matematiğinin ana odağı ve cebir, orta ve lise matematiğinin ana odağı olduğu şeklinde bir görüş hâkimdir. Bu ayrımın öğrencilerin daha sonraki sınıflarda cebir öğrenmelerini zorlaştırdığı konusunda giderek artan bir fikir birliği vardır (Kieran 2004). Cai ve Knuth (2011) erken cebirin sadece aritmetik ve cebir arasında çok önemli bağlantılar sağlamakla kalmadığını, aynı zamanda iyi aritmetik öğretiminin önemli bir bölümünü oluşturduğunu ifade etmektedir. Cebirin, aritmetiğe hâkim oluncaya kadar ertelenmesi gereken bir alan olmadığı, bunun yerine müfredatta baştan beri bulunması gerektiği ifade edilmektedir (Cai ve Knuth, 2011). Aritmetikten cebire geçiş aşaması alan yazında pek çok çalışmanın da yer verdiği gibi öğrencilerin zorlandığı bir süreci barındırmaktadır. Bu zorluğu azaltmak ve geçişi kolaylaştırmak için alan yazında pek çok öneriye de yer verildiği görülmektedir. Weinberg, Dresen ve Slater (2016)'a göre eşitlik ve değişken fikirleri cebirdeki en temel kavramlardan ikisidir. Bu çalışmada da aritmetikten cebire geçişte yaşanan zorlukları azaltmak ve geçişi kolaylaştırmak için bir öğretim tasarlanmış ve bu öğretim sürecinde eşit işaretinin ilişkisel yorumlanması ve değişken kavramının anlamlandırılmasının geçişi kolaylaştıracağı varsayımından yola çıkılmıştır. Asquith ve diğerlerine (2007) göre ilköğretim ve ortaokul öğrencilerinin eşit işarete yönelik anlayışlarını araştıran çok sayıda araştırma benzer sonuçlara ulaşmakta ve bu sonuç birçok öğrencinin eşit işarete ilişkin ilişkisel bir anlayışa sahip olmadığını (yani eşit işaretin iki miktar arasındaki denklik ilişkisini temsil ettiği anlayışı) ve bunun yerine öğrencilerin görüşünün eşit işaretinin bir aritmetik işlemin cevabını veya sonucunu işaret ettiği şeklinde olduğunu göstermektedir. Eşit işaretinin ilişkisel yorumu, cebirsel denklemlerle çalışma sürecinde önemli bir yere sahip olmakta ve bu eşitlik ilişkisinin korunması için yapılan adımların neler olduğunu

belirleyebilmek gerekmektedir. Jones, Inglis, Gilmore ve Dowens (2012) matematiksel eşitlik bilgisi için bir sınıflandırma ortaya koymakta ve öğretmen ve öğrencilerde eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerine dair anlayışın geliştirilmesi ve farkındalıklarının artırılmasının aritmetikten cebire geçişte önemli katkı sağlayacağını ifade etmektedir. Öğrencilerin aritmetikten cebire geçişini kolaylaştıran etkenlerden bir diğeri olan değişken kavramına dair öğrencilerin sınırlı bir kavram imajına sahip olmasının bu geçişi zorlaştırdığı düşünülmektedir. Gray, Loud ve Sokolowski (2009) çalışmasında değişken kavramını, aritmetik bakış açısıyla gelişen değişken kavramı ve cebirsel bakış açısıyla gelişen değişken kavramı olarak iki başlık altında sınıflandırmış ve bu farklı bakış açılarına ait değişken kavramının özelliklerini tanımlamıştır. Değişken kavramının farklı yorumlanmasını geliştirme ve farkındalık oluşturma aritmetikten cebire geçişi kolaylaştıracığı düşünülmektedir. Aritmetikte kullanılan harfler, semboller, eşit işareti ve algoritmaların cebirde de benzerlik ve farklılıklarının olması bu sembol ve harflerin her iki alanda da ayrıntılı analizini gerektirmektedir. Bu nedenle matematiksel çalışma uzayı teorik çerçevesi bağlamında semiyotik oluşum sürecinin incelenmesinin önemli olduğu düşünülmektedir. Semiyotik oluşum, işaretler ve temsillerle ilişkili süreçtir ve semiyotik sistemlerle temsil edilen ve düzenlenmiş matematiksel nesneler üzerindeki sözdizimsel (sentaks) ve anlamsal (semantik) perspektifler arasındaki diyalektik (ikili) ilişkiyi açıklar (Kuzniak vd., 2016). Erken cebirde problemlerin çözümünde kullanılabilecek harfli ifadeler ve eşit işareti MWS teorik çerçevesi bağlamında birer artefact olup problemi çözmek amacıyla bu artefactların kullanılması ve bu süreçte şemaların oluşmasıyla artefactların birer enstrümana dönüşmesi süreci de enstrümantal oluşum bağlamında ele alınabilmektedir. Aynı zamanda öğrencilerin matematiksel çalışmalarında yaptıkları adımları doğrulayıcı ifadelerle açıklayabilmesi süreci söylemsel oluşum bağlamında değerlendirilebilecektir. Bu çalışmada MWS teorik çerçevesi bağlamında semiyotik, enstrümantal ve söylemsel oluşum süreçlerinin ve bu oluşumların ikiyeşerli kombinasyonu sonucu oluşan düzlemlerin incelenmesi amaçlanmaktadır. Aritmetikten cebire geçişte eşitlik ve değişken kavramlarının MWS teorik çerçevesi bağlamında incelenmesi bu alandaki epistemolojik ve bilişsel zorlukları ayrıntılı inceleme fırsatı sunması, öğrencilerin bilişsel süreçlerine etki eden farklı bileşenleri ortaya koyması açısından zengin bir betimleme ve etkili olan öğelerle ilişki kurarak bunlara yönelik pedagojik yönelimlere ışık tutması açısından önemli ve yararlı bir çalışma olacağı düşünülmektedir.

1.4. Teorik Çerçeve

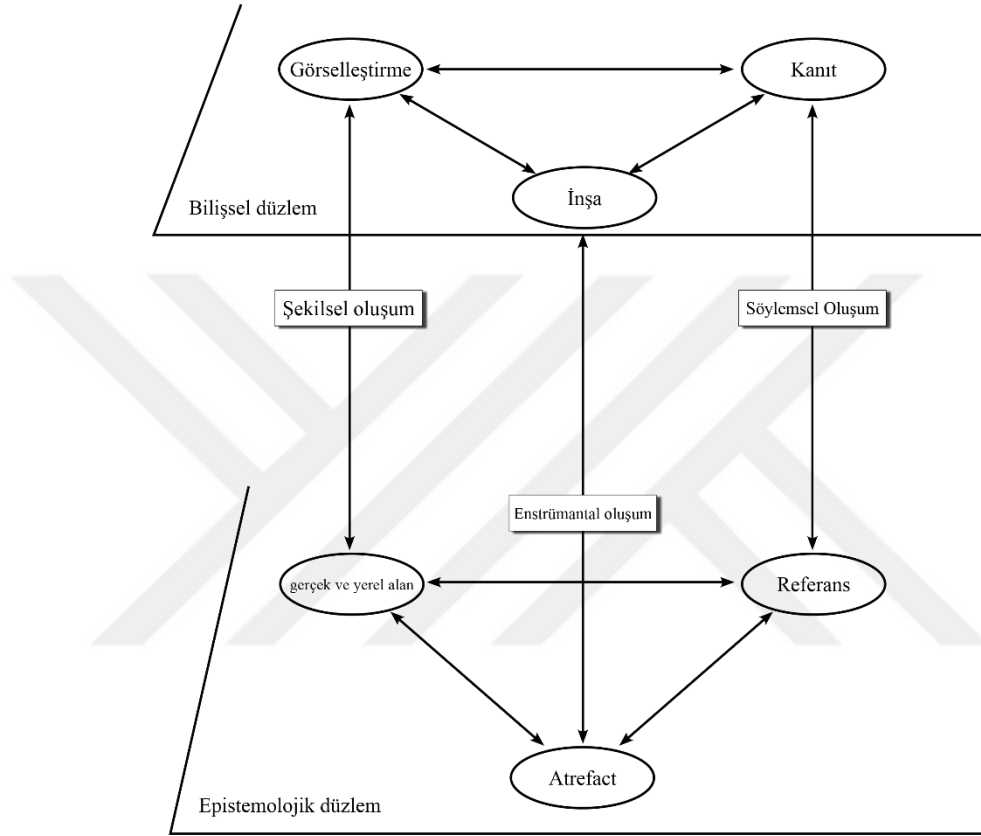
Matematiksel çalışma uzayı teorik çerçevesi kapsamında oluşumlar, düzlemler ve bazı kavramlar önemli yere sahip olup sırasıyla aşağıdaki bölümlerde açıklanacaktır.

1.4.1. Matematiksel çalışma uzayı

Artigue (2016)'e göre yaklaşık on yıl önce ortaya çıkan bu çerçeve ve uluslararası bir grup araştırmacının işbirlikçi çalışması sayesinde ilerlemektedir. MWS (Mathematical Working Space) kavramı matematik eğitim topluluğunda da yer almakta, gelişen bir şekilde ilerlemekte ve pekiştirilmektedir. Bu yapı, farklı ülkelerdeki farklı ilgi alanları ve geçmişleri olan araştırmacıların ortaklaşa çalışmalarından beslenmekte; birbirini takip eden sempozyumlarda yapılan deneyimlerin ve tartışmaların geniş çaplı değişimlerinden faydalanmaktadır (Artigue, 2016). Artigue (2016) MWS'yi didaktik durumlar teorisi (Brousseau, 1997); kavramsal alanlar teorisi (Vergnaud, 1991); didaktik dönüşüm (transpozisyon) teorisi (Chevallard, 1985) gibi farklı teorilerden beslendiği için bir teorik çerçeve olarak kabul etmektedir. Teorilerin farklı kombinasyonları, MWS kavramının yorumlanıp kullanılma biçimini, ne anlama geldiğini önemli ölçüde etkilemektedir (Artigue, 2016). MWS'de matematiksel bir çalışma sürecinde birbiriyle etkileşime girmesi beklenen iki düzlem, epistemolojik ve bilişsel düzlemler yer almaktadır.

Kuzniak ve Richard (2014)'e göre matematiksel çalışma uzayı kavramı 2006'da Kuzniak ve Houdement'in tanıştırdığı geometri çalışma uzayı kavramının genişletilmiş hali olup okul ortamında matematiksel çalışma ile ilgili didaktik zorlukları daha iyi anlamayı sağlamaktadır. Burada ifade edilen uzay (space) bu teorik çerçevede, iyice düşünülerek, organize edilerek, bireyin matematiksel problemleri çözmesine izin verecek şekilde tasarlanmış ortam bağlamında ele alınmaktadır (Kuzniak ve Richard, 2014). Santos-Trigo ve diğerlerine (2016) göre matematik eğitimi, öğrencilerin farklı bağlamlarda yer alan çeşitli problemleri çözmek için matematik bilgisini nasıl öğrendiğini ve geliştirdiğini anlama ve analiz etmeyi amaçlamakta olup Matematiksel Çalışma Uzayı (MWS) çerçevesi de öğrencilerin matematik bilgisini geliştirmeleri ve matematik uygulamalarını zenginleştirmeleri için bir öğrenme senaryosunun tasarımını içermesinin yanında, öğrencilerin problem çözme ortamında matematik bilgisinin gelişimini yönlendirmek ve teşvik etmek amacıyla öğretim etkinliklerini çerçevelemek için pedagojik bir bakış açısı getirmektedir. Bu çerçeve matematiksel uygulamaları

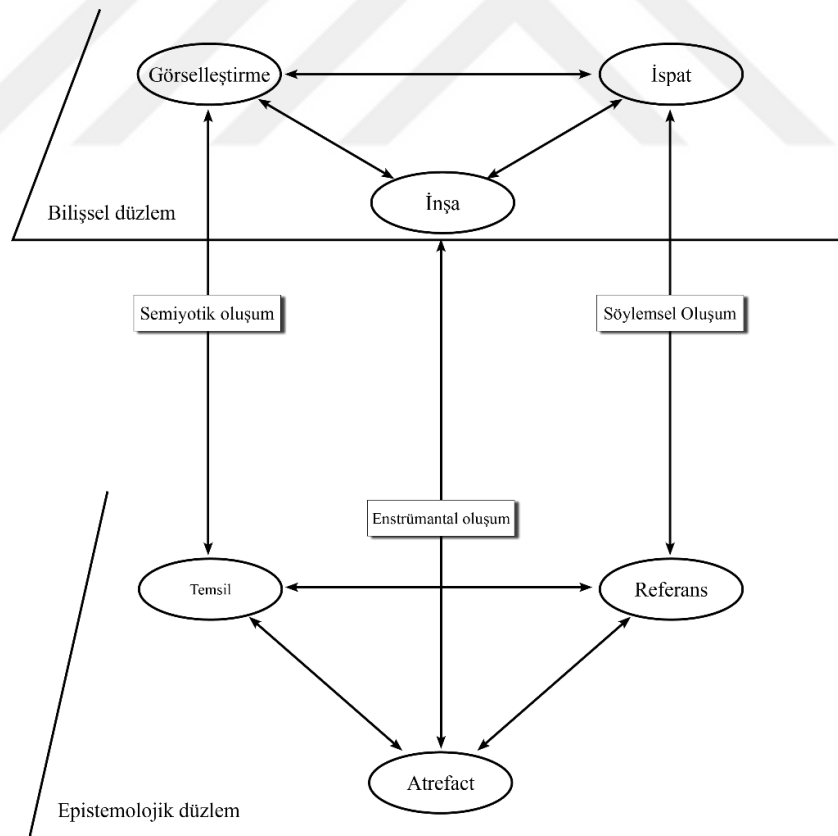
tanımlayan epistemik etkinlikleri ve öğrencilerin matematiksel araştırmaları nasıl yürüttüklerini açıkça belirtmektedir. Bu çerçeve, öğrencilerin matematiksel kavramları kavramak ve problem çözme yeteneklerini geliştirmek için bir öğrenme ortamı sağlamak amacıyla disiplinin epistemolojik düzlemi ile öğrenenin bilişsel düzlemi arasında yakın bir köprü kurmaktadır (Santos-Trigo, vd., 2016).



Şekil 1. 1. Geometri Çalışma Uzayı (Kuzniak ve Richard, 2014)

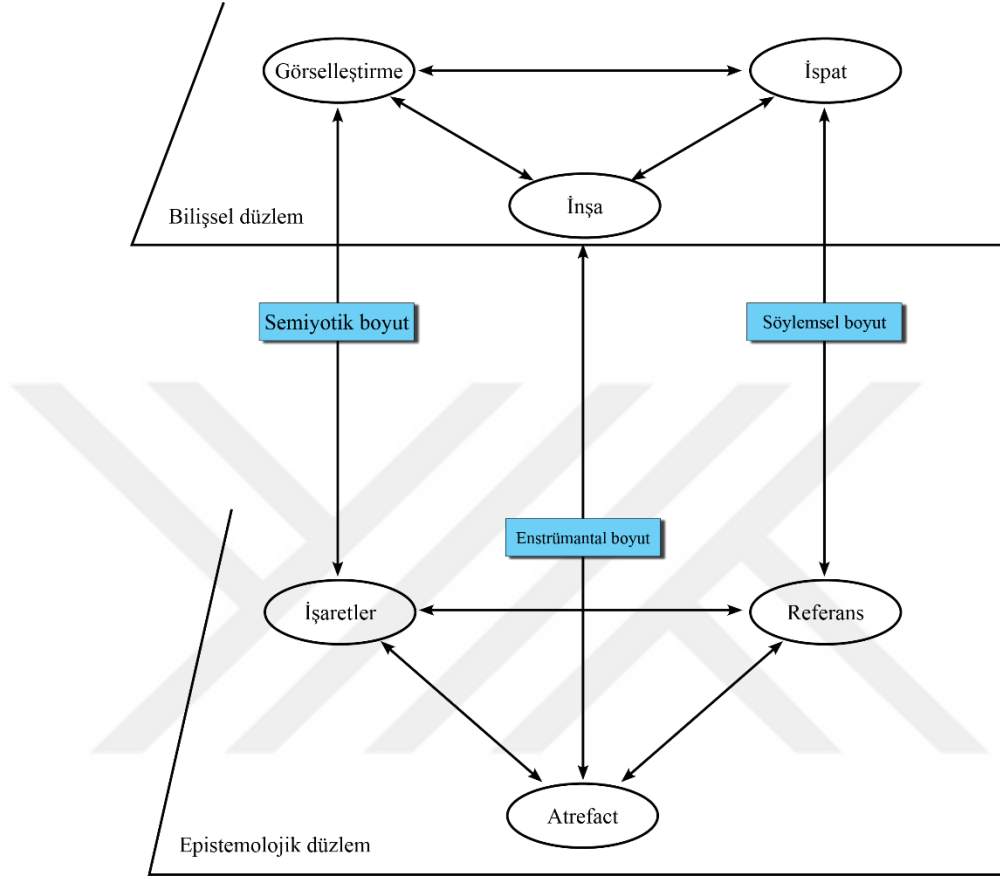
Derouet ve Parzys (2016)'a göre MWS modelinin amacı matematiksel görevleri çözen kişiler tarafından süreçte ortaya konan çalışmayı tanımlamak olup burada "iş" 'work' 'çalışma' kelimesi sadece matematiksel bilgi değil, aynı zamanda bilişsel faaliyetler anlamına gelmektedir. Delgadillo ve Vivier (2016)'a göre MWS modelinin amacı bir kişinin matematiksel çalışmasını tanımlamak ve analiz etmek olup matematiksel çalışmayı çeşitli epistemolojik ve bilişsel unsurları birbirine bağlayan ve bir kurumun çeşitli yönlerini dikkate alan bir sistem olarak ele almaktır. Bu modeldeki matematiksel çalışma, MWS'yi karakterize eden farklı çalışma paradigmaları tarafından yönlendirilebilmektedir (Delgadillo ve Vivier, 2016). Matematiksel çalışmayı

merkezin alan matematiksel çalışma uzayı teorik çerçevesi Kuzniak, Nechache ve Drouhard (2016)'a göre üç dikey eksen ve dikey düzlemlerden (bu düzlemler iki eksenin kombinasyonu ile oluşur) oluşmaktadır. Öğrencinin uygulamalı yöntemlerini daha iyi tarif edebilmek, problem çözme aşamasında ortaya çıkan çalışma alanındaki yolları tanımlamak için iyi bir analiz aracı olarak görülmektedir (Montoya, Mena ve Mena 2014 aktaran Kuzniak vd., 2016). Matematiksel çalışma uzayı teorik çerçevesinden hareketle ortaya koyulan matematiksel çalışma uzayı modeli farklı etkileşimlerin (modelde yer alan oluşumlar ve oluşumların ikişerli kombinasyonu ile oluşan düzlemlerin etkileşimi) bir sistemi olarak düşünülecek olursa, bu etkileşimlerin herhangi bir duruma uyması için (çalışılan konu-alan gibi) açılıp kapatılmasını sağlayan bir akış şeması olarak ele alınabilmektedir (Richard, Marcén ve Meavilla Seguí, 2016). Matematiksel çalışma uzayı modelindeki üç dikey eksen ve bu eksenlerin ikili kombinasyonu ile ortaya çıkan dikey düzlemler aşağıdaki gibi modellenmektedir.



Şekil 1. 2. Matematiksel Çalışma Uzayı (Kuzniak ve Richard, 2014)

Matematiksel çalışma uzayı modeli farklı çalışmalarla beslenmiş ve revize edilmiştir. Bu katkılardan sonra modelde bazı yenilemeler de görülmektedir. Derouet ve Parzys (2016) modelde bazı terimlerdeki değişikliği aşağıdaki gibi ifade etmektedir.



Şekil 1. 3. Derouet ve Parzys (2016)'ın MWS modeli

Yukarıdaki modelden de anlaşılacağı gibi Derouet ve Parzys (2016) matematiksel çalışmayı, epistemolojik ve bilişsel olmak üzere birbiriyle etkileşime giren iki düzlem olarak birbirinden ayırmakta (Kuzniak 2011) ve epistemolojik düzlemdeki üç öğeyi şu şekilde açıklamaktadır:

- Bir dizi işaret: semiyotik temsiller
- Bu nesneler üzerinde harekete geçmek için tasarlanmış bir dizi artefactlar (enstrümanlar),
- Teorik bir referans sistemi.

Derouet ve Parzys (2016) bilişsel düzlemin de üç öğeden oluştuğunu bunların;

- Tanıma (görselleştirme),

- İnşa etme ve
- Argümantasyon (kanıt) olduğunu ifade etmektedir.

Derouet ve Parzys (2016)'a göre bu iki düzlem üç oluşumla birbirine bağlanmaktadır:

- Temsillerin üretilmesine dayanan SEMİYOTİK boyut (Duval (1995)'in semiyotik temsil kavramı) ve görselleştirme;
- ENSTRÜMENTAL boyut, enstrüman kullanılarak karar verilen ilişkili inşalar (ör. Yazılım kullanımı);
- SÖYLEMSEL boyut, teorik referans sistemi ve kanıtlarla ilişkili süreçtir.

Derouet ve Parzys (2016) matematiksel bilginin daha iyi anlaşılması için MWS'yi farklı boyutlarla incelemiş olup bunlar; referans MWS, uygun MWS ve kişisel MWS'dir.

- REFERANS MWS, kurumsal MWS'yi tanımlar ve kısmen ulusal düzeyde metinler (öğretim programı ve diğer resmi belgeler) ile ilgilidir;
- UYGUN MWS, öğretmenler tarafından sınıflarda etkili bir ortam oluşturulmasına olanak sağlayacak planı açıklar;
- KİŞİSEL MWS, öğrenciye bağlı olarak gelişir (Derouet ve Parzys, 2016).

Kuzniak ve diğerlerine (2016) göre matematiksel çalışmanın özgünlüğünü matematiksel içerik ve bu içerikle gerçekleştirilen aktivite ortaya koymaktadır. Bireyin aktivitesi ile yakından ilişkili olan iki unsur epistemolojik ve bilişsel olarak adlandırılmakta; istenen özgünlüğe ulaşmada ispat ve argümantasyon, (teknolojik) araçların kullanımı, semiyotik yaklaşımlar önemli bir yere sahip olmaktadır. Matematiksel faaliyetleri uyarlama ve barındırmak için tasarlanan matematiksel çalışma uzayı modeli, bu farklı yönlerin nasıl etkileşime girdiğinin analizini desteklemeyi amaçlamaktadır. Böylece, belirli bir dizi görev ya da faaliyetin sonuçlanması süreci hem öğrencilerin bakış açısından hem de öğretmenlerin bakış açısından karmaşık ve zengin matematiksel çalışmaların da analiz edilmesine izin verecektir (Kuzniak vd., 2016). Radford'a (2016) göre matematiksel çalışma uzayı yaklaşımı (MWS), matematik eğitiminin Fransız geleneğine dayanmakta olup, semiyotik, enstrümantal ve söylemsel alanların işlevsel olarak birbirine karıştığı matematiğin öğretimi ve öğrenimi ile ilgili problemlere anlaşılır ve tutarlı bir bakış açısı sunmak için övgüye değer bir sentez

yapmaktadır. MWS'nin didaktik bir yaklaşım olarak işleyişi, öğretmenlerin ve öğrencilerin matematiksel çalışmalarını problem çözme ve ispat yapma faaliyetlerine katılmaları bağlamında izleme kapasitesine dayanmaktadır (Radford, 2016). Matematiksel çalışma uzayı teorik çerçevesi matematik oturumları sırasında hangi öğrencilerin ve öğretmenlerin etkin bir şekilde çalıştıklarını ortaya koymaya yarayacak bir araç sağlamayı amaçlamakta; matematiksel problemlerle karşılaşan bireylerin matematiksel aktivitelerinin analizine izin verecek şekilde düzenlenmiş bir yapı ortaya koymaktadır (Kuzniak, vd., 2016). Matematik öğretimi için teorik bir araç olarak geliştirilen ve özellikle Fransız didaktik geleneğinden çıkarılan mevcut teorilerden güçlü bir şekilde etkilenen MWS modeli, bu teorilerden alınan katkılar ve bakış açıları ile yakından ilişkili olan esnek ve uyarlanabilir bir çerçeve sunmaktadır (Kuzniak, vd., 2016). Son olarak MWS yaklaşımı, Fransız didaktik geleneklerinin bir özelliği olan, derin bir estetik duygusuna sahip, teorik olarak iyi temellendirilmiş, çok tutarlı ve iyi organize edilmiş bir yaklaşımdır. Başlangıç noktası, matematikçinin yoğun bir matematiksel aktiviteye sahip bir sınıfta olabileceğini düşünmesi ile ortaya çıkmış bir model olup bir matematikçinin eseridir (Radford, 2016).

1.4.1.1. Matematiksel çalışma nedir?

Kuzniak ve diğerlerine (2016) göre matematiksel çalışma, matematiksel işaretlerin materyallerin araçların, özellikler ve teoremlere dayalı kuralların kombine bir şekilde kullanımı sonucu ortaya çıkmaktadır. Bununla beraber matematiksel çalışma kavramının sadece matematiksel bilgi anlamına gelmediği aynı zamanda matematiksel nesnenin bilgisi anlamına geldiği de göz önünde bulundurulmalıdır (Kuzniak vd., 2016). Öğrencinin okulda, çizilen yolu sadece takip eden konumundan çıkıp uzman bir matematikçi gibi kendi yolu ile ilgili söz sahibi olması sağlanmalıdır. Freudenthal'e (1971) göre matematiğin bir etkinlik, sorunları çözme, problem arama aktivitesi olmasının yanı sıra aynı zamanda bir konuyu organize etme faaliyetidir (Freudenthal, 1971 akt Kuzniak, vd., 2016). Kuzniak ve Richard (2014)'e göre matematiksel çalışma çekirdek (merkez) konumda olup belirli bir amaca yönelik artefact ya da enstrüman kullanımına dayalı gerçekçi bir aktivitedir. MWS'nin ana fikri matematiğin, bir matematikçinin bir şeyi başarmak için bazı eylemleri gerçekleştirdiği bir etkinlik olduğu yönünde olup bu aktivite matematiksel bir çalışmadır. Matematikçinin bu aktivitesinde sezgisel açıklamalar (explorations), keşif (discovery), açıklama ve gerekçelendirme gibi

farklı aşamalar yer almaktadır (Radford,2016). Etkili ve verimli bir matematiksel çalışmanın gerçekleşmesinde göz önünde bulundurulması gereken bazı oluşumlar ve bu oluşumlarda önemli olan bazı unsurlar yer almaktadır. Bu öğelerin birbiriyle ilişkisi etkili ve verimli matematiksel çalışma için sürecin yürütülme, düzenlenme biçiminde matematiksel çalışma uzayı teorik çerçevesi ve bu bağlamda ortaya konan modelinden yararlanmak mümkün olmaktadır.

1.4.1.2.Epistemolojik ve bilişsel düzlemler

Kuzniak ve Richard (2014)'a göre geometri çalışma uzayındaki prensipler matematiksel çalışma uzayında da geçerli olup; epistemolojik düzlem çalışılan alanın matematiksel içeriği ile yakından ilişkili iken bilişsel düzlem kişinin matematiksel görevi çözme sürecindeki düşünmesi ile ilgilidir. Matematiksel çalışma uzayı bir yandan epistemolojik ve bilişsel düzeyde gelişimsel olarak anlam katarken diğer taraftan bu iki düzeyin farklı oluşumlarına da yardımcı olan bir süreçtir (Kuzniak ve Richard, 2014). Kuzniak ve Richard (2014) epistemolojik düzlem ve onun üç ögesinin matematiksel boyutta olduğuna bu üç ögenin birbiri ile etkileşiminin çok önemli olduğuna dikkat çekmektedir. Bu öğeler:

- Materyali destekleyecek gerçekçi ve yerel bir alan; somut ve maddi bir dizi nesne;
- Çizim enstrümanı veya yazılım gibi bir dizi artefact;
- Tanımlara ve özelliklere dayanan teorik bir referans sistemi (Kuzniak ve Richard, 2014).

Coutat ve Richard (2011) aynı zamanda bu öğelerin sırasıyla yan yana dizilmiş olmadıklarını; öncelikli amaçlara uygun bir şekilde organize edilmesi gerektiğini; bu amaçların da matematiksel alanın epistemolojik boyutuna bağlı olduğunu; öğrencinin öğrenme sürecinde bu epistemolojik planın epistemolojik ortamı da yarattığını vurgulamaktadır (Coutat ve Richard, 2011'dan Kuzniak ve Richard, 2014). Kuzniak ve diğerleri (2016) matematiksel çalışma uzayında epistemolojik düzlemde üç ögenin varlığına işaret etmekte: temsil, artefact ve referans; buradan hareketle üç çeşit araç: semiyotik araç, teknolojik araç ve teorik araç tanımlamaktadır. Her bir çeşit araç da bilişsel düzlemde bir enstrümanla ilişkilendirilmektedir. Araçtan enstrümana geçiş süreci kişinin problem çözerken aracı kullanımı ve süreçte oluşturduğu şemalarla aracı

özellemştirmesi sonucu gerçekleşmektedir. Kuzniak ve diğlerleri (2016) semiyotik, teknolojik ve teorik araçları aşğıdaki gibi tanımlamaktadır:

- Semiyotik araçlar; materyal olmayan araçlardır, matematiksel nesnelerin semiyotik temsilleri üzerinde işlem yapmayı sağlar.
- Teknolojik araçlar; çizim araçları, algoritmalar ya da hesap makinelerine dayanan rutin teknikleri içerir.
- Teorik araçlar; materyal olmayan araçlardır, matematiksel nesnelerin matematiksel özellikleri ve mantığa dayalı muhakeme için kullanılır (Kuzniak, ve diğlerleri 2016).

Artigue (2016) epistemolojik düzlemin kurumsal bir düzlem olduğunu ve bu düzlemde referans MWS'nin kurumsal olarak aşırı egemen olma eğiliminde olduğunu ortaya koymaktadır. Kuzniak ve diğlerlerine (2016) göre epistemolojik düzlemde çalışma yalnızca matematiksel kriterlere göre düzenlenmiştir. Bir dizi somut ve maddi nesne olan araçlar ve yazılımlar gibi çizim artefactlarının yanında tanımlar, özellikler ve teoremlere dayanan teorik bir referans sistemini de içermektedir. Bu bileşenler sadece bir araya getirilmemiştir, fakat matematik alanına ve önerilen görevlere bağılı olarak önceden belirlenmiş hedeflere göre organize edilmelidir. Coutat ve Richard (2011) epistemolojik düzlemin temel amacının, öğrencilerin öğrenme sürecinin belirli bir didaktik durumda gerçekleşeceği genel ortamı modellemek olduğunu, bu epistemolojik düzlemin de epistemolojik ortam (milieu) olarak düşünölebileceğini ifade etmektedir (Coutat ve Richard, 2011'tan aktaran Kuzniak vd., 2016). Epistemolojik düzlemdeki temsil bir durumu işaretlerle temsil etmek anlamına gelmekte olup semiyotik temsillere dayanan bir matematik anlayışına uygun olarak kullanılmaktadır. Somut ve maddi nesneler ile ilgili olan bileşeni özetlemek için işaret (sign) terimini kullanmak uygun görölmektedir. Bahsedilen matematiksel alana bağılı olarak temsil veya işaret; geometrik görüntüler, cebirsel ifadeler, grafikler, semboller, modeller ve fotoğraflar olabilmektedir. Hitt ve diğlerlerine (2016) göre bu modelde Duval'in görselleştirme kavramı (2003) kullanmakta olup görselleştirme, nesnelerin herhangi bir görsel algısının yokluğunda, bireyin gözünüzün önünde gerçekten sanki varmış gibi görünmesine izin veren bir temsil üretme (Duval, 2003'den aktaran Hitt vd., 2016) şeklinde ifade edilmektedir. Kuzniak ve diğlerlerine (2016) göre MWS çerçevesinde,

epistemolojik düzlemde artefactlar; algoritmalar, abaküs, logaritmik veya trigonometrik tablolar, hesaplama ya da yapım için pergel ve çizgeçler olarak düşünülmektedir. Temsil ve artefactların aksine özellikler, tanımlar, teoremler ve aksiyomlar kümesi matematiksel çalışmanın teorik kısmına atıfta bulunmakta ve bu yüzden teorik referans çerçevesi olarak adlandırılmaktadır. Bu küme, yalnızca özelliklerin biraraya geldiği bir koleksiyon olarak düşünülmeyip matematiğe özgü kanıtın tımdengelimli söylemini destekleyen ve öğrencilerin çözülmesi istenen görevlere iyi uyum sağlaması için bilgilerin ve özelliklerin tutarlı bir şekilde organize edilmesini gerektiren süreç olarak değerlendirilmektedir (Kuzniak vd., 2016).

Kuzniak ve diğerlerine (2016) göre MWS'de birbiri ile ilişkili ve birbirine katkı sağlayan iki düzlem düşüncesi korunmuş olup birincisi epistemolojik özellik olup matematiksel içerikle yakından ilişkilidir; diğeri de bilişsel özellik olup bireysel problem çözme düşüncesi ile yakından ilişkilidir. Kuzniak vd. (2016) şimdiye kadar, matematiksel çalışmaları geliştirmek için epistemolojik boyutta ısrar edilerek değerlendirilen fakat matematiksel aktivitenin sosyal bir bağlamda ve epistemolojik boyutla yakından ilişkili olması gereken bilişsel bir boyutu içerecek şekilde değerlendirmenin öneminden bahsetmektedir. Radford (2016) MWS'deki matematikçi aktivitesinin matematikçinin işaretleri yorumladığı, çözümleri hayal ettiği ve sonuçlar ürettiği bilişsel bir boyutu da içerdiğine vurgu yapmakta; epistemolojik ve bilişsel düzlemleri yan yana koyma hareketinin kesinlikle yenilikçi ve ümit verici olmasının yanında çeşitli türlerde zorluklar sunduğuna dikkat çekmektedir. Radford MWS'de epistemolojik ve bilişsel düzlemlerde farklı teorilerden yararlanıldığına da dikkat çekmektedir. Santos-Trigo ve diğerlerine (2016) göre epistemolojik düzlem, matematiksel akıl yürütme yoluyla doğrulanması gereken ilişkileri belirlemek, araştırmak, geliştirmek ve keşfetmek için temeller sağlamakta ve epistemolojik düzlemi öğrencilerin bilişsel aktiviteleriyle ilişkilendirmek açısından üç unsur tanımlanmaktadır:

- problem çözme deneyimleri sırasında artefactların rolünün önemli olduğu enstrümantal oluşum;
- matematiksel nesneler ya da kavramlar arasındaki ilişkiyi analiz ederken syntax (sözdizimi) ve semantik (anlambilimi) ile beraber temsillerin rolüne bakıldığı (Duval, 2006) semiyotik oluşum ve

- matematiksel sonuçları doğrulamak ve iletmek için farklı akıl yürütme biçimlerini ele alan söylemsel oluşum (Santos-Trigo vd., 2016).

Kuzniak ve diğerleri (2016) epistemolojik ve bilişsel düzlemler arasındaki ilişkiyi artefact, araç ve enstrüman üçlüsü üzerinden anlatmanın mümkün olduğunu ifade etmektedir. Matematiksel bir çalışma içinde kullanılan her bir artefactı birer araç olarak kabul edecek olursak enstrümanı da kavramsal bir araç, teoremler, algoritmalar ya da işaretlerin birleşimi olarak ifade etmek gerekecektir. Araç ve artefact daha çok epistemolojik düzlemde yer alırken bir görevi gerçekleştirmek için kullanılan araçlar yani enstrümanlar bilişsel düzlemde yer almaktadır. Kuzniak ve diğerlerine (2016) göre enstrüman bilişsel bir değere de sahip olup; bir araç, kişi bu aracı kullanırken şemalar inşa ettiğinde bir enstrüman haline gelmektedir. Bu farkı Rabardel enstrümanın, artefact ve görevle ilişkili kullanma şemalarının biraraya gelmesi sonucu oluştuğuna vurgu yaparak ifade etmektedir. Böylece, araç ile enstrüman arasındaki fark epistemolojik ve bilişsel düzlem arasında dinamik bir ilişki yaratmaktadır (Kuzniak vd., 2016).

Kuzniak ve diğerleri (2016) matematiğin yalnızca biçimsel sistemlerle manipüle edilebilen göstergelere indirgenmiş özellik ve nesneler kümesi değil, her şeyden önce ve esas olarak bir insan faaliyeti olduğuna dikkat çekmekte; bu nedenle, bireylerin, aynı zamanda toplulukların, disiplini uygulama, matematiksel bilgiyi elde etme, geliştirme ve kullanma süreçlerini anlamının önemli olduğunu ifade etmektedir. Bu durum MWS'nin bilişsel boyutuna ışık tutmaktadır. Modelde bilişsel düzlemdeki üç bileşen aşağıdaki gibi tanıtılmaktadır:

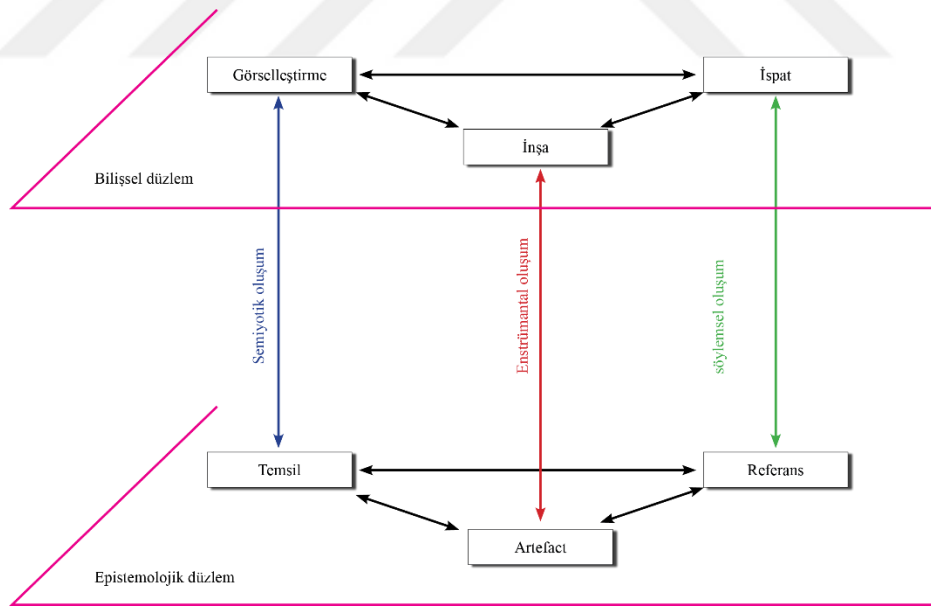
- Görselleştirme: İşaretlerin, bilgilerin deşifre edilmesi-yorumlanması ve ilgili nesnelerin ve ilişkilerin içsel (psikolojik) temsili ile ilgili olup basit şekillerin veya işaretlerin algılanmasından ayırt edilmelidir;
- İnşa etme: Kullanılan artefactlar ve ilgili tekniklerle ilgili olup artefactların kullanılmasının tetiklediği eylemler, gözlem keşif ve hatta daha sistematik ve enstrüman destekli deneyimleri kapsayan çizimler veya yazılar gibi somut bir üretim ile sonuçlanamayan eylemlerle ilgilidir;
- İspatlama: Teorik referans çerçevesine dayanan doğrulama üretme süreci ile ilgili olup deneysel bir doğrulama daha çok enstrümantal oluşumla ilgiliyken

teorik bir yapıya dayanan söylemsel doğrulamalarla ilgili bir süreç olarak görülmektedir (Kuzniak vd., 2016).

Bu çalışmada teorik çerçevede yer alan epistemeolojik düzlemdeki semiyotik araç olarak eşit işaretinin kendisi ele alınırken, teknoloik araç olarak terazi modeli, teorik araç olarak da eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerinin ve terazi modelinin özellikleri, tanımı, fonksiyonu ele alınmıştır. Epistemolojik düzlemdeki üç türdeki aracın problemin çözümünde işe koşulması sürecinde öğrencinin zihninde yeni şemalar oluşturması ya da var olan şemalarını güncellemesi, problemin çözümünde teknikler kullanabilmesi ile aracın anlamlı, etkili bir enstrümana dönüşebilmesi oluşumlar bağlamında ele alınmıştır.

1.4.1.3.Oluşumlar

Matematikçinin faaliyetlerine daha yakından bakıldığında üç eksen ayırt edilmekte olup bunlar: semiyotik, enstrümantal ve söylemsel eksen olarak tanımlanmakta; matematikçinin aktivitesi her zaman matematikle uğraşırken geliştiği için bu eksenler oluşum olarak adlandırılmaktadır (Radford, 2016).



Şekil 1. 4. Kuzniak vd. (2016)'nin MWS modeli

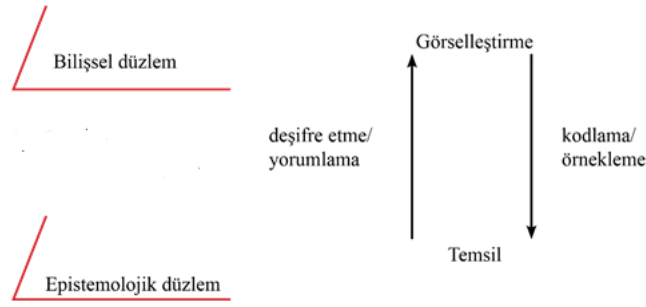
Miranda ve diğerleri (2016) bireyin matematiksel çalışmasının yavaş, kişisel MWS'nin dahilinde kademeli bir yaklaşımla geliştiğine; bu sürecin aktivasyonu ve kontrolünün öğretmen tarafından uygun MWS dahilinde geliştiğine; birbirine bağlı olan

ve tüm epistemolojik bileşenleri ve bilişsel süreçleri ilişkilendiren üç oluşumun kullanılmasını gerektirdiğine vurgu yapmakta ve bu oluşumları aşağıdaki gibi tanımlamaktadır:

- Semiyotik oluşum: Temsiller ve görselleştirme arasında gerçekleşmekte (Miranda vd., 2016); temsillerin ve görselleştirilmenin oluşturulma süreci ile ilgili olmakta (Hitt vd., 2016); semiyotik temsillere dayanıp matematiksel çalışma alanı nesnelere anlam katarak onlara işlemsel matematiksel nesneler statüsü kazandırmakta; bu anlamda sentaks, semantik, fonksiyon ve işaretlerin yapısı arasında etkileşimi sağlamaktadır (Kuzniak ve Richard, 2014).
- Enstrümantal oluşum: Artefactlar ve inşa etme arasında gerçekleşmekte (Miranda vd., 2016); belirlenen yapılarda kullanılan enstrümantalarla (kağıt, kalem, excel, poly applet, vb.) ilgili olmakta (Hitt vd., 2016); matematiksel çalışmanın gerçekleşmesinde inşa etme sürecine katkı sağlayan artefactları işlemsel hale getirmemize izin veren bir süreç olmaktadır (Kuzniak ve Richard, 2014).
- Söylemsel oluşum: Teorik referans ve kanıt arasında gerçekleşmekte olup (Miranda vd., 2016) öğrencilerin beklentileri, doğrulamaları, hata algıları, çelişkilere duyarlılık ve açık bir stratejik seçim ile ilgili olmakta (Hitt vd., 2016); özelliklerin kombine edilerek birbiri ile teorik referanslar içerisinde matematiksel muhakeme için grafik ya da enstrümanlı doğrulama için kullanılmasını sağlamaktadır (Kuzniak ve Richard, 2014).

1.4.1.3.1. Semiyotik oluşum

Kuzniak vd. (2016) çalışmasında semiyotik oluşumda epistemolojik düzlem ile bilişsel düzlem arasındaki ilişkiyi ‘temsil etme ve görselleştirme’ arasındaki ilişki ile açıklamaya çalışmıştır. Epistemolojik düzlemde temsil edilen durumun deşifre edilmesi ve yorumlanması sonucu görselleştirmeye varılırken; bir görselin kodlanması ve örneklenmesi ile temsile ulaşıldığı ifade edilmiştir.



Şekil 1. 5. Kuzniak vd. (2016)'nin semiyotik oluşum modeli

Kuzniak ve diğerleri (2016) semiyotik oluşumun temsil edilen matematiksel nesnelerin temsili ve nesnenin kendisi arasındaki sözdizimsel (sentaks) ve anlamsal (semantik) perspektifler arasındaki diyalektik ilişkiyi açıklamaktadır. Semiyotik oluşum, temsillere matematiksel nesnelerin durumuyla ilgili bilgi vermekte; böylece işaretlerin işlevi (fonksiyonu) ve yapısı arasındaki bağlantıları kurmaktadır. Matematikteki farklı temsillerin kullanıldığı konularda anlamın zenginleşmesi, işaretlerin farklı fonksiyonlarının ya da fonksiyonel seviyelerinin de gelişmesi ile mümkün olmaktadır. Yukarıdaki modelden de anlaşıldığı üzere işaretlerin deşifre edilmesi ve yorumlanması süreci olarak düşünülen semiyotik oluşum, belirli bir temsilden başlayarak görsel algılamamanın “bilişsel farkındalığına” doğru yol almakta; bir 'bilişsel öznenin' zihninden başlayıp temsillere yönelen ters yöndeki hareketi kodlama ya da somutlaştırma sürecinden sonra bir işaret üretildiğinde ya da belirlendiğinde ortaya çıkmaktadır (Kuzniak vd., 2016). Radford’a (2016) göre semiyotik oluşum; geometrik figürler, cebirsel semboller, grafikler, diyagramlar, fotoğraflar vb. içermektedir. Kuzniak ve Richard (2014) işaret veya temsili; başka bir şeyin yerini tutan, bazen bir nesne, bazen kendisi de olabilen bir şey olarak tanımlamaktadır. Matematiksel alana uygun bir şekilde işaretler geometrik bir imaj, cebirsel bir sembol ya da grafik hatta bir belirteç de olabilir; bununla beraber modelleme içeren problemlerde modeller ya da fotoğraflar da olabilmektedir (Kuzniak ve Richard, 2014). Hitt ve diğerleri (2016) kurumsal temsil ve işlevsel temsil kavramlarına değinmektedir. Bu iki kavram, ilk bakışta Houdement ve Kuzniak (2006) tarafından önerilen Uygun Geometri Çalışma Alanı veya Kişisel Geometri Çalışma Alanı kavramları ile karıştırılmıştır. Halbuki bu kavramlar çok farklı anlamlara sahip olup Kuzniak (2011), bu aşamada Duval'ın semiyotik temsil kavramına ilişkin kuramsal çerçevesinden

yararlanmakta ve kurumsal temsillere öncelik verilmektedir (Hitt, 2006'den aktaran Hitt vd., 2016). Hitt (2013) kurumsal temsili; ders kitaplarında veya bilgisayar ekranlarında vb. bulunan temsiller olarak tanımlarken işlevsel temsili eylemle bağlantılı, kendiliğinden bir temsil tarafından ifade edilen, rutin olmayan bir matematiksel faaliyetle karşılaşıldığında ortaya çıkan zihinsel temsil olarak tanımlamaktadır (Hitt 2013'den aktaran Hitt vd., 2016).

Bu çalışmada öğrencinin problem çözme sürecinde eşit işaretini ya da terazi modelini gözünde canlandırabildiğine ilişkin ifadeleri, attığı adımlar semiyotik oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler olarak ele alınmıştır.

1.4.1.3.2. Enstrümantal oluşum

Kuzniak vd. (2016) enstrümantal oluşumu, matematiksel çalışmanın başarılmasına katkıda bulunan inşa etme süreçlerinde artefact ve enstrüman üretilmesini sağlayan süreç olarak tanımlamaktadır. Epistemolojik düzlemde problemi çözmek için potansiyel bir kullanışlılığa sahip olma durumunda araç (tool) kavramı kullanılırken; enstrümanın 'artefact+artefactla ilgili kullanım şeması' bileşenlerinden oluştuğuna vurgu yapılmakta; buradan hareketle, enstrümanın bilişsel bir değere sahip olduğu ifade edilmektedir. Enstrümantal oluşumda enstrümantasyon ve enstrümantalizasyon süreçleri söz konusudur. Enstrümantasyon olarak adlandırılan yukarı doğru hareket; artefacttan, artefact tarafından ortaya atılan eylemlere doğru gitmekte ve kullanıcının kendi manipülasyon şemalarını artefactın sağladığı araçlara (tools) uyarladığı süreci tanımlamaktadır. Aşağı doğru süreç yani enstrümantalizasyon; kullanıcı tarafından hedeflenen zihinsel işlem, uygun zamanda ve uygun eylemlerin ve uygun aracın seçimini yapabilmektir (Kuzniak vd., 2016). Santos-Trigo ve diğerleri (2016) matematiksel çalışma uzayı çerçevesinde enstrümantal oluşumu, bireylerin artefacttan bir enstrümana dönüştürmesinde yer alan süreçlerini açıklamaktadır. Santos-Trigo ve diğerleri (2016) enstrümantal oluşumda artefactın bir problem çözme enstrümanına dönüşmesinde; artefactın sağlamlık ve kısıtlamalar bağlamında özelliklerinin ve kullanıcılar tarafından aktiviteler süresince geliştirilen stratejilerin, tekniklerin önemli iki unsur olduğuna dikkat çekmektedir.

Bu çalışmada eşit işaretinin farklı yorumlama biçimleri ya da terazi modelinin problemin çözümünde işe koşulabilmesi sürecinde öğrencinin zihninde oluşan şemalara

ilişkin gözlemlenebilir tekniklerin görüldüğü süreç enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin gösterheler olarak ele alınmıştır.

1.4.1.3.3. Söylemsel oluşum

Kuzniak ve diğerlerine (2016) göre söylemsel oluşum, matematiksel akıl yürütme ve söylemsel geçerliliğin sağlanabilmesi için teorik referans sisteminde düzenlenen özelliklerin ve tanımların harekete geçirildiği süreçtir. Söylemsel oluşum episeolojik düzlemde bilişsel düzleme doğru yukarı yönlü bir hareket ve bilişsel düzlemde epistemolojik düzleme doğru aşağı yönde bir hareket olmak üzere iki yönlü bir süreç barındırmaktadır. Yukarı yönlü harekette kuramsal referans çerçevesinde yapılandırılmış özellikler tarafından desteklenen, tündengimsel söylemin işe koşulduğu, kanıtlayıcı bir söylem görülürken; aşağı yönlü harekette araç kullanarak, hesaplama yaparak veya çizimler ile çerçevede yer alan özelliklerin ve tanımların ortaya koyulması görülmektedir. Matematik öğretmenleri, öğrencileri ya da matematikçiler matematiksel faaliyetlerde matematiksel akıl yürütme sürecinde sadece ispatlama ile sınırlı kalmayarak informal söylemsel işlemler ve davranışları da yaygın olarak kullanmaktadır. Bu nedenle söylem; örneğin bir nesnenin tanımı veya tasviri olabileceği gibi bir formal tanımın oluşturulması veya bir hipotezin tartışılması, bir karşı örnek ya da varsayımsal bir özelliğin ifadesi de olabilmektedir. Açıklamalar, analogik ve metaforik gerekçeler söylemsel akıl yürütmeyi içeren bir tür çalışma içinde yer alabilmektedir (Kuzniak vd., 2016).

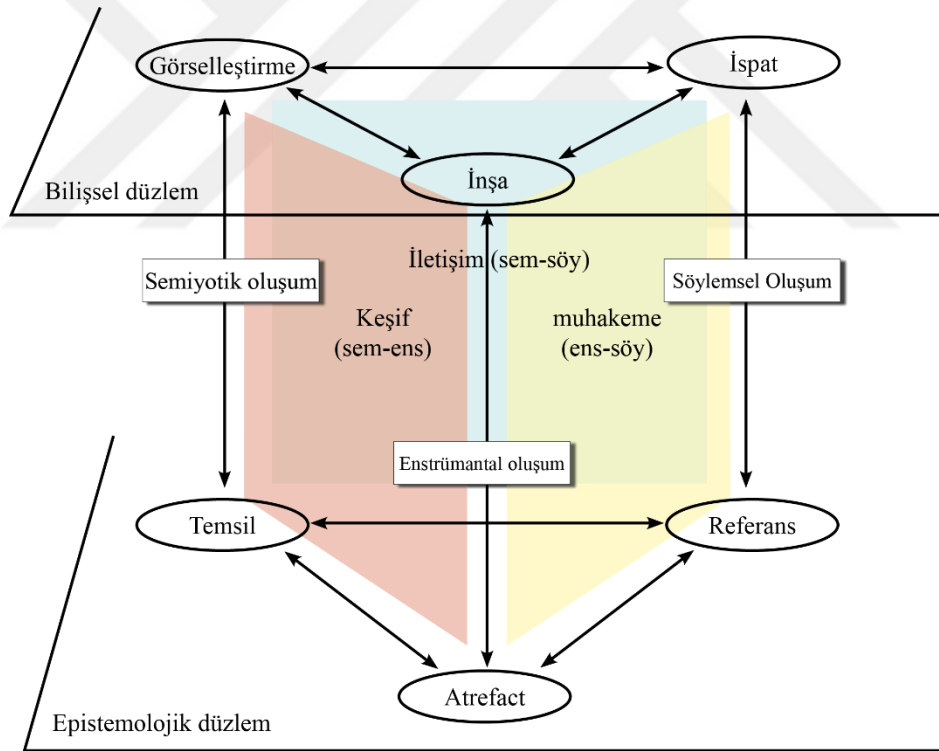
Bu çalışmada eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerinin özellikleri, birbiri ile ilişkisi ya da terazi modelinin özelliği, işlevi, kullanma prensibi gibi öğelerinden yararlanarak problem çözümünde bu öğeleri işe koştığında doğrulayıcı açıklamalar, gerekçelendirmeler ortaya koyabildiği süreç söylemsel oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler olarak ele alınmıştır.

1.4.1.4. Oluşumların ikerli kombinasyonu

Richard vd. (2016) matematiksel çalışmanın ilk kombinasyonunun semiyotik ve enstrümantal oluşumun etkileşimi ile; ikinci kombinasyonun enstrümantal ve söylemsel oluşumun etkileşimi ile; üçüncü kombinasyonun semiyotik ve söylemsel oluşumun etkileşimi ile ortaya çıktığını ifade etmektedir (Richard vd., 2016). MWS modelindeki

üç eksenin ikişerli kombinasyonu ile oluşan düzlemleri Richard ve diğerleri (2016) şu şekilde açıklamaktadır:

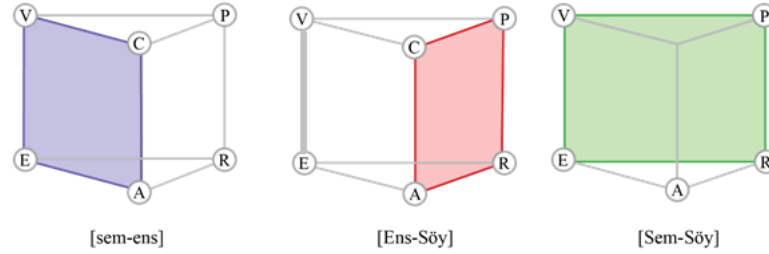
- Birinci çeşit etkileşim **semiyotik ve enstrümantal** (sem-ens) oluşumların temelinde NESNELERİN KEŞFİ ile ilgilenmekte ve matematiksel problemlerin çözümünün keşfi ile ilgili yetkinliği geliştirebilme evresidir.
- İkinci çeşit etkileşim olan **enstrümantal ve söylemsel** (ens-söy) oluşumlar bir araya gelerek DOĞRULAMA VE GEÇERLİLİĞİ SAĞLAMA temelinde matematiksel çalışmanın gerekçelendirme ve muhakeme etme evresidir.
- Son olarak da **semiyotik ve söylemsel** oluşuma (sem-söy) dayanan İSPATLARIN TEORİK OLARAK GEÇERLİLİĞİNİN GÖSTERİLMESİNE yönelik matematiksel çalışmanın sunum ve iletişim evresidir (Richard vd., 2016).



Şekil 1. 6. Kuzniak ve Richard (2014)'in MWS düzlemler modeli

Kuzniak, Nechache, Drouhard, Richard'tan farklı olarak Radford (2016) oluşumların ikişerli kombinasyonu ile oluşan düzlemlerde üç farklı aktivite türü tanımlamaktadır: modelleme, keşif ve doğrulama. Modelleme, semiyotik ve söylemsel oluşumları birleştiren düzlem ile ilişkili; keşif, semiyotik ve enstrümantal oluşumları

birleştiren düzlem ile ilişkili; doğrulama, enstrümantal ve söylemsel oluşumları birleştiren düzlem ile ilişkilidir (Radford, 2016).



Şekil 1. 7. Radford (2016)'ın düzlemler modeli

Bu düzlemlerin etkili bir şekilde gerçekleştirilmesi, oluşumların etkileşimine dayalı bazı bilişsel matematik yeterlilikleri tanımlamayı sağlamakta (Richard vd., 2016); her bir oluşum (semiyotik, enstrümantal ve söylemsel) bilişsel bir sürece bağlı bir şekilde analiz edilebildiğinden; bireyin aracı bir enstrümana dönüştürmesine izin vermekte; böylece semiyotik, teknolojik ve teorik enstrümanlar arasındaki farkın açıkça tanımlanabilmesini sağlamaktadır (Kuzniak vd., 2016). Dikey eksenlerin ikişerli kombinasyonu için Kuzniak ve diğerleri (2016) düzlemlerdeki süreçte altta yatan etkileşimler, söz konusu matematik alanı ile, okul seviyesinde beklenen iş türü ve benzeri etkenler ile birlikte değiştiğinden bu düzlemlerin tam ya da kesin tanımlarının yapılmasının pek de beklenemeyeceğini ifade etmektedir. Bununla birlikte bu üç düzlem; farklı oluşumlar arasındaki karşılıklı ilişkilerin, etkileşimin tanımlanması, problem çözme süreçlerindeki aşamaların tanımlanması ve karakterize edilmesi, bu süreçlerin seyrinde ortaya çıkan değişimlerin, belirli yönlerin beklenmedik ya da aşamalı olarak ortaya çıkması, bir kenara bırakılması ya da daha fazla önem verilmesi gibi değerli unsurları açıklamak için oldukça önemli bir yere sahiptir. Böylece matematiksel çalışmada ihlalleri tanımlamak, bir ya da iki oluşum sürecinde ya da düzlemlerdeki tikanıklıkları, zorlukları tespit etmek amacıyla düzlemler arasındaki dolaşımı, etkileşimi tanımlamak mümkün hale gelmektedir (Kuzniak vd., 2016). Delgadillo ve Vivier (2016)'a göre MWS'nin işleyişi, epistemolojik ve bilişsel düzlemlerde bulunan tek tek oluşumların varlığı olarak değil, iki ya da üç oluşum arasındaki etkileşim olarak anlaşılmalıdır. Araştırmacının matematiksel çalışmayı anlayabilmesi için öğretmenin uygun MWS'ı ve öğrencinin problem çözümü sürecinde görülen oluşumların ve aktive edilen düzlemlerinin yani kişisel MWS'nın tanımlanması

önemli olmaktadır (Delgadillo ve Vivier, 2016). Buradan yola çıkarak bir sonraki bölümde açıklanacak olan referans, uygun ve kişisel MWS türlerinin bilinmesi MWS teorik çerçevesinin anlaşılmasında önemli görülmektedir.

Bu çalışmada semiyotik araç olarak ele alınan eşit işaretinin problem çözme sürecinde işe koşulduğu durumda öğrencinin doğrulayıcı açıklamalar, gerekçelendirmeler sunmaksızın, problemin çözümünü keşfettiği, yaptığı adımları ifade ettiği matematiksel çalışmasının semiyotik-enstrümantal düzlemde yer aldığı yönünde değerlendirilmiştir. Bunun yanında teknoloik araç olarak ele alınan terazi modelinin problem çözme sürecinde işe koşulduğu durumda doğrulayıcı açıklamalarını terazi modelinden yararlanarak, verilen ifadelerin terazi modelinde kefelere yerleştirilerek gösterilmesi gibi, yaptığı matematiksel çalışması enstrümantal-söylemsel düzlemde yer aldığı yönünde değerlendirilmiştir. Son olarak eşit işareti veya terazi modelinin problemin çözümünde işe koşulduğu matematiksel çalışmada öğrencinin terazi veya eşit işaretinin özellikleri, tanımı, işlevi, kullanma prensibi gibi unsurlarına değinerek doğrulayıcı açıklamalar, gerekçelendirmelerinin ortaya koyulduğu çalışmaların semiyotik-söylemsel düzlemde yer aldığı yönünde değerlendirilmiştir.

1.4.1.5.Referans uygun ve kişisel MWS

Kuzniak ve diğerleri (2016) öğrencileri tutarlı bir başarıya götüren yolda matematiksel çalışmanın bir yandan yönelimleri belirleyen eğitim kurumları tarafından, diğer yandan da günlük çalışmalarını sınıflarında tamamlamak amacıyla olan öğretmenler tarafından belirlendiğini ifade etmektedir. Bununla beraber öğrencilerin kendi düşünme süreçleri de işin içine girdiğinden üç tip MWS'den bahsetmek doğru olacaktır: referans MWS, uygun MWS ve kişisel MWS. Kuzniak ve diğerleri (2016) referans MWS'yi bilgi ile ilgili olarak tanımlarken; uygun MWS'yi ilgili kuruma bağlı ve bilginin kurumun öğretim programı içindeki yeri ve işleviyle ilgili olarak nasıl öğretileceği ile ilgili olarak tanımlamaktadır; kişisel MWS'yi de bireyin matematiksel bir problemi kendi bilgisi ve bilişsel kapasitesiyle ele almasıyla ilgili olduğu yönünde tanımlamaktadır (Kuzniak, vd.,2016). Delgadillo ve Vivier (2016) üç tip MWS'nı şu şekilde tanımlamaktadır:

- Referans MWS: matematiksel bilginin ideal kriterler altında nasıl ele alındığı ile ilgilenmekte,

- Uygun MWS: matematiksel bilginin ilgili kurumun işlevine bağlı olarak nasıl öğretileceği ile ilgilenmekte,
- Kişisel MWS: matematiksel bir problemi bireyin kendi bilgisi ve bilişsel kapasitesi ile nasıl ele aldığı ile ilgilenmektedir (Delgadillo ve Vivier,2016).

Matematiksel çalışma uzayındaki bir çalışmanın tamamlanmış, bütüncül bir döngüye sahip olabilmesi uygun matematiksel çalışma uzayının çeşitli dikey düzlemleri ve oluşumlar arasında sirkülasyonu ile sağlanmaktadır (Kuzniak vd., 2016). Kuzniak vd. (2016) uygun bir matematiksel uzayını; öğretmenlerin, öğrencilerden istenen çıktıları elde edebilecek yönde öğretim ortamını tasarlayabilmesi süreci olarak tanımlamaktadır. Örneğin; semiyotik bir araç uygun matematiksel çalışma uzayı ile semiyotik enstrümana dönüştürülebilir; böylece bu enstrüman da öğrencinin kişisel MWS'nın bir parçası haline gelmektedir (Kuzniak vd., 2016). Aynı zamanda Kuzniak vd. (2016) öğretmenin beklediği çalışma ile öğrencinin yaptığı çalışma arasında tutarsızlık ortaya çıktığında bu durumun yalnızca yetersiz öğrenci çalışmalarından kaynaklanmayabileceğine; öğretmen ve öğrencinin matematiksel çalışma uzayının aynı dikey düzlemde yer almaması gerçeğinden kaynaklanabileceğine işaret etmektedir (Kuzniak vd., 2016). Referans MWS, matematiksel doğrular ve kurallara göre tanımlanmış olup bunun yanında sosyal, ekonomik ve politik kriterler de referans MWS'ye katkıda bulunmaktadır. Matematikçilerin ve matematik eğitimcilerinin yazdığı tezler, bilimsel çalışmalar ve makaleler de referans MWS'nı biçimlendirmektedir (Kuzniak vd., 2016).

Kuzniak vd. (2016) bir eğitim kurumunun nihai amacı olan verimli kişisel MWS'lere ulaşmasında matematiksel doğruları merkezine alan referans MWS ile öğrencinin bu doğruları zihnindeki şemalara yerleştirmesi ya da zihnindeki şemaları düzenlemesini merkeze alan kişisel MWS arasındaki anlamlı etkileşimin tutarlı eksiksiz bir uygun MWS tasarımı ile mümkün olacağını ifade etmektedir. Uygun MWS'da öğretmen tarafından belirlenen problemlerin ve görevlerin seçimi, organizasyonu referans MWS tarafından açık bir şekilde çerçevelenen kurumsal beklentilere uygun bir şekilde gerçekleşmektedir. Bu seçimler, büyük ölçüde öğretmenin kişisel MWS'na ve referans MWS'na kendince yorumlama biçimine göre değişime uğrayacaktır. Ancak bu seçimler aynı zamanda öğrencilerin seviyesine, genel yeterliklerine ve ilk kişisel

MWS'na bağılı olmaktadır. Buradan hareketle uygun MWS'nın öğretmenler ve öğrenciler arasındaki bir tür etkileşim sonucunda ortaya çıktığını, bu etkileşimin kurallarının da normalde referans MWS'na yerleşmiş olan bir epistemolojik düzenin gereklilikleriyle uyumlu olması gerektiğine dikkat çekmek gerekmektedir (Kuzniak, vd., 2016). Radford (2016) da referans MWS ve kişisel MWS arasındaki farkın sebebini öğrenmenin hem bireye özgü hem de kollektif bir süreç olması ile ilişkilendirerek açıklamaktadır. MWS modeli özet olarak araştırmacılara okuldaki matematiksel çalışmaların veya sınıf ortamlarının üç MWS türünde analiz edilebileceğini ortaya koymaktadır (Radford, 2016).

Bu çalışmada eşitlik ve değişken kavramlarına yönelik tasarlanan öğretim süreci uygun MWS olarak ele alınırken, öğrencilerin tasarlanan bu öğrenme ortamında MWS modelindeki bileşenlerden hareketle bireysel olarak öğrenme süreçlerinin ayrıntılı betimlenmesi ile kişisel MWS'na ilişkin bulgular elde edilmiştir.

1.4.1.6.MWS'nın katkıları

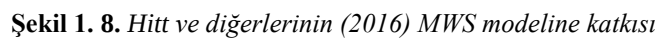
- MWS sayesinde matematiksel bir çalışmayı anlamlı ve bir bütün olarak ele alabilmek, kavram yanılgılarını tanımlamak mümkün olmaktadır. Öğretmenin niyetlendiği matematiksel çalışma ile öğrencinin çalışmaları arasındaki farklılıkları görmeyi ve bunların sebeplerini ortaya çıkarmayı sağlamaktadır. Model, matematiksel problemlerle ve görevlerle uğraşan öğrencilerin matematiksel çalışmalarının doğasını tanımlamayı sağlamakta ve semiyotik bir aracın uygun matematiksel bir çalışma ile enstrümana dönüşebilmesi sağlanabilmektedir (Kuzniak, Nechache ve Drouhard, 2016).
- MWS'nin söylemsel oluşum bağlamında kanıt öğrenme sürecinde öğrencilerin matematiksel çalışmalarını geliştirmelerine izin vermekte; öğrencilerin, uzmanların kanıtlamayı nasıl analiz ettiklerini ve kişilerin nasıl kanıt yaptıklarını gözlemleyerek de kanıt yapmayı öğrenmeleri sağlanabilmektedir (Richard, vd., 2016).
- Model, öğretmenlerin tutarlı ve aynı zamanda etkin matematiksel çalışmaları denetlemesi ve kolaylaştırması gerektiğinde öğretmen ile sınıf etkileşiminin rolünü ele almaktadır. Öğretim sürecinde etkileşimleri görselleştirmek için modelin kullanılması süreci anlamayı sağlamakta; bu tür görselleştirme öğretmenler arasında tartışmayı kolaylaştırmanın yanında, etkinlikleri

matematiksel uygunluk ve verimlilik açısından incelemek, uyarlamak ve düzenleme yapmakla ilgilenenlere de yarar sağlamaktadır (Kuzniak vd., 2016).

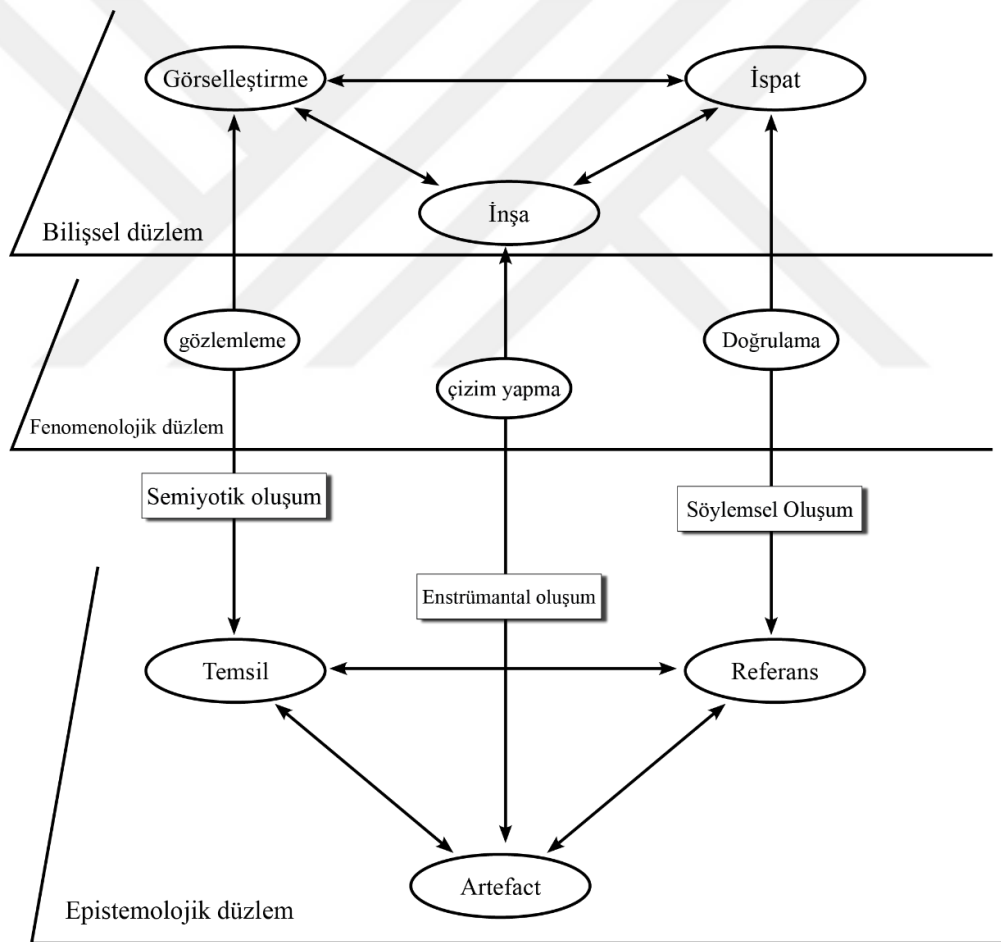
- MWS, öğretim sürecinde seçimlerin nasıl yapıldığını, bu görevlerin nasıl uygulanacağını, zamanlama, sürece entegre etme bağlamında organizasyonların nasıl yapılacağı sorularına cevap verebilmesinin yanında tamamlanmış ve anlamlı bir matematiksel çalışmanın gelişimini anlamaya izin vermektedir (Kuzniak vd., 2016).
- MWS, öğrencilerin matematik çalışmalarında beklenen çıktıları ile öğretmenin ve kurumun seçimlerini ve bu seçimlerin sebep olabileceği kısıtlamaları gösterebilmektedir. MWS yaklaşımı, aynı zamanda bu kısıtlamaların öğretmenlerin pedagojik eylemlerini ve öğrencilerin öğrenmelerini derinden etkilediğini göstermektedir. MWS yaklaşımı, diğer kültürel sistemlerdeki ve diğer kültürel bağlamlardaki farklılıkları ve benzerlikleri yansıtarak, toplumsal kısıtlamaların diğer eğitim sistemlerinde nasıl çalıştığını sorgulamaya davet etmektedir (Radford, 2016).
- Geometri çalışma uzayı öğretmenlerin ve öğretmen eğitimcilerinin özelliklerin başlangıç noktasını görmesini sağlayan bir teorik çerçeve olmasının yanında bu özellikleri öğrencilerin geometri düşünme süreçlerine üç oluşumla beraber nasıl entegre edeceklerini de görmelerini sağlayacaktır (Gómez-Chacón ve Kuzniak, 2015).
- Matematiksel çalışma uzayı, öğrencilerin muhakame sürecini ve matematiksel tutumun bilişsel öğelerini keşfetmeye fırsat tanımaktadır. İspat seviyeleri arasındaki geçişlerin nasıl olduğuna derin bir bakış açısı sağlamakta; öğrencilerin matematik tutumlarının altında yatan bilişsel süreç tipolojilerini tanımlamak için yararlı olmakta ve olumlu tutumların ispatlarda karar verme sürecinde etkisini göstermede yararlı olduğu görülmektedir (Gómez-Chacón, vd., 2016).
- Matematiksel çalışma uzayı matematiksel fikirleri anlamayı sağlamanın yanında problem çözerken matematiksel tartışmaları da desteklemektedir (Santos-Trigo vd., 2016).
- Matematiksel çalışma uzayı üç epistemolojik bileşen, üç bilişsel süreç ve üç oluşum ile didaktik çalışmanın kalbini keşfetmemize olanak sağlamasının yanında öğrencilerin kişisel MWS'ını zenginleştirmek veya öğrencileri belirli

- Matematiksel çalışma uzayı modeli kavram öğrenme sürecindeki kavramsallaştırma süreçlerini analiz etmek için uygun bir çerçeve olmasının yanında teorik, enstrümantal ve söylemsel olarak tanımlanmış üç tür oluşumun birleşmesiyle matematiksel kavramsallaştırmayı anlamaya yardımcı olmaktadır (Tanguay ve Venant, 2016).

Veldhuis ve van den Heuvel Panhuizen (2014) MWS'nın matematik eğitiminde sınıf değerlendirmesi amacıyla kullanılabileceğini işaret etmektedir. MWS modelini; Referans MWS, uygun MWS ve kişisel MWS arasındaki (olası) boşluklar açısından öğretim sürecinin analiz edilmesi ve tanımlanması yoluyla kullanarak sınıfı değerlendirmek ve daha iyi anlamak için kullanmak yararlı olacaktır (Kuzniak vd., 2016). MWS teorik çerçevesi aynı zamanda diğer teorik çerçeveler arasında ilişki kurmayı sağladığından farklı yaklaşımlar ve teorik çerçeveler ile etkileşimde bulunmayı destekleyen bir araç olarak işlev görmektedir (Kuzniak vd., 2016). Hitt ve diğerleri (2016) yaptıkları çalışmadan sonra matematiksel çalışma uzayı modelini revize etmiş ve Şekil 1.8'de verilen modele ulaşmıştır:



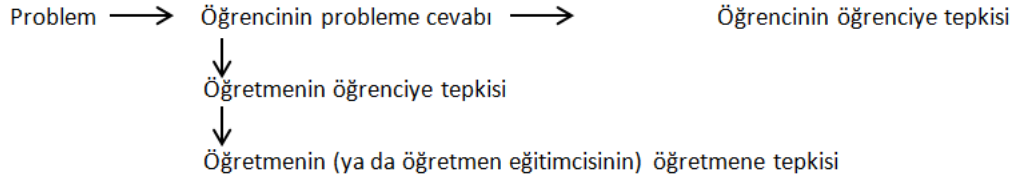
Buradan hareketle matematiksel çalışma uzayı modelinin konuya veya matematiksel alana uygun bir şekilde revize edilmesinin mümkün olduğu; hem de modele önemli katkılarının olacağı düşünülmektedir. Miranda vd. (2016) MWS çerçevesinde epistemolojik ve bilişsel düzlemler arasında gözlem, çizim ve gerekçelendirme öğelerinin yer almasını; bu üç öğenin yer aldığı düzlemin fenomenolojik düzlem olarak adlandırılmasını önermektedir (Şekil 1.9). Geçiş düzleminin, incelenen her durumla bağlantılı olduğu ve öğrencilerin epistemolojiyi bilişsel düzleme bağlayan oluşumlarda deneyime girmelerini destekleyen eylemlere sahip olmalarını sağladığı vurgulanmaktadır (Miranda vd, 2016).



Şekil 1. 9. Miranda ve diğerlerinin (2016) MWS modeline katkısı

Kuzniak ve Rauscher (2011) geometri çalışma uzayı teorik çerçevesi kapsamında yaptıkları çalışmada modelin, öğretmenlerin profillerini belirlemede ve öğretmen eğitimi yöntemlerinin oluşturulmasında yardımcı olabileceğini ifade etmektedir.

Böylece öğrenci, öğretmen ve problem arasındaki etkileşimi bir zincir reaksiyonu ile temsil edebileceğini ve bu durumun Şekil 1.10'daki gibi özetlenebileceğini ifade etmektedir (Kuzniak ve Rauscher, 2011):



Şekil 1. 10. Kuzniak ve Rauscher (2011)'in öğrenci-öğretmen-problem zinciri

Bu yöntemin, öğretmenlerin hem öğrencileri hem de meslektaşları arasındaki çeşitliliği tanımasına yardımcı olması beklenmektedir (Kuzniak ve Rauscher, 2011).

1.4.1.8.MWS bağlamında alan yazın

Kuzniak, Nechache ve Drouhard (2016) çalışmasında matematiksel bir çalışmanın gerçekten etkililiğini ve verimliliğini geliştirmek için tamamlanmış, bütüncül bir matematiksel çalışma fikri geliştirmeyi amaçlamıştır. Öğretmenler (6 kişi) 9. ve 10. sınıflardaki (14-15 yaş) öğrencilerle yaşamı zenginleştirmek için öğretim yapmışlar; matematik alanında olasılık konusunda kağıt-kalem ve sonrasında teknoloji olarak excel kullandıkları süreç; video, ses kaydı ve tahta fotoları ile kaydedilmiş ve nitel olarak analiz edilmiştir. Çalışmanın sonucunda aşağıdaki bulgular elde edilmiştir:

-Matematiksel çalışma uzayı modelini kullanarak anlamlı ve tamamlanmış bir matematiksel çalışmanın iki noktaya değinerek tamamlanması gerektiği, bunların;

A) epistemolojik ve bilişsel düzlemlerle gerçek bir ilişki.

B) farklı oluşumlar ve modeldeki dikey düzlemler arasında zengin çeşitliliğin bir araya gelmesi olduğu görülmüştür.

Bu çalışma aynı zamanda enstrüman meselesine çok boyutlu bir bakış açısı sağlamış: semiyotik, teknolojik ve teorik enstrümanlar arasındaki farkın açıkça tanımlanabilmesine yardımcı olmuştur. Matematiksel enstrüman terimine, matematiksel çalışma uzayının tüm farklı bilişsel boyutlarında dolaşıp anlamlı bir matematiksel çalışmaya erişebilme potansiyelinin ve olasılığının olması durumunda yer verildiğini

dile getirmiştir. Modelin yararlı bir yöntemsel araç olarak gelişmesinin ve refine edilebilmesinin çok önemli bir gereklilik olduğunu dile getirmiştir. Bu yaklaşımın öğretmen ya da öğrencinin fark etmediği (bilmediği) kavram yanlışlarının ve zorlukların tanımlanmasına izin verdiğini; çalışmanın bulgularının öğretmen eğitimi bağlamında yardımcı olabileceğini belirtmiştir. MWS'nin sadece öğretmenlerin kavram yanlışları ile ilgili farkındalığını arttırmak için değil, aynı zamanda onların öğrencilerine bütüncül (tamamlanmış) bir matematiksel çalışma geliştirmelerine yardımcı olacağına vurgu yapmıştır.

Gómez-Chacón ve Kuzniak (2015) çalışmasında öğrencilerin öğrenme süreçlerini analiz ederek süreçteki oluşumları (enstrümantal, şekilsel, söylemsel) oluşumları tanımlamayı; var olan ilişkileri tanımlayarak buna karşılık gelen diyagramı çizmeyi amaçlamıştır. Aynı zamanda interaktif bir geometri programı olan geogebrenin öğretmen adaylarının geometri çalışmalarında önemli bir rolü olup olmadığına karar vermeye çalışmıştır. Öğretmen adaylarına (98 kişi) geometri alanında bir görev verilmiş; çalışmaları kaydedilip kullandıkları stratejiler kategorize edilmiş; matematiksel çalışmadaki zorluklar, duygular, farklı oluşumlar belirlenmiştir. Yazarın çözümü ile karşılaştırmalı analiz yapılarak nitel bir çalışma yürütülmüştür. Verilen görev: uzunlukları verilen bir çanın belirli bir oranda büyütülerek yeniden çizilmesine yöneliktir. Öğrencilerden görevi önce kâğıt-kalem ortamında sonra geogebra kullanarak yapmaları istenmiş; çalışmanın sonunda elde edilen bulguları şu şekilde ifade edilmiştir: geometri çalışma uzayı öğretmenlere ve öğretmen eğitimcilerine özelliklerin başlangıç noktasını (temelini) görmeyi sağlayan bir teorik çerçeve sağlar ve bu özellikleri öğrencilerin geometrik düşüncelerine araç kullanımı ve şekil, görselleştirme ile nasıl entegre edeceklerini tanımlamaya yardımcı olur. Bununla beraber geometrik çalışmaları etkileyen bu üç çeşit oluşumla öğretmen adayları tanıştırıldığında kendi çalışmaları ile diğer öğretmen adaylarının öğrenme yapılarının geometrik elemanları arasındaki farkı görmeleri sonucunda ortaokul düzeyindeki öğrencilerine bu aktiviteleri uygulamalarında rehber ve yardımcı olacağına inanılmaktadır.

Gómez-Chacón, Albaladejo ve López (2016) çalışmasında matematiksel çalışma uzayı teorik çerçevesini biliş ve etkisi arasındaki etkileşimi; geometrik muhakemede enstrümantal oluşumdan söylemsel oluşuma geçişteki etkililiğini tanımlamak için MWS kullanmanın etkisini araştırmayı amaçlamıştır. Çalışmada 14-15 yaş grubu ile öğretim

deneyi yapılarak çalışma yürütülmüştür. 13 görev geogebra ile, 12 görev kağıt kalem ile yapılacak şekilde hazırlanmıştır. Görevler nötral geometriden aksiyomatik geometriye geçişi sağlayacak nitelikte seçilmiştir. İki bölümden oluşan çalışmada 1. bölümde bireysel; 2. bölümde grup çalışması yapılmış; veriler sorulara verilen cevaplar, gözlem, görüşme, öğretmen günlüklerinden elde edilmiştir. Kağıt-kalemde sonra geogebra etkinlikleri nitel olarak analiz edilmiş; tutum ve yeterlilikler incelenmiş, kodlanmıştır. Çalışmada yer verilen görevler çokgenlerle süsleme, çokgenlerde açı konularına yönelik seçilmiş olup önce kağıt-kalem ortamında sonrasında geogebra kullanılarak görevleri tamamlamaları beklenmiştir. Çalışmalardan elde edilen bulguları şu şekilde ifade etmek mümkün:

- Öğrenci öğrenmesinden öğretmen eğitimine geçişte yansıtma ve buluşsal boyut enstrümantal oluşumdan söylemsel oluşuma geçişte kritik bir öneme sahip olup matematiksel çalışma uzayının enstrümantal-söylemsel düzleminde çalışmada da oldukça önemli bir yere sahiptir.
- Enstrümantal-söylemsel düzlemde enstrümantal oluşumdan söylemsel oluşuma geçiş sürecini etkileyen faktörlerin şunları içerdiği görülmüştür:
 - öğrencilerin DGS (Dinamik Geometri Sistemi) aracını kullanmasında öğretmenin yansıtıcı ve sezgisel arabuluculuğu etkilidir;
 - öğrencilerin matematik tutumuna DGS aracılık etmektedir (Gómez Chacón, 2011, 2012).
- Öğretmen ve öğrencilerin kendi arasındaki sosyal etkileşim oluşumları arasındaki geçişlere katkı sağlamaktadır.
- Öğretmenin rolü, öğrencilerin tek bir egzersiz sonucu ortaya çıkan kişisel MWS çeşitliliğini yönlendirmede çok önemlidir.
- Ortaokul öğrencileri (14-15 yaş arası) için öğrencilerin söylemsel oluşumlara olan içsel ihtiyaçtan yoksun olmaları, geometrik akıl yürütmede söylemin rollerinin anlaşılmaması ve argümantasyon sürecinde yer almamaları enstrümantal-söylemsel düzlemde önemli bir zorluk ortaya çıkarmaktadır.
- Matematiksel çalışma uzayı modeli ispat seviyeleri arasındaki geçişlerin nasıl olduğuna önemli bir bakış açısı sağlamış; MWS modeli doğrusal olmayan ispat seviyeleri arasındaki geçişi karakterize etmek için kullanılabilir.

- MWS modelinin öğrencilerin matematik tutumlarının altında yatan bilişsel süreç tiplerini tanımlamak için yararlı olduğunu kanıtlamıştır.
- Bu modelin kullanılması ile yapılan analiz öğrencilerin Kişisel MWS'nın daha iyi anlaşılmasını sağlamıştır.

Richard, Oller Marcén ve Meavilla Seguí (2016) çalışmasında MWS modelinin planlanan bir eylemin farklı ortamlardaki durumunu ve kanıtlama ile konu arasındaki potansiyel etkisini de göz önünde bulundurarak modelin yararlarını göstermeyi amaçlamıştır. Çalışma nitel bir çalışma olup a priori (deney yapmadan olası varsayımların ortaya koyulmasına yönelik) bir çalışma olmuştur. Bazı ifadelerin ispatlanmasında görülecek oluşumlar, kullanılabilecek düzlemeler ve böylelikle ortaya çıkan yararlar belirlenmeye çalışılmıştır. Bir grupla uygulama yapılmamıştır ancak konu olarak lise düzeyinde bir konu olan çemberde teğet-tanjant konusu seçilmiştir. Çalışma önce kağıt-kalem sonrasında dinamik geometri ortamında tanımlanmıştır. Çalışmadan elde edilen bulgular şu şekildedir:

- öğrencilerin, kanıt sorunlarını çözmeleri istenecek olan tamamlayıcı bir çalışmada benzer bir yaklaşımın ispat öğrenme konularının daha iyi anlaşılması için yararlı olacağı öngörülmüştür,
- enstrümantal kanıt, sınırlı, bir anlamda kısıtlamalar altında bir kanıt olmayıp; aynı zamanda matematiksel bir özelliğin epistemik zorunluluk alanını genişleten bir doğrulamadır.

Kuzniak, Parzys ve Vivier (2013)'ın çalışmasının amacı, mesleğin bazı alışılmış uygulamalarıyla birlikte öğretmenler üzerinde oluşan bazı kısıtlamaları daha iyi anlamak; ortaöğretim matematik öğretmenlerinin eğitiminde bir sınıfta gerçek öğretim yapılması üzerindeki etkisini kavramaktır. Bununla beraber 'öğretmenler öğrencileri ile gerçek hayattaki kısıtlamalara döndüklerinde öğretmen eğitiminden geriye kalan nedir?' sorusuna cevap aramak amacıyla yapılmış bir çalışmadır. Bu bağlamda nitel bir çalışma yürütülmüştür. Öğretmen adaylarından bir geometri sorusu için farklı seviyedeki öğrencilere uygun öğrenme yol haritası çıkarmaları istenmiş; öğretmenlerin (5 farklı öğretmen adayı) öğretim sürecini detaylandırmaları; önce kağıt-kalem ortamında sonra da dinamik geometri ortamı kullanmaları beklenmiştir. Aşama 1.'de bir eğitim merkezinde bir matematik eğitimcisi bir dergide günlük dilde yazılmış bir problemi bulmuş; öğretmenler için geometrik bir aktiviteye yol açabileceğini düşünmüş; onu

geometrik bir ifadeye dönüştürmüştür ve öğretim programı içerisinde, kursiyerlerden sınıf seviyesine bakılmaksızın sorunun tüm olası çözümlerini aramalarını istemiştir (matematiksel bir ön analiz). Aşama 2’de eğitimci, kursiyerlerinden ifadeyi belirli bir seviyeye (didaktik bir önsel analiz) ait bir sınıfa bir araştırma problemi olarak kullanılabilecek şekilde yeni bir probleme dönüştürmelerini istemiştir. Aşama 3’te her kursiyer kendi sınıfındaki problemi ortaya çıkarmayı taahhüt etmiştir. Bunun için, söz konusu belirli sınıfa uygun olarak soruyu tekrar dönüştürmüş ve öğrencilerinden sorunlarına çözüm bulmak için bilgilerini kullanmaları istenmiştir. Aşama 4’te eğitimci, kursiyerlerinden sınıflarının seviyesine göre grup halinde toplanmasını istemiş; bu düzey için, kendi sınıflarında gözlemleyebildikleri uygulamayı dikkate alarak bir araştırma problemi haline getirmek için, ifadenin yeni bir formülasyonu yapmalarını beklemiştir. Çalışmanın sonunda elde edilen bulgular şu şekildedir: eğitim merkezinde oyuna dahil edilmek ya da edilmemek önemli görülmüş, çünkü öğrencilerin geri bildirimlerini dikkate alarak problemin dönüşümü, döngünün başlangıcı olarak ele alınmıştır. Bu, öğretmen mesleğinin merkezi bir bileşeni olup; dahası sorunların aynı ortaokulun öğretmenleri arasında bir tartışma yürütme süreci gibi diğer iletişim biçimlerini etkilediği düşünülmüştür.

Santos-Trigo, Moreno-Armella ve Camacho-Machín (2016)’nın çalışmasının amacı problem çözme yaklaşımlarında pek çok teknolojinin sağladığı katkıların bilişsel ve epistemolojik eylemlere etkisini ve katkısını analiz etmek ve tanımlamak olmuştur. Matematik öğretmeni adaylarının, iki matematiksel görevi formüle etmede ve çözmeye sistematik olarak dijital araçların kullanılması sonucunda ortaya çıkan problem çözme sürecini tanımlamaya odaklanılmıştır. Bu nedenle, araştırmanın gelişimine rehberlik eden bir araştırma sorusu şu şekildedir: lise öğretmeni adayları, dinamik temsilleri oluşturmak ve araştırmak için bir dizi dijital sağlamlığı (sürükleme, ölçme vb.) ne şekilde koordine ederler ve deneysel muhakemeden formal muhakemeye matematiksel çalışma uzayı teorik çerçevesi kapsamında geçişi ne şekilde gerçekleştirirler? Bu kapsamda nitel bir çalışma yürütülmüş olup 8 lise öğretmeni adayı ile iki haftada bir 3 derslik program yapılmıştır. Bireysel, küçük grup ve işbirlikli grup tartışması yapılmış; geometri ile ilgili bazı görevler verilip, sorular sorulup, videolar izlenmiştir. Öğretmen adaylarından bu videolara yönelik sorular üretmeleri istenmiştir. Hem kâğıt-kalem hem de geogebra kullanmaları istenmiştir. Çalışmanın bulguları şu şekildedir: nesneleri

sürüklenme, parametreleri ölçme, grafiklerin odak noktasını bulma ve kaydırıcıların kullanılması (sürükleyerek değerleri değiştirme) gibi teknolojik yeterlikler katılımcıların semiyotik ve söylemsel oluşumlarına önemli katkı sağlamaktadır. Böylece katılımcıların küçük grup bireysel ya da tartışma gruplarındaki yaklaşımları varsayımları tanımlamaya yardımcı olacaktır. Bu varsayımlar daha sonrasında deneysel, geometrik ve cebirsel argümanlar üzerinden analiz edilecektir. İlaveten katılımcılar, çalışma uzayının matematiksel fikirleri anlamayı sağladığını; problem çözerken formal ayarlamaların ötesindeki matematiksel tartışmaları desteklediğini fark etmişlerdir.

Kuzniak ve Rauscher (2011)'in çalışması Steinbring (1998) gibi araştırmacıların, öğretimi geliştirmek için epistemolojik bilgi üzerinde çalışmanın gerekliliği konusunda ısrar ettikleri alana katkıda bulunmayı amaçlamıştır. Bu amaçla ortaokul öğretmenlerinin çatışan paradigmaları ne ölçüde tanıdıkları ve öğrenciler tarafından bazen istenmeyen şekillerde yürütülen geometrik çalışmayı nasıl ele aldıkları incelenmektedir. Böylece amaç, öğrenci ve öğretmen çalışma alanları arasındaki farklılıkları ortaya koyup öğrenci zorlukları, engelleri, kavram yanlışlarını tanımlayabilmek, öğretmenleri bu konuda değişim ve gelişim süreci içerisine dahil edebilmektir. Çalışmada nitel araştırma yöntemi benimsenmiş olup bir geometri problemi ortaokul öğretmenlerine yöneltilmiştir. Aynı zamanda öğretmenlere öğrencilerin bu probleme verdikleri cevaplar gösterilip 'öğrencilerin şüpheleri, şaşkınlıkları, zorlukları neler olmuş olabilir?' ya da 'sınıf ortamında verilmesi en uygun cevap sizce hangisi olabilir' gibi sorular yöneltilmiştir. Böylece öğrenci ve öğretmen MWS'si tanımlanmıştır. Çalışma sonucunda elde edilen bulgular şu şekildedir: Öğretmenler arasında, bazıları sadece Geometri II'nin yönettiği bir GWS içinde kalmıştır ve Geometri I'i öğrenciler için olası geometrik kavramlar ve zorlukların kaynağı olarak düşünmemiştir. Çalışmanın uzun vadeli amacı, öğretmenlerin matematiğe yönelik tutumlarını ve öğretilerini değiştirerek öğretimi etkilemek olduğundan bu süreçte etkili olmak için çeşitli yaklaşımların geliştirilmesi gerektiği sonucuna varılmıştır. Öğretmenlerin kişisel GWS'sinin öğrencilerin çözümlerini nasıl algıladıklarını belirlediği görülmüştür. Bu modelin öğretmenlerin hem öğrencileri ile hem de meslektaşları arasındaki çeşitliliği tanımasına yardımcı olacağına inanılmaktadır.

Delgadillo ve Vivier (2016), bu çalışma ile paradigma kavramının tanımlanmasıyla MWS modelinin analiz için geliştirilmesini amaçlamıştır. Üç ülkeden örnekler ve veriler kullanarak, bu modelin sınıf durumlarının ve bireysel öğrenci çalışmalarının analizlerini gerçekleştirmek için nasıl kullanılabileceğini göstermiştir. Çalışma nitel bir araştırma (durum çalışması) olup fonksiyon aralığı ile ilgili bir geometri sorusu (geogebra kullanarak) Fransa'daki 12. sınıf bilim akımı sınıfındaki öğrencilere sorulmuştur. MWS modeli ile sınıf oturumu ele alınmış ve sınıf durumu analiz edilip anlaşılmıştır. Priori ve posteriori analiz yapılmıştır. Veri toplamada video kaydından yararlanılmıştır. Hem öğrenci hem de öğretmen MWS'ı tanımlanmış, öğrencilere kişisel MWS'ı tanımlanması için anket verilmiştir. Araştırmadan elde edilen bulgular şu şekildedir: incelenen durumlardan elde edilen sonuçların bir kısmı genişletilebilir ve yeni sorular formüle etmek için kullanılabilir. Örneğin, öğretmenin uygun MWS'ı Fransızca öğretim programında, aşına olduğumuz şekilde genişletilebilir ancak diğer bağlamları kapsayacak şekilde genelleştirilmemelidir. MWS modelinin bir diğer avantajı, öğrencilerin kişisel MWS'ını zenginleştirmek veya öğrencileri belirli alanlarda görevlerin çözülmesinde daha az olağan düzey düzlemlerde çalışmaya zorlamak için didaktik durumlar oluşturabilmesidir. Çalışmanın önerisi şu şekilde olmuştur: matematiksel analiz alanı, diğer alanlara, özellikle cebir, sayılara ve geometriye bağlı olduğundan bu alanlarda çok sayıda değişikliğin mümkün olduğu anlamına gelmiştir.

Derouet ve Parzysz (2016)'nın araştırmasının iki ana hedefi vardır: Fransız matematik ders kitaplarının şu anda yoğunluk fonksiyonlarını ve histogramları hangi yollarla sunduğunu analiz etmek ve bu kavramların programa girişine alternatifler önermektir. Bu çalışmada nitel araştırma yöntemi kullanılmış olup yoğunluk fonksiyonu kavramının ders kitaplarında (8 adet bilimsel 12. sınıftaki test kitapları ve ders kitapları) nasıl ele alındığı referans MWS bağlamında incelenmiştir. Uygun MWS'ye karar verilmiş; böylece olası zorluklar ve hatalar belirlenip histogram kullanarak yoğunluk fonksiyonu kavramının nasıl ele alınacağı belirlenmiştir. Çalışmanın bulgularından elde edilen sonuçları şu şekilde ifade etmek mümkün: normalde lisede 4 yıldan uzun bir süre (7'den 10. sınıfa kadar) çalışmış olan istatistiksel grafik temsilleri olmasına rağmen, histogramların, Fransız öğrencilerin kişisel MWS'sinde sadece küçük bir yeri olduğu sonucuna varılmıştır. Bu çalışma sayesinde çoğu ders kitabında yoğunluk kavramının tanıtılmasının histogram kavramına dayandığı

görülebilmıştır; bu tür bir grafik aslında yoğunluk kavramına anlam vermek için oldukça ilginç bir yoldur. Ancak, mevcut öğretimde yetersiz olarak kullanıldığı da görülmüştür. Bu nedenle, bu konuya ilgi göstererek, ilgili çalışma uzayının oldukça zayıf olduğu gösterilmiştir. Ayrıca ders kitaplarında bazı hatalar görülmüş, bu da öğretmenler için de öğrenciler için de bazı sonuçlar doğurmuştur. Histogramlar etrafındaki bu zayıf MWS, yoğunluk (sıklık) fonksiyonlarına anlam vermek için bir destek olarak verimli bir şekilde kullanılamadıklarını göstermiştir.

Artigue (2016) çalışmasında Matematiksel Çalışma Uzayının (MWS) teorik çerçevesine ortak bir atıfta bulunan araştırma çalışmalarını toplamıştır. Çalışma ile teorik yaklaşımlar arasındaki bağ uygulamalarını desteklemek için başlatılan araştırma praksiyoloji (insan eylemlerini inceleyen bilim) kavramını kullanarak bu yeni teorik yapıya yaklaşılmıştır. MWS çerçevesinin vizyonunu ve ortaya koyduğu eğitim potansiyelini ifade etmeden önce, farklı katkıları okumayı nasıl şekillendirildiği açıklanmış; son bölümde, bu özel bakış açısının kullanımından ortaya çıkan MWS teorik çerçevesine ilişkin bazı soru ve zorluklara dikkat çekilmiştir. Bu nedenle bir yöntem belirlenmemiş olup teoriyi açıklayıcı bir çalışma olmuştur. Genel sonuç olarak MWS'nin teorik yapısının belirgin bir olgunluğa ulaştığından kuşku duyulmasa bile, bazı zorluklarla karşı karşıya olduğu; MWS geliştiricileri ve kullanıcıları topluluğunun, uluslararası düzeyde değişim ve ortak çalışma için yapılar yaratmayı başardığını, bu topluluğun bu zorlukları üstlenmedeki kapasitesi konusunda iyimser hale getirerek ilerlemeyi başardığı ifade edilmiştir. Bu özel mesele, ortaya çıktığı geometri alanının ötesinde, cebir, olasılık, fonksiyon ve analiz alanları gibi yeni matematiksel alanlardaki kullanımı ve ayrıca verimli etkileşimleri sayesinde MWS'nin evrimi potansiyelini açıkça gösterdiği düşünülmüştür.

Minh ve Lagrange, (2016)'ın çalışmasında ortaokulun üst sınıflarında fonksiyonların dar bir alanda öğrenilmesi ve öğretilmesini düzeltmeye katkıda bulunma amaçlanmıştır. Öğretimin uygulanması, analiz edilmesi; öğrencilerin ve öğretmenlerin fonksiyonlarla ilgili gelişimlerini oluşumlar açısından analiz etmede bu çerçevenin işlevselliğini ortaya koymak da diğer bir amaçtır denilebilir. Çalışmada nitel araştırma yöntemi benimsenmiş olup öncelikle öğretim programı analizi yapılmıştır. Öğretim programının uygun MWS'nı yani öğretmenlerin çalışma alanını nasıl yönlendirdiği analiz edilmiştir. Bu hipotezle tutarlı bir problem (fonksiyonlar, parabol, bağımlı ve

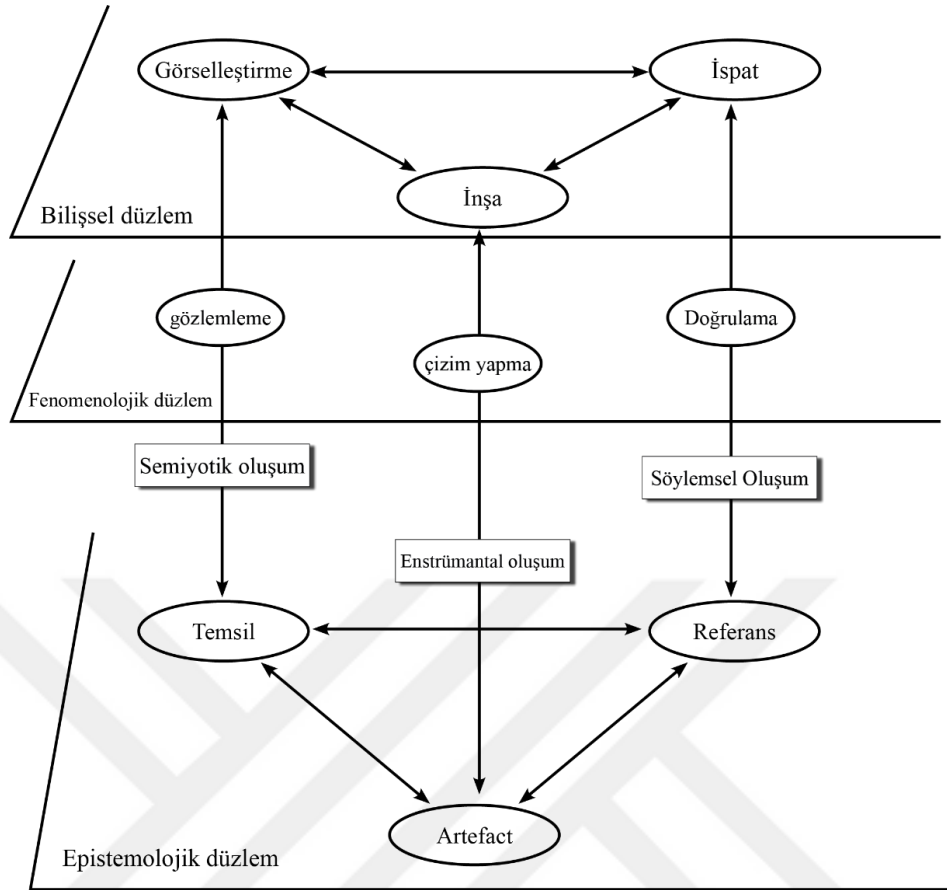
bağımsız değişkenler) ile sınıfta çalışma alanı belirlenmiş; başka bir problem tasarımı ile (bir dinamik geometri yazılımı olan casyopee yazılımı ile hazırlanan) sınıfın çalışma alanı değerlendirilerek yazılımın avantajları görülmeye çalışılmıştır. Casyopee yazılımı ile iki yıllık çalışma yapılmış; hem öğretmen hem öğrenci MWS'ı belirlenmiştir. Video kaydı, gözlem ve yarı yapılandırılmış görüşme yoluyla veriler toplanmıştır. İki yılda 6 seans (görüşme) yapılmış; sınıf her ay bir oturum yapmış ve öğrenci ilerlemeleri de analiz edilmiştir. Çalışmadan elde edilen bulgular ve sonuçlar şu şekilde ifade edilmiştir: öğrencilerin kişisel MWS'ı ayrıntılı bir şekilde tarif edilmiş olup öğretmenlerin oluşumları da anlatılmıştır. Öğrencilerin dinamik geometri ve ölçümlerdeki görevleri için öğretmen tarafından hiçbir çalışma alanının hazırlanmamış olmasından kaynaklanan problemlere işaret edilmiştir. Böylece öğretim, cebirsel manipülasyon çalışmasına öncelik vermiş, öğrencilerin fonksiyon anlayışına yetersiz katkıda bulunmuştur. Dinamik bir geometri alanı, bir ölçme alanı ve bir cebir alanı belirlenmiş; Casyopée'nin artefactlarının her alanda getirdiği özel işlevleri ve alanları birleştirmek için araçlar belirlenmiştir. Sonuç, bu çalışmada dikkate alınan üç alanla sınırlı olmamak üzere, işlevsel alanların çeşitliliğinin, öğrenciler tarafından doğrusal olmayan bir şekilde organize edilip incelenebileceği yönünde olmuş; bu durum aynı zamanda daha geniş bir artefakt çeşitliliği (filmler, modeller, kağıt-kalem çalışmaları ve programlama ortamı gibi) anlamına da gelmiştir.

Tanguay ve Venant (2016)'ın çalışmasında ilkokulun sonunda öğrencilerin açığı nasıl kavradıkları anlaşılmaya çalışılmıştır: çalışmaya göre bir açı ya büyüklük ya da geometrik bir figürdür ve çalışmada bu açı kavramını anlamada öğrencilerin bu iki durumu nasıl koordine edebileceklerini açı ve açı ölçümünü nasıl anlamlandırdıklarını anlamaya çalışılmıştır. Bu nedenle amaç, ilkokulun sonunda öğrencilerinin açı ile ilgili hangi kavramsallaştırmaya yönlendirildiğini anlamak ve en azından kısmen, temelde didaktik seçimlerle yürütülen çalışma türlerinin neler olduğunu ortaya koymak olmuştur. Çalışmada nitel araştırma yöntemi benimsenmiş olup 6. sınıf düzeyine kadar kullanılmış iki ders kitabı koleksiyonu açı kavramı ve bu kavramla ilişkili diğer bağlamları analiz etmek için Vergnaud (1990)'ın teorik çerçevesinden yararlanılarak analiz edilmiştir. Görülen zorluklar ve olası kavram yanlışlarından hareketle öğrencilere uygun anket soruları hazırlanmış. İlk üç soru açı ve büyüklüğünü tanımlamaya yönelik olduğundan bireysel; diğerleri grupla cevaplandırılmış ve öğrenci

cevapları (6. sınıf 11-12 yaş düzeyindeki öğrenciler) analiz edilmiştir. Elde edilen bulgulardan hareketle aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır: MWS modelini daha iyi anlamak; epistemolojik ve bilişsel düzlemler arasındaki etkileşimi ve öğrenme-öğretmeye katkısı ve oynadığı rolün formüle edilmesi zor olduğu düşünülmüştür. Örneğin kavramın semiyotik doğuşunda, farklı “temsiller”den farklı anlamların, kavramı oluşturmak için birleştirilmesi gerektiğinde ısrar etmiştir.

Kuzniak, Tanguay ve Elia (2016) çalışmasında Matematiksel Çalışma Uzayının (MWS) teorik ve metodolojik modeli tanıtılmaktadır. Bu konuyla ilgili farklı makalelere yer verilerek, modelin farklı görevler, öğretim durumları ve belirli matematiksel alan ya da alanlardaki etkinliklerin incelenmesi için nasıl kullanılabileceği gösterilmektedir. Bazı perspektifler çizilirken, MWS’nın farklı teorik çerçeveleri bir araya getirme olasılığı yansıtılmış; bütünsel bir teori olarak önerilmenin aksine diğer yaklaşımlarla güçlü bir şekilde etkileşimde bulunan bir araç işlevi görmesi önerilmiştir.

Miranda, Pluvine ve Adjage (2016)’ın çalışmasında amaç fonksiyonların yakınlştırılması konusunda (tanjant ve asimtot) iki farklı yaklaşımın gerçekleştirildiği iki bağlamı incelemektir. Birincisi, teğetlerin incelenmesi için fonksiyonların mikroskopik temsilini içerirken; ikinci asimtot çalışma için fonksiyonların makroskopik bir temsidir. Öğrencilerin kişisel MWS’ları tanımlanmaya çalışılmıştır. Araştırmada nitel araştırma yöntemi benimsenmiş olup sınıf ortamı Hitt (2007)’nin ACODESA çerçevesine uygun olarak tasarlanmıştır. Ön analiz yapılmıştır. Üç seans yapılmış ve A,B,C olarak kodlanmıştır. 51 öğrencinin (üniversite öğrencisi) soru ve cevapları MWS modelinde hangi düşey ekseninde olduğuna göre; görselleştirmede V; enstrümanda I; muhakemede P ile; başarı olarak da 1 (güçlü başarı), 2 (zayıf başarı)... gibi kodlanmıştır. Görevlerde öğrencilerin yönergeleri takip ederek geogebra kullanmaları istenmiştir. Çalışmalardan elde edilen bulgular ve sonuçları şu şekilde ifade etmek mümkün: çalışmalarda gözlemlerle desteklenen görselleştirme, çizim ile desteklenen inşa etme semiyotik bileşenle ilişkili süreçlerinden sonra söylemsel oluşuma uzanıp gerekçelendirme ile desteklenen kanıtlama yapmak önerilmiştir. Kuzniak ve Richard’ın MWS modelini genişleten diyagram ortaya koyulmuştur (Şekil 1.11).



Şekil 1. 11. Miranda, Pluvinağ ve Adjiage (2016) 'ın MWS modeline katkısı

Öğretim kaynaklarında MWS çerçevesinin kullanılması; MWS'yi, ayrıntılı bir öğretme dizisi tasarlamak için ve üç oluşumun nasıl tasarlandığını ve modellendiğini sorgulamak için göz önünde bulundurmanın önemli olduğu ifade edilmiştir. İleriki araştırmalar için, tanımlanan pozisyonlarda gözlem, çizim ve gerekçelendirmeyi bir araya getirme düşüncesi önerilmiştir. Bu üç ek unsur, epistemolojik ve bilişsel düzlemler arasında konumlandırılan bir düzlemde yer alabilir; bu fenomenolojik düzlem olarak isimlendirilmiştir. Bu önerilen düzlemin “çizim ve gözlem” ya da “gözlem ve gerekçelendirme” gibi kombinasyonlarla tek tek oluşumları zenginleştirebileceği ifade edilmiştir. Geçiş düzleminin, incelenen her durumla bağlantılı olduğu ve öğrencilerin epistemolojiyi bilişsel düzleme bağlayan oluşumlarının deneyimsel girişlere sahip olmalarını sağladığı; öğretmenlerin, bu süreçleri sınıflarında teşvik edebileceği ve yönlendirebileceği ifade edilmiştir.

Radford (2016) çalışmasında matematiksel çalışma uzayı (MWS) üzerine bir yorumlama yapmıştır. Makale üç bölüme ayrılmıştır: birinci bölümde, MWS

yaklaşımının Fransız didaktik matematik teorileri arasındaki yerini tartışmış; ikinci bölümde, MWS yaklaşımının ana fikirleri olduğunu düşündüğü konuyu özetlemiştir. Son ve temel olarak MWS yaklaşımının aktardığı epistemolojik ve bilişsel duruşlara odaklanmıştır. Sonuç olarak bu çalışmaya göre: MWS yaklaşımı, Fransız didaktik teorilerinin ilginç bir sentezini ortaya koymuş ve epistemolojik ve bilişsel düzlemleri bir araya getirmeye cesaret etmiştir. Fransız didaktik geleneklerinin bir özelliği olan, derin bir estetik duygusuna sahip, teorik olarak iyi temellendirilmiş, çok tutarlı ve iyi organize edilmiş bir yaklaşım olduğu ifade edilmiştir. Başlangıç noktası, matematikçinin yoğun bir matematiksel aktiviteye sahip bir sınıf olabileceğini düşündüğü; bu sınıfın bir model olarak hizmet eden matematikçinin eseri olduğu görüşüdür. Bunu yapmak için, MWS modeli, epistemolojiyi bilişsel düzlem ile üç farklı oluşumla ilişkilendirmiş; üç eksen (semiyotik, enstrümantal ve söylemsel) birbirine bağlanan etkileşim içinde esnek bir yapı önermiştir.

Elia, Özel, Gagatsis, Panaoura ve Özel (2016)'in çalışmasında öğrencilerin mutlak değer kavramı, mutlak değerdeki çeşitli maddelerde gösterdikleri performans, bu öğelerdeki hataları ve öğrencilerin kavramları ile performansları ve hataları arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Matematiksel Çalışma Uzayı (MWS), öğrencilerin mutlak değer kavramı üzerinde matematiksel çalışmalarını incelemek için bir çerçeve olarak kullanılmıştır. Türkiye ve Kıbrıs arasında karşılaştırmalı bir çalışma yürütülmüş olup, öğrencilerin kişisel MWS'lerinde mutlak değer kavramı üzerinde daha derin bir anlayış kazanmıştır. Bu çalışmada nitel araştırma yöntemi kullanılmış olup referans MWS mutlak değer kavramı bağlamında analiz edilmiştir. Öğretmenlerin kavramı nasıl verdikleri yani uygun MWS analiz edildikten sonra da elde edilen verilerden hareketle test-anket hazırlanmıştır. Testte öncelikle mutlak değer kavramının tanımı ve sonrasında mutlak değer ile çözülecek sorular ve söylemsel akıl yürütmeye yönelik sorulara yer verilmiştir. Türkiye'de 9. sınıf Kıbrıs'ta 11. sınıf düzeyinde uygulanmış olup öğrenci cevapları ve cevaplar arası ilişkiler incelenmek için CHIC yazılımı kullanılmış böylece öğeler arası ilişkiler ortaya çıkarılmıştır. Çalışmadan elde edilen sonuçları şu şekilde ifade etmek mümkün: iki ülke arasındaki referans ve uygun MWS farklılıklarını gösteren bir çelişki görülmüştür. Türkiye için, en çok kullanılan tanım olan 0'dan uzak olan mutlak değer kavramı, söylemsel akıl yürütmeyi içeren öğelerin çözümüne olumlu destek vermiştir. Bu durum, Kıbrıs'ta en yaygın mutlak değer tanımı olan 'işareti

olmayan' olduğu için Kıbrıs için geçerli olmamıştır. Türk öğrencilerin hatalarının bir analizi, öğrencilerin söylemsel oluşumundaki hatalar ve didaktik ya da epistemolojik engellerin bir sonucu olan semiyotik oluşumlar arasındaki ayrımı ortaya çıkarmıştır. Bu çalışmada, Türkiye'de ve Kıbrıs'taki öğrencilerin mutlak değeri üç farklı şekilde kavramsallaştırdıkları bulunmuştur: sıfırdan uzaklığa, işaretli sayıya ve resmi tanımda belirtildiği gibi. Bu bulgu, aynı kavram için kişisel MWS de öğrencilerinin çeşitliliğinin bir göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Öğrencilerin kişisel MWS'lerindeki farklılıklar ve sapmaların her bir ülkedeki referans ve uygun MWS'nin farklı vurgularını yansıttığı düşünülmüştür, ki bunun da öğrencilerin mutlak değer kavramının inşa edilmiş anlamları üzerinde güçlü bir etkiye sahip olduğu ifade edilmiştir.

Hitt, Saboya ve Zavala (2016) çalışmasında aritmetik düşünme ile cebirsel düşüncenin başlangıcı olarak düşünülen erken cebirsel düşünmeyi ifade etmek için aritmetik-cebirsel düşünme tarzını harekete geçirmeye yardımcı olacaklarını düşündükleri bir deney sunmuştur. Bu ikinci düşünce tarzını inşa etme sürecinde, araştırmacılar öğrencilerin üçgensel sayıları kullanma sürecini analiz etmişler; belirli bir işbirlikli öğrenme metodolojisine dayanan bu çalışma, Aritmetik-Cebirsel Çalışma Uzayı inşa etme olasılığını araştırmakta, yedinci sınıf öğrencileri tarafından üretilen kendiliğinden temsilleri ve bunların evrimini göstermektedir. Bu çalışma aynı zamanda aritmetik ve cebir arasında ilişki kurmayı sağlayan bilişsel bir yapı oluşturma olasılığını araştırmayı amaçlamaktadır. Bu araştırmanın genel araştırma sorusu, aritmetik düşünme ve cebirsel düşünme arasında bir bilişsel yapının nasıl geliştirileceğidir. Araştırmada nitel araştırma yöntemi benimsenmiş olup sınıf ortamının tasarımında ACODESA (Hitt, 2013) kullanılmıştır: 1. Bireysel çalışma; 2. İşlevsel temsiller; 3. Grup çalışması; 4. Tartışma; 5. Kendini yansıtma; 6. Bilginin kurumsallaşması şeklinde öğretim tasarımına dikkat edilmiştir. Ortaokul 7. sınıftan 13 öğrenci ile iki senas (2,5 saat) görüşme ve deneyden 45 gün sonra 1 saat yeni görüşme yapılmış olup aritmetik bir problemin çözümünde excel ve polly kullanımına yönelik bir görev verilmiştir. Çalışmadan elde edilen bulgu ve sonuçlara bakıldığında aritmetik ve cebirsel düşünmenin gelişiminde şunlar önerilmiştir: “aritmetik ve cebir arasındaki kesişimin güçlendirilmesi” üzerine odaklanan yeni bir tartışma temelli bir yaklaşım kullanılmalı; etkinlikler, öğrencilerin varsayımlarının desteklenebilmesine yönelik sunulmalı; öğretmenler ise bu belgede sözü edilen bilişsel süreci, beklenti, doğrulamalar, hata algıları, çelişkilere duyarlılık ve

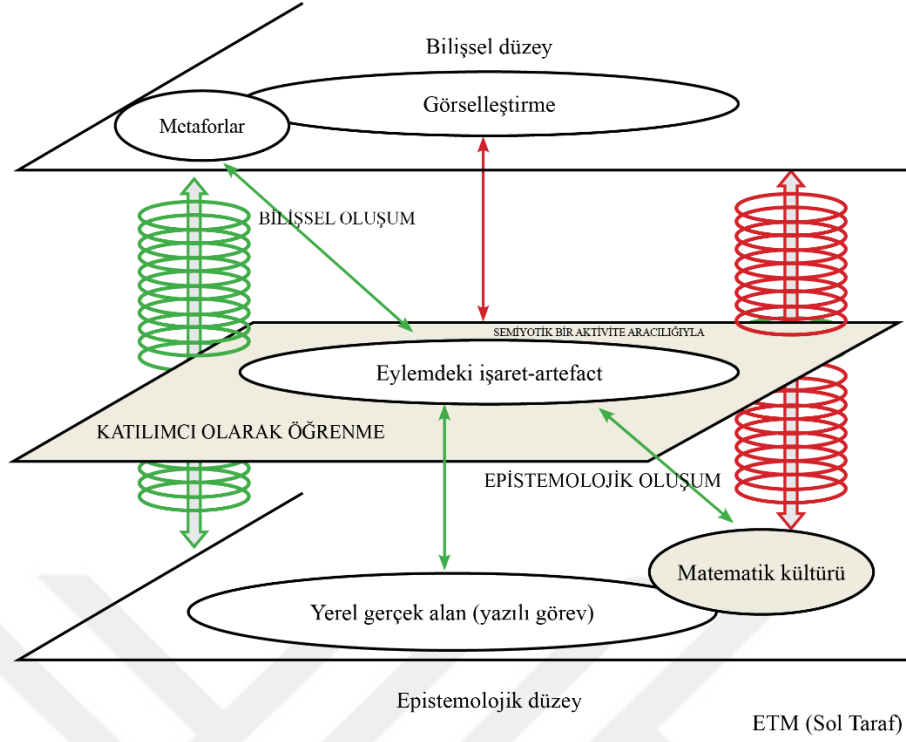
doğrulamaya dikkat ederek ele almalıdır. Aritmetik kalıcı bir geri bildirim ortamı olduğundan cebir ve aritmetik arasında tersinir bir süreci teşvik etmek gerekli olduğu ifade edilmiştir. Bu çalışma, aynı zamanda, bazı öğrencilerin ilerlemesine rağmen, bazılarında deneyden 45 gün sonra bir gerileme olduğunu gösteren sonuçlarla birlikte, bilginin kırılganlığı da ortaya koyulmuştur.

Kuzniak ve Rauscher (2011)'in çalışmasında amaç ortaokul öğretmenlerinin çatışan paradigmaları ne ölçüde tanıdıkları ve öğrenciler tarafından bazen istenmeyen şekillerde yürütülen geometrik çalışmayı nasıl ele aldıklarını incelemektir. Bu, öğretmenlerin Charlotte ve Marie problemine sunulan belirli cevaplara, benimsenen paradigmaya bağlı olarak çeşitli çözümlere olan tepkilerini analiz ederek yapılmıştır. Bu çalışmada, geometri öğretimi ve öğrenilmesinde karşılaşılan bazı zorlukları açıklamak amacıyla geometrik paradigmalar kavramı açıklanmaya çalışılmıştır. Bunu yaparken, öğrenciler ve öğretmenlere, geometri içinde aralarındaki yinelenen yanlış anlamaları gidermek için yardımcı olmak amaçlanmıştır. Araştırmada nitel araştırma yöntemi benimsenmiş olup 9. sınıf öğrencilerine bir geometri (üçgen ile ilgili) sorusu yöneltilmiştir. 6-9 ve 10-12 arası ders veren öğretmenlere (20 kişi) aynı soru verilmiş ve çözmeleri istenmiştir. Bu öğretmenler gönüllü olarak paradigmaları tanımak için bir kursa katılmışlardır ve bu etkinlik kurs kapsamında yapılmıştır. Öğretmenlerden öğrenci cevaplarını görmeden önce öğrencilerin ne gibi zorluk, kafa karışıklığı ya da şüphe yaşamış olabileceklerine dair düşünceleri veri olarak toplanmıştır. Öğrenci cevaplarını incelemeleri sağlandıktan sonra bu cevapları da göz önünde bulundurarak anket-test hazırlamaları istenmiştir. Sınıfta nasıl bir yöntem kullanarak görevi çözmeyi tercih edecekleri sorulmuş ve öğretmen cevapları analiz edilmiş: 'öğretmenler arasındaki benzerlik ve farklılıklar öğretmenlerin kullanmaya teşebbüs ettikleri paradigmalar, zorlanan öğrencilere yardım etme şekilleri, öğrencilerin zorlanması öğretmenlerde bir endişe yaratıyor mu, öğretmenler sadece teorik mi yoksa uygulamaya dönük de yöntemler kullanmayı destekliyor mu, öğrencilerin kullandıkları yöntemlere bakarken öğretmenlerin GWS'yi organize etmede farklılaşmaları gibi bileşenler incelenmiş ve tanımlanmaya çalışılmıştır. Çalışmadan elde edilen bulgular ve sonuçları şu şekilde ifade etmek mümkün olmuştur: öğretmenler arasında, bazıları sadece Geometri II'nin yönettiği bir GWS içinde kalmıştır ve Geometri I'i öğrenciler için olası geometrik kavramlar ve zorluklar kaynağı olarak düşünmemiştir. Bu çalışmanın uzun vadeli amacı

öğretmenlerin matematiğe yönelik tutumlarını ve öğretilerini değiştirerek öğretimi etkilemektir. Öğretmenlerin kişisel GWS'sinin öğrencilerin çözümlerini nasıl algıladıklarını belirlediği görülmüştür; sonuç olarak, öğretmenlerin öğrencilerinin çalışmalarına yardımcı olabilmeleri ve öğretme konusundaki görüşlerini değiştirmek için çalışma alanlarının derinlemesine bir dönüşümü gerektireceği düşünülmüştür. Öğretmenlere, öğrencilerin zorluklarını anlamalarına ve öğretim yöntemlerini hızla ayarlamalarına yardımcı olabilecek bazı epistemolojik araçlar sunarak bu doğrultuda çalışmaya başlanmıştır. Uygulanmasını önerdiğimiz yaklaşım, bir zincir reaksiyonu ile temsil edilebilir. Bu yöntemin, öğretmenlerin hem öğrencileri hem de meslektaşları arasındaki çeşitliliği tanımasına yardımcı olması beklenmektedir.

Kuzniak ve Nechache (2021) çalışmasında bir arazi alanı tahmini için bir geometrik görevi yerine getirmeleri istenen öğretmen adaylarının cevaplarından yola çıkarak gerçekleştirilen çeşitli geometrik çalışma biçimleri tanımlamıştır. Matematiksel Çalışma Uzayı teorik çerçevesi, üretilen işi analiz etmek ve karakterize etmek için kullanılmıştır. Bu çalışma, öğrencilerin, biri ölçme ve çizim araçlarının kullanımıyla, diğeri ise ispat üzerine özellik temelli bir söylemle karakterize edilen en az iki farklı geometrik paradigma ile uyumlu geometrik çalışma biçimleri geliştirdiğine dair kanıtlar sunmuştur. Önemli bir şekilde, çok sayıda öğrenci herhangi bir geometrik paradigmaya uymayan çalışma formları da geliştirmiştir. Bu çalışma ile MWS teorisinden türetilen beş geometrik çalışma formu tanımlanmıştır.

Barrera (2013) makalesinde, Descartes'ın çarpımından karmaşık sayıların çarpımının geometrik anlamına kadar, çarpma ve bazı geometrik anlamlarını birbirine bağlayan deneysel bir ders sunmuştur. Aynı zamanda semiyotik oluşumun epistemolojik düzlem ile bilişsel düzlem arasındaki etkileşimini gösteren modele farklı bir katkı sağlamıştır (Şekil 1.12).



Şekil 1. 12. Barrera (2013)'nın semiyotik oluşum modeli

Delgadillo, Viola ve Vivier (2017) çalışmasında bir modelleme görevi yaparken Arjantin ve Fransa'daki öğrencilerin çalışmaları hakkında rapor sunmuştur. "Cilt payı" olarak adlandırılan problem, üniversite matematik derslerinde onlar için oldukça klasik olup; analizler, bir modelleme sürecinin matematikselleştirilmesine ilişkin Matematik Çalışma Uzayı (MWS) modeli kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada esas olarak öğretimin öğrencilerin üretimleri üzerindeki etkisi ile ilgilenilmiştir. Modelleme süreci önemli bir öğretim konusu olduğundan, araştırmanın evreni olarak da öğretmen adayları seçilmiştir.

1.4.1.8.1. MWS bağlamında alan yazının kısaca analizi

Literatür taraması sonucu MWS teorik çerçevesi ile ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde çalışmaların MWS kullanım ya da MWS'den yararlanma amaçlarının bazı farklılıklara sahip olduğu görülmektedir. Bazı çalışmalar MWS'yi etkili ve verimli matematiksel çalışma sağlamak için kullanırken; bazı çalışmaların bilişsel süreçteki oluşumları tanımlayarak öğrenci çalışmalarının analizi için bir model olarak kullandıkları dikkat çekmektedir. Yeni bir teorik çerçeve ve model oluşundan dolayı çalışmaların büyük bir kısmı modeli açıklamaya yönelik olup öğretmen ve öğrenci ya

da kurum MWS'si açısından çalışmalar arasındaki farklılıklardan kaynaklanan kavram yanlışlarını ortaya çıkarmaya yönelik de çalışmaların yer aldığı görülmüştür. Tablo 1.1'de literatürde yer alan çalışmaların amaçlarına göre dağılımları yer almaktadır.

Tablo 1. 1. *MWS çalışmalarının amaçlarına göre dağılımı*

ÇALIŞMALARIN AMAÇLARINA GÖRE DAĞILIMI	ÇALIŞMALAR
Etkili ve verimli matematiksel çalışma sağlamak	Kuzniak vd. (2016)/ Miranda vd. (2016) / Hitt vd. (2016)
Bilişsel süreçteki oluşumları tanımlayarak öğrenci çalışmalarının analizi için bir model olarak kullanmak	Gómez-Chacón ve Kuzniak (2015) / Gómez-Chacón vd. (2016) / Delgadillo ve Vivier (2016) / Minh ve Lagrange (2016) / Miranda vd. (2016) / Hitt vd. (2016)
Teknoloji kullanımının MWS'ye etkisini ortaya koymak	Santos-Trigo vd. (2016)
Kavram yanlışlarını MWS bakımından yorumlamak ve öğretmen eğitimine bu bağlamda destek olmak	Kuzniak vd. (2013) / Kuzniak ve Rauscher (2011) / Elia vd. (2016) / Kuzniak ve Rauscher (2011)
Bir kavramın MWS bağlamında analizi ile uygulamaya dair önerilerde bulunmak	Derouet ve Parzysz (2016) / Tanguay ve Venant (2016)
MWS'yi tanıtan açıklayan soru ve zorluklara cevap veren yararlarını bazı bağlamlarda (kanıt gibi) ortaya koyan nitelikte	Richard vd. (2016) / Artigue (2016) / Kuzniak, Tanguay ve Elia (2016) / Radford (2016) / Kuzniak ve Richard (2014)

Literatür incelendiğinde çalışmaların, amaçları doğrultusunda bazı çalışma yöntemleri belirledikleri dikkat çekmektedir. Çalışmaların hepsi nitel araştırma yöntemini benimsemiş olup bunun yanında uygulamada bazı farklılıklara da sahip oldukları görülmektedir. Çalışmaların büyük kısmında referans MWS, uygun MWS ve kişisel MWS arasındaki farklılıklara ve ilişkilere odaklanıldığı dikkat çekmektedir. Yine büyük bir kısmı MWS teorik çerçevesinde dikkat edilen öğelere hassasiyet gösterilerek bir öğretim planlanıp uygulanması ve sonrasında bu sürecin MWS teorik çerçevesi kullanılarak analiz edilmesine yönelik çalışmalardır. Daha önceden de değinildiği gibi teorik çerçeve (model) yeni olduğundan herhangi bir yöntemle başvurmayıp açıklayıcı bir makale olarak yayınlanan çalışmalara da yer verilmektedir. Kısaca literatürdeki çalışmaları yöntemlerine göre sınıflandıracak olursak Tablo 1.2'yi elde etmek mümkün olacaktır.

Tablo 1. 2. *MWS çalışmalarının yöntemlerine göre dağılımları*

ÇALIŞMALARIN YÖNTEMLERİNE GÖRE DAĞILIMLARI	ÇALIŞMALAR
Priori analiz+uygulama+posteriori analiz	Kuzniak, Parzys ve Vivier (2013) / Delgadillo ve Vivier (2016)
Referans MWS+ uygun MWS+ kişisel MWS (bazen üçlü-bazen ikili)	Kuzniak ve Rauscher (2011) / Delgadillo ve Vivier (2016) / Derouet ve Parzys (2016) / Minh ve Lagrange (2016) / Tanguay ve Venant (2016)/ Elia vd. (2016)
MWS'ye uygun öğretim yapıp veri toplama ve analiz	Kuzniak vd. (2016) / Gómez-Chacón ve Kuzniak (2015) / Gómez-Chacón vd. (2016) / Miranda vd. (2016) / Hitt vd. (2016)
Uygulamasız priori analiz (MWS'ye dayanan)	Richard vd. (2016) / Kuzniak ve Rauscher (2011)
Yöntem yok. Teori açıklanmış.	Artigue (2016) / Richard vd. (2011) / Kuzniak vd. (2016) / Radford (2016) / Kuzniak ve Richard (2014)

Literatürdeki çalışmalara bakıldığında bu teorik çerçevenin önce geometri çalışma uzayı bağlamında ortaya çıktığı sonrasında matematiksel çalışma uzayı olarak genişletildiği görülmektedir. Buradan hareketle çalışmaların daha çok geometri alanına yönelik olduğu ifade edilebilir (Tablo 1.3).

Tablo 1. 3. *MWS çalışmalarının alan bakımından dağılımları*

ÇALIŞMALARIN ALAN BAKIMINDAN DAĞILIMLARI	ÇALIŞMALAR
Matematik	Kuzniak vd. (2016) / Derouet ve Parzys (2016) / Minh ve Lagrange (2016) / Elia vd. (2016) / Hitt vd. (2016)
Geometri	Gómez-Chacón ve Kuzniak (2015)/ Gómez-Chacón vd. (2016) / Richard vd. (2016) / Kuzniak vd. (2013) / Santos-Trigo vd. (2016) / Kuzniak ve Rauscher (2011) / Delgadillo ve Vivier (2016) / Tanguay ve Venant (2016) / Miranda vd. (2016) / Kuzniak ve Rauscher (2011)

Yukarıda da ifade edildiği gibi çalışmalar çoğunlukla geometri alanında olduğundan dinamik geometri yazılımlarının ya da farklı teknolojilerin kullanıldığı çalışmalar da oldukça fazla olmuştur (Tablo 1.4).

Tablo 1. 4. *MWS çalışmalarının teknoloji varlığı bakımından dağılımları*

ÇALIŞMALARIN TEKNOLOJİ BAKIMINDAN DAĞILIMLARI	ÇALIŞMALARIN NUMARALARI
VAR	Kuzniak vd. (2016) / Gómez-Chacón ve Kuzniak (2015) / Gómez-Chacón vd. (2016) / Richard vd. (2016) / Kuzniak vd. (2013) / Santos-Trigo vd. (2016) / Delgadillo ve Vivier (2016) / Minh ve Lagrange (2016) / Miranda vd. (2016) / Hitt vd. (2016)
YOK	Kuzniak ve Rauscher (2011) / Derouet ve Parzys (2016) / Tanguay ve Venant (2016) / Elia vd. (2016) / Kuzniak ve Rauscher (2011)

Literatüre bakıldığında çalışmaların çok büyük kısmının ortaokul, lise düzeyindeki öğrenci gruplarıyla yapılan çalışmalar olduğu; bunun yanında öğretmenler, öğretmen adayları ve üniversite öğrencileri ile yapılmış çalışmaların çok daha az olduğu dikkat çekmektedir (Tablo 1.5).

Tablo 1. 5. *MWS çalışmalarının katılımcı yaşı bakımından dağılımları*

KATILIMCILARIN YAŞI BAKIMINDAN DAĞILIMLARI	ÇALIŞMALARIN NUMARALARI
Ortaokul-lise düzeyindeki öğrenciler	(15-16-17 gibi yaş düzeyleri): Kuzniak vd. (2016) / Gómez-Chacón vd. (2016) / Delgadillo ve Vivier (2016) / Derouet ve Parzys (2016) / Minh ve Lagrange (2016) / Elia vd. (2016) / Kuzniak ve Rauscher (2011) / Kuzniak ve Nechache (2021) ve (6. ve 7. sınıflar 11-12 yaş düzeyinde): Tanguay ve Venant (2016) / Hitt vd. (2016)
Üniversite öğrencileri	Miranda vd. (2016)
Öğretmen adayı	Gómez-Chacón ve Kuzniak (2015) / Kuzniak vd. (2013) / Santos-Trigo vd. (2016)
Öğretmen	Kuzniak ve Rauscher (2011) / Delgadillo ve Vivier (2016) / Kuzniak ve Rauscher (2011)

1.4.2. Aritmetik-cebir ilişkisi

Aritmetik ve cebir birbirinden farklı alanlar gibi görünselerde aralarındaki ilişki, benzerlik ve farklılıkları ortaya koymaya çalışan literatürde pek çok çalışma yer almaktadır. Radford'a (2015) göre Euclid, cebirsel fikirleri harekete geçirmedi harflere başvururken eski Çinli matematikçiler, denklem sistemlerini notasyon kullanmadan çözmek için cebirsel fikirleri harekete geçirdiklerinden bugün bildiğimiz alfanümerik cebirsel sembolizm, cebirin, modern sembolizmin doğuşu değildir. Aritmetik ve cebir arasındaki temel farkın notasyon kullanmak ve değişkenlere yer vermek olduğunu düşünenlerin aksine bir görüş olan bu görüşle beraber cebirsel düşünme ve aritmetik düşünme kavramları ortaya çıkmaya başlamaktadır. Sonuç olarak, Radford'a (2015) göre cebirdeki harflerin kullanımı cebirsel düşünmek için ne gerekli ne de yeterli bir durumdur. Bazı çalışmalar cebirsel düşünmenin kökenlerinin aritmetik anlayışından önce geldiğine dikkat çekmektedir (Cai ve Knuth, 2011). Hewitt (1998) ve Mason ve arkadaşları (2005) cebir olmadan aritmetik olamayacağı görüşünü savunmaktadır (aktaran Cai ve Knuth, 2011). Her ne kadar bazı farklılıklar olsa da, araştırmacılar okul cebirinin şu yönleri içermesi gerektiği konusunda hemfikir:

- Genelleştirilmiş aritmetik olarak cebir
- Fonksiyon ve ilişkilerin bir çalışması olarak cebir
- Problem çözme aracı olarak cebir
- Bir yapı çalışması olarak cebir (Cai ve Knuth, 2011)

Aritmetik ve cebir arasındaki ilişkiyi anlamak için her iki alanın benzerlik ve farklılıklarının farkına varmak önemli olmaktadır. Kieran (1996)’a göre okul cebiri üç tür faaliyet içerir:

- İfadeler ve denklemler oluşturma
- İkame etme, denklem çözme
- Üst biliş aktiviteleri (problem çözme, modelleme, yapıyı fark etme, değişimi inceleme, genelleme, ilişkileri analiz etme, haklı çıkarma ve kanıtlama). (Kieran, 1996’dan aktaran Heuvel-Panhuizen, Kolovou ve Robitzsch, 2013)

Carraher ve arkadaşları (2008) (erken) cebirsel akıl yürütmenin temel bir basamağı olarak fonksiyonel düşünceyi vurgulamışlardır. Fonksiyonel düşünme birbirine bağlı değişen nicelikler arasında da var olmakta ve Heuvel-Panhuizen vd. (2013) “genelleme arayışında sayısal ilişkileri ve süreçleri incelerken cebirsel düşünmenin gerçekleştiğini” öne sürmektedir. Heuvel-Panhuizen ve diğerlerine (2013) göre ilköğretimde fonksiyonel düşünmeyi desteklemenin bir başka yolu da öğrencilere niceliklerle bağlamsal problemler sağlamaktır. Böylece öğrencilerin sayılar arasındaki ilişkileri formal olmayan bir muhakeme ile yorumlamaları ve aralarındaki ilişkinin ne olduğu üzerinde düşünerek çıkarımlar yapmaları sağlanmış olacaktır. Bu durum da öğrencilerin aritmetik olarak tasarlanmış bir problem durumunda cebirsel düşünme yollarını kullanmasını desteklemiş olacaktır.

Kieran’ın (2004) belirttiği gibi, erken sınıflarda cebirsel düşünmenin neye benzemesi gerektiği konusunda genel bir fikir birliği olduğu görünmemektedir. Hohensee (2017) çalışmasında erken cebir terimini, matematiğin yapısını ortaya çıkaran derinlemesine anlamaya odaklanan zihnin alışkanlıklarını ilkökul öğrencilerinde geliştirmeyi sağlayacak eğitim yaklaşımı anlamında kullanmıştır. Cai ve Knuth (2011) erken cebirin sadece aritmetik ve cebir arasında çok önemli bağlantılar sağlamakla kalmadığını, aynı zamanda iyi aritmetik öğretiminin önemli bir bölümünü oluşturduğunu ifade etmektedir. Önce cebir öğrenilmesi gerekliliğini; cebirin aritmetiğe

hâkim oluncaya kadar ertelenmesi gereken bir şey olmadığını, bunun yerine öğretim programında baştan beri bulunması gerektiğini ifade etmektedir. Cebirsel düşünce düzleminin, aritmetik geliştirilmeden önce geliştirilmesi gerektiğinin altını çizmektedir. Bu süreci kolaylaştıran olgulardan birinin de genelleme olduğunu düşünmektedir (Cai ve Knuth, 2011). Hohensee'ye (2017) göre araştırmacılar erken cebirin formal cebiri erkenden öğretmek olarak anlaşılmaması gerektiği konusunda hem fikir olup pek çoğu erken cebirin çekirdeğini şekillendirmek için genelleştirilmiş aritmetik, fonksiyonel ilişki, eşit işaretinin ilişkisel yorumunun önemine vurgu yapmaktadır.

Cai ve Knuth (2011)'a göre erken cebir sınırlarını aritmetik ve cebir olmak üzere her iki disiplinden etkilenerak tanımlar ancak esas olarak ikisinden de farklı olan bir kimliğe bürünür. Erken cebir şu temel prensiplere dayanmaktadır:

- Anaokulunda genel bir dil olarak görülen cebirsel dilin oluşumunu desteklemek amacıyla öğrencinin doğal dilin üzerine cebirsel dilin yansıması hedeflenir.
- Bilginin ve yeni anlamların sosyal inşası için hem öğrencilere hem de öğretmene sunulan ortak kültürel araçlara dayanarak iletişim kurulur.
- Doğal dil, cebirsel dilin inşası için esas öğretim aracı olarak kullanılır.
- Aritmetik olarak kavram ve temsillerde genellikle “gizli” olan cebirsel düşünmeyi tanımlamak önemlidir (Cai ve Knuth, 2011).

Kieran'a (2004) göre öğrencilerin aritmetikten cebire geçişini destekleyen informal erken cebir bazen sembol öncesi ya da sembolik olmayan cebirsel muhakeme olarak ifade edilebilmektedir. Sembol öncesi cebirsel muhakemeyi harfli semboller kullanmadan gerçekleştirilen aktivitelerden sonra herhangi bir zamanda harfli sembolleri de içine alacak şekilde genişletilebilen muhakeme olarak ifade etmektedir. Diğer bir ifadeyle sembol öncesi cebirsel muhakemeyi öğrenmek demek cebiri harfli sembolleri kullanmadan formal cebirden yararlanarak öğrenmek demektir (Kieran, 2004). Hohensee'ye (2017) göre erken cebirle ilişkili matematik eğitimi literatürünün sentezi üç tane kapsayıcı tema ile ilişkilidir.

- İlk kapsayıcı tema: erken cebir öğrencilerin aritmetikle ilgili önceki bilgilerinin üzerine inşa edilmeli ki bu da cebirin aritmetiğin genelleştirilmiş hali olduğunu vurgulamayı gerektirir (Hohensee, 2017).

- İkinci kapsayıcı tema erken cebir öğretiminin fonksiyonel ilişkiyi keşfetmeyi içermesi gerektiğini vurgulamaktadır (Hohensee, 2017).
- Üçüncü kapsayıcı tema eşit işaretinin ilişkisel yorumunu gerektirir. Eşit işaretinin iki yorumu vardır: işlemsel yorumu ve ilişkisel yorumu. İşlemsel yorumu: hesaplamaların sonucunu ifade eder. İlişkisel yorumu eşitlik ilişkisini belirtir. Bu temanın altını çizdiği cebirsel düşünce cebirsel eşitliklerdir (Hohensee, 2017).

1.4.2.1.Aritmetikten cebire geçişte yaşanan zorluğun nedeni

Öğrencilerin cebir ile karşılaşmadan çok daha öncesinde genelleme ile karşılaşmaları gerekliliği pek çok çalışma tarafından da ifade edilmektedir. Carraher ve diğerlerine (2006) göre aritmetikten cebire geçişte matematiksel genellemenin cebir öğretiminin başlangıcına kadar ertelenmesi ilkökul matematiğinin zenginliğini azaltmaktadır. Bazı çalışmalar aritmetikten cebire geçişte kesirler konusunun kritik bir öneme sahip olduğunu ileri sürmekte; kesirler konusunun kurallara dayandırılarak öğretilmesinin aritmetik ve cebir arasındaki zorluğu arttırdığı görüşünü ileri sürmektedir. Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyine (1998, 2000) göre kesirler ve cebir, okul matematiğinde öğretim programı için kritik kabul edilen ve öğrenmesi zor olan iki konudur (Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi, 2000'den aktaran Cai ve Knuth, 2011). Hohensee'ye (2017) göre öğrencilerin ve öğretmen adaylarının erken cebirdeki zorlukları aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir:

- Eşit işaretinin yorumlanması
- Bilinmeyen ve değişkenler için informal çizimler
- Kavramsal zorluklar (fonksiyonel bakış açısı)
- Cebirsel ifadelerde ilişkiyi tanımlamak
- Bilinmeyenler ve değişkenler arasındaki farkı ayırt edebilmek
- Kavramsal zorluklar (sembol öncesi cebirsel muhakeme)
- Formal cebiri anlamayı aynı kategoriye alma
- Bilinmeyen/değişkenlerden çıkarmayı (somutlaştırmayı) temsil etme (Hohensee, 2017).

Geleneksel olarak çoğu okul, matematik öğretim programında aritmetik ve cebir çalışmalarını ayırmaktadır. Aritmetik, ilkökul matematiğinin ana odağı ve cebir, orta ve

lise matematiğinin ana odağı olduğu şeklinde bir görüş hâkimdir. Bu ayrımın öğrencilerin daha sonraki sınıflarda cebir öğrenmelerini zorlaştırdığı konusunda giderek artan bir fikir birliği vardır (Cai ve Moyer, 2008). Hohensee'ye (2017) göre öğretmen adayları için değişkenler ve bilinmeyenler bağlamında informal temsiller geliştirmek ve eşit işaretinin işlemsel ve ilişkisel olmak üzere iki anlamını da bilmek, cebirsel ifadelerdeki ilişkileri tanımlamak, bilinmeyen ve değişken arasındaki farkı ayırt etmek, formal cebir bilgisini aynı kategori içine almak birer kavramsal zorluk olarak tanımlanmaktadır. Sfard ve Linchevski (1994) öğrencilerin yapısal bir matematik anlayışını benimseme konusundaki zorluklarını tanımlamaktadır ve hem tarihsel hem de ontolojik olarak cebirin ilk önce süreç odaklı olarak algılandığını ve ancak daha sonra nesneler olarak yeniden birleştirildiğini ve tasarlandığını öne sürmektedir. Buradan hareketle öğrencilerin aritmetikten cebire geçişte yaşadığı zorlukların başında cebirin yapısal bir bakış açısıyla öğretilmesi gelmektedir. Carraher ve diğerlerine (2006) göre ise öğrencilerin cebir öğrenmede yaşadığı zorlukların gelişimsel kısıtlamalardan kaynaklandığını ifade etmektedir. Gelişimsel kısıtlamalar, zihinsel yapılar, şemalara ve genel bilgi işleme mekanizmalarının yetersizliğine bağlı olduğu söylenen öğrenme engelleridir. Öğrencilerin belirli bir gelişim düzeyine ulaşana kadar, kesin olarak bazı şeyleri anlayamayacaklarını ya da yakın gelecekte anlayamayacaklarını ifade etmektedir.

Carraher ve diğerleri (2000) güçlüklerinin büyük ölçüde aşağıda ifade edilen sebeplerden kaynaklandığına inanmaktadır:

- Kısıtlı sorun kümelerine dayanmak,
- Bir problem hakkında neyin bilindiğini tarif etmek yerine hesaplamaları kaydetmek ve bir aracı olarak gösterime odaklanmak,
- Kümeler arasındaki ilişkilere değil, belirli küme değerlerinin hesaplanmasına odaklanmak.

Aritmetikten cebire geçişte yaşanan zorluklara bakıldığında alan yazında pek çok çalışmanın farklı bakış açılarıyla bu zorlukları ele aldığını görmek mümkündür. Bu zorlukları gidermek adına alan yazında tam bir fikir birliği olmasa da sunulan önerilere aşağıda yer verilecektir.

1.4.2.2.Aritmetikten cebire geçişi kolaylaştıran unsurlar

1.4.2.2.1. Cebirsel gevezelik, problemleri farklı yollarla çözmek, fonksiyonel düşünme, genelleme

Cai ve Knuth (2011)'a göre geleneksel aritmetik öğretiminde cevabı (sonucu) tanımlamaya yönelik araçları (işlemleri) aramak, bulmak amaçlanırken ve çözüm için hemen bir araştırma yapılmasını gerektirirken; cebir bunu ertelemektedir. Cebir probleme hemen bir çözüm bulmayı ertelerken doğal dili ve cebir dilini işe koşturmaktadır. Günlük hayatımızda dili deneme yanılma, yavaş yavaş, ailede, okulda, sosyal çevremizde öğrenirken cebirsel dil veya matematikteki kurallar öğrencilere direkt verilir ve bu dili tekrarlamaları istenir. Bu nedenle öğrencilerin cebirsel dili anlama ve dolayısıyla paylaşma için bir iletişim aracı olarak kullanabilmeleri pek mümkün olmamaktadır (Cai ve Knuth,2011).

Van den Heuvel-Panhuizen ve diğerleri (2013) öğrencilere aynı ilişkinin farklı örnekleriyle karşılaştıkları çeşitli problem durumları önerilmesi gerektiğini vurgulamaktadır; buna göre öğrenme için gerekli bir koşul; çalışmadaki farklılıkları deneyimleme, kritik yönleri ayırt etme ve aynı anda bu yönlerin alabileceği olası değerlerin farkında olmaktır. Birbiriyle bağlantılı bir dizi problem sunarak varyasyonla öğretmek, öğrencilerin kavramları anlamalarına ve problem çözme yöntemlerini geliştirmelerine yardımcı olmakta; böylece öğrencilerin matematik bilgilerini geliştirmekte; farklı yollarla çözerek öğretme öğrencilerin bir kavramın derinlemesine bir anlayışını birçok açıdan geliştirmelerine yardımcı olmaktadır (Cai ve Knuth, 2011). Bu durum aritmetik ve cebir ile çözülebilecek problem durumlarında da işe koşulabilir. Cai ve Moyer (2008)'e göre öğrencilere hem aritmetik hem de cebirsel olarak problemleri çözmelerini öğretmenin üç amacı vardır:

- Problemi hem aritmetik hem de cebirsel olarak temsil ederek öğrencilerin nicel ilişkileri derinlemesine anlamalarına yardımcı olmak,
- Öğrencileri aritmetik ve cebirsel yaklaşımlar arasındaki benzerlik ve farklılıkları keşfetmeye yönlendirmek, böylece aritmetikten cebirsel düşünceye yumuşak geçişler yapabilmek,
- Öğrencilerin düşünme becerilerinin yanı sıra problemleri çözmek için uygun yaklaşımları kullanma esnekliğini geliştirmek (Cai ve Moyer, 2008)

Carraher ve diğerlerine (2006) göre çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri en başından itibaren birer fonksiyon olarak ele alınmalıdır. Buradaki fikir basitçe mevcut erken matematik etkinliklerine cebirsel bir anlam atfetmek değil, onları zaten cebirsel olarak kabul etmektir. Buradan hareketle okula başlanan çok küçük yaşlardan itibaren cebirsel düşünmenin desteklenmesi tablolar, grafikler, sembolik gösterimleri kullanmaları teşvik edilerek sağlanabilir. Carraher ve diğerlerine (2000) göre bir çarpım tablosunu fonksiyon tablosu olarak düşündüğümüzde; her sütundaki değerleri, doğrudan orantılı bir ilişkiyle bağlantılı değişkenler olarak ve bir alanın, bir aralığın örnekleme olarak düşünebileceğimizi söylemektedir. Cai ve Knuth (2011)'a göre fonksiyonlar ve ilişkiler cebirin kritik bir yönünü oluşturduğundan öğrencilerin cebirsel akıl yürütmelerini desteklemek için yapılan öneriler ortaokuldaki fonksiyonel ilişkilerin daha erken yaşlardan itibaren yer verilmesini desteklemektedir.

Cai ve Moyer (2008)'e göre cebirsel düşüncenin önemli özelliklerinden biri temsil kullanarak cebirsel genelleme ve sembolizm ile ilgilidir. Bir harf sembolü yalnızca bilinmeyenler için bir yer tutucu olarak değil (örneğin, $2x-1=7$ gibi), aynı zamanda bir dizi değerlerin genelleştirilmiş bir temsilcisi olarak da kullanılabilir (örneğin, $y=3x+1$). Cebirsel düşünmede yer verilen değişken ve bilinmeyen arasındaki farkın da öğrenciler tarafından anlamlandırılmasının önemine vurgu yapmaktadır. Ferrara ve Sinclair, (2016)'e göre son yirmi yılda, matematik eğitimindeki araştırmalar, özellikle geometrik örüntüler ve şekil dizileri üzerine odaklanarak, erken cebirsel düşünmeyi tanıtmının bir yolu olarak örüntü faaliyetlerinin kullanımını araştırmaktadır. Bu araştırmalar öğrencilerin, değişkenler arasındaki doğrudan fonksiyonel ilişkiden ziyade, genellemeleri tanımlamak için tekrarlayan stratejileri kullanma eğiliminde olduklarını göstermektedir (Ferrara ve Sinclair, 2016). Cai ve Moyer (2008)'e göre bazı durumlarda hantal olmasına rağmen liste yapmak, tablo oluşturmak uygulanabilir aritmetik bir stratejidir. Ancak bazı problemlerde aritmetik stratejilerin özel kullanımı öğrencilerin cebirsel muhakeme kabiliyetlerinin geliştirilmesine sınırlamalar getirebilir. Bu nedenle öğretmenler, öğrencilere aritmetiğin ötesine geçen stratejiler geliştirmelerinde yardımcı olmalıdır. Öğrencilerin matematiksel kuralları ilişkileri kendilerinin ifade etmesi sağlanmaya çalışılmalı ve sonunda genelleseyici bir ifadeye ulaşmaları için cesaretlendirilmeleri önemli olmaktadır.

1.4.2.2.2. Eşit işareti ve ilişkisel düşünme

Koehler (2004) ilişkisel düşünmeyi “çocukların sayılar, ifadeler ve işlemler arasında tanıdığı ve kurduğu birçok farklı ilişki” olarak ifade eder (Koehler, 2004’dan aktaran Molina ve Ambrose, 2008). Cai ve Knuth (2011) öğrencilerin cebiri anlamlı bir şekilde öğrenmelerini sağlamanın anahtarının çocuklara tüm sayılar, kesirler ve cebir arasındaki sürekliliği görmelerine yardımcı olmakta bulunabileceğini savunmaktadır. Asquith ve diğerlerine (2007) göre ilkökul ve ortaokul öğrencilerinin eşit işaret anlayışlarını araştıran çok sayıda araştırma birçok öğrencinin eşit işarete ilişkin ilişkisel bir anlayışa sahip olmadığını (yani eşit işaretin iki miktar arasındaki denklik ilişkisini temsil ettiği anlayışı) ve bunun yerine öğrencilerin görüşünün eşit işaretinin bir aritmetik işlemin cevabını veya sonucunu işaret ettiği şeklinde olduğu görülmektedir. Eşit işaretinin ilişkisel yorumu cebirsel denklemlerle çalışma sürecinde önemli bir yere sahip olmakta ve bu eşitlik ilişkisinin korunması için yapılan adımların neler olduğunu belirleyebilmek gerekmektedir. Weinberg, Dresen ve Slater (2016)’e göre eşit işaretini matematikçilerin, öğretmenlerin ve öğrencilerin kullanma eğiliminde oldukları çeşitli anlamlar vardır. Prediger (2010) bu anlamları şu şekilde özetlemektedir:

- Bir işlemin yapılması gerektiğini gösterme,
- İki miktar veya ifadenin eşdeğer olduğunu gösterme,
- Simetrik yönüne odaklandığını gösteren ilişkisel anlam ve
- Bir miktarın tanımlandığı durumlarda (örneğin, $y = 2x+a$) (Prediger, 2010)

Molina ve Ambrose (2008)’a göre ilkökul öğrencileri aritmetik ifadede eşit işaretiyle karşılaştığında, onu operasyonel bir sembol yani ‘birşeyler yap’ olarak algıladıklarından $z=x+y$ şeklindeki cümleleri $z+x=y$ veya $x+y=z$ olarak değiştirme eğiliminde olduklarını gözlemlemiştir. Kieran (2004) öğrencilerin çoğunlukla eşit işaretini, soldan sağa yönlendiren bir sinyal olarak gördüklerini; hesaplama yapmaya alışkın öğrencilerin de $x+5$ gibi bir ifadeyle işlem yapmaları gerektiğini düşündüklerinden ne yapacaklarını şaşırdıklarını ortaya koymaktadır. Cai ve Knuth (2011)’a göre öğrencilerin eşit işaretinin belirli bir ilişkiyi gösteren kümeler arasındaki denkliği temsil ettiğini, örneğin $8=8=5+3=10-2$ ve cebirdeki bazı daha ileri kavramları anlamak için önemli olduğunu, örneğin: $x=y$, $y=x$ ile aynıdır ve eğer $x=y$ ve $y=z$ ise $x=z$ olacağını farkedebilecekleri yaşantılara sahip olması için uygun şartların sağlanması gerekliliğine vurgu yapmaktadır. Molina ve Ambrose (2008)’a göre örneğin, $8+4 = \dots +5$ aritmetik cümlesi düşünüldüğünde öğrencilerin eşit işaretinin iki tarafında da

ekleme olduğunu ve bu eklenen sayılardan birinin diğerinden 1 fazla olduğunu farkederek bilinmeyi hesaplayabildiklerinde cebirsel ifadelerle de bu düşünme yolunu aktarabileceklerdir. Kieran’a (2004) göre ‘bir sayının 2 katının 1 fazlası 13 olduğuna göre bu sayı kaçtır?’ sorusuna aritmetik düşünen öğrenciler 13’ten 1’i çıkaracak ve daha sonra 2’ye böleceklerinden problem metninde belirtilen işlemleri öğretildikleri gibi ters sırada geri yapacaktır. Cebir öğrenmeye başladıklarında ise problem metninde belirtilen işlemleri kullanarak ilişkileri temsil etmeleri ($2x+1=13$ gibi) gerektiği öğretileceğinden aritmetik ve cebir alanlarındaki farklı yorumlama ve düşünme süreci ortaya yeni zorluklar çıkaracaktır.

Jones, Inglis, Gilmore ve Dowens (2012) matematiksel eşitlik bilgisi için Tablo.6’da verilen haritada seviye ve tanımlama sütunlarını oluşturmuştur. Bu sınıflandırmadan hareketle öğrencilerin eşit işaretini farklı yorumlama biçimlerine dair anlamalarının geliştirilmesi ve farkındalıklarının artırılması aritmetikten cebire geçişte önemli katkı sağlayacaktır.

Tablo 1. 6. Jones, Inglis, Gilmore ve Dowens’in (2012) matematiksel eşitlik bilgisi için haritası

Seviye	Tanımlama	Çekirdek Denklem Yapıları
1.Düzye: Kesin İşlemsel	İşlem-eşittir-cevap yapısına sahip ifade ve denklemlerde başarılı olan. Sadece işlemsel yapıya sahip olan ifade-denklemleri çözen, değerlendiren ve kodlayan.	İşlemlerin solda olduğu, örneğin: $a + b = c$ Boşluk-bilinmeyen eşittir işaretinden önce olduğunda $a+b=...$
2. Düzye: Esnek İşlemsel	Eşit işaretinin sadece ‘işlem yap’ ‘sonuç yaz’ anlamının dışında ama işlemsel görünümle uyumlu ifade ve denklemleri başarıyla çözen, değerlendiren, kodlayan.	$C=a+b$ veya $a=a$ ifadelerini doğru yorumlayan
3. Düzye: Temel İlişkisel	Eşit işaretinin her iki tarafındaki işlemleri-denklemleri çözen sonra değerlendiren ve kodlayan.	Eşitliğin iki tarafında da işlem olması durumunda, örneğin: $a + b = c + d$ $a + b - c = d + e$ ifadelerini doğru yorumlayan
4. Düzye: Karşılaştırmalı İlişkisel	Eşitliğin iki tarafındaki ifadeleri karşılaştırarak başarıyla çözen ve değerlendiren. Eşitliğin iki tarafında da aynı işlemleri gerçekleştirmenin denkliği koruduğunu kabul eden. Eşittir kavramının ilişkisel yorumlanmasını en iyi yapan.	Çok basamaklı sayılarla veya bir değişkenin birden çok örneğiyle eşitliğin her iki tarafında işlemlerin olduğu durumlar

Weinberg, Dresen ve Slater (2016)’a göre eşitlik ve değişken fikirleri cebirdeki en temel kavramlardan ikisidir. Öğrencilerin bu kavramları anlamalarına yönelik yapılan çalışmaların çoğu, öğrencilerin düşünceleri ve sembollerin kurumsal anlamları ile

karşılaştırıldığında bir boşluk bırakmıştır. Aşağıda aritmetik ve cebir alanları arasındaki farklılık ve zorlukları azaltmak için en önemli iki unsurdan biri olduğu düşünülen değişken kavramına değinilecektir.

1.4.2.2.3. Değişken kavramı ve ilişkisel düşünme

Cai ve Knuth (2011)'a göre değişkenleri yer tutucu veya bilinmeyen olarak nitelemenin dışında, ilişkileri temsil etmek için kullanılan miktarlar olarak karakterize etmek ve değişkenleri bir sembolden ziyade nicelik olarak tanımlamak değişken kavramının formal olarak tanınmasından önce değişkenlerin kullanılmasını kolaylaştıracaktır. Küchemann'a (1978) göre öğrencilerin yanlış anlamaları değişkenleri, nicelikleri ifade eden harflerden ziyade kısaltmalar veya etiketler olarak yorumlamaktan, alfabedeki pozisyonlarına göre harflere değer atamaktan ve belirli değerlerden ziyade farklı miktarlarda cebirsel harflerle işlem yapamamaktan kaynaklanmaktadır. Weinberg, Dresen ve Slater (2016)'e göre değişkenler şu anlamlarda kullanılmaktadır:

- Nesneler için etiketler,
- Belirli bir sayı olarak,
- Belirli bir sayı kümesinin keyfi bir elemanı olarak,
- Bilinmeyen,
- Değişken.

Öğrencilerin değişken kavramına dair sınırlı imaja sahip olması aritmetikten cebire geçişte zorlanmalarına neden olduğundan bu konuda öğrencilerin değişken kavramına dair imajlarını zenginleştirecek öğretim ortamı tasarlamak ve yaşantılarla donatmak önemli bir yere sahip olacaktır. Gray, Loud ve Sokolowski (2009) çalışmasında değişken kavramını aritmetik bakış açısıyla gelişen değişken kavramı ve cebirsel bakış açısıyla gelişen değişken kavramı olarak iki başlık altında sınıflandırmakta ve bu farklı bakış açılarına ait değişken kavramlarının özelliklerini aşağıdaki tabloda yer aldığı gibi tanımlamaktadır.

Tablo 1. 7. *Değişken kavramının aritmetik ve cebir bakış açısıyla gelişimi*

Değişken Kavramı	
Aritmetik Bakış Açısıyla; Aritmetikten sabit değerli cebire geçişi yapabildiğinde, Değişkeni bir denklemleri çözmek bir araç olarak kullanabildiğinde, Saysal cevaplar elde etmek için denklemler üzerinde işlem gerçekleştirebildiğinde, Sadece sembolik manipülasyon olduğunda, Değişken tek bir değer olarak değerlendirildiğinde, Sayısal olarak yerine koyma yapıldığında.	Cebirsel Bakış Açısıyla; Cebirsel ifadeleri matematiksel ilişkilerin temsilcileri olarak, yapısal bir bakış açısıyla yorumladığında, Bir cebirsel yapı üzerinde başka işlemlerin gerçekleştirilebileceği nesneleştirilmiş bir yapı olarak düşünüldüğünde, Eşit işaretinin her iki tarafında da bilinmeyen olduğu durumda denklemleri çözdüğünde, Değişkenleri genelleştirilmiş sayılar ve değişen nicelikler olarak kullanıldığını ve yorumlandığında, İşlemlerin özelliklerinde değişkenlerin belirli bir sayıyı değil tüm sayıları temsil ettiği anlaşıldığında, $y=2x-1$ ifadesini iki değişken birbirine bağlı olarak değişiyor şeklinde yorumlayabildiğinde, Genelleştirilmiş sayı anlamıyla değişkeni kullanabildiğinde,

1.4.2.3. Aritmetikten cebire geçişte öğretmenlere düşen görevler

Cai ve Knuth (2011)'a göre cebirsel düşüncenin ilkökul sınıflarına dahil edilmesinin yolunu yeni konuların tanıtılması olarak değil, mevcut konulara yeni yaklaşımlar getirilmesi gerektiği şeklinde ifade etmektedir. Buradan hareketle öğretim programına işlenmesi gereken konular listesi olarak bakmaktan çok bu konuların nasıl anlamlı öğrenilmesinin destekleneceği yönünde bir bakış açısı geliştirilmelidir. Hohensee'ye (2017) göre cebiri anlamak için boşlukları doldurmak gerekmektedir: kendi ilkökul eğitimlerinde çok az erken cebir deneyimi olan ya da hiç deneyimi olmayan öğretmen adayları cebiri kavramsal anlamalarını geliştirmek için yeterli olmayan imkanlara sahiptirler. Erken cebiri yeniden ziyaret etmek onlara bu boşluğu doldurma imkanı verebilir. Bu nedenle öğretmen adaylarının da aritmetikten cebire geçiş konusunda yaşadığı zorlukları azaltmaya ve eksiklerini kapatmaya yönelik yapılacak olan çalışmalar; örneğin: cebirsel ifadelerin, kesirlerin, dört işlemin de aslında birer fonksiyon olduğunu görmelerini sağlayacak ilave çalışmalar faydalı olacaktır. Cai, ve diğerlerine (2005) göre öğrencilerin ilkökulda cebirsel düşünmelerini geliştirmelerini sağlamak için, aritmetik ve cebir arasında yumuşak bir geçiş yapmalarına yardımcı olmak ve çeşitli problemleri çözmede cebirsel yaklaşımları, düşünme yollarını kullanmalarını desteklemek gerekmektedir. Kieran'a (2004) göre aritmetikten cebire geçişte öğretmenlerin dikkat etmesi gereken unsurlar şu şekilde ifade edilmektedir:

- Sadece sayısal bir cevabın hesaplanmasına değil, ilişkilere odaklanması,
- İşlem yapmanın yanı sıra tersine işlem yapma ve nicelikler arasındaki ilişkiyi bulmaya odaklanması,
- Sadece bir problemi çözmayip bu problemi ve problemde geçen nicelikleri temsil etmeye odaklanması,
- Yalnızca sayılara değil, harflere (bilinmeyen, değişken, parametre gibi) de odaklanması,
- Eşit işaretinin farklı anlamlarına odaklanması gerekmektedir (Kieran, 2004).

Molina ve Ambrose (2008)'a göre sınıf çalışmalarında öğrencileri, fikirlerini savunmak zorunda oldukları tartışmalara dahil etmek; birbirlerinin cevaplarını, aynı cümleyi farklı yorumlama şekilleriyle karşı karşıya getirmelerine fırsat sağlamak oldukça önemli bir yere sahiptir. Carraher ve diğerlerine (2000) göre öğrencilerin cebir öğretimi sırasında karşılaştıkları zorlukların üstesinden gelmelerine yardımcı olmak için araştırmacıların aritmetikten cebire geçişi kolaylaştırmaya yönelik pek çok faaliyetler önerdiklerini ifade etmekte; öğrencilerin cebir ile ilgili zorluklarının aritmetikten cebire ani olmayan bir geçişle en aza indirilebileceği görüşünü dile getirmektedir. Carraher ve diğerleri (2006) farklı araştırmacıların önerilerini şu şekilde derlemiştir:

- Cebir bütünüleyici bir erken matematik müfredatı olarak görülmeli,
- Cebirin 2. veya 3. sınıftan itibaren verilmesi sağlanabilir,
- Öğrencilerin aritmetikten cebire geçişte yer alan epistemolojik sorunlarına daha iyi destek olmak için cebirsel düşünmeyi geliştiren etkinliklerle ilkökul düzeyinde başlanabilir,
- Cebir ortaokul veya lisede izole dersler gibi görünmemeli,
- İlkokulda genellemeye odaklanılmalı.

1.4.2.4. Aritmetikten cebire geçiş bağlamında alan yazın

1.4.2.4.1. Eşit işarete ilişkin araştırmalar

Jones, Inglis, Gilmore ve Dowens (2012) çalışmasında çocukların sahip olduğu iki yaygın eşitlik kavramı tanımlamıştır: operatör olarak eşit işareti ve denklemin her iki tarafında da aynı değeri işaret eden eşit işareti. Burada, bu iki kavramın yanı sıra, ikame kavramının da karmaşık bir matematiksel eşdeğerlik anlayışının önemli bir parçası olduğu görülmüştür. Çalışmanın amacı, ikamenin eşit işaretini anlamının farklı bir yolu

olup olmadığını test etmektir. İngiliz ve Çinli çocuklardan, eşit işaretinin operasyonel, aynılık ve ikame tanımlarına ilişkin bilgileri kültürler arası bir çalışma yaparak ortaya çıkarılmıştır. Çalışmaya İngiltere (N = 101) ve Çin'deki (N = 150) iki şehir okulundan 11 ve 12 yaşlarında toplam 251 çocuk katılmıştır. Her iki grup da öğrencilerin cebirsel denklemlerle ilk karşılaştığı ortaokulun ilk yılındadır. Öğrencilerin ifadeleri ve eşitlik kavramına ilişkin tahmin edilen anlayışlarına yönelik aşağıdaki sınıflandırmaya ulaşılmıştır.

Tablo 1. 8. *Jones, Inglis, Gilmore ve Dowens (2012)'in eşittir işareti ifade etmeye yönelik sınıflandırması*

İfadeler	Tahmin Edilen Anlayış
...sorunun cevabı	İşlemsel
...sonucu hesapla	İşlemsel
...toplam	İşlemsel
...iki miktarın aynı olduğu	Aynılık
...her iki taraf da aynı değerdedir	Aynılık
...bir şeyin başka bir şeye eşit olması	Aynılık
...bir taraf diğerinin yerini alabilir	Yerine Geçme
...sağ taraf sol tarafla değiştirilebilir	Yerine Geçme
...iki tarafın değiş tokuş edilebileceğini	Yerine Geçme
...sorunun sonu	İşaret eden
...sorunun başlangıcı	İşaret eden
...sayıları tekrarlamak için	İşaret eden

Byrd, McNeil, Chesney ve Matthews (2015) çalışmasında çocukların (3. ve 5. sınıflar; yaş: 9 yıl, 11 ay) eşit işareti yorumları incelenmiş; matematiksel denklik öğretiminden önce bu çalışma yapılmıştır. Çalışmada ilişkisel yorumların yararlı etkilerine ek olarak, aritmetik özel bir yorumun (örneğin, “bir şeyin neye eklendiği”) çocukların öğrenmesini diğer ilişkisel olmayan yorumlardan daha fazla engelleyebileceği varsayılmıştır. Sonuçlar bu hipotezleri desteklemiş; ilişkisel yorumların varlığı her iki sınıfta da yardımcı olmuş ve aritmetik-spesifik bir eşit işareti yorumu, 5. sınıf öğrencilerinin yıl sonu erken cebir performansını olumsuz yönde etkilemiştir. Bu çalışmada, eşit işaretinin aritmetik özel bir görünümünün, bir okul yılı boyunca erken cebirin zayıf öğrenilmesi için belirli bir risk taşıdığı hipotezi test edilmiştir. Okul yılının başında çocukların eşit işareti yorumlarındaki bireysel farklılıklar ölçülmüştür. Aradan geçen aylarda çocuklara matematiksel denklik problemlerini nasıl çözecekleri öğretilmiştir. Okul yılının başında eşit işaretinin ilişkisel tanımlarını sağlayan çocukların, yılın sonunda erken cebir öğelerinde ilişkisel olmayan tanımlar verenlere göre daha iyi performans gösterecekleri varsayılmıştır. Bu

çalışmadan elde edilen sonuçlar eşit işaret anlayışının erken cebir öğrenimini ve performansını etkileyebileceğini göstermiştir. Ön testte eşit işaretinin ilişkisel bir yorumunu sergileyen çocukların, son testte erken cebir maddelerinde ilişkisel olmayan tanımlar verenlere göre daha iyi performans gösterecekleri varsayılmıştır. Bu hipotez, hem üçüncü hem de beşinci sınıftaki yakın transfer erken cebir maddeleri için desteklenirken, uzak transfer maddeleri için desteklenmemiştir. Ayrıca, eşit işaretini aritmetik-spesifik kelimeler kullanarak tanımlayan çocukların, son testte erken cebir maddelerinde, eşit işaretini ilişkisel olmayan diğer şekillerde tanımlayanlardan daha kötü performans gösterecekleri varsayılmıştır. Bu tahmin, beşinci sınıfta hem yakın hem de uzak transfer öğeleri için geçerli olmuştur, ancak üçüncü sınıf için geçerli olmamıştır. Sonuçlar, çocukların eşit işaretini yorumlamalarının daha sonra matematiksel denkliği ve ilişkili erken cebir kavramlarını öğrenmesini etkileyebileceğini göstermiştir. Çocukların eşit işarete ilişkin aritmetik-spesifik yorumlarının beşinci sınıf öğrencileri için öğrenmenin önünde bir engel oluşturduğunu göstererek, çocukların eşit işarete ilişkin kavram yanlışlarının erken cebiri nasıl öğrendiklerini şekillendirebileceğine dair mevcut kanıtları genişletmiştir.

Asquith, Stephens, Knuth ve Alibali (2007) çalışmasında öğretmenlerin, öğrencilerin temel cebirsel kavramları anlama konusundaki bilgilerine odaklanmıştır. Araştırmada özellikle ortaokul matematik öğretmenlerinin öğrencilerin eşit işareti ve değişkeni anlamalarına ilişkin bilgileri ve öğrencilerin bu kavramları anlamalarını uygulama başarıları incelenmiştir. 20 ortaokul öğretmeni ile eşit işarete ve değişkene odaklanan yazılı değerlendirme maddelerine öğrenci yanıtlarının tahminlerine ilişkin görüşme verileri toplanmıştır. Öğretmenlerin, öğrencilerin değişkenleri anlamalarına ilişkin tahminleri, öğrencilerin karşılık gelen maddelere verdiği gerçek yanıtlarla büyük ölçüde uyumludur. Buna karşılık, öğretmenlerin öğrencilerin eşit işareti anlamalarına ilişkin tahminleri, gerçek öğrenci yanıtlarıyla örtüşmemiştir. Ayrıca öğretmenler, değişken veya eşit işaretiyle ilgili kavram yanlışlarını, bu kavramların uygulanmasını gerektiren problemlerin çözümüne engel olarak nadiren tanımlamışlardır.

Diaz'ın (2014) doktora tezinde eşit işaretinin tarihsel, politik ve sosyal eşitlik anlayışlarıyla nasıl ilişkili olduğunu keşfetmek amaçlanmıştır. Genel olarak, çağdaş matematik eğitimi reformları ve araştırmalarında yer alan, görünüşte farklı matematiksel ve kültürel eşitlik kavramları arasındaki karışıklığa odaklanılmıştır. Daha

spesifik olarak, çalışmada eşit işaretini (=) yalnızca matematiksel bir sembol olarak değil, aynı zamanda çocuklar ve matematik eğitiminde “eşitleştirilmiş” fırsatlar arasında denkleğin nasıl kurulacağına ilişkin sorularla ilgili kültürel bir uygulama olarak araştırılmıştır. Tamamen matematiksel bir sembol gibi görünen eşitlik mantığının, kimliği ve farkı temsil etmenin kültürel bir yoluna nasıl dönüştürüldüğü araştırılmıştır.

Rittle-Johnson, Matthews, Taylor ve McEldoon, (2011) çalışmasında cebirde temel bir kavram olan matematiksel denklik bilgisinin ilkökul ve ortaokul boyunca geliştiği varsayımı ile yola çıkmıştır. Bir yapı modelleme yaklaşımı kullanarak, denklik bilgisinin değerlendirmesini geliştirilmiştir. İkinci ve altıncı sınıf öğrencileri (175 kişi) değerlendirmeyi 2 hafta arayla 2 kez tamamlamıştır. Çalışmadan elde edilen sonuçlara bakıldığında 5. sınıfa gelindiğinde çoğu öğrencinin eşdeğerliğe ilişkin temel bir ilişkisel görüşe sahip olduğu ve bir denklemin iki tarafını karşılaştırmaya başlayabildiği görülmüştür. Bununla beraber öğrencilerin denklik bilgisini değerlendirmeyi sağlayacak bir ölçek geliştirmiştir.

1.4.2.4.2. Değişken kavramına ilişkin araştırmalar

Christou ve Vosniadou (2012) çalışmasında veri toplamak için çoktan seçmeli anket, görüşme ve açık uçlu değerlendirmelerden yararlanmıştır. Bu çalışma kapsamında üç farklı deney yürütmüş olup ilk ikisinde 91 ortaokul öğrencisi (12,5 ile 14,5 yaşları arasında) ile sonuncu deneyde de Yunanistan'ın Atina kentindeki devlet lisesinden 57 (ortalama yaş 13,5 yıl) öğrenci ile çalışmıştır. Öğrencilerden cebirsel ifadelerde değişkenlerin yerine kullanılabilecek ve kullanamayacakları sayıları belirlemeleri istenmiştir. Sonuçlara bakıldığında öğrencilerin cebirsel ifadelerde yer alan değişkenlerin yerine sistematik bir doğal sayı yazma eğiliminde oldukları görülmüştür.

Philipp'in (1992) makalesinin amacı değişkenlerin farklı kullanımlarının yaratabileceği bazı zorlukları ele almaktır. Makalenin ilk yarısında, değişken tanımının tarihsel gelişiminin kısa bir açıklaması sunulmuş ve değişken kavramının günümüzde çoğu ders kitabında nasıl ele alındığına ilişkin bir tartışma ile son bulmuştur. Makalenin ikinci yarısı, öğrencilerin bu farklı değişken kullanımlarından bazılarına odaklanmasına yardımcı olmak için kullanılan bir etkinlik paylaşılmıştır. Böylece öğrencilerin değişken kavramını anlamlandırmalarında yaşanan zorluk ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Tüm

seviyelerdeki öğrencilerinin cebirde harfli ifadelerin farklı kullanımları hakkında daha dikkatli düşünmeleri ve kavramsal bir anlayış geliştirmeleri önerilmiştir.

Gray, Loud ve Sokolowski (2009) çalışmasında değişkenleri genelleştirilmiş sayılar ve birbirine bağlı değişen nicelikler olarak yorumlama becerisinin geliştirilmesinin kalkülüs öğrenilmesi için gerekli olduğunu ifade etmiş; değişkenin bu farklı kullanımlarını cebirsel düşünmenin bir bileşeni olarak ele almıştır. Üniversiteye giriş matematik öğrencilerinin ($n = 174$) değişkenlerin birbirine bağlı değişen nicelikler olarak kullanılmasını ve yorumlanmasını gerektiren cebir problemlerine verdikleri yazılı cevaplar cebirsel ve aritmetik düşünmenin kanıtları bağlamında incelenmiştir. Bu öğrencilerin değişken kullanımlarına yansıyan cebirsel, geçiş ve aritmetik düşünme örneklerini tanımlamak ve sınıflandırmak için bir çerçeve geliştirilmiştir. Matematik dersine giren bu öğrencilerin yanıtlarının yalnızca üçte birinin cebirsel düşünmeyi temsil ettiği belirlenmiş; öğrencilerin çalışmalarında cebirsel düşünme becerisini yansıtan bileşenler görüldüğü durumlar matematikteki başarılı performansla pozitif olarak ilişkili olduğunu ortaya koymuştur.

Malisani ve Spagnolo'nun (2009) çalışmasında bilinmeyen kavramının ilişkisel bağlamda değişken kavramının yorumlanmasına ve öğrencilerin problem çözmede kullandıkları dile etkisinin olup olmadığını analiz etmek amaçlanmıştır. Cebirsel dilden doğal dile çeviri sürecinde değişken kavramını da incelemek istenmiştir. İki deneysel çalışma sunulmuş: ilkinde yaşları 16-19 olan 111 öğrenciye bir anket uygulanmış; bu araştırmanın sonuçlarına dayanarak 16-17 yaşlarında iki çift öğrenci ile ikinci çalışma gerçekleştirilmiştir. İlk problemin protokollerinin analizinden, çözme prosedürlerinin aritmetik dille zenginleştirilmiş doğal dile dayandığı fark edilmiş; ilk protokolde cebirin sembolik dilinin olmadığı görülmüştür. İkinci protokolde, çözümlemenin son bölümünde görünmüştür. Ancak öğrenciler, değişkenleri problemin orjinal hikâyesi ile ilişkilendirme ihtiyacını göstermişlerdir. Bu protokolde öğrenciler sembolleri yüzeysel bir şekilde, sadece sözlü anlatımda iletişim kurmak için kullanmışlar ve problem çözümünde kullanmadıkları görülmüştür.

Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Owens ve Murphy Gardiner (2015) çalışmasında Amerika Birleşik Devletleri'nin Kuzeydoğu bölgesindeki bir devlet okulunda yaklaşık altı yaşındaki birinci sınıf öğrencilerinin değişken ve değişken notasyonları hakkında sahip olduğu çeşitli anlayışlarını ortaya çıkarmak adına yapılan

görüşmeler analiz edilmiştir. Deney, iki adet 4 haftalık döngüden (haftada iki kez 40 dakikalık iki ders) oluşan bir eğitim dizisi halinde düzenlenmiş sekiz haftalık sınıf eğitimini ve iki eğitim döngüsü öncesinde, arasında ve sonrasında seçilen öğrenci görüşmelerini içermiştir. Çalışmanın sonucunda fırsat verildiğinde, altı yaşındaki çocukların birbirine bağlı değişen miktarlar arasındaki ilişkileri ifade etmek için değişken gösterimini anlamlı şekillerde kullanabileceği görülmüş; aynı zamanda değişken notasyonu ile erken yaşta tanıştırılan çocukların matematiksel ilişkileri temsil etme fırsatına sahip olacakları ifade edilmiştir.



2. YÖNTEM

Bu bölümde araştırma modeli, araştırmanın örneklemini oluşturan katılımcılar, araştırmada kullanılan veri toplama araçları, öğretim sürecinin ayrıntılı anlatımı ve elde edilen verilerin toplanması ve analizine ilişkin açıklamalar yapılmıştır.

2.1.Araştırmanın Modeli

Bu araştırmada ortaokul 5. sınıf öğrencilerinin MWS (matematiksel çalışma uzayı) teorik çerçevesinden yararlanarak aritmetikten cebire geçiş sürecinde eşitlik ve değişken kavramlarına yönelik tasarlanan matematiksel çalışmada bilişsel süreçlerinin epistemolojik-bilişsel düzlemler arası etkileşiminin oluşumlar ve oluşumların ikiyeşli kombinasyonu ile oluşan düzlemler bağlamında incelenmesi amaçlandığından çalışma nitel olarak desenlenmiştir. Bu kapsamda nitel araştırma yaklaşımları çerçevesinde yer alan öğretim deneyi deseni kullanılmıştır.

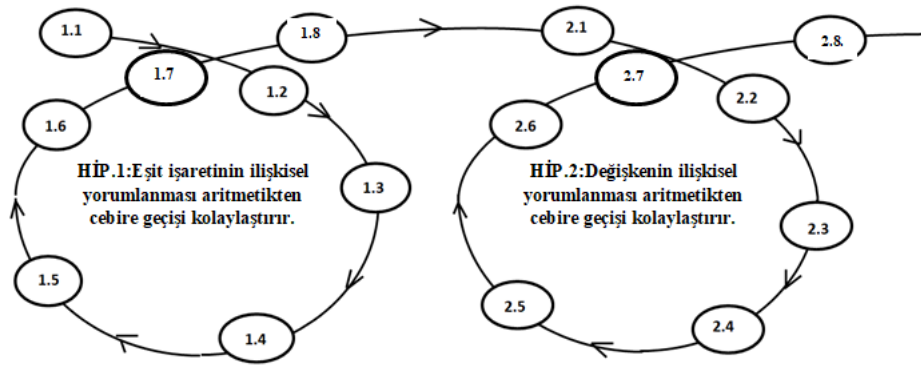
2.1.1. Öğretim deneyi

Öğretim deneyi desenini kullanmanın en öncelikli amacı araştırmacılara birinci elden öğrencilerin matematiksel öğrenme ve muhakemelerini deneyimleme şansı vermesidir (Steeffe ve Thompson, 2000). Öğretim sürecinde öğrenciler kavramları inşa ederken bazı zorluklarla karşılaşır ve hatalar yaparlar. Öğretimde araştırmacıların deneyimledikleri bu sınırlılıklar öğrencilerin matematiksel kavramları inşa etme süreçlerini anlamaya temel oluşturmakla beraber öğretim deneyi yapılmasının öncelikli amacı sınırlılığı deneyimlemektir (Steeffe ve Thompson, 2000). Öğrenciler, öğrenme sürecinde kendi matematik bilgilerini inşa ederler. İnşa ettikleri matematiğin ne olduğunu, nasıl oluştuğunu modellerle ifade edebilmek; öğrenci öğrenmelerini istedik yönde geliştirebilmek amacıyla tasarlanan öğretim sürecinde öğrenci öğrenmelerinden, zorluklardan, hatalardan yola çıkarak süreç içerisinde geriye dönük analizlerle öğrenme sürecine ilişkin çıkarımlar, ileriye yönelik hipotezlerin oluşturulmasıyla öğretim sürecini yeniden revize edebilmeyi sağladığı için bu çalışmada öğretim deneyi deseni kullanılmıştır. Öğretim deneyinde deneysel çalışmalardan farklı olarak öğretimin öğrenci başarısına etkisi değil öğrenmenin nasıl gerçekleştiği üzerinde durulur. Öğretim deneyi öncelikle Piaget'in klinik görüşmelerinden türetilmiş olup öğrencilerin matematiğini araştırmayı amaçlayan bir keşif aracı olmasının yanı sıra klinik bir görüşmeden daha fazlasıdır. Klinik görüşme, öğrencilerin güncel bilgilerini anlamaya

yönelik olsa da, öğretim deneyi, öğrencilerin uzun süreler boyunca kaydettiği ilerlemeleri anlamaya yöneliktir (Steeffe ve Thompson, 2000).

Bir öğretim deneyi, bir dizi öğretim bölümünü içerir (Steeffe, 1983). Bir öğretim bölümü; bir öğretim görevlisi, bir veya daha fazla öğrenci, öğretim bölümlerinin tanıklığı ve bölüm sırasında nelerin geçtiğini kaydetme yöntemini içerir. Bu kayıtlar, eğer varsa, sonraki bölümlerin hazırlanmasında ve aynı zamanda, öğretme deneyinin geriye dönük bir kavramsal analizinin yapılmasında kullanılabilir (Steeffe ve Thompson, 2000). Öğrencilerin söylediklerinin ve yaptıklarının arkasını araştırma sürecine von Glasersfeld (1995) tarafından kavramsal analiz denmiştir ve burada araştırmacının matematiksel araştırmaya katılımı açıkça fark edilir (Steeffe ve Thompson, 2000).

Çalışmada izlenecek yol bir öğretim deneyi olması sebebiyle aşağıdaki gibi planlanmıştır:

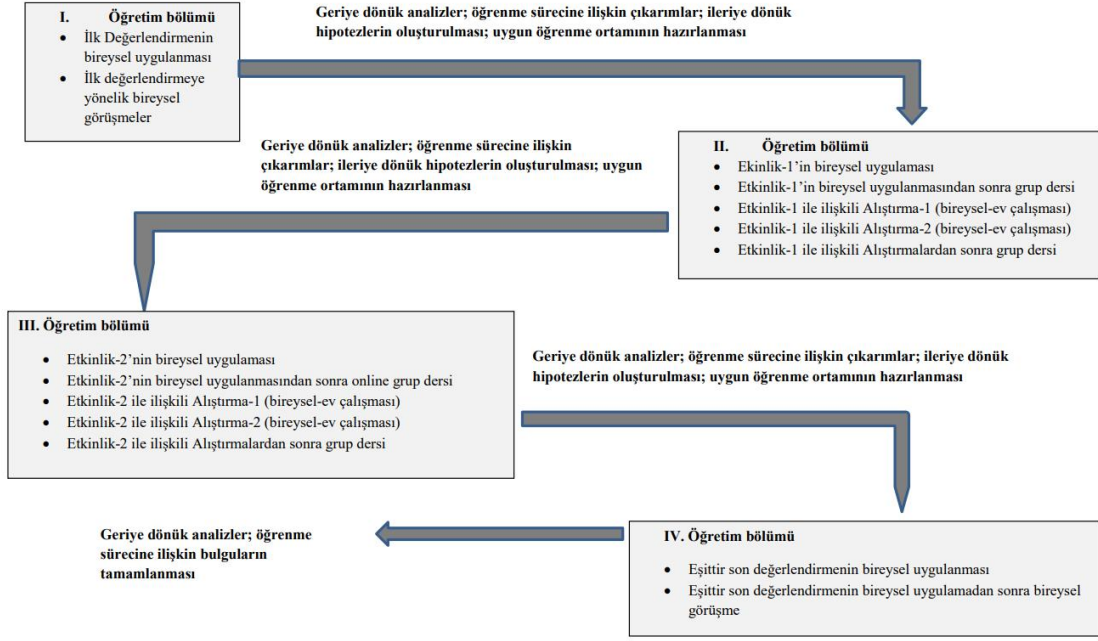


Şekil 2. 1. Çalışmada rehberlik edecek öğretim deneyi döngüsü

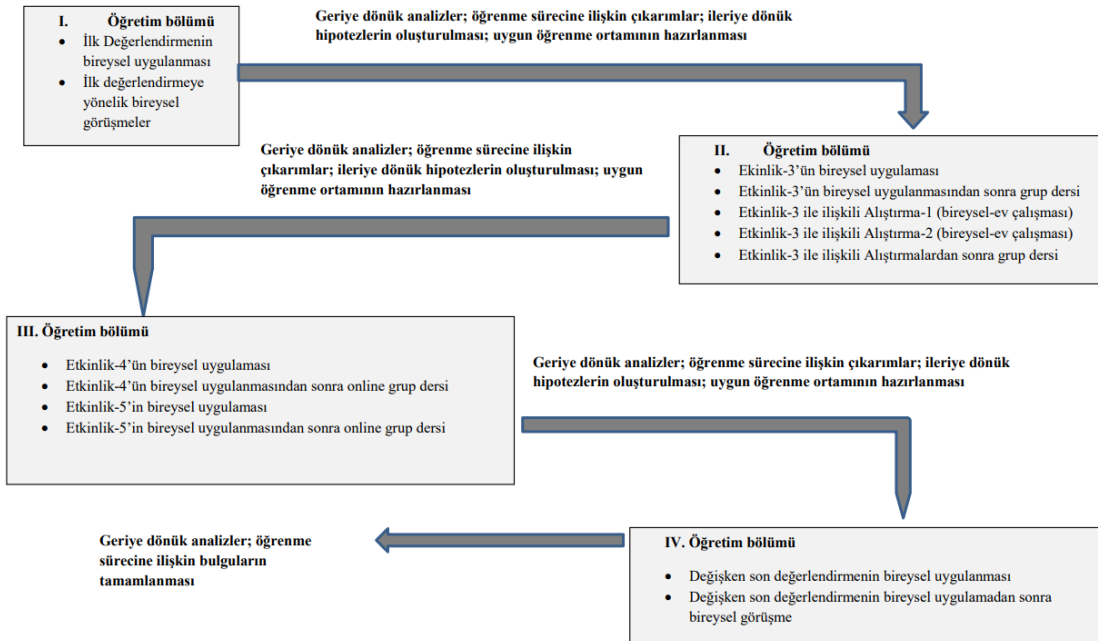
1.Hip 1: Eşit işaretinin ilişkisel yorumlanması aritmetikten cebire geçişi kolaylaştırır 1.1.Eşit işaretinin ilişkisel yorumlanmasını ölçen başlangıç değerlendirmeye uygulama 1.2.Değerlendirmeye dayanarak öğrencilerin eşit işaretine yönelik bireysel hata, zorluk ve düşünme yollarını ortaya koyma 1.3.Öğrencilerle bireysel görüşmeler yapıp eşit işaretine yönelik bireysel hata, zorluk ve düşünme yollarını ortaya koyma 1.4.Etkinlikleri bireysel uygulama 1.5.Etkinlikleri öğretmen rehberliğinde grup tartışmaları ile uygulama 1.6.Alıştırmaları bireysel uygulama 1.7.Alıştırmaları Öğretmen rehberliğinde grup tartışmaları ile uygulamama 1.8. Başlangıç değerlendirmesini son değerlendirme olarak da uygulama	2.Hip 2: değişkenin ilişkisel yorumlanması aritmetikten cebire geçişi kolaylaştırır. 2.1.Değişken kavramına yönelik bilgilerini ölçen ilk değerlendirmeye uygulama 2.2.Değerlendirmeye dayanarak öğrencilerin değişken kavramına yönelik bireysel hata, zorluk ve düşünme yollarını ortaya koyma 2.3.Öğrencilerle bireysel görüşmeler yapıp değişken kavramına yönelik bireysel hata, zorluk ve düşünme yollarını ortaya koyma 2.4.Etkinlikleri bireysel uygulama 2.5.Etkinlikleri öğretmen rehberliğinde grup tartışmaları ile uygulama 2.6.Alıştırmaları bireysel uygulama 2.7.Alıştırmaları öğretmen rehberliğinde grup tartışmaları ile uygulamama 2.8. Başlangıç değerlendirmesini son değerlendirme olarak da uygulama

Şekil 2. 2. Öğretim deneyi süreci

Eşit işaretinin ve değişkenin ilişkisel yorumlanmasının aritmetikten cebire geçişi kolaylaştırdığı hipotezine yönelik tasarlanan öğretim deneyi sürecindeki öğretim bölümlerini gösteren döngü Uygan (2019)’dan uyarlanmış ve döngü Şekil 2.3. ve Şekil.2.4’te verilmiştir.



Şekil 2.3. Eşit işareti için öğretim deneyi döngüsü



Şekil 2.4. Değişken için öğretim deneyi döngüsü

2.2.Pilot Çalışma

2.2.1. Pilot çalışmanın katılımcıları

Pilot çalışmanın katılımcılarını Bursa ili Osmangazi ilçesindeki bir devlet okulundaki beşinci sınıf düzeyindeki 4 öğrenci oluşturmaktadır. Katılımcıların belirlenmesi sürecinde öncelikle araştırmacı öğretmenin dersine girdiği, online derse katılım gösterebilecek fiziksel olanaklara (bilgisayar ya da telefon, sınırsız internet, evde uygun şartların sağlanabileceği bir oda, okul sonrası zamanda farklı kurs-kulüp-egzersiz çalışmasına katılmayan) sahip olan öğrenciler ölçüt örnekleme yöntemi ile belirlenmiştir. Ölçüt örnekleme önceden belirlenmiş bir dizi ölçütü karşılayan bütün durumların çalışılmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Araştırmacının dersine girdiği iki farklı beşinci sınıf olup; diğer sınıfa oranla akademik anlamda ders başarısı daha yüksek, derse ilgisi ve katılımı daha fazla olan sınıfın öğrencileri ile tüm öğrencilerin katılabileceği bir online ders planlanmış ve öğrencilerle dersin erişim bilgisi paylaşılmıştır. Öğrencilerden altısı (6) derse sonuna kadar katılmış ancak beş öğrenci eşittir ve değişken değerlendirmelerinin ikisine anlamlı cevaplar vermeye çalışmıştır. Beş öğrenci ile ilk değerlendirmelerden sonra yapılan görüşmelerde bir öğrencinin sağlık problemleri sebebiyle bir ay kadar derslere katılamayacağını bildirmesi üzerine geriye kalan dört öğrenci ile pilot çalışmanın yürütülmesine karar verilmiştir. Çalışmanın sürdürülebilmesi için öğrencilerden gönüllü katılım formu ve velilerinden de veli izin formu alınmış olup okul idaresinden de uygulama için izin alınmıştır. 2020-2021 eğitim öğretim yılının ikinci döneminde pandemi nedeniyle MEB tarafından tüm resmi ve özel ortaokullar ile imam hatip ortaokullarının 8. sınıflarında seyreltilmiş şekilde haftada 2 gün yüz yüze eğitim yapılacağı, ortaokul 5, 6 ve 7. sınıflarda tüm derslerin uzaktan eğitim yoluyla işlenmeye devam edileceği kararının alınmasıyla beraber çalışmamızda 5. sınıf düzeyindeki katılımcı öğrencilerin ve öğretmenin online dersinin olmadığı; öğrencilerin okul dışı etkinlik, kurs, kulüp çalışması olmadığı zaman aralıkları belirlenerek dersler planlanmıştır. Her öğrencinin kamerasını ve mikrofonunu açabileceği aile bireyleri ile ortak kullanılmayan bir odada derse katılması sağlanmaya çalışılmıştır.

2.2.2. Pilot çalışmaya ilişkin veri toplama

Araştırmanın pilot çalışma verileri 2020-2021 eğitim-öğretim yılının ikinci döneminde 26.04.2021-5.07.2021 tarihleri arasında toplanmıştır. Öğrencilerle online

dersler okul derslerinden sonra, öğrencilerin farklı bir dersten online derslerinin olmadığı, okul dışı düzenli katıldıkları aktivitelerinin olmadığı, ailevi ya da sağlık problemlerinin de dikkate alındığı uygun saatler belirlenecek şekilde gerçekleştirilmiştir. Araştırma verilerini toplama takvimi aşağıdaki gibidir.

Tablo 2. 1. Eşit işarete ilişkin pilot çalışma takvimi

Eşit İşarete İlişkin Çalışma Takvimi	
Eşit işareti ilk değerlendirmenin online bireysel uygulanması	26.04.2021
Eşit işareti ilk değerlendirmenin online bireysel uygulamadan sonra online bireysel görüşme	3.05.2021-9.05.2021
Ekinlik-1'in online bireysel uygulaması	15.05.2021
Etkinlik-1'in online bireysel uygulanmasından sonra online grup dersi	16.05.2021
Etkinlik-1 ile ilişkili Alıştırma-1 (bireysel-ev çalışması)	16.05.2021-17.05.2021
Etkinlik-1 ile ilişkili Alıştırma-2 (bireysel-ev çalışması)	17.05.2021-19.05.2021
Etkinlik-1 ile ilişkili Alıştırmalardan sonra online grup dersi	20.05.2021
Etkinlik-1 ile ilişkili Alıştırma-2 (yeniden bireysel ev çalışması)	21.05.2021-23.05.2021
Etkinlik-2'nin online bireysel uygulaması	21.05.2021
Etkinlik-2'nin online bireysel uygulanmasından sonra online grup dersi	24.05.2021
Etkinlik-2 ile ilişkili Alıştırma-1 (bireysel-ev çalışması)	24.05.2021-25.05.2021
Etkinlik-2 ile ilişkili Alıştırmalardan sonra online grup dersi	03.06.2021
Etkinlik-3'nin online bireysel uygulaması	27.05.2021
Etkinlik-3'nin online bireysel uygulanmasından sonra online grup dersi	05.06.2021
Etkinlik-3 ile ilişkili Alıştırma-1 (bireysel-ev çalışması)	05.06.2021-09.06.2021
Etkinlik-3 ile ilişkili Alıştırmalardan sonra online grup dersi	10.06.2021
Eşit işareti son değerlendirmenin online bireysel uygulanması	12.06.2021
Eşit işareti son değerlendirmenin online bireysel uygulamadan sonra online bireysel görüşme	13.06.2021-16.06.2021

Tablo 2. 2. Değişken kavramına ilişkin pilot çalışma takvimi

Değişken Kavramına İlişkin Çalışma Takvimi	
Değişken ilk değerlendirmenin online bireysel uygulanması	26.04.2021
Değişken İlk değerlendirmenin online bireysel uygulamadan sonra online bireysel görüşme	06.05.2021-14.05.2021
Ekinlik-4'ün online bireysel uygulaması	21.06.2021
Etkinlik-4'ün online bireysel uygulanmasından sonra online grup dersi	22.06.2021
Etkinlik-4 ile ilişkili Alıştırma-1 (bireysel-ev çalışması)	22.06.2021-23.06.2021
Etkinlik-4 ile ilişkili Alıştırma-2 (bireysel-ev çalışması)	22.06.2021-23.06.2021
Etkinlik-4 ile ilişkili Alıştırmalardan sonra online grup dersi	23.06.2021
Etkinlik-5'ün online bireysel uygulaması	24.06.2021
Etkinlik-5'ün online bireysel uygulanmasından sonra online grup dersi	25.06.2021
Etkinlik-6'nın online bireysel uygulaması	24.06.2021
Etkinlik-6'nın online bireysel uygulanmasından sonra online grup dersi	26.06.2021
Değişken son değerlendirmenin online bireysel uygulanması	03.07.2021
Değişken son değerlendirmenin online bireysel uygulamadan sonra online bireysel görüşme	4.07.2021-5.07.2021

2.2.3. Pilot çalışmanın analizi ve bulgular

Çalışmadan elde edilen veriler analiz edilirken öğrencilerin eşit işaretini yorumlama biçimlerindeki benzerlik ve farklılıklara göre bazı temalar, alan yazın ile de uyumlu olduğu görülen, kesin işlemsel, esnek işlemsel, karşılaştırmalı ilişkisel ve ayırıcı yorumlama olacak şekilde belirlenebilmiştir. Öğrencilerin problemin çözümünde işe koştuğu araçlar bakımından analiz yapıldığında öğrencilerin eşit işaretini ve farklı yorumlama biçimlerini; terazi modelini; eşit işaretinin veya terazi modelinin özelliklerini ya da çalışma prensibini işe koşarak soruları çözmeye çalıştıkları görülmüştür. Bu durum Kuzniak, Nechache ve Drouhard (2016)'ın çalışmasında belirttiği semiyotik araç, teknolojik araç, teorik araç ve bu araçların problemin çözümünde işe koşularak enstrümana dönüştüğü süreci tanımlayan oluşumlar sürecinin tanımlanmasıyla da uyumlu bulunmuştur.

Öğrencilerin çalışma süresinde etkinliklerde yaşadığı zorluklar; eşit işaretinin işlemsel, ilişkisel ve ayırıcı yorumlanmasını olumsuz etkilediği düşünülen, eşit işarete ilişkin kavram yanlışlarına sebep olabilecek sorular bağlamında da analiz edilmiştir. Sorular ve etkinlikler öğrencilerin anlamakta zorlandığı durumlar, soru metnindeki ifadelerin akıcılığı, anlaşılır olması, öğrencilerin seviyelerine uygunluğu bakımından da incelenmiştir. Her bir etkinlik ve soru pilot çalışmada karşılaşılan olumsuz durum ve bu olumsuzluğu gidermeye yönelik öneriler bağlamında değerlendirilmiştir.

2.2.4. Pilot çalışmanın sonuçları

Pilot çalışma sonrasında yapılan etkinlik analizi ve öğretim süreci analizi ile karşılaşılan olumsuz durumlar, bu durumlara çözüm önerileri ve yapılan değişiklikler şu şekilde olmuştur.

2.2.4.1. Pilot çalışmadan elde edilen veriler ışığında etkinliklere ilişkin öneriler

- Soruları okuma anlamada yaşanan zorlukları azaltmak için vurgulu, yavaş, tane tane okumak gerekirken öğrencilerin bu şekilde okuyamadığı görüldüğünden öğretmenin okuması önerilir.
- Nokta'nın çarpma anlamına geldiğini öğretim süresince unuttukları durumlar gözlemlendiğinden ve bu da öğrenciler için yeni bir zorluk yarattığından çarpma işleminde '.' yerine 'x' kullanılabilir.

- Etkinliklerde yer alan sözel, sayısal, matematiksel kavramları onlara çok yabancı geldiğinden sözel, sayısal, matematiksel olarak ifade etmenin ne anlama geldiği örneklerle desteklenerek tanımlanması uygun görülmüştür.
- Bireysel uygulamalarda öğrencilerin cevaplarını yazılı olarak ifade etmeleri istendiğinden, yazmaktan kaçınıp kısaca ifade edebildikleri; görüşmede uzun uzun anlatırım bahanesine sığınabildikleri görülmüştür. Bu konuda onlara açıklama yapılarak soruya dair ilk düşüncesini ayrıntılı bir şekilde yazmasının önemini vurgulanması uygun görülmüştür.
- Eşit işaretinin simetri olma özelliğini vurgulamak için tasarlanan kelebek etkinliği öğrencilerde eşit işaretiyle ilişkin kavram yanılgılarına neden olduğundan etkinliğin çıkarılması uygun görülmüştür.
- Etkinlikte öğrencilerin dengede verilen terazi modeli ile eşit işareti arasında ilişki kurabildiği ancak dengede olmama durumunda büyüktür-küçüktür sembollerini kullanabileceğini düşünemediği görüldüğünden soru metninde hatırlatma notu yazılması önerilir.
- Etkinlik 2 ile ilişkili sadece bir alıştırma varken ilave bir alıştırmanın öğrencilerin genelleme sürecine daha yararlı olacağı düşünüldüğünden bir alıştırma daha eklenmiştir.
- Bazı etkinliklerdeki-sorulardaki ifadelerin daha anlaşılır olması adına not eklenmesi uygun görülmüştür.

2.2.4.2.Pilot çalışmadan elde edilen veriler ışığında öğretim deneyine ilişkin çözüm önerileri

- Görüşme soruları daha ayrıntılı hazırlanıp görüşme süresi daha uzun tutulabilir.
- Farklı sebeplerle kamera açmayan öğrencilerin olması veri kaybına neden olabilir. Bu nedenle kameranın açık kalmasının önemi konusunda çalışma öncesinde tüm öğrenciler bilgilendirilmeli.
- Alıştırma ödevlerini zamanında yapmıyor olmaları hem sürecin uzamasına neden olabilir hem de öğrenilen konunun pekiştirilmesini zorlaştırabilir. Öğrencilerin sorumluluklarını zamanında yerine getirmeleri adına düzenli takip edilip ve zamanlamanın önemi konusunda bilgilendirilebilir.
- Grup görüşmelerinde birbirlerini dinlemeden kendi sıralarının gelmesini bekleyip kendi düşüncelerini açıklamaya odaklanabilirler. Görüşme sırasında

başka arkadaşlarının fikirlerini dinlemelerinin kendi görüşlerini şekillendirebilmeleri için gerekli ve önemli olduğu konusunda açıklama yapılabilir.

- Öğrencilerin bazılarının aile bireyleri ile ortak kullanılan odada derse girdiği görüldüğünden onların dikkatinin dağıldığı görülmüştür. Her bir öğrencinin kendi başına kalabildiği sessiz, kamerasını ve mikrofonunu açabileceği bir öğrenme ortamında derse girmesi önerilir.
- Öğrencilerin derslerde koltuk, yatak üstü gibi yerlerde değil masa başında sabit bir telefon tutucu ya da bilgisayar karşısında, önünde defter silgi ve kaleminin olduğu bir öğrenme ortamında derse katılması sağlanmalı.

2.3.Esas Uygulama

2.3.1. Araştırma ortamı ve katılımcılar

Araştırmanın katılımcılarını Bursa ili Osmangazi ilçesindeki bir devlet okulundaki beşinci sınıf düzeyindeki 4 öğrenci oluşturmaktadır. Katılımcıların belirlenmesi sürecinde öncelikle araştırmacı öğretmenin dersine girdiği, online derse katılım gösterebilecek fiziksel olanaklara (bilgisayar ya da telefon, sınırsız internet, evde uygun şartların sağlanabileceği bir oda, okul sonrası zamanda farklı kurs-kulüp-egzersiz çalışmasına katılmayan) sahip olan ve uzaktan eğitimle yapılacak bu uzun soluklu çalışmaya katılma konusunda istekli ve aynı zamanda istikrarlı davranabilecek öğrenciler ölçüt örnekleme yöntemi ile belirlenmiştir. Ölçüt örnekleme önceden belirlenmiş bir dizi ölçütü karşılayan bütün durumların çalışılmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Öncelikle 2021-2022 eğitim-öğretim yılının birinci döneminde pandemi nedeniyle alınan tedbirler kapsamında okulda yapılan yüzyüze eğitimlerden sonra okul binalarının boşaltılıp dezenfekte edilmesi çalışmaları nedeniyle online yürütülmesi planlanan çalışmamızda araştırmacı öğretmenin dersine girdiği sadece bir tek beşinci sınıf olduğundan önceden planlanan bir online ders tanımlanarak tüm öğrencilerin katılabileceği bilgisi verilmiştir. Online ders bilgisi sınıf ile paylaşılmış ve derse başından sonuna kadar katılan ve istenen görevleri yapmaya çalışan sadece dokuz öğrenci olmuştur. Dokuz öğrencinin ders sırasında gösterdikleri performans, çalışmaya katılmada gönüllü ve istekli oluş, derste verdikleri cevaplar incelenerek dört öğrenci belirlenmiştir. Araştırmanın katılımcıları, matematik dersine karşı olumlu tutum gösteren, ilgili ve istekli öğrenciler olmalarının yanında bulundukları öğrenim düzeyi ve

aldıkları eğitim bakımından araştırmamızın ilgili olduğu aritmetikten cebire geçişte eşitlik ve değişken kavramlarının ilişkisel ve farklı yorumlama biçimlerine yönelik bir eğitim almamıştır. Belirlenen ortaokulda araştırmanın sürdürülebilmesi için ilk olarak Anadolu Üniversitesi Sosyal ve Beşeri Bilimler Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu izni (EK-1) ve ardından Bursa İl Milli Eğitim Müdürlüğü'nden uygulama izni alınmıştır (EK-2).

Hafta içi yapılan derslerde pandemi nedeniyle okulda yapılan derslerden sonra okulun boşaltılması gerekliliğinden dolayı okul çıkış saatinden bir kaç saat sonra öğrencilerin özel ihtiyaçları ya da durumları da göz önünde bulundurularak belirlenen zamanlarda çalışmalar yapılmıştır. Hafta sonları yapılan derslerde genellikle bireysel görüşmelerin yapılmasına dikkat edilip; öğrencinin aile ile geçireceği zamanlar ve planladıkları etkinlikler göz önünde bulundurularak dersler planlanmıştır. Her öğrencinin derse katıldığı ortamda kamerasını açabileceği, aile fertleri ile ortak kullanılmayan bir odada derse katılması sağlanmış; kamera ve mikrofon açık tutularak istedikleri zaman konuşabilecekleri online dersler yürütülmüştür. Kameranın öğrencinin yüzünü görebilecek ya da istenildiğinde defterlerini görecektir şekilde ayarlanması sağlanmıştır.

Öğretim uygulamaları yaklaşık üç aylık sürede (bir öğretim dönemi) online olarak yürütülmüştür. Bu süreçte eşit işareti ve değişken kavramlarının her biri için önce ilk değerlendirme etkinliği bireysel olarak online uygulanmış ve sonrasında her bir öğrenci ile ilk değerlendirme ile ilgili, online bireysel görüşmeler yapılmıştır. Bu süreçte her bir öğretim uygulamasının ardından gerçekleştirilen makro analizler bir sonraki öğretim uygulamasının gerçekleştirilmesi için rehber niteliğinde olmuştur. İlk değerlendirmenin ardından Etkinlik-1 bireysel olarak online uygulanmış ve ortalama 1-2 gün sonra Etkinlik-1 ile ilgili öğrencilerin sorularla ilgili düşüncelerini paylaşacakları birbirini dinleyebilecekleri, birbirlerine soru sorup, kendi görüşlerini savunabilecekleri, arkadaşının görüşü ile aynı fikirde olmadığında ifade edebileceği bir ortamda grup dersi online olarak yapılmıştır. Etkinlik-1 ile ilişkili iki alıştırma öğrencilere ev çalışması olarak verilmiş ve öğrencilerden bu alıştırmaları istenen süre içerisinde tamamlayıp cevaplarının fotoğrafını göndermeleri istenmiştir. Etkinlik-1 ile ilişkili alıştırmaların tamamlanmasından sonra öğrencilerin eksik, hatalı, anlayamadıkları ve yapamadıkları sorular üzerinde konuşup tartışarak birbirlerinin cevaplarını yorumladıkları online grup

dersi yapılmıştır. Aynı süreç Etkinlik-2 ve ilişkili alıştırmaları için de yapıldıktan sonra ilk değerlendirmede uygulanan çalışma öğrencilere yeniden verilmiş ve online-bireysel olarak soruları yeniden çözmeleri istenmiştir. Bireysel uygulamalarda öğrencilere sorularla ilgili herhangi bir rehberlik, açıklama, yönlendirme yapılmamıştır. Eşit işareti son değerlendirmenin online-bireysel uygulanmasından sonra her bir renci ile yeniden görüşme yapılarak öğrencilerin ğretim süresince bilişsel süreçlerindeki değişim-gelişimleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

Eşit işaretinin İlişkisel Yorumlanması Süreci

1. Eşitir ilk değerlendirmenin online bireysel uygulanması
 - 1.1.Eşitir ilk değerlendirmenin online bireysel uygulamadan sonra online bireysel görüşme
2. Ekinlik-1'in online bireysel uygulaması
 - 2.1.Etkinlik-1'in online bireysel uygulanmasından sonra online grup dersi
 - 2.2. Etkinlik-1 ile ilişkili Alıştırma-1 (bireysel-ev alışması)
 - 2.3.Etkinlik-1 ile ilişkili Alıştırma-2 (bireysel-ev alışması)
 - 2.4.Etkinlik-1 ile ilişkili Alıştırmalardan sonra online grup dersi
3. Etkinlik-2'nin online bireysel uygulaması
 - 3.3.Etkinlik-2'nin online bireysel uygulanmasından sonra online grup dersi
 - 3.4.Etkinlik-2 ile ilişkili Alıştırma-1 (bireysel-ev alışması)
 - 3.5.Etkinlik-2 ile ilişkili Alıştırma-2 (bireysel-ev alışması)
 - 3.6.Etkinlik-2 ile ilişkili Alıştırmalardan sonra online grup dersi
4. Eşitir son değerlendirmenin online bireysel uygulanması
 - 4.3.Eşitir son değerlendirmenin online bireysel uygulamadan sonra online bireysel görüşme

Değişken Kavramının İlişkisel Yorumlanması Süreci

1. Değişken ilk değerlendirmenin online bireysel uygulanması
 - 1.1.Değişken İlk değerlendirmenin online bireysel uygulamadan sonra online bireysel görüşme
2. Ekinlik-3'ün online bireysel uygulaması
 - 2.1.Etkinlik-3'ün online bireysel uygulanmasından sonra online grup dersi
 - 2.2.Etkinlik-3 ile ilişkili Alıştırma-1 (bireysel-ev alışması)

- 2.3.Etkinlik-3 ile ilişkili Alıştırma-2 (bireysel-ev çalışması)
- 2.4.Etkinlik-3 ile ilişkili Alıştırmalardan sonra online grup dersi
- 3. Etkinlik-4'ün online bireysel uygulaması
 - 3.1.Etkinlik-4'ün online bireysel uygulanmasından sonra online grup dersi
- 4. Etkinlik-5'in online bireysel uygulaması
 - 4.1.Etkinlik-5'in online bireysel uygulanmasından sonra online grup dersi
- 5. Değişken son değerlendirmenin online bireysel uygulanması
 - 5.1.Değişken son değerlendirmenin online bireysel uygulamadan sonra online bireysel görüşme

2.3.2. Araştırmacının Rolü

Öğretim deneyi çerçevesinde desenlenmiş bu nitel araştırmanın birincil veri toplama ve analiz aracı araştırmacının kendisi olmuştur. Etkinlik ve alıştırmaların tasarımı, eşit işareti ve değişken kavramına ilişkin ilk/son değerlendirmeden sonra yapılan bireysel görüşmeler, eşit işareti ve değişken kavramına ilişkin tasarlanan etkinliklerin bireysel uygulanmasının ardından yapılan grup görüşmeleri ve etkinliklerle ilişkili alıştırmaların bireysel ev uygulamasından sonra yapılan grup görüşmeleri araştırmacı-öğretmen tarafından gerçekleştirilmiştir. Araştırmacı-öğretmen lisans eğitimini İlköğretim Matematik Öğretmenliği üzerine tamamlamıştır. MEB'e bağlı devlet okullarında görev yapmaya devam etmekte ve 16 yıllık öğretmenlik deneyimine sahip olup yüksek lisansını doğrusal denklemlerin 7. sınıflarda öğretiminde geometri sketchpad kullanımının çoklu temsil ve enstrümantal yaklaşım boyutundan incelenmesi üzerine yapmıştır. Ayrıca araştırmacı-öğretmen yüksek lisans ve doktora eğitimi süresince Nitel Araştırma Yöntemleri dersini almıştır. Bu bağlamda araştırmacı-öğretmenin nitel araştırmalar konusundaki bilgisi ve öğretmenlik deneyiminin öğretim deneyi sürecinin yürütülmesi ve verilerin analizinde oluşmu katkısı olduğu düşünülmektedir.

2.3.3. Veri toplama

Araştırmanın verileri 2021-2022 eğitim-öğretim yılının birinci döneminde 19.10.2021-20.01.2022 tarihleri arasında toplanmıştır. Öğrencilerle online dersler okul derslerinden yaklaşık 2 saat sonra olacak şekilde gerçekleştirilmiştir. Araştırma verilerini toplama takvimi aşağıdaki gibidir.

Tablo 2. 3. Esas uygulama eşit işaretime ilişkin uygulama takvimi

Eşit İşaretime İlişkin Çalışma Takvimi	
Eşittir ilk değerlendirmenin online bireysel uygulanması	19.10.2021
Eşittir ilk değerlendirmenin online bireysel uygulamadan sonra online bireysel görüşme	26.10.2021-31.10.2021
Ekinlik-1'in online bireysel uygulaması	10.11.2021
Etkinlik-1'in online bireysel uygulanmasından sonra online grup dersi	11.11.2021
Etkinlik-1 ile ilişkili Alıştırma-1 (bireysel-ev çalışması)	13.11.2021
Etkinlik-1 ile ilişkili Alıştırma-2 (bireysel-ev çalışması)	14.11.2021
Etkinlik-1 ile ilişkili Alıştırmalardan sonra online grup dersi	17.11.2021-18.11.2021
Etkinlik-2'nin online bireysel uygulaması	20.11.2021
Etkinlik-2'nin online bireysel uygulanmasından sonra online grup dersi	23.11.2021-25.11.2021
Etkinlik-2 ile ilişkili Alıştırma-1 (bireysel-ev çalışması)	25.11.2021-27.11.2021
Etkinlik-2 ile ilişkili Alıştırma-2 (bireysel-ev çalışması)	27.11.2021-28.11.2021
Etkinlik-2 ile ilişkili Alıştırmalardan sonra online grup dersi	30.11.2021-2.12.2021
Eşittir son değerlendirmenin online bireysel uygulanması	4.12.2021
Eşittir son değerlendirmenin online bireysel uygulamadan sonra online bireysel görüşme	5.12.2021-13.12.2021

Tablo 2. 4. Esas uygulama değişken kavramına ilişkin uygulama takvimi

Değişken Kavramına İlişkin Çalışma Takvimi	
Değişken ilk değerlendirmenin online bireysel uygulanması	21.10.2021
Değişken ilk değerlendirmenin online bireysel uygulamadan sonra online bireysel görüşme	4.11.2021-9.11.2021
Ekinlik-3'ün online bireysel uygulaması	18.12.2021
Etkinlik-3'ün online bireysel uygulanmasından sonra online grup dersi	19.12.2021-22.12.2021
Etkinlik-3 ile ilişkili Alıştırma-1 (bireysel-ev çalışması)	22.12.2021-23.12.2021
Etkinlik-3 ile ilişkili Alıştırma-2 (bireysel-ev çalışması)	23.12.2021-25.12.2021
Etkinlik-3 ile ilişkili Alıştırmalardan sonra online grup dersi	25.12.2021-26.12.2021
Etkinlik-4'ün online bireysel uygulaması	27.12.2021
Etkinlik-4'ün online bireysel uygulanmasından sonra online grup dersi	31.12.2021 ve 7.01.2022
Etkinlik-5'in online bireysel uygulaması	08.01.2022
Etkinlik-5'in online bireysel uygulanmasından sonra online grup dersi	09.01.2022
Değişken son değerlendirmenin online bireysel uygulanması	10.01.2022
Değişken son değerlendirmenin online bireysel uygulamadan sonra online bireysel görüşme	13.01.2022-20.01.2022

Ders sürecinde zoom uygulamasının ekran-ses-görüntü kaydı açık bırakılmıştır. İlk-son değerlendirme ve bireysel uygulamalarda öğrencilere etkinlik kâğıdı ekran paylaşımı yapılmıştır. Soru metninin yazılmasına gerek olmadığı hatırlatılmış; sadece sorunun numarasının yazılmasının yeterli olacağı belirtilmiştir. Ders bitiminde öğrencilerden defterlerine yazdıkları cevapları whatsapp uygulamasından mesaj ile göndermeleri istenmiş ve bu mesajlar adım adım arşivlenmiştir. İlk ve son değerlendirmelerden sonra yapılan bireysel görüşmelerde öğrencilere hem etkinlik kâğıdı hem de kendi cevaplarının yer aldığı fotoğraf ekran paylaşımı yapılarak soruya verdikleri cevaplar ve görüşme sırasında ne düşündükleri hakkında derinlemesine sorular yöneltilerek görüşmeler yapılmıştır.

Etkinlik ve alıştırılmalardan sonra yapılan grup derslerinde hem etkinlik-alıştırma kâğıdı hem de öğrencilerin her birinin ilgili soruya verdiği cevabın görseli paylaşarak tüm öğrencilerin arkadaşlarının verdiği cevabı görmeleri ve bu cevap hakkında hem arkadaşının görüşünü dinlemeleri hem de kendi görüşlerini dile getirmeleri sağlanmaya çalışılmıştır. Kendi düşüncelerini açıklama ve arkadaşlarını ikna etmenin yanında başka arkadaşlarının da görüşlerini dinleyerek kendi düşünme sürecine dahil edip etmeme fırsatı ya da aksi görüşleri savunabilecekleri bir ortam yaratılmaya çalışılmıştır.

2.3.3.1. Veri toplama araçları

Bu araştırmanın verilerinin toplanmasında öğretmen ve öğrencilerin iletişim sürecindeki sözlü ifadeleri ve yüz ifadelerini inceleyebilmek için online görüşme platformu olan zoom uygulamasının görüşmeyi kaydetme özelliğinden (ses-görüntü-ekran kaydı); öğrencilerin etkinlik ve alıştırılmaları düzenli bir şekilde yazdıkları defterlerinin görüntüsünü araştırmacı öğretmen ile paylaşabilmeleri için whatsapp anlık haberleşme uygulamasının mesajlarından yararlanılmıştır.

2.3.3.2. Öğretim deneyi sürecindeki veri toplama araçları

Bu araştırma kapsamında öğretim uygulamaları süresince, bireysel yarı yapılandırılmış görüşmelerinden ve odak grup görüşmelerinden önce öğrencilere yöneltilmesi planlanan görüşme soruları pilot uygulamada ve esas uygulamanın her bir döngüsünden sonra revize edilmiş ve görüşmeler sırasında bu görüşme sorularına sıkı sıkıya bağlı kalınmadan öğrencinin verdiği cevapların altında yatan öğeleri ortaya çıkarmaya yönelik derinlemesine sorularla desteklenmiştir. Eşit işareti ilk/son değerlendirme, değişken kavramı ilk/son değerlendirme, eşit işareti ilişkin etkinlik-1 ve ilişkili alıştırılmalar ile ilgili görüşme soruları örnekleri EK-6'da verilmiştir. Öğretim uygulamalarının tasarlanması öncesinde aritmetikten cebire geçiş süreci ile ilgili yapılan çalışmalar ile ilgili alan yazın taraması yapılmış ve çalışmalarda aritmetikten cebire geçişi kolaylaştıran unsurların başında gelen eşit işareti ve değişken kavramlarının ilişkisel yorumlanmasını destekleyeceği öne sürülen etkinlikler, sorular, alıştırılmalar ile ilgili bir havuz hazırlanmıştır. Bu havuzun hazırlanmasında başta Cai ve Knuth (Eds.) (2011), Asquith vd. (2007), Molina ve Ambrose (2008), Cai ve Moyer (2008), Behr vd. (1980) olmak üzere Hohensee (2017), van den Heuvel-Panhuizen vd. (2013), Carraher vd. (2006), Carraher, Schliemann ve Brizuela (2000), Kieran (2004), Cai vd. (2005), Weinberg vd. (2016), Caspi ve Sfard (2012), Byrd vd. (2015), Ferrara ve Sinclair

(2016), Kolovou ve Heuvel-Panhuizen (2010), Cai (2004), Molina ve Ambrose (2008), Radford (2015), Carraher vd. (2006)'dan yararlanılmıştır. Etkinlik ve alıştırmalarda yer alan soruların alan yazın ile ilişkisini gösteren örnek tablo EK-7'de verilmiştir. Bu etkinlik havuzundaki sorular literatürde geliştirmesi hedeflenen beceriler de göz önünde bulundurularak temalara ayrılmıştır. Temalar altında toplanan sorular çalışılan grup olan 5. sınıf düzeyine uygunluğu, geliştirmesi hedeflenen becerisi-yorumlama biçimi, etkinlikteki soru sayısı; sorulardaki bağlamların belirlenmesinde olası ilgi alanları da göz önünde bulundurularak eşit işaretinin ilişkisel yorumlanmasını geliştirmeyi destekleyen iki (2) etkinlik ve bu iki etkinliğin her biri ile ilişkili ikişer alıştırma olarak düzenlenmiştir. Aynı şekilde değişken kavramı için de üç (3) etkinlik ve etkinliklerden ilki ile ilişkili iki alıştırma olacak şekilde bir öğretim süreci tasarlanmıştır. Etkinlik tasarımı ölçme aracının tasarlanmasındaki amaç olan 'aritmetikten cebire geçişte eşit işaretini ilişkisel olarak anlamlandırma' hedefine yönelik Tablo 2.5'te verildiği gibi (1) kavramsal anlama: denge, simetri, aynılık ve (2) bağlamsal anlama/kullanma: farklı temsil kullanımı, temsiller arası geçiş olacak şekilde iki tema belirlenmiştir. Bu temaların desteklenmesini, geliştirilmesini sağlayacak soru tipi ya da sorunun altında yatan temaya uygun tema alt kategorileri belirlenmiştir. Kavramsal anlama temasına ilişkin dört (4) tema alt kategorisi belirlenirken; bağlamsal anlama temasına ilişkin yedi (7) tema alt kategorisi belirlenmiştir.

Tablo 2. 5. *Eşit işareti ölçme aracındaki temalar ve alt temaları*

ÖLÇME AMACI: Cebir öncesi bilişsel süreci zenginleştirmek	ÖLÇME ARACINDAKİ TEMALAR	ALT TEMALAR
ARİTMETİKTEN CEBİRE GEÇİŞTE EŞİT İŞARETİNİ İLİŞKİSEL OLARAK ANLAMLANDIRMA	Kavramsal Anlama: Denge, simetri, aynılık	Eşdeğer Denklemler, Matematiksel Denklik, Eşitlik, Eşdeğerlik=A+b (cevap solda olan)—Geriye/Tersine Düşünme 3'lü eşitlik 3+5+7=3+7+5=7+3+5 Doğru-yanlış cümleleri
	Bağlamsal anlama/kullanm a: farklı temsil kullanımı, temsiller arası geçiş	Tablo temsili ve farklı yollar kullanımı Görselleştirilmiş eşitlik: denge, eşitlik hissi Aritmetik (Sayısal) bir işlem verip sözel olarak ifade etme Sözel problemler Cebirsel verilen ifadeyi sözel-sayısal olarak ifade etme Gerçek yaşam bağlamlarına yer verme Cebirsel-simgesel problem geçişi ilişkilendirme

Etkinliklerde yer alan sorular eşit işaretinin ilişkisel yorumlanmasını hangi yönden destekledikleri bakımından üç tema altında toplanmış olup bunlar: (1) işareti anlamlandırma; (2) eşitliği bozmayan işlemleri belirleme; (3) eşitliği sağlayan eksik değeri bulma'dır. Veri analizinde öğrencilerin hangi soru tipinde eşit işaretinin hangi yorumlama biçimini kullandıkları ya da bilişsel süreçlerinin nasıl değiştiği geliştiğini belirlemek amacıyla kullanılmak üzere belirlenmiş tema ve tema alt kateorileri olup Tablo 2.6'da gösterilmiştir.

Tablo 2. 6. Veri analizinde kullanılmak üzere eşit işaretine ilişkin etkinlik ve alıştırmaların analizi

Etkinlik ve Alıştırmaların Analizi		
Soru Numarası	Alt Temalar	Tema
İlk Değerlendirme ve Son Değerlendirme Analiz		
1	İşareti anlamlandırma ($a+b=c$ standart ifade)	İşareti anlamlandırma
2	İşareti anlamlandırma (işaretin yokluğunda ifadeye etkisini yorumlama)	
3	İşareti anlamlandırma (Eşdeğer denklemlerde)	
5	İşareti anlamlandırma ($a=a$ durumunu farklı temsilleri kullanarak: sayı, şekil, cebirsel)	
11	İşareti anlamlandırma (Sayısal eşitliğin doğru ya da yanlış olduğunu belirleme –hatalı eşdeğer denklemi fark etme, $6+9=15:3=5+2=7$)	
4	Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulama	Eşitliği bozmayan işlemleri belirleme
6	Denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirleme ($a=a$, $a+0=a+0$, $a+b=a+b$, $a-b=a-b$)	
7	Denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirleme (standart eşitlik ifadesinden başlayarak $a=a$ yi elde edinceye kadar giden adımları içeren süreç)	
8	Denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirleme (farklı tiplerde)	Eşitliği sağlayan eksik değeri bulma
9	Eksik değeri bulma ($a+b=kutu+c$)	
10	Eksik değeri bulma (farklı tiplerde, ---- ile temsil)	
12	Eksik değeri bulma (sözelden cebirsel ya da sayısal geçiş kullanarak-temsil kullanarak)	
Etkinlik-1 Analiz		
1	Eksik değeri bulma (açık sayı cümlesi)	Eşitliği sağlayan eksik değeri bulma
2	İşareti anlamlandırma (eşdeğer denklemde-terazi modeli ile)	İşareti anlamlandırma
3	Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulama	Eşitliği bozmayan işlemleri belirleme
Etkinlik.1.Alıştırma.1 Analiz		
1	Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama (terazi modeli-sayısal-sözel-farklı temsil geçişleri ile)	Eşitliği bozmayan işlemleri belirleme
2	Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulama (terazi modeli ile ilişkili)	

3	Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulama (terazi modeli ile ilişkili)	
4	Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulama (terazi modeli ile ilişkili)	
Etkinlik.1. Alıştırma.2- Analiz		
1	Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulama (terazi modeli ile ilişkili)	Eşitliği bozmayan işlemleri belirleme
Etkinlik.2-Analiz		
1	Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulama (terazi modeli-sayısal-sözel-farklı temsil geçişleri ile)	Eşitliği bozmayan işlemleri belirleme
2	Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama (terazi modeli ile ilişkili-sayısal-sözel-farklı temsil geçişleri ile)	
3	Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama (terazi modeli ile ilişkili-sayısal-sözel-farklı temsil geçişleri ile)	
4.	Denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirleme (sözel ifadeyi yorumlama)	
Etkinlik.2.Alıştırma.1-Analiz		
1	Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulama (cebirsal temsil-terazi modeli-sözel temsil ilişkili)	Eşitliği bozmayan işlemleri belirleme
2	Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulama (cebirsal temsil-terazi modeli-sözel temsil ilişkili)	
Etkinlik.2.Alıştırma.2-Analiz		
1	Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulama (cebirsal temsil-terazi modeli-sözel temsil ilişkili)	Eşitliği bozmayan işlemleri belirleme

Tablo 2.6. (Devam) *Veri analizinde kullanılmak üzere eşit işaretiyle ilişkin etkinlik ve alıştırmaların analizi*

Değişken kavramının ilişkisel yorumlanmasına ve farklı yorumlama biçimlerine dair farkındalık yaratmak ve değişken kavramına ilişkin öğrencilerin imajlarını zenginleştirmek amacıyla hazırlanan etkinlik-alıştırma havuzundaki sorular değişken kavramının işlemsel (aritmetik bakış açısıyla gelişen) ve ilişkisel (cebirsal bakış açısıyla gelişen) yorumlamayı desteklemeleri bağlamında sınıflandırılmıştır. Tablo 2.7’de değişken kavramının farklı yorumlama biçimlerini geliştirmeye yönelik hazırlanan ilk-son değerlendirmede yer alan soruların işlemsel ve ilişkisel yorumlamayı desteklemeleri bağlamında analizi verilmiştir. Değişken kavramının farklı yorumlama biçimlerine dair farkındalık kazandırmak amacıyla hazırlanan etkinlik ve alıştırmalar Tablo 2.4’te yer verilen çalışma takviminde belirtildiği şekliyle uygulanmış; döküm yapılmış ancak tez kapsamında bulguların çok yoğun olması nedeniyle değişken kavramına ilişkin bulguların verilmesinde ilk ve son değerlendirme ile sınırlı kalmıştır.

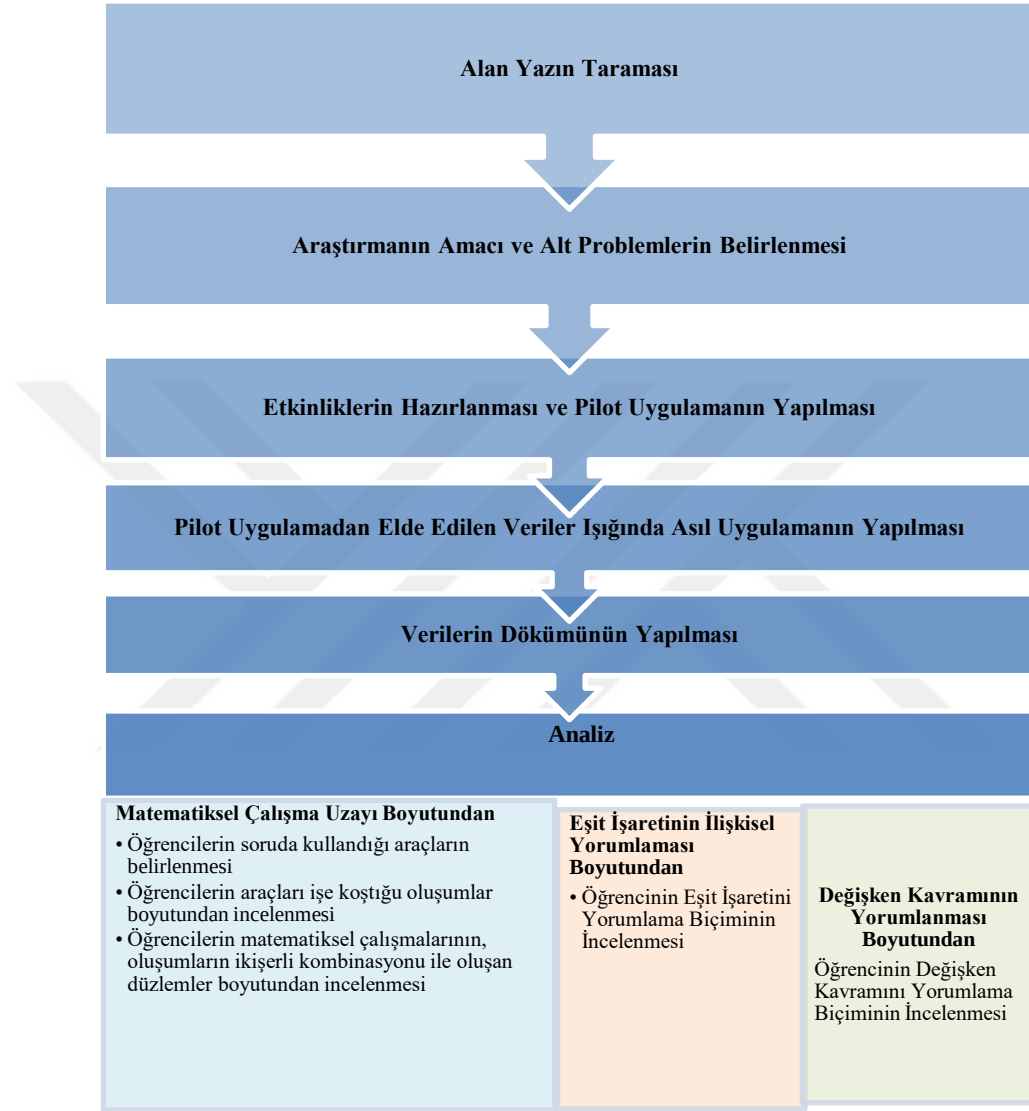
Tablo 2. 7. *Veri analizinde kullanılmak üzere değişken kavramına ilişkin ilk ve son değerlendirmenin analizi*

Soru no	Soruyu tanımlayan ifade	Değişken kavramının desteklendiği yorumlama biçimi
1	Değişkenin belirli bir bilinmeyen olarak doğru yorumlanıp hesaplanmasını gerektiren denklemde	İşlemsel
2	Tablo temsili ile verilen birbirine bağlı değişen nicelikleri fark edip ilişkisel yorumlamayı destekleyen	İlişkisel
3	Eşittir (karşılaştırmalı ilişkisel) ve değişkenin (genelleştirilmiş sayı) beraberce ilişkisel yorumlanmasını gerektiren	İlişkisel
4	Harf ile temsil edilen değişkeni genelleştirilmiş bir sayı olarak yorumlamayı destekleyen	İlişkisel
5	Bir şekil ile temsil edilen değişkeni yorumlayıp sözel ve matematiksel temsille ifade etmeyi gerektiren	İlişkisel
6	Birbirine bağlı değişen nicelikleri temsil eden değişkenler modelle verilip sözel ve matematiksel olarak temsil etmesi ve değişkenleri hesaplaması gerektiğinde	İlişkisel
7	Birbirine bağlı değişen niceliklerin çubuk modeli ile temsil edildiği problemi çözmesini gerektiren	İlişkisel
8	Sözel bir problem içinde verilen belirli bir bilinmeyeni hesaplamayı gerektiren soruda	İşlemsel
9	Sözel olarak verilen belirli bir bilinmeyen içeren ifadelerin cebirsel ve model ile temsil edilmesini gerektiren	İşlemsel
10	Çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliğini farklı şekillerle temsil edilen genelleştirilmiş sayı olarak değişken kavramını hissedebilmeyi gerektiren	İlişkisel

2.3.4. Veri analizi

Araştırmada toplanan verilerin analizinden önce grup dersleri ve bireysel görüşmelerden elde edilen verilerin dökümü zoom uygulamasının ses, görüntü ve ekran kaydından yararlanılarak yapılmıştır. Dökümlerde öğrencilerin sözel ifadelerinin yanında ders sırasındaki tutum ve davranışları (etrafı izlemesi, dalması, odaya giren birisi olduğunda konuşması-gülmesi, kısa süreli görüntüsünü kapatması, ekranda görünmemesi gibi) da incelenmiş ve dökümlerde belirtilmiştir. Soruların çözümünü yazdıkları defterini ekranda gösterdiklerinde elde edilen ekran görüntüleri, whatsapp uygulaması ile derslerden sonra attıkları mesajların fotoğrafları da dosyalanmıştır. Bununla beraber bireysel uygulamalarda öğretmen müdahalesi olmadığından kimi zaman ders sırasında; grup dersleri ve bireysel görüşmelerde ise dersin bitiminde araştırmacı öğretmen tarafından tutulan günlükler de verilerin analizinde incelenmiştir. Elde edilen veriler ‘Matematiksel Çalışma Uzayı’, ‘Eşit işaretinin ilişkisel yorumlanması’ ve ‘Değişken kavramının ilişkisel yorumlanması’ boyutundan incelendiğinden her birinde farklı temalar kullanılmış olmakla beraber veriler tematik analiz yöntemi ile analiz edilmiştir (Glesne, 2012, s. 255). Tematik analizde araştırmacı

veriler içinde tema ve örüntüler aramak amacıyla verileri kodlar ve daha sonra aynı biçimde kodlanmış tüm verileri okur ve özünde ne olduğunu bulmaya çalışır (Glesne, 2012, s.255).



Şekil 2. 5. Verilerin analizi süreci ve üç farklı bağlamda analizi

‘Öğrencilerin soruda işe koştuğu araçların belirlenmesi’ aşaması öğrencilerin verilen soruyu çözerken eşit işareti için: semiyotik araç olarak ele alınan eşit işaretinin kendisi ve işaretin farklı yorumlama biçimlerini işe koşması; değişken kavramı için: semiyotik araç olarak ele alınan değişkenin harf, şekil, noktalar, çubuk gibi farklı temsil biçimlerini işe koşmasının incelendiği aşamadır. Benzer şekilde soruyu çözerken eşit işareti için teknolojik bir araç olarak ele alınan terazi modelini işe koşması; değişken kavramı için teknolojik araç olarak ele alınan içindeki miktarı bilinmeyen çokluğu

temsilen kutu/torba/nesne/harf/çubuğun işe koşulduğu durumların incelendiği aşamadır. Aynı zamanda öğrencilerin verilen soruyu çözerken eşit işareti için teorik araç olarak ele alınan eşit işareti veya terazi modelinin özelliklerini; değişken kavramı için değişkeni temsilen kullanılan harf/şekil/sembol ve noktaların özelliklerini işe koşması bakımından değerlendirildiği aşamadır.

‘Öğrencilerin araçları işe koştugu oluşumlar boyutundan incelenmesi’ aşaması öğrencinin sorunun çözümünde kullandığı teknikler ve bilişsel sürecinde gözlemlenen tekniklerle ilişkili şemalarla beraber aracı etkin bir enstrümana dönüştürebilme durumuna bağlı olarak görülen oluşumlar bakımından değerlendirildiği aşamadır.

Tablo 2. 8. *Veri analizinde eşit işareti ile ilgili oluşumların görüldüğü durumlara ilişkin göstergeler*

Oluşumlar	Oluşumların Görüldüğü Durumlara İlişkin Göstergeler
Semiyotik Oluşum	Eşit işaretinin veya terazi modelinin herhangi bir görsel algısının yokluğunda, öğrencinin gözünün önünde gerçekten sanki varmış gibi görünmesine izin veren bir temsil üretme sürecine ilişkin bileşenlere dair göstergelerin görüldüğü durumlarda
Enstrümantal Oluşum	Eşit işareti ve farklı yorumlama biçimlerini veya terazi modelini aktif bir biçimde kullandığı teknikler veya eylemlerle problemin çözümünde işe koşabildiği sürecin bileşenlerine dair göstergelerin görüldüğü durumlarda
Söylemsel Oluşum	Eşit işareti veya terazi modelinin özelliklerini işe koşarak yaptığı adımlar, kullandığı teknikler için doğrulayıcı gerekçelendirmeler sunduğu, bu doğrulayıcı ifadeleri genelleylebilmek için yürüttüğü bilişsel süreçlerin bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü durumlarda

Tablo 2. 9. *Veri analizinde değişken kavramı ile ilgili oluşumların görüldüğü durumlara ilişkin göstergeler*

Oluşumlar	Oluşumların Görüldüğü Durumlara İlişkin Göstergeler
Semiyotik oluşum	Harf, şekil, noktalar, boşluk, çubuk, daireler gibi farklı temsil edilen değişkenin aslında sayıyı temsil ettiğini gözünde canlandırabildiğinde Semiyotik araç: değişkeni temsil etmek için kullanılan herşey
Enstrümantal oluşum	Harf, şekil, noktalar, boşluk, çubuk, daireler gibi farklı temsil edilen değişkeni problemin çözümünde işe koşabildiğinde Teknoloik araç: içindeki sayıların görülmediği torba, kutu gibi nesneler
Söylemsel oluşum	Harf, şekil, noktalar, boşluk gibi farklı temsil edilen değişkenin özelliklerini kullanarak doğrulayıcı açıklamalar yapabildiğinde Teorik araç: değişkeni temsilen kullanılan harf, kutu, şekil, noktalar, çubuk gibi temsillerin özellikleri

‘Öğrencilerin matematiksel çalışmalarının oluşumların ikerli kombinasyonu ile oluşan düzlemleri boyutundan incelenmesi’ aşaması öğrencilerin matematiksel çalışmalarında bileşenleri görülen oluşumlarının birbiri ile etkileşimleri sonucu gözlemlenen düzlemler bakımından değerlendirildiği aşamadır.

Tablo 2. 10. Veri Analizinde Eşit İşareti ile İlgili Düzlemlerin Görüldüğü Durumlara İlişkin Göstergeler

Düzlemler	Düzlemlerin Görüldüğü Durumlara İlişkin Göstergeler
Semiyotik-Enstrümantal	Eşit işareti veya terazi modelini problemin çözümünde aktif bir şekilde işe koşarak kullandığı teknikler veya yaptığı eylemlerin doğrulayıcı açıklamalarını yapmaksızın yaptığı adımları ifade ettiği durumlarda
Semiyotik-Söylemsel	Eşit işaretini, farklı yorumlama biçimlerini problemin çözümünde işe koşarak kullandığı teknikleri doğrulayıcı açıklamalar ile ifade ettiğinde; kullandığı tekniğin altında yatan kuralı anlamlandırıp özel durumlarda kullanabildiğinde (tumdengelsel düşünme); kullandığı tekniği benzer problem durumlarına genellebildiğinde (tümevarımsal düşünme)
Enstrümantal-Söylemsel	Terazi modelini problemin çözümünde aktif bir şekilde işe koşarak kullandığı teknikleri doğrulayıcı açıklamalarla ifade ettiğinde; kullandığı tekniği terazi modelinin özellikleri, fonksiyonu ile ilişkilendirerek gerekçelendirebildiğinde; terazi modelinde işe koştuğu özelliği-fonksiyonunu benzer problem durumlarında kullanabildiğinde (tumdengelsel); terazi modelinde kullandığı tekniği farklı durumlarda da kullanabilecek şekilde genelleyerek bir kurala ulaşabildiğinde (tümevarımsal)
Semiyotik-Enstrümantal-Söylemsel (bütüncül-tamamlanmış bir çalışma)	Bir problem durumunda eşit işaretini veya terazi modelini sanki varmış gibi gözünde canlandırarak bir temsil üretme süreci; eşit işareti veya terazi modelinin problemin çözümünde aktif bir biçimde işe koşulduğu ve bazı tekniklerin kullanıldığı, bilişsel şemaların yeniden düzenlenme süreci ve terazi modeli fonksiyonu-özellikleri ya da eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerinin kullanılarak doğrulayıcı açıklamaların yapıldığı sürecin aynı anda tek bir matematiksel çalışmada görüldüğü durumda

Tablo 2. 11. Veri Analizinde Değişken ile ilgili Düzlemlerin Görüldüğü Durumlara İlişkin Göstergeler

Düzlemler	Düzlemlerin Görüldüğü Durumlara İlişkin Göstergeler
Semiyotik-Enstrümantal	Değişkeni temsilen kullanılan noktalar, harf, şekil, çubuk gibi farklı temsil biçimlerini problemin çözümünde işe koştuğunda yaptığı adımları, kullandığı teknikleri doğrulayıcı gerekçelendirmeler sunmaksızın ifade ettiğinde
Semiyotik-Söylemsel	Problemin çözümünde işe koştuğu içindeki sayıların görünmediği torba, kutu gibi nesnelerle ya da noktalar, şekil, harf, çubuk gibi farklı temsil biçimlerini kullanarak yaptığı adımları doğrulayıcı açıklamalarla ifade ettiğinde, gerekçelendirme sunabildiğinde
Enstrümantal-Söylemsel	Problemin çözümünde işe koştuğu içinde miktarı bilinmeyen çokluğu temsilen kullanılan torba/kutu gibi araçlarla yaptığı adımları ifade ederken yaptığı adımları, kullandığı teknikleri doğrulayıcı ifadelerle açıklayabildiğinde, gerekçelendirebildiğinde
Semiyotik-Enstrümantal-Söylemsel (bütüncül-tamamlanmış bir çalışma)	Bir problem durumunda değişkeni veya bir kutu/torba içindeki miktarı bilinmeyen çokluğu sanki varmış gibi gözünde canlandırarak bir temsil üretme süreci; değişken temsili veya içinde miktarı bilinmeyen çokluğun olduğu kutu/torbanın problemin çözümünde aktif bir biçimde işe koşulduğu ve bazı tekniklerin kullanıldığı, bilişsel şemaların yeniden düzenlenme süreci ve değişkenin fonksiyonu-özellikleri ya da farklı yorumlama biçimlerinin kullanılarak doğrulayıcı açıklamaların yapıldığı sürecin aynı anda tek bir matematiksel çalışmada görüldüğü durumda

‘Öğrencinin eşit işaretini yorumlama biçiminin incelenmesi’ aşaması öğrencilerin eşit işaretini ‘kesin işlemsel’ ‘esnek işlemsel’ ‘temel ilişkisel’ ‘karşılaştırmalı ilişkisel’ ‘ayırıcı’ yorumlama biçimlerinden hangisini kullandığının belirlendiği aşamadır. Eşit işaretinin farklı yorumlama biçimini değerlendirmede kullanılan göstergeler Tablo 2.12’de gösterilen Jones, Inglis, Gilmore ve Dowens (2012)’ın çalışmasından alınmıştır.

Tablo 2. 12. Eşit işaretini yorumlama biçimlerine ilişkin göstergeler

	Eşit İşaretinin Yorumlama Biçimleri	Yorumlama Biçimlerine İlişkin Göstergeler
İŞLEMSSEL	Kesin İşlemsel	İşlem-eşittir-cevap yapısına sahip ifade ve denklemlerde başarılı olan. Sadece işlemsel yapıya sahip olan ifade-denklemleri çözen, değerlendiren ve kodlayan. Örneğin: İşlemlerin solda olduğu: $a + b = c$
	Esnek İşlemsel	Eşit işaretinin sadece ‘işlem yap’ ‘sonuç yaz’ anlamının dışında ama işlemsel görünümle uyumlu ifade ve denklemleri başarıyla çözen, değerlendiren, kodlayan. Örneğin: $C=a+b$ veya $a=a$ ifadelerini doğru yorumlayan.
İLİŞKİSEL	Temel İlişkisel	Eşit işaretinin her iki tarafındaki işlemleri-denklemleri çözen sonra değerlendiren ve kodlayan. Örneğin: $a + b = c + d$ $a + b - c = d + e$
	Karşılaştırmalı İlişkisel	Eşitliğin iki tarafındaki ifadeleri karşılaştırarak başarıyla çözen ve değerlendiren. Eşitliğin iki tarafında da aynı işlemleri gerçekleştirmenin denkliği koruduğunu kabul eden. Eşittir kavramının ilişkisel yorumlanmasını en iyi yapan.
	Ayırıcı	sorunun sonu, ...sorunun başlangıcı, ...sayıları tekrarlamak için gibi ifadelerle eşit işaretinin görevini, amacını tanımlayan

‘Öğrencinin değişken kavramını yorumlama biçiminin incelenmesi aşaması’ öğrencilerin değişkeni ‘işlemsel’ ve ‘ilişkisel’ yorumlama biçimlerinin hangisinin kullanıldığının belirlendiği aşamadır. Değişkenin farklı yorumlama biçimini değerlendirmede kullanılan göstergeler Tablo 2.13’te gösterilen Gray, Loud ve Sokolowski (2009)’nin çalışmasından alınmıştır.

Tablo 2. 13. Değişkenin yorumlama biçimlerine ilişkin göstergeler

Değişkeni yorumlama biçimi	Göstergeler
İşlemsel	Belirli bir bilinmeyen temsilcisi olarak ele alındığında, Aritmetikten sabit değerli cebire geçişi yapabildiğinde, Değişkeni bir denklemi çözmek bir araç olarak kullanabildiğinde, Sayısal cevaplar elde etmek için denklemler üzerinde işlem gerçekleştirebildiğinde, Sadece sembolik manipülasyon olduğunda, Değişken tek bir değer olarak değerlendirildiğinde, Sayısal olarak yerine koyma yapıldığında.
İlişkisel	Cebirsel ifadeleri matematiksel ilişkilerin temsilcileri olarak, yapısal bir bakış açısıyla yorumladığında,

Bir cebirsel yapı üzerinde başka işlemlerin gerçekleştirilebileceği nesneleştirilmiş bir yapı olarak düşünüldüğünde, Eşit işaretinin her iki tarafında da bilinmeyen olduğu durumda denklemi çözdüğünde, Değişkenleri genelleştirilmiş sayılar ve değişen nicelikler olarak kullanıldığı ve yorumlandığında, İşlemlerin özelliklerinde değişkenlerin belirli bir sayıyı değil tüm sayıları temsil ettiği anlaşıldığında, $y=2x-1$ ifadesini iki değişken birbirine bağlı olarak değiştiriyor şeklinde yorumlayabildiğinde, Genelleştirilmiş sayı anlamıyla değişkeni kullanabildiğinde.

Yukarıdaki göstergeler alan yazından elde edilmiş göstergeler olmasının yanında bu çalışmaya uygunluğu bakımından da kullanılmasında iki alan uzmanı ve araştırmacı görüş birliğine varmışlardır. Toplanan veriler araştırmacının yanı sıra alanında uzman bir akademisyen tarafından bağımsız olarak MWS, eşitlik ve değişken kavramlarının farklı yorumlama biçimlerine ilişkin göstergeler bağlamında analiz edilmiş ve göstergelerin (kodlamaların) uyum sağladığı görülmüştür. Uyum sağlamayan göstergeler (kodlamalar) üzerinde ise derinlemesine tartışmalar yapılarak alanında uzman başka bir akademisyene de danışma yoluyla uzlaşma sağlanmıştır.

Çalışmamızda etik ilkeler dahilinde inanılır ve güvenilir olması için dikkat edilen unsurları şu şekilde ifade etmek mümkündür. Merriam'a göre (2013, s. 221) inanırılık ve güvenilirliğin geliştirilmesi için kullanılan stratejilerden biri olan üçgenleme, ortaya çıkan bulguların doğruluk ve gerçekliğinin kontrolü için birden fazla araştırmacı, çoklu veri kaynağı ya da çoklu veri toplama yönteminin kullanılmasıdır. Çalışmamızda da veri toplama aracı olarak bireysel uygulama, bireysel görüşme ve grup görüşmelerinde zoom uygulamasının video, ses ve ekran kaydından; öğrencilerin etkinlik ve alıştırmalara verdikleri cevabın yer aldığı whatsapp uygulaması ile gönderilen fotoğraflardan, öğretmen günlüklerinden yararlanılmıştır. Merriam'a göre (2013, s. 221) inanırılık ve güvenilirliğin geliştirilmesi için kullanılan stratejilerden bir diğeri olan veri toplama aşamasına uygun ve yeterli katılım ile anlatılmak istenen çelişkili ve olumsuz durumların aranmasını da kapsayabilecek bir biçimde belirli bir doyumluğa ulaşana kadar veri analizine devam edilmesi ve bu iş için yeterli zaman harcanmasıdır. Çalışmamızda da hem pilot uygulama hem de esas uygulama ile dörder öğrencinin öğretim sürecindeki verilerinin toplanması ve bilişsel süreçlerinin analizi ile uygun ve yeterli katılım sağlanmıştır. Merriam'a göre (2013, s. 221) inanırılık ve güvenilirliğin geliştirilmesi için kullanılan stratejilerden bir diğeri olan uzman

incelemesi/değerlendirmesi ile anlatılmak istenen çalışma sürecinde ham veriler ile ortaya çıkmaya başlayan bulguların birbiriyle örtüşme ve uyumunun meslektaşlarla görüşülerek tartışılması aşamasıdır. Çalışmamızda da verilerin analizinde yararlanılan göstergelerin belirlenmesi aşamasında iki alan uzmanıyla uzlaşma sağlanmıştır.



3. BULGULAR

Çalışmanın bu bölümü MWS (matematiksel çalışma uzayı) teorik çerçevesinden yararlanarak aritmetikten cebire geçiş sürecinde eşit işareti ve değişken kavramına yönelik tasarlanan matematiksel çalışmada öğrencilerin bilişsel süreçlerinin kişisel çalışma uzayı (kişisel MWS) ile ilgili bulgularını içermektedir. Kişisel çalışma uzayları bağlamında bulgular ele alındığından çalışmada yer alan dört öğrenciye ait bulgular ayrı başlıklar altında yer alacak, öğrencilerin çalışma boyunca gelişimsel süreçlerini, zorluklarını, karakterlerini ortaya çıkaracak şekilde EK-5’de verilen etkinlikler, alıştırmalar ve EK-6’da verilen görüşme sorularından elde edilen veriler ışığında sunulacaktır.

Her bir öğrenci için eşit işaretine ilişkin bulgular dört adımda oluşturulan öğretim deneyinin her bir adımı için iki bölümde verilecektir. İlk bölüm öğrencilerin aritmetikten cebire geçişlerinde ilişkisel yorumlamalarını desteklemek amacıyla tasarlanan uygun MWS’nın yöntem bölümünde detaylı olarak verilen temalara göre ‘kavramsal anlama: denge, simetri, aynılık’ ve ‘bağlamsal anlama/kullanma: farklı temsil kullanımı, temsiller arası geçiş’ başlıkları altında sunulacaktır. İkinci bölüm ise oluşumlar ve düzlemler bağlamında aktarılan öğrencilerin kişisel matematiksel çalışma uzaylarını içermektedir.

Her bir öğrenci için değişken kavramına ilişkin bulgular ‘değişken kavramının işlemsel yorumunu anlamlandırmaya yönelik’ ve ‘değişken kavramının ilişkisel yorumunu anlamlandırmaya yönelik’ olmak üzere iki başlık altında oluşumlar ve düzlemler bağlamında aktarılan öğrencilerin kişisel matematiksel çalışma uzaylarını içermektedir.

3.1.Eşit İşaretinin İlişkisel Yorumlanmasına İlişkin Bulgular

Bu bölümde her bir öğrencinin eşit işaretinin ilişkisel yorumlanmasına ilişkin kişisel matematiksel çalışma uzayları sunulmuştur.

3.1.1. Kayra’nın matematiksel çalışma uzayı

Bu bölümde Kayra’nın matematiksel çalışma uzayı araştırmanın öğretim deneyi döngülerindeki adımlar doğrultusunda 1. Adım:İlk değerlendirme, 2. Adım:Etkinlik-1

ve ilişkili alıştırmalar, 3. Adım:Etkinlik-2 ve ilişkili alıştırmalar ve 4. Adım:Son değerlendirme bağlamında sunulmuştur.

3.1.1.1.Birinci adım: ilk değerlendirme

Bu bölümde Kayra'nın matematiksel çalışma uzayı, 1. Adım: ilk değerlendirme sürecindeki kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları ve matematiksel çalışma uzayına ilişkin bulguları olmak üzere iki başlık altında sunulmuştur. Bununla beraber her iki başlıkta da Kayra'nın 1. Adım:ilk değerlendirmede yer alan soruların analizi sonucu ortaya çıkan temaları bağlamında bulgularına yer verilmiştir.

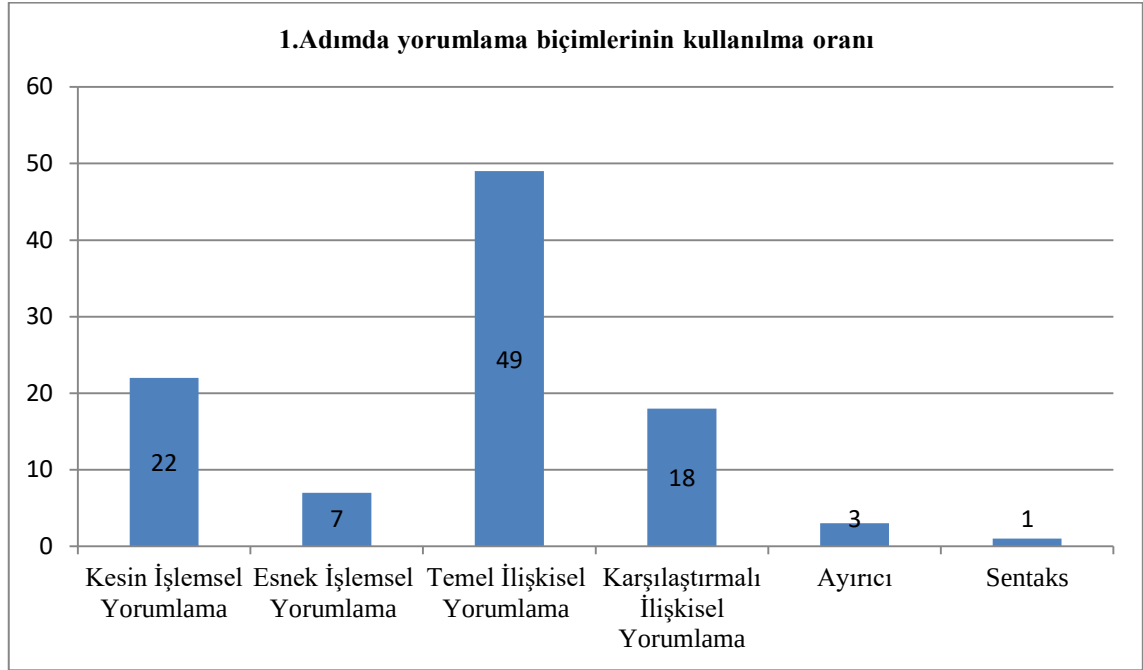
3.1.1.1.1. Kayra'nın kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları

Kayra'nın ilk değerlendirme sürecinde eşit işaretini yorumladığı durumlar incelendiğinde farklı yorumlama biçimleri olduğu görülmüştür. Bu yorumlama biçimlerinin sorulara göre dağılımı ile Tablo 3.1. ve Grafik 3.1. elde edilmiştir. İlk değerlendirme sürecinde Kayra'nın ağırlıklı olarak temel ilişkisel yorumlama (3. Düzey) kullandığı (%49 oranında) görülürken; sonrasında onu sırasıyla %22 oranıyla kesin işlemsel (1. Düzey), %18 oranında karşılaştırmalı ilişkisel (4. Düzey), %7 oranında esnek işlemsel (2. Düzey) yorumlama, %3 oranında ayırıcı ve %1 oranında da anlamından uzak yalnızca şekil olarak yorumlama (sentaks) takip ettiği görülmüştür.

Tablo 3. 1. Kayra'nın ilk değerlendirmede eşit işaretini yorumlama biçimleri ve sorulara göre dağılımı

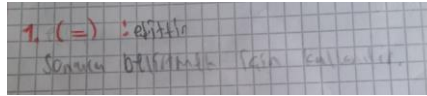
Eşit İşaretini Yorumlama Biçimi	İ.D.S.1	İ.D.S.2	İ.D.S.3	İ.D.S.4.	İ.D.S.5.	İ.D.S.6.	İ.D.S.7.	İ.D.S.8.	İ.D.S.9.	İ.D.S.10.	İ.D.S.11.	İ.D.S.12.
Kesin İşlemsel Yorumlama	4		2				6	1	13	3	6	1
Esnek İşlemsel Yorumlama	1				5	2	4					
Temel İlişkisel Yorumlama	1		16	4	2	11	8	8	8	14	4	5
Karşılaştırmalı İlişkisel Yorumlama			12	8		1	3	1	1	4		
Ayırıcı	2		2									
Sentaks	1											

Grafik 3. 1. Kayra'nın ilk değerlendirmede yorumlama biçimlerini kullanma oranı



Eşit '=' işaretini anlamlandırmaya yönelik bulgular (1.,2.,3.,5. ve 11. Sorular):

Eşit işaretinin anlamının sorulduğu $7+3=10$ sorusunda Kayra'nın bireysel uygulamada Görsel 3.1'de verildiği gibi sadece eşit işaretinin sonucu belirtmek için kullanıldığını ifade etmiş olması eşit işaretini kesin işlemsel yorumladığı şeklinde değerlendirilmiştir.



Görsel 3. 1. Kayra'nın bireysel uygulamada verdiği cevap

Bireysel görüşme sırasında ise araştırmacının yönelttiği derinlemesine sorulardan sonra ayırıcı ve temel ilişkisel yorumlamayı gerektiren cevaplar da verdiği görülmüştür. Örneğin eşit işaretini $2+1=1+2$ örneğini vererek kullanmış olması temel ilişkisel düzeyde bir yorumlama olarak ele alınmıştır.

Araştırmacı: İşlem olmak zorunda mı illa eşittir kullanacağımız zaman?

Kayra: Hayır.

Araştırmacı: İşlemsiz nasıl kullanılır?

Kayra: Hocam mesela bir tane bizim yaptığımızdan örnek verebilir miyim?

Araştırmacı: Tabi.

Kayra: Onu bulmam lazım ama. (bu sırada defterinde yazdıklarından arıyor.)

Araştırmacı: Tamam.

Kayra: Mesela beşinci soru gibi. 3 eşittir 3. Yani şu sayı şu sayı toplamı eşit. İki şeyin toplamı 3 olmalıdır gibi.

Araştırmacı: hmmm 3 eşittir 3 te onun gibi mi? Senin söylediğin gibi mi? Senin dediğin gibi mi yapılmış 3 eşittir 3'te?

Kayra: Onunki 2 tane işlemli gibi. Neden çünkü 2 artı 1, 1 artı 2 gibi yapılabilir. Başka sayılarla da yapılabilir.

Kayra, $7+3=10$ şeklinde aritmetik işlem ve eşit işareti içeren ifadede, ifadeyi sözel olarak açıklarken eşit işaretini farklı terimlerle desteklememiş; eşit işaretinin amacını sonucu belirtmek, bir şeyleri göstermek, bir şeyi işaret etmek, sayılar karışmasın diye şeklinde belirtmiştir. Kayra'nın eşitliğin iki tarafında da işlem olması durumunda eşitliği anlatmak için kullandığı kelimeler genellikle sınırlı olmuştur. Karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanmayı gerektiren bu tarz sorularda eşitlik kavramına çok değinmeden birinden alıp birine vermeyi bir algoritma olarak kullanmıştır. Kayra'nın eşit işareti için kullandığı ifade: 'aynı sonuç' olurken; eşit olmayan durumları anlatmak için kullandığı kelime de 'tutmuyor' olmuştur. Kayra'nın esnek işlemsel yorumlamayı gerektiren sorularda eşit işaretinin yerine bu anlamı sağlamak adına 'aynı' kelimesini kullandığı görülmüştür.

Araştırmacı: Tamam. Hala aynı şeyi mi düşünüyorsun? Sonucu belirtmek için mi kullanılır diye düşünüyorsun?

Kayra: Evet hocam.

Araştırmacı: Peki eşittirin burada sonucu belirtmenin dışında başka bir görevi var mı sence başka bir amacı?

Kayra: (biraz durdu düşündü) olabilir hocam ama ben böyle yazdım...

Araştırmacı: Hmmm olabilir dediğin mesela ne olabilir diye düşünüyorsun? Yani burada eşittir şu amaçla da kullanılmış olabilir. Şu işe de yarıyor olabilir dediğin bir şey var mı?

Kayra: Şu.... İııııı (düşünüyor)

Araştırmacı: Ne aklından geçiyorsa söyleyebilirsin.

Kayra: Bir şeyleri göstermek için.

Araştırmacı: Nasıl mesela?

Kayra: Bir sayıyı. Bir şeyi işaret etmek için kullanılabilir.

Eşit işaretinin anlamlandırılmasına yönelik farklı eşitlik durumlarının verildiği 3. soruda da Kayra'nın daha çok temel ilişkisel yorumlar yaptığı görülmektedir. Özellikle Kayra'ya karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamaya yönlendirecek sorular yöneltildiğinde de temel ilişkisel yorumlamayı kullanmayı tercih ettiği tespit edilmiştir. Örneğin, eşitliğin iki tarafındaki sayıların toplamalarının eşit olmasını sağlamaya çalıştığı, temel ilişkisel yorumlamayı kullandığı; 80 ile 92'yi toplayıp elde ettiği 172'yi elde etmek için 100 ve 72'yi kullandığı Görsel 3.2'de verilen cevaplarından da görülmüştür. Eşit işaretinin kullanılmadığı 2. soruda parantezli bir işlemi tanımlaması istendiğinde ise sonuç bulma konusunda isteksiz olduğu sürece odaklandığı görülmüştür.

Araştırmacı: Bana bunların toplamını farklı şekilde yazar mısın 80'le 92'yi?

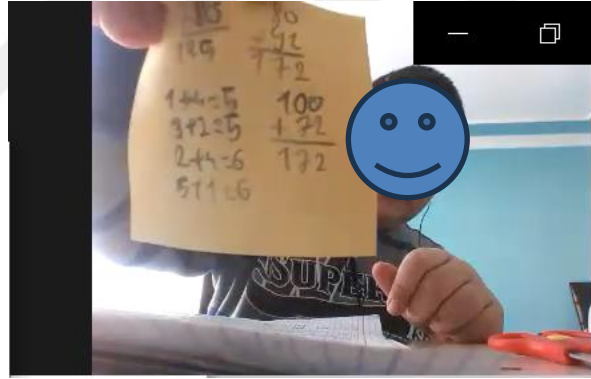
Kayra: (hemen kağıda yazmaya başladı) Hocam hızlıca bir cevap bulayım burada.

Araştırmacı: Tamam.

Kayra: Yaptım hocam ama pek oldu mu? (kararsız)

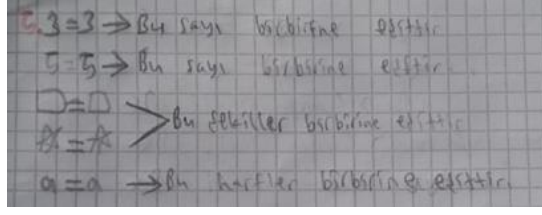
Araştırmacı: Nasıl yaptın bakayım?

Kayra: 172.



Görsel 3. 2.Kayra'nın soru-3'te öğretmenin sorduğu ilave sorulara ilişkin cevabı

Kayra'nın eşit işaretinin anlamlandırılmasına yönelik verilen iki sayının, iki harfin, iki şeklin eşitliği gibi farklı örnek durumlarda eşit işaretini açıklanması istendiğinde esnek işlemsel yorumlar yaptığı düşünülmüştür. İki harfin ya da iki şeklin eşit olduğu durumlarda değişkenlerin birer sayıyı temsil ettiğini hissedebildiği görülmüş; bununla beraber bireysel görüşmede 'a=b' gibi bir örnek verip bu örnekte sayılardan birini 10+5, diğerini de 12+3 şeklinde tanımlayarak esnek işlemsel yorumlamada da temel ilişkisel yorumlamayı düşünme sürecine dahil ettiği görülmüştür.



Görsel 3. 3. Kayra'nın soru-5'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Peki buradaki harfler ne. Mesela a eşittir a. Ne demek istiyor orada?

Kayra: Şu sayıyı da mesela a harfi ile şöyle olabilir a harfi eşittir b harfi. Mesela a harfi ile b harfinin sayıları eşitmiş. Yani a harfi 10 olsa....

Araştırmacı: Bir de iki farklı harf kullandın. Olur mu öyle? İki farklı harf kullandın a ve b diye sonra da dedin ki bunların sayıları birbirine eşit dedin.

Kayra: Olabilir ama gene mesela şey yaptığımız gibi nasıl göstereyim. 10 artı 5 olur diğeri. Diğeri de 15 bulmuş oluruz gene. Buna da ne diyebiliriz. 12 artı 3 olur gene 15 bulmuş oluruz.

İşlem-eşittir-cevap yapısına sahip zincir işlemleri içeren yanlış bir ifadenin değerlendirilmesinin istendiği 11. sorudaki ' $6 + 9 = 15 : 3 = 5 + 2 = 7$ ' ifadesinde Kayra eşit işaretinin kesin işlemsel yorumlanmasını sorunun çözümünde işe koşabilmiş ancak eşit işaretinin diğer yorumlama biçimlerini aynı zamanda işe koşamadığı için soruyu yanlış çözdüğü görülmüştür. Soruda temel ilişkisel yorumlamayla eşitliğin doğru çıkmadığının farkında olmasına rağmen kesin işlemsel yorumlamayla doğru olduğundan bu yazılan ifadenin doğru olduğunu değerlendirmiştir. Eşit işaretinden sonra yazılan sayı eğer eşit işaretinden önce yapılan işlemlerin sonucunu içeriyorsa eşit işaretinin kesin işlemsel yorumlamaya uygun olduğunu düşündüğü ve ifadenin doğru olduğuna karar verdiği görülmüştür. Eşit işaretinin ve sayıların yerlerine bakarak hangi yorumlama biçimi için ifade doğru oluyorsa sadece o yorumlama biçimiyle yorumlayıp diğer yorumları görmezden geldiği görülmüştür.

Araştırmacı: Heee anladım şimdi. 15 olmuyor aynen öyle. Ama biz gene de doğru diyoruz. Yani ben şeye karar veremedim Kayra. Bazen eşittiri sadece sonuç yazmak için kullanıyoruz diyoruz. Sadece ona bakıyoruz. Ama bazen diyoruz ki eşittir diyoruz ikisinin de eşit olması gerekiyor. O yüzden kullanılır diyoruz. Yani ne zaman eşittiri nerede kullanacağız ben onu anlayamadım. Yani hangi amaçla kullanırsam kullanayım. Doğru çıkması gerekmiyor mu? Neden bir amaçla kullanınca doğru çıkıyor öteki amaçla kullanınca yanlış çıkıyor?

Kayra: Mesela eşittir olması gereken bir şey var. Onu işaretin sonunda yani işlemlerin sonunda kullanırız veya şeyleri belirtmek için kullanırız. Ayırştırmak için yani iki sayının toplamını bulmak için.) bunun gibi. Ama burada sadece toplama işleminin sonunda kullanılmış.

Araştırmacı: Hmmm

Kayra: Karşılaştırmak için hangi sayının eşit olduğunu belirtmek için kullanılmamış. Buradaki eşittirde.

Araştırmacı: Nasıl anladın yani onu?

Kayra: Şey ilk önce yerlerine baktım.

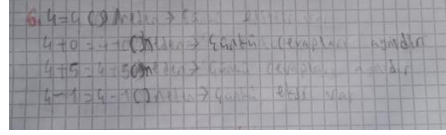
Araştırmacı: Hmmm

Kayra: 6 artı 9 eşittir 15. 15 bölü 3 eşittir 5. Artı iki eşittir 5 (5 değil 7 demesi lazımdı.) yani hep sonucun öncesinde kullanılmış.

‘ $6 + 9 = 15 : 3 = 5 + 2 = 7$ ’ gibi çok sayıda ikili işlemler ve aralarında eşit işareti olması durumunda eşit işaretinin amacını bireysel görüşmede açıklarken: ‘cevabı vermek, sonucu belirtmek, şeyleri belirtmek için, ayırştırmak için, iki sayının toplamını bulmak için, hangi sayının eşit olduğunu karşılaştırmak için, ifadelerine yer verdiği görülmüştür. Eşit işareti dair: ‘işlemlerin sonunda kullanılır, sonucun öncesinde kullanılır, eşittirin yerine bakılmalı’ gibi ifadeleri de kullandığı görülmüştür.

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik bulgular (4., 6., 7. ve 8. sorular):

$a=a$, $a+0=a+0$, $a+b=a+b$, $a-b=a-b$ formatındaki eşitliklerin doğruluğunun değerlendirilmesinin istendiği 6. soruda, Kayra eşit işaretinin doğru kullanılıp kullanılmadığını belirlerken temel ilişkisel yorumlamayı kullandığı, derinlemesine sorularla farklı yolla yapıp yapamayacağı sorulduğunda da karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamanın aklına gelmediği, başka bir yolla yapılamayacağını ifade ettiği görülmüştür. Örneğin $4+5=4+5$ sorusunda eşitliğin doğruluğuna eşitliğin iki tarafında da aynı sayıların ve aynı işlemin olması durumunu gerekçe olarak sunmaktansa Görsel 3.4’te ve bireysel görüşmeden verilen alıntıdan görüldüğü gibi 4 ve 5’i toplayıp elde ettiği cevapların aynı olması ile açıklamış olması eşit işaretini temel ilişkisel yorumladığının bir göstergesi olarak değerlendirilmiştir.



Görsel 3. 4. Kayra'nın soru.6'ya ilişkin cevabı

Araştırmacı: Peki gene toplamadan yapabilir miyiz bu soruyu? Mesela sen burada 4'le 5'i toplayıp 9 diye sonuç buluyorsun ya. Öyle bir sonuç bulmadan eşittir tabi canım. Çünkü.... Diyebilir miyiz? Bir şeyler bir şeyler.

Kayra: Şey diyemeyiz bence. Çünkü direk kafamızdan sallarsak gene yanlış çıkar ama illa ki toplamamız gerekiyor. Yanlış çıkmasını istemezsek.

Araştırmacı: O zaman bir toplama işlemi gördüğümüzde bu tarz sorularda mutlaka toplamalıyız.

Kayra: Evet. Cevabı yapmak için ve kafamızdan sallamamak için.

Araştırmacı: Aynen. Biz mesela yukarıda başka bir taktik kullanmıştık. İşte birinden aldık ötekine verdik falan filan demiştik. O zaman hiç toplamak zorunda kalmamıştık. Burada da Araştırmacı: benzer bir taktik kullanabilir miyiz? Ya da farklı da olabilir. Bilmiyorum ama işte toplama işlemi yapmak zorunda kalmayalım.

Kayra: Gene 6 artı 3 dokuz ediyor. Diğerlerine de bakacağım. Bu sefer başka bir şey almaya çalışıyorum. 8 artı 1 gene 9 ediyor. Bunun gibi.

Standart eşitlik ifadesinden başlayarak $a=a$ 'yı elde edinceye kadar giden adımları içeren 7. sorudaki eşitliklerin doğruluğunu belirlerken bireysel soru çözümünde Görsel 3.5'te görülen Kayra'nın verdiği cevaplardan yola çıkarak kesin işlemsel, esnek işlemsel, temel ilişkisel yorumlama kullandığı ama karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanmadığı kabul edilmiştir. Aşağıda Kayra'nın bireysel soru çözümünde verdiği cevaplar incelendiğinde standart formatta verilen $7+5=12$ eşitliğinde ifadenin doğru olduğunu düşündüğü çünkü toplama işleminin sonucunun doğru olduğunu söylediği görülmüştür. Bu durum Kayra'nın eşit işaretini kesin işlemsel yorumladığı yönünde değerlendirilmiştir. $7=12-5$ ve $7=7$ sorularında eşit işaretinin sonuç yazma anlamından farklı olarak yorumlayabildiği görüldüğünden esnek işlemsel yorumlamayı kullanabildiği kabul edilmiştir. $7+5-5=12-5$ adımıyla sonuçları hesaplayıp aynı çıktığını gördüğünden temel ilişkisel yorumlamayı kullandığı kabul edilmiştir. Ancak bu sorularda karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanmadığı Görsel 3.5'te Kayra'nın soru-7'ye ilişkin cevabından yola çıkarak kabul edilmiştir.

Görsel 3. 5. Kayra'nın soru-7'ye ilişkin cevabı

Karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı desteklemek amacıyla hikâyeleştirmeyi kullanması istendiğinde işlemlerin sırasına ve sayılara dikkat etmeksizin kendi uyarladığı işlem sırasına göre hikâye kurduğu; matematiksel doğruluğa, işlem önceliğine dikkat etmeksizin hikâyeleştirme yaptığı görülmüştür. $27-48+48=27$ sorusunda işlem önceliğine göre yapacak olsa 27'den 48'i çıkarması gerekirken negatif tam sayıları bilmediğinden çıkaramadığı; çıkarma işlemini yapamayınca bu durumu hikâyeleştirmekte de zorlandığı görülmüştür. İşlemini yapabildiği soruları yani $48-27$ gibi büyük sayıdan küçük sayıyı çıkarmayı gerektiren sorularda hikâyeleştirebilirken $27-48$ gibi küçük sayıdan büyük sayıyı çıkarmayı gerektiren soruda karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanamadığı bireysel görüşmede görülmüştür.

Araştırmacı: Heee mesela şeyi nasıl anlatırsın peki. Mesela 10 tane yumurtam vardı 2 tanesini kırdım.

Kayra: Normalde 10 tane yumurtam vardı pazartesi günü 2 tanesini yedim. Salı günü 4 tanesini daha yedim olur.

Araştırmacı: Aynen öyle. Yedimi ama sen matematikte nasıl anlarsın. Yediyse arttı diye mi söylersin..

Kayra: Eksi

Araştırmacı: Heh eksisi diye söylersin. Buradaki eksiyi de öyle anlat. Yani çikolatalardan 48 tanesini bir şey yap yani ne yapmak istersen. İstiyorsan birisine ver. İstersen ye bitir.

Kayra: 27 tane çikolatam vardı. Öyle olur mu bilmiyorum hocam ama. Diğer gün 48 tane şekerim oldu.

Araştırmacı: Ama gene oldu dedin bak. Eksiltmedin eksiden bahsetmedin gene.

Kayra: Hocam şey oldu topladım yani topladım.

$7+5=12$; $7+5-5=12-5$; $7=12-5$; $7=7$ sorusunda eşitliğin iki tarafında da işlemin olduğu karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayla değerlendirilebilecek durumda eşit işaretinin amacı sorulduğunda 'o sayıyı belirtmek, bulduğu sayıyı belirtmek' olduğunu ifade ettiği; aynı zamanda eşittir terimi yerine 'cevabı aynı, sonuçları değişmiyor, sonuçlar bozulmuyor' ifadelerine yer verdiği görülmüştür. İki tarafında işlem ve ortada

eşittirin olduğu matematiksel bir ifadeyi sözel olarak hikâyeleştirirken eşitlik kavramına hikâyede yer vermeksizin eşitliğin solu ve sağındaki işlemleri hikâyeleştirdiği bireysel görüşmede görülmüştür.

Araştırmacı: Sen bu soruyu çözerken benim de aklıma şey geldi acaba bu soruyu bir hikaye gibi anlatsan mesela 7 artı 5, 12 olur. 12'den de 5 çıkarırız falan değil de 7 tane..... mı... (düşünüyorum) ne olsun...

Kayra: 7 tane elmam vardı. 5 tane daha topladım.

Araştırmacı: Tamam.

Kayra: Ondan sonra 5 tanesini yedim. Ertesi gün 12 tane toplamıştım. 5'ini yedim gibi olabilir.

Farklı tiplerdeki eşitliklerin doğru ya da yanlış olduğunu belirlemesinin istendiği 8. sorudaki $8+9=(8+2)+(9-2)$ eşitliğinde de Kayra Görsel 3.6'da görüldüğü gibi temel ilişkisel yorumlamayı tercih etmiştir. Eklenen ve çıkarılan sayıların aynı olması durumunda baştaki sayının değişmeyeceğini göremediğinden '2' olarak verilen sayının '3' olması durumunda nasıl bir değişim olacağını yorumlayamamış, genelleyememiş; eşitliğin bozulmayacağını farkedemediği bireysel görüşmelerde görülmüştür. Öğretmen rehberliği ve ardışık benzer örneklerden sonra karşılaştırmalı ilişkisel yorumlayabilmiş, bu durumu farklı sayılar için de genelleyebilmiştir. Genellemeye varabilmesi için sınırlı sayıyı denemesinin yeterli olacağını düşünmüş; öğretmen rehberliği ve sorulardan sonra da genelleme yapmak için sınırlı sayıda örneğin yetmeyebileceğini tüm sayıların denenmesi gerektiğini iddia etmiştir.

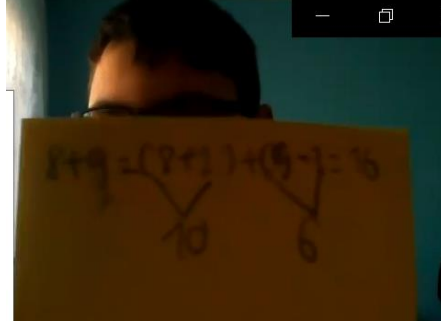
Araştırmacı: Heh ben de onu diyecektim. 3 olsaydı olmayacak mıydı acaba? Bir onu... nasıl anlayacağız yani? 3 olsaydı acaba eşit çıkmayacak mıydı?

Kayra: Çıkmayacaktı hocam ama kalemim düştü.

Araştırmacı: Tamam sen bir al bakalım.

Kayra: Gene aynı işlemi yapıyorum.

Araştırmacı: Tamam. İstersen böyle sesli bir şekilde söyleyebilirsin. Yani şöyle iki ekledim 3 çıkardım falan filan gibi.



Görsel 3. 6. Kayra'nın soru-8'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: 8'le 2'yi toplamışsın galiba. O 2 mi?

Kayra: 2.

Araştırmacı: Hmmm 2 değil diğer tarafta ne var? 3'ü çıkarmışsın galiba. Ama bu sefer bir ikiyi eklemişsin bir üçü çıkarmışsın. Farklı sayılar seçmişsin. Bir iki yapmışsın bir 3 yapmışsın. Burada ikisi de ikiydi.

Kayra: Hocam değiştireyim mi?

Araştırmacı: Bilmem ki burada ikisinin de iki olması acaba bir ipucu mu? Yani ikisi de aynı olmalı mı?

Kayra: Hocam tekrar aynı oluyor. 17 çıkıyor. (kağıda işlem yaparak karar veriyor hep)

Araştırmacı: Peki 3 verdin gene 17 çıktı. Bu bir tesadüf mü? 3'e mi denk geldi? 4 verseydin gene 17 çıkacak mıydı mesela?

Kayra: (kağıda baktı şöyle bir. bu sefer işlem yapmaya zaman kalmadan) anladım hocam neden biliyor musunuz?

Araştırmacı: Neden?

Kayra: 9'dan mesela 3'ü alıyoruz orada 8'e veriyoruz.

Araştırmacı: Mmm ikide de mi öyle?

Kayra: Evet.

Araştırmacı: 4'te de öyle olacak mı?

Kayra: Evet 9'dan 4'ü alıyoruz 5 kalıyor o 4'ü 8'e veriyoruz.

[...]

Araştırmacı: Yani hepsinde doğru çıkıp çıkmayacağını kesin bir şekilde söyleyebilir miyim? Söyleyemez miyim? Ya da ne düşünüyorsun o konuda?

Kayra: Bence söyleyebiliriz hocam

Araştırmacı: Tamam. Neden öyle düşünüyorsun peki?

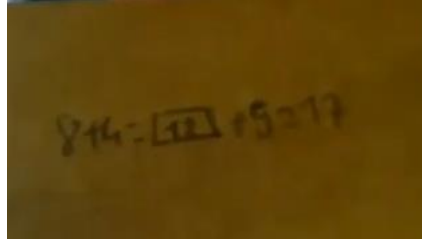
Kayra: 3'le 4'ü de denedim. 1'i de denedim. 2'yi zaten orada denemiş. Hepsi de doğru çıkmış. Bu tesadüf...

Araştırmacı: Olamaz mı?

Kayra: Olamayacağına göre.

Eşitliği sağlayan eksik değeri bulmaya yönelik bulgular (9., 10. ve 12. sorular):

$8 + 4 = \blacksquare + 5$ (Behr, Erlwanger and Nichols, 1980) şeklinde verilen 9. soruda eşit işaretinden hemen sonra bilinmeyene yer verildiğinde, bilinmeyi hesaplarırken eşit işaretini sadece kesin işlemsel yorumladığı bireysel görüşmelerde görülürken; bilinmeyi yanlış hesapladığı Görsel 3.7’de görülmüştür.



Görsel 3. 7. Kayra'nın soru-9'a ilişkin cevabı

Araştırmacı: Şurada bir tane eşittir var. (8+4’ten sonra gelen eşit işaretini ekranda yuvarlak içine alıyorum)

Kayra: Ama onun sonucu olmadığı için. 8 artı 4’ün sonucu olmadı gibi.

Araştırmacı: Hmmm.

Kayra: Yani sonucu yok. Orada bir sonucu olmadan eşittirin amacı olmaz. Amacı.

Araştırmacı: Hmmm o zaman sonucu 12 mi oluyor peki burada?

Kayra: Evet 8 artı 4, 12. Burada artı 5 dediği için Ben de 12’yle 5’i topladım ve 17 buldum sonucu. En son sonucunu.

Araştırmacı: Peki eşittirin başka bir amacı daha var diyordun sen. Bir diyordun sonucu yazmak için diyordun bir de diyordun iki tarafın eşit olduğunu göstermek için gibi bir şey söylüyordun hatırlıyor musun?

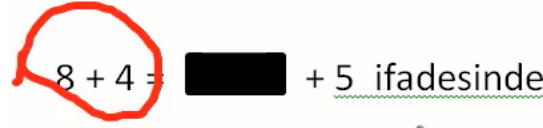
Kayra: Evet.

Araştırmacı: O zaman burada eşittirin öteki amacı mı kullanılmış? Yani sonucu yazmak için kullanılan amacı mı kullanılmış?

Kayra: Evet sonucu yazmak için kullanılan şey kullanılmış.

$8 + 4 = \blacksquare + 5$ sorusu gibi eşit işaretinin iki tarafında da işlem olduğu ve eşit işaretinden hemen sonra bilinmeyen yer aldığı durumlarda da eşit işaretinin amacını sonuç yazmak olarak belirttiği; bununla beraber eşit işaretinin amacının sonuç yazdıktan sonra bir de yanındaki sayı ile işlem yap anlamında ileri yönlü hareketi de sağladığını düşündüğü bireysel görüşmede görülmüştür.

Araştırmacı: peki burada ne demek istemiş o zaman. Sen 8 artı 4’ü topla. Sonra ne yap demiş?


$$8 + 4 = \boxed{} + 5$$

Görsel 3. 8. Kayra'ya soru-9 ile ilgili öğretmen sorusu

Kayra: O sonucu bulunca 5'le topla.

Araştırmacı: Hmmm anladım şimdi.

$8+6+9=8+\dots\dots\dots$ gibi eşit işaretinin iki tarafında da işlem olduğu ve bir tarafında bilinmeyen yer aldığı sorularda – bilinmeyen eşit işaretinden hemen sonra yer almadığı durumlarda- eşit işaretinin varlığını bireysel görüşme sırasında ‘eşitler, cevabı aynı olmalı, aynı’ ifadeleri ile anlattığı görülmüştür. Bu çalışmaya kadar eşit işaretinin solu-sağı veya öncesi-sonrası ifadelerine yer vermeyen Kayra’nın bu çalışmada eşit işaretinden sonrası ifadesini kullandığı görülmüştür. Eşit işaretinin bulunduğu yere vurgu yapıp eşit işaretinin işlemlerin arasında olması durumunda toplamaların eşit olması gerektiği, cevapların aynı olması gerektiği ifadelerine yer verdiği görülürken; eşit işaretinin işlemlerin sonunda olması durumunda sonuç belirtmek için kullanıldığını ifade ettiği görülmüştür. Eşit işaretini kesin işlemel ve temel ilişkisel yorumladığı durumlarda eşitlik kavramını ya da eşdeğer destekleyici terimlerini kullandığı görülürken karşılaştırmalı ilişkisel yorumladığı durumlarda eşitlik kavramını ya da destekleyici terimlerini bireysel görüşmede neredeyse hiç kullanmadığı görülmüştür.

Araştırmacı: Nasıl anlayacağım yani ben eşittiri ne amaçla kullanmam gerektiğini?

Kayra: Hocam şöyle olabilir mesela 9 artı 7 eşittir 10 artı 6 yazalım. Ortadaysa onların cevaplarının aynı olması gerekiyor (eşit işareti ortada kalıyorsa demek istedi). Bir işlemin sonundaysa ise toplama işleminin sonucunu belirtmek için kullanılıyor. Oradan anlayabiliriz.

10. soruda verilen farklı tiplerdeki eksik ifadeyi bulması istenilen eşitliklerde bilinmeyenlerin eşit işaretinden hemen sonra olmadığı durumlarda Kayra’nın bilinmeyeni temel ilişkisel yorumlamayla doğru bir şekilde hesaplayabildiği (Görsel 3.9); bilinmeyenlerin eşit işaretinden hemen sonra olmadığı durumlarda eşit işareti ve değişken kavramını problemin çözümünde anlamlı bir şekilde işe koşabildiği Görsel 3.9’da ve bireysel görüşmelerde görülmüştür.

Kayra: Ona göre Toprak... Çınar'ın kaç bilyesi vardır. Diyor ya ben de o cevabı buldum. 5 bilyesi.

Sözel verilen durumun cebirsel temsilini öncesinde yanlış belirlediği; derinlemesine sorulardan sonra eksik değeri hesaplayabildiği; sözel durumu cebirsel olarak doğru temsil edebildiği ve eksik değeri bulurken eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlanmasını kullandığı görülmüştür.

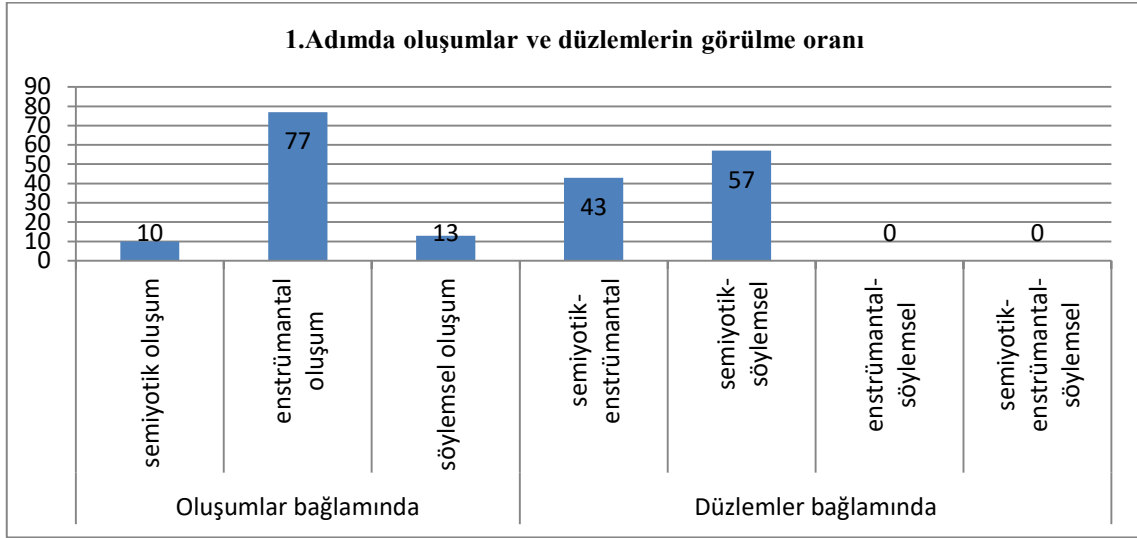
3.1.1.1.2. Kayra'nın matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları

Kayra'nın 1. Adım: ilk değerlendirme süreci oluşumlar ve oluşumların ikiyeşerli kombinasyonu bağlamında incelendiğinde Tablo 3.2 ve Grafik 3.2 elde edilmiştir. İlk değerlendirme sürecinde %77 oranla enstrümantal oluşum, %13 oranla söylemsel oluşum, %10 oranla semiyotik oluşum sürecinin bileşenlerinin görüldüğü; %57 oranla Kayra'nın çalışmalarının semiyotik-söylemsel düzlemde, %43 oranla semiyotik-enstrümantal düzlemde yer aldığı, enstrümantal-söylemsel düzlemde yer alan ve bütüncül çalışmaların görülmediği söylenebilir.

Tablo 3. 2. Kayra'nın ilk değerlendirmede oluşumlar ve düzlemlerin sorulara göre durumu

Eşit işaretinin yorumlanmasında oluşumlar ve düzlemler		İ.D.S.1	İ.D.S.2	İ.D.S.3	İ.D.S.4	İ.D.S.5	İ.D.S.6	İ.D.S.7	İ.D.S.8	İ.D.S.9	İ.D.S.10	İ.D.S.11	İ.D.S.12
Oluşumlar Bağlamında	Semiyotik oluşum	3						1		1			
	Enstrümantal oluşum		8	9			4	2	1	5	7	2	2
	Söylemsel oluşum				1		1	1	4				
Düzlemler Bağlamında	Semiyotik-enstrümantal			7	6						5		1
	Semiyotik-söylemsel			3	4		4	3	5	1	2		3
	Enstrümantal-söylemsel												
	Semiyotik-enstrümantal-söylemsel												

Grafik 3. 2. Kayra:1. Adımda oluşumlar ve düzlemlerin görülme oranı



Eşit '=' işaretini anlamlandırmaya yönelik bulgular (1.,2.,3.,5. ve 11. sorular):

' $a+b=c$ ' standart ifadesi ile verilen 1. soruda işareti anlamlandırmaya yönelik yöneltilen sorunun bireysel görüşmesinde Kayra'ya bireysel görüşmede eşit işaretini duyduğunda-gördüğünde gözünde canlananın ne olduğu sorulduğunda sadece sentaks yani anlamından bağımsız bir şekil olarak yorumladığı görülmüştür. Matematiksel bir işaretin yokluğunda gözünde canlandırmada **semiyotik oluşumun** bileşenlerinin görüldüğü Kayra'nın bu soruya verdiği cevap aşağıdaki gibi olmuştur.

Ben: Tamamdır. Aklına ne gelirse bu arada. Hiç böyle şey yapmana gerek yok. Aklıma hiçbir şey gelmedi. Başka bir şey düşünemedim falan da diyebilirsin yani. Bir de şey soracağım Kayra ben sana eşittir dediğimde gözünde nasıl bir şey canlanıyor? Nasıl bir resim? İlk aklına gelen şey ne oluyor mesela eşittir dediğimde?

Kayra: Eşittir şey canlanıyor. İki çizgili normal bir şeyi işaret eden normal.

Ben: İki çizgili bir işaret mi dedin?

Kayra: Evet.

Eşdeğer denklemlerde işareti anlamlandırmayı destekleyen 3. sorudaki sorulardan biri olan $5+4=7+2=9$ sorusunda Kayra, bireysel görüşmede eşit işaretinin ne anlama geldiği, ne amaçla kullanıldığı, sorunun farklı bir yolla yapıp yapılamayacağı sorulduğunda eşit işaretini problemin çözümünde bir araç olarak anlamlı bir şekilde kullanabilse de doğrulama ve açıklama sürecinde zorluklar yaşadığı görülmüştür. Yaptığı adımların sebebini açıklaması gerekçelendirmesi istendiğinde, doğrulama

sürecinde eşit işaretinin tanımı-özelliklerinden yararlanmayıp sadece yaptığı adımları ifade ediyor olmasından hareketle Kayra'nın çalışmasının **semiyotik-enstrümantal** düzlemde olduğu düşünülmüştür.

Kayra: (tekrar deniyor kağıda yazarak) Şey normal benim verdiğim 6 artı 3 oldu. Diğeri de 7 artı.... (düşünüyor) hocam 7'yle yapamıyorum bu sefer, çok zor.

Araştırmacı: (gülüyor) Neden zorlandın kimden almaya çalışıyorsun kime vermeye çalışıyorsun?

Kayra: 7'den almaya çalışıyorum. Buna vermeye çalıştığımda 4 oluyor gene yandaki gibi.

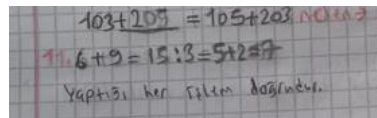
Araştırmacı: Kaç tane alınca 5 artı 4 oluyor.

Kayra: 7'den 2 tane alınca ona 2 tane verince 4 oluyor o sayı 7 değil 5 kalıyor.

Araştırmacı: Hmmm anlamadım. Hep 2 tane alıyorsun galiba peki 1 tane alsan 3 tane alsan 5 tane alsan falan öyle olur mu? Ya da hepsini alsan.

Kayra: O zaman diğer taraf 7 artı 2, 0 artı 7 olmaz. Sadece şöyle olur 0 artı 9 olur ikisini toplarsam.

Sayısal eşitliğin doğru ya da yanlış olduğunu belirlemeyi ve eşit işaretini anlamlandırmasını destekleyen 11. soruda hatalı verilen ifadede $(6+9=15:3=5+2=7)$ eşit işaretinin kesin işlemsel yorumlanmasını işe koşabildiği için **enstrümantal oluşumun** bileşenlerinin görüldüğü düşünülmüştür (Görsel 3.10). Ancak eşit işaretinin temel ilişkisel ve karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanma biçimlerini de birbirini destekleyecek şekilde işe koşamadığı görüldüğünden yanlış olan ifadenin Görsel 3.10'da görüldüğü gibi doğru olduğuna karar verdiği görülmüştür.



Görsel 3. 10. Kayra'nın soru-11'e ilişkin cevabı

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik bulgular (4., 6., 7. ve 8. sorular):

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik, doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulamayı içeren 4. soru olan $47+25=47+3+25-3=50+22$ sorusunda 47 ve 25'i toplarken kolayca toplayabilmek adına 25'ten alınan 3'ün 47'ye verilmesinin sonucu değiştirmeyeceğini, eşitliğin aynı tarafındaki toplanan iki sayıdan birinden alıp birine verdiğimizde sonucun aynı

kalacağına dair farkındalık yaratmak amacıyla hazırlanan soruda Kayra kısmen karşılaştırmalı ilişkisel yorumlayarak eşitliğin aynı tarafındaki iki sayıdan birinden alıp diğerine verdiğinde eşitliğin her sayı için değil bazı durumlarda değişmeden kalacağını düşünmüştür. Eşitliğin aynı tarafındaki iki sayıdan birinden alıp diğerine verdiğimizde eşitliğin bozulmayacağını -eklenen çıkarılan sayıların eşit olması durumunda bunun tüm sayılar için geçerli olduğunu- bireysel görüşmede öğretmen rehberliğinden sonra ifade edebilmiştir. Eşit işaretini problemin çözümünde karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamak amacıyla kullanabilir olması enstrümantal oluşumun bileşenlerinin görüldüğü yönünde değerlendirilmiştir. Çalışmada yaptığı adımların gerekçesini de açıklayabildiği için semiyotik-söylemsel düzlemde olduğu düşünülmüştür.

Araştırmacı: Bir de benim aklıma şey takıldı. Madem tamam iyi hoş birinden aldı birine verdi mesela 47’li olan soruda. Neden 3. Neden 4 değil, 5 değil, 6 değil. 8 değil. Gidip de neden 3’ü seçti?

[...]

Araştırmacı: Mesela sen 4 almışsın 4 vermişsin aynı sonuç çıkmış. Mesela başka birisi gelseydi 6 alıp 6 verseydi gene aynı sonuç mu çıkacaktı?

Kayra: Bakayım hocam (gene deftere deneme yapıyor) 12 elde var 1. Gene aynı sonuç çıkıyor. Gene aynı sonuç çıkıyor hocam

Araştırmacı: Bu bir rastlantı mı sence? Yani 6 da oldu... acaba şans eseri tutuyor mu yani bizim seçtiğimiz sayılarda. 6 da oldu.

Kayra: Hayır hocam

Araştırmacı: Yani bütün sayılarda olacak mı o zaman?

Kayra: Evet

Araştırmacı: Neden?

Kayra: Hepsinde deneyeyim mi? (denemeden genelleme yapamıyor)

Araştırmacı: İşte hepsinde nasıl deneyeceğiz ben de onu merak ettim. Sayılar sonsuza kadar gidiyor yani. Sonsuza kadar denememiz imkansız.

Kayra: Şöyle olabilir. Mesela 25’ten aldığımız sayıyı 47’ye ekliyoruz ya.

Araştırmacı: Evet.

Kayra: Gene kendimizden aldığımız sayıyı kendimize veriyoruz. Topladığımız sonuca veriyoruz

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik hazırlanan 6. soruda ‘ $a=a$, $a+0=a+0$, $a+b=a+b$, $a-b=a-b$ ’ şeklinde verilen denklemlerin doğru ya da yanlış olduğunu belirlerken eşit işaretini bir araç olarak işe koşabildiği bireysel görüşmede görüldüğünden enstrümantal oluşumun bileşenlerinin görüldüğü düşünülmüştür.

İfadenin doğruluğunu açıklarken ve gerekçelendirirken eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlanmasını kullandığından bu çalışmada Kayra'nın semiyotik-söylemsel düzlemde olduğu değerlendirilmiştir.

Araştırmacı: Heeee. Anladım. Peki şu altıncı soruda demiş ki 4 eşittir 4. Doğru mu neden doğru?

Kayra: 4 eşittir 4 mesela şöyle olabilir 2 artı 2 diyelim 4 ediyor. 3 artı 1 gene 4 ediyor

Araştırmacı: Hı hı.

Kayra: Araştırmacı şeyi anlamadım. Orada neden boşluk bıraktılar? Onu anlamadım orada boşluk var ya.

Araştırmacı: Bakayım ben. Nerede boşluk kalmış hemen bakayım.

Kayra: Cevapları yazmamızı mı istemiş acaba?

Araştırmacı: He he nokta nokta olan yere diyorsun değil mi. Evet evet orası cevapları yazmanız için birazcık boşluk bırakılmış. 4 eşittir 4. Sence bu 4 eşittir 4 ifadesi doğru mu?

Kayra: Evet.

Araştırmacı: Neden doğru?

Kayra. Gene normal 3 artı 1 yaptığımızda gene 4 çıkıyor. 2 artı 2 yaptığımızda gene 4 çıkıyor.

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik sorulan 7. sorunun görüşmelerinde Kayra'ya eşit işaretinin kullanım alanları ve amaçlarına dair sorular bireysel görüşme sırasında yöneltildiğinde eşit işaretinin yokluğunda gözünde canlandırabilir ve sembolün kullanıldığı yerlere uygun örnekler verebilir olması semiyotik oluşumda aşağı yönlü hareketi işaret ettiğini düşündürmüştür.

Araştırmacı: Eşittir her zaman sonda yazılmalı desem doğru olur mu sence? Eşittir her zaman sonda...

Kayra: Hayır. Yaaa böyle de olur. Normal çıkartma işleminde sonuçtan önce de kullanılıyor.

Araştırmacı: Nasıl mesela?

Kayra: Çıkartma işleminde normal sonucu bulduğumuzda önce şey yapıyoruz ya önce kullanıyoruz ya.

Araştırmacı: Hmmm bir tane örnek yazsana Kayra.

Kayra: Çıkarma işlemiyle mi yoksa gösterdiğimiz şeyle mi?

Araştırmacı: Nasıl istersen

Kayra: O zaman iki tane yazayım.

Araştırmacı: Tamam

Kayra: Şöyle oluyor. Pek eşit olmadı. Farklı farklı yaptım. Ben size direk okuyayım.

Araştırmacı: Olur.

Kayra: 7 eksi 6, 1. Sonucu belirtmeden önce eşittir kullandık ya kullanıyorduk ya

Araştırmacı: Hı hı

Kayra: Öyle şey yaptım. Ondan sonra size yaptığı gibi üçüncü örnekte 8 eşittir yani 8 olmalıymış şeyi. 4 artı 4. 6 artı 2 de 8 olabilir.

Farklı tiplerde denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirleyebilmek için eşitliği bozmayan işlemleri belirleyebilmesi beklenen 8. soruda $27-48+48=27$ ifadesinde temel ilişkisel yorumlamayı negatif sayıları bilmediğinden kullanamadığı için eşit işaretini problemin çözümünde işe koşamadığından dolayı enstrümantal oluşumun bileşenleri görülemezken; $8+9=(8+2)+(9-2)$ ifadesinde eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlanmasını kullanarak problemin çözümünde işe koşabildiğinden **enstrümantal oluşumun** bileşenlerinin görüldüğü yönünde yorumlanmıştır. Aynı zamanda bireysel görüşmede gerekçesini de temel ilişkisel yorumlamayı kullanarak açıklayabildiğinden çalışmasının **semiyotik-söylemsel** düzlemde yer aldığı değerlendirilmiştir.

Kayra: Evet. Yaaa 8'le 9, 18 oluyor yaaa 17 oluyor. 17'den.... 10 oluyor parantez içini topluyorum 8'le 2. 10 oluyor. Artı 9 yani bunların toplamı...

Araştırmacı: Mesela en son...

Kayra: Hocam şeyyy anladım anladım anladım...

Araştırmacı: Tamam (gülüyorum)

Kayra: 8 artı 2, 10 oluyor. Bu da şey oluyor. 9 eksi 2, 7 oluyor. Bu da 17 oluyor. 17....

Yani şunlar 8 artı 2, 10. 9 eksi 2, 7 oluyor. Bunların tekrar toplamı 17 ve şu 8 artı 9'a eşit oluyor.

Eşitliği sağlayan eksik değeri bulmaya yönelik bulgular (9., 10. ve 12. sorular):

Eşitliği sağlayan eksik değeri bulmayı gerektiren 'a+b=kutu+c' formundaki 9. soruda Kayra eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlanmasına ilişkin örnek durumlar oluşturabildiğinden **semiyotik oluşumun** bileşenlerinin görüldüğü yönünde değerlendirilen temel ilişkisel yorumlama problemin çözümünde işe koşulamadığından (Görsel 3.11) enstrümantal oluşumun bileşenleri görülmediği düşünülmüştür.

Araştırmacı: O zaman burada eşittirin öteki amacı mı kullanılmış? Yani sonucu yazmak için kullanılan amacı mı kullanılmış?

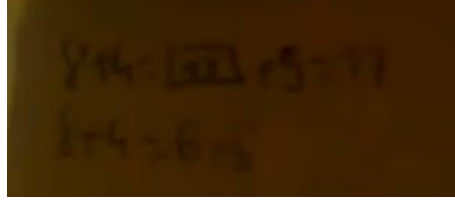
Kayra: Evet sonucu yazmak için kullanılan şey kullanılmış.

Araştırmacı: Hmmm peki diğer amacıyla kullanılmış olsaydı nasıl olacaktı. Yani iki tarafın da....

Kayra: Hemen yazayım.

Araştırmacı: Tamam.

Kayra: Şöyle olurdu.



Görsel 3. 11. Kayra'nın soru-9'a ilişkin cevabı

Araştırmacı: 8 artı 4 eşittir 6 artı 6. O 6 artı 6'yı nasıl buldun?

Kayra: 8 artı 4, 12 ediyor. 6 artı 6, 12 ediyor.

Eşitliği sağlayan eksik değeri bulmayı gerektiren 10. soruda Kayra karşılaştırmalı ilişkisel yorumluyormuş gibi görünse de tam olarak anlamlandıramadığı görülmüştür. Çünkü yanlış yaptığında bireysel görüşmede neden yanlış yaptığını ya da neden bu adımları yaptığını açıklaması istendiğinde açıklayamadığı görülmüştür. Karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamada nedenini açıklarken gerekçelendirme yapmadan yaptığı adımları söylüyor olması Kayra'nın karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamada **semiyotik-enstrümantal** düzlemde olduğunu gösterir nitelikte olduğunu düşündürmüştür. Ancak temel ilişkisel yorumlama kullandığında yaptığı adımların nedeni sorulduğunda eşit işaretinin özelliklerinden yararlandığından hareketle temel ilişkisel yorumlamada **semiyotik-söylemsel** düzlemde yer aldığı değerlendirilmiştir.

Araştırmacı: Peki bu taktik işe yaramayacak mı yani? Hani 101'den 103'e geçerken 2 arttırmışlar ya (yanlış söyledi 103'ten 105'e demem lazımdı) onlar 2 arttırdılarsa ben de 2 azaltmalıyım deyip burayı 201 bulsak bu taktiği kullansak doğru sonuca ulaşamayacak mıyız yani? Bizim kullandığımız taktikte mi bir hata var?

Kayra: 201. (bu sayıyı kağıdına yazıyor ve işlem yapıyor sanırım) Hocam bizim kullandığımız taktikte bir hata oldu. Çünkü normalde 105'le 203'ü topladığımızda 308. Bizim 201 yazdığımızda 304 oluyor. Topladığımızda.

Araştırmacı: Hmmm o zaman nasıl yapacağız bu taktiği değiştirmek mi lazım yanlış bir taktik mi?

Kayra: Yaaa normal benim dediğim gibi. 203'le 105'i toplayıp ama eksiltmeden 103'le çıkartıp o sayıyı bulmamız lazım. 103'ün yanına yazacağımız.

Araştırmacı: O zaman bu yolu kullanmamız lazım yani senin anlattığın yolu.

Kayra: Evet.

Araştırmacı: Öteki yolu kullanırsak doğru sonuca ulaşamayacak mıyız peki. Hani 2 ekleyip 2 çıkarsak olmayacak mı yani?
Kayra: hayır.

3.1.1.2.İkinci adım: etkinlik-1 ve alıştırmalar

Bu bölümde Kayra'nın 2. Adım: Etkinlik-1 ve ilişkili alıştırmalara ilişkin bulguları kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları ve matematiksel çalışma uzayı ile ilgili bulguları başlıkları altında sunulmuştur.

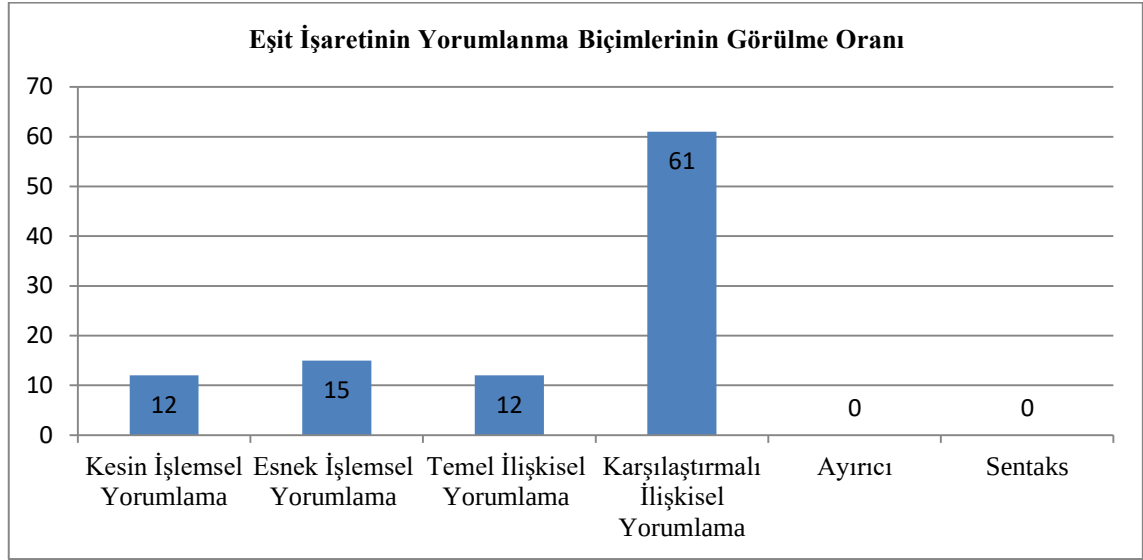
3.1.1.2.1. Kayra'nın kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları

Kayra'nın 2. Adım: etkinlik.1 ve ilişkili alıştırmalar sürecinde eşit işaretini yorumladığı durumlar incelendiğinde düzeylere bağlı farklı yorumlama biçimlerini kullanma oranlarına dair Tablo 3.3 ve Grafik 3.3 elde edilmiştir. 2. adımda karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı %61 oranında, esnek işlemsel yorumlamayı %15 oranında, kesin işlemsel ve temel ilişkisel yorumlamayı %12 oranında kullandığı görülmüştür.

Tablo 3. 3. Kayra'nın 2. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimlerinin sorulara göre dağılımı

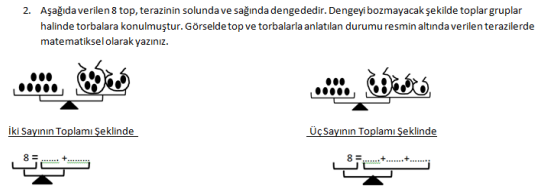
Eşit İşaretini Yorumlama Biçimi	E.1.S.1.	E.1.S.2.	E.1.S.3.	A.1.S.1.	A.1.S.2.	A.1.S.3.	A.1.S.4.	A.2.S.1.
Kesin İşlemsel Yorumlama	2			3				
Esnek İşlemsel Yorumlama	4	2						
Temel İlişkisel Yorumlama			1	1		1		2
Karşılaştırmalı İlişkisel Yorumlama			2	1	4		8	10
Ayırıcı								
Sentaks								

Grafik 3. 3. Kayra'nın eşit işaretini yorumlama biçimlerinin oranları



Eşit '=' işaretini anlamlandırmaya yönelik bulgular (e.1.2. Soru):

Eşdeğer denklemin terazi modeli ile verildiği işareti anlamlandırmayı destekleyen Görsel 3.12'de verilen etkinlik.1 soru.2'de Kayra'nın soruda verilen birinci durumu $8=5+3$ ve ikinci durumu $8=4+3+1$ şeklinde temsil edebilmiş olması esnek işlemsel yorumlamayı kullanabildiği ve terazi modelinden sayısal temsile geçebildiği yönünde yorumlanmıştır.



Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik bulgular (e.1.3., a.1.1., a.1.2., a.1.3., a.1.4, a.2.,1.sorular):

Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulamayı gerektiren Etkinlik.1 soru 3'te Kayra'nın gerçek yaşam bağlamında verilen sözel problemi anladığı ve terazi modelini de kullanarak sözel olarak doğru bir şekilde ifade edebildiği grup görüşmelerinde görülmüştür. Ancak sözel olarak anlamlı bir şekilde ifade edebildiği bu durumu matematiksel olarak doğru bir

şekilde ifade edemediği Görsel 3.13'te görülmüştür. $10=10-9+9+1$ şeklinde ifade ederken aslında anlatmaya çalıştığı 10'dan 9'u çıkarıp elde ettiği 1'e 9 ekleyerek yeniden 10 elde etmek olurken 10'dan 9 çıkarmak bir ara işlem olduğu halde ayırıcı anlamıyla '+' işaretini kullanmıştır (Görsel 3.13). Terazî modelinde verilen bağlamı sözel olarak ifade ederken denge, eşitlik, aynı olma gibi kavramlara değinmeksizin dengeyi bozmayacak işlemleri yaptığı görülmüştür. 10 sayısını iki sayının toplamı şeklinde yazarken o iki sayıdan birinden alıp diğerine verildiğinde eşitliğin bozulmayacağı durumlara örnek yazılması istendiğinde temel ilişkisel ve karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı birbirini destekleyecek şekilde kullanarak problemi çözmeye çalışmıştır. Kayra'nın çıkardığı sayıyı ekleyerek karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı anlamlı kullanabildiği görülürken; toplamlarının yine 10 olmasını sağlayacak şekilde temel ilişkisel yorumlayamadığı görülmüştür. Grup tartışmaları ek süre tanıma, açıklama, rehberlikten sonra çalışmayı yeniden yapmaları istendiğinde Kayra'nın yine yapamadığı, zorlandığı görülmüştür. Aynı zamanda karşılaştırmalı ilişkisel yorumlayarak yanlış yapan Melda'nın örneğinin doğrusunu da yazamadığı görüldüğünden karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı tam olarak anlamlandıramadığı düşünülmüştür.

Handwritten equations on grid paper:

$$\begin{aligned} 10 &= 10 - 9 + 9 + 1 \\ 10 &= 10 - 8 + 2 + 8 \\ 10 &= 10 - 7 + 3 + 7 \\ 10 &= 10 - 6 + 4 + 6 \end{aligned}$$

Görsel 3. 13. Kayra'nın Etkinlik.1 Soru.3'e ilişkin cevabı

Kayra: Hocam ben normal şey olarak düşündüm. 10'dan 9'u çıkardığımda 1 kalıyor. Ben o 1'i 9'a ekledim. Heee çıkardığımı o bulduğum sayıya 9 ekledim.

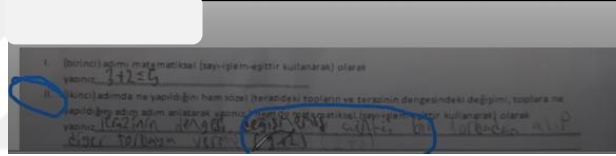
Araştırmacı: Hmmm.

Kayra: ve tekrar 10 buldum.

Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlamayı terazî modeli, sayısal, sözel, farklı temsil geçişleri ile desteklemeyi hedefleyen Etkinlik.1 Alıştırma.1 soru.1'de Kayra'nın terazî modelinde verilen durumu sayısal olarak temsil ederken

kesin işlemsel yorumlamayı kullandığı, terazi modelinde verilen durumu sözel olarak ifade ederken karşılaştırmalı ilişkisel yorumlayabildiği ama karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı sayısal olarak ifade edemediği görülmüştür (Görsel 3.14). Terazi modelinde dengede verilen durumu matematiksel olarak eşit işaretini de kullanarak doğru bir şekilde ifade edebilmiştir. Grup görüşmelerinde terazinin aynı kefesinde bir torbadan alıp diğer torbaya aynı miktardaki bilyenin bırakılması durumunda ‘terazinin dengesinin değişmediğini’ sözel olarak ifade edebilmiş; ancak matematiksel olarak eksik, hatalı ifade edebilmiştir. Terazi modelinde ‘denge’ kavramına yer vererek eşit işaretini anlamlı kullanmaya başlamıştır. Dengenin-eşitliğin değişmeme nedenini de anlamlı bir şekilde kefelerdeki materyallerle ilişkilendirerek açıklayabilmiştir. Örneğin ‘terazinin dengesi değişmemiş. Çünkü bir torbadan alıp diğer torbaya vermiş’ şeklinde ifade edebilmiştir.

Kayra: Ben de 3 artı 2 yaptım ama 3’ten 2’ye veriyormuş gibi çizmeye çalıştım.



Görsel 3. 14. Kayra’nın Etkinlik-1 Alıştırma-1 Soru-1’e ilişkin cevabı

Araştırmacı: eee üstünde şöyle mi yaptın? Onu tam anlayamadım ben. Şöyle bir işaret mi yaptın üstünden? (Araştırmacı o sırada ekrandan 3’ten 2’ye bir ok çizmiş gibi çiziyor)

Kayra: 3 artı 2 yaptım. 3’ten bir tane ok çıkardım. 2’ye veriyormuşum gibi yaptım.

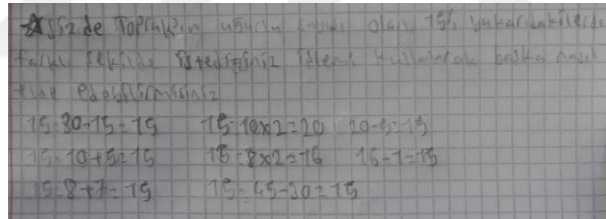
Araştırmacı: Heee anladım. O da matematiksel olarak yazılan kısım oldu galiba değil mi?

Kayra: Evet.

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik soruların grup görüşmelerinde Kayra’nın eşitlik kavramını tanımlayan, destekleyen kelimeler kullanmadığı görülmüştür. Terazi modelinde de verilen $8=5+3$ ifadesindeki eşit işaretini ‘buradaki işlemler 8’e eşit olmalı’ şeklinde yorumlamış; terazinin denge anlamını destekler ifadelerle yer vermemiştir. Görselleştirilmiş bir eşitlik modeli olan teraziye doğru bir şekilde matematiksel olarak ifade edebildiği görülmüş ancak eşit kollu terazi ile herhangi bir yaşam deneyimi olmadığından anlamlı bir geçiş yapamamıştır.

Eşitliği sağlayan eksik değeri bulmaya yönelik bulgular (e.1.1. Soru):

Eşitliği sağlayan eksik değeri açık sayı cümlesinde bulmayı gerektiren Etkinlik.1 soru.1’de Kayra’nın ‘ $20-5=15$ ’ ve ‘ $16-1=15$ ’ gibi kullandığı ifadelere bakıldığında eşit işaretini kesin işlemsel yorumladığı görülmüştür (Görsel 3.15). ‘ $15=30-15=15$ ’, ‘ $15=10+5=15$ ’, ‘ $15=8+7=15$ ’ ifadelerinden yola çıkarak eşit işaretini esnek işlemsel yorumlayabildiği düşünülmüştür (Görsel 3.15). Aynı zamanda Kayra’nın eşit işaretini sadece bir ayırıcı olarak görüp kesin işlemsel veya temel ilişkisel yorumlamayla desteklemeden de kullanabileceğini düşündüğü; 15 sayısını farklı işlemlerle elde etme sorusuna verdiği cevaba bakıldığında ‘ $15=(1.\text{eşit işareti}) 8 \times 2=16, 16-1=15$ ’ ifadesinde yer alan ‘ $15=....$ ’ şeklinde başlayan ilk eşit işaretini aslında tüm işlemlerin sonunda elde edeceği sonucu belirtmek için; eşit işaretinin ayırıcı özelliğine dayanarak hatalı kullandığı görülmüştür. Grup görüşmelerinde eşit işaretini sonuç yazmak için kullandığını ama ara sonuç ve normal sonuç yazmak gibi iki farklı amaçla da kullandığını ifade ettiği görülmüştür.



Görsel 3. 15. Kayra’nın Etkinlik-1 soru-1’e ilişkin cevabı

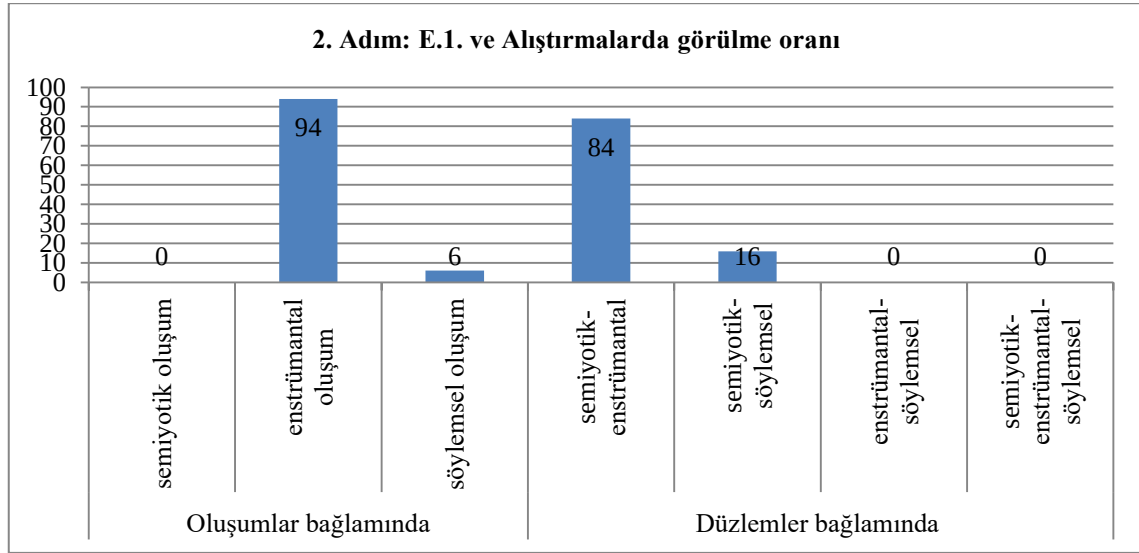
3.1.1.2.2. Kayra’nın matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları

Kayra’nın 2. Adım: Etkinlik.1. ve ilişkili alıştırmalar süreci oluşumlar ve oluşumların ikiyeşerli kombinasyonu bağlamında incelendiğinde Tablo 3.4 ve Grafik 3.4 elde edilmiştir. 2. adım sürecinde %94 oranla enstrümantal oluşum ve %6 oranla söylemsel oluşum sürecinin bileşenlerinin görüldüğü; %84 oranla Kayra’nın çalışmalarının semiyotik-enstrümantal düzlemde ve %16 oranla da semiyotik-söylemsel düzlemde yer aldığı söylenebilir.

Tablo 3. 4. Kayra'nın 2. Adımda oluşumlar ve düzlemlerin sorularda görülme durumu

Eşit İşaretinin Yorumlanmasında Oluşumlar ve Düzlemler		E.1.S.1.	E.1.S.2.	E.1.S.3.	A.1.S.1.	A.1.S.2.	A.1.S.3.	A.1.S.4.	A.2.S.1.
Oluşumlar bağlamında	Semiyotik oluşum								
	Enstrümantal oluşum	5	2	1	4	4		6	9
	Söylemsel oluşum							1	1
Düzlemler bağlamında	Semiyotik-enstrümantal							6	10
	Semiyotik-söylemsel	1		1					1
	Enstrümantal-söylemsel								
	Semiyotik-enstrümantal-söylemsel								

Grafik 3. 4. Kayra'nın 2. Adımda oluşumlar ve düzlemlerin görülme oranı



Eşit '=' işaretini anlamlandırmaya yönelik bulgular (e.1.2. soru):

Eşit işaretini terazi modelinde eşdeğer denklemlerle anlamlandırmalarını destekleyen 2. soruda Kayra'nın terazi modelinde verilen durumu matematiksel olarak Görsel 3.16'da verildiği gibi doğru bir şekilde yazabildiği görüldüğünden **enstrümantal oluşumun** bileşenlerinin göstergesi olarak ele alınmıştır. Ancak terazi modeli ile eşit işareti arasında anlamlı ilişki kuramadığı; grup görüşmesinde teraziyi kitaplarda, köyde, pazarda gördüğünü ama aktif olarak kullanma deneyimi yaşamadığı; kullanma prensibini tam olarak bilemediğini ifade ettiği görülmüştür.

$$2 = 5 + 3$$

$$2 = 4 + 3 + 1$$

Görsel 3. 16. Etkinlik.1 soru.2'ye ilişkin cevabı

Araştırmacı: Ben de şey, size şey soracağım. Burada teraziye niye sormuşlar. Hiç terazi kullandınız mı?

Nazlı: (olumsuz anlamda kafa sallıyor) Ben kullanmadım.

Melda: Olumsuz anlamda kafa sallıyor.

Kayra: Ben de. (Kayra-Nazlı-Melda da katılıyor)

[...]

Araştırmacı: Gerçek hayatta çok görmediniz dimi siz? Kayra sen gördün mü böyle ağırlıklı olanı? Demirli olanı?

Kayra: Ben görmedim hocam.

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik bulgular (e.1.3., a.1.1., a.1.2., a.1.3., a.1.4, a.2.,1.sorular):

Kayra, 1. Etkinlik soru.3'te yer alan terazi modelinde verilen armut ve ayvalarda eşitliğin bir tarafına eklenen sayı eşitliğin bozulmasına neden olacağından eşitliğin diğer tarafına da eklenmesi gerektiğini fark ettiğinden karşılaştırmalı ilişkisel yorumlayabilmiştir (Görsel 3.17). Terazi modelini problemin çözümünde işe koşabildiğinden **enstrümantal oluşumun** bileşenlerinin göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Aynı zamanda grup görüşmeleri ve bireysel uygulamada açıklama-gerekçelendirme yaparken terazi modelini işe kattığından bu çalışmanın **enstrümantal-söylemsel** düzlemde yer aldığına ilişkin göstergeler olarak değerlendirilmiştir.

3.
1.soru
Hayır
2.soru
Hayır
3.soru
Ayvalardan biraz eklenmelidir.

Görsel 3. 17. Kayra'nın etkinlik-1 soru-3'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Kilosu da aynı olmuyor. Sen ne diyorsun Kayra?

Kayra: Ataberk'e katılıyorum. Normal kilosu da aynı olmaz. Normal zaten 3 tane armut varken 5 tane ayva varken 3 kiloymuş. Ama 2 tane daha armut eklenirse eşitlik bozulur.

[...]

Kayra: Hocam normal şey yaptığımız gibi. Armutları 6 tane armutu geri verdik. 6 Tane ayva olarak geri aldık.

Araştırmacı: Mmm o zaman değişmeyecek mi yani?

Kayra: 6 tane armut ayvaya geçiyor.

Araştırmacı: Aynen. Öyle olursa değişmez mi? Senin söylediğin gibi olursa yani. Sonuç değişmez mi? Onu sorayım yani. Değişmez mi derken. Ne değişmez mi? Sonuç değişmez mi? Vereceğim para, kilosu?

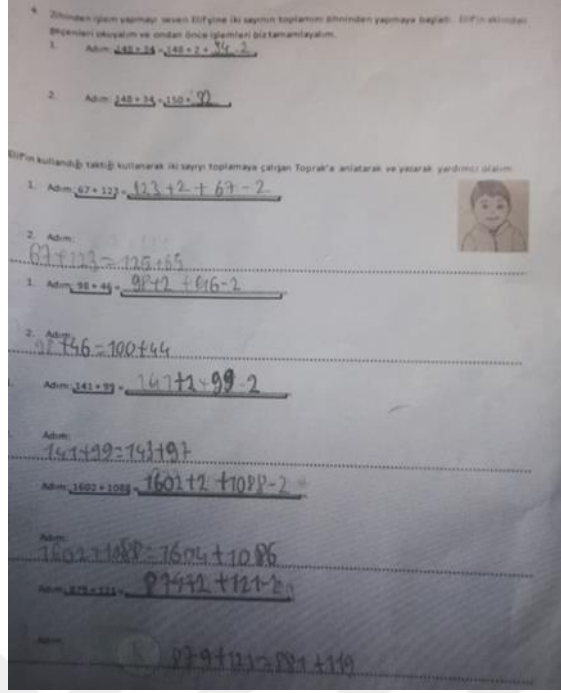
Kayra: Değişmez. Değişmez. Aynıysa değişmez. Ama toprağın da armutla ayvanın kilosu aynı dediği için. Yani sonuç değişmez.

Terazi modeli ile ilişkili doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda bu adımları uygulamayı gerektiren Etkinlik.1 Alıştırma.1 soru.3'te Kayra, terazinin aynı kefesinde eklenen ve çıkarılan sayıların aynı olmasının terazinin dengesini bozmayacağını farkında olup bunu farklı örneklerle destekleyebilmiştir (Görsel 3.18). Terazinin aynı kefesine eklenen çıkarılan sayıların seçiminde kolaylaştıran en yakın onluğa eklenecek şekilde sayılar belirlenmesi gerekliliğini grup görüşmelerinde Ataberk ile etkileşimden sonra sosyal öğrenme ile anlamlandırdığı görülmüştür. Öncesinde küçük sayıları ekleyip çıkarmanın daha kolay olmasından dolayı tercih ettiğini söylemiştir. Kayra'nın terazi ile eşitlik arasındaki ilişkiyi anlamlı bir şekilde kurup problemin çözümünde işe koşabildiği görüldüğünden bu veriler **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergeler olarak yorumlanmıştır. Yaptığı adımları gerekçelendirme-açıklama olmaksızın ifade ettiği düşünüldüğünden çalışmanın **semiyotik-enstrümantal** düzlemde yer aldığına ilişkin göstergeler olarak değerlendirilmiştir.

Kayra: Hocam söyleyebilir miyim?

Araştırmacı: Sırayla sorayım. Kayraninkine bakayım. Kayra şöyle yazmış. Daha kolay olsun

Kayra: Daha kolay olsun diye.



Görsel 3. 19. Kayra'nın Etkinlik-1 Alıştırma-1 soru-4'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Valla çok güzel cevaplar verdiniz aslında ama ben sizin yaptıklarınıza bir baktım. Bu çocuklar dedim bu sayıları nereden bulmuşlar? (gülüyor o sırada)

Kayra: Hocam söyleyebilir miyim?

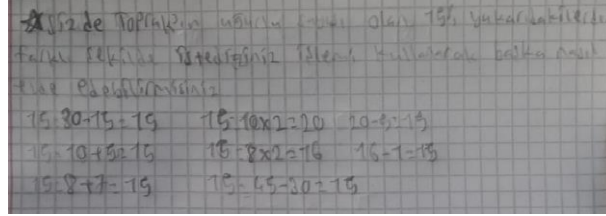
Araştırmacı: Ehh bak ben şimdi göstereyim de öyle söyleyin. Mesela baktım Kayranınkine Kayra 2 ekleyip 2 çıkarmış. Allah Allah dedim.

Kayra: Ben yukarıda öyle yaptığı için öyle yaptım.

Eşitliği sağlayan eksik değeri bulmaya yönelik bulgular (e.1. Soru):

Açık sayı cümlesinde eşitliği sağlayan eksik değeri bulmayı gerektiren Etkinlik.1 soru1'de Kayra'nın 15 sayısına eşit olacak şekilde farklı işlemler ve sayılar kullanarak eşit işaretini problemin çözümünde bir araç olarak kullanabildiği Görsel 3.20'de görüldüğünden **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine dair göstergeler olarak yorumlanmıştır. Ancak sorulardan birinde ' $15=10 \times 2=20$ $20-5=15$ ' şeklinde yazdığı matematiksel olarak yanlış olan ifadesinde yaptığı adımların sebebi grup görüşmelerinde sorulduğunda eşit işaretini ' $20-5=15$ ' ifadesinde 'normal sonucu' belirtmek için kullandığını, en başta verilen ' $15=....$ ' şeklinde verilen ifadede 'farklı amaçla, oradaki işlemlerin sonucunu belirtmek için' kullandığını ifade ettiği

görülmüştür. Eşit işaretinin özellikleri ifade edildiğinden çalışmasının semiyotik-söylemsel düzlemin bileşenlerine ilişkin göstergeler taşıdığı ele alınmıştır.



Görsel 3. 20. Kayra'nın Etkinlik.1 soru-1'e ilişkin cevabı

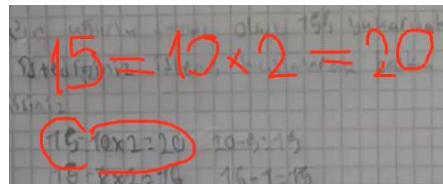
Araştırmacı: Hmmm, o zaman ben şöyle... şu kısmın ben nasıl anlayacağım? Yaaa Kayra aslında şunu anlatmaya çalışmış. 15'e eşit olacak bütün işlemlerin sonucu. En sonda gerçekten 15 bulmuşsun. Aslında onu fark ettim. Ama şurada kafam karıştı benim. Demiştin ki 15'e eşit olacak demiştin. Dedim ki neresi eşit olacak? Baktım ben hemen yan tarafına 10 çarpı 2 eşittir 20 yazmışsın. Aaaa dedim hani 15'e eşit olacaktı? 10 çarpı 2 eşittir 20 yazmışsın dedim. Kendi kendime. O zaman oradaki eşittirin ne amaçla kullanıldığını ya da doğru mu kullanıldı, yanlış mı kullanıldı? Orada biraz benim kafam karıştı.

Kayra: Doğru kullanıldı. Normal, benim 15 eşittir şey yaptığımı.... Normal (cümleyi toparlayamadı) 15 eşittirden farklı amaçla yani farklı özelliğiyle kullanıldı.

Araştırmacı: Ne gibi bir özelliğiyle mesela kullandın orada?

Kayra: Normal, 10 çarpı 2 eşittir olmasa direk 20 olsa biraz saçma olurdu. 10 çarpı iki yüz yirmi olurdu.

Araştırmacı: Hmmmm şu kısmını bak. Ben şu kısmını merak ettim. Mesela sen yazıyorsun buraya 15 diye. Diyorsun ki ben diyorsun buraya 15'e eşit bir şey bulacağım diyorsun. Tamam diyorum ben de. Kayra 15'e eşit bir şey bulacak. Sonra yanına devam ediyorsun. 10 çarpı 2 diyorsun eşittir 20 diyorsun. (ekrana yazıyorum bu sırada) Allah Allah diyorum. Hani ben burada Kayra diyorum 15'e eşit bir şey bulacaktı diyorum. Neden 20'ye eşit bir şey buldu şu anda diyorum.



Görsel 3. 21. Kayra'nın Etkinlik-1 soru-1'e ilişkin cevabının tartışılması

Kayra: 20'den önce normal sonucu belirtmek için kullandım. Ama 15'ten sonra oradaki işlemlerin sonucunu belirtmek için kullandım.

3.1.1.3. Üçüncü adım: etkinlik-2 ve alıştırmalar

Bu bölümde Kayra'nın 3. Adım: Etkinlik-2 ve ilişkili alıştırmalarına yönelik bulguları kavramsal ve bağlamsal anlamaya ilişkin bulguları ve matematiksel çalışma uzayına ilişkin bulguları başlıkları altında verilmiştir.

3.1.1.3.1. Kayra'nın kavramsal ve bağlamsal anlamaya ilgili bulguları

Bu bölümde Kayra'nın kavramsal ve bağlamsal anlamaya ilişkin bulguları Etkinlik-2 ve ilişkili alıştırmalarda yer alan soruların analizi sonucu elde edilen temalar başlıkları altında sunulmuştur.

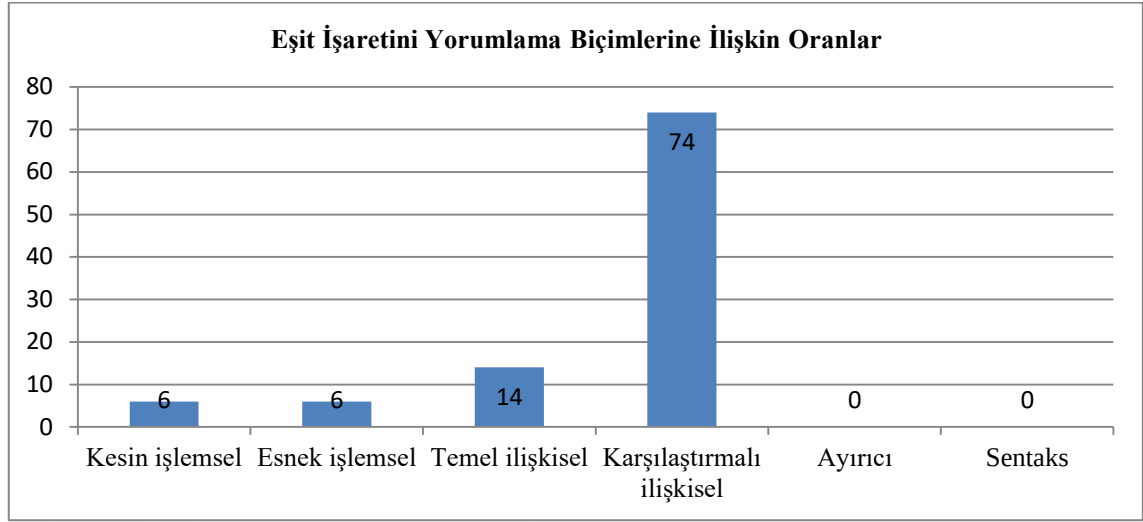
Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik bulgular:

Kayra'nın 3. Adım: etkinlik.2. ve ilişkili alıştırmalar sürecinde eşit işaretini yorumladığı durumlar incelendiğinde düzeylere bağlı farklı yorumlama biçimlerini kullanma oranlarına dair Tablo 3.5 ve Grafik 3.5 elde edilmiştir. 3. adımda karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı %74 oranında, %14 oranında temel ilişkisel yorumlamayı, %6 oranında kesin işlemsel ve esnek işlemsel yorumlamayı kullandığı görülmüştür.

Tablo 3. 5. Kayra'nın 3. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimlerinin sorulara göre dağılımı

Eşit İşaretini Yorumlama Biçimleri	E.2.S.1.	E.2.S.1.A.	E.2.S.2.	E.2.S.3.	E.2.A.1.S.1.	E.2.A.1.S.2.	E.2.A.2.S.1.
Kesin İşlemsel Yorumlama				1			1
Esnek İşlemsel Yorumlama			2				
Temel İlişkisel Yorumlama			3	2			
Karşılaştırmalı İlişkisel Yorumlama		7	2	2	8	6	1
Ayırıcı							
Sentaks							

Grafik 3. 5. Kayra'nın 3. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimlerinin görülme oranları



Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulamayı gerektiren terazi modeli-sayısal-sözel-farklı temsil geçişlerini içeren soruda Kayra'nın, terazi modelinde verilen $12+25-25=12$ sorusunda eklediği sayıyı çıkardığında eşitliğin bozulmayacağını farkında olduğundan karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullandığı görülmüştür. Aynı zamanda grup görüşmeleri sırasında eklediği sayı ile çıkardığı sayı aynı olduğundan tüm sayıları verebileceği yorumunu yapabiliyor olması matematiksel olarak doğru bir genellemeye, özelliğe başvurduğunu da göstermiştir.

Araştırmacı: Önce Kayra'yla başlayalım. Kayra sen bu soruya ne dedin? Sizce doğru mudur diye dediğinde.

Kayra: Hocam 12'ye 25 verip yani 12'yle 25'i toplayıp 25 çıkarttığı için cevap 12 olmuş. Yani oradaki normal oradaki 25 ekleyip bir de 25 çıkarmak normal bir sayıdan değil. Normal bir sayıdan değil.

Araştırmacı: Ne demek istiyorsun normal bir sayıdan değil derken?

Kayra: Yani sonsuz bir sayıdan çıkarmış. Yani 12'den 25 çıkarsa ayyy 25'ten 12'yi çıkarsa oluyor. Bir de o 12'yi toplasa ve 12'yi çıkarsa cevabı gene 25 olur. Normal dedim. Yani sayıların yerlerini değiştirirse gene olur ama burada 25'i sonsuz sayıdan yani kafasından şey yapmış. Orada normal yerlere ekledikleri ve çıkardıkları için onu bildiği için o istediği gibi bir sayı seçmiş.

Araştırmacı: hmmm 25 yerine mi istediği sayıyı seçmiş. Yani sonsuz tane sayı seçebilir onu mu demek istedin Kayra?

Kayra: Evet o 25 yerine mesela 1000 de ekleyebilir. 12'ye 1000 ekleyip

Araştırmacı: Hmmm

Kayra: 1000 de çıkarabilir. Gene 12 çıkar.

Araştırmacı: O zaman her zaman doğru mudur sorusuna evet her zaman doğrudur mu diyorsun sen?

Kayra: Ama bir tanesine 38. Bir tanesine 25 yazarsak olmaz.

Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulama içeren cebirsel temsil-terazi modeli-sözel temsil ilişkili Etkinlik.2 Alıştırma. 1 soru.1’de ‘Torba+99=128’ şeklindeki bir bilinmeyenli denklemi çözerken Kayra’nın eşitliğin her iki tarafından da aynı sayıyı çıkardığımızda eşitliğin bozulmayacağını biliyor olmasının karşılaştırmalı ilişkisel yorumlayabildiğini gösterdiği değerlendirilmiştir. Grup görüşmelerinde eşitliğin her iki tarafından da çıkardığı sayıyı neye göre seçtiği sorulduğunda mantıklı-anlamlı bir matematiksel temele dayandırmadığı görülmüştür. Öğretmen rehberliği ve farklı örnek durumlardan sonra eşitliğin her iki tarafında da işlem yapılacak sayıyı belirlerken soruda verilen bilinmeyenin yanındaki sayıyı kullanması gerektiğini anlamış; bilinmeyen yanındaki işlemin tersini yapmasının gerekçesini açıklayamadığı gibi öğretmen rehberliği, grup tartışmaları ve soru cevaplardan sonra adım adım bunu fark edebilse de tam olarak anlamlı bir şekilde uygulamaya devam edemediği görülmüştür.

Nazlı: Şöyle torbayı tam söylemiyor ama torbaya 59 eklenince 88 oldu diyor. (torba+99=128 olan soru)

Araştırmacı: katılıyor musunuz Nazlı’ya? Nazlı diyor ki torbayı tam olarak söylemiyor ama bize bir ipucu veriyor gene. Eee yukarıda da bir ipucu veriyordu zaten. Araştırmacı iki taraftan 40 çıkardım gene ipucu veriyor. Yani bir türlü torbayı bulmamı sağlamadı ki biraz önce 80 çıkardım mesela. 80 çıkarınca da işe yaramadı. Şimdi 40 çıkardım 40 çıkarınca da işe yaramadı. Gene torbayı direk bulmamı sağlamadı. Ne yazarsam torbayı direk bulmamı sağlıyor? Kaç yazarsam torba eşittiri direk bulabiliyorum?

Kayra: Kendi sayısı hocam

Araştırmacı: Kendi sayısı derken kaç?

Kayra: 99 yani kendi normal işlemindeki.

Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulama içeren cebirsel temsil-terazi modeli-sözel temsil ilişkili Etkinlik.2 Alıştırma. 1 soru.2’de ‘55=torba-7’ şeklinde yazan bir bilinmeyenli denklemlerden sonucun başta verildiği durumlarda esnek işlemsel yorumlamayı gerektiren soruları

anlamlandırmakta zorlandığı, aşağıda verilen grup görüşmeleri sırasında geçen konuşmada olduğu gibi, görülmüştür.

Kayra: Hocam şekeri kullanacağım. Diyelim ki 55... sonrasını diyorum ilk başta öyle yapayım. Bilmediğimiz bir şey var bilmediğimiz bir şey.

Araştırmacı: He he. O neyi anlatmak için bilmediğimiz bir şey diyorsun?

Kayra: Torbayı.

Araştırmacı: Tamam torbayı.

Kayra: Torbanın kaç olduğunu bilmediğim için bilmediğimiz bir şey. Kardeşimin taşıdığı şeyi bilmediğimiz bir şey. Şeker taşıyor diyelim ki şeker taşıdığını gördük. Götürüyor.

Araştırmacı: Tamam.

Kayra: Ondan sonra oturuyor.

Araştırmacı: Hı hı.

Kayra: ve 7 tanesini yiyor.

Araştırmacı: Tamam. Şu 7 tanesini yedi.

Kayra: Evet. Ben gidiyorum onun sakladığı yere onun sakladığı şekerleri sayıyorum.

Araştırmacı: Tamam.

Kayra: Ve alıyorum. Bu kadar.

Araştırmacı: Alıyorsun. 55'i kullanmadın. Şimdi torbayı kullandın. 7'yi de kullandın.

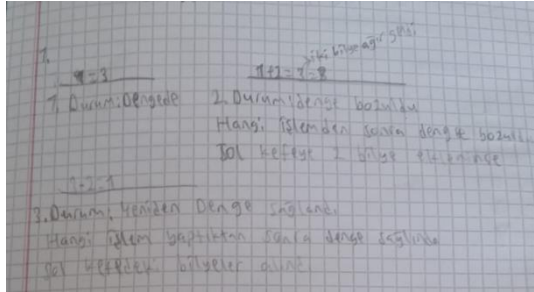
Kayra: Sayıyorum. 55 tane olduğunu görüyorum ve hepsini alıyorum.

Araştırmacı: Hmm peki o zaman benim sorum şu. Şimdi kardeşin bir torba dolusu şeker toplamış. İçinden 7 tanesini hapur hupur yedi. Tam o sırada sen fark ettin. Ne yapıyorsun sen dedin. O da gitti sakladı. Sen sakladığı yeri buldun. Torbanın içindeki şekerlere bir baktın içinde 55 tane şeker var.

Kayra: Bir de o yediği şekerleri eklersek 62 oluyor.

Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulamayı gerektiren terazi modeli-sayısal-sözel-farklı temsil geçişleri içeren Etkinlik.2. soru 1'de görselleştirilmiş eşitlik modeli olan terazinin hem dengede olma durumunu hem de dengede olmama durumunu yine eşit işaretini kullanarak matematik dilinde yazdığı Görsel 3.22'de görülmüştür. Dengede olma ve dengenin bozulma durumlarını sözel olarak doğru ifade ederken matematiksel olarak doğru ifade edememiştir. Terazide alçakta duranın büyük olduğunu bildiği ve sözel olarak ifade edebildiği görülmüştür. Örneğin bireysel soru çözümünde torba=3 şeklinde ifade etmesi gerekirken '1 torba'yı temsilen '1' sayısını kullanarak '1=3' şeklinde ifade ettiği görülmüştür (Görsel 3.22). Dengede duran teraziyi eşit işaretiyle gösterebildiği ama terazinin sol kefesine eklenen 2 bilyeden sonra yeni durumu 'torba +2 > 3' şeklinde

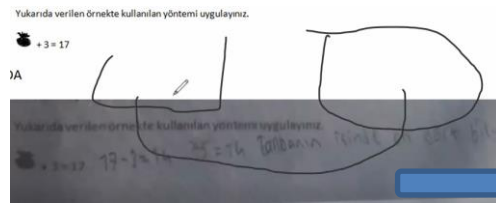
yazması beklenirken ' $1+2=3=3$ ' şeklinde ifade edip ikinci eşittirin üstüne 'iki bilye ağır geldi' şeklinde not yazdığı görülmüştür (Görsel 3.22).



Görsel 3. 22. Kayra'nın Etkinlik-2 soru-1'e ilişkin cevabı

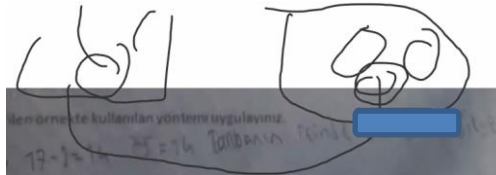
Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulamayı gerektiren cebirsel temsil-terazi modeli-sözel temsil ilişkili Etkinlik.2. alıştırma.2'de Kayra'nın cebirsel olarak verilen $\text{torba}+3=17$ ifadesini grup görüşmelerinde sözel olarak doğru ifade edemediği; görselleştirilmiş eşitlik modeli olan terazi ile modellemesi istendiğinde de doğru modelleyemediği görülmüştür. Terazî modeli ile verilen ilave alışırmalarda sözel yorumlamayı da doğru yapamadığı görülmüştür.

Araştırmacı: Tamam. Terazide anlatalım. Bence de iyi olur. Bir çiz hatta terazide anlatsan. Hatta ekranda çizsen arkadaşların da görse süper olur. Terazinin sol tarafında ne var. Sağ tarafında ne var mesela.



Kayra: Hocam yapamadım pek ama.

Araştırmacı: Gayet güzel. Yooo biz anladık. Bu biz terazî.



Araştırmacı: 17 tanesini mi çizmeye çalışıyorsun? Onu ben çizerim istersen. (Kayra sağ kefedeki 3 tane bilyeyi çizerken araştırmacı öyle dedi)

Kayra: Hayır. Hayır hocam...

Araştırmacı: 3'ü mü çizmeye çalışıyorsun?

Kayra: Burada torbanın 3 bilyeye eşit olduğunu göstermek istedim.

3.1.1.3.2. Kayra'nın matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları

Bu bölümde Kayra'nın matematiksel çalışma uzayı Etkinlik-2 ve ilişkili alıştırılmalardaki soruların analizi sonucu elde edilen temalar doğrultusunda sunulmuştur.

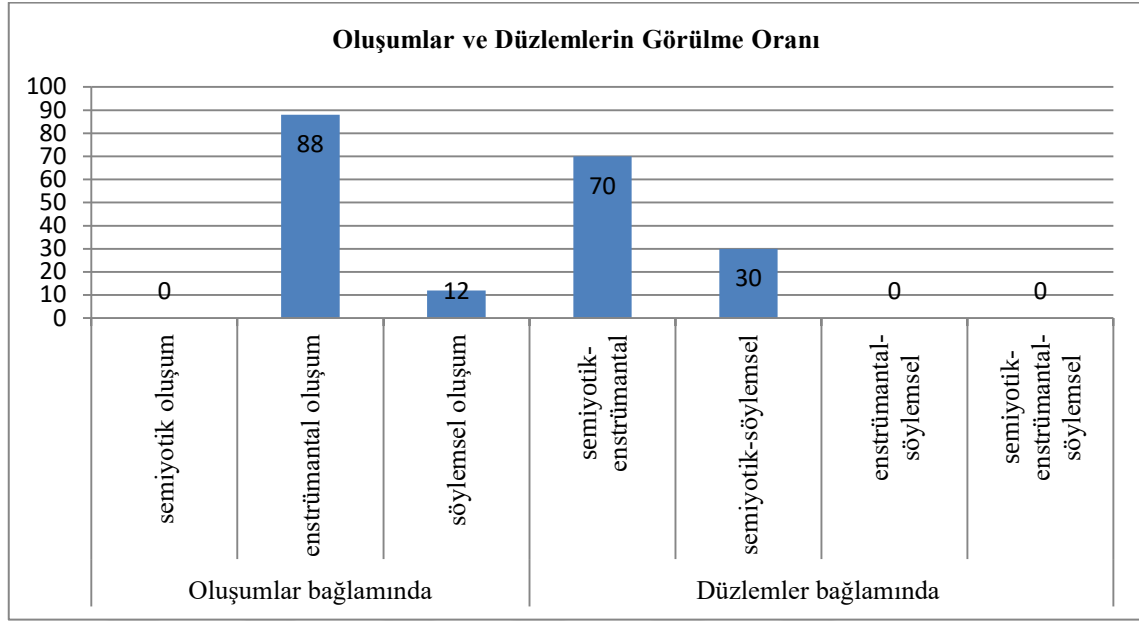
Eşitliği Bozmayan İşlemleri Belirlemeye Yönelik Bulgular:

Kayra'nın 3. Adım: Etkinlik.2. ve ilişkili alıştırılma süreci oluşumlar ve oluşumların ikiye bölünmüş kombinasyonu bağlamında incelendiğinde Tablo 3.6 ve Grafik 3.6 elde edilmiştir. 3. adım sürecinde %88 oranla enstrümantal oluşum, %12 oranla söylemsel oluşum sürecinin bileşenlerinin görüldüğü; %70 oranla Kayra'nın çalışmalarının semiyotik-enstrümantal düzlemde, %30 oranla da semiyotik-söylemsel düzlemde yer aldığı söylenebilir.

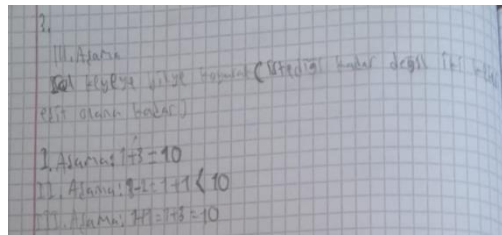
Tablo 3. 6. Kayra'nın 3. Adımında oluşumlar ve düzlemlerin sorularda görülme durumu

Eşit İşaretinin Yorumlanmasında Oluşumlar ve Düzlemler		E.2.S.1.	E.2.S.1.A.	E.2.S.2.	E.2.S.3.	E.2.A.1.S.1.	E.2.A.1.S.2.	E.2.A.2.S.1.
Oluşumlar bağlamında	Semiyotik oluşum							
	Enstrümantal oluşum	4	1	3	9	6	7	5
	Söylemsel oluşum		2				2	1
Düzlemler bağlamında	Semiyotik-enstrümantal						7	
	Semiyotik-söylemsel			2	1			
	Enstrümantal-söylemsel							
	Semiyotik-enstrümantal-söylemsel							

Grafik 3. 6. Kayra'nın 3. Adımda oluşumlar ve düzlemlerin görülme oranı



Terazi modeli ile ilişkili doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sayısal, sözel, farklı temsil geçişleri ile bunu desteklemeyi hedefleyen etkinlik 2. Soru.3'te Kayra eşit işaretini ayırıcı özelliği ile kullandığından bu kullanım denge ve eşitlik anlamını desteklememiştir. Terazi modelini dengede olduğunda eşit işareti ile matematiksel olarak anlatabilen Kayra; terazi dengede olmadığıda küçüktür, büyüktür sembolleri yerine yine eşit işaretini kullanarak anlatmaya çalıştığından terazi modeli ile eşit işareti arasındaki ilişkinin tam olarak netleşmediği düşünülmüştür (Görsel 3.23). Öğretmen rehberliği, grup tartışmalarından sonra terazi modeli ile eşit işareti arasında anlamlı ilişkiyi kurabilmiş; terazi modelinin dengede olma durumunda eşit işaretini kullanma; dengede olmadığı durumlarda büyüktür-küçüktür sembollerini kullanması gerekliliğinin farkına vardığından ve problemin çözümünde de fiilen kullanabildiğinden **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergeler olarak değerlendirilmiştir.



Görsel 3. 23. Kayra'nın Etkinlik-2 soru.3'e ilişkin cevabı

Kayra: Evet. Zaten orada 1. Aşamada bu aşamada ne yapacağımı belirleyemedim. Aklım ondan sonra karıştı.

Araştırmacı: Hmmm peki neden 3? 3 neden. 3 tane...

Kayra: 3, metinde 3 tane geçiyor diye gördüm o yüzden ben de 3 dedim

Araştırmacı: Hmmm peki şurasında ne anlatmak istedin. (ikinci sırayı ekranda kırmızı kalem içine alıyorum). 3 eksi 2 eşittir 1 artı 1.

Kayra: Orası küçük kalıyor. O durum normal orada 10 yüksek kalıyor. Bu küçük kalıyor normal

Araştırmacı: Peki bu 3 nereden geldi? Bu 2 nereden geldi? 1 nereden geldi. Buradaki 1 nereden geldi? Onlar ne demek yani?

Kayra: İşte 2 tane eklediğini şey yaptığı için 2 tane aldığını bildiğim için. Onun sonucu da 1. Yani burada 1 torba var. 1 bilye kaldı. Bir torba ve bir bilye kaldı dedim

Araştırmacı: heee 1 torba ve 1 bilye oradakiler.

Kayra: Evet.

Cebirsel temsil-terazi modeli-sözel temsil ilişkilendirmesi ile doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulamayı gerektiren Etkinlik.2 Alıştırma.2 soru.1'de Kayra'nın grup görüşmesinden önce yaptığı işlemlere bakıldığında eşitliğin her iki tarafına da aynı sayı ile aynı işlem yapıldığında eşitlik bozulmaz ilkesinden hareket etmediği, zihninde sonucu bulmasını sağlayacak işlemi yaptığı görülmüştür. Grup görüşmeleri sırasında öğretmen rehberliği ve derinlemesine sorulardan sonra eşit işaretini problemin çözümünde işe koşabildiği görüldüğünden **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergeler olarak değerlendirilmiştir. Soruları çözerken kullandığı düşünme yollarını açıkladığı **söylemsel oluşumun** bileşenlerine bakıldığında yaptığı adımları grup görüşmelerinde mantıklı matematiksel gerekçeler sunarak açıklamaktansa önceki sorulara, söylenenlere referans gösterdiği görülmüştür.

Araştırmacı: (torba+3=17 yazan soru) Tamam. Ben de aslında senin anladığını anlıyorum buraya bakınca. Çünkü şöyle düşünüyorum. Eee torba var. Yanında 3 tane daha var. Eee sen de yazdın zaten buraya çizdin daha doğrusu. Karşı tarafa da 17 yazdın. Teraziyi de dengede yaptın. Teraziyi neden dengede yaptın bu arada?

Kayra: Normal genellikle teraziyi bozun demedikleri için ben de normal şey yaptım. Dengeledim.

Araştırmacı: Ama sadece bozun demedikleri için teraziyi dengede yapabilir miyiz yoksa başka bir şey gösterir mi bize terazinin dengede olduğunu. Mesela bu soruya bakınca neresine bakınca terazinin dengede olduğunu anlayabiliyoruz?

Kayra: Hocam bizim bir önceki derste şey yaptığımız gibi. Gene bunun gibi bir tane şey çözmüştük.

3.1.1.4. Dördüncü adım: son değerlendirme

Bu bölümde Kayra'nın 4. Adım: Son değerlendirmeye yönelik bulguları kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları ve matematiksel çalışma uzayı ile bulguları başlıkları altında sunulmuştur.

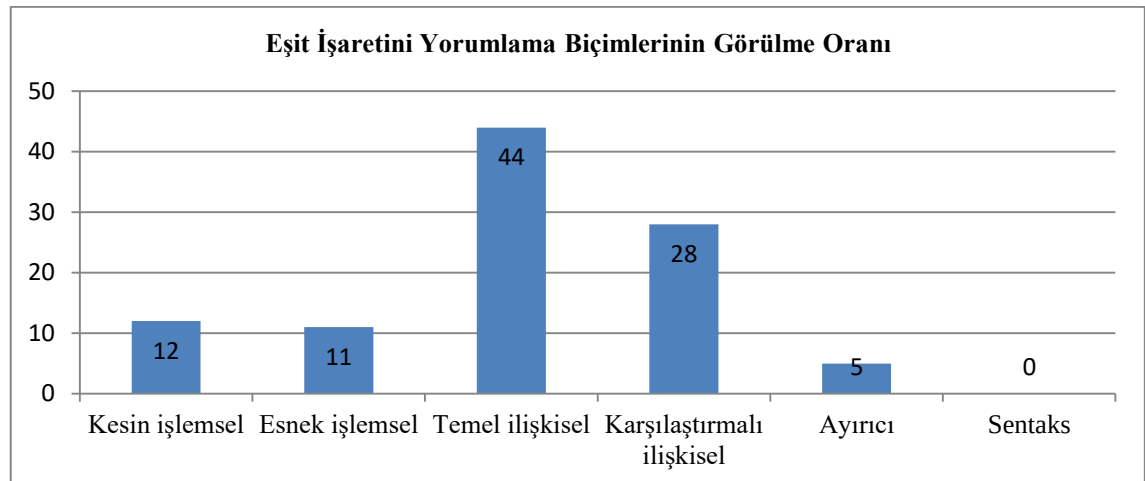
3.1.1.4.1. Kayra'nın kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları

Kayra'nın 4. Adım: son değerlendirme sürecinde eşit işaretini yorumladığı durumlar incelendiğinde farklı yorumlama biçimlerini kullanma oranlarına dair Tablo 3.7 ve Grafik 3.7 elde edilmiştir. 4. adımda temel ilişkisel yorumlamayı %44 oranında kullandığı görülürken; sonrasında onu sırasıyla %28 oranıyla karşılaştırmalı ilişkisel, %12 oranında kesin işlemsel, %11 oranında esnek işlemsel, %5 oranında ayırıcı yorumlamanın takip ettiği görülmüştür.

Tablo 3. 7. Kayra'nın 4. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimlerinin sorulara göre dağılımı

Eşit İşaretini Yorumlama Biçimleri	S.D.S.1.	S.D.S.2.	S.D.S.3.	S.D.S.4.	S.D.S.5.	S.D.S.6.	S.D.S.7.	S.D.S.8.	S.D.S.9.	S.D.S.10.	S.D.S.11.	S.D.S.12.
Kesin İşlemsel Yorumlama	1		8				2	1	4	1	4	1
Esnek İşlemsel Yorumlama	2				10	1	6					
Temel İlişkisel Yorumlama	3		4	4		11	4	17		20	4	14
Karşılaştırmalı İlişkisel Yorumlama	1		9	9		8	2	10		8		3
Ayırıcı	2		3				2				1	1
Sentaks												

Grafik 3. 7. Kayra'nın eşit işaretini yorumlama biçimlerinin görülme oranı



Eşit ‘=’ işaretini anlamlandırmaya yönelik bulgular (1.,2.,3.,5. ve 11. sorular):

Öğretimden sonra işareti anlamlandırmayı destekleyen ‘ $7+3=10$ sorusunda’ eşit işaretinin amacı sorulduğunda Kayra’nın kesin işlemsel ve temel ilişkisel yorumlamayı gerektiren cevaplar verdiği; bireysel görüşmelerde sorulan derinlemesine sorularda esnek işlemsel ve ayırıcı özelliğine de vurgu yaptığı görülmüştür.

Kayra: Ok ile gösterilen sembol adı nedir? Eşittir yazdım. Bu sembol ne anlama gelmektedir açıklayınız. Birinci adım.... Yani iki tane şey olarak düşündüm. Birinci adım işlemin sonuçlarının aynı olduğunu göstermek için. Yani oraya pek sığdıramadım.

Araştırmacı: Tamam.

Kayra: İkide bir işlemden diğer bulduğumuz sonucu ayırmak için yazdım. Yani ayırmak. [...]

Kayra: O soru benim ikinci yaptığım gibi. İkinci söylediğim gibi.

Araştırmacı: O zaman sonucu işlemden ayırmak için mi?

Kayra: Evet. Burada sonucu işlemden ayırmak için kullanmışlar. Ama ben diğer şeyi kullandım. Diğer şeyi de söyledim.

Araştırmacı: Peki o birinci anlama bir örnek nasıl bir örnek verebilirsin? Hani birincisinde iki işlemin..

Kayra: Yapayım mı?

Araştırmacı: Olur. Hani birincisinde iki işlemin Ekrana da yazabilirsin. Telefonun ekranına.

Kayra: Ayyy tamam hocam. Mesela 70 artı 10, 80 yapıyor. Eşittir 60 artı 20 de 80 yapıyor.

Eşdeğer denklemlerde işareti anlamlandırmayı destekleyen 3. sorudaki sorulardan biri olan ‘ $5+4=6+3=9$ ’ sorusunda temel ilişkisel yorumlamayla doğruluğunu kontrol ettikten sonra farklı yolla yapabilmesi adına bireysel görüşmede rehberlik edildiğinde eşit işaretini yorumlamada temel ilişkisel yorumlamadan karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamaya geçebildiği görülmüştür. Var olan bir örnekte karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamanın varlığını fark edebildiği görülmüştür. Eşitliğin tek tarafında işlem diğer tarafında sonuç olduğunda eşit işaretinin amacını ‘sonucu belirtmek-göstermek’ ‘sonucu ayırmak’ ifadeleriyle anlattığı görülmüştür. $5+4=6+3=9$ gibi eşitliğin iki tarafında da işlem olması durumunda ‘iki işlemin sonucu aynı’ ‘iki işlemin sonucu eşit’ ifadeleriyle anlattığı görülmüştür. Önceleri eşitliğin iki tarafında da işlem olması durumunda

dengede terimini kullanmanın ve terazi modelini kullanmanın aşağıda verilen bireysel görüşmeden alıntıda olduğu gibi yanlış olduğunu düşünürken sonrasında öğretmen rehberliğiyle beraber dengede ve terazi terimlerini de sıklıkla kullandığı görülmüştür.

Araştırmacı: Var ama üstüne de soru işareti koydum sana soruyorum. Diyorum ki Kayra diyorum sence bunların ikisi birbirine eşit mi diye sana soruyorum. Sen de bana diyorsun ki ‘evet eşit’ ben de diyorum ki bana başka bir yöntem bul diyorum. Toplayarak yapma diyorum. Mesela 5’le 4’ü toplayıp, 9. 6’yla 3’ü toplayıp 9. Heh işte bak ikisi birbirine eşit çıktı. Öyle deme diyorum. Başka bir yöntemle yap. Nasıl yaparsın?

Kayra: Toplamadan mı yapacağız?

Araştırmacı: Evet. Toplamadan.

Kayra: İki ortalarında eşittir var mı diye bakarım. Ya da normal sayılara bakarım oradaki yaptıkları yani iki şeyde yaptıkları normal böyle yapmayabilirlerdi ama 5 artı 4 sanki 3’ten bir tane almışlar da 6’ya vermişler gibi farklı olsun diye.

Araştırmacı: Hmmm kimden almışlar kime vermişler Kayra o kısmı anlayamadım.

Kayra: 3’ten almışlar 6’ya ver... normalde üç iki olmuş ayyy 4’müş. Şöyle gösterebilir miyim?

Araştırmacı: Tabi.

Kayra: 5 artı 4’müş. Normal yandaki gibiymiş. 4’ten 1 tane vermiş ya 5’e, 6 olmuş burası da 3 kalmış.

Hatalı verilen denklemden yola çıkarak işareti anlamlandırmayı destekleyen 11. soruda ($6+9=15:3=5+2=7$) öğretimden önce de eşit işaretinin kesin işlemsel yorumlamasını kullanarak ifadenin doğru olduğuna karar veren Kayra’nın öğretim ve alıştırmalardan sonra bireysel görüşmede yine kesin işlemsel yorumlamayı kullanmayı tercih ettiği görülmüştür. Kesin işlemsel yorumlamayla işlem yanlış yaptığı için ifadenin yanlış olduğunu söyleyen Kayra öğretmen müdahalesinden sonra işlemi yanlış yaptığını fark etse de yine eşit işaretini kesin işlemsel yorumlayarak eşittirden sonra yazılan sayının eşittirden önce yapılan işlemin sonucunu gösterdiğini düşünerek ifadenin doğru olduğuna karar vermiştir. Bireysel görüşmede eşit işaretini hangi amaçla kullanacağına eşit işaretinin koyulduğu yere bakarak anlayacağını ifade ettiği; eşit işareti nereye koyulursa koyulsun tüm yorumlama biçimlerinde düşünme yollarını desteklemesi ve aynı sonuca ulaştırması gerektiğini içselleştiremediği görülmüştür. Eşit işaretinin ayırıcı özelliğini fark ediyor olsa da anlamlı bir şekilde bu özelliği problem çözümünde kullanamadığı görülmüştür. Aynı zamanda eşit işaretinin amacının eşittirin yerine göre değişeceğini düşündüğü eşit işaretinin amaçlarını: eşittir işlemin sonunda

olduğunda cevabını yazmak, sonuç belirtmek, cevabını göstermek; eşittir ortada kullanıldığında eşit olduğunu göstermek, dengede olduğunu göstermek, birbirine eşit olduğunu göstermek amacıyla kullanıldığını aşağıda verilen bireysel görüşme dökümünden alıntıda görüldüğü gibi ifade ettiği görülmüştür. Kayra'nın eşit işaretinin aynı zamanda 'durmamızı söyleme' gibi bir amacının da olduğunu da ifade ettiği görülmüştür.

Araştırmacı: Neden doğru diye düşünüyorsun?

Kayra: Şimdi şöyle söyleyeyim. 6 artı 9, 15 eder. Bu 15'i 3'e bölmüş 5 ediyor. 5 ediyor. Ondan sonra istediği bir sayı ile toplamış kafadan. Hangisi en kolayı gibi? O, ondan sonra 2'yle toplamış. 7 bulmuş.

Araştırmacı: Hmmm o zaman teker teker sorayım. Mesela buradaki eşittirin amacı ne sence? (ilk eşittiri ekran üzerinde yuvarlak içine alıyorum) şu birinci sıradaki eşittirin amacı.

Kayra: İni sonucu belirtmek. Buradakilerin hepsi sonucu belirtmek için kullanılmış. Bir de eşit olduğunu göstermek için var ama burada öyle kullanılmamış.

[...]

Kayra: Birinci yaptığımızdan ilham aldım.

Araştırmacı: Tamamdır. Peki o zaman burada neyden ilham aldın? (Araştırmacı 11.soruyu gösteriyor) bu soruda 11. soruda.

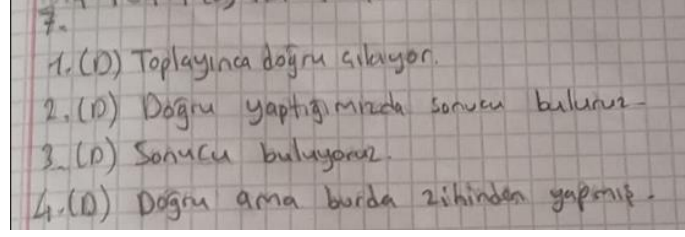
Kayra: Burada eşittirlerin kullanıldığı yerlerden.

Araştırmacı: Mmm o zaman Kayra yani biz eşittirlere şu amaçla kullanıyorsak doğru kullanılmış. Ama bu amaçla kullanılıyorsa yanlış kullanılmış deyip mi karar vereceğiz doğru mu yanlış mı diye.

Kayra: Evet. Mesela sana şey diyordur: ne diyeyim... bir soruda sana soru vermiştir. Hangisi birbirine.... Hangi amaçla kullanılmıştır dediğinde iki işlem varsa ortasında eşittir varsa hani oradan sonra eşitmiş. Ama şöyle yapsa 6 artı 7 eşittir cevabını yazsa. Bu sonucu belirtmek için oluyor. Bunu ayırt etmen lazım.

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik bulgular (4., 6., 7. ve 8. sorular):

Denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirlemede eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeyi destekleyen 7. soru olan $7+5=12$; $7+5-5=12-5$ şeklinde devam eden soruda Kayra'nın kesin işlemsel, esnek işlemsel, temel ilişkisel yorumlamaları kullanarak ifadelerin doğruluğuna karar verebildiği (Görsel 3.24), bireysel görüşmede sorulan derinlemesine sorular ve öğretmen rehberliğinden sonra ayırıcı ve karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı da kullanabildiği görülmüştür.



Görsel 3. 24. Kayra'nın son değerlendirme soru-7'ye ilişkin cevabı

Kayra: Oo normal ben.. ben burada şey diğerinin devamını birincide yaptığımızın devamını getirerek yapmaya çalıştım. Ama şöyle de anlatabilirim. 7 tane şekerim var. 5 tane daha toplayayım.

Araştırmacı: Kayra 7 tane şekerim var 5 tane daha toplayacağım dedin galiba. Ondan sonra bir şey dedin mi duyamadım?

Kayra: O gün 5 tanesini yedim. Yani birinci bölümde eşittirden ilk öncesinde şey yaptım. 7'yi buldum normal aldığım şekeri yedim yani. Aldığım şekeri yedim 7'nin üstüne aldığım şekeri yedim.

Araştırmacı: Aldığım şekeri yedim dediğin yer neresi? Bir gösterir misin sayıların üzerinde.

Kayra: Yani 5'i aldım. Yani 5 tane şekeri aldım. İlk önce 5 tanesini aldım. Ondan sonra 5 tanesini yedim.

Araştırmacı: Öyle 5 tanesini aldım 5 tanesini yedim deyince ne kadar kalmış oldu peki senin elinde?

Kayra: 7 tane. İlk sayı yani. İlk sayı.

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeyi destekleyen 6. soruda ' $4+5=4+5$ ' veya ' $4-1=4-1$ ' gibi eşitliğin iki tarafına da aynı sayı eklendiği ya da eşitliğin iki tarafından da aynı sayı çıkarıldığı durumlarda bireysel görüşmede 'sayılar eşit' 'sonuçlar birbirine eşit' 'sonuçları aynı' topladığımızda eşit' gibi ifadelerden 'sonuçlar birbirine eşit' 'sonuçları aynı' ifadelerinin temel ilişkisel yorumlamayı tanımladığı; 'sayılar eşit' ifadesinin de karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı tanımladığı düşünülmüştür. Eşit işaretinin olduğu durumları terazi modeli ya da terazi modelini andıran temsillerle modelleyebildiği görülmüştür.

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeyi gerektiren 7. soruda ' $7+5=12$; $7+5-5=12-5$; $7=12-5$; $7=7$ ' şeklinde adım adım verilen ifadelerde eşit işaretinin varlığında, bireysel görüşmede birinci bölüm, eşittirden öncesi, eşittirin sol tarafı-sağ tarafı gibi ifadeleri kullanarak eşit işaretinin ayırıcı özelliğine vurgu yaptığı görülmüştür. Aritmetik olarak verilen bir işlemi bir bağlam içinde hikayeleştirerek sözel olarak ifade edebildiği; eşit

işaretinin olduğu durumları dengede, birbirine eşit, terazi gibi ifadelerle açıklamaya, desteklemeye çalıştığı görülmüştür.

Araştırmacı: Terazi gibi derken nereye koydun mesela terazide? Hangilerini nereye koydun hangilerini nereye koydun?

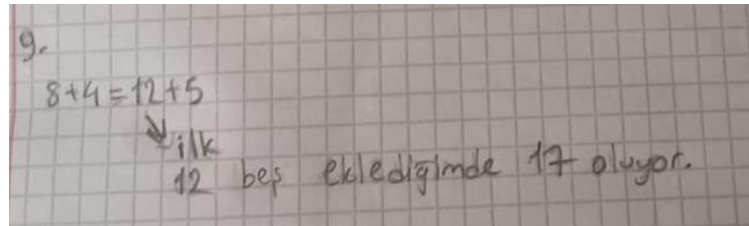
Kayra: Eşittirden sol tarafı bir şeyde. 12 eksi 5 birşeyde. 12 eksi 5 sol (yanlış söylediğini farkedip hemen düzeltti) sağda.

Araştırmacı: tamam

Kayra: Diğer taraf da sol taraf oluyor.

Eşitliği sağlayan eksik değeri bulmaya yönelik bulgular (9., 10. ve 12. sorular):

Eksik değeri bulmayı destekleyen $a+b=kutu+c$ formundaki 9. soruda ‘ $8+4=kutu+5$ ’ ifadesinde ilk değerlendirmede öğretmen ile etkileşim, görüşmeler, ara etkinlikler, alıştırmalara rağmen hala verilmeyeni bulmak için Görsel 3.25’de verildiği gibi eşit işaretinin kesin işlemsel yorumunu kullandığı bu nedenle de verilmeyeni yanlış hesapladığı görülmüştür. Eksik değeri hesaplarken terazi modelinden yararlanması için rehberlik edildiğinde de eşit işaretinin kesin işlemsel yorumlanma biçimini kullandığından $8+4$ ifadesinden sonra yazan $kutu+5$ ifadesini $12+5$ yani 17 olarak yorumladığından $8+4$ ile 17’nin terazi modeli üzerinde gösterilemeyeceğini bireysel görüşme dökümünden verilen aşağıdaki alıntıda da görüldüğü gibi düşündüğü görülmüştür.



Görsel 3. 25. Kayra’nın son değerlendirme soru-9’a ilişkin cevabı

Kayra: 12’ye 5 eklediğinde 17 oluyor. O son sonucu. siz bir öncekinde bunu ilk yaptığımızda siz dediniz ya 12 artı 5 ama neden dediniz ya ben de orada açıklamak istedim.

Araştırmacı: Hmm o zaman ilk sonuç ikinci sonuç gibi sonuçlar mı var. İki tane farklı sonuç.

Kayra: Burada kutuya hangisi yazılması gerekiyor diyor ya ben ilk kutuyu yazdım. Ama belki siz 12’yi ... 17’yi de şey yapabildiniz... kutudaki sonucu topladığınızda gene kutu oluyor ya

Araştırmacı: Peki kutudaki sonuçla 5’i topladığımda gene kutu mu elde ediyorum?

Kayra: Hayır. Oradaki şey demek istiyorum. Kutu artı 5 var ya orası 12 olsa 17 oluyor. Ama oradaki kutuyla 5'in toplamı şey oluyor. Ama oradaki 17'nin içinde kutu var ya o da kutu sayılabilir diye. O yer de kutu sayılabilir diye.

Araştırmacı: Hmmm peki Kayra yukarıda anlatırken mesela şu 8 artı 9 da falan böyle teraziler çizdin. Burada hiç terazi çizmedin. Burada terazi olması mümkün mü?

Kayra: Mümkün (düşünüyor, bir 10 saniye düşündükten sonra) mümkün değil

Araştırmacı: Neden mümkün olmadığına karar verdin? Nasıl karar verdin?

Kayra: Bir tane 8 artı 4, 12 oluyor. Kutu 12 olsa 12 artı 5, 17 oluyor ve eşit olmuyor.

Eşitliği sağlayan eksik değeri bulmayı destekleyen 10. soruda Kayra'nın eşit işaretinin kesin işlemsel, temel ilişkisel ve karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamalarını kullanarak verilmeyeni hesaplayabildiği görülmüştür. 10. sorudan farklı olarak (10. soruda eksik değerler eşittirden hemen sonra yer almaz) 9. soruda eşittirden hemen sonra eksik değer yer alması durumunda Kayra'nın kesin işlemsel yorumlamayı kullandığı görüldüğünden bu eksikliğin giderilmesi adına bireysel görüşmede sorulan ilave soruda Kayra'nın temel ilişkisel ve karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanabildiği görülmüştür. Bunun hemen ardından yeniden 9. soruya geçtiğinde $8+4=\text{kutu}+5$ ifadesinde de karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanarak eksik değeri hesaplayabildiği görülmüştür.

Araştırmacı: Tamam yazayım. Mesela şöyle bir soru sorsaydım diyelim ki 3 artı 9 eşittir nokta nokta nokta nokta artı 6.

oş bırakılan yerleri uygun bir şekilde doldurunuz. N

$$3 + 9 = \dots + 6$$

Kayra: (durdurdu ekrana bakarak içinden işlem yaparak düşünüyor) buldum da başka bir yoldan daha yapmaya çalışıyorum

Araştırmacı: Tamam. Bulduğun yol nasıl? Onu anlat sonra ötekini düşün sen bu sırada.

Kayra: Gene normal şeydeki gibi. Şey yapabilirdim mesela. Burada 12 ediyor ya onu yapabilirdim. Başka bir yol. Gene 3 artı 9 yapardım 12. 12'yi kaç böl... ayyy 12'yi 2'ye bölerdim 6 çıkardı

Araştırmacı: Neden 2'ye böldün?

Kayra: Normal 12'yi kaç bölceğini düşündüm ve kaçta 12'nin çıkacağını düşündüm. 6 artı 6, 12 ediyor. Ve eşit oluyor. Sayıları değişik oluyor.

Araştırmacı: Hmmm bu birinci yol mu?

Kayra: Hatta şey yapmışlar hocam. 9'dan 3 tane almışlar. 6'ya vermişler gibi.

[...]

Kayra: Hocam ben bunu nasıl şey yapacağımı buldum. Burada alma verme vardı ya ikinci şey ikinci yaptığım... o gibi yapmışlar. Sanki 4'e bir tane vermişler de diğer taraf 7 kalmış
Araştırmacı: 4'e bir tane vermişler?

Kayra: 5 olmuş

Araştırmacı: Diğer taraf 7 kalmış heeee.

Kayra: 5 olmuş. 8den bir tane çıkardığımızda 7 oluyor. 7 artı 5, 12 oluyor

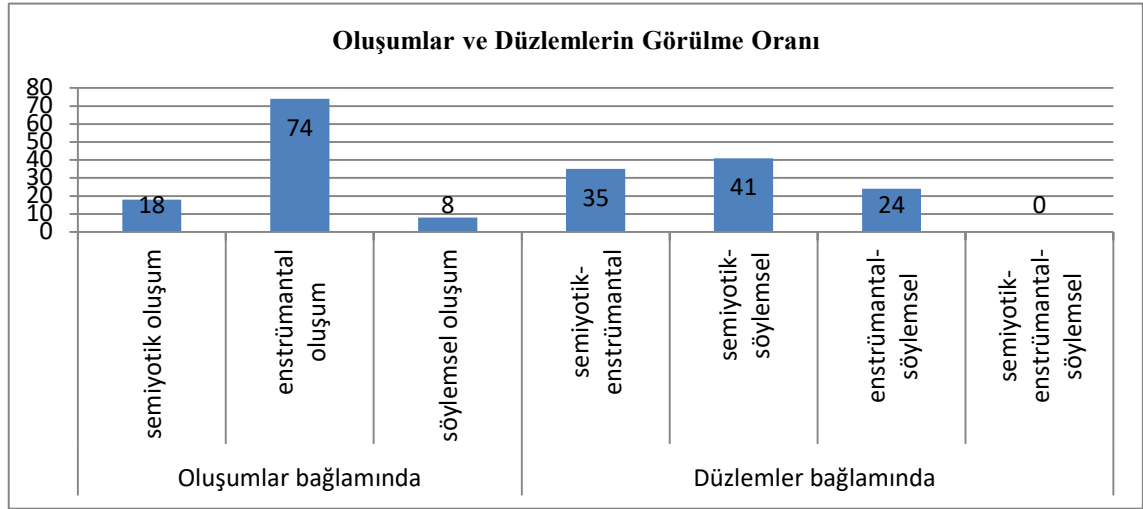
3.1.1.4.2. Kayra'nın matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları

Kayra'nın 4. Adım: son değerlendirme süreci oluşumlar ve oluşumların ikiyeşerli kombinasyonu bağlamında incelendiğinde Tablo 3.8 ve Grafik 3.8 elde edilmiştir. 4. adım sürecinde %74 oranla enstrümantal oluşum, %18 oranında semiyotik oluşum, %8 oranında söylemsel oluşum sürecinin bileşenlerinin görüldüğü; %41 oranında Kayra'nın çalışmalarının semiyotik-söylemsel düzlemde; %35 oranında semiyotik-enstrümantal düzlemde; %24 oranında enstrümantal-söylemsel düzlemde yer aldığı söylenebilir.

Tablo 3. 8. Kayra'nın son değerlendirmede oluşumlar ve düzlemlerin sorularda görülme durumu

Eşit İşaretinin Yorumlanmasında Oluşumlar ve Düzlemler		S.D.S.1.	S.D.S.2.	S.D.S.3.	S.D.S.4.	S.D.S.5.	S.D.S.6.	S.D.S.7.	S.D.S.8.	S.D.S.9.	S.D.S.10.	S.D.S.11.	S.D.S.12.
Oluşumlar bağlamında	Semiyotik oluşum	4					1	1	1	2			
	Enstrümantal oluşum			8	4		4	6	3	2	8	1	2
	Söylemsel oluşum						2	1					1
Düzlemler bağlamında	Semiyotik-enstrümantal			3	1						7		2
	Semiyotik-söylemsel			1	6		2	1	1		3		1
	Enstrümantal-söylemsel			5			2		1		1		
	Semiyotik-enstrümantal-söylemsel												

Grafik 3. 8. Kayra'nın son değerlendirmede oluşumlar ve düzlemlerin görülme oranı



Eşit '=' işaretini anlamlandırmaya yönelik bulgular (1.,2.,3.,5. ve 11. sorular):

İşareti anlamlandırmayı destekleyen $a+b=c$ standart ifadesinde eşit işaretini yorumladıktan sonra Kayra'ya bireysel görüşmede 'eşittir' dendiğinde gözünde ne canlandığı sorularak **semiyotik oluşumun** bileşenleri ortaya çıkarıldığında ilk değerlendirmede anlamdan uzak bir şekil olarak yorumlayabildiği görülürken; etkinlikler, alıştırılardan sonra son değerlendirme bireysel görüşmede eşit işaretini terazi modeli ile de ilişkilendirebildiğinden kavrama dair imajının zenginleştiği görülmüştür.

Araştırmacı: Tamam. Bir de Kayra ben şey soracaktım. Mesela eşittir dediğimde eşittir kelimesini kullandığımda şöyle bir düşünsen gözünde nasıl bir resim canlanıyor. Nasıl şeyler geliyor gözünün önüne. Ne aklına geliyor mesela eşittir dediğimde.

Kayra: Bir terazinin eşit olması. Normal bir kefedeyse aynı sayılar olup, onların birbiriyle aynı sayıda olmaları eşit durmaları terazi yani. Terazide eşit durmaları

Araştırmacı: Peki ne? Terazide eşit duran ne?

Kayra: Domates... istediği gibi olur.

Araştırmacı: Hmmm peki terazide.

Kayra: İstedğim şey olur.

Araştırmacı: Terazide mesela eşitliği nasıl gösterirsin. Terazide eşit olduklarını nasıl anlattırır?

Kayra: İki kefeyi aynı yere getiririm iki kefeyi.

Eşdeğer denklemlerde işareti anlamlandırmayı destekleyen son değerlendirme soru.3'te bireysel görüşmede iki sayının toplamını veren eşitliğin aynı tarafındaki bir sayıdan alıp yine aynı tarafındaki diğerine verdiğinde eşitliğin bozulmayacağını terazi modeli ile anlatmaya çalışsa da terazinin özelliklerinden ya da tanımından doğru ve tam olarak yararlanamadığı görülmüştür. Problemin çözümünde terazi aracını kullanmaya başvuruyor olması ve eşit işaretini problemin çözümünde işe koyuyor olması **enstrümantal oluşumun** bileşenlerinin göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Ancak terazi modelinde karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamanın gösterilemeyeceğini düşünmüş olması terazi ve eşit işaretinin ilişkilendirilmesi bilişsel sürecindeki eksiklikleri gösterdiği değerlendirilmiştir.

Araştırmacı: Tamam 4'ten 1 tane almış kime vermiş.

Kayra: 5'e.

Araştırmacı: 5'e vermiş.

Kayra: Yan taraftaki de 6 olmuş.

Araştırmacı: Heee. Peki öyle yapınca eşit mi olur?

Kayra: Evet

Araştırmacı: Neden?

Kayra: Buradaki normal, o sadece şey yapmak istememiş. Aynı olsun istememiş. Ya da hocası şey sormuş farklı işlemlerle gösterin bunu farklı sayılarla gösterin demiş.

Araştırmacı: Mmm sonra o da şöyle bir yöntem kullanmış 4'ten bir tane almış 5'e vermiş.

Kayra: Evet

Araştırmacı: Pekiiii ben de soruyorum nasıl yani diyorum yaaa 4'ten bir tane alıp 5'e verince nasıl eşit çıkıyor neden eşit çıkıyor?

Kayra: Biz orada sadece sayıları değiştiriyoruz ama aldığımızı geri... bir taraftan çıkarıyoruz bir taraftan alıyoruz ama dengede... dengede demeyeyim de eşit oluyor gene. Ama terazide olsa olmaz.

Eşdeğer denklemlerde işareti anlamlandırmayı destekleyen son değerlendirme soru.3'te öğretmen rehberliği ile eşit işareti ve terazi modeli arasındaki anlamlı ilişkiyi kurup teraziyi problemin çözümünde anlamlı bir şekilde işe koşabildiği ve karşılaştırmalı ilişkisel yorumlayabildiği görülmüştür. Bu bağlamdaki çalışmalarda bireysel görüşmede Kayra'nın yaptığı adımları karşılaştırmalı ilişkisel yorumlayarak terazi modeli üzerinde açıklayabildiği görüldüğünden bu veriler çalışmasının **enstrümantal-söylemsel** düzlemde olduğu yönünde yorumlanmıştır.

Araştırmacı: Birisinden alıyorum birisine veriyorum falan filan diye anlatıyorsun ya. Terazide de olur. Nasıl daha rahat anlatırsan.

Kayra: Çizeyim mi hocam?

Araştırmacı: Süper olur. Ekranın üstüne çizersen daha da güzel olur. Hem.

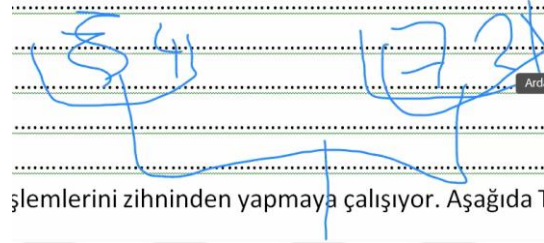
Kayra: Dur şunu çizeyim. Normal bir tanesi böyle bir tanesi böyle. Bunlar birbirine eşit.

Araştırmacı: Tamam.

Kayra: Pek olmadı ama.

Araştırmacı: Gayet güzel.

Kayra: Bunlar eşit. Bir tanesinde 5 bilye var. 5'le 4 bilye var. Bir tanesinde 7 ve 2 bilye var.



Kayra: Biz o ayrı ayrı ama gene de aynı oluyor. Yan tarafta da şey yapmışlar. Gene 5 artı 4 gibiymiş. Ama 2 tane alıp 7'ye vermişler. Ama gene de dengede oluyor.

Araştırmacı: 2'den mi almışlar Kayra?

Kayra: Evet. 2'den almışlar 5'e vermişler. Normalde şey gibiymiş. 5 artı 4 gibiymiş.

Araştırmacı: 2'den alınca şuradan alacağım yani (ekrandan gösteriyor) 5'e mi vereceğim?

Kayra: Hayır. Sağ kefedeki 5 artı 4 varmış. Gene soldaki gibi ama öyle olmaz ya da gene hoca demiş 2 tane almış 3 tane de alabilirdi 1 tane de alabilirdi. O da şey yapmış. Sayıları değiştirmiş. 4'ten 2 tane almış 7'ye vermiş. Ayyy 5'e vermiş. Yanındaki. Sağ kefedeki 5'e vermiş.

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik bulgular (4., 6., 7. ve 8. sorular):

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeyi destekleyen denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirleme sorusu olan son değerlendirme soru.6'da '4-1=4-1 sorusunda' bireysel görüşmede öğretmen rehberliğinden sonra Görsel 3.26'da verilen terazi modeline benzer bir tabak modelini problemin çözümünde anlamlı bir şekilde kullanabilmesi **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin gösterge olarak yorumlanmıştır. Terazii modeline benzer bir tabak modeli kullanırken terazinin tanımı- özelliklerinden bahsetmediği sadece yaptığı adımları anlattığı için bu verilerden yola çıkarak çalışmanın **semiyotik-enstrümantal** düzlemin bileşenlerine ilişkin göstergelere sahip olduğu düşünülmüştür. Terazii modelini çizmeden de gözünde canlandırarak

problemin çözümünde işe koşabiliyor olması **semiyotik oluşumun** bileşenlerinin varlığına işaret olduğu düşünülmüştür.

Kayra: 11 şey diğerini düşündüm. Ben varım 11 şey normal bir tabak var. Bu benim. (Sol tarafa tabak içinde daireler çiziyor). Bu da arkadaşımın. İkimiz de birer tane meyveyi yiyoruz ya da çikolatayı yiyoruz ya da şeker yiyoruz ama gene de eşit olur. Hiç paylaşmaya bana vermeye onun bana vermesine gerek kalmıyor

Araştırmacı: Hmmm bu da biraz terazi gibi oldu galiba bu gösterdiğin şekil.

Kayra: Bu terazi gibi ama gene eşit oldu ama terazi çizmeden anlattım. Başka bir şey çizerek. Terazi gibi oldu ama terazi çizmeden anlattım.



Görsel 3. 26. Kayra'nın son değerlendirme soru-6'ya ilişkin cevabı

Eşitliği sağlayan eksik değeri bulmaya yönelik bulgular (9., 10. ve 12. sorular):

Eksik değeri bulmayı destekleyen 10. soruda ' $8+6+9 = 8+....$ ' eşitliğin iki tarafında da işlemin olduğu ve bir tarafta bilinmeyen yer aldığı durumlarda eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlanmasını problemin çözümünde anlamlı bir şekilde kullanabildiği için **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergesi olarak kabul edilmiştir. Bireysel görüşmede soruyu çözerken kullandığı adımların sebebini açıklarken eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlanması özelliğini kullanarak doğruladığından çalışmanın **semiyotik-söylemsel** düzlemde yer aldığı ele alınmıştır.

Kayra: 15 dedim

Araştırmacı: Çünkü demişsin. Her iki tarafı da eşit yapmak ... ondan sonrası okunmuyor

Kayra: yapmak için.

Araştırmacı: Eee. İki tarafı da eşit yapmak için. Nasıl ?

Kayra: Ortasında eşittir var. İki taraflarında da işlem var. Araştırmacı de o yüzden o sayıları birbirine cevapları eşit olsun diye. Ben de 15'i seçtim.

Araştırmacı: Heee 15'i nasıl buldun peki?

Kayra: Sol taraftakilerle sağ taraftaki 8'i çıkardım ve kaç sayı gerektiğini buldum.

3.1.1.4.3. Kayra'nın bulgularına genel bakış

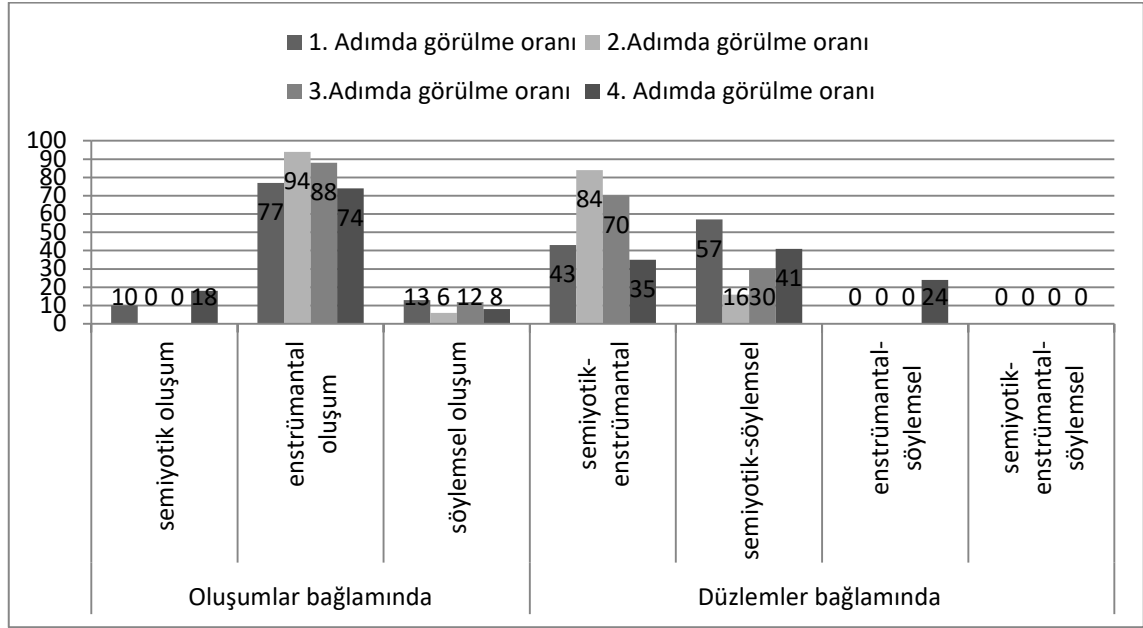
Kayra'nın 1. Adım, 2. Adım, 3. Adım ve 4. Adımda eşit işaretini farklı yorumlama biçimlerinde kullanma bağlamında genel karakteristiğini ortaya çıkaracak şekilde incelendiğinde Tablo 3.9 elde edilmiştir. Bu tabloda ve tablodan yararlanarak elde edilen Grafik 3.9'da Kayra'nın çalışmalarında 1. Adımdan 4. Adıma geçen süreçte kesin işlemsel yorumlamayı ve temel ilişkisel yorumlamayı kullanma oranının azaldığı, esnek işlemsel yorumlama ve karşılaştırmalı ilişkisel yorumlama oranının ise arttığı görülmüştür.

Tablo 3. 9. Kayra'nın tüm adımlarda eşit işaretini yorumlama biçimlerinin görülme oranları

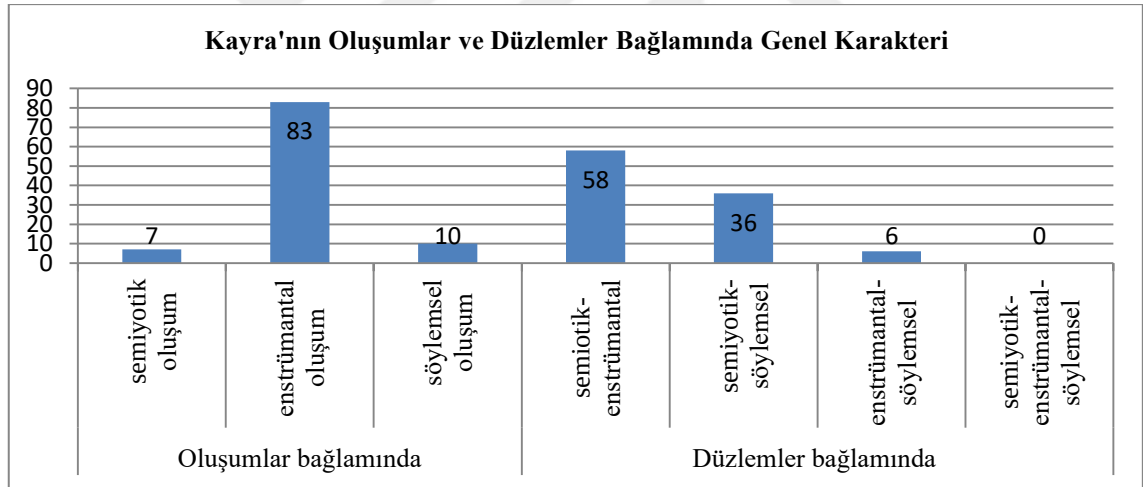
Eşit İşaretini Yorumlama Biçimleri	1. Adım kullanma oranı	2. Adım kullanma oranı	3. Adım kullanma oranı	4. Adım kullanma oranı
Kesin işlemsel	22%	12%	6%	12%
Esnek işlemsel	7%	15%	6%	11%
Temel ilişkisel	49%	12%	14%	44%
Karşılaştırmalı ilişkisel	18%	61%	74%	28%
Ayırıcı	3%	0%	0%	5%
Sentaks	1%	0%	0%	0%

Kayra'nın 1. Adım, 2. Adım, 3. Adım ve 4. Adımda oluşumlar ve oluşumların ikişerli kombinasyonu bağlamında genel karakteristiğini ortaya çıkaracak şekilde incelendiğinde ilk değerlendirme ile son değerlendirme arasında artış-azalış bakımından semiyotik oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerin görülme oranının arttığı; enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerin ve söylemsel oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerin görülme oranının azaldığı görülmüştür. Kayra'nın çalışmalarının semiyotik-enstrümantal, semiyotik-söylemsel düzlemde yer alma oranı azalırken enstrümantal söylemsel düzlemde yer alma oranının arttığı görülmüştür.

Grafik 3. 9. Kayra'nın tüm adımlarda oluşumlar ve düzlemler bakımından değişimi



Grafik 3. 10. Kayra'nın oluşumlar ve düzlemler bağlamında genel karakteri



Kayra'nın 1. Adım, 2. Adım, 3. Adım ve 4. Adımda oluşumlar ve oluşumların ikiye bölünmüşlüğü ile oluşan düzlemlerde yer almada ortalama oranlarına Grafik 3.10'dan bakıldığında Kayra'nın çalışmalarında %83 oranında enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler, %10 oranında söylemsel oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler, %7 oranında da semiyotik oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler görülmüştür. Kayra'nın çalışmalarının düzlemlerde yer alma oranlarına bakıldığında %58 oranında semiyotik-enstrümantal, %36 oranında semiyotik-söylemsel, %6

oranında enstrümantal söylemsel düzlemlerde yer aldığı görülürken Kayra'nın süreç boyunca tamamlanmış, bütüncül bir çalışması görülmemiştir.

3.1.2. Nazlı'nın matematiksel çalışma uzayı

Bu bölümde Nazlı'nın matematiksel çalışma uzayı öğretim deneyi döngülerindeki adımlar doğrultusunda 1. Adım:İlk değerlendirme, 2. Adım:Etkinlik-1 ve ilişkili alıştırmalar, 3. Adım:Etkinlik-2 ve ilişkili alıştırmalar ve 4. Adım:Son değerlendirme bağlamında sunulmuştur.

3.1.2.1.Birinci adım: ilk değerlendirme

Bu bölümde Nazlı'nın matematiksel çalışma uzayı, 1. Adım: ilk değerlendirme sürecindeki kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları ve matematiksel çalışma uzayına ilişkin bulguları olmak üzere iki başlık altında sunulmuştur. Bununla beraber her iki başlıkta da Nazlı'nın 1. Adım:İlk değerlendirmede yer alan soruların analizi sonucu ortaya çıkan temaları bağlamında bulgularına yer verilmiştir.

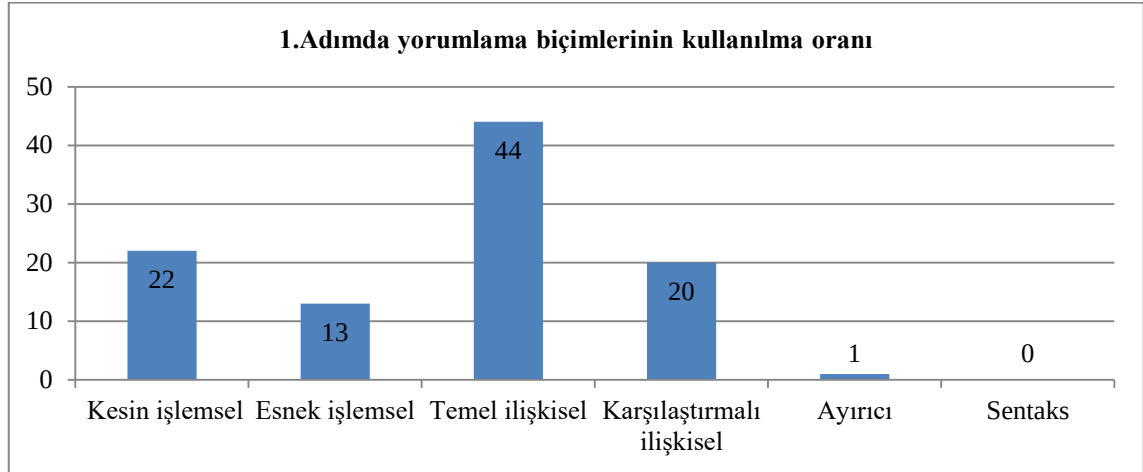
3.1.2.1.1. Nazlı'nın kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları

Nazlı'nın 1. Adım: ilk değerlendirme sürecinde eşit işaretini yorumladığı durumlar incelendiğinde düzeylere bağlı farklı yorumlama biçimlerini kullanma oranlarına dair Tablo 3.10 ve Grafik 3.11 elde edilmiştir. İlk değerlendirme sürecinde Nazlı'nın yaklaşık olarak sırasıyla temel ilişkisel yorumlamayı %44 oranında, kesin işlemsel yorumlamayı %22 oranında, karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı %20 oranında, esnek işlemsel yorumlamayı %13 oranında, ayırıcı yorumlamayı %1 oranında kullandığı görülmüştür.

Tablo 3. 10. Nazlı'nın ilk değerlendirme eşit işaretini yorumlama biçimlerinin sorulara göre dağılımı

Eşit İşaretini Yorumlama Düzeyleri	İ.D.S.1	İ.D.S.2	İ.D.S.3	İ.D.S.4	İ.D.S.5	İ.D.S.6	İ.D.S.7	İ.D.S.8	İ.D.S.9	İ.D.S.10	İ.D.S.11	İ.D.S.12
Kesin işlemsel	2	2	4				6	3			10	
Esnek işlemsel	2				6	1	8					
Temel ilişkisel	4		2	8		5	11	9	1	8	3	4
Karşılaştırmalı ilişkisel	2			7		4		5		7		
Ayırıcı								1				
Sentaks												

Grafik 3. 11. Nazlı'nın ilk değerlendirmede eşit işaretini yorumlama biçimlerinin kullanılma oranları



Eşit '=' işaretini anlamlandırmaya yönelik bulgular (1.,2.,3.,5. ve 11. Sorular):

' $a+b=c$ ' standart ifadesinde işareti anlamlandırmayı gerektiren 1. soruda Nazlı'nın eşit işaretini bireysel uygulamada kesin işlemsel yorumladığı görülmüştür. Bireysel uygulamalardan sonra gerçekleştirilen bireysel görüşmelerde öğretmenin derinlemesine soruları ile beraber eşit işaretinin esnek işlemsel ve karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamalarına da örnek verebildiği görülmüştür. $180-90=90-180$ örneğini vermesi hatalı bir matematiksel ifade olmasına rağmen eşit işaretinin iki tarafındaki sayıları ve işlemleri karşılaştırarak eşit işaretini karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamış olduğu düşünülmüştür. Sayıların yeri değiştiğinde sonucun değişmeyeceğini düşündüğü fark edilince öğretmen rehberliği ile değişme özelliğinin çıkarma işleminde olmadığı hissettirilmiştir. Hatasını fark eden Nazlı'nın eşittirin solu ve sağına iki farklı sayının toplamını yerlerini değiştirerek yazmayı önerdiği görülmüştür. Bu durumu 'sayıların aynı olmuş olması' ifadesiyle açıkladığından eşitliğin solu ve sağındaki sayıları karşılaştırdığı görüldüğünden eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamasını destekleyen ifadelerle yer verdiği söylenebilir.

Araştırmacı: Heh Nazlı tam sana şunu gösteriyordum. İlk soruyla başlayalım bak. 7 artı 3 eşittir 10 demişler soruda. Sonra demişler ki ok ile gösterilen sembolün adı nedir? Bu sembol ne anlama gelmektedir. Açıklayınız demişler. Senin cevabına baktım. Sen demişsin ki bu sembolün anlamı eşittir. Bu sembol cevabı göstermektedir demişsin.

1) Sembolün adı eşittir.
Bu sembol cevabı göstermektedir.

Nazlı: Öğretmenim ben aslında orada şey demek istedim: sorudan sonra cevabı belirtmek için. Önüne konur.

[...]

Araştırmacı: Peki benim şey aklıma geldi Nazlı o zaman hep eşittiri yazdıktan sonra hep bir cevap mı yazmamız lazım?

Nazlı: Hayır öğretmenim bazı sorularda eşittir eşit anlamına geliyor iki sayı birbirine eşit göstermektedir anlamında.

[...]

Nazlı: 4 eşittir 4 mesela. 4'le 4 eşittir.

Araştırmacı: Hıh burada bir işlem yok mu mesela?

Nazlı: Mesela burada şey var. 4'le 4'ün eşit olduğunu gösteriyor. 4 eşittir 4.

Araştırmacı: Tamam. Başka ne olabilir. 4 eşittir 4'te ikisinin birbirine eşit olduğunu gösteriyor. Bu senin... size sorulan soruda mesela sonucu yazmadan önce sonucu göstermek için kullanılıyor. Başka nasıl kullanılabilir sence eşittir?

Nazlı: Başka öğretmenim mesela bir çıkartma işlemi yaparız.

Araştırmacı: Hı hı.

Nazlı: Ondan sonra eşittir koyup aynı çıkartma işlemini tersinden yaparız mesela 180 yazıp 90 yazarız mesela eşittir; 90, 180 yazarız bu sefer de eşit oluyor onlar da.

[...]

Araştırmacı: Ama benim aklıma şey takılıyor 90 küçük bir sayı 100 gene büyük bir sayı. 90'dan 100'ü nasıl çıkardın?

Nazlı: (fark etti gülüyor) Öğretmenim o da benim biraz kafamı karıştırdı. Ben onu hiç düşünmemiştim. Küçük sayıdan küçük sayı çıkmaz.

Araştırmacı: Küçük sayıdan küçük sayı mı çıkmaz yoksa büyük mü?

Nazlı: Ayyyyy pardon küçük sayıdan büyük sayı çıkmaz.

Araştırmacı: Tamam. Peki o zaman çıkarma değil de toplama yapsaydın olur muydu? Bu verdiğin örneğin aynısını toplama olarak söyleseydin olur muydu?

Nazlı: O daha iyi olurdu. Çünkü küçük sayı üste yazılsa da büyük sayı üste yazılsa da toplama işlemi yapılabilir.

Araştırmacı: O zaman eşittiri şimdi ne için kullanmış oldun? Mesela eşittire verdiğin örnek nasıl bir örnek olmuş oldu?

Nazlı: Sayıların aynı olmuş olması olabilir.

Hatalı eşdeğer denklemi fark edip işareti anlamlandırmayı destekleyen 11. soru olan ' $6+9=15:3=5+2=7$ ' ifadesinde bireysel görüşmede eşit işaretinin ne amaçla kullanıldığı sorulduğunda Nazlı'nın 'eşittirin amacı sonucu belli etmek yani sonucun önüne konulur' dediği görülmüştür. Araştırmacı öğretmen tarafından eşit işaretinin ayırıcı özelliğine de dikkat çekilerek eşit işareti ile ayrılan her bir aritmetik ifade yuvarlak içine alınarak vurgulanıp onların arasındaki eşit işaretinin amacı sorulduğunda

‘sonuç yazmadığı için, eşittirin yanına sonucun yazılacağını gösteriyor’ diyerek kesin işlemsel yorumlamayı destekleyen ifadeler kullandığı görülmüştür.

Ben. Tamam. Peki sen şunu şurada kesiyorsun ya kesiyorsun derken şöyle düşünüyorsun anladığım kadarıyla 6’yla 9’u topluyorsun 15 diyorsun ya.

11. $6 + 9 = 15 : 3 = 5 + 2 = 7$ ifadesi doğru mudur? Neden?

Araştırmacı: Buradaki eşittirin amacı ne?

11. $6 + 9 = 15 : 3 = 5 + 2 = 7$ ifadesi doğru mudur? Neden?

Araştırmacı: Sanki burası yokmuş gibi düşünebilirsin.

Nazlı: Eşittirin amacı sonucu belli etmek yani sonucun önüne konulur.

Araştırmacı: Tamam. Peki şöyle yaparsam eşittirin amacı ne oluyor? Çünkü bunların arasında duruyor eşittir.

11. $6 + 9 = 15 : 3 = 5 + 2 = 7$ ifadesi doğru mudur? Neden?

Nazlı: O sondaki 7’nin önündeki eşittir mi?

Araştırmacı: Hepsinin. Mesela 6’yla 9’un arasında da bir tane... (araştırmacı yanlış söylediğini fark etti) 6 artı 9’la 15 bölü 3’ün arasında da bir tane eşittir var. Şurada arada bir tane eşittir var. Şurada arada da bir tane eşittir var. Eğer böyle yazarsam eşittirin amacı ne oluyor. Çünkü sonucun önüne koyulmadı şu anda eşittirler. Yani direk karşısında sonuç yazmıyor.

Nazlı: Böyle olursa da mesela sonuç yazmadığı için eşittirin yanına sonucun yazılacağını gösteriyor

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik bulgular (4., 6., 7. ve 8. sorular):

Farklı tiplerdeki denklemlerin doğru ya da yanlış olduğunu belirlemeyi gerektiren 8. soruda ‘ $27-48+48=27$ ’ ifadesinin doğru olup olmadığına karar verirken bireysel görüşmede Nazlı’nın öncelikle işlem yapıp sonuç bulmaya ve sonucun 27 olup olmadığını belirlemeye çalıştığı, temel ilişkisel yorumlamayı kullandığı görülürken öğretmen rehberliğinden sonra aritmetik verilen bu ifadeyi bir hikâye bağlamında kurgulamayı başarabildiği işlem yapıp sonuç bulmaktan çok karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayla süreçteki alınan ve verilen miktarın aynı olması sebebiyle 27 sayısına bir etkilerinin olmayacağını fark ettiği görülmüştür. ‘ $27-48+48=27$ ’ şeklinde verilen sayısal

ifadeyi hikâyeleştirmesi istendiğinde işlem yapmaya odaklandığından ve 27'den 48'i çıkaramadığından verilen ifadeye uygun hikâyeyi kurmakta zorlandığı görülmüştür. Bireysel görüşme sırasında öğretmen rehberliğinden sonra çıkarılan ve eklenen sayıların aynı olması durumunda başta verilen sayının değişmeyeceğini fark edebileceği hikâyeyi kurabildiği görölse de işlem yapamadığından tam olarak hikayeye güvenemediği görülmüştür.

Araştırmacı: Mesela sen şöyle anlatmış oldun şu anda. 27 tane peynirim vardı. İııııı (şaşıрма sesi yapıyor) 48 tane peyniri yere döktüm. Hepsi pis oldu çamur oldu. Artık yenmez. Gittim 48 tane daha aldım. (duruyorum biraz düşünsün diye) ne oldu peki.

Nazlı: Gene aynı sonuca ulaştım.

Araştırmacı: Nasıl oldu ki o. Gene aynı sonuca ulaşırs mısın peki?

Nazlı: Çünkü 27 tane peynirden 48 tanesi düşmüş

Araştırmacı: Tamam.

Nazlı: Ondan sonra ben markete gidip 48 tane daha alıyorum.

Araştırmacı: Tamam.

Nazlı: Düşmüşlerle birlikte gene aynı sayıya ulaşıyor.

[...]

Nazlı: Kafam karıştı. Kafam karıştı öğretmenim biraz (gülüyor).

Araştırmacı: (Ben de gülüyorum) çünkü güzel bir hikaye anlatacaksın. 27 tane peynirim vardı. Peynirlerden 48 tanesini yere döktün ama hepsi de çamurun içine düştü. Sen tam üzölmeye başladın. Ayyyyy gitti peynirlerim çamur oldu. Yenmez artık falan dedin. Eee tabi evdekilere çaktırmamak için ne yapıyorsun hemen gidip 48 tane daha peynir alıyorsun. Peki ne oluyor o zaman 48 tane daha peynir alırsan?

Nazlı: Eşit oluyor öğretmenim. O 48 düşüyor. Bir tane daha 48 geliyor. 48'le 48 eşit olduğı için eşit olur.

Araştırmacı: Heee bu 48'le 48 eşit demiştin ya o 48'ler 48 değil de başka olabilir mi? Yaa 48 tane peynir düştü demesen de başka bir şey desen olabilir mi?

Nazlı: Olabilir. Mesela orası 53 de olabilir. 60 da olabilir. Çünkü her zaman mesela 27 tane peynirim vardı. 60 tanesi yere düştü. Marketten 60 tane daha aldım. Bunlar gene aynı oluyor.

Eşitliğı bozmayan işlemleri belirleyerek denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirlemeyi gerektiren ' $7+5-5=12-5$ ' şeklinde verilen ifadeyi bir bağlam içinde işlemlerin sonuçlarına odaklanmadan hikâyeleştirmesi istendiğinde Nazlı'nın bireysel görüşme sırasında öncelikle sayıları farklı nesnelerin miktarı olarak hikâyeleştirdiğinden bu farklı nesneleri toplama ve çıkarmanın anlamlı bir hikâye

oluşturmadığını fark edemediği görülmüştür. Aritmetik verilen ifadede hikayeleştirme sırasında verilen ifadeler dışında yaptığı işlemlerin sonuçlarını da hikayeye dahil etmeye çalıştığı görülmüştür. Bireysel görüşmelerdeki bu durumdan yola çıkarak Nazlı'nın sayısal olarak verilen ifadelerde işlem yapmadan hikâyeleştiremediğini gösterdiği düşünülmüştür.

Nazlı: Mesela öğretmenim 7 tane bayrakla 5 tane kalemi toplayıp ondan da 5 tane silgi çıkarınca 7 sonucunu elde ediyoruz. 12 tane çikolatadan da 5 tane kalemi çıkartınca da 7 sonucunu buluyoruz bunlar birbirine eşittir diyebiliriz.

Araştırmacı: Mmm anladım. Sen böyle söylerken ben gözümde senin söylediklerini canlandırdım. Dedim ki Nazlı dedim 12 tane çikolata aldı. Şimdi olsaydı getirecektim. O kadar çok çikolata yok evde. 12 tane çikolata aldı sonra 5 tane kalemi çıkardı. Çikolatadan kalemi nasıl çıkardı?

Nazlı: Öğretmenim siz anlatırken de ben şimdi şey yaptım. Gerçekten şey olabilir. Mesela 7 tane diyelim bayrak almış. 7 bayraktan 5 bayrak çıkartıyor. Sonra o 5.... Topluyor pardon. Sonra 12 tane bayrak elde ediyor. Ondan sonra o 12 bayraktan da 5 bayrağı çıkartınca 7 elde ediliyor. Sonra da buna başka bir örnekle 12 tane atıyorum kalem almış. 5 tane kalem çıkartmış. 7 elde ediliyor. Bu kalem... bunlar eşittir diyebiliriz 7'yle 7.

Eşitliği değiştirmeyen işlemlerin farkına varıp denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirlemeyi gerektiren 8. soruda $(8+9)=(8+2)+(9-2)$ ifadesinin doğruluğuna karar verirken bireysel görüşmede işlem yapıp sonuç bulmanın dışında farklı bir yöntem kullanması istenildiğinde Nazlı'nın modelleme yapabileceğini ifade ettiği görülmüştür. Ancak modelleme yaparken her bir sayıyı aralarına işlemleri de koyarak modelleyebildiği bu durumda sadece çoklukları dairelerle temsil ettiği görülmüştür (Görsel 3.27).

Nazlı: 10 tane daire de ablamın oldu. Annem de mesela annemin de 9 tane dairesi vardı 2 tane dairesini arkadaşına verdi. 7 tane dairesi kaldı. Buraya da 7 tane çizerim annem için. Sonra benim sonucum 17 olmuştu benim dairelerim. 17 benim dairelerim 17 taneydi. Ablamınki... 10 tane evet ablamın ki 10 taneydi. Annemin ki de 7 taneydi. Bu annemle ablamınkini ben kendim toplarım zihninden 17 diye. Benim ki 17'ydi. Annemle ablamınkini de şöyle 17 tane çizerim tekrardan. Derim ki o zaman hepimizde böyle olunca eşit miktarda yani eşit tane yani aynı sayıda daire oluyor diyebilirim.



Görsel 3. 27. Nazlı'nın ilk değerlendirme soru-8'e ilişkin cevabı

Eşitliği sağlayan eksik değeri bulmaya yönelik bulgular (9., 10. ve 12. sorular):

Eşitliği sağlayan '.....' ile temsil edilen eksik değeri bulmayı gerektiren 10. soruda '8+6+9 = 8+.....' ifadesinde boş bırakılan yeri bulması istendiğinde Nazlı'nın bireysel görüşmede eşitliğin solundaki, sayıları toplayıp 23 bulduğu sağının da 23 olması gerektiği için 8'in üstüne sayarak ya da 23'ten 8 çıkararak bilinmeyeni hesapladığı görüldüğünden bu verilerden hareketle temel ilişkisel yorumlamayı kullandığı değerlendirilmiştir.

Araştırmacı: Bak mesela birer birer gidelim.

Nazlı: 8'le 6'yı toplayınca 14 oluyor. 9'a da 14.... 14'e de 9 eklersek 23 ediyor eşittir 8 artı nokta nokta. 8'e kaç eklersek 23 olur mantığında. Mesela (bu sırada hep kağıda yazıyor işlemleri) 15. 15'le 8'i toptasak 23 ediyor öğretmenim 15 olur. 15 olur boş bırakılan yer.

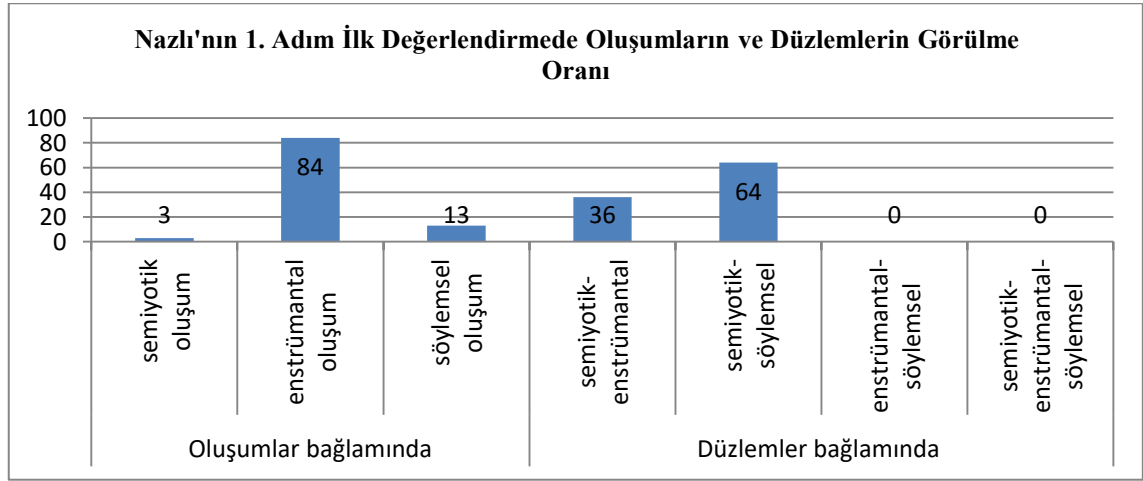
3.1.2.1.2. Nazlı'nın matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları

Nazlı'nın 1. Adım: ilk değerlendirme süreci oluşumlar ve oluşumların ikiyeşerli kombinasyonu bağlamında incelendiğinde Tablo 3.11 ve Grafik 3.12 elde edilmiştir. İlk değerlendirme sürecinde enstrümantal oluşumun bileşenleri yaklaşık olarak %84 oranında, söylemsel oluşumun bileşenleri %13 oranında, semiyotik oluşumun bileşenleri %3 oranında görülürken; çalışmalarının semiyotik-söylemsel düzlemde yer alma oranı %64, semiyotik-enstrümantal düzlemde yer alma oranının %36 olduğu görülmüştür.

Tablo 3. 11. Nazlı'nın ilk değerlendirmede oluşumlar ve düzlemlerin sorularda görülme durumu

Eşit İşaretinin Yorumlanmasında Oluşumlar ve Düzlemler		i.D.S.1	i.D.S.2	i.D.S.3	i.D.S.4	i.D.S.5	i.D.S.6	i.D.S.7	i.D.S.8	i.D.S.9	i.D.S.10	i.D.S.11	i.D.S.12
Oluşumlar bağlamında	Semiyotik oluşum	1											
	Enstrümantal oluşum				4		3	5	3	1	5	3	1
	Söylemsel oluşum				1				3				
Düzlemler bağlamında	Semiyotik-enstrümantal				2						2		
	Semiyotik-söylemsel			2	3				2				
	Enstrümantal-söylemsel												
	Semiyotik-enstrümantal-söylemsel												

Grafik 3. 12. Nazlı'nın ilk değerlendirmede oluşumların ve düzlemlerin görülme oranı



Eşit '=' işaretini anlamlandırmaya yönelik bulgular (1.,2.,3.,5. ve 11. sorular):

Eşdeğer denklemlerde işareti anlamlandırmayı destekleyen 3. soruda '5+4=6+3=9' ifadesinde bireysel görüşmede, eşitliğin bir tarafındaki sayılar 5 ve 4 iken eşitliğin diğer tarafındaki sayıların değişip 6 ve 3 olmasına rağmen eşitliğin bozulmamasının nedeni sorulduğunda eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlanmasını kullanarak eşitliğin iki tarafındaki sonucun da 9 olmasından dolayı eşitliğin bozulmadığını ifade ediyor olması bu çalışmanın temel ilişkisel yorumlamada **semiyotik-söylemsel** düzlemde olduğuna ilişkin gösterge olarak kabul edilmiştir.

Araştırmacı: Hemen göstereyim. Mesela eşittirin sol tarafında 5 ve 4 yazıyor. Bunların ikisini toplamamızı istiyor bizden. Diğer tarafında 6 ve 3 yazıyor. Bunların ikisini toplamamızı istiyor. Ben de diyorum ki sanki bu sayılar değişmişler ve bu sayılara dönüşmüşler gibi düşünsem. Yani eskiden 5 ve 4 diye çift vardı. Şöyle göstereyim (araştırmacı eliyle ekrana sayıları gösteriyor) sonra o çift değişti. Birisi 6 oldu birisi 3 oldu.

Ama o çiftler değişmesine rağmen sonuçları değişmedi. Nasıl değişmiyor ki eskiden 5'le 4'tü. Şimdi 6 ve 3 oldu.

Nazlı: Sayılar değişse bile sonuçları değişmez yani aynı mesela birden fazla... şimdi 5'le 4, 9 oldu ama daha birden fazla 9 olabilecek rakam var. Mesela 7'yle 2 de dokuz olabiliyor.

[...]

Nazlı: öğretmenim bu sayı mesela 6 olsa 7 olsa 8 olsa gene bu sayılar değişmez. Bunların bir sürü işlemleri olabilir mesela 8'le 1, 9 eder; 7'yle 2, 9 eder. 6, 3; 5, 4 dokuz eder. Yani birçok rakamla olabilir bunlar mesela çıkartma da olabiliyor. 10'dan 1 çıkırsa 9 eder. Ondan sonra başka 11 den 2 çıkırsa 9 eder. Böyle de olabilir.

Hatalı eşdeğer denklemini fark etmesini sağlayan işareti anlamlandırmayı destekleyen 11. soruda Nazlı'nın bireysel uygulamada eşit işaretinin kesin işlemsel yorumlanmasını problemin çözümünde işe koşarak ifadenin doğru olduğuna karar verdiği görülmüştür. Bu durum kesin işlemsel yorumlamada enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin gösterge olarak değerlendirilmiştir. Ancak bireysel görüşmede eşit işaretinin temel ilişkisel ya da karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanmasını işe koşamadığından bu yorumlama biçimlerinde eşit işaretinin problemin çözümünde bir araç olarak kullanılamadığı düşünülmüştür.

Araştırmacı: On birinci soruya bakalım. On birinci soruda da şöyle sormuşlar. 6 artı 9 eşittir 15 bölü 3 eşittir 5 artı 2 eşittir 7 ifadesi doğru mudur? Sonra neden diye sormuşlar. Sen şey demişsin: doğru, çünkü hepsi birbiriyle uyumlu demişsin. Ne demek istedin uyumlu derken?

11. $6 + 9 = 15 : 3 = 5 + 2 = 7$ ifadesi doğru mudur? Neden?

Nazlı: Şöyle öğretmenim 9'la 6'yı topluyoruz (hemen kağıda yazıyor) 15 çıkıyor. 15'le de 3'ü çarpınca

Araştırmacı: Bölmüşler (diye uyarıyorum)

Nazlı: Ayyy bölünce 5, 15 yani 5 oluyor. Ondan sonra 5'le 2'yi toplayınca 7. Eşittir 7 ifadesi doğru mudur? Sonra bunları... (durdu biraz) şey... eşittir 15 bölü 3 yapmışlar. 6'yla 9'u toplayınca 15 ediyor ama 15'i 3'e bölünce 5 ediyor. Eşit değildir bunlar.

Araştırmacı: İnsanın kafası karışıyor nasıl oluyor o zaman?

Nazlı: İfade yanlış oluyor. Çünkü 15'le 3'ü bölünce 5 oluyordu. 5'le de 2'yi toplayınca 7 elde ediliyor. Yani eşit olmuyor bunlar da.

Araştırmacı: Mmm anladım. Önce şöyle düşündün galiba 6'yla 9'u topladın 15. Burası doğru dedin.(o sırada araştırmacı ekrandan seçerek mavi vurgulu olmasını sağlıyor)

11. $6 + 9 = 15 : 3 = 5 + 2 = 7$ ifadesi doğru mudur? Neden?

Araştırmacı: Sonra 15'i 3'e böldün 5. Burası da doğru dedin.

$6 + 9 = 15 : 3 = 5 + 2 = 7$ ifadesi doğru mudur? Neden?

Araştırmacı: Sonra 5'i 2'yle topladın 7 burası da doğru dedin.

11. $6 + 9 = 15 : 3 = 5 + 2 = 7$ ifadesi doğru mudur? Neden?

Nazlı: Evet

Araştırmacı: Parça parça baktın doğru gibi geldi anladığım kadarıyla. Ama sonra da...

Nazlı: Öğretmenim bugün ben biraz erken uyandım herhalde.

Araştırmacı: Yok yok zaten o zaman da kağıdına yaparken doğru demişsin aslında. Böyle düşünmüşsün yani anladığım kadarıyla.

Nazlı: Şimdi o eşittirlerden dolayı şey oldum ama... çünkü öğretmenim 6'yla 9'u topladım ben 15 elde ettim. 15'le de 3'ü bölünce 5 elde ettim. 5'le de 2'yi toplayınca 7'yi elde ettim.

Araştırmacı: o zaman doğru gibi geldi sana

Nazlı: Evet. Uyumlu oluyor hepsi.

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik bulgular (4., 6., 7. ve 8. sorular):

Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulamayı gerektiren eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik olan 4. soruda ' $47+25 = (47+3)+(25-3)$ ' işleminde kullanılan yöntemi açıklaması ve aynı yöntemi kullanarak başka soruları yapması beklendiğinde bireysel uygulamada eşit işaretinin solunda yer alan sayılardan birinden çıkarılan sayının diğer sayıya eklenerek eşittirin sağına yazıldığında eşitliğin bozulmayacağını farkedebildiği ve semiyotik bir araç olan eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanmasını problemin çözümünde işe koşabildiği Görsel 3.28'de görüldüğünden Nazlı'nın bu çalışmasında **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergeler olduğu kabul edilmiştir. Aynı sorunun devamında yer alan ' $297+66$ ' toplama işlemini kendisinden yapması beklenen Nazlı, toplama işlemini yaparken 297 ile 3'ü toplayıp 66'dan da 3'ü çıkardığı görülmüştür. Bireysel görüşme sırasında yaptığı adımları açıklaması, gerekçesini ifade etmesi istendiğinde öğretmen tarafından verilen örneklerin aynılarını yapmaya çalıştığını gerekçe gösterdiği görülmüştür. Eşit işaretinin özelliğinden yararlanarak tümdengelimsel ya da örnek durumlardan yola çıkarak tümevarımsal bir düşünme

biçimini kullanmayıp verilen örneği referans gösterdiği görülse de söylemsel oluşumun bileşenlerine ilişkin gösterge olarak değerlendirilmiştir.

Handwritten mathematical work on grid paper. The problems are as follows:

$\begin{array}{r} 4) 43 \\ + 3 \\ \hline 50 \end{array}$	$\begin{array}{r} 25 \\ + 3 \\ \hline 28 \end{array}$	$\begin{array}{r} 50 \\ + 22 \\ \hline 72 \end{array}$	$\begin{array}{r} 65 \\ + 1 \\ \hline 66 \end{array}$	$\begin{array}{r} 27 \\ + 30 \\ \hline 57 \end{array}$	$\begin{array}{r} 44 \\ + 30 \\ \hline 74 \end{array}$
$\begin{array}{r} 297 \\ + 3 \\ \hline 300 \end{array}$	$\begin{array}{r} 66 \\ + 3 \\ \hline 69 \end{array}$	$\begin{array}{r} 300 \\ + 63 \\ \hline 363 \end{array}$			
$\begin{array}{r} 125 \\ + 126 \\ \hline 251 \end{array}$	$\begin{array}{r} 95 \\ + 98 \\ \hline 193 \end{array}$	$\begin{array}{r} 126 \\ + 98 \\ \hline 224 \end{array}$			
$\begin{array}{r} 28 \\ + 3 \\ \hline 31 \end{array}$	$\begin{array}{r} 49 \\ + 3 \\ \hline 52 \end{array}$	$\begin{array}{r} 46 \\ + 31 \\ \hline 77 \end{array}$			
$\begin{array}{r} 37 \\ + 38 \\ \hline 75 \end{array}$	$\begin{array}{r} 65 \\ + 64 \\ \hline 129 \end{array}$	$\begin{array}{r} 64 \\ + 38 \\ \hline 102 \end{array}$			

Handwritten notes in Turkish:

Ben olsam denerdim tekrardan çünkü çıkıyor mu tekrardan diye dener bakardım.

Araştırmacı: Tamamdır. Bakalım doğru çıkıyor mu diye denemek istiyorum dedi Nazlı da. Ondandır Nazlı sen aşağıdaki sorularda.... Heee bir de şeyi soracaktım Nazlı burada mesela neden 8'i yapmamış? İşte 5'i yapmamış 9'u yapmamış da gitmiş 3'ü eklemiş ve 3'ü çıkarmış. Yani neden 3 sayısını seçmiş? 3 sayısını seçmesinin özel bir sebebi var mıydı? 3 sayısı yerine başka bir sayı da seçebilir miydi? Öylesine bir sayı mı?

Nazlı: 3 yerine başka bir sayı da seçebilirdi. Burada yaptıklarımızı da seçebilirdi ama o 3'ü seçmiş. Acaba neden 3 seçmiş (gülümsüyor)

Araştırmacı: Aynen mesela aşağıda da 1'i seçmiş. İnsan düşünüyor. Acaba neden 3 neden 1? Yani başka sayılar değil de neden 3 ve 1?

Nazlı: Yani aklıma gelmedi öğretmenim. Her sayıyı denedik burada. 13 de oluyor, 8 de oluyor, 5 de oluyor ama o 3 yapmış.

Araştırmacı: Aynen mesela ben senin sorularına bakıyorum bak şimdi. Hatta dur sana da ekran paylaşımı yapayım. Belki ikimiz beraber bakarsak daha iyi olur. Mesela senin sorularına bakıyorum sen de 297'ye 3 eklemişsin. Mesela neden gittin 3 ekledin?

Nazlı: Öğretmenim ben orada tam anlayamadım. Aynılarını yapacağız sandım da hep 3 ve 1 ekleyip çıkardım ama farklı farklı yaptım.

Görsel 3. 28. Nazlı'nın ilk değerlendirme soru-4'e ilişkin cevabı

Nazlı: Ben olsam denerdim tekrardan çünkü çıkıyor mu tekrardan diye dener bakardım.

Araştırmacı: Tamamdır. Bakalım doğru çıkıyor mu diye denemek istiyorum dedi Nazlı da. Ondandır Nazlı sen aşağıdaki sorularda.... Heee bir de şeyi soracaktım Nazlı burada mesela neden 8'i yapmamış? İşte 5'i yapmamış 9'u yapmamış da gitmiş 3'ü eklemiş ve 3'ü çıkarmış. Yani neden 3 sayısını seçmiş? 3 sayısını seçmesinin özel bir sebebi var mıydı? 3 sayısı yerine başka bir sayı da seçebilir miydi? Öylesine bir sayı mı?

Nazlı: 3 yerine başka bir sayı da seçebilirdi. Burada yaptıklarımızı da seçebilirdi ama o 3'ü seçmiş. Acaba neden 3 seçmiş (gülümsüyor)

Araştırmacı: Aynen mesela aşağıda da 1'i seçmiş. İnsan düşünüyor. Acaba neden 3 neden 1? Yani başka sayılar değil de neden 3 ve 1?

Nazlı: Yani aklıma gelmedi öğretmenim. Her sayıyı denedik burada. 13 de oluyor, 8 de oluyor, 5 de oluyor ama o 3 yapmış.

Araştırmacı: Aynen mesela ben senin sorularına bakıyorum bak şimdi. Hatta dur sana da ekran paylaşımı yapayım. Belki ikimiz beraber bakarsak daha iyi olur. Mesela senin sorularına bakıyorum sen de 297'ye 3 eklemişsin. Mesela neden gittin 3 ekledin?

Nazlı: Öğretmenim ben orada tam anlayamadım. Aynılarını yapacağız sandım da hep 3 ve 1 ekleyip çıkardım ama farklı farklı yaptım.

Denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirlerken eşitliği bozmayan işlemleri de belirlemeyi gerektiren 6. soruda eşit işaretinin temel ilişkisel ve karşılaştırmalı ilişkisel yorumlama biçimlerini birbirini destekleyici yönde problemin çözümünde işe koşabildiği görüldüğünden temel ilişkisel ve karşılaştırmalı ilişkisel yorumlama

biçimlerinde eşit işaretini bir araç olarak kullanabildiği verilerden yola çıkarak **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin gösterge olarak yorumlanmıştır.

Araştırmacı: 4 eşittir 4. Sen de ona ne cevap vermişin. Dur bakayım burada değilmiş o. Hemen senin cevabını bulayım ben de. Öteki sayfadaymış o da. Şöyle demişin. Çünkü ikisi de birbirine eşit demişin. Doğru demişsin. Daha doğrusu sen hepsine doğru demişsin. Doğru doğru doğru doğru doğru. Sonra da ikisi birbiriyle eşit demişsin.

Nazlı: Evet öğretmenim

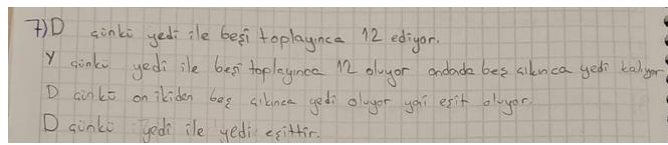
Araştırmacı: Hala aynı mı düşünüyorsun?

Nazlı: Hala aynı düşünüyorum. Çünkü 4'le 4 rakam açısından birbiriyle eşittir. 4'le 0'ı toplayınca 4 ediyor. Eşittir, 4'le sıfırı tekrardan toplayınca tekrardan 4 ediyor. Yani bir sayısı değişmiyor. 4'le 5'i toplayınca aynı; 4'le 5'i toplayınca aynı sonuç çıkıyor. Eşit oluyorlar

Araştırmacı: . Nasıl karar verdin eşit oluyorlar diye? 4'le 5'i toplayınca.

Nazlı: Çünkü ikisinin de rakamları aynı. Aynı sayılar. Sadece yerleri değişmiş.

Denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirlerken eşitliği bozmayan işlemleri de belirlemeyi gerektiren 7. soruda Nazlı'nın kesin işlemsel, esnek işlemsel ve temel ilişkisel yorumlamalarda eşit işaretini problemin çözümünde bir araç olarak kullanabildiği bireysel uygulamada (Görsel 3.27) ve bireysel görüşmede verdiği cevaptan da görüldüğünden **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin bir gösterge olarak değerlendirilmiştir.



Görsel 3. 29. Nazlı'nın ilk değerlendirme soru-7'ye ilişkin cevabı

Araştırmacı: Hemen senin verdiğin cevaplara baktım. Birinci soruya doğru demişsin. Çünkü 7 ile 5'i toplayınca 12 ediyor demişsin.

Nazlı: Evet

Araştırmacı: Hala aynı mı düşünüyorsun?

Nazlı: Evet öğretmenim. Çünkü orada 7'yle 5'i toplayınca 12 ettiğini söylüyor. Ben de bir yaptım. 7'yle 5'i topladım gerçekten de 12 etti.

Araştırmacı: mmm alttaki soru için de yanlış demişsin çünkü 7'yle 5'i toplayınca 12 oluyor. Ondan da 5 çıkarınca 7 kalıyor demişsin. (araştırmacı biraz durdu) Alttaki soruya baktım ben de bak şöyle mavi göstereyim alttaki soruyu da 7 artı 5 eksi 5 eşittir 12 eksi 5.

Nazlı: Öğretmenim ben oraya şey yazmayı unutmuşum. Ben şey yaptım. 7'yle 5'i topladım. Şey 12 çıktı. Ondan da 5 çıkartınca 7 çıktı ama orada eşittir 12 diyor. O yüzden yanlış dedim ben. Araştırmacı: Heee anladım. Peki burada eşittir 12 mi diyor?

Nazlı: Hayır işte şimdi bakınca anladım. 12 çıkınca 12'den de 5 çıkarınca aynı sonuç oluyor diyor. Bakıyorum evet 7'yle 5'i toplayınca 12 oluyor. 12'den de 5 çıkınca 7 kalıyor. 12'den de 5 çıkınca gerçekten 7 kalıyor ve bunların eşit olduğunu gösteriyor ve ben buna yanlış yapmışım. Doğru olacak normalde.

Eşitliği sağlayan eksik değeri bulmaya yönelik bulgular (9., 10. ve 12. sorular):

Eşitliği sağlayan '....' ile temsil edilen eksik değeri bulmayı gerektiren 10. Soruda '14+.....= 13+4' ifadesinde verilmeyeni hesaplaması istendiğinde bireysel uygulamada Nazlı'nın karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamanın adımlarını bir algoritma gibi kullanarak bir sayıdan çıkardığı değeri diğer sayıya eklediğini ve bilinmeyeni hesalayabildiği görülmüştür. Ancak bireysel görüşmede yaptığı adımların sebebini açıklaması istendiğinde doğrulayıcı ifadeler kullanmadığı görüldüğünden çalışmasının **semiyotik-enstrümantal** düzlemde olduğu kabul edilmiştir. Sonrasında temel ilişkisel yorumlamayı kullanarak eşitliğin iki tarafındaki sayıların toplamının eşit olması için birini arttırırken diğerinin azaltılması gerektiğini ifade etmesi eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanmasını doğrulayabilmek için temel ilişkisel yorumlamaya ihtiyaç duyduğunu gösterdiği düşünülmüştür. Buradan hareketle Nazlı'nın karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullandığı durumda doğrulayıcı ifadeleri kullanmadığından **semiyotik-enstrümantal** düzlemde yer aldığı; temel ilişkisel yorumlamayı kullandığı durumda doğrulayıcı ifadelerle yaptığı adımları gerekçelendirebildiğinden **semiyotik-söylemsel** düzlemde yer aldığı kabul edilmiştir.

Araştırmacı: Hmmm

Nazlı: O boş olan yer 17 olur. Yani 3

Araştırmacı: Hmmm peki başka türlü yapabilir miyiz? Yani şöyle yapabilir miyiz? Burada bir 13 sayısı var. O 13 sayısı bu tarafta 14 olmuş.

Nazlı: Bir artmış

Araştırmacı: Gene 1 artmış. Eeee orası 1 arttıysa eğer şu boşluklu olan yeri ben şu yöntemle de yapabilirim diyebilir miyiz?

Nazlı: Mesela 13'e 1 arttırıp 4'ten de 1 eksiltebiliriz.

Araştırmacı: Neden öyle dedin?

Nazlı: Çünkü 1 arttırınca 14 olmuş. 14'ten 4'e de 1 eksiltince yani örüntü biri yapsak gibi aklıma geldi Araştırmacı: Hmmm ama örüntüde birini arttırırken birini eksiltiyor muyuz? Yani burada neden özellikle birini arttırdın birini eksilttin?

Araştırmacı: İkisini de arttırmadın mesela.

Nazlı: Öğretmenim 14'le 5'i toptasak (bu arada kağıda işlemleri yazıyor) 19 oluyor ama mesela 14 olmuş 13 (bir azalmış demek istiyor) orası da 3 olsa 14'le 3'ü toptasam 17 eder. Yani orası 1 arttırılsa 4 aynı sonuca ulaşamam 19 olur ama bir eksiltince 3 olur. 14'le 3 toptanınca 17 elde eder yani. Örüntünün kuralı 1 arttırılıp 1 eksiltirme oluyor burada.

Eşitliği sağlayan eksik değeri bulmayı gerektiren $a+b=kutu+c$ formundaki 9. Sorunun bireysel görüşmesinde Nazlı'nın bu çalışmalarla beraber eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerini fark ettiğini ifade ettiği görülmüştür. Bireysel uygulama sırasında bulamadığı eksik değeri görüşmeler sırasında eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlanmasını problemin çözümünde bir araç olarak kullanarak bulabildiği görülmüştür. Bu süreçte eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlanmasını problemin çözümünde işe koşulabilmesi enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin bir gösterge olarak değerlendirilmiştir.

Araştırmacı: Bak dokuzuncu soruya bakalım Nazlı. Dokuzuncu soruda şöyle demişler: 8 artı 4 eşittir kutu artı 5 ifadesinde kutu yerine ne yazılmalıdır? Nasıl yaptığınızı açıklayınız demiş. Sen bu soruyu nasıl yapmışsın? Hemen bakıyoruz. Boş (Araştırmacı gülüyor)

9. $8 + 4 = \square + 5$ ifadesinde $\square$ yerine ne yazılmalıdır? Nasıl yaptığınızı açıklayınız.....

Nazlı: (Nazlı da gülüyor)

Araştırmacı: Ne düşünmüştün neden boş bırakmıştın?

Nazlı: Öğretmenim boş bırakmışım ama yani o zamanlar dediğim gibi eşittirin nelerde kullanıldığını neden ortada kullanıldığını bilmediğim için anlayamamıştım.

Araştırmacı: Şimdi ne düşünüyorsun peki.

Nazlı: 8'le 4'ü ... 8'le 4'ü toptasam (yine kağıda işlemler yapmaya başladı) 12. Eşittir kutu artı 5. Kutu... mesela 5'e kaç eklersem 12 olur gibi bir mantık var.

Araştırmacı: Hmmm

Nazlı: Onların eşit olması için. Mesela 8'le 4, 12 ediyor. Bu 5'le birlikte yani dikdörtgenin bir şeyi olması lazım. Eşit olması lazım. Onların da 12 çıkması lazım. Yani 7 olabilir. 7'yle 5'i toptayınca 12 oluyor. Kutu 7 olabilir.

Araştırmacı: Olabilir mi kesin 7 mi?

Nazlı: Bence kesin 7.

3.1.2.2.İkinci adım: etkinlik-1 ve alıştırmalar

Bu bölümde Nazlı'nın 2. Adım: Etkinlik-1 ve ilişkili alıştırmalarla ilgili bulguları kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları ve matematiksel çalışma uzayı ile ilgili bulguları başlıkları altında sunulmuştur.

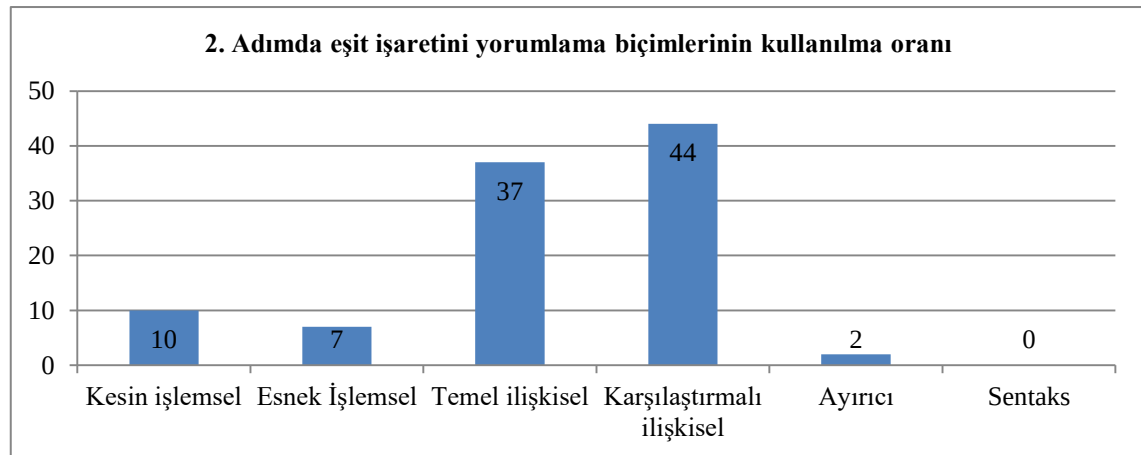
3.1.2.2.1. Nazlı'nın kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları

Nazlı'nın 2. Adım: etkinlik.1. ve ilişkili alıştırmalar sürecinde eşit işaretini yorumladığı durumlar incelendiğinde düzeylere bağlı farklı yorumlama biçimlerini kullanma oranlarına dair Tablo 3.12 ve Grafik 3.13 elde edilmiştir. Nazlı'nın 2. Adım: etkinlik-1 ve ilişkili iki alıştırmada kullandığı yorumlama oranları sırasıyla yaklaşık olarak karşılaştırmalı ilişkisel yorumlama %44 oranında, temel ilişkisel yorumlama %37 oranında, kesin işlemsel yorumlama %10 oranında, esnek işlemsel yorumlama %7 oranında ve ayırıcı yorumlama %2 oranında şeklinde olduğu görülmüştür.

Tablo 3. 12. Nazlı'nın 2. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimlerinin sorulara göre durumu

Eşit İşaretini Yorumlama Biçimleri	i.D.S.1	i.D.S.2	i.D.S.3	i.D.S.4	i.D.S.5	i.D.S.6	i.D.S.7	i.D.S.8	i.D.S.9	i.D.S.10	i.D.S.11	i.D.S.12
Kesin işlemsel	2	2	4				6	3			10	
Esnek işlemsel	2				6	1	8					
Temel ilişkisel	4		2	8		5	11	9	1	8	3	4
Karşılaştırmalı ilişkisel	2			7		4		5		7		
Ayırıcı								1				
Sentaks												

Grafik 3. 13. Nazlı'nın 2. Adımda eşit işaretinin yorumlama biçimlerini kullanma oranları



Eşit ‘=’ işaretini anlamlandırmaya yönelik bulgular (e.1.2. Soru):

Terazi modelinde verilen eşdeğer denklemlerde işareti anlamlandırmayı gerektiren Etkinlik.1 soru.2’de bireysel uygulamada terazi modelinin sol kefesinde verilen 8 top ile sağ kefesinde iki ayrı torbada verilen 3 top ve 5 topun dengede durduğu görseli sayısal olarak doğru temsil edemediği ve terazi modelini görmezden gelerek kendisinin 8 sayısını elde edecek şekilde esnek işlemsel yorumlamayı kullanarak sayılar belirlemesi üzerine grup görüşmesinde teraziye dair yaşanmışlıkları, bildikleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Yapılan grup görüşmesinde aslında Nazlı’nın eşit kollu teraziye sadece köyde gözlemlediği ortaya çıkmıştır.

Araştırmacı: Öyle mi oluyor? İstekli mi gidiyorsunuz. Onu tam bilemediğim için sordum. Siz de hala gidiyor musunuz diye. Aslında pazarda teraziyi çok kullanırlar. Peki o teraziyi niçin kullanırlar?

Kayra ve Nazlı: kiloları ölçmek için (beraber söylediler)

Araştırmacı: Tamam kiloları ölçmek için. Bir de eskiden bir terazi vardı. Sizin yaşıınız küçük gerçi. Eskiden teraziler nasıldı biliyor musunuz? Böyle iki tane aynı buradaki gibi kefesi vardı. (araştırmacı öğretmen ekrandakileri gösteriyor) bir tarafa böyle demir ağırlıklar konuluyordu.

Kayra: Ben biliyorum hocam onu.

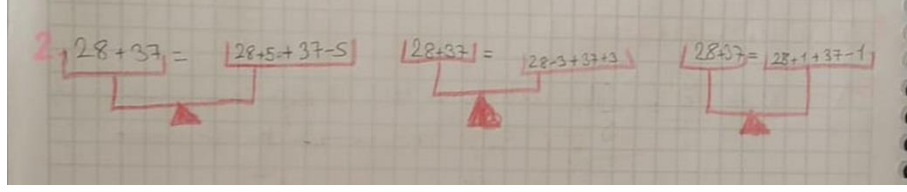
Nazlı: Öğretmenim ben onlardan görüyordum. Hatta bizim köy gibi bir yer var böyle. Oraya gittiğimizde bir tane masa var. Bir tane terazi var. Böyle üstünde ağırlıkları da var. 1 ton, 2 ton, falan yazıyor.

Araştırmacı: Aynen öyle. Siz öyle terazi gördünüz mü yani demir ağırlıkları olan terazi?

Nazlı: Evet öğretmenim.

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik bulgular (e.1.3., a.1.1., a.1.2., a.1.3., a.1.4, a.2.,1.sorular):

Terazi modeli ile ilişkilendirerek doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulamayı gerektiren Etkinlik.1 Alıştırma.1 soru.2’de iki sayının toplanmasında eşitliğin aynı tarafındaki toplanan iki sayıdan birinden aldığımızı diğer sayıya verdiğimizde sayıların toplamında bir değişiklik olmayacağını bilir ve eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanmasını kullanarak eşitliğin sağındaki yeni sayı çiftini belirleyebilir (Görsel 3.30).



Görsel 3. 30. Nazlı'nın Etkinlik-1 Alıştırma-1 soru-2'ye ilişkin cevabı

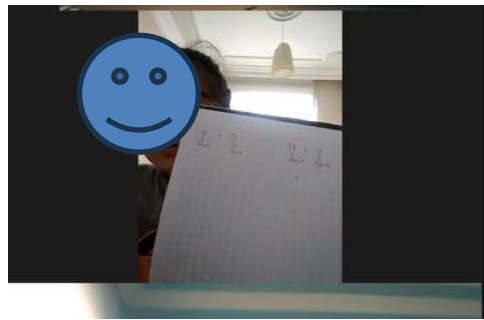
Terazi modeli ile ilişkili olarak doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulamayı gerektiren Etkinlik.1 soru.3'te 10 sayısını iki sayının toplamı şeklinde yazarken yazabileceğimiz tüm olasılıkları belirleyebilmek için $10+0$, $(10-1)+(0+1)$, $(10-2)+(0+2)$, $(10-3)+(0+3)$ şeklinde 10'dan çıkardığımız sayıyı 0'a eklediğimiz için toplamın değişmeyeceğini karşılaştırmalı ilişkisel yorumlayarak farkedebildiği görülse de grup görüşmesinde kendisi 10 sayısını elde edecek şekilde yeni sayı çiftleri yazarken işlem yapıp sonucun 10 kalmasını sağlayacak şekilde temel ilişkisel yorumlamayı kullandığı görülmüştür (Görsel 3.31).

Araştırmacı: Buradaki 10 armut olsun. Çünkü armutları bırakacak. Şuradaki sıfır da ayva olsun. Aaaa diyor hiç ayva almamışım diyor. Annem diyor ayva reçeli yapacaktı. attım. Dur diyor ben diyor bir ayva alayım diyor. 9 tanesini bırakayım diyor armutların. Onun yerine 9 tane ayva alayım diyor. Siz olsanız bunu nasıl yazarsınız?

Nazlı: Öğretmenim gene 10 olacak dimi sonucu?

[...]

Araştırmacı: 10 artı 0; o tarafta ne yazıyor. 1 artı 9 yazıyor galiba değil mi?



Görsel 3. 31. Nazlı'nın 2. Adım etkinlik-1 soru-3'e ilişkin cevabı

Nazlı: Bir tane armut, 9 tane ayva olmuş oluyor. Toplamda gene 10 oluyor.

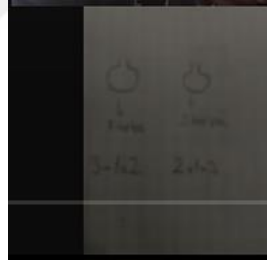
Terazi modeli, sayısal, sözel, farklı temsil geçişleri ile doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlamayı gerektiren Etkinlik.1. Alıştırma.1 soru.1'de terazi modelinde verilen durumun birinci adımını Nazlı'nın kesin işlemsel yorumlamayı

kullanarak ' $3+2=5$ ' şeklinde sayısal olarak ifade edilebildiği görülmüştür. 2. Adımı $(3-2)+(2+2)=5$ şeklinde karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanılarak ifade edildiğinde toplanan iki sayıdan birincisinden eksilen '2' ikinci sayıya eklendiğinde toplamın değişmeyeceği anladığı görülmüştür. Grup görüşmesinde Nazlı'nın 2. Adımı ' $3-1=2$ ' ve ' $2+1=3$ ' şeklinde ifade etmiş olması eşit işaretinin işlem yapıp sonucunu yazma özelliğini kullandığını gösterdiğinden eşit işaretinin kesin işlemsel yorumlamasını kullandığını göstermiştir. Terazî modeli ile eşit işareti arasında anlamlı ilişki kurmalarını gerektiren bu soruda terazinin aynı kefesindeki iki torbadan birinden bilyeleri alıp diğerine verdiğimizde terazinin dengesinin bozulmayacağını 'terazinin dengesi değişmez' şeklinde ifade edebilen Nazlı'nın eşit işareti ile dengede duran terazî modeli arasında ilişki kurmaya başladığı görülmüştür.

Nazlı: Öğretmenim. Şöyle bir şey olabilir mi mesela matematiksel olarak yazsak. 3 eksi 1, 2 oldu. Birinci torbada 2 tane top kaldı. İkinci torba için de 2 artı 1, 3 oldu. Böyle gösterebilir miyiz?

[...]

Nazlı: (aşağıda gösteriyor)



[...]

Nazlı: Terazinin dengesi değişmez. Çünkü birinci torba ve ikinci torbanın top sayıları yer değiştirmiştir. Öğretmenim ben matematikseli görmedim sadece sözel yaptım.

Araştırmacı: Şimdi olsa nasıl yazarsın Nazlı matematikseli?

Nazlı: Şimdi olsa matematikseli şöyle yapardım öğretmenim. Mesela birincisinde 2 ikincisinde 3 yapardım. Yani 5'le 5'i eşit olurdu. Yer değiştirmişler ya...

Araştırmacı: Heeee yer değiştirmişler derken şunu mu demek istiyorsun sen Nazlı. Burada artık 3 top olmayacak 2 top olacak buraya gittiği için. O yüzden buraya artık 2 top yazarsın. Buraya 3 yazarsın.



Nazlı: Evet öğretmenim.

Eşitliği sağlayan eksik değeri bulmaya yönelik bulgular (e.1.1. Soru):

Nazlı'ya grup görüşmesinde Kayra'nın yazdığı ' $15=30-15=15$ ' gibi hem ifadenin başında hem de sonunda yazdığı 15'lerden hangisini yazmasa olabileceği ya da ikisini de mi yazmalı sorusu sorulduğunda başta yazılan 15'in de eşittirden sonra yazılacak işlemlerinin sonucunu belirttiğini yorumlayabildiği ve bu durumu 'sonucun 15 çıkması gerektiği için yazdım' şeklinde ifade ettiği görüldüğünden esnek işlemsel yorumlamayı kullanabildiğini gösterdiği düşünülmüştür.

Araştırmacı: Altta da aynısı var. Yani aynısı dediğim farklı sayılar kullanmışsın tabi ama. 15 eşittir 8 artı 7 eşittir 15. Yani hem başa hem sona yazmışsın. O yüzden onu bir daha sormayayım. Diğer arkadaşlarına sorayım hemen.

Araştırmacı: Nazlı mesela Kayra böyle yazmış ya hem başa hem sona (bu sırada ekrandan Kayra'nın yazdığı yerleri kırmızı kalemle yuvarlak içine alıyorum). Sence yazmalı mı? Yazmasa olur mu? Ya da hangisini yazmasa olur?

Nazlı: Öğretmenim, bence baştaki 15'i yazmasa da olur. Hani yani ben de baştaki 15'i yazdım ama mesela neden yazdım. Sonucunun 15 çıkması gerektiği için yazdım. Yazmasa da olabilir yani.

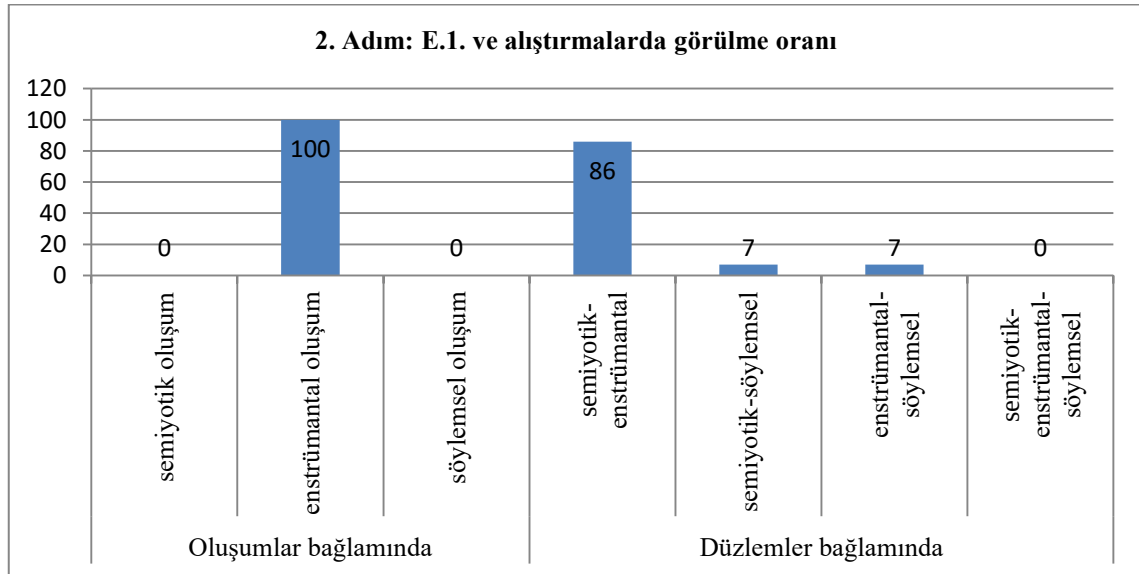
3.1.2.2.2. Nazlı'nın matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları

Nazlı'nın 2. Adım: etkinlik-1 ve ilişkili iki alıştırılarda sadece enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiştir. Çalışmalarının düzlemlerde olma oranı ortalama semiyotik-enstrümantal düzlemde %86 iken bunu semiyotik-söylemsel ve enstrümantal-söylemsel düzlemlerin %7 oranla takip ettiği görülmüştür (Grafik 3.14).

Tablo 3. 13. Nazlı'nın 2. Adımda oluşumlar ve düzlemlerin sorularda görülme durumları

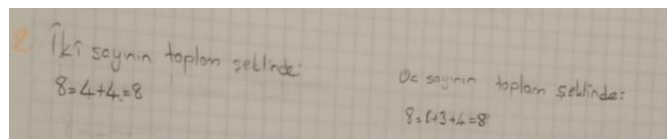
Eşit İşaretinin Yorumlanmasında Oluşumlar ve Düzlemler		E.1.S.1.	E.1.S.2.	E.1.S.3.	A.1.S.1.	A.1.S.2.	A.1.S.3.	A.1.S.4.	A.2.S.1.
Oluşumlar bağlamında	Semiyotik oluşum								
	Enstrümantal oluşum	6	1	3	4	1	1	5	9
	Söylemsel oluşum								
Düzlemler bağlamında	Semiyotik-enstrümantal			1				1	10
	Semiyotik-söylemsel			1					
	Enstrümantal-söylemsel			1					
	Semiyotik-enstrümantal-söylemsel								

Grafik 3. 14. Nazlı'nın 2. Adımda oluşumlar ve düzlemlerin görülme oranları



Eşit '=' işaretini anlamlandırmaya yönelik bulgular (e.1.2. soru):

Terazi modeli ile ilişkilendirerek verilen eşdeğer denklemlerde eşit işaretini anlamlandırmayı destekleyen Etkinlik.1 soru.2'de terazi modelinin sol kefesinde 8 top, sağ kefesinde iki ayrı torbada 5 top ve 3 top olarak dengede duran terazi modelini sayısal olarak temsil etmesi istendiğinde modeldeki torbaların içindeki top sayılarını kullanmaksızın 8 sayısını elde edecek şekilde iki sayının toplamı şeklinde yazdığı görülmüştür (Görsel 3.32). Yine aynı şekilde farklı bir terazi modelinin sol kefesinde 8 top sağ kefesinde üç ayrı torbada 4,3 ve 1 topun bulunduğu durumu sayısal olarak temsil ederken yazdığı ifadenin tesadüfen terazi modelinde verilen sayılarla örtüştüğünü ifade ettiği görülmüştür. Bu durumda terazi modelini problemin çözümünde işe koşamasa da eşit işaretini problemin çözümünde işe koşabildiği görüldüğünden **enstrümantal oluşumun** bileşenlerinin görüldüğü düşünülmüştür.



Görsel 3. 32. Nazlı'nın Etkinlik-1 soru-2'ye ilişkin cevabı

Araştırmacı: İşlemi sonradan yazabilirler diyorsun. Nazlı'ninkine bakıyorum. Nazlı da şöyle yazmış. 4 artı 4 diye yazmış. Nazlı sen neden öyle yazdın?

Nazlı: Öğretmenim mesela benim 8 deyince aklıma 4 ile 4 ü toplamak geliyor. Yani terazideki topları hesaplayınca 8 olduğunu gördüm. Onu da hesaplayınca 4 artı 4 diye yazdım.

[...]

Araştırmacı: O zaman sen şey diye mi düşündün? Kafana göre yazacağım diye mi düşündün.

Nazlı: Evet

Araştırmacı: 8 elde etmek için kafama göre bir sayı kullanacağım diye mi düşünmüştün? Burada mesela şey diye yazmışlar. 1 tane top var. 3 tane top var. 4 tane top var gibi bekliyordum ben. Hemen seninkine bakalım. 1, 3, 4 diye mi yazmışsın diye. 1, 3, 4 diye yazmışsın.

Nazlı: Evet öğretmenim. Onda öyle yazdım ama onda tesadüfen oldu yani. Hiç matematiksel olacağını düşünmemiştim

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik bulgular (e.1.3., a.1.1., a.1.2., a.1.3., a.1.4, a.2.,1.sorular):

Terazi modeli ile ilişkili olarak doğru verilen denklemde yapılan eşitliği bozmayan işlem adımlarını yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda bu adımları uygulamayı gerektiren Etkinlik.1 Alıştırma 2'de iki sayının toplamını hesaplarken toplananlardan birinden alınan sayıyı diğer toplanana eklediğimizde eşitliğin bozulmayacağını bilir ancak Görsel 3.33'de verilen soldaki görselde olduğu gibi eksilen ve eklenen sayıyı belirlerken toplama işlemini kolaylaştıracak sayıları belirleyemediği görülmüştür. Öğretmen rehberliği ve grup tartışmalarından sonra aynı soruları yeniden yapmaları istendiğinde Görsel 3.33'de verilen sağdaki görselde olduğu gibi eksilen ve eklenen sayıyı toplama işlemini kolaylaştıracak şekilde belirleyebildiği görülmüştür. Semiyotik bir araç olan eşit işaretini problemin çözümünde bir araç olarak kullanabildiğinden **enstrümantal oluşumun** bileşenleri görüldüğü düşünülmüştür. Grup görüşmesinde yaptığı adımları ifade edebildiği ama bu ifadelerde doğrulayıcı, gerekçe ortaya koyan ifadeler yer almadığından çalışmasının **semiyotik-enstrümantal** düzlemde olduğu kabul edilmiştir.

Left photo calculations:

$$79 + 196 = 79 + 3 + 196 - 3 = 275$$

$$83 + 87 = 83 + 8 + 87 - 8 = 180$$

$$179 + 56 = 179 - 9 + 56 + 9 = 235$$

$$56 + 204 = 56 - 4 + 204 + 4 = 260$$

$$2401 + 89 = 2401 + 6 + 89 - 6 = 2489$$

Right photo calculations:

$$79 + 196 = 79 - 4 + 196 + 4 = 275$$

$$83 + 87 = 83 - 3 + 87 + 3 = 180$$

$$179 + 56 = 179 + 1 + 56 - 1 = 235$$

$$56 + 204 = 56 + 4 + 204 - 4 = 260$$

$$2401 + 89 = 2401 - 1 + 89 + 1 = 2489$$

Görsel 3. 33. Nazlı'nın Etkinlik-1 Alistırma-2 soru-1'e ilişkin görüşme öncesi (solda) ve görüşme sonrası (sağda) cevabı

Nazlı: Evet öğretmenim biraz öyle oldu. Çünkü şöyle öğretmenim. Sayıları tam yapmaya çalıştım. 99'a 1 ekleyip 100 yapıp diğer sayıyı da ona ekleyerek direk zihnimden yaptım. Ama burada öyle yapmadım

Araştırmacı: Anladım. Mesela biraz önce sorduklarımdan farklı olsun. Kayra'ya sorduklarımdan farklı olsun. Mesela Nazlı sen şu 179'da 1 ekleyip çıkarmışsın ya 179'lu olan soruda neden 1'i seçtin.

Nazlı: Öğretmenim çünkü 179'a 1 ekleyince 180 oluyor. 56'dan da 1 çıkartınca 55. Ben onları direk. 5'i zaten direk kafamdan yazıyorum. 8'le 5'i topladıktan sonra direk aklıma geldiği için. Bana 1 daha kolay geldi.

Araştırmacı: Hmmm hemen şunu söyleyim. Bir tane daha göstereyim sana. Mesela 2401'li olan soruda...

Nazlı: Öğretmenim şöyle.. ben 2400 yapıp 89 yapmak istedim. 2489. Direk böyle yazım.

Araştırmacı: Mesela bu sefer 1 çıkararak başlamışsın. Bazı sorularda ekleyerek başlamışsın. Bazı sorularda çıkararak başlamışsın. Ona nasıl karar veriyorsun.

Nazlı: Şöyle öğretmenim en baştaki sayıyla başladığım için. Mesela 2401 ona 1 eklesem 2402 olacak. Ve toplamam biraz daha zor olacak. Ama 2401'den 1 çıkarttığımda direk 2400 sayısına ulaşacağım. Ondan sonra 87'yle de 2487 yapıp daha kolay bulacağım.

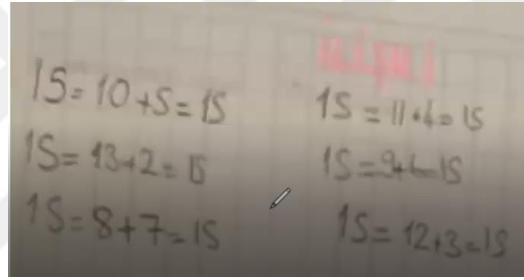
Eşitliği bozmayan işlemleri belirleyerek doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında bu adımları farklı durumlarda uygulamayı gerektiren terazi modeli ile ilişkilendirilerek verilen Etkinlik.1. soru.3'te grup görüşmesinde 5+3 ifadesinin eşitini bulurken 5'ten 2 azaltıp 3'e 2 eklediğimizde armut ve ayva sayısını temsil eden 3 ve 5 sayılarının yer değiştirmesinden dolayı toplamın değişmeyeceğini ifade ettiği görülmüştür. Bu durum terazi modelini problemin çözümünde işe koşabildiğini gösterdiğinden **enstrümantal oluşumun** bileşenlerinin görüldüğü şeklinde yorumlanmış ve yaptığı adımları gerekçeleri ile açıklayabildiğinden çalışmasının **enstrümantal söylemsel** düzlemde olduğu kabul edilmiştir.

Araştırmacı: Peki nasıl yani ben anlayamadım. Bir sürü işlem yaptım. 2 tane ekledim. Sonra 5'ten 2 tane çıkardım. Bir sürü işlem yaptım yaptım yaptım. Yukarıda da 8 tane meyve alabilmişim. Aşağıda da 8 tane meyve alabildim. Ya nasıl oluyor da ikisi de değişmiyor?

Nazlı: Öğretmenim çünkü yerlerini değiştiririz. 5 ayvayken 5 armut, 3 armutken 3 ayva yaptınız. Yani yerleri değiştirince sonucu değişmiyor.

Eşitliği sağlayan eksik değeri bulmaya yönelik bulgular (e.1. Soru):

Açık sayı cümlesinde eşitliği sağlayan eksik değeri bulmayı gerektiren etkinlik.1 soru.1'de Nazlı'nın eşit işaretinin esnek işlemsel ve kesin işlemsel yorumlanmasını işe koşabildiği görüldüğünden **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü yönünde değerlendirilmiştir (Görsel 3.34).



Görsel 3. 34. Nazlı'nın Etkinlik-1 soru-1'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Ya da ikisini de yazmak zorunda mıydın?

Nazlı: öğretmenim şöyle, ikisini de yazmayabilirdim ama bana en mantıklı gelen baştaki 15'i yazmasaydım da olurdu. Çünkü sonucun 15 olması gerektiğini ben biliyorum. O 15 olmasaydı da olabilirdi.

3.1.2.3.Üçüncü adım: etkinlik-2 ve alıştırmalar

Bu bölümde Nazlı'nın 3. Adım: Etkinlik-2 ve ilişkili alıştırmalarına yönelik bulguları kavramsal ve bağlamsal anlamaya ilişkin bulguları ve matematiksel çalışma uzayına ilişkin bulguları başlıkları altında verilmiştir.

3.1.2.3.1. Nazlı'nın kavramsal ve bağlamsal anlamaya ilgili bulguları

Bu bölümde Nazlı'nın kavramsal ve bağlamsal anlamaya ilişkin bulguları Etkinlik-2 ve ilişkili alıştırmalarda yer alan soruların analizi sonucu elde edilen temalar başlıkları altında sunulmuştur.

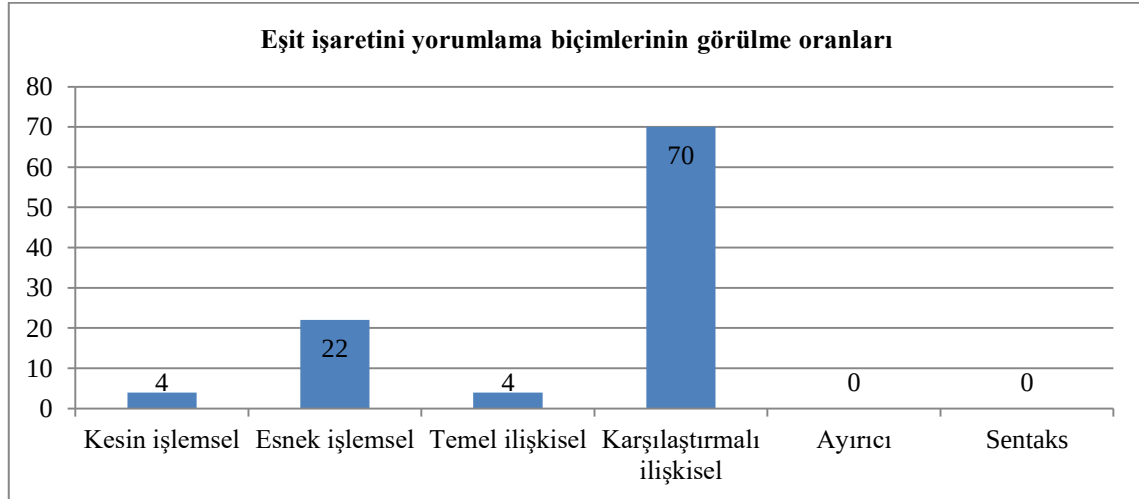
Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik bulgular:

Nazlı'nın 3. Adım: etkinlik.2. ve ilişkili alıştırmalar sürecinde eşit işaretini yorumladığı durumlar incelendiğinde düzeylere bağlı farklı yorumlama biçimlerini kullanma oranlarına dair Tablo 3.14 ve Grafik 3.15 elde edilmiştir. Nazlı'nın 3. Adımda karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı yaklaşık olarak %70 oranında kullandığı görülürken onu sırasıyla esnek işlemsel yorumlama yaklaşık olarak %22 oranında, temel ilişkisel ve kesin işlemsel yorumlamanın yaklaşık olarak %4 oranında takip ettiği görülmüştür.

Tablo 3. 14. Nazlı'nın 3. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimlerinin sorulara göre dağılımı

Eşit İşaretini Yorumlama Biçimleri	E.2.S.1.	E.2.S.1.A.	E.2.S.2.	E.2.S.3.	E.2.A.1.S.1.	E.2.A.1.S.2.	E.2.A.2.S.1.
Kesin işlemsel	1		1				
Esnek işlemsel	2		3	3		2	
Temel ilişkisel		1	1				
Karşılaştırmalı ilişkisel	1	5	5	6	9	5	1
Ayırıcı							
Sentaks							

Grafik 3. 15. Nazlı'nın 3. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimlerini kullanma oranı



Terazi modeli, sayısal, sözel, farklı temsil geçişleri ile doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulamayı gerektiren Etkinlik.2 soru.1'de Nazlı'nın $12+25-25=12$ ifadesinden yararlanarak Görsel 3.35'de verilen 38 sayısının yanına eklenen ve çıkarılan sayıların aynı olacağı, farklı durumlar yazması ve eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanmasını fark etmesi beklendiğinde eklenen ve çıkarılan sayıların aynı olduğu, bu nedenle 38'in değişmediği

farklı örnek durumlar yazabildiği görülmüştür. Grup görüşmelerinde sorulan sorulardan sonra etkinlikte verilen örnek durumu referans gösterdiği aslında karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanamadığı görülmüştür. Grup tartışmaları ve öğretmen rehberliği ile beraber karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı anlamlı bir şekilde ifade edebildiği görülmüştür.

Görsel 3. 35. Nazlı'nın Etkinlik.2 soru-1'e ilişkin cevabı

Nazlı: Öğretmenim ben işlem hatası yapmışım orada. 37 yazacağıma 47 yazınca her şey yanlış olmuş.

Araştırmacı: Aynen üsttekinde büyük ihtimal o yüzden işlem hatası oldu ama alttakilere baktım ben Nazlı. Alttakilerde normal doğru bir şekilde yazmışsın gibi geldi bana. Artı 9 eksi 9 yazmışsın mesela. Artı 2 eksi 2 yazmışsın. Neden öyle yazdın?

Nazlı: Hocam ben yukarıdakine baktım artı 25 eksi 25 yapınca artı ve eksilere aynı sayıyı yapmamız gerektiğini düşündüğüm için öyle yaptım.

[...]

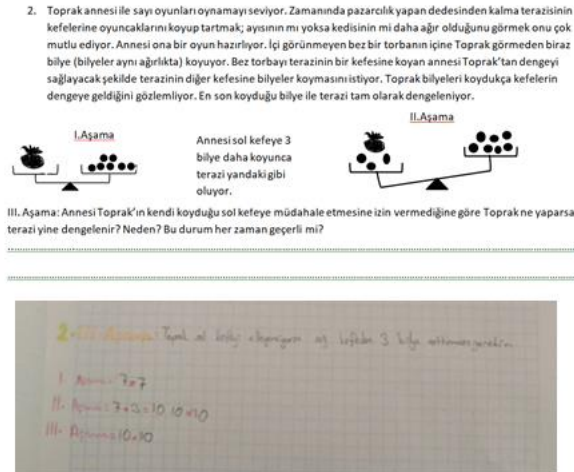
Araştırmacı: Hmmm peki o zaman ben sana şöyle de sorayım Nazlı hemen. Mesela sen burada 12'yle 25'i toplamışsın ya aslında 47 yazmışsın ama aslında 37 olması gerekiyordu öğretmenim diyorsun. Benim de aklıma şey geldi. Nazlı acaba burada 12'yle 25'i toplamasaydı da şöyle deseydi olur muydu? 25'i eklemişler 25'i çıkarmışlar hiç işlem yapmadan da yani hiç toplamadan da zaten yine 12 çıkar diyebilir miydi?

Nazlı: Yani hocam diyebilirdik.

Araştırmacı: Ne diyorsun yani sen. Buradaki 25'le 12'yi topluyorsun ve 37 buluyorsun ya hiç toplama işlemi yapmadan da yapabilir miydik bu soruyu?

Nazlı: Olabilirdi öğretmenim. Çünkü aynı sayı çıkıp toplanıyor. Mesela 12'yle 25 toplayınca o sayı elde ediliyor. Biz yine aynı sayıyı elde etmek istersek aynı sayıyı çıkartırız. Eklediğimiz gibi çıkartınca yine aynı sonuç elde edilir.

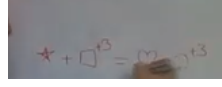
Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlarken terazi modeli, sayısal, sözel, farklı temsil geçişlerini de gerektiren Etkinlik-2 soru-2’de grup görüşmeleri sırasında karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı geliştirmelerini desteklemek amacıyla işlem yapıp sonuç bulmadan eşitliğin iki tarafına da aynı sayıyla aynı işlemin yapılması durumunda eşitliğin bozulmayacağını hissettirmek üzere sorulan sorularda Nazlı’nın eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamasını kullanabildiği, eşittirin iki tarafına da 3 eklendiği için eşitliğin bozulmadığını farkedebildiği görülmüştür. Bununla beraber iki sayının toplamı ile farklı iki sayının farkının eşit olması durumunu garipsediği görüldüğünden bu duruma örnek durumlar verilerek kafasındaki soru işareti giderilmiştir. Terazi modelinde dengede verilen torba ve 7 bilyeyi sayısal olarak temsil ederken ‘torba=7’ yazmak yerine ‘7=7’ yazdığı görülmüştür (Görsel 3.36). Bu durum bilinmeyi temsil eden torbayı terazinin duruşundan yola çıkarak 7 olarak belirlediğini gösterse de modelde verilen durumu sayısal olarak temsil edemediğini gösterdiği yönünde değerlendirilmiştir. Bununla beraber terazi modelinde torbanın yanına eklenen 3 bilyeden sonra terazinin dengesi bozulduğu halde bu durumu ‘7+3=10, 10=10’ olarak temsil ettiği ve dengede olmama durumunda büyüktür-küçüktür sembollerini kullanamadığı görülmüştür (Görsel 3.36).



Görsel 3. 36. Nazlı’nın Etkinlik-2 soru-2’ye ilişkin cevabı

Araştırmacı: Ben oradaki eşittiri aslında şu amaçla koydum. Acaba eşit mi diye sordum. Yani şey de diyebilirsiniz isterseniz. Aaa buraya eşittiri yazmak doğru olmaz da diyebilirsiniz isterseniz. Eğer doğru olmadığını düşünüyorsanız eşittirin. Mesela bak başka bir soru sorayım aklıma geldi. Böyle sorular falan verince belki insanın hemen işlem yapısı geliyor. 9’la 2’yi toplayıp 11 falan diye söylüyorsunuz ya acaba dedim hiç sayı vermesem gene olur mu? Mesela şöyle. Yıldız artı kare eşittir kalp eksi daire. Şöyle bir şey verdiler

size. Yıldız artı kare eşittir kalp eksi daire. Sonra dediler ki artı 3 artı 3. (eşitliğin iki tarafına da 3 ekliyorum)



Araştırmacı: Hala eşitlik bozulur mu bozulmaz mı? Ne olur eşitlik acaba?

Nazlı: Öğretmenim bence bozulmaz çünkü ikisine de 3 eklenmiş. Vee ama şurada benim kafam karıştı birinden artı yani birini toplamışlar birini çıkartmışlar ama ortada eşittir var.

Araştırmacı: Acaba olur mu?

Kayra: Hocam ben bir şey söyleyebilir miyim?

Nazlı: Eşit olurlarsa olur.

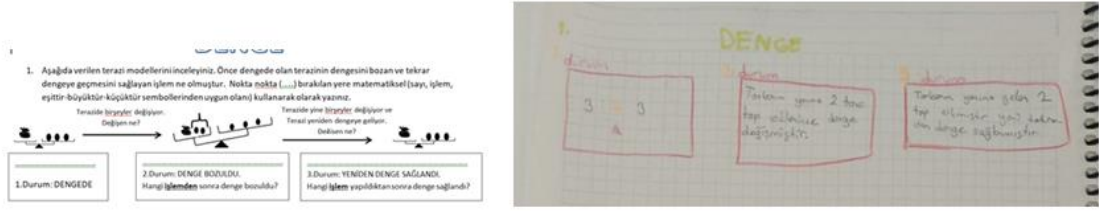
Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygularken cebirsel temsil, terazi modeli, sözel temsil geçişlerini gerektiren Etkinlik.2 Alıştırma.2 soru-1’de grup görüşmeleri sırasında Kayra’nın terazinin kefelinde dengede duran torba ve 3’ün yerlerini değiştirme fikrini olumlu karşılayan Nazlı’nın, kefeldeki değişimin dengeyi yani eşitliği bozmayacağını farkında olduğu görüldüğünden eşit işaretini esnek işlemsel yorumlayabildiği görülmüştür.

Nazlı: Öğretmenim. Hani siz 3’le torbanın yeri mi değişsin dediniz?

Araştırmacı: Kayra öyle dedi. 3’le torbanın yerini mi değiştirsek dedi. Yani birini sağ birini sol tarafa yapsak dedi.

Nazlı: Olur öğretmenim gene aynısı sadece yerleri değişiyor.

Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında bu adımları farklı durumlarda uygularken terazi modeli, sayısal, sözel, farklı temsil geçişleri yapmayı gerektiren Etkinlik.2 soru.1’de grup görüşmesinde terazi modelinde verilen bir torba ile üç bilyenin dengede olduğu durumu matematiksel olarak ifade ederken ‘ $3=3$ ’ olarak temsil etmesinin nedeni sorulduğunda ‘*Çünkü sağ kefesiyle sol kefesi eşit duruyorlar. İkisi de aynı şeyde duruyorlar*’ ifadesiyle terazinin aynı hizada durduğu modeli eşit işareti ile ilişkilendirebildiği; ancak bilinmeyen temsil eden torba modeli yerine dengede duran terazi modelinden yararlanarak sayıyla temsil ederek ‘3’ olarak kullandığı görülmüştür (Görsel 3.37). Terazide üç bilye ile torbanın dengede olduğu durumda torbanın yanına eklenen 2 bilyeden sonra dengenin değiştiğini, sol kefenin daha fazla olduğunu sözel olarak ifade edebilen Nazlı’nın öğretmen rehberliği ve grup tartışmalarından sonra sayısal olarak da ifade ederken büyüktür sembolünü kullanabildiği görülmüştür.



Görsel 3. 37. Nazlı'nın Etkinlik-2 Soru-1'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Eee Nazlı sana da şeyi sormak istiyorum ben mesela 3 eşittir 3 demişsin ya neden öyle dedin?

Nazlı: Çünkü öğretmenim bana göre olan sağ kefesinde 3 tane top veya bilye varsa eşit olduğuna göre torbada poşette de 3 tane bilye vardır.

Araştırmacı: Eşit olduğunu nereden bildin?

Nazlı: Çünkü sağ kefesiyse sol kefesi eşit duruyorlar. İkisi de aynı şeyde duruyorlar.

Araştırmacı: Aynı hiza olarak aynı mı?

Nazlı: Evet öğretmenim.

[...]

Nazlı: Mesela öğretmenim biz o torbada birinci durumda 3 tane top veya bilye olduğunu öğrendiğimiz için 3'e 2 tane daha bilye veya top eklersek 5 olur. Diğer sağ kefedeki de 3 tane top veya bilye hangisiyse olduğu için sol kefedeki daha fazla olur ve denge bozulur.

Araştırmacı: O denge bozulmayı nasıl anlatırsın peki?

Nazlı: Şöyle öğretmenim 3 artı 2 yaparım 5. 5 büyüktür işareti 3 yaparım.

Araştırmacı: Göstersene bana onu yazıp da.

Nazlı: Tamam öğretmenim.

Araştırmacı: Nasıl yazarsın diye.

Nazlı: Şöyle öğretmenim. (bu sırada ekrana göstermeye çalışıyor yazdığı kağıdı)

Araştırmacı: 3 artı 2 eşittir 5. 5'ten sonra yazan şey büyüktür mü Nazlı?

Nazlı: Evet öğretmenim 5 büyüktür 3. (sembol kullanmış) $(3 + 2 = 5 > 3)$

3.1.2.3.2. Nazlı'nın matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları

Bu bölümde 3. Adımda yer alan etkinlik ve alıştırmalardaki soruların analizinden elde edilen temalar başlıkları altında Nazlı'nın matematiksel çalışma uzayına ilişkin bulguları sunulmuştur.

Eşitliği Bozmayan İşlemleri Belirlemeye Yönelik Bulgular:

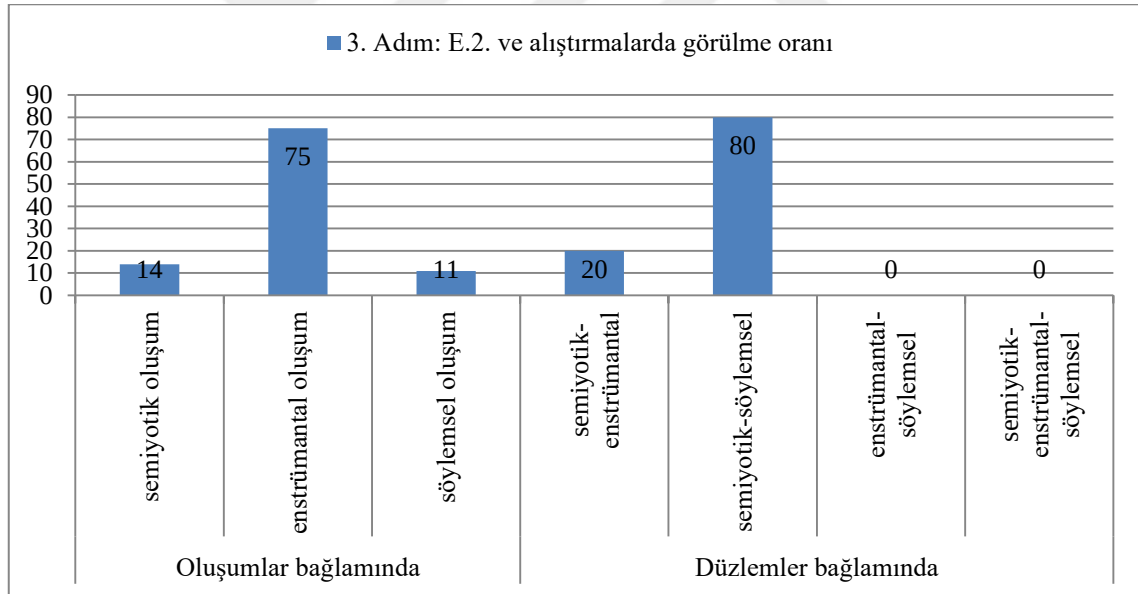
Nazlı'nın 3. Adım: Etkinlik.2. ve ilişkili alıştırmalar süreci oluşumlar ve oluşumların ikiyeşerli kombinasyonu bağlamında incelendiğinde Tablo 3.15 ve Grafik 3.16 elde edilmiştir. 3. adım sürecinde Nazlı'nın çalışmalarında yaklaşık olarak sırasıyla

enstrümantal oluşumun %75 oranında, semiyotik oluşumun %14 oranında, söylemsel oluşumun %11 oranında bileşenleri görülmüştür. Nazlı'nın matematiksel çalışmalarının semiyotik-söylemsel düzlemde %80 oranında olduğu, semiyotik-enstrümantal düzlemde %20 oranında yer aldığı görülmüştür.

Tablo 3. 15. Nazlı'nın 3. Adımda oluşumlar ve düzlemlerin görülme durumunun sorulara göre dağılımı

Eşit İşaretinin Yorumlanmasında Oluşumlar ve Düzlemler		E.2.S.1.	E.2.S.1.A.	E.2.S.2.	E.2.S.3.	E.2.A.1.S.1.	E.2.A.1.S.2.	E.2.A.2.S.1.
Oluşumlar bağlamında	Semiyotik oluşum				5			
	Enstrümantal oluşum	3	4	5	2	6	7	
	Söylemsel oluşum		1			1	2	
Düzlemler bağlamında	Semiyotik-enstrümantal				1		1	
	Semiyotik-söylemsel		1		5		1	1
	Enstrümantal-söylemsel							
	Semiyotik-enstrümantal-söylemsel							

Grafik 3. 16. Nazlı'nın 3. Adımda oluşum ve düzlemlerin görülme oranları



Cebirsel temsil, terazi modeli, sözel temsil ile ilişkilendirilmiş doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulamayı gerektiren Etkinlik.2 Alıştırma.1 soru.2'de '84=Torba-30' ifadesinde verilmeyeni hesaplarken bu ifadedeki eşit işaretinin sol tarafındaki 84'ü terazinin bir kefesini, torba-30 ifadesini de terazinin diğer kefesinde yorumlayarak terazi modelini problemin çözümünde işe koşabildiğinden enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin gösterge olarak değerlendirilmiştir. '84=torba-30' ifadesinde bilinmeyeni hesaplarken Görsel 3.38'de verildiği gibi eşitliğin iki tarafına da 30 ekleyen Nazlı'ya grup görüşmelerinde

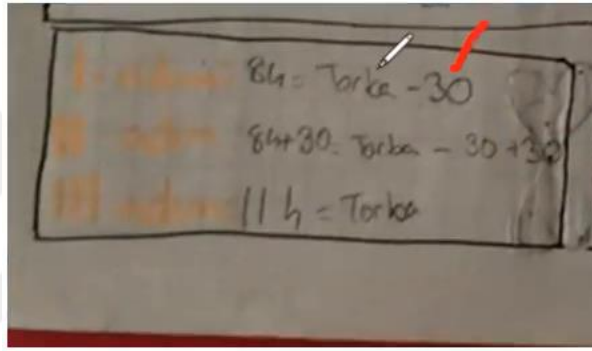
yaptığı adımların sebebi sorulduğunda eşitliğin iki tarafına da aynı sayıyla aynı işlemin yapılması gerektiğini fark ettiği ama neden 30 sayısını seçtiği ya da neden toplama işlemi yaptığını mantıklı gerekçeler sunarak açıklayamadığı görülmüştür. Yaptığı adımları gerekçe sunamadan ifade etmesinden dolayı çalışmasının **semiyotik-enstrümantal** düzlemde olduğu kabul edilmiştir.

Nazlı: Öğretmenim şimdi 84 tane bilye varmış.

Araştırmacı: Tamam.

Nazlı: Mesela terazi üzerinde anlatayım ben. Terazinin bir kefesinde 84 tane bilye var. Diğer kefesinde de torba ve ayrıyeten 30 tane bilye var.

Araştırmacı: Ben de onu diyecektim. Torba bir de yanında ayrıyeten 30 tane daha bilye mi var?



Görsel 3. 38. Nazlı'nın Etkinlik-2 Alıştırma-1 soru-2'ye ilişkin cevabı

Nazlı: Evet bence öyle. Ya da ben öyle anladım.

Araştırmacı: Peki buradaki eksi ne anlama geliyor o zaman?

Nazlı: Veya öyle olmasa bile şöyle olabilir öğretmenim. Torbanın içinde 84'e göre 30 tane daha bilye var yani torbanın içinde daha fazla bilye var.

[...]

Araştırmacı: Ama sen burada mesela her iki tarafa da 30 eklemişsin ya neden her iki taraftan da 30 çıkarmadın?

Nazlı: O da olabilirdi. 30 çıkartma da olabilirdi. 30 ekleme de olabilirdi.

Araştırmacı: İşte nasıl bileceğiz onu biz?

Nazlı: Yani şöyle öğretmenim. Eklersek daha eşit oluyorlar. Şöyle olabilir. Birinden ekleyip birinden çıkarsak eşit olmazlar. Biri daha fazla biri daha az olur.

Cebirsel temsil, terazi modeli, sözel temsil ile ilişkilendirilmiş doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulamayı gerektiren Etkinlik.2 Alıştırma.1 soru.1'de Görsel 3.39'da verilen 'torba+36=101' şeklinde verilen soruda bilinmeyeni hesaplarken Nazlı semiyotik bir araç olan eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanmasını problemin çözümünde işe

koşabildiğinden enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin gösterge olarak değerlendirilmiştir. Eşit işaretinin iki tarafına da aynı sayı ile aynı işlemin yapılması durumunda eşitliğin bozulmayacağı bilgisinden yararlanarak bilinmeyeni hesaplayabildiği görülmüştür.

DENGİ

I. adım: Torba + 36 = 101 II. adım: Torba + 36 - 36 = 101 - 36 III. adım: Torba = 65	I. adım: Torba + 21 = 75 II. adım: Torba + 21 - 21 = 75 - 21 III. adım: Torba = 54
I. adım: Torba = 99 = 128 II. adım: Torba + 99 - 99 = 128 - 99 III. adım: Torba = 29	I. adım: Torba + 46 = 83 II. adım: Torba + 46 - 46 = 83 - 46 III. adım: Torba = 37
I. adım: Torba + 54 = 83 II. adım: Torba + 54 - 54 = 83 - 54 III. adım: Torba = 29	I. adım: Torba + 29 = 80 II. adım: Torba + 29 - 29 = 80 - 29 III. adım: Torba = 51

Görsel 3. 39. Nazlı'nın Etkinlik-2 Alıştırma-1 soru-1'e ilişkin cevabı

Denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirlemede sözel ifadeyi yorumlamayı gerektiren Etkinlik.2 soru.4'te 'Sol kefeye 3 bilye eklenince sağ kefedden 3 bilye çıkarılmıştır. Sol kefedden 2 bilye çıkarılınca sağ kefeye 2 bilye eklenmiştir.' şeklinde verilen sözel ifadede grup görüşmesinde terazi modelini gözünde canlandırarak 'bir taraftan alıp öbür tarafa verilince öbür taraf daha ağır oluyor. Öbür taraf daha hafif olunca eşit olmuyorlar' diyerek anlamlı bir açıklama ile gerekçe sunabildiği görüldüğünden bu veriler ışığında hem semiyotik oluşumun bileşenlerinin görüldüğü hem de çalışmasının semiyotik-söylemsel düzlemde yer aldığına ilişkin göstergeler olarak kabul edilmiştir.

Nazlı: Hocam ben şöyle düşünüyorum. Ben şöyle yaptım. Mesela sizin dediğiniz gibi diğer taraftan alıp öbür tarafa verince öbür taraf daha ağır oluyor. Öbür taraf daha hafif olunca eşit olmuyorlar.

Cebirsel temsil, terazi modeli, sözel temsil ile ilişkilendirilen doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında bu adımları farklı durumlarda uygulamayı gerektiren Etkinlik.2 Alıştırma.1 soru.1'de 'Torba+99=128' ifadesinde bilinmeyeni hesaplarken grup görüşmesinde eşitliğin her iki tarafından da 99 çıkarmasının sebebi sorulduğunda Nazlı'nın 'en başta birinci hani en üstte örnek vardı

ya onda aynı sayıyı çıkardığı için ben de öyle devam ettim' demesi mantıklı bir matematiksel gerekçeye dayandırmadan örneği referans aldığını ifade etmesi ve tündengelimsel ya da tümevarımsal bir düşünme yolu izlemeksizin açıklamasını örneğe dayandırdığı bir **söylemsel oluşumun** bileşenleri olarak kabul edilmiştir.

Araştırmacı: O zaman siz gidip ne 80'i seçtiniz. Ne 120'yi seçtiniz. Ne 5'i seçtiniz. Hiçbirini seçmediniz. Neden gidip 99'u seçtiniz?

Nazlı: Öğretmenim?

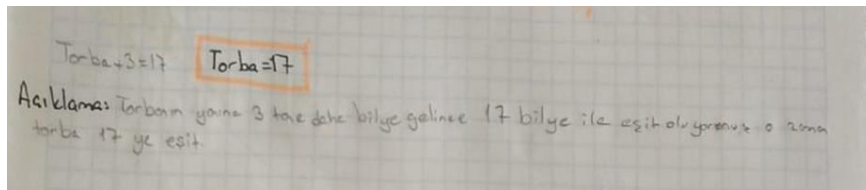
Araştırmacı: Melda'yla başlayayım bu arada Nazlı. Biraz bekleteyim. Melda'ya bir tane soru soracağım demiştin ya. O soru bu soru. Neden Melda gittin de 99'u çıkardın. Madem bütün sayıları çıkarabiliyoruz. 99'u niye seçtin?

Melda: O an onu düşünemedim herhalde yukarıda eklediğini çıkartıyor diye.

Araştırmacı: Melda diyor ki eklediğini çıkarma mantığını kullandım diyor. Sen ne diyorsun Nazlı?

Nazlı: Öğretmenim ben şöyle düşünüyorum hani en başta birinci hani en üstte örnek vardı ya onda aynı sayıyı çıkardığı için ben de öyle devam ettim. Yoksa öyle de olur.

Cebirsel temsil, terazi modeli, sözel temsil ile ilişkili doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında bu adımları farklı durumlarda uygulamayı gerektiren Etkinlik.2 Alıştırma.2'de 'torba+3=17' sorusunda bilinmeyen hesaplamaları istendiğinde Nazlı'nın bireysel uygulamada torbayı 17 bulduğu görülmüştür (Görsel 3.40). Grup görüşmeleri sırasında grup tartışmaları ve öğretmen rehberliğinden sonra 'torbanın yanında 3 var. Bulmam için onların gitmesi lazım' diyerek eşitliğin iki tarafından da 3'ü çıkarması gerektiğini eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanması özelliğini kullanarak açıklayabildiği görülmüştür. Nazlı'nın bu çalışmasının eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanması özelliğini kullanarak doğrulayıcı gerekçeler sunmasından dolayı **semiyotik-söylemsel** düzlemde olduğu değerlendirilmiştir.



Görsel 3. 40. Nazlı'nın Etkinlik-2 Alıştırma-2 soru-1'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Neden başka bir sayı değil de 3 mesela?

Nazlı: Öğretmenim ben şu yüzden 3 kullandım. Şimdi torbanın yanında 3 var. Bir de 17 var. Eee torbayı bulmak için torbanın yanındaki bilye veya her neyse. Bulmam için onların gitmesi lazım. O yüzden orada da 3 tane ayrıyeten olduğu için 3'ü çıkarttım.

3.1.2.4.Dördüncü adım: son değerlendirme

Bu bölümde Nazlı'nın 4. Adım: Son değerlendirmeye yönelik bulguları kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları ve matematiksel çalışma uzayı ile bulguları başlıkları altında sunulmuştur.

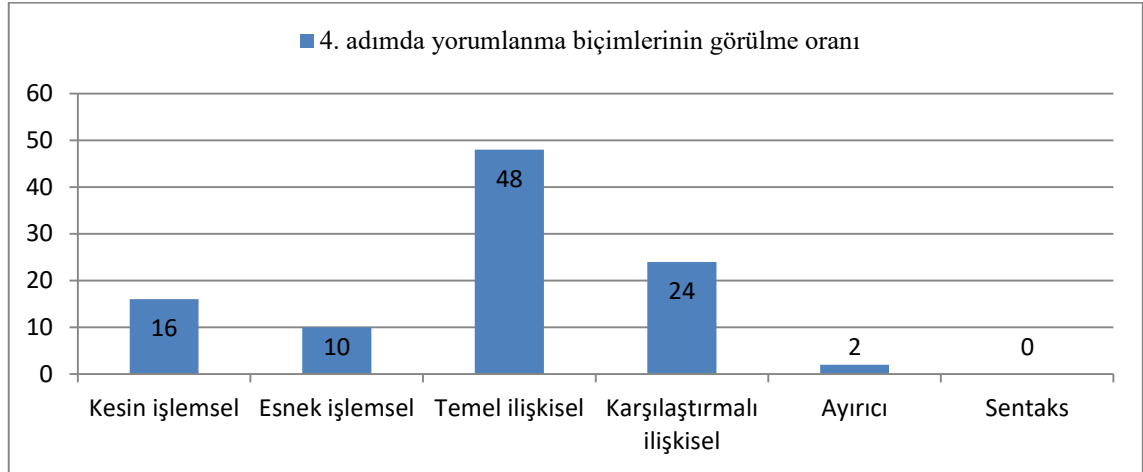
3.1.2.4.1. Nazlı'nın kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları

Nazlı'nın 4. Adım: son değerlendirme sürecinde eşit işaretini yorumladığı durumlar incelendiğinde düzeylere bağlı farklı yorumlama biçimlerini kullanma oranlarına dair Tablo 3.16 ve Grafik 3.17 elde edilmiştir. 4. adımda eşit işaretini yaklaşık olarak temel ilişkisel %48 oranında, karşılaştırmalı ilişkisel %24 oranında, kesin işlemsel %16 oranında, esnek işlemsel %10 oranında, ayırıcı %2 oranında yorumladığı görülmüştür.

Tablo 3. 16. Nazlı'nın 4. Adımda eşit işaretinin yorumlama biçimlerini kullama durumunun sorulara dağılımı

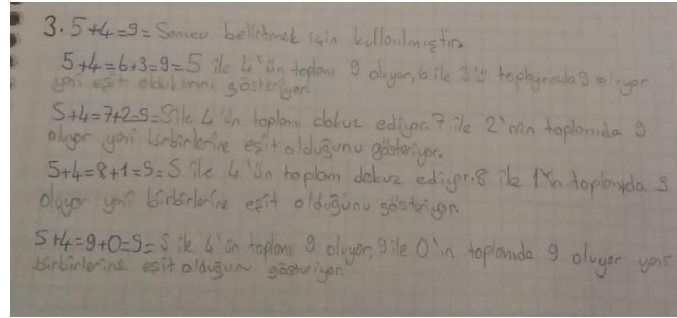
Eşit İşaretini Yorumlama Biçimleri	S.D.S.1.	S.D.S.2.	S.D.S.3.	S.D.S.4.	S.D.S.5.	S.D.S.6.	S.D.S.7.	S.D.S.8.	S.D.S.9.	S.D.S.10.	S.D.S.11.	S.D.S.12.
Kesin işlemsel	5		3				6				8	9
Esnek işlemsel	4				7	4	5					
Temel ilişkisel	3		16	5		7	18	14	4	11		16
Karşılaştırmalı ilişkisel			5	16		8	5		1	9		4
Ayırıcı							3			1		
Sentaks												

Grafik 3. 17. Nazlı'nın 4. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimlerini kullanma oranı



Eşit '=' işaretini anlamlandırmaya yönelik bulgular (1.,2.,3.,5. ve 11. sorular):

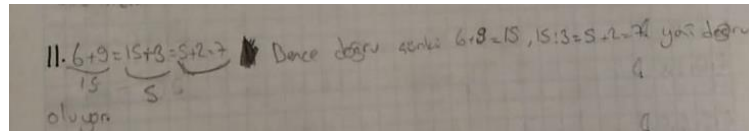
Eşdeğer denklemlerde işareti anlamlandırmayı gerektiren soru.3'te Nazlı'nın bireysel uygulamada Görsel 3.41'de görüldüğü gibi işlemleri yapıp sonuçları bulma ve eşit işaretinin iki tarafındaki sonuçları karşılaştırmayı tercih ettiği görülmüştür. Sayılar arasındaki değişim veya eşit işaretinin iki tarafındaki sayıları karşılaştırmak yerine sonuç bulmayı tercih etmiş olması eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlanmasını kullandığına ilişkin gösterge olarak değerlendirilmiştir.



Görsel 3. 41. Nazlı'nın son değerlendirme soru-3'e ilişkin cevabı

Hatalı eşdeğer denklem ile işareti anlamlandırmayı destekleyen soru.11'de ' $6 + 9 = 15 : 3 = 5 + 2 = 7$ ' ifadesinin doğru olup olmadığına karar verirken Görsel 3.42 ve Görsel 3.43'te verildiği gibi kesin işlemsel yorumlamayı kullanarak $6+9=15$, $15:3=5$, $5+2=7$ şeklinde yorumlayarak eşittirden sonra yazılan sayının eşittirden önce yazılan işlemlerin cevabını gösterdiği yönünde yorumladığı için ifadenin doğru olduğuna karar verdiği görülmüştür. Bireysel uygulamada ya da öğretmen rehberliği ile yapılan bireysel görüşme sırasında $6+9=15$ ve $15:3=5$ şeklinde eşit işaretinin solu ve sağından farklı

sonuçlar elde edildiğini fark ettiği; farklı sonuçlar elde edildiğinde ifadenin yanlış olduğunu söylemesi gerekirken ifadenin doğru olması için kesin işlemsel yorumlamayı kullandığı görülmüştür. Eşit sembolünün farklı biçimlerde yorumlanmasının birbirlerini desteklemesi gerektiğini hissedemediği görülmüştür. Nazlı'nın ' $6+9=15:3=5+2=7$ ' ifadesinin doğruluğuna karar verirken eşit işaretinin 'sonuç belirtmek için' kullanıldığını düşünmüş olması eşit işaretini tanımlayan destekleyici kelimelerden işlemsel yorumu kullandığını göstermiştir. Nazlı'nın bu ifadeyi bir bütün olarak terazide gösteremeyeceğini düşünmesi üzerine yapılan öğretmen rehberliği ve grup tartışmalarında ifadenin doğru olmasını sağlayacak şekilde terazi modeli üzerinde göstermeye çalıştığı görülmüştür 'teraziye koyarsak' ifadesini kullanması eşit işaretini destekleyen ilişkisel yorumlayıcı bir ifade olarak değerlendirilmiş ancak $6+9=15$, $15:3=5$, $5+2=7$ şeklinde ifadeyi parçalara ayırarak terazi modeli üzerinde gösterebileceğini düşündüğü görülmüştür. Terazi modeli ile eşit işaretini anlamlı bir şekilde ilişkilendirebildiği görülse de sayısal ifadede yaptığı parçalara bölme işlemi Nazlı'nın eşit işaretini problemin çözümünde, ifadenin doğruluğuna karar verirken kullanılabilecek bir araç olarak işe koşamadığı yönünde değerlendirilmiştir.



Görsel 3. 42. Nazlı'nın son değerlendirme soru-11'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: O zaman burada terazi kullansak nasıl olacak? Kullanmamamız mı gerekiyor?

Nazlı: Bence evet. Çünkü eşitlik sağlanmıyor burada. Yani terazinin bir kefesi aşağıda bir kefesi yukarıda olur.

Araştırmacı: Evet. Eee o zaman terazi kullanmadığımız durumlar da mı var? Eşittir yazabiliriz ama bu soruda terazi kullanamayız diyebileceğimiz durumlar da mı var.

Nazlı: Bazen eşittir yani şöyle de kullanılabilir sonuç belirtmek için. Bu da bir eşitlik oluyor ama bazen de siz bize şey demiştiniz eşittirin üstüne soru işaretini konulabiliyor. Öyle de olabilir. Mesela bir terazi olsa bu terazi şöyle yazılabilir. Bunları ayrı ayrı mesela 6 artı 9 eşittir 15 bölü 3 eşittir 5 artı 2 eşittir (birden fark etti aslında aralarda eşittir olduğuna göre eşitliğin solu sağı eşit olmalı diye düşündü bence ama bakalım geri dönebilecek mi söyledikten) aslında bu da bir eşitlik gibi bir şey.

Araştırmacı: Aslında bunda da eşittir yazıyor ama diyoruz ki bunu teraziye koymayalım çünkü bu terazide dengede durmuyor.

Nazlı: Hayır yani şöyle. Teraziye koyarsak şöyle şöyle.. ayıra ayıra ... birinci işlem, ikinci işlen, üçüncü işlem diye koysak.. (bu sırada ekrandan parçalara ayırıyor sarı renkle) olabilir. Çünkü sonuçları aynı çıktığı için. Öyle yapabiliriz.

11. $6 + 9 = 15 : 3 = 5 + 2 = 7$ ifad

12. Dört küçük bir arkanas ortasında il

Görsel 3. 43. Nazlı'nın son değerlendirme soru-11'e ilişkin önerisi

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik bulgular (4., 6., 7. ve 8. sorular):

Denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirlemede eşitliği bozmayan işlemlerin farkına varması beklenen soru.7'de eşit işaretinin yer aldığı işlemleri terazi modeli ile ilişkilendirirken eşittirin solu ve sağını terazinin solu ve sağına uygun bir şekilde yerleştirmekte zorlandığı görülen Nazlı'ya bireysel görüşmeler sırasında işlemde yer alan ifadelerden hangilerinin birbirine eşit olduğunu ekran üzerinden göstermesi istenmiştir. Birbirine eşit olan ifadeleri eşittirin solu ve sağında olacak şekilde yuvarlak içine alabilen Nazlı'nın bu çalışmalardan sonra terazi modeli ile ilişkilendirmeyi doğru yapabildiği görülmüştür. Eşit işaretini solu ve sağını ayıran bir ayırıcı olarak yorumlamaya başlayabilmesinin Nazlı'nın terazi modeli ile ilişkilendirme sürecine de destek olduğu görülmüştür. Nazlı'nın ' $7+5-5=12-5$ ' ifadesinde 'bunların ikisi de birbirlerine eşitler çünkü ortalarında eşittir var' diyerek eşit işaretini solu ve sağındaki ifadeleri ayıran ve bu ifadelerin eşitliğini gösteren bir sembol olarak yorumlayabildiği görülmüştür. Bu durumda eşit işaretini destekleyen ifadelerden ayırıcı nitelikte yorumlamayı kullandığı ama eşit işaretini ifadenin doğruluğuna karar vermede bir araç olarak işe koşmadığı görülmüştür. Nazlı'nın ' $7+5=12$ ' ifadesini bir bağlam içinde hikayeletirmesi istendiğinde terazi modelini de kullanmaya çalıştığı ancak kefelere 7 ve 5'i ayrı ayrı koyduğu için dengede kalamayacağını farkedip toplamalarının 12'ye eşit olacağını ifade etmiş olması terazi modelini de kullanabileceği bir sözel temsilde başarılı olamadığını göstermiştir. Bununla beraber ' $7+5=12$ ' ve soruda verilen diğer sayısal ifadeleri bir bağlam içinde hikayeletirmede zaman sözel olarak doğru bir şekilde ifade edebildiği görülür.

Araştırmacı: Tamam. Hemen söyleyim. İkinci soruda ne eşit?

Nazlı: İkinci soruda şöyle. Bir dakika öğretmenim kaymış biraz.

Araştırmacı: Dur ben söyleyim (ekranı sildim bir daha göstereyim diye)

Nazlı: Hıh burada da 7 artı 5 eksi 5 diyor ya tam çizemiyorum daireleri.

Araştırmacı: Olsun. Söyledin. Anladım şimdi.

(parantez içine 5 ya da 12'yi yazdı)

- I. $7 + 5 = 12 \dots\dots\dots () \dots\dots$
II. $7 + 5 - 5 = 12 - 5 \dots\dots () \dots\dots$
III. $7 = 12 - 5 \dots\dots\dots () \dots\dots$

Nazlı: Orası ve 12 eksi 5 eşitler.

[...]

Araştırmacı: Peki ben bu soruları çözerken Nazlı sende şeyi fark ettim. Mesela bu soruların eşit olup olmadığına karar verirken işte 7'ye 5 ekleriz 12 olur. 12'den 5 çıkarırız 7. (eşitliğin sağına geçiyorum sonra) 12'den 5 çıkarırız 7. İkisi de aynı. Diyorsun ya. Acaba diyorum. Başka türlü de şöyle diyebilir miyiz: bunların ikisi birbirlerine eşitler. Çünkü.... Ama başka bir şekilde çünkü...

Nazlı: bunların ikisi de birbirlerine eşitler çünkü ortalarında eşittir var.

[...]

Nazlı: Şöyle mesela öğretmenim gene aynı hikaye olur. 7 tane bu sefer çikolatam olsa. Benim 7 tane çikolatam var. Ablamın da 5 tane çikolatası var. Ben bir kefeye birinci kefeye kendi çikolatalarımı ikinci kefeye de ablamın çikolatalarını koyunca eşit oldular yani. Bunların toplamaları ikisinin de eşit. Yani 12'ye eşit olduklarını gördük.

[...]

Nazlı: Şey olabilir mi? Mesela benim 7 tane çikolatam ablamın 5 tane çikolatası vardı. Kendi 7 tane çikolatamdan 2 tanesini kardeşime verdince benim de 5 tane çikolatam kaldı. Bunları teraziye koyunca kişi eşit yani eşit olduklarını gördüm.

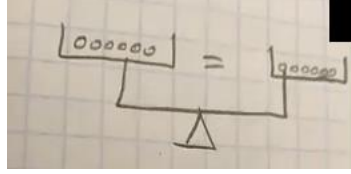
Eşitliği bozmayan işlemleri belirleyip denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirlerken eşit işaretinin solu ve sağındaki ifadeleri terazi modeli üzerinde göstermede yaşadığı zorluğu atlatması için bireysel görüşmede sorulan ilave sorulardan aritmetik verilen ifadeleri terazi modelinde göstermesi beklendiğinde Nazlı'nın eşitliğin iki tarafındaki sayıların aynı olduğu ' $6=6$ ve $6+2=6+2$ ' gibi durumlarda terazi ile modelleyebildiği ancak ' $6+2=8$ ' gibi eşit işaretinin iki tarafındaki sayıların farklı olması durumunda sayısal verilen durumun terazi ile modellenemeyeceğini düşündüğü görülmüştür.

Ben: Heh, ben de onu diyecektim. Mesela sen şunu terazide gösterebilirsin. Ekranı yazdığım şunu.

yazınız, sonrasında n

$$6 = 6$$

Nazlı: 6 eşittir 6. bir tane şöyle terazi çizsem... (Nazlı defterine çizmeye başladı) burada öğretmenim.



[...]

Ben: 6 yanına artı koymuşsun 2 tane daha çizmişsin. 6 artı yanına 2 tane daha çizmişsin.

Tamam. Peki Nazlı şunu nasıl çizebilirsin. Şöyle şunu.

azarak) yazınız, sonrasında nec

$$6 + 2 = 8$$

Nazlı: bunu terazide gösteremeyiz çünkü öğretmenim 6'yla 2 eşit değildir. 6'nın olduğu kefe alta iner. Ama bunun bir değişliği 8 elde etmek istersek 4, 4 yapabiliriz.

Eşitliği sağlayan eksik değeri bulmaya yönelik bulgular (9., 10. ve 12. sorular):

Eksik değeri bulmayı gerektiren ve bu süreçte sözelden cebirsel ya da sayısal temsile geçişi kullanabileceği soru.12'de kızlar ve erkeklerin bilye sayılarının eşit olarak verildiği, Çınar'ın bilye sayısını bulması istendiğinde Görsel 3.44'te verildiği gibi eşit işaretinin iki tarafındaki sonuçların aynı olması gerekliliğini ve temel ilişkisel yorumlamayı kullandığı görülmüştür. Grup görüşmelerinde farklı bir yolla yapması istenildiğinde ise karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanarak bilinmeyeni hesaplayabildiği görülmüştür.

Görsel 3. 44. Nazlı'nın son değerlendirme soru-12'ye ilişkin cevabı

Araştırmacı: Tamamdır. Bir de şeyi soracaktım ben sana. Onu sormayı unuttum Nazlı. 6 artı 9 ... Ekin'li soru var ya.. Ekin, Sema, Toprak, Çınar diye.. bu soruda mesela 6'yla 9'u

topluyorsun 15, 10'un üstüne kaç eklersem 15 olur diyorsun ya mesela ve 5 buluyorsun. Bu soruyu sayılardaki değişim olarak yapsan nasıl yapardın?

$$6 + 9 = 10 + \dots\dots$$

Nazlı: Eee yani öğretmenim şey yapardım öğretmenim hani şurada 6 var ya... pardon o 6'ya 4 eklenmiş, 10 olmuş. O zaman da dedim ki toplama olduğuna göre 9'dan da 4 çıkartacağız 5 olur yani. Bu şekilde de yapabiliriz.

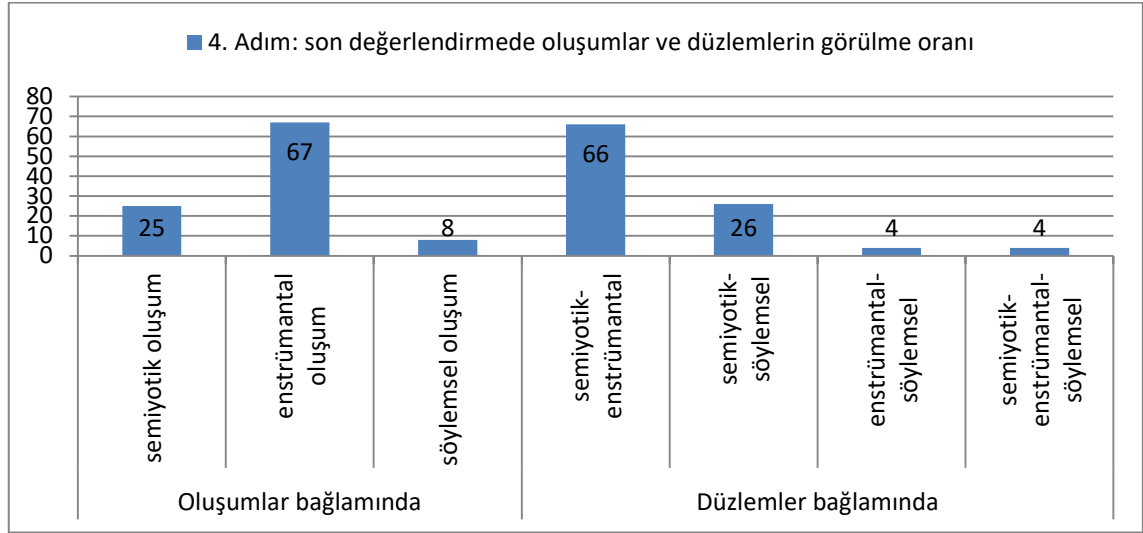
3.1.2.4.2. Nazlı'nın matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları

Nazlı'nın 4. Adım: son değerlendirme süreci oluşumlar ve oluşumların ikiyeşerli kombinasyonu bağlamında incelendiğinde Tablo 3.17 ve Grafik 3.18 elde edilmiştir. 4. adım sürecinde enstrümantal oluşumun %67 oranında, semiyotik oluşumun %25 oranında, söylemsel oluşumun %8 oranında bileşenlerinin görüldüğü söylenebilir. Nazlı'nın matematiksel çalışmalarının düzlemlerde yer alma durumları sırasıyla semiyotik-enstrümantal düzlemde %66 oranında, semiyotik-söylemsel düzlemde %26 oranında, enstrümantal-söylemsel düzlemde %4 oranında yer aldığı ve tamamlanmış bir çalışma görülme oranının da yine %4 olduğu görülmüştür.

Tablo 3. 17. Nazlı'nın 4. Adımda oluşumlar ve düzlemlerin sorulara göre dağılımı

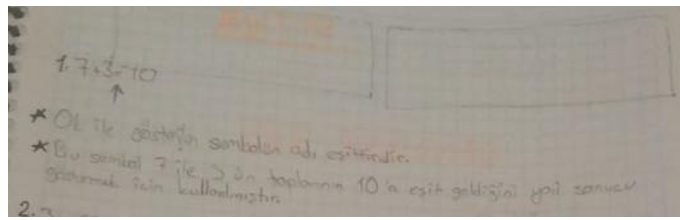
Eşit İşaretinin Yorumlanmasında Oluşumlar ve Düzlemler		S.D.S.1.	S.D.S.2.	S.D.S.3.	S.D.S.4.	S.D.S.5.	S.D.S.6.	S.D.S.7.	S.D.S.8.	S.D.S.9.	S.D.S.10.	S.D.S.11.	S.D.S.12.
Oluşumlar bağlamında	Semiyotik oluşum	3		3		1	1	5		2	2	1	3
	Enstrümantal oluşum			2	4	2	5	24	3	3	7	1	5
	Söylemsel oluşum				2			4		1			
Düzlemler bağlamında	Semiyotik-enstrümantal			3	5					3	6		1
	Semiyotik-söylemsel				3				1		1		2
	Enstrümantal-söylemsel									1			
	Semiyotik-enstrümantal-söylemsel									1			

Grafik 3. 18. Nazlı'nın son değerlendirmede oluşumlar ve düzlemlerin görülme oranı



Eşit '=' işaretini anlamlandırmaya yönelik bulgular (1.,2.,3.,5. ve 11. sorular):

' $a+b=c$ ' formunda verilen standart ifadeye işareti anlamlandırmayı gerektiren soru.1'de Görsel 3.45'de verildiği gibi kesin işlemsel yorumlamayı kullanarak eşit işaretinin amacını açıkladığı görülen Nazlı'nın bireysel görüşmede derinlemesine sorular ve üzerine biraz daha düşünmesi ile eşit işaretinin ilişkisel yorumlanmasını da içerecek şekilde terazi modelini gözünde canlandığı görüldüğünden **semiyotik oluşumun** bileşenlerine ilişkin gösterge olarak kabul edilmiştir.



Görsel 3. 45. Nazlı'nın son değerlendirmede soru-1'e ilişkin cevabı

Nazlı: Şöyle öğretmenim ben buraya sadece bir anlamını yazdım. Buraya sadece sonucu belirtmek için mesela.. Nasıl söylesem 7'yle 3'ü topluyorsun. 10 oluyor. Yani sonucu belirtmek için eşittir koydum. Bu şöyle de olabilir. Terazi gibi düşüsek bir sağ kefe bir de sol kefe olsa ağırlıkları eşit olduğu için ağırlık açısından eşittir konulmuş da olabilir.

[...]

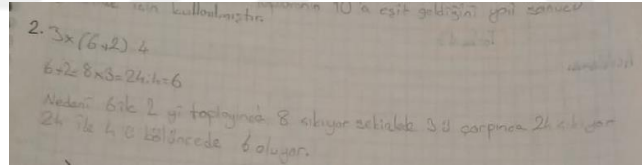
Araştırmacı: Tam şey soruyordum sana Nazlı. Kafanda nasıl bir şey canlanıyor diyordum sen de kare üçgen gibi şekiller geliyor aklıma. Tam olarak böyle olmasa da diyorsun. O kısmı anlatabilir misin bir daha.

Nazlı: Şimdi öğretmenim. Burada sayılar var ama benim aklımda 7 yerine kalp artı koysak 3 yerine daire eşittir üçgen falan... direk bir terazi canlan... (daha cümleyi bitirmeden devam etti) eşittir denince direk bir terazi canlanıyor. Terazinin eşitliği canlanıyor

Araştırmacı: Hmmm peki mesela teraziyi gözünde canlandırıyorsun ya orada, bahsettiğin o kalbi üçgeni daireyi falan nasıl yerleştirdin terazide.

Nazlı: Bu gibi... mesela kalp artı daire onlar bir kefedeyse, eşittiri ortalarına koyup üçgen. Diğer kefeye de üçgen. Bunlar eşitmiş mesela.

İşaretin yokluğunda ifadeye etkisini yorumlamayı ve işareti anlamlandırmayı gerektiren soru.2'de Görsel 3.46'da görüldüğü gibi Nazlı'nın eşit işareti olmadığı halde işlem yapıp sonuç bulduğu ancak ifadeyi tanımlaması istendiğinde sadece sonucu değil süreci de işe koşarak 'parantezli işlem' olarak tanımladığı görülmüştür. Bu soruyla Nazlı'nın sayılar ve işlemlerin verildiği ama eşit işaretinin verilmediği durumda da işlemleri yapıp sonuç bulmaya eğilimli olduğu görülmüştür.

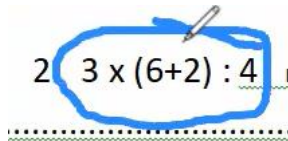


Görsel 3. 46. Nazlı'nın son değerlendirme soru-2'ye ilişkin cevabı

Araştırmacı: Sen 6'yla 2'yi toplamışsın 8. Sonra 8'le 3'ü çarpmışsın 24. Sonra 24'ü 4'e bölmüşsün ve 6 demişsin. Nedeni 6'yla 2'yi toplayınca 8 çıkıyor. 8'le 3'ü çarpınca da 24 çıkıyor. 24'le 4'ü bölünce de 6 oluyor demişsin. Aslında sen burada sanırım yaptığın işlemi anlatmışsın.

Nazlı: Evet öğretmenim.

Araştırmacı: Benim merak ettiğim daha çok ne biliyor musun? Sen burada bir sürü işlem işlem yapmışsın ya mesela bu nedir dediğinde şunu şu mavi ile gösterdiğim kısmı tek bir kelime ile tarif etsen ne diye tarif edersin. Bu bir şudur desen mesela ne dersin.



Nazlı: Öğretmenim parantezli işlem olabilir çünkü parantez var.

Eşdeğer denklemlerde işareti anlamlandırmayı gerektiren soru.3'te Nazlı'nın $a+b=c$ standart formunda verilen ifadedeki eşit işaretinin kullanım amacını bireysel uygulamada kesin işlemsel yorumlamayla açıkladığı görülürken bireysel görüşmede derinlemesine sorulardan sonra terazi modelini de gözünde canlandırabildiği görüldüğünden ilişkisel yorumlamanın aktive olduğu **semiyotik oluşumun** bileşenlerine ilişkin bir gösterge kabul edilmiştir. Aynı zamanda $5+4=6+3$ ifadesinde de bireysel uygulamada eşit işaretinin amacını temel ilişkisel yorumlayıcı nitelikte tanımlarken bireysel görüşmede derinlemesine sorulardan sonra terazi modeli ile ilişkilendirerek sol ve sağ kefelerine gelecek uygun sayıları belirleyip terazi modelini de işe koşabildiği görüldüğünden **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin gösterge olduğu yorumlanmıştır.

Araştırmacı: 5 artı 4 eşittir 9 demiş mesela soruda. Sen demişsin ki buradaki eşittir sonucu göstermek için kullanılmıştır demişsin. Başka bir amaçla kullanılmış olabilir mi. Sonucu göstermenin dışında.

Nazlı: Üstteki gibi terazi gibi düşüsek eşitliği göstermek için kullanılmış olabilir.

Araştırmacı: Anlıyorum. Peki mesela sen orada 5'le 4'ü toplamışsın ve 9 sonucuna ulaşmışsın ya (araştırmacı öğretmen duraksadı) hmmm anladım. Dur dur ötekini de sorayım

Nazlı: Ötekini daha ötekine geçeyim bak. Şuna geçeyim. Şununla ilgili bir şey sorayım ben sana.

- $5+4=6+3=9$

Araştırmacı: Mesela bu ikincisinde 5 artı 4 eşittir 6 artı 3 o da eşittir 9 demişler. Oradaki eşittirler ne amacıyla kullanılmıştır diye sormuşlar. Sen 5 ile 4'ün toplamı 9 oluyor 6'yla 3'ü toplayınca da 9 oluyor yani eşit olduklarını gösteriyor demişsin.

Nazlı: Yani şöyle öğretmenim 5 artı 4 eşittir diyor ya oradaki eşittir yani bir terazi gibi düşüsek 5 artı 4 başka şey yani nasıl söylesem bir kefe başka bir kefe 6 artı 3 başka bir kefe. Ortaya eşittir konulur. Birinci eşittir eşit olduklarını göstermek için. İkinci eşittir bunun. Bu işlemin sonucunun 9'a eşit geldiğini göstermek için kullanılmıştır.

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik bulgular (4., 6., 7. ve 8. sorular):

Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulamayı gerektiren soru.4'te iki doğal sayının toplamını hesaplarken toplanan sayılardan birinden alıp aynı miktarı diğer sayıya verdiğimizde toplamın değişmeyeceğini bildiği ve eşit işaretinin karşısına da yeni sayı çiftini yazabildiği görülmüştür (Görsel 3.47). Yaptığı adımları bireysel görüşmede açıklaması istendiğinde

gerekçesini karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanarak sunabildiği görüldüğünden Nazlı'nın bu çalışmasının semiyotik-söylemsel düzlemde olduğu düşünülmüştür.

4. Tarak 47'ye 50'ye 25'ide 22'ye ekledi. Kalanına topladı. 47+50=97, 97-25=72. 72'ye 3 ekledi. 72+3=75. 75'ide 30'ye ekledi. 75+30=105. 105'ide 30'ye ekledi. 105+30=135. 135'ide 30'ye ekledi. 135+30=165. 165'ide 30'ye ekledi. 165+30=195. 195'ide 30'ye ekledi. 195+30=225. 225'ide 30'ye ekledi. 225+30=255. 255'ide 30'ye ekledi. 255+30=285. 285'ide 30'ye ekledi. 285+30=315. 315'ide 30'ye ekledi. 315+30=345. 345'ide 30'ye ekledi. 345+30=375. 375'ide 30'ye ekledi. 375+30=405. 405'ide 30'ye ekledi. 405+30=435. 435'ide 30'ye ekledi. 435+30=465. 465'ide 30'ye ekledi. 465+30=495. 495'ide 30'ye ekledi. 495+30=525. 525'ide 30'ye ekledi. 525+30=555. 555'ide 30'ye ekledi. 555+30=585. 585'ide 30'ye ekledi. 585+30=615. 615'ide 30'ye ekledi. 615+30=645. 645'ide 30'ye ekledi. 645+30=675. 675'ide 30'ye ekledi. 675+30=705. 705'ide 30'ye ekledi. 705+30=735. 735'ide 30'ye ekledi. 735+30=765. 765'ide 30'ye ekledi. 765+30=795. 795'ide 30'ye ekledi. 795+30=825. 825'ide 30'ye ekledi. 825+30=855. 855'ide 30'ye ekledi. 855+30=885. 885'ide 30'ye ekledi. 885+30=915. 915'ide 30'ye ekledi. 915+30=945. 945'ide 30'ye ekledi. 945+30=975. 975'ide 30'ye ekledi. 975+30=1005. 1005'ide 30'ye ekledi. 1005+30=1035. 1035'ide 30'ye ekledi. 1035+30=1065. 1065'ide 30'ye ekledi. 1065+30=1095. 1095'ide 30'ye ekledi. 1095+30=1125. 1125'ide 30'ye ekledi. 1125+30=1155. 1155'ide 30'ye ekledi. 1155+30=1185. 1185'ide 30'ye ekledi. 1185+30=1215. 1215'ide 30'ye ekledi. 1215+30=1245. 1245'ide 30'ye ekledi. 1245+30=1275. 1275'ide 30'ye ekledi. 1275+30=1305. 1305'ide 30'ye ekledi. 1305+30=1335. 1335'ide 30'ye ekledi. 1335+30=1365. 1365'ide 30'ye ekledi. 1365+30=1395. 1395'ide 30'ye ekledi. 1395+30=1425. 1425'ide 30'ye ekledi. 1425+30=1455. 1455'ide 30'ye ekledi. 1455+30=1485. 1485'ide 30'ye ekledi. 1485+30=1515. 1515'ide 30'ye ekledi. 1515+30=1545. 1545'ide 30'ye ekledi. 1545+30=1575. 1575'ide 30'ye ekledi. 1575+30=1605. 1605'ide 30'ye ekledi. 1605+30=1635. 1635'ide 30'ye ekledi. 1635+30=1665. 1665'ide 30'ye ekledi. 1665+30=1695. 1695'ide 30'ye ekledi. 1695+30=1725. 1725'ide 30'ye ekledi. 1725+30=1755. 1755'ide 30'ye ekledi. 1755+30=1785. 1785'ide 30'ye ekledi. 1785+30=1815. 1815'ide 30'ye ekledi. 1815+30=1845. 1845'ide 30'ye ekledi. 1845+30=1875. 1875'ide 30'ye ekledi. 1875+30=1905. 1905'ide 30'ye ekledi. 1905+30=1935. 1935'ide 30'ye ekledi. 1935+30=1965. 1965'ide 30'ye ekledi. 1965+30=1995. 1995'ide 30'ye ekledi. 1995+30=2025. 2025'ide 30'ye ekledi. 2025+30=2055. 2055'ide 30'ye ekledi. 2055+30=2085. 2085'ide 30'ye ekledi. 2085+30=2115. 2115'ide 30'ye ekledi. 2115+30=2145. 2145'ide 30'ye ekledi. 2145+30=2175. 2175'ide 30'ye ekledi. 2175+30=2205. 2205'ide 30'ye ekledi. 2205+30=2235. 2235'ide 30'ye ekledi. 2235+30=2265. 2265'ide 30'ye ekledi. 2265+30=2295. 2295'ide 30'ye ekledi. 2295+30=2325. 2325'ide 30'ye ekledi. 2325+30=2355. 2355'ide 30'ye ekledi. 2355+30=2385. 2385'ide 30'ye ekledi. 2385+30=2415. 2415'ide 30'ye ekledi. 2415+30=2445. 2445'ide 30'ye ekledi. 2445+30=2475. 2475'ide 30'ye ekledi. 2475+30=2505. 2505'ide 30'ye ekledi. 2505+30=2535. 2535'ide 30'ye ekledi. 2535+30=2565. 2565'ide 30'ye ekledi. 2565+30=2595. 2595'ide 30'ye ekledi. 2595+30=2625. 2625'ide 30'ye ekledi. 2625+30=2655. 2655'ide 30'ye ekledi. 2655+30=2685. 2685'ide 30'ye ekledi. 2685+30=2715. 2715'ide 30'ye ekledi. 2715+30=2745. 2745'ide 30'ye ekledi. 2745+30=2775. 2775'ide 30'ye ekledi. 2775+30=2805. 2805'ide 30'ye ekledi. 2805+30=2835. 2835'ide 30'ye ekledi. 2835+30=2865. 2865'ide 30'ye ekledi. 2865+30=2895. 2895'ide 30'ye ekledi. 2895+30=2925. 2925'ide 30'ye ekledi. 2925+30=2955. 2955'ide 30'ye ekledi. 2955+30=2985. 2985'ide 30'ye ekledi. 2985+30=3015. 3015'ide 30'ye ekledi. 3015+30=3045. 3045'ide 30'ye ekledi. 3045+30=3075. 3075'ide 30'ye ekledi. 3075+30=3105. 3105'ide 30'ye ekledi. 3105+30=3135. 3135'ide 30'ye ekledi. 3135+30=3165. 3165'ide 30'ye ekledi. 3165+30=3195. 3195'ide 30'ye ekledi. 3195+30=3225. 3225'ide 30'ye ekledi. 3225+30=3255. 3255'ide 30'ye ekledi. 3255+30=3285. 3285'ide 30'ye ekledi. 3285+30=3315. 3315'ide 30'ye ekledi. 3315+30=3345. 3345'ide 30'ye ekledi. 3345+30=3375. 3375'ide 30'ye ekledi. 3375+30=3405. 3405'ide 30'ye ekledi. 3405+30=3435. 3435'ide 30'ye ekledi. 3435+30=3465. 3465'ide 30'ye ekledi. 3465+30=3495. 3495'ide 30'ye ekledi. 3495+30=3525. 3525'ide 30'ye ekledi. 3525+30=3555. 3555'ide 30'ye ekledi. 3555+30=3585. 3585'ide 30'ye ekledi. 3585+30=3615. 3615'ide 30'ye ekledi. 3615+30=3645. 3645'ide 30'ye ekledi. 3645+30=3675. 3675'ide 30'ye ekledi. 3675+30=3705. 3705'ide 30'ye ekledi. 3705+30=3735. 3735'ide 30'ye ekledi. 3735+30=3765. 3765'ide 30'ye ekledi. 3765+30=3795. 3795'ide 30'ye ekledi. 3795+30=3825. 3825'ide 30'ye ekledi. 3825+30=3855. 3855'ide 30'ye ekledi. 3855+30=3885. 3885'ide 30'ye ekledi. 3885+30=3915. 3915'ide 30'ye ekledi. 3915+30=3945. 3945'ide 30'ye ekledi. 3945+30=3975. 3975'ide 30'ye ekledi. 3975+30=4005. 4005'ide 30'ye ekledi. 4005+30=4035. 4035'ide 30'ye ekledi. 4035+30=4065. 4065'ide 30'ye ekledi. 4065+30=4095. 4095'ide 30'ye ekledi. 4095+30=4125. 4125'ide 30'ye ekledi. 4125+30=4155. 4155'ide 30'ye ekledi. 4155+30=4185. 4185'ide 30'ye ekledi. 4185+30=4215. 4215'ide 30'ye ekledi. 4215+30=4245. 4245'ide 30'ye ekledi. 4245+30=4275. 4275'ide 30'ye ekledi. 4275+30=4305. 4305'ide 30'ye ekledi. 4305+30=4335. 4335'ide 30'ye ekledi. 4335+30=4365. 4365'ide 30'ye ekledi. 4365+30=4395. 4395'ide 30'ye ekledi. 4395+30=4425. 4425'ide 30'ye ekledi. 4425+30=4455. 4455'ide 30'ye ekledi. 4455+30=4485. 4485'ide 30'ye ekledi. 4485+30=4515. 4515'ide 30'ye ekledi. 4515+30=4545. 4545'ide 30'ye ekledi. 4545+30=4575. 4575'ide 30'ye ekledi. 4575+30=4605. 4605'ide 30'ye ekledi. 4605+30=4635. 4635'ide 30'ye ekledi. 4635+30=4665. 4665'ide 30'ye ekledi. 4665+30=4695. 4695'ide 30'ye ekledi. 4695+30=4725. 4725'ide 30'ye ekledi. 4725+30=4755. 4755'ide 30'ye ekledi. 4755+30=4785. 4785'ide 30'ye ekledi. 4785+30=4815. 4815'ide 30'ye ekledi. 4815+30=4845. 4845'ide 30'ye ekledi. 4845+30=4875. 4875'ide 30'ye ekledi. 4875+30=4905. 4905'ide 30'ye ekledi. 4905+30=4935. 4935'ide 30'ye ekledi. 4935+30=4965. 4965'ide 30'ye ekledi. 4965+30=4995. 4995'ide 30'ye ekledi. 4995+30=5025. 5025'ide 30'ye ekledi. 5025+30=5055. 5055'ide 30'ye ekledi. 5055+30=5085. 5085'ide 30'ye ekledi. 5085+30=5115. 5115'ide 30'ye ekledi. 5115+30=5145. 5145'ide 30'ye ekledi. 5145+30=5175. 5175'ide 30'ye ekledi. 5175+30=5205. 5205'ide 30'ye ekledi. 5205+30=5235. 5235'ide 30'ye ekledi. 5235+30=5265. 5265'ide 30'ye ekledi. 5265+30=5295. 5295'ide 30'ye ekledi. 5295+30=5325. 5325'ide 30'ye ekledi. 5325+30=5355. 5355'ide 30'ye ekledi. 5355+30=5385. 5385'ide 30'ye ekledi. 5385+30=5415. 5415'ide 30'ye ekledi. 5415+30=5445. 5445'ide 30'ye ekledi. 5445+30=5475. 5475'ide 30'ye ekledi. 5475+30=5505. 5505'ide 30'ye ekledi. 5505+30=5535. 5535'ide 30'ye ekledi. 5535+30=5565. 5565'ide 30'ye ekledi. 5565+30=5595. 5595'ide 30'ye ekledi. 5595+30=5625. 5625'ide 30'ye ekledi. 5625+30=5655. 5655'ide 30'ye ekledi. 5655+30=5685. 5685'ide 30'ye ekledi. 5685+30=5715. 5715'ide 30'ye ekledi. 5715+30=5745. 5745'ide 30'ye ekledi. 5745+30=5775. 5775'ide 30'ye ekledi. 5775+30=5805. 5805'ide 30'ye ekledi. 5805+30=5835. 5835'ide 30'ye ekledi. 5835+30=5865. 5865'ide 30'ye ekledi. 5865+30=5895. 5895'ide 30'ye ekledi. 5895+30=5925. 5925'ide 30'ye ekledi. 5925+30=5955. 5955'ide 30'ye ekledi. 5955+30=5985. 5985'ide 30'ye ekledi. 5985+30=6015. 6015'ide 30'ye ekledi. 6015+30=6045. 6045'ide 30'ye ekledi. 6045+30=6075. 6075'ide 30'ye ekledi. 6075+30=6105. 6105'ide 30'ye ekledi. 6105+30=6135. 6135'ide 30'ye ekledi. 6135+30=6165. 6165'ide 30'ye ekledi. 6165+30=6195. 6195'ide 30'ye ekledi. 6195+30=6225. 6225'ide 30'ye ekledi. 6225+30=6255. 6255'ide 30'ye ekledi. 6255+30=6285. 6285'ide 30'ye ekledi. 6285+30=6315. 6315'ide 30'ye ekledi. 6315+30=6345. 6345'ide 30'ye ekledi. 6345+30=6375. 6375'ide 30'ye ekledi. 6375+30=6405. 6405'ide 30'ye ekledi. 6405+30=6435. 6435'ide 30'ye ekledi. 6435+30=6465. 6465'ide 30'ye ekledi. 6465+30=6495. 6495'ide 30'ye ekledi. 6495+30=6525. 6525'ide 30'ye ekledi. 6525+30=6555. 6555'ide 30'ye ekledi. 6555+30=6585. 6585'ide 30'ye ekledi. 6585+30=6615. 6615'ide 30'ye ekledi. 6615+30=6645. 6645'ide 30'ye ekledi. 6645+30=6675. 6675'ide 30'ye ekledi. 6675+30=6705. 6705'ide 30'ye ekledi. 6705+30=6735. 6735'ide 30'ye ekledi. 6735+30=6765. 6765'ide 30'ye ekledi. 6765+30=6795. 6795'ide 30'ye ekledi. 6795+30=6825. 6825'ide 30'ye ekledi. 6825+30=6855. 6855'ide 30'ye ekledi. 6855+30=6885. 6885'ide 30'ye ekledi. 6885+30=6915. 6915'ide 30'ye ekledi. 6915+30=6945. 6945'ide 30'ye ekledi. 6945+30=6975. 6975'ide 30'ye ekledi. 6975+30=7005. 7005'ide 30'ye ekledi. 7005+30=7035. 7035'ide 30'ye ekledi. 7035+30=7065. 7065'ide 30'ye ekledi. 7065+30=7095. 7095'ide 30'ye ekledi. 7095+30=7125. 7125'ide 30'ye ekledi. 7125+30=7155. 7155'ide 30'ye ekledi. 7155+30=7185. 7185'ide 30'ye ekledi. 7185+30=7215. 7215'ide 30'ye ekledi. 7215+30=7245. 7245'ide 30'ye ekledi. 7245+30=7275. 7275'ide 30'ye ekledi. 7275+30=7305. 7305'ide 30'ye ekledi. 7305+30=7335. 7335'ide 30'ye ekledi. 7335+30=7365. 7365'ide 30'ye ekledi. 7365+30=7395. 7395'ide 30'ye ekledi. 7395+30=7425. 7425'ide 30'ye ekledi. 7425+30=7455. 7455'ide 30'ye ekledi. 7455+30=7485. 7485'ide 30'ye ekledi. 7485+30=7515. 7515'ide 30'ye ekledi. 7515+30=7545. 7545'ide 30'ye ekledi. 7545+30=7575. 7575'ide 30'ye ekledi. 7575+30=7605. 7605'ide 30'ye ekledi. 7605+30=7635. 7635'ide 30'ye ekledi. 7635+30=7665. 7665'ide 30'ye ekledi. 7665+30=7695. 7695'ide 30'ye ekledi. 7695+30=7725. 7725'ide 30'ye ekledi. 7725+30=7755. 7755'ide 30'ye ekledi. 7755+30=7785. 7785'ide 30'ye ekledi. 7785+30=7815. 7815'ide 30'ye ekledi. 7815+30=7845. 7845'ide 30'ye ekledi. 7845+30=7875. 7875'ide 30'ye ekledi. 7875+30=7905. 7905'ide 30'ye ekledi. 7905+30=7935. 7935'ide 30'ye ekledi. 7935+30=7965. 7965'ide 30'ye ekledi. 7965+30=7995. 7995'ide 30'ye ekledi. 7995+30=8025. 8025'ide 30'ye ekledi. 8025+30=8055. 8055'ide 30'ye ekledi. 8055+30=8085. 8085'ide 30'ye ekledi. 8085+30=8115. 8115'ide 30'ye ekledi. 8115+30=8145. 8145'ide 30'ye ekledi. 8145+30=8175. 8175'ide 30'ye ekledi. 8175+30=8205. 8205'ide 30'ye ekledi. 8205+30=8235. 8235'ide 30'ye ekledi. 8235+30=8265. 8265'ide 30'ye ekledi. 8265+30=8295. 8295'ide 30'ye ekledi. 8295+30=8325. 8325'ide 30'ye ekledi. 8325+30=8355. 8355'ide 30'ye ekledi. 8355+30=8385. 8385'ide 30'ye ekledi. 8385+30=8415. 8415'ide 30'ye ekledi. 8415+30=8445. 8445'ide 30'ye ekledi. 8445+30=8475. 8475'ide 30'ye ekledi. 8475+30=8505. 8505'ide 30'ye ekledi. 8505+30=8535. 8535'ide 30'ye ekledi. 8535+30=8565. 8565'ide 30'ye ekledi. 8565+30=8595. 8595'ide 30'ye ekledi. 8595+30=8625. 8625'ide 30'ye ekledi. 8625+30=8655. 8655'ide 30'ye ekledi. 8655+30=8685. 8685'ide 30'ye ekledi. 8685+30=8715. 8715'ide 30'ye ekledi. 8715+30=8745. 8745'ide 30'ye ekledi. 8745+30=8775. 8775'ide 30'ye ekledi. 8775+30=8805. 8805'ide 30'ye ekledi. 8805+30=8835. 8835'ide 30'ye ekledi. 8835+30=8865. 8865'ide 30'ye ekledi. 8865+30=8895. 8895'ide 30'ye ekledi. 8895+30=8925. 8925'ide 30'ye ekledi. 8925+30=8955. 8955'ide 30'ye ekledi. 8955+30=8985. 8985'ide 30'ye ekledi. 8985+30=9015. 9015'ide 30'ye ekledi. 9015+30=9045. 9045'ide 30'ye ekledi. 9045+30=9075. 9075'ide 30'ye ekledi. 9075+30=9105. 9105'ide 30'ye ekledi. 9105+30=9135. 9135'ide 30'ye ekledi. 9135+30=9165. 9165'ide 30'ye ekledi. 9165+30=9195. 9195'ide 30'ye ekledi. 9195+30=9225. 9225'ide 30'ye ekledi. 9225+30=9255. 9255'ide 30'ye ekledi. 9255+30=9285. 9285'ide 30'ye ekledi. 9285+30=9315. 9315'ide 30'ye ekledi. 9315+30=9345. 9345'ide 30'ye ekledi. 9345+30=9375. 9375'ide 30'ye ekledi. 9375+30=9405. 9405'ide 30'ye ekledi. 9405+30=9435. 9435'ide 30'ye ekledi. 9435+30=9465. 9465'ide 30'ye ekledi. 9465+30=9495. 9495'ide 30'ye ekledi. 9495+30=9525. 9525'ide 30'ye ekledi. 9525+30=9555. 9555'ide 30'ye ekledi. 9555+30=9585. 9585'ide 30'ye ekledi. 9585+30=9615. 9615'ide 30'ye ekledi. 9615+30=9645. 9645'ide 30'ye ekledi. 9645+30=9675. 9675'ide 30'ye ekledi. 9675+30=9705. 9705'ide 30'ye ekledi. 9705+30=9735. 9735'ide 30'ye ekledi. 9735+30=9765. 9765'ide 30'ye ekledi. 9765+30=9795. 9795'ide 30'ye ekledi. 9795+30=9825. 9825'ide 30'ye ekledi. 9825+30=9855. 9855'ide 30'ye ekledi. 9855+30=9885. 9885'ide 30'ye ekledi. 9885+30=9915. 9915'ide 30'ye ekledi. 9915+30=9945. 9945'ide 30'ye ekledi. 9945+30=9975. 9975'ide 30'ye ekledi. 9975+30=10005. 10005'ide 30'ye ekledi. 10005+30=10035. 10035'ide 30'ye ekledi. 10035+30=10065. 10065'ide 30'ye ekledi. 10065+30=10095. 10095'ide 30'ye ekledi. 10095+30=10125. 10125'ide 30'ye ekledi. 10125+30=10155. 10155'ide 30'ye ekledi. 10155+30=10185. 10185'ide 30'ye ekledi. 10185+30=10215. 10215'ide 30'ye ekledi. 10215+30=10245. 10245'ide 30'ye ekledi. 10245+30=10275. 10275'ide 30'ye ekledi. 10275+30=10305. 10305'ide 30'ye ekledi. 10305+30=10335. 10335'ide 30'ye ekledi. 10335+30=10365. 10365'ide 30'ye ekledi. 10365+30=10395. 10395'ide 30'ye ekledi. 10395+30=10425. 10425'ide 30'ye ekledi. 10425+30=10455. 10455'ide 30'ye ekledi. 10455+30=10485. 10485'ide 30'ye ekledi. 10485+30=10515. 10515'ide 30'ye ekledi. 10515+30=10545. 10545'ide 30'ye ekledi. 10545+30=10575. 10575'ide 30'ye ekledi. 10575+30=10605. 10605'ide 30'ye ekledi. 10605+30=10635. 10635'ide 30'ye ekledi. 10635+30=10665. 10665'ide 30'ye ekledi. 10665+30=10695. 10695'ide 30'ye ekledi. 10695+30=10725. 10725'ide 30'ye ekledi. 10725+30=10755. 10755'ide 30'ye ekledi. 10755+30=10785. 10785'ide 30'ye ekledi. 10785+30=10815. 10815'ide 30'ye ekledi. 10815+30=10845. 10845'ide 30'ye ekledi. 10845+30=10875. 10875'ide 30'ye ekledi. 10875+30=10905. 10905'ide 30'ye ekledi. 10905+30=10935. 10935'ide 30'ye ekledi. 10935+30=10965. 10965'ide 30'ye ekledi. 10965+30=11000. 11000'ide 30'ye ekledi. 11000+30=11030. 11030'ide 30'ye ekledi. 11030+30=11060. 11060'ide 30'ye ekledi. 11060+30=11090. 11090'ide 30'ye ekledi. 11090+30=11120. 11120'ide 30'ye ekledi. 11120+30=11150. 11150'ide 30'ye ekledi. 11150+30=11180. 11180'ide 30'ye ekledi. 11180+30=11210. 11210'ide 30'ye ekledi. 11210+30=11240. 11240'ide 30'ye ekledi. 11240+30=11270. 11270'ide 30'ye ekledi. 11270+30=11300. 11300'ide 30'ye ekledi. 11300+30=11330. 11330'ide 30'ye ekledi. 11330+30=11360. 11360'ide 30'ye ekledi. 11360+30=11390. 11390'ide 30'ye ekledi. 11390+30=11420. 11420'ide 30'ye ekledi. 11420+30=11450. 11450'ide 30'ye ekledi. 11450+30=11480. 11480'ide 30'ye ekledi. 11480+30=11510. 11510'ide 30'ye ekledi. 11510+30=11540. 11540'ide 30'ye ekledi. 11540+30=11570. 11570'ide 30'ye ekledi. 11570+30=11600. 11600'ide 30'ye ekledi. 11600+30=11630. 11630'ide 30'ye ekledi. 11630+30=11660. 11660'ide 30'ye ekledi. 11660+30=11690. 11690'ide 30'ye ekledi. 11690+30=11720. 11720'ide 30'ye ekledi. 11720+30=11750. 11750'ide 30'ye ekledi. 11750+30=11780. 11780'ide 30'ye ekledi. 11780+30=11810. 11810'ide 30'ye ekledi. 11810+30=11840. 11840'ide 30'ye ekledi. 11840+30=11870. 11870'ide 30'ye ekledi. 11870+30=11900. 11900'ide 30'ye ekledi. 11900+30=11930. 11930'ide 30'ye ekledi. 11930+30=11960. 11960'ide 30'ye ekledi. 11960+30=12000. 12000'ide 30'ye ekledi. 12000+30=12030. 12030'ide 30'ye ekledi. 12030+30=12060. 12060'ide 30'ye ekledi. 12060+30=12090. 12090'ide 30'ye ekledi. 12090+30=12120. 12120'ide 30'ye ekledi. 12120+30=12150. 12150'ide 30'ye ekledi. 12150+30=12180. 12180'ide 30'ye ekledi. 12180+30=12210. 12210'ide 30'ye ekledi. 12210+30=12240. 12240'ide 30'ye ekledi. 12240+30=12270. 12270'ide 30'ye ekledi. 12270+30=12300. 12300'ide 30'ye ekledi. 12300+30=12330. 12330'ide 30'ye ekledi. 12330+30=12360

kendi ikolatalarımı ikinci kefeye de ablamın çikolatalarını koyunca eşit oldular yani. Bunların toplamları ikisinin de eşit. Yani 12'ye eşit olduklarını gördük.

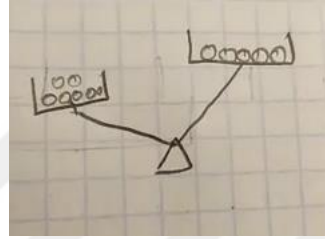
Araştırmacı: Bir daha anlatır mısın ablanın kaç tane şeyi vardı? Senin kaç tane vardı?

Nazlı: Benim 7 tane ablamın 5 tane ikolatası vardı. Birinci kefeye kendikimi (kendiminkini) 7 tane çikolatayı ikinci kefeye ablamın 5 tane çikolatayı koyunca toplam eşit yani 12 olduğunu gördük.

Araştırmacı: Ama o zaman benim aklıma şey takılıyor Nazlı sen şimdi terazinin kefelelerinin bir tanesine 5 koydun bir tanesine 7 koydun. Terazî dengede duracak mı?

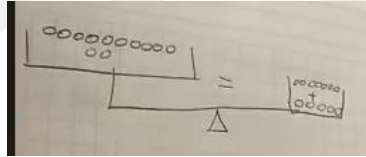
Nazlı: Yok durmayacak. (gülüyor)

[...]



[...]

Nazlı: (gülüyor) Yapabiliriz. Yapabiliriz şimdi.... Bunun gibi yapabiliriz. şimdi aklıma geldi. (defteri açtı çizmeye başladı) 12'yi bir kefeye koysak. Bir kefedede olsa. şimdi aklıma geldi. 12 bir kefedede, 7 artı 5 bir kefedede. Eşitlik oluyor.

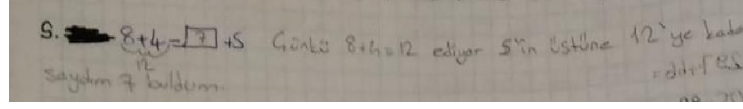


Görsel 3. 48. Nazlı'nın son değerlendirme soru-7'ye ilişkin modellemesi

Eşitliği sağlayan eksik değeri bulmaya yönelik bulgular (9., 10. ve 12. sorular):

' $a+b=kutu+c$ ' formunda verilen ifadede eksik değeri bulmayı gerektiren soru.9'un bireysel uygulamasında eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlanmasını işe koşarak problemde eksik değeri Görsel 3.49'da verildiği gibi bulabildiğinden **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergenin görüldüğü düşünülmüştür. Bireysel görüşme sırasında yöneltilen derinlemesine sorularla $8+4$ ifadesini terazinin bir kefesine $kutu+5$ ifadesini diğer kefesine yerleştirerek terazinin kefelelerindeki ifadelerin eşit olması gerekliliğinden hareketle eksik değeri belirleyebildiği de görüldüğünden **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin gsrterge olduğu değerlendirilmiştir.

Araştırmacı: Dokuzuncu soruyu önce bir okuyayım Nazlı ben. Hem sen soruyu hatırlamış olursun nasıldı diye. Soru şöyleymiş. 8 artı 4 eşittir kutu artı 5. Ya da dikdörtgen. Dikdörtgen yerine ne yazılmalıdır. Nasıl yaptığınızı açıklayınız demiş. Senin cevabına baktım ben de.



Görsel 3. 49. Nazlı'nın son değerlendirme soru-9'a ilişkin cevabı

Araştırmacı: sen de o soruda 7 yazmışsın kutunun içine. Çünkü demişsin 8 artı 4, 12 ediyor. 5'in üstüne 12'ye kadar saydım 7 buldum demişsin. Onu bir anlatır mısın nasıl yaptığını tekrar.

Nazlı: Şöyle öğretmenim... ben direk şeye baktım. Aralarında eşittir olduğu için. Bunların ikisinin de aslında eşit olduklarını anladım buradan. 8'le 4'ü toplayınca 12 ettiğini buldum. Dedim ki demek ki diğer taraf da 12 olmalıymış. Yine terazi gibi düşündüm.

Araştırmacı: Diğer taraf dediğin neresi Nazlı?

Nazlı: Hani kutu artı 5 diyor ya orası.

Araştırmacı: Tamamdır.

Nazlı: Mesela ben terazi gibi düşündüm. Bir kefedede 8 artı 4 olsa eşittir koyduğu için demek ki bu kefelere eşit olacağına göre 5'e kaç eklersek 12 olur diye düşündüm. 5'in üstüne 12'ye kadar saydığım da 7'yi buldum. 7 artı 5 de 12 ediyor. Bunlar eşit olurlar diye 7 yazdım.

Eksik değer '.....' ile temsil edildiği, farklı formlarda denklemlerde eksik değeri bulmayı gerektiren 10. soruda ' $8+6+9=8+.....$ ' ifadesinde verilmeyeni hesaplarken eşit işaretinin iki tarafında da işlemin olduğu bu soruda Nazlı'nın semiyotik bir araç olan eşit işaretini problemin çözümünde işe koşabildiği ve verilmeyeni hesaplayabildiği görülmüştür (Görsel 3.50). Bireysel görüşmeler sırasında eşit işareti ve aritmetik işlemlerin olduğu bu soruları gözünde bir terazi modeli üzerinde canlandırıp uygun şekilde kefelere yerleştirebildiği ve teraziden yararlanarak da eksik değeri hesaplayabildiği görüldüğünden bu verilerin **enstrümantal oluşumun** ve **semyotik oluşumun** bileşenlerine ilişkin bir göstergesi olduğu yorumlanmıştır.

Handwritten mathematical work showing a series of calculations and reasoning. The text is in Turkish and includes the following steps:

$$10 \cdot 8 + 6 + 9 = 8 + 15$$

çünkü $8 + 6 + 9 = 23$ oluyor 23'den 8 çıkardım 15 çıktı.

$$3 + 4 + 8 = 3 + 12$$

çünkü $8 + 4 + 3 = 15$ oluyor 15'den 3 çıkardım 12 çıktı.

$$9 + 7 = 10 + 6$$

çünkü $9 + 7 = 16$ oluyor 16'dan 10 çıkardım 6 çıktı.

$$14 + 3 = 13 + 4$$

çünkü $13 + 4 = 17$ oluyor 17'den 14 çıkardım 3 çıktı.

$$103 + 203 = 105 + 203$$

çünkü $105 + 203 = 308$ oluyor 308'den 103 çıkardım 205 çıktı.

Görsel 3. 50. Nazlı'nın son değerlendirme soru-10'a ilişkin cevabı

Nazlı: Şimdi öğretmenim yukarıdaki taktikten yaptım ben gene. Mesela 8, 6, 9 eşittir diyor ya ondan sonra 8, 6, 9'u topladıktan sonra 23 yazdım. Dedim ki 8'den 23'e kadar saymak biraz fazla olduğu için 23'ten şeyi çıkarttım. 8'i çıkarttım. 15 buldum. Demek ki o boş bırakılan yer 15 olmalı.

Araştırmacı: Neden 23'ü kullandın orada. Neden 23 yapmaya çalıştın?

Nazlı: Çünkü ortada eşittir var. Demek ki bunların ikisi de aynı eşitlikte olmalıymış.

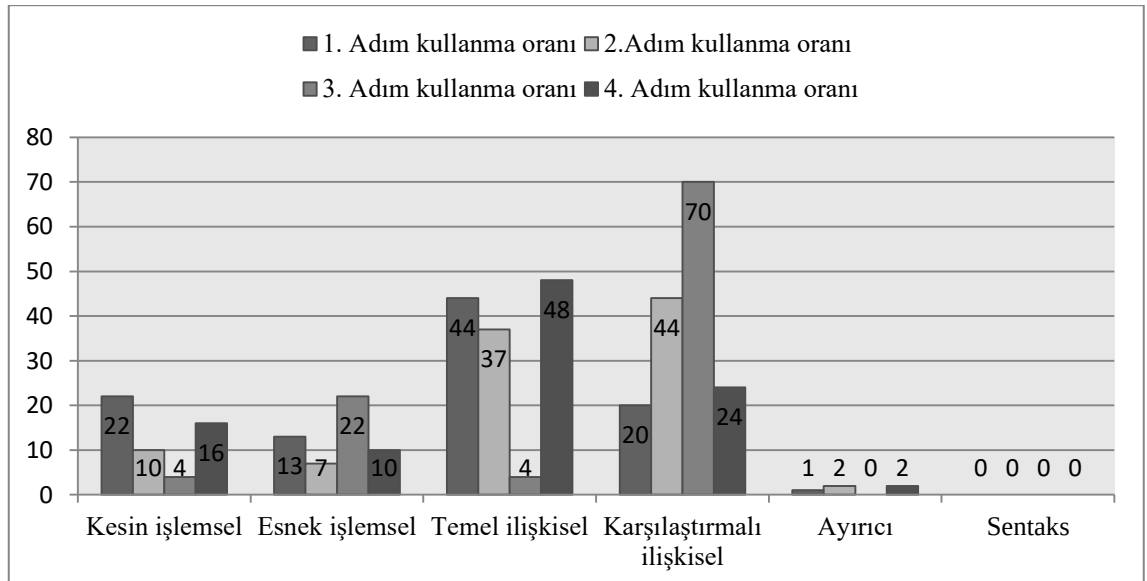
Araştırmacı: İkisi de dediğin yer neresi Nazlı.

Nazlı: Hani terazi gibi düşünersek 8, 6, 9 bir de 8 artı 15 var ya bu ikisi demek istedim.

3.1.2.4.3. Nazlı'nın bulgularına genel bakış

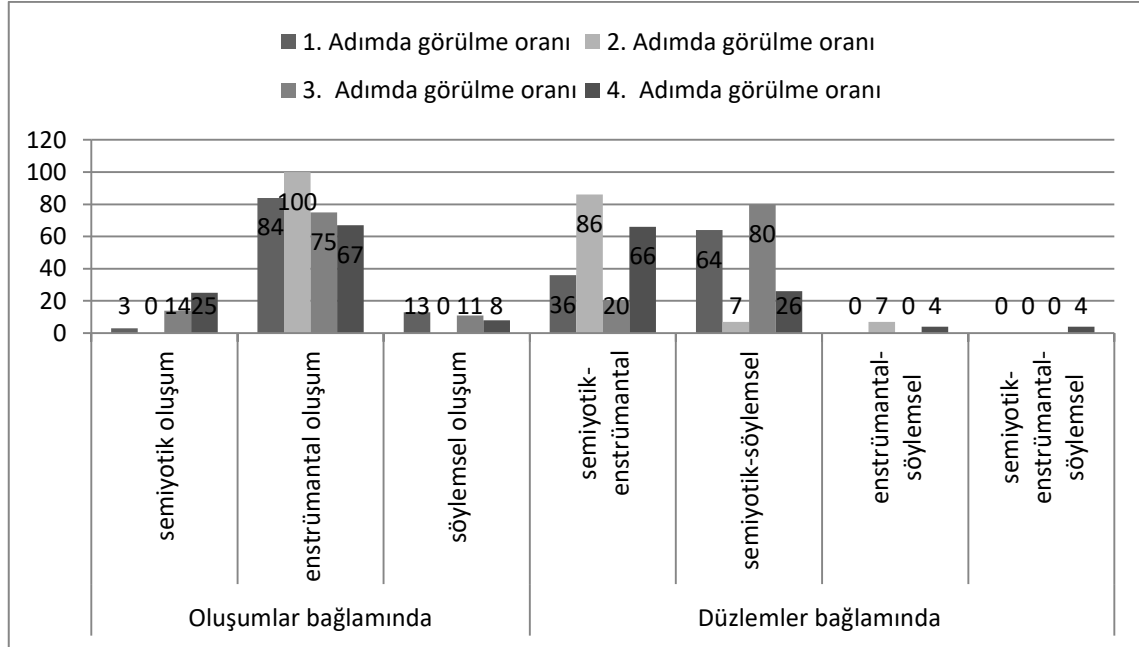
Nazlı'nın çalışmaları 1. Adım, 2. Adım, 3. Adım ve 4. Adımda eşit işaretini farklı düzeylerde kullanma bağlamında süreçteki değişimi ortaya çıkaracak şekilde incelendiğinde Grafik 3.19 elde edilmiştir.

Grafik 3. 19. Nazlı'nın eşit işaretini yorumlama biçimlerinin tüm adımlarda kullanılma oranlarının değişimi



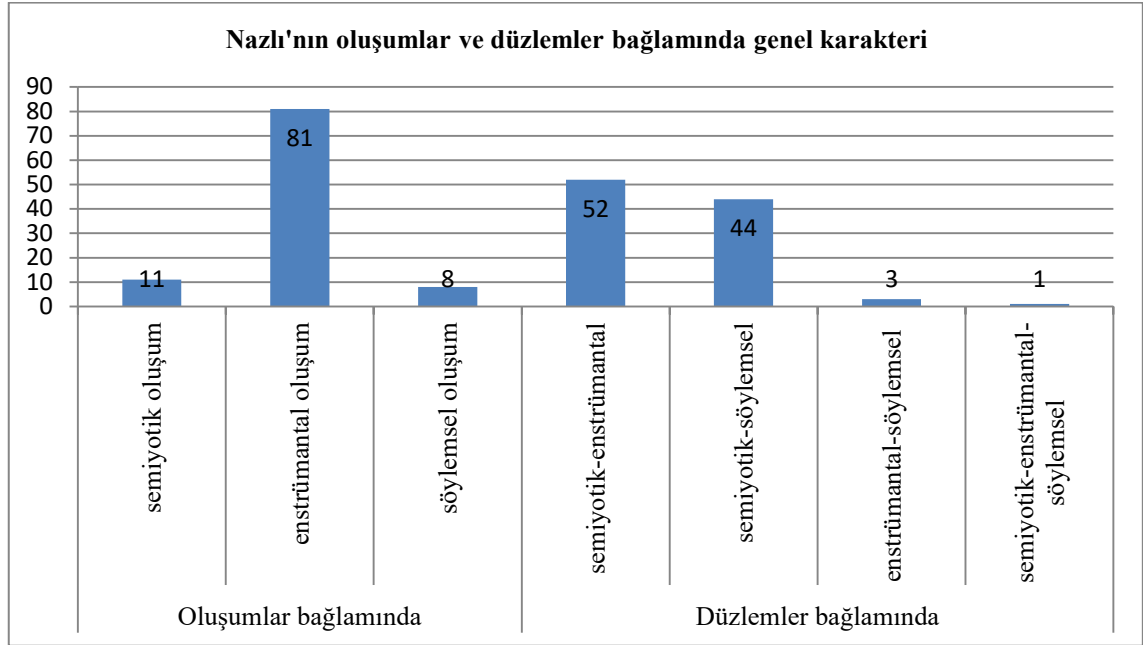
Nazlı'nın 1. Adım, 2. Adım, 3. Adım ve 4. Adımda oluşumlar ve oluşumların ikiyeşerli kombinasyonu bağlamında genel karakteristiğini ortaya çıkaracak şekilde incelendiğinde Grafik 3.20 elde edilmiştir.

Grafik 3. 20. Nazlı'nın oluşumlar ve düzlemlerin tüm adımlarda görülme oranlarının değişimi



Grafik 3.21'e bakıldığında Nazlı'nın çalışmalarında yaklaşık olarak sırasıyla enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler %81 oranında, semiyotik oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler %11 oranında, söylemsel oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler %8 oranında görülmüştür. Nazlı'nın çalışmalarının yer aldığı düzlemlere bakıldığında yaklaşık olarak sırasıyla semiyotik-enstrümantal düzlemde yer alma oranının %52, semiyotik-söylemsel düzlemde yer alma oranının %44, enstrümantal-söylemsel düzlemde yer alma oranının %3, tüm düzlemlerin etkileşim içinde olduğu tamamlanmış bir çalışma da yer alma oranının da %1 olduğu görülmüştür.

Grafik 3. 21. *Nazlı'nın tüm adımlarda oluşumlar ve düzlemler bağlamında genel karakteri*



3.1.3. Ataberk'in matematiksel çalışma uzayı

Bu bölümde Ataberk'in matematiksel çalışma uzayı öğretim deneyi döngülerimizdeki adımlar doğrultusunda 1. Adım: İlk değerlendirme, 2. Adım:Etkinlik-1 ve ilişkili alıştırmalar, 3. Adım:Etkinlik-2 ve ilişkili alıştırmalar ve 4. Adım:Son değerlendirme doğrultusunda sunulmuştur.

3.1.3.1.Birinci adım: ilk değerlendirme

Bu bölümde Ataberk'in matematiksel çalışma uzayı, 1. Adım: ilk değerlendirme sürecindeki kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları ve matematiksel çalışma uzayına ilişkin bulguları olmak üzere iki başlık altında sunulmuştur. Bununla beraber her iki başlıkta da Kayra'nın 1. Adım: ilk değerlendirmede yer alan soruların analizi sonucu ortaya çıkan temaları bağlamında bulgularına yer verilmiştir.

3.1.3.1.1. Ataberk'in kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları

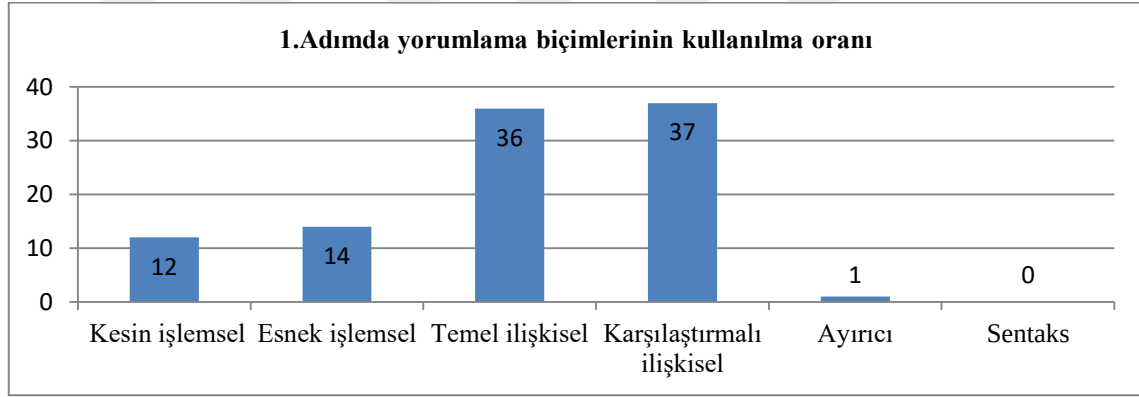
Ataberk'in 1. Adım: ilk değerlendirme sürecinde eşit işaretini yorumladığı durumlar incelendiğinde düzeylere bağlı farklı yorumlama biçimlerini kullanma oranlarına dair Tablo 3.18 ve Grafik 3.22 elde edilmiştir. İlk değerlendirme sürecinde Ataberk'in sırasıyla karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı %37 oranında, temel ilişkisel yorumlamayı %36 oranında, esnek işlemsel yorumlamayı %14 oranında, kesin işlemsel yorumlamayı %12 oranında, ayırıcı yorumlamayı %1 oranında kullandığı görülürken

eşit işaretini anlamından bağımsız bir şekil olarak (sentaks) yorumlamayı kullanmadığı görülmüştür.

Tablo 3. 18. Ataberk'in ilk değerlendirmede eşit işaretini yorumlama biçimlerini kullanma durumunun sorulara göre dağılımı

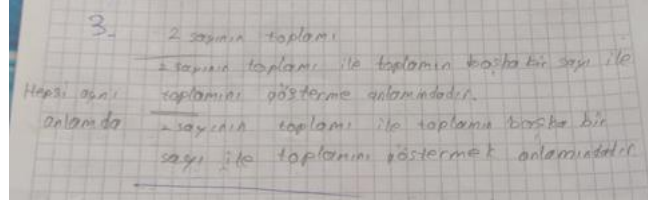
Eşit İşaretini Yorumlama Biçimleri	İ.D.S.1	İ.D.S.2	İ.D.S.3	İ.D.S.4	İ.D.S.5	İ.D.S.6	İ.D.S.7	İ.D.S.8	İ.D.S.9	İ.D.S.10	İ.D.S.11	İ.D.S.12
Kesin işlemsel	6		5				1		1		2	
Esnek işlemsel	1				15	1	1					
Temel ilişkisel	2		4			8	2	6	3	13	4	5
Karşılaştırmalı ilişkisel			7	8		4	5	12	1	11		
Ayırıcı								1				
Sentaks												

Grafik 3. 22. Ataberk'in ilk değerlendirmede eşit işaretini yorumlama biçimlerini kullanma oranı



Eşit '=' işaretini anlamlandırmaya yönelik bulgular (1.,2.,3.,5. ve 11. Sorular):

Eşdeğer denklemlerde işareti anlamlandırmayı gerektiren soru.3'te Ataberk'in '5+4=9' ifadesinde eşit işaretinin anlamı, ne amaçla kullanıldığı sorulduğunda bireysel uygulamada kesin işlemsel yorumlayarak 'iki sayısının toplamının sonucu' şeklinde ifade ettiği; aynı zamanda eşit işaretinin amacını '5+4 kaç, onun işlemini yapmak için' söyleminden hareketle işlemi yapmaya iten bir araç olarak yorumladığı görülmüştür. '5+4=6+3' ifadesinin doğruluğuna karar verirken bireysel görüşmede eşitliğin iki tarafındaki işlemleri yapıp sonuçları karşılaştırdığı görüldüğünden temel ilişkisel yorumlamayı kullandığı görülmüştür.



Görsel 3. 51. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-3'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Hmmm bu tarafa doğru devam ediyor. Orada ne demek istedin? Ya da birer birer gidelim dur şimdi. $5+4=9$ diyor ya. Sence buradaki eşittirin anlamı ne?

Ataberk: İki sayının toplamı.

Araştırmacı: İki sayının toplamı toplama ile gösterilmez mi? Eşittir ile mi gösterilir iki sayının toplamı?

Ataberk: İki sayının toplamının sonucu.

Araştırmacı: Sonucunu yazmak için mi kullanmışlar o zaman eşittiri?

Ataberk: Bir yandan öyle. Bir de $5+4$ kaç? Onun işlemini yapmak için.

[...]

Araştırmacı: Buradaki eşittirin amacı ne acaba? Ne amaçla kullanılmış?

Ataberk: beş artı dört dokuz oluyor. Altı artı üç de dokuz oluyor. İkinin de sonucu aynı olduğu için eşittir.

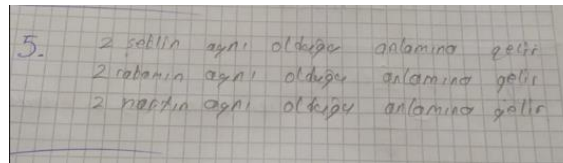
Araştırmacı: Hmm anladım. Sonuçlarını buldun galiba ikisinde de değil mi?

Ataberk: ikisinin sonucu yazılmamış. O da ikisinin de sonucu dokuz diyor.

Araştırmacı: Şu en sondaki dokuzu yazmalarının sebebi de o mudur diyorsun?

Ataberk: Hı hı (evet anlamında). İkinin cevabı aynı olduğu için.

Sayı, şekil, cebirsel gibi farklı temsilleri kullanarak yazılan ' $a=a$ ' durumunu işareti anlamlandırmayı gerektiren soru.5'te bireysel uygulamada Ataberk'in bu ifadelerdeki eşit işaretinin 'aynı' anlamında kullanıldığını ifade ettiği görülmüştür (Görsel 3.52). Bireysel görüşmede burada kullandığı 'aynı' ifadesine sadece sayısal bir nicelik olarak aynı olma anlamı değil bununla beraber biçim, renk gibi dış görünüş olarak da aynı anlamını kattığı görülmüştür. Bu durumda eşitliğin iki tarafındaki sayı, şekil ya da harflerin aynılığını-farklılığını karşılaştırdığını gösterdiğinden ilişkisel yorumladığı değerlendirilmiştir.



Görsel 3. 52. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-5'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Tamam. O zaman kare eşittir kare.

Ataberk: Burada iki şekil aynı. İki şeklin de aynı olduğunu. Anlamına geliyor.

Araştırmacı: Aynı derken neleri aynı?

Ataberk: Hmmm şey... Sayılarda mesela onun nasıl diyeyim.. basamak değeri.

Araştırmacı: Hmmm ama burada basamak da yok baksana. Kare çizmişler. Sayılarda bu sayıların ikisi de aynı diyorduk. Bunlarda kutular aynı deyince kutuların nesi aynı acaba? Ya da işte kare. Ne diye düşünüyorsan.

Ataberk: Şekli aynı oluyor.

[...]

Araştırmacı: Peki tamam. Yıldızlar var aşağıda. Yıldızlar için de mi aynı şeyi düşünüyorsun? Yıldız eşittir yıldız demişler mesela.

Ataberk: Onların büyüklükleri de aynı şekilleri de. İkisi de aynı olduğu için aynı. Eşittir.

Araştırmacı: peki oradaki yıldızlar bir sayı olabilir mi? Ya da istediğim sayı olabilir mi?

Ataberk: hı hı. (onaylar) evet.

Araştırmacı: Mesela bir tane örnek versene. Yıldızlar kaç olsun?

Ataberk: 7.

Araştırmacı: Tamam. 7 eşittir 7 mi o peki?

Ataberk: Örnek yani. Yıldız 7 değil ama. Örnek olarak. Öyle diyeyim.

Araştırmacı: Peki yıldız başka ne olabilir? 7'den başka?

Ataberk: Çoğu sayı olabilir mesela.

Araştırmacı: Çoğu derken.. bazıları olamaz mı?

Ataberk: Yooo. Hepsi olur.

Eşdeğer denklemlerde işareti anlamlandırmayı gerektiren soru.3'te bireysel görüşmede Ataberk'in ' $5+4=6+3=9$ ' şeklinde verilen matematiksel ifadeyi anlamlandırabildiği ve sözel olarak açıklayabildiği ve eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlanmasını destekleyen 'ikisinin cevabı aynı' ifadesiyle de tanımlayabildiği görülmüştür.

Araştırmacı: Tamam. Alttakine bir bak bakalım. Altta sence eşittir ne anlamında kullanılmış. Ben önce bir soruyu okuyayım bak burada. Beş artı dört eşittir altı artı üç eşittir dokuz. (biraz bekliyorum Ataberk cevap versin diye)

Ataberk. Hıh (tam cümleye başlayacak.)

Araştırmacı: Buradaki eşittirin amacı ne acaba? Ne amaçla kullanılmış?

Ataberk: Beş artı dört dokuz oluyor. Altı artı üç de dokuz oluyor. İkisinin de sonucu aynı olduğu için eşittir.

Araştırmacı: Hmm anladım. Sonuçlarını buldun galiba ikisinde de değil mi?

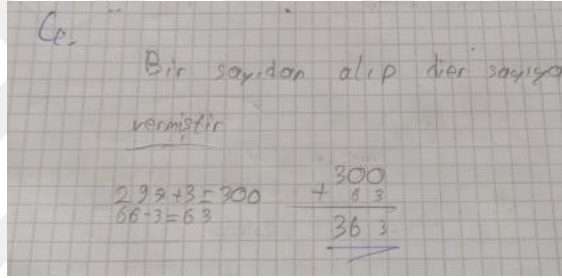
Ataberk: ikisinin sonucu yazılmamış. O da ikisinin de sonucu dokuz diyor.

Araştırmacı: Şu en sondaki dokuzu yazmalarının sebebi de o mudur diyorsun?

Ataberk: Hı hı (evet anlamında). İkisinin cevabı aynı olduğu için.

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik bulgular (4., 6., 7. ve 8. sorular):

Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında bu adımları farklı durumlarda uygulamayı gerektiren soru.4'te ' $47+25=(47+3)+(25-3)$ ' ifadesinde Toprak'ın yaptığı işlemlerin nedenini Ataberk'in açıklaması istendiğinde Görsel 3.53'te görüldüğü gibi 'bir sayıdan alıp diğer sayıya vermiştir' ifadesini kullandığından karşılaştırmalı ilişkisel yorumladığı kabul edilmiştir. Bireysel görüşmede eşitliğin aynı tarafındaki sayılardan birinden alıp diğerine verdiğinde sonucun değişmeyeceğini, aynı kalacağını ifade edemediği ama kendisinden yapılması beklenen tüm sorularda karşılaştırmalı ilişkisel yorumlama biçimini kullanabildiği görülmüştür.



Görsel 3. 53. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-4'e ilişkin cevabı

Ataberk: Yaptığımı kolaylaştıran bir şey? (düşünüyor)

Araştırmacı: Mesela neden böyle bir şey yapma ihtiyacı hissetmiş. Neden 3 eklemiş? Bundan eklemiş bundan çıkarmış? (bu sırada ekranda fare ile işaretleyip mavi yapıyorum anlattığım kısmı) amaç ne ki burada?

Ataberk: 47'yi tam bir sayı yapmak çünkü tam bir sayı yapmak. Çünkü tam bir sayıdan bir şey çıkarmak bir şey alıp veya vermek daha kolay oluyor.

Araştırmacı: Hmmm. Neden ikisinde de 3'ü kullanmış? 3'ü eklemiş birisinde. Birisinde de 3'ü çıkarmış. Neden 3'ü kullanmış.

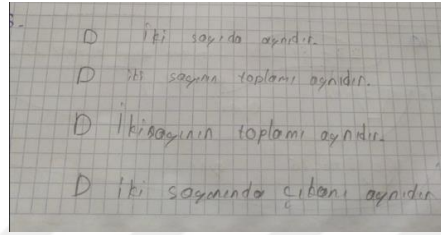
Ataberk: Birisinden 3 alırsa o 3 eksiliyor. Diğerine verirse o 3 artıyor.

Araştırmacı: Hmm böylece ne olmuş oluyor. Birisinden eksiliyor birisinde artınca.

Ataberk: Birinden alıp birine veriyor.

Denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirlerken eşitliği bozmayan işlemleri analiz etmeyi gerektiren soru.6'da Ataberk'in eşit işaretinin yer aldığı sorularda Görsel 3.54'te görüldüğü gibi eşitlik kavramını destekleyici, açıklayıcı olarak kullandığı;

bireysel görüşmede ‘aynı’ kelimesini ‘eşittir sembolünün iki tarafında toplanan sayıların aynı olması’ sebebiyle eşit işaretinin iki tarafını karşılaştırdığı görülmüştür. Aynı zamanda ‘sonuçların aynı olması’ ifadesini kullanmasıyla da temel ilişkisel yorumlamayla açıklıyor olmasından dolayı eşit işaretini ilişkisel yorumlayan kelimelerle tanımladığı görülmüştür (Görsel 3.54). Aynı zamanda bireysel görüşmede ‘*Toplamada. Zaten toplanan iki sayı da aynı. O yüzden sonuçları da aynı*’ ifadesiyle karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanarak eşit işaretini destekleyen ifadeler kullandığı görülmüştür.



Görsel 3. 54. Ataberk’in ilk değerlendirme soru-6’ya ilişkin cevabı

Araştırmacı: Tamam. Şu 6. Soruya bakalım Ataberk. 6. Soruda demiş ki. Aşağıdaki ifadelerin yanlarına doğru ise d..... (öğretmen soruyu okuyor) demiş. Mesela sen 4 eşittir 4 var. Hemen senin kağıdına da bakayım. Doğru demişsin çünkü iki sayı da aynı demişsin. Hala aynı mı düşünüyorsun?

Ataberk: Hı hı. (onaylama ifadeleri var ama kendisi ifade etmiyor)

Araştırmacı: Sonra alttakine bakıyorum. Bakalım hemen ne yazıyor? Dört artı sıfır eşittir 4 artı sıfır diyor. Orada da şey demişsin. Ona da doğru demişsin. İki sayının toplamı aynı demişsin. Aynı mı düşünüyorsun?

Ataberk: Evet.

Araştırmacı: Toplamı aynı derken ne demek istiyorsun? Neyi yaptın da toplamın aynı olduğuna karar verdin?

Ataberk: Toplamada. Zaten toplanan iki sayı da aynı. O yüzden sonuçları da aynı.

Eşitliği sağlayan eksik değeri bulmaya yönelik bulgular (9., 10. ve 12. sorular):

Farklı tiplerde, eksik değerin ‘.....’ ile temsil edildiği denklemlerde eksik değeri hesaplamayı gerektiren soru.10’da ‘ $8+6+9=8+....$ ’ şeklinde verilen ve eksik değerin uygun bir şekilde doldurulması istenen soruda Görsel 3.55’te görüldüğü gibi Ataberk’in temel ilişkisel yorumlamayı kullanarak sonuçların eşit olmasını sağlayacak şekilde boşlukları doldurduğu görülmüştür. Bireysel görüşmelerdeki öğretmen rehberliği ile beraber eşit işaretinin her iki tarafında da 8 olduğunu farkedip eşit işaretinin solundaki 8’in yanında ‘ $6+9$ ’ olduğundan eşit işaretinin sağında da 8’in yanında aynı sayının yani

15'in olması gerektiğini ifade ettiğinden karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı da anlamlı bir şekilde kullanabildiği kabul edilmiştir.

Handwritten mathematical work on grid paper showing three equations: $23 = 8 + 15$, $15 = 8 + 7$, and $16 = 10 + 6$. The equations are written in blue ink. The first equation is circled in blue. The second equation is written below the first. The third equation is written below the second. There are some additional notes in Turkish, including "Aynı" and "yazılmalı".

Görsel 3. 55. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-10'a ilişkin cevabı

Araştırmacı: Sen bu soruları çözerken benim dikkatimi bir şey çekti Ataberk. Bu sorularda dedim yaaa neden hep şöyle vermişler hep soruları. Mesela sorunun başında sekizle başlamışlar. Bu tarafta da sekizle başlamışlar. (bu sırada fare ile 8'leri seçip mavi yapıyorum vurgulamak için her 8 deyişimde) Sorunun başında 3'le başlamışlar. Bu tarafta da 3'le başlamışlar. Yani onu bilerek mi öyle verdiler. Belki başka bir yöntemle de çözülebilir miydi? Mesela sen birinci soruyu şöyle çözdün. 8'le 6'yı; 6'yla ayyy çıkan sonuçla da dokuzu topladın 23 buldun. Sonra da dedin ki 8'e kaç eklersek 23 olur. 15 eklersek. Ben de dedim ki yaa burada da sekizle başlamışlar burada da sekizle başlamışlar acaba biz bu soruyu başka türlü de yapabilir miydik. Sence yapabilir miyiz.

Ataberk: Evet.

Araştırmacı: Nasıl.

Ataberk: Mesela birinci soruya örnek... 8 yerine ...23.23. 23'ten 8 çıkar. (kendi kendisine konuşuyor bir yandan da defterine birşeyler yazıyor) Hıh 15. O sekizin yerine 15 yazarsak yine oluyor

Araştırmacı: Peki sekizi hiç değiştirme. Sadece şu nokta nokta diye bulduğun kısmı 15 bulmuştun ya sen. O 15'i farklı bir yolla da bulabilir misin? 8'le hiç oynama. Yani soruyu hiç değiştirme. Ama benim merak ettiğim şu: senin yaptığın yöntemden farklı bir yöntemle de burasının 15 olduğunu bulabilir miydik? Nasıl bulurduk bulsaydık?

Ataberk: Hmmm mesela 8 artı... 8 ekliyor birinde öbüründe de 8 ekliyor dimi. (Ataberk bazen öğretiyormuş gibi anlatmayı seviyor o yüzden de sorular soruyor bakalım anladım mı diye)

Araştırmacı: Hı hı aslında ikisinde de sekiz eklemiş.

Ataberk: İki de aynı ikisi de topluyor. Arttırıyor. İkisini de kullanmazsak mesela sekizleri sil mesela artı 9 ..6 artı 9 eşittir 15. Evet 15. O da sıfır artı 15 olması lazım. 15 direk 15 olur. Yani 8lerin ikisi de aynı.

Sözel temsilden cebirle ya da sayısala geçiş kullanarak eksik değeri bulmayı gerektiren soru.12'de sözel olarak verilen bir problem durumunu Görsel 3.56'da

görüldüğü gibi cebirsel olarak ifade edebildiği görülen Ataberk'in iki kız, iki erkekten oluşan dört kişilik arkadaş grubunda kızlar ve erkeklerin bilye sayılarının eşit olması durumunu cebirsel olarak ifade ederken erkeklerden Çınar'ın bilye sayısını bilmediği için 'Çınar'ın bilye sayısı' yazarak temsil ettiği; kızlar ve erkeklerin bilye sayılarının eşit olması durumunu da aralarına eşit işaretini kullanarak yazabildiği görülmüştür.

Görsel 3. 56. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-12'ye ilişkin cevabı

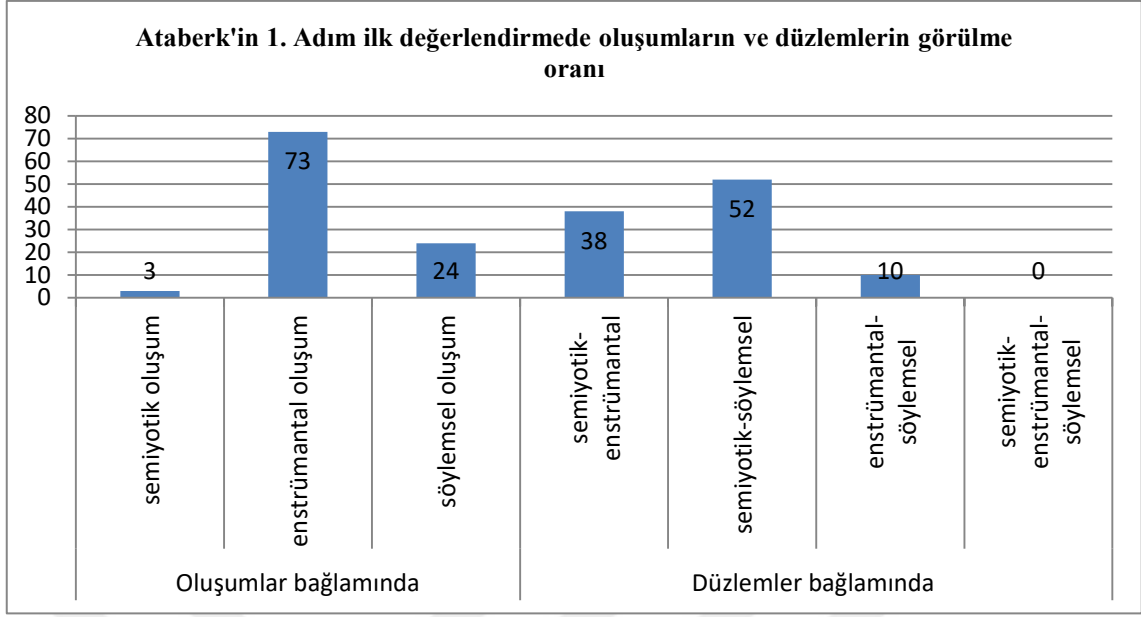
3.1.3.1.2. Ataberk'in matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları

Ataberk'in 1. Adım: ilk değerlendirme süreci oluşumlar ve oluşumların ikiyeşerli kombinasyonu bağlamında incelendiğinde aşağıdaki Tablo 3.19 ve Grafik 3.23 elde edilmiştir. İlk değerlendirme sürecinde oluşumların bileşenlerinin görülme oranları enstrümantal oluşum %73, söylemsel oluşum %24,3, semiyotik oluşum %2,4 iken çalışmalarının semiyotik-söylemsel düzlemde yer alma oranı %52,3 oranında, semiyotik-enstrümantal düzlemde yer alma oranı %38, enstrümantal-söylemsel düzlemde yer alma oranının %9,5 olduğu görülmüştür.

Tablo 3. 19. Ataberk'in ilk değerlendirmede oluşumlar ve düzlemlerinin sorulara göre dağılımı

Eşit işaretinin yorumlanmasında oluşumlar ve düzlemler		İ.D.S.1	İ.D.S.2	İ.D.S.3	İ.D.S.4	İ.D.S.5	İ.D.S.6	İ.D.S.7	İ.D.S.8	İ.D.S.9	İ.D.S.10	İ.D.S.11	İ.D.S.12
Oluşumlar bağlamında	Semiyotik oluşum								1				
	Enstrümantal oluşum			4	1		1		13	3	4	2	2
	Söylemsel oluşum							2	2	1	5		
Düzlemler bağlamında	Semiyotik-enstrümantal				5					1	10		
	Semiyotik-söylemsel								13	1	3	2	3
	Enstrümantal-söylemsel			3			1						
	Semiyotik-enstrümantal-söylemsel												

Grafik 3. 23. Ataberk'in ilk değerlendirmede oluşumlar ve düzlemlerin görülme oranı



Eşit '=' işaretini anlamlandırmaya yönelik bulgular (1.,2.,3.,5. ve 11. sorular):

Eşdeğer denklemlerde işareti anlamlandırmayı gerektiren soru.3'te ' $5+4=6+3$ ' ifadesinin doğruluğuna karar verirken eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanmasını problemin çözümünde işe koşabildiğinden eşit işaretinin semiyotik bir araçtan enstrümana dönüştüğü ve **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin bir gösterge olduğu yorumlanmıştır. Bireysel görüşmede Ataberk'in ' $5+4$ ' ifadesindeki 4'ten aldığı 1'i 5'e verdiğinde 4'ün 3'e; 5'in de 6'ya dönüştüğünü böylece sonucun değişmeyeceğini ifade ettiği görülmüştür. Var olan bir örnekte eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanmasını kullanabildiği görülmekle beraber eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanmasını kullanarak farklı örnekler de yazabildiği görülmüştür.

Araştırmacı: Bir daha sorayım bak. Normalde iki tane sayı vermişler sana. Sayılardan birisini 5 vermişler, birisini de dört vermişler. Sonra demişler ki sayıları değiştirdim. Beş olanı altı yaptım. 4 olanı da 3 yaptım. Ee biz de diyoruz ki olsun fark etmez yine de ikisi de aynı çıkar diyoruz. Nasıl aynı çıkıyor ki sayılar değişti?

Ataberk: (ben konuşurken de düşünüyor. Ben bitirdikten sonra da biraz bekledi.) Beşe bir ekliyorsunuz ama dörtten alıp.

Araştırmacı: Hmmm

Ataberk: Mesela 1 eklediğinizde oluyor. 4'ten olması için 1 aldınız ya o da 3 oluyor.

Araştırmacı: hmm

Ataberk: Birinden alıp birine veriyorsunuz ya.

Araştırmacı: o zaman birinden alıp birine verince değişmiyor mu?

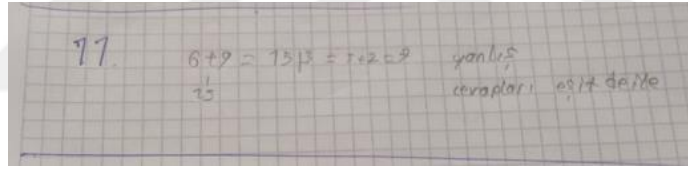
Ataberk: İıı (hayır anlamında)

Araştırmacı: Bana bir tane örnek yazsana öyle.

Ataberk: (eline kalemi aldı nereye yazsam diye önündeki kağıtları ayarlıyor.)

Hatalı eşdeğer denklemi farkedip işareti anlamlandırmayı destekleyen soru.11'de Ataberk'in Görsel 3.57'de görüldüğü gibi bireysel uygulamada eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlanmasını kullanarak ifadenin doğru olmadığına karar verebildiği ve gerekçesini bireysel görüşmede ifade edebildiği görüldüğünden çalışmasının **semiyotik-söylemsel** düzlemde olduğu değerlendirilmiştir.

Ben: Tamam hadi bakalım edelim. Alttaki soruya geçtim şimdi Ataberk. Şöyle bir soru vardı hatırlıyor musun bilmiyorum tren gibi. 6 artı 9 eşittir 15 bölü 3 eşittir 5 artı 2 eşittir 7. Bu ifade doğru mudur? Neden diye soruyordum. Hemen ben de senin cevabına bakayım sen nasıl cevap vermişsin diye. Sen cevapları eşit değil demişsin galiba. Yanlış demişsin galiba. Nasıl yaptın Ataberk?



Görsel 3. 57. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-11'e ilişkin cevabı

Ataberk: On bir dimi?

Ben: Aynen on bir. 6 artı 9 falan diye gidiyor.

Ataberk: 6 artı 9, 15. On beş eşittir 15'i 3'e bölüyorsun. 15'i 3'e böldüğünde çıkan sonuç kaç? Kaç? 3,6,9,12,15. Beş. Çıkan sonuç 5. Ama 5, 15'le eşit değil.

Ben: hmmm anladım

Ataberk: Sonra bir de mesela 5 artı 2 eşittir 7 oluyor. 7'yle 15 veya 5 eşit değil. Hiçbiri birbirine eşit değil sonuçların.

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik bulgular (4., 6., 7. ve 8. sorular):

Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında bu adımları farklı durumlarda uygulamayı gerektiren soru.4'te Ataberk'in problem durumlarında yaptığı adımları bazen gerekçeleriyle açıkladığı görülürken bazen de herhangi bir açıklayıcı, doğrulayıcı ifade içermeksizin sadece yaptığı adımları dile getirdiği

görülmüştür. Doğrulayıcı ifadeler yer vermeksizin yaptığı adımları söylediği bu çalışmalarının **semiyotik-enstrümantal** düzlemde olduğu kabul edilmiştir. Örneğin $47+25$ ve $65+29$ işlemlerini zihinden yapmaya çalışan Toprak'ın kullandığı yöntemi kullanarak dört toplama ($47+25$, $47+3$, $25-3$, $50+22$ gibi) işlemi yapılması beklendiğinde Ataberk'in aslında Görsel 3.58'de görüldüğü gibi karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanarak işlemleri yapabildiği ama açıklayıcı-doğrulayıcı ifadeler yer vermeden sadece yaptığı adımları ifade ettiği görüldüğünden bu çalışmalarının **semiyotik-enstrümantal** düzlemde yer aldığı kabul edilmiştir.

Görsel 3. 58. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-4'e ilişkin cevabı

Ataberk: Yaptığını kolaylaştıran bir şey? (düşünüyor)

Araştırmacı: Mesela neden böyle bir şey yapma ihtiyacı hissetmiş. Neden 3 eklemiş? Bundan eklemiş bundan çıkarmış? (bu sırada ekranda mouse ile işaretleyip mavi yapıyorum anlattığım kısmı) amaç ne ki burada?

Ataberk: 47'yi tam bir sayı yapmak çünkü tam bir sayı yapmak. Çünkü tam bir sayıdan bir şey çıkarmak bir şey alıp veya vermek daha kolay oluyor.

Araştırmacı: Hmmm. Neden ikisinde de 3'ü kullanmış? 3'ü eklemiş birisinde. Birisinde de 3'ü çıkarmış. Neden 3'ü kullanmış.

Ataberk: Birisinden 3 alırsa o 3 eksiliyor. Diğerine verirse o 3 artıyor.

Araştırmacı: Hmm böylece ne olmuş oluyor? Birisinden eksiliyor birisinde artınca.

Ataberk: Birinden alıp birine veriyor.

Araştırmacı: Birinden alıp birine verince ne oluyor peki?

Ataberk: Bir sayı 3 artıyor diğeri de üç eksiliyor.

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeyi gerektiren ve denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirleme sorusu olan soru.7'de Ataberk'in eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlanmasını kullanarak eşitliğin solu ve sağındaki işlemlerin sonucunu bulup sonuçları karşılaştırarak karar verdiği ve açıklamayı bu yolla yaptığı görüldüğünden çalışmasının **semiyotik-söylemsel** düzlemde olduğu kabul edilmiştir. Öğretmenin işlem yapmaksızın doğruluğuna karar vermek için başka bir yol bulup bulamayacağı sorması

üzerine sayısal verilen ifadeyi sözel olarak bir bağlam içinde hikayeleştirmeyi tercih ettiği görülmüştür. Hikayede eşitliğin solu ve sağını birbirinden bağımsız bir şekilde hikayeleştirdiği görülmüştür.

Araştırmacı: Sence şimdi bu benim yazdığım doğru mu oldu? Bir bak bakalım. Nasıl bakarsın? Doğru mu yanlış mı sence?

Ataberk: 7'yle 5 toplayınca 12 ediyor. 12'den 2 eksiltince 10 oluyor. 10 bunun cevabı. Böyle yazayım (sol taraf için 10 buldu deftere yazdı) onun cevabı 10.

Araştırmacı: Tamam

Ataberk: 12'den 2 çıkınca bu da 10 oluyor. İkisinin cevabı da aynı.

Araştırmacı: O zaman hemen şöyle sorayım Ataberk. Hiç toplama çıkarma işlemi yapmadan bu sorunun aynı olup olmadığına karar verebilir misin? İkisinin de sonucunun aynı olup olmadığını. Ama hiç böyle 7'yle 5'i topladım 12 buldum. 12'den de 2'yi çıkardım 10 buldum falan diye işlem yapmayacaksın.

Ataberk: Hikâye gibi mi olacak?

Araştırmacı: Hikâye gibi de olur. 7 tane kalemim vardı 5 tane daha geldi. Sen nasıl anlatmak istersin bilemedim.

Ataberk: 7 kalemim vardı 5 tanesini aldım. 2 tanesini de verdim.

Araştırmacı: Tamam.

Ataberk: Başkasına.

Araştırmacı: Ama hiç toplayıp çıkarma. Diğer tarafta ne yaptın?

Ataberk: 12 kalemim vardı sadece 2 tanesini verdim.

Farklı tiplerde verilen denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirlemeyi gerektiren soru.8'de $27-48+48=27$ ifadesinin doğruluğuna karar verirken ve açıklarken bireysel görüşmede öncelikle eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlanmasını kullanarak işlem yapıp sonuç bulduğu; sonrasında da eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanmasını kullanarak çıkarılan 48'in sonra yeniden eklenmesinden dolayı cevabın ilk sayı olacağını ifade ettiği görülmüştür. Bu durum eşit işaretini problemin çözümünde bir araç olarak kullanabildiğini gösterdiğinden **enstrümantal oluşumun** bileşenlerinin bir göstergesi olarak ele alınmıştır.

Araştırmacı: Evet. Ne düşündün de anlamadım dedin. Ne kafanı karıştırdı?

Ataberk: Şimdi söylerim ama ben hani... 27'den 48 çıkmaz ya o yüzden bir şey yazmadım ama normalde şey olabilir. 27'den 48 çıkaracağız. Eksi bilmem kaç... ona 48 ekleyince o eksisi gidiyor zaten yani 27 oluyor.

Araştırmacı: Heee. Peki 27'den 48'i çıkaramıyoruz ya biz nasıl çıkaracaksın peki sen? Yani biz aslında çıkarabiliriz Ataberk de beşinci sınıfa kadar çıkarmayı öğrenmiyoruz. Altıncı sınıfta öğreniyoruz çıkarmayı. Sen nasıl çıkaracaksın peki 27'den 48'i.

Ataberk: Şey... aslında çıkarmasan da olur. Çünkü şey..48 çıkarılıyor sonra bir de ekleniyor.

Araştırmacı: Heee

Ataberk: İkisi de aynı şekilde çıkarılıp eklenirse sonuç aynı kalıyor.

Eşitliği sağlayan eksik değeri bulmaya yönelik bulgular (9., 10. ve 12. sorular):

‘ $a+b=kutu+c$ ’ formunda verilen denklemlerde eksik değeri bulmayı gerektiren soru.9’da Ataberk’in eşit işaretinin yer aldığı problem durumlarında yaptığı adımları bireysel görüşmede açıklarken kullandığı doğrulayıcı, gerekçelendirme içeren ifadelerin bazılarında önceki soruları referans gösterdiği bazılarında da işlemin sağlamasını yaparak doğruluğunu gösterdiği görülmüştür. Bununla beraber yaptığı adımların gerekçesini sunarken aşağıda verilen bireysel görüşme dökümünden alıntıda olduğu gibi öğretmeni referans gösterdiği durumların da olduğu görülmüştür. Bu durum **söylemsel oluşumun** bileşenlerinin bir göstergesi olarak kabul edilmiştir. Örneğin $8+4=kutu+5$ ifadesinde ‘Siz demiştiniz hatta. Bir sayıyı bulmak için o verilen sayıyı ondan çıkarmalısınız ilk sayıyı. Çıkarırsınız demiştiniz’ diyerek öğretmenin ifadesine dayanarak doğrulamayı yaptığı görülmüştür.

9. $13 = 8 + 5 = 13$
 $- 5$
 8

iki verilen sayıyı çıkardım.

Görsel 3. 59. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-9'a ilişki cevabı

Ataberk: (yaptığı deftere bakıyor işlemlere sonra ekrana bakıyor)

Araştırmacı: Ya da gene aynı şeyi mi düşünüyorsun. O zaman ne düşündün falan filan.

Ataberk: 8'le 4'ü topladım 13 çıkıyor. 13 eşittir bir şey artı 5. Yani... siz demiştiniz hatta. Bir sayıyı bulmak için o verilen sayıyı ondan çıkarmalısınız ilk sayıyı. Çıkarırsınız demiştiniz.

Araştırmacı: Derste mi?

Ataberk: O yüzden 13'ten 5'i çıkardım. Hı hı.

Araştırmacı: Tamam.

Ataberk: Boşlukları bulmak için.

Sözelden cebirle ya da sayısal geçiş kullanarak eksik değeri bulmayı gerektiren soru.12’de Ataberk’in eşit işaretinin farklı yorumlamalarını kullanarak eşit işaretinin yer aldığı problem durumlarındaki çözümlerini açıklayıcı-doğrulayıcı ifadeler kullandığı

görülmüştür. Eşit işaretinin farklı düzeylerdeki yorumlayıcı özelliğini kullanarak doğruluyor olması bu çalışmalarının **semiyotik-söylemsel** düzlemde yer almanın bir göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Örneğin, dört kişilik bir arkadaş grubundaki (2 kız, 2 erkek) kızların ve erkeklerin bilyelerinin eşit olarak verildiği soruda Çınar'ın bilye sayısını bulurken ve bulduğu sayının doğruluğunu gösterirken Görsel 3.60'ta verildiği gibi eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlanması özelliğini kullanıyor olması çalışmasının **semiyotik-söylemsel** düzlemde yer aldığı yönünde değerlendirilmiştir.

Görsel 3. 60. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-12'ye ilişkin cevabı

Araştırmacı: Tamam. 15'i nasıl buldun bu arada?

Ataberk: 9'la 6'yı topladım. Sonra kızla erkeğin eşit olacaktı yani. Toprak'ın 10'sa Çınarın kaç olmalı? Burada da diğer sayıyı bulmak için 10'dan 5'i çıkaracağız. 10'dan 5'i çıkarınca da 5 çıkıyor (yanlışlıkla öyle dedi)

Araştırmacı: 5'i nereden buldun?

Ataberk: 15'ten 5'i çıkarınca.(Yine yanlışlıkla öyle dedi) 15'ten 10'u çıkarınca. 15'ten 10'u çıkaracağız.

Araştırmacı: Mmm 15'ten neden çıkardın?

Ataberk: Çünkü kızlar ve erkeklerin biriktirdiği bilye sayıları aynı. Kızların 15. Toprak'ın zaten 10 tane varmış. 10,11,12,13,14,15 (üstüne sayıyor) 5 oluyor. Çınarın 5 tane olması lazım.

3.1.3.2.İkinci adım: etkinlik-1 ve alıştırmalar

Bu bölümde Ataberk'in 2. Adım: Etkinlik-1 ve ilişkili alıştırmalarına yönelik bulguları kavramsal ve bağlamsal anlamaya ilişkin bulguları ve matematiksel çalışma uzayına ilişkin bulguları başlıkları altında verilmiştir.

3.1.3.2.1. Ataberk'in kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları

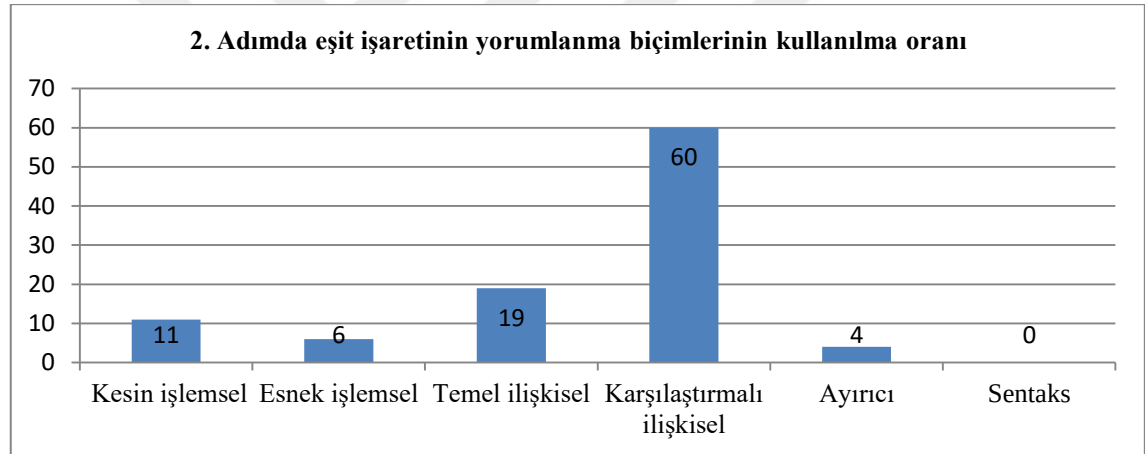
Ataberk'in 2. Adım: etkinlik.1. ve ilişkili alıştırmalar sürecinde eşit işaretini yorumladığı durumlar incelendiğinde düzeylere bağlı farklı yorumlama biçimlerini kullanma oranlarına dair aşağıdaki Tablo 3.20 ve Grafik 3.24 elde edilmiştir. Ataberk'in

2. Adım: etkinlik-1 ve ilişkili iki alıştırma kullandığı yorumlama düzeyleri yaklaşık olarak sırasıyla karşılaştırmalı ilişkisel %60 oranında, temel ilişkisel %19 oranında, kesin işlemsel %11 oranında, esnek işlemsel %6 oranında ve ayırıcı yorumlama %4 oranında şeklinde olduğu görülmüştür.

Tablo 3. 20. Ataberk'in 2. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimlerinin sorulara göre dağılımı

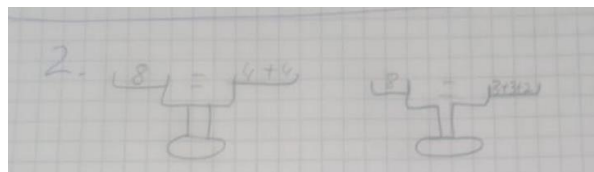
Eşit İşaretini Yorumlama Biçimleri	E.1.S.1.	E.1.S.2.	E.1.S.3.	A.1.S.1.	A.1.S.2.	A.1.S.3.	A.1.S.4.	A.2.S.1.
Kesin işlemsel	3		1	2				
Esnek işlemsel	3							
Temel ilişkisel	3		1	5				1
Karşılaştırmalı ilişkisel			9	3	1	1	7	10
Ayırıcı	1			1				
Sentaks								

Grafik 3. 24. Ataberk'in 2. Adımda eşit işaretinin yorumlama biçimlerini kullanma oranları



Eşit '=' işaretini anlamlandırmaya yönelik bulgular (e.1.2. Soru):

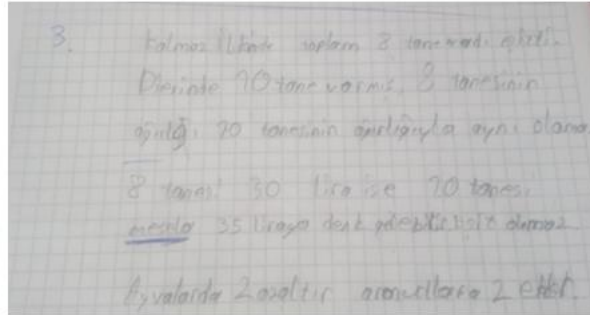
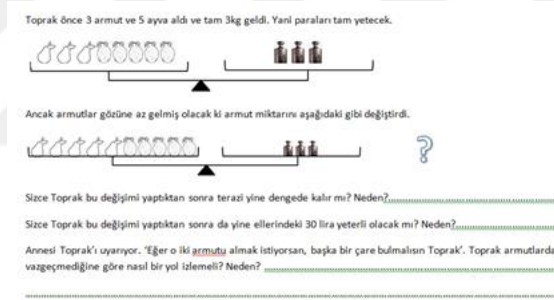
Eşdeğer denklemlerde terazi modeli ile işareti anlamlandırmayı gerektiren Etkinlik.1 soru.2'de terazi modelinde verilen topları esnek işlemsel yorumlamayı kullanarak sayısal olarak temsil edebilmesi beklenirken Ataberk'in sayısal temsili model ile uyumlu olacak şekilde belirlemek yerine Görsel 3.61'de verildiği gibi farklı olacak şekilde yazdığı görülmüştür.



Görsel 3. 61. Ataberk'in Etkinlik-1 soru-2'ye ilişkin cevabı

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik bulgular (e.1.3., a.1.1., a.1.2., a.1.3., a.1.4, a.2.,1.sorular):

Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulamayı gerektiren Etkinlik.1 soru.3'te Ataberk'in 3 armut ve 5 ayva ile dengede duran 3 kg ağırlığı içeren terazi modeline yapılan müdahaleden sonra armut sayısını 2 arttırdığımızda terazinin dengede kalmayacağını hatta '8 tanesi 30 lira ise 10 tanesi mesela 35 liraya denk gelebilir' diyerek bireysel uygulamada Görsel 3.62'de verildiği gibi terazinin iki kefesini karşılaştırarak kefelere birindeki meyve sayısının artması durumunda ödenmesi gereken paranın da artacağını yorumlayabildiği görüldüğünden Ataberk'in bu yorumu eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamasını kullandığı yönünde değerlendirilmiştir.



Görsel 3. 62. Ataberk'in Etkinlik-1 soru-3'e ilişkin cevabı

Terazi modeli ile ilişkili olarak doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulamayı gerektiren Etkinlik.1 Alıştırma.2'de iki sayının toplamını kolaylaştıracak şekilde işlemler yapması beklenen Ataberk'in karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanarak eşitliğin aynı tarafındaki

toplanan iki sayıdan birinden alıp öbürüne verdiği sayıların aynı olması durumunda eşitliğin bozulmayacağını bildiği ve bu bilgiyi problemin çözümünde kullanabildiği görülmüştür (Görsel 3.63).

1. $66+99=165$ 165'ten 100 çıkar
66'ın 100'den 33'ü 66'ın 33'ü

2. $66+99=165$ 165'ten 100 çıkar
66'ın 100'den 33'ü 66'ın 33'ü

3. $66+99=165$ 165'ten 100 çıkar
66'ın 100'den 33'ü 66'ın 33'ü

4. $66+99=165$ 165'ten 100 çıkar
66'ın 100'den 33'ü 66'ın 33'ü

5. $66+99=165$ 165'ten 100 çıkar
66'ın 100'den 33'ü 66'ın 33'ü

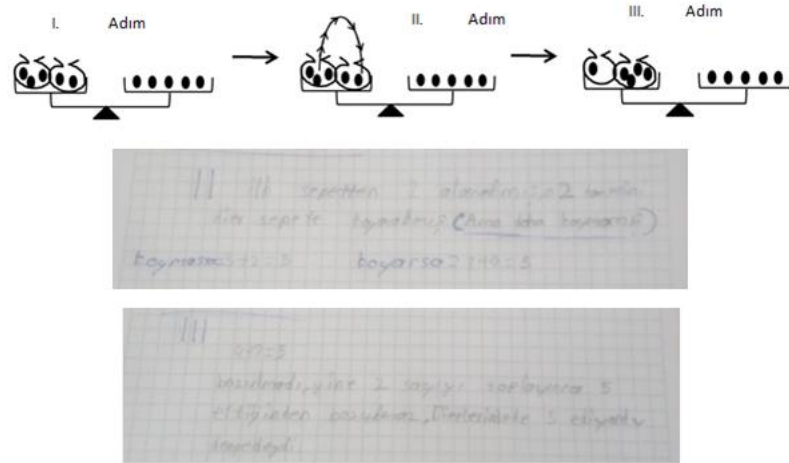
6. $66+99=165$ 165'ten 100 çıkar
66'ın 100'den 33'ü 66'ın 33'ü

7. $66+99=165$ 165'ten 100 çıkar
66'ın 100'den 33'ü 66'ın 33'ü

Görsel 3. 63. Ataberk'in Etkinlik-1 Alıştırma-2 soru-1'e ilişkin cevabı

Terazi modeli, sayısal, sözel, farklı temsil geçişleri ile ilişkili doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlamayı gerektiren Etkinlik.1 Alıştırma.1 soru.1'de etkinlik kâğıdında terazi modeli üzerinde aynı kefedeki iki torbadan birinden alınan 2 bilye diğer torbaya konulduğunda terazinin dengesinin bozulmadığı görseli yer aldığı Ataberk'in bu durumu bireysel uygulamada verdiği cevabın yer aldığı Görsel 3.64 ve grup görüşme dökümünden verilen alıntıda görüldüğü gibi 'zaten aynı kefedeki yapılan alıp vermenin toplamı değiştirmeyeceğini' söylemek yerine alıp vermeden önceki ve sonraki durumlarında toplamı bulup sonuçların değişmediğini söylemiş olması temel ilişkisel yorumladığı yönünde kabul edilmiştir. Eşit işareti ile terazi modeli arasındaki ilişkiyi daha anlamlı hale getirmek adına grup görüşmeleri sırasında tahtaya eşit işareti çizip terazi modelinin sol ve sağ kefesindeki ifadeleri eşit işaretinin sol ve sağ tarafına yazmaları gerekliliğini fark etmeleri adına yaptığımız çalışmada Ataberk'in terazinin sol kefesini eşit işaretinin soluna, terazinin sağ kefesini de eşit işaretinin sağına yazılması gerektiğini ifade edebildiği görülmüştür. Bu durum eşit işaretinin sol ve sağ taraf şeklinde ayırıcı bir işlevinin de olduğunu farkında olduğunu göstermiştir. Terazi

modelinde keferlerinden birinde 1 ve 4 bilye olan iki torba ile diğerk kefesinde 5 bilye olduğu durumu Görsel 3.64'te verildiği gibi Ataberk'in '1+4=5' şeklinde ifade edip 'bozulmadı, yine iki sayıyı toplayınca 5 ettiğinden bozulmaz. Diğerkinde de 5 ediyordu. Dengedeydi' diyerek eşit işareti ile ifade ettiği dengede duran terazi modeli arasında anlamlı ilişki kurabildiği, birbirini destekler nitelikte 'denge' kavramına yer verebildiği görölmüşür. Ataberk'in 2. Adımda görselleştirilmiş eşitlik modeli olan terazinin sol kefesindeki iki torbadan birinden alınan bilyelerin diğerk torbaya koyulduğunu gösteren durumu matematiksel olarak ifade etmek yerine bilyelerin yer değiştirmeden önceki ve yer değiştirmeden sonraki halini matematiksel olarak yazmış olması 1. ve 3. Durumu matematiksel olarak yazdığını ama 2. Durumdaki süreci anlatan '3-2+2+2=5' ifadeyi yazamadığından sayısal olarak temsil edemediğini göstermiştir.



Görsel 3. 64. Ataberk'in Etkinlik-1 Alıştırma-1 soru-1'e ilişkin cevabı

Ataberk: Üçüncü adımda neden öyle yapmışım bilmiyorum.

Araştırmacı: 4 artı 1 eşittir 5 demişsin. Dengesi bozulmadı demişsin. Yine iki sayı toplayınca 5 ettiğinden bozulmaz demişsin.

Ataberk: evet.

Araştırmacı: Heh. Ben de size onu soracaktım. Söyle sen Ataberk.

Ataberk: 4 artı 1, 5. 3 artı 2 de 5. Hani ikisi de 5. Toplam 5.

[...]

Araştırmacı: Sizce kiminle kim eşit? Ne tarafla ne taraf eşit? Öyle söyleyeyim. Terazinin ne tarafıyla terazinin ne tarafı eşit?

Ataberk: Sağıyla solu.

Terazi modeli ile ilişkili olarak Ekinlik-1 Alıştırma-1 soru-4'te doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında bu adımları farklı durumlarda uygulamayı gerektiren soruda Ataberk'in Görsel 3.65'te ve grup görüşme dökümünden verilen alıntıda görüldüğü gibi iki sayının toplamını bulurken bu sayıların toplamını kolaylaştıracak şekilde bir sayıdan alıp diğer sayıya verdiğiinden aslında toplanan iki sayının toplamının değişmeyeceğini ifade eden, eşitliğin bozulmayacağını açıklayan herhangi bir ifade kullanmadan sadece işlemleri yapmış olduğu, eşit işaretinin varlığını hissettiren destekleyici, açıklayıcı herhangi bir ifade kullanmadığı görülmüştür.

$$\begin{aligned}
 &7 \cdot 123 = 861 + 123 = 984 \\
 &2 \cdot 90 + 120 = 980 \\
 &7 \cdot 123 + 66 = 984 + 66 = 1050 \\
 &2 \cdot 100 + 140 + 250 = 390 \\
 &7 \cdot 150 + 150 = 1050 + 150 = 1200 \\
 &2 \cdot 1500 + 100 = 2600
 \end{aligned}$$

Görsel 3. 65. Ataberk'in Ekinlik-1 Alıştırma-1 soru-4'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Bir saniye soruyu yazayım. Hep Kayra'yla başlamıştık. Bu sefer Ataberk'le başlayalım. Ataberk kimden alalım kime verelim?

Ataberk: 879'dan... 121'den 1 alalım 879'a 1 verelim.

Ataberk: Hep küçük sayıları seçmişim ama normalde eee mesela küçük sayıları seçmek daha doğru oluyor.

Araştırmacı: Aslında küçük sayıları... (bu sırada Ataberk lafa giriyor) heh söyle.

Ataberk: 123 mesela 23e 7 eklemek mi daha şey daha küçük bir sayı yoksa 67'ye 3 eklemek mi?

Araştırmacı: Mmm neden 7 dedin orada?

Ataberk: 123'ü tam bir sayı yapmak için

Araştırmacı: O zaman senin burada 3 seçmendeki sebep sadece küçük olduğu için değil aynı zamanda bir de sayıları ne yapmaya çalışıyorsun.

Ataberk: Yuvarlamaya yani tam bir sayı yapmaya.

Eşitliği sağlayan eksik değeri bulmaya yönelik bulgular (e.1.1. Soru):

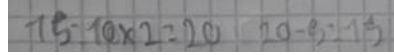
Açık sayı cümlesinde eksik değeri bulmayı gerektiren Etkinlik.1 soru.1'de Kayra'nın verdiği cevap olan ' $15=10.2=20$, $20-5=15$ ' ifadesi hakkında grup görüşmesinde görüşünü açıklayan Ataberk'in '*Baştakini sadece baştakini verirse yine*

olur. Sadece sondakini verirse yine olur' şeklindeki ifadesi eşit işaretini esnek işlemsel yorumlayabildiğini gösterirken ' $15=10.2=20$ ' ifadesindeki hatayı göremeyip '20 eksi 5'in sadece o gösterdiğiniz soru olsaydı normal gören ilk gören biri yanlış derdi ona. Yani devamını düşünemezdi. Bu soru yanlış diye düşünürdü ama diğer 20 eksi 5 girince doğru oluyor' şeklindeki grup görüşme dökümünden verilen alıntıda da görülen ifadesi eşit işaretini ayırıcı bir unsur olarak gördüğünü ama ilişkisel yorumlamayla desteklenmediği halde bu kullanımın doğru olduğunu düşündüğü için eşitlik kavramına dair imajında eksiklik olduğunu gösterdiği düşünülmüştür. Görsel 3.66'da verildiği gibi ' $15=4.3+3=15$ ' şeklinde ifade eden Ataberk'in kendisinin bu soruda eşit işaretini kullanma şekli ile Kayra'nın kullanma şeklini karşılaştırmasını ve kimin eşit işaretini doğru kullandığına karar vermesi istendiğinde kendisi eşit işaretinin tüm yorumlanma biçimlerini destekleyecek doğru kullanımı işe koşabilmesine rağmen Kayra'nın hatalı olan kullanımının doğru olduğunu ifade ettiği görülmüştür.

Araştırmacı: Mmm anladım. Sen ne diyorsun Ataberk? Kayranınki için. Hem başa hem sona 15 yazmış ya. İkisine de 15 yazmalı mı sence? Ya da yazmayacaksa hangisini yazmasa da olur?

Ataberk: ikisini de aynı anda yazmasa olmaz. Sonucu yazmamış olur. Baştakini sadece baştakini verirse yine olur. Sadece sondakini verirse yine olur.

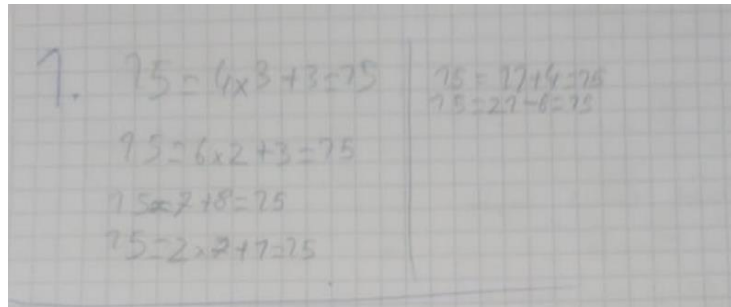
[...]



Araştırmacı: sen ne düşünüyorsun Ataberk? (Kayra'nın yukarıdaki yazdığı cevaba ilişkin soruyor)

Ataberk: 20 eksi 5'in sadece o gösterdiğiniz soru olsaydı normal gören ilk gören biri yanlış derdi ona. Yani devamını düşünemezdi. Bu soru yanlış diye düşünürdü ama diğer 20 eksi 5 girince doğru oluyor.

[...]



Görsel 3. 66. Ataberk'in Etkinlik-1 soru-1'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: ...Önce ben bir Ataberk ile başlayayım. Ataberk sence hangisi daha doğru bir kullanım oldu?

Ataberk: bence Kayranınki. (gülümsüyor)

Araştırmacı: Kayranınki mi daha doğru? Adım adım mı yazmalıyım diye düşünüyorsun.

Ataberk: Yaa ayrı yapmasa da olurdu. Hani 4 arpa 3 eşittir 12. Hayır. Evet 12. 12 artı 3 yazsa yine olurdu yani.

Araştırmacı: Mesela sen hiç öyle yazmamışsın Ataberk. Yani 4 ile 3'ü çarptım 12 buldum diye 12'yi yazmamışsın. Kafandan düşündün herhalde onu. 12'ye de 3 ekledim ve 15 diye direk böyle 15'i yazmışsın. Hiç 2'yi yazmadan direk böyle 15'e ulaşmışsın. Sence hangisi daha doğru oluyor.

Ataberk: Kayranınki doğru.

Araştırmacı: Kayranınki mi? Seninki neden hatalı mı diyeyim eksik mi? Neden farklı geldi seninki?

Ataberk: Hani biri hesaplamadan baksa da hani hesaplamaya gerek duymasa benimkini mesela bulamayabilir. Hesaplamadan yapsa.

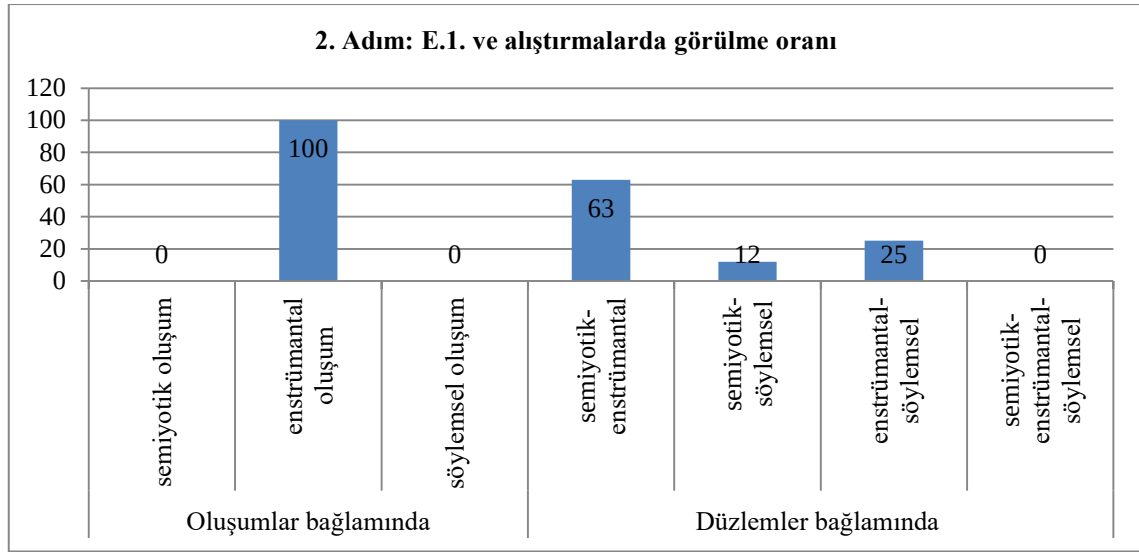
3.1.3.2.2. Ataberk'in matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları

Ataberk'in 2. Adım: etkinlik-1 ve ilişkili iki alıştırmada Tablo 3.21 ve Grafik 3.25'te verildiği gibi sadece enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler görülmüştür. Çalışmalarının ortalama, sırasıyla, düzlemlerde olma oranları semiyotik-enstrümantal düzlemde görülme oranı %63, enstrümantal-söylemsel düzlemde görülme oranı %25, semiyotik-söylemsel düzlemde görülme oranı %12 olduğu görülmüştür.

Tablo 3. 21. Ataberk'in 2. Adımda oluşumlar ve düzlemlerinin görülme durumlarının sorulara göre dağılımı

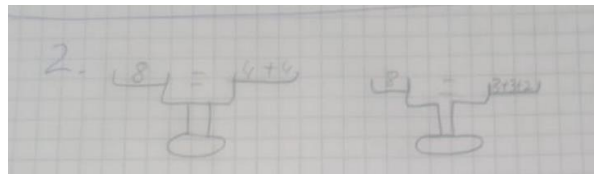
Eşit İşaretinin Yorumlanmasında Oluşumlar ve Düzlemler		E.1.S.1.	E.1.S.2.	E.1.S.3.	A.1.S.1.	A.1.S.2.	A.1.S.3.	A.1.S.4.	A.2.S.1.
Oluşumlar bağlamında	Semiyotik oluşum								
	Enstrümantal oluşum	6	1	4	5	1	1		1
	Söylemsel oluşum								
Düzlemler bağlamında	Semiyotik-enstrümantal			1				3	1
	Semiyotik-söylemsel				1				
	Enstrümantal-söylemsel			1	1				
	Semiyotik-enstrümantal-söylemsel								

Grafik 3. 25. Ataberk'in 2. Adımda oluşumlar ve düzlemlerin görülme oranları



Eşit '=' işaretini anlamlandırmaya yönelik bulgular (e.1.2. soru):

Terazi modeli ile verilen eşdeğer denklemde işareti anlamlandırmayı gerektiren Etkinlik.1 soru.2'de Ataberk'in terazi modeli ile eşit işareti arasında ilişki kurabildiği ve 8 sayısına eşit olacak şekilde sayılar belirleyebildiği görülmüştür. Ancak terazi modelini sayısal olarak temsil ederken modelde verilen sayısal değerlerden farklı değerler olması gerektiğini düşündüğünden Görsel 3.67'de ve grup görüşme dökümünden verilen alıntıda görüldüğü gibi modeldekinden farklı sayılar kullanarak 8 sayısını elde ettiği görülmüştür. Ataberk'in bu ifadesinden hareketle terazi modelini problemin çözümünde işe koşabildiği ve enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin bir gösterge olarak ele alınmıştır.



Görsel 3. 67. Ataberk'in Etkinlik-1 soru-2'ye ilişkin cevabı

Araştırmacı: Aslında aynı cevaba geliyor. 8 cevabına ulaşmış o zaten. 8 cevabında bir sıkıntı yok ama yukarıdaki toplarla uyumlu olmamış. Mesela yukarıda toplar 5 tane ve 3 tane ama o yukarıda 4 artı 4 yazmış. Mesela Ataberk de aynısını yapmış. Ataberk'e de

soralım. Ataberk neden öyle yapmış diye. Ataberk çünkü 8'i 4 artı 4 diye yazmış. Sen neden 4 artı 4 diye yazmıştın Ataberk.

Ataberk: Eeee 4 artı 4, 8 ediyor. Orada 8 bulmamız gerek. Orada ben ayy farklı olsun diye anlamıştım.

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik bulgular (e.1.3., a.1.1., a.1.2., a.1.3., a.1.4, a.2.,1.sorular):

Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulamayı gerektiren Etkinlik.1 soru.3'te eşit işaretinin semiyotik bir araç olduğu çalışmamızda Ataberk'in eşit işaretinin temel ilişkisel ve karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanması özelliklerini kullanarak 10 sayısına eşit olacak şekilde ifadeler yazabildiği Görsel 3.68'de görülmüştür. Bununla beraber grup görüşmesinde karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanarak belirlediği sayıları hangi işlemlerle belirlediğini ifade ettiği ama bir gerekçelendirme, doğrulayıcı bir ifadeye yer vermediği görüldüğünden çalışmasının **semyotik-enstrümantal** düzlemde olduğu yönünde değerlendirilmiştir.

3. birime verip diğerinden alıyor.

$$10 = 0 + 3 + 7$$
$$10 = 0 + 5 + 5$$
$$10 = 1 + 4 + 5$$
$$10 = 5 + 2 + 3$$
$$10 = 6 + 3 + 1$$

Görsel 3. 68. Ataberk'in Etkinlik-1 soru-3'e ilişkin cevabı

Ataberk: 10'dan aldım. 0'a verdim.

Araştırmacı: Peki burada kimden aldın kime verdin?

Ataberk: Yine 10'dan aldım. 0'a verdim.

Araştırmacı: Ne kadar aldın ne kadar verdin?

Ataberk: 5 aldım. 5 verdim.

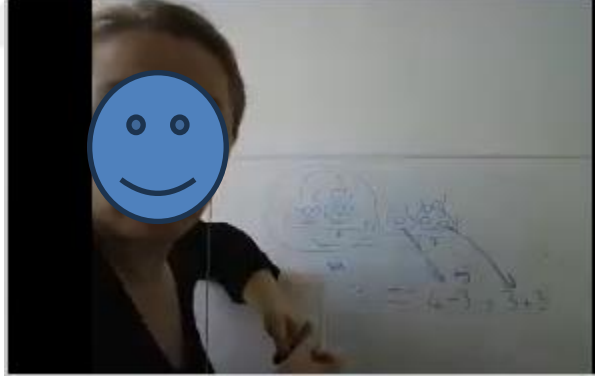
Araştırmacı: Süper. Burada kimden aldın ne kadar aldın? Kime verdin ne kadar verdin? (3. Sıradakini soruyorum)

Ataberk: 10'dan 5 aldım. 1'e de 4...

Araştırmacı: Bak şimdi 10'dan gittin 5 aldın. 1'e gidip niye 4 verdin. O arada kalanı ne yaptın? (gülümsüyorum)

Ataberk: işte ayrı yapmış mesela. 5 tane aldım ya oraya 5 tane ekleyip sıfır yazmadım. 5'in 1 tanesini 1 yazdım öyle. Ayırdım 1 yazdım. Diğer kalan dört tanesini yazdım.

Terazi modeli, sayısal, sözel, farklı temsil geçişleri içeren doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlamayı gerektiren Etkinlik-1'den sonra öğrencilere gönderilen alıştıırma-1 soru.1'de terazi modelinde aynı kefedeki iki sayıdan birinden alıp birine verdiğimizde o kefedeki toplam miktarın değişmeyeceği ya da terazinin iki kefesinden de aynı miktarda eksiltmenin, iki kefesine de aynı miktarda eklemenin dengeyi bozmayacağını netleştirebilmek adına Görsel 3.69'da görülen tahtada yaptığımız ilave çalışmalarda Nazlı ve Melda'nın terazi modelinde verilen ' $4+3=4-3+3+3$ ' ifadesini 'yerleri değiştiğinde sonuçlar değişmez' şeklinde yanlış yorumladıkları görülürken Ataberk'in eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanması özelliğini kullanarak '*Hocam o verilen sayı ikisinde de. O verilen sayı diyelim 50 aldı. Diğerinde de 50 verirse. Ama o sayı ikisinde de aynı olacak. Hani alıp veriyor ya.*' Şeklinde açıklayarak ifadenin doğruluğunu gerekçelendirebildiği görüldüğünden çalışmasının semiyotik-söylemsel düzlemde yer aldığı değerlendirilmiştir.



Görsel 3. 69. Grup ile yapılan görüşmede Etkinlik-1 Alıştırma-1 soru-1'e ilişkin

Araştırmacı: Hiç toplamasak da değişmez diyebilir miyiz?

Nazlı: Öğretmenim bence diyebiliriz yani. Çünkü yerleri değiştiğinde sonuçlar değişmez, aynı olur. Araştırmacı: Ne diyorsunuz çocuklar? Birer birer alayım.

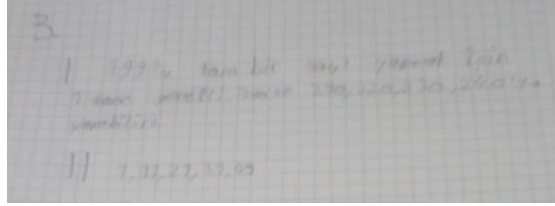
Melda: Ben de Nazlı'ya katılıyorum.

Araştırmacı: Tamam. Sen ne diyorsun Ataberk?

Ataberk: Hocam o verilen sayı ikisinde de. O verilen sayı diyelim 50 aldı. Diğerinde de 50 verirse. Ama o sayı ikisinde de aynı olacak. Hani alıp veriyor ya.

Terazi modeli ile ilişkili doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulamayı gerektiren Etkinlik.1 Alıştırma.1 soru.3 ve

soru.4'te terazi modeli üzerinde verilen ' $199+46=199+1+46-1$ ' işleminde dengede duran terazi modeli ile eşit işareti arasında anlamlı ilişkiyi kurabilen Ataberk'in grup görüşmesinde terazi modelinin bir bütün olarak verilmediği ama ilişkiyi hatırlatacak görselle temsil edildiği farklı problem durumlarında ($67+123$, $98+46$, $141+99$ gibi) da terazi modelini bir araç olarak kullanabildiği görüldüğünden **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin bir gösterge olduğu kabul edilmiştir (Görsel 3.70 ve 3.71).



Görsel 3.70. Ataberk'in Etkinlik-1 Alıştırma-1 soru-3'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Tamam Ataberk'inkine bakıyorum. Ataberk de şöyle demiş. 199'u tam bir sayı yapmak için demiş. 1 tane eklemiş. Böylece 210, 220, 230, 240 diye yapabilirdi demiş. Ne demek istedin orada?

Ataberk: 1 eklemiş ya 1 ekleyince 200 oluyor. 11 eklerse 210, 21 eklerse 220, 31 eklerse 230, 41 eklerse 240 oluyor.

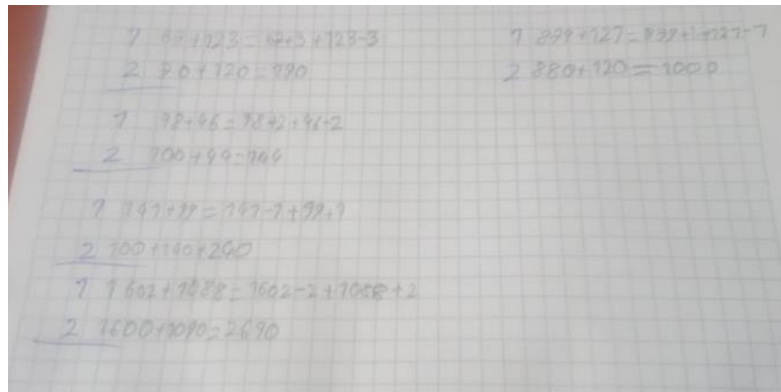
Araştırmacı: peki orda...

Ataberk: Hepsi tam sayı olabilir.

Araştırmacı: Hehh. Ataberk....

Ataberk: Hep 200 yapamayabilir.

Araştırmacı: Aynen öyle. Ataberk tam sayı derken ne demek istiyor olabilir sizce Ataberk. 1 ekleyince diyor tam sayı oluyor diyor. Ne demek istemiş olabilir tam sayı derken?



Görsel 3.71. Ataberk'in Etkinlik-1 Alıştırma- soru-4'e ilişkin cevabı

Eşitliği sağlayan eksik değeri bulmaya yönelik bulgular (e.1. Soru):

Açık sayı cümlesinde eşitliği sağlayan eksik değeri bulmayı gerektiren Etkinlik-1 soru.1’de Ataberk’in eşit işaretinin kesin işlemsel, esnek işlemsel ve temel ilişkisel yorumlamalarını Görsel 3.72’de görüldüğü gibi 15 sayısına eşit olacak farklı işlemler belirleme probleminde işe koşabildiği görülmüştür. Bu veriler **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin gösterge olarak değerlendirilmiştir.

Handwritten mathematical equations on grid paper:

$$\begin{aligned} 7. \quad & 75 = 6 \times 3 + 3 = 75 \\ & 75 = 6 \times 2 + 3 = 75 \\ & 75 = 7 + 8 = 75 \\ & 75 = 2 \times 2 + 7 = 75 \end{aligned}$$

On the right side, there are two more equations:

$$\begin{aligned} 75 &= 17 + 4 = 75 \\ 75 &= 27 + 6 = 75 \end{aligned}$$

Görsel 3. 72. Ataberk’in Etkinlik-1 soru-1’e ilişkin cevabı

3.1.3.3.Üçüncü adım: etkinlik-2 ve alıştırmalar

Bu bölümde Ataberk’in 3. Adım: Etkinlik-2 ve ilişkili alıştırmalarına yönelik bulguları kavramsal ve bağlamsal anlamaya ilişkin bulguları ve matematiksel çalışma uzayına ilişkin bulguları başlıkları altında verilmiştir.

3.1.3.3.1. Ataberk’in kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları

Bu bölümde Ataberk’in kavramsal ve bağlamsal anlamaya ilişkin bulguları Etkinlik-2 ve ilişkili alıştırmalarda yer alan soruların analizi sonucu elde edilen temalar başlıkları altında sunulmuştur.

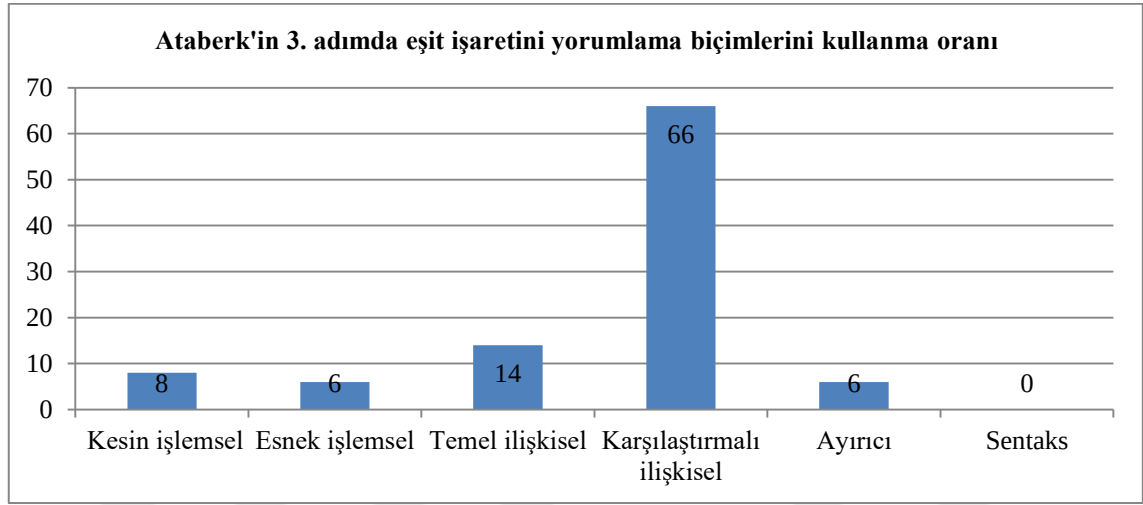
Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik bulgular:

Ataberk’in 3. Adım: etkinlik.2. ve ilişkili alıştırmalar sürecinde eşit işaretini yorumladığı durumlar incelendiğinde farklı yorumlama biçimlerini kullanma oranlarına dair Tablo 3.22 ve Grafik 3.26 elde edilmiştir. Ataberk’in 3. Adımda karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı yaklaşık olarak %66 oranında kullandığı görülürken onu sırasıyla temel ilişkisel yorumlama %14 oranında, kesin işlemsel yorumlama %8 oranında, esnek işlemsel ve ayırıcı yorumlamaların %6 oranında takip ettiği görülmüştür.

Tablo 3. 22. Ataberk’in 3. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimlerinin sorulara göre dağılımı

Eşit İşareti Yorumlama Biçimleri	E.2.S.1.	E.2.S.1.A.	E.2.S.2.	E.2.S.3.	E.2.A.1.S.1.	E.2.A.1.S.2.	E.2.A.2.S.1.
Kesin işlemsel	2					1	
Esnek işlemsel						2	
Temel ilişkisel			1	4			
Karşılaştırmalı ilişkisel	1	4	2	6	4	4	2
Ayırıcı			2				
Sentaks							

Grafik 3. 26. Ataberk'in 3. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimini kullanma oranları



Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulamayı gerektiren terazi modeli, sayısal, sözel, farklı temsil geçişleri içeren Etkinlik.2 soru.1'de Ataberk'in Görsel 3.73'te verildiği gibi 38 sayısını elde etmek için eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanmasını kullanabildiği hatta grup görüşme dökümünden verilen alıntıda da görüldüğü gibi eşitliğin aynı tarafında eklenen ve çıkarılan sayıların aynı olması durumunda seçilen sayının öneminin olmadığını farkına vararak genelledebildiği görülmüştür.

Görsel 3. 73. Ataberk'in Etkinlik-2 soru-1'e ilişkin cevabı

Ataberk: Doğru. Bir sayıya aynı sayıyı ekleyip çıkartırsak sonuç değişmez.

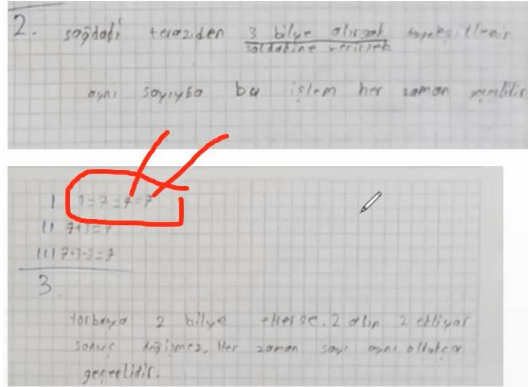
Araştırmacı: Hmmm o kısmı almamışım o zaman. O zaman sen de Kayra gibi düşünüyorsun anladığım kadarıyla yani bu 25 sayısını ekleyip çıkarmışlar ya.

Ataberk: Sadece 25 olmayabilir. Mesela.

Araştırmacı: Mesela ne olur acaba?

Ataberk: 10 çıkarsak 20 çıkarsak sonra tekrar eklese, aynı sayıyı 10 eklese mesela hep aynı olur yani.

Terazi modeli ile ilişkilendirilmiş, sayısal, sözel, farklı temsil geçişleri ile doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlamayı gerektiren Etkinlik.2 soru.2’de Görsel 3.74’de verildiği gibi Ataberk’in terazi modelinde sağ kefe (terazi) sol kefe şeklinde ifade ediyor olması eşit işaretinde de sağ-sol ayrımını desteklemeye başladığından eşit işaretini solu ve sağını ayıran bir sembol olarak da yorumladığı görülmüştür. Örneğin terazi modelinde dengede duran sol kefedeki torba ile sağ kefedeki 7 bilyenin; sol kefesindeki torbanın yanına eklenen 3 bilyeden sonra o eklenenlere müdahale edilmesine izin verilmediği için sağ kefeye de 3 bilye daha eklemesi gerekliliğini fark etmesi beklenirken Ataberk’in grup görüşmesinde öğretmen rehberliğinden sonra sağ kefeye de 3 bilye eklenmesi gerektiğinin farkına vardığı görülmüştür. Bu süreçte dengede duran teraziyi eşit işareti ile temsil ederken dengede durmadığında yine eşit işareti ile temsil edilemeyeceğinin farkına varmıştır.



Görsel 3.74. Ataberk'in Etkinlik-2 soru-2'ye ilişkin cevabı

Araştırmacı: Hmmm. Anladım. Bir de şurada aşağıdakine bakalım Ataberk. Şurada şöyle bir şey yazmışsın. O benim kafamı kurcaladı. 7 artı 3 yazmışsın. Eşittir 7'ye demişsin. Gerçekten eşit mi?

Ataberk: Hayır öğretmenim (gülümsüyor)

Araştırmacı: Orada ne demek istemiştin?

Ataberk: 7 artı 3 eşittir 10 yazmam gerekiyordu ama neden 7 yazmışım bilmiyorum.

[...]

Ataberk: terazi olduğu için eşittir koyulması gerekiyor ama biri 10 biri 7 eşit olmuyor hani. Koyulmaması lazım o zaman.

[...]

Ataberk: Orada 7 artı 3 dedi ya o da eskiden 7'ydi ya. O da eskiden 7'ydi. (sol taraf sağ taraf gibi düşünüyor)

Araştırmacı: Hmmm anladım şimdi tamamdır. Sonra şu kısmı pardon bu diğer sorunun kısmıymış. Sağdaki teraziden 3 bilye alırsak eşitlenir demişsin galiba. Ya da soldakine verirse demişsin.

Ataberk: 3 bilye alırsak soldakine verirse eşitlenir.

Araştırmacı: Heee sağdaki teraziden 3 bilye alıp soldakine verirse.... Burada sağ sol karışmış mı? Kimden aldın kime verdin?

Ataberk: (düşündü)

Araştırmacı: İstersen şekli açayım ben sana. Şekil üzerinden gör. İstersen sen bana şekil üzerinden göster. Kimden aldın kime verdin mesela. Şu soruda. Ay pardon şu soruda. (Araştırmacı bu arada ekranda soruyu yuvarlak içine alıyor)

Araştırmacı: Kimden 3 tane bilyeyi aldın? Hangisinden? Hangisine 3 tane bilyeyi verdin?

Ataberk: Burada hiçbirine vermemem lazım aslında da. Direkt onu almak gerekiyor ama almak da yasak olunca sağ kefeye...

Araştırmacı: Aynen öyle. Sağ kefeye mi üç eklese diyorsun?

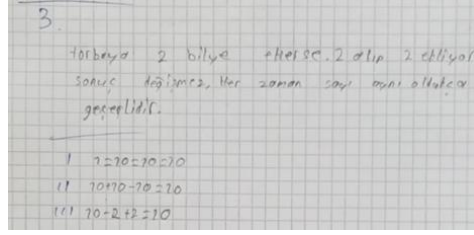
Ataberk: Ama sonra o 3'ü almamak gerekiyor o zaman.

Araştırmacı: Dimi. O zaman bak dengesi gene bozuluyor. Annesi o 3 taneye karışma diyor. Ben onları ekledim. Sen onlara müdahale etme sen diğerlerine bak diyor.

Ataberk: Orada soruyu okumamışım.

Terazi modeli ile ilişkili olup sayısal, sözel, farklı temsil geçişleri ile doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlamayı gerektiren Etkinlik.2 soru.3'te Ataberk'in terazinin sol tarafında duran torbadan alınan 2 bilyeden sonra terazinin dengesini yerine getirmek için bireysel uygulamada verdiği cevabı gösteren Görsel 3.75'te görüldüğü gibi çıkarılan 2 bilyeyi geri koyduğu görülmüştür. Ancak grup görüşmeleri sırasında öğretmen rehberliği ile beraber soru metninde yer alan 'III. aşama: Annesi Toprak'ın sol kefeye müdahale etmesine izin vermediğine göre Toprak ne yaparsa terazi yine dengelenir? Neden?' sorusuna dikkat etmediği farkedilmiştir. Sol taraftan azalan 2 bilyeden sonra sol kefedeki 8 bilye kaldığını, bu nedenle sağ kefedeki 8 bilye kalması için sağ kefedeki 2 bilye çıkarılması gerektiğini fark etmiştir. Ataberk'in 10 bilyeden 2 bilyeyi çıkarıp 8 bilye bulması ve sonuçları eşit yapmak için sağ kefedeki 2 bilye

çıkarılması gerekliliğini ifade etmesi sonuçlara odaklanarak eşitliği sağladığını göstermiştir. Ataberk'in temel ilişkisel yorumlamayı kullandığı ele alınmıştır.



Görsel 3. 75. Ataberk'in Etkinlik-2 soru-3'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Tamamdır. Sonra birinci aşamayı söylemiş. 2. Aşamayı söylemiş. 3. Aşamada demiş ki bak demiş benim torbama müdahale edemezsin demiş. Ben torbadan 2 tane aldım ya demiş. Benim torbama müdahale etme ama demiş. Sen yine dengeyi sağla demiş. Nasıl dengeyi sağlarsın demiş. Sen ne diyorsun Ataberk? Seninle başlayalım.

Ataberk: Torbaya koyamıyoruz değil mi?

Araştırmacı: Torbaya karışamıyorsun. Annesi oradan 2 tanesini aldı. Torbayı güzelce kapattı. Benim torbama karışma dedi ama sen yine de şu yamuk yumuk duran teraziyi bir düzelt bakalım nasıl dengeye gelecek bakalım dedi.

Ataberk: O 8 ise diğerini de 8 yapacağız. O 10 ise. 10'u 8'e düşürmek için 2 tane yapacağız. O 10 tane bilyeden 2 tane alacağız yani.

Sözel olarak verilen denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirlemeyi gerektiren Etkinlik.2 soru.4'te eşit işaretine ilişkin sözel ifadelerin doğruluğuna karar vermesi beklenen Ataberk'in sözel ifadeleri anlamlı yorumlayamadığı görülmüştür. Örneğin sol kefeye 3 bilye eklenip sağ kefedden 3 bilye çıkarıldığında; sol kefedden 2 bilye çıkarılıp sağ kefeye 2 bilye eklendiğinde terazinin ne olacağını yorumlaması beklendiğinde grup görüşmesi dökümünden verilen alıntıda görüldüğü gibi Ataberk'in bu sözel ifadeye verdiği örnek durum eşitliğin iki tarafından da aynı sayının çıkarılması durumunu temsil ettiğinden verilen sözel ifadeyi anlamlı yorumlayamadığı değerlendirilmiştir.

Ataberk: İkinciye mi?

Araştırmacı: Hı hı (benim okuduğumu dinlememiş kendi bir daha okuyor) sola 3 ekledim sağdan 3 çıkardım. Sola 2 ekledim sağdan da 2 çıkardım. Acaba yine dengede kalır mı?

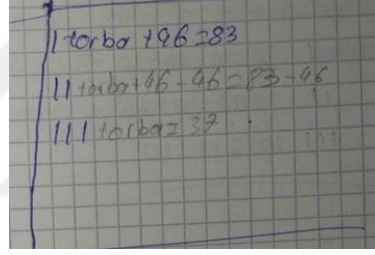
Ataberk: Yine dengede.... Aaa ne demişim ben (bu sırada defterine bakıyor) dengede kalır.

Araştırmacı: Neden?

Ataberk: Mesela 5 artı 3, 3'ü çıkar mesela 5 artı 3'ünü çıkar 5 oluyor. Diğeri de 4 artı 4. 4'ün 3'ünü çıkar. 7 oluyor. (aslında yanlış işlem yaptı)

Araştırmacı: Aynen. Bu verdiğin örnekte olmadı sanki.

Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulamayı gerektiren cebirsel temsil, terazi modeli, sözel temsil ile ilişkili Etkinlik.2 Alıştırma.1 soru.1’de ‘torba+46=83’ şeklinde verilen ifadede bilinmeyen sayıyı temsil eden torbayı bulurken Ataberk’in Görsel 3.76’da görüldüğü gibi eşitliğin iki tarafından da 46 sayısını çıkardığı görüldüğünde, grup görüşmesinde yaptığı bu işlemin nedeni sorulduğunda ‘Baştakinde eksi 46 diğerinde de eksi 46’yı yazmadım cevapları eşit oldu. İkisi de şu anda eşit ya şeylerin ikisinden de aynı sayıyı çıkartırsam cevap yine eşit oluyor’ şeklinde cevap vererek cevapların yani sonuçların eşitliğine vurgu yaparken aynı zamanda her iki taraftan aynı sayının çıkarılması durumuna vurgu yapmış olması ilişkisel yorumlayan ifadelerle eşit işaretini desteklediği yönünde yorumlanmıştır.



1. torba + 46 = 83
11. torba + 46 - 46 = 83 - 46
111. torba = 37

Görsel 3. 76. Ataberk’in Etkinlik.2 Alıştırma.1 soru.1’e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Mesela Ataberk, sen anlatırken şöyle anlatıyorsun ya diyorsun ya torbaya 46 eklendikten sonra 83 olmuş diyorsun. O yüzden diyorsun 83’ten küçük bir sayı olmalı. O yüzden o 83’ten eklediğimiz sayıyı çıkaracağız diyorsun. Ben de tamam diyorum ya 83’ten 46’yı neden çıkardığını anladım. Ama 83’ten 46’yı çıkarıyorsun. Şöyle tahtada göstereyim 83’ten 46’yı çıkarıyorsun ama bir de 46’dan da 46’yı çıkarıyorsun o kısmı merak ediyorum. Orayı neden çıkartıyorsun?

Ataberk: Hıh hocam çünkü torbayla 46, 83 oluyor.

Araştırmacı: Tamam.

Ataberk: Eğer şöyle yapsaydım 83 eksi 46 yazmasaydım torba artı 46 yazsaydım öyle oluyordu.

Araştırmacı: Tamam.

Ataberk: Baştakinde eksi 46 diğerinde de eksi 46’yı yazmadım cevapları eşit oldu. İkisi de şu anda eşit ya şeylerin ikisinden de aynı sayıyı çıkartırsam cevap yine eşit oluyor.

Cebirsel temsil, terazi modeli, sözel temsil ile ilişkili doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında bu adımları farklı durumlarda uygulamayı gerektiren ‘Torba.4=40’ ifadesi grup görüşmesi sırasında tahtaya yazılıp bilinmeyeni hesaplarken eşit işaretinin iki tarafına da aynı işlem yapılması durumunda eşitliğin bozulmayacağı bilgisini kullanarak yapılacak işleme ve hangi sayıyla işlem yapılacağına karar verilmesi için tahtada ilave alıştırmalar yapılırken Ataberk’in torbayı 10 bulduğunu ve bulduğu değerin doğruluğunu açıklamak için ‘10’u 4 ile çarpmış, 40’ diyerek eşit işaretinin kesin işlemsel yorumlanmasını kullandığı görülmüştür.

Araştırmacı: Neden böldün sen de?

Ataberk: İını şey... (gülümsüyor) toplamayı... hani birşeyi topladığımız zaman eski halini bulmak için çıkartıyoruz. Çıkartmayı da eski halini bulmak için topluyoruz. (Bu sırada Nazlı parmak kaldırıyor sanırım o da buldu) diğerleri de büyük ihtimal öyledir yani. Şey yani öğrenmiştik.

Araştırmacı: Peki çarpmada da eski halini bulmak için bölmemiz mi gerekiyor?

Ataberk: Şu ana göre...

Araştırmacı: Öyle gibi mi görünüyor? Kesin mi yoksa?

Ataberk: Hocam burada torbanın sayısı 10. 10’u 4 ile çarpmış. 40.

Cebirsel temsil, terazi modeli, sözel temsil ile ilişkili doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında bu adımları farklı durumlarda uygulamayı gerektiren soruda Ataberk’in ‘Torba+3=17’ şeklinde verilen cebirsel ifadeyi ve bu ifadeden yararlanarak bilinmeyeni hesaplamak için yaptığı adımları grup görüşmesinde sözel olarak doğru bir şekilde ifade edebildiği görülmüştür. Aynı zamanda eşitliğin iki tarafından da aynı sayının çıkarılması durumunda eşitliğin bozulmayacağını da farkında olduğu görülmüştür.

Ataberk: Öbür kefedede 3 tane bilye bir de torba varmış. Torbayla 3 bilye 17’ye eşitmiş. O torbanın yanındaki 3 bilyeyi çıkartırsak torba... torbanın eski halini buluruz yani o yüzden 17’den 3 çıkaracağız. 14 oluyor. Torbayı da öyle buldum işte. Hani torba artı 3 orada yazmışlar ya onu o yüzden yazdım.

Araştırmacı: Bir de Ataberk şey diyecektim sen burada hem sol taraftan hem sağ taraftan 3 çıkardım diye göstermişsin. Neden öyle yaptın? Neden 3 çıkardın ikisinden de?

Ataberk: Torba artı 3 eşittir 17. 17’den 3 çıkarınca 14 oluyor. 17’den 14 çıkarınca 3. Yani 16,15,14. (geriye sayarak 3 kaldığını göstermeye çalışıyor)

Araştırmacı: Hmmm. Şurada ikisinden de 3 çıkarmanın sebebi neydi peki. Hem eşitliğin sol tarafından hem de sağ tarafından 3 çıkarmanın sebebi neydi peki?

Ataberk: Torbaya 3 ekleyince 17 oluyor. İkisinden de silersek eksi 3'leri silersek ikisinden de eşittir 17. Şu anda tamam.

Araştırmacı: hmmm

Ataberk: Aynı sayıdan aynı sayıyı çıkarırsak sonuç değişmiyor ya.

3.1.3.3.2. Ataberk'in matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları

Bu bölümde Ataberk'in 3. Adım: Etkinlik-2 ve ilişkili alıştırmalarına yönelik bulguları, Etkinlik-2 ve ilişkili alıştırmalarda yer alan soruların analizi sonucu elde edilen temalar başlıkları altında sunulmuştur.

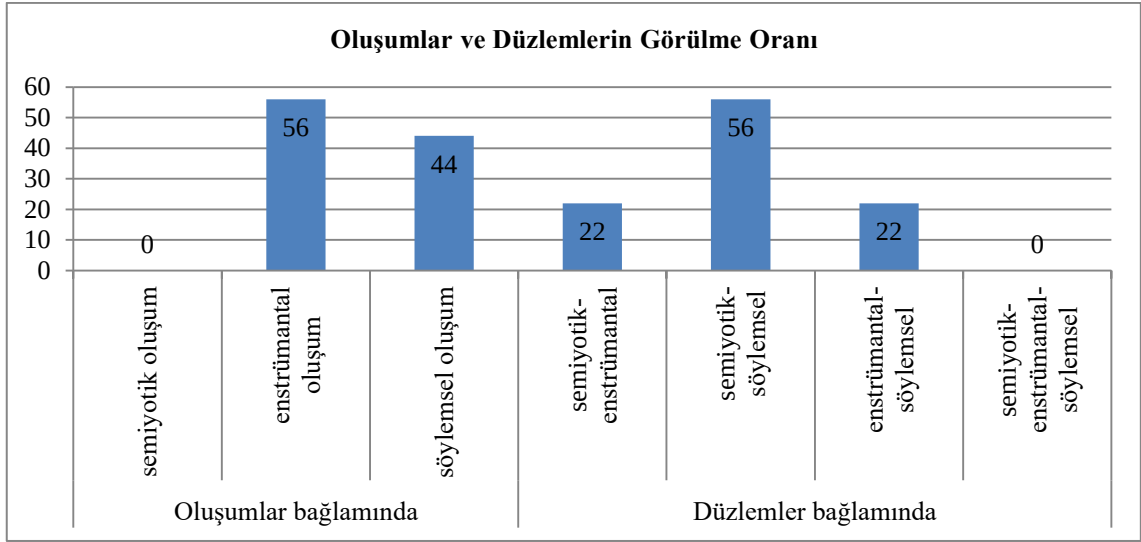
Eşitliği Bozmayan İşlemleri Belirlemeye Yönelik Bulgular:

Ataberk'in 3. Adım: Etkinlik.2. ve ilişkili alıştırmalar süreci oluşumlar ve oluşumların ikiyeşerli kombinasyonu bağlamında incelendiğinde Tablo 3.23 ve Grafik 3.27 elde edilmiştir. 3. adım sürecinde Ataberk'in çalışmalarında oluşumların bileşenlerine ilişkin göstergelerin görülme oranları sırasıyla enstrümantal oluşumun %56 oranında, söylemsel oluşumun %44 oranındadır. Ataberk'in matematiksel çalışmalarının düzlemlerde yer alma oranları sırasıyla semiyotik-söylemsel düzlemde %56 oranında, semiyotik-enstrümantal ve enstrümantal-söylemsel düzlemde düzlemde %22 oranındadır.

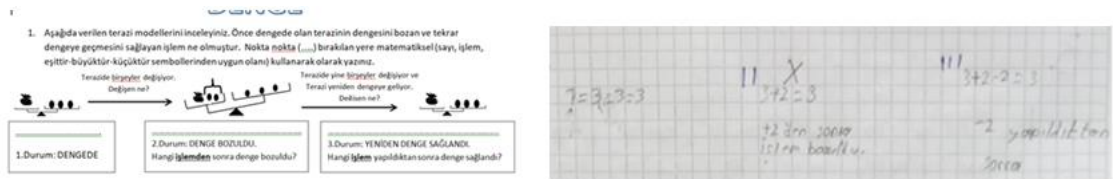
Tablo 3. 23. Ataberk'in 3. Adımda oluşumlar ve düzlemlerinin sorulara göre görülme durumu

Eşit İşaretinin Yorumlanmasında Oluşumlar ve Düzlemler		E.2.S.1.	E.2.S.1.A.	E.2.S.2.	E.2.S.3.	E.2.A.1.S.1.	E.2.A.1.S.2.	E.2.A.2.S.1.
Oluşumlar bağlamında	Semiyotik oluşum							
	Enstrümantal oluşum	1	1		1	2		
	Söylemsel oluşum				1	1	1	1
	Semiyotik-enstrümantal				4			
Düzlemler bağlamında	Semiyotik-söylemsel				3	3	2	2
	Enstrümantal-söylemsel	1	2		1			
	Semiyotik-enstrümantal-söylemsel							
	Söylemsel							

Grafik 3. 27. Ataberk'in 3. Adımda oluşumlar ve düzlemlerinin görülme oranları



Terazi modeli, sayısal, sözel, farklı temsil geçişleri ile ilişkilendirilen doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulamayı gerektiren Etkinlik-2 soru-1’de Ataberk’in terazi modelinde 1. durumda dengede verilen torba ve 3 bilye modelini bireysel uygulamada Görsel 3.77’de görüldüğü gibi ‘ $1=3=3=3$ ’ şeklinde ifade ettiği görülmüştür. Dengede duran terazi ile eşittir modeli arasında anlamlı ilişki kurabildiği ve teraziye matematiksel ifadeyi yazabilmek için bir enstrüman olarak kullanabildiği şeklinde yorumlanmıştır. Bilinmeyeni temsilen kullanılan torbaya matematiksel temsilde yer vermediği, torba yerine bir torbayı temsilen ‘1’ sayısını kullandığı görülmüştür. 2. durumda dengede olmayan terazi modelini eşit işaretinin üstüne çarpı işareti koyarak ‘eşit değil’ anlamı vermeye çalıştığı görülmüştür. Grup görüşmesinde soru kökünde geçen ‘...büyüktür-küçüktür sembollerinden uygun olanı’ ifadesini fark etmediğini söylemiştir. 3. adımda da dengede duran terazi modelini eşit işareti ile anlamlı bir şekilde ilişkilendirebildiğinden **enstrümantal oluşumun** bileşenlerinin bir göstergesi olarak değerlendirilmiştir.



Görsel 3. 77. Ataberk'in Etkinlik-2 soru-1'e ilişkin cevabı

Cebirsel temsil, terazi modeli, sözel temsil ilişkilendirilerek doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında bu adımları farklı durumlarda uygulamayı gerektiren Etkinlik.2 Alıştırma.1 soru.1’de Ataberk’in Görsel 3.78’de görüldüğü gibi ‘torba+99=128 veya 84=torba-13’ gibi verilen sorularda bilinmeyeni hesaplariken yaptığı adımların doğru olduğu görülürken grup görüşmesi sırasında yaptığı adımları açıklaması, gerekçelendirmesi istendiğinde doğrulayıcı ifadeler kullanmaktansa verilen örnekteki adımları referans olarak gösterdiği görülmüştür. Doğrulayıcı ifadesi benzer örnek durumlardan yola çıkarak kendi problem durumuna aktarmak şeklinde olduğundan **söylemsel oluşumun** bileşenlerinin bir göstergesi olarak yorumlanmıştır.

Görsel 3. 78. Ataberk’in Etkinlik.2 Alıştırma.1 soru.1’e ilişkin cevabı

Ataberk: Hocam örnekte de öyle yapmış. Aynı sayıyı yapmış. Bir de orada 99 yazıyor ya benim aklıma ilk o sayı geliyor. Başka bir sayıyı düşünmek yerine oradaki sayıları kullanmak daha mantıklı.

[...]

Araştırmacı: Tamam. Ataberk sen nasıl düşünüyorsun? (84=torba-13 sorusu için)

Ataberk: Hocam ben ilk baktığımda zaten nasıl diyeyim pek anlayamadığım için direk örneğe baktım. Örnekte artı dediği için eksi yapsam yanlış olur mu diye kararsız kaldım.

Etkinlik.2 Alıştırma.1 soru.1’de Ataberk’in grup görüşmesinde ‘torba+21=75’ şeklinde verilen ifadede bilinmeyeni temsil eden torbayı hesaplariken yaptığı adımları eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlama özelliğini kullanarak gerekçelendirebilmesinden dolayı çalışmasının **semiyotik-söylemsel** düzlemde olduğu düşünülmüştür. Birbirine eşit olan ‘torba+21’ ve ‘75’ ifadelerinin ikisinden de aynı sayıyı çıkardığımızda yine eşitliğin bozulmayacağını bildiğinden ve soruda 21 eklendikten sonra 75’e eşit olduğu için eklenmeden önceki halini bulmak adına eklenen

sayının çıkarılması gerekliliği bilgisini kullanabildiği grup görüşme dökümünden verilen alıntıda görülmüştür.

Araştırmacı: Bir de şunu anlatıver sen bana Ataberk. Kalemle göstereyim sana daha iyi anlaşılır. Şu 21’li olanı.

Ataberk: Yine torba tek başına 75 etmiyormuş. Torbaya 21 ekleyince 75 ediyormuş. Yani torbayı bulmak için 21’i çıkaracağız. Diğerini anlatayım bir de. Torba artı 21 eşittir 75. İkisinde de şu anda eksileri yapmazsak cevap eşit oluyor. Diğeriyile aynı aslında gene.

Araştırmacı: Tamam. Olsun sen yine de söyle.

Ataberk: Eksi 21’leri kapattığımda aynı oluyor. İkisinden 75 eksi.. yani iki sayı da aynı. İkisinden de aynı sayıyı çıkartırsam sonuç değişmez.

Sözel olarak verilen ifadeyi yorumlayarak denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirlemeyi gerektiren soruda Ataberk’in, ifadelerin doğruluğuna karar verirken açıklayıcı, doğrulayıcı, verdiği cevabı gerekçelendiren ifadeler kullanmadığı grup görüşmesinde görüldüğünden çalışmasının **semiyotik-enstrümantal** düzlemde olduğu kabul edilmiştir.

Araştırmacı: Bakalım bakalım ikincisine. Hee sen yanlış demişsin. O zaman sen pek terazi gibi düşünmemişsin diye düşündüm ben Ataberk. Acaba terazi gibi düşünmedin mi. Gene bir terazi gibi düşünüyorum. Onların anlattıklarını anlamaya çalışıyorum. İkinci durumda demiş ki bir terazi düşün demiş dengede. Tamam diyorsun dengede. Buraya 2 tane eklersen buraya da 2 tane ekleyeceğim diyor. Denge bozulur mu diyor? Buraya 2 tane eklersem buraya da 2 tane ekleyeceğim diyor denge bozulur mu diyor? Sence denge bozulur mu?

Ataberk: Bozulmaz. (sessiz ve kendinden emin olmayan bir şekilde söyledi)

Araştırmacı: Bozulmaz. Peki vazgeçtim eklemeyeceğim. Buradan 3 tane çıkarırsam buradan da 3 tane çıkaracağım. Denge bozulur mu?

Ataberk: Bozulmaz. (gene aynı şekilde)

3.1.3.4.Dördüncü adım: son değerlendirme

Bu bölümde Ataberk’in 4. Adım: Son değerlendirmeye yönelik bulguları kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları ve matematiksel çalışma uzayı ile bulguları başlıkları altında sunulmuştur.

3.1.3.4.1. Ataberk’in kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları

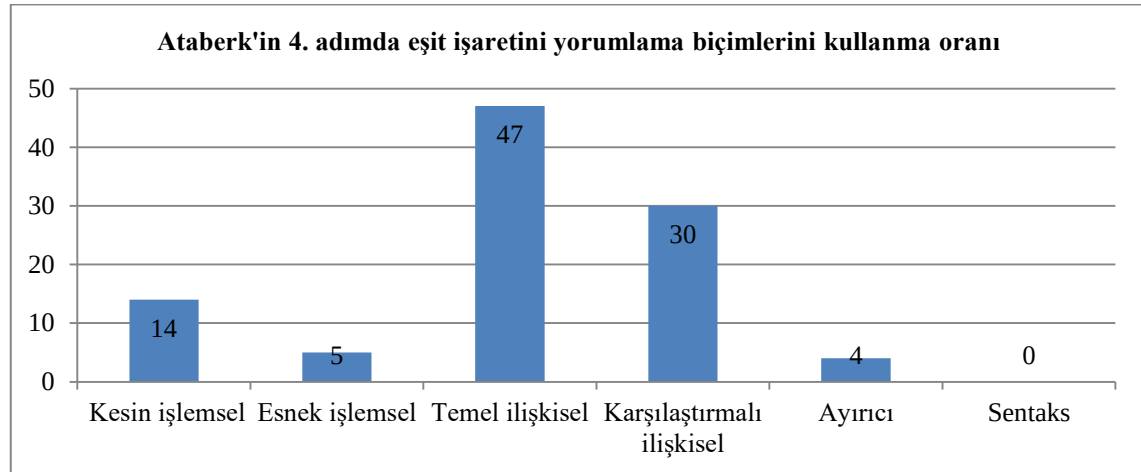
Ataberk’in 4. Adım: son değerlendirme sürecinde eşit işaretini yorumladığı durumlar incelendiğinde düzeylere bağlı farklı yorumlama biçimlerini kullanma

oranlarına dair Tablo 3.24 ve Grafik 3.28 elde edilir. 4. adımda eşit işaretini temel ilişkisel yorumlama oranı % 47, karşılaştırmalı ilişkisel yorumlama oranı %30, kesin işlemsel yorumlama oranı %14, esnek işlemsel yorumlama oranı %5 ve ayırıcı yorumlama oranının %4 olduğu görülmüştür.

Tablo 3. 24. Ataberk'in son değerlendirmede eşit işaretini yorumlama biçimlerinin sorulara dağılımı

Eşit İşaretini Yorumlama Biçimleri	S.D.S.1.	S.D.S.2.	S.D.S.3.	S.D.S.4.	S.D.S.5.	S.D.S.6.	S.D.S.7.	S.D.S.8.	S.D.S.9.	S.D.S.10.	S.D.S.11.	S.D.S.12.
Kesin işlemsel			7				7				6	
Esnek işlemsel					6	1						
Temel ilişkisel	1	18	6		9	5	4	4	14	2	3	
Karşılaştırmalı ilişkisel	1	7	10		2	7	10	1	4		1	
Ayırıcı	5											
Sentaks												

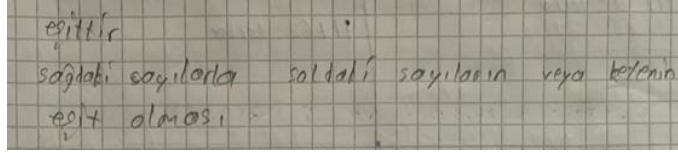
Grafik 3. 28. Ataberk'in 4. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimlerinin oranları



Eşit '=' işaretini anlamlandırmaya yönelik bulgular (1.,2.,3.,5. ve 11. sorular):

'a+b=c' şeklindeki standart bir ifadede işareti anlamlandırmayı gerektiren soru.1'de bireysel uygulamada Görsel 3.79'da verildiği gibi '7+3=10' ifadesinde eşit

işaretinin ne anlama geldiği sorulduğunda eşit işaretinin solunda '7+3' sağında da '10' olduğunu ifade ederek ya da 'tabi sağ sol ayırdığımız için' gibi ifadeler kullanarak eşit işaretinin ayırıcı özelliğine vurgu yaptığı görülmüştür. Aynı zamanda 'kefe' terimine yer vermiş olmasından dolayı eşit işaretinin olduğu bir durumda terazi ile ilişki kurabildiği düşünülmüştür.



Görsel 3. 79. Ataberk'in son değerlendirme soru-1'e ilişkin cevabı

Ataberk: Hocam solda mesela 7 artı 3 diyor ya soldaki ve sağdaki 7 artı 3, 10 ediyor. Ondan.

Araştırmacı: Peki orada kefe de söylemişsin aslında burada kefe yok. Neden kefe dedin.

Ataberk: Örnek olarak yani. Hani yapıyoruz ya biz. Sağ kefe, sol kefe. Tabi sağ sol ayırdığımız için.

Araştırmacı: Burada hangisi sağ kefe hangisi sol kefe mesela?

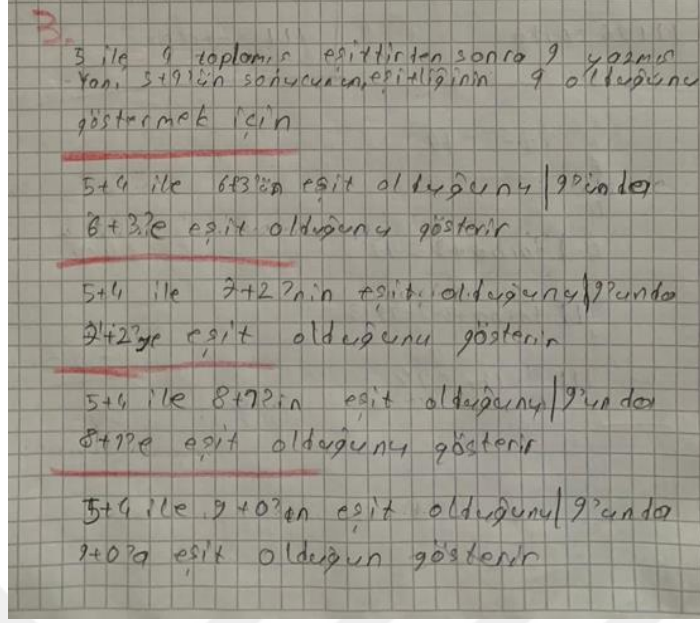
Ataberk: Sağdaki o 10. Soldaki o 7 artı 3.

Araştırmacı: Hmmm peki mesela o kefe dediğine göre aklına herhalde terazi geldi diye düşünüyorum. (Ataberk evet anlamında kafa hareketi yapıyor) Terazide mesela şu anda terazi nasıl duruyor. Duruşu nasıl pozisyonu?

Ataberk: İkisi de aynı şeyde. (ellerini aynı hizada gösteriyor)



Eşdeğer denklemlerde işareti anlamlandırmayı gerektiren soru.3'te Ataberk'in '5+4=6+3=9; 5+4=7+2=9; 5+4=8+1=9; 5+4=9+0=9' ifadelerinde eşit işaretinin ne anlama geldiği sorulduğunda 5+4 ile 6+3'ün birbirine eşit olduğunu ifade etmiş olması, bireysel görüşmede terazi modelinde 5+4'ü bir kefedeki 9'u diğer kefedeki dengede yorumlamasıyla temel ilişkisel yorumladığı görülürken aynı zamanda Görsel 3.80'de görüldüğü gibi 9'un da 6+3'e eşit olduğunu ifade etmesi eşit işaretinin kesin işlemsel yorumlamasını kullandığını gösterdiği yönünde kabul edilmiştir.

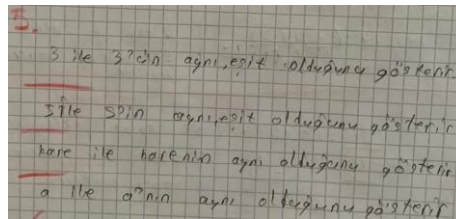


Görsel 3. 80. Ataberk'in son değerlendirme soru-3'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Bir de şey demişsin ya, sonucu göstermek için demişsin ya burada sonucu göstermek için mi kullanmış peki. Hem eşitliği demişsin. Hem de sonucu göstermek demişsin.

Ataberk: Hem terazi olarak düşündüğümde terazi olarak kullandım. 5 bir torba var. Bir yanda 4 tane var. Diğer kerede direk 4 tane var. (yanlışlıkla 4 dedi aslında 9 diyecekti) 9 tane var. Hani ikisi eşit. Şey olarak düşünersek de 5 artı 4 sonucu, eşittir sonucu. İkisi de olabiliyor.

İşareti anlamlandırmayı gerektiren soru.5'te $a=a$ durumu sayı, şekil, cebirsel gibi farklı temsilleri kullanarak verildiğinde eşit işaretinin kullanım amacı, anlamını sorgulaması istendiğinde Ataberk'in bireysel uygulamada verdiği cevap olan Görsel 3.81'de görüldüğü gibi eşit kavramının yerine 'aynı' kavramını kullandığı; bireysel görüşmede 'kare=kare' şeklinde verilen ifadede sayısal bir çokluk olarak eşitliği değil biçim, özellik olarak aynılığın anlatılmak istendiğini düşündüğü görülmüştür.



Görsel 3. 81. Ataberk'in son değerlendirme soru-5'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Neden öyle yaptın neden ikisinin arasında fark var? Karelerde mesela eşit dememişsin. Aynı demişsin sadece.

Ataberk: Karede hani şey yok. Sayı değeri veya basamak değeri veya.. onlar yok. Matematiksel pek değil. Yani matematiksel herşey... şekiller matematiksel de. Basamak değeri falan yok.

Araştırmacı: Peki o kareler (Ataberk lafa girdi)

Ataberk: Bunda şey eşit mesela... kare demedik mi.(defterine yazdığına bakıyor) Evet karede mesela karede şey eşit. Şeyleri falan çizgileri.

Araştırmacı: Kenarları mı?

Ataberk: Hı hı aynı. Yani eşitle aynı. Şey olmuyor. Fark etmiyor. Aynıyla eşit çünkü ikisi de aynı.

[...]



Ataberk: Kare bir sayı değil. Hani 3 olduğunu bilmiyoruz.

Araştırmacı: O zaman kare yazdıysam karşısına da mutlaka kare mi yazmalıyım.

Ataberk: veya şey olabilir. 3 var ya 3 tane bilye mesela o karenin içinde de 3 tane olabilir mesela.

Ataberk'in yine soru.5'te 'kare=kare' şeklinde verilen ifadedeki kareleri yorumlamakta zorlandığı görüldüğü için bireysel görüşmede bir hikâye gibi anlatması istendiğinde kare ile temsil edilenin bir nicelik-sayı olduğunu farkedemediği görülmüştür. Bu nedenle eşit işaretini aynı nesneleri anlatan bir sembol olarak yorumladığından cebirsel verilen durumu sözel olarak da uygun şekilde ifade edemediği görülmüştür.

Araştırmacı: peki kare kareyle eşit diyoruz ya nesi eşit. Ne demek istiyor yani. Bunu bir hikâye gibi anlatsan nasıl anlatırsın. Kare eşit kare.

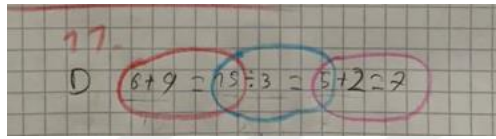
Ataberk: Mesela markete gitsem bir tane kutu alsam, o kutu karşılığında para vermesem. Mesela eski bir tane daha kutumu versem... eski değil de...

Araştırmacı: Nesini versem dedin. Tam orası anlaşılmadı.

Ataberk: Bir tane kutu alacağım o kutunun yerine para vermiyorum. Başka bir tane daha kutu veriyorum. İkisi de aynı sonuçta.

Hatalı eşdeğer denklemi farkedip işareti anlamlandırmayı gerektiren soru.11'de Ataberk'in bireysel uygulamada verdiği cevap olan Görsel 3.82'de '6+9=15:3=5+2=7' ifadesinde eşit işaretini kesin işlemsel yorumlayarak 6+9=15, 15:3=5, 5+2=7 olacak

şekilde parçaladığı görülmüştür. Aslında öğretmen ile yapılan bireysel görüşmeler sırasında $6+9=15$ ve $15:3=5$ şeklinde yazıldığında 15'in iki kez yazılması gerektiğinin ama yukarıdaki ifadede iki kez yazılmadığının farkında olduğu görülmüş; temel ilişkisel yorumlamayı kullanarak $15:3$ işleminin 5 sonucunu vermesine rağmen $6+9$ işleminin sonucunun 5 olmadığını da söylediği görülmüştür. Kısmen kararsız kalsa da Ataberk bu ifadenin doğru olması için kesin işlemsel yorumlamanın kullanılması gerektiğini düşünmüştür.



Görsel 3. 82. Ataberk'in son değerlendirme soru-11'e ilişkin cevabı

Ataberk: Ben hala biraz emin değilim ama.

Araştırmacı: Neden? Ne kafanı karıştırıyor? 6 artı 3 eşittir (burada duraksayarak okuyor) 15 eksi üç. 15 eksi 3, 5.

Araştırmacı: Bölü (bölü diyeceğine eksi dediği için uyarıyor)

Ataberk: Hee evet. 15 bölü 3 beş oluyor. 6 artı 9 beş olmuyor ki.

Araştırmacı: evet. Ben de onu soracaktım açıkçası. Sen benden önce sordun. Eee nasıl yapacağız o zaman. Yani doğru mu yanlış mı? Gerçekten senin dediğin gibi. Benim de ilk aklıma o geliyor. Yani diyorum ki 6 artı 9, 15 evet. 15'i 3'e bölssek 5.

Ataberk: Şu yaptığım hani daire içine aldığım da mesela 15'i iki kere kullanmış. Bir kırmızıda bir de mavide.

Araştırmacı: Evet.

Ataberk: Bir de 5'te de bir mavide kullanmış bir de pembede kullanmış. Bir sayıyı iki kere kullanmış. Diğerinde bir sayıyı bir kere kullanmış.

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik bulgular (4., 6., 7. ve 8. sorular):

Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında bu adımları farklı durumlarda uygulamayı gerektiren soru.4'te Ataberk'in $297+66$ toplama işlemini yaparken 297'ye 66'dan çıkardığı 3'ü eklediği böylece 300 ile 63'ü kolay toplayabildiği aslında karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanabildiği görülmüştür (Görsel 3.83). Öğretmenin bireysel görüşmede eklenen sayı ile çıkarılan sayının farklı olması durumunda sürecin nasıl etkileneceğini açıklamasını istediğinde Ataberk'in işlem yapıp

sonuç bulmaya çalışmasında ise temel ilişkisel yorumlamayı kullanarak sonuç bulup sonucun aynı çıkmayacağını göstermeye çalıştığı görülmüştür.

$$\begin{array}{l} 292+3+66-3=300+63=363 \\ 125-1+99+7=100+124=224 \\ 49+7+28-1=50+27=77 \\ 32+3+65-3=40+62=102 \end{array}$$

Görsel 3. 83. Ataberk'in son değerlendirme soru-4'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Tamamdır. Sonra Toprak'ın kullandığı ayyy şey Toprak'ın yaptığı sorulara benzer sorular sormuşlardı. 297'li falan diye başlayan. Orada sen de Toprak'ın kullandığı yönteme benzeyen yöntem kullan demişlerdi. Mesela 297 artı 66. Mesela bu soruda nasıl bir taktik kullandın. Ne yaptın nasıl buldun?

Ataberk: 297'yi hani normal 297'yi 300'e yuvarladım. 300'e yuvarlamak için 3 tane gerekiyor. 66'dan 3 tane aldım. 66, 63 oldu. 297, 300 oldu. Toplayınca yine 363 çıkıyor.

Araştırmacı: Mesela birinden 3 tane aldın. Birine 3 tane verdin yine. Farklı farklı sayıları alıp verseydik olacak mıydı?

Ataberk: Farklı farklı, hayır ben yuvarladım. Ondan.

Araştırmacı: Şöyle farklı farklı. Yanlış söyledim belki de. Birinden 3 taneyi alıp ötekisine bir tanesini verseydik.

Ataberk: 298... (Hemen işlem yapmaya çalışıyor) bir tanesi... iki tanesi.. bir tanesi yine kalıyor değil mi?

Araştırmacı: Şöyle 3 tanesini alacağım. Ötekine 1 tane vereceğim sadece.

Ataberk: Sadece 1 tane? İkiisi gidiyor?

Araştırmacı: Aynen

Ataberk: Toplam 363 sayı var. İkiisi direk işlemden gidince 363'ten 2 tane azalacak.

Denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirlemeyi gerektiren soru.6'da '4=4' şeklinde verilen aritmetik bir ifadeyi bireysel görüşme sırasında sözel olarak açıklarken bir hikâyeden yararlanması istendiğinde Ataberk'in terazi modelinden yararlanarak aynı ağırlıkta iki meyveyi terazinin kefelerinde bir bağlam içinde verdiği görülmüştür. Aynı zamanda Görsel 3.84'e görüldüğü gibi eşit işaretinin iki tarafındaki işlemlerin sonuçlarını hesapladıktan sonra sonuçların eşitliğine bakarak ifadenin doğruluğuna karar verdiği için temel ilişkisel yorumlamayı kullandığı görülmüştür.

6. Aynı değeri gösterir

D 4 ile 4 aynı, eşit

D $4+0=4$ | $4+0=4$ ikisinin de sonucu eşit

D $4+5=9$ | $4+5=9$ ikisinin de sonucu aynı, eşit (9)

D $4-7=3$ | $4-7=3$ ikisinin de sonucu aynı, eşit (3)

Görsel 3. 84. Ataberk'in son değerlendirme soru-6'ya ilişkin cevabı

Araştırmacı: Bunu bir hikâye gibi anlatsan nasıl anlatırsın mesela? Dört eşittir dördü.

Ataberk: Terazile. Terazinin sağ kefesine 4 tane elma koydum sol kefesine de 4 tane portakal koydum. 4 elma 4 portakal aynı. Eşit tanesi. Eşit oluyor şeyleri. Böyle yani (eliyle aynı hızda olduklarını gösteriyor) terazi eşit gösteriyor.

Araştırmacı: Birisini elma birisini portakal seçebilir miyiz?

Ataberk: Mesela... ikisinin de ağırlığı aynı mesela. 1 portakal 1 kilo değil de mesela 1 kilo. Diyelim elma işte daha büyük o da bir buçuk kilo. Aynı olmaz. Ama ikisi de aynıysa olur.

Eşitliği sağlayan eksik değeri bulmaya yönelik bulgular (9., 10. ve 12. sorular):

Sözel temsilden cebirsel ya da sayısal geçişi kullanarak eksik değeri bulmayı gerektiren soru.12'de Ataberk'in kızlar ve erkeklerin bilye sayılarını eşit işaretinin solu ve sağına uygun şekilde yazarak '10'u 15 yapabilmek için 5 gerekli o da Çınar'ın bilyesi' şeklinde ifade ettiği görülmüştür (Görsel 3.85). Eşit işaretinin iki tarafındaki sayıların toplamının 15 olması gerektiğini ifade etmiş olması eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlanmasını kullandığını göstermiştir.

12

15	$\frac{K}{10}$	$\frac{E}{10}$	$\frac{K-E}{15-15}$
-10	+9	+5	
5	15	15	

Eşit

10'u 15 yapabilmek için 5 gerekli o da Çınarın bilyesi

Görsel 3. 85. Ataberk'in son değerlendirme soru-12'ye ilişkin cevabı

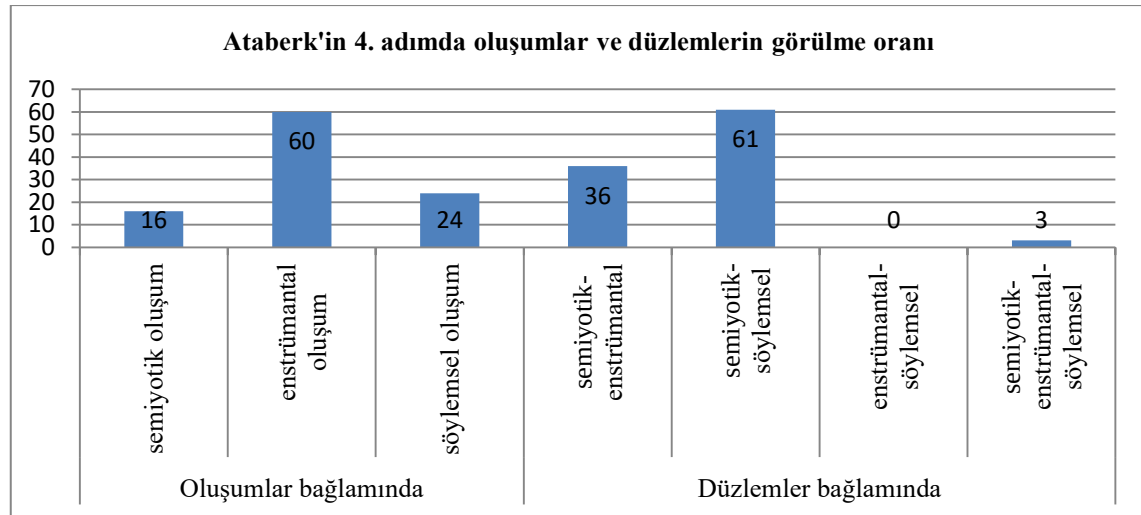
3.1.3.4.2. Ataberk'in matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları

Ataberk'in 4. Adım: son değerlendirme süreci oluşumlar ve oluşumların ikiyeşerli kombinasyonu bağlamında incelendiğinde Tablo 3.25 ve Grafik 3.29 elde edilmiştir. 4. adım sürecinde %59,4 oranında enstrümantal oluşumun, %24,3 oranında söylemsel oluşumun, %16,2 oranında semiyotik oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler görülmüştür. Ataberk'in matematiksel çalışmalarının %60,6 oranında semiyotik-söylemsel, %36,3 oranında semiyotik-enstrümantal, %3,03 oranında semiyotik-enstrümantal-söylemsel düzlemlerinin bir arada görüldüğü tamamlanmış bir çalışma olduğu görülmüştür.

Tablo 3. 25. Ataberk'in 4. Adımda eşit işaretinin yorumlanmasında oluşumlar ve düzlemlerin sorulara göre dağılımı

Eşit İşaretinin Yorumlanmasında Oluşumlar ve Düzlemler		S.D.S.1.	S.D.S.2.	S.D.S.3.	S.D.S.4.	S.D.S.5.	S.D.S.6.	S.D.S.7.	S.D.S.8.	S.D.S.9.	S.D.S.10.	S.D.S.11.	S.D.S.12.
Oluşumlar bağlamında	Semiyotik oluşum	2		2		1	1						
	Enstrümantal oluşum	1		3	1	1	2	2	5	1	5		1
	Söylemsel oluşum			2	1		1	1	3		1		
Düzlemler bağlamında	Semiyotik-enstrümantal			1						1	9		1
	Semiyotik-söylemsel			1	2			1	5	1	8		2
	Enstrümantal-söylemsel												
	Semiyotik-enstrümantal-söylemsel						1						

Grafik 3. 29. Ataberk'in 4. Adımda oluşumlar ve düzlemlerin görülme oranı



Eşit '=' işaretini anlamlandırmaya yönelik bulgular (1.,2.,3.,5. ve 11. sorular):

İşareti anlamlandırmayı destekleyen soru.1’de bireysel görüşmede ‘eşittir dendiğinde gözünde ne canlanıyor?’ sorusuna Ataberk’in verdiği cevaba bakıldığında ‘Mavi topla bir tane daha mavi top veya kırmızı topla kırmızı top. İkisi aynı. Renkleri aynı. Şekilleri aynı. İkisi de top. Aynı. Eşit’ şeklindeki ifadesinden eşit işaretini ‘aynı’ ifadesi ile eşanlamlı kullanıyor olduğunu; ‘eşitlik’ kavramının sayısal, nicelik olarak aynılık anlamına geldiğinin Ataberk tarafından tam olarak anlaşılmadığının göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Ataberk’in eşittir dendiğinde gözünde terazi, kefe, ağırlık gibi eşit işaretini destekleyen kavramları gözünde canlandırmasının **semiyotik oluşumun** bileşenlerinin göstergelerinin görüldüğü şekilde yorumlanmıştır.

Araştırmacı: Mesela örnek versene. Mesela ben eşittir dediğimde kafamda şu canlanıyor (bu sırada araştırmacı havaya doğru bakıyor gözünü kısıyor ki gözümde canlanan şeyi daha güzel resmedebilsin.) dediğin şeylere örnekler versene. Eşittir dediğinde.

Ataberk: Mavi topla bir tane daha mavi top veya kırmızı topla kırmızı top. İkisi aynı. Renkleri aynı. Şekilleri aynı. İkisi de top. Aynı. Eşit.

Araştırmacı: Hmmm mesela ben eşittir dediğimde kafanda şöyle toplar canlanıyor. İkisi de mavi olan, ikisi de top olan bir şey. Başka nasıl şeyler canlanıyor? Ne geliyor ya da kafandan. Ne geçiyor aklından (düşünmesi için biraz bekliyorum)

Ataberk: Bir de mesela a eşittir a. Hani a’yla a aynı. Alfabe de ikisi de birinci sırada. Mesela kareyle kare. Dikdörtgenle dikdörtgen. İkisinin de şekilleri aynı. Şeyleri aynı.

Araştırmacı: Bunları söylerken mesela şey diye mi canlandırıyorsun. Bir kare var bir de kare var. Böyle yan yana duruyorlar. Öyle mi canlandırıyorsun gözünde?

Ataberk: Kefe canlandırınca daha gerçekçi oluyor

Araştırmacı: Hmmm şeyleri de mi. A’ları da mı?

Ataberk: Ne a mı?

Araştırmacı: Hı hı. Hani demiştin ya. Mesela demiştin. A var, a var. İkisi de alfabenin ilk harfi ikisi de aynı harf falan filan dedin ya örnek verirken o a’ları da kefelede mi canlandırıyorsun gözünde canlandırırken.

Ataberk: yaaa aslında kefe şey olarak şey oluyor aslında ağırlık, kilo, ağırlık olarak o ya.

Ben a’yı şey olarak şey yaptım. Alfabe veya şey şekil olarak. Çünkü a’nın ağırlığı yok.

Araştırmacı: onları o zaman böyle iki tane a gibi mi düşünüyorsun kafanda.

Ataberk: hı hı (evet anlamında)

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik bulgular (4., 6., 7. ve 8. sorular):

Farklı tiplerde denklemlerin doğru ya da yanlış olduğunu belirlemeyi gerektiren soru.8’de Ataberk’in ‘ $27-48+48=27$ ve $(8+2)+(9-2)$ ’ ifadelerinde Görsel 3.86’da görüldüğü gibi semiyotik bir araç olan eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel

yorumlanması özelliğini kullanarak ifadenin doğruluğuna karar verme problemini çözebildiği görüldüğünden **enstrümantal oluşumun** bileşenlerinin göstergesi olarak ele alınmıştır. Aynı zamanda bireysel görüşmede eşit işaretinin temel ilişkisel ve karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanması özelliğini kullanarak doğrulama, gerekçelendirme yapabildiğinden çalışmasının **semiyotik-söylemsel** düzlemde olduğu değerlendirilmiştir.

Görsel 3. 86. Ataberk'in son değerlendirme soru-8'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Birinci soru şöyle: 27 eksi 48 artı 48 eşittir 27 demiş. Ben de senin cevabına bakıyorum sen ne demişsin diye. Biraz küçülteyim. Sen o soruda (defterinde yazdıklarına bakıyorum) heee şöyle yazmışsın. Senin defterin zaten yanında. Eksi 48, artı 48'in altına bir çizgi çizmişsin 27'ye katkısı sıfır demişsin. O yüzden 27 eşittir 27 demişsin. Ne demek istedin. Bir anlatır mısın?

Ataberk: Şey demişti Melda. Melda mı demişti hani 27'den 48 çıkartamıyoruz ya dedi aslında evet çıkartamıyoruz ama 48'i daha onu çıkarmadan alıyor. Öyle düşünersek aslında çıkıyor. Çıkıyor kalmıyor yani.

Eşitliği sağlayan eksik değeri bulmaya yönelik bulgular (9., 10. ve 12. sorular):

Eksik değeri bulmayı gerektiren $a+b=kutu+c$ formundaki soru.9'da Ataberk'in '8+4= kutu+5' ifadesinde Görsel 3.87'de görüldüğü üzere semiyotik bir araç olan eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlanmasını kutuyu bulabilme sürecinde kullanabildiğinden **enstrümantal oluşumun** bileşenlerinin birer göstergesi olarak ele alınmıştır. Öğretmenin bireysel görüşmelerde karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanıp kullanamayacağına ilişkin sorusunda Ataberk'in kutuyu bulmak için yaptığı işlemleri adım adım ifade ettiği ancak doğrulayıcı bir ifade içermediği için çalışmasının **semiyotik-enstrümantal** düzlemde olduğu düşünülmüştür.

Görsel 3. 87. Ataberk'in son değerlendirme soru-9'a ilişkin cevabı

Araştırmacı: He he. Şu anda anlattığın şey gibi mi diyecektim tam? Bir de Ataberk ben şey diyeceğim yaa. Bu yöntemden farklı bir yöntemle sayılardaki değişime bakarak bu soruyu çözebilir miyiz? Şu sayı böyle değişmiş. Bu sayı böyle değişmiş. O zaman şöyle olmalı. Falan filan deyip kutuyu bulabilir miyiz? Ya da dikdörtgen işte.

Ataberk: Bula... (bir yandan düşünüyor) bulabiliriz.

Araştırmacı: Mesela nasıl yapabiliriz?

Ataberk: 8'i 5'e çevirmiş diyebiliriz. 4'ü 5'e çevirmiş diyebiliriz de ben daha kolay 4'ü çeviririz diyeceğim. Mesela 4'ü 5'e çevirmişler.

Araştırmacı: Nasıl çevirmişler?

Ataberk: Hani 4, beş olmuş.

Araştırmacı: Evet.

Ataberk: 4, beş olmuş. O zaman bir tane arada kalıyor ya. 8'den bir taneyi çıkaracağız. Ona verelim. 8'den bir tane çıkardık. Ona verdik. O 5 oldu bu da 7 kaldı. Hani çıkarma işleminde alt alta yaptığımızda 7'yi 8 yapıyoruz ya. Öbür sayıdan 1 tane alıyoruz bu 17 kalıyor. Öyle.

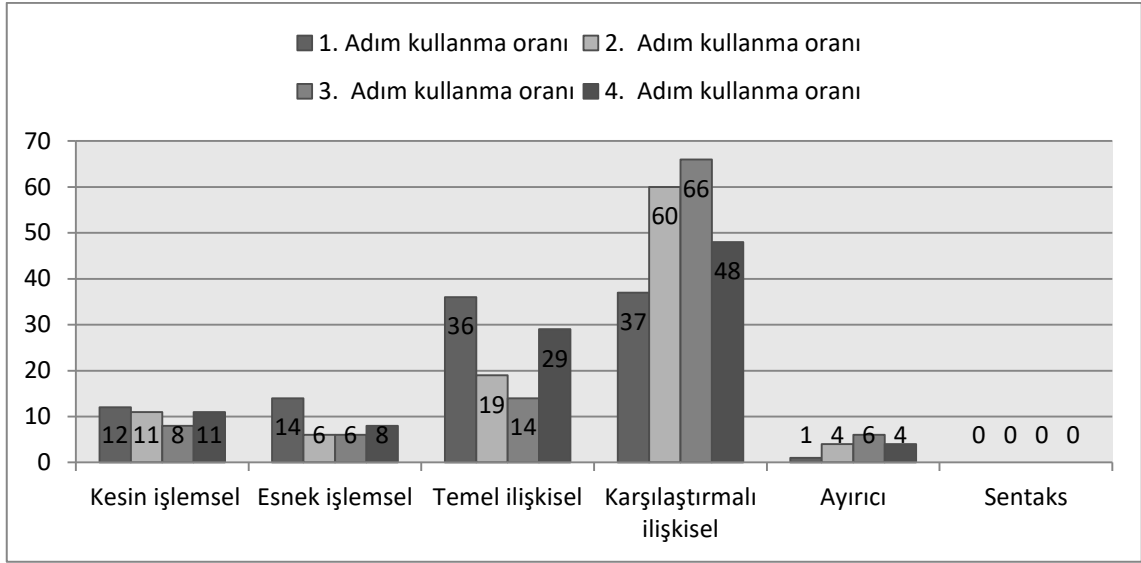
Araştırmacı: Peki burada o zaman sen şu anda kutuyu bulmuş oldun mu? Dikdörtgeni?

Ataberk: Hmmm bu 7 oluyor bu da 5 oldu. Hani bu 5 oldu bu da 7 oldu. Hani o da 7.

3.1.3.4.3. Ataberk'in bulgularına genel bakış

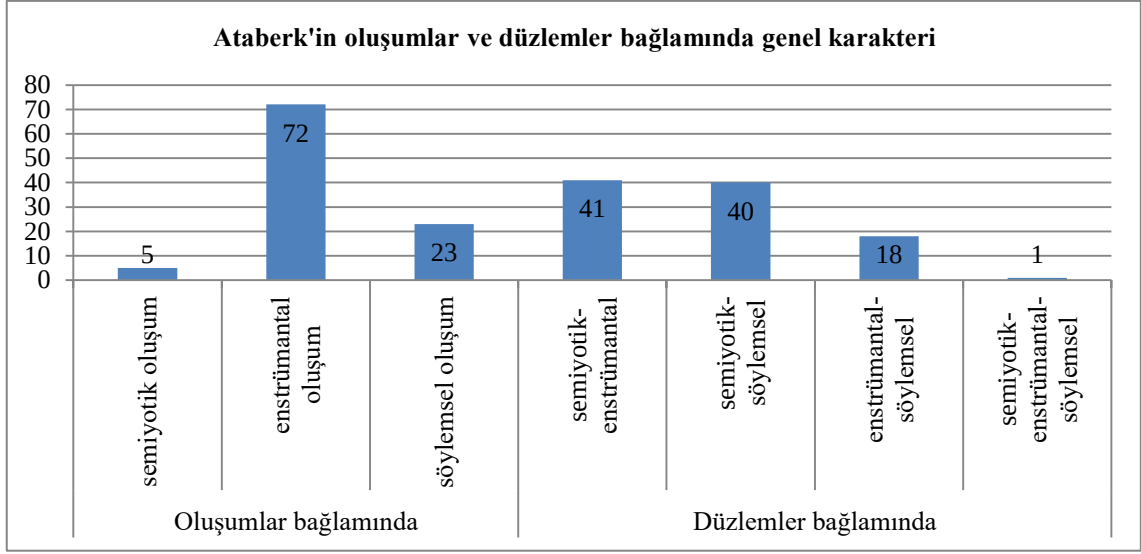
Ataberk'in çalışmaları 1. Adım, 2. Adım, 3. Adım ve 4. Adımda eşit işaretini farklı yorumlama biçimlerinde kullanma bağlamında genel karakteristiğini ortaya çıkaracak şekilde incelendiğinde süreçteki değişimini gösteren Grafik 3.30 elde edilmiştir.

Grafik 3. 30. Ataberk'in eşit işaretini yorumlama biçimlerini tüm adımlarda kullanma oranının değişimi

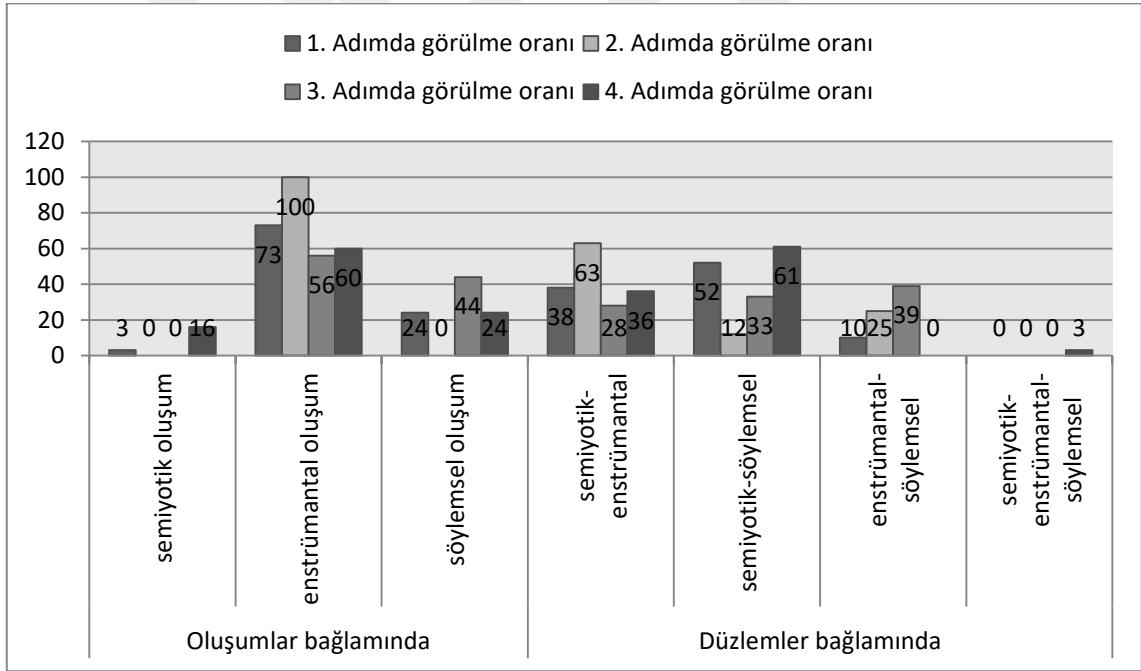


Ataberk'in 1. Adım, 2. Adım, 3. Adım ve 4. Adımda oluşumlar ve oluşumların ikişerli kombinasyonu bağlamında genel karakteristiğini ortaya çıkaracak şekilde incelendiğinde elde edilen Grafik 3.31 ve Grafik 3.32'den yola çıkarak Ataberk'in çalışmalarında sırasıyla enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler %72 oranında, söylemsel oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler %23 oranında, semiyotik oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler %5 oranında görülmüştür. Ataberk'in çalışmalarının yer aldığı düzlemlere bakıldığında sırasıyla semiyotik-enstrümantal düzlemde yer alma oranının %41, semiyotik-söylemsel düzlemde yer alma oranının %40, enstrümantal-söylemsel düzlemde yer alma oranının %18, %1 oranında da tüm düzlemlerin etkileşim içinde olduğu tamamlanmış bir çalışmanın bileşenlerinin göstergesi olduğu düşünülmüştür.

Grafik 3. 31. Ataberk'in tüm adımlarda oluşumlar ve düzlemler bağlamında genel karakteri



Grafik 3. 32. Ataberk'in tüm adımlarda oluşumlar ve düzlemler bağlamında değişimi



3.1.4. Melda'nın matematiksel çalışma uzayı

Bu bölümde Melda'nın matematiksel çalışma uzayı öğretim deneyi döngülerimizdeki adımlar doğrultusunda 1. Adım: İlk değerlendirme, 2. Adım: Etkinlik-1 ve ilişkili alıştırmalar, 3. Adım:Etkinlik-2 ve ilişkili alıştırmalar ve 4. Adım:Son değerlendirme doğrultusunda sunulmuştur.

3.1.4.1. Birinci adım: ilk değerlendirme

Bu bölümde Melda'nın matematiksel çalışma uzayı, 1. Adım: ilk değerlendirme sürecindeki kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları ve matematiksel çalışma uzayına ilişkin bulguları olmak üzere iki başlık altında sunulmuştur. Bununla beraber her iki başlıkta da Kayra'nın 1. Adım: İlk değerlendirmede yer alan soruların analizi sonucu ortaya çıkan temaları bağlamında bulgularına yer verilmiştir.

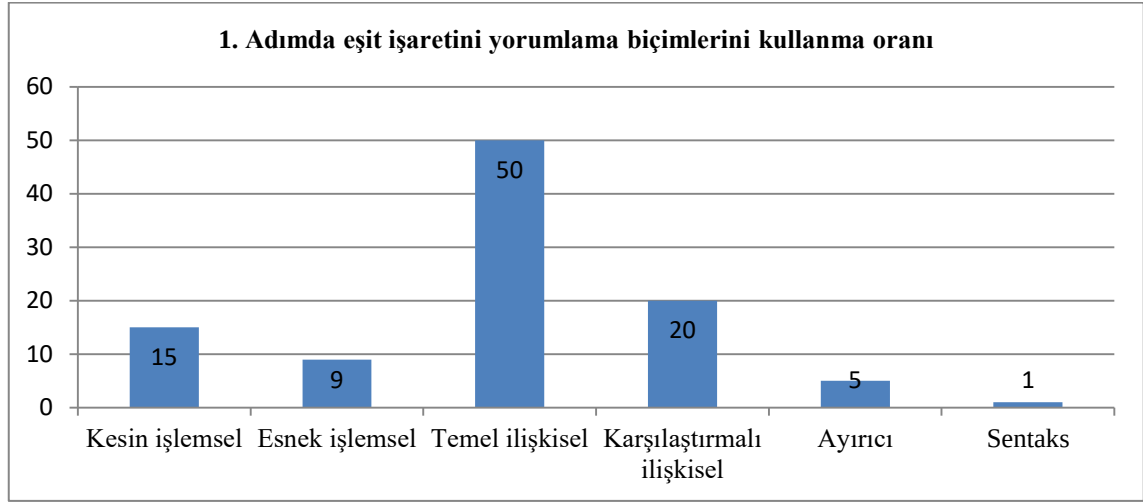
3.1.4.1.1. Melda'nın kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları

Melda'nın 1. Adım: ilk değerlendirme sürecinde eşit işaretini yorumladığı durumlar incelendiğinde farklı yorumlama biçimlerini kullanma oranlarına dair Tablo 3.26 ve Grafik 3.33 elde edilmiştir. İlk değerlendirme sürecinde Melda'nın eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerini kullanma oranları yaklaşık olarak sırasıyla temel ilişkisel %50 oranında, karşılaştırmalı ilişkisel %20 oranında, kesin işlemsel %15 oranında, esnek işlemsel %9 oranında, ayırıcı %5 oranında, %1 oranında da eşittir kavramını anlamından bağımsız bir şekil olarak (sentaks) yorumlamayı kullandığı görülmüştür.

Tablo 3. 26. Melda'nın ilk değerlendirmede eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerini kullanma durumunun sorulara göre dağılımı

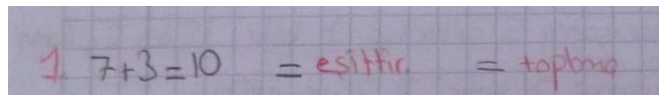
Eşit işaretini yorumlama biçimleri	İ.D.S.1	İ.D.S.2	İ.D.S.3	İ.D.S.4.	İ.D.S.5.	İ.D.S.6.	İ.D.S.7.	İ.D.S.8.	İ.D.S.9.	İ.D.S.10.	İ.D.S.11.	İ.D.S.12.
Kesin işlemsel	4		5				1	1			8	
Esnek işlemsel					6	1	3				1	
Temel ilişkisel	2		11	9		2	4	13	3	12		5
Karşılaştırmalı ilişkisel				10		3	1	1		9		
Ayırıcı	2		1	4								
Sentaks	1											

Grafik 3. 33. Melda'nın ilk değerlendirmede eşit işaretini yorumlama biçimlerini kullanma oranı



Eşit '=' işaretini anlamlandırmaya yönelik bulgular (1.,2.,3.,5. ve 11. Sorular):

İşareti anlamlandırmayı destekleyen soru.1'de ' $a+b=c$ ' standart ifadesinde ' $7+3=10$ ' sorusuna verdiği Görsel 3.88'de görülen cevabı incelediğimizde Melda'nın eşit işaretini bir ayırıcı olarak kullandığı görülmüştür. Bireysel görüşmede eşit işaretini kullanma amacı sorulduğunda 'sonucu göstermek' ifadesinden hareketle bu veriler ışığında Melda'nın eşit işaretini kesin işlemsel yorumladığı düşünülmüştür. Sonrasında öğretmen müdahalesi ile farklı yorumlamaları da kullanabildiği görülmüştür.



Görsel 3. 88. Melda'nın ilk değerlendirme soru-1'e ilişkin cevabı

Melda: Yani burada eşittir derken işlemde o sembolün adı eşittir. Toplama derken de hani böyle 7'yle 3'ü topluyoruz sonuç 10 çıkıyor. Orada topluyoruz derken olduğu için toplama yazdım oraya. Sonucunu.

Araştırmacı: mmmmm orada peki eşittirin anlamı ne oluyor. Oradaki eşittir ne anlama geliyor yani.

Melda: bence çıkan sonucu göstermek için kullanılır.

Eşdeğer denklemlerde işareti anlamlandırmayı gerektiren soru.3'te Melda'nın bireysel uygulamada verdiği Görsel 3.89'da da görülen cevaba bakıldığında '*ikisinin de toplamının 9 olduğunu göstermek için kullanılmış*' ifadesinden hareketle kesin işlemsel

yorumlamayı kullandığı düşünülürken öğretmen rehberliği ile yapılan bireysel görüşmede derinlemesine sorularla eşitliğin iki tarafındaki sonucun eşit olduğunu ifade edebilmesi temel ilişkisel de yorumlamayı da kullandığının göstergesi olarak yorumlanmıştır.

Görsel 3. 89. Melda'nın ilk değerlendirme soru-3'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Tamam. Mesela alttakine bakıyorum. 5 artı 4 eşittir 6 artı 3 eşittir bu da eşittir 9 demiş. Sonra sen ona şey demişsin ikisinin de toplamının 9 olduğunu göstermek için kullanılmış demişsin.

Melda: Evet

Araştırmacı: Ne demek istedin?

Melda: Hani burada 5'le 4'ü topluyoruz 9 ediyor. 6'yla 3'ü topluyoruz gene 9 ediyor. İkisinin de sonucu 9 olduğu için bunların ikisinin de sonucu eşittir. Yani eşit.

Hatalı eşdeğer denklemi farkederek işareti anlamlandırmayı gerektiren soru.11'de Melda, ' $6+9=15:3=5+2=7$ ' ifadesinin doğru olup olmadığına karar verirken bireysel görüşmede eşit işaretinden sonra yazılan sayının eşit işaretinden önce var olan işleminin sonucunu gösterdiğini ifade ettiğinden eşit işaretinin kesin işlemsel yorumlanmasını kullandığı ve ifadenin doğru olduğu sonucuna vardığı görülmüştür.

Melda: Neresiydi orası? (silmek için arıyor) 15 bölü 3, evet 5 kere doğru biliyordum. Eee burada çıkan sonuçları birbirlerinden ... nasıl desem hani 9 artı 6 yapmışlar 15 bulduk. Öbür soruda da çıkan sonuçla başlamışlar 15 eksi ayy 15 bölü 3 yapmışlar 5 bulmuşlar. Sonra gene 5'le başlamışlar en son çıkan sonuç çünkü 5'ti. 5 artı 2 yapmışlar 7 bulmuşlar. 7'nin de 7'ye eşit olduğunu söylemişler.

Araştırmacı: Sence doğru mu bu şekilde söylemeleri?

Melda: Doğru. Hani çünkü bakınca bu işlemler yani şöyle oluyor. 9 artı 6 sonra 5, (gene yanlış söyledi fark etti) 15 bölü 3, 5 artı 2 çıkan sonuçlar en sonda oluşan sonuçlar 7 olduğu için burada da 7'ye eşit diyebiliriz bence.

'a=a' durumunu sayı, şekil, cebirsel gibi farklı temsilleri kullanarak işareti anlamlandırmayı destekleyen soru.5'te bireysel görüşmede kare=kare şeklinde verilen

soruda eşit işaretinin anlamını, amacını ifade ederken eşit işaretinin ‘karelerin aynı oluşunu’ gösterdiğini ifade ettiği; ‘aynı’ kelimesini eşittir kavramının yerine kullandığı görülmüştür. Öğretmenin derinlemesine sorularla farklı büyüklükte karelerin arasına eşit işareti koyduğu durumda karelerin büyüklüklerinin aynı olması durumunda eşit işareti koymanın doğru olacağını söylediği görülmüştür. Sorunun diğer maddelerinde yer alan yıldızlar ve a harfinde de aynı yorumlama biçimini kullandığını ifade etmiş olmasından hareketle eşit işaretinin niceliklerin, çoklukların, sayısal değerlerin aynılığını göstermek için kullanıldığını tam olarak anlamlandıramadığının işareti olarak değerlendirilmiştir.

Melda: Yoooo hani nasıl desem. İkisi aynı karelerin. İkisi de aynı eşit. Yıldızlarda da aynı.

Araştırmacı: Aynen. İkisi de aynı karelerin derken ne demek istiyorsun?

Melda: Eee biri kare öbürü de kare. İkisi de aynı.

[...]

Melda: Çünkü birisi büyük birisi küçük. Biri büyük biri küçük. Arasında fark var. Ama oradakilerin ikisinin de aynı karelerin boyutları.

Araştırmacı: Hmmm

Melda: Ben öyle görüyorum ama. Eğer bir yanlış görmüyorsam.

Araştırmacı: O zaman boyutlarına da mı bakmalıyım?

Melda: Ben öyle yaptım. Boyutlarına baktım. Şekillerine baktım. Ona göre yazdım.

Araştırmacı: Yıldızlarda da mı öyle düşünüyorsun?

Melda: Evet. Aynı zamanda a harfinde de öyle düşünüyorum.

Araştırmacı: Peki oradaki a harfleri ikisi de aynı mı olmalı?

Melda: İkisi de aynı. A harfi yazıyor ikisinde de.

Araştırmacı: Aynen. Bir de şey dedin biraz önce. Sayıların yerine kullanılmış olabilir ama dedin sonra kararsız kaldın. Vazgeçtin galiba. Sayıların yerine kullanılmamış da olabilir diye mi düşünüyorsun?

Melda: Sayıların yerine bence burada kullanılmamıştır.

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik bulgular (4., 6., 7. ve 8. sorular):

Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında bu adımları farklı durumlarda uygulamayı gerektiren soru.4’te Melda’nın ‘ $47+25=47+3+25-3=50+22=72$ ’ sorusu ile ilgili yapılan görüşme dökümlerine bakıldığında Toprak’ın zihinden toplama yaparken kullandığı yolu öğretmen rehberliğiyle beraber ‘topluyoruz çıkartıyoruz’ ifadesiyle eklediği sayıyı çıkardığı için sonucun değişmeyeceğini ifade edebilmesi karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı farkedebildiğinin göstergesi olarak ele

alınmıştır. Aynı zamanda Görsel 3.90'da görüldüğü üzere ' $297+3=66-3$; $300+63=363$ ' ifadesinde $297+3$ ve $66-3$ işlemleri arasına '+' işareti koyması gerekirken eşit işaretini kullanmış olmasının nedenini 'ayırmak için' şeklinde ifade etmesi eşit işaretini diğer yorumlama biçimleri tarafından desteklenmese de ayırıcı bir sembol olarak kullandığının göstergesi olarak ele alınmıştır.

Araştırmacı: Yaa nasıl hep 72 çıkıyor?

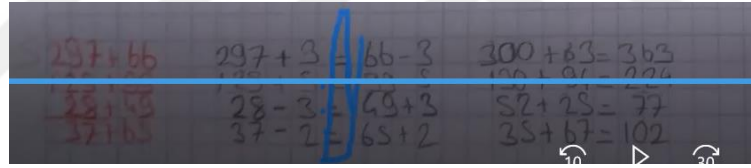
Melda: (biraz düşündü) ikisi de aynı. 9'ların 8'lerin 5'lerin. Topluyoruz ve çıkartıyoruz. Ona göre değişiyor çünkü.

Araştırmacı: Topluyoruz ve çıkartıyoruz.

Melda: Rakamlara göre mesela biri çok az çıkar biri çok fazla çıkar ama toplamaları gene onu bulur.

Araştırmacı: Nasıl. Tam anlayamadım. Nasıl yani?

Melda: İınıı şimdi 9 ikisi de. Sonuçlarına göre birini topluyoruz. İstersen biri çok az çıksın. İsterse biri çok çıksın ama dokuz. İkisi de aynı rakam olduğu için. Ona göre farkları değişiyor. Bunu tüm rakamlarla da denesek aynı sonuç çıkar. Topluyoruz çıkartıyoruz.



Görsel 3. 90. Melda'nın ilk değerlendirme soru-4'e ilişkin cevabı

[...]

Araştırmacı: Pek çizdirmedi ama.

Melda: Evet.

Araştırmacı: Maviyle göstermeye çalıştım üstünde. O aralara eşittir koymuşsun ya. Onu neden koydun?

Melda: Onu neden koydum. Ben de bilmiyorum tam. Neden koydum (gülüyor)

Araştırmacı: Heh. Ben şimdi düşündüm sen yazarken dedim ki yaaa eşittir....

Melda: İkisini ayırmak için koymuş olabilirim.

Araştırmacı: Heh ben de onu diyecektim. Ayırmak için eşittir koyulabilir mi?

Melda: olur

Farklı tiplerde denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirlemeyi gerektiren soru.8'de Görsel 3.91'de görüldüğü üzere Melda'nın işlem gerektiren sorularda öncelikle temel ilişkisel yorumlamayla işlemleri yapıp sonuçların eşitliğini kontrol etme ihtiyacı hissettiği görülmüştür. Küçük sayıdan büyük sayıyı çıkarmasını gerektirecek

sorularda bile işlemi yapamadığı halde karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanmakta zorlandığı görülmüştür. Öğretmen rehberliği ve yönlendirmelerine rağmen işlem odaklı düşündüğü örneğin '27-48+48=27' ifadesinin doğru olup olmadığına karar verirken bireysel görüşmede 27'den 48 çıkaramadığından 48'den 27'yi çıkarma ya da 48'le 48'i toplayıp çıkan sonuçtan 27'yi çıkarma işlemi yapmayı denediği görülmüştür.

Görsel 3. 91. Melda'nın ilk değerlendirme soru-8'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Acaba, bir daha bakayım sen nasıl yapmıştın. 48'den 27'yi çıkarmışsın. Çıkan sonuçla tekrar 48'le 27'yi toplamışsın. Heee anladım. Sen çünkü iki tane artı yazmışsın oraya. Eşittir falan hiç yazmamışsın dimi soruda kendi defterine yazarken?

Melda: Evet eşittiri yazmamışım. İki tane toplama bir tane çıkartma işlemi yapmışım

Araştırmacı: Aynen. Oradan bir hata olmuş o zaman seninki Melda. Peki o zaman şöyle yapalım. Hiç o zaman yaptığına bakmayalım. Sen olsan bu soruyu nasıl çözersin? Öyle söyleyeyim.

Melda: Önce herhalde 48'le 48'i toplayım sonra 27'den çıkartırım. Çünkü direk 27'den 48 çıkmaz.

'27-48+48 = 27' şeklinde aritmetik olarak verilen durumda işlem yapmaya odaklanmaktansa sürece odaklanıp bir hikâye bağlamında ele alması için bireysel görüşmede öğretmen rehberliği yapılmasına rağmen Melda'nın 27'den 48'i çıkarıp işlem yapmaya çalıştığı ancak küçük sayıdan büyük sayıyı çıkaramadığından işlemin sonucunu da bulamadığı için hikâyeleştirmede zorlandığı görülmüştür. 27-48 işlemini yapamadığı için 48-27 işlemini yapması gerektiğini düşünmüştür.

Melda: Nasıl kullanacağımı bilmiyorum ki.

Araştırmacı: Mesela sırayla başla. Ortadan, en sondan, falan filan başlama anlatmaya. 27'yle başlamışsam ben, sen de 27'yle başla. Bu 27 tane bir şey olsun mesela. Ne olsun 27 tane.

Melda: 27 tane muz olsun.

Araştırmacı: Tamam 27 tane muzum vardı. Sonra o muzlara ne oldu?

Melda: 48'e düştüler. Sonra bir tane daha 48'e çıktılar. Sonra bir daha 48 tane oldular ama o zaman eksili rakamlara düşmüyör mu?

[...]

Araştırmacı: 27 tane muzum vardı mesela...

Melda: Ama işte 27 tane muzum varken 48 tanesini nasıl yiyeyeceğim?

Araştırmacı: Devam et... 48 tanesini yiyecektim de.....

Melda: 48 tanesini yedim

Araştırmacı: Tamam. Yiyemedin hatta senin dediğin gibi 48 tane muzun yok ki.

Melda: Yiyemedim. (gülüyor)

Araştırmacı: Heh aynen. 48 tane muzu yiyecektim. Yiyemedim. Sonra ne oldu?

Melda: Yiyemedim. 48'den 27 çıkartırız herhalde ...

Farklı tiplerde denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirlemeyi gerektiren soru.8'de $8+9=(8+2)+(9-2)$ işleminde Melda karşılaştırmalı ilişkisel yorumlayamadığından ve eklenen ve çıkan sayıların aynı yani '2' olması halinde eşitliğin bozulmayacağını farkedemediğinden işlemdeki 2'lerin başka sayılar olması durumunda eşitliğin durumunu karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayla yorumlayamadığı görülmüştür. Bireysel görüşmede bunun yerine 2'lerin farklı sayılar olması durumunda sonuçların aynı çıkıp çıkmayacağına işlem yapıp sonuçları karşılaştırarak karar verdiği görüldüğünden bu verilerden hareketle temel ilişkisel yorumlamayı kullandığı değerlendirilmiştir.

Araştırmacı: Acaba bu 2'ler illa 2 olmak zorunda mı? Başka bir şey olamıyor mu?

Melda: Yoooo iki olmak zorunda değil.

Araştırmacı: Mesela kaç olabilir?

Melda: Bilmem. Bir üst rakamını kullanalım 3 yapalım.

Araştırmacı: Tamam 3 yap bakalım. Nasıl yapacaksın? Doğru mu çıkar yanlış mı çıkar nasıl karar vereceksin?

Melda: O zaman artıyla eksinin yerini değiştirelim. 8'den 3 çıkar 5 kalır. 9 artı 3 , 12 yapar. 12'yle...ııı.. kaçtı? (içinden mırıldanarak yeniden hesaplama yapıyor) ben bir kağıda yazabilir miyim?

Araştırmacı: Bence yaz. Daha rahat olur. Akılda tutmak zor oluyor çünkü.

Melda: (deftere yazarak yapıyor işlemleri aklında tutamadı biraz önce) şimdi de 17 buldum.

Araştırmacı: 2'leri değiştirdin. 3 yaptın gene aynı sonuç çıktı. Başka bir sayı verseydin gene aynı sonuç çıkacak mıydı? Üç, şans eseri mi üçte doğru çıktı acaba?

Melda: (bilmem anlamında dudak hareketi yaptı demek ki genellemeye daha ulaşamadı) 4 yapsak. Bu sefer 8'le toplar; 9'dan çıkartırdık. Tek sayıları bence burada çıkartıyoruz.

Eşitliği bozmayan işlemleri belirleyerek denklemin doğru ya da yanlış olduğuna karar vermeyi gerektiren soru.7'de Melda'nın bireysel görüşmede '7=12-5' sorusunda

eşit işaretinin ‘sonucu göstermek için’ değil de ‘ikisinin de eşit olduğunu göstermek için’ kullanıldığını ifade ettiği görülmüştür. Bu durum Melda’nın eşit işaretinin kullanım amacını bireysel görüşme sırasında açıklarken ‘ikisinin eşit olduğunu göstermek için’ ifadesine yer verdiğinden ilişkisel yorumlamayı destekleyen ifadeler kullandığı yönünde ele alınmıştır.

Melda: Mesela biz daha önceki soruda işte 7 artı 3 işlem vermişlerdi. Sonra sonucu yazmak için de eşittir kullanmışlar demiştik.

Melda: evet

Araştırmacı: Sonucu yazmak için kullanmışlar demiştik eşittiri. Ama bu soruya bakıyorum. Bu soruda eşittiri acaba ne için kullanmışlar. Sonucu yazmak için mi kullanmışlar mesela?

Melda: heee o soruda mı. Sonucu yazmak için kullanmamışlar bence orada. İkisinin de eşit olduğunu göstermek için kullanmışlar.

Eşitliği sağlayan eksik değeri bulmaya yönelik bulgular (9., 10. ve 12. sorular):

Farklı tiplerde denklemlerde ‘....’ ile temsil edilen eksik değeri bulmayı gerektiren soru.10’da Melda, karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı bir algoritma gibi uygulayarak bilinmeyeni hesaplayabilse de bireysel görüşmede ifade ettiği üzere bu yorumlama şeklini her zaman uygulanabilir ve güvenilir bulamadığından temel ilişkisel yorumlamayla doğruluğunu kontrol etme, destekleme ihtiyacı hissettiği görülmüştür. Elde edilen veriler ışığında bazen karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı, temel ilişkisel yorumlamayla bilinmeyeni hesapladıktan sonra farklı bir yolla çözmesi istendiğinde başvurulacak bir yol, kontrol aracı olarak yorumladığı görülmüştür.

Araştırmacı: Sayı nasıl değişmiş?

Melda: 1 artmış.

Araştırmacı: 1 artmış. Peki acaba dedim bu 1 arttıysa dedim başka bir yöntemle yapabilir miydik acaba bu soruyu. Madem 9 sayısı 1 artmış (bu sırada Melda’nın düşünmesi için biraz zaman tanıyorum)

Melda: Artma azalma belki ikisini şey kullanmış olabilirler.

Araştırmacı: Nasıl yani?

Melda: Biri artıyor biri azalıyor. 9’a 1 eklemişler 10 olmuş. 7’den de 1 çıkarmışlar 6 olmuş. O yöntemle de olabilir belki ama bunu kullanırsak her zaman doğru olur mu tam emin değilim.

Araştırmacı: Heee ben de hemen onu soracaktım arkasından. Sen zaten cevap verdin. Her zaman doğru olur mu diyecektim bu yöntemle?

Melda: Bilmiyorum (gülüyor) değişir hani yerleri.

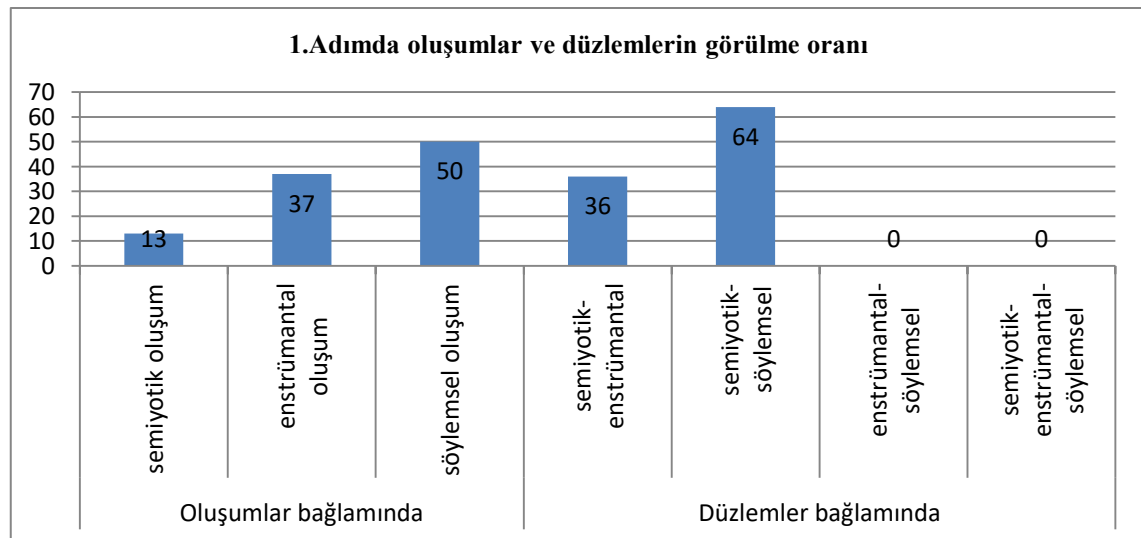
3.1.4.1.2. Melda'nın matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları

Melda'nın 1. Adım: ilk değerlendirme süreci oluşumlar ve oluşumların ikiye bölünmüş kombinasyonu bağlamında incelendiğinde Tablo 3.27 ve Grafik 3.34 elde edilmiştir. İlk değerlendirme sürecinde oluşumların bileşenlerine ilişkin göstergelerin görülme durumları yaklaşık olarak sırasıyla söylemsel oluşum %50 oranında, enstrümantal oluşum %37 oranında, semiyotik oluşumun %13 oranında bileşenleri görülürken; çalışmalarının düzlemlerde yer alma durumları yaklaşık olarak sırasıyla semiyotik-söylemsel düzlemde %64 oranla, semiyotik-enstrümantal düzlemde %36 oranında yer aldığı görülmüştür.

Tablo 3. 27. Melda'nın ilk değerlendirmede oluşumlar ve düzlemlerin görülme durumunun sorulara göre dağılımı

Eşit İşaretinin Yorumlanmasında Oluşumlar ve Düzlemler		İ.D.S.1	İ.D.S.2	İ.D.S.3	İ.D.S.4	İ.D.S.5	İ.D.S.6	İ.D.S.7	İ.D.S.8	İ.D.S.9	İ.D.S.10	İ.D.S.11	İ.D.S.12
Oluşumlar bağlamında	Semiyotik oluşum	1											
	Enstrümantal oluşum				3								
	Söylemsel oluşum					1			1		2		
Düzlemler bağlamında	Semiyotik-enstrümantal				1					1	10	1	1
	Semiyotik-söylemsel			1	5		3	3	6	1	2	1	3
	Enstrümantal-söylemsel												
	Semiyotik-enstrümantal-söylemsel												

Grafik 3. 34. Melda'nın ilk değerlendirme oluşumlar ve düzlemlerin görülme oranı



Eşit '=' işaretini anlamlandırmaya yönelik bulgular (1.,2.,3.,5. ve 11. sorular):

İşareti anlamlandırmayı gerektiren soru.1'de Melda'ya bireysel görüşmede eşit işaretini gördüğünde gözünde canlananın ne olduğu sorulduğunda ilk aklına gelenin anlamından uzak şekil olarak iki çizgi olduğu görülmüştür. Eşit işaretinin yokluğunda gözünde canlananın 'iki çizgi' olması **semiyotik oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü şeklinde yorumlanmıştır.

Araştırmacı: Tamam. Mesela şey diyeceğim bir de Melda. Sen böyle eşittir sembolünü görünce ya da eşittir sembolünü gözünde canlandırınca nasıl bir şey gözünde canlanıyor? Ne aklına geliyor? İlk aklına gelen şey ne oluyor?

Melda: (gülüyor) İki tane çizgi.

Araştırmacı: İki tane çizgi. Olabilir. Ne aklına geliyorsa söyle. İki tane çizgi. Başka.

Melda: (Gülüyor) Hani eşittir ...(başka bir şey diyemedi)

Araştırmacı: Şekil olarak mı aklına geliyor? Böyle iki tane çizgi şeklinde.

Melda: Evet (hala gülüyor).

Araştırmacı: Şeklin dışında bir şey geliyor mu eşittir dediğimde? Matematikte olmak zorunda değil.

Melda: Anlattığım gibi işte yerlerde kullanıldığı için onlar ilk aklıma geliyor. İşlemleri falan onların. Nasıl yapıldığı.

Eşdeğer denklemlerde işareti anlamlandırmayı destekleyen soru.3'te $5+4=7+2=9$ ifadesinin doğruluğuna karar verirken Melda'nın eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlama özelliğini kullanarak bireysel görüşmede '8'le de 1'i toptasak gene 9 edecek. 7'yle 2'yi toptasak gene 9 edecek' şeklinde açıklama-gerekçelendirme yaptığı görüldüğünden çalışmasının **semiyotik-söylemsel** düzlemde yer aldığının bir göstergesi olarak yorumlanmıştır.

Araştırmacı: Hmmm anladım. Bak şimdi sen burada soruyu çözerken şunu fark ettim. Sen 5'le 4'ü toplamışsın. 9. 6'yla 3'ü de toplamışsın gene 9. Ben de diyorum ki yaaa Melda bu soruda acaba diyorum toptamasaydın da sadece sayıların değişimine baksaydın. Eşit olduklarını söyleyebilir miydi? Yani şöyle demek istiyorum. Mesela bir tarafta 5 var, bir tarafta 4 var. (bu sırada araştırmacı ekrandan parmaklarıyla sayıları gösteriyor) Sen bunları toptayınca 9 oldu diyorsun. Hâlbuki diğer tarafa bakıyorum. Bir tarafta 6 var. Diğer tarafta 3 var. Yaaa sayılar değişmiş aslında. Yani başta sayılar 5 ve 4 iken sonra 6 ve 3 olmuş. Aslında sayılar değişmiş ama nasıl gene de eşit kalabiliyorlar?

Melda: İki rakamların yerleri değişse de sonuçları değişmez çünkü. 8'le de 1'i toptasak gene 9 edecek. 7'yle 2'yi toptasak gene 9 edecek.

‘a=a’ durumunu sayı, şekil, cebirsel gibi farklı temsilleri kullanarak işareti anlamlandırmayı gerektiren Melda’nın kare=kare şeklinde verilen ifadede bireysel görüşmede ‘karelerin ne olabileceği’ sorusuna önce ‘istediğimiz sayı olabilir’ diyerek örnek sayılar verdiği daha sonrasında bu sayıları genelleyerek ‘karelerin tüm sayılar olabileceğini’ ifade edebilmesi örnek durumlardan yola çıkarak ‘kare’ ile temsil edilen değişkeni ‘genelleştirilmiş sayı’ olarak yorumlayabildiğini gösterdiğinden **söylemsel oluşumun** bileşenlerinin göstergelerinin görüldüğü şekilde ele alınmıştır.

Araştırmacı: Kareler sayı olabilir mi buradaki kareler?

Melda: Sayı da olabilir.

Araştırmacı: Mesela kaç olabilir?

Melda: İstedikimiz.

Araştırmacı: Mesela seç bir tane.

Melda: 63 eşittir 63.

Araştırmacı: Başka?

Melda: 72 eşittir 72.

Araştırmacı: Başka?

Melda: 11 eşittir 11.

Araştırmacı: Kaç tane böyle örnek verebilirsin?

Melda: Sonsuz.

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik bulgular (4., 6., 7. ve 8. sorular):

Doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında bu adımları farklı durumlarda uygulamayı gerektiren soru.4’te Melda’nın verilen sorularda eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlanmasını problemin çözümünde işe koşabildiği ve eşit işaretini bir araç olarak kullanabildiğinin göstergelerinin görüldüğü şekilde yorumlandığından **enstrümantal oluşumun** bileşenlerinin görüldüğü kabul edilmiştir. Eşit işaretinin yalnızca varlığının eşitliğin doğru olmasını sağlamadığının farkında olduğu görülmüştür. Örneğin ‘ $47+25=47+3+25-3=50+22=72$ ’ sorusunda eşit işaretinin doğru bir şekilde kullanılıp kullanılmadığını anlamak için eşitliğin iki tarafındaki işlemlerin sonuçlarını hesaplayıp sonuçları karşılaştırdığı görülmüştür. Bireysel görüşmede eklenen ve çıkarılan sayıların aynı olması durumu fark ettirildiğinde ve ‘3’ olan sayının ‘5’ olması durumunda eşitliğin bozulup bozulmayacağını yorumlaması istendiğinde önce çok düşünmeden eşitliğin bozulacağını düşündüğü görülürken

sonrasında işlem yapıp sonuçların aynılığını gördüğü ve temel ilişkisel yorumlamayı kullandığı görülmüştür.

Melda: Evet.

Araştırmacı: Neden onları kırmızıyla göstermiş sence? Bir şey mi vurgulamaya çalışıyor?

Melda: Aaa evet. Şimdi bakınca fark ettim ben de. İkisi de 3. Mesela 47'yle 3'ü toplamış 50 bulmuş. 25'ten 3'ü çıkarmış. Kaç bulmuş 22 bulmuş. Ona bakmış.

Ben. Aynen öyle neden ikisi de 3?

Melda: (bilmem anlamında dudağını büküyor)

Araştırmacı: Mesela ikisi de 5 olsaydı olur muydu?

Melda: İkisi de 5 olsaydı olmazdı.

Araştırmacı: Nasıl anlayacağız peki? Olmaz mı olur mu nasıl karar vereceğiz. İkisi de 5 olsaydı olur muydu mesela? (Melda bu sırada defterine yazmaya başladı)

Melda: Şimdi deniyorum (işlem yapıyor)

Araştırmacı: Tamam dene. Nasıl deniyorsun onu da anlat.

Melda: 47'yle 5'i topluyorum.

Araştırmacı: Tamam.

Melda: 52 oluyor.

Araştırmacı: Tamam.

Melda: Sonra 25'ten de 5'i çıkartıyorum.

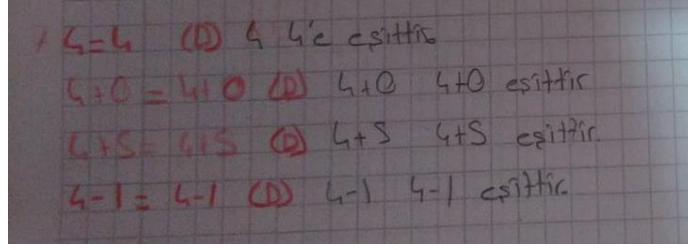
Araştırmacı: Hı hı.

Melda: 52'yle 20'yi topluyorum. 72 buluyorum (gülüyor)

Araştırmacı: O zaman 5 verince oldu mu. İkisine de 5 verince.

Melda: Oldu.

Denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirlemeyi gerektiren soru.6'da Melda'nın ifadelerin doğruluğuna karar verirken Görsel 3.92 ve bireysel görüşme dökümlerinden yapılan alıntıda görüldüğü üzere eşit işaretinin iki tarafındaki işlemleri yapıp sonuçları karşılaştırdığı görüldüğünden ve doğrulayıcı ifadelerini bu yorumlama biçimine dayandırdığından çalışmasının temel ilişkisel yorumlamayı kullandığı **semiyotik-söylemsel** düzlemde olduğu şeklinde değerlendirilmiştir. Öğretmenle yapılan bireysel görüşmelerde eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamasını da işe koşup işlem yapıp sonuç bulmaksızın eşit işaretinin iki tarafındaki sayı ve işlemlerin aynı olmasından dolayı ifadenin doğru olduğuna karar vermesi eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanmasının aktive edildiği **semiyotik-söylemsel** düzlemde olduğu kabul edilmiştir.



Görsel 3. 92. Melda'nın ilk değerlendirme soru-6'ye ilişkin cevabı

Araştırmacı: Aynen. 4, 4'e eşittir doğrudur demişsin. İkincisine?

Melda: 4 artı sıfır eşittir 4 artı sıfır yazmışlar. Aynen doğru yazmışım (ekrana bakıp deftere yazdığını kontrol ediyor) 4 artı sıfır 4 eder. Sonra eşittir yazmışlar. O eşittiri şu anda okumuyorum. 4 artı sıfır gene 4 eder. Bu 4'le 4 eşittir.

[...]

Melda: İkisi de burada aynı yazmışlar çünkü. Birine dört yazmışlar. Birine gene 4 yazmışlar. Birine sıfır yazmışlar birine gene sıfır yazmışlar. Ve bunların mesela birinde çıkartma olsa, birinde toplama olsa farzediyorum ki burada sıfır yok başka bir rakam var. Birinde bir var. Birinde gene bir var. Çünkü ikisi de eşit demiştik. Birinde toplama işlemi var, birinde çıkarma işlemi var. O zaman eşit olmazlar. Ama ikisinde de toplama işlemi var. O yüzden 4, 4 aynı, sıfır sıfır aynı; bu ikisinde de toplama işlemi toplama olduğuna göre ikisi de eşittir.

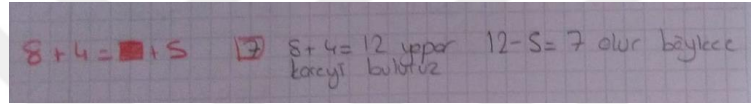
Farklı tiplerde denklemlerin doğru ya da yanlış olduğunu belirlemeyi gerektiren soru.8'de Melda'nın bir ifadenin doğruluğuna karar verirken gerekçelendirme, açıklama yaparken bireysel görüşme sırasında sıklıkla daha önceden çözölen sorular, öğretmenin söylediğı ifade, başka bir arkadaşının söylemi ya da verdiğı örnek gibi durumlara referans gösterdiği görölmüşür. Bir ifadenin doğruluğuna karar vermek için bunun yeterli olabileceğine inanmışır. Örneğın $8+9= (8+2) +(9-2)$ sorusunda 2'lerin kalın yazılmasının nedeni sorularak karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanması desteklenmeye çalışıldığında Melda'nın daha önceden yapılan soruları referans gösterdiği 'bir önceki sorularda da sanki yapmışık' dediğı göröldüğünden söylemsel oluşumun bileşenlerinin göstergelerinin göröldüğü şekilde kabul edilmiştir.

Araştırmacı: Bir de onları koyu koyu yazmış. Dikkatini çekti mi bilmiyorum. Yani orada 2'lere dikkat çekmeye mi çalışıyor acaba? Hem şurada artı 2 yazmış. 8 artı 2 de. Hem de şurada 9 eksi 2 de eksi 2 yazmış. İkisini de koyu renk yazmış. Neye dikkat çekmeye çalışıyor acaba?

Melda: Bir önceki sorularda da sanki yapmışık. Birinde artı birinde eksi ama rakamların ikisi de aynı. Bir önceki soruda sanki vardı.

Eşitliği sağlayan eksik değeri bulmaya yönelik bulgular (9., 10. ve 12. sorular):

‘ $a+b=kutu+c$ ’ formunda verilen denklemde eksik değeri bulmayı gerektiren soru.9’da $8+4=kutu+5$ ifadesinde bireysel uygulamada Görsel 3.93’de görülen cevabı verdiği; bireysel görüşme sırasında ise bu cevabı Melda’dan anlatması ve nasıl, neden yaptığı sorularını cevaplaması istendiğinde yaptığı adımları gerekçelendirme-açıklama olmaksızın ifade ettiği görüldüğünden çalışmasının **semiyotik-enstrümantal** düzlemde yer aldığı düşünülmüştür. Öğretmen rehberliği ve sorularından sonra yaptığı adımları nedeniyle beraber açıklayabildiği ve çalışmasının eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlanma özelliğini kullanarak açıklama yaptığından **semiyotik-söylemsel** düzlemde olduğu yönünde değerlendirilmiştir.



Görsel 3. 93. Melda ’nın ilk değerlendirme soru-8’e ilişkin cevabı

Melda: Ben...

Araştırmacı: Heh (aynı anda konuşmaya başlayınca anlaşılmadı)

Melda: 8 artı 4 eşittir 12 yapar. 12’den de 5 çıkartırız. 7 buluruz.

Araştırmacı: Neden 12’den 5’i çıkardın?

Melda: Çünkü 8’le 4’ün toplamı 12 yapar. Bu ikisini de eşitmiş. O zaman ya 5’in üstüne 12’ye kadar sayacaktık. İkisinin de eşit olması için ya da 12’den 5’i çıkartacaktık.

Sözel temsilden cebirsel ya da sayısal geçiş kullanarak eksik değeri bulmayı gerektiren soru.12’de bireysel uygulamada Melda’nın Görsel 3.94’te görüldüğü üzere Çınar’ın bilge sayısını hesaplayabildiği ama herhangi bir doğrulayıcı açıklama yapmadığı için bu durum çalışmasının **semiyotik-enstrümantal** düzlemde yer aldığına dair bir gösterge olarak yorumlanmıştır. Derinlemesine sorularla öğretmen ile yapılan bireysel görüşmede ise Çınar’ın bilge sayısını hesaplarken eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlanmasını kullanarak eşitliğin iki tarafının da 15 olmasını sağlayacak şekilde eksik değeri belirleyebildiği ve açıklayabildiği görüldüğünden bu veriler çalışmasının **semiyotik-söylemsel** düzlemde yer aldığı yönünde değerlendirilmiştir.

Görsel 3. 94. Melda'nın ilk değerlendirme soru-11'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Nasıl çözdün bir anlatır mısın?

Melda: Hmmm burada işleme bir daha bakayım. Tamam (ekrandan bakıyor) Ekin'le Sema'nın bilyeleri toplamı 15'miş. Ne diyor burada. Toprağın da 10 bilyesi varmış. Çınar'ın kaç bilyesi varmış. Bunların da eşit olduğu için. 15'ten 10'u çıkardım. Çınar'ın 5 bilyesi varmış. Araştırmacı: Hangileri eşit dedin onu anlayamadım tam. Bunların dedin eşit olduğu için dedin.

Melda: Kızlarla erkeklerin biriktirdiği bilye sayıları eşittir diyor yukarıda.

Araştırmacı: Hı hı.

Melda: Buna göre dedim 9 artı 6 yaparız 15 çıkar. Demek ki ikisinin sonuçları 15'miş. O zaman Toprağın dedim 10 tane bilyesi varsa demek ki 15'ten 10'u çıkarmamız gerekiyor. İkisi de eşit dediği için yukarıda. 5 kalıyor.

3.1.4.2.İkinci adım: etkinlik-1 ve alıştırmalar

Bu bölümde Melda'nın 2. Adım: Etkinlik-1 ve ilişkili alıştırmalarına yönelik bulguları, kavramsal ve bağlamsal anlamaya ilişkin bulguları ve matematiksel çalışma uzayına ilişkin bulguları başlıkları altında verilmiştir.

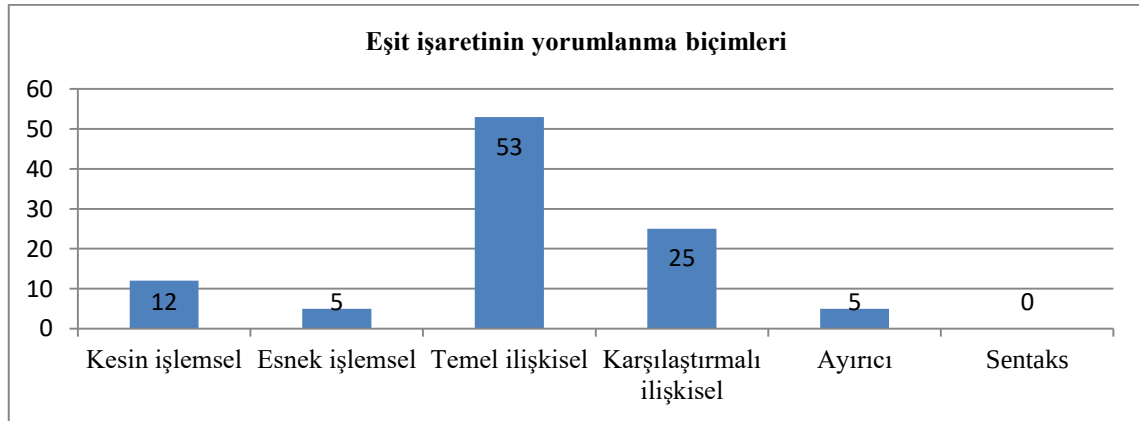
3.1.4.2.1. Melda'nın kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları

Melda'nın 2. Adım: etkinlik.1. ve ilişkili alıştırmalar sürecinde eşit işaretini yorumladığı durumlar incelendiğinde düzeylere bağlı farklı yorumlama biçimlerini kullanma oranlarına dair Tablo 3.28 ve Grafik 3.35 elde edilmiştir. Melda'nın 2. Adım: etkinlik-1 ve ilişkili iki alıştırmada kullandığı yorumlama biçimleri yaklaşık olarak sırasıyla temel ilişkisel %53 oranında, karşılaştırmalı ilişkisel %25 oranında, kesin işlemsel %12 oranında, esnek işlemsel ve ayırıcı yorumlama %5 oranında şeklinde olduğu görülmüştür.

Tablo 3. 28. Melda'nın 2. Adımda eşit işareti yorumlama biçimlerinin sorulara göre dağılımı

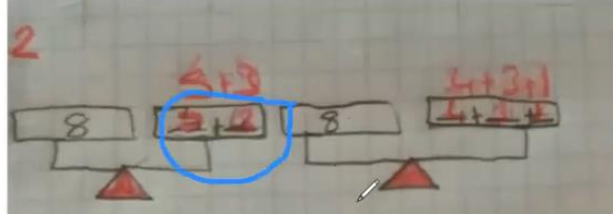
Eşit İşareti Yorumlama Biçimleri	E.1.S.1.	E.1.S.2.	E.1.S.3.	A.1.S.1.	A.1.S.2.	A.1.S.3.	A.1.S.4.	A.2.S.1.
Kesin işlemsel	2			5				
Esnek işlemsel	2	1						
Temel ilişkisel			5	4	1	1	1	18
Karşılaştırmalı ilişkisel			7	2		2	2	1
Ayırıcı	3							
Sentaks								

Grafik 3. 35. Melda'nın 2. Adımda eşit işareti yorumlama biçimlerinin görülme oranı



Eşit '=' işareti anlamlandırmaya yönelik bulgular (e.1.2. Soru):

Terazi modeli ile verilen eşdeğer denklemlerde işareti anlamlandırmayı gerektiren Etkinlik.1 soru.2'de Melda'nın terazi modelinin sol kefesinde verilen 8 top ile dengede duracak şekilde sağ kefesindeki iki ayrı torba içindeki 5 top ve 3 topu sayısal olarak yazması beklendiğinde; bireysel uygulamada torbanın içindeki top sayılarını göz ardı ederek ama sol kefedeki 8 top sayısını sağlayacak şekilde 4+4 şeklinde ifade edebildiği görülmüştür (Görsel 3.95). Grup dersinde yapılan görüşmelerde hatasını farkedip 5+3 olacak şekilde düzeltebildiği görülmüştür. Grup görüşmesinde terazi modeli ile ilgili önceki yaşanmışlıklarını ortaya çıkarmak adına yöneltilen soruyla Melda'nın eşit kollu teraziyi daha önce hiç kullanmadığı görülmüştür.



Görsel 3. 95. Melda'nın Etkinlik-1 soru-2'ye ilişkin cevabı

Melda: Orada önce 4 artı 4 yapmıştım. Sonra soruyu bir kere daha dikkatli okudum. Yukarıdaki bilye sayılarına bakıp ona göre toplamını yaptım. Gene orada 5 artı 3, 8, 8'e eşit. Araştırmacı: Burada da en son 5,3,1 diye yazmışsın. Değiştirdin herhalde, kendi kafana göre mi yapmıştın önce?

Melda: Evet.

[...]

Araştırmacı: Ben de şey, size şey soracağım. Burada teraziyi niye sormuşlar. Hiç terazi kullandınız mı?

Nazlı: (olumsuz anlamda kafa sallıyor) Ben kullanmadım.

Melda: (olumsuz anlamda kafa sallıyor.)

Kayra: Ben de.

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik bulgular (e.1.3., a.1.1., a.1.2., a.1.3., a.1.4, a.2.,1.sorular):

Doğru verilen denklemde eşitliği bozmadan yapılan adımları yorumlama ve sonrasında bu adımları farklı durumlarda uygulamayı gerektiren Etkinlik.1 Soru.3'te grup görüşmesinde öğretmenin 'aynı paraya daha fazla ayva almak için ne yapılabilir' sorusuna Melda'nın 'O zaman ayvalara 2 ekler, armutlardan da 2 çıkarırız' ifadesini kullandığından karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullandığının bir göstergesi olarak ele alınmıştır.

Araştırmacı: hmmm. Sen ne diyorsun Melda? Mesela Ataberk diyor ki hepsini ekleyebiliriz diyor. O zaman hiç armut almaz diyor.

Melda: Hııı şu anda gene bir önceki gibi tam tersini yaparsak ya da 2 eklersek 6 olur. Orada 2 fazlaymış. O zaman ayvalara 2 ekler, armutlardan da 2 çıkarırız. Armutlar 4 olur, ayvalar da 6 olur.

Araştırmacı: Peki ben ama çok fazla ayva istiyorum. Yaaa ayva da ayva, ayva da ayva. Sadece 2 tane mi ekleyebiliyorsunuz? Ben onu merak ettim. Yani en fazla kaç ekleyebiliyorsunuz onu merak ediyorum aslında ben.

Kayra: hayır.

Araştırmacı: Ben ayvayı çok seviyorum. (o sırada birisi araya girer) ee?

Melda: Burada sadece armut almaz ya da ayva alır. O kadar çok istiyorsa.

Etkinlik.1 Soru.3'te 'Pazara giden Toprak önce 3 armut ve 5 ayva almış. Sonrasında 2 armut daha alabilmek için ayva sayısında değişiklik yapmak zorunda kalmıştı. Toprak'ın yaptığı bu işlemin 8 sayısını elde edecek şekilde aritmetik olarak yazılmış halinin verildiği soruyu inceleyip benzer şekilde 10 sayısını elde edecek şekilde farklı durumlarda yazması istendiğinde Melda'nın Görsel 3.9'da görüldüğü üzere toplamı 10 olacak şekilde sayıları belirleyemediği, eşitliğin aynı tarafındaki iki sayının toplamı verildiğinde bu sayılardan birinden azaltıp aynı miktarda diğer sayıya vermenin toplamı değiştirmeyeceğini sayısal olarak yazamadığı görülmüştür.

4 10 $(10+2)+(10-2)$
10 $(10+3)+(10-3)$
10 $(10+4)+(10-4)$
10 $(10+5)+(10-5)$

Görsel 3. 96. Melda'nın Etkinlik-1 soru-3'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Buradaki 10 armut olsun. Çünkü armutları bırakacak. Şuradaki sıfır da ayva olsun. Aaaa diyor hiç ayva almamışım diyor. Annem diyor ayva reçeli yapacaktı. attım. Dur diyor ben diyor bir ayva alayım diyor. 9 tanesini bırakayım diyor armutların. Onun yerine 9 tane ayva alayım diyor. Siz olsanız bunu nasıl yazarsınız?

Nazlı: Öğretmenim gene 10 olacak dimi sonucu?

Araştırmacı: Bilmiyorum ki. Sizce gene 10 mu olacak? Nazlıdan güzel bir soru geldi. 9 tane armutu bırakıp 9 tane ayva alırsanız acaba gene sonucunuz 10 mu olacak?

Ataberk: 10 oluyor.

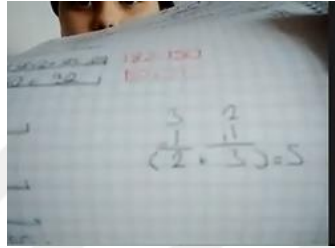
Araştırmacı: 10 oluyor diyor mesela Ataberk. 9 tane armutu bırakın. Yerine 9 tane ayva alın.

Melda: Ben yapamadım.

Araştırmacı: Ben yapamadım dedi Melda.

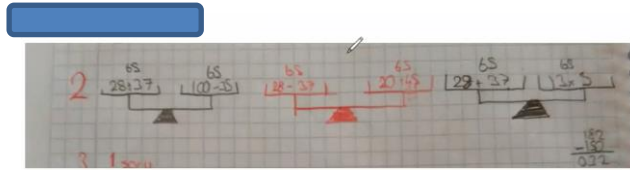
Doğru verilen denklemde terazi modeli, sayısal, sözel temsil geçişleri ile eşitliği bozmayacak şekilde yapılan adımları yorumlamayı gerektiren Etkinlik.1. Alıştırma.1

Soru.1’de Melda’nın modelde verilen durumu matematiksel olarak yazarken Görsel 3.97’de görüldüğü üzere ‘ $3-1=2$; $2+1=3$; $2+3=5$ ’ gibi eşit işaretini işlem yapıp sonuç yazmak için kullanılan bir sembol olarak kesin işlemsel yorumlamayla kullanmayı tercih ettiği görülmüştür. Örneğin terazi modelinde verilen aşağıdaki soruda aynı kefedede farklı keselerdeki 3 ve 2 bilyeden birinden alıp diğerine verdiğimiz o bir bilyeyi matematiksel olarak yazarken ‘ $3+2 = (3-1)+(2+1)$ ’ şeklinde yazmak yerine her bir işlemi ayrı ayrı yazdığından hareketle eşit işaretinin kesin işlemsel yorumlamasını kullandığı görülmüştür.



Görsel 3. 97. Melda'nın Etkinlik.1. Alıştırma.1 Soru.1'e ilişkin cevabı

Doğru verilen denklemde eşitliği bozmayacak şekilde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında bu adımları farklı durumlarda uygulamayı gerektiren terazi modeli ile ilişkili Etkinlik.1 Alıştırma.1 soru.2’de Melda’nın ‘ $28+37=(28+2)+(37-2)$ ’ şeklinde verilen ifadede Görsel 3.98’de görüldüğü üzere sonuçları hesaplayıp sonuçları aynı çıkacak şekilde farklı sayılar ürettiğinden temel ilişkisel yorumlamayı kullanmayı tercih ettiği yönünde değerlendirilmiştir.



Görsel 3. 98. Melda'nın Etkinlik-1 Alıştırma-1 soru-2'ye ilişkin cevabı

Melda: Ben burada ikisinin de sonucunun 67 çıkması gerektiğini görünce 100’den 35’i çıkardım 67 diye ama.(burada 65 diyeceğine yanlış söyledi) çıkarma yapmadım o yüzden.

Araştırmacı: 65 mi demek istedin?

Melda: İkisinin de sonu... eee 28 artı 37, 65 yapıyor diye buldum.

Araştırmacı: He he.

Melda: 100 eksi 35 de 65 yapıyor diye onu yazdım ben ama işte ekleyip çıkarma yapacaktınız. Yukarıdaki işlemi görmedim ben.

Eşitliği sağlayan eksik değeri bulmaya yönelik bulgular (e.1.1. Soru):

Açık sayı cümlesinde eksik değeri bulmayı gerektiren 15 sayısını elde edecek şekilde farklı işlemler yazmalarının istendiği Etkinlik.1 Soru.1’de Görsel 3.99’da görüldüğü üzere 15 yazdıktan sonra işlemleri yapıp yeniden sonucun 15 olduğunu yazma ihtiyacı hissettiği görülmüştür. Bu durumda aslında başta yazan 15’i yeterli bulmuyor olduğu şeklinde yorumlandığından grup görüşmesinde ‘birini silmek istesek hangisini silmeliyiz? Ya da silmeli miyiz?’ soruları yöneltildiğinde en sona yazdığı 15’i yeniden yazmasına gerek olmadığını fark ettiği görülmüştür. Bu süreçte eşit işaretinin hem kesin işlemsel yani sonuç gösterme işlevi hem de esnek işlemsel yani sonucun işleminden önce de yazılabileceği işlevinin farkına vardığı görülmüştür.

15 $7 \times 2 = 14 + 1 = 15$ 15 $20 = 2 - 15$
15 $8 \times 2 = 16 - 1 = 15$ 15 $20 - 5 = 15$
15 $5 \times 2 = 10 + 5 = 15$ 15 $50 - 35 = 15$

Görsel 3. 99. Melda'nın Etkinlik-1 soru-1'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Ama biraz gereksiz gibi mi? Sen ne diyorsun Melda? Sence hangi 15 olmasa olur? İkisi de olmalı mı?

Melda: Bence ikisi de olabilir ama sondaki olmasa daha iyi olur. Çünkü 15 ile bir şeyi topluyormuşuz ya da çarpıyormuşuz artık orada hangi işlemi kullanıyorsak. Sonucu 15 çıkıyormuş. Yani ikisi de eşit oluyormuş. Ona göre 10 artı 5 yaparsın 15 olduğunu bunu bulursun ve 15'in 15 olduğunu da o aradaki eşittirden anlayabilirsin. Bence o sondaki eşittir biraz gereksiz oluyor ama eğer sonucu göstermek için yapıyorsa o da olur.

3.1.4.2.2. Melda'nın matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları

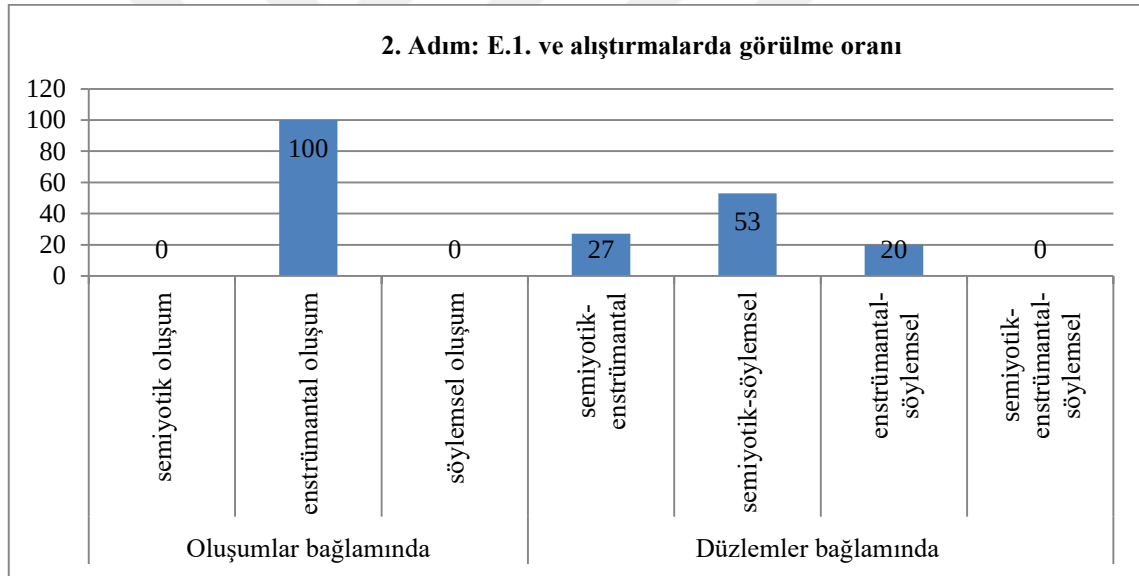
Melda'nın 2. Adım: etkinlik-1 ve ilişkili iki alıştırma Tablo 3.29 ve Grafik 3.36'da görüldüğü üzere sadece enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler görülmüştür. Çalışmalarının düzlemlerde yer alma oranları sırasıyla semiyotik-

söylemsel düzlemde yer alma oranı %53, semiyotik-enstrümantal düzlemde yer alma oranı %27, enstrümantal-söylemsel düzlemde yer alma oranının %20 olduğu görülmüştür.

Tablo 3. 29. Melda'nın 2. Adımda oluşumlar ve düzlemlerin sorulara göre görülme durumu

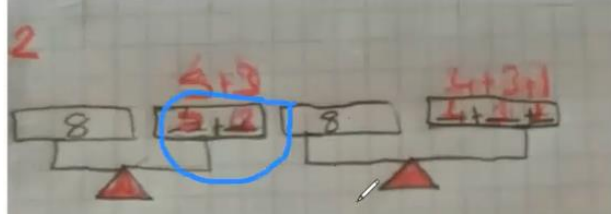
Eşit İşaretinin Yorumlanmasında Oluşumlar ve Düzlemler		E.1.S.1.	E.1.S.2.	E.1.S.3.	A.1.S.1.	A.1.S.2.	A.1.S.3.	A.1.S.4.	A.2.S.1.
Oluşumlar bağlamında	Semiyotik oluşum								
	Enstrümantal oluşum	3	1	2	6				
	Söylemsel oluşum								
Düzlemler bağlamında	Semiyotik-enstrümantal			2				2	
	Semiyotik-söylemsel			5					3
	Enstrümantal-söylemsel			3					
	Semiyotik-enstrümantal-söylemsel								

Grafik 3. 36. Melda'nın 2. Adımda oluşumlar ve düzlemlerin görülme oranı



Eşit '=' işaretini anlamlandırmaya yönelik bulgular (e.1.2. soru):

Terazi modeli ile ilişkilendirilen eşdeğer denklemlerde işareti anlamlandırmayı gerektiren Etkinlik.1 soru.2'de Melda'nın terazi modellerinden birinde; sol kefesinde 8 top, sağ kefesinde 5 ve 3 top; diğerinde sol kefesinde 8 top sağ kefesinde 4,3 ve 1 top olacak şekilde verildiğinde Görsel 3.100'de görüldüğü üzere terazi modelinin dengede duruşu ile eşit işareti arasında anlamlı ilişki kurabilmiş ve 8'e eşit olacak şekilde farklı sayıların toplamlarını yazabildiğinden enstrümantal oluşumun bileşenlerinin göstergesi olarak ele alınmıştır.



Görsel 3. 100. Melda'nın Etkinlik-1 soru-2'ye ilişkin cevabı

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik bulgular (e.1.3., a.1.1., a.1.2., a.1.3., a.1.4, a.2.,1.sorular):

Doğru verilen denklemde eşitliği bozmadan yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulamayı gerektiren Etkinlik.1 soru.3'te grup görüşmesinde Melda'nın eşit işaretinin verildiği durumlarda eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlanmasını problemin çözümünde doğrulama-açıklama-gerekçelendirme sürecinde kullanabildiği görüldüğünden çalışmasının **semiyotik-söylemsel** düzlemde olduğunu gösteren bir gösterge olarak ele alınmıştır.

Araştırmacı: Tamamdır. Melda sen ne diyorsun?

Melda: İııı burada madem o kadar çok ayva almak istiyor. O zaman 6 tane armut almaz. O alacağı 6 armudu 4'ün üzerine ekler. Yani 4 tane ayva alacakmış önceden. Yani 0 tane, yani hiç almaz armut.

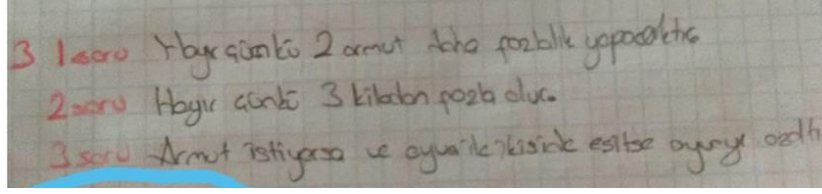
Araştırmacı: Hı hı.

Melda: O zaman, bir de toplamaları 10 kilo ettiği için, parası da fark etmez.

Araştırmacı: O kadar şey yapıyoruz nasıl toplamaları hala 10 kilo ediyor?

Melda: Birinde üzerine ekliyoruz direk. Hiç kalmıyor armutlardan. Öbüründe de toplamaları o ikisinin üzerine eklediğimiz için armutları ayvaların üzerine eklediğimiz için orası 10 oluyor. Onu direk aşağıya geçiriyoruz. Yukarıda da armut kalmamıştı. O da 0 oluyor. 0 artı 10, 10 ediyor.

Aynı şekilde Etkinlik.1 soru.3'te üç (3) armut ve beş (5) ayvanın terazi modelinde dengede olduğu durumda armut ve ayvaların yanına 2 armut daha eklenerek terazinin eşitliğin bozulup bozulmadığı, bununla beraber yeniden dengeye gelebilmesi için hangi işlemlerin yapılabileceği sorulduğunda bireysel uygulamada Görsel 3.101'de görülen cevabı verdiği ve grup görüşmesinde Melda'nın terazi modelini işe koşarak doğrulayıcı-açıklayıcı ifadelerle yer verdiği görüldüğünden çalışmasının **enstrümantal-söylemsel** düzlemde olduğunun göstergeleri olarak kabul edilmiştir.



Görsel 3. 101. Melda'nın Etkinlik-1 soru-3'e ilişkin cevabı

Terazi modeli, sayısal, sözel temsil geçişleri ile doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlamayı gerektiren Etkinlik.1 Alıştırma.1 soru.1'de Melda'nın terazi modelinde verilen durumları eşit işaretini de kullanarak anlamlandırabildiği; terazi modelini problemin çözümünde işe koşabildiği görülmüştür. Aynı zamanda grup görüşmesinde sorulan terazi modelini gözünde canlandırarak terazinin dengesinin bozulduğu durumları belirlemeyi de gerektiren ilave soruda 'sağ tarafındakinden sol taraftakine vermezsen bence hepsi sağ tarafta olursa. Sağ taraftaki daha ağırlık yapar' ifadesini kullandığından terazi modelinde verilen problem durumunu doğru yorumlayıp problemin çözümünde işe koşabildiğinden **enstrümantal oluşumun** bileşenlerinin bir göstergesi olarak yorumlanmıştır.

Araştırmacı: Tamam. Melda sen ne diyorsun? Terazinin sol tarafından aldım sağ tarafına verdim. Terazinin dengesi bozulur mu?

Melda: Eee şimdi sağ tarafındakinden sol taraftakine vermezsen bence hepsi sağ tarafta olursa. Sağ taraftaki daha ağırlık yapar.

Terazi modeli ile ilişkili doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulamayı gerektiren Etkinlik.1 Alıştırma.1 Soru.4'te toplanan iki sayıdan birinden çıkarılan sayının diğerine eklenmesi durumunda eşitliğin bozulmayacağını işlem yapıp sonuç bularak temel ilişkisel yorumlamayı kullanarak belirlediği görülmüştür (Görsel 3.102). Grup görüşmesinde eklediği ve çıkardığı sayıyı belirlerken neye göre sayıyı seçtiği ya da eşitliğin aynı tarafında eklenen ve çıkarılan sayıların aynı olması durumunda eşitliğin bozulmayacağını işlemlerin sonucunu bularak ya da eşitliğin iki tarafını karşılaştırarak bulmaksızın sadece adım adım yaptığı işlemleri söylediği görüldüğünden Melda'nın bu çalışmalarda **semiyotik-enstrümantal** düzlemde olduğunu gösteren birer gösterge olarak yorumlanmıştır.

1. adım $182 - 150 = 32$
 2. adım $150 - 32 = 118$

1. $67 + 123 = 190$
 2. $98 + 46 = 144$
 3. $141 + 99 = 240$
 4. $1602 + 1088 = 2690$
 5. $879 + 121 = 1000$

Görsel 3. 102. Melda'nın Etkinlik-1 Alıştırma-1 Soru-4'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Tamam. Kayra 10 dedi. Melda sen ne diyorsun. (67+123=.... Sorusunda)

Melda: Ben 3 dedim.

[...]

Araştırmacı: Melda sen ne diyorsun. (141+99=.... Sorusunda)

Melda: 141'e aslında 9 eklersen 150 olur. O da olabilir.

Eşitliği sağlayan eksik değeri bulmaya yönelik bulgular (e.1.1. Soru):

Açık sayı cümlesinde eksik değeri bulmayı gerektiren Etkinlik.1 soru.1'de eşit işaretinin esnek işlemsel yorumlanmasını problemin çözümünde işe koşabilmesi beklendiğinde Görsel 3.103'te görüldüğü üzere tek adımlı işlemlerde eşit işaretinin diğer yorumlama biçimlerini de destekleyecek biçimde örnek verebildiği görülmüştür. Örneğin $15=30:2=15$ ifadesinde eşit işaretinin tüm yorumlama biçimlerini destekleyecek şekilde kullanabildiği görülmüştür. Bununla beraber ' $15, 7 \times 2=14+1=15$ ' ifadesinde eşit işaretinin kesin işlemsel yorumlanmasını işe koşup diğer yorumlama biçimleri tarafından desteklenmeyen bir örnek oluşturduğu görülmüştür. Tüm yorumlama biçimleri ile yorumlandığında matematiksel olarak doğru olan örneklerde (Görsel 3.103'te sağ taraftaki üç örnek) eşit işaretini anlamlı bir şekilde işe koşabildiğinden **enstrümantal oluşumun** bileşenlerinin görüldüğüne dair göstergeler olarak yorumlanmıştır.

$$\begin{array}{ll}
 15 \quad 7 \times 2 = 14 + 1 = 15 & 15 \quad 20 = 2 - 15 \\
 15 \quad 8 \times 2 = 16 - 1 = 15 & 15 \quad 20 - 5 = 15 \\
 15 \quad 5 \times 2 = 10 + 5 = 15 & 15 \quad 50 - 35 = 15
 \end{array}$$

Görsel 3. 103. Melda'nın Etkinlik-1 soru-1'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Ama biraz gereksiz gibi mi? Sen ne diyorsun Melda? Sence hangi 15 olmasa olur? İkisi de olmalı mı?

Melda: Bence ikisi de olabilir ama sondaki olmasa daha iyi olur. Çünkü 15 ile birşeyi topluyormuşuz ya da çarpıyormuşuz artık orada hangi işlemi kullanıyorsak. Sonucu 15 çıkıyormuş. Yani ikisi de eşit oluyormuş. Ona göre 10 artı 5 yaparsın 15 olduğunu bunu bulursun ve 15'in 15 olduğunu da o aradaki eşittirden anlayabilirsin. Bence o sondaki eşittir biraz gereksiz oluyor ama eğer sonucu göstermek için yapıyorsa o da olur.

3.1.4.3.Üçüncü adım: etkinlik-2 ve alıştırmalar

Bu bölümde Melda'nın 3. Adım: Etkinlik-2 ve ilişkili alıştırmalarına yönelik bulguları, kavramsal ve bağlamsal anlamaya ilişkin bulguları ve matematiksel çalışma uzayına ilişkin bulguları başlıkları altında verilmiştir.

3.1.4.3.1. Melda'nın kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları

Bu bölümde Melda'nın kavramsal ve bağlamsal anlamaya ilişkin bulguları Etkinlik-2 ve ilişkili alıştırmalarda yer alan soruların analizi sonucu elde edilen temalar başlıkları altında sunulmuştur.

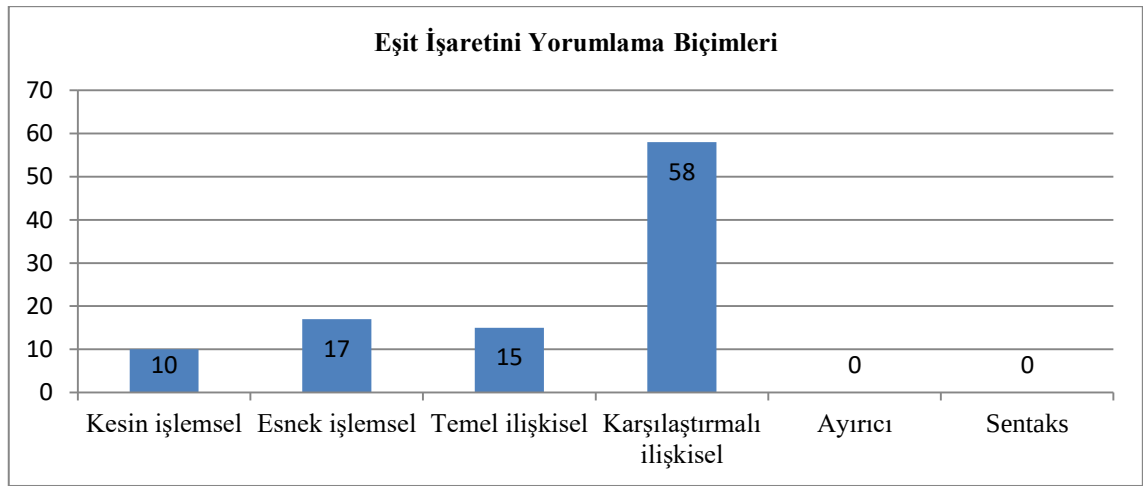
Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik bulgular:

Melda'nın 3. Adım: etkinlik.2. ve ilişkili alıştırmalar sürecinde eşit işaretini yorumladığı durumlar incelendiğinde farklı yorumlama biçimlerini kullanma oranlarına dair Tablo 3.30 ve Grafik 3.37 elde edilmiştir. Melda'nın 3. Adımda karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı %58 oranında kullandığı görülürken onu sırasıyla esnek işlemsel yorumlama %17 oranıyla, temel ilişkisel yorumlama %15 oranıyla, kesin işlemsel yorumlama %10 oranıyla takip ettiği görülür. Ayırıcı ve anlamından bağımsız bir şekil olarak yorumlandığı durumlarla karşılaşılmamıştır.

Tablo 3. 30. Melda'nın 3. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimlerinin sorularda görülme durumu

Eşittir İşaretini Yorumlama Biçimleri	E.2.S.1.	E.2.S.1.A.	E.2.S.2.	E.2.S.3.	E.2.A.1.S.1.	E.2.A.1.S.2.	E.2.A.2.S.1.
Kesin işlemsel			2			2	
Esnek işlemsel	5		1		1		
Temel ilişkisel		2	3	1			
Karşılaştırmalı ilişkisel		1	7	5	6	4	1
Ayırıcı							
Sentaks							

Grafik 3. 37. Melda'nın 3. Adımda eşit işaretini yorumlama biçimlerinin görülme oranı



Terazi modeli, sayısal, sözel, farklı temsil geçişleri ile ilişkili doğru verilen denklemde eşitliği bozmadan yapılan adımları yorumlama ve sonrasında bu adımları farklı durumlarda uygulamayı gerektiren Etkinlik.2 soru.1'de grup görüşmesinde Melda'ya terazi modelinde dengede verilen torba ile üç bilyenin yerlerini değiştirdiğimizde yine dengede kalıp kalamayacağı sorulduğunda dengenin bozulmayacağını farkedebildiği görüldüğünden eşit işaretinin esnek işlemsel yorumlamasını anlamlı bir şekilde kullanabildiği şeklinde değerlendirilmiştir.

Araştırmacı: Kayra öyle dedi. 3'le torbanın yerini mi değiştirsek dedi. Yani birini sağ birini sol tarafa yapsak dedi.

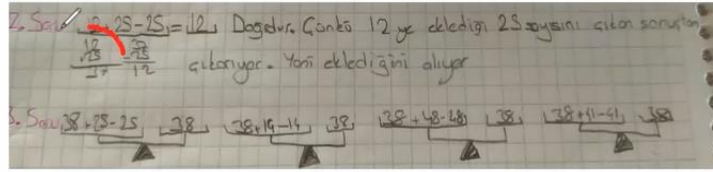
Nazlı: Olur öğretmenim gene aynısı sadece yerleri değişiyor.

Araştırmacı: Sizce olur mu Ataberk ve Melda?

Melda: İkisi aynı oluyor zaten.

Terazi modeli, sayısal, sözel, farklı temsil geçişleri ile ilişkili doğru verilen denklemde eşitliği bozmadan yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulamayı gerektiren Etkinlik.2 soru.1'de terazi modelinde dengede

verilen $12+25-25=12$ ifadesinde eklediğimiz sayıyı çıkardığımız için 12'nin değişmeyeceğini fark edip fark edemeyeceği görülmek istendiğinde Melda'nın Görsel 3.104'te görüldüğü üzere karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanarak 'yani eklediğini alıyor' ifadesini kullandığı görülse de grup görüşmesinde temel ilişkisel yorumlamayı kullanarak işlem yapıp sonuçları karşılaştırmayı ve kontrol etmeyi tercih ettiği görülmüştür.



Görsel 3. 104. Melda'nın Etkinlik-2 soru-1'e ilişkin cevabı

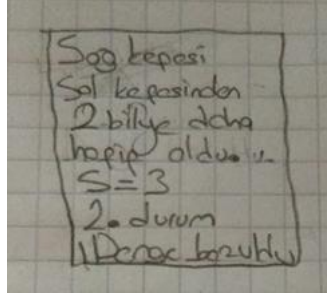
Araştırmacı: Hmmm anladım tamamdır. Şimdi Melda'ninkini de sorayım hemen. Melda da şöyle demiş çünkü 12'ye eklediği 25 sayısını çıkan sonuçtan çıkarıyor. Yani eklediğini alıyor diyor. Sonra gösterirken yine de Melda topluyor (öğretmen gülüyor)

Melda: (o da gülüyor)

Araştırmacı: 12'ye 25'i ekliyor 37 buluyor. 37'den de 25'i çıkarıyor. 12 buluyor. İçim rahat etmez diyor. Ben bir toplayayım çıkarayım diyor. (öğretmen gülüyor ve Melda da gülüyor) ne diyorsun Melda?

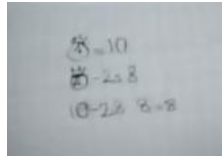
Melda: Öyle işte. Aynen işte garantilikten topladım.

Yine Etkinlik.2 soru.1'de dengede duran terazinin sol kefesinde bir torba ve sağ kefesinde 3 bilye varken sol kefesine eklenen 2 bilyeden sonra terazinin dengesinin bozulduğu görülmüştür. Melda'dan bu durumu matematiksel olarak temsil etmesi istendiğinde bu temsil sürecinde onlara rehberlik etmesi adına 'nokta nokta (.....) bırakılan yere matematiksel (sayı, işlem, eşittir-büyüktür-küçüktür sembollerinden uygun olanı) olarak yazınız' şeklinde bir ifade yer almasına rağmen Görsel 3.105'te görüldüğü üzere Melda'nın bu durumu ' $5=3$ ' şeklinde temsil ettiği görülmüştür.



Görsel 3. 105. Melda'nın Etkinlik2 soru-1'e ilişkin cevabı

Terazi modeli ile ilişkili, sayısal, sözel, farklı temsil geçişleri ile ilişkilendirilmiş doğru verilen denklemde yapılan adımları yorumlamayı gerektiren Etkinlik.2 soru.3'te Melda'nın terazi modelinin dengede olduğu durumlarda eşit işaretini kullanabildiği 'dengede olma' ifadesi ile eşitlik kavramını birbirini destekler nitelikte kullandığı görülmüştür. Terazinin dengede olduğu, sol kefesinde torbanın, sağ kefesinde 10 bilyenin olduğu modeli grup görüşmesinde 'torbayla 10 bilye eşitmiş' ifadesi ile sözel olarak temsil ederken; 'torba dengede olduğu için torbanın içi de 10'du' ifadesiyle beraber 'torba=10' yazarak cebirsel olarak da grup görüşmeleri sırasında ifade edebildiği görülmüştür.



Melda: Torbayı da kullandım.

Araştırmacı: Tamamdır.

Melda: Torbayla 10 bilye eşitmiş sonra 2 tane torbadan azaltmışlar haliyle torba dengede olduğu için torbanın içi de 10'du. 8 kaldı. Sonra toplardan da 2 bilye azaltırız. 8 olur. Yani torba yazacaktım oraya 8 eşittir 8 yazmışım. Torba eşittir 8 olacak.

Denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirlerken sözel ifadeyi yorumlamayı gerektiren Etkinlik.2 soru.4'te yer alan 'sol kefeye 3 bilye eklenince sağ kefeye de 3 bilye eklenmiştir. Sol kefedden 2 bilye çıkarılınca, sağ kefedden de 2 bilye çıkarılmıştır' ifadesinin doğruluğuna karar verirken grup görüşmesinde Melda'nın eşit işaretini ayırıcı bir sembol olarak görüp 'eşittir sembolünün soluna kaç eklenirse gene sağına da o eklenmelidir' şeklinde ifade kullandığı görülmüştür. Bu durum eşittirin solu ve sağ

ayrımını yapabildiğini ve iki tarafın eşit işareti ile karşılaştırılması sonucunda eşit olduklarının farkına vardığını göstermiştir.

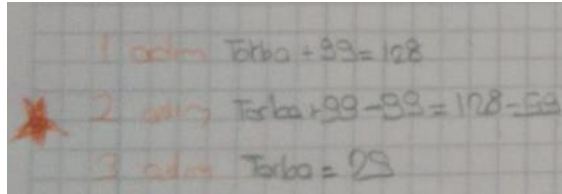
Araştırmacı: Melda ne diyorsun?

Melda: Eşittir sembolünün soluna kaç eklenirse gene sağına da o eklenmelidir. Yukarıda vardı bununla ilgili. 3 çıkartıyorsak sol kefesinden sağ kefesinden de 3 çıkarmalıyız gibi.

Araştırmacı: Doğru mu diyorsun o zaman?

Melda: Doğru diyorum ben buna.

Cebirsel temsil, terazi modeli, sözel temsil ilişkili doğru verilen denklemde eşitliği bozmadan yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulamayı gerektiren Etkinlik.2 Alıştırma.1 soru.1'de $Torba + 99 = 128$ sorusunda bilinmeyen torbayı hesaplaması istendiğinde Görsel 3.106'da görüldüğü üzere Melda'nın eşitliğin iki tarafından da 99'u çıkardığı ve torbayı hesaplayabildiği görülmüştür. Bu adımları bir algoritma gibi yukarıda verilen örneği tekrarlayarak mı yoksa anlamlı bir şekilde mi yaptığı anlaşılmaya çalışıldığında grup görüşmesinde Melda'nın karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanarak eşitliğin bir tarafından 99 çıkardığında eşitliğin bozulmaması için diğer tarafından da 99 çıkarması gerektiğinin farkında olduğu görülmüştür.



1 adım $Torba + 99 = 128$
2 adım $Torba + 99 - 99 = 128 - 99$
3 adım $Torba = 29$

Görsel 3. 106. Melda'nın Etkinlik-2 Alıştırma-1 soru-1'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Melda bulduk sana bir tane. Önce senden neden bu soruyu böyle yaptığını anlatmanı isteyeceğim.

Melda: Burada diyor ki torbayla 99'u toplayınca 128 ediyormuş. Torbaya 99 ekleyip 99 çıkaracağız. Çünkü eee burada torba artı 99, 128 yaptığına göre ve torbaya 99 ekliyoruz gene 128 yapıyor. Ondan gene 99'u çıkartıyoruz. O zaman bu en baştaki torba artı 99, 128 yapıyor. Onu en başta söyledim zaten. Orada 128 yapıyor. Burada kalemle gösterebilir miyim öğretmenim?

Araştırmacı: Süper olur.

Melda: Buradan biraz karışık oluyor çünkü. Torba artı 99, 128 buluyoruz. Ondan 99 çıkarıyoruz. O yüzden eşittirin sağ tarafına da 128 eksi 99 yazıyoruz.

Araştırmacı: Neden iki taraftan da 99'u çıkarmadın? Ayyy şey çıkardın?

Melda: Çünkü burada torba artı 99, 128 yapıyordu. Yukarıda onu yazmıştık. Ondan 99'u çıkartıyoruz haliyle 128'den de 99'u çıkarmamız gerekiyor. Eşit olması için (eşit olması için kısmını çok sessiz söylemiş o yüzden öğretmen neden diye sormuş)

Araştırmacı: Neden?

Melda: Eşit olması için.

3.1.4.3.2. Melda'nın matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları

Bu bölümde Melda'nın matematiksel çalışma uzayına ilişkin bulguları Etkinlik-2 ve ilişkili alıştırmalarda yer alan soruların analizi sonucu elde edilen temalar başlıkları altında sunulmuştur.

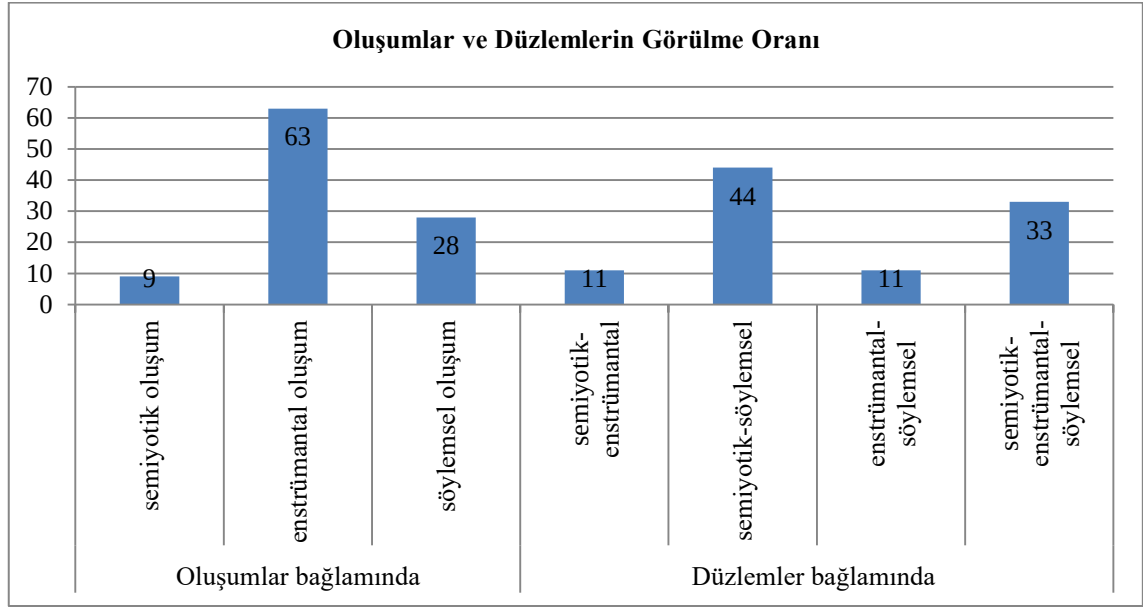
Eşitliği Bozmayan İşlemleri Belirlemeye Yönelik Bulgular:

Melda'nın 3. Adım: Etkinlik.2. ve ilişkili alıştırmalar süreci oluşumlar ve oluşumların ikişerli kombinasyonu bağlamında incelendiğinde Tablo 3.31 ve Grafik 3.38 elde edilmiştir. 3. adım sürecinde Melda'nın çalışmalarında oluşumların ve oluşumların bileşenlerinin görülme oranları sırasıyla enstrümantal oluşum %63 oranında, söylemsel oluşum %28 oranında, semiyotik oluşumun %9 oranında bileşenleri görülmüştür. Melda'nın matematiksel çalışmalarının düzlemlerde yer alma oranları da sırasıyla semiyotik-söylemsel düzlemde %44 oranında, %33 oranında semiyotik-enstrümantal-söylemsel düzlemlerde yani tamamlanmış bir çalışma olduğu, %11 oranında da hem semiyotik-enstrümantal hem de enstrümantal söylemsel düzlemde yer aldığı görülmüştür.

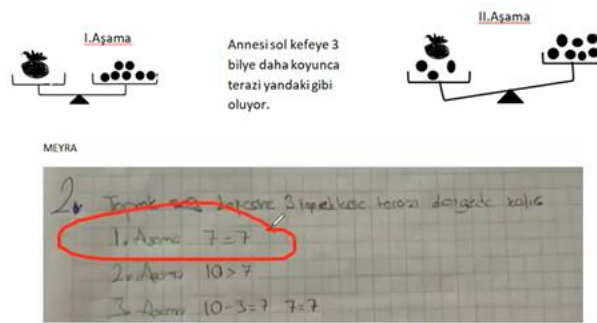
Tablo 3. 31. Melda'nın 3. Adımda oluşumlar ve düzlemlerin sorularda görülme durumu

Eşit İşaretinin Yorumlanmasında Oluşumlar ve Düzlemler		E.2.S.1.	E.2.S.1.A.	E.2.S.2.	E.2.S.3.	E.2.A.1.S.1.	E.2.A.1.S.2.	E.2.A.2.S.1.
Oluşumlar bağlamında	Semiyotik oluşum		1		1			1
	Enstrümantal oluşum	6	1	8	4			1
	Söylemsel oluşum		1		2	2	2	2
Düzlemler bağlamında	Semiyotik-enstrümantal						1	
	Semiyotik-söylemsel				3	1		
	Enstrümantal-söylemsel	1						
	Semiyotik-enstrümantal-söylemsel		1		1			1

Grafik 3. 38. Melda'nın 3. Adımda oluşumlar ve düzlemlerin görülme oranı



Terazi modeli, sayısal, sözel, farklı temsil geçişleri ile ilişkilendirilmiş doğru verilen denklemde eşitliği bozmayacak şekilde yapılan adımları yorumlamayı gerektiren Etkinlik.2 soru.2'de Görsel 3.107'de görüldüğü üzere Melda'nın terazi modelinde dengede verilen durumu eşit işareti ile; dengede olmadığı durumu da büyüktür sembolü kullanarak gösterebilmesi terazi modelini problemin çözümünde anlamlı bir şekilde işe koşabildiğini gösterdiğinden **enstrümantal oluşumun** bileşenlerinin görüldüğü şeklinde yorumlanmıştır.



Görsel 3. 107. Melda'nın Etkinlik-2 soru-2'ye ilişkin cevabı

Melda'nın grup görüşmesinde 'terazinin dengede olma durumunda sol kefeye ne kadar ekliyorsak sağ kefeye de o kadar eklemeliyiz' ifadesinin doğruluğuna karar verirken daha önceden yaptığımız benzer durumları referans göstererek gerekçelendirme yapıyor olması **söylemsel oluşumun** bileşenlerinin göstergesi olarak

yorumlanmıştır. Söylemsel oluşumda örnek durumlardan yola çıkarak kendi durumuna da genelliyor olması tümevarımsal bir düşünme şekline işaret ettiği düşünülmüştür. Aşağıda verilen Melda'nın grup görüşmelerinden alıntılarda da görüldüğü gibi verdiği cevabın nedenini açıklaması istendiğinde 'yukarıda da var' gibi ifadelerle benzer örnekleri referans gösterdiği görülmüştür.

Araştırmacı: Peki. Eşit olması için dedin ya Melda benim de aklıma şöyle bir soru geliyor. Yaaa diyorum bu çocuklar neden hep 99'u seçiyorlar? Madem amaç eşitliği bozmamak. Bu soru hepinize. Önce Melda'yla başlayacağım. Sonra size de soracağım. Sizin de fikrinizi merak ediyorum. Mesela hepiniz şöyle yapıyorsunuz ya hem sol taraftan 99'u hem de sağ taraftan 99'u çıkarıyorsunuz ya benim de aklıma şöyle bir fikir geliyor. Yaa diyorum ben 99'u değil de 5'i çıkarsam olur mu. Yani şöyle: torba artı 99.... Hem bu taraftan 5'i çıkarsam hem de 128'in olduğu yerden 5'i çıkarsam sizce olur mu? Melda'yla başlayalım.

Melda: Olur. Çünkü burada demiştik torba artı 99, 128 yapıyor. Yukarıda da var aynısı. Ondan da 5'i çıkarıyoruz. Haliyle 128'den gene 5'i çıkarıyoruz. Bir şey fark etmez yani.

Araştırmacı: Neden fark etmiyor? Yine dengede kalmaya devam ediyor mu? Yine eşit kalmaya devam ediyor mu?

Melda: Evet.

Araştırmacı: Neden?

Melda: Çünkü yukarıda da var toplamı 128 ediyor. Ondan istediğimizi çıkartabiliriz artık ama o zaman yan taraftan da ne eklediysen onu çıkartacağız. Yani ayyy çıkartacağız.

Etkinlik.2 soru.4'te sözel olarak verilen 'sol kefeye 3 bilye eklenince, sağ kefedden 3 bilye çıkarılmıştır. Sol kefedden 2 bilye çıkarılınca, sağ kefeye 2 bilye eklenmiştir' ifadesinde terazi ve eşit işaretine dair ifadenin doğruluğunu yanlışlığını gerekçelendirirken grup görüşmesinde eşit işaretinin ya da terazi modelinin özelliklerinden yararlanarak, sayısal değerlerle örnek bir durumdan yola çıkarak açıklama yaptığı görüldüğünden Melda'nın çalışmalarının **semiyotik-söylemsel** düzlemde yer aldığına dair bir gösterge olarak kabul edilmiştir.

Melda: Ben burada şey düşündüm. Mesela 5 yazıyor. 5 artı 5 ; 5 eksi 5. 5 eksi 5 sıfır yapar. 5 artı 5 da 10 yapar. Hani eşit olmaz mantığıyla ben buna hayır dedim.

Araştırmacı: Hmmm anladım şimdi sen sayı örneği vererek düşündün o zaman.

Melda: Evet.

Etkinlik.2 soru.4'te sözel olarak verilen 'eşittir sembolünün olduğu durumlarda eşitliğin sağından hangi sayı çıkarıldıysa o sayı eşitliğin soluna eklenmeli' terazi ve eşit

işaretine dair sözel olarak verilen ifadenin doğruluğuna karar verirken grup görüşmesinde ‘iki tane kefe var diyelim sağ kefeyle sol kefe şu anda eşit sol kefedden aldığımızı sağ kefeye verirse sağ kefe daha ağır olur’ ifadesiyle hem terazi modelini işe koşabildiği, hem terazinin özelliğini işe koşarak gerekçelendirme yapabildiği, açıklayabildiği hem de eşit işareti ile ilgili verilen bir ifadede terazi modelini gözünde canlandırabildiği görüldüğünden çalışmada semiyotik-enstrümantal-söylemsel düzlemlerin etkileşimi görüldüğünden tamamlanmış bir çalışma olarak değerlendirilmiştir.

Araştırmacı: Sen ne diyorsun Melda?

Melda: Bence bu yanlıştır çünkü iki tane kefe var diyelim sağ kefeyle sol kefe şu anda eşit sol kefedden aldığımızı sağ kefeye verirse sağ kefe daha ağır olur.

Cebirsel temsil, terazi modeli, sözel temsil ile ilişkilendirilmiş doğru verilen denklemde eşitliği bozmayacak şekilde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında bu adımları farklı durumlarda uygulamayı gerektiren Etkinlik.2 Alıştırma.1 soru.2’de Melda’nın ‘ $84 = \text{torba} - 30$ ’ ifadesinde torbayı bulurken eşitliğin her iki tarafına da 30 eklediği görülmüştür (Görsel 3.108). Grup görüşmesinde yaptığı adımların nedenini açıklaması istendiğinde ‘yukarıdaki örneği inceleyip sonra altındakileri yaptığım için yukarıdaki örnekteki gibi yaptım’ ifadesinden hareketle sorulardan önce verilen örneği inceleyip adımları bir algoritma gibi uyguladığı görüldüğünden çalışmasının **semiyotik-enstrümantal** düzlemde yer aldığı yönünde değerlendirilmiştir.

1. soru $84 = \text{torba} - 30$

2. soru $84 + 30 = \text{torba} + 30 - 30$

2. soru $114 = \text{torba}$

Görsel 3. 108. Melda’nın Etkinlik-2 Alıştırma-1 soru-2’ye ilişkin cevabı

Araştırmacı: Tamam. Melda sen nasıl düşündün? Neden 30 ekledin?

Melda: Önce ben yukarıdaki örneği inceleyip sonra altındakileri yaptığım için yukarıdaki örnekteki gibi yaptım.

3.1.4.4.Dördüncü adım: son değerlendirme

Bu bölümde Melda'nın 4. Adım: Son değerlendirmeye yönelik bulguları, kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları ve matematiksel çalışma uzayı ile bulguları başlıkları altında sunulmuştur.

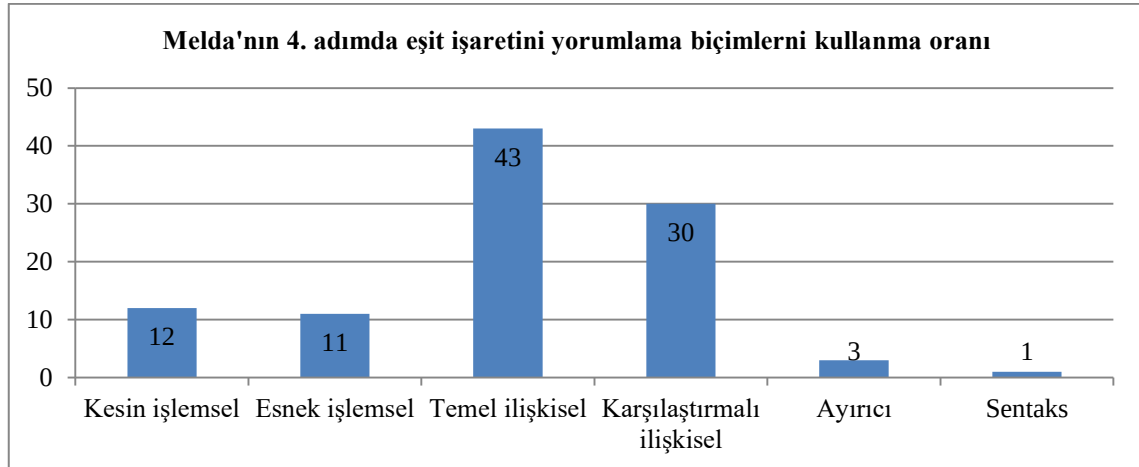
3.1.4.4.1. Melda'nın kavramsal ve bağlamsal anlamayla ilgili bulguları

Melda'nın 4. Adım: son değerlendirme sürecinde eşit işaretini yorumladığı durumlar incelendiğinde farklı yorumlama biçimlerini kullanma oranlarına dair Tablo 3.32 ve Grafik 3.39 elde edilmiştir. 4. adımda eşit işaretini yorumlama biçimleri ve oranları sırasıyla yaklaşık olarak temel ilişkisel yorumlama %43 oranında, karşılaştırmalı ilişkisel yorumlama %30 oranında, kesin işlemsel yorumlama %12 oranında, esnek işlemsel yorumlamanın %11 oranında kullanıldığı görülür.

Tablo 3. 32. Melda'nın son değerlendirmede eşit işaretini yorumlama biçimlerinin sorularda görülme durumu

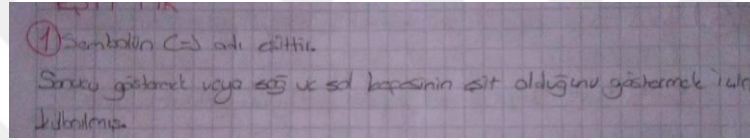
Eşit İşaretini Yorumlama Biçimleri	S.D.S.1.	S.D.S.2.	S.D.S.3.	S.D.S.4.	S.D.S.5.	S.D.S.6.	S.D.S.7.	S.D.S.8.	S.D.S.9.	S.D.S.10.	S.D.S.11.	S.D.S.12.
Kesin işlemsel	3		5				3	1		3	4	
Esnek işlemsel	3				9	1	4					
Temel ilişkisel	4		16	1		4	8	11	4	17		5
Karşılaştırmalı ilişkisel			8	7		6	5	11	2	9		1
Ayrıcı							2			2	1	
Sentaks	1											

Grafik 3. 39. Melda'nın son değerlendirmede eşit işaretini yorumlama biçimlerinin görülme oranı



Eşit '=' işaretini anlamlandırmaya yönelik bulgular (1.,2.,3.,5. ve 11. sorular):

' $a+b=c$ ' standart ifadesinde işareti anlamlandırmayı destekleyen soru.1'de Melda'nın $7+3=10$ ifadesindeki eşit işaretine dair ifadeleri incelendiğinde farklı yorumlama biçimlerini kullanabildiği görülmüştür. Bireysel görüşmede 'sonucu göstermek için' kullanıldığını söylüyor olması kesin işlemsel yorumladığı şeklinde değerlendirilirken; bireysel uygulamada 'sağ ve sol kefenin eşit olduğunu göstermek için' kullanıldığını söylüyor olması ilişkisel yorumladığının bir göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Bireysel görüşmede 'iki rakamın eşit olduğunu göstermek için' kullanıldığını söylüyor olması da esnek işlemsel yorumladığına dair bir gösterge olarak değerlendirilmiştir. Aynı zamanda Melda'nın bu farklı yorumlamaların canlı derslerden sonra geliştiğini ifade ettiği görülmüştür.



Görsel 3. 109. Melda'nın son değerlendirme soru-1'e ilişkin cevabı

Melda: Burada eşittir olduğu için benim aklıma ilk terazi geldi. Son zamanlarda çok teraziden gidiyorduk. O yüzden kefe kullandık. 7 artı 3, 10 yapar. Orası sol kefe. 10 da sağ kefe olur.

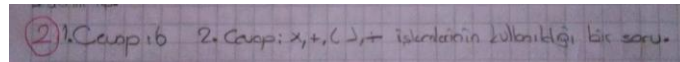
[...]

Melda: İki rakamın ... aslında buraya yazdım sağ ve sol kefenin eşit olduğunu da. İki rakamın birbirine eşit olduğunu. İşte onu bu canlı ders yaptıktan sonra aklıma gelmişti.

Araştırmacı: Mesela ne demek istiyorsun. İki rakamın birbirine eşit olduğu derken?

Melda: Yani bu canlı dersleri yapmadan önce ben sadece sonucu göstermek için kullanıldığını düşünüyordum. Şimdi fark ettim ki hani iki tarafın da birbirlerine eşit olduğunu göstermek için. Çünkü sonucu gösterirken o ikisinin toplamı 10'muş. Mesela 7 artı 3'ün toplamı 10'muş. 7 artı 3, 10'a eşittir. Bunu öğrendim işte.

Eşit işaretinin yokluğunda ifadeye etkisini yorumlamayı sağlayan soru.2'de bireysel uygulamada eşit işaretinin olmadığı bu durumu daha çok bir süreç olarak değerlendirip, sonuç bulmaya çalışmadığı görülmüştür (Görsel 3.110). Öğretmenle yapılan bireysel görüşme sırasında sadece bir süreç değil aynı zamanda bu işlemlerin bir cevabı da olacağı ifade ettiği görülmüştür.



Görsel 3. 110. Melda'nın son değerlendirme soru-2'ye ilişkin cevabı

Araştırmacı: Demişsin ki çarpı artı eksi bölme... sanırım orası eksi bölme. Yanlış da okuyorsam sen düzeltirsin.

Melda: Şey çarpı artı parantez içi ve bölme işlemlerinin kullanıldığı bir soru.

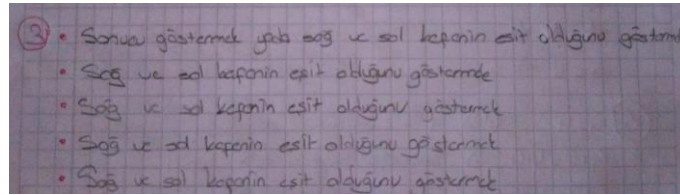
Araştırmacı: Anladım. Parantez içiymiş o.

Melda: Nedir diyor ya.

Araştırmacı: O zaman sen bunu bir soru olarak mı tanımladın? Mesela tek bir kelime seçsen oradaki işlemleri vurgulamasan. Hangi işlemler olduğunu. Çarpı artı falan diye vurgulamasan. Çünkü o işlemler başka bir işlem de olabilirdi.

Melda: Soru olabilir aslında. Ya da cevap verirken ben burada cevap yazdım sadece.

Eşdeğer denklemlerde işareti anlamlandırmayı gerektiren soru.3'te Melda'nın ilk değerlendirmede 'sonucu göstermek için' kullanıldığını ifade ettiği eşit işaretinin yer aldığı ' $5+4=6+3=9$ ' tipindeki sorularda son değerlendirme sürecinde eşit işaretinin kullanım amacını 'sağ ve sol kefenin eşit olduğunu göstermek için' şeklinde ifade ettiği görülmüştür (Görsel 3.111). Bu durum eşit işaretinin ilişkisel yorumlanmasına daha fazla yer verdiğini gösterdiği şeklinde yorumlanmıştır. Aynı zamanda eşitliğin solundaki $5+4$ ifadesindeki 4'ten 1 azaltıp 5'e verdiği için yeni ifadenin $6+3$ olduğunu, böylece birinden alıp diğerine verdiğinden eşitliğin bozulmadığını yani karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı farkedebildiği görülmüştür.



Görsel 3. 111. Melda'nın son değerlendirme soru-3'e ilişkin cevabı

Melda: 6 artı 3'ün 9'a eşit olduğunu; 5 artı 4'ün de gene 9'a eşit olduğunu göstermek için kullanılmış olabilir ya da bunu ilk açtığımızda iki kere yaptık ya bunu. Bu sayfaları. İlk açtığımızda ben şey düşünmüştüm. 5 artı 4, 6 artı 3'e eşitmiş. İkisi de 9. Buradaki 9'u ben ilk olarak sonucu göstermiş. İkisinin sonucunu göstermiş diye düşünmüştüm.

Araştırmacı: Şimdi?

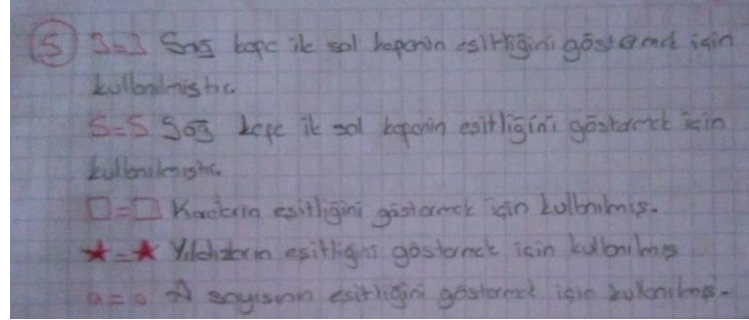
Melda: Şu anda eşit olabilir de diyorum. Eşitliğini göstermek için de kullanılmış olabilir.

Araştırmacı: Hmm iki tarafın eşitliği anlamında mı? Bir de Melda şeyi soracağım ben. Mesela dedin ki ikisinin eşit olduğunu nasıl anladın diye sorduğum zaman sen dedin ki 5'le 4'ü topluyoruz 9 oluyor. 6'yla 3'ü de topluyoruz 9 oluyor. O yüzden birbirlerine eşit dedin.

Ben de diyorum ki yaa acaba diyorum Melda biz bu soruları bu soruyu hatta sadece bunun için konuşalım. Hiç 5'le 4'ü toplamasak ve 9 bulmasak 6'yla 3'ü toplayıp 9 bulmasak yani sonuçlarını bulmasak sayılardaki değişime bakarak aaa bunlar zaten eşit çünkü.... Diyebilir miyiz?

Melda: Diyebiliriz. Çünkü burada 5 artı 4 yapmış. Burada oradaki 4'ten 1 azaltmış. O azalttığı sayıyı 6'ya vermiş.

'a=a' durumunu sayı, şekil, cebirsel farklı temsilleri kullanarak işareti anlamlandırmayı gereken soru.5'te $3=3$ veya kare=kare şeklinde verilen sorularda eşit işaretinin anlamını, amacını ifade ederken Görsel 3.112'de ve bireysel görüşme dökümünden verilen alıntıda görüldüğü üzere 'sol kefe-sağ kefe' 'dengede' 'terazi' gibi ifadelerle yer verdiği görülmüştür. Kullandığı bu ifadelerin eşit işaretinin ilişkisel yorumlanmasını destekler nitelikte olduğu değerlendirilmiştir. Melda'nın cebirsel olarak verilen kare=kare ifadesini yorumlarken 'Atıyorum bir karenin içinde üç varsa ve bunlar eşitse, öbür karenin içinde de üç olması lazım' 'Kutular belki kareler kutulardır. Hani içlerinde sayı vardır ya da. Karenin ikisi eşitmiş çünkü arasına eşittir koymuş' şeklinde yaptığı açıklamadan yola çıkarak cebirsel verilen ifadeyi doğru bir şekilde sözel olarak yorumlayabildiği ele alınmıştır.



Görsel 3. 112. Melda'nın son değerlendirme soru-5'e ilişkin cevabı

Melda: 3'lerin eşit olduğunu göstermek. Ben burada sağ ve sol kefenin eşitliğini göstermek için kullanılmıştır dedim.

Araştırmacı: Peki... oradaki sağ ve sol kefe dediğin yani nasıl? 3 eşittir 3. Sağ kefedeki ne var? Sol kefedeki ne var? Nasıl bir şey gözünde canlanıyor?

Melda: Bir tane terazi var. Sağ kefedeki 3 tane bilye var. Sol kefedeki gene 3 tane bilye var. O yüzden terazi dengede.

[...]

Araştırmacı: Hehhh karelerin eşitliği nasıl oluyor? Ne demek yani karelerin eşitliği?

Melda: Mesela bir tane kare var. Bu ikisinin arasına eşittir koyduysa demek ki o ikisi eşitmiş. Atıyorum bir karenin içinde üç varsa ve bunlar eşitse, öbür karenin içinde de üç olması lazım

Araştırmacı: 3 derken, 3, sayı olarak mı 3 var karenin içinde.

Melda: Aklıma ilk o geldi. Kutular belki kareler kutulardır. Hani içlerinde sayı vardır ya da. Karenin ikisi eşitmiş çünkü arasına eşittir koymuş.

Hatalı eşdeğer denklemi farkederek işareti anlamlandırmayı gerektiren soru.11’de ‘ $6+9=15:3=5+2=7$ ’ ifadesinde bireysel görüşmede eşittirin sol tarafı ve sağ tarafının eşitliğine vurgu yaptığı görülse de eşitliğin sol tarafını ‘ $6+9=15:3=5+2$ ’ eşittirin sağ tarafını ise sadece ‘7’ olarak yorumladığı görülmüştür. Bu durumda eşit işaretinin iki tarafının eşit olması gerekliliğini ifade ediyor olması ilişkisel yorumladığı şeklinde değerlendirilse de eşit işaretinin sol ve sağ tarafını her eşit işareti için ayrı ayrı değerlendiremediğini de gösterir. Öğretmenin bu ayrımın üzerinde düşünmesini sağlamak adına sorduğu sorulardan sonra Melda’nın sonucun doğru olmasını sağlayacak şekilde eşit işaretinin yerine karar verdiği görülmüştür.

Araştırmacı: Peki mesela sen şey diye karar verdin ya Melda. Şuranın sol taraf olduğuna karar verdin. Şuranın sağ taraf olduğuna karar verdin. (öğretmen sol tarafla sağ tarafı ekrandan gösteriyor) Nasıl karar verdin buna?

Melda: Burada başka bir sonuç olmaz. Son orada kalması lazım ki.. çünkü işlemlere bakıyoruz. 9 artı 6, 15. 15 bölü 3, 5. İşlemler birbirlerini tamamlıyor. 5 artı 2, bunun sonucu ne o zaman. 7. Sonda kaldığı için ben onu şey yaptım.

[...]

$$11. \quad 6 + 9 = 15 : 3 = 5 + 2 = 7 \text{ ifa}$$

Melda: 15 bölü 3, 5 yapar. 5 artı 2, 7 yapar. 6 artı 9 da, 15 yapar. Bir taraf 7, bir taraf 15 olur.

Araştırmacı: O zaman burada da olmadı.

Melda: Ama en sonda yaptığımızda 6 artı 9, 15 yapar. 15 bölü 3, 5 yapar. 5 artı 2, 7 yapar. 7, 7’ye eşittir hani diyebiliyoruz en sondakinde.

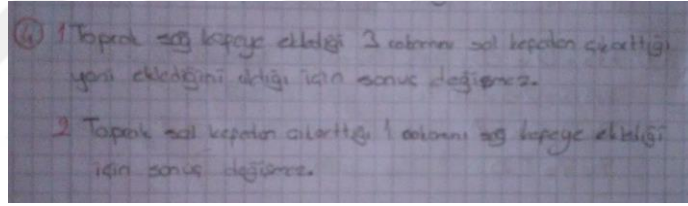
[...]

Araştırmacı: Ama bir sürü eşittiri koymuşlar oraya onlar da. Sen teraziyi buraya neden koymayı tercih ettin. Mesela teraziyi mutlaka en sondaki eşittire göre yerleştirmelisiniz diye bir kural mı var?

Melda: Yok ama hani burada 15'ten sonra 5 artı 2, onu sağ taraf yaptık, terazinin sağ tarafı yaptık. Terazinin sağ tarafı diye aklımıza koyduk ama burada o zaman sonuçları eşit olmuyor.

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik bulgular (4., 6., 7. ve 8. sorular):

Doğru verilen denklemde eşitliği bozmadan yapılan adımları yorumlama ve sonrasında farklı durumlarda uygulamayı gerektiren soru.4'te $47+25$ sorusunda $47+25 = (47+3)+(25-3)$ şeklinde ifade eden Toprak'ın zihinden yapmak için kullandığı yöntemi anlatırken Görsel 3.113'de görüldüğü üzere 'toplama işleminde aynı kefedeyi alan toplanan iki sayıdan birinden çıkarılan ve diğerine eklenen sayıların aynı olmasından dolayı sonucun değişmediğini' söylemesi yerine '*sağ kefeye eklediği 3 rakamını sol kefededen çıkarttığı için sonucun değişmediğini*' söylemesi aritmetik verilen ifadeyi sözel olarak doğru bir şekilde ifade edemediği yönünde yorumlanmıştır.



Görsel 3. 113. Melda'nın son değerlendirme soru-4'e ilişkin cevabı

' $a=a$, $a+0=a+0$, $a+b=a+b$, $a-b=a-b$ ' formundaki denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirlemeyi gerektiren soru.6'da Melda'nın Görsel 3.114'te görüldüğü üzere $4+0=4+0$ ifadesinin doğruluğuna karar verirken bireysel uygulamada eşitliğin iki tarafındaki işlemleri yapıp sonuçların aynılığını belirlemiş olması temel ilişkisel yorumlamayı kullandığı şeklinde değerlendirilirken; öğretmen ile yapılan bireysel görüşmede '*sağ tarafıyla sol tarafı bakınca zaten aynı. Mesela iki tarafa da ben bakıyorum. İkisinde de dört artı sıfır yazıyor*' ifadelerine dayanarak karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı da kullanabildiği görülmüştür. Farklı etkinliklerde de benzer şekilde bireysel uygulamada ilk tercihinin temel ilişkisel yorumlamayı kullanarak doğruluğuna karar vermek olduğu görülürken; öğretmenin sorduğu derinlemesine sorular ya da farklı bir yolla yapılması istendiği durumlarda karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı da kullanabildiği görülmüştür.

(6) $4=4$ (D) 4 4'e eşittir
 $4+0=4+0$ (D) Sonuçları birbirine eşit
 $4+5=4+5$ (D) Sonuçları birbirine eşit

Görsel 3. 114. Melda'nın son değerlendirme soru-6'ya ilişkin cevabı

Melda: 4'le 0'ı toplarsak 4 eder. 4'le sıfırı toplarsak 4 eder. Zaten sıfır hiçbir şey.

Araştırmacı: Tamamdır. Mesela bunu söylerken şöyle bir cevap veriyorsun ya Melda onun dışında başka türlü bir cevabı olabilir mi bu sorunun? İşte 4'le sıfırı toplarsak deyip toplayıp cevabını söylüyorsun. 4. 4'le sıfırı toplarsak diyorsun toplayıp cevabını söylüyorsun 4. İkisi de eşit olur diyorsun sonra. Benim de diyorum ki aklıma şöyle bir soru geliyor. Yaaa diyorum. Toplamadan da acaba bu ikisinin eşit olduğunu söyleyebilir miydik? Toplamadan da.

Melda: Evet.

Araştırmacı: Nasıl söyledik. Toplamamıza gerek yok. Çünkü....

Melda: Bakıyorum. Mesela 4 eksi sıfır deseydi gene zaten ikisi de aynı oluyor ama. Belki yanlarında bir rakam yazıyordur. 4 eksi 2 yazar. 4 artı 2 yazar. O zaman eşit olmaz hani böyle dümdüz bakıyoruz hani buna ikisi de aynı. Sağ tarafıyla sol tarafı bakınca zaten aynı.

Araştırmacı: Neyleri aynı? Sağ tarafıyla sol tarafın?

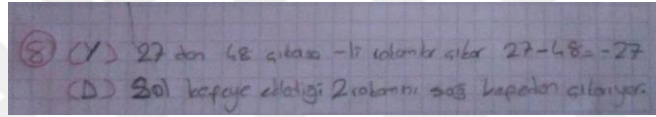
Melda: Mesela iki tarafa da ben bakıyorum. İkisinde de dört artı sıfır yazıyor.

Eşitliği bozmayan işlemlerin farkına varıp denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirlemeyi gerektiren soru.7'de Melda'nın bireysel uygulamada yazdığı Görsel 3.115'te görülen ' $7+5=12=(D)$ ' ifadesinde ilk eşit işaretini ' $7+5$ rakamlarını toplarsak 12'ye ulaşırsınız' ifadesinden hareketle kesin işlemsel yorumlamayı kullandığı yönünde değerlendirilmiştir. Aynı ifadede yer alan ve yine Görsel 3.115'te görülen ' 12 ve (D) ' ifadeleri arasında kalan' ikinci eşit işaretinin ise bir ayırıcı görevi üstlendiği yönünde yorumlanmıştır.

(7) $7+5=12=(D)$ 7+5 rakamlarını toplarsak 12'ye ulaşırsınız
 $7+5=12-5=(D)$ 7+5 12 yapar 12-5=7 yapar
 $7=12-5=(7)$ 12'den 5 çıkarırsa 7 kalır. 7 7'ye eşittir
 $7=7=(D)$ 7 7'ye eşittir

Görsel 3. 115. Melda'nın son değerlendirme soru-7'ye ilişkin cevabı

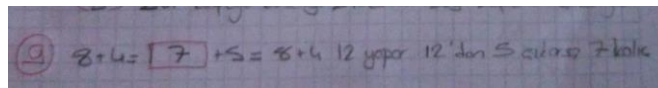
Farklı tiplerde denklemlerin doğru ya da yanlış olduğunu belirlemeyi gerektiren soru.8’de ‘ $27-48+48=27$ ’ ifadesinde 27’den 48’i çıkarmayı bilemediği halde tahmin yürütüp Görsel 3.116’da görüldüğü üzere ‘-27’ cevabını vermiş olduğu görüldüğünden küçük sayıdan büyük sayıyı çıkaramadığı durumlarda bile işlem yapıp sonuçları karşılaştırma yönündeki eğiliminden dolayı yaptığı adımlarının temel ilişkisel yorumlama olduğu şeklinde yorumlanmıştır. $8+9=(8+2)+(9-2)$ ifadesinde ise ‘aynı kefedeki toplanan iki sayıdan birine eklediğini diğerinden çıkarıyor’ demek yerine Görsel 3.116’da görülen ‘sol kefeye eklediği 2 rakamını sağ kefedeki çıkarıyor’ şeklinde yaptığı açıklama karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanmaya çalıştığını gösterirken ifadeyi hatalı kullandığı da görülmüştür.



Görsel 3. 116. Melda’nın son değerlendirme soru-8’e ilişkin cevabı

Eşitliği sağlayan eksik değeri bulmaya yönelik bulgular (9., 10. ve 12. sorular):

$a+b=kutu+c$ formunda verilen denklemde eksik değeri bulmayı gerektiren soru.9’da eşitliğin solu ve sağındaki işlemlerin sonuçlarının aynı olması gerekliliğinden yola çıkarak Görsel 3.117’de görüldüğü üzere eşitliğin solunda verilen işlemleri yapıp sonucu 12 bulduktan sonra sağında verilen işlemde de aynı sonucu elde etmek için 12’den 5’i çıkardığından eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlamasını kullandığı yönünde değerlendirilmiştir.



Görsel 3. 117. Melda’nın son değerlendirme soru-9’a ilişkin cevabı

Farklı tiplerde verilen denklemlerde ‘.....’ ile temsil edilen eksik değeri bulmayı gerektiren soru.10’da ‘ $8+6+9=8+.....$ ’ ifadesinde eksik değeri hesaplarken Görsel 3.118’de görüldüğü üzere eşit işaretinin solunda yer alan işlemleri yapıp ‘23’ sonucunu

bulduktan sonra eşitliğin sağında da aynı sonucu elde etmek için 23'ten eşitliğin sağında yer alan 8'i çıkardığı görülmüştür. Bu verilerden hareketle eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlanmasının kullanıldığı yönünde değerlendirilmiştir. '3+4+8=3+.....' ifadesinde eksik değeri hesaplarken yine Görsel 3.118'de görüldüğü üzere Melda'nın eşitliğin solu ve sağında yer alan 3 sayısının ortak olduğunu farkederek eşitliğin solundaki 3'ün yanında yer alan 4+8'i yuvarlak içine alıp eşitliğin sağında '.....' ile temsil edilen eksik değer için atadığı görüldüğünden eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanmasını kullandığının bir göstergesi olarak değerlendirilmiştir.

$8+6+9=8+15 = 8+6+9=23 \text{ yapar } 23-8=15$
 $3+4+8=3+12 = 3+(4+8) 12 \text{ yapar } 3+12$
 $9+7=10+6 = 9+7=16 16-10=6$
 $14+3=13+4 = 13+4=17 \text{ yapar } 17-13=4 \text{ çıkar 3 kalır}$
 $103+205=105+203 = 203+103=308-103=205$

Görsel 3. 118. Melda'nın son değerlendirme soru-10'a ilişkin cevabı

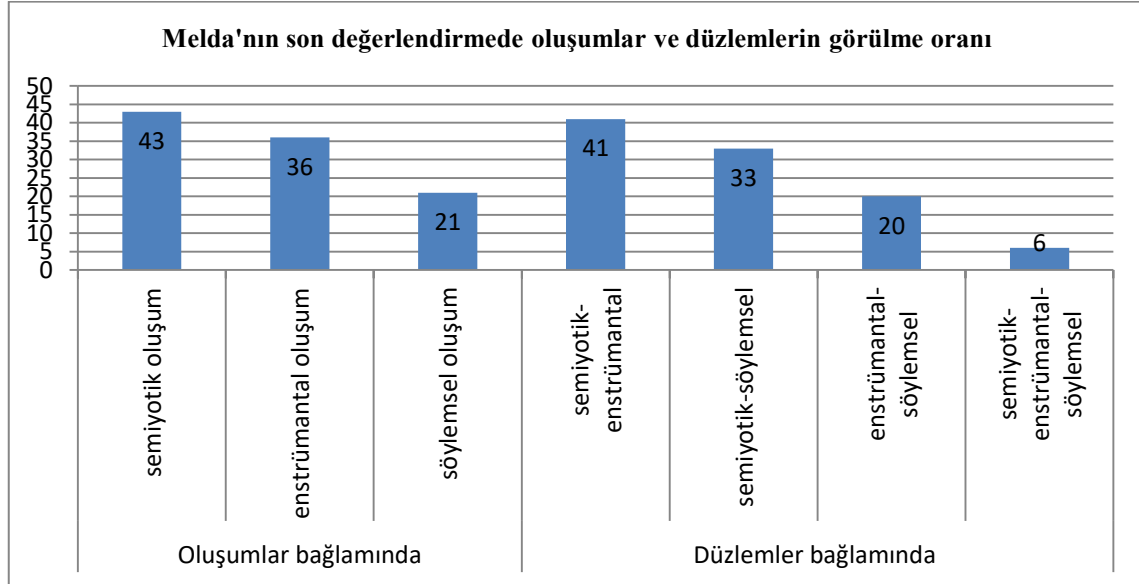
3.1.4.4.2. Melda'nın matematik çalışma uzayı ile ilgili bulguları

Melda'nın 4. Adım: son değerlendirme süreci oluşumlar ve oluşumların ikişerli kombinasyonu bağlamında incelendiğinde Tablo 3.33 ve Grafik 3.40 elde edilmiştir. 4. adım sürecinde oluşumlar ve oluşumların bileşenlerine ilişkin göstergelerin görülme oranları sırasıyla semiyotik oluşum %43 oranında, enstrümantal oluşum %36 oranında, söylemsel oluşumun %21 oranında bileşenlerinin görüldüğü söylenebilir. Melda'nın matematiksel çalışmalarının düzlemlerde yer alma durumları sırasıyla semiyotik-enstrümantal düzlemde %41 oranında, semiyotik-söylemsel düzlemde %33 oranında, enstrümantal söylemsel düzlemde %20 oranında yer aldığı görülmüştür. Çalışmalarının %6 oranında semiyotik-enstrümantal-söylemsel düzlemlerinin bir arada görüldüğü tamamlanmış bir çalışma olduğu görülmüştür.

Tablo 3. 33. Melda'nın son değerlendirmede oluşumlar ve düzlemlerin görülme durumu

Eşit İşaretinin Yorumlanmasında Oluşumlar ve Düzlemler		S.D.S.1.	S.D.S.2.	S.D.S.3.	S.D.S.4.	S.D.S.5.	S.D.S.6.	S.D.S.7.	S.D.S.8.	S.D.S.9.	S.D.S.10.	S.D.S.11.	S.D.S.12.
Oluşumlar bağlamında	Semiyotik oluşum	5		1		6	1	1	2	1	3		
	Enstrümantal oluşum			6	3				4	2	1		1
	Söylemsel oluşum			2	1			2	3	1	1		
Düzlemler bağlamında	Semiyotik-enstrümantal			2					1	2	14		2
	Semiyotik-söylemsel					2	5	1	1	1	3	3	1
	Enstrümantal-söylemsel			4	3				2				1
	Semiyotik-enstrümantal-söylemsel							1	1	1			

Grafik 3. 40. Melda'nın son değerlendirmede oluşumlar ve düzlemlerin görülme oranı



Eşit '=' işaretini anlamlandırmaya yönelik bulgular (1.,2.,3.,5. ve 11. sorular):

'a+b=c' standart ifadesi ile işareti anlamlandırmayı destekleyen soru.1'de bireysel görüşmede eşittir dendiğinde gözünde canlananın ne olduğu sorulduğunda Melda'nın gözünde teraziye canlandırıyor oluşu eşit işaretini destekleyen bir materyali gözünde canlandırmış olmasından dolayı **semiyotik oluşumun** bileşenlerinin birer göstergesi olarak değerlendirilmiştir.

Araştırmacı: Hmmm tamamdır. Bir de ben şimdi aslında Melda şeyi de merak ediyorum. Mesela. İşte bir şey söylediğinde herkesin kafasında bir şey canlanır. Bir resim canlanır. Gözünün önüne bir resim gelir. Mesela ben eşittir kelimesini söylediğimde ya da eşittiri

kullandığımda senin gözünde nasıl bir resim canlanıyor? Aklına nasıl şeyler geliyor ilk önce.

Melda: İlk önce benim aklıma terazi geliyor nedense.

Araştırmacı: Tamam. Mesela terazide ne görüyorsun? Nasıl bir resim nasıl bir terazi?

Melda: Terazinin sağ kefesinde 10 tane ağırlık var. Sol kefesine 7 tane ağırlık koymuşlar önce. Sonra üzerine 3 tane daha ağırlık eklemişler. Ya da yanındadır artık.

Araştırmacı: Peki o terazinin kefeleri diye bahsediyorsun ya o kefelerin pozisyonu ile ilgili bir şey söyleyebilir misin?

Melda: Eşittir.

Araştırmacı: Eşittir derken nasıl görünüyor görüntü olarak. Dışarıdan baktığında.

Melda: Sağ ve sol kefesi birbirlerine eşit duruyordu böyle (elini aynı hizada tutuyor)

Eşdeğer denklemlerde işareti anlamlandırmayı gerektiren soru.3'te $5+4=9$ ifadesinde bireysel görüşmede kesin işlemsel ve ilişkisel yorumlamayı beraber kullanarak terazi modeli üzerinde gözünde canlandırabilmiş olması **semiyotik oluşumun** bileşenlerinin bir göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Aynı zamanda Görsel 3.119'da görüldüğü üzere $5+4=6+3$ ifadesini terazi modeli üzerinde modelleyebildiğinden ve eşit işaretinin ilişkisel yorumlanmasını bu model üzerinden anlatabildiği görüldüğünden **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergenin görüldüğü şekilde yorumlanmıştır.

Melda: Burada aynı yukarıdaki gibi 7 artı 3 eşittir 10 gibi burada. Hem sonucu gösteriyor olabilir. 5 ile 4'ü toplarsak 9 olur der gibi. Veya bu 5 artı 4'ten sonra olduğu için eşittir işareti, burada 5'le 4'ü toplayınca 9'a eşit olur. 9'la 5, ... 5 artı 4, 9'a eşittir. Aynı şeyi söylüyoruz ama ikisi de bence kapsıyor ikisini. Kefe gibi düşünüyorum ben.

Araştırmacı: Kefe gibi olan durum mu ikisini de kapsıyor diye düşünüyorsun?

Melda: Eee burada kefe olarak düşündüm ben bunları. Sağ ve sol kefe birbirlerine eşitmiş ve 5 artı 4, sonucu 9'muş. 5 artı 4, 9'a eşitmiş.

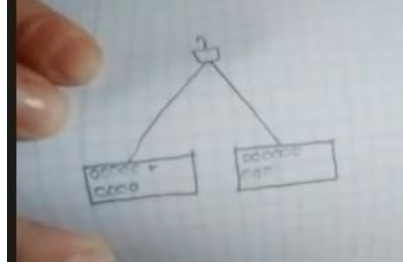
[...]

Araştırmacı: Mesela demiştin ya Melda bana. Ben eşittir deyince aklıma terazi gibi bir resim canlanıyor diye. Mesela bunu terazi resminde canlandırırsan bunu terazinin içinde nasıl anlatırsın?

Melda: Çizeyim mi?

Araştırmacı: Çizedebilirsin.

Melda: Teraziyi çok çizemedim ama.

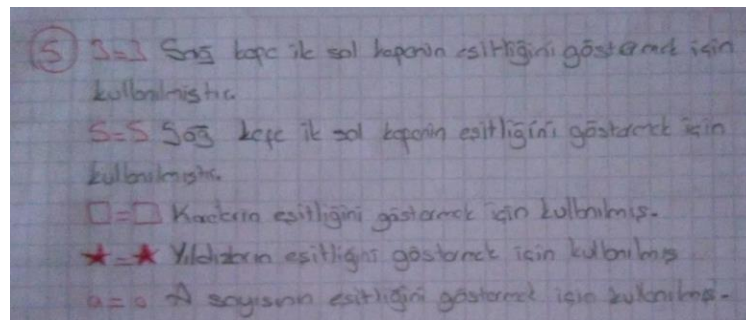


Görsel 3. 119. Melda'nın soru-3'e ilişkin modellemesi

Araştırmacı: 5 yapmışsın, 4 yapmışsın. Sonra 6 yapmışsın. 3 yapmışsın. Peki bunların terazileri mesela eşit durduğunu nasıl göstereceksin.

Melda: Teraziyi ben burada iki tarafını da bu tarafla bu tarafı ikisini de dengede çizdim çünkü. (dengede dediği aynı hızda defterinden eliyle gösteriyor)

' $a=a$ ' durumunu sayı, şekil, cebirsel gibi farklı temsilleri kullanarak ifade ettiğinde işareti anlamlandırmayı destekleyen soru.5'te Görsel 3.120'de görüldüğü üzere ' $3=3$ ve $5=5$ ' ifadelerinde bireysel uygulama sırasında kefeyi gözünde canlandırması ve 'sağ kefe ile sol kefenin eşitliğini göstermek için kullanılmıştır' şeklinde eşit işaretinin kullanım amacını açıklamış olması eşit işaretinin varlığında terazi modelini gözünde canlandırıldığını gösterdiğinden **semiyotik oluşumun** bileşenlerinin göstergesi olarak yorumlanmıştır.



Görsel 3. 120. Melda'nın son değerlendirme soru-5'e ilişkin cevabı

Eşitliği bozmayan işlemleri belirlemeye yönelik bulgular (4., 6., 7. ve 8. sorular):

Denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirlerken eşitliği bozmayan işlemlerin farkındalığını destekleyen soru.6'da bireysel görüşme sırasında $4=4$ ifadesinin neden doğru olduğu sorulduğunda 'terazinin sağ ve sol kefelerinin aynı büyüklükte aynı

ağırlıkta' olduğunu ifade ediyor olması eşit işaretinin olduğu bir problem durumunda eşitliği destekleyen matematiksel bir kültür metaforu olan teraziyi gözünde canlandırıldığını ifade ettiğinden **semiyotik oluşumun** bileşenlerinin görüldüğü yönünde değerlendirilmiştir.

Araştırmacı: Mesela neden? Ne demek istiyor orada 4 eşittir 4? Ne demeye çalışıyor?

Melda: Burada 4 rakamı var. Sol kefedede 4 rakamı var. Sağ kefedede de 4 rakamı var. Hiçbir şey fark etmez yani ikisi de zaten aynı.

Araştırmacı: Peki terazilerin üzerine rakam koyuyormuşsun gibi mi gözünde canlandırıyorsun? 4 rakamı, 4 rakamı şekline.

Melda: Aslında fark etmez burada. İstersek yıldız koyarız ama aynı olacak, istersek daire. Dört tane olacak o şey de ama aynı büyüklükte aynı ağırlıkta olacak.

Araştırmacı: Heee 4 tane olacak diyorsun. Ne koyarsak koyalım

Melda: Hı hı. Ağırlığı boyutları her şeyi aynı olacak

Eşitliği bozmadan yapılan işlemlerin yer aldığı denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirlemeyi gerektiren soru.7'de ' $7=12-5$ ' ifadesinin doğruluğuna karar verirken bireysel görüşmede 'daha önceki konuşmalarımızdan hatırladığım kadarıyla' gibi ifadelerle kimi zaman önceden yaptığımız örnekleri, kimi zaman da öğretmenin önceden söylediği ifadeleri referans göstererek doğrulama, açıklama yaptığı görülmüştür. Bu durum **söylemsel oluşumun** bileşenlerinin birer göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Öğretmenin söylediği genel bir kural, tanım, ifadeden yararlanarak kendi özel durumuna da uyguladığından tümdengelimsel bir düşünme şekli olarak ele alınmıştır.

Araştırmacı: Hmmm anladım. Peki o zaman ben şeyi merak ettim. Yani burada yazılan bir ifade var ya 7 eşittir 12 eksi 5. Sen de buna doğru dedin. Ama doğru derken şöyle söyledin. 12'den 5 çıkarırsak dedin 7 olur dedin. Eee zaten sol tarafta da 7 var dedin. 7 eşittir 7. Doğrudur dedin. Yani o şekilde anlatarak doğru olduğuna karar verdin. Ya da doğru olduğuna ikna ettin. Başka bir yolla ikna edebilir misin? Bu ifade doğrudur deyip başka bir şey söyleyebilir misin?

Melda: Eee burada daha önceki konuşmalarımızda hatırladığım kadarıyla sonuç başa da yazılır demiştik. 12'den 5 çıkartırsa 7 olur. Sonucunu da göstermiş olabilir.

Araştırmacı: Hmmm anladım. Yerlerini değiştirerek mi?

Melda: Yok işte... bir önceki videolarımızda ben demiştim. Sonuç başa yazılmaz. Sonuç sona yazılır diye. Siz aslında başa da yazılır demiştiniz. Sonucu da yazmış olabilir başına.

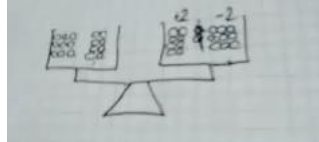
Farklı tiplerde denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirlemeyi gerektiren ' $8+9=(8+2)+(9-2)$ ' ifadesinde eşitliğin doğru olup olmadığını terazi modelini kullanarak açıklaması istendiğinde Görsel 3.121'de görüldüğü üzere 8 ve 9'u beraber sol kefedeye; $(8+2)$ ve $(9-2)$ 'yi beraber sağ kefedeye çizerek aynı zamanda eklediği 2 tane topu sonradan çıkardığını üzerini çizerek gösterebildiği, terazi modelini problemin çözümünde işe koşabildiği görüldüğünden bu veriler **enstrümantal oluşumun** bileşenlerinin göstergesi olarak değerlendirilmiştir.

Araştırmacı: Hmmm bana bunu bir terazi üstünde çizer misin? Bu bahsettin ya sol kefesinde şunlar olsun. Sağ kefesinde şunlar olsun. İstedğin şekil istediğin nesne kullanabilirsin.

Melda: çizebilirim. (çizmeye başladı)

Araştırmacı: 3,6,9. Bir tarafta 9 var. 2,4,6,8. Bir tarafta 8 var. 2,4,6,8'in yanına artı 2 yazmışsın. 3,6,9'un yanına da eksi 2 yazmışsın. O yazdığın artı 2, eksi 2'leri anlatır mısın bana.

Melda: Burada çizerek anlatabilir miyim diye bir an düşündüm. Önce bunların üzerine eklemiş. Burada ... o zaman bakıyorum hemen. Burada 2 fazlalık olur. O zaman buradakini de değiştirmesi lazım (terazinin solunu gösteriyor) 2 eklemesi lazım. Bu eklediği 2'yi geri alıyor. Yani bunu siliyor. Böyle. (2 eklediğini şekil üzerinde gösteriyor)



Görsel 3. 121. Melda'nın son değerlendirme soru-8'e ilişkin cevabı

(2'yi sildiğini üstünü karalayarak gösteriyor)

Araştırmacı: Hmmm anladım. O zaman şey doğru oluyor mu bu ifade. Senin söylediğin gibi. 2 fazlalık oldu sonra 2 tanesini çıkardı.

Melda: Evet. Önce çünkü oraya çizdim 2 daha. Sonra o eklediğimi karaladım. Bir önceki şekline geri döndü.

Eşitliği sağlayan eksik değeri bulmaya yönelik bulgular (9., 10. ve 12. sorular):

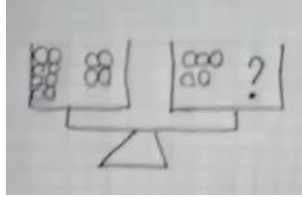
' $a+b=kutu+c$ ' formunda verilen denklemde eksik değeri bulmayı gerektiren soru.9'da ' $8+4=kutu+5$ ' sorusunda bireysel uygulamada Görsel 3.122'de görüldüğü

üzere kutuyu bulması ve bireysel görüşmede nasıl yaptığını açıklaması istendiğinde soruda yer almamasına rağmen Görsel 3.123’de verildiği gibi terazi modelini problemin çözümünde işe koşabilmesi **enstrümantal oluşumun** bileşenlerinin bir göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Terazi modeli üzerinde $8+4$ ’ü sol kefesinde; kutu+5’i sağ kefesinde gözünde canlandırıyor oluşu **semiyotik oluşumun** bileşenlerinin görüldüğü yönünde yorumlanırken eşit olması için sağ kefenin de 12 olması gerekliliğinden yola çıkarak 12’den 5’i çıkarması ya da 5’in üstüne 12’ye kadar sayması doğrulayıcı bir açıklama olduğundan **söylemsel oluşumun** bileşenlerinin görüldüğüne dair gösterge olarak değerlendirilmiştir. Bu durumda Melda’nın bu çalışmasının tüm düzlemleri etkileşim içinde kullanabilmesinden dolayı tamamlanmış bir çalışma olarak tanımlanmıştır.

Görsel 3. 122. Melda’nın son değerlendirme soru-9’a ilişkin cevabı

Araştırmacı: Sen de orada 8 artı 4, kutunun içine 7 yazmışsın. 7 artı 5 eşittir yazmışsın 8 artı 4. 12 yapar. 12’den 5 çıkınca 7 kalır. Bir anlatır mısın nasıl yaptığını.

Melda: Burada 8 artı 4, 12 yapar. Burada eşitmiş. Terazinin diyeceğim ben. Sağ kefesiyse sol kefesi eşitmiş. O zaman hemen sol kefesine bakıyorum. Çünkü sol kefesi tam. 8 artı 4, burada 12 yapar. O zaman 5’in üzerine kaç eklersek 12 olur. Ya 5’in üzerine sayarız 12’ye ulaşana kadar. Ya da 12’den 5 çıkartırız.



Görsel 3. 123. Melda’nın son değerlendirme soru-9’a ilişkin bireysel görüşmede cevabı

Farklı tiplerde verilen denklemlerde ‘.....’ ile temsil edilen eksik değeri bulmayı gerektiren soru.10’da bilinmeyeni hesaplaması ve yaptığı adımların nedeninin açıklanması istenen Melda’nın bireysel uygulama sırasında Görsel 3.124’te görüldüğü gibi bilinmeyenleri hesaplaması için kullandığı adımları yazdığı ama bir gerekçe sunmadığı ya da doğrulayıcı bir ifade kullanmamış olması bu çalışmalarda Melda’nın **semiyotik-enstrümantal** düzlemde yer aldığının birer göstergesi olarak kabul edilmiştir. ‘ $8+6+9=8+.....$ ’ sorusunda Melda’nın bireysel uygulama esnasında bir gerekçe

sunmadığı görülürken öğretmenin derinlemesine sorularından sonra hem yaptığı adımları açıkladığı hem de farklı yollarla bilinmeyi hesaplayabildiği görülmüştür. Bu sorunun bireysel uygulaması sırasında eşit işaretinin iki tarafında da işlem olması durumunda temel ilişkisel yorumlamanın bir göstergesi olarak ele alınan işlemlerin sonuçlarının eşit olması gerekliliğini kullandığı görülürken; öğretmenin sorularıyla beraber eşit işaretinin iki tarafındaki sayıları karşılaştırarak eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlama özelliğini kullanarak bilinmeyi hesapladığı ve gerekçesini karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayla açıkladığı görülmüştür. Yaptığı adımları eşit işaretinin özelliğini kullanarak açıklıyor ve gerekçelendiriyor olması çalışmasının semiyotik-söylemsel düzlemde olduğunu gösteren bir gösterge olarak ele alınmıştır.

Görsel 3. 124. Melda'nın son değerlendirme soru-10'a ilişkin cevabı

Melda: Burada ben bir öncekinde yani dokuzuncu soruda dediğim mantığı kullandım. Hepsinde aslında öyle yaptım.

Araştırmacı: Tamam. Nasıl bir mantık?

Melda: Burada üzerine sayıyoruz ya da çıkartıyoruz. Çünkü burada şey olarak da bakabiliriz 6 artı 9, işte kaç yapar? İşte onun üzerine de 8'i eklemişler. Ben hemen bir bakayım. (defterine işlem yapmaya başladı) 6 artı 9, 15 yapar. Burada 8 yazıyor. O zaman 8 artı 6 artı 9 yazmak yerine 15 yazarlardı. Toplamları. O yüzden 8'in yanına ben 15 yazdım.

Farklı tiplerde verilen denklemlerde '.....' ile temsil edilen eksik değeri bulmayı gerektiren soru.10'da '14+....=13+4' sorusunda Melda'nın bilinmeyi hesaplarken farklı yollar kullandığı görülmüştür. Bireysel görüşmede temel ilişkisel yorumlamayı kullanarak eksik değeri hesapladığında yaptığı adımların nedenlerini gerekçelendirebildiği, doğrulayabildiği görüldüğünden çalışmasının semiyotik-söylemsel düzlemde olduğuna dair birer gösterge olarak yorumlanmıştır. Karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanarak eksik değeri hesaplayabildiği durumda yaptığı adımları söylerken doğrulayıcı, nedenlerini açıklayan, gerekçe sunan ifadelerinin

olmadığı görüldüğünden Melda'nın bu durumlarda çalışmasının **semiyotik-enstrümantal** düzlemde olduğu kabul edilmiştir.

Melda: 13 artı 4'e baktım ben burada. 13 artı 4, 17 yapar. 17'den 14 çıkarsa ya da 14'ün üzerine sayarız. 3 kalır.

Araştırmacı: Burada sayılardaki değişime bakarak yapabilir miyiz? 17'yi bulmadan.

Melda: 14'ten 1 çıkarmışlar. 4'e de 1 eklemişler mi... (durdu düşündü bir tuhafılık var der gibi)

Araştırmacı: (güldü) Oradan birden eklemişler mi...

Melda: Ama 4'ten de 1 çıkarmışlar burada olmaz ki.

[...]

Araştırmacı: Neden olmadı bu sefer acaba bu yöntem

Melda: Burada ikisinden de çıkarmışlar.

Araştırmacı: Evet. Sanki burada ikisinden de çıkarmışlar gibi oldu gerçekten. Olur mu peki öyle ikisinden de çıkarırsam?

Melda: Aslında bir şey fark ettim ama o yöntem her zaman olur mu tam emin değilim.

Araştırmacı: Nasıl?

Melda: Burada 13 yazıyor. 13'ün 3'ü ile 4'ü yer değiştirmişler gibi oldu

Araştırmacı: Hmmm anladım. Sence peki o yöntem her zaman tutar mı? Güzel bir soru sordun.

Melda: Emin değilim (gülüyoruz) denemek görmek lazım.

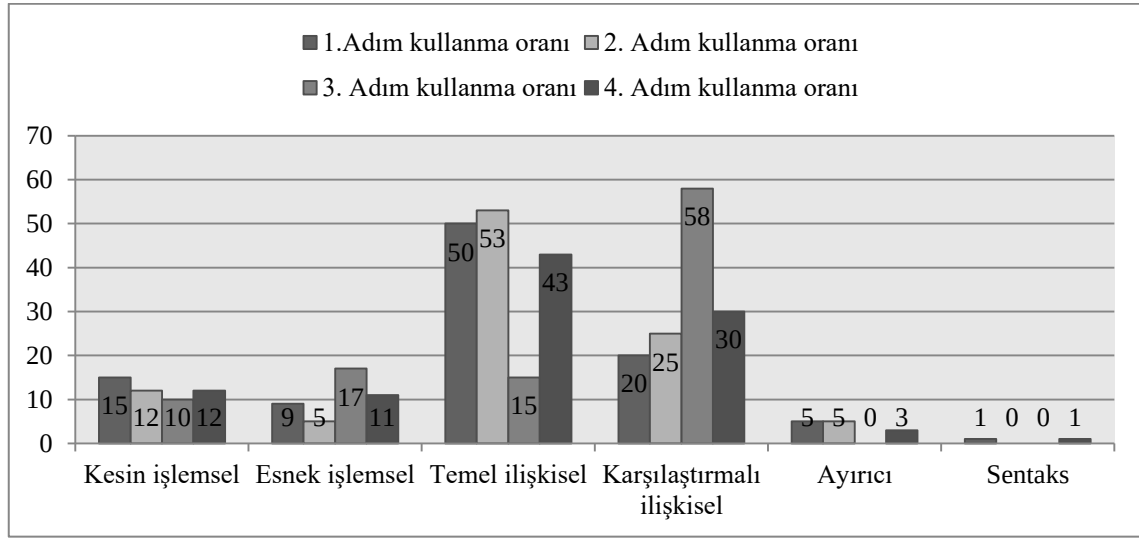
3.1.4.4.3. Melda'nın bulgularına genel bakış

Melda'nın çalışmaları 1. Adım, 2. Adım, 3. Adım ve 4. Adımda eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerini kullanma bağlamında genel karakteristiğini ortaya çıkaracak şekilde incelendiğinde Tablo 3.34 elde edilmiştir. Bu tabloda ve tablodan yararlanarak elde edilen Grafik 3.41'de Melda'nın çalışmalarında sırasıyla %40 oranında temel ilişkisel yorumlama, %33 oranında karşılaştırmalı ilişkisel yorumlama, %12 oranında kesin işlemsel yorumlama, %11 oranında esnek işlemsel yorumlamayı kullandığı görülmüştür.

Tablo 3. 34. Melda'nın tüm adımlarda eşit işaretini yorumlama biçimlerinin görülme oranı

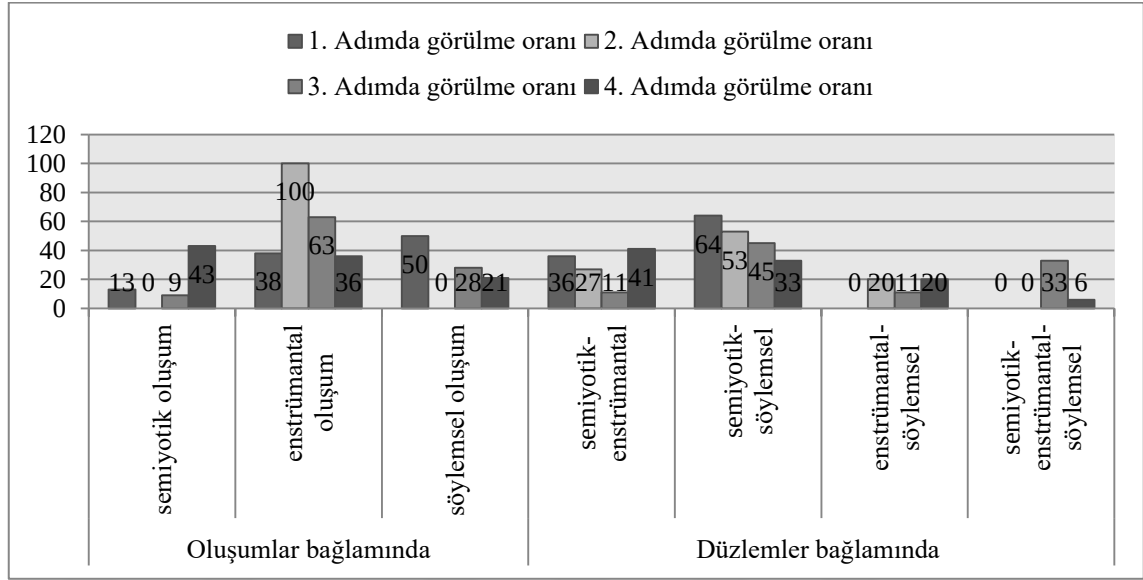
Eşit İşaretini Yorumlama Biçimleri	1. Adım kullanma oranı	2. Adım kullanma oranı	3. Adım kullanma oranı	4. Adım kullanma oranı
Kesin işlemsel	15%	12%	10%	12%
Esnek işlemsel	9%	5%	17%	11%
Temel ilişkisel	50%	53%	15%	43.3
Karşılaştırmalı ilişkisel	20%	25%	58%	30
Ayırıcı	%5.2	5%	0%	3%
Sentaks	%0.8	0%	0%	%0.6

Grafik 3. 41. Melda'nın eşit işaretini yorumlama biçimlerini tüm adımlarda kullanma oranının değişimi



Melda'nın 1. Adım, 2. Adım, 3. Adım ve 4. Adımda oluşumlar ve oluşumların ikiyeşerli kombinasyonu bağlamında genel karakteristiğini ortaya çıkaracak şekilde incelendiğinde elde edilen Grafik 3.42'de Melda'nın çalışmalarında sırasıyla %53 oranında enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler, %33 oranında söylemsel oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler, %14 oranında semiyotik oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler görülmüştür. Melda'nın çalışmalarının yer aldığı düzlemlere bakıldığında sırasıyla %48 oranında semiyotik-söylemsel düzlemde, %29 oranında semiyotik-enstrümantal düzlemde, %13 oranında enstrümantal-söylemsel düzlemde, %10 oranında da tüm düzlemlerin etkileşim içinde olduğu tamamlanmış bir çalışma olduğu görülmüştür.

Grafik 3. 42. Melda'nın tüm adımlarda oluşumlar ve düzlemlerin görülme oranının değişimi



3.2. Değişken Kavramının İlişkisel Yorumlanmasına İlişkin bulgular

Bu bölümde her bir öğrencinin değişken kavramının ilişkisel yorumlanmasına ilişkin kişisel matematiksel çalışma uzayları ilk ve son değerlendirme bağlamında sunulmuştur.

3.2.1. Kayra'nın matematiksel çalışma uzayı

Bu bölümde Kayra'nın matematiksel çalışma uzayı, ilk/son değerlendirmede yer alan soruların analizi sonucu ortaya çıkan temalar olan değişken kavramının işlemsel ve ilişkisel yorumunu anlamlandırmaya yönelik bulgular olarak iki başlık altında sunulmuştur.

3.2.1.1. Değişken kavramının işlemsel yorumunu anlamlandırmaya yönelik bulgular (1., 8., ve 9. Sorular)

Değişkenin belirli bir bilinmeyen olarak doğru yorumlanıp hesaplanmasını gerektiren denklem içeren soru-1'de ilk değerlendirmede Kayra'nın bireysel uygulamada bilinmeyeni doğru bir şekilde hesaplayabildiği görüldüğünden değişkenin işlemsel yorumunun işe koşulduğu **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin gösterge olarak kabul edilmiştir. Bireysel görüşmede bilinmeyen 3'ten farklı değer alıp alamayacağı ve nedeni sorulduğunda sayısal olarak yerine koyma yapıp işlemsel bakış açısı ile değişkeni yorumlayarak doğrulama yaptığından çalışmasının işlemsel

yorumlamanın aktif olduğu semiyotik-söylemsel düzlemde olduğuna ilişkin gösterge olarak değerlendirilmiştir.

Araştırmacı: Peki oradaki 3 yerine Kayra, başka bir sayı versek gene doğru olur mu?

Kayra: Hocam, 4 artı 4 olur.

Araştırmacı: Ama oradaki 5'i değiştirmeden. Yani 5 artı nokta nokta eşittir 8. Bu soruda nokta nokta yerine 3, 3'ten başka bir sayı yazsak doğru olur mu?

Kayra: Hocam şimdi bir şey geçirelim. 5 artı 1, 6 ediyor. 5 artı 2, 7 ediyor. 5 artı 3, 8 ediyor. 5 artı 4, 9 ediyor. Yani sadece 3 olabiliyor.

Değişkenin belirli bir bilinmeyen olarak doğru yorumlanıp hesaplanmasını gerektiren denklem içeren soru-1'de son değerlendirmede bireysel görüşmede Kayra'nın $5 + \dots = 8$ ifadesinde noktalarla temsil edilen değişkeni 'bilinmeyen bir şey' olarak tanımladığı ve bilinmeyeni doğru bir şekilde hesaplayabildiği görülmüştür. Değişken kavramının işlemsel yorumunu problemin çözümünde işe koşabildiği ve belirli bilinmeyeni hesaplayabildiği görüldüğünden işlemsel yorumun kullanıldığı enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin gösterge olarak kabul edilmiştir. Yaptığı adımları doğrulayıcı ifadelerle açıklayabildiği görüldüğünden çalışmasının semiyotik-söylemsel düzlemde yer aldığı düşünülmüştür.

Kayra: 8'den 5'i çıkardım 3 buldum. 5 artı 3, 8 eder. Ve doğru cevabı onun noktalı yeri doğru bulmuş oldum.

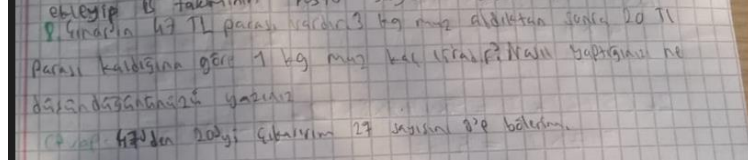
Araştırmacı: Peki o noktalı yer kaç olmuş oldu o zaman?

Kayra: 3.

Araştırmacı: Peki o noktalı yer ne? Nokta nokta yaptıkları şey ne?

Kayra: Bilinmeyen bir şey. Burada fiyat sayı olarak ayırmamış da burada normal işlem olarak vermiş.

Sözel bir problem içinde verilen belirli bir bilinmeyeni hesaplamayı gerektiren soru-8'in ilk değerlendirmesinde Kayra'nın bilinmeyeni doğru bir şekilde hesaplayabildiği görülmüştür (Görsel 3.125). Sözel ifadede geçen işlemlerin tersini yaparak bilinmeyeni hesapladığı görüldüğünden işlemsel bakış açısıyla gelişen bir değişken kavramını işe koştugu enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin gösterge olarak değerlendirilmiştir. Bireysel görüşmede yine işlemsel yorumlu değişken kavramını kullanarak doğrulayıcı açıklamalar yapmaksızın sadece yaptığı adımları ifade ettiğinden çalışmasının semiyotik-enstrümantal düzlemde olduğu şeklinde yorumlanmıştır.



Görsel 3. 125. Kayra'nın değişken ilk değerlendirme soru-8'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Neden 47'den 20'yi çıkardın?

Kayra: Hocam çünkü bana verdiği sayı 47 ve 20. Mesela gidip de 3'ü çıkarmam veya toplamam biraz saçma olurdu.

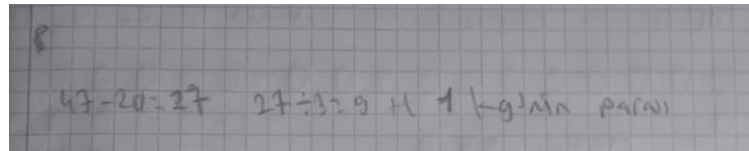
Araştırmacı: Peki neden toplamadın mesela o zaman. 47'yle 20'yi. Neden çıkardın?

Kayra: O zaman 67'yi 3'e bölssem mmmmm (düşünüyor) çok karışık olurdu. 20 olurdu ilk önce. 22 falan olurdu.

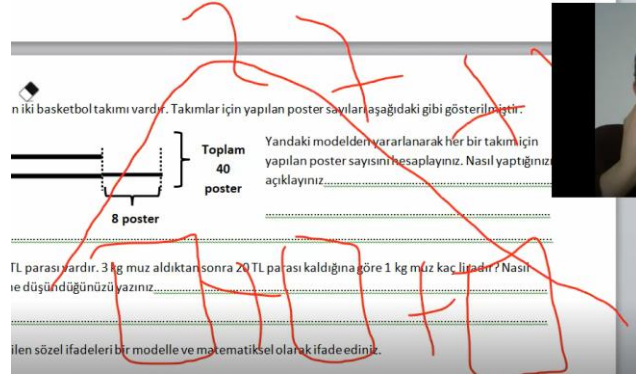
Araştırmacı: Aynen. 22 küsürlü birşeyler çıkıyor. Neden öyle yapmadın?

Kayra: Öyle de yapabilirdim ama. Ben çıkardım 27'den 20'yi (47den diyecekti) çıkarıp. Ben direk zaten kafadan yapmışım çıkarmayı. 27 yazdım. Ondan sonra 3 kilo muz aldığı için 27 sayısını 3'e böldüm.

Sözel bir problem içinde verilen belirli bir bilinmeyeni hesaplamayı gerektiren soru-8'in son değerlendirmesinde Görsel 3.126'da görüldüğü üzere sözel ifadede verilen işlemlerin tersini yaparak bilinmeyeni hesaplayabildiği görülmüştür. Bireysel görüşmede öğretmen rehberliği ile bilinmeyeni problemin içinde kullanması ve denklemi oluşturması için desteklendiğinde bilinmeyen muzun kilogram fiyatını temsilen kare şeklini kullandığı, üç kg muz için üç tane kare ile temsil ettiği; üç kg muz aldıktan sonra 47 liradan elinde kalan 20 lirayı ifade etmek için üç tane karenin üzerine 27 yazarak denklemi oluşturduğu görülmüştür (Görsel 3.127). Elde edilen bu veriler ışığında Kayra'nın değişkeni bir denklemi çözmek veya bilinmeyen bir değeri bulmak için bir araç olarak işe koşabildiği ve bilinmeyeni hesaplayabildiği görüldüğünden değişken kavramının işlemsel olarak yorumlandığı enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü şekilde değerlendirilmiştir.

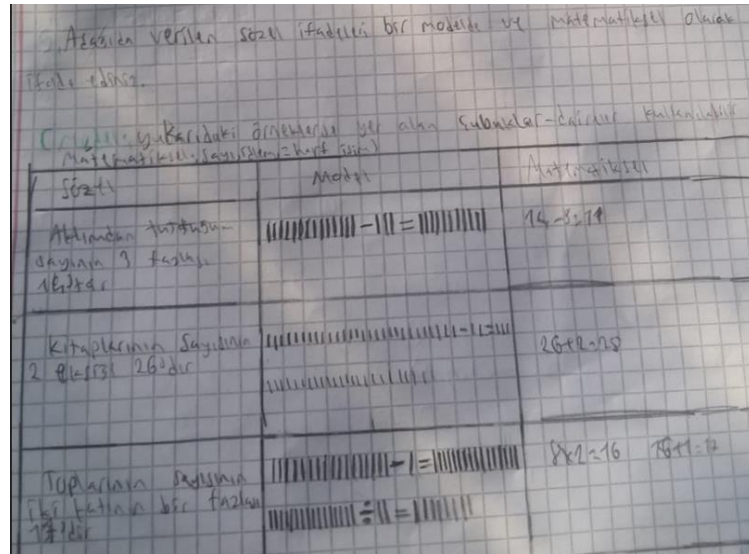


Görsel 3. 126. Kayra'nın değişken son değerlendirme bireysel uygulamada soru-8'e ilişkin çözümü



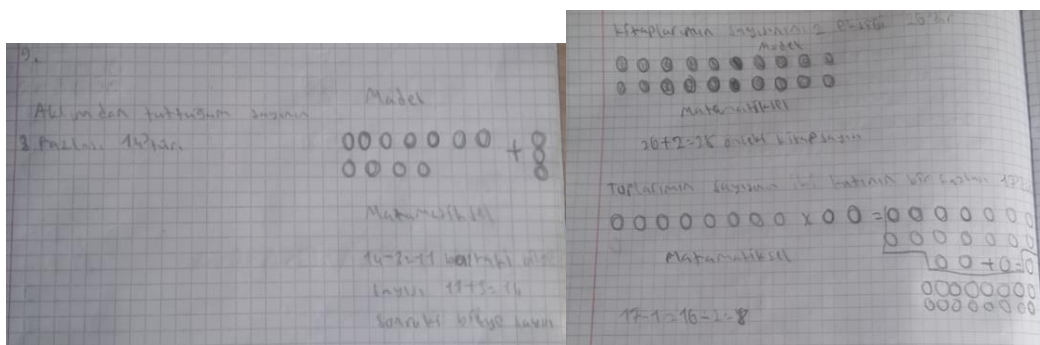
Görsel 3. 127. Kayra'nın değişken son değerlendirme öğretmen rehberliğinden sonra soru-8'e ilişkin cebirsel temsili

Sözel olarak verilen belirli bir bilinmeyen içeren ifadelerin cebirsel ve model ile temsil edilmesini gerektiren soru-9'da ilk değerlendirmesinde Kayra'nın Görsel 3.128'de görüldüğü üzere değişkenin işlemsel yorumu olan belirli bir bilinmeyeni tersine işlem yaparak doğru bir şekilde hesaplayabildiği görüldüğünden değişken kavramının işlemsel yorumunun işe koşulduğu **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerinin görüldüğü değerlendirilmiştir. Sözel olarak ifade edilen durumu değişkeni de katarak cebirsel olarak temsil etmesi beklendiğinde bilinmeyeni hesaplamaya yarayacak işlemi modellediği görülmüştür (Görsel 3.128). Bireysel görüşmede aklımdan tuttuğum sayıyı temsil etmesi istendiğinde sayıyı iki sayının arasında bir aralık olarak temsil ettiği görülmüştür. Diğer sözel ifadelerde de benzer şekilde bilinmeyeni temsil eden bir cebirsel temsil belirleyemediği görülmüştür.



Görsel 3. 128. Kayra'nın değişken ilk değerlendirme soru-9'a ilişkin cevabı

Sözel olarak verilen belirli bir bilinmeyen içeren ifadelerin cebirsel ve model ile temsil edilmesini gerektiren soru-9'da son değerlendirmede Kayra'nın Görsel 3.129'da görüldüğü üzere bilinmeyi, sözel ifadede geçen aritmetik işlemlerin tersini yaparak hesaplayabildiği görüldüğünden değişken kavramının işlemsel yorumunu işe koşabildiği **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergeler olarak değerlendirilmiştir. Değişkenin belirli bir bilinmeyen olarak yer aldığı cebirsel bir yapı olarak temsil edebilmesi beklendiğinde hem cebirsel ifadeyi hem de modellemeyi doğru bir şekilde yapamadığı görülmüştür (Görsel 3.129). Öğretmen rehberliği ile bireysel görüşmede belirli bir bilinmeyen anlamıyla değişkeni kullanarak denklem kurması adım adım desteklendiğinde bilinmeyen yerine 'kare', nokta nokta, yuvarlak, şekil kullanabileceğini ifade ettiği; 3 fazlasını 'kare+3' şeklinde ifade edebildiği 14'e eşittir ifadesi ile beraber de 'kare+3=14' şeklinde ifade edebildiği görülmüştür. Aynı zamanda 'aklımdan tuttuğum sayının 3 fazlası 14'tür' ifadesini modellemesi istendiğinde öğretmenin adım adım rehberliği ile Görsel 3.130'da görüldüğü üzere bilinmeyi temsilen çizgiyi kullandığı; 3 fazlasını temsilen çizginin yanına 3 daire daha çizdiği; 14'e eşittir ifadesine karşılık da 14 tane daire çizdiği görülmüştür. Hemen sonrasında bu eşitliği temsilen terazi modelini de kullanabileceğini farkedip işe koşmuş ve terazinin sol kefesinde çizgi ve üç daire, sağ kefesinde 14 daire olacak şekilde modellediği görülmüştür.



Görsel 3. 129. Kayra'nın değişken son değerlendirme soru-9'a ilişkin cevabı

Araştırmacı: Eeee bilmediğin şeye ne yazman lazım o zaman?

Kayra: Nokta nokta nokta.

Araştırmacı: Başka?

Kayra: Nokta nokta nokta, kare, yuvarlak, şekil ..

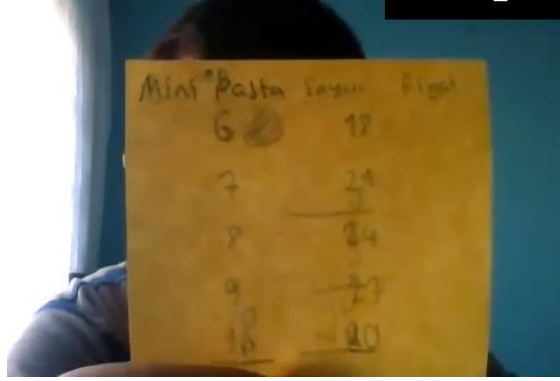
[...]

Araştırmacı: Mesela kareyi seçtin diyelim. Bir matematiksel kısma yazar mısın yani şuraya yazar mısın (ekranda gösteriyor) şuraya altına. Yeşil olan yere. Aklımdan tuttuğum sayı kare olsun benim. Bilmiyoruz ya şimdi. O karenin 3 fazlası demiş. Aklımdan tuttuğum sayının üç fazlası onu nasıl yazarsın. 3 fazlası. Onu nasıl yazarsın matematiksel.

Kayra: (ekrana $kare+3$ yazmış)

Araştırmacı: Sonra 14 tür demiş. onu nasıl yazarsın? 3 fazlası 14tür. (her adımı doğru bir şekilde yazmış)





Görsel 3. 131. Kayra'nın değişken ilk değerlendirmede birbirine bağlı değişen nicelikler arasındaki ilişkiyi fark etmeksizin kullandığı teknik

[...]

Kayra: 2 pasta 6 liraysa 6'dan 3'ü çıkardığımızda bir pasta fiyatını buluyoruz.

Araştırmacı: Hmmm mesela diyelim ki buldun şimdi Kayra. Bir pastanın 4 lira olduğunu biliyorsun. Ben de geldim gün için 40 tane pasta alacağım. Nasıl söyleyeceksin şimdi bana? 40 tane pasta şu kadar diyeceksin nasıl söyleyeceksin? Bir tane pastanın 3 lira olduğunu biliyorsun 40 tane pastanın?

Kayra: Hocam şu an o işlemi yapıyorum. Fiyatını bulmak için.

Araştırmacı: Nasıl yapıyorsun.

Kayra: 120 çıktı.

Araştırmacı: Nasıl buldun peki?

Kayra: Sizin alacağınız kek sayısının normal bir kek fiyatıyla çarpıyorum.

Kayra'nın birbirine bağlı değişen niceliklerin tablo formatında verildiği soru-2'ye ilişkin son değerlendirmede cevabına bakıldığında önce sayılar arasındaki sabit farktan yola çıkarak bilinmeyi hesapladığı için değişken kavramını belirli bir bilinmeyen yani işlemsel olarak yorumladığı görülürken sonrasında bireysel görüşmede pasta sayısı ile fiyatı arasındaki ilişkiyi farkedip birbirine bağlı değişen nicelikleri ilişkisel olarak yorumlayabildiği görülmüştür. Birbirine bağlı değişen nicelikleri yorumlamayı gerektiren ilave sorular yöneltildiğinde değişken kavramının ilişkisel yorumlanmasını işe koşabildiği enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler görülmüştür.

Kayra: Fiyata baktım. Mini pastalara baktığımda teker teker gittiğini gördüm ve c'nin 4 olacağını ve a'nın 2'den önce ne geldiğini düşününce 1 olduğunu düşündüm. A'nın ve c'nin. A, 1 ve c, 4. Pasta sayısı olarak ikisi de fiyatın da 3'er 3'er gittiğini gördüm. Ondan sonra b'nin 9 tl olacağını düşündüm. Ondan sonra 4 tanesinin 12 tl olduğunu gördüm. 5 tanesinin de 15 olacağını düşündüm

Araştırmacı: Nasıl peki öyle düşünüyorsun?

Kayra: 3'er 3'er.... Bir pasta sayısı 3 tl ise..

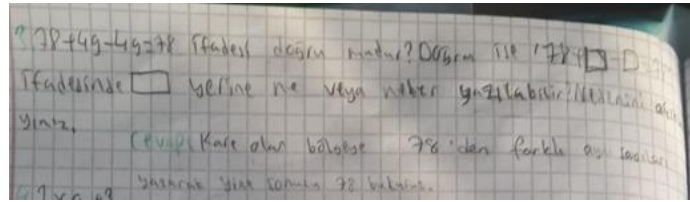
Araştırmacı: O zaman şey Kayra mesela ben bu pastaneye gitsem pastaneden küçük küçük mini pastalardan yani eklerlerden alsam gün yapıyorum. Günde 20 tane ekler alsam kaç para veririm?

Kayra: 5 tanesi 15 lira ediyorsa. 3 tane 15, 15, sayarsak. 15,30,45,60 tl.

Araştırmacı: Hmm anladım şimdi. Peki 8 tane alsam?

Kayra: 8 tane alsak.... 24

Eşit işaretinin (karşılaştırmalı ilişkisel) ve değişkenin (genelleştirilmiş sayı) beraberce ilişkisel yorumlanmasını gerektiren soru-3'te ilk değerlendirmede Kayra'nın eşit işaretini temel ilişkisel yorumlayarak kare yerine farklı sayılar yazabileceği yorumunu yapabildiği görülmüştür (Görsel 3.132). Bireysel görüşmede kare yerine yazabileceği sayılarla ilgili genelleme yapamadan 'bu sayı olur mu?' şeklinde öğretmenin yönelttiği her sorudan sonra işlem yapıp sonuçları karşılaştırdığı görülmüştür. Öğretmenin kare yerine yazabileceği sayılarla ilgili genelleme yapabilmesi adına sorduğu pek çok sorudan sonra 'hatta milyon bile olabilir. Milyon veriyoruz, milyon çıkartıyoruz' diyerek kare yerine verebileceği sayılarla ilgili bir yargıya varabildiği ama karenin tüm sayılar olabileceğini net bir şekilde ifade edemediği görülmüştür. Bu verilerden yola çıkarak Kayra'nın değişkeni kısmen genelleştirilmiş bir sayı olarak yorumlayabildiği ve ilişkisel yorumlamaya geçiş düzeyinde yorumlayabildiği değerlendirilmiştir.



Görsel 3. 132. Kayra'nın değişken ilk değerlendirmede soru-3'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Hemen önce seninkini açayım ben.

Kayra: Ben şey dedim. Söyleyeyim mi hocam ben?

Araştırmacı: Olur canım.

Kayra: Kare olan bölgeye 78'den farklı aynı sayıları yazarak yine sonucu 78 buluruz.

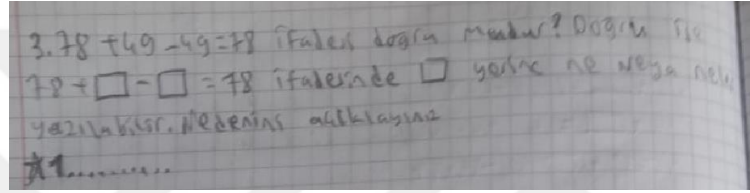
Araştırmacı: Nasıl, neden öyle?

Kayra: Hocam mesela... durun bir. 138, 50 çıkartalım. Ondan 50 çıkartalım. Yine 78 oluyor.

[...]

Kayra: Size dediğim gibi 78'le 50'yi toplayalım. 138 ediyor. 138 (işlem yanlış yaptı herhalde) tekrar çıkardığımızda gene 78 oluyor.

Eşit işaretinin (karşılaştırmalı ilişkisel) ve değişkenin (genelleştirilmiş sayı) beraberce ilişkisel yorumlanmasını gerektiren soru-3'te son değerlendirmede Görsel 3.133'de ve bireysel görüşme dökümünden verilen alıntıda görüldüğü üzere Kayra'nın eşit işaretini ilişkisel yorumlayarak eklenen ve çıkarılan sayıların aynı olması durumunda eşitliğin değişmeyeceğini farkedebildiği ve kutu ile temsil edilen değişkeni genelleştirilmiş sayı olarak ilişkisel yorumlayabildiği görülmüştür.



Görsel 3. 133. Kayra'nın değişken son değerlendirme soru-3'e ilişkin cevabı

Kayra: Verdim. Sayı olarak 1'den sonra bütün sayılar dedim (1..... şeklinde ifade etmiş)

Araştırmacı: Heee kutulardan sonra bütün sayılar olabilir mi diyorsun?

Kayra: Evet. Aaa 1 de sayılır.

Araştırmacı: Tamam. Peki o zaman doğru mudur diye sorduğumda ne cevap verirsin?

Kayra: Doğrudur.

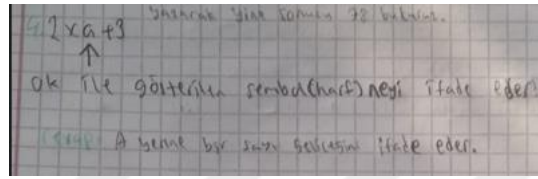
[...]

Araştırmacı: Mesela burada (araştırmacı soru-1'i gösteriyor) boşluğu yani nokta noktayı 3 buluyordun. Burada kareyi mesela 10 buluyordun. Tek bir tane sayı. Ama aşağıda diyorsun ki bütün sayılar olabilir.

Kayra: Aşağıda orada bir şey verilmişti ama orada neler yazılabilir diyor ama bana orada şey verdi. Benden toplamamı istemişti. Sonucunu bulmamı istemişti. Ama burada eklediğimi geri aldığım zaman. Bozulmuyor denklem. Ama orada sadece topluyorum. Ama topladıklarımı geri almıyorum. O zaman da mecbur 8 bulmam gerekiyor. (5+....=8 yazan soru için sonucu 8 bulması gerektiğini ifade etmiş)

Harf ile temsil edilen değişkeni genelleştirilmiş bir sayı olarak yorumlamayı destekleyen soru-4'te ilk değerlendirmede harf ile temsil edilen değişkenin önce Görsel 3.134'te görüldüğü üzere bir sayıya karşılık geldiğini ifade edebildiği görülmüştür. Bireysel görüşmede öğretmen rehberliği ile bu sayıların önce pek çok sayı olabileceğini sonrasında da bütün sayılar olabileceği genellemesine ulaşabildiği görülmüştür. Bu durum Kayra'nın değişken kavramını genelleştirilmiş bir sayı olarak ilişkisel

yorumlayabildiğinin bir göstergesi olarak ele alınmıştır. Değişken kavramının genelleştirilmiş sayı (ilişkisel) ve belirli bir sayı (işlemsel) yorumlanması arasındaki farkı cebirsel ifadenin sonunda sonucun verilmesi ve verilmemesi durumuna bağlayarak sınırlı da olsa açıklayabildiği görülmüştür. Bu verilerden yola çıkarak Kayra'nın değişkenin ilişkisel ve işlemsel yorumlanması özelliğini kullanarak doğrulayıcı açıklamalar yapabildiği görüldüğünden çalışmasının semiyotik-söylemsel düzlemin bileşenlerine ilişkin göstergeler taşıdığı değerlendirilmiştir.



Görsel 3. 134. Kayra'nın değişken ilk değerlendirmede soru-4'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Neden bir sayı dedin orada?

Kayra: Hocam şöyle demiş. 2 çarpı a artı 3. 2'yle bir şeyi çarp ve 3 ekle ona demiş.

Araştırmacı: Hmmm mesela neyi çarpalım?

Kayra: 6'yı çarpalım

Araştırmacı: Mesela 6'yı. Başka? Başka bir şey olabilir mi? 6'dan başka bir sayı olabilir mi?

Kayra: 7.

Araştırmacı: 7'yi. Başka bir sayı olabilir mi?

Kayra: 8.

Araştırmacı: 8.

Kayra: 9

Araştırmacı: 9

Kayra: 100 bile olabilir 1000 bile olabilir.

Araştırmacı: Heee o zaman a bütün sayılar olabilir mi?

Kayra: Evet

[...]

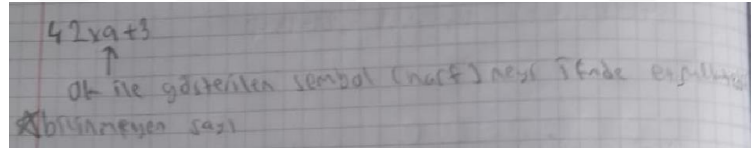
Ben: Mesela, sen bu soruda diyorsun ki öğretmenim diyorsun a diyorsun bütün sayılar olabilir diyorsun.

Kayra: Evet.

Ben: Hâlbuki yukarıda bir soru çözmüştük. Orada gene dedin ki a sadece 3 olur dedin mesela. A sadece 17 olur başka bir şey olamaz dedin. Ama ben de diyorum ki ne zaman diyorum a bütün sayılar olabiliyor? Ne zaman tek bir sayı olabiliyor? Ne olursa yani?

Kayra: Hocam. Burada cevabını vermemiş. O yüzden böyle sınırsız olabilir ama oradaki şeyde cevabını vermişti. Biz ona göre sayıları şey yaptık.

Harf ile temsil edilen değişkeni genelleştirilmiş bir sayı olarak yorumlamayı destekleyen soru-4'te son değerlendirmede bireysel uygulamada Görsel 3.135'e görüldüğü üzere Kayra'nın değişkeni 'bilinmeyen sayı' olarak tanımladığı; bireysel görüşmede derinlemesine sorulardan sonra da genelleştirilmiş sayının birden fazla sayı olması durumunu gerektirdiğinden 'bilinmeyenler' ve 'sınırsız sayı' olarak tanımladığı görülmüştür. Aynı zamanda a yerine 'sonsuz' sayı yazabileceğini düşünmüş olması değişkeni genelleştirilmiş bir sayı olarak ilişkisel yorumlayabildiğini göstermiştir. Değişken kavramının bilinmeyen belirli bir sayı veya genelleştirilmiş bir sayı olması arasındaki farkı cebirsel ifadeden sonra sonucun verilmesi ve verilmemesi durumuyla ilişkilendirerek sınırlı da olsa açıkladığından değişkenin işlemsel ve ilişkisel yorumlama özelliğini kullanarak doğrulayıcı açıklamalar yaptığı görülmüş; bu veriler ışığında çalışmanın semiyotik-söylemsel düzlemde olduğuna ilişkin göstergelerin görüldüğü şekilde yorumlanmıştır.



Görsel 3. 135. Kayra'nın değişken son değerlendirme soru-4'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Bir de Kayra sen mesela söylerken hem şu örnekte 78'li olan örnekte (araştırmacı ekrandan o soruyu yuvarlak içine alıyor) hem de bu örnekte (araştırmacı $2x+3$ yazanı gösteriyor) anlatırken şöyle anlatıyorsun. Diyorsun ki a diye bir sayı var diyorsun. O sayıyı diyorsun 2 ile çarpacağız. Üç ekleyeceğiz diyorsun. Mesela hangi sayı olabilir bu.

Kayra: sonsuz olabilir.

Araştırmacı: ama ben... (Kayra araya girdi)

Kayra: 1 de olabilir, 2 de olabilir. Bana burada cevap vermemişler ki. (cevap derken sonuç demek istiyor)

[...]

Araştırmacı: Ben o kısmını anladım zaten. Biraz önce de çok güzel söyledin sen onu. Ama ben şeyi merak ediyorum. İkisine de bilinmeyen diyorsun ya acaba diyorum başka bir isim verebilir miyiz?

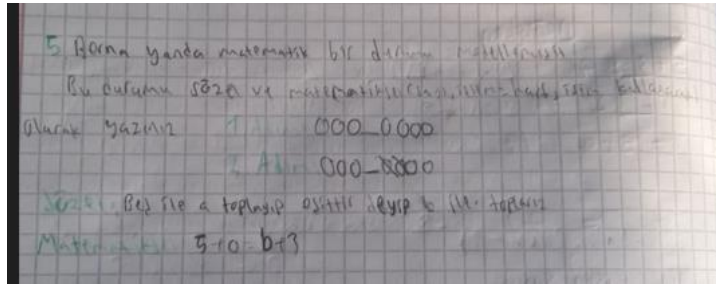
Kayra: Bilinmeyenler.

[...]

Araştırmacı: Heh ama ben bir şey merak ediyorum. Bu kutuyu birşeyle tanımlasan (78’li olan sorudaki kutuyu) nasıl tanımlarsın diyorum? Sen de diyorsun ki bilinmeyenler diyebiliriz mesela diyorsun. Tamam diyorum bilinmeyenler güzel bir isim peki başka bir isim verebilir misin bilinmeyenler dışında. 2 verebilirim 3 verebilirim sıfır verebilirim. 1 verebilirim. 7 verebilirim. 100 verebilirim. Bir sürü şey verebilirsin.

Arda: Bence sınırsız sayı diyebiliriz.

Daireyle temsil edilen değişkeni yorumlayıp sözel ve matematiksel temsille ifade etmeyi gerektiren soru-5’te ilk değerlendirmede daireler ve arasına konulan noktaların aslında miktarı bilinmeyen, genelleştirilmiş bir sayı olarak ilişkisel yorumlamayı gerektiren bir çokluğu temsil ettiğini farkedemediği görülmüştür (Görsel 3.136). Üç daire ve dört daire arasına konulan noktaları işlem konulması için bırakılmış noktalar olarak değerlendirdiği; $3+4$ şeklinde yorumladığı ve 7 sayısına ulaşacak şekilde eşitliğin iki tarafına da bilinmeyenleri temsilen a ve b harflerini yazdığını ifade ettiği görülmüştür (Görsel 3.136). İlk adımda verilen 3 dairenin yanına kaç eklersek 7 olur sorusunu temsilen ‘ $3+b$ ’ şeklinde; ikinci adımda çıkarılan iki daireden sonra kalan 5 dairenin yanına kaç eklersek 7 olur sorusunu temsilen ‘ $5+a$ ’ şeklinde temsil ettiği; ikisinin de sonucunun 7 olacağını ifade etmek için de iki cebirsel ifadenin arasına eşit işaretini koyduğu görülmüştür (Görsel 3.136). Bireysel görüşmede öğretmen rehberliğinden sonra daireler ve aralarına konulan noktaların genelleştirilmiş sayıyı temsilen kullanılabileceğini fark ettiği; modeli verilen ilk durumu 7’den büyük sayılar olarak yorumlarken; modeli verilen ikinci durumu 5’ten büyük sayılar olarak sözel olarak ifade edebildiği ancak genelleştirilmiş sayıyı temsilen bir değişken olarak kullanamadığı ve bu değişkenin iki eksikliğini de nesneleştirilmiş bir yapı olarak ilişkisel yorumlayamadığı görülmüştür (Görsel 3.137).



Araştırmacı: Mesela o 5'i bulduğun yeri anladım. Ama o 5'in yanına neden a gibi bilinmeyen bir şey ekledin? Verilmeyen bir şey ekledin mesela. Orada a. A nereden aklına geldi? Ya da neden ekledin?

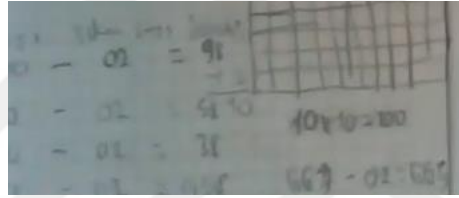
Kayra: Hocam ben ikinci adımda şeyi düşündüm eksilenlerden diğerlerini yani toplam 5 kalıyor oradaki yuvarlaklar 5 kalıyor.

Araştırmacı: Aynen. Ama 5'in yanına a diye bir şey eklemişsin o a ne orada? 5 artı a yazmışsın ya yani niçin yazmıştın oradaki a'yı?

Kayra: Yani bilinmeyen sayı. Yani şöyle olabilir. 5 artı a 7'ye eşit olması gerekiyormuş. B artı 3 yani o da 7 ye eşit olması gerekiyormuş.

Araştırmacı: Peki oradaki b artı 3 var ya o nereden geldi? B artı 3.

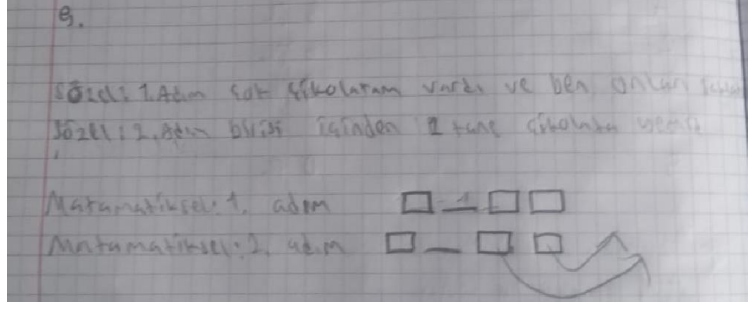
Kayra: Hocam normal zaten, buradaki gibi yaptım. Burada ben şöyle düşündüm. Buradaki toplam sayı 7 ama burada 5 var. 5 artı yani a 2, b 4, olması lazım.



Görsel 3. 137. Kayra'nın değişken ilk değerlendirme soru-5'e ilişkin cevabı

Daireyle temsil edilen değişkeni yorumlayıp sözel ve matematiksel temsille ifade etmeyi gerektiren soru-5'te son değerlendirmede değişkeni genelleştirilmiş bir sayı olarak Görsel 3.138'de görüldüğü üzere 'çok çikolatam vardı' şeklinde ve nesneleştirilmiş bir yapı olarak 'birisi beni görmüş, içinden iki tane çikolata yemiş' ifadesiyle ilişkisel yorumlayabildiği yönünde değerlendirilmiştir. Matematiksel olarak temsil etmesi beklenen genelleştirilmiş sayıyı soruda yer alan modellemeye benzer bir modellemeyle temsil ettiği görülmüştür (Görsel 3.138). Bireysel görüşmede matematiksel temsil ederken harf de kullanabileceği hatırlatıldığında modeldeki her bir kareye karşılık bir 'a' harfi yazabileceği önerisini getirmiştir. Derinlemesine sorularla yapılan görüşmeden sonra her bir kare yerine a harfi yazarak temsil etme önerisi getirdiği görülmüştür.

Araştırmacı: Dur bakayım sen ne yazmışsın. Birinci adım... (Kayra'nın yazdığı okunmuyor) bir okur musun Kayra onu? Ne yazıyor orada?



Görsel 3. 138. Kayra'nın son değerlendirme soru-5'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Orada neden çok kelimesini kullandın peki. Çok çikolatam vardı dedin ya.

Kayra: nokta nokta olduğu için. Kaç tane olduğunu bilmiyorum. 2 de olabilir. 3 de olabilir. 4 de olabilir. 5 de olabilir. Sınırsız sayı olabilir. Çünkü ortasını bilmiyorum.

[...]

Araştırmacı: bir de ama bak matematiksel kısımda şöyle bir şey yazmış soruda. Dikkatini çekti mi bilmiyorum. demiş ki matematiksel derken şunu demek istiyorum demiş. Sayı, işlem, harf, isim bunlardan herhangi birisini kullanabilirsin demiş. Ama ben seninkine bakıyorum. Sende diyorum sayı yok. Harf yok işlem yok eeee nasıl diyorum bu matematiksel. Acaba senin yaptığın matematiksel değil de şeklini çizerek bir modelleme mi?

Kayra: Hocam ben büyük ihtimal orayı okumadım. (gülüyor)

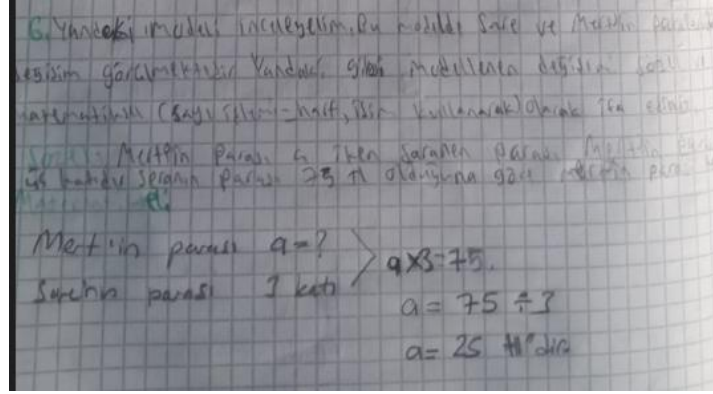
Araştırmacı: Olabilir. Peki şimdi olsa nasıl yaparsın? Yani sayı işlem ya da harf kullanarak. Birinci adımı anlatsan nasıl anlatırsın mesela?

Kayra: Birinci adım onlar a,a,a tabi ben bilmiyorum tabi. Nokta nokta nokta a,a,a.

Araştırmacı: Heee burada daire çizdi diye her bir daireye karşılık olarak a mı yazman gerekiyor.

Kayra: Bence yazabilirim.

Birbirine bağlı değişen nicelikleri temsil eden değişkenler modelle verilip sözel ve matematiksel olarak temsil etmesi ve değişkenleri hesaplamasını gerektiren soru-6'da ilk değerlendirmede Kayra'nın 10 tl ile temsil edilen çubuğun büyüklüğünden yola çıkarak Mert'in başlangıçtaki parasının yaklaşık olarak 25 tl olduğunu tahmin ettiği; Sare'nin başlangıçtaki parasının da 3 tane çubuktan oluştuğu fikrinden yola çıkarak parasının 75 tl olduğunu ifade ettiği görülmüştür (Görsel 3.139). Sare ve Mert'in paralarını birbirine bağlı değişen nicelikler bağlamında (ilişkisel) sözel olarak doğru bir şekilde ifade edebildiği görülmüştür (Görsel 3.139). Ancak bu ilişkisel yorumlamayı problemin çözümünde işe koşabildiği enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler görülmemiştir.



Görsel 3. 139. Kayra'nın değişken ilk değerlendirme soru-6'ya ilişkin cevabı

Araştırmacı: İşte ben o 25'li, olanı vermişlere pek ikna olamıyorum. Neden biliyor musun? Çünkü diyorum ki yaaa Kayra diyorum 25'i nasıl adı gibi biliyor? 10, 20 bir de 6 olsa 26 olur. Eğer 26 yaparsan 3'le çarpınca 78 oluyor. Yani sen 25 alırsan 75 buluyorsun ama 26 alırsan 78 buluyorsun. Yani cevabın değişiyor. Yani 25 mi seçeceğim 26 mı seçeceğim ona nasıl karar vereceğim? Yani 25'e benziyor demek yeter mi acaba? Yani sanki 25 gibi görünüyor demek (bu sırada Kayra defterine bir şeyler çiziyor yazıyor)

Kayra: Hocam ben şekle göre yaptım. Normal bir oradaki 10'u karşılaştırsak.

Araştırmacı: Peki şekle göre 26 da mantıklı değil mi? 26 da mantıklı değil mi şekle göre?

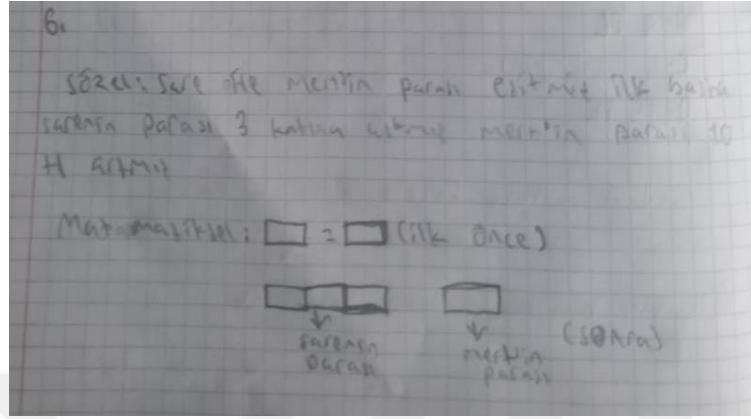
Kayra: Hocam ben kareli kullandığım için şekli şu anda.

Araştırmacı: Heee yok yok. Çok düzgün çizmene gerek yok. Yani ekrandan bakınca 25'i mantıklı buluyorsun ya iki tane 10 var diyorsun bir de yanında 5 var diyorsun. O yüzden 25 olmuş olabilir diyorsun. Eee 26 da olamaz mı diyorum ben de. Eee 26'ya da benziyor gibi. Nasıl karar vereceğiz acaba 25 mi yoksa 26 mı?

Kayra: Hocam ben dediğim gibi şekle göre yaptım ama kaldığı şeye göre. Ama benim defterim kareli olduğu için çizemiyorum onun gibi.

Birbirine bağlı değişen nicelikleri temsil eden değişkenler modelle verilip sözel ve matematiksel olarak temsil etmesi gerektiğinde soru-6'da son değerlendirmede Kayra'nın verilen modelleri yukarıdan aşağıya doğru yorumlamak yerine aşağıdan yukarıya doğru yorumladığından Sare ve Mert'in paralarının başlangıçta eşit olduklarını ifade ettiği görülmüştür (Görsel 3.140). Birbirine bağlı değişen bu nicelikleri 'kutu=kutu' şeklinde ifade edebildiği görüldüğünden değişken kavramını ilişkisel yorumlayabildiği düşünülmüştür. Sonrasında bireysel görüşmede Sare ve Mert'in paralarını birbiri ile ilişkilendirmeyip kendi içlerindeki değişimi 'Sare'nin parası 3 katına çıkmış' ya da 'Mert'in parası 10 tl artmış' şeklinde ifade ettiğinden değişkenleri

nesneleştirilmiş bir yapıda yorumlayabildiği ilişkisel yorumlamanın bileşenleri görülmüştür.

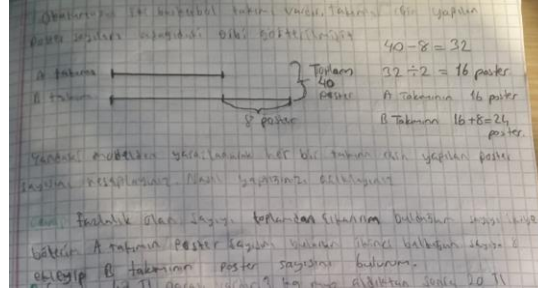


Görsel 3. 140. Kayra'nın değişken son değerlendirme soru-6'ya ilişkin cevabı

Kayra'nın öğretmenle yapılan bireysel görüşmede soru-6'ya ilişkin derinlemesine sorularla birbirine bağlı değişen niceliklerin modelle temsilini doğru yorumlayarak değişkenleri doğru hesaplayabildiği görülmüştür. Çubukla temsil edilen değişkenin ilişkisel yorumlanmasını işe koşarak problemi çözebildiğinden **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergeler görülmüştür. Aynı zamanda yaptığı adımları birbirine bağlı değişen niceliklerin çubuk temsiline dayandırarak doğrulayıcı açıklamalar ve gerekçelendirmelerle ifade edebildiği görüldüğünden çalışmasının **semiyotik-söylemsel** düzlemin bileşenlerine ilişkin göstergeler taşıdığı ele alınmıştır.

Birbirine bağlı değişen niceliklerin çubuk modeli ile temsil edildiği problemi çözmesini gerektiren soru-7'de ilk değerlendirmede birbirine bağlı değişen nicelikleri temsilen kullanılan çubuk modellerini sözel olarak doğru bir şekilde yorumlayabildiği ve bu yorumu kullanarak değişkenleri doğru bir şekilde hesaplayabildiği görülmüştür (Görsel 3.141). Elde edilen verilerden yola çıkarak değişken kavramının ilişkisel yorumlanmasının işe koşulduğu **enstrümantal oluşumun** bileşenlerinin görüldüğü ancak yaptığı adımları mantıklı doğrulayıcı açıklamalarla ifade edemediği görüldüğünden çalışmasının **semiyotik-enstrümantal** düzlemde yer aldığı şeklinde değerlendirilmiştir. Kayra'nın bireysel görüşmede 'neden 8'i çıkardın?' sorusuna verdiği cevaba bakıldığında '40'tan 8'i çıkardım. Çünkü başka bir sayı yok' ya da 'neden toplamadın

da çıkardın?’ sorusuna verdiği cevaba bakıldığında ‘toplasaydım 48 olurdu’ şeklinde doğrulayıcı bir açıklama içermediği görülmüştür.



Görsel 3. 141. Kayra'nın değişken ilk değerlendirme soru-7'ye ilişkin cevabı

Araştırmacı: Hmmm peki Kayra en başta anlatırken şey dedin ya 40'tan 8'i çıkardım dedin ya orada 40'tan 8'i neden çıkardın?

Kayra: Hocam normal toplam poster sayısı 40'mış ama b takımına 8 poster daha fazla yapmışlar

Araştırmacı: Hı hı.

Kayra: O yüzden 40'tan 8'i çıkardım. Çünkü başka bir sayı yok.

Araştırmacı: Onlar fazla yapmışlar. Heee. Onlar fazla yapmışlar ama sen çıkartıyorsun.

Kayra: Evet. Çünkü A takımında yoktu. O yüzden ben de başka bir yapacağım bir şey yok.

Hocam Ben de o yüzden 40'tan 8'i çıkardım.

Araştırmacı: Neden toplamadın yani?

Kayra: Toplarsam daha 48 oluyor.

Araştırmacı: Çıkarırsan da 32 oluyor.

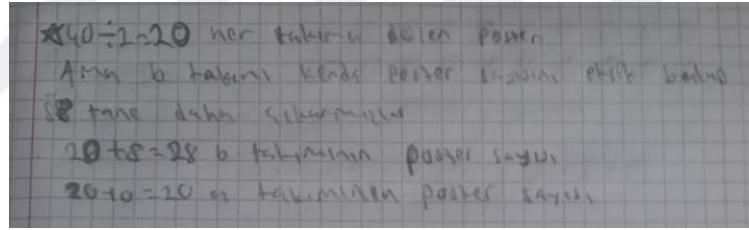
Kayra: Evet.

Araştırmacı: Küçülüyor sayı. Halbuki onlar fazla yaptık demişler.

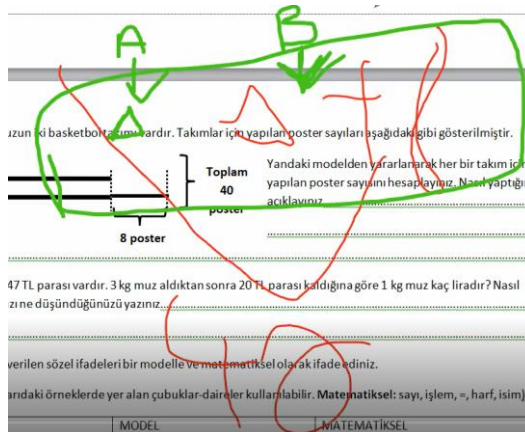
Kayra: Ben en sonda 8'i ekledim.

Birbirine bağlı değişen niceliklerin çubuk modeli ile temsil edildiği problemi çözmesini gerektiren soru-7'de son değerlendirmede bireysel uygulamada değişkenlerden B takımını, A takımına bağlı bir şekilde sözel olarak ifade edebildiği ve ilişkisel yorumlayabildiği ancak A ve B takımları için bulduğu değerlerin modelde ifade edilen iki takımın toplamının 40 olması şartını sağlayamadığı görülmüştür (Görsel 3.142). Bu nedenle değişken kavramının ilişkisel yorumlanmasını etkin bir araç olarak işe koşarak problemi çözemediği değerlendirilmiştir. Bireysel görüşmede derinlemesine sorularla A takımına farklı değerler verip B takımının poster sayısını hesaplayabildiği ancak bu süreçte değişkeni sayısal olarak yerine koyma yaparak kullandığından

aritmetik düşünmenin bileşenlerine ilişkin göstergeler olarak değerlendirilmiştir. Öğretmen rehberliği ile A ve B takımlarını farklı temsillerle birbirine bağlı bir şekilde ifade etmesi konusunda desteklendiğinde A takımını üçgen; B takımını kare ile temsil etmek istediği görüldüğünden değişkenleri birbirine bağlı nicelikler olarak temsil edemediği görülmüştür. Birbirine bağlı bir şekilde temsil edebileceğini farkedene Kayra'nın A takımını küçük üçgen şekliyle temsil ederken B takımını büyük üçgen şekliyle temsil edebildiği görülmüştür. Görsel 3.143'e görüldüğü üzere öğretmen rehberliği ve sorularla yönlendirilen Kayra'nın A ve B takımlarını birbirine bağlı şekilde üçgen ve üçgen+8 şeklinde ifade edebildiği ve toplamlarının 40 olduğunu gösterdikten sonra A ve B değişkenlerini kolayca doğru bir şekilde hesaplayabildiği görülmüştür. Ancak değişken kavramının ilişkisel yorumlanmasını işe koşarak çözdüğü bu problemde yaptığı adımları açıklaması istendiğinde doğrulayıcı açıklamalar ifade edemediğinden çalışmasının semiyotik-enstrümantal düzlemde olduğu kabul edilmiştir.



Görsel 3. 142. Kayra'nın değişken son değerlendirme soru-7'ye ilişkin cevabı



Görsel 3. 143. Kayra'nın değişken öğretmen rehberliğinden sonra problemin çözümünde işe koştugu ifade

Çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliğinde, farklı şekillerle temsil edilen genelleştirilmiş sayı olarak değişken kavramını hissedebilmeyi

gerektiren soru-10'da ilk değerlendirmede Kayra'nın Görsel 3.144'e görüldüğü üzere genelleştirilmiş sayıyı temsil eden şekillere sayı atayabildiği, aynı olan şekiller için aynı sayıyı vermesi gerektiğini fark ettiği ve buna uygun belirlediği sayılarla yaptığı işlemlerin sonuçlarının eşit olduğunu belirleyerek hem eşit işaretinin hem de değişken kavramının ilişkisel yorumlanmasını işe koşarak problemi çözebildiğinden **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin gösterge olduğu kabul edilmiştir. Ancak bu soruda da diğer sorularda olduğu gibi Kayra'nın doğru bir şekilde çözebildiği görülse de doğrulayıcı açıklamalar yapamaması ya da yeniden çözmesi istendiğinde Görsel 3.145'te verildiği gibi çözememesi bu soruları yaparken yardım almış olabileceği ihtimalini de göz önünde bulundurmak gerektiğini düşündürmüştür. Bireysel görüşmede şekillerle temsil edilen genelleştirilmiş sayılarda bazı sayılar eşitliği sağlarken bazı sayılar için eşitliği sağlayamayabileceği ihtimalini ifade etmiş olmasından dolayı değişken kavramının genelleştirilmiş sayı olarak ilişkisel yorumlamada kavrama dair eksik ya da hatalı bir imaja sahip olduğu ele alınmıştır.

1. Aşağıdaki $\square$, 0 ve Δ şekillerinden her biri bir sayıya karşılık gelir. Bu sayılarda bazı işlemler yazılır ve alınan sonuçlar aynı olur. Bu sayılar başka benzer işlemler olarak yazılır. Bu durum ilişkilendirilerek özellikler olarak ifade edilir.

I. $(\square + 0) \times \Delta = \square \times \Delta + 0 \times \Delta$
 II. $(\square - 0) \times \Delta = \square \times \Delta - 0 \times \Delta$

Yukarıdaki ifadelerden $\square$, 0 ve Δ için farklı rakamlar kullanılarak sağ ve sol taraftaki işlemlerin aynı olduğunu gösteriniz. Bu doğrultuda I ve II. Durum için farklı sayılar kullanarak işlemler yazınız.

I. $(\square + 0) \times \Delta = \square \times \Delta + 0 \times \Delta$ II. $(\square - 0) \times \Delta = \square \times \Delta - 0 \times \Delta$

1. $(3 + 1) \times 4 = 3 \times 4 + 1 \times 4$ 1. $(3 - 1) \times 2 = 3 \times 2 - 1 \times 2$
 $4 \times 4 = 12 + 4$ $2 \times 2 = 6 - 2$
 $16 = 16$ $4 = 4$

2. $(5 + 2) \times 3 = 5 \times 3 + 2 \times 3$ 2. $(9 - 4) \times 3 = 9 \times 3 - 4 \times 3$
 $7 \times 3 = 15 + 6$ $4 \times 3 = 24 - 12$
 $21 = 21$ $12 = 12$

Görsel 3. 144. Kayra'nın değişken ilk değerlendirmede soru-10'a ilişkin cevabı

$\square (3 + 1) \times 4 = 3 \times 4 + 1 \times 4$
 $(1 + 4) \times 2 = 1 \times 2 + 4 \times 2$

Görsel 3. 145. Kayra'nın değişken bireysel görüşmede soru-10'a ilişkin cevabı

Araştırmacı: Peki oradaki üçgeni büyük sayı verebilirler mi? Benim orada kafam karıştı. Acaba dedim, küçük sayı vermeliler gibi mi düşünüyorsun?

Kayra: Evet, hocam çünkü normal zaten büyük sayı verseler 10 falan verseler zaten oranın cılkı çıkar.

Araştırmacı: Nasıl? Yanlış mı çıkar sence. 10 verirsek mesela?

Kayra: Yaaa

Araştırmacı: Ya da 100 versek mesela? Daha da büyük

Kayra: 100 versek yani mesela şey yapabilir. Bir tarafa 100 verdiğinde buraya da 100 verdiğinde baya şey çıkar, baya ... (ne diyeceğini bilemedi)

Araştırmacı: Büyük mü?

Kayra: Evet

Araştırmacı: Büyük çıkar, eşit çıkar mı peki?

Kayra: ııı eşit çıkmayabilir

Çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliğinde farklı şekillerle temsil edilen genelleştirilmiş sayı olarak değişken kavramını hissedebilmeyi gerektiren soru-10'da son değerlendirmede birinci doğrulamada Kayra'nın değişkeni temsilen kullandığı her bir şekle bir sayı atayabildiği, aynı şekle aynı sayıyı yazması gerektiğinin farkında olduğu görülmüştür (Görsel 3.146). Ancak bu ifadenin doğru olup olmadığına karar verebilmesi için eşit işaretinin her iki tarafındaki sonuçların karşılaştırılarak aynı olması gerektiğini farkedemediği görülmüştür. Bireysel görüşmede öğretmen rehberliğinden sonra işlemleri yapıp sonuçları karşılaştırabildiği ve eşit işaretini de problemin çözümünde bir araç olarak işe koşabildiği ve doğrulayıcı gerekçelendirmeler ortaya koyabildiği görülmüştür. Genelleştirilmiş bir sayı olarak ilişkisel yorumlayabildiği değişken kavramını anlamlı bir şekilde problemin çözümünde işe koşabildiğinden **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü; ilişkisel yorumladığı değişken kavramının özelliğinden yararlanarak doğrulayıcı açıklamalar yapmaksızın sadece yaptığı adımları ifade ettiğinden çalışmasının **semiyotik-enstrümantal** düzlemde yer aldığı kabul edilmiştir.

10.

$$1.(\square+0)\times\Delta=\square\times\Delta+0\times\Delta$$

1.008/ulama.

$$(3+4)\times 2=3\times 2+4\times 2$$

2.008/ulama.

$$(5+6)\times 1=5\times 6+6\times 1$$

Görsel 3. 146. Kayra'nın değişken son değerlendirme soru-10'a ilişkin cevabı

Araştırmacı: Ama nasıl aynı şey çıkıyor ben onu merak ediyorum. Mesela sen kafana göre seçmişsin. Ötekisi gelecek kafasına göre seçecek. Nasıl eşit çıkıyor onlar?

Kayra: Yerlerini değiştirse bile.. sonuçta sen bir tarafa gidip de 14 bulup da bir tarafa gidip herşeyi yanlış yazmışsın. Karışık karışık yazmışsın. Orayı topladığında 30 çıkmaz. Karışık kuruşuk yazmasan ya da yanlış yazmasan doğru şey çıkar.

Araştırmacı: Karışık kuruşuk yazmasan dediğin ne? Onların yazdıkları gibi mi demek istiyorsun yazmamız lazım?

Kayra: Mesela gidip yukarıdaki örnektekine benzer şekilde örnek vermemizi isterse şurayı sen üçgen yerine kare... üçgen yerine kare yazarsan bunun yerine üçgen yazarsan tabi denklem bozulur.

Araştırmacı: O zaman oradaki üçgenlerin karelerin yerleri de önemli.

Kayra: Doğru olması lazım yerlerinin. Yan tarafta da çıkarması var.

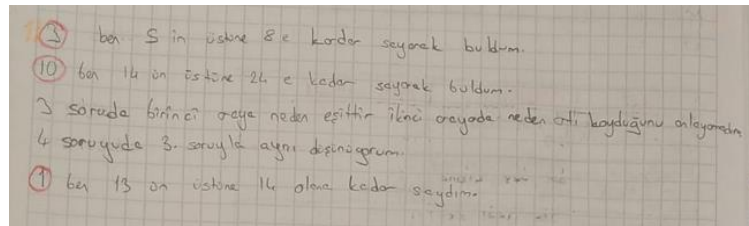
3.2.2. Nazlı'nın matematiksel çalışma uzayı

Bu bölümde Nazlı'nın matematiksel çalışma uzayı, ilk/son değerlendirmede yer alan soruların analizi sonucu ortaya çıkan temalar olan 'değişken kavramının işlemsel ve ilişkisel yorumunu' anlamlandırmaya yönelik bulgular olarak iki başlık altında sunulmuştur.

3.2.2.1. Değişken kavramının işlemsel yorumunu anlamlandırmaya yönelik bulgular (1.,8., ve 9. Sorular)

Değişkenin belirli bir bilinmeyen olarak doğru yorumlanıp hesaplanmasını gerektiren denklem içeren soru-1'de ilk değerlendirmede Nazlı'nın birinci ve ikinci sorularda işlemler ve bilinmeyenin eşit işaretinin solunda cevabın da eşit işaretinin

hemen sağında verildiğı soru türlerinde bilinmeyi doğru bir şekilde hesaplayabildiğı (Görsel 3.147); hem eşit işaretini kesin işlemsel hem de değişken kavramının belirli bir bilinmeyen olarak işlemsel yorumunu problemin çözümünde anlamlı bir şekilde işe koşabildiğı **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü ele alınmıştır. Bireysel görüşmede bilinmeyen için belirlediğı değerin neden doğru olduğı, başka sayılar olup olmayacağı sorulduğunda ‘sayısal olarak yerine koyma’ yaparak doğrulayıcı açıklamalar yaptığından çalışmasının değişken kavramının işlemsel yorumunun aktif olduğı **semiyotik-söylemsel** düzlemde yer aldığı düşünülmüştür. Üçüncü ve dördüncü sorularda bireysel uygulamada eşit işaretinin esnek işlemsel yorumlanmasını işe koşması beklenirken etkin bir araç olarak işe koşamadığından belirli bir bilinmeyen olarak değişkenin işlemsel yorumunu da etkili bir şekilde kullanamadığı görülmüştür. Eşit işaretinin ilişkisel yorumlanmasına yönelik hazırlanan ilk değerlendirmenin görüşmesinden sonra yapılan değişken kavramının ilişkisel yorumlanmasına yönelik ilk değerlendirmenin görüşmesinde eşit işaretinin esnek işlemsel yorumlanmasını etkin bir araç olarak işe koşabildiğı ve buradan yola çıkarak değişkenin belirli bir bilinmeyen (işlemsel) yorumlanmasını da etkin bir şekilde işe koşarak bilinmeyi hesaplayabildiğı **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergeler görülmüştür. Dördüncü soruda ise bireysel uygulamada eşit işaretinin temel ilişkisel ya da karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanmasını etkin bir araç olarak işe koşamadığından belirli bir bilinmeyen olarak değişkenin de işlemsel yorumunu etkin bir araç olarak işe koşamadığı kabul edilmiştir. Eşit işaretinin ilk değerlendirmesinin arkasından yapılan bireysel görüşmeden sonra Nazlı’nın eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlanmasını etkin bir araç olarak işe koşabildiğı ve buradan hareketle de değişken kavramının belirli bir bilinmeyen (işlemsel) yorumlanmasını işe koşarak bilinmeyi hesaplayabildiğı **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergeler görülmüştür.



Görsel 3. 147. Nazlı'nın değişken ilk değerlendirme soru-1'e ilişkin cevabı

Nazlı: Öğretmenim o zaman dediğim gibi çok bilmiyorduk ya hani, eşittir neden konuluyor ortaya. O yüzden de onları çok anlayamadığım için boş bırakmışım.

Araştırmacı: Heee şimdi olsa nasıl yaparsın?

Nazlı: Şimdi olsa mesela sonuç 32 mi çıkmış? Yani 32'ye eşit olması gerekiyorsa 15'in üstüne 32'ye kadar sayar veya 32'den 15 çıkartarak.

Araştırmacı: Mmm anladım. Peki eskiden olsaydı. Mesela dedin ya biz böyle eşittirin ne anlamda kullanıldığını tam farkedememiştik önceden diye. Eskiden olsaydı ne düşünürdün? Ne tuhaf geldi sana mesela. Yukarıda da var mesela bir soru o tuhaf gelmedi (1.soruyu gösteriyor) Burada da var mesela bir soru o da (2.soruyu gösteriyor) o da tuhaf gelmedi ama buraya gelince dedin ki ben bunu boş bıraktım.

Nazlı: Çünkü öğretmenim biz dördüncü sınıfa kadar hep sonda gördüğümüz için işlemi önce gördüğümüz için eşittiri... ben böyle ortada falan görünce böyle çok şaşırmışım.

[...]

Araştırmacı: Şimdi de hala aynı şeyi mi düşünüyorsun bir bak bakalım soruya?

Nazlı: Hayır öğretmenim.

Araştırmacı: Nasıl yaparsın şimdi olsa?

Nazlı: Şimdi olsa... şöyle demek istiyor yani 13'le kare, kare bir sayıymış. Onlarla 14 artı 7 eşit sayıların. Mesela 14'le 7'yi toplayınca.

Araştırmacı: Hı hı

Nazlı: 21 ediyor. O zaman 21'den 13 çıkartıp 8 olarak bulurum ama ben o zaman nedense 1 yapmışım.

Değişkenin belirli bir bilinmeyen olarak doğru yorumlanıp hesaplanmasını gerektiren denklem içeren soru-1'de son değerlendirmede Nazlı'nın belirli bir bilinmeyen olarak değişken kavramının işlemsel yorumunu işe koşarak bilinmeyeni hesaplayabildiği; eşit işaretinin de kesin işlemsel yorumunu işe koşarak sayısal olarak yerine koyma yaptığı görüldüğünden hem eşit işaretinin hem de değişken kavramın işlemsel yorumunu işe koşarak problemi çözebildiği **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergeler görüldüğü ele alınmıştır. Bilinmeyen yerine kullanılabilecek olası farklı değişken temsillerine ilişkin öneriler sunabildiği görülmüştür. Hesapladığı sonucun doğruluğunu açıklarken farklı sayılar deneyince sonucun doğru olmadığını sayısal olarak yerine koyma yaparak gösterdiğinden çalışmasının **semiyotik-söylemsel** düzlemde olduğuna ilişkin göstergeler olarak yorumlanmıştır. Değişken kavramının genelleştirilmiş sayı (ilişkisel) ve belirli bir bilinmeyen (işlemsel) yorumu arasındaki farkı işlemin sonucunun verilmemesi ve verilmesi arasındaki farkla ilişkilendirdiği sınırlı bir imajı olduğu görülmüştür. Soruda belirli bir bilinmeyeni temsilen yazılan a harfini tanımlaması istendiğinde 'böyle kutu

gibi bir şey olsa gene onun içine koyulmuş ama biz bilmiyoruz onu' şeklinde ifade ettiği görüldüğünden **semiyotik oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü şeklinde değerlendirilmiştir. Soruda hesaplanması istenen bilinmeyeni eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanmasını bir algoritma gibi kullanarak da çözebildiği düşünülse de aslında temel ilişkisel yorumlamayı kullanarak çözdüğü sonra karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı da bu sonucu destekleyecek şekilde bir kural gibi kullandığı görülmüştür. Eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanmasını işe koşarak bilinmeyeni hesaplarken kullandığı tekniği gerekçelendirmeksizin sadece yaptığı adımları ifade etmiş olması çalışmasının **semiyotik-enstrümantal** düzlemde olduğuna ilişkin göstergeler taşıdığı düşünülmüştür.

Araştırmacı: Peki şeyyy.. a burada mesela ne? Nasıl isimlendirilir yine?

Nazlı: a gene verilmeyen sayı olur. A böyle kutu gibi bir şey olsa gene onun içine koyulmuş ama biz bilmiyoruz onu.

Araştırmacı: Hmmm saklı bir şeyler gibi mi canlandırıyorsun gözünde Nazlı. Hani bir kutu içinde bir şeyler var biz görmüyoruz.

Nazlı: Yani evet. Ya da direk o sayının yerine direk a yazmışlar. Benden onu bulmamı istiyorlar.

[...]

Araştırmacı: Bir de böyle sayıların değişimine bakarak yapmak mümkün mü?

Nazlı: Nasıl yani öğretmenim?

Araştırmacı: Mesela sayılar nasıl değişmiş?

Nazlı: Mesela 8 iken birincisi 7 olmuş. 1 azalmış 13 iken 14 olmuş. 1 artmış 1 azalmış

Araştırmacı: 8 olduğunu nereden biliyorsun ama? Hani şimdi kutu yazıyor ya. 8'i sen daha bulmadın.

Nazlı: Bulmuştuk ya oradan ben yola çıktım ama bulmasak da 13, 14 olduğuna göre 1 artmış. Diğeri de 1 azalır. O zaman 8 olur. Pardon 1 azaldığına göre orası da 1 fazlası olacak 8 olur. Öyle de bulabiliriz.

Sözel bir problem içinde verilen belirli bir bilinmeyeni hesaplamayı gerektiren soru-8'de ilk değerlendirmede Nazlı'nın bireysel uygulamada sözel olarak verilen belirli bir bilinmeyen olarak değişkenin işlemsel yorumunu etkin bir araç olarak işe koşamadığı (Görsel 3.148), soru üzerinde biraz daha düşündükten sonra değişken kavramının işlemsel yorumunu ters işlem yaparak işe koşabildiği (Görsel 3.148) **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergeler görülmüştür.

8. Ne kadar olduğunu nasıl hesapladığınızı anlatın.

$$\begin{array}{r} 47 \\ -20 \\ \hline 27 \end{array} \quad \begin{array}{r} 27 \overline{) 3} \\ 27 \overline{) 31} \text{ kg} \\ \hline 00 \end{array}$$

Görsel 3. 148. Nazlı'nın ilk değerlendirme bireysel uygulamada öğretmen rehberliğinden sonra soru-8'e ilişkin cevabı

Sözel bir problem içinde verilen belirli bir bilinmeyi hesaplamayı gerektiren soru-8'de son değerlendirmede Nazlı'nın değişkenin işlemsel yorumu olan belirli bir bilinmeyen yorumunu problemin çözümünde işe koşamadığı; bunun yerine ters işlem yaparak bilinmeyi hesapladığı görülmüştür (Görsel 3.149). Öğretmen rehberliğinden sonra muzun kg fiyatını bilmediğinden bilinmeyi yani muzun kg fiyatını daire ile temsil etmeyi önerdiği; üç kg muzun fiyatını üç tane daire ile gösterebildiği ve bu üç dairenin 27'ye eşit olduğunu Görsel 3.150'de verildiği gibi temsil ettiği görülmüştür.

$$\begin{array}{r} 47 \\ -20 \\ \hline 27 \end{array} \quad \begin{array}{r} 27 \overline{) 3} \\ 27 \overline{) 31} \text{ kg} \\ \hline 00 \end{array}$$

Görsel 3. 149. Nazlı'nın son değerlendirme soru-8'e ilişkin cevabı

Görsel 3. 150. Nazlı'nın son değerlendirme soru-8'e ilişkin öğretmen rehberliğinden sonra cevabı

Sözel olarak verilen belirli bir bilinmeyen içeren ifadelerin cebirsel ve model ile temsil edilmesini gerektiren soru-9'da ilk değerlendirmede Nazlı'nın belirli bir

bilinmeyen olarak değişkenin işlemsel yorumlanmasını işe koşabildiği ve bilinmeyenleri doğru bir şekilde sayısal olarak yerine koyarak hesaplayabildiği (Görsel 3.151) görüldüğünden hareketle **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin gösterge olarak ele alınmıştır. Ancak sözel olarak ifade edilen, değişkeni de içeren problem durumunu modellemesi istendiğinde Nazlı'nın süreci değil hesapladığı sonucu modellediği görülmüştür (Görsel 3.151). Bireysel görüşmede bilinmeyen belirli bir sayı olarak değişkeni nasıl temsil edebileceğini bilemediği ve '..... (araştırmacının adını söylemiştir) hocanın tuttuğu sayı' gibi tanımlayıcı isimlerle temsil edebileceğini ifade ettiği görülmüştür. Öğretmenin rehberliğinden sonra harf, kutu gibi temsillerle belirli bir bilinmeyen olarak değişkeni temsil edebileceğini fark ettiği ve değişkeni temsil eden harfi kullanarak ($a+3=14$ şeklinde ama alt alta yazarak) denklem kurabildiği (Görsel 3.152) ve cebirsel olarak temsil edebildiği görülmüştür. Bazı sorularda cebirsel olarak denklemi kurabildiği görülürken bazı sorularda da hata yaptığı; ancak belirli bir bilinmeyen olarak değişkenin işlemsel yorumunu da işe katarak modellemesi istendiğinde hata yaptığı görülmüştür.

Sözel	Model	Matematiksel
Aklından tuttuğun sayının 3 fazlası 14'tür.	●●●●●●●●	$\frac{11}{+3}$ $\frac{14}{-}$
Kitapların sayısını 2 eksiği 26'dır.	●●●●●●●●●●	$\frac{26}{-2}$ $\frac{28}{+}$
Toplamın sayısını 12 ile katının bir fazlası 54'dür.	●●●●●●●●●●	$\frac{12}{\times 2}$ $\frac{54}{+3}$ $\frac{57}{-}$

Görsel 3. 151. Nazlı'nın ilk değerlendirme bireysel uygulamada soru-9'a ilişkin cevabı

Nazlı: Aklıma gelmiyor öğretmenim yani siz aklınızdan bir sayı tutuyorsunuz veya poşette cevizler var. Ben onları saymadan veya siz bana söylemeden onları nasıl anlayabilirim ki.

Araştırmacı: Aynen sayı olarak söyleyemezsin. Ama başka türlü yazabilir misin? Çünkü kaç olduğunu bilmiyorsun sayı olarak. Ama sayı yerine başka bir şey yazabilir misin orada?

Nazlı: (anlaşılmadı)

Araştırmacı: He? (ne dedin anlamında soruyor) Yaaa Sibel hocanın aklına... (tam öğretmen konuşurken Nazlı araya girdi)

Nazlı: Bir poşet ceviz veya nasıl söylesem (araştırmacının adını söylemiştir) hocanın aklından tuttuğu sayı da olabilir. Direkt öyle de yazabiliriz.

[...]

Araştırmacı: Yani... ihtiyacın var mıydı mesela bu soruda? Oradaki o harf ve isim acaba bir ipucu mu bir kopya mı? Nasıl kullanacaktık ki biz harfi? Ne harfi ne isimi?

Nazlı: (o sırada Nazlı kafasını sağa sola sallıyor anlamadığını gösteren bir şekilde)
Anlayamadım öğretmenim yani. Ben matematiksel deyince direk işlem geldi aklıma. Direk işlem yaptım.

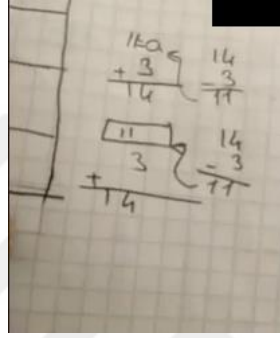
Araştırmacı: Peki matematikte harf kullanılır mı? İsim kullanılır mı?

Nazlı: Kullanılabilir öğretmenim herhalde (çok kendinden emin değil)

Araştırmacı: Mesela nasıl kullanılır? Nasıl kullanılır mesela harf veya isim?

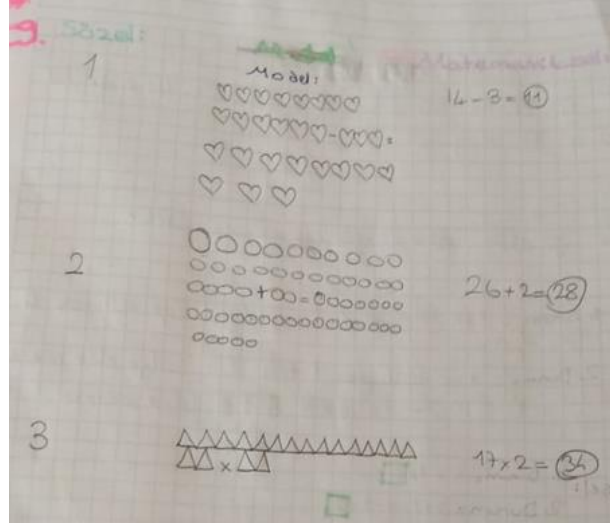
Nazlı: Mesela. Bizim çoğu şeyde mesela şey yapıyoruz ya hani eşittir koyduğumuzda mesela 14 eşittir a nokta 10. Yani a artı 10.

[...]



Görsel 3. 152. Nazlı'nın öğretmen rehberliğinden sonra denklem kurabildiği soru-9'a ilişkin cevabı

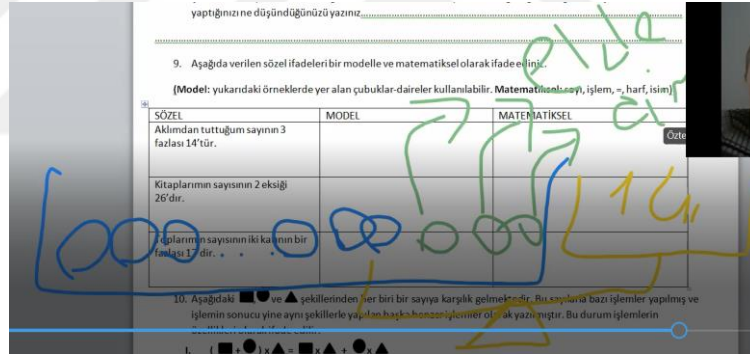
Sözel olarak verilen belirli bir bilinmeyen içeren ifadelerin cebirsel ve model ile temsil edilmesini gerektiren soru-9'da son değerlendirmede Görsel 3.153'de görüldüğü üzere belirli bir bilinmeyen olarak değişkenin işlemsel yorumunu kullanarak bilinmeyeni hesaplayabildiği **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergeler görülmüştür. Ancak sözel ifadeyle uyumlu bir denklem kurmayı modelle ya da cebirsel olarak temsil edemediği; bunun yerine bilinmeyeni hesaplamayı gerektiren işlemleri modellediği ve yine bilinmeyeni hesaplamayı sağlayan işlemleri matematiksel olarak yazdığı görülmüştür (Görsel 3.153). Ancak bireysel görüşmede öğretmen rehberliği ile beraber cebirsel olarak denklemi kurabildiği ve modelle denklemi kısmen oluşturabildiği ancak eşit işaretini modelle nasıl temsil edebileceğini bilemediği öğretmen rehberliğinden sonra eşit olma durumunu modellerken teraziden yararlanabildiği görülmüştür (Görsel 3.154).



Görsel 3. 153. Nazlı'nın son değerlendirme soru-9'a ilişkin cevabı

Araştırmacı: Peki bu eşittir de matematiksel sembol. Bu eşittir yerine başka bir şey yapabilir miyiz? Şekil, model? İki şeyin eşit olduğunu göstermek için kullanılabilecek bir model.

Nazlı: Terazi çizerim böyle eşit kefeleri olanlardan.



Görsel 3. 154. Nazlı'nın öğretmen rehberliğinden sonra soru-9'a ilişkin cevabı

3.2.2.2. Değişken kavramının ilişkisel yorumunu anlamlandırmaya yönelik bulgular (2.,3.,4.,5.,6.,7.,10. Sorular)

Tablo temsili ile verilen birbirine bağlı değişken nicelikleri farkedip ilişkisel yorumlamayı destekleyen soru-2'de ilk değerlendirmede Nazlı'nın değişkenler arasındaki ilişkiyi fark etmeksizin tabloda aynı sütundaki ardışık olarak devam eden sayıların arasındaki ortak farktan yola çıkarak bilinmeyeni hesaplayabildiği ve değişken kavramının işlemsel yorumlanmasını işe koştugu enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler görüldüğü ele alınırken bilinmeyen sayıyı temsil eden harflerin de 'sayı, rakam' olduğunun farkında olduğu bireysel görüşmeler sırasında görülmüştür.

Araştırmacı: Senin onları yazdığını görünce benim aklıma şurası geldi. Mesela gene 1 olarak söyleyen işte burada şöyle bir soru sormuşlar ya yandaki tabloyu incelediğimizde harfler nedir diye? Mesela bu harf nedir, bu harf nedir, bu harf nedir, bu harf nedir falan diye genel bir şey söyleyen hani fiyatıdır sayıdır gibi değil de genel bir şey. Mesela o harfler ne?

Nazlı: O harfler... (düşünüyor) mesela rakam.

Araştırmacı: Heh rakam.

Nazlı: Sayılar rakamlar.

[...]

Araştırmacı: Aynen. Sen nasıl yaptın burada mesela kaç tanenin 3 tl olduklarını onlar bilememişler ama sen bilmişsin. Bulmuşsun a'yı falan b'yi. Nasıl buldun?

Nazlı: Ben şöyle buldum öğretmenim. İlk önce fiyatlarına baktım. 3'er 3'er ritmik sayma gibi gidiyor. 3,6,9,12,15 diye... mini pastaların sayısına baktığımda da 2,3,5 diye gidiyor. O zaman bunlar direk sayma sayıları gibi 1,2,3,4,5 gibi gidiyor.

Nazlı'nın birbirine bağlı değişen niceliklerin tablo formatında verildiği soru-2'ye ilişkin bireysel uygulamada son değerlendirmede cevabına bakıldığında değişkenleri 'verilmeyenler, silineneler, bilinmeyen' şeklinde tanımladığı görülmüştür. Pastanın adedi ile fiyatı arasındaki ilişkiyi farkedebildiği ve bireysel görüşmede öğretmenin yönelttiği farklı miktardaki pastalardan alınması durumunda kaç tl ödeyeceğine ilişkin sorularda nicelikler arasındaki ilişkiden yola çıkarak hesaplayabildiği görüldüğünden bu verilerin değişken kavramının ilişkisel yorumunu işe koşabildiği **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin gösterge olduğu kabul edilmiştir. Aynı zamanda değişken kavramının birbirine bağlı değişen nicelikler (ilişkisel) yorumunu kullanarak doğrulayıcı açıklamalar, gerekçelendirmeler yapabildiğinden çalışmasının **semiyotik-söylemsel** düzlemde yer aldığına ilişkin göstergeler görülmüştür.

Araştırmacı: Peki Nazlı mesela diyelim ki bu mini pastalardan ben gideceğim alacağım. Arkadaşlarımı davet ettim eve. İkram etmek için onlara da bu pastalardan almak istiyorum. 20 tane pasta alsam kaç para veririm?

Nazlı: (içinden ritmik sayıyor sanırım, hafiften parmakları ile saydı galiba) 61 tl diye hesapladım ama.

Araştırmacı: Nasıl hesapladın elinle mi saydın?

Nazlı: Evet ama keşke direk böyle kâğıda yapsaydım.

Araştırmacı: Kâğıda yap bir de bir bak bakalım.

Nazlı: (yapmış zaten hemen) 60 tl oluyor.

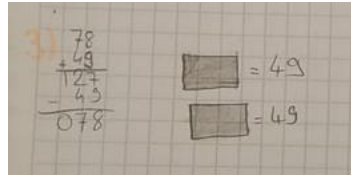
Araştırmacı: Kâğıda nasıl yaptın peki, kâğıda yaparken.

Nazlı: Direkt, 20 çarpı 3 yaptım. Çarptım.

Araştırmacı: Peki 15 tane alsam.

Nazlı: 15 tanesi 5... şey pardon ben fiyat şeyinden hesapladım. (sonra anladı hatasını) 45 tl.

Eşit işaretinin (karşılaştırmalı ilişkisel) ve değişkenin (genelleştirilmiş sayı) beraberce ilişkisel yorumlanmasını gerektiren soru-3'te ilk değerlendirmede Görsel 3.155'te görüldüğü üzere eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanmasını işe koşamadığından ve temel ilişkisel yorumlamayı işe koşarak sonuçları karşılaştırdığından değişken kavramının ilişkisel yorumlanmasının farkına varamadığı görülmüştür. Bireysel görüşmede önce kare ile temsil edilen genelleştirilmiş sayıyı tek bir değer olarak yorumlamış ve karelerin 49 olacağını ifade etmiştir. Öğretmenin sorduğu sorular ve rehberlikten sonra karelerin başka sayılar da olabileceğini ifade ettiği ama tam olarak genelleyemediği görüldüğünden değişken kavramının işlemselden ilişkisele geçiş düzeyinde yorumlanmasını işe koştugu **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin gösterge olarak kabul edilmiştir. Değişkene atadığı değerlerin doğruluğunu göstermek için değişken kavramının işlemsel yorumlanmasını kullanarak sayısal olarak yerine koyma yaptığından çalışmasının değişken kavramının işlemsel yorumlanmasının aktif olduğu **semiyotik-söylemsel** düzlemde yer aldığına ilişkin gösterge olarak kabul edilmiştir.



Görsel 3. 155. Nazlı'nın değişken ilk değerlendirme soru-3'e ilişkin cevabı

Nazlı: 78'le 9'u topladım 87. 87'den de 9'u çıkarttım 78.

Araştırmacı: Mesela sen şu anda kutu yerine kaç vermiş oldun o zaman?

Nazlı: 9

Araştırmacı: Peki kutu yerine 49 verebiliyoruz onlar vermişler. Sen de 9 verdin. 9 da verebiliyormuşuz. Başka sayı verebiliyor muyuz?

Nazlı: Mesela (deyip hemen kağıt kalem alıyor işlem yaparak defterine o şekilde kontrol ediyor) verebiliriz öğretmenim

Araştırmacı: Kaçı verdin mesela şimdi?

Nazlı: 3'ü verebiliriz.

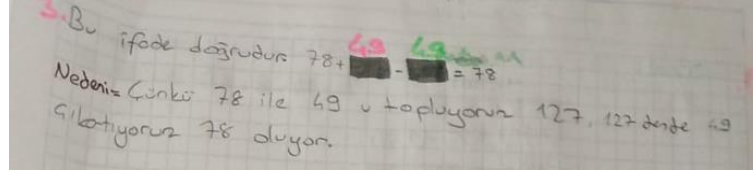
Araştırmacı: Tamam. Mesela 3'ü verdik 9'u verdik 49'u verdik. Başka sayı verebilir miyiz? Yaa ben kaç tane sayı verebiliriz. Hangi sayıları verebiliriz. Acaba o sayıların bir özelliği var mı? Yaaa neye göre seçeriz onu da merak ediyorum aslında? (genelleme yapması için rehberlik)

Nazlı: (yine deftere deniyor birşeyler sonra da) 5 de verebiliriz öğretmenim.

Araştırmacı: Hehh mesela 5 de verebiliyorsun. Yani acaba başka var mı verebileceğin?

Nazlı: Bir dakika öğretmenim 6'yı da bir deneyeceğim. (hemen defterine işlemler yaparak deniyor)

Eşit (karşılaştırmalı ilişkisel) ve değişkenin (genelleştirilmiş sayı) beraberce ilişkisel yorumlanmasını gerektiren soru-3'te son değerlendirmede Görsel 3.156'da görüldüğü üzere Nazlı'nın eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlanmasını işe koştuğundan değişkeni de belirli bir bilinmeyen olarak işlemsel yorumladığı **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergeler görülmüştür. Bireysel görüşmede öğretmen rehberliğinden sonra Nazlı'nın eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanmasını işe koşabildiği görüldüğünden değişken kavramının da genelleştirilmiş sayı olarak ilişkisel yorumlanmasını işe koşabildiği **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergeler olduğu değerlendirilmiştir. Aynı zamanda bireysel görüşmede hem eşit işaretinin hem de değişken kavramının ilişkisel yorumlanmasını kullanarak doğrulayıcı açıklamalar gerekçelendirmeler yapabildiği görüldüğünden çalışmasının **semiyotik-söylemsel** düzlemde yer aldığı şeklinde değerlendirilmiştir. Nazlı'nın genelleştirilmiş sayı ile belirli bir bilinmeyen olarak değişken kavramına dair sahip olduğu kavram yanılgısı şu şekildedir: cebirsel ifadede bir değişken olduğunda belirli bir bilinmeyen; iki değişken olduğunda genelleştirilmiş sayı olarak yorumlanacağını ifade ettiği görülmüştür. Öğretmen rehberliğinden sonra değişkenin iki yorumunu şu şekilde ayırt ettiği görülmüştür: cebirsel ifadeden sonra sonuç verilmesi durumunda değişkenin belirli bir bilinmeyen olarak ele alınacağı; cebirsel ifadeden sonra sonucun yazılmaması durumunda değişkenin genelleştirilmiş sayı olarak yorumlanacağını ifade ettiği görülmüştür. Ancak isimlendirirken değişkenin hem genelleştirilmiş sayı hem de belirli bir bilinmeyen yorumunda 'verilmeyen ve verilmeyenler' tanımlamasını kullandığı görülmüştür.



Görsel 3. 156. Nazlı'nın son değerlendirme soru-3'e ilişkin cevabı

Nazlı: Evet öğretmenim şimdi o da aklıma geldi. 49 eksi 49 diyor ya hani orada 49'dan 49 çıkarsalar yine 78 olur diyebiliriz.

Araştırmacı: Peki mesela orada kutular vermişler ya Nazlı. Kutular sence hani şu ikinci kısım için söylüyorum. 78 artı kutu eksi kutu diye bu ifadede kutu yerine ne yazılabilir sence.

Nazlı: 49, 49.

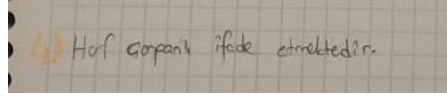
Araştırmacı: Peki 49'dan başka bir sayı yazılabilir mi? Onlar 49'u yazmışlar burada. (ekrandan gösteriyor)

Nazlı: Mesela öğretmenim yazılabilir.

Araştırmacı: Mesela kaç yazılabilir?

Nazlı: 50'den 50 çıkarsa 0. 78 artı 50 eksi 50 eşittir 78 çünkü 50'den 50 çıkarsa direk 0 kalıyor. 78 kalıyor direk geriye yani. Bütün sayılar yazılabilir.

Harf ile temsil edilen değişkeni genelleştirilmiş bir sayı olarak yorumlamayı destekleyen soru-4'te ilk değerlendirmede Nazlı'nın harf ile temsil edilen değişkeni, soruda çarpma işlemi ile beraber verildiğinden, çarpan olarak tanımladığı görülmüştür (Görsel 3.157). Soruda yazan cebirsel ifadede a'yı tanımlaması istendiğinde a'yı hesaplaması gereken bilinmeyen bir sayı olarak yorumladığından cebirsel ifadenin sonunda sonucunu yazmamış olması onun hesaplamasına engel olduğunu düşünmüştür. Öğretmenin eşit işareti ve 19 sayısını yazmasından sonra sayısal değeri (önce 9 sonra 8 sayısını) a yerine koyarak doğruladığı görüldüğünden değişken kavramını belirli bir bilinmeyen olarak yorumladığı düşünülmüştür. Değişken kavramının işlemsel yorumunu işe koşabildiğinden etkin bir enstrüman olarak kullanabildiği **enstrümantal oluşumun bileşenlerine** ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiştir. Öğretmenin 'sonuç verilmemişse sonuç her şey olabilir' ifadesinden yola çıkarak 'sonuç her şey olabilirse a da her şey olabilir' yorumunu yapabilmesi değişkenin genelleştirilmiş sayı (ilişkisel) yorumuna geçebildiğini göstermiştir. Aynı zamanda değişken kavramının genelleştirilmiş sayı (ilişkisel) ve belirli bir sayı (işlemsel) yorumlanması arasındaki farkı 'cebirsel ifadeden sonra sonucun verilmesi ve verilmemesi' durumları ile sınırlı da olsa tanımlayabildiği görülmüştür.



Görsel 3. 157. Nazlı'nın değişken ilk değerlendirme soru-4'e ilişkin cevabı

Nazlı: Öğretmenim şu anda sonuç olmadığı için ben.. kafam karıştı biraz.

Araştırmacı: Aynen mesela...

Nazlı: Sonuç olsaydı belki bulabilirdim.

Araştırmacı: O zaman hemen sonuç ekleyeyim ben sana mesela kafanı netleştirelim. Mesela diyelim ki bunun sonucu 19. (ekranda word formatı açık olduğundan hemen karşısına eşittir 19 yazıyor) mesela sonuç 19 olursa a kaç olur?

Nazlı: öğretmenim 8 olabilir. 8'le 2'yi. İlk önce şey yaptım. İlk önce yani... saydım. Sonra zihnimden mesela 18 buldum. Zihnimden ekleyince 21 falan oldu ama ondan 2 çıkarttım 1 oldu. Yani 8, 16 oldu. 16'ya da 3 ekleyince 19 oldu. O zaman o a yeri 8 oluyor.

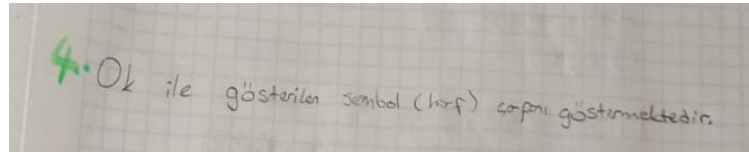
[...]

Nazlı: O zaman ben a, herşey olabilirse sonuç, 2 yazabilirim, 4 yazabilirim, 6, 8, 10 veya 1,2,3. Her şeyi yazabilirim.

Araştırmacı: Heh. O zaman Nazlı. Benim aklıma da şey geliyor. Yani böyle .. mesela bazı durumlarda a, herşey olabiliyor. Bazı durumlarda gene a tek bir şey olabiliyor. Hangi durumlarda a her şey olabiliyor? Hangi durumlarda a sadece tek bir sayı olabiliyor?

Nazlı: Sonuç verilmediğinde a her sayı olabiliyor.

Harf ile temsil edilen değişkeni genelleştirilmiş bir sayı olarak yorumlamayı destekleyen soru-4'te son değerlendirmede bireysel uygulamada Nazlı'nın a ile temsil edilen değişkeni 'çarpan' olarak isimlendirdiği görülmüştür (Görsel 3.158). Bireysel görüşmede genelleştirilmiş sayı olarak ilişkiyel yorumlanmasını farkedebildiği ama tanımlarken genelleştirilmiş sayı ve belirli bir bilinmeyen arasında farklılaştırılmış bir tanımlama kullanmadığı görülmüştür.



Görsel 3. 158. Nazlı'nın son değerlendirme soru-4'e ilişkin cevabı

Nazlı: Öğretmenim ben oraya ok ile gösterilen sembol harf çarpanı göstermektedir yazmışım. Şimdi şey de yazdım. Verilmeyeni de gösteriyor. Onu da ekledim. O bir verilmeyen.

[...]

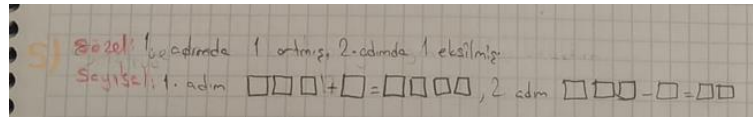
Araştırmacı: Peki verilmeyen sayı diyorsun ya mesela Nazlı. Yani, hangi sayı olabilir? Mesela 5 olabilir mi? 3 olabilir mi? 100 olabilir mi?

Nazlı: Yani burada sonucunu vermediği için her sayı olabilir çünkü. Ama bir sonuçlandırsalardı bir sayı diyebilirdik.

Araştırmacı: Peki burada da her sayı olabilir diyoruz ya yine verilmeyen diye mi isim vermeliyiz buna da?

Nazlı: Evet öğretmenim yani şimdi biz buna her şeyi söyleyebilir... ama bir sonuçla sınırlandırsalardı bir sayı diyebilirdik.

Daireyle temsil edilen değişkeni yorumlayıp sözel ve matematiksel temsille ifade etmeyi gerektiren soru-5'te ilk değerlendirmede bireysel uygulamada üç daire ve dört daire arasına konulan noktaları dairelerin önceki durumu ile sonraki durumunu ayıran birer ayıraç olarak yorumladığı, üç dairenin sonradan dört daire olduğunu düşündüğünden '1 artmış' şeklinde ifade ettiği görülmüştür (Görsel 3.159). Bu nedenle de matematiksel ve sözel temsilleri doğru bir şekilde ifade edemediği görülmüştür. Öğretmenin bireysel görüşmede soruda verilen daireler ve arasındaki noktaların aslında miktarı bilinmeyen bir çokluğu temsil ettiğini açıklamasından sonra Nazlı'nın öğretmenin sorduğu ilave sorularda genelleştirilmiş bir sayı olarak ve nesneleştirilmiş bir yapı olarak değişkeni etkili bir şekilde kullanabildiği enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler görülmüştür.



Görsel 3. 159. Nazlı'nın değişken ilk değerlendirme soru-5'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Bana nasıl anlatacaksın? Sen şimdi benimle Türkçe konuşuyorsun ama ben hiçbir şey anlamıyorum. Ama sen şunu anlatmaya çalışıyorsun. Bir sürü pinpon topu var onlardan 2 tanesi kırıldı.

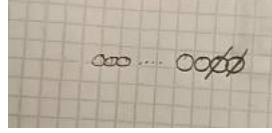
Nazlı: Desenlerle anlatabilirim. 3 tane daire yaparım sonra nokta nokta nokta yaparım daha devamı var anlamında sonra iki tanesini kardeşimin çizdiğini gösterip 2 tanesini çıkartırım.

Araştırmacı: Nasıl yapacaksın bir gösterir misin Nazlı?

Nazlı: Öyle yani şekillerle.

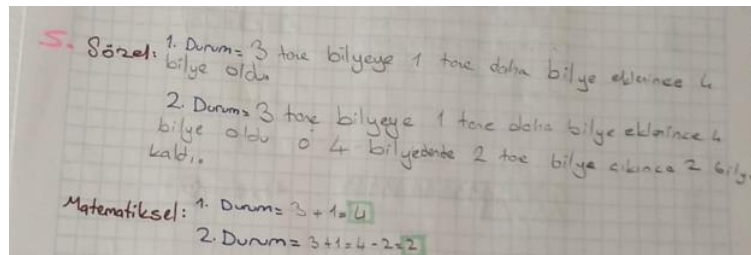
Araştırmacı: Şekillerle mesela nasıl yaparsın gösterir misin?

Nazlı: Mesela şöyle kaç tane ... (çiziyor sonra ekrandan gösteriyor)



Araştırmacı: Heee anladım şimdi.

Daireyle temsil edilen değişkeni yorumlayıp sözel ve matematiksel temsille ifade etmeyi gerektiren soru-5'te son değerlendirmede Nazlı'nın üç daire ve dört daire arasına noktalar koyulması modelini, herhangi bir sayıyı temsil etmek için kullanılabileceği yorumunu yapamadığı görülmüştür. Onun yerine üç daireye bir daire eklenmesi durumunda dört daire elde edileceği yorumunu yaptığı görülmüştür (Görsel 3.160). Öğretmen ile yapılan bireysel görüşmelerde soruda ne düşünerek bu yorumu yaptığını açıklaması istendiğinde verilen modelin aslında herhangi bir sayıyı temsil etmek için kullanıldığını farkedebildiği görüldüğünden değişkenin genelleştirilmiş sayı olarak ilişkisel yorumunu işe koşabildiği **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü şekilde yorumlanmıştır. Değişken modelini, sözel olarak 'bir miktar' şeklinde ifade ettiği; çokluğu matematiksel olarak temsil etmesi istendiğinde bilinmeyen bir çokluğu harf, şekil, sembolle temsil etmenin aklına gelmediği görülmüştür. İkinci durumu 'üçten fazla miktarda bilyem vardı 2 tanesini kardeşime verdim' şeklinde ifade edebildiği görüldüğünden değişkeni nesneleştirilmiş bir yapı olarak ilişkisel yorumlayabildiği, değişkenin nesneleştirilmiş yapı olarak ilişkisel yorumunu işe koşabildiği **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin bir gösterge olarak kabul edilmiştir.



Görsel 3. 160. Nazlı'nın son değerlendirme soru-5'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Peki neden bir tane bilye daha eklendi diye düşündün?

Nazlı: Eee çünkü orada 3 var sonra da 4 olmuş.

Araştırmacı: Heee oradaki nokta nokta ne için kullanılmış peki aradaki.

Nazlı: Oradaki nokta noktaları ben ilk başta artı eksi koymak için diye düşündüm. Sonradan şimdi düşündüğümde de ortada daha çok sayı var gibi oluyor.

[...]

Araştırmacı: Yani sadece böyle söylemek mi gerekiyor acaba? Bir miktar bilyem var. Sözel olarak mı anlatabiliriz?

Nazlı: Yaaa bence evet. Şimdi gelmiyor matematiksel olarak aklıma.

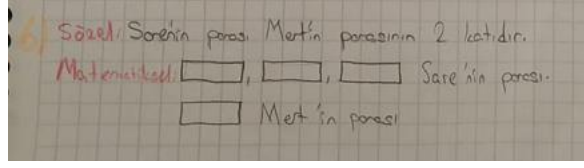
Araştırmacı: Tamam. Mesela bu ikinci adımda ne yapmışlar?

Nazlı: İkinci adımda da ben tekrardan düşündüğümü söyleyeyim. Üç tane bilyeye bir tane daha bilye ekleyince 4 bilye olmuş ve 4 bilyeden 2 bilye çıkınca 2 bilye kalmış. Bu ilk düşündüğüm. Şimdi düşündüğüm 3 tane yani 3'ten fazla miktarda bilyem vardı. Ondan 2 tanesini çıkarttım. 2 tanesini kardeşime verdim.

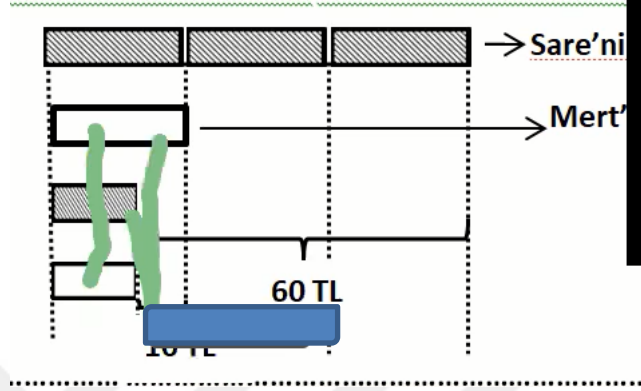
Araştırmacı: Peki bunu matematiksel olarak nasıl anlatırsın? İşte 3'ten fazla bilyem var. Ne kadar olduğunu söylemedin ama 3'ten fazla dedin. 2 tanesini de kardeşime verdin dedin. Mesela bunu nasıl matematiksel olarak anlatırsın? Çünkü demiş ki matematiksel anlatırken demiş şunları kullanın demiş. Sayı işlem eşittir harf isim. Bunlardan birisini kullanabilirsin demiş.

Nazlı: Bunu da anlatacağımı düşünmüyorum. Düşünemiyorum. Çünkü o, ben şeyde takılıyorum. Ben bunu anlatırdım matematiksel ama o nokta noktalar... o nokta noktalar yerine ne yazılacak matematikselde o benim kafamı karıştırıyor.

Birbirine bağlı değişen nicelikleri temsil eden değişkenler modelle verilip sözel ve matematiksel olarak temsil etmesi ve değişkenleri hesaplamasını gerektiren soru-6'da ilk değerlendirmede Nazlı'nın Sare ve Mert'in birbirine bağlı değişen paralarını Mert'in parası bir kutu, Sare'nin parası üç kutu ile modellenmesine rağmen aralarındaki ilişkiyi 'Sare'nin parası Mert'in parasının 2 katıdır' diyerek ifade ettiği görülmüştür (Görsel 3.161). Bireysel görüşmede Nazlı'nın '2 katı daha fazla' ifadesi ile '2 katı' ifadesi arasındaki ayırımı yapamadığı tespit edilmiştir. Bununla beraber model üzerinde verilen sayılardan yararlanarak değişkenleri hesaplayamadığı görülmüştür. Adım adım öğretmen rehberliği ile Sare ve Mert'in parasını hesaplamaya çalışırken Nazlı'nın 10 liranın gösterildiği büyüklüklerden yola çıkarak aynı büyüklükteki kutulara da 10 lira atayarak bilinmeyenleri hesaplamaya çalıştığı görülmüştür (Görsel 3.162). Bu verilerden yola çıkarak Nazlı'nın değişkeni temsil eden çubuk-kutu modelini tam olarak anlamlandıramadığı düşünülmüştür.



Görsel 3. 161. Nazlı'nın değişken ilk değerlendirme soru-6'ya ilişkin bireysel uygulamada cevabı



Görsel 3. 162. Nazlı'nın değişken ilk değerlendirme soru-6'ya ilişkin bireysel görüşmede cevabı

Nazlı: Şurası 10 olsa, diğerleri de 10,10 olsa otuz olabilir.

Araştırmacı: Heee üç eşit parçaya bölünmüş hali mi? Hemen göstereyim ben onu bir daha.

Nazlı: Evet.

Araştırmacı: Şuradan başlayıp şuraya, şuradan başlayıp şuraya (bu sırada ekran üzerinde 10 tl yi temele alıp üç eşit parçaya bölmeye çalışıyor düz çizgiyle)

Araştırmacı: Her bir parçaya 10,10,10 versek mi diyorsun?

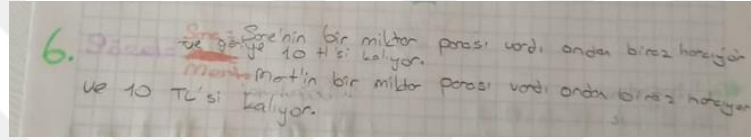
Nazlı: Evet.

Araştırmacı: Peki ondan emin olabilir miyiz? Benim de aklıma o takıldı mesela şöyle emin olabilir miyiz? Ben mesela şekle bakıyorum: burası biraz büyük bir şekil oldu. Burası ehhe işte ona yakın gibi (araştırmacı bu sırada oluşan üç parçayı sırayla sağdan sola doğru yuvarlak içine alarak gösteriyor) şu kenarda kalan gene hepten küçük.

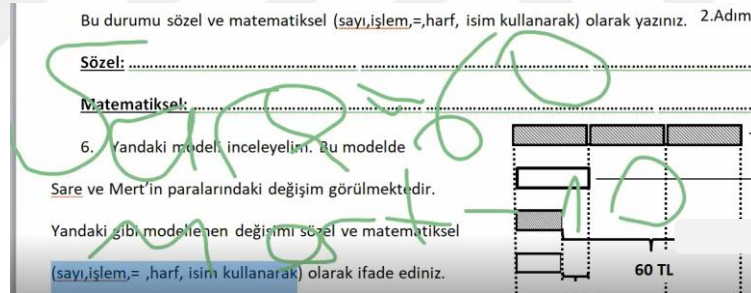
Nazlı: Evet (gülüyor).

Son değerlendirmede birbirine bağlı değişen nicelikleri temsil eden değişkenler modelle verilip sözel ve matematiksel olarak temsil etmesi gerektiğinde soru-6'da Nazlı'nın çubuk ile temsil edilen çokluğu Görsel 3.163'te görüldüğü üzere 'bir miktar para' şeklinde ifade edebilmiş olmasından dolayı değişkenin farklı temsillerine dair imajının zenginleştiği kabul edilmiştir. Ancak Sare ve Mert'in harcadığı miktarı modelde doğru bir şekilde yorumlayamadığı da görülmüştür. Öğretmenin adım adım rehberliğiyle, harcadığı miktarı doğru bir şekilde sözel olarak yorumlayabilen Nazlı'nın

‘Sare-60’ ve ‘Mert-10’ şeklinde Sare ve Mert’in harcadıkları paralardan sonra kalan miktarını da cebirsel olarak temsil edebildiği görülmüştür (Görsel 3.164). Ancak kalan paraların eşit olduğunu hem sözel olarak hem de cebirsel olarak temsil etmekte zorlandığı; öğretmen rehberliğinden sonra kalan paraların eşit olduğunu sözel olarak ifade edebildiği ancak cebirsel olarak temsil edemediği görülmüştür (Görsel 3.165). Aynı zamanda adım adım öğretmen rehberliğine rağmen modelden yararlanarak Sare ve Mert’in paralarını hesaplayamadığı görüldüğünden birbirine bağlı değişen nicelikleri temsil eden değişken modelinin işe koşulduğu enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin bir gösterge görülmediği kabul edilmiştir.



Görsel 3. 163. Nazlı'nın son değerlendirme soru-6'ya ilişkin cevabı



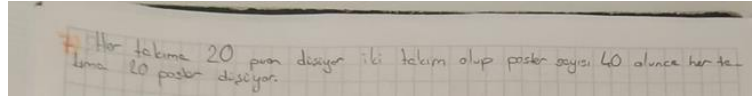
Görsel 3. 164. Nazlı'nın son değerlendirme soru-6'ya ilişkin öğretmen rehberliğinden sonra cevabı



Görsel 3. 165. Nazlı'nın son değerlendirme soru-6'ya ilişkin öğretmen rehberliğinden sonra cebirsel cevabı

Birbirine bağlı değişen niceliklerin çubuk modeli ile temsil edildiği problemi çözmesini gerektiren soru-7'de ilk değerlendirmede değişkenin çubuk modelini anlamlı

bir şekilde işe koşamadığı, birbirine bağlı değişen değişken modelini göz önünde bulundurmaksızın toplam 40 olan poster sayısını eşit bir şekilde iki takıma paylaştırdığı görülmüştür (Görsel 3.166). Öğretmen rehberliği ile bireysel görüşmede modeli göz önünde bulundurarak değişkenleri birbirine bağlı değişen nicelikler olarak ilişkisel yorumlayabildiği ancak problemin çözümünde bu ilişkisel yorumlamayı tam olarak işe koşamadığı görülmüştür.



Görsel 3. 166. Nazlı'nın değişken ilk değerlendirme soru-7'ye ilişkin bireysel uygulamada cevabı

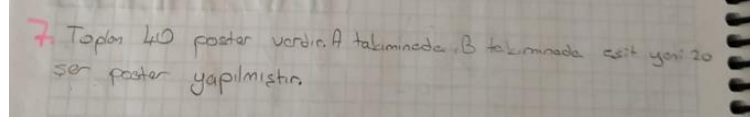
Nazlı: Ben hiç şekle bakmamışım neden olduğunu anlamıyorum. Hiç şekle bakmadım. Direk 40 poster deyince 40'ı 2'ye böldüm. 20. Yani direk 20 poster bir takıma düştüğünü buldum.

[...]

Nazlı: Mesela öğretmenim şöyle olabilir. B takımına 8 tane daha fazla verelim mesela. 28 olsa b takımı; 40'dan 28 çıkartırım 12. Mesela a takımı 12 poster; b takımı 28 poster diyebilirim. 40'a eşit olur.

Nazlı'nın birbirine bağlı değişen niceliklerin çubuk modeli ile temsil edildiği problemi çözmesini gerektiren soru-7'de son değerlendirmede değişkeni temsilen kullanılan modeli doğru yorumlayamadığı ve takımlara düşen poster sayılarını doğru bir şekilde belirleyemediği görülmüştür (Görsel 3.167). Bireysel görüşmede öğretmen rehberliğinden sonra A takımı için 12 ve B takımı için 28 verdiğinde takımlar arasındaki farkın sekiz olmadığını fark ettiğinden A takımının poster sayısına farklı değerler vererek B takımının poster sayısını belirlediği ve toplamalarının 40 olmasını sağlamaya çalıştığı görülmüştür. Sayısal cevaplar elde etmek için denklemler üzerinde işlem gerçekleştirdiği düşünüldüğünden bu veriler değişken kavramının işlemsel yorumunu işe koştığı **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin gösterge olarak kabul edilmiştir. Öğretmen rehberliğinden sonra Görsel 3.168'de görüldüğü üzere A takımının poster sayısını kalp, B takımının poster sayısını kalp+8 şeklinde ifade edebildiği; birbirine bağlı değişen nicelikleri temsilen kalp gibi şekil atayabildiği ve bu değişkenleri kullanarak A ve B takımlarına düşen poster sayılarını sayısal cevaplar elde etmek için

denklemler üzerinde işlem gerçekleştirerek hesaplayabildiğinden değişkenin ilişkisel yorumunu kullanıyor olsa da işlemsel bir süreç olarak yorumlanmıştır.



Görsel 3. 167. Nazlı'nın son değerlendirme bireysel uygulamada soru-7'ye ilişkin cevabı

Nazlı: A takımı ve B takımı ilk önce eşitmiş ama B takımında 8 poster diyor ayrıyeten. Demek ki B takımında 8 poster fazladan var. Ona göre B takımına 8 poster daha fazla poster düşüyor.

Araştırmacı: Hmmm o zaman 20, 20 doğru olacak mı?

Nazlı: Hayır çünkü B takımı daha fazla olmak zorunda oluyor.

Araştırmacı: Hmmm peki B takımı daha fazla olacak dedin ya 8 poster daha var diye. Nasıl hesaplırsın mesela kaç kaç olduğunu poster sayısının?

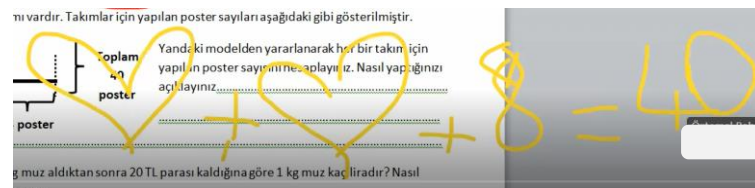
Nazlı: Mesela öğretmenim... ilk önce 20 demiştik. 28 oluyor bu sefer o. Çünkü eğer b takımına 28 tane poster verirsek. 12 A takımına 28 de B takımına düşüyor.

Araştırmacı: Şekil üzerine de yazabilir misin? Mesela neresi 12 oluyor? Neresi 28 oluyor?

Nazlı: Tabi öğretmenim. 12 şöyle takımların yanlarına yazayım. 12 A takımının olsa, 28 de B takımının.

Araştırmacı: Çubukların üstüne yazar mısın 12 ve 28'i? Mesela çubuklar olarak gösterilmiş ya orada. Hangi çubuk 12'yi ifade ediyor? Hangi çubuk 28'i ifade ediyor gibi?

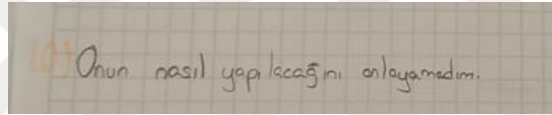
Nazlı: Şöyle alttakinin tamamı 28. Şurası da 12.



Görsel 3. 168. Nazlı'nın son değerlendirme soru-7'ye ilişkin öğretmen rehberliğinden sonra cevabı

Çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliğini, farklı şekillerle temsil edilen genelleştirilmiş sayı olarak değişken kavramını hissedebilmeyi gerektiren soru-10'da ilk değerlendirmede Nazlı, bireysel uygulamada her bir şeklin herhangi bir sayıyı temsil etmesi gerektiğini farkedememiş ve şekiller yerine sayı verildiğinde eşitliğin bozulmayacağını da farkedememiştir (Görsel 3.169). Öğretmenin bireysel görüşme sırasında soru metninde de geçen 'şekillerinden her biri bir sayıya

karşılık gelmektedir' ifadesine vurgu yapmasından sonra Nazlı'nın şekillere birer sayı ataması için teşvik edilmiştir. Ancak Nazlı'nın bu şekillerin aslında genelleştirilmiş sayıyı temsil eden birer değişken olduğunun farkına varamadığı görülmüştür. Değişkenlere atadığı sayılarla işlemleri yapıp sonuçları karşılaştırdığında eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlanmasını işe koştugu görülürken; değişkenlere vereceği her sayı için bu eşitliğin bozulmayacağını farkedemediği; sadece sayısal olarak yerine koyma yaptığı görüldüğünden değişken kavramının işlemsel yorumlanmasını işe koştugu **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergeler görüldüğü şeklinde yorumlanmıştır. Değişkenlere atadığı farklı sayılarda da eşitliğin bozulmayacağını ifade ederken doğrulayıcı açıklamalar yapmaksızın yaptığı işlemleri ifade ettiği görüldüğünden çalışmasının **semiyotik-enstrümantal** düzlemde yer aldığına ilişkin bileşenler görülmüştür.



Görsel 3. 169. Nazlı'nın ilk değerlendirme soru-10'a ilişkin bireysel uygulamada cevabı

Araştırmacı: İstersen başla, her birine bir sayı karşılık gelsin. Sen istediğini verirsin. Nasıl olsa burada bir yönlendirme yapmamış. Ya da verebilir misin sence her istediğin sayıyı?

Nazlı: Her istediğim sayı tutmayabilir öğretmenim.

Araştırmacı: Aynen nasıl bileceğiz acaba? Denememiz mi gerekir acaba? Bir istersen sen dene.

Nazlı: Baya uzun sürer ama denemesi.

Araştırmacı: Bütün sayıları denemek mi?

Nazlı: Evet.

Araştırmacı: Mesela sen kendine göre çok büyük olmayan sayılar denersen daha rahat edersin. Çünkü toplama var çarpma var. Falan filan. Şu birinci durum var ya (onu seçiyorum) birinci durum için denesen mesela.

Nazlı: Tamam öğretmenim.

Çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliğinde, farklı şekillerle temsil edilen genelleştirilmiş sayı olarak değişken kavramını hissedebilmeyi gerektiren soru-10'da son değerlendirmede her bir şeklin bir sayıyı temsil ettiğini bildiği ve bu sayıları soruda verilen sıralamaya uygun bir şekilde yerleştirebildiği ama işlem önceliği konusundaki eksik bilgisi nedeniyle eşit işaretinin sol ve sağ tarafındaki

sonuçları karşılaştırdığında sonuçların eşitliğini hesaplayamadığı görülmüştür (Görsel 3.170). Bireysel görüşmede öğretmen rehberliğinden sonra işlem önceliğinden dolayı yaptığı hatayı farkedip doğru sırayla işlemleri tamamladıktan sonra eşit işaretinin solu ve sağındaki sonuçların eşit olduğunu farkedebildiği; sayısal cevaplar elde etmek için denklemler üzerinde işlem gerçekleştirme süreci ile beraber değişken kavramının işlemsel yorumlanarak sorunun çözümünde işe koşulduğu **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergeler görülmüştür. Ancak genelleştirilmiş sayıları temsil eden şekillerin alabileceği tüm değerler için sonucun her zaman eşit olacağını ifade edebilmesi için sınırlı sayıda denemenin yeterli olacağını düşündüğü görülmüştür. Bireysel görüşmede tüm sayılarda bu eşitliğin bozulmayacağını düşünmesinin nedeni olarak da eşitliğin iki tarafında da aynı sayıların kullanılmış olmasını gösterdiği görülmüştür. Öğretmen rehberliğinden sonra sadece aynı sayıların olmasının yeterli olmayacağını aynı zamanda sayıların sıralanışının da önemli olduğunu ifade edebildikleri görülmüştür. Bu durum Nazlı'nın değişkenlere verdiği değerlere bağlı olmaksızın tüm durumlarda eşitliğin iki tarafının da sonucunun aynı olacağını sayıların sıralanışına da bağladıklarından ama bu sıralanışla ilgili net bir durum ifade edemediklerinden çalışmasının kısmen **semiyotik-söylemsel** düzlemde yer aldığına işaret ettiği değerlendirilmiştir.

1. Doğrulama:
 $(\square - \bullet) \times \triangle = \square \times \triangle - \bullet \times \triangle$
 $9 + 2 \times 3 = 3 \times 3 + 2 \times 3$
 $33 \quad 87$

2. Doğrulama:
 $(\square - \bullet) \times \triangle = \square \times \triangle - \bullet \times \triangle$
 $8 + 2 \times 4 = 8 \times 4 + 2$
 $40 \quad 32 \quad 34 \times 4 = 36$

1. Doğrulama:
 $(\square - \bullet) \times \triangle = \square \times \triangle - \bullet \times \triangle$
 $10 - 3 = 8 \times 5 = 10 \times 5$
 $40 \quad 50 - 3 = 47 \times 5 = 235$

Görsel 3. 170. Son değerlendirme soru-10'a ilişkin cevabı

Araştırmacı: Peki Nazlı sen mesela bu 9, 2 ve 3'ü kasıtlı bir şekilde mi verdin?

Nazlı: Aklıma ilk gelenleri verdim.

Araştırmacı: Yani başka sayılar verseydin de gene böyle mi olacaktı?

Nazlı: Başka sayılar verseydim de evet öyle olacaktı. Diğerlerine de farklı farklı verdim. Öyle olacak büyük ihtimal. Ben burada yanlış yapmışım. Ben şey anlamışım. Mesela 9'la 3'ü çarptık. 27. 27'yle 2'yi topladık. Ondan sonra 3'le çarptım.

Araştırmacı: Aynen. Orada işlem önceliği var aslında. Hangi işlem önce yapılır? Önce çarpmayı yapıp sonra toplamayı yapmak lazım. Peki mesela ben her sayıyı verirsem vereyim gene benimki de böyle mi olacak?

Nazlı: Evet

Araştırmacı: Nereden o sonuca varabiliriz acaba? Nasıl karar verebiliriz? Yani mesela yok benim içime sinmedi bir şüphe var içimde...

Nazlı: İşlem denedim

[...]

Nazlı: Benim gibi bütün işlemleri denersek diyebiliriz.

3.2.3. Ataberk'in matematiksel çalışma uzayı

Bu bölümde Kayra'nın matematiksel çalışma uzayı, ilk/son değerlendirmede yer alan soruların analizi sonucu ortaya çıkan temalar olan değişken kavramının işlemsel ve ilişkişel yorumunu anlamlandırmaya yönelik bulgular olarak iki başlık altında sunulmuştur.

3.2.3.1. Değişken kavramının işlemsel yorumunu anlamlandırmaya yönelik bulgular (1., 8., ve 9. Sorular)

Değişkenin belirli bir bilinmeyen olarak doğru yorumlanıp hesaplanmasını gerektiren denklem içeren soru-1'de ilk değerlendirmede değişken kavramını belirli bir bilinmeyenin temsilcisi olarak işlemsel yorumlayan ve bilinmeyeni doğru bir şekilde eşit işaretinin kesin işlemsel, esnek işlemsel, temel ilişkişel, karşılaştırmalı ilişkişel yorumlama biçimlerini kullanarak hesaplayabildiği **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiştir. Bireysel görüşmede bilinmeyeni hesaplarken kullandığı teknikleri doğrulayıcı ifadelerle açıklaması istendiğinde sayısal olarak yerine koyma yaptığından, değişkenin işlemsel yorumunu kullandığından, çalışmasının değişkenin işlemsel yorumlanmasının kullanıldığı matematiksel çalışmada **semiyotik-söylemsel** düzlemde yer aldığı değerlendirilmiştir.

Araştırmacı: Nasıl buldun?

Ataberk: 5'le bir şeyi toplayınca 8 oluyor. 5'in üstüne saydım. 6,7,8 (parmaklarıyla gösteriyor)

Araştırmacı: Hmmm anladım. 5'in üstüne saydım. Peki bu soruyu başka türlü yapar mısın? 5'in üstüne sayarak değil de başka bir yolla yapılabilir mi?

Ataberk: 8'den 5 çıkar.

[...]

Araştırmacı: Ama neden çıkarmayı seçiyorsun ben o kısmı anlayamadım? Mesela neden çarpmadın? Neden 8'le 5'i çarpmadın mesela?

Ataberk: 8'le 5'i çarparsam çok ediyor. 40 ediyor.

Araştırmacı: Aynen 40 ediyor. 40 ederse olmaz mı?

Ataberk: Olmaz. 45 olur. Ama 8 diyor o da.

Değişkenin belirli bir bilinmeyen olarak doğru yorumlanıp hesaplanmasını gerektiren denklem içeren soru-1'de son değerlendirmede değişkenin işlemsel yorumunu işe koşarak problemi çözdüğü **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiştir (Görsel 3.171). Aynı zamanda bilinmeyen için bulduğu sonucu doğrulayan açıklamaları da değişkenin işlemsel yorumunu kullanarak yapabildiği görüldüğünden çalışmasının **semiyotik-söylemsel** düzlemde yer aldığı değerlendirilmiştir. Bireysel görüşmede değişkenin belirli bir bilinmeyen olarak işlemsel yorumunu tanımlamak için 'bulmam gereken yer/şey, soru işareti, harf, bilinmeyen sayı, verilmeyen' gibi farklı ifadeler kullanabildiği görülmüştür.

I $5+3=8$ 5'e bir eklersen 8 olur (3)

II $14+10=24$ 10'e bir eklersen 29 olur? (10)

III $32+15=47$ 15'e bir eklersen 32 olur? (15)

IV $20=3+17$ 20'den 3'ü çıkardım (17)

V $13+14=27$ 27'ye eşit olduğundan eşit yapmam için 13'ün üstüne saydım (8'den)

Görsel 3. 171. Ataberk'in son değerlendirme bireysel uygulamada soru-1'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Tamamdır. Peki o nokta nokta yazan yer ne demek?

Ataberk: Benim bulmam gereken yer. Yani şey yerlerine ne yazılması gerektiğini bulunuz diyor ya. Benim bulmam gereken şey.

Araştırmacı: mesela sana deseler ki bu nokta nokta olan yere bir isim ver. Nasıl bir isim verirsin? Ne dersin mesela? Nasıl anlatırsın birisine? Bu nokta nokta yer demek şu demek desen mesela ne dersin?

Ataberk: Soru işareti veya sayı. Sayı değil. Harf.

Araştırmacı: Neden sayı değil harf dedin?

Ataberk: Harf...harf... kafam karıştı.. harf, a,b,c değil mi?

Araştırmacı: Hı hı (evet anlamında)

Ataberk: Şöyle dese mesela sayı olarak mesela kafamdan bir tane attım 2 dedim 5 artı 2, 7 ediyor. 8 etmiyor.

Sözel bir problem içinde verilen belirli bir bilinmeyi hesaplamayı gerektiren soru-8'de ilk değerlendirmede Görsel 3.172'de görüldüğü üzere Ataberk'in sözel ifadede geçen işlemlerin tersini yaparak belirli bir bilinmeyi hesaplayabildiği görüldüğünden değişken kavramının işlemsel bakış açısıyla işe koşulmuş **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiştir. Bireysel görüşmede yaptığı adımların doğruluğunu açıklaması istendiğinde sayısal olarak yerine koyma yaparak gerekçelendirdiği görüldüğünden çalışmasının değişkenin işlemsel yorumunu kullandığı **semiyotik-söylemsel** düzlemde yer aldığı değerlendirilmiştir.

Handwritten calculation on grid paper. The number 27 is written above 9, and the result 18 is written below. To the right, there is a note in Turkish: 'kilosu 9 TL'dir' and 'kalani 3'e böldü'.

Görsel 3. 172. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-8'e ilişkin cevabı

Ataberk: Kalanı... defterde kalanı üçe bölmüşüm. 27'yi yani. 27'yi 3'e bölmüşüm.

Araştırmacı: 27'yi nasıl buldun?

Ataberk: Hani 47 lirası varmış ya sonra 20 lirası kalmış. Ne kadar harcamış o şey için 27 lira harcamış yani 27 lirayı şey yapmamız lazım. 27 lira para kaldı ya.

Araştırmacı: Peki sen 27'yi üçe bölmüşsün orada. 3'e böldüğünde bulduğun sonuç neyin sonucu?

Ataberk: Bir kg Hani üç kg muz almış ya.

Araştırmacı: Hı hı.

Ataberk: Bir kg muzun kaç lira olduğunu söylüyor. O yüzden bir tanesini bulmak için 3'e bölüyor.

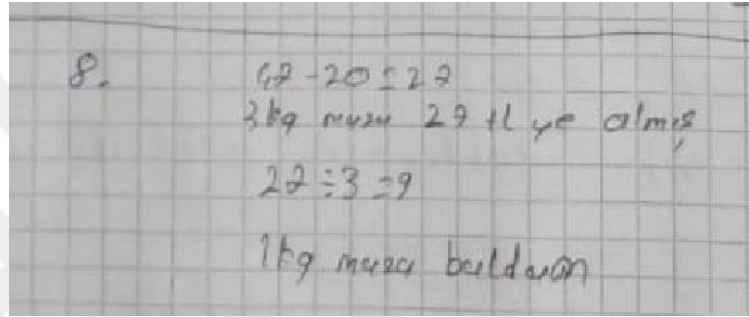
Araştırmacı: Hmm o zaman sen şu anda üçe bölünce 9 buldun. O 9 bir kg muzun fiyatı mı?

Ataberk: Evet. Sağlamasını da yaptım. 9, 18, 27 oluyor. Doğru çıkıyor yani.

Araştırmacı: Tamamdır. Sağlamasını derken ritmik saydın galiba değil mi? Doğru böldüm mü diye dimi.

Ataberk: Hı hı (evet anlamında) 9,18... üçle çarptım işte.

Sözel bir problem içinde verilen belirli bir bilinmeyi hesaplamayı gerektiren soru-8'de son değerlendirmede Ataberk'in Görsel 3.173'de görüldüğü üzere değişkenin belirli bir bilinmeyen olarak işlemsel yorumunu etkin bir şekilde işe koşarak hesaplayabildiği **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü değerlendirilmiştir. Ancak bireysel görüşmede bilinmeyi sürece dahil etmeyip sadece sonuç yazarken kullanılabilecek bir sembol ($?=9$ gibi) olarak yorumladığı görülmüştür.



Görsel 3. 173. Ataberk'in son değerlendirme soru-8'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Bir kilo muzun kaç para olduğunu biliyor muydun? İşlemleri yapıp hesaplamadan önce.

Ataberk: Bilmiyordum.

Araştırmacı: Mesela bilmediğin o muzun parasını nasıl gösterirsin? Nasıl yazarsın? Nasıl anlatırsın. Hesaplama ama. Nasıl yazarsın muzun parasını bilmediğini? Bilinmeyen bir şey nasıl yazılır? Bilinmeyen bir miktar? Bilinmeyen bir para? Bilinmeyen bir sayı?

Ataberk: Heee. (aklına geldi sanırım) Bir kg muz yazarım.

Araştırmacı: Daha kısa daha özet daha az yer kaplayacak şekilde yazsan..

Ataberk: 1 kg muz yazsam...

Araştırmacı: Kısaltarak 1 kg muz diye mi yazarım? (kilogramı kısaltarak okudu)

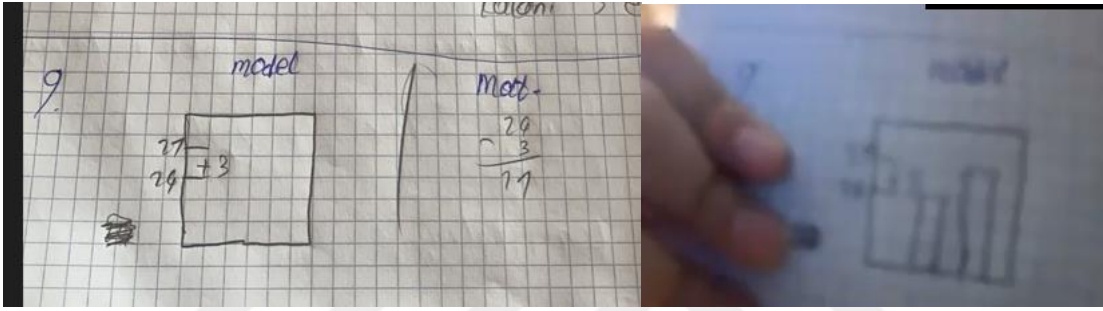
Ataberk: Evet... ama öyle de olmaz ki soru işareti yaparım.

Araştırmacı: Tamam diyelim ki soru işareti yaptın. Soru işareti burada neyi temsil ediyor?

Ataberk: Bir kg muz.

Sözel olarak verilen belirli bir bilinmeyen içeren ifadelerin cebirsel ve model ile temsil edilmesini gerektiren soru-9'da ilk değerlendirmede Ataberk'in aklımdan tuttuğum sayıyı bireysel uygulamada kare modeli içinde modellediği görülürken öğretmenin yönelttiği sorulardan sonra bilinmeyi bir çubuk modeli ve 3 eklendikten

sonraki halini farklı, daha büyük bir çubuk modeli ile temsil edebildiği görüldüğünden değişken kavramının belirli bir bilinmeyen olarak işlemsel yorumunu işe koşabildiği enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü değerlendirilmiştir. ‘Aklımdan tuttuğum sayı’ ifadesine karşılık olarak tüm sayıların olabileceğini ve bu durumu küme parantezi kullanarak gösterebileceğini ifade etmiştir. Küme parantezini tam olarak nasıl kullanacağını anlamlı bir şekilde ifade edemese de genelleştirilmiş sayıyı temsilen kullanabileceği sütun grafiğine benzettiği sütunlardan başka bir model ya da cebirsel temsilin aklına gelmediği görülmüştür (Görsel 3.174).



Görsel 3. 174. Ataberk'in soru-9'a ilişkin cevabı

Araştırmacı: (Araştırmacı ekrana metin kutusu açıyor ve oraya ‘aklımdan tuttuğum sayının’ yazıyor) Şimdi bana mesela bunu göster daha soru bitmedi çünkü. Çünkü soruyu bitirirsem sen hesaplayıp bana direkt sayıyı söylersin. O yüzden ben soruyu daha bitirmedim şimdi. Aklımdan tuttuğum sayı. Nasıl gösterirsin bunu?

Ataberk: Yani bütün sayılar olabilir.

Araştırmacı: Bütün sayılar olabilir?

Ataberk: Hı hı.

Araştırmacı: Ama bütün sayılar olabilişi nasıl gösterirsin? Öyle birşeyle göster ki bütün sayılar olabilir diye herkes anlasın o gösterdiğin şeyi görünce. Öyle bir şey çiz ki heee Ataberk burada şey demeye çalışıyor bütün sayılar olabilir demeye çalışıyor diyelim.

Ataberk: Şey ooo neydi? 3'e benzeyen var ya.

Araştırmacı: 3'e benzeyen şey dediğin küme parantezi mi?

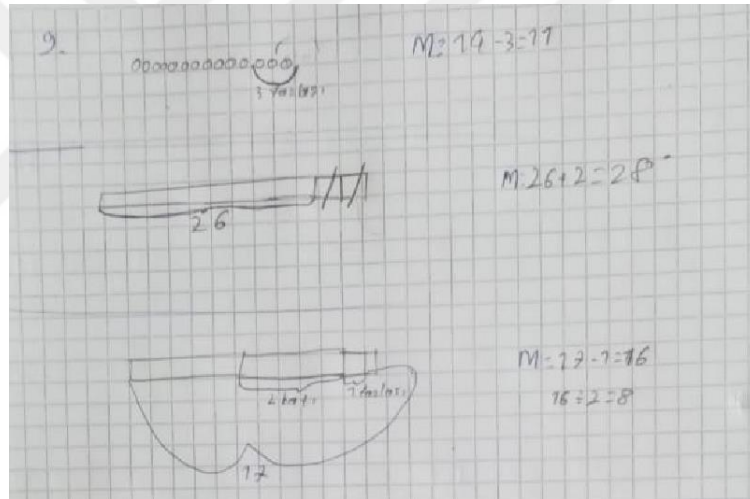
Ataberk: Hehh evet.

Araştırmacı: Heee. Onu mu çizersin?

Ataberk: Hı hı.

Sözel olarak verilen belirli bir bilinmeyen içeren ifadelerin cebirsel ve model ile temsil edilmesini gerektiren soru-9'da son değerlendirmede sözel olarak verilen ilk durumu modellerken belirli bir bilinmeyene modelde yer vermeden, bilinmeyeni

hesapladıktan sonra modele dahil ettiği; cebirsel olarak temsil ederken de bilinmeyi hesaplamayı sağlayacak işlemleri yazdığı, bilinmeyi dahil etmediği görülmüştür. Diğer iki sözel ifadede belirli bir bilinmeyi modele doğru bir şekilde dahil edebildiği; matematiksel olarak temsil ederken yine bilinmeyi hesaplamayı sağlayacak işlemleri yazdığı ama cebirsel olarak temsil edemediği görülmüştür (Görsel 3.175). Bireysel görüşmede adım adım öğretmen rehberliğinden sonra Ataberk'in sözel olarak verilen durumu hem modellemeye hem de cebirsel olarak temsil etmede doğru cevaplar verdiği görülmüştür (Görsel 3.176). Genel olarak Ataberk'in değişkenin belirli bir bilinmeyen olarak işlemsel yorumunu işe koşarak problemleri çözebildiği **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü ve yaptığı adımları doğrulayıcı ifadelerle gerekçelendirdiği için çalışmasının **semiyotik-söylemsel** düzlemde yer aldığı değerlendirilmiştir.



Görsel 3. 175. Ataberk'in son değerlendirme soru-9'a ilişkin cevabı

Araştırmacı: Peki işlem yapmadan önce biliyor musun? (Ataberk düşünüyor şaşırdı bu soruya) aklımdan tuttuğum sayıyı biliyor musun hiç işlem yapmadan önce. Mesela ben aklımdan bir sayı tutsam sen bu sayının kaç olduğunu bilebilir misin?

Ataberk: Hayır.

Araştırmacı: Mesela bilmediğin bir şeyi nasıl çizebilirsin ya da nasıl gösterebilirsin?

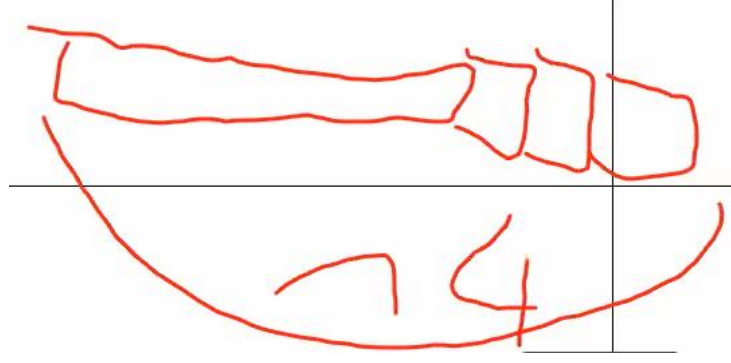
Modelle yapın demiş ya.

Ataberk: Bir tane yuvarlak veya şey.. çubuk çizerim.

[...]

Araştırmacı: Sonra onun 3 fazlası. 3 fazlasını nasıl gösterirsin peki?

[...]



[...]

Ataberk: Soru işareti.

Araştırmacı: Tamam. Ekrana çizsene soru işareti diye başladın. 3 fazlası...

Ataberk: (ekrana yazıyor)

Araştırmacı: 14tür.

MODEL	MATEMATİKSE
7+3=14	

Görsel 3. 176. Ataberk'in son değerlendirme soru-9'a ilişkin öğretmen rehberliğinden sonra cevabı

3.2.3.2. Değişken kavramının ilişkisel yorumunu anlamlandırmaya yönelik bulgular (2.,3.,4.,5.,6.,7.,10. Sorular)

Tablo temsili ile verilen birbirine bağlı değişen nicelikleri farkedip ilişkisel yorumlamayı destekleyen soru-2'de ilk değerlendirmede bireysel uygulamada Ataberk'in önce değişkenler arasındaki birbirine bağlı değişen ilişkiyi fark etmeksizin aynı sütundaki sayılar arasındaki sabit farktan yararlandığı ve bilinmeyeni hesaplayabildiği; değişken kavramının işlemsel yorumunu işe koşabildiği **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergeler görülürken; öğretmenle yapılan bireysel görüşmede öğretmenin 40 tane ekler alması durumunda ne kadar para ödeyeceği sorusuna cevap verirken değişkenler arasındaki ilişkiyi farkedip değişkenin ilişkisel yorumunu kullanabildiği **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiştir. Yaptığı adımları doğrulayıcı ifadelerle açıklayabildiği görüldüğünden çalışmasının **semiyotik-söylemsel** düzlemde yer aldığı şeklinde değerlendirilmiştir.

Ataberk: Mesela bu A verilmemiş bir sayı bir A'dan 2'ye atlıyor sonra 3'e atlıyor. Yani bu ne olabilir? 1 olabilir.

Araştırmacı: Evet. Hmmm

Ataberk: A, 1 yani. Sonra 2,3.... 1,2,3,4 C'de 4 oluyor sonra 5 zaten c'de 4. A,1; C,4.

[...]

Araştırmacı: Mesela diyelim ki eklerden alacağım ben. Tamam mı? Tam alacağım. Bir bakıyorum orada fiyatlar silinmiş. Hani Toprak'ın pastanesindeki gibi. Diyorum ki Ataberk diyorum bizim diyorum gün var diyorum yine hanımlar gelecek diyorum ekler yapmayı bilmiyorum. Sizin pastanenizden aldığım eklerleri kendim yaptım gibi göstereceğim diyorum tamam mı? Zaten diyorum hanımlar bir şeyi beğenmez diyorum. Şu eklerleri sizden alayım diyorum. Sizin eklerler çok güzel diyorum. Bana diyorum 40 tane ekler verir misin diyorum. Kaç para vereceğim ben şimdi sana?

Ataberk: Burada mesela a,1 ya bir üç. Yani 1 tane ek (ekler demek istiyor), 3 lira. 2 tanesi 6 lira. 3 tanesi 9. 4 tanesi 12. 5 tanesi 15. Ne kadar istedin?

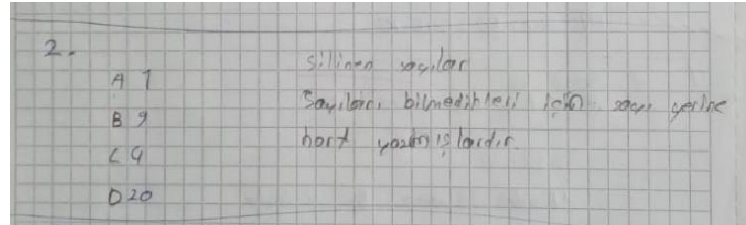
Araştırmacı: Ben 40 tane alacağım.

Ataberk: Hıh. 1 tanesi 3 liraysa, 40 çarpı 3.

Araştırmacı: Kaç olur?

Ataberk: 8, 120 (içinden hesaplama yapıyor).

Tablo temsili ile verilen birbirine bağlı değişen nicelikleri farkedip ilişkisel yorumlamayı destekleyen soru-2'de son değerlendirmede Görsel 3.177'de ve bireysel görüşmede görüldüğü üzere Ataberk'in sayılar arasındaki birbirine bağlı değişen ilişkiyi farkedip bilinmeyeni hesaplayabildiği görüldüğünden değişkenin ilişkisel yorumunu işe koşarak problemi çözdüğü **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergeler görüldüğü düşünülmüştür. Sayılar arasındaki ilişkiyi belirlerken kullandığı tekniği doğrulayıcı açıklamalarla ifade edebildiği görüldüğünden çalışmasının **semiyotik-söylemsel** düzlemde yer aldığı düşünülmüştür.



Görsel 3. 177. Ataberk'in son değerlendirme soru-2'ye ilişkin cevabı

Araştırmacı: Peki şeyi nasıl buldun bursayı (b'yi yani)?

Ataberk: Bir tanesi 3, 2 tanesi 6, 3 tanesi 9.

Araştırmacı: Nasıl buldun peki o 3 tanesi 9'u?

Ataberk: 3'le 3'ü çarptım.

[...]

Araştırmacı: Mesela Ataberk. Ben bunu görünce aklıma şey geliyor. Diyelim ki arkadaşlarımı davet ettim bana. Dedim ki gelin hadi bizde birşeyler yiyelim içelim oturalım. Pasta yapasım yok. Hiç canım pasta yapmak, uğraşmak istemiyor. Gittim pastaneden bir pasta aldım. Küçük küçük pastalar aldım hepimize ikramlık. 15 tane pasta aldım. Kaç para ödeyeceğim?

Ataberk: 1 tanesi ne kadar bilmiyoruz mu?

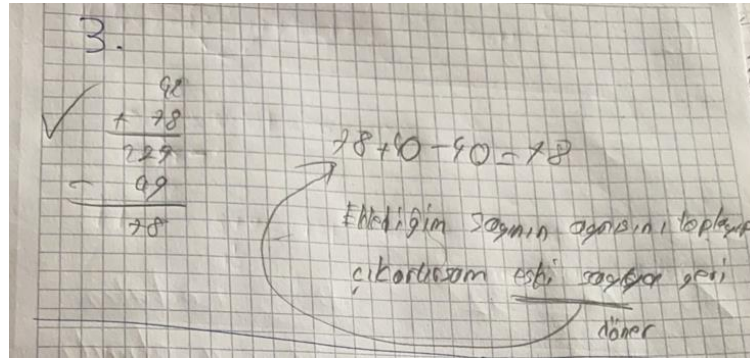
Araştırmacı: Bu pastalardan. Toprağın pastanesindekilerden.

Ataberk: Kaç tane 15 tane mi?

Araştırmacı: 15 tane aldım.

Ataberk: 1 tanesi 3'se. Çarparım. 10 tanesi 30 lira ediyorsa, 5 tanesi de 15 lira ediyorsa 45.

Eşit işaretinin (karşılaştırmalı ilişkisel) ve değişkenin (genelleştirilmiş sayı) beraberce ilişkisel yorumlanmasını gerektiren soru-3'te ilk değerlendirmede Görsel 3.178'de görüldüğü üzere genelleştirilmiş sayı olarak değişkenin ilişkisel yorumunu işe koşarak soruyu çözebildiği **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergeler görüldüğü kabul edilmiştir. Eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumunu kullanarak eklediğini çıkarttığı için kutu yerine bütün sayıları yazabileceğini ifade edebildiği görülmüştür (Görsel 3.178). Kutunun bütün sayılar olabilmesinin altında yatan sebebi bireysel görüşmede açıklaması istendiğinde eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlama özelliğini kullanarak açıklama yapabildiği görüldüğünden çalışmasının **semiyotik-söylemsel** düzlemde olduğu değerlendirilmiştir.



Görsel 3. 178. Ayberk'in ilk değerlendirme soru-3'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Peki mesela burada 78’li olan soruda kutu yerine neler olmalı? Neler yazılabilir?

Ataberk: İııı (düşünüyor)

Araştırmacı: Mesela 78 artı kutu eksi kutu eşittir 78. Burada mesela kutu yerine ne yazabilirim ben?

Ataberk: İki kutu da aynı olursa bütün sayıları yazabiliriz.

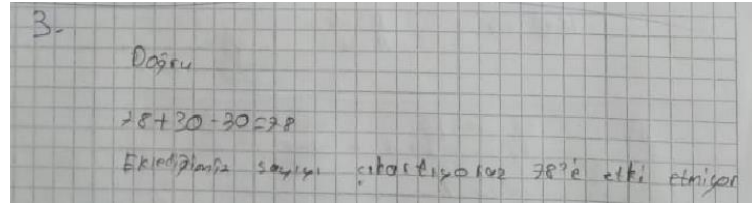
Araştırmacı: Heee neden peki?

Ataberk: Mesela 77 eksi 78.... (yanlış söylediğini fark etti) hee 78’den 77’yi çıkartıyoruz.

Sonra yine 77 ekliyoruz. Bir sayıdan aynı sayıyı çıkartınca ekleyince sonuç değişmez.

Ekleyip çıkarmaya da gerek yok.

Eşit işaretinin (karşılaştırmalı ilişkisel) ve değişkenin (genelleştirilmiş sayı) beraberce ilişkisel yorumlanmasını gerektiren soru-3’te son değerlendirmede Görsel 3.179’da görüldüğü üzere kutu ile temsil edilen genelleştirilmiş sayı olarak değişkenin ilişkisel yorumunu problemin çözümünde işe koşabildiği **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü düşünülmüştür. Aynı zamanda bireysel görüşmede de ‘eklediğimiz sayıyı çıkartıyoruz 78’e etki etmiyor’ diyerek eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel ve değişkenin ilişkisel yorumunu kullanarak doğrulayıcı açıklamalar yapabildiği görüldüğünden çalışmasının **semiyotik-söylemsel** düzlemde yer aldığı görülmüştür.



Görsel 3. 179. Ataberk’in son değerlendirme soru-3’e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Hmm peki sadece 30 mu yazılabilir? O yüzden mi 30 yazdın?

Ataberk: Hayır bütün sayılar yazılır. Tabi... biz daha öğrenmedik ya beşinci sınıfta eksili sayıları o yüzden.

[...]

Ataberk: Çünkü ilk önce.. eksi sandım... heeee artıymış ilk önce... İlk önce 49’u eklemiş. Sonra çıkarmış.

Araştırmacı: O zaman son kararın... (Ataberk devam edince durdu)

Ataberk: Son kararım mı?

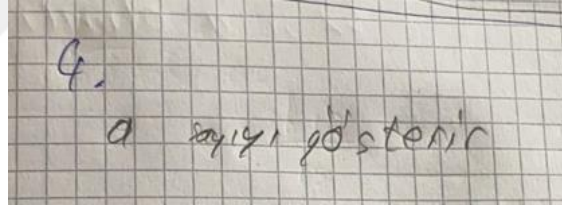
Araştırmacı: Son kararın şey... kutular ne olabilir diye sorsalar sana kutu yerine ne yazılabilir diye sorsalar sen ne dersin?

Ataberk: Bütün sayılar yazılır ilk önce artı olduğu için.

Araştırmacı: Nedenini nasıl açıklarsın? Bütün sayılar yazılabilir çünkü...

Ataberk: Çünkü mesela biz ilk önce ekliyorsun sayıyı eklediğin için bir sayı geliyor geliyor geliyor.. ondan sonra yok oluyor. Gelmiyor bir daha. Bir katkısı olmuyor yani.

Harf ile temsil edilen değişkeni genelleştirilmiş bir sayı olarak yorumlamayı destekleyen soru-4'te ilk değerlendirmede bireysel uygulamada Görsel 3.180'de verildiği gibi ifade ettiği görülürken bireysel görüşmede genelleştirilmiş bir sayıyı temsilen kullanılan 'a' harfini önce 'bulmanı istiyorlar' diyerek tanımladığı ancak sonrasında a yerine bütün sayıların olabileceğini ifade ettiği görülmüştür. Değişken kavramının iki yorumu arasındaki farkı, cebirsel ifadeden sonra eşit işareti ve cevabın verilmesi durumunda belirli bir sayı; cebirsel ifadeden sonra eşit işareti ve sonuç olmadığı durumlarda ise genelleştirilmiş sayı olarak ele aldığı yorumunu kısmen de olsa yapabildiği görüldüğünden çalışmasının semiyotik-söylemsel düzlemde yer aldığı düşünülmüştür.



Görsel 3. 180. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-4'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: a'yı gösterir demişsin sen. Peki o a nedir?

Ataberk: Sayıyı gösterir. A sayıyı gösterir.

Araştırmacı: Mmm ama sayı yazmamışlar bir harf yapmışlar neden öyle yapmışlar?

Ataberk: Hmmmm nasıl anlatayım? O sayıyı bulmanı istiyorlar sende.

Araştırmacı: Peki nasıl bulacağım. Mesela oradaki a'yı nasıl bulacağım. Ya da a kaç olabilir mesela?

Ataberk: Aaaa eşittir yok burada ama nasıl yapabiliriz

Araştırmacı: Eşittir olmayınca a'yı bulamıyor muyuz?

Ataberk: Yoooo. Eşittir yoksa çoğu sayıyı kullanabilir. Mesela 2 çarpı a, 5 olsun. 2 çarpı 5, 10. 10 artı 3, 13.

Araştırmacı: Mesela çoğu sayıyı kullanabiliriz dedin ya benim dikkatimi çekti. Mesela 5'i kullandın. Başka nasıl sayılar kullanabilirsin? Özel bir şeyi var mı mesela neden 5'i seçtin?

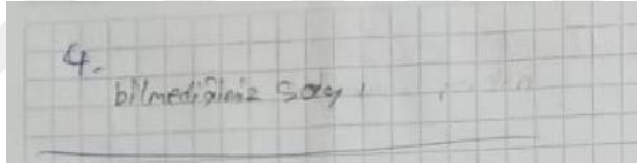
Bazı sayıları seçebiliriz ama bazılarını seçemez miyiz mesela?

Ataberk: Hepsini seçebiliriz.

Araştırmacı: Bütün sayılar mı olur?

Ataberk: İlla 5 olsun diye demiyor. O yüzden bütün sayıları yapabiliriz.

Harf ile temsil edilen değişkeni genelleştirilmiş bir sayı olarak yorumlamayı destekleyen soru-4'te son değerlendirmede bireysel uygulamada Görsel 3.181'de görüldüğü üzere belirli bir bilinmeyen anlamıyla işlemsel yorumunu kullandığı görülürken; bireysel görüşmede değişkenin genelleştirilmiş sayı olarak kullanıldığı ve a harfi ile temsil edilen ilişkisel yorumunu doğru bir şekilde ifade edebildiği ve a'nın tüm sayılar olabileceğini ifade ettiği görülmüştür. Değişkenin genelleştirilmiş sayı olduğu durumları sonucun verilmediği durumlarla; belirli bir sayı olduğu durumları ise sonucun verildiği durumlarla ilişkilendirdiği görülmüştür. Değişkenin belirli bir sayı olma durumunu 'bilinmeyen sayı' olarak tanımlarken; genelleştirilmiş sayı olma durumunu 'bilinmeyen sayılar, bütün sayılar, bilinmeyen bütün sayılar' olarak tanımladığı görülmüştür.



Görsel 3. 181. Ataberk'in son değerlendirme soru-5'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Mesela a kaç olabilir?

Ataberk: Heh, 2 olabilir, 1 olabilir, 3,4,5,6,7...

Araştırmacı: Kaça kadar gidebilirsin?

Ataberk: Bütün sayılar olabilir.

Araştırmacı: Bütün sayılar mı?

Ataberk: Hı hı... çünkü.. mesela 2 çarpı bir sayı ... artı 3 eşittir şuna falan demiyor... sadece o işlemi koymuş. Yani o işlemin sonucunu sana vermemiş. Verseydi ona göre yapardım. Ama vermediği için istediğim sayıyı yapabilirim. Sonuç önemli değil.

[...]

Araştırmacı: Yaaa diyorum bazen bilinmeyen sayılar sadece bir sayı olabiliyor. Bazen bilinmeyen sayılar bütün sayılar olabiliyor. Acaba diyorum onlara farklı isim vermek gerekir mi?

Ataberk: Sizin dediğiniz burada doğru oldu. 'bilinmeyen sayılar' 'bilinmeyen sayı'

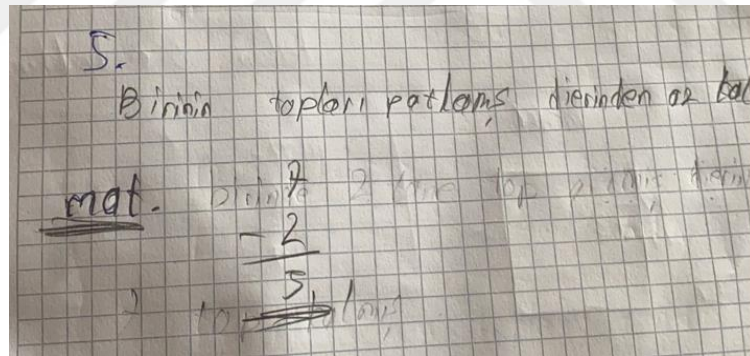
Araştırmacı: Hmmmm 'lar' eki mi eklemek lazım diyorsun yanına bir de? Çokluk anlamında.

Ataberk: He he evet.

Araştırmacı: Başka bir isim verilebilir mi sence? Hani bir sürü sayı verebiliyorsun ya onu anlatmak için mesela?

Ataberk: Bütün sayılar olabilir ama bilmiyorum.. bilinmeyen bütün sayılar.

Daireyle temsil edilen değişkeni yorumlayıp sözel ve matematiksel temsille ifade etmeyi gerektiren soru-5'te ilk değerlendirmede genelleştirilmiş sayıyı temsilen modellenen topları Görsel 3.182'de verildiği gibi sayıp belirli bir sayı olarak yorumladığı; 2 eksildiğinde de o belirlediği sayıdan 2'yi çıkardığı görülmüştür. Sonrasında bireysel görüşmede iki grup daire arasındaki noktaları 'devam ediyor' şeklinde yorumlasa da o noktaların yerine belirli bir sayıda top hayal edip toplam top sayısını belirlemeye çalıştığı görülmüştür. Adım adım öğretmen rehberliğinden sonra modelin genelleştirilmiş sayıyı temsil ettiğini farkedip sözel olarak 'her sayı olabilir' ve 'hep 2 eksik' diyerek ifade ettiği; matematiksel olarak temsil ederken genelleştirilmiş sayıyı anlatmak için küme parantezini kullanmaya çalıştığı görülmüştür (Görsel 3.183).



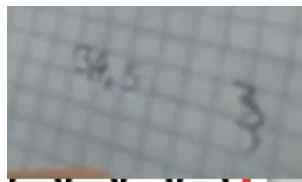
Görsel 3. 182. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-5'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Neden aralara nokta nokta koymuş. Yani ben o nokta noktayı anlayamadım. 7 anlatmak isteseydi 7 tane top çizerdi. Ortaya o nokta noktayı koymazdı sanki. Yani koyduysa acaba altında başka bir şey mi var? Ne olabilir sence?

Ataberk: 4 eşit ... yok heee şey olabilir artı.

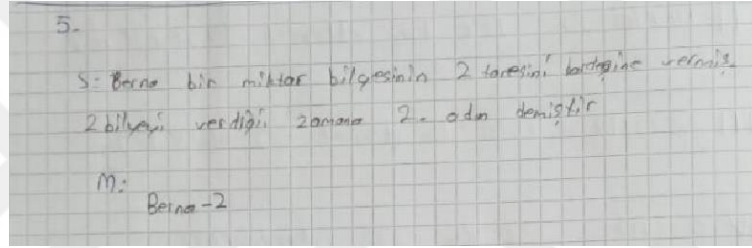
Araştırmacı: İşlem mi araya?

Ataberk: 3 artı 4, 7 ediyor.



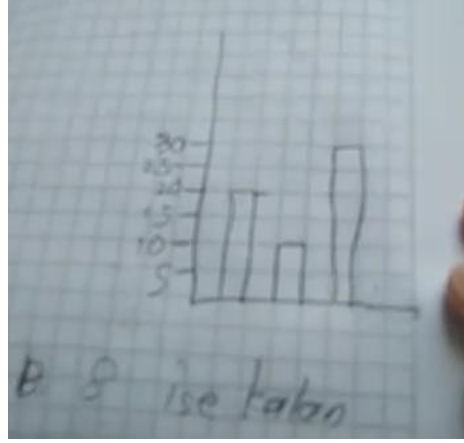
Görsel 3. 183. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-5'e ilişkin öğretmen rehberliği sonrası cevabı

Daireyle temsil edilen değişkeni yorumlayıp sözel ve matematiksel temsille ifade etmeyi gerektiren soru-5'te son değerlendirmede bireysel uygulamada miktarı bilinmeyen çokluğu temsilen verilen daireler ve arasındaki noktaları doğru bir şekilde yorumlayıp hem sözel hem de cebirsel olarak doğru bir şekilde temsil edebildiği görülmüştür (Görsel 3.184). Genelleştirilmiş sayı modelini doğru bir şekilde işe koşabildiği **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü değerlendirilmiştir. Aynı zamanda bir cebirsel yapı üzerinde başka işlemlerin gerçekleştirilebileceği nesneleştirilmiş bir yapı olarak yorumlayıp Berna'nın bilyelerinden 2 tanesinin eksilmesi durumunu 'Berna-2' şeklinde yorumlayabildiği görüldüğünden değişken kavramını ilişkisel yorumlayabildiği düşünülmüştür.



Görsel 3. 184. Ataberk'in son değerlendirme soru-5'e ilişkin cevabı

Birbirine bağlı değişen nicelikleri temsil eden değişkenler modelle verilip sözel ve matematiksel olarak temsil etmesini ve değişkenleri hesaplamasını gerektiren soru-6'da ilk değerlendirmede Ataberk'in bireysel uygulamada soruyu çözemediği görülürken öğretmen rehberliği ile de modeli doğru yorumlamakta zorlandığı görülmüştür. Birbirine bağlı değişen nicelikleri temsil etmek için kullanılan çubuk modellerini sütun grafiğine benzettiği görülmüş; modelde yazan, 10 ve 60 sayılarını da sütun grafiğinde eksenlerde yazan sayılar olarak yorumladığı görülmüştür (Görsel 3.185). Sonrasında 10 yazan büyüklükten yola çıkarak çubuk modelini oranlayarak 10,20,30 olacak şekilde 3 tane 10 büyüklüğünde çubuğun büyüklüğüne bakarak yorumladığı görülmüştür. Son olarak birbirine bağlı değişen nicelikleri temsilen kullanılan çubuk modellerini doğru bir şekilde yorumlayarak değişkenin ilişkisel yorumunu işe koştugu **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiştir.



Görsel 3. 185. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-ya ilişkin bireysel görüşmede cevabı

Ataberk: Bu 10 zaten burası 60'sa orayı da gösteriyor. Heee orayı sil. Şuradan şuraya kadar 60. Orayı sildiysek orası 10'luk de. 50 oluyor. 60'dan 10'u çıkar 50.

Araştırmacı: Hı hı.

Ataberk: Şuradan şuraya kadar 50'ymiş. (60'dan 10u çıkarınca kalan doğru uzunluğu gösteriyor yani Sare'nin son iki kutusuna denk gelen uzunluğu)

Araştırmacı: Bir daha söyleyim de sadece senin yazdıkların kalsın. Bir daha gösterir misin nereden neresi 50?

Ataberk: Şuradan şurası. Şurası 10'sa orayı silmeyelim. 60, şurası 50 oluyor o zaman. Orası yok (10luk kısmı çizmeden göstermeye çalışıyor) yan taraf. O zaman 60, 50 oluyor orası. Yani şu kadar yer 50. Yani şu iki boşluğu 50.

Araştırmacı: Tamam

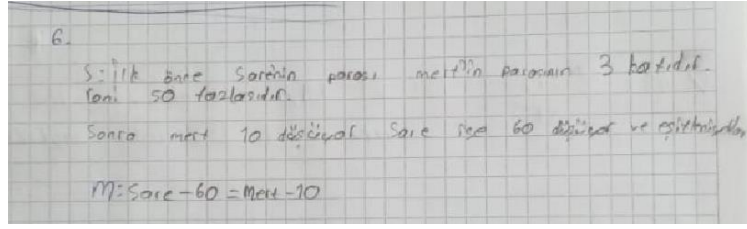
Ataberk: İki tanesi 50.

Araştırmacı: Peki Sare'nin ... (araştırmacı tam konuşacakken Ataberk konuştu)

Ataberk: İki tanesi 50'ye bir tanesi kaç olur yani? 50'yi 2'ye böleceğiz. Bir tanesini bulmak için. 25. Yani bir tanesi 25. İki tanesi 50, üç tanesi 75.

Birbirine bağlı değişen nicelikleri temsil eden değişkenleri modelle verilip sözel ve matematiksel olarak temsil etmesini ve değişkenleri hesaplamasını gerektiren soru-6'da son değerlendirmede Görsel 3.186'da görüldüğü üzere birbirine bağlı değişen niceliklerin modelini doğru bir şekilde yorumlayıp sözel olarak ve cebirsel olarak ifade edebildiği ve değişkenin ilişkisel yorumlanması gerektiren modeli doğru bir şekilde işe koşarak Sare ve Mert'in paralarını doğru bir şekilde hesaplayabildiği **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiştir. Aynı zamanda bireysel görüşmede kullandığı teknikleri yaptığı adımları doğrulayıcı ifadelerle

açıklayabildiğinden çalışmasının semiyotik-söylemsel düzlemde yer aldığı değerlendirilmiştir.



Görsel 3. 186. Ataberk'in son değerlendirme soru-6'ya ilişkin cevabı

Araştırmacı: Hmmm. Peki sonra ne oldu? Sare 60 lirasını kaybetti. Mert 10 lirasını kaybetti. Sonra ne oldu Sare'yle Mert'e?

Ataberk: Sonra... ikisi de eşit mi... evet ikisi de eşit oluyor.

Araştırmacı: Hmmm eşit olduklarını nasıl anladın peki? Nereye bakarak eşit olduklarını anlıyorsun?

Ataberk: Şu Mert'in parasını gösterirken şu ikincide küçük yer 10 lira ya, 10'la gösterirken oraya da gelmiş. Orası iki yer aynı yerde. Orayı çıkardığımızda 60'tan yani 10 çıkardığımızda 50.

[...]

Ataberk: Bu gösterdiğim yer... yani 50, iki kısımda olduğu için her kısım birbirine eşit olduğu için 50'yi 2'ye böldüm. Bir kısmı 25'miş. İlk başta Sare'nin parası da 3 kısımmış. Yani 25, 50, 75'miş.

Birbirine bağlı değişen niceliklerin çubuk modeli ile temsil edildiği problemi çözmesini gerektiren soru-7'de ilk değerlendirmede Ataberk'in birbirine bağlı değişen nicelikleri temsilen kullanılan çubuk modelini doğru yorumlayamadığı görülmüştür (Görsel 3.187). Bireysel görüşmede öğretmen rehberliği ile B takımının, A takımından 8 poster daha fazla yaptırdığını farkederek Ataberk'in A ve B takımlarının poster sayısını yine de yanlış hesapladığı görülmüştür. Öğretmenin adım adım sorularıyla model üzerinde düşünmeye devam eden Ataberk'in 8 posterin verildiği büyüklükten yola çıkarak A ve B takımlarına ait poster sayısını tahmin etmeye çalıştığı görülmüştür. Öğretmen rehberliğine rağmen birbirine bağlı değişen nicelikleri modelleyen çubukları doğru bir şekilde yorumlayarak problemin çözümünde işe koşamadığı görülmüştür.

Handwritten work on grid paper for Görsel 3. 187. It shows a calculation: $40 - 8 = 32$. Below this, it says "B 8 ise kalan 32 si a olmalı". To the left, there is a small diagram with "A" and "B" and some numbers.

Görsel 3. 187. Ataberk'in ilk değerlendirme soru-7'ye ilişkin cevabı

Ataberk: İki de... diyelim ikisi de 20 ... kaç Çıkar?... heh.. Evet. Heh evet... (içinden işlem yapıyor) ikisi de 20.. iki tane 20 , 40 ediyor. Ama b takımı 8 tane fazlamış yani ... göstereyim mi (ekranda göstermeye karar verdi. Öyle olmaz ki (20 verince olmayacağını anladı)

Araştırmacı: İstersen telefona da yazabilirsin. Yani telefona dediğim ekrana da yazabilirsin. İstersen kâğıda da yazabilirsin. Neden böyle olmaz ki dedin? Tam başlamıştın 20, 20. Paylaştırmıştın. Sonra dedin ki madem 8 fazlamış dedin tam bir şey yapacaktın. Böyle olmaz ki dedin. Neden öyle dedin?

Ataberk: Biri 28 oluyor. Sonra şurası da ... o çizdiğim yer 28 desek (nokta nokta şeklinde resimde gösterilen nokta noktalardan ikinci sıradakine kadar olan kısmı işaretledi sarıyla)

Ataberk: Buraya 20'den 8 (çıkarsak demek istedi) 12 desek ... orası 12'ye orası da 28. İkisinin... yani a takımının 12, b takımının da 28 mesela ikisinin de toplamı 40 poster. Öyle de olabilir.

Birbirine bağlı değişen niceliklerin çubuk modeli ile temsil edildiği problemi çözmesini gerektiren soru-7'de son değerlendirme Görsel 3.188'de görüldüğü üzere birbirine bağlı değişen niceliklerin modelini doğru bir şekilde yorumlayıp problemin çözümünde işe koşabildiği **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiştir. Bireysel görüşmede yaptığı adımları kullandığı teknikleri doğrulayıcı ifadelerle açıklayabildiği gerekçelendirebildiği için çalışmasının **semiyotik-söylemsel** düzlemde yer aldığı düşünülmüştür.

Handwritten work on grid paper for Görsel 3. 188. It shows a calculation: $40 - 8 = 32$. Below this, it says "A ve B yi eşitledim". Then it shows $32 \div 2 = 16$. Below this, it says "iki tane 16 ama B. 8 fazla". Then it shows $16 + 8 = 24$. To the right, it shows $B = 24$ and $A = 16$. At the bottom right, there is a small addition: $20 + 20 = 40$.

Görsel 3. 188. Ataberk'in son değerlendirme soru-7'ye ilişkin cevabı

Ataberk: Hayır hayır bir dakika öyle yapmamışım. Tamam anladım. (o sırada defterinde önceden yaptığı işlemlere baktı aklına geldi) B takımı 8 poster fazlaymış ya toplamda 40 poster varmış. O 8 poster çıkardım. 40'tan 8 poster çıkardım. Toplam 32 poster diye düşündüm.

Araştırmacı: Neden 8'i çıkardın bu arada Ataberk?

Ataberk: Ekleyecektim yine B'ye. Ekleyeceğim yani. İkisini de eşitledikten sonra 8'i yine ekleyeceğim. Çıkardım. Yani 32 çıktı. 32'yi de 2'ye böldüm. İkisi de eşit olduğu için 8 olmadan. İkisi de 16'yı. İkisi de 16 ama B 8 tane fazlaymış. B 8 tane fazla olduğundan yani 16, bir tanesi 16 olduğu için B'ye yani 16'ya 8 ekledim 24. B, 24. A ise 16.

Çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliğinde, farklı şekillerle temsil edilen genelleştirilmiş sayı olarak yorumlanan değişken kavramını hissedebilmeyi gerektiren soru-10'da ilk değerlendirmede Ataberk'in bireysel uygulamada genelleştirilmiş sayıyı temsilen kullanılan şekillerin yerine sayılar belirleyerek işlemlerin sonuçlarını karşılaştıramadığı görülmüştür. Bireysel görüşmede öğretmen rehberliğinden sonra her bir şekle bir sayı atayıp işlemleri yaptığı ancak işlem önceliğine dikkat etmediğinden eşit işaretinin sol ve sağ tarafındaki sonuçları yanlış bulduğu görülmüştür. Bireysel görüşmede işlem önceliği konusundaki eksikliğini tamamladıktan sonra eşit işaretinin her iki tarafındaki sonuçların aynı çıktığını fark etse de genelleştirilmiş sayının şekille temsil edildiği bu soruda bu eşitliğin tüm durumlar için geçerli olduğunu farkedemediği görülmüştür. Öğretmen rehberliği ve sınırlı sayıda denemeden sonra tüm sayılarda sonuçların eşit çıkacağı genellemesine vardığı ancak doğrulayıcı bir açıklama, gerekçelendirme yapamadığından çalışmasının **semiyotik-enstrümantal** düzlemde yer aldığı yönünde değerlendirilmiştir.

Araştırmacı: Ben de onu diyecektim şimdi mesela sen kareye üç verdin daireye üç verdin üçgene 2 verdin öyle verince ikisi de iki taraf da 12 çıktı. Yani senin verdiğin sayılarda bir hile bir işte ne bileyim var mıydı ki nasıl ikisi de aynı çıktı? Başka sayılar da verseydin yine aynı sayılar çıkacak mıydı? Denk mi geldi? Tesadüf mü?

Ataberk: Tesadüf olmaz mesela. Diyelim ben buna 5 versem diyelim 2 falan versem diğerlerinde de yine artı var ya kareyle dairenin içine ilerde kareyle daireyi çarpacak. Aynı olmaz yani. Tutturman lazım Araştırmacı: Tam diyordum ki senin verdiğin o üç iki üçte 12 on iki çıktı ya acaba dedim yaaa senin verdiğin sayılarda mı bir hikmet var diyeyim yani? Acaba başka sayılar verseydin öyle çıkmayacak mıydı?

Ataberk: Başka sayılar verseydim böyle çıkmazdı.

Çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliğinde, farklı şekillerle temsil edilen genelleştirilmiş sayı olarak değişken kavramını hissedebilmeyi gerektiren soru-10'da son değerlendirmede Görsel 3.189'da görüldüğü üzere genelleştirilmiş sayıyı temsilen kullanılan şekillerin her birinin herhangi bir sayıyı temsil ettiğini fark ettiği ve buna uygun bir şekilde değişkenin ilişkisel yorumunu işe koşarak problemi çözebildiği **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiştir. Bireysel görüşmede eşit işaretinin iki tarafında sonuçların neden aynı çıktığı sorusu yöneltildiğinde doğrulayıcı bir açıklama yapmaksızın yaptığı adımları ifade ettiğinden çalışmasının **semiyotik-enstrümantal** düzlemde yer aldığı düşünülmüştür.

Görsel 3. 189. Ataberk'in son değerlendirme soru-10'a ilişkin cevabı

Araştırmacı: O zaman şöyle sorayım. Mesela sana birisi gelse ve dese ki dörtlerden Ataberk yaaa şöyle bir soru sordular dese kare, daire, üçgene istediğim sayıyı verebilir miyim dese? Hep eşit çıkacak mı dese sen ne dersin? Kare, daire ve üçgene istediğim sayıyı vereyim. Sol tarafla sağ taraf hep eşit çıkacak mı?

Ataberk: Evet eşit çıkar.

Araştırmacı: Neden dese?

Ataberk: (gülüyor) ama... yani... (ne diyeceğini bilemedi) hep aynısı.. mesela... yine bir sayı olsa.. bir sayı koyalım beraber derim o da kafasından bir sayı söyler. Zor olmasın diye 1,2,3 dedim. Derim ki 1,2,3 yani kare 1, yuvarlak 2, üçgen 3. 1'le 2'yi topladık. 3'ü de 3'le çarptık. Öbür tarafta.. öbüründe.. 1 ile 3'ü çarptık yine 3. Öbür tarafta yine 3 etti. Ama tamam yaaa iki taraf da aynı. Sonra bakalım 3'ü 3'le çarpmış. 9 ediyor. Burada 3'ü 3'le

toplamiş. 6'yı toplamış. Birinde 3'le 3'ü çarpmış. Diğerindeyse 6'yla 3'ü toplamış. Yani birinde çarpmış birinde toplamış. Ama aynı ediyor yine sonuç yani burada 3'ü 3'le çarpıyorsun. 3 çarpı 3, eşittir 3 artı 6.

3.2.4. Melda'nın matematiksel çalışma uzayı

Bu bölümde Melda'nın matematiksel çalışma uzayı, ilk/son değerlendirmede yer alan soruların analizi sonucu ortaya çıkan temalar olan değişken kavramının işlemsel ve ilişkisel yorumunu anlamlandırmaya yönelik bulgular olarak iki başlık altında sunulmuştur.

3.2.4.1. Değişken kavramının işlemsel yorumunu anlamlandırmaya yönelik bulgular (1., 8., ve 9. Sorular)

Değişkenin belirli bir bilinmeyen olarak doğru yorumlanıp hesaplanmasını gerektiren denklem içeren soru-1'de ilk değerlendirmede Görsel 3.190'da Meyra'nın eşit işaretinin kesin işlemsel, esnek işlemsel, temel ilişkisel yorumlama biçimleri ve değişkenin belirli bir bilinmeyen olarak işlemsel yorumlama biçimini etkin bir şekilde işe koşarak bilinmeyeni hesaplayabildiği **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü düşünülmüştür. Bireysel görüşmede bulduğu cevabın doğruluğunu göstermek için sayısal olarak yerine koyma yaptığından çalışmasının değişkenin işlemsel yorumu bağlamında **semiyotik-söylemsel** düzlemde olduğu değerlendirilmiştir.

Değişken
 $15 + 3 = 8$ 8'den 5 çıkarık 3 kalır
 $14 + \square = 24$ 24'den 14 çıkarık 10 kalır
 $32 - 15 = a$ 32'den 15 çıkarık 17 buluruz 17 15 daha 32 yapar
yani eşittir
 $13 + \square = 14 + 7$ 14 + 7 21 yapar 21'den 13 çıkarık 8 kalır işi eşit
alır

Görsel 3. 190. Melda'nın ilk değerlendirme soru-1'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Peki burada Melda 3 yerine başka bir sayı verseydik yine doğru olur muydu?

Melda: İıı (gülüyor) her zamanki gibi bence deneyelim.

Araştırmacı: Tamam.

Melda: Çünkü ben çok seviyorum böyle deneyeyim. Mesela ne kullanabiliriz?

Araştırmacı: Ne bileyim. Başka bir sayı. İstedğini deneyebilirsin. Mesela 7 deneyelim.

Melda: Tamam. 7, 8'den zaten 1 puan var. 1 rakam var aralarında. Bir dakika yaa. Aaa sayamadım (bir türlü zihninden yapamadı işlemi öyle olunca parmağıyla üstüne ekledi yine.)

Araştırmacı: Nasıl yaptın? Sonra bana da göster ekrandan defterini.

Melda: 12'den. ... şimdi bunu 7'yle yaptım. Şurada köşede görünüyor mu bilmiyorum

Araştırmacı: Azıcık.... 5 artı 7 diye yapmışsın. 12 eksi 5 diye yapmışsın. Peki doğru oldu mu şu anda?

Melda: Eee bu 8'e uymadı.

Değişkenin belirli bir bilinmeyen olarak doğru yorumlanıp hesaplanmasını gerektiren denklem içeren soru-1'de son değerlendirmede bireysel uygulamada Görsel 3.191'de görüldüğü üzere Melda'nın bilinmeyen yerine kullanılan farklı temsillerin aslında birer sayıyı temsil ettiğinin farkında olduğu ve şekil, harf, noktalarla temsil edilen değişkenleri bilinmeyen, bilinmeyenler şeklinde tanımladığı görülmüştür. Değişkenin belirli bir bilinmeyen yorumunu etkin bir şekilde işe koşabildiği görüldüğünden işlemsel bakış açısının etkin olduğu **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü değerlendirilmiştir. Aynı zamanda bireysel görüşmede yaptığı adımları bulduğu sonuçları doğrularken sayısal olarak yerine koyma yaparak değişkenin işlemsel yorumunu kullandığı görüldüğünden çalışmasının **semiyotik-söylemsel** düzlemde yer aldığı görülmüştür. Melda'nın öğretmenle yapılan bireysel görüşmelerde bilinmeyi hesaplamak için teraziye de işe koştuğu; eşit işaretinin olduğu durumlarda terazinin dengesinin bozulmaması için bilinmeyen yerine yazılabilecek uygun sayıyı belirlediği görülmüştür.

I $5 + \underline{\quad} = 8$ = 8'den 5'i çıkartınız ya da 5'in üzerine 8'e varana kadar sayarsınız
II $14 + \square = 24$ = 24'den 14'i çıkartınız 14'in üzerine 24'e kadar sayarsınız
III $32 = 15 + a$ = 15'in üzerine 32'ye varana kadar sayarsınız 32'den 15'i çıkartınız
IV $20 = 3 + a$ = 20'den 3'i çıkartınız 3'ün üzerine 20'ye varana kadar sayarsınız
V $13 + \square = 14 + 7$ = $14 + 7 = 21$ $21 - 13$
14 ile 7'yi toplarsınız 21'den 13'i çıkartınız.

Görsel 3. 191. Melda'nın son değerlendirme soru-1'e ilişkin cevabı

Melda: 5 artı oradaki noktaların yerine gelecek 3.

Araştırmacı: Hmmm peki oradaki nokta nokta ne anlamında kullanılmış olabilir?

Melda: orada bilmiyoruz. Orada bir sayı var ama bilmiyoruz gibi bir şey olabilir bence. Ya da buraya bir şey gelecek onu doldur der gibi.

[...]

Araştırmacı: Tamamdır. 32’li olan soruyu nasıl yaptın Melda?

Melda: Ben burada sağ kefe ve sol kefe gibi düşündüm. Bir taraf sol kefe 32’ymiş. Sağ kefesinde de sadece 15 var. Onun üzerine bir şey ekleyeceğiz ki eşit olacak 32 olacak. O yüzden ben 32’den 15’i çıkartırız ya da 15’in üzerine 32’ye varana kadar sayarız. Diye düşündüm aynı mantıkla.

Araştırmacı: Mesela şeylerde.. Yukarıdakileri sorarken ayy şey çözerken hiç kefe gibi düşünürüm, terazi gibi düşünürüm işte eşit olması gerekir falan demedin. Ama bu 32’li olan soruyu görünce dedin ki biz bunu terazi gibi düşünürüz. Sol taraf sağ taraf diye başladın mesela. Neden burada aklına terazi geliyor da diğerlerinde gelmiyor mesela?

Melda: Orada direk baktığımızda ilk önce mesela 5 artı nokta nokta eşittir 8 deyince benim aklıma ilk önce direk şey geliyor. Bu toplama işlemi tamam bitti gibi. Alttakine bakıyorum ama başta 32 var. İşte o zaman terazi gibi düşünüyorum.

Sözel bir problem içinde verilen belirli bir bilinmeyi hesaplamayı gerektiren soru-8’de ilk değerlendirmede Melda’nın Görsel 3.192’de görüldüğü üzere sözel olarak verilen durumda işlemlerin tersini yaparak belirli bir bilinmeyi hesaplayabildiği; işlemsel yorumlamayı işe koşarak problemi çözebildiğini gösteren verilerden hareketle **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü değerlendirilmiştir. Bireysel görüşme sırasında yaptığı adımları gerekçeleriyle beraber açıklayabildiğinden çalışmasının **semiyotik-söylemsel** düzlemde olduğu düşünülmüştür.

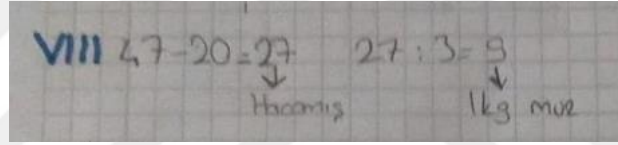
Görsel 3. 192. Melda’nın ilk değerlendirme soru-8’e ilişkin cevabı

Melda: 47’den 20 çıkardım 27. 27 bölü 3 yaptım 9.

Araştırmacı: Orada 47’den 20 çıkarmışsın ya neden çıkardın?

Melda: Burada 47 tl parası varmış önceden. Sonra 20 tl parası kalmış. Ona göre muz alırken ne kadar para harcamış. Onu bulmak için 47’den 20’yi çıkardım. 27. Burada diyor ki 3 kilo muz almış. 3 kilo muz almışsa 27’yi de 3’e bölüyoruz. Çünkü muz alırken 27 tl para harcamıştı. 27’yi de 3’e bölüyoruz. Burada 1 kilo muzun 9 tl olduğunu buluyoruz.

Sözel bir problem içinde verilen belirli bir bilinmeyeni hesaplamayı gerektiren soru-8'de son değerlendirmede Melda'nın Görsel 3.193'te görüldüğü üzere sözel olarak verilen durumdaki işlemlerin tersini yaparak belirli bir bilinmeyen olan değişkenin işlemsel yorumunu işe koştugu **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü değerlendirilmiştir. Bireysel görüşmede yaptığı adımları kullandığı teknikleri de doğrulayıcı açıklamalarla ifade edebildiği görüldüğünden çalışmasının değişkenin işlemsel yorumunun aktif olduğu **semiyotik-söylemsel** düzlemde yer aldığı düşünülmüştür. Bireysel görüşmede öğretmen rehberliği ile beraber bir kilo muzun fiyatını bilemediği için bilinmeyeni üçgen ile temsil edebileceğini; üç kg muzun fiyatını da üç tane üçgen ile temsil edebileceğini; sonucun da 27 olacağını eşit işareti ve 27 yazarak Görsel 3. 194'te verildiği gibi temsil edebileceğini ifade ettiği görülmüştür.



Görsel 3. 193. Melda'nın son değerlendirme soru-8'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Mesela bilmediğin o şey için bir kilo muzun fiyatı için istediğin başka bir şey kullansana. Ne kullanmak istiyorsan. Bilmediğin şeyler için ne kullanabiliyorsan.

Melda: Soru işareti, üçgen kare daire, geometrik cisimler.

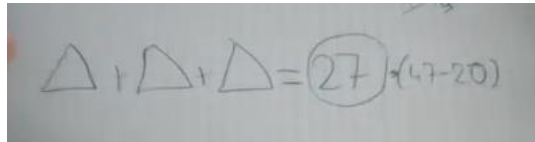
Araştırmacı: Tamam bir tane seç mesela. Hangisini kullanalım?

Melda: Üçgen.

[...]

Araştırmacı: Peki o 3 kilo olduğunu nasıl anlayacağız biz yani. Hadi bunu sen dedin ki bu dedin 1 kilo muzı ifade ediyor. (ekrandan da gösteriyor) Peki 3 kilo olduğunu nasıl anlayacağız? Ne yaparsan aaaaaa 3 kilo (tam devam edecekken Melda lafa girdi)

Melda: Yanına 2 tane daha çizerim 3 kilo olsunlar.

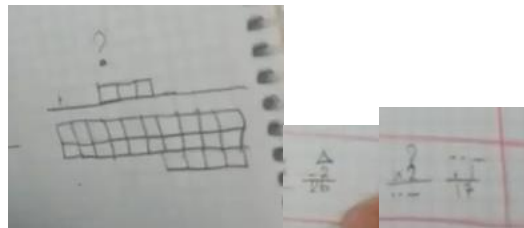


Görsel 3. 194. Melda'nın son değerlendirme öğretmen rehberliğinden sonra soru-8'e ilişkin cevabı

Sözel olarak verilen belirli bir bilinmeyen içeren ifadelerin cebirsel ve model ile temsil edilmesini gerektiren soru-9'da ilk değerlendirmede Melda'nın bilinmeyi hesaplamayı sağlayacak işlemleri modellediği ve yine aynı şekilde matematiksel olarak temsil etmesi istendiğinde de bilinmeyi hesaplamayı sağlayacak işlemleri yazdığı görülmüştür (Görsel 3.195). Bilinmeyi hesaplarken sözel olarak ifade edilen işlemlerin tersini yaptığı görüldüğünden değişkenin işlemsel yorumunu işe koşabildiği **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü düşünülmüştür. Bireysel görüşmede öğretmen rehberliğinden sonra Melda'nın belirli bir bilinmeyi temsilen soru işaretini, üçgeni kullanabildiği; modelde ve matematiksel temsilde bilinmeye de yer verebildiği görülmüştür (Görsel 3.196).

Sözel	Model	Matematiksel
okuldan kutubun sayısını 3 pozitif 26'lık		$\begin{array}{r} 26 \\ - 3 \\ \hline 21 \end{array}$
Kutubun sayısını den 2'lik 26'lık		$\begin{array}{r} 26 \\ + 2 \\ \hline 28 \end{array}$
Toplam sayısını 2'lik ve 1'lik 12'lik		$\begin{array}{r} 26 \\ + 2 \\ \hline 28 \end{array}$

Görsel 3. 195. Melda'nın ilk değerlendirme soru-9'a ilişkin cevabı



Görsel 3. 196. Melda'nın ilk değerlendirme soru-9'a ilişkin öğretmen rehberliğinden sonra cevabı

Sözel olarak verilen belirli bir bilinmeyen içeren ifadelerin cebirsel ve model ile temsil edilmesini gerektiren soru-9'da son değerlendirmede belirli bir bilinmeyen olarak değişkenin işlemsel yorumunun kullanıldığı sözel ifadeleri modellemesi istendiğinde cebirsel olarak temsil edebildiği görülmüştür. Örneğin aklımdan tuttuğum sayının 3 fazlası 14'tür ifadesini cebirsel olarak temsil ederken bilinmeyi temsilen içi boş bir

kutu çizip yanına artı ve yeni bir kutunun içine üç yazıp eşit işaretinden sonra da sonucu temsil eden kutunun içinde 14 cevabını verdiği ve son olarak da bilinmeyeni 11 olarak hesapladıktan sonra bilinmeyeni temsilen çizdiği kutunun içine 11 yazdığı görülmüştür (Görsel 3.197). Öğretmen rehberliği ile modelleme yaparken bilinmeyen yerine yine kutu temsilini kullandığı; 3 eklenmesi durumunu kutunun yanına 3 tane kare ekleyerek gösterdiği; 14'e eşit olma durumunu da terazi modeli ile desteklediği görülmüştür (Görsel 3.198). Değişkenin belirli bir bilinmeyen olarak işlemsel yorumunu etkin bir şekilde işe koşabildiği enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiş; yaptığı adımları, kullandığı teknikleri doğrulayıcı açıklamalarla ifade edebildiği görüldüğünden çalışmasının semiyotik-söylemsel düzlemde olduğu düşünülmüştür.

Görsel 3. 197. Melda'nın son değerlendirme soru-9'a ilişkin cevabı

Melda: Modelle eklendiğini aslında biz derslerimizde gösteriyorduk artı falan yapmadan.

Araştırmacı: Nasıl gösteriyorduk?

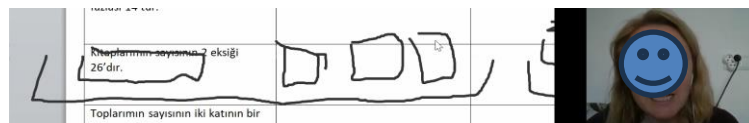
Melda: Böyle yan yana çiziyorduk.

Araştırmacı: Tamam. Şu anda 3 fazlasını yaptın. 14'tür diyor. 14'ü nasıl yapacaksın. 14'tür.

Melda: O zaman ben bunu bir terazi gibi düşüneceğim öyle daha kolay olacak.

Araştırmacı: Tamam.

Melda: Burası da 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14 (araştırmacı öğretmenin resminin arkasında kaldığı için terazinin sağ kefesindeki 14 kare anlaşılmıyor) böyle olsun.



Görsel 3. 198. Melda'nın son değerlendirme soru-9'a ilişkin öğretmen rehberliğinden sonra cevabı

3.2.4.2. Değişken kavramının ilişkisel yorumunu anlamlandırmaya yönelik bulgular (2.,3.,4.,5.,6.,7.,10. Sorular)

Tablo temsili ile verilen birbirine bağlı değişen nicelikleri farkedip ilişkisel yorumlamayı destekleyen soru-2’de ilk değerlendirmede bireysel uygulamada belirli bir bilinmeyen olarak değişkenin işlemsel yorumlanmasını kullanmayı gerektiren soruyu çözemediği, bilinmeyi hesaplayamadığı görülmüştür (Görsel 3.199). Öğretmen ile yapılan bireysel görüşmede soru üzerinde düşündükçe pasta sayılarının ve fiyatının kendi aralarındaki sabit artışından yola çıkarak bilinmeyenleri hesaplayabildiği; değişkenin belirli bir bilinmeyen olarak işlemsel yorumunu etkin bir şekilde işe koşabildiği **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü düşünülmüştür. Öğretmen rehberliğinden sonra nicelikler arasındaki ilişkiyi farkedebilen Melda’nın değişkenin ilişkisel yorumunu işe koşarak da problemi çözebildiği **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiştir. Değişkenin hem işlemsel hem de ilişkisel yorumunu kullanarak yaptığı adımları, kullandığı teknikleri doğrulayıcı ifadelerle açıklayabildiği görüldüğünden çalışmasının **semiyotik-söylemsel** düzlemde olduğu değerlendirilmiştir. Melda’nın belirli bir bilinmeyi temsil etmek için soruda kullanılan harfleri tanımlarken bilinmeyi göstermek için bazen soru işareti bazen harf bazen şekil kullanılabileceğini ifade edebilmesi değişkenin farklı temsilleri ile ilgili farkındalığının olduğunu göstermiştir.

2 Mini pastanın sayısı		
A	3H	
2	6H	a
B	B	b
C	12H	c
S	D	d

anlamadım

Görsel 3. 199. Melda’nın ilk değerlendirme bireysel uygulamada soru-2’ye ilişkin cevabı

Araştırmacı: Mesela diğerlerini nasıl bulmuştun Adanayla Ceyhanı.

Melda: İn çünkü 2, 3 yazıyor. Boşluk var. 5 yazıyor. Sırayla gittiğimize göre 1, A, 2, 3, 4 C, 5 sırayla rakamlar mesela inerken.. orada buluyorum ama fiyata geldik mi. (yapamıyorum anlamında kafasını sallayıp gülüyor)

Araştırmacı: Hmmm anlıyorum. Heh fiyata geldik mi. Fiyatta nasıl bir şey var acaba?

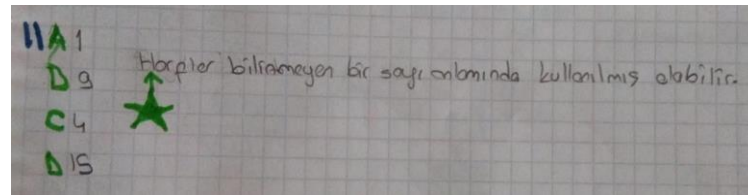
Melda: Aaaa fiyatta da üçer üçer artıyor. Üç, altı, b 9, d de 15.

[...]

Araştırmacı: Heh. Mesela o eklerden alacağım. Yaaa sizin pastanenin de ekleri çok güzel oluyor ama diyeceğim. Dedim hatta arkadaşlara çok fazla almam lazım. 40 tane almak istiyorum. Kaç para vereceğim dedim mesela. Kaç para vereceğim ben 40 tane eklere? Sizin pastanede. Bu Toprak'la aynı pastanedesin sen de.

Melda: Herhalde 120 tl olur. 40 tane alırsanız orada 1,2,3,4,5 ondan sonra orası 40'a kadar devam eder. Ondan sonra 3,6,9,12,15 diye böyle kırka kadar devam eder. Öyle yapmak yerine ben direk 40'la 3'ü çarptım. 3'er 3'er arttığı için 120.

Tablo temsili ile verilen birbirine bağlı değişen nicelikleri farkedip ilişkisel yorumlamayı destekleyen soru-2'de son değerlendirmede bireysel uygulamada Görsel 3.200'de görüldüğü üzere harf ile temsil edilen değişkeni işlemsel yorumladığı görülürken; bireysel görüşmede Melda'nın harflerle temsil edilen değişkenleri 'harflerin arkasında sayı var ama şu anda B,A,C,D yazıldığı için onların arkasındaki sayıyı biz göremiyoruz' şeklinde ifade etmiş olması değişken kavramını gözünde nasıl canlandırıldığını gösterdiğinden **semiyotik oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergeler olarak değerlendirilmiştir. Değişkenin birbirine bağlı değişen nicelikler olarak ilişkisel yorumlanmasını işe koşarak da problemi çözebildiği ve kullandığı teknikleri açıklayabildiği görüldüğünden çalışmasının **semiyotik-söylemsel** düzlemde olduğu kabul edilmiştir.



Görsel 3. 200. Melda'nın son değerlendirme soru-2'ye ilişkin cevabı

Melda: Buradaki harfleri biz bilmiyoruz. Onların arkalarında bir sayı var ama şu anda. B, A, C, D gibi yazıldığı için onun arkasındaki sayıyı biz göremiyoruz gibi bir şey.

[...]

Araştırmacı: Bir de mesela diyelim ki bu pastalardan.. bu mini pastalardan alacağım ben Melda. Arkadaşlarımı davet etmişim ama pasta yapacak zamanım yok. Hemen pasta alacağım pastaneden. Gittim aldım. 20 tane küçük küçük pasta. Mini pasta. Kaç para vereceğim?

Melda: İıı (düşündü) 60 galiba.

Araştırmacı: Nasıl hesaplıyorsun?

Melda: 1 tanesi 3 tl, 2 tanesi 6 tl, 20'yle 3'ü çarptım. Çünkü bir tanesi 3 tl'ydi. 20 tane alırsak 20'yle 3'ü çarpabiliriz 60. Yanlış hesaplamadıysam.

Eşit işaretinin (karşılaştırmalı ilişkisel) ve değişkenin (genelleştirilmiş sayı) beraberce ilişkisel yorumlanmasını gerektiren soru-3'te ilk değerlendirmede Melda'nın kutu yerine verdiği sayıları belirlerken Görsel 3. 201'de görüldüğü üzere işlem yapıp eşit işaretinin iki tarafındaki sonuçları karşılaştırmaya çalıştığı görülmüştür. Bireysel görüşmede eklediğimizi çıkardığımızda sonucun değişmeyeceğini ifade etse de kutu ile temsil edilen genelleştirilmiş sayının tüm sayılar olabileceğini ifade etmekte zorlandığı, verdiği sayıları yerine koyarak değişken kavramının işlemsel yorumunu işe koştugu **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü değerlendirilmiştir. Öğretmen rehberliğine rağmen değişkenin genelleştirilmiş sayı olarak ilişkisel yorumunu işe koşamadığı, değişkeni işlemselden ilişkisele geçiş düzeyinde değerlendirebildiği düşünülmüştür. Değişkenin işlemselden ilişkisele geçiş düzeyindeki yorumunu kullanarak yaptığı adımları kullandığı teknikleri doğrulayıcı açıklamalarla ifade edebildiğinden çalışmasının değişkenin geçiş düzeyinde yorumlanması sürecinde **semiyotik-söylemsel** düzlemde olduğu düşünülmüştür.

78 + 49 - 49 = 78 ipadeksi doğru çıktı. Doğru ise 78 + □ - □ = 78 yerine ne sayı neler yazılabilir?

78 - 49 = 29

128 - 49 = 79

sonuç 78 = 78 esittir

30

30

Görsel 3. 201. Melda'nın ilk değerlendirme soru-3'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Bak şöyle bir şey yazmışsın. Kutuların yanına 30, 30 yazmışsın. Kutu 30, kutu 30 şeklinde. O ne anlama geliyor? Onu ne için yazmıştın?

Melda: Burada 78 artı 30 eksi 30 yaparsak 78 çıkar demişim ama doğru mu bir kontrol edeceğim. Şimdiii. (deftere çözmeye başladı)

Araştırmacı: Aynen ben de onu diyecektim. Nasıl anladın diyecektim tam. 30 verince doğru çıkacağını.

Melda: Orada o kadar stresliydim o kadar heyecanlıydım ki ne yaptığımı ben bile unuttum. (deftere çözdü) evet gene 78 çıktı sonuç.

Araştırmacı: Nasıl yaptın? Bir gösterebilir misin defterinde? Nasıl karar verdin yani gene 78 çıktığına?

Melda: Görünüyor mu? (defterini ekrana tutuyor)

Araştırmacı: Heh gördüm 78'le 30'u toplamışsın sonra 108'den 30'u çıkarmışsın 78.

Araştırmacı: Peki 30'u denedin ya şu anda Melda. Başka bir sayıda olur mu? Mesela 50 de olur mu?

Melda: İııı burada.... Bakalım (hemen denemeye karar verdi yine işlem yaparak bakacak) 50'de de deneriz. (deniyor işlem yaparak) Bu galiba biraz şeye benziyor. İıı ilk sayfada mı ikinci sayfada mı ne daha önceki canlı yayınlarda yapmıştık orada biriyle topluyorduk biriyle çıkartıyorduk sonuç yine aynı sonuç çıkıyordu. Ona benziyor. Bir dakika yaa ben niye bugün sayamadım. (işlemleri parmakları ile sayarak yapıyor) Kaçtı heh... evet gene aynı sonuç çıktı. Araştırmacı: peki mesela 90'da doğru çıkacak mı?

Melda: 90'da da gene ekliyoruz çıkartıyoruz gene aynı sonuç çıkar diye tahmin ediyorum.

Eşit işaretinin (karşılaştırmalı ilişkisel) ve değişkenin (genelleştirilmiş sayı) beraberce ilişkisel yorumlanmasını gerektiren soru-3'te son değerlendirmede bireysel uygulamada Görsel 3. 202'de görüldüğü üzere eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel ve değişken kavramının ilişkisel yorumlanmasını problemin çözümünde etkin bir şekilde işe koşabildiği **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiştir. Bireysel uygulamada 'Eklediğimiz 49 sayısını tamamı ile beraber aldığımız için 49 sayısını hiç eklememişiz gibi olur. Kutu, 49 yerine istediğimiz her rakam sayı gelebilir' şeklinde ifade etmiş olması kutu ile temsil edilen değişkeni genelleştirilmiş bir sayı olarak yorumladığı ve cevabının da gerekçesi olması, doğrulayıcı bir ifade içermesi sebebiyle çalışmasının **semiyotik-söylemsel** düzlemde yer aldığı düşünülmüştür. Melda'nın bireysel görüşmede genelleştirilmiş sayı olarak değişkenin ilişkisel yorumunu ve belirli bir bilinmeyen olarak değişkenin işlemsel yorumunu aynı isimle 'bilinmeyen' olarak tanımladığı görülmüştür.

78 + 49 - 49 = 78

Eklediğimiz 49 sayısını tamami ile beraber oldığımız için 49 sayısını hiç eklememişiz gibi olur. ■, 49 yerine: İstedikimize her rakam her sayı gelebilir.

Görsel 3. 202. Melda'nın son değerlendirme soru-3'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Peki başka bir isim verebilir miyiz? Çünkü diğerinden biraz farklı geldi bana. Çünkü yukarıda sen bilinmeyen bir sayı diyorsun. Hesaplayıp diyorsun ki bu bilinmeyen sayı sadece 10 olabilir diyorsun yukarıdaki örnekte. Ama burada diyorsun ki bu da bilinmeyen sayı ama diyorsun 8 de olur, 80 de olur, 49 da olur. 50 de olur.

Melda: Orada mesela 5 artı 3, 8 yapar. 5'le 4'ü toptasak 8 yapmaz. 9 yapar.

Araştırmacı: Evet.

Melda: Ama burada 78'in üzerine atıyorum 9 ekleyelim sonra o eklediğimiz 9'u çıkartalım gene 78 kalır.

Araştırmacı: Evet. Peki isim olarak verirken farklı bir isim vermek gerekir mi. Hani yukarıdakine de bilinmeyen diyoruz aşağıdakine de. Yani buna da (araştırmacı 78'li olan soruyu gösteriyor ekrandan)

Melda: Hani başka bir isim verileceğini düşünmüyorum şu anda.

Harf ile temsil edilen değişkeni genelleştirilmiş bir sayı olarak yorumlamayı destekleyen soru-4'te ilk değerlendirmede bireysel uygulamada Görsel 3.203'te görüldüğü üzere a ile temsil edilen değişkeni 2 ile çarpılan sayı olarak tanımladığı görülmüştür. Bireysel görüşmede a ile temsil edilen değişkenin bir sayıyı temsil ettiğini bildiği ve cebirsel ifadenin sonunda bir sonuç verilmediği için bu değişkenin istediğimiz sayılar olabileceğini ifade ettiği; değişkeni genelleştirilmiş bir sayı olarak ilişkisel yorumlayabildiği kabul edilmiştir. Değişkenin belirli bir bilinmeyen olarak işlemsel ve genelleştirilmiş sayı olarak ilişkisel yorumlanması arasındaki farkı cebirsel ifadeden sonra eşit işareti ve sonuç verilmesi/verilmemesi durumuyla ilişkilendirerek kısmen de olsa açıkladığı görüldüğünden çalışmasının semiyotik-söylemsel düzlemde olduğu değerlendirilmiştir.

2 * a + 3

Ok ile gösterilen sembol neyi ifade eder? 2 ile çarpılan sayıyı ifade eder.

Görsel 3. 203. Meyra'nın ilk değerlendirme soru-4'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: Heh öyle mi yazdın? Onu görmeye çalışıyorum ben de şimdi de? Çekemedim bir tülü aşağıya sağa sola. Heeee evet. 2 ile çarpılan sayı. Hangi sayı peki orada sayı yazmıyor çünkü. Harf yazmışlar. Sayı olduğunu nasıl anladın?

Melda: İıı çünkü çarpı var. Sayılarla harfleri çarpamazsın.

Araştırmacı: Tamam. Sayılarla harfleri çarpamazsın o yüzden orası bir sayı mı olmalı?

Melda: Bence bir sayı olmalı.

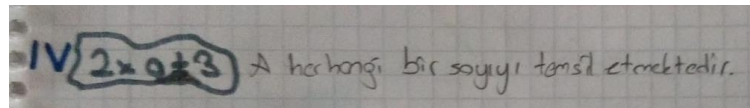
Araştırmacı: Ama onlar harf yazmışlar. Neden harf yazmışlar?

Melda: İııı bilinmeyen (gülüyor)

Araştırmacı: Heh bilinmeyen bir şey. Peki kaç mesela? Ya da mesela demeyeyim. Sence orası kaç? Bilinmeyen ya. Nasıl bileceğiz kaç olduğunu?

Melda: İııı burada sonucunda çarpı artı var ama eşittirle sonucunu göstermemiş ya da onların eşit olduğunu göstermemiş. O yüzden buraya istediğimizi yazabiliriz bence.

Harf ile temsil edilen değişkeni genelleştirilmiş bir sayı olarak yorumlamayı destekleyen soru-4'te son değerlendirmede Melda'nın a harfi ile temsil edilen değişkeni 'herhangi bir sayı' şeklinde ifade edebildiği (Görsel 3.204); değişken kavramına dair 'bilinmeyen' dışında farklı tanımlamalar da kullanabildiği görülmüştür. Bireysel görüşmede değişken kavramının genelleştirilmiş sayı (ilişkisel) ve belirli bilinmeyen (işlemsel) yorumu arasındaki farkı cebirsel ifadeden sonra sonucun verilmemesi/verilmesi ile ilişkilendirerek kısmen de olsa açıklamış olması çalışmasının semiyotik-söylemsel düzlemde olduğu şeklinde değerlendirilmiştir.



Görsel 3. 204. Melda'nın son değerlendirme soru-4'e ilişkin cevabı

Araştırmacı: a, herhangi bir sayıyı temsil etmektedir demişsin.

Melda: Evet

Araştırmacı: Hala öyle mi düşünüyorsun?

Melda: Evet. Çünkü burada bir cevap vermemiş ona. Mesela 27 verirdi atıyorum. 2'yle kaç çarparsın sonra da ona 3 ekleriz. 27 olur.

Araştırmacı: Hmmm bir sonuç olsaydı diyorsun?

Melda: Evet. Biz sonucu bulmaya çalışırdık ama. Şu anda a herşey olabilir. Çünkü sonuç vermemiş. Onu bulmaya çalışmıyoruz.

Daireyle temsil edilen değişkeni yorumlayıp sözel ve matematiksel temsille ifade etmeyi gerektiren soru-5'te ilk değerlendirmede Melda'nın bireysel görüşmede daireler ve arasındaki noktaları herhangi bir sayıyı temsilen kullanılmış bir model olarak yorumlayamadığı bunun yerine daireler arasındaki noktaların daireleri karşılaştırmak için kullanılabilecek semboller için ayrılmış alan olarak yorumladığı görülmüştür. Öğretmenin daireler ve arasına konulan noktaların miktarı bilinmeyen çokluğu temsil ettiğini açıkladığında Melda'nın buradan hareketle cebirsel yapı üzerinde başka işlemlerin gerçekleştirilebileceği nesneleştirilmiş bir yapı olarak yorumlayıp bilinmeyenin 2 eksiği şeklinde modeli ifade edebilmesi beklenirken bireysel görüşmede değişkeni ilişkisel yorumlayamadığı görülmüştür (Görsel 3.205). Daireler ve arasına konulan noktaların en fazla 100 olduğunu hayal etmesi istendiğinde ve buna bağlı olarak bu sayının 2 eksiğini ifade etmesi beklendiğinde Melda'nın bu durumu '...98' şeklinde ifade etmeye çalıştığı; daha genel bir durum olan herhangi bir sayı ve herhangi bir sayının 2 eksiğini ise sözel ve cebirsel olarak temsil edemediği görülmüştür (Görsel 3.205).

Araştırmacı: Aynen o aradaki boşluk ne anlama geliyor? Mesela birinci adımda ne olmuş?

Melda: Orada küçüktür işareti gelebilir. Çünkü birinde üç tane var birinde dört tane var. Küçüktür.

[...]

Araştırmacı: Nasıl söyleriz? Mesela birinci adımda 100'e kadar olan bütün sayılar olabilir. Ama ikinci adımda ne olabilir?

Melda: İkinci adımda 2 tanesini elerler belki 98 olur. (gülüyor)

Araştırmacı: (araştırmacı da gülüyor) peki onu nasıl anlatırsın birisine?

Melda: Eksi var... yok.... (eliyle yok işareti yapıyor sanki sağıra anlatıyormuş gibi geliyor sonra da)

Araştırmacı: (araştırmacı da gülüyor) yani Türkçe bilmeyen birisine... yani şöyle: matematik aslında evrensel bir dil biliyor musun. Hangi dilde olursa olsun. Hangi ülkede olursa olsun herkes matematikçe (gülüyor) diyeyim artık hani Türkçe gibi matematik dilinde yazdığında herkes anlayabiliyor. Çünkü öyle bir evrensel dil kullanılıyor ki bütün bilimle uğraşan insanlar aynı şeyi yazınca aynı şeyi anlıyor. Ama konuşurken maalesef öyle olmuyor. Seni sadece Türkçe bilenler anlıyor. Ben de diyorum ki yaaa sen öyle bir şey yaz ki. Seni herkes anlasın. Nasıl bir şey yazabilirsin?

Melda: (durdu)

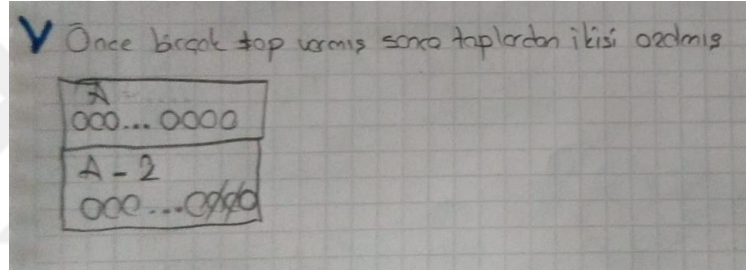
Araştırmacı: Yazamam mı diyorsun?

Melda: Eksi falan yazarız herhalde hani böyle 100 eksi, 2'sini yazmayacağım.

$$\begin{array}{r} 100 \\ : 2 \\ \hline 50 \end{array}$$

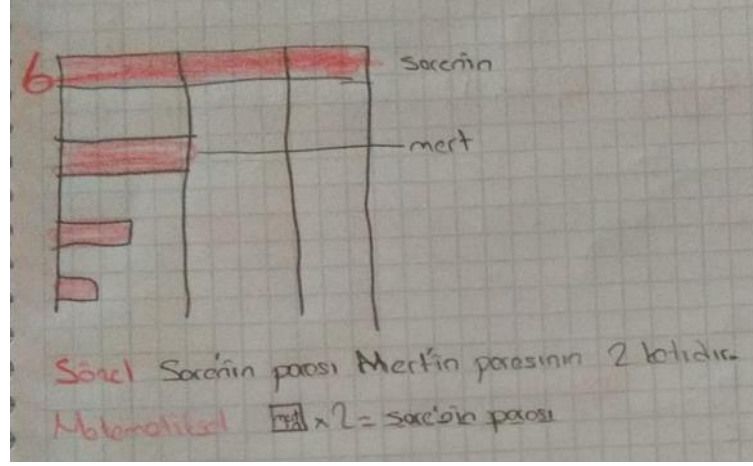
Görsel 3. 205. Melda'nın ilk değerlendirme soru-5'e ilişkin cevabı

Daire ve aralarında noktalarla temsil edilen değişkeni yorumlayıp sözel ve matematiksel temsille ifade etmeyi gerektiren soru-5'te son değerlendirmede Melda'nın değişkenin genelleştirilmiş sayı olarak ilişkisel yorumlanmasını doğru bir şekilde cebirsel ve sözel olarak temsil edebildiği; cebirsel yapı üzerinde başka işlemlerin gerçekleştirilebileceği nesneleştirilmiş yapı olarak da hem cebirsel hem de sözel olarak temsil edebildiği görülmüştür (Görsel 3. 206).



Görsel 3. 206. Melda'nın son değerlendirme soru-5'e ilişkin cevabı

Birbirine bağlı değişen nicelikleri temsil eden değişkenler modelle verildiğinde sözel ve matematiksel olarak temsil etmesini ve değişkenleri hesaplamasını gerektiren soru-6'da ilk değerlendirmede bireysel uygulamada Melda'nın birbirine bağlı değişen niceliklerin modelini, kısmen doğru bir şekilde sözel ve cebirsel ifade edebildiği görülmüştür (Görsel 3.207). 'Sare'nin parası Mert'in parasının 2 katı daha fazla' ile 'Sare'nin parası Mert'in parasının 3 katı' arasındaki ilişkiyi bilemediği bu nedenle sözel olarak yanlış ifade ettiği görülmüştür. Bireysel görüşmede öğretmen rehberliğinden sonra modeli doğru bir şekilde yorumlayarak Sare ve Mert'in paralarını doğru bir şekilde hesaplayabildiği; değişkenin birbirine bağlı değişen nicelikler olarak ilişkisel yorumunu işe koşabildiği **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiştir. Aynı zamanda Melda'nın bireysel görüşmede kullandığı teknikleri yaptığı adımları doğrulayıcı ifadelerle açıklayabildiği görüldüğünden çalışmasının **semiyotik-söylemsel** düzlemde yer aldığı düşünülmüştür.



Görsel 3. 207. Melda'nın ilk değerlendirme soru-6'ya ilişkin cevabı

Melda: Burası. İşte burası Mert'in parası olduğuna göre (Mert'in parasının ilk halini yuvarlak içine alıyor) bu aradaki boşluğu da katıyorlar (10'luk kısmı gösteriyor) o zaman ancak 60 tl oluyor. (yanlış yorumluyor modeli) ama Mert'in parası bundan daha çok. O aradaki boşluğu da altta 10 tl olarak göstermişler. 60'dan 10'u çıkartıyorum tam bu arasını buluyorum. Burası 50 oluyor. Mert'in parası olabilir.

Araştırmacı: Heee ben şimdi...

Melda: Aralarındaki para olur şu anda bakınca. Çünkü Mert'in parası o arada boşluk yok.

Araştırmacı: Bak şimdi Melda doğru anladım mı bilmiyorum. Tam olarak anlayamadım çünkü. Şurasına diyorsun 60 demişler. (bu sırada 60 yazan çubuğu mavi ile tırtıklıyorum) şurasına diyorsun 10 demişler. 60'la 10'u çıkarttım diyorsun 50 bulurum diyorsun. O 50'yi de burasını mı gösterdin 50'yi? (mavi yuvarlak içine aldığım kısmı gösteriyorum)

Melda: Evet 50 de orası olur.

Araştırmacı: Tamam diyelim ki burası 50 oldu. Burası 50'ye eğer Mert'in parası 50 midir diyorsun? (ekranda çiziyor daha iyi görsün diye)

Melda: Yok yaptıktan sonra fark ettim. Mert'in parası orada olmadığı için aralarındaki para farkı 50'dir.

Araştırmacı: Kiminle kimin aralarındaki para farkı?

Melda: Sare'yle Mert'in paralarının arasındaki fark 50'dir. Sare'nin 50 tl Mert'ten fazlası vardır.

[...]

Melda: 50 bölü 2, bir dakika yaaa ne yapacağımı karıştırdım. 25 değil mi yaaa burası?

Araştırmacı: 50'yi 2'ye bölersek mi?

Melda: Bakayım. 25'miş doğru tahmin etmişim. İn bunlar... bu paralardan biri 25'miş. Önce bir söyleyim (ekranı siliyor) şimdi burası 25'miş. Sadece burası. Diğerine de taşmış. Orası 25'se, 25 artı 25 artı 25 yaparız Sare'nin parasını buluruz. Sadece 25 de Mert'in parası kalır. Ondan çıkartırız işte Mert'in parasını, Sare'nin parasından. Aradaki farkı buluruz.

Araştırmacı: Mmm şimdi Sare'nin kaç parası oldu şu anda Melda?

Melda: Sare'nin parası o zaman (işlem yapıyor defterine) Sare'nin 75 tl'si olur o zaman. 75'ten de Mert'in parası 25'tir. 25'i çıkartırız 50 kalır. Aradaki farka bakarak 50'ymiş.

Birbirine bağlı değişen nicelikleri temsil eden değişkenler modelle verildiğinde sözel ve matematiksel olarak temsil etmesini ve değişkenleri hesaplamasını gerektiren soru-6'da son değerlendirmede Melda'nın değişken modelini (aşağıdan yukarıya doğru) doğru bir şekilde yorumlayarak Görsel 3.208'de görüldüğü üzere Sare ve Mert'in paralarını hesaplayabildiğinden değişkenin ilişkisel yorumlanmasını işe koşabildiği **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü değerlendirilmiştir. Aynı zamanda kullandığı teknikleri doğrulayıcı açıklamalarla ifade edebildiğinden çalışmasının **semiyotik-söylemsel** düzlemde yer aldığı düşünülmüştür. Adım adım öğretmen rehberliği ile birbirine bağlı değişen nicelikleri temsilen harfleri kullanarak, modelle ifade edilen durumu cebirsel olarak kısmen doğru temsil edebildiği görülmüştür (Görsel 3.209).

VI Soru: Sare'nin parası ile Mert'in parası eşittir.
MAT: $60 - 10 = 50$; $50 : 2 = 25$; $25 \times 3 = 75$; $75 - 25 = 50$
Mert'in parası Sare'nin parası Aradaki fark

Görsel 3. 208. Melda'nın son değerlendirme soru-6'ya ilişkin cevabı

Melda: Orada Sare'nin parası diyor. Çok parası var. Oradaki kahverengilik de ondan önceki pardon siyahlık da onun altında kısa olan. Onların ilk paraları diye düşündüm ben. Onların oradaki çizgiler var ona baktım. 10 tl'ymiş o arasındaki boşluk. Orada bir de kocaman bir çizgi çekmişler. O da 60 tl'ymiş. O zaman o iki tane çizginin arasını bulmak için 60'tan 10'u çıkartırız 50 kalır.

[...]

Araştırmacı: Bu iki çizginin arasını 50 buldun. Sonra nasıl yaptın?

Melda: Sonra o iki çizginin arasını 50 bulunca yukarıda da onun iki tane vardı. 50'yi ikiye böldüm ki bir tane kutucuğun şeyini bulalım. Ne kadar tl olduğunu bulalım. 25 çıktı.

Araştırmacı: Sen şu anda 25'le nereyi buldun? Onu da gösterebilirsin bir daha.

Melda: Şurada.. 25 şu anda sadece bir tanesi..

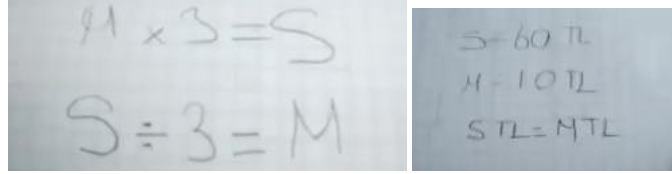
Araştırmacı: Hmmm anladım. Sonra? 25'i buldun.

Melda: 25'i buldum. Sare'nin de bu 25 tl'den Sare'nin bu 25 tl'den 3'er tane varmış. O zaman 25 çarpı 3 yaptım. 75 tl. Sare'nin bütün parası. Yani şurası oluyor (ekranda onu da

doğru gösterdi) Sonra Mert'in parası demiş: ben 75'ten 25'i çıkardım. Neden böyle yaptım şu anda hiçbir fikrim yok.

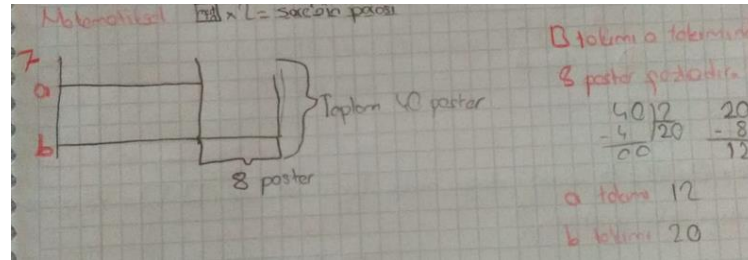
Araştırmacı: (gülüyoruz) Ben de onu soracaktım sana. Neden çıkardın diyecektim tam.

Melda: 25 bir tanesiye demek ki Mert'in parası 25'miş. Sare'nin parası da 75'miş.


$$11 \times 3 = S$$
$$S \div 3 = M$$
$$S = 60 \text{ TL}$$
$$M = 10 \text{ TL}$$
$$S \text{ TL} = M \text{ TL}$$

Görsel 3. 209. Melda'nın son değerlendirme soru-6'ya ilişkin öğretmen rehberliğinden sonra cevabı

Birbirine bağlı değişen niceliklerin çubuk modeli ile temsil edildiği problemi çözmesini gerektiren soru-7'de ilk değerlendirmede B takımı A takımından 8 poster daha fazla diyerek modeli kısmen doğru yorumlasa da A ve B takımlarına düşen poster sayılarını doğru bir şekilde belirleyemediği; A ve B takımlarının poster sayıları arasındaki farkı 8 olacak şekilde belirlediği ama toplamlarının 40 olması şartını sağlayamadığı görülmüştür (Görsel 3.210). Öğretmen ile yapılan bireysel görüşmelerde yaptığı hatayı fark ettiği ancak bu sefer de toplamı 40 olacak şekilde sayılar belirlerken A ve B takımları arasındaki farkın 8 olması şartını sağlayamadığı görülmüştür.



Melanahızal $11 \times 3 = S$ Sare'nin parası

7

a

b

8 poster

Toplam 40 poster

B takımı a takımından 8 poster fazladır.

$$\begin{array}{r} 40 \\ - 8 \\ \hline 32 \\ \div 2 \\ \hline 16 \end{array}$$

a takımı 12

b takımı 20

Görsel 3. 210. Melda'nın ilk değerlendirme soru-7'ye ilişkin cevabı

Araştırmacı: Normalde eskiden yaptığında 40'ı 2'ye bölmüşün 20. 20'den 8'i çıkarmışsın 12. A takımına 12 demişsin b takımına 20 demişsin. Şimdi de hala öyle mi düşünüyorsun ya da neden öyle düşünüyorsun?

Melda: Öyle düşünmüyorum çünkü uygun koşulları sağlamıyor.

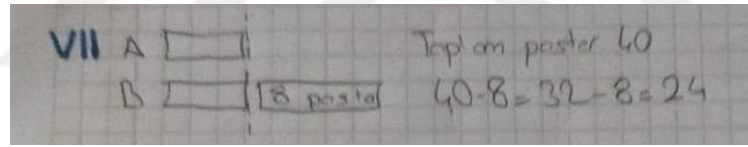
Araştırmacı: Neden?

Melda: Toplam 40 poster olmuyor. 32 poster oluyor.

Araştırmacı: Hmmm anladım.

Melda: Madem A takımı B takımından 8 poster daha az; B takımı da A takımından 8 poster daha fazlaysa o zaman 20'yle 8'i toplarız 28. 20'den de 8'i çıkartırız çünkü ikisini ayırdığımızda 20 ediyor. 12. 12'yle de 28'i toplarız. 40.

Birbirine bağlı değişen niceliklerin çubuk modeli ile temsil edildiği problemi çözmesini gerektiren soru-7'de son değerlendirme bireysel uygulamada Görsel 3.211'de görüldüğü üzere Melda'nın birbirine bağlı değişen nicelikleri temsilen kullanılan çubuk modellerini doğru bir şekilde yorumlayıp problemin çözümünde işe koşabildiğinden değişkenin ilişkisel yorumunun aktif olduğu **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiştir. Aynı zamanda bireysel görüşmede kullandığı teknikleri doğrulayıcı ifadelerle açıklayabildiği görüldüğünden çalışmasının **semiyotik-söylemsel** düzlemde olduğu düşünülmüştür. Değişken kavramının herhangi bir sayı anlamındaki ilişkisel yorumunu soru işareti ile temsil edebildiği; herhangi bir sayıyı cebirsel bir yapı olarak yorumlayıp işlem yapabildiği görüldüğünden değişken kavramının ilişkisel yorumlanmasını anlamlı bir şekilde kullanabildiği görülmüştür.



Görsel 3. 211. Melda'nın son değerlendirme soru-7'ye ilişkin cevabı

Araştırmacı: Heee. Peki o zaman şekil üzerinden konuşalım mı Melda? Mesela şekle bakalım bakalım. A takımı ne kadar sence? B takımı ne kadar? Karşılaştırarak söylersen nasıl söylersin?

Melda: A takımını da bilmiyoruz, b takımını da bilmiyoruz ama B takımı A takımından 8 poster daha fazla.

Araştırmacı: Hmmm peki bu söylediğin ifadeyi kullanarak aslında çözebiliriz mi? Mesela bilmiyoruz. Bilmiyoruz diyorsun ama sonra şöyle bir karşılaştırma yapıyorsun. B takımı A takımından 8 fazla diyorsun. Bilmediğin şeyler için ne yapıyorduk biz? Miktarını bilmediğimiz şeyler için?

Melda: Soru işareti kullanıyorduk.

Araştırmacı: Soru işareti kullanıyorduk. Mesela A takımı soru işareti olsun mu?

Melda: Olsun.

Araştırmacı: Tamam. Üstüne.. ekranın üstüne de yazabilirsin istersen..

Melda: Ben kağıda yazayım.

Araştırmacı: Tamam. Nasıl rahat ediyorsan. A takımına soru işareti diyorsan B takımı ne olur o zaman?

Melda: B takımına da üçgen diyelim.

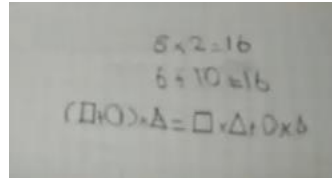
Araştırmacı: Peki ikisine de farklı farklı şekil vermesek de sen söylerken şöyle söyledin ya, B takımı, A takımından 8 fazla dedin ya ondan yararlanarak B'ye başka bir şey yapsak olur mu? A'ya benzeyen bir şey yapsak..

Melda: B artı 8, pardon A artı 8 gibi mi?

Araştırmacı: Mesela A artı 8 diyebilirsin ama sen A'ya soru işareti dedin.

Melda: O zaman soru işareti artı 8.

Çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliğinde, farklı şekillerle temsil edilen genelleştirilmiş sayı olarak değişken kavramını hissedebilmeyi gerektiren soru-10'da ilk değerlendirmede Melda'nın bireysel uygulamada soruyu anlayamadığını ifade ederek boş bıraktığı görülmüştür. Öğretmen rehberliğinden sonra şekille temsil edilen genelleştirilmiş sayılara herhangi bir sayı verebildiği ancak işlem önceliğinde yaptığı hatadan dolayı eşit işaretinin solu ve sağındaki sonuçların aynı olduğunu fark edemediği; işlem önceliği konusunda eksikliğin giderilmesinden sonra sonuçların aynı olduğunu belirleyebildiği görülmüştür (Görsel 3.212).


$$\begin{aligned} 8 \times 2 &= 16 \\ 6 + 10 &= 16 \\ (8 + 10) \times 2 &= 8 \times 2 + 10 \times 2 \end{aligned}$$

Görsel 3. 212. Melda'nın ilk değerlendirme soru-10'a ilişkin öğretmen rehberliğinden sonra cevabı

Çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliğinde, farklı şekillerle temsil edilen genelleştirilmiş sayı olarak değişken kavramını hissedebilmeyi gerektiren soru-10'da son değerlendirmede Melda'nın genelleştirilmiş sayıyı temsilen kullandığı şekillerin yerine herhangi bir sayı verebileceğinin farkında olduğu; şekillerin yerine istediği sayıları verip işlem önceliğine de dikkat ederek yaptığı işlemlerin sonuçlarını karşılaştırarak eşitliği belirleyebildiği görülmüştür (Görsel 3.213). Değişkenin genelleştirilmiş sayı olarak ilişkisel yorumunu işe koşarak soruyu çözebildiğinden **enstrümantal oluşumun** bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü değerlendirilmiştir. Aynı zamanda bireysel görüşmede yaptığı adımları doğrulayıcı

ifadelerle açıklayabildiğinden çalışmasının semiyotik-söylemsel düzlemde olduğu düşünülmüştür. Değişkeni temsilen kullanılan şekiller yerine herhangi bir sayı vermesi durumunda eşitliğin bozulmayacağını genellemesini yaparken sınırlı sayıda denemenin bu genellemeyi yapabilmek için yeterli olduğunu düşündüğü görülmüştür.

Handwritten mathematical work on grid paper showing two distributive property examples. The first example is $(5+3) \times 2 = 5 \times 2 + 3 \times 2$, with 16 and 16 written below the results. The second example is $(5-3) \times 2 = 5 \times 2 - 3 \times 2$, with 4 and 4 written below the results. Both examples are marked with a large blue checkmark.

Görsel 3. 213. Melda'nın son değerlendirme soru-10'a ilişkin cevabı

Araştırmacı: Mesela sen şimdi beş, üç ve iki verince 16 çıktı ya iki tarafı da Melda. O sayıları bilerek mi verdin? Kasıtlı seçtiğin sayılar mıydı?

Melda: (kafasını hayır anlamında sallıyor) Aklıma ilk gelenleri yazdım.

Araştırmacı: Peki mesela başka birisi başka sayılar verse gene onlarda da doğru olacak mı?

Melda: Olacak.

Araştırmacı: Nereden biliyoruz onların doğru çıkacağını?

Melda: Eee bir tane işlem yaptık yetmez mi?

Araştırmacı: Heh ben de onu diyecektim. Mesela sen bir tane işlem yaptın. Baktın doğru çıkıyor. 5,3 ve 2 için. Şöyle diyebilir miyiz? Melda 5, 3 ve 2'yi verdi. Doğru çıktı. Bundan sonra vereceğimiz her sayıda doğru çıkar. Diyebilir miyiz mesela?

Melda: Bence böyle bir işlem için diyebiliriz. Birkaç tane yaparız hani. Ya da bununla yeter bence.

4. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu bölümde çalışmadan elde edilen sonuçlar paylaşılacak daha sonra alan yazına dayalı olarak elde edilen bulgular tartışılacak ve son olarak önerilere yer verilecektir.

4.1.Sonuç

4.1.1. Eşit işarete ilişkin sonuçlar

Öğrencilerin eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerine ilişkin farkındalıkları artmıştır.

Öğretimden önce yapılan ilk değerlendirmede öğrencilerin eşit işaretini anlamlandırmaları beklendiğinde bireysel uygulamada kesin işlemsel yorumlamayı kullandıkları görülürken, öğretmen rehberliği ve grup tartışmalarından sonra kullandıkları farklı yorumlama biçimlerine yer vermelerinin arttığı görülmüştür. Esnek işlemsel, temel ilişkisel, karşılaştırmalı ilişkisel ve ayırıcı yorumlamaları da açıklamalarına dâhil ettikleri görülmüştür. Öğretim boyunca yapılan etkinlik ve alıştırmalardan sonra son değerlendirmede öğrencilerden üçünün bireysel uygulamalarda eşit işaretinin anlamını açıklarken kesin işlemsel, esnek işlemsel, temel ilişkisel, karşılaştırmalı ilişkisel, ayırıcı yorumlamaları da kullandıkları görülürken sadece bir öğrencinin (Nazlı) bireysel uygulamada öğretimden önce yaptığı gibi sadece kesin işlemsel yorumlamayı kullandığı görülmüştür.

Öğrencilerin eşit işaretinin yokluğunda gözünde canlandırdığı süreci tanımlayan semiyotik oluşumun bileşenlerine dair göstergelerinde eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerine ilişkin çeşitlilik artmıştır.

Öğretimden önce yapılan değerlendirmenin bireysel görüşmelerinde öğrencilere eşit işareti dendiğinde gözünde ne canlandığı sorulduğunda iki öğrencinin anlamından uzak sadece şekil olarak iki çizgi olan eşit işaretinin kendisinin gözünün önünde canlandığını belirttiği görülürken, diğer iki öğrencinin de kesin işlemsel yorumlamayı destekleyen: işlem yapıp sonucun yazıldığı örnekleri gözlerinde canlandırabildikleri görülmüştür. Öğretim sürecinden sonra yapılan son değerlendirmenin bireysel görüşmelerinde eşit işareti denildiğinde tüm öğrencilerin gözünde terazi modelinin canlandığı; terazinin dengede, aynı hizada durduğu temel ilişkisel yorumlamaları kullanabilecekleri örnek durumları hayal ettikleri görülmüştür. Sadece bir öğrencinin

(Ataberk) eşit ve aynı kavramlarını eşanlamlı kullanarak eşit işareti dair hatalı bir imaj oluşturduğu: ‘mavi topla mavi top, kırmızı topla kırmızı top: şekilleri renkleri, büyüklükleri aynı yani eşit’ diyerek ve aynı büyüklük ve kalınlıkta iki sütunu sütun grafiğinde göstererek eşit işareti dair hatalı bir imajının olduğu görülmüştür.

Eşdeğer denklemlerde işareti anlamlandırmayı destekleyen soruda karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamanın ve terazi modelinin problemin çözümünde işe koşulduğu enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler tüm öğrencilerde görülmüştür.

Öğretimden önce yapılan ilk değerlendirmede Nazlı ve Melda dışındaki öğrencilerde karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamanın işe koşulduğu enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler görülürken öğretim sürecinin sonunda yapılan son değerlendirmede tüm öğrencilerin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı işe koşabildikleri enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiştir. İlk değerlendirmede öğrencilerin teknolojik bir araç olarak ele alınan terazi modelini işe koştuklarına dair bir veri elde edilmezken öğretimden sonra yapılan son değerlendirmede dört öğrencinin de terazi modelini problemin çözümünde işe koşabildikleri enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler görülmüştür.

Eşdeğer denklemlerde işareti anlamlandırmayı destekleyen soruda öğrenciler problem çözümünde işe koştukları araçlara (semiyotik araç: eşit işareti ya da teknolojik araç: terazi modeli) ve bu araçları kullanırken yaptıkları açıklamalara göre farklılaşmıştır.

Öğretimden önce yapılan ilk değerlendirmede tüm öğrencilerin eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerini işe koştukları ve bu yorumlama biçimlerini kullanarak bazen doğrulayıcı açıklayıcı ifadeler yer verirken bazen de doğrulayıcı açıklayıcı ifadeler yer vermeksizin sadece yaptıkları adımları söyledikleri görülmüştür. Nazlı ve Melda’nın temel ilişkisel yorumlamayı kullanarak doğrulayıcı açıklamalar gerekçelendirmeler yapabildiklerinden temel ilişkisel yorumlamanın aktif olduğu semiyotik-söylemsel düzlemde yer aldıkları görülürken; Kayra’nın da temel ilişkisel ve öğretmen rehberliğinden sonra karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı işe koşabildiği ancak açıklayıcı doğrulayıcı bir ifade içermeyen semiyotik-enstrümantal düzlemin bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü değerlendirilmiştir. Bununla beraber

Ataberk'in ise karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı problemin çözümünde işe koşup açıklayabildiği, doğrulayabildiği görüldüğünden çalışmasının karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamanın aktif olduğu semiyotik-söylemsel düzlemde yer aldığına ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiştir.

Öğretimden sonra yapılan son değerlendirmede Kayra ve Melda'nın teknolojik bir araç olarak ele alınan terazi modelini işe koşarak terazinin özelliklerinden fonksiyonlarından yola çıkarak yaptığı adımları açıklayıp gerekçelendirebildiklerinden enstrümantal-söylemsel düzlemde yer aldıkları görülürken; Ataberk'in eşit işaretinin temel ilişkisel ve karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanması özelliklerini işe koşarak açıklama-gerekçelendirme yapabildiğine dair göstergelerden hareketle semiyotik-söylemsel düzlemde yer aldığı değerlendirilmiştir. Nazlı'nın ise sorularda teraziye gözünde canlandırabildiğine dair göstergelerden hareketle semiyotik oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü ancak problem çözümünde eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanmasını işe koşarak doğrulayıcı bir açıklama yapmadığından semiyotik-enstrümantal düzlemde yer aldığı değerlendirilmiştir.

Doğru verilen denklemde eşitliği bozmayacak şekilde yapılan adımları yorumlama ve sonrasında bu adımları farklı durumlarda uygulamayı gerektiren soruda tüm öğrencilerin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanarak problemin çözümünde işe koşabildikleri enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler görülmüştür. Problem çözümünde yapılan adımları doğrulama, açıklamada, gerekçelendirmede ilk ve son değerlendirmede farklılaşmaların olduğu görülmüştür.

Öğretimden önce yapılan ilk değerlendirmede tüm öğrencilerin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı problemin çözümünde işe koşabildiklerinden karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamanın kullanıldığı enstrümantal oluşumun bileşenlerinin göstergelerinin görüldüğü şeklinde yorumlanmıştır. Ancak yaptığı adımları açıklamaları, doğrulayıcı gerekçelendirmeler sunmaları istendiğinde temel ilişkisel yorumlamayı işe koştuklarından temel ilişkisel yorumlamanın aktif olduğu semiyotik-söylemsel düzlemin bileşenlerine ilişkin göstergeler görülmüştür. Kayra ve Melda öğretmen rehberliğinden sonra karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanarak doğrulama açıklama yapabildiğinden karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullandıkları çalışmalarda semiyotik-söylemsel düzlemde yer alabildikleri kabul edilmiştir. Nazlı

karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanarak açıklama doğrulama yapamadığından karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullandığı çalışmalarda semiyotik-enstrümantal düzlemde yer almıştır. Ataberk'in de Nazlı gibi karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanarak doğrulayıcı açıklayıcı ifadelerle yer vermediği ama Ataberk'in 'birinden alıp birine veriyor' gibi ifadeler kullandığı ama az konuşan bir öğrenci olduğu için açıklayıcı ifadelerle yer vermediği düşünülmüştür.

Öğretimden sonra yapılan son değerlendirmede ise tüm öğrenciler karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı öğretmen rehberliği olmadan problemin çözümünde işe koşabildiğinden karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamada enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiştir. Tüm öğrenciler yaptıkları adımların doğruluğunu karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanarak açıklayabildiklerinden semiyotik-söylemsel düzlemde yer alabildikleri değerlendirilmiştir. Kayra ve Melda aynı zamanda terazi modelini de işe koşmaya çalıştıklarından teknolojik bir araç olan terazi modelinin de bir enstrüman olarak kullanıldığına dair gösterge olarak yorumlanmıştır. Bununla beraber Melda doğrulayıcı-açıklayıcı ifadelerine terazi modelinde de yer verdiğinden enstrümantal-söylemsel düzlemde de yer aldığı kabul edilmiştir. Karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanarak toplanan iki sayıdan birinden çıkardığımızı diğer sayıya eklediğimizde toplamın değişmeyeceğini genelleyebilen üç öğrenci (Kayra, Ataberk ve Melda) olmuştur. Kayra ve Ataberk bu genellemeyi eklenen ve çıkarılan sayının farklı olması durumunda sonucun değişeceğini örnek durumlardan yola çıkarak ifade ederken; Melda da eklenen ve çıkarılan sayıların aynı olması durumunda sayıların değişmeyeceğini öğretmenin daha önceden söylediği ifadesini referans göstererek açıklamıştır. Nazlı ise karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı tam olarak genelleyememiş ve öğretmenin sorduğu eklenen ve çıkarılan sayıların farklı olması durumunda temel ilişkisel yorumlamayı kullanarak doğruluğunu kontrol etme ihtiyacı hissettiği görülmüştür.

a=a formundaki soruda a'nın bir sayı olması durumunda tüm öğrencilerin esnek işlemsel yorumlamayı anlamlı bir şekilde açıklayabildikleri ancak a'nın bir harf, şekil gibi bir değişken olması durumunda gözünde canlandırdıklarını ifade ettikleri semiyotik oluşumun bileşenlerinde farklılaşmalar görülmüştür.

a=a formunda verilen sorularda a'nın sayı olması durumunda ilk değerlendirmede Nazlı dışındaki üç öğrenci de iki sayının eşit olmasını 'aynı' kavramı ile destekleyerek

açıklamışken Kayra, a sayısını iki sayının toplamının sonucu olacak şekilde yorumlayarak $a=a$ ifadesinde sonuçların eşit olduğunu belirtmiş ve temel ilişkisel yorumlamayla desteklemiştir. Son değerlendirmede ise Kayra dışındaki üç öğrencide esnek işlemsel yorumlamanın aktif olduğu, terazi modelinin gözünde canlandırıldığı semiyotik oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiştir. ' $a=a$ ' ifadesindeki a 'ların şekil, harf ile temsil edilen birer değişken olması durumunda ilk değerlendirmede Nazlı dışındaki öğrenciler bu şekillerin birer sayıyı temsil edebileceğinin farkındayken Nazlı karelerin köşe sayısı, kenar sayısı, ağırlığı gibi özellikleri bakımından aynı olduğunu düşünmüş; kısmen bir sayı olarak değerlendirse de şekille ilişkili bir sayı olarak yorumlamıştır. Son değerlendirmede ise Ataberk, $kare=kare$ ifadesinde kareleri alışverişte takas yapılabilecek aynı nitelikteki iki nesne olarak yorumlarken; Nazlı ve Melda kareleri içinde sayıların olduğu kutular olarak yorumlamıştır. İlk değerlendirmede 'aynı' kavramına eşitlik kavramını destekleyecek şekilde yer vermeyen Nazlı da dahil olmak üzere tüm öğrencilerin son değerlendirmede yer verdikleri görülmüştür.

Eşitliği bozmayan işlemleri fark edip denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirlemeyi gerektiren soruda ($a=a$, $a+0=a+0$, $a+b=a+b$, $a-b=a-b$) öğrencilerin dördü de eşit işaretinin esnek işlemsel, temel ilişkisel, karşılaştırmalı ilişkisel yorumlama biçimlerini problemin çözümünde işe koşabilmişler ve yaptıkları adımları doğrulayıcı açıklamalarla destekleyebilmişlerdir. Doğrulayıcı açıklamalar sunarken hikâyeleştirme ve terazi modelini işe koşmada gelişmişler ve aynı zamanda faklılaşmışlardır.

Öğrencilerin hepsi ilk ve son değerlendirmede temel ilişkisel ve karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı problemin çözümünde işe koşabildiklerinden bu yorumlama biçimlerinde enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiştir. Yine hem ilk hem son değerlendirmede yaptıkları adımları doğrulayacak açıklamalar sunmaları istendiğinde yine temel ilişkisel ve karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanabildiklerinden bu yorumlama biçimlerinde semiyotik-söylemsel düzlemde yer aldıklarına dair göstergeler görülmüştür. Son değerlendirmede esnek işlemsel yorumlamayı kullandıkları durumlarda tüm öğrenciler terazi modelini işe koşabilmiş ve bir hikâye bağlamında ele alabildiklerinden esnek işlemsel yorumlamaya ilişkin imajlarının zenginleştiği görülmüştür. Karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamada da

bazı öğrenciler (Kayra) terazi modelini işe koşarken; bazı öğrencilerin hikâyeleştirmeyi (Kayra, Ataberk) kullandıklarından karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamaya ilişkin imajlarının da zenginleştiği görülmüştür. Nazlı diğer arkadaşlarından farklı olarak doğrulayıcı açıklamalar yaparken kendisi de farklı sorular üretme, sorgulama konusunda gelişim göstermiştir.

Eşitliği bozmayan işlemleri farkedip denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirlemeyi gerektiren soruda (standart eşitlik ifadesinden başlayarak $a=a$ 'yı elde edinceye kadar giden adımları içeren süreç) dört öğrencide de kesin işlemsel, esnek işlemsel ve temel ilişkisel yorumlamayı işe koşabildikleri enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiştir. Ancak karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı işe koşarken, hikayeleştirmede ve farklı yorumlama biçimlerinin kullanımını gerektiren sorularda terazinin etkin bir enstrüman olarak işe koşulmasında farklılaşmalar görülmüştür.

Öğretimden önce yapılan ilk değerlendirmede Ataberk dışındaki öğrencilerin bu soruda karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı işe koşamadıkları; Kayra'nın öğretmen rehberliğinden sonra işe koşabildiği, Melda'nın karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamanın bu soruda kullanılamayacağını düşündüğü; Nazlı'nın da karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı işe koşabilmesi adına yapılan rehberliğe rağmen temel ilişkisel yorumlamayı kullandığı görülmüştür. Öğrencilerin kullandıkları farklı yorumlama biçimlerinde doğrulayıcı açıklamalar ifade edebildikleri görüldüğünden semiyotik-söylemsel düzlemin göstergeleri görülürken; karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanarak doğrulayıcı ifadelerle ilişkin göstergeler sadece Ataberk'te görülmüştür. Aritmetik bir ifadenin doğruluğunu açıklamaları istendiğinde Ataberk'in bir bağlam içinde işlemi hikâyeleştirerek doğrulayıcı ifadeler kullandığı görülürken; Kayra'nın hikâyeleştirmede eşitliğin solu ve sağını birbirinden bağımsız hikâyeler olarak sunduğu ve eşitliği hikâyenin içinde anlamlı bir şekilde veremediği görülmüştür. Nazlı'nın ise aritmetik bir işlemde sayıları farklı nesnelerle ilişkilendirerek hikâyeye katmaya çalıştığı ve anlamlı bir bağlam içinde hikâyeyi veremediği görülmüştür.

Öğretimden sonra yapılan son değerlendirmede aritmetik verilen bir işlemi herhangi bir bağlamda hikâyeleştirmesi istendiğinde ardışık işlemler içeren aritmetik işlemlerde Kayra ve Nazlı'nın her bir işlemi yapıp sonuçları da hikâyeleştirdiği, bağlamla uyumlu olmayan hikâyeler kurmaya çalıştığı görülürken; Nazlı'nın öğretmen

rehberliğinden sonra karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamada ya da istenmediği halde farklı yorumlama biçimlerinde hikâyeleştirerek doğrulayıcı açıklamalar yapmayı tercih ettiği görülmüştür. Ataberk'in aritmetik bir ifadenin doğruluğunu açıklaması istendiğinde hikâyeleştirme yoluna başvurduğu ve bağlamla uyumlu anlamlı hikâyeler kurgulayabildiği görülmüştür.

Son değerlendirmede öğrencilerin kesin işlemsel, esnek işlemsel, temel ilişkisel ve karşılaştırmalı ilişkisel yorumlama biçimlerini kullanarak açıkladıkları aritmetik ifadeleri terazi modelini bir enstrüman olarak kullanabilmeleri boyutunda farklılaştıkları görülmüştür. Kayra dört yorumlama biçiminde, yorumlamayı kullandığı aritmetik ifadeleri terazi modelinde kefelere doğru bir şekilde yerleştirerek terazi aracını etkin bir enstrüman olarak kullanabilirken; Nazlı'nın $a+b=c$ formunda verilen basit aritmetik ifadelerde a ve b'yi terazinin farklı kefelere yerleştirdiği bu nedenle bu formda yazılan aritmetik ifadelerde terazi modelini etkin bir enstrüman olarak kullanamadığı görülmüştür. Bununla beraber $6=6$ gibi esnek işlemsel yorumlamanın kullanıldığı aritmetik ifadelerde terazi modelini anlamlı bir enstrüman olarak kullanabilirken; $6+2=6+2$ formunda verilen aritmetik ifadeleri $6=6$ ve $2=2$ olacak şekilde iki ayrı terazide modelleyip bu teraziler arasında toplama işlemi yaptığı görülmüştür. Öğretmen rehberliğinden sonra eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerinde terazi modelini bir enstrümana dönüştürebildiği görülmüştür. Melda'nın ise esnek işlemsel ve karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamaları kullandığı aritmetik ifadelerde terazi modelini etkin bir enstrümana dönüştürdüğü görülmüştür.

Eşitliği bozmayacak şekilde farklı tiplerde denklemlerde, yapılan adımlardan sonra denklemin doğru ya da yanlış olduğunu belirlemeyi gerektiren soruda karşılaştırmalı ilişkisel yorumlama ve terazi modelini etkin bir enstrüman olarak işe koşabilmede farklılaşmalar görülmüştür. Ataberk dışındaki öğrencilerin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı etkin bir enstrüman olarak işe koşamadığı; Melda'nın ise terazi modelini etkin bir enstrüman olarak işe koşabildiği görülmüştür.

Öğretimden önce yapılan ilk değerlendirmede Ataberk dışındaki tüm öğrencilerin temel ilişkisel yorumlamayı kullanmayı tercih ettikleri; doğrulayıcı açıklamaları temel ilişkisel yorumlamayla yaptıklarından bu yorumlamayı kullandıkları çalışmalarda semiyotik-söylemsel düzlemin bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü; öğretmen

rehberliği ve derinlemesine sorulara rağmen karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı anlamlandırmakta zorlandıkları; karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı anlamayı kolaylaştıracak hikayeleştirmeyi yaparken temel ilişkisel yorumlamayı işe koştuklarından işlem yapıp sonuē bulmaya ve sonucu da hikayeye dâhil etmeye çalıştıkları görülmüştür. Ataberk'in ise ilk ve son değerlendirmede ğretmen rehberliğine, yönlendirmesine ihtiyaē duymadan karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı etkin bir enstrüman olarak kullanabildiği görülmüştür. Doğerulayıcı açıklamalarını karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayla yapabildiğinden karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı işe koştuğu çalışmalarında semiyotik-söylemsel düzlemin bileşenlerine ilişkin göstergelerin grldğu kaydedilmiştir. Melda'nın diğer öğrencilerden farklılaştığı bir diğer nokta ise karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı anlamlandırmada terazi modelini etkin bir enstrüman olarak işe koşabilmiş ve tamamlanmış bütüncül bir çalışma sergilemiş olmasıdır. Melda'nın eşitliğin solu ve sağında yazan ifadeleri terazi modelinde uygun şekilde, toplarla modelleyebildiği: enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler ve toplanan iki sayıdan birinden çıkarılan diğerine eklendiğinde eşitliğin bozulmayacağını terazi modelinin özelliklerini kullanarak doğerulayıcı açıklamalarla ifade edebildiği: söylemsel oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler ve terazi modelini gözünde uygun bir şekilde canlandırabildiği: semiyotik oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerin grldğu kabul edilmiştir.

Eşitliği sağlayan eksik değer bulmayı gerektiren soruda ($a+b=kutu+c$) eşit işaretinden hemen sonra verilen eksik değer hesaplarken öğrencilerin eşit işaretinin temel ilişkisel ve karşılaştırmalı ilişkisel yorumlama biēimlerini etkin bir araē olarak kullanabilmelerinde farklılıklar görülmüştür.

Kayra dışındaki  öğrencinin de eşit işaretinden hemen sonra verilen eksik değer hesaplarken temel ilişkisel yorumlama biēimini etkin bir enstrüman olarak kullanabildiği enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler görülürken; Kayra'nın eşit işaretinin kesin işlemsel yorumlanmasını işe koştuğu ve eşit işaretinden hemen sonra sonucun yazılması gerektiğini; sonrasında devam eden işlemi yapıp son sonucun elde edileceğini ifade ettiği görülmüştür. Eşitlik kavramına dair sahip olduğu 'sonuē' 'son sonuē' gibi farklılaştırdığı iki kavramdan hareketle eşit işaretinin farklı yorumlama biēimlerini etkin bir şekilde işe koşamadığı değerlendirilmiştir. Kayra'nın aynı zamanda eşittir ortada olduğuunda temel ilişkisel yorumlamanın, eşittir sonda

olduğunda kesin işlemsel yorumlamanın kullanılması gerektiğini ve bu farklı kullanım biçimlerinin birbirini desteklemesine gerek olmadığını düşündüğü görülmüştür. Kayra dışındaki üç öğrencinin de karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı problemin çözümünde işe koşabildikleri ancak bu yorumlama biçimini kullanarak doğrulayıcı açıklamalar yapamadıkları görüldüğünden karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamanın işe koşulduğu durumda semiyotik-enstrümantal düzlemde yer aldıklarına ilişkin göstergeler görülmüştür. Melda ve Nazlı'nın terazi modelini işe koşarak eksik değeri hesapladığı: enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler görülürken; doğrulayıcı açıklamaları da yine terazi modelinin özelliklerinden yola çıkarak yaptıkları: söylemsel oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü; işlemlerin terazi modelinde uygun bir şekilde yerleştirildiğine ilişkin gözünde canlandırdıkları: semiyotik oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler görüldüğünden tamamlanmış-bütüncül bir çalışma gerçekleştirdikleri görülmüştür.

Farklı tiplerde denklemlerde ‘...’ ile temsil edilen eksik değeri bulmayı gerektiren soruda temel ilişkisel yorumlamayı etkin bir enstrüman olarak kullanabilen öğrenciler karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı bir algoritma olarak kullanabilmiştir.

Temel ilişkisel yorumlamayı dört öğrencinin de etkin bir enstrüman olarak kullanabildiği ve süreçte yaptığı adımları doğrulayıcı açıklamalarla açıklayabildiği: semiyotik-söylemsel düzlemin bileşenlerine ilişkin göstergeler görülürken karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı dört öğrencinin de bir algoritma gibi sorunun çözümünde işe koşabildiği ancak doğrulayıcı açıklamalarla ifade edemediğinden: semiyotik-enstrümantal düzlemin bileşenlerine ilişkin göstergeler görülmüştür. Karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanırken ilk değerlendirmede Ataberk dışındaki üç öğrencinin de bu yorumlama biçimine tam anlamıyla güvenemedikleri bu yorumlama biçimini kullanarak yaptıkları sorularda her zaman doğru cevabı bulamayabileceklerini düşündükleri görülmüştür. Nazlı'nın aynı zamanda bu algoritmayı ‘bir örüntü kuralı gibi’ şeklinde tanımladığı görülmüştür. Son değerlendirmede öğrencilerin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı daha kolay ve daha sık kullandıkları görülse de doğrulayıcı açıklamalar içeren ifadelerin olmadığı görüldüğünden çalışmalarının semiyotik-enstrümantal düzlemde olduğuna ilişkin göstergeler taşıdığı değerlendirilmiştir. Karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı

kullandıkları problem durumlarında anlamlı bir şekilde bu yorumlama biçimini etkin bir enstrüman olarak işe koşamadıklarından genellemeyi içeren söylemlerinde de hatalar görülmüştür. İlk değerlendirmede Nazlı karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı farklı işlemlere de genellemeye çalışsa da başarılı olamazken; Melda'nın da karşılaştırmalı ilişkisel yorumlama biçimini farklı durumlara genelleyemediği görülmüştür. Son değerlendirmede Ataberk ve Melda karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullandıkları problem durumlarında genelleme yaparken sınırlı sayıda denemeden sonra genelleme yapabilmenin mümkün olacağını düşünmüşlerdir. Kayra'nın süreç boyunca eşit işaretinin solunda ve sağında eşit miktarda sayının işleme sokulması gerektiğine dair hatalı olan algısı devam etmiştir.

Denklem dizisi formunda verilen sayısal eşitliğin doğru ya da yanlış olduğunu belirleyerek işareti anlamlandırmayı gerektiren soruda öğrencilerin ifadenin doğru olmasını destekleyen yorumlama biçimini işe koşup diğer yorumlama biçimlerini ya da eşit işaretinin ilişkisel yorumlanmasını destekleyen terazi aracını görmezden geldikleri görülmüştür.

Öğretimden önce yapılan ilk değerlendirmede Ataberk, son değerlendirmede de Melda bireysel uygulamada eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlanmasını işe koşup ifadenin yanlış olduğuna karar vermelerine rağmen bireysel görüşmelerde yöneltilen sorular üzerine düşünmeleriyle beraber ifadenin doğru olmasını sağlayan eşit işaretinin kesin işlemsel yorumlamasını işe koşarak ifadenin doğru olduğu yönünde fikirlerini değiştirdikleri görülmüştür. Dört öğrencinin de eşit işaretinin temel ilişkisel yorumlanmasını problemin çözümünde bir araç olarak işe koştuklarında ifadenin yanlış olacağının farkına vardıkları ancak ifadenin doğru olması için onun doğru olmasını sağlayan kesin işlemsel yorumlamayı kullandıklarını ifade ettikleri görülmüştür. Eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerinde farklı sonuçlar elde edilmesinin mümkün olup olmadığı sorgulandığında farklı sonuçların elde edilmesinde bir gariplik göremedikleri; her soruda o ifadeyi doğru yapan yorumlama biçimini kullanmayı tercih ettikleri görülmüştür. Terazi modelini problemin çözümünde bir araç olarak işe koşma konusunda ise Kayra'nın, sorudaki ifadenin yanlış olmasına neden olacağını düşündüğünden terazinin bir araç olarak işe koşulamayacağını düşündüğü görülürken; Nazlı ve Melda'nın ifadeyi, terazi modeli bir araç olarak işe koşulduğunda doğru olacak şekilde parçalara ayırdıkları görülmüştür. Buradan hareketle eşit işaretini dört

öğrencinin de problemin çözümünde etkin bir araç olarak işe koşamadıkları; eşit işaretinin varlığının zaten ifadenin doğruluğunu getirdiğini düşündükleri görülmüştür.

Sözel temsilden cebirsel ya da sayısal geçiş kullanarak eşitliği sağlayan eksik değeri bulmayı gerektiren soruda dört öğrenci de temel ilişkisel yorumlamayı problemin çözümünde işe koşmada gelişerek enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler taşıırken; doğrulayıcı açıklamalara da yer verebildiklerinden semiyotik-söylemsel düzlemin göstergeleri görülmüştür. Karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı bireysel tercihleri doğrultusunda işe koşmadıkları; işe koştuklarında da doğrulayıcı açıklamalar yapmaksızın bir algoritma gibi kullandıklarından semiyotik-enstrümantal düzlemin bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiştir.

Temel ilişkisel yorumlamayı etkin bir araç olarak işe koşmada gelişen öğrencilerin bu yorumlama biçimini cebirsel olarak ifade etmede farklılaştıkları görülmüştür. Örneğin Kayra'nın temel ilişkisel yorumlamayı sözel olarak ifade edebildiği ancak bu durumu cebirsel olarak temsil etmekte zorlandığı görülmüştür. Aynı zamanda Kayra'nın eşittir kelimesi yerine 'yakın' ifadesine yer vermesi eşitlik kavramına ilişkin hatalı bir algı oluşturduğuna bir işaret olarak kabul edilmiştir. Temel ilişkisel yorumlamayı kullanırken terazi modelini işe koşmaya kendi tercihleri doğrultusunda karar veren Nazlı ve Melda'dan, Melda da teraziye etkin bir enstrüman olarak işe koşup problemin çözümünde kullanabildiğinden enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü; aynı zamanda doğrulayıcı açıklamaları da terazi modelini kullanarak yapabildiğinden enstrümantal-söylemsel düzlemde yer aldığı görülmüştür. Nazlı'nın ise terazi modelinde sayıları ve işlemleri uygun bir şekilde yerleştirebilse de problemi çözecek şekilde işe koşamadığı görülmüştür.

Öğrencilerin eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerini (kesin işlemsel, esnek işlemsel, temel ilişkisel, karşılaştırmalı ilişkisel ve ayırıcı) destekleyen, tanımlayan kelimeleri-kavramları- ifadeleri kullanma biçimleri de farklılaşmıştır.

Öğrencilerin eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerini problemin çözümünde işe koştukları durumlarda kullandıkları teknikleri, attıkları adımları anlattıkları doğrulayıcı açıklamalar ve gerekçelendirmelerde kullandıkları ifadeler söylemsel oluşum bağlamında ele alındığında eşit işaretinin her bir yorumlama biçimine ilişkin

kullandıkları tanımlayıcı-destekleyici ifadelerin farklılaştığı ve öğretim deneyi sürecinin başından sonuna doğru ilerledikçe çeşitlendiği görülmüştür. Tablo 4.1’de öğrencilerin öğretim süresince eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerini tanımlamak veya deseklemek için kullandıkları ifadelere yer verilmiştir.

Tablo 4. 1. Çalışmanın sonucunda: eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerini tanımlayan destekleyen ifadeler

Eşit işaretinin farklı yorumlama biçimleri	Yorumlama biçimlerini destekleyen, tanımlayan ifadeler	
Kesin işlemsel	- Sonucu/cevabı belirtmek/göstermek/belli etmek/yazmak/anlatmak için - Bir şeyleri/bir sayıyı göstermek/işaret etmek - Topladığı sayıyı/o sayıyı/bulduğu sayıyı/toplamını belirtmek/göstermek - Sonucu budur, cevabı vermek - Bütün işlemlerin sonucu bitişinde, sorudan sonra cevabı belirtmek için - Sonucun/cevabın öncesinde/önüne konur - Toplamanın....’a eşit olduğunu/geldiğini/ettiğini göstermek için - Toplamından/farkından önce yazılan sembol - Eşittir, sonuçla yapılır	
Esnek işlemsel	$a=a$ formu için; - Sayılar/harf/iki rakam/iki şekil/ikisi de/sağ tarafla sol taraf aynı - Bu iki şekil/iki sayı/ İki sayı varmış o sayılar birbirine eşit - Aynı/eşit - Eşitliğini göstermek için - Bir kefesinde ...(sayı) diğer kefesinde de(sayı)	$C=a+b$ formu için; - Sonucu belirtmek için - Sonucu bozmayabilir - Cevaba/sonuca eşit olduğunu göstermek/anlatmak için
	Terazi, terazi eşit duruyor, sağ kefe sol kefe eşit, dengede	
Temel ilişkisel	- Sonuçlar/iki işlemin-toplamanın sonucu/cevabı aynı/eşit - Dengede/terazide/terazi gibi /terazi dengede duruyor - Sonucu aynı şekilde bulmak/ her iki tarafı da eşit yapmak - İki işlemin sonucu/şu işlemle şu işlem/sağ tarafla sol taraf/ikisi de birbirine eşit/aynı/değişmiyor - Sağdaki sayılarla/kefe soldaki sayıların/kefe eşit olması - Bulduğum sonuçla aynı; aynı sonuca varmak/çıkması - Eşitlenme/eşitlik durumu - Bunların ikisi de aynı eşitlikte olmalı, eşitliği göstermek, eşitlik (aynı sonuç olmaması durumunda) Tutmuyor	
Karşılaştırmalı ilişkisel	- Bir terazinin eşit/dengede olması, eşitlik - Sayıların/rakamların/toplanan iki sayının/çıkarılan iki sayının aynı olması - Sağ ve solda işlem/sayının aynı olması - Eşitliğin aynı tarafında eklediğini çıkarttığında: ‘Gene aynı sonuca ulaşmak, ikisi de aynı şekilde çıkarılıp eklenirse sonuç aynı, aynı sonuç oluyor yani hiç dokunmamış gibi’ - Toplanan iki sayıdan birinden alıp öbürüne verdiğinde: ‘Birinden alıp birine verme taktiği/örüntü’	
Ayırıcı	Sayılar karışmasın diye	

	• Sonucu-sonuçtan ayırmak/ayrıştırmak için • Birinci bölümde-ikinci bölümde, eşitirden ilk öncesi-eşittirden sonrası, eşittirin sol tarafı-sağ tarafı, sol olan yer-sağ olan yer, sol kefe-sağ kefe, birinci kefe-ikinci kefe, bu taraf-şu taraf, sağdaki sayılar-soldaki sayılar, eşittirin sağ tarafı-sol tarafı, iki taraf da eşit • Ortada eşittirle zaten kesilmiş, ortalarında eşittir var

Tablo 4. 2. (Devam) Çalışmanın sonucunda: eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerini tanımlayan destekleyen ifadeler

Öğrencilerde eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerini işe koştukları problem durumlarında doğrulayıcı açıklamaları ifade ettikleri söylemsel oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerine matematiksel çalışmada yer aldıkları semiyotik-söylemsel ve enstrümantal-söylemsel düzlemler bağlamında bakıldığında eşit işaretime ilişkin farklı kavram yanılgıları görülmüştür.

Kayra'nın eşit işaretinin yer aldığı durumlarda sonuçların eşit olması gerekliliğini ifade ederken bazen eşittir ifadesi yerine 'yakın' ifadesini kullandığı görülmüştür. Eşit işaretinin kullanılma amacı ya da işlevi sorulduğunda eşit işaretinin ifadede nerede yer aldığına göre yorumlanma biçiminin de değişeceğini düşündüğü görülmüştür. Soruların çözümünde eşit işaretini bir enstrüman olarak işe koşarken eşit işaretinin ifadedeki yerine baktığından hatalı sonuçlar elde edebildiği görülmüştür. Eşit işaretinin sonda yer alması durumunda sonuç belirtmek için kullanıldığını; ortada yer alması durumunda eşit işaretinin iki tarafının eşitliğine bakılması gerektiğini düşündüğü görülmüştür. Bu durum eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerinin birbirini desteklemesi gerekliliğini fark edemediğinden farklı yorumlamalarla farklı sonuçlar elde etmeyi normal bulduğunu göstermiştir. Bununla beraber eşit işaretini durmamızı sağlayan ve işlem yapmaya iten bir güç olarak yorumladığı da görülmüştür. Ataberk'in eşittir ifadesi ile 'aynı' ifadesini eş anlamlı kullandığı ve iki ifade arasındaki anlam farkını hissedemediği görülmüştür. Eşit işaretinin olduğu durumlarda niceliksel aynı olma durumunun yorumlanması beklenirken Ataberk'in nitelik olarak (renk, büyüklük, biçim, nesne) aynı olmayla bütünleştirerek kullandığı görülmüştür. Benzer şekilde Melda'nın da eşit işaretinin olduğu durumlarda boyut ve özelliklerin aynı olması ile eş anlamlı kullandığı; terazi modelini işe koştığında da ağırlıkların aynı olması gerekliliğini ifade ettiği görülmüştür.

4.1.2. Değişken kavramına ilişkin sonuçlar

Değişkenin belirli bir bilinmeyen olarak doğru yorumlanıp hesaplanmasını gerektiren aritmetik denklem içeren sorularda öğrencilerin dördü de değişkenin işlemsel (belirli bir bilinmeyen) yorumunu etkin bir biçimde işe koşabildikleri enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiştir.

Öğrenciler değişkenin işlemsel yorumunu işe koştukları çalışmalarında doğrulayıcı açıklamalar yapabildiklerinden çalışmalarının semiyotik-söylemsel düzlemde olduğu değerlendirilmiştir. Değişkenin işlemsel yorumunu işe koşarken değişkeni gözünde canlandırma ve eşit işaretini farklı yorumlama biçimlerinde destekleme açısından bazı öğrencilerde farklılaşmalar görülmüştür. Nazlı'nın değişkenin işlemsel yorumuna ilişkin semiyotik oluşumuna bakıldığında değişkeni 'kutunun içinde görünmeyen sayı' olarak gözünde canlandığı görülmüştür. Melda'nın da diğer öğrencilerden farklılaşarak eşit işaretini terazi modeli ile destekleyerek bilinmeyenin hesaplanmasına etkin bir araç olarak dâhil edebildiği görülmüştür.

Tablo temsili ile verilen birbirine bağlı değişen nicelikleri fark edip ilişkisel yorumlamayı destekleyen soruda dört öğrencinin de önce değişkeni işlemsel olarak yorumladıkları ve değişkenin işlemsel yorumunu işe koşarak bilinmeyi hesapladıkları enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler görülmüştür.

Tablo temsilinde verilen değişkenleri öğretmen rehberliğinden sonra değişkenin ilişkisel yorumunu da etkin bir biçimde işe koşabildikleri enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiş olup aynı zamanda yaptıkları adımları da açıklayabilmeleri açısından öğrencilerin hepsinin çalışmasının semiyotik-söylemsel düzlemde olduğu düşünülmüştür. Melda'nın bu soruda diğer öğrencilerden farklılaşarak değişken kavramına ilişkin semiyotik oluşumuna dair bileşenler görülmüş olup; değişkeni A,B,C,D gibi harflerin arkasında tam görünmeyen sayılar olarak gözünde canlandığı görülmüştür.

Eşit işaretinin (karşılaştırmalı ilişkisel) ve değişkenin (genelleştirilmiş sayı) beraberce ilişkisel yorumlanmasını gerektiren soruda öğretim sürecinin sonunda

öğrencilerin hepsinin değişkenin ilişkisel yorumunu etkin bir araç olarak işe koşabildiği enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiş ve bu bağlamdaki çalışmalarının ifade edebildikleri doğrulayıcı açıklamalarından dolayı semiyotik-söylemsel düzlemde olduğu kabul edilmiştir.

Ayberk dışındaki üç öğrencinin de öğretmen rehberliğinden önce değişkeni işlemsel ve işlemselden ilişkisele geçiş düzeyinde yorumlayabildikleri enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü değerlendirilirken; Ayberk'in ise hem ilk hem de son değerlendirmede değişkenin ilişkisel yorumunu işe koşabildiği enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiştir. Ayberk'in diğer öğrencilerden farklılaşmasının altında yatan nedenin eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanmasını problemin çözümünde işe koşabilmiş olması olduğu düşünülmüştür. Değişkenin ilişkisel yorumlanmasında önkoşul olarak eşit işaretinin ilişkisel yorumlanmasının yatabileceği değerlendirilmiştir.

Öğrencilerin dördünün de değişkenin (genelleştirilmiş sayı) ilişkisel yorumlanmasını isimlendirirken değişkenin işlemsel yorumunu isimlendirirken kullandığı 'bilinmeyen, verilmeyen' gibi tanımlamaların benzer hali olan 'bilinmeyenler, verilmeyenler' ifadelerine başvurduğu görülmüştür.

Harf ile temsil edilen değişkeni genelleştirilmiş bir sayı olarak yorumlamayı destekleyen, eşit işareti ve cevabın yer almadığı soruda üç öğrencinin de değişkeni genelleştirilmiş bir sayı olarak ilişkisel yorumlayabildiği görülmüştür. Nazlı dışındaki üç öğrenci de değişkeni genelleştirilmiş sayı (ilişkisel) olarak yorumlayabilmiş; Nazlı ise cebirsel ifadeden sonra sonucun yazılmamasını belirli bir bilinmeyen olarak değişkeni hesaplamayı engelleyen bir eksiklik olarak değerlendirmiştir.

Daireler ve arasına konulan noktalarla temsil edilen değişkenin genelleştirilmiş sayı (ilişkisel) yorumunu dört öğrencinin de anlamlandıramadığı, genelleştirilmiş bir sayıyı temsil edebileceğini düşünemedikleri görülmüştür.

Daireler ve arasına konulan noktalarla temsil edilen değişkeni yorumlayıp sözel ve cebirsel temsille ifade etmeyi gerektiren soruda öğretmen rehberliğinden sonra değişkenin bu temsili anlamlandıran öğrencilerin, bu modeli işe koşarak üzerinde işlem yapabilecekleri nesneleştirilmiş bir yapı olarak değerlendirebildiği; dört

öğrencinin de sözel olarak yorumlayabildikleri; cebirsel olarak ise Nazlı dışındaki öğrencilerin doğru bir şekilde yorumlayabildikleri görülmüştür.

Birbirine bağlı değişen nicelikleri temsil eden çubuk modelinde öğrencilerin çubuklardan küçük olanın büyüklüğünden yola çıkarak büyük çubuğun temsil ettiği çokluğu hesaplamaya çalıştıkları, çubukların temsil ettikleri çokluklarla doğru orantılı büyüklükte olduğunu düşündükleri görülmüştür.

Birbirine bağlı değişen nicelikleri temsil eden değişkenler modelle verilip sözel ve matematiksel olarak temsil edilmesini ve değişkenlerin hesaplanmasını gerektiren soruda Melda dışındaki üç öğrencinin de çubukla temsil edilen değişkende büyüklüğü verilen çubuktan yola çıkarak diğer çubukları da onun cinsinden ifade etmeye ve hesaplamaya çalıştıkları görülmüştür. Öğretmen rehberliğinden sonra çubukların büyüklüğü ile yazılan sayı arasında doğru orantılı bir ilişki olamayabileceği fark edilmiş; Nazlı dışındaki öğrencilerin bilinmeyi temsilen kullanılan çubuk modelini etkin bir şekilde işe koşarak bilinmeyi hesaplayabildikleri enstrümantal oluşumunun bileşenlerine ilişkin göstergeler görülmüş ve çubuk modeli ile temsil edilen değişkenleri birbiri cinsinden sözel olarak anlamlı bir şekilde ifade edebilmede dört öğrencinin de geliştikleri görülmüştür.

Sözel olarak verilen belirli bir bilinmeyen bağlamında değişkenin işlemsel yorumunu içeren sorularda tüm öğrencilerin bilinmeyi doğru bir şekilde hesaplayabildiği enstrümantal oluşumun bileşenlerinin görüldüğü kabul edilmiş; ancak hesaplarken veya sözel durumu cebirsel temsil ederken bilinmeyi sürece dahil edemedikleri görülmüştür.

Sözel bir problem içinde verilen belirli bir bilinmeyi hesaplamayı gerektiren soruda tüm öğrencilerin belirli bilinmeyi yani değişkenin işlemsel yorumunu sürece dâhil etmeden tersine işlem yaparak hesapladığı; öğretmen rehberliğinden sonra Aslı ve Ataberk'in değişkeni de dâhil ederek denklem kurmaya çalıştığı ama bunu kısmen yapabildikleri görülmüştür. Öğretmen rehberliğinden sonra değişkenin de dâhil olduğu süreci modelleme ve cebirsel temsil etmede dört öğrencinin de geliştikleri; sözel olarak verilen denklemi modellerken Melda'nın eşit işaretinin olduğu durumu terazi modeli ile modelleyebildiği görülmüş; öğrencilerin cebirsel olarak temsil etmede modelle temsil etmeye kıyasla daha az başarılı oldukları görülmüştür.

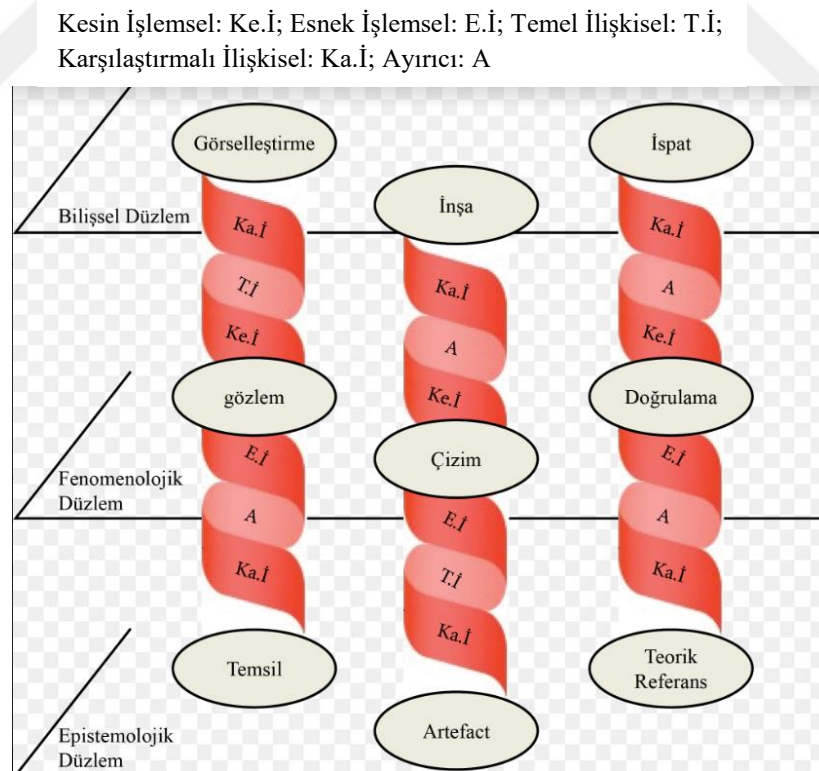
Çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliğinde, değişken üçgen kare gibi şekillerle temsil edilerek ifade edildiğinde değişkenin genelleştirilmiş sayı olarak ilişkisel yorumunu öğrencilerin anlamlı bulamadıkları görülmüştür.

Dağılma özelliğini ifade ederken değişken kavramının ilişkisel yorumunu hissedebilmeyi gerektiren soruda Kayra dışındaki öğrencilerin şekille temsil edilen değişkenlerin aslında genelleştirilmiş sayıyı temsil ettiğini fark edemedikleri görülmüştür. Kayra'nın da görüşmeler sırasında yaptığı adımları açıklayamamış olması, öğretmen tarafından yeniden yapması istendiğinde soruyu yeniden yapamaması değişkenin ilişkisel yorumunu anlamlandıramadığını düşündürmüştür. Öğretmen rehberliğinden sonra bu şekillerin herhangi bir sayıyı temsil ettiğini anlamlandırabilseler de dağılma özelliğini ifade eden eşitliğin her sayı için eşit kalacağını fark edemedikleri; bu durumu gerekçelendiremedikleri ve mantıklı bir açıklama yapamadıkları görülmüştür.

Matematiksel çalışma uzayı teorik çerçevesinde epistemolojik ve bilişsel düzlem arasındaki etkileşimi temsil eden doğru modelinin eşit işareti için; eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerinin birbirini beslediği ve desteklediği, birbiri ile etkileşim içerisinde olduğu sarmal bir yapıda olmasının semiyotik, enstrümantal ve söylemsel oluşumlar bağlamında daha anlamlı olacağı görülmüştür.

Eşit işaretinin yokluğunda ya da eşit işaretinin olduğu bir problemin çözümünde öğrencinin gözünde canlandığı imajın eşit işaretinin tek bir yorumlama biçimine ilişkin olması semiyotik oluşumun bileşenlerine ilişkin bir gösterge olarak ele alınsa da; eşit işaretinin bütüncül bir semiyotik enstrüman olabilmesi için öğrencinin zihninde işaretin farklı yorumlama biçimlerine ilişkin ve bu yorumlama biçimleri arasındaki benzerlik, farklılık, birbirini tamamlama durumunun farkında olduğu zengin bir imajın olmasının önemi oraya çıkmıştır. Aynı şekilde çalışmamızda semiyotik bir araç olan eşit işareti ve teknolojik bir araç olan terazi modelinin problemin çözümünde işe koşulması durumunda bilişsel şemalarında görülen değişimin gözlenebilir tekniklere yansıdığı sürece ilişkin göstergelerin görüldüğü enstrümantal oluşum sürecinde öğrencinin eşit işaretinin tek bir yorumlama biçimini kullanarak terazi modelini işe koştugu ve problemi çözdüğü durumda kullandığı tekniklerin enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler olarak ele alındığı görülmüştür. Fakat eşit işaretinin

farklı yorumlama biçimlerini kullanarak birbirini destekleyecek tamamlayacak şekilde terazi modelini işe koşabilmesi teknoloik bir araç olarak ele aldığımız terazi modelinin bütüncül bir enstrüman olarak yorumlanmasını sağlamıştır. Öğrencinin eşit işareti veya terazi modelinin özellikleri, tanımından yola çıkarak problem çözme sürecinde kullandığı teknikleri, attığı adımları doğrulayıcı açıklamalar, gerekçelendirmelerle ifade ettiği söylemsel oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerine bakıldığında eşit işaretinin tek bir yorumlama biçimine dayandırılmış gerekçelendirmelerin hem problemin çözümünde yanlış-eksik adımların atılmasına neden olduğunu göstermiş hem de doğrulayıcı bir açıklama olduğu ileri sürülen ifadenin hatalı olmasına neden olduğu görülmüştür. Eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerine dayandırılmış, farklı yorumlama biçimlerinin birbirini deşeklediği doğrulayıcı ifadelerin görüldüğü söylemsel oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerde eşit işareti ve terazi modelinin özellikleri ve tanımının işe koşulduğu bütüncül bir enstrüman olarak değerlendirilebileceği görülmüştür. Buradan hareketle çalışmamızda MWS teorik çerçevesinin modelinin Şekil 4.1’de görüldüğü gibi uyarlanması uygun görülmüştür.



Şekil 4. 1. MWS modelinin çalışmamıza uyarlanması

4.2.Tartışma

Kuzniak, Nechache ve Drouhard (2016) çalışmasında matematiksel bir çalışmanın etkinliğini ve verimliliğini geliştirmek için tamamlanmış, bütüncül bir matematiksel çalışma geliştirmeyi amaçlamıştır. Bu çalışma aynı zamanda enstrüman meselesine çok boyutlu bir bakış açısı sağlamış: semiyotik, teknolojik ve teorik enstrümanlar arasındaki farkın açıkça tanımlanabilmesine yardımcı olmuştur. Kuniak vd. (2016) matematiksel enstrüman terimine, matematiksel çalışma uzayının tüm farklı bilişsel boyutlarında dolaşıp anlamlı bir matematiksel çalışmaya erişebilme potansiyelinin ve olasılığının olması durumunda yer verildiğini dile getirmiştir. Bu çalışmada da öğrencilerin, semiyotik bir araç olarak ele aldığı eşit işaretini ve teknolojik bir araç olarak ele aldığı terazi modelini birbirini destekler nitelikte gözünde canlandırabilmeleri süreci semiyotik oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler bağlamında incelenmiştir. Öğretimden önce iki öğrencinin, eşit işaretinin kendisini, anlamından uzak sadece iki çizgi olarak gözünün önünde canlandığını belirttiği görülürken; diğer iki öğrencinin de kesin işlemsel yorumlamayı destekleyen, işlem yapıp sonucun yazıldığı örnekleri gözlerinde canlandırabildikleri görülmüştür. Öğretimden sonra ise tüm öğrencilerin gözünde terazi modelinin canlandığı; terazinin dengede, aynı hizada durduğu temel ilişkisel yorumlamaları kullanabilecekleri örnek durumları hayal ettikleri görülmüştür. Aynı zamanda bu çalışmada öğrencilerin, teknolojik bir araç olarak ele alınan terazi aracını öğretimden önce işe koştuklarına dair bir veri elde edilmezken, öğretimden sonra yapılan son değerlendirmede dört öğrencinin de terazi modelini problemin çözümünde işe koşabildikleri enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler görülmüştür. Bununla beraber bu çalışmada teorik araç olarak ele alınan eşit işaretinin farklı yorumlama biçimleri ve terazinin işlevi, özelliklerini işe koşarak doğrulayıcı açıklamalar yapma durumları incelendiğinde öğretimden önce tüm öğrencilerin eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerini işe koştukları ve bu yorumlama biçimlerini kullanarak bazen doğrulayıcı açıklayıcı ifadelerle yer verdikleri; bazen de doğrulayıcı açıklayıcı ifadelerle yer vermeksizin sadece yaptıkları adımları ifade ettikleri görülmüştür. Öğretimden sonra Kayra ve Melda'nın teknolojik bir araç olarak ele alınan terazi modelini işe koşarak terazinin özelliklerinden fonksiyonlarından yola çıkarak yaptığı adımları açıklayıp gerekçelendirebildiklerinden enstrümantal-söylemsel düzlemde yer aldıkları değerlendirilirken; Ataberk'in eşit işaretinin temel ilişkisel ve karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanması özelliklerini işe koşarak açıklama-

gerekçelendirme yapabildiğine dair göstergelerden hareketle semiyotik-söylemsel düzlemde yer aldığı değerlendirilmiştir. Aynı zamanda değişkenin belirli bir bilinmeyen olarak doğru yorumlanıp hesaplanmasını gerektiren aritmetik denklem içeren sorularda öğrencilerin dördünün de değişkenin işlemsel (belirli bir bilinmeyen) yorumunu etkin bir biçimde işe koşabildikleri enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiş; değişkenin ilişkisel yorumunu problemin çözümünde işe koştukları durumlar incelendiğinde öğrencilerin bazılarında enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler görülürken bazılarının değişkenin ilişkisel yorumunu etkin bir enstrümana dönüştüremediği görülmüştür. Öğrencilerin değişkeni gözünde canlandırdıkları semiyotik oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelere bakıldığında Nazlı'nın değişkeni 'kutunun içinde görünmeyen sayı'; Melda'nın da değişkeni A,B,C,D gibi harflerin arkasında tam görünmeyen sayılar olarak gözünde canlandırdığını ifade ettiği görülmüştür. Problemin çözümünde fiilen yer aldıkları sorularda kullandıkları teknikleri ya da attığı adımları açıkladıkları söylemsel oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerine bakıldığında değişkenin işlemsel (belirli bir bilinmeyen) yorumunu işe koştukları durumlarda doğrulayıcı açıklamalar yapabildikleri görülürken; değişkenin ilişkisel (genelleştirilmiş sayı, birbirine bağlı değişen nicelikler) yorumunu kullandıkları durumlarda gerekçelendirmeye dayanan ifadeleri etkili bir şekilde kullanamadıkları görülmüştür.

Gómez-Chacón, Albaladejo ve López (2016) çalışmasında matematiksel çalışma uzayı teorik çerçevesini biliş ve etkisi arasındaki etkileşimi bağlamında incelemeyi; geometrik muhakemede enstrümantal oluşumdan söylemsel oluşuma geçişteki süreci tanımlamayı amaçlamıştır. Çalışmadan elde edilen bulgulardan biri de şu şekildedir: enstrümantal-söylemsel düzlemde ortaokul öğrencileri (14-15 yaş arası) söylemsel oluşumlara olan içsel ihtiyaçtan yoksun olduklarından ve geometrik akıl yürütmede söylemin rollerinin anlaşılmaması, argümantasyon sürecinde yer almamalarından dolayı önemli bir zorluk ortaya çıkmaktadır. Bu çalışmada da benzer şekilde öğrencilerin (10-11 yaş) söylemsel oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeleri incelendiğinde dört öğrencide de temel ilişkisel yorumlamayı problemin çözümünde işe koşmada gelişerek doğrulayıcı açıklamalara da yer verebildiklerinden çalışmalarının semiyotik-söylemsel düzlemde olduklarına ilişkin göstergelerin görüldüğü değerlendirilmiştir. Öğrencilerin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı bireysel tercihleri doğrultusunda işe koşmadıkları;

işe koştuklarında da doğrulayıcı açıklamalar yapmaksızın bir algoritma gibi kullandıklarından semiyotik-enstrümantal düzlemin bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiştir. Öğretimden sonra öğrencilerin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı daha kolay ve daha sık kullandıkları görülsede doğrulayıcı açıklamalar içeren ifadelerinin olmadığı görüldüğünden çalışmalarının semiyotik-enstrümantal düzleme ilişkin göstergeler taşıdığı görülmüştür. Karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullandıkları problem durumlarında bu yorumlama biçimini anlamlı etkin bir enstrüman olarak işe koşamadıklarından genellemeyi içeren söylemlerinde de hatalar görülmüştür. Öğretimden önce Nazlı, karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı farklı işlemlere de genellemeye çalışsa da başarılı olamazken; Melda'nın da bu yorumlama biçimini farklı durumlara genelleyemediği görülmüştür. Öğretimden sonra Ataberk ve Melda karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullandıkları problem durumlarında genelleme yaparken sınırlı sayıda denemeden sonra genelleme yapabilmenin mümkün olacağını düşünmüşlerdir. Yine öğretimden sonra Kayra ve Melda'nın teknolojik bir araç olarak ele alınan terazi modelini işe koşarak terazinin özelliklerinden fonksiyonlarından yola çıkarak yaptığı adımları açıklayıp gerekçelendirebildiklerinden enstrümantal-söylemsel düzlemde yer aldıkları kabul edilmiştir. Kimi zaman doğrulayıcı açıklamalarında öğretmenin daha önceden söylediği ifadeleri, soru kökünde verilen diğer örnekleri referans gösterdikleri de görülmüştür. Eşit işaretinin (karşılaştırmalı ilişkisel) ve değişkenin (genelleştirilmiş sayı) beraberce ilişkisel yorumlanmasını gerektiren soruda öğretim sürecinin sonunda öğrencilerin hepsinin değişkenin ilişkisel yorumunu etkin bir araç olarak işe koşabildiği enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiş ve bu bağlamdaki çalışmalarının ifade edebildikleri doğrulayıcı açıklamalarından dolayı semiyotik-söylemsel düzlemde olduğu kabul edilmiştir. Çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliğinde, değişken üçgen kare gibi şekillerle temsil edilerek ifade edildiğinde değişkenin genelleştirilmiş sayı olarak ilişkisel yorumunu öğrencilerin anlamlı bulamadıkları görülmüştür. Öğretmen rehberliğinden sonra bu şekillerin herhangi bir sayıyı temsil ettiğini anlamlandırabilseler de dağılma özelliğini ifade eden eşitliğin her sayı için eşit kalacağını farkedemedikleri; bu durumu gerekçelendiremedikleri ve mantıklı bir açıklama yapamadıkları görülmüştür.

Santos-Trigo, Moreno-Armella ve Camacho-Machín (2016)'nın çalışmasının amacı problem çözme yaklaşımlarında teknolojinin sağladığı katkının bilişsel ve epistemolojik eylemlere etkisini ve katkısını analiz etmek ve tanımlamak olmuştur. Çalışmanın bulguları şu şekildedir: nesneleri sürüklemek, parametreleri ölçme, grafiklerin odak noktasını bulma ve kaydırıcıların kullanılması (sürükleyerek değerleri değiştirme) gibi teknolojik yeterlilikler katılımcıların semiyotik ve söylemsel oluşumlarına önemli katkı sağlamaktadır. Bu çalışmada da terazi modelinin öğrencilerin eşit işareti ile karşılaştıkları durumlarda gözünde canlanan imajlarının çeşitlenmesine olumlu katkı sağladığı; semiyotik oluşumun bileşenlerinin çeşitlenmesine yardımcı olduğu değerlendirilmiştir. Öğretimden sonra bireysel görüşmelerinde eşit işareti denildiğinde tüm öğrencilerin gözünde terazi modelinin canlandığı; terazinin dengede, aynı hızda durduğu temel ilişkisel yorumlamaları kullanabilecekleri örnek durumları hayal ettikleri görülmüştür. Aynı zamanda neden doğru sorusu ile öğretim boyunca sık sık karşılaşılan öğrenciler doğrulayıcı açıklamalar yapma ihtiyacından dolayı eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerini, terazinin işlevi ve özelliklerini kullanarak doğrulayıcı açıklamalar yapma konusunda gelişmeler de formal bir kanıt niteliği taşımayan doğrulayıcı argümanlar ileri sürebildikleri görülmüştür. Değişken kavramına ilişkin öğrencilerin gözünde canlanan 'kutunun içinde miktarı bilinmeyen çokluk' ya da 'bir harfin arkasında görünmeyen bir sayı' gibi resimler, değişken kavramına ilişkin imajının zenginleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Öğrencilerin değişkeni modellemede ya da cebirsel olarak temsil etmede harf, şekil, çubuk modeli, daireler ve arasında noktalar gibi farklı temsilleri kullanmayı önermesi ya da kullanabilmesi de değişken kavramına dair imajlarına olumlu katkısını gösterdiği kabul edilmiştir. Bununla beraber öğrencilerin değişken kavramının işlemsel ve ilişkisel yorumlama özelliğini kullanarak yaptıkları doğrulayıcı açıklamaların da çeşitlendiği, gerekçelendirme ve muhakeme etmede geliştikleri görülmüştür.

Kuzniak ve Rauscher (2011)'in çalışması Steinbring (1998) gibi araştırmacıların, öğretimi geliştirmek için epistemolojik bilgi üzerinde çalışmanın gerekliliği konusunda ısrar ettikleri alana katkıda bulunmayı amaçlamıştır. Araştırmada öğretmenlerden bazıları sadece Geometri II'nin yönettiği bir GWS (Geometri Çalışma Uzayı) içinde kalmıştır ve Geometri I'i öğrenciler için olası geometrik kavramlar ve zorlukların kaynağı olarak düşünmemiştir. Öğretmenlerin kişisel GWS'sinin öğrencilerin

çözümlerini nasıl algıladıklarını belirlediği görülmüştür. Çalışmanın ve modelin öğretmenlerin hem öğrencileri ile hem de meslektaşları arasındaki çeşitliliği tanımalarına yardımcı olacağına inanılmıştır. Bu çalışmada da öğrencilerin eşit işarete ve değişken kavramına dair semiyotik, enstrümantal ve söylemsel oluşumlarla epistemolojik düzlemde bilişsel düzleme geçerken, aynı zamanda oluşumların ikiyeşli kombinasyonu ile oluşan düzlemler arasındaki geçişlerde yaşadıkları süreç kişisel matematiksel çalışma uzayı bağlamında ele alındığından; öğretmenler için de öğretim sürecinde kendilerine rehber olarak alabilecekleri bir süreç tasvir edilmiştir. Böylece öğrencilerin eşit işaretinin ve değişken kavramının geliştirilmesi istenen oluşumlar veya düzlemlere bağlı olarak öğretimi nasıl tasarlayabileceklerine; karşılaşılabilecekleri olası kavram yanlışları ve hatalara ilişkin ayrıntılı bir süreç tanımlanmıştır.

Delgadillo ve Vivier (2016) çalışmasında paradigma kavramının tanımlanmasıyla MWS modelinin analiz için geliştirilmesi ve öğrencilerin kişisel MWS'lerini zenginleştirmek veya öğrencileri belirli alanlardaki görevlerin çözülmesinde daha az olağan olan düşey düzlemlerde çalışmaya desteklemek için kullanılabileceğini göstermek amaçlanmıştır. Bu çalışmada da eşit işaretinin ve değişken kavramının farklı yorumlama biçimlerine dair farkındalık yaratıp öğrencilerin bu yorumlama biçimlerini problem durumlarında işe koşabilmeleri ve süreci gerekçeleri ile açıklayabilmeleri desteklenmeye çalışıldığından, onların eşitlik ve değişken kavramına dair imajlarını farklı yorumlama biçimleri ile ilişkili olacak şekilde zenginleştirmek adına semiyotik, enstrümantal ve söylemsel oluşumlar ve bu oluşumların ikiyeşli kombinasyonu ile oluşan düzlemler bağlamında geçişleri etkinleştirilmeye çalışılmıştır. Örneğin; öğretimden önce Nazlı ve Melda dışındaki öğrencilerde karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamanın işe koşulduğu enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler görülürken öğretim sürecinin sonunda yapılan son değerlendirmede tüm öğrencilerin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı işe koşabildikleri enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler görülmüştür. Öğretimden önce öğrencilerin teknolojik bir araç olarak ele alınan terazi modelini işe koştuklarına dair bir veri elde edilmezken öğretimden sonra yapılan son değerlendirmede dört öğrencinin de terazi modelini problemin çözümünde işe koşabildikleri enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiştir. Öğrencilerin dördü de eşit işaretinin esnek işlemsel, temel ilişkisel,

karşılaştırmalı ilişkisel yorumlama biçimlerini problemin çözümünde işe koşabilmişler ve yaptıkları adımları doğrulayıcı açıklamalarla destekleyebilmişlerdir. Öğrenciler doğrulayıcı açıklamalar sunarken hikâyeleştirme ve terazi modelini işe koşmada gelişmişler ve aynı zamanda farklılaşmışlardır. Tablo temsili ile verilen birbirine bağlı değişen nicelikleri fark edip ilişkisel yorumlamayı destekleyen soruda dört öğrencinin de önce değişkeni işlemsel olarak yorumladıkları ve değişkenin işlemsel yorumunu işe koşarak bilinmeyen hesapladıkları enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergeler görülmüştür. Tablo temsilinde verilen belirli bir bilinmeyen anlamındaki değişkenleri buldukları çalışmada öğretmen rehberliğinden sonra değişkenin ilişkisel yorumunu da etkin bir biçimde işe koşabildikleri enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerin görüldüğü kabul edilmiş olup aynı zamanda yaptıkları adımları da açıklayabilmeleri açısından öğrencilerin hepsinin çalışmasının semiyotik-söylemsel düzlemde olduğu düşünülmüştür.

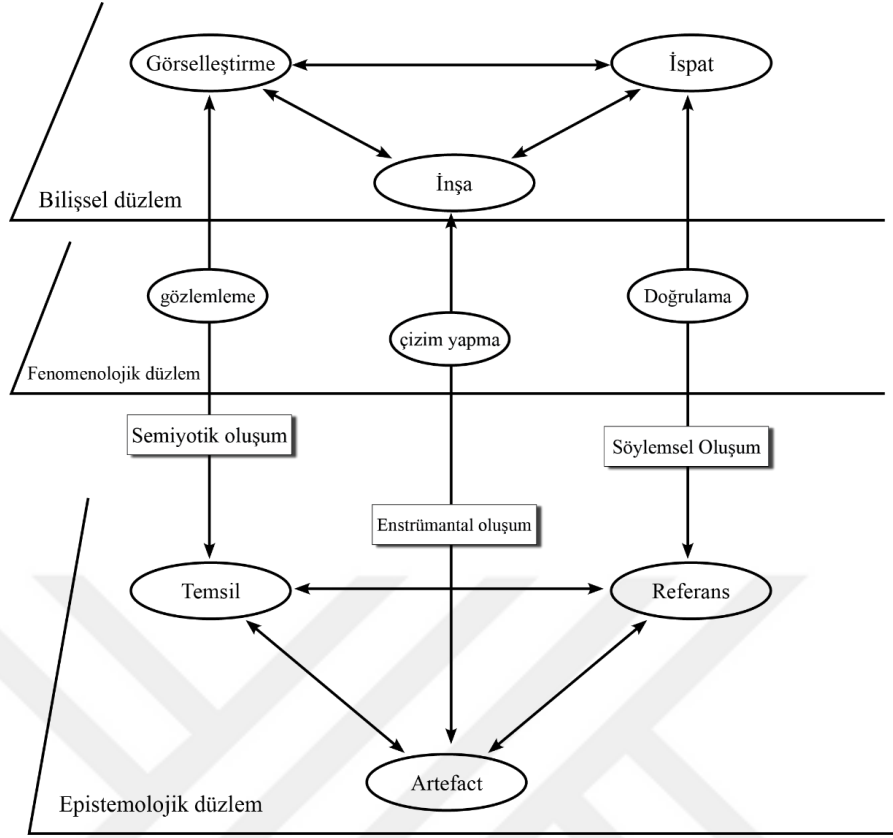
Derouet ve Parzysz (2016)'nın araştırmasının iki ana hedefi vardır: Fransız matematik ders kitaplarının yoğunluk fonksiyonlarını ve histogramları hangi yollarla sunduğunu analiz etmek; bu kavramların programa girişine alternatifler önermektir. Aynı zamanda karşılık gelen çalışma alanlarını ön plana çıkarıp sınıflarda uygulanmasına yönelik yollar önermektir. Çalışmanın bulgularından elde edilen sonuçları şu şekilde ifade etmek mümkün olmaktadır: normalde lisede 4 yıldan uzun bir süre (7'den 10. sınıfa kadar) çalışılmış olan istatistiksel grafik temsilleri olmasına rağmen, histogramların, Fransız öğrencilerin kişisel MWS'sinde sadece küçük bir yerinin olduğu sonucuna varılmıştır. Bu çalışma sayesinde çoğu ders kitabında yoğunluk kavramının tanıtılmasının histogram kavramına dayandığı görülebilmiştir; bu tür bir grafik aslında yoğunluk kavramına anlam vermek için oldukça ilginç bir yoldur. Ancak, mevcut öğretimde yetersiz olarak kullanıldığı da görülmüştür. Bu nedenle, bu konuya ilgi göstererek, ilgili çalışma uzayının oldukça zayıf olduğu gösterilmiştir. Ayrıca ders kitaplarında bazı hatalar görülmüş, bu da öğretmenler için de öğrenciler için de bazı sonuçlar doğurmuştur. Histogramlar etrafındaki bu zayıf MWS, yoğunluk (sıklık) fonksiyonlarına anlam vermek amacıyla bir destek olarak verimli bir şekilde kullanılamadıklarını göstermiştir. Genel sonuç olarak MWS'nin teorik yapısının belirgin bir olgunluğa ulaştığından kuşku duyulmasa bile, bazı zorluklarla karşı karşıya olduğu; MWS geliştiricileri ve kullanıcıları topluluğunun, uluslararası düzeyde değişim ve ortak

çalışma için yapılar yaratmayı başardığını, bu topluluğun bu zorlukları üstlenmedeki kapasitesi konusunda iyimser hale getirerek ilerlemeyi başardığı ifade edilmiştir. Matematiksel çalışma uzayı, ortaya çıktığı geometri alanının ötesinde; cebir, olasılık, fonksiyon ve analiz alanları gibi yeni matematiksel alanlardaki kullanımı ve ayrıca verimli etkileşimleri sayesinde MWS'nin evrimi potansiyelini açıkça göstermiştir. Minh ve Lagrange (2016)'ın çalışmasında ortaokulun üst sınıflarında fonksiyonların dar bir alanda öğrenilmesi ve öğretilmesini düzeltmeye katkıda bulunma amaçlanmıştır. Çalışmadan elde edilen bulgular ve sonuçlarda öğrencilerin kişisel MWS'leri ayrıntılı bir şekilde tarif edilmiş olup öğretmenlerin oluşumları da tarif edilmiştir. Bu çalışmada da eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerini destekleyecek yönde çalışma ve etkinliklerin ders kitaplarında yetersiz olduğu düşünüldüğünden; değişken kavramının ve eşit işaretinin ilişkisel yorumlanması sürecinde öğrencilerin bilişsel süreçlerini betimlemenin faydalı olacağı düşünüldüğünden yapılan literatür taramasından hareketle eşit işaretinin ve değişken kavramının ilişkisel yorumlanmasının aritmetikten cebire geçişte yaşanan zorlukları azaltacağı bilindiğinden eşitlik ve değişken kavramlarının matematiksel çalışma uzayındaki farklı oluşumlar ve düzlemler arası geçişlerle zenginleştirilmesi amaçlanmıştır. Hazırlanan Uygun Matematiksel Çalışma Uzayı, literatür taraması sonucunda çalışmalarda kullanılması önerilen örnek soru ve etkinliklerden yararlanılarak tasarlanmış olup çalışma sonucunda elde edilen veriler ışığında hazırlanan uygun matematiksel çalışma uzayının öğrencilerin eşitlik ve değişken kavramına ilişkin imajlarını farklı yorumlamalar ve terazi modeli ile zenginleştirdiği görülmüştür. Bu çalışmanın Matematiksel Çalışma Uzayı teorik çerçevesine aritmetikten cebire geçişte eşitlik ve değişken kavramının öğrencilerin bilişsel süreçlerindeki değişim ve gelişime ışık tutması açısından önemli bir katkı sağladığı düşünülmüştür.

Tanguay ve Venant (2016)'ın çalışmasında ilkokulun sonunda (6. sınıf 11-12 yaş) öğrencilerin açıyı nasıl kavradıkları anlaşılma çalışılmıştır. Çalışmada bir açının büyüklük ya da geometrik bir figür olarak ele alındığı ve açı kavramını anlamada öğrencilerin bu iki durumu nasıl koordine edebileceklerini açı ve açı ölçümünü nasıl anlamlandırdıkları anlaşılma çalışılmıştır. Elde edilen bulgulardan hareketle aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır: MWS modelini daha iyi anlamak; epistemolojik ve bilişsel düzlemler arasındaki etkileşimi ve öğrenme-öğretmeye katkısı ve oynadığı rolün

formüle edilmesi zordur. Bu çalışmada da eşitlik ve değişken kavramının farklı yorumlanma biçimlerinin işe koşulma durumları Matematiksel Çalışma Uzayı teorik çerçevesinde incelenmiş ve benzer şekilde semiyotik oluşum sürecinde eşitlik kavramına dair öğrencilerin gözünde canlanan farklı yorumlamalarla ilişkili durumların, terazi modeli ile de beraber zenginleştiği görülmüştür. Terazi modelinin öğrencilerin temel ilişkisel yorumlama biçimini işe koşmalarında destekleyici bir rol üstlendiği belirlenmiştir. Öğrencilerin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı problemin çözümünde bir algoritma gibi işe koşabildikleri ancak terazi modelinin her durum için anlamlı bir destekleyici olamadığı görülmüştür. Örneğin bazı öğrencilerin $8+9=(8+2)+(9-2)$ ifadesinde eklenen ve çıkarılan sayıların aynı olduğu ve terazinin aynı kefesinde olduğu yorumunu yaparak dengenin bozulmayacağını ifade edilebildikleri görülürken; tüm öğrencilerin $5+4=6+3$ ifadesinde 5 sayısının 1 artarak 6 olduğu ve bu nedenle 4 sayısının da 1 azalarak 3 olduğunda dengenin değişmeyeceğini bir algoritma olarak ifade edebildiği ama terazi modeli ile anlamlı ilişkilendirmeyi yapamadığı görülmüştür. Bu süreçte öğrencilerin eşitlik kavramına dair semiyotik oluşumlarının zenginleşmesi adına sözel, cebirsel, terazi modeli, aritmetik, gerçek yaşam bağlamı gibi farklı temsillerle karşılaşmaları sağlanmaya çalışılmış ve böylece öğrencilerin eşitlik kavramının farklı yorumlanmalarını farklı temsillerle desteklenmeye çalışılmıştır. Değişken kavramının işlemsel ve ilişkisel yorumunu desteklemek amacıyla içinde miktarı bilinmeyen bir çokluğun yer aldığı kutu/torba öğrencilerin değişken kavramına dair imajını zenginleştirmiş ama değişkenin genelleştirilmiş sayı ve birbirine bağlı değişen nicelikleri temsil etme yorumlarında anlamlı bir etkisi olduğu görülmemiştir.

Miranda, Pluvinae, ve Adjage (2016)'ın çalışmasında amaç fonksiyonların yakınlaştırılması konusunda (tanjant ve asimtot) iki farklı yaklaşımın gerçekleştirildiği iki bağlamı incelemektir. Çalışmalardan elde edilen bulgular ve sonuçları şu şekilde ifade etmek mümkündür: çalışmalarda gözlemlerle desteklenen görselleştirme, çizim ile desteklenen inşa etme semiyotik bileşenle ilişkili süreçlerinden sonra söylemsel oluşuma uzanıp gerekçelendirme ile desteklenen kanıtlama yapmak önerilmiştir. Çalışmanın sonunda Kuzniak ve Richard'ın MWS modelini genişleten Şekil. 4.2 ortaya koyulmuştur.



Şekil 4. 2. Miranda, Pluvine, ve Adjiage (2016)'ın MWS modeli

Bu çalışmada da Miranda, Pluvine, ve Adjiage (2016)'ın çalışmasında epistemolojik düzlemle bilişsel düzlem arasında olduğu düşünülen ve epistemolojik düzlemde bilişsel düzlemle geçişte desteklenmesi gereken bir ara düzlem olarak ifade edilen fenomenolojik düzlemin görüldüğüne ilişkin veriler elde edilmiştir. Örneğin semiyotik oluşumda semiyotik bir araç olarak ele alınan eşit işaretinin gözünde nasıl canlandığına ilişkin derinlemesine sorgulamalarda öğretimden önce iki öğrencinin anlamından uzak sadece şekil olarak iki çizgi olan eşit işaretinin kendisinin gözünün önünde canlandığını belirttiği görülürken, diğer iki öğrencinin de kesin işlemsel yorumlamayı destekleyen: işlem yapıp sonucun yazıldığı örnekleri gözlerinde canlandırabildikleri görülmüştür. Öğretim süresince farklı bağlamlar, olaylar ve örnek durumları semiyotik oluşumun fenomenolojik düzlemindeki gözlemleme bileşeninde olduğu gibi etkin bir şekilde katılarak gözlemleyen tüm öğrencilerin gözünde öğretimden sonra terazi modelinin canlandığı; terazinin dengede, aynı hizada durduğu temel ilişkisel yorumlamaları kullanabilecekleri örnek durumları hayal ettikleri; bunun yanında kesin işlemsel, esnek işlemsel yorumlamaları kullanabilecekleri farklı

durumları da gözünde canlandırabildikleri görülmüştür. Enstrümantal oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerde teknolojik bir araç olan terazi modelini problemin çözümünde işe koşmada, terazi modelini çizerek fenomenolojik düzlemde yer alan çizim bileşenine benzer şekilde desteklenmeye çalışılmış ve problem durumunu terazi modeli ile görselleştirebilmesi ve problemin çözümünde teraziye işe koşarak kullandığı teknikleri açıkça ifade etmesi sağlanmaya çalışılmıştır. Söylemsel oluşum bağlamında ise öğrenciye süreç içerisinde yaptığı adımların ve söylediği ifadelerin doğruluğunu açıklaması, neden-niçin sorularına cevap vermesi, soruların genişletilmiş farklılaştırılmış durumlara uyarlandığında nasıl yorumlanacağına ilişkin görüşleri ortaya çıkarılarak doğrulayıcı açıklamalar-gerekçelendirmeler yapması sağlanmaya çalışılmıştır. Öğrencilerden elde edilen veriler ışığında elde edilen sonuca bakıldığında öğrencilerin temel ilişkisel yorumlama biçimini kullanarak doğrulayıcı açıklamalar yapabildiği ancak bu açıklamaların formal bir ispat düzeyinde olmadığı görülmüştür. Karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanarak doğrulayıcı açıklamalar yaparken bu yorumlama biçimini kullanarak yaptıkları adımları bir algoritma, kural, örüntü gibi bahsederek doğruladıkları ancak genelleyici bir ifadeye ulaşmaları adına yapılan rehberlikte öğrencilerin sınırlı sayıda örnekte elde ettikleri durumu genellemek için yeterli buldukları görülmüştür. Bu durum formal bir ispat için yeterli olmasa da bu çalışmada yer alan yaş grubundaki öğrenciler için tümevarımsal bir düşünme biçimini genelleyici bir doğrulama için kullanmayı önermeleri adına olumlu bir gelişme olarak görülebilir.

Elia, Özel, Gagatsis, Panaoura ve Özel (2016) çalışmasında öğrencilerin mutlak değer kavramı, mutlak değerdeki çeşitli maddelerde gösterdikleri performans, bu öğelerdeki hataları ve öğrencilerin kavramlar ile performansları ve hataları arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Çalışmadan elde edilen sonuçları şu şekilde ifade etmek mümkündür: mutlak değer kavramı açısından, iki ülke arasındaki referans ve uygun MWS farklılıklarını gösteren bir çelişki görülmüştür. Türkiye için en çok kullanılan tanım olan '0'a olan uzaklık', söylemsel akıl yürütmeyi içeren öğelerin çözümüne olumlu destek vermiştir. Bu durum, Kıbrıs'ta en yaygın mutlak değer tanımı olan 'işareti olmayan' şeklinde olduğu için Kıbrıs için akıl yürütmeye olumlu destek vermede geçerli olmamıştır. Bu çalışmada, Türkiye'de ve Kıbrıs'taki öğrencilerin mutlak değeri üç farklı şekilde kavramsallaştırdıkları bulunmuştur: sıfırdan uzaklığa, işaretsiz sayıya

ve resmi tanımda belirtildiği gibi. Bu bulgu, aynı kavram için kişisel MWS de öğrencilerin çeşitliliğinin bir göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Bu çalışmada da eşitlik kavramının farklı yorumlama biçimlerine ilişkin destekleyici-tanımlayıcı kavramların-ifadelerin çalışma süresince çeşitlendiği, farklılaştığı görülmüş; bu durumun öğrencilerin kavram imajını zenginleştirme, geliştirmenin bir yansıması olduğu düşünülmüştür. Çalışmanın başında öğrencilerin gözünde canlanan ve eşit kavramını düşündüklerinde akıllarına gelen sınırlı sayıda örnek ve durum varken ve aynı zamanda sınırlı sayıda destekleyen ifadeler kullandıkları görülürken; çalışma süresince öğrencilerin eşit işaretinin yer aldığı sorularda farklı yorumlama biçimlerini kullanırken kavramı destekleyen ifadelerinin zenginleştiği görülmüştür.

Jones, Inglis, Gilmore ve Dowens (2012) çalışmasında çocukların sahip olduğu iki yaygın kavramı tanımlamıştır: işlem yaptıran eşit işareti ve denklemin her iki tarafında da aynı değeri işaret eden eşit işareti. Burada, bu iki kavramın yanı sıra, ikame kavramının da karmaşık bir matematiksel eşdeğerlik anlayışının önemli bir parçası olduğu görülmüştür. Çalışmanın sonunda öğrencilerin ifadelerinden eşitlik kavramına ilişkin tahmin edilen anlayışlarına yönelik aşağıdaki sınıflandırmaya ulaşılmıştır. İşlemsel: ...sorunun cevabı, ...sonucu hesapla, ...toplam; aynılık: ...iki miktarın aynı olduğu, ...her iki taraf da aynı değerdedir, ...bir şeyin başka bir şeye eşit olması; yerine geçme: ...bir taraf diğerinin yerini alabilir,...sağ taraf sol tarafla değiştirilebilir, ...iki tarafın değiş tokuş edilebileceğini; işaret eden: ...sorunun sonu, ...sorunun başlangıcı, ...sayıları tekrarlamak için. Bu çalışmada da benzer şekilde öğrencilerin eşitlik kavramının farklı yorumlanma biçimlerini tanımlayan, destekleyen ifadeleri eşit işaretini işe koştukları problem durumunda doğrulayıcı açıklamalarına ilişkin göstergeleri içeren söylemsel oluşum boyutunda belirlenmeye çalışılmış, sonuç bölümünde ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır. Jones, Inglis, Gilmore ve Dowens, (2012)'ın çalışmasında eşit işaretinin işlemsel yorumlandığı durumlarda kullanılan destekleyici ifadeleri '...sorunun cevabı, ...sonucu hesapla, ...toplam' şeklinde ifade edilirken; bu çalışmada 'sonucu/cevabı belirtmek/göstermek/belli etmek/yazmak/anlatmak için, bir şeyleri/bir sayıyı göstermek/işaret etmek, topladığı sayıyı/o sayıyı/bulduğu sayıyı/toplamını belirtmek/göstermek, sonucu budur, cevabı vermek, bütün işlemlerin sonucu bitiştir, sorudan sonra cevabı belirtmek için, sonucun/cevabın öncesinde/önüne konur, toplamın....'a eşit olduğunu/geldiğini/ettiğini

göstermek için, toplamından/farkından önce yazılan sembol, eşittir, sonuçla yapılır' şeklinde çeşitli ifadelerin öğrenciler tarafından kullanıldığı görülmüştür. Aynı zamanda çalışmamızda öğrencilerin söylemsel oluşum sürecinde kullandıkları ifadeler eşit işaretini yorumlama biçimlerini (kesin işlemsel, esnek işlemsel, temel ilişkisel, karşılaştırmalı ilişkisel ve ayırıcı) tanımlamak için kullandıkları ifadeler bağlamında sınıflandırıldığından Jones vd. (2012)'nin 'işlemsel, aynılık, yerine geçme, işaret eden' bağlamında yapılan sınıflandırmasından farklılaşmıştır.

Asquith, Stephens, Knuth ve Alibali, (2007) çalışmasında öğretmenlerin, öğrencilerine ilişkin temel cebirsel kavramları anlama konusundaki bilgilerine odaklanmıştır. Araştırmada özellikle ortaokul matematik öğretmenlerinin öğrencilerin eşit işareti ve değişkeni anlamalarına ilişkin bilgileri ve öğrencilerin bu kavramları anlamaları ve sorularda işe koşma başarıları incelenmiştir. Öğretmenlerin, öğrencilerin değişkenleri anlamalarına ilişkin tahminleri, öğrencilerin karşılık gelen maddelere verdiği gerçek yanıtlarla büyük ölçüde uyumludur. Buna karşılık, öğretmenlerin öğrencilerin eşit işaretini anlamalarına ilişkin tahminleri, gerçek öğrenci yanıtlarıyla örtüşmemiştir. Bu çalışmada da öğrencilerin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı kullanmalarını desteklemek ve geliştirmek amacıyla öğrencilere rehberlik eden araştırmacı öğretmenin de kimi zaman işlemlerin sonucuna vurgu yaptığı; karşılaştırmalı ilişkisel yorumlamayı destekleyen ifadeler kullanmayıp temel ilişkisel yorumlamayı destekleyen ifadeler kullandığı görülmüştür.

Bu çalışmada kullanılan MWS, yeni ve gelişime açık bir teorik çerçeve olup kendi çalışmalarında MWS'yi kullanan bilim insanlarının modele katkıları olmuştur. Miranda, Pluvineau, ve Adjage (2016)'ın MWS modelinde epistemolojik ve bilişsel düzlemler arasındaki etkileşime ara bir düzlem olan fenomenolojik düzlemi dahil ettiği görülmüştür. Bu çalışmada da benzer şekilde semiyotik oluşum sürecinde temsil ve görselleştirme arasındaki etkileşimi kuvvetlendirdiği düşünülen gözlemlenebilir bileşenin varlığı hissedilmiştir. Öğrencilerin eşitlik kavramına dair gözünde canlandırdıkları imajı zenginleştiren önemli bir unsur olan gözlemlenebilir bileşeni ile eşit işaretinin kesin işlemsel, esnek işlemsel, temel ilişkisel, karşılaştırmalı ilişkisel ve ayırıcı yorumlama biçimlerinin işe koşulduğu farklı durumları inceleme, deneyime girme, farkındalık oluşması ile eşit işaretiyle ilişkili semiyotik oluşum sürecinin daha etkili, daha zengin ve daha bütüncül olduğu düşünülmüştür. Buradan hareketle düzlemler arasındaki

etkileşimde, öğrencinin işe koştuğu temsili bütüncül anlamlandırmayı destekleyen, bileşenlerin birbiri ile etkileşim içinde olduğu sarmal bir yapının varlığı anlamlı bulunmuştur. Aynı şekilde enstrümantal oluşum sürecinde de eşitlik kavramını anlamlandırmak ve problemi çözmek için işe koşulan terazi modelinin etkin bir enstrümana dönüşmesinde fenomenolojik düzlemde yer alan çizim bileşeninin önemli bir katkısı olduğu hissedilmiştir. Terazi modelinin eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerinde etkin bir enstrümana dönüşebilmesi için farklı yorumlama biçimlerinde işe koşulduğu deneyimlere girmesi; farklı yorumlama biçimlerinin kullanılacağı problem durumlarını modellemesi, çizmesi enstrümantal oluşum sürecinin zengin ve bütüncül olmasını destekleyeceği düşünülmüştür. Benzer şekilde söylemsel oluşum sürecinde öğrencilerin eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerinin özelliğini ifade ederek problem durumunda yaptığı adımların doğruluğunu açıklayabilmesinin, gerekçelendirebilmesinin daha üst düzey bir bilişsel süreç olarak ispat bileşeninin önkoşulu niteliğinde olduğu düşünülmüştür. Problem durumunda eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerini işe koşması ve bu yorumlama biçimlerinin özelliği ile ilgili farkındalığının olması ve bu özelliklerden yararlanarak problem çözümünde kullandığı teknikleri doğrulaması, konunun epistemolojik düzlemi ile bağlantılı olmak üzere ispatın gerekli olduğu farklı durumlarda bu oluşum sürecini etkili bir şekilde kullanabilmesini destekleyeceği düşünülmüştür.

4.3.Öneriler

Bu bölümde araştırma sonuçlarına dayalı olarak uygulamaya ve ileride yapılacak araştırmalara yönelik olarak geliştirilen öneriler sunulmaktadır.

4.3.1. Uygulamaya yönelik öneriler

- Bu çalışmada MWS'ye dayalı bir öğretim ortamı tasarımı ve bu tasarımın öğrencilerin bilişsel süreçlerine etkisinin yine MWS modelinin kullanılarak analiz edildiği bir öğretim deneyi sürecini ayrıntılı şekilde betimlendiğinden öğretmen adayları ve öğretmenler için etkili bir matematiksel çalışma ortamı yaratabilmek adına matematiksel çalışma uzayı teorik çerçevesinin nasıl kullanılacağına ilişkin bir rehber görevi görebilir. Öğretmen veya öğretmen adaylarının MWS teorik çerçevesinin öğretim tasarımında nasıl yer bulacağı ve

öğrenci öğrenmesinin yine MWS bağlamında nasıl analiz edilebileceği ile ilgili eğitim almaları sağlanabilir. Bu eğitimlerin belirli bir konu ya da kavram için tasarlanmış örnek uygun çalışma uzayları ile somutlaştırılması ve bu uygun çalışma uzaylarının öğrencilerin bilişsel süreçlerine etkisini ortaya çıkaracak şekilde verilmesi sağlanabilir.

- Çalışmamızda, elde edilen veriler ışığında ortaya koyulan, öğrencilerin eşit işaretine ilişkin kavram yanlışları, zorlukları, hatalarından yola çıkarak uygun matematiksel çalışma uzayı bağlamında bu kavram yanlışları, hataları, zorlukları ortadan kaldırmaya ya da azaltmaya yönelik öğretim tasarımı yapılabilir.
- Bu çalışmada kullanılan ilişkisel yorumlamayı destekleyen etkinlik, alıştırma ve materyallerin öğretim deneyi sürecinde öğrencilerde nasıl bir değişim/gelişimi sağladığı ayrıntılı betimlendiğinden ve yapılan alan yazın taraması ile görülen öğrencilerin eşitlik ve değişken kavramlarının ilişkisel yorumlanmasının arimetikten cebire geçişi kolaylaştıracağı yönündeki önerilerden hareketle ilişkisel yorumlamayı destekleyecek yönde tasarlanan çalışmaların ders kitaplarında daha fazla yer alması sağlanarak referans çalışma uzayının bu alandaki eksikliği giderilebilir.
- Çalışmamızda elde edilen veriler ışığında öğrencilerin eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerini tanımlamak, desteklemek için kullandığı ifadeler Tablo 4.1’de belirlenmiş olup çalışmamızın aynı zamanda bir öğretim deneyi tasarımı olması sebebiyle de öğretmen ve öğretmen adaylarının eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerine ilişkin öğrencilerde farkındalık yaratmak, farklı yorumlama biçimlerinin farklılık ve benzerliklerini ortaya koymada veya problem çözümünde yaptıkları adımları gerekçelendirme, doğrulayıcı açıklamalar ifade etmede yararlanabilecekleri söylemlere ilişkin çeşitlilik açısından rehber görevi görebilir.

4.3.2. İleride yapılacak araştırmalara yönelik öneriler

- MWS modelinin hem öğretim ortamının tasarımında hem de süreçte elde edilen verilerin analizinde işe koşulmasıyla Şekil 4.1’de görüldüğü gibi MWS modeli çalışmamıza uyarlanmıştır. MWS modelinin kullanıldığı, farklı kavramların

öğrenilmesi sürecinde Şekil 4.1’de görülen modelin anlamlı ve işlevsel olması bakımından değerlendirildiği farklı çalışmalar yürütülebilir.

- Çalışmada söylemsel oluşumun bileşenlerine ilişkin göstergelerden hareketle elde edilen veriler ışığında öğrencilerin eşit işaretinin farklı yorumlama biçimlerini tanımlamak, desteklemek için kullandığı ifadelerin belirlendiği Tablo 4.1’de yer alan ifadelerin farklı düzey öğrenciler, farklı öğretim tasarımı içeren başka çalışmalarda nasıl olacağını ortaya koyan çalışmalar yürütülebilir.
- Çalışmamızda eşilik ve değişken kavramlarına yönelik tasarlanan öğretim ortamı MWS teorik çerçevesi ile incelendiğinden farklı kavramların anlamlı öğrenilebilmesi için tasarlanan uygun matematiksel çalışma uzaylarının öğrencilerin bilişsel süreçlerine etkisinin, matematiksel çalışma uzayındaki oluşumlar ve oluşumların ikiyeşerli kombinasyonu bağlamında incelendiği çalışmalar yürütülebilir.
- Çalışmamızda eşitlik kavramına ilişkin ortaya çıkan kavram yanlışlarını, hata ve zorlukları ortadan kaldırmaya ya da azaltmaya yönelik yeni öğretim sürecinin MWS teorik çerçevesi bağlamında tasarlanıp, bu tasarımın öğrenci zorluklarına kavram yanlışlarına etkisi bağlamında incelenmesine yönelik bir çalışma yürütülebilir.
- Çalışmamızda, eşit işaretinin karşılaştırmalı ilişkisel yorumlanmasının değişken kavramının ilişkisel yorumlanmasına bir önkoşul olabileceği görülmüş olup eşitlik ve değişken kavramlarının birbirine etkisi bağlamında farklı çalışmalar MWS teorik çerçevesi ışığında yürütülebilir.
- Bu çalışma pandemi döneminde uzaktan eğitim ile yürütüldüğünden aynı uygun çalışma uzayı kullanılarak yüz yüze eğitim ile de çalışma yürütülebilir.
- Bu çalışma bir öğretim dönemi içerisinde tamamlanmış olup daha uzun soluklu çalışmalarla (5., 6., 7. ve 8. sınıf olacak şekilde) öğrencilerin eşitlik kavramının ilişkisel yorumlamasını destekleyen uygun çalışma uzayının öğrencilerin bilişsel süreçlerindeki etkisi incelenebilir.

KAYNAKÇA

- Akkan, Y. (2009). *İlköğretim öğrencilerinin aritmetikten cebire geçiş süreçlerinin incelenmesi*. Yayınlanmamış doktora tezi. Trabzon: KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Akkan, Y., Akkan, P. ve Güven, B. (2017). Aritmetik ve cebir kavramları ile ilgili farkındalık. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 12(24), 527-558.
- Akkan, Y., Baki, A., ve Çakıroğlu, Ü. (2011). Aritmetik ile cebir arasındaki farklılıklar: Cebir öncesinin önemi. *İlköğretim Online*, 10(3).
- Akkan, Y. ve Baki, A. (2016). Ortaokul öğrencilerinin aritmetikten cebire geçiş süreçlerinin incelenmesi: Sembollerin kullanımı ve harflerin anlamı. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(2), 270-304.
- Akkan, Y., ve Baki, A. (2016). Examining of secondary school students' transition to algebra in the context of making properties in natural number system visible via generalization. *Adıyaman University Journal of Educational Sciences*, 6(2), 198-230.
- Akkan, Y., Baki, A., ve Çakıroğlu, Ü. (2012). 5-8. sınıf öğrencilerinin aritmetikten cebire geçiş süreçlerinin problem çözme bağlamında incelenmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 43(43), 1-13.
- Akkaya, R. ve Durmuş, S. (2010). İlköğretim 6. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanındaki kavram yanlışlarının giderilmesinde çalışma yapraklarının etkililiği. *Dumlupınar Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, (27), 7-26.
- Alibali, M. W., Knuth, E. J., Hattikudur, S., McNeil, N. M., Stephens, A. C. (2007). A longitudinal examination of middle school students' understanding of the equal sign and equivalent equations. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(3), 221-247.
- Artigue, M., Assude, T., Grugeon, B. and Lenfant, A. (2001). Teaching and learning algebra: Approaching complexity through complementary perspectives. *In The future of the Teaching and Learning of Algebra, Proceedings of 12 th ICMI Study Conference*. The University of Melbourne, Australia (pp. 21-32).
- Artigue, M. (2016). Mathematical working spaces through networking lens. *ZDM*, 48(6), 935-939.
- Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J., Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic concepts: Equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(3), 249-272.

- Barrera, R. (2013). On the meanings of multiplication for different sets of numbers in context of geometrization: Descartes' multiplication, mathematical workspace and semiotic mediation. *Mathematics Teaching-Research Journal Online*, 6(1-2), 1-20.
- Bayar, H. (2007). I. *dereceden bir bilinmeyenli denklem konusundaki öğrenci hatalarının analizi*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Balıkesir: Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Behr, M., Erlwanger, S. and Nichols, E. (1980). How children view the equals sign. *Mathematics Teaching*, 92(1), 13-15.
- Beberman, M. and Meserve, B. E. (1955). The concept of a literal number symbol. *The Mathematics Teacher*, 48(4), 198-202.
- Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., Kim, J. S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(1), 39-87.
- Boggs, G., Whitacre, I., Schellinger, J., Champagne, Z., Schoen, R. (2018). Contextual meanings of the equals sign as conceptual blends. *For the Learning of Mathematics*, 38(2), 34-39.
- Borko H., Frykholm J., Pittman M., Eiteljorg E., Nelson M., Jacobs J., Koellner-Clark K., Schneider C. (2005). Preparing teachers to foster algebraic thinking. *ZDM*, 37(1), 43-52.
- Britt, M.S. and Irwin, K.C. (2011). Early Algebraization. J. Cai ve E. Knuth (Editörler). In *Algebraic thinking with and without algebraic representation: A Pathway for learning* (s.137-159). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A., Murphy Gardiner, A. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning*, 17(1), 34-63.
- Bulut, D. B., Aygün, B. ve İpek, A. S. (2018). Meaning of the primary and secondary school students towards equal sign. *Turkish Journal of Teacher Education*, 7(1), 1-16.
- Byrd, C. E., McNeil, N. M., Chesney, D. L., Matthews, P. G. (2015). A specific misconception of the equal sign acts as a barrier to children's learning of early algebra. *Learning and Individual Differences*, 38, 61-67.
- Cai, J. (2004). Why do US and Chinese students think differently in mathematical problem solving?: Impact of early algebra learning and teachers' beliefs. *The Journal of Mathematical Behavior*, 23(2), 135-167.

- Cai, J. (2004). Developing algebraic thinking in the earlier grades: A case study of the Chinese elementary school curriculum. *The Mathematics Educator*, 8(1), 107-130.
- Cai, J. and Knuth, E. (2011). Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives. Springer. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-17735-4> . (Erişim Tarihi: 18.02.2024).
- Cai, J. and Lester Jr, F. K. (2005). Solution representations and pedagogical representations in Chinese and US classrooms. *The Journal of Mathematical Behavior*, 24(3-4), 221-237.
- Cai, J., Lew, H. C., Morris, A., Moyer, J. C., Ng, S. F., Schmittau, J. (2005). The development of students' algebraic thinking in earlier grades. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(1), 5-15.
- Cai, J. and Moyer, J. (2008). Developing algebraic thinking in earlier grades: Some insights from international comparative studies. *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics*, 70, 169-182.
- Carraher, D. W., Martinez, M. V. and Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, 40(1), 3-22.
- Carraher, D., Schliemann, A. D. and Brizuela, B. M. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. In *Presentado en the Twenty-second annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Tucson, Arizona. https://www.researchgate.net/publication/333245675_Early_Algebra_Early_Arithmetic_Treating_Operations_as_Functions_Plenary_Presentation_at_PME-NA_XXII_Tucson_AZ_October_7-10_2000 . (Erişim Tarihi: 27.12.2023).
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D. and Brizuela, B. M. (2001). Can young students operate on unknowns? In M. van der H.-P. (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 130–140). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Institute.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics education*, 37(2), 87-115.
- Caspi, S. and Sfard, A. (2012). Spontaneous meta-arithmetic as a first step toward school algebra. *International Journal of Educational Research*, 51-52, 45-65.
- Chazan, D., Yerushalmy, M. and Leikin, R. (2008). An analytic conception of equation and teachers' views of school algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, 27(2), 87-100.

- Christou, K. P. and Vosniadou, S. (2012). What kinds of numbers do students assign to literal symbols? Aspects of the transition from arithmetic to algebra. *Mathematical Thinking and Learning*, 14(1), 1-27.
- Çelik, D. ve Güneş, G. (2013). Farklı sınıf düzeyindeki öğrencilerin harfli sembollerini kullanma ve yorumlama seviyeleri. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri Dergisi*, 13(2), 1168-1186.
- Çelik, H. S. ve Masal, E. (2018). 7. Sınıf öğrencilerinin denklem ve eşitlik konusundaki öğrenmelerine öğrenci bileşeni açısından bir bakış. *Sakarya University Journal of Education*, 8(2), 168-186.
- Dede, Y. ve Argün, Z. (2003). Cebir, öğrencilere niçin zor gelmektedir. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24(24), 180-185.
- Delgadillo, E. M. and Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM*, 48(6), 739-754.
- Delgadillo, E., Viola, F. and Vivier, L. (2017). Choosing a Mathematical Working Space in a modelling task: The influence of teaching. *In CERME 10*.
- Demonty, I., Vlassis, J. and Fagnant, A. (2018). Algebraic thinking, pattern activities and knowledge for teaching at the transition between primary and secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, 99(1), 1-19.
- Derouet, C. and Parzysz, B. (2016). How can histograms be useful for introducing continuous probability distributions?. *ZDM*, 48(6), 757-773.
- Derouet, C., Kuzniak, A., Nechache, A., Parzysz, B. and Vivier, L. (2017, February). The Mathematical Working Space model: An open and adaptable theoretical framework?. *In CERME 10* (Vol. 17).
- Diaz, J. D. (2014). *Signs of In/equality: A History of Representation and Reform in Elementary School Mathematics from the 1950s to the Present*. Unpublished Doctoral Dissertation. Wisconsin: The University of Wisconsin-Madison.
- Dickson, C. L. (2019). *Making Sense of the Equal Sign in Middle School Mathematics*. Unpublished Master's Thesis. Utah: Brigham Young University.
- Donker, M., Kroesbergen, E., Slot, E., Van Viersen, S., De Bree, E. (2016). Alphanumeric and non-alphanumeric rapid automatized naming in children with reading and/or spelling difficulties and mathematical difficulties. *Learning and Individual Differences*, 47, 80-87.
- Doğan Temur, Ö. ve Sancak, G. (2012). Dördüncü sınıf öğrencilerinin eşit işaretini nasıl algıladıklarının incelenmesi. *Milli Eğitim Dergisi*, 42(194), 240-252.

- Driver, M. K. and Powell, S. R. (2015). Symbolic and nonsymbolic equivalence tasks: The influence of symbols on students with mathematics difficulty. *Learning Disabilities Research & Practice*, 30(3), 127-134.
- Elia, I., Özel, S., Gagatsis, A., Panaoura, A., Özel, Z. E. Y. (2016). Students' mathematical work on absolute value: focusing on conceptions, errors and obstacles. *ZDM*, 48(6), 895-907.
- Erdem, Ö. ve Aktaş, G. S. (2018). Ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanında yaşadıkları kavram yanlışlarının giderilmesinde etkinlik temelli öğretimin değerlendirilmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 9(2), 312-338.
- Erdem, Z. Ç. ve Gürbüz, R. (2017). Öğrencilerin hata ve kavram yanlışları üzerine bir inceleme: Denklem örneği. *Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 14(1), 640-670.
- Eriksson, H. and Eriksson, I. (2021). Learning actions indicating algebraic thinking in multilingual classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 106(3), 363-378.
- Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D. and Christou, C. (2018). Examining early algebraic thinking: Insights from empirical data. *Educational Studies in Mathematics*, 98(1), 57-76.
- Ferrara, F. and Sinclair, N. (2016). An early algebra approach to pattern generalisation: Actualising the virtual through words, gestures and toilet paper. *Educational Studies in Mathematics*, 92(1), 1-19.
- Flores-Medrano, E., Montes, M. A., Carrillo, J., Contreras, L. C., Muñoz-Catalán, M., Liñán, M. (2016). The role of MTSK as model of teachers' knowledge in the relationship between Mathematical Working Spaces. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30(54), 204-221.
- Fischer, J. P., Sander, E., Sensevy, G., Vilette, B., Richard, J. F. (2019). Can young students understand the mathematical concept of equality? A whole-year arithmetic teaching experiment in second grade. *European Journal of Psychology of Education*, 34(2), 439-456.
- Fried, M. N. (2011). Signs for you and signs for me: The double aspect of semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2), 389-397.
- Fyfe, E. R., Matthews, P. G. and Amsel, E. (2020). College developmental math students' knowledge of the equal sign. *Educational Studies in Mathematics*, 104(1), 65-85.
- Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I., Panaoura, A., Michael-Chrysanthou, P. (2016). Fostering representational flexibility in the mathematical working space of rational numbers. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30, 287-307.

- Girit, D. ve Akyüz, D. (2016). Algebraic thinking in middle school students at different Grades: Conceptions about generalization of patterns. *Education Journal of Science and Mathematics Education*, 10(2), 243-272.
- Glesne, C. (2012). *Nitel araştırmaya giriş* (Çev. A. Ersoy, ve P. Yalçınoglu). Ankara: Anı Publishing.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2), 247-265.
- Gómez-Chacón, I. M. and Kuzniak, A. (2015). Spaces for geometric work: figural, instrumental, and discursive geneses of reasoning in a technological environment. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(1), 201-226.
- Gómez-Chacón, I. M., Albaladejo, I. M. R. and López, M. D. M. G. (2016). Zig-zagging in geometrical reasoning in technological collaborative environments: a Mathematical Working Space-framed study concerning cognition and affect. *ZDM*, 48(6), 909-924.
- Gray, S. S., Loud, B. J. and Sokolowski, C. P. (2009). Calculus students' use and interpretation of variables: Algebraic vs. arithmetic thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 9(2), 59-72.
- Gürbüz, R. ve Akkan, Y. (2010). Farklı öğrenim seviyesindeki öğrencilerin aritmetikten cebire geçiş düzeylerinin karşılaştırılması: Denklem örneği. *Eğitim ve Bilim*, 33(148), 64-76.
- Gürbüz, R. ve Toprak, Z. (2014). Designation, implementation and evaluation of activities to ensure transition from arithmetic to algebra. *Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science & Mathematics Education*, 8(1), 178-200.
- Gürel, Z. Ç. ve Okur, M. (2017). 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin eşitlik ve denklem konusundaki kavram yanlışları. *Cumhuriyet Uluslararası Eğitim Dergisi*, 6(4), 479-507.
- Harbour, K. E., Karp, K. S. and Lingo, A. S. (2016). Inquiry to action: Diagnosing and addressing students' relational thinking about the equal sign. *Teaching Exceptional Children*, 49(2), 126-133.
- Hattikudur, S. and Alibali, M. W. (2010). Learning about the equal sign: Does comparing with inequality symbols help?. *Journal of experimental child psychology*, 107(1), 15-30.

- Herscovics, N. and Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational studies in mathematics*, 27(1), 59-78.
- Hewitt, D. (2012). Young students learning formal algebraic notation and solving linear equations: are commonly experienced difficulties avoidable?. *Educational Studies in Mathematics*, 81(2), 139-159.
- Hitt, F. and González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational studies in mathematics*, 88(2), 201-219.
- Hitt, F., Saboya, M. and Zavala, C. C. (2016). An arithmetic-algebraic work space for the promotion of arithmetic and algebraic thinking: triangular numbers. *ZDM*, 48(6), 775-791.
- Hitt, F., Saboya, M. and Zavala, C. C. (2017). Rupture or continuity: The arithmetico-algebraic thinking as an alternative in a modelling process in a paper and pencil and technology environment. *Educational Studies in Mathematics*, 94(1), 97-116.
- Hohensee, C. (2017). Preparing elementary prospective teachers to teach early algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 20(3), 231-257.
- Humberstone, J. and Reeve, R. A. (2008). Profiles of algebraic competence. *Learning and Instruction*, 18(4), 354-367.
- İspir, O. A. ve Palabıyık, U. (2011). Örüntü temelli cebir öğretiminin öğrencilerin cebirsel düşünme becerileri ve matematiğe karşı tutumlarına etkisi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30(30), 111-123.
- Jones, I., Inglis, M. and Gilmore, C. (2011). Imperative and punctuative operational conceptions of the equals sign. *Informal Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 31(1), 79-84.
- Jones, I., Inglis, M., Gilmore, C., Dowens, M. (2012). Substitution and sameness: Two components of a relational conception of the equals sign. *Journal of Experimental Child Psychology*, 113(1), 166-176.
- Jones, I., Inglis, M., Gilmore, C., Evans, R. (2013). Teaching the substitutive conception of the equals sign. *Research in Mathematics Education*, 15(1), 34-49.
- Jones, I. and Pratt, D. (2012). A substituting meaning for the equals sign in arithmetic notating tasks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(1), 2-33.
- Kabael, T. ve Akın, A. (2016). Yedinci sınıf öğrencilerinin cebirsel sözel problemlerini çözerken kullandıkları stratejiler ve niceliksel muhakeme becerileri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 24(2), 875-894.

- Kabael, T. U. ve Tanışlı, D. (2010). Cebirsel düşünme sürecinde örüntüden fonksiyona öğretim. *İlköğretim Online*, 9(1), 213-228.
- Kaput, J. (2007). What is algebra? What is algebraic reasoning?. Kaput, J., Carraher, D. and Blanton, M. (Eds.), In *Algebra in the Early Grades*, (s. 5–18). New York: Taylor & Francis.
- Kaya, D. (2017). Altıncı sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanındaki başarı düzeylerinin incelenmesi. *International e-Journal of Educational Studies*, 1(1), 47-59.
- Kaya, D. ve Keşan, C. (2014). İlköğretim seviyesindeki öğrenciler için cebirsel düşünme ve cebirsel muhakeme becerisinin önemi [the importance of the algebraic thinking and algebraic reasoning skills for primary school students]. *International Journal of New Trends in Arts, Sports & Science Education (IJTASE)*, 3(2). <http://www.ijtase.net/ojs/index.php/IJTASE/article/view/299>
- Kılıç, S. D. (2019). Öğretmen adaylarının 7. sınıf öğrencilerinin denklemler konusundaki hata ve kavram yanlışlarına ilişkin farkındalıkları. *Sakarya University Journal of Education*, 9(1), 184-207.
- Kidron, I. (2016). Epistemology and networking theories. *Educational Studies in Mathematics*, 91(2), 149-163.
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in Mathematics*, 12(3), 317-326.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.
- Knuth, E. J., Alibali, M. W., Hattikudur, S., McNeil, N. M., Stephens, A. C. (2008). The importance of equal sign understanding in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(9), 514.
- Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & variable. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(1), 68-76.
- Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for research in Mathematics Education*, 37(4), 297-312.
- Kolovou, A. and Heuvel-Panhuizen, M. V. D. (2010). Online game-generated feedback as a way to support early algebraic reasoning. *International Journal of Continuing Engineering Education and Life Long Learning*, 20(2), 224-238.

- Köse, N. Y. ve Tanışlı, D. (2011). Equal sign and relational thinking in elementary mathematics textbooks. *Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science & Mathematics Education*, 2(5), 251-277.
- Kuzniak, A., Nechache, A. and Drouhard, J. P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM*, 48(6), 861-874.
- Kuzniak, A., Parzysz, B. and Vivier, L. (2013). Trajectory of a problem: A study in teacher training. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1), 407-440.
- Kuzniak, A. and Rauscher, J. C. (2011). How do teachers' approaches to geometric work relate to geometry students' learning difficulties?. *Educational studies in Mathematics*, 77(1), 129-147.
- Kuzniak, A. and Richard, P. R. (2014). Spaces for mathematical work: Viewpoints and perspectives. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(4-I), 17-27.
- Kuzniak, A., Tanguay, D. and Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: An introduction. *ZDM*, 48(6), 721-737.
- Kuzniak, A. and Nechache, A. (2021). On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of Mathematical Working Spaces. *Educational Studies in Mathematics*, 106(2), 271-289.
- Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in school*, 7(4), 23-26.
- Li, X., Ding, M., Capraro, M. M., Capraro, R. M. (2008). Sources of differences in children's understandings of mathematical equality: Comparative analysis of teacher guides and student texts in China and the United States. *Cognition and Instruction*, 26(2), 195-217.
- Linchevski, L. and Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. *Educational studies in mathematics*, 30(1), 39-65.
- Lucariello, J., Tine, M. T. and Ganley, C. M. (2014). A formative assessment of students' algebraic variable misconceptions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33, 30-41.
- Madej, L. (2022). Primary school students' knowledge of the equal sign—the Swedish case. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20(2), 321-343.
- Malisani, E. and Spagnolo, F. (2009). From arithmetical thought to algebraic thought: The role of the “variable”. *Educational studies in mathematics*, 71(1), 19-41.

- Matthews, P., Rittle-Johnson, B., McEldoon, K., Taylor, R. (2012). Measure for measure: What combining diverse measures reveals about children's understanding of the equal sign as an indicator of mathematical equality. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(3), 316-350.
- Matthews, P. G. and Fuchs, L. S. (2020). Keys to the gate? Equal sign knowledge at second grade predicts fourth-grade algebra competence. *Child Development*, 91(1), e14-e28.
- McNeil, N. M. (2014). A change-resistance account of children's difficulties understanding mathematical equivalence. *Child Development Perspectives*, 8(1), 42-47.
- McNeil, N. M. and Alibali, M. W. (2005). Why won't you change your mind? Knowledge of operational patterns hinders learning and performance on equations. *Child development*, 76(4), 883-899.
- McNeil, N. M., Grandau, L., Knuth, E. J., Alibali, M. W., Stephens, A. C., Hattikudur, S., Krill, D. E. (2006). Middle-school students' understanding of the equal sign: The books they read can't help. *Cognition and instruction*, 24(3), 367-385.
- Merriam, S. B. (2013). *Nitel araştırma desen ve uygulama için bir rehber* (Çev. Ed. Sellahattin Turan). Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.
- Miller, J. A. (2014). *Understanding the equal sign as key to algebraic success: The effects of blended instruction on solving one-and two-step equations and conceptions of the equal sign for seventh grade students with mathematics learning difficulties*. Unpublished Doctoral Dissertation. Maryland: University of Maryland, College Park.
- Minh, T. K. and Lagrange, J. B. (2016). Connected functional working spaces: a framework for the teaching and learning of functions at upper secondary level. *ZDM*, 48(6), 793-807.
- Miranda, V. C., Pluvinage, F. and Adjage, R. (2016). Facilitating the genesis of functional working spaces in guided explorations. *ZDM*, 48(6), 809-826.
- Molina, M. and Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign. Thirds graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 30(1), 61-80.
- Molina, M., Castro, E. and Castro, E. (2009). Elementary students' understanding of the equal sign in number sentences. *Education & Psychology*, 17, 341-368.
- Montoya-Delgadillo, E., Mena-Lorca, J., Mena-Lorca, A. (2016). Nobel teacher's epistemological stability and mathematical working space. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30(54), 188-203.

- Nathan, M. J. and Koellner, K. (2007). A framework for understanding and cultivating the transition from arithmetic to algebraic reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(3), 179-192.
- Nikolantonakis, K. and Vivier, L. (2016). Future elementary school teachers' Mathematical Working Space for working with natural number in any base. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30(54), 23-44.
- Oksuz, C. (2007). Children's understanding of equality and the equal symbol. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 8, 1-19.
- Panasuk, R. and Beyranevand, M. (2010). Algebra Students' Ability to Recognize Multiple Representations and Achievement. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Available di <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/panasuk.pdf>
- Panero, M., Arzarello, F. and Sabena, C. (2016). The mathematical work with the derivative of a function: Teachers' practices with the idea of "generic". *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30, 265-286.
- Philipp, R. A. (1992). The many uses of algebraic variables. *The Mathematics Teacher*, 85(7), 557-561.
- Pollack, C., Leon Guerrero, S. and Star, J. R. (2016). Exploring mental representations for literal symbols using priming and comparison distance effects. *ZDM*, 48(3), 291-303.
- Powell, S. R. (2012). Equations and the equal sign in elementary mathematics textbooks. *The Elementary School Journal*, 112(4), 627-648.
- Powell, S. R. (2015). The influence of symbols and equations on understanding mathematical equivalence. *Intervention in School and Clinic*, 50(5), 266-272.
- Powell, S. R., Driver, M. K. and Julian, T. E. (2015). The effect of tutoring with nonstandard equations for students with mathematics difficulty. *Journal of Learning Disabilities*, 48(5), 523-534.
- Powell, S. R. and Fuchs, L. S. (2010). Contribution of equal-sign instruction beyond word-problem tutoring for third-grade students with mathematics difficulty. *Journal of Educational Psychology*, 102(2), 381.
- Powell, S. R., Gilbert, J. K., and Fuchs, L. S. (2019). Variables influencing algebra performance: Understanding rational numbers is essential. *Learn. Individ Differ.* 74:101758. doi: 10.1016/j.lindif.2019.101758

- Prediger, S. (2010). How to develop mathematics-for-teaching and for understanding: The case of meanings of the equal sign. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(1), 73-93.
- Presmeg, N. and Radford, L. (2008). On semiotics and subjectivity: A response to Tony Brown's "signifying 'students', 'teachers', and 'mathematics': A reading of a special issue". *Educational Studies in Mathematics*, 69(3), 265-276.
- Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational studies in mathematics*, 42(3), 237-268.
- Radford, L. and Puig, L. (2007). Syntax and meaning as sensuous, visual, historical forms of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 145-164.
- Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM*, 40(1), 83-96.
- Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19.
- Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. PNA. *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 6(4), 117-133.
- Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 257-277.
- Radford, L. (2015). Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues. In *The proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and attitudinal challenges* (pp. 209-227). Springer International Publishing.
- Radford, L. (2016). The epistemic, the cognitive, the human: a commentary on the mathematical working space approach. *ZDM*, 48(6), 925-933.
- Richard, P. R., Fortuny, J. M., Gagnon, M., Leduc, N., Puertas, E., Tessier-Baillargeon, M. (2011). Didactic and theoretical-based perspectives in the experimental development of an intelligent tutorial system for the learning of geometry. *ZDM*, 43(3), 425-439.
- Richard, P. R., Marcén, A. M. O. and Seguí, V. M. (2016). The concept of proof in the light of mathematical work. *ZDM*, 48(6), 843-859.
- Rittle-Johnson, B. and Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other?. *Journal of Educational Psychology*, 91(1), 175-189.

- Rittle-Johnson, B., Matthews, P. G., Taylor, R. S., McEldoon, K. L. (2011). Assessing knowledge of mathematical equivalence: A construct-modeling approach. *Journal of Educational Psychology*, 103(1), 85-104.
- Rodd, M. (2016). Transitioning from “It Looks Like” to “It Has To Be” in Geometrical Workspaces: affect and near-to-me attention. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30 (54), 142-164.
- Rosseel, Y. (2012). Lavaan: An R package for structural equation modeling and more. *Journal of statistical software*, 48(2), 1-36.
- Rugg, H. O. and Clark, J. R. (1917). Standardized tests and the improvement of teaching in first-year algebra. *The School Review*, 25(2), 113-132.
- Saenz-Ludlow, A. and Walgamuth, C. (1998). Third graders' interpretations of equality and the equal symbol. *Educational studies in mathematics*, 35(2), 153-187.
- Santarone, D., Abney, A. R. and Samples, B. (2020). Heading toward equality: Preservice teachers' interventions to change students' conceptions of the equal sign. *Investigations in Mathematics Learning*, 12(3), 208-225.
- Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L. and Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework. *ZDM*, 48(6), 827-842.
- Schoenfeld, A. H. and Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. The mathematics teacher, 81(6), 420-427.
- Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior*, 14(1), 15-39.
- Sfard, A. and Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification—the case of algebra. *Educational studies in mathematics*, 26 (2-3), 191-228.
- Sidney, P. G., Thalluri, R., Buerke, M. L., Thompson, C. A. (2019). Who uses more strategies? Linking mathematics anxiety to adults' strategy variability and performance on fraction magnitude tasks. *Thinking & Reasoning*, 25(1), 94-131.
- Smith, M. (2011). Early Algebraization. J. Cai ve E. Knuth (Editörler). *A Procedural Focus and a Relationship Focus to Algebra: How U.S. Teachers and Japanese Teachers Treat Systems of Equations*. (s.511-528). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Steffe, L. P. (1983). Children's Algorithms as Schemes. *Educational Studies in Mathematics*, 14(2), 109-125.

- Steffe, L. P. and Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. *Handbook of research design in mathematics and science education*, 267-306.
- Steinberg, R. M., Sleeman, D. H. and Ktorza, D. (1991). Algebra students' knowledge of equivalence of equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(2), 112-121.
- Stephens, A. C. (2006). Equivalence and relational thinking: Preservice elementary teachers' awareness of opportunities and misconceptions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(3), 249-278.
- Stephens, A. C., Knuth, E. J., Blanton, M. L., Isler, I., Gardiner, A. M., Marum, T. (2013). Equation structure and the meaning of the equal sign: The impact of task selection in eliciting elementary students' understandings. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(2), 173-182.
- Switzer, J. M. (2018). US grade 4-6 students' rational-number substitutions for odd-sum unknown addend tasks. *Investigations in Mathematics Learning*, 10(1), 33-53.
- Tanguay, D. and Venant, F. (2016). The semiotic and conceptual genesis of angle. *ZDM*, 48(6), 875-894.
- Tunks, J. and Weller, K. (2009). Changing practice, changing minds, from arithmetical to algebraic thinking: an application of the concerns-based adoption model (CBAM). *Educational Studies in Mathematics*, 72(2), 161-183.
- Turgut, S. ve Doğan, Ö. (2017). Erken cebir öğretim etkinliklerinin ilkököl dördüncü sınıf öğrencilerinin akademik başarılarına etkisi. *Amasya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 6(1), 1-31.
- Turgut, S. ve Temur, Ö. D. (2017). Sınıf öğretmenlerinin erken cebir düşüncelerinin belirlenmesi. *İlköğretim Online*, 16(4), 1469-1490.
- Ural, A. (2006). Fonksiyon öğreniminde kavramsal zorluklar. *Ege Eğitim Dergisi*, 7(2), 75-94.
- Van Amerom, B. A. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 54(1), 63-75.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., Kolovou, A. and Robitzsch, A. (2013). Primary school students' strategies in early algebra problem solving supported by an online game. *Educational Studies in Mathematics*, 84(3), 281-307.
- Vermeulen, C. and Meyer, B. (2017). The equal sign: teachers' knowledge and students' misconceptions. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 21(2), 136-147.

- Voutsina, C. (2019). Context variation and syntax nuances of the equal sign in elementary school mathematics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 19(4), 415-429.
- Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 15(2), 122-137.
- Watanabe, T. (2011). Early Algebraization. J. Cai ve E. Knuth (Editörler). In *Shiki: A Critical Foundation for School Algebra in Japanese Elementary School Mathematics*. (s. 109-124). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Weinberg, A., Dresen, J. and Slater, T. (2016). Students' understanding of algebraic notation: A semiotic systems perspective. *The Journal of Mathematical Behavior*, 100(43), 70-88.
- Yaman, H., Toluk, Z. ve Olkun, S. (2003). İlköğretim öğrencileri eşit işaretini nasıl algılamaktadırlar?. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24(24), 142-151.
- Yaman, H. ve Umay, A. (2013). İlköğretim öğrencilerinin sunum biçimlerine göre matematiksel örüntüleri algılayışları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28(28-1), 405-416.
- Yaman, H. ve Dündar, S. (2015). Cebir eğitimi almayan öğrenciler problem çözümlerinde denklemleri kullanabiliyorlar mı?. *Çankırı Karatekin Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 6(1), 255-276.
- Yeşildere-İmre, S., Akkoç, H. ve Baştürk-Şahin, B. N. (2017). Ortaokul öğrencilerinin farklı temsil biçimlerini kullanarak matematiksel genelleme yapma becerileri. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 8(1), 103-129.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2011). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (8.Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yıldız, P. ve Atay, A. (2019). Ortaokul beşinci sınıf öğrencilerinin eşit işaretine ilişkin anlamaları. *Ahi Evran Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 5(2), 426-438.
- Yıldızhan, B. ve Şengül, S. (2017). 6. Sınıf öğrencilerinin harflerin anlamına yönelik kavram yanılgılarının aritmetikten cebire geçiş süreci bağlamında incelenmesi ve öğrencilerin matematik tutumları ve öz yeterlikleri ile karşılaştırılması. *The Journal of International Lingual Social and Educational Sciences*, 3(2), 249-268.

EKLER

EK-1:ANADOLU ÜNİVERSİTESİ SOSYAL VE BEŞERİ BİLİMLER BİLİMSEL ARAŞTIRMA VE YAYIN ETİĞİ KURULU KARAR BELGESİ

Evrak Kayıt Tarihi: 15.02.2021	Protokol No: 25656	Tarih: 03.03.2021



ANADOLU ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL VE BEŞERİ BİLİMLER BİLİMSEL ARAŞTIRMA VE YAYIN ETİĞİ KURULU
KARAR BELGESİ

ÇALIŞMANIN TÜRÜ:	Doktora Tez Çalışması
KONU:	Eğitim Bilimleri
BAŞLIK:	Aritmetikten Cebire Geçişte Öğrencilerin Bilişsel Süreçlerinin Matematiksel Çalışma Uzayı Teorik Çerçevesinde İncelenmesi
PROJE/TEZ YÜRÜTÜCÜSÜ:	
TEZ YAZARI:	
ALT KOMİSYON GÖRÜŞÜ:	-
KARAR:	Olumlu

EK-2: UYGULAMA İZNİ



T.C.
OSMANGAZİ KAYMAKAMLIĞI
İlçe Milli Eğitim Müdürlüğü
Abdülhalim Altınoluk Uludağ Ortaokulu

Sayı : E-70228675-605.01-23608369
Konu : Araştırma Uygulama İzin Talebi

05.04.2021

Sayın;

İlgi : 05.04.2021 tarih ve 23591479 sayılı dilekçeniz.

İlgili dilekçenize istinaden doktora tezi kapsamında "Aritmetikten Cebire Geçişte Öğrencilerin Bilişsel Süreçlerinin Matematiksel Çalışma Uzayı Teorik Çerçevesinde İncelenmesi" konulu araştırmanızı 2020/2021 2. Dönemi ve 2021/2022 1. Döneminde okulumuzda yapmanız (Dilekçede belirtilen ekler ve araştırma/veri toplama araçları türleri kullanılarak) müdürlüğümüzce uygun görülmüştür.

Bilgilerinize rica ederim.

Bu belge gıvendi elektronik imza ile onaylanmıştır.
Adres : Kaplıca Mah. Dr. Sadık Ahmet Cd. No:261 Osmangazi BURSA
Telefon No : 0 (234) 271 66 25
E-Posta : 722237@meb.k12.tr
Kıp-Adresi : mebu@meb.k12.tr

Bu belge gıvendi elektronik imza ile onaylanmıştır.
İnternet Adresi : http://uludagortadokulu.meb.k12.tr/

Bilgi için : Mustafa E. E. E.
Uzman : Mustafa Yardımcı
Faks : 22421166

Bu belge gıvendi elektronik imza ile onaylanmıştır.
e1ae-13db-34f2-b941-df82 kısıtlı ile kayıt edilmiştir.



EK-3: ARAŞTIRMA GÖNÜLLÜ KATILIM FORMU

ARAŞTIRMA GÖNÜLLÜ KATILIM FORMU

Bu çalışma, 'Aritmetikten Cebire Geçişte Öğrencilerin Bilişsel Süreçlerinin Matematiksel Çalışma Uzayı Teorik Çerçevesinde İncelenmesi' başlıklı bir araştırma çalışması olup 'MWS (matematiksel çalışma uzayı) teorik çerçevesinden yararlanarak aritmetikten cebire geçiş konusunda tasarlanan matematiksel çalışmada öğrencilerin bilişsel süreçlerinin epistemolojik-bilişsel düzlemler arası etkileşiminin, oluşumlardaki dinamikliği bağlamında incelenmesi' amacını taşımaktadır. Çalışma, Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü tarafından yürütülmekte ve sonuçları ile doktora tezi olarak ortaya konacak ve matematik eğitiminin gelişimine ışık tutulacaktır.

- Bu çalışmaya katılımınız gönüllülük esasına dayanmaktadır.
- Çalışmanın amacı doğrultusunda, öğretim deneyi yapılarak sizden veriler toplanacaktır.
- Araştırmada katılımcıların isimleri gizli tutulacaktır.
- Araştırma kapsamındaki toplanan veriler, sadece bilimsel amaçlar doğrultusunda kullanılacak, araştırmanın amacı dışında da bir başka araştırmada kullanılmayacak ve gerekmesi halinde, sizin (yazılı) izniniz olmadan başkalarıyla paylaşılmayacaktır.
- İstemeniz halinde sizden toplanan verileri inceleme hakkınız bulunmaktadır.
- Sizden toplanan veriler korunacak ve araştırma bitiminde arşivlenecek veya imha edilecektir.
- Veri toplama sürecinde size rahatsızlık verebilecek herhangi bir soru/talep olmayacaktır. Yine de katılımınız sırasında herhangi bir sebepten rahatsızlık hissederseniz çalışmadan istediğiniz zamanda ayrılabilirsiniz. Çalışmadan ayrılmanız durumunda sizden toplanan veriler çalışmadan çıkarılacak ve imha edilecektir.

Gönüllü katılım formunu okumak ve değerlendirmek üzere ayırdığınız zaman için teşekkür ederim. Çalışma hakkındaki sorularınızı Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü bölümünden [iletilebilir](#) yönelebilirsiniz.

Araştırmacı Adı
Adres

Bu çalışmaya tamamen kendi ızzamla, istediğim takdirde çalışmadan ayrılabilceğimi bilerek verdiğim bilgilerin bilimsel amaçlarla kullanılması kabul ediyorum.
(Lütfen bu formu doldurup imzalıdıktan sonra veri toplayan kişiye veriniz.)

Katılımcı Ad ve Soyadı:
İmza:
Tarih:

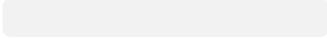
EK-4 VELİ İZİN FORMU

VELİ İZİN FORMU

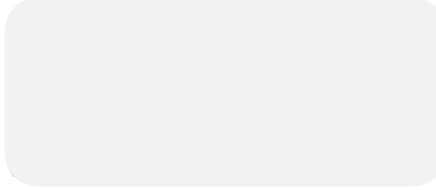
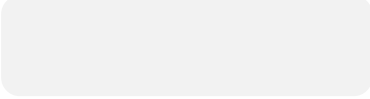
Sayın Veliler, Sevgili Anne-Babalar;

Bu çalışma, 'Aritmetikten Cebire Geçişte Öğrencilerin Bilişsel Süreçlerinin Matematiksel Çalışma Uzayı Teorik Çerçevesinde İncelenmesi' başlıklı bir araştırma çalışması olup 'MWS (matematiksel çalışma uzayı) teorik çerçevesinden yararlanarak aritmetikten cebire geçiş konusunda tasarlanan matematiksel çalışmada öğrencilerin bilişsel süreçlerinin epistemolojik-bilişsel düzlemler arası etkileşiminin, oluşumlardaki dinamikliği bağlamında incelenmesi' amacını taşımaktadır. Çalışma, Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü tarafından yürütülmekte ve sonuçları ile doktora tezi olarak ortaya konacak ve matematik eğitiminin gelişimine ışık tutulacaktır.

- Çocuğunuzun bu çalışmaya katılımı gönüllülük esasına dayanmaktadır.
- Çalışmanın amacı doğrultusunda, öğretim deneyi yapılarak çocuklarımızdan veriler toplanacaktır.
- Araştırmada katılımcıların isimleri gizli tutulacaktır.
- Araştırma kapsamında toplanan veriler, sadece bilimsel amaçlar doğrultusunda kullanılacak, araştırmanın amacı dışında ya da bir başka araştırmada kullanılmayacak ve gerekmesi halinde, sizin (yazılı) izniniz olmadan başkalarıyla paylaşılmayacaktır.
- İstemeniz halinde çocuğunuzdan toplanan verileri inceleme hakkınız bulunmaktadır.
- Çocuğunuzdan toplanan veriler korunacak ve araştırma bitiminde arşivlenecek veya imha edilecektir.
- Veri toplama sürecinde çocuğunuza rahatsızlık verebilecek herhangi bir soru/talep olmayacaktır. Yine de çocuğunuz katılım sırasında herhangi bir sebepten rahatsızlık hissederse çalışmadan istediği zaman ayrılabilir. Çalışmadan ayrılması durumunda çocuğunuzdan toplanan veriler çalışmadan çıkarılacak ve imha edilecektir.

Veli izin formunu okumak ve değerlendirmek üzere ayırdığımız zaman için teşekkür ederim. Çalışma hakkındaki sorularınızı Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü bölümünden  yönleltebilirsiniz.

Araştırmacı Adı
Adres



Bu çalışmaya tamamen kendi rızamla, istediğim takdirde çalışmadan ayrılabileceğimi bilerek verdiğim bilgilerin bilimsel amaçlarla kullanılmasını kabul ediyorum.

(Lütfen bu formu doldurup imzalıdıktan sonra veri toplayan kişiye veriniz.)

EK-5 ETKİNLİK VE ALIŞTIRMALAR

EŞİTTİR

1. $7+3 = 10$



Ok ile gösterilen sembolün adı nedir?

Bu sembol ne anlama gelmektedir? Açıklayınız.....

2. $3 \times (6+2) : 4$ nedir? Nedenini açıklayınız.....

3. Aşağıda verilen ifadelerde '=' sembolünün ne anlama geldiğini yazınız. Nedenini açıklayınız.

- $5+4=9$
- $5+4=6+3=9$
- $5+4=7+2=9$
- $5+4=8+1=9$
- $5+4=9+0=9$

4. Toprak $47+25$ ve $65+29$ işlemlerini zihninden yapmaya çalışıyor. Aşağıda Toprak'ın zihninden yaptığı işlemler gösterilmiştir.

Problem	Toprak'ın İşlemleri	Toprak, yan taraftaki problemde ne yapmıştır? Açıklayınız.....
$47+25$	$\underline{47+3} + \underline{25-3} = 50+22 = 72$	
$65+29$	$\underline{65-1} + \underline{29+1} = 64 + 30 = 94$	

Toprak'ın yöntemini aşağıdaki işlemlerde kullanınız.

Problem	İşlemler
$297+66$	
$125+99$	
$28+49$	
$37+65$	

5. Aşağıdaki ifadelerde '=' sembolü ne anlamda kullanılmıştır? Açıklayınız.

$3=3$	
$5=5$	
■ = ■	
★ = ★	
$a = a$	

6. Aşağıdaki ifadelerin yanlarına doğru ise 'D' yanlış ise 'Y' yazınız. Her bir ifadenin neden doğru ya da neden yanlış olduğunu açıklayınız.

- $4 = 4$() Neden?
- $4+0 = 4+0$() Neden?
- $4+5 = 4+5$() Neden?

IV. $4 - 1 = 4 - 1$ () Neden?

7. Aşağıda Defne'nin yaptığı işlemler adım adım verilmiştir. Her bir adımın önce doğru olup olmadığını (parantez içine D ya da Y harfi yazarak) yazınız, sonrasında nedenini açıklayınız.

I. $7 + 5 = 12$ ()

II. $7 + 5 - 5 = 12 - 5$... ()

III. $7 = 12 - 5$ ()

IV. $7 = 7$ ()

8. Aşağıda verilen eşitlikler doğru mudur? Her biri için nedenini açıklayınız.

• $27 - 48 + 48 = 27$ ()

• $8 + 9 = (8 + 2) + (9 - 2)$

9. $8 + 4 = \blacksquare + 5$ ifadesinde $\blacksquare$ yerine ne yazılmalıdır? Nasıl yaptığınızı açıklayınız.....

10. Aşağıda verilen ifadelerde boş bırakılan yerleri uygun bir şekilde doldurunuz. Nedenini yanlarına yazınız.

$8 + 6 + 9 = 8 + \dots$ Neden?

$3 + 4 + 8 = 3 + \dots$ Neden?

$9 + 7 = 10 + \dots$ Neden?

$14 + \dots = 13 + 4$ Neden?

$103 + \dots = 105 + 203$ Neden?

11. $6 + 9 = 15 : 3 = 5 + 2 = 7$ ifadesi doğru mudur? Neden?

12. Dört kişilik bir arkadaş grubunda iki kız iki erkek vardır. Kızlar ve erkeklerin biriktirdiği bilye sayıları eşittir. Ekin'in 6, Sema'nın 9, Toprak'ın 10 bilyesi olduğuna göre Çınar'ın kaç bilyesi vardır?

Çözüm:

Çözüm seçenekleri:

- $6 + 9 + 10 =$ Çınar'ın bilye sayısı
- $6 + 9 = 10 +$ Çınar'ın bilye sayısı
- $6 + 9 + 5 + 10 =$ Çınar'ın bilye sayısı
- $6 + 9 = 10 -$ Çınar'ın bilye sayısı

Sizce yukarıdaki soru yandaki çözüm seçeneklerinden hangisi ile çözülebilir? Nedenini açıklayınız.....

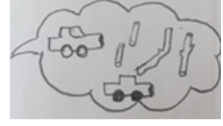
BAŞARILAR
Matematik Öğretmeni

İLİŞKİ

1. Sayıları merak eden Toprak bu aralar 15 sayısını uğurlu sayısı ilan etmiş. Eve gelen tüm misafirlere 'senin uğurlu sayın kaç?' diye sorup daha cevabını beklemeden 'benim ki 15' diye kendisi cevap veriyormuş. Hemen arkasından da 'neden 15 peki biliyor musun?' diye sorup başlıyormuş anlatmaya.



Ben arabaları çok seviyorum. Özellikle de kırmızı ve siyah arabaları. Benim 9 tane siyah arabam 6 tane de kırmızı arabam var. Yani benim toplamda 15 tane arabam var.



Sonra ben parmak peynirleri de çok seviyorum. Annemlerin aldığı parmak peynirler 5'li paketlerde ve annem her defasında bana 3 paket parmak peynir alıyor. Yine toplamda 15 parmak peynirim oluyor.

Ben bir de dışarda gezmeyi ve sopa toplamayı da çok seviyorum. Annemle ince sopalardan 7'li gruplar yapıyoruz. Bir elime bir grubu diğer elime diğer grubu koyuyorum. Annem de her seferinde kendisine sadece bir sopa alıyor. İkimizin birlikte yine 15 sopası oluyor. 'Sevdiğim her şey 15 tane'. 'Benim uğurlu sayım 15' diyormuş.

★ Toprak'ın dikkatini çeken bu durum aslında 15 sayısını başka sayılarla elde edebildiğimizi gösteriyor. Biz bu durumu matematiksel olarak nasıl ifade ederiz?

- Arabaların sayısı: $15 = 9 + 6$
- Parmak peynirlerin sayısı: $15 = 5 + 5 + 5$ ya da $15 = 3 \times 5$
- Sopaların sayısı: $15 = 7 + 7 + 1$ ya da $15 = 2 \times 7 + 1$

★ Siz de Toprak'ın uğurlu sayısı olan 15'i yukarıdakilerden farklı şekillerde istediğiniz işlemi kullanarak başka nasıl elde edebilirsiniz?

15 =

15 =

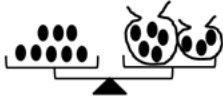
15 =

15 =

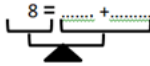
15 =

15 =

2. Aşağıda verilen 8 top, terazinin solunda ve sağında dengededir. Dengeyi bozmayacak şekilde toplar gruplar halinde torbalara konulmuştur. Görselde top ve torbalarla anlatılan durumu resmin altında verilen terazilerde matematiksel olarak yazınız.



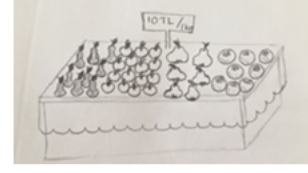
İki Sayının Toplamı Şeklinde



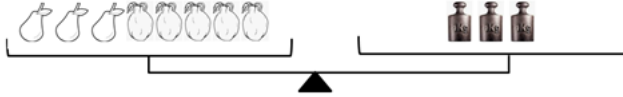
Üç Sayının Toplamı Şeklinde



3. Annesi ile beraber pazara giden Toprak uzun bir Pazar tezgahının önünde donup kalıyor. Tezgahta 'ne alırsan kilosunu 10 lira' yazması o tezgahı diğerlerinden farklı kılıyor. Üstelik bir de seçmece. 'anne buradan alalım ayva ile armutu' diye ısrar ediyor. Annesi 'sadece 30 liramız kaldı ona göre. Sadece 3kg alabiliriz Toprak' diyerek onu uyarıyor. Toprak'ın bu tezgahı almak için ısrar etmesi bakalım nedenmiş? (Her bir ayva ve armutun ağırlığının eşit olduğunu düşünelim.)



Toprak önce 3 armut ve 5 ayva aldı ve tam 3kg geldi. Yani paraları tam yetecek.



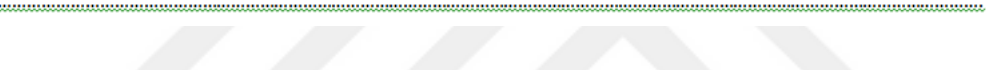
Ancak armutlar gözüne az gelmiş olacak ki armut miktarını aşağıdaki gibi değiştirdi.



Sizce Toprak bu değişimi yaptıktan sonra terazi yine dengede kalır mı? Neden?

Sizce Toprak bu değişimi yaptıktan sonra da yine ellerindeki 30 lira yeterli olacak mı? Neden?

Annesi Toprak'ı uyarıyor. 'Eğer o iki armutu almak istiyorsan, başka bir çare bulmalısın Toprak'. Toprak armutlardan vazgeçemediğine göre nasıl bir yol izlemeli? Neden?



Pazara giden Toprak önce 3 armut + 5 ayva almış. Sonrasında 2 armut daha alabilmek için ayva sayısında değişiklik yapmak zorunda kalmıştı. Toprak'ın yaptığı bu işlemi aşağıda matematiksel olarak yazdık. İnceleyelim.

Başlangıçta: $3 + 5 = 8$

* Armut sayısını 2 arttırınca ayva sayısını 2 azaltmalı;

$$\underbrace{3 + 2}_{=5} + \underbrace{5 - 2}_{=3} = 8$$

* Armut sayısını 3 arttırınca ayva sayısını 3 azaltmalı;

$$\underbrace{3 + 3}_{=6} + \underbrace{5 - 3}_{=2} = 8$$

* Armut sayısını 4 arttırınca ayva sayısını 4 azaltmalı;

$$\underbrace{3 + 4}_{=7} + \underbrace{5 - 4}_{=1} = 8$$

* Armut sayısını 5 arttırınca ayva sayısını 5 azaltmalı;

$$\underbrace{3 + 5}_{=8} + \underbrace{5 - 5}_{=0} = 8$$

* Örneğin: 10 sayısını da iki sayının toplamı şeklinde yazalım. Ancak yazarken yazabileceğimiz tüm olasılıkları yazmayı unutmayalım. Bunu yaparken de Toprak'ın armut ve ayvalarda kullandığı taktiği kullanalım.

$$10 = 0 + 10$$

$$10 = \underbrace{0 + 1}_{=1} + \underbrace{10 - 1}_{=9} \quad (0'ı 1 arttırınca 10'u 1 azaltmalı)$$

$$10 =$$

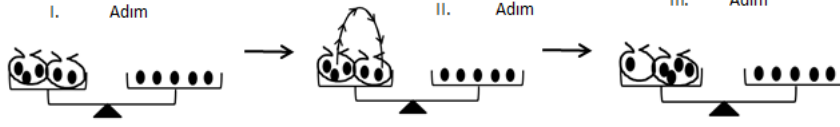
$$10 =$$

$$10 =$$

$$10 =$$

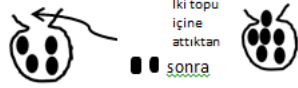
İLİŞKİ-ALİŞTIRMA

1. Aşağıda verilen örnekte dengede görünen terazide bazı işlemler yapılmıştır. Aşağıda yapılan işlemleri inceleyiniz ve her bir adımda ne yapıldığını yazınız.



- I. (birinci) adımı matematiksel (sayı-işlem-eşittir kullanarak) olarak yazınız:
- II. (ikinci) adımda ne yapıldığını hem sözel (terazideki topların ve terazinin dengesindeki değişimi, toplara ne yapıldığını adım adım anlatarak yazınız.) hem de matematiksel (sayı-işlem-eşittir kullanarak) olarak yazınız:
- III. (üçüncü) adımı matematiksel olarak yazınız:
- Üçüncü adımda terazinin dengesi bozuldu mu? Neden?

Matematiksel ve sözel ifadeye örnek:



İki topu içine attıktan sonra

Sözel: önce torbada 4 top vardı. Sonra 2 top daha eklendi ve toplam 4 top oldu.

Sayısal: $4+2 = 6$ (sayı işlem ve eşittir var)

2. Aşağıda $28 + 37$ toplamını bozmadan eşitliğin sağında $28'e$ 2 eklenmiş ve $37'den$ 2 çıkarılmıştır. Böylece terzinin sağ yani aynı kefesine önce 2 eklenip sonra 2 çıkarıldığı için terazinin dengesi bozulmamıştır.

$$28 + 37 = 28 + 2 + 37 - 2$$

Siz de $28 + 37$ toplamını yukarıda yapılan işleme benzer üç farklı şekilde eşitliği bozmayacak şekilde yazınız.

$$28 + 37 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$28 + 37 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$28 + 37 = \underline{\hspace{2cm}}$$

3. Verilen iki sayının toplamını zihinden yapmak isteyen Toprak'ın kuzeni Elif iki sayıdan birine zihinden toplamayı kolaylaştıracak şekilde ekleme yaparken diğerinden de aynı sayıyı çıkarmaktadır. Elif'in yaptığı bu kolaylaştırma taktiği siz de deneyin.

$$199 + 46 = \begin{array}{c} 200 \quad 45 \\ \hline 199 + 1 + 46 - 1 \end{array}$$

46'dan aldığım 1'i 199'a vereyim en iyisi. $200+45=245$ olur.



199 + 46 işlemini zihinden nasıl yaparım?

Elif'in eklemek ve çıkarmak için seçtiği sayı neden bir (1)?

Elif, bir (1)'den başka bir sayı seçseydi ne olurdu?

4. Zihinden işlem yapmayı seven Elif yine iki sayının toplamını zihninden yapmaya başladı. Elif'in aklından geçenleri okuyalım ve ondan önce işlemleri biz tamamlayalım.

1. Adım: $148 + 34 = 148 + 2 + \dots$

2. Adım: $148 + 34 = 150 + \dots$

Elif'in kullandığı taktiği kullanarak iki sayıyı toplamaya çalışan Toprak'a anlatarak ve yazarak yardımcı olalım.

1. Adım: $67 + 123 = \dots$



2. Adım:

1. Adım: $98 + 46 = \dots$

2. Adım:

1. Adım: $141 + 99 = \dots$

|

2. Adım:

1. Adım: $1602 + 1088 = \dots$

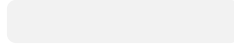
2. Adım:

1. Adım: $879 + 121 = \dots$

2. Adım:

BAŞARILAR

Matematik Öğretmeni



İLİŞKİ-ALIŞTIRMA

1. Aşağıda verilen örneği inceleyerek altta verilen alıştırmaları siz yapın.

$$\underline{49 + 36} = \underline{49 + 1 + 36 - 1} = \underline{50 + 35} = 85 \quad (49'a 1 eklediysen 36'dan 1 çıkarmalıyım çünkü)$$

Yukarıda 49'a 1 eklediği için 36'dan 1 çıkarmış. Sizce neden? Yukarıdaki boşluğa yazınız.

$$\underline{66 + 99} =$$

$$\underline{47 + 118} =$$

$$\underline{79 + 196} =$$

$$\underline{83 + 97} =$$

$$\underline{179 + 56} =$$

$$\underline{54 + 204} =$$



$$\underline{2401 + 88} =$$

$$\underline{304 + 298} =$$

$$\underline{17 + 408} =$$

BAŞARILAR

Matematik Öğretmeni

DENGE

1. Aşağıda verilen terazi modellerini inceleyiniz. Önce dengede olan terazinin dengesini bozan ve tekrar dengeye geçmesini sağlayan işlem ne olmuştur. Nokta nokta (.....) bırakılan yere matematiksel (sayı, işlem, eşittir-büyüktür-küçüktür sembollerinden uygun olanı) kullanarak olarak yazınız.

Terazide birşeyler değişiyor.
Değişen ne?

Terazide yine birşeyler değişiyor ve
Terazi yeniden dengeye geliyor.
Değişen ne?

1.Durum: DENGEDİ

2.Durum: DENGİ BOZULDU.
Hangi işlemden sonra denge bozuldu?

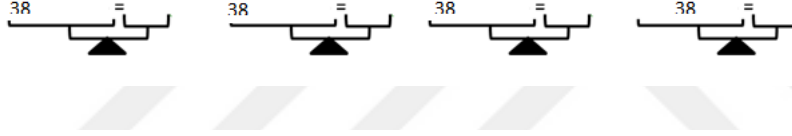
3.Durum: YENİDEN DENGİ SAĞLANDI.
Hangi işlem yapıldıktan sonra denge sağlandı?

Yukarıda verilen örnekte yapılan işleme benzer bir işlem aşağıda matematiksel olarak yazılmıştır.

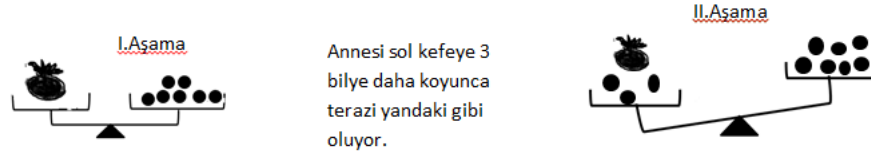
$$12 + 25 - 25 = 12$$

Sizce yanda verilen işlem-eşitlik doğru mudur? Neden? Sizce bu durum her zaman geçerli midir? Aşağıda nokta nokta (.....) şeklinde bırakılan boşluğa cevabınızı açıklayarak yazınız.

Yukarıda eşitlik bozulmadan yapılan işlemi siz de 38 sayısı için 4 farklı sayı ile işleme sokarak yapınız.



2. Toprak annesi ile sayı oyunlarını oynamayı seviyor. Zamanında pazarcılık yapan dedesinden kalma terazisinin kefeslerine oyuncaklarını koyup tartmak; ayısının mı yoksa kedisinin mi daha ağır olduğunu görmek onu çok mutlu ediyor. Annesi ona bir oyun hazırlıyor. İçi görünmeyen bez bir torbanın içine Toprak görmeden biraz bilye (bilyeler aynı ağırlıkta) koyuyor. Bez torbayı terazinin bir kefesine koyan annesi Toprak'tan dengeyi sağlayacak şekilde terazinin diğer kefesine bilyeler koymasını istiyor. Toprak bilyeleri koydukça kefeslerin dengeye geldiğini gözlemliyor. En son koyduğu bilye ile terazi tam olarak dengeleniyor.



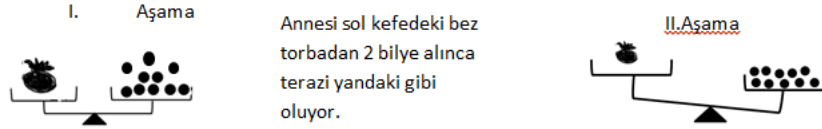
Annesi sol kefeye 3 bilye daha koyunca terazi yandaki gibi oluyor.

- III. Aşama: Annesi Toprak'ın kendi koyduğu sol kefeye müdahale etmesine izin vermediğine göre Toprak ne yaparsa terazi yine dengelenir? Neden? Bu durum her zaman geçerli mi?

Diğer sayfada, yazılan her bir aşamanın karşısına durumu matematiksel olarak (=, <, >, +, - sembollerini, sayıları... kullanarak) yazınız.

- I. Aşama:
 II. Aşama:
 III. Aşama:

3. Toprak ve annesi terazilerle oynamaya devam ediyorlar. Annesi yine Toprak görmeden bez torbanın içine biraz bilye dolduruyor ve terazinin sol kefesine koyuyor. Toprak'tan kefeler dengeye gelene kadar sağ kefeye bilye koymasını istiyor. Toprak sağ kefeye 10 bilye koyduğunda terazinin dengelendiğini farkediyor. Annesi kesenin içinden Toprak'ın göremeyeceği şekilde 2 tane bilyeyi aldıktan sonra terazi aşağıdaki gibi değişiyor.



Annesi sol kefedeki bez torbadan 2 bilye alınca terazi yandaki gibi oluyor.

III. aşama: Annesi Toprak'ın sol kefeye müdahale etmesine izin vermediğine göre Toprak ne yaparsa terazi yine dengelenir? Neden? Bu durum Her zaman geçerli mi? (1. Ve 2. Aşamada aynı torbalar ve aynı bilyeler kullanılmıştır)

Aşağıda yazılan her bir aşamanın karşısına durumu matematiksel olarak ($=$, $<$, $>$, $+$, $-$, sayılar kullanarak) yazınız.

- I. Aşama:
 II. Aşama:
 III. Aşama:



NE YAPTIK?

Aşağıdaki ifadelerden doğru olanın yanına 'D', yanlış olanın yanına 'Y' yazınız.

Yukarıda Toprak ve annesinin terazi etkinliğinde;

(.....) Sol kefeye 3 bilye eklenince, sağ kefedeki 3 bilye çıkarılmıştır. Sol kefedeki 2 bilye çıkarılınca, sağ kefeye 2 bilye eklenmiştir.

(.....) Sol kefeye 3 bilye eklenince, sağ kefeye de 3 bilye eklenmiştir. Sol kefedeki 2 bilye çıkarılınca, sağ kefedeki de 2 bilye çıkarılmıştır.

(.....) Terazinin dengede olma durumunda sol kefeye ne kadar bilye ekliyorsak sağ kefeye de o kadar bilye eklemeliyiz.

(.....) Terazinin dengede olma durumunda sol kefeye ne kadar bilye ekliyorsak sağ kefedeki de o kadar bilye çıkarılmalıdır.

(.....) Terazinin dengede olma durumu matematikte eşittir ile gösterilebilir.

(.....) Eşittir sembolünün olduğu durumlarda eşitliğin soluna kaç eklenirse sağına da aynı sayı eklenmeli.

(.....) Eşittir sembolünün olduğu durumlarda eşitliğin sağından hangi sayı çıkarılırsa o sayı eşitliğin soluna eklenmeli.

DENGE

Toprak ve annesi terazinin dengede olması için sol kefedен ne çıkarıldıysa sağ kefedен de aynıının çıkarılması gerektiğini bildikleri için aşağıda eşittir sembolü ile verilen durumlarda terazide kullanılan mantığı uygulamışlardır.

- I. Adım:  + 12 = 44 → Kesedeki bir miktar bilyenin (torbanın) yanına eklenen 12 bilye, sağ kefedeki 44 bilye ile dengededir-eşittir.
- II. Adım:  + 12 - 12 = 44 - 12 → Eklenen 12 bilyeyi sol kefedен çıkardığımızda dengeyi sağlamak için sağ kefedен de çıkardık.
- III. Adım:  = 32 → Artık kese (torba) ve 32 bilye dengede olduğuna göre demek ki kesede 32 bilye varmış.

NOT: Torbanın yanına önce eklediğimiz miktarı sonra çıkarırsak torbada değişim olmaz. Böylece torbanın başlangıçtaki haline ulaşmış oluruz.

★ Siz de Toprak ve annesine kesedeki bilye sayısını bulmaya yardım edin.

★

I. Adım:  + 36 = 101

II. Adım:

III. Adım:

★

I. Adım:  + 21 = 75

II. Adım:

III. Adım:

★

I. Adım:  + 99 = 128

II. Adım:

III. Adım:

★

I. Adım:  + 46 = 83

II. Adım:

III. Adım:

★

I. Adım:  + 34 = 91

II. Adım:

III. Adım:

★

I. Adım:  + 29 = 80

II. Adım:

III. Adım:

Toprak ve annesi yukarıda olduğu gibi sağ kefeye ne ekliyorlarsa sol kefeye de aynı miktarda bilyeyi eklediklerinde terzinin dengesinin bozulmayacağını bildikleri için terazide kullandıkları bu mantığı aşağıda verilen eşitliklerde de kullanıyorlar.

★ Siz de Toprak ve annesine kesedeki bilye sayısını bulmaya yardım edin.

- I. Adım: $12 = \text{🍎} - 5$ → Keseden 5 bilye çıkardıktan sonra terzinin sol kefesindeki 12 bilye ile dengeleniyor.
- II. Adım: $12 + 5 = \text{🍎} - 5 + 5$ → Çıkarılan 5 bilyeyi sağ kefeye yeniden koyarsak dengelenmesi için sol kefeye de 5 bilye eklemeliyiz.
- IV. Adım: $17 = \text{🍎}$ → Önce 5 bilyeyi keseden çıkarıp sonra yeniden eklediğimiz için kesenin ilk halindeki bilye sayısına ulaşmış oluruz. Kese ve 17 bilye dengede olduğu için demek ki başlangıçta 17 bilye varmış.
- V.

NOT: Torbanın yanından önce çıkardığımız miktarı sonra eklersek torbada değişim olmaz. Böylece torbanın başlangıçtaki haline ulaşmış oluruz.

★

I. Adım: $36 = \text{🍎} - 13$

II. Adım:

III. Adım:

★

I. Adım: $55 = \text{🍎} - 7$

II. Adım:

III. Adım:

★

I. Adım: $84 = \text{🍎} - 30$

II. Adım:

III. Adım:

★

I. Adım: $46 = \text{🍎} - 81$

II. Adım:

III. Adım:

★

I. Adım: $90 = \text{🍎} - 6$

II. Adım:

III. Adım:

★

I. Adım: $45 = \text{🍎} - 10$

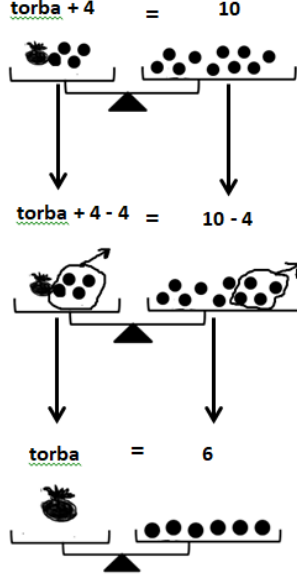
II. Adım:

III. Adım:

BAŞARILAR
Matematik Öğretmeni

DENGEDE KAL!

Toprak'ın annesi ile oynadığı terazi örneğinden yola çıkarsak dengeyi sağlayarak torbalardaki bilye sayılarını bulalım.



I. Aşama: **$\text{torba} + 4 = 10$**

Sol kefedeki kesenin yanına 4 bilye koyduğumuzda sağ kefedeki 10 bilye ile dengelenir. Bu nedenle **$\text{torba} + 4$** ile **10** arasına '=' sembolü koyulur.

II. Aşama: **$\text{torba} + 4 - 4 = 10 - 4$**

Terazinin iki tarafından da aynı miktarda bilyeyi çıkarırsak yani sol kefedeki dört bilye ve sağ kefedeki 4 bilyeyi çıkarırsak denge –eşitlik bozulmaz.

III. Aşama: **$\text{torba} = 6$**

Torba ile 6 bilye dengede olduğuna göre torbada 6 bilye vardır.

Yani ' **$\text{torba} = 6$** '

SENDE SIRA !

Toprak'ın annesi torbanın içine bir miktar bilye koymuştur. Hem Toprak hem de annesi torbada kaç tane bilye olduğunu bilmiyorlar. Yanına 3 bilye ekledikten sonra Toprak'ın koyduğu 17 bilye ile dengede duran teraziye göre torbada kaç bilye vardır?

Yukarıda verilen örnekte kullanılan yöntemi uygulayınız.

 + 3 = 17

DEĞİŞKEN

1. Aşağıda verilen sorularda '.....', 'a', '■' sembolleri ile gösterilen yerlere ne yazılması gerektiğini bulunuz. Nasıl yaptığınızı yanında bırakılan boşluğa açıklayınız. Her soru için kullandığınız yöntem her zaman geçerli midir?

- I. $5 + \dots = 8$
II. $14 + \blacksquare = 24$
III. $32 = 15 + a$
IV. $20 = 3 + a$
V. $13 + \blacksquare = 14 + 7$

2. Toprak pastanede satılan mini pastaların fiyatı ile ilgili bir tablo hazırlamıştır. Ancak bu tabloda bazı sayılar silinmiştir. **Silinen sayıların yerine bazı harfler** yazan Toprak'a yardımcı olunuz.

Mini pastaların sayısı	Fiyatı	Yandaki tabloyu incelediğimizde harfler nedir-ne anlama gelmektedir? (birden fazla yazılabilir).....
A	3 TL	Aşağıda her bir harfi ne bulduğunuzu yazınız.
2	6 TL	A:
3	B	B:
C	12 TL	C:
5	D	D:

3. $78 + 49 - 49 = 78$ ifadesi doğru mudur? Doğru ise ' $78 + \blacksquare - \blacksquare = 78$ ' ifadesinde $\blacksquare$ yerine ne veya neler yazılabilir? Nedenini açıklayınız.....

4. $2 \times a + 3$

Ok ile gösterilen sembol (harf) neyi ifade eder?.....

5. Berna yanda matematiksel bir durumu modellemiştir.

Bu durumu sözel ve matematiksel (sayı, işlem, =, harf, isim kullanarak) olarak yazınız

1.Adım: ○○○.....○○○○
2.Adım: ○○○.....○○○

Sözel:

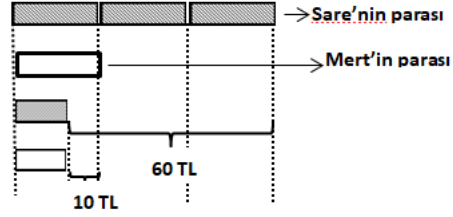
Matematiksel:

6. Yandaki modeli inceleyelim. Bu modelde

Sare ve Mert'in paralarındaki değişim görülmektedir.

Yandaki gibi modellenen değişimi sözel ve matematiksel

(sayı, işlem, =, harf, isim kullanarak) olarak ifade ediniz.

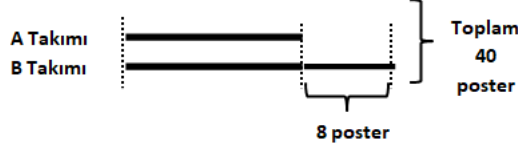


Sözel:

Matematiksel:

Sözel örneği: 'Sare'nin parası Mert'in parasından 20 tl eksik iken sonradan Sare'nin parası Mert'in parasının 2 katı olmuş.' gibi

7. Okulumuzun iki basketbol takımı vardır. Takımlar için yapılan poster sayıları aşağıdaki gibi gösterilmiştir.



Yandaki modelden yararlanarak her bir takım için yapılan poster sayısını hesaplayınız. Nasıl yaptığınızı açıklayınız.....

8. Çınar'ın 47 TL parası vardır. 3 kg muz aldıktan sonra 20 TL parası kaldığına göre 1 kg muz kaç liradır? Nasıl yaptığınızı ne düşündüğünüzü yazınız.....

9. Aşağıda verilen sözel ifadeleri bir modelle ve matematiksel olarak ifade ediniz.

(**Model:** yukarıdaki örneklerde yer alan çubuklar-daireler kullanılabilir. **Matematiksel:** sayı, işlem, =, harf, isim)

SÖZEL	MODEL	MATEMATİKSEL
Aklımdan tuttuğum sayının 3 fazlası 14'tür.		
Kitaplarımın sayısının 2 eksiği 26'dır.		
Toplarımın sayısının iki katının bir fazlası 17'dir.		

10. Aşağıdaki $\blacksquare$, $\bullet$ ve $\blacktriangle$ şekillerinden her biri bir sayıya karşılık gelmektedir. Bu sayılarla bazı işlemler yapılmış ve işlemin sonucu yine aynı şekillerle yapılan başka benzer işlemler olarak yazılmıştır. Bu durum işlemlerin özellikleri olarak ifade edilir.

I. $(\blacksquare + \bullet) \times \blacktriangle = \blacksquare \times \blacktriangle + \bullet \times \blacktriangle$
 II. $(\blacksquare - \bullet) \times \blacktriangle = \blacksquare \times \blacktriangle - \bullet \times \blacktriangle$

Yandaki ifadelerde $\blacksquare$, $\bullet$ ve $\blacktriangle$ için farklı rakamlar kullanarak eşitliğin solu ve sağındaki değerlerin aynı olduğunu gösteriniz. Bu doğrulamayı I. Ve II. Durum için farklı sayılar kullanarak ikişer kez yapınız.

I. $(\blacksquare + \bullet) \times \blacktriangle = \blacksquare \times \blacktriangle + \bullet \times \blacktriangle$

1. Doğrulama:

2. Doğrulama

II. $(\blacksquare - \bullet) \times \blacktriangle = \blacksquare \times \blacktriangle - \bullet \times \blacktriangle$

1. Doğrulama

2. Doğrulama

Matematik Öğretmeni

MODELLEME

Karikatürlere bakmaktan ve çizgi roman okumaktan çok hoşlanan Toprak kendisi de çizimler yapmaya çalışmaktadır. Babası kitap okuyan eşek çizmesini istemiş ve yandaki çizimi yapmıştır. Matematik çalışırken problemleri anlatan çizimler yapmaya çalışan Toprak, babasının sözel ifadelerini modellemiştir.



NOT: Toprak, miktarı belli olmayan çoklukları modellerken istenen nesneleri çizip nesnelerin arasına işareti yaparak aslında çizilenden daha fazla o nesneden olduğunu göstermeye çalışmıştır.

Babası:

Elimde bir miktar mandalina var.

Mandalınayı çok sevdiğimi bilen deden bana 2 tane daha mandalina verdi.

Gözümün önünde duran mandalinaların 3 tanesini dayanamadım ve yedim.

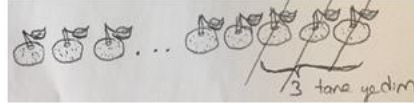
Toprak:

Ama baba kaç tane olduğunu söylemedin ki. Nasıl çizeceğim? (biraz düşündükten sonra yandaki çizimi yapar)

Baba, ama başta kaç mandalinam olduğunu yine bilmiyorum. 2 taneyi nasıl ekleyeceğim? (biraz düşündükten sonra yandaki çizimi yapar)

Hadi bakalım.

Toprak'ın çizimi



Sizlerde yukarıda Toprak'ın yaptığı çizimleri inceledikten sonra benim sözel ifadelerimi çizimler yaparak anlatmaya çalışın.

Benim ifadelerim:

Elimde bir miktar küçük zıplayan toplardan var.

Alışverişe gidiince marketten 4 tane daha top aldım.

Market dönüşü topları gören Arda'ya 5 tane top verdim.

Sizin çiziminiz:

Resim yapmayı sevmeyen ve güzel çizemediğini düşündüğü için mutsuz olan Serkan: 'öğretmenim söylediğiniz şeyleri çizemiyorum ben. Başka nasıl yapabiliriz?' diye sorunca başka bir yol bulmuşlar.

Öğretmenin ifadeleri

Safariye giden Sema, fil sürüsü görmüş.

Sürüye 4 fil daha eklenmiş.

Sürüdeki fillerden 5'i ayrılıp başka yere gitmiş.

Başka bir fil sürüsü daha gelmiş ve başlangıçtaki fil sayısı iki katına çıkmış.

Serkan

Öğretmenim, ben fil çizemem ki. ☹
Fil çizmek yerine çubuk çizeceğim öğretmenim.

Tamam, öğretmenim.

Ama 4 tane fil eklenmişti. Çizimde 5 tane fili nasıl eksilteceğim. (biraz düşündükten sonra Serkan yandaki çizimi yapar)

Tamam öğretmenim.

Serkan'ın çizimi



Serkan'ın sözel ifadelere uygun şekilde yaptığı çubuk çizimlerini göz önünde bulundurursak sizler de aşağıda verilen sözel ifadelere uygun şekilde çubuklar çizerek durumu anlatmaya çalışın.

Sözel ifade	Sizin çizimleriniz	Matematiksel ifade
Ömer arabasıyla yola çıktı. Biraz gittikten sonra mola verdi ve sonra 7 km daha gitti.		$Yol + 7$ ya da $y + 7$
Ekin'in elinde bir miktar bilye var. Bilyelerden 3'ünü Emre'ye verdi.		$Bilye - 3$ ya da $B - 3$
Otoparktaki arabalara 5 araba daha eklendi.		$Araba + 5$ ya da $A + 5$
Annesine bebekleri için elbise diktiren Sinem, ara tatilde var olan elbise sayısı kadar daha elbiseyi annesine diktirdi.		$elbise + elbise$ ya da $e + e$

Aşağıda Toprak, arkadaşları ile 'maTabu (matematik tabu)' oyunu adını verdikleri bir oyun oynamaktadır. Bu oyuna göre seçilen bir kişi Yaşar ve Evrim'in yaz tatilinde okudukları kitap sayılarını çizimlerle konuşmadan anlatmaya çalışmakta diğerleri de bu çizimleri sözel ve matematiksel olarak ifade etmeye çalışmaktadır.

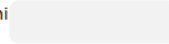


maTabu

	1 kitap	Yaşar'ın okuduğu kitaplar (Y)	Evrin'in okuduğu kitaplar (E)
	Toprak'ın çizimleri	Sözel ifade	Matematiksel ifade
1. durum			
2. durum			
3. durum			
4. durum			
Her bir durum kendi içinde ayrı ayrı düşünülmeli. Örneğin koyu renk boyalı olan çubuk (Yaşar'ın okuduğu kitap sayısını temsil eden çubuk) 1. Durumda büyük iken 2. Durumda küçük çizilmiştir, 4. Durumda oldukça küçük çizilmiştir. Hepsini birbirinden ayrı düşünülmalıdır.			

BAŞARILAR

Matematik Öğretmeni



Aşağıda sadece matematiksel olarak verilen durumları sözel olarak yazınız. Harfleri istediğiniz bir nesne, yiyecek...vb. anlamında kullanabilirsiniz.

MATEMATİKSEL	SÖZEL
$A + 8$	Armut sayısının 8 fazlası (armut yerine elma, defter, kalem, çikolata gibi istediğiniz herhangi birini yazabilirsiniz)
$K - 13$	
$2 \times m$	
$\frac{Z}{2}$ (z bölü 2)	
$(b + 3) \times 3$	
$5 + d$	
$17 - \text{ç}$	

Aşağıda sözel olarak verilen durumları matematiksel olarak yazınız. Sözel ifadede yer alan defter, çikolata, çiçek... gibi nesneler için istediğiniz harfi kullanabilirsiniz.

Aşağıda sözel olarak verilen durumları matematiksel olarak yazınız. Sözel ifadede yer alan defter, çikolata, çiçek... gibi nesneler için istediğiniz harfi kullanabilirsiniz.

SÖZEL	MATEMATİKSEL
Defterin sayfalarından 8 tanesini kopardım.	$S - 8$
Kutudaki çikolataların 5 tanesini yedim.	
Bahçeden topladığım çiçeklere 3 tane daha ekledim.	
Oyuncak arabalarımın yarısını ihtiyacı olan başka bir çocuğa verdim.	
Ekmeğin çeyreği ile kendime tost yaptım.	
Yoldaki kamyonların iki katı kadar kamyon gördüm.	

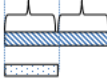
Aşağıda matematiksel olarak verilen durumların modellerini çiziniz.

 $\rightarrow N$  $\rightarrow 1$

MATEMATİKSEL	MODEL
$N - 3$	
$N + 4$	
$2 \times N$	
$\frac{N}{2}$ (N bölü 2)	
$N - 1$	

Toprak ve Ekin pandemi döneminde bol bol kitap okuyorlar. Toprak'ın annesi her ikisinin de okuduğu sayfa sayısını gün gün not alıyor ve onlara okudukları sayfalarla ilgili ipuçları veriyor. Sırasıyla annesinin söylediklerinden yola çıkarak hem modeli hem de matematiksel ifadeyi yazıyorlar.

SÖZEL	MODEL	MATEMATİKSEL
	Toprak :  deseni ile gösterelim.	
	Ekin :  deseni ile gösterelim.	

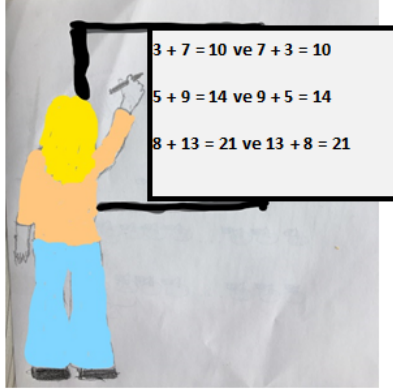
1.	Anne: Merhaba Ekin, bugün sen Toprak'ın okuduğu sayfa sayısının yarısı kadar okumuş oldun.	Ekin aşağıdaki gibi modelliyor ve sağdaki gibi matematiksel olarak ifade ediyor: 	$T = 2 \times E$ $E = T / 2$
2.	Anne: Merhaba Toprak, bugün sen 5 sayfa daha okusaydın Ekin'in okuduğu sayfa sayısına eşit olacaktı.	Toprak aşağıdaki gibi modelliyor ve sağdaki gibi matematiksel olarak ifade ediyor: 	$T + 5 = E$ $E - 5 = T$
3.	Merhaba canım, bugün Ekin okuduğundan 8 sayfa daha fazla okusaydı Toprak'ın okuduğu sayfa sayısı ile eşit olacaktı.	Sıra sende:	

4.	Merhaba canım, bugün Toprak okuduğunun iki kadar okusaydı Ekin ile aynı sayıda sayfa okumuş olacaktı.		
5.	Merhaba canım, Ekin bugün okuduğu sayfa sayısının iki katı kadar, Toprak da bugün okuduğunun 6 sayfa fazlasını okumuş olsaydı okudukları sayfa sayıları eşit olacaktı. (Toprak ve Ekin'in okuduğu sayfa sayılarının eşitliğine dikkat ederek modelleyelim.)		
Her bir durum kendi içinde ayrı ayrı düşünülmeli. Örneğin açık renk boyalı olan çubuk (Ekin'in okuduğu kitap sayısını temsil eden çubuk) 1. Durumda küçük iken 2. Durumda büyük çizilmiştir, 4. Durumda oldukça küçük çizilmiştir. Hepsı birbirinden ayrı düşünülmelidir.			

İŞLEMLERİN ÖZELLİKLERİ

Toprak matematik derslerinde öğretmenin verdiği örnekleri sorgulamakta ve her durum için geçerli olup olmayacağını belirlemeye çalışmaktadır. Örneğin öğretmenin tahtaya yazdığı örnekler şu şekildedir.

NOT: Matematiksel olarak ifade ederken verilen her örnekte değişmeden aynı kalan sayılar için harf ya da şekil kullanılmasına gerek yoktur. Yine sayının kendisini kullanmamız gerekir ancak her örnekte değişen sayıları genel olarak ifade etmek istediğimiz için herhangi bir sayı anlamındaki bu değişen sayılar için size verilen şekil ya da harfi kullanınız.

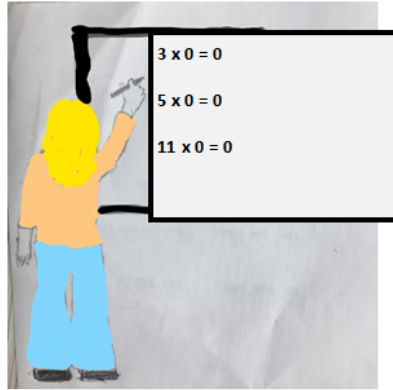


Toprak: Öğretmenin yazdığı örnekleri değerlendirecek olursak, iki doğal sayıyı toplamışız elde ettiğimiz sonuç sayıların yerleri değişse bile değişmiyor. Bu her zaman geçerli mi?

Biraz düşündükten sonra..

Evet geçerli. Pekî biz bu durumu yani 'herhangi iki sayının toplamı, sayıların yerleri değişse bile değişmez' matematiksel olarak nasıl ifade ederiz. Birinci sayı: ▲ olsun; ikinci sayı: ● olsun.

▲ + ● = ● + ▲ diyebiliriz.



Öğretmenin yazdığı örnekleri inceleyecek olursak. Ne diyebilirsiniz?

Siz:

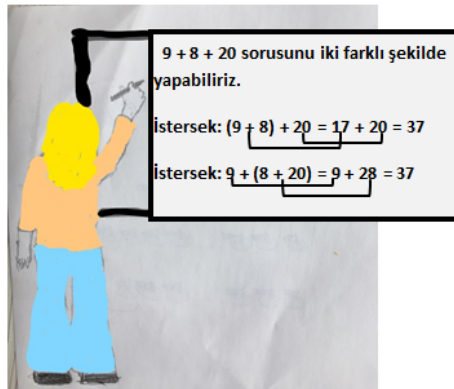
.....

Sizin ifade ettiğiniz bu durum her zaman geçerli mi?

.....

Herhangi bir sayı anlamında ★'ı kullanacak olursak matematiksel olarak bu durumu nasıl anlatırız?

.....



Öğretmenin yazdığı örneği inceleyecek olursak. Ne diyebilirsiniz?

Siz:

.....

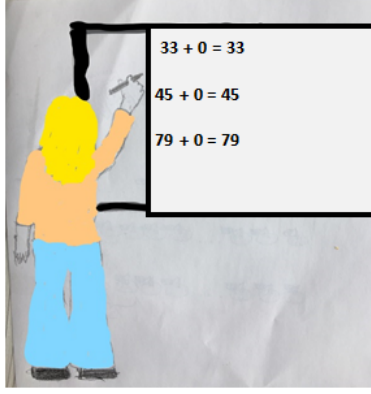
Sizin ifade ettiğiniz bu durum her zaman geçerli mi?

.....

Herhangi bir sayı anlamında ★, ■ ve ● kullanacak olursak matematiksel olarak bu durumu nasıl anlatırız?

.....

.....



Öğretmenin yazdığı örnekleri inceleyecek olursak. Ne diyebilirsiniz?

Siz:

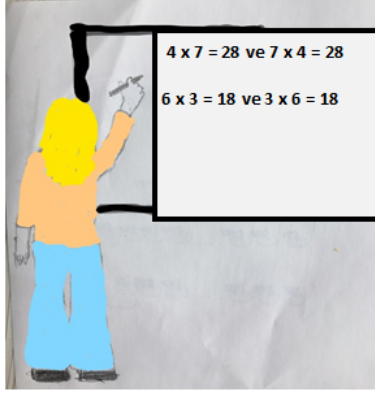
.....

Sizin ifade ettiğiniz bu durum her zaman geçerli mi?

.....

Herhangi bir sayı anlamında 'a' harfini kullanacak olursak matematiksel olarak bu durumu nasıl anlatırız?

.....



Öğretmenin yazdığı örnekleri inceleyecek olursak. Ne diyebilirsiniz?

Siz:

.....

Sizin ifade ettiğiniz bu durum her zaman geçerli mi?

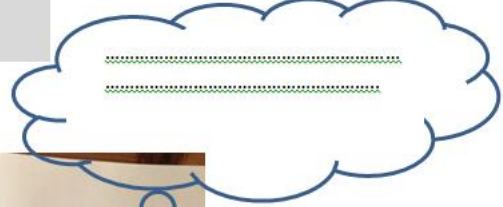
.....

Herhangi bir sayı anlamında 'b' ve 'k' harflerini kullanacak olursak matematiksel olarak bu durumu nasıl anlatırız?

.....

Yukarıda verilen örnekleri incelediğimizde harf ve şekillerin bazen başka sayıların ya da genel olarak herhangi bir sayı yerine kullanılabileceğini söylemek mümkün mü?

Nedenini açıklayınız.



Öğretmenin sorusuna cevap vermeye çalışan Toprak'a yardımcı olalım.

PASTANE ETKİNLİĞİ

Yaz tatilinde amcasının pastanesinde çalışmaya başlayan Toprak, pastaneye gelen bazı arkadaşlarının ve daha küçük kardeşlerinin almak istedikleri şeker, çikolata, pasta, açma gibi ürünlerin tekli fiyatını söylese de birden farklı sayıda ürün alacakları zaman hesaplamakta güçlük çektiklerini fark etmiştir. Aslında 3 tane almak isteyen hem de parası 3 tane almaya yeten arkadaşı Ekin'in küçük kardeşi, sormaya çekindiği için bir tane şeker alıp çıkmıştı. Bu durum pastanenin kazancını da düşüreceğinden bir çözüm bulmalıydı. Akına şöyle bir fikir geldi. Çocukların en çok satın aldığı ürünlerin fiyatlarını gösteren tablolar hazırlamaya karar verdi. Bu tabloları küçük tahtalara yazıp süsledi. Ancak afacanlardan biri tabloların ne işe yaradığını anlamadığından bazı yerleri eliyle silmiş ve okulda yeni öğrendiği harfleri (E, L, A, K) yazmıştı. Bu duruma canı çok sıkılan Toprak'a yardım edelim.

 ŞEKER	
ADET	FIYAT (TL)
1	5
2	10
E	30
8	L
10	A
E: L: A: K:	

 TEK KİŞİLİK PASTA	
ADET	FIYAT (TL)
K	8
2	16
E	32
7	L
A	80
E: L: A: K:	

 ÇİKOLATALI KRUVASAN	
ADET	FIYAT (TL)
6	24
E	16
10	A
L	60
20	K
E: L: A: K:	

 HAMBURGER	
ADET	FIYAT (TL)
3	K
5	50
E	80
10	L
13	A
E: L: A: K:	

 CHEESE KEK	
ADET	FIYAT (TL)
2	A
4	60
5	L
K	120
15	E
E: L: A: K:	

 TEK KİŞİLİK PASTA ÇEŞİTLERİ	
ADET	FIYAT (TL)
E	60
L	105
5	K
A	120
15	225
E: L: A: K:	

Eşit İşaretine İlişkin İlk ve Son Değerlendirmeye Yönelik Görüşme Soruları	
Soru numarası	Görüşmede sorulabilecek olası sorular
1	Eşittirin başka hangi anlamları olabilir? Eşittiri görünce aklına hangi resimler geliyor? Eşittir başka hangi amaçla kullanılabilir? Eşittirin farklı kullanım şekillerine örnek verir misin?
2	Sence bu bir işlem mi? Neden? Sonuç mu? Neden? Sayı mı? Neden? Senin söylediğinden başka bir anlamı olabilir mi?
3	Eşittir burada ne amaçla kullanılmış olabilir? Tüm örnekleri inceledikten sonra genel olarak eşittirin amacını söylemek mümkün mü? $5+4=9$ $5+4=6+3=9$ Eşitliğin solundaki 5 nasıl bir değişime uğramış ve eşitliğin sağındaki başka bir sayı olmuş olabilir mi? O değişim sonucu etkilemiş mi? $5+4=7+2$ sayılar nasıl değişmiş? Sonuç neden değişmemiş? Bu durum her zaman böyle midir?
4	Toprak bu işlemlerde neler yapmış? Neden? Neden 3'ü seçmiş? Sen hangi sayıları ekledin? Neden? Neden hem eklemiş hem çıkarmış? $65+29$ sayıları 64 ve 30 olarak değişmiş diyebilir miyiz? Öyleyse sayılar değişmiş ama sonuç neden değişmemiş olabilir?
5	Eşittir deyince aklına ne geliyor? Başka bir fikrin var mı? O gelen resimlerden herhangi biri ile bunları açıklayabilir misin? (mesela terazi)
6	Peki bu verilenler, teker teker, doğru mu? Neden doğru?
7	7 ve 5 aslında hem bir sayı hem de bir çokluk. Onları birer nesne olarak anlatır mısın? Hikaye gibi anlatır mısın? $7+5-5=12-5$ sorusunu önce sayı olarak sonra da hikayeleştirerek okur musun? Sorunun başını nasıl yaparsın? Nasıl okursun-anlatırsın? Bu soruda bir sürü 5 var, hepsi aynı. Sence bu sayılar 5 olmasaydı da başka sayı olabilir miydi? 5'lerin yerine başka sayı koyalım yine doğru olur muydu? Deneyelim mi? Acaba tüm 5'leri değil de bazılarını değiştirsek olur mu? Peki bu bazıları dediğim hangileri olabilir? $7=12-5$ bu biraz farklı geldi mi? Neden? İlk soruda 'eşittirin anlamını sormuştum' orada verdiğin cevaba bakacak olursan burada yazılanla farklı mı oldu? Her bir adım birbirinin devamı mı? Birbiriyle ilişkili mi?
8	Bir hikaye gibi anlatır mısın? Burada yapılanları genelleylebilir miyiz? Önce işlemi okur musun? Ne düşündüğünü- bu işlemde ne yapıldığını

	açıklar mısın? Bu soruda iki tane 48 vermişler. O 48'leri değiştirip başka bir sayı yazabilir miyiz? Eğer başka sayılar da yazabiliriz diyorsan mesela kaç olmalı? Soruda yer alan 27'ler var. O 27'leri değiştirip başka sayı yazabilir miyiz? Neden? O sayıları değiştirebildiğimizi örnek vermeden bir sayı üzerinden değil de genel olarak açıklayarak nasıl anlatırsın? $8+9=(8+2)+(9-2)$ bu soruyu okur musun? Burada ne yapılmış? Sorunun başında da sonunda da 8'ler ve 9'lar var yanlarına başka sayılar da yazılmış ama eşitlik bozulmamış. Neden? Soruda iki tane 2 var. Sence bu iki tane 2 sayısı yerine başka sayılar verebilir miyiz? Neden? Başka sayılar verip veremeyeceğimizi deneyerek mi bulabiliriz? Yoksa sayı denemeden genel bir durumdan bahsederek nedenini açıklayabilir miyiz? Diyelim ki deneyerek yaptın 4 verdin oldu. Başka hangi sayıları verince olur mu? Nasıl bilebiliriz? Nasıl yaptın? Neden?
9	Burada eşittir ne anlamda kullanılmış? Bu soruda verilen kutu ne? Kutuyu nasıl buldun? Kutu başka bir sayı olabilir mi? Bu soruda eşittir başka amaçla da kullanılmış olabilir mi?
10	Burada eşittirin görevi-amacı ne? Noktalar gösterilen yer ne? Noktalarla gösterilen yeri nasıl buldun?
11	Burada eşittirin görevi-amacı ne? Bu ifade sence doğru mu? Neden? İfadenin doğruluğuna nasıl karar verdin? Eşit işaretinin hangi yorumlamasını kullandın? Eşit işaretinin farklı yorumlama biçimini de kullansaydık yine aynı sonucu elde eder miydik?
12	Bu ifadeyi başka nasıl anlatabiliriz? Türkçe bilmeyen biri gelse bu problemi nasıl ifade edebiliriz?

Değişken Kavramına İlişkin İlk ve Son Değerlendirmeye Yönelik Görüşme Soruları	
Soru numarası	Görüşmede sorulabilecek olası sorular
1	Boş bırakılan yer ne? Nasıl buldun? Başka yolla yapılabilir mi? Başka bir sayı yazsak yine ifade doğru olur mu? A ne demek? Neyin yerine yazılmış? V.soruda kutu ne demek? Başka bir yolla yapılabilir mi? Bu soruda eşittir ne amaçla kullanılmış?
2	Pastane tablosunu anlatır mısın?

	A,B,C,D sırasıyla ne demek? Ne amaçla yazılmış? Boş bıraksak olur muydu? A,B,C,D'yi nasıl buldun? Sayılar arasında bir ilişki var mı?
3	$78+49-49=78$ burada ne yapılmış? Bir çokluk gibi düşünerek, hikayeleştirerek anlatır mısın? $78+$ kutu-kutu $=78$ burada kutu yerine ne yazabiliriz? Buraya yazılacak sayılar nasıl olmalı?
4	$2.a+3$ 'a' nedir? 'a' tek bir harf ama başka farklı sayılar olur mu? 'a' ne zaman sadece tek bir sayı olur? 'a' ne zaman farklı başka sayılar olur?
5	1. Adımı anlatır mısın? 1. adımda kaç tane top var? Aradaki noktalar ne anlama geliyor? 1.adımdan 2. Adıma geçerken ne değişmiş? Üstüne çizgi çizmek sence ne anlama gelir? Bu anlattıklarını sayısal-işlem kullanarak anlatsan; önce 1. Durumu sonra 2. Durumu, nasıl anlatırsın? Bu işlemde '=' kullanılmalı mı? Neden? '=' ne zaman kullanılır? Ne olduğunda?
6	Saniye'nin ne kadar parası var? Üç tane aynı şekil ne anlama geliyor? Saniye'nin sayı-miktar olarak ne kadar parası olabilir? Tek bir sayı mı olabilir? Farklı sayılar olabilir mi? Saniye'nin kaç parası olduğunu nasıl bileceğiz? Herkes farklı sayılar verebilir mi? Sare ve Mert'in paralarını karşılaştırsak (birbirinin parası cinsinden) nasıl anlatırız? Yukarıdaki görselde Sare'nin parası, Mert'in parasının 3 katı iken aşağıda Sare'nin parası ne kadar? Ya da Sare'nin parası ne kadar değişmiş? 60 tl nedir? Sare'nin parasını matematiksel olarak, sayı-işlem-eşit işareti gibi kullanarak, nasıl anlatırsın? Mert'in parası ne kadar? Mert'in parası ne kadar değişmiş? 10 tl nedir?
7	Şekilleri nasıl yorumladığını, ne anladığını anlatır mısın? Şekil üzerinde gösterilen 8 ve 40 neyi anlatıyor? A ve B takımları arasındaki ilişki-karşılaştırma nasıl söylenebilir?
8	Bu soruyu nasıl çözdün? Neden? Başka yolla yapılabilir mi? Bu soruda neyi bilmiyoruz? Bilmediğimiz bir şeyi nasıl gösterebiliriz? Benim sözel olarak söylediğim ifadede bilmediğimiz miktar da var. Bu bilinmeyeni nasıl matematiksel ifadeye dahil edebiliriz?
9	Bilmediğimiz bir şeyi nasıl modelleriz? Bu bilmediğimiz çoklukla işlemleri nasıl yaparız (ekleme, çıkarma, çarpma gibi)? Bilmediğimiz çokluğu matematiksel olarak nasıl yazarız?

10	Bu soruda kullanılan şekiller ne? Bu şekillerle yapılan işlemlerle ne anlatılmak istenmiş olabilir? Her bir şekil farklı sayıyı temsil ettiğine göre burada işlemleri yaptığımızda elde ettiğimiz nedir? İşlemlerden sonra elde edilen sonuçlar nasıl-neden aynı oldu? Sonuçların aynı çıkmasını sağlayan ne olmuş olabilir? Şekiller yerine farklı sayılar verdiğimizde yine sonuçlar aynı çıkar mı?

Eşit İşareti Etkinlik-1'e İlişkin Görüşme Soruları	
Bu sorudan ne anladığını anlatır mısın? 15 sayısını elde edecek şekilde işlemleri nasıl yazabilirsin? Farklı işlemlerle anlatmaya çalışsan nasıl yaparsın? 15=..... Ne demek? Neden 15'i önce yazmış? Ne anlatmak istiyor? 15=..... ifadelerinde eşit işaretinin amacı ne? Ne anlamda kullanılmış? Hiç terazi gördünüz mü? Hiç terazi kullandınız mı? Terazi kullanma mantığını, çalışma prensibini biliyor musunuz? Kuralları var mı? Terazide amaç ne? Bu soruda neden terazi çizmişler? Terazinin konumuzla ne ilgisi olabilir? Teraziye neyi anlatmak için kullanmış olabilirler? Üçüncü sorudan ne anladığını anlatır mısın? Dengenin bozulmaması için ne yapılabilir? Bu sorudan ne anladığını ve nasıl yaptığını anlatır mısın? Sekiz sayısını elde etmek için yapılan adımları nasıl anlatabilirsin? On sayısını elde etmek için sekiz sayısı için yapılan benzer işlemleri yapacak olsak nasıl yapabiliriz?	
Eşit İşareti Etkinlik-1 ile İlişkili Alıştırma-1'in Grup Görüşme Soruları	
Terazinin dengede olma durumunu matematikte nasıl ifade edebiliriz? Terazinin kefelerinde işlem yapılmasına rağmen denge bozulmama sebebi ne olabilir? Nasıl açıklanabilir? 28 ve 37'li soruda pek çok işlem yapılmasına rağmen terazinin dengesi neden bozulmadı? 28 ve 37 sayılarına eklenen ve çıkarılan sayıların aynı olmasının sebebi ne olabilir? 28 ve 37 sayılarına eklenen ve çıkarılan sayıların farklı olması durumunda terazi dengede kalabilir mi? Neden? 28 ve 37'ye ekleyip çıkardığımız sayılar başka sayılar olabilir mi? Başka hangi sayılar olabilir? Bu sayıları neden seçtin? 199 ve 46 sayılarının toplamını hesaplarken ekleyip çıkarılacak sayı olarak neden 1 sayısı seçilmiş olabilir? 199 ve 46 sayısını toplarken ekleyip çıkarılacak sayılar başka hangi sayılar olabilir? Neden? 148 ve 34'ün toplamını hesaplarken eklenen ve çıkarılan sayıların seçiminde 2 sayısını neden seçmiş olabilir? Başka sayılar seçilebilir miydi?	

Değişken İlişkinin Hazırlanan Etkinlik ve Alıştırmaların Literatür ile İlişikisine Dair Örnekler	
Çalışmamızda Yer Alan Soru	Yararlanılan Kaynak
4. $2 \times 8 + 3$ Ok ile gösterilen sembol (harf) neyi ifade eder?.....	Asquith ve diğerleri (2007)
5. Yandaki model inceleyelim. Bu modelde Sarı ve Mavi'ın parçalarından oluşan bir modeldir. Yandaki gibi modellerden oluşan bir model matematiksel olarak ifade edelim. Sarı, Mavi'ın 2 katı olarak ifade edelim. Model: Modelin matematiksel ifadesi: Sarı: $2 \times 8 = 16$ Mavi: 3 Toplam: $16 + 3 = 19$	Cai ve Moyer (2008)
7. Okulumuzun iki basketbol takımı vardır. Takımlar için yapılan poster aşağıdaki gibi gösterilmiştir. A Takımı: 10 poster, B Takımı: 10 poster, Toplam: 40 poster Yandaki modellerden yararlanarak her bir takım için yapılan poster sayısını hesaplayınız. Nasıl yaptığınızı açıklayınız.	Watanabe (2011, s. 120)
8. Çınar'ın 47 TL parası vardır. 3 kg muz aldıktan sonra 20 TL parası kaldığına göre 1 kg muz kaç liradır? Nasıl yaptığınızı ne düşündüğünüzü yazınız.....	Cai ve Moyer (2008)
10. Aşağıdaki şekillerden her biri bir sayıya karşılık gelmektedir. Bu sayıların bir işlemin sonucu olarak elde edilmiştir. Bu durum işlemleri göstermektedir. Aşağıdaki işlemleri yazınız. I. $1 \cdot 2 + 3 = 5$, II. $2 \cdot 3 + 4 = 10$, III. $3 \cdot 4 + 5 = 17$, IV. $4 \cdot 5 + 6 = 26$ Yandaki ifadelerden $1 \cdot 2 + 3 = 5$ ve $2 \cdot 3 + 4 = 10$ için farklı rakamlar kullanarak eşitliği sağ ve sağdaki değerleri aynı aldığını gösteriniz. Bu işlemleri yazınız. Ve II. Durum için farklı sayılar kullanarak diğer işlemleri yazınız. I. $1 \cdot 2 + 3 = 5$, II. $2 \cdot 3 + 4 = 10$, III. $3 \cdot 4 + 5 = 17$, IV. $4 \cdot 5 + 6 = 26$ 1. Doğrulama: 1. Doğrulama 2. Doğrulama: 2. Doğrulama	Watanabe (2011, s. 119)
Eşitlik Kavramına İlişkin Hazırlanan Etkinlik ve Alıştırmaların Literatür ile İlişkisi	
1. $7 + 3 = 10$ Ok ile gösterilen sembolün adı nedir?..... Bu sembol ne anlama gelmektedir? Açıklayınız.....	Asquith ve diğerleri (2007)
3. $78 + 49 - 49 = 78$ ifadesi doğru mudur? Doğru ise $78 + \square - \square = 78$ ifadesinde $\square$ yerine ne veya neler yazılabilir? Nedenini açıklayınız.....	Smith (2011, s. 513)
4. Toprak 47+25 ve 65+29 işlemlerini zihninden yapmaya çalışıyor. Aşağıda Toprak'ın zihninden yaptığı işlemler gösterilmiştir. Problem: Toprak'ın işlemleri 47+25: $47+3+25-3 = 50+22 = 72$ 65+29: $65-3+29+3 = 64+30 = 94$ Toprak'ın yöntemini aşağıdaki işlemlerle kullanınız. Problem: İşlemler 207+66: 125+99: 28+49: 37+65:	Britt ve Irwin (2011, s. 146)
8. Aşağıda verilen eşitlikler doğru mudur? Her biri için nedenini açıklayınız. • $27 - 48 + 48 = 27$ () • $8 + 9 = (8 + 2) + (9 - 2)$	Carpenter ve diğerleri (2003 aktaran Molina ve Ambrose, 2008)
9. $8 + 4 = \square + 5$ ifadesinde $\square$ yerine ne yazılmalıdır? Nasıl yaptığınızı açıklayınız.....	Behr vd. (1980)
10. Aşağıda verilen ifadelerde boş bırakılan yerleri uygun bir şekilde doldurunuz. Nedenini yanlarına yazınız. $8 + 6 = 9 + 8$ Neden? $3 + 4 = 8 + 3$ Neden? $9 + 7 = 10 + \square$ Neden? $14 + \square = 13 + 4$ Neden? $103 + \square = 105 + 203$ Neden?	Molina ve Ambrose (2008)

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı :
Yabancı Dil :
Doğum Yeri ve Yılı :
E-Posta :

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2004-2008, Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Lisans Programı
- 2011-2016, Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Eğitimi Yüksek Lisans Programı
- 2016-2024, Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Eğitimi Doktora Programı
- 2008-2010, Matematik Öğretmeni, Sergen İlköğretim Okulu, Vize/KIRKLARELİ
- 2010-2013, Matematik Öğretmeni, 50. Yıl Ortaokulu, Merkez/EDİRNE
- 2013-2020, Matematik Öğretmeni, Küçük Yenice Ortaokulu, İnegöl/BURSA
- 2020-2021, Matematik Öğretmeni, Bakyapı Hacı Ali Bakgör Ortaokulu, İnegöl/BURSA
- 2021-2022, Matematik Öğretmeni, Abdülhalim Altınoluk Uludağ Ortaokulu, Osmangazi/ BURSA
- 2022-....., Matematik Öğretmeni, Akçalar Fahriye Sayarel Ortaokulu, Nilüfer/BURSA

Yayınları ve/veya Bilimsel/Sanatsal Faaliyetleri:

- Deniz, S. (2016). *Doğrusal denklemlerin 7. sınıflarda öğretiminde geometri sketchpad kullanımının çoklu temsil ve enstrümantal yaklaşım boyutundan incelenmesi*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.
- Deniz, S. ve ÖZDEMİR ERDOĞAN, E. (2013). İlköğretim 6. sınıflara yönelik geometri sketchpad ile dönüşüm geometrisine giriş etkinlikleri. *1.Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Sempozyumu (BİLMAT)*'da sunulan bildiri. Türkiye: Karadeniz Teknik Üniversitesi.

- Deniz, S. ve ÖZDEMİR ERDOĞAN, E. (2012). İlköğretim 7. Sınıflara Yönelik Geometri Sketchpad ile Çember/Dairede Açı ve Yay Ölçümü. *10. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi (X.UFBMEK)*'de sunulan poster. Türkiye: Niğde Üniversitesi.

