



**T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ESNEK ÇOKLU KÜMELER VE ESNEK ÇOKLU KÜMELERDE
KARAR VERME YÖNTEMİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞEYDA KAYA PEZÜK

MAYIS

ŞEYDA KAYA PEZÜK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MAYIS 2022

**ESNEK ÇOKLU KÜMELER VE ESNEK ÇOKLU KÜMELERDE KARAR
VERME YÖNTEMİ**

Şeyda KAYA PEZÜK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Doç. Dr. Güzide ŞENEL

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MAYIS 2022

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Şeyda KAYA PEZÜK tarafından hazırlanan “Esnek Çoklu Kümeler ve Esnek Çoklu Kümelerde Karar Verme Yöntemi” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Güzide ŞENEL

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Prof. Dr. Naim ÇAĞMAN

Matematik Anabilim Dalı, Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Doç. Dr. Öznur KULAK

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 10/05/2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

.....

Şeyda KAYA PEZÜK

10/05/2022

ESNEK ÇOKLU KÜMELER VE ESNEK ÇOKLU KÜMELERDE KARAR VERME YÖNTEMİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Şeyda KAYA PEZÜK

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mayıs 2022

ÖZET

Bu tez çalışmasında, ilk olarak, esnek kümeler, esnek matrisler ve bazı temel özellikleri verildi. Ardından, bulanık kümeler, bulanık esnek kümeler, bulanık esnek matrisler ve bazı temel özellikleri sunuldu. Üçüncü bölümde çoklu kümeler ve bazı temel özellikleri incelendi. Dördüncü bölümde esnek kümeler ile çoklu kümelerin bir hibrit versiyonu olan esnek çoklu küme kavramı çalışıldı. Beşinci bölümde iki esnek çoklu karar verme metodu önerildi ve COVID-19 aşısı sonrasında ortaya çıkan yan etkiler üzerine bir karar verme problemine uygulandı. Son olarak, devam çalışmaları ve burada verilen karar verme uygulaması tartışıldı.

Sayfa Adedi : 39

Anahtar Kelimeler : Esnek kümeler, Esnek matrisler, Bulanık esnek kümeler, Bulanık esnek matrisler, Çoklu kümeler, Esnek çoklu kümeler, Esnek çoklu karar verme

Danışman : Doç. Dr. Güzide ŞENEL

SOFT MULTISSETS AND A DECISION-MAKING METHOD IN SOFT MULTISSETS
(M. Sc. Thesis)

Şeyda KAYA PEZÜK

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
May 2022

ABSTRACT

This thesis provides the soft sets, soft matrices, and some of their basic properties. It then presents fuzzy sets, fuzzy soft sets, and fuzzy soft matrices. The third section examines multisets and some of their basic properties. The fourth section studies soft multisets being a hybrid version of soft sets and multisets. The fifth section proposes two soft multi decision-making methods and applies them to a decision-making problem on side effects that emerged after the COVID-19 vaccine. Finally, the present thesis discusses the proposed approach herein and the need for further research.

Page Number : 39

Key Words : Soft sets, Soft matrices, Fuzzy soft sets, Fuzzy soft matrices, Soft multi sets,
Soft multi decision-making

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Güzide ŞENEL

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Süreç boyunca desteğini esirgemeyen, zorlandığım her aşamada yardımcı olan, bilgi ve birikiminden faydalandığım tez danışmanım Doç. Dr. Güzide ŞENEL'e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen çok sevdiğim annem ve babama, kardeşlerime ve sevgili eşime çok teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	ix
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	3
2.1.Esnek Kümeler.....	3
2.2.Esnek Matrisler	6
2.3.Bulanık Kümeler.....	10
2.4.Bulanık Esnek Kümeler	12
2.5.Bulanık Esnek Matrisler	15
3. ÇOKLU KÜMELER	19
4. ESNEK ÇOKLU KÜMELER.....	23
5. ESNEK ÇOKLU KÜMELERDE KARAR VERME	27
6. SONUÇ ve ÖNERİLER	33
KAYNAKLAR	34
ÖZGEÇMİŞ	38

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 5.1. COVID-19 aşısı sonrası yan etki sıklığının semptomlara göre dağılımı.....	28



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış simgeler, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklamalar
$\cong$	Klasik olmayan alt küme
$\cup$	Klasik olmayan birleşim
$\cap$	Klasik olmayan kesişim
$\setminus$	Klasik olmayan fark
$\tilde{\Delta}$	Klasik olmayan simetrik fark
U	Evrensel küme
E	Parametreler kümesi
F_A	Esnek küme
$F_A^{\tilde{c}}$	F_A 'nın esnek tümleyeni
$F_{\emptyset}$	Boş esnek küme
F_E	Evrensel esnek küme
$[a_{ij}]$	Esnek matris / Bulanık esnek matris
$[a_{ij}]^{\tilde{c}}$	$[a_{ij}]$ 'nin esnek/bulanık esnek tümleyeni
$[0]$	Boş esnek matris / Boş bulanık esnek matris
$[1]$	Evrensel esnek matris / Evrensel bulanık esnek matris
μ	Bulanık küme
$\mu^{\tilde{c}}$	μ 'nün bulanık tümleyeni
0U	Boş bulanık küme
1U	Evrensel bulanık küme
Γ_A	Bulanık esnek küme

Simgeler	Açıklamalar
$\Gamma_A^{\tilde{c}}$	Γ_A 'nın bulanık esnek tümleyeni
$\Gamma_{\emptyset}$	Boş bulanık esnek küme
$\Gamma_{\tilde{E}}$	Evrensel bulanık esnek küme
M_X	Çoklu küme
$M_X^{\tilde{c}}$	M_X 'in çoklu tümleyeni
$M_{\emptyset}$	Boş çoklu küme
$M_{\tilde{U}}$	Evrensel çoklu küme
Ω_A	Esnek çoklu küme
$\Omega_A^{\tilde{c}}$	Ω_A 'nın esnek çoklu tümleyeni
$\Omega_{\emptyset}$	Evrensel esnek çoklu küme
$\Omega_{\tilde{E}}$	Evrensel esnek çoklu küme
$P(U)$	Kuvvet kümesi
$S(U)$	Esnek kümelerin kümesi
$F(U)$	Bulanık kümelerin kümesi
$FS(U)$	Bulanık esnek kümelerin kümesi
$SM[U]$	Esnek matrislerin kümesi
$FSM[U]$	Bulanık esnek matrislerin kümesi
$M(U)$	Çoklu kümelerin kümesi
$SM(U)$	Esnek çoklu kümelerin kümesi
$[\hat{s}_{i1}]$	Normalleştirilmiş $[s_{i1}]$

1. GİRİŞ

Doğru düşünme sanatı olarak tanımlanabilen klasik mantık önermeler adı verilen doğru veya yanlış hüküm bildiren ifadeler üzerine kuruludur. Cantor tarafından ortaya atılan kümeler kavramı bu mantığın temel yasalarına dayanır. Ancak, bu kümeler bazı belirsizlik içeren durumları modellemek için yeterli değildir. Bu zorlukla başa çıkabilmek için ileri sürülen bulanık mantık ve buna dayalı bulanık küme kavramı sırasıyla klasik mantığın ve klasik kümelerin bir genellemesi olarak görülebilir. Bu sayede bulanık kümeler adı kümelerin yeteneklerine sahip olmanın yanında bazı belirsizliklerle başa çıkabilmektedir. Bir başka deyişle, bulanık mantık doğrunun bir derecesi olduğundan bahsetmektedir. Klasik mantık “Doğru mu?” “Yanlış mı?” sorularını sorarken bulanık mantık “Ne kadar doğru?” “Ne kadar yanlış?” sorularına cevap aramaktadır.

Bu çalışmada, belli tür belirsizlik içeren problemlerin üstesinden gelebilmek için inşa edilen küme türleri göz önüne alındı. Belirsizlik kavramı ilk olarak 1600’lü yıllarda Pascal ve Fermat tarafından olasılık kuramı ile ortaya atıldı. Łukasiewicz 1930’lu yılların başında üç değerli mantık sistemini tanımlarken, Black de ilk sürekli değerlere sahip mantığı tanımladı. 1965’te ise Zadeh tarafından bulanık (fuzzy) kümeler ortaya atıldı. Bulanık küme teorisi, teknoloji ve bilim adına bir dönüm noktası oldu. Daha sonra, Pawlak (1982) tarafından yaklaşımlı (rough) kümeler tanımlandı. Bu alanda bir diğer önemli gelişme, Molodtsov (1999) tarafından belirsizlikleri modellemek için esnek (soft) kümeler kavramının ortaya atılmasıdır. Hemen ardından, esnek oyun teorisi, işlem araştırmaları, esnek olasılık, esnek Riemann integrasyonu ve esnek Perron integrasyonu gibi konuların yer aldığı bir kapsamlı kitap yayımlandı (Molodtsov, 2004).

Takip eden yıllarda esnek alt küme, bir esnek kümenin tümleyeni, iki esnek kümenin birleşimi ve kesişimi gibi esnek küme işlemleri tanımlandı (Maji, Biswas ve Roy, 2003) ve bir karar verme problemine uygulandı (Maji, Roy ve Biswas, 2002). Ardından iki esnek kümenin kesişimi ve esnek alt küme kavramları yeniden tanımlanarak bilgi sistemleri ile esnek kümeler arasındaki ilişkiler incelendi (Pei ve Miao, 2005). Aktaş ve Çağman (2007) esnek grup, esnek alt grup ve esnek homomorfizma kavramlarını tanımladı ve esnek kümeler, bulanık kümeler ve yaklaşımlı kümeleri karşılaştırdı. Ayrıca esnek kümelerin

cebirsel yapıları üzerine pek çok çalışma yapıldı (Acar, Koyuncu ve Tanay, 2010; Jun ve Park, 2009; Feng, Jun ve Zhao, 2008; Jun, Lee ve Khan, 2010).

Devamında iki esnek kümenin kartezyen çarpımı ve bunun bir esnek alt kümesi olarak esnek küme bağıntıları tanımlandı ve esnek kümeler üzerinde denklik bağıntıları, esnek küme fonksiyonları gibi kavramlar incelendi (Babitha ve Sunil, 2010). Esnek kümeler üzerinde tanımlı işlemlerin cebirsel özellikleri, iki esnek kümenin kısıtlı simetrik farkının tanımı, esnek halkaların ve esnek modüllerin yapılarının incelendi (Sezgin ve Atagün, 2011). Ayrıca esnek topoloji kavramı ortaya atıldı (Çağman, Karataş ve Enginoğlu, 2011; Shabir ve Naz, 2011). Ardından esnek iç nokta ve esnek komşuluk yapıları ve esnek topoloji üzerinde Hausdorff uzayını tanımlandı (Varol ve Aygün, 2012; Zorlutuna, Akdağ, Min ve Atmaca, 2012).

Cerf, Fernandez, Gostelow ve Volausky (1971) klasik kümelerde her elemanın bir kez yazılmasının her zaman çözümü kolaylaştırmadığını ve bazı durumlarda kümenin elemanlarının tekrar kullanılabilmesinin faydalı olabileceğini ifade etmişlerdir. Bunun sonucunda da kümede elemanların tekrarına izin veren çoklu kümeler (multisets) kavramı ortaya atılmıştır. Liste (list), demet (bunch), koleksiyon (collection) gibi başka isimlerle anılan bu kavram için çoklu kümeler ismi ilk olarak 1970’lerde Bruijn tarafından önerilmiştir (Knuth, 1998). Şimdiye kadar bu kavram üzerine pek çok çalışma yapıldı (Jena, Ghosh ve Tripathy, 2001; Peterson, 1976; Syropoulos ve de Paiva, 2001). Daha sonra esnek çoklu kümeler (soft multisets) (Alkhazaleh, Salleh ve Hassan, 2011) tanımlandı. Bu kavramla ilgili devam çalışmaları için bakınız (Babitha ve Sunil, 2013; Balami, Yusuf ve Terkimbir, 2018; Mukherjee, 2015; Osmanoğlu, 2013).

Sunulan bu tez çalışmasının ikinci bölümünde, esnek kümeler, esnek matrisler ve bazı temel özellikleri verildi. Ardından, bulanık kümeler, bulanık esnek kümeler, bulanık esnek matrisler ve bazı temel özellikleri sunuldu. Üçüncü bölümde çoklu kümeler ve bazı temel özellikleri incelendi. Dördüncü bölümde esnek kümeler ile çoklu kümelerin bir hibrit versiyonu olan esnek çoklu küme kavramı çalışıldı. Beşinci bölümde KPS21 ve KPS21/2 ile gösterilen iki esnek çoklu karar verme metodu önerildi ve COVID-19 aşısı sonrasında ortaya çıkan yan etki verilerinin karşılaştırılması üzerine bir karar verme problemine uygulandı (Kaya Pezük ve Şenel, 2021). Son olarak, devam çalışmaları ve burada verilen karar verme uygulaması tartışıldı.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, esnek kümeler (Çağman ve Enginoğlu, 2010a; Biswas, Maji ve Roy, 2003; Molodtsov, 1999), esnek matrisler (Çağman ve Enginoğlu, 2010b), bulanık kümeler (Zadeh, 1965), bulanık esnek kümeler (Maji ve ark., 2001; Çağman, Enginoğlu ve Çıtak, 2011) ve bulanık esnek matrisler (Çağman ve Enginoğlu, 2012) sunulmuştur.

2.1. Esnek Kümeler

Esnek küme kavramı belirsizliği modellemek için ilk olarak 1999 yılında Molodtsov tarafından ortaya atılmıştır. Esnek küme kavramı parametreler kümesinden evrensel kümenin kuvvet kümesine tanımlı bir fonksiyon yardımıyla tanımlanır.

2.1.1. Tanım: (Molodtsov, 1999) U evrensel küme, E parametrelerin bir kümesi, $P(U)$, U 'nun kuvvet kümesi, $F: E \rightarrow P(U)$ bir dönüşüm olmak üzere (F, E) sıralı ikilisi U üzerinde bir esnek küme olarak adlandırılır. Başka bir deyişle, U üzerinde bir esnek küme, U 'nun alt kümelerinin parametrize edilmiş bir ailesidir.

Daha sonra, Maji ve ark. (2002, 2003) esnek kümelerde işlemleri tanımladılar ve bir karar verme problemine uyguladılar. Ardından, (Çağman ve Enginoğlu, 2010a; Enginoğlu, 2012)'de esnek küme tanımı modifiye edilerek esnek küme işlemlerinin tutarlılığı sağlandı. Bu çalışmada, esnek kümeler (Çağman ve Enginoğlu, 2010a)'da verildiği biçimiyle sunulmuştur.

2.1.2. Tanım: U evrensel küme, $P(U)$, U 'nun tüm alt kümelerinin kümesi, E parametreler kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. U üzerinde bir F_A esnek kümesi, $x \notin A$ için $f_A(x) = \emptyset$ olmak üzere $f_A: E \rightarrow P(U)$ bir dönüşümü yoluyla tanımlanır ve $F_A := \{(x, f_A(x)): x \in E\}$ biçiminde gösterilir. Burada, f_A fonksiyonuna F_A esnek kümesinin yaklaşım fonksiyonu denir.

Bu çalışma boyunca, $S(U)$, U üzerinde E yoluyla parametrelendirilen tüm esnek kümelerin kümesi olsun.

2.1.3. *Örnek:* Kabul edelim ki tatil yapmak isteyen bir aileye önerilen altı tesisten oluşan evrensel küme $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ ve parametreler kümesi $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ biçiminde tanımlansın ve $A = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}$ olsun. Burada,

x_1 ‘denize yakın’ anlamına gelsin ve denize yakın tesislerin kümesi $\{u_2, u_4\}$ olsun.

x_2 ‘pahalı’ anlamına gelsin ve pahalı tesislerin kümesi $\{u_1, u_3\}$ olsun.

x_3 ‘havuz bulunması’ anlamına gelsin ve havuzlu tesislerin kümesi $\{u_3, u_4, u_5\}$ olsun.

x_4 ‘evcil hayvan bulundurulabilmesi’ anlamına gelsin ve evcil hayvan bulundurulabilen tesislerin kümesi $\{u_1, u_3, u_5\}$ olsun.

x_5 ‘otoparkı mevcut’ anlamına gelsin ve otoparklı tesislerin kümesi $\{u_1\}$ olsun.

O halde,

$$f_A(x_1) = \{u_2, u_4\}$$

$$f_A(x_2) = \emptyset$$

$$f_A(x_3) = \{u_3, u_4, u_5\}$$

$$f_A(x_4) = \{u_1, u_3, u_5\}$$

$$f_A(x_5) = \{u_1\}$$

biçimindedir. $f_A(x_1)$ ’in anlamı denize yakın tesisler kümesidir. Burada, $x_2 \notin A$ olduğundan $f_A(x_2) = \emptyset$ olduğuna dikkat edilmelidir. Bu tür ikinci bileşeni boş küme olan sıralı ikililer kısalık için bir esnek kümede gösterilmezler. Ancak bu durum bu tür elemanların yok sayıldığı anlamına gelmez. Sonuç olarak, F_A esnek kümesi aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$F_A = \{(x_1, \{u_2, u_4\}), (x_3, \{u_3, u_4, u_5\}), (x_4, \{u_1, u_3, u_5\}), (x_5, \{u_1\})\}$$

2.1.4. Tanım: $F_A \in S(U)$ olsun. Eğer, her $x \in E$ için $f_A(x) = \emptyset$ oluyorsa F_A ’ya boş esnek küme denir ve $F_\emptyset$ ile gösterilir. Ayrıca, her $x \in E$ için $f_E(x) = U$ oluyorsa F_E ’ye evrensel esnek küme denir ve F_E ile gösterilir.

2.1.5. Tanım: $F_A, F_B \in S(U)$ olsun. O halde,

- i. Eğer her $x \in E$ için $f_A(x) \subseteq f_B(x)$ oluyorsa F_A ’ya F_B ’nin esnek alt kümesi denir ve $F_A \subseteq F_B$ ile gösterilir.
- ii. Eğer $F_A \subseteq F_B$ ve bir $x \in E$ için $f_A(x) \neq f_B(x)$ oluyorsa F_A ’ya F_B ’nin esnek öz alt kümesi denir ve $F_A \subset F_B$ ile gösterilir.

iii. Eğer her $x \in E$ için $f_A(x) = f_B(x)$ oluyorsa F_A ve F_B eşit esnek kümelerdir denir ve $F_A = F_B$ ile gösterilir.

2.1.6. *Örnek:* $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $A = \{x_1, x_2\}$ ve $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ için $F_A = \{(x_1, \{u_2, u_4\}), (x_2, \{u_1, u_3\})\}$ ve $F_B = \{(x_1, \{u_2, u_4, u_5\}), (x_2, \{u_1, u_2, u_3, u_5\}), (x_3, \{u_1\})\}$ olsun. O halde, $F_A \cong F_B$ esnek kapsaması geçerlidir.

2.1.7. Tanım: $F_A, F_B, F_C \in S(U)$ olsun. O halde,

- i. Eğer her $x \in E$ için $f_C(x) = f_A(x) \cup f_B(x)$ oluyorsa F_C 'ye F_A ile F_B 'nin esnek birleşimi denir ve $F_A \tilde{\cup} F_B$ ile gösterilir.
- ii. Eğer her $x \in E$ için $f_C(x) = f_A(x) \cap f_B(x)$ oluyorsa F_C 'ye F_A ile F_B 'nin esnek kesişimi denir ve $F_A \tilde{\cap} F_B$ ile gösterilir.
- iii. Eğer her $x \in E$ için $f_C(x) = f_A(x) \setminus f_B(x)$ oluyorsa F_C 'ye F_A ile F_B 'nin esnek farkı denir ve $F_A \tilde{\setminus} F_B$ ile gösterilir.
- iv. Eğer her $x \in E$ için $f_C(x) = f_A(x) \Delta f_B(x)$ oluyorsa F_C 'ye F_A ile F_B 'nin esnek simetrik farkı denir ve $F_A \tilde{\Delta} F_B$ ile gösterilir.
- v. Eğer her $x \in E$ için $f_B(x) = U \setminus f_A(x)$ oluyorsa F_B 'ye F_A 'nın esnek tümleyeni denir ve $F_A^{\tilde{c}}$ denir.

2.1.8. Tanım: $F_A, F_B \in S(U)$ olsun. Eğer $F_A \tilde{\cap} F_B = F_{\emptyset}$ ise F_A ile F_B ayrıktır denir.

2.1.9. *Örnek:* $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $A = \{x_1, x_2\}$ ve $B = \{x_2, x_3, x_4\}$ için $F_A = \{(x_1, \{u_2, u_4\}), (x_2, \{u_1, u_3\})\}$ ve $F_B = \{(x_2, \{u_2\}), (x_3, \{u_1, u_4\}), (x_4, U)\}$ olsun. O halde, $F_A \tilde{\cap} F_B = F_{\emptyset}$ olduğundan F_A ile F_B ayrıktır. Ayrıca

$$F_A \tilde{\cup} F_B = \{(x_1, \{u_2, u_4\}), (x_2, \{u_1, u_2, u_3\}), (x_3, \{u_1, u_4\}), (x_4, U)\}$$

ve

$$F_A^{\tilde{c}} = \{(x_1, \{u_1, u_3, u_5\}), (x_2, \{u_2, u_4, u_5\}), (x_3, U), (x_4, U)\}$$

biçimindedir.

2.1.10. Önerme: $F_A \in S(U)$ olsun. O halde,

$$i. (F_A^{\tilde{c}})^{\tilde{c}} = F_A$$

$$ii. F_{\emptyset}^{\tilde{c}} = F_{\tilde{E}}$$

2.1.11. Önerme: $F_A, F_B, F_C \in S(U)$ olsun. O halde,

$$i. F_A \cong F_{\tilde{E}}$$

$$ii. F_{\emptyset} \cong F_A$$

$$iii. F_A \cong F_A$$

$$iv. F_A \cong F_B \text{ ve } F_B \cong F_C \Rightarrow F_A \cong F_C$$

2.1.12. Önerme: $F_A, F_B, F_C \in S(U)$ olsun. O halde,

$$i. F_A = F_B \text{ ve } F_B = F_C \Rightarrow F_A = F_C$$

$$ii. F_A \cong F_B \text{ ve } F_B \cong F_A \Leftrightarrow F_A = F_B$$

2.1.13. Önerme: $F_A, F_B, F_C \in S(U)$ olsun. O halde,

$$i. F_A \tilde{\cap} F_A = F_A \text{ ve } F_A \tilde{\cup} F_A = F_A$$

$$ii. F_A \tilde{\cap} F_{\emptyset} = F_{\emptyset} \text{ ve } F_A \tilde{\cup} F_{\emptyset} = F_A$$

$$iii. F_A \tilde{\cap} F_{\tilde{E}} = F_A \text{ ve } F_A \tilde{\cup} F_{\tilde{E}} = F_{\tilde{E}}$$

$$iv. F_A \tilde{\cap} F_A^{\tilde{c}} = F_{\emptyset} \text{ ve } F_A \tilde{\cup} F_A^{\tilde{c}} = F_{\tilde{E}}$$

$$v. F_A \tilde{\cap} F_B = F_B \tilde{\cap} F_A \text{ ve } F_A \tilde{\cup} F_B = F_B \tilde{\cup} F_A$$

$$vi. F_A \tilde{\cap} (F_B \tilde{\cap} F_C) = (F_A \tilde{\cap} F_B) \tilde{\cap} F_C \text{ ve } F_A \tilde{\cup} (F_B \tilde{\cup} F_C) = (F_A \tilde{\cup} F_B) \tilde{\cup} F_C$$

$$vii. F_A \tilde{\cap} (F_B \tilde{\cup} F_C) = (F_A \tilde{\cap} F_B) \tilde{\cup} (F_A \tilde{\cap} F_C) \text{ ve } F_A \tilde{\cup} (F_B \tilde{\cap} F_C) = (F_A \tilde{\cup} F_B) \tilde{\cap} (F_A \tilde{\cup} F_C)$$

2.1.14. Önerme: $F_A, F_B \in S(U)$ olsun. O halde,

$$i. (F_A \tilde{\cup} F_B)^{\tilde{c}} = F_A^{\tilde{c}} \tilde{\cap} F_B^{\tilde{c}}$$

$$ii. (F_A \tilde{\cap} F_B)^{\tilde{c}} = F_A^{\tilde{c}} \tilde{\cup} F_B^{\tilde{c}}$$

2.2. Esnek Matrisler

Bu bölümde esnek matrisler (Çağman ve Enginoğlu, 2010b; Enginoğlu, 2012) ve bazı temel özellikleri (Çağman ve Enginoğlu, 2010b)'de verildiği biçimiyle sunulmuştur. Esnek matrislere ilham veren çalışmalar için bakınız (Maji ve ark., 2002; Majumdar ve Samanta, 2010).

2.2.1. Tanım: U evrensel küme, E parametreler kümesi, $A \subseteq E$ ve $F_A \in S(U)$ olsun. O halde, $U \times E$ 'nin $R_A = \{(u, x): x \in A, u \in f_A(x)\}$ biçiminde verilen bir alt kümesi ve

$$\chi_{R_A}(u, x) = \begin{cases} 1, & (u, x) \in R_A \\ 0, & (u, x) \notin R_A \end{cases}$$

ile tanımlı $\chi_{R_A}: U \times E \rightarrow [0,1]$ karakteristik fonksiyonu için $a_{ij} := \chi_{R_A}(u_j, x_j)$ olmak üzere F_A 'nın esnek matrisi

$$[a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \dots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Burada, eğer $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ ve $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ise F_A 'nın esnek matrisi $m \times n$ tipindedir. Ayrıca, U üzerinde E ile parametrize edilmiş bütün esnek matrislerin kümesi $SM[U]$ şeklinde gösterilir.

2.2.2. Örnek: $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $A = \{x_2, x_3, x_4\}$ olmak üzere $F_A = \{(x_2, \{u_2, u_4\}), (x_4, U)\}$ biçiminde tanımlansın. O halde,

$$R_A = \{(u_2, x_2), (u_4, x_2), (u_1, x_4), (u_2, x_4), (u_3, x_4), (u_4, x_4), (u_5, x_4)\}$$

için $[a_{ij}]$ esnek matrisi aşağıdaki gibidir:

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.3. Tanım: $[a_{ij}] \in SM[U]$ olsun. Eğer her i, j için $a_{ij} = 0$ ise $[a_{ij}]$ 'ye boş esnek matris denir ve $[0]$ ile gösterilir. Eğer her i, j için $a_{ij} = 1$ ise $[a_{ij}]$ 'ye evrensel esnek matris denir ve $[1]$ ile gösterilir.

2.2.4. Tanım: $[a_{ij}], [b_{ij}] \in SM[U]$ olsun. O halde,

- i. Eğer her i, j için $a_{ij} \leq b_{ij}$ oluyorsa $[a_{ij}]$ 'ye $[b_{ij}]$ 'nin bir esnek alt matrisidir denir ve $[a_{ij}] \subseteq [b_{ij}]$ ile gösterilir.
- ii. Eğer $[a_{ij}] \subseteq [b_{ij}]$ ve en az bir i, j için $a_{ij} \neq b_{ij}$ oluyorsa $[a_{ij}]$ 'ye $[b_{ij}]$ 'nin bir esnek öz alt matrisidir denir ve $[a_{ij}] \subset [b_{ij}]$ ile gösterilir.
- iii. Eğer $[a_{ij}] \subseteq [b_{ij}]$ ve $[b_{ij}] \subseteq [a_{ij}]$ oluyorsa $[a_{ij}]$ ve $[b_{ij}]$ eşit esnek matrislerdir denir ve $[a_{ij}] = [b_{ij}]$ ile gösterilir.

2.2.5. Örnek: $[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $[b_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ esnek matrisleri için $[a_{ij}] \subseteq [b_{ij}]$ biçimindedir.

2.2.6. Tanım: $[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}] \in SM[U]$ olsun. O halde,

- i. Eğer her i, j için $c_{ij} = \max\{a_{ij}, b_{ij}\}$ oluyorsa $[c_{ij}]$ 'ye $[a_{ij}]$ ile $[b_{ij}]$ 'nin esnek birleşimi denir ve $[a_{ij}] \cup [b_{ij}]$ ile gösterilir.
- ii. Eğer her i, j için $c_{ij} = \min\{a_{ij}, b_{ij}\}$ oluyorsa $[c_{ij}]$ 'ye $[a_{ij}]$ ile $[b_{ij}]$ 'nin esnek kesişimi denir ve $[a_{ij}] \cap [b_{ij}]$ ile gösterilir.
- iii. Eğer her i, j için $c_{ij} = \max\{0, a_{ij} - b_{ij}\}$ oluyorsa $[c_{ij}]$ 'ye $[a_{ij}]$ ile $[b_{ij}]$ 'nin esnek farkı denir ve $[a_{ij}] \setminus [b_{ij}]$ ile gösterilir.
- iv. Eğer her i, j için $c_{ij} = |a_{ij} - b_{ij}|$ oluyorsa $[c_{ij}]$ 'ye $[a_{ij}]$ ile $[b_{ij}]$ 'nin esnek simetrik farkı denir ve $[a_{ij}] \Delta [b_{ij}]$ ile gösterilir.
- v. Eğer her i, j için $b_{ij} = 1 - a_{ij}$ oluyorsa $[b_{ij}]$ 'ye $[a_{ij}]$ 'nin esnek tümleyeni denir ve $[a_{ij}]^c$ ile gösterilir.

2.2.7. Tanım: $[a_{ij}], [b_{ij}] \in SM[U]$ olsun. Eğer $[a_{ij}] \cap [b_{ij}] = [0]$ ise $[a_{ij}]$ ve $[b_{ij}]$ ayrıktır denir.

2.2.8. Örnek: $[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $[b_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ esnek matrisleri verilsin. O

halde,

$$[a_{ij}]^{\tilde{c}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } [a_{ij}] \tilde{\cup} [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Burada, $[a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}] = [0]$ olduğundan verilen esnek matrisler ayrıktır.

2.2.9. Önerme: $[a_{ij}] \in SM[U]$ olsun. O halde,

- i. $\left([a_{ij}]^{\tilde{c}}\right)^{\tilde{c}} = [a_{ij}]$
- ii. $[0]^{\tilde{c}} = [1]$

2.2.10. Önerme: $[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}] \in SM[U]$ olsun. O halde,

- i. $[a_{ij}] \cong [1]$
- ii. $[0] \cong [a_{ij}]$
- iii. $[a_{ij}] \cong [a_{ij}]$
- iv. $[a_{ij}] \cong [b_{ij}]$ ve $[b_{ij}] \cong [c_{ij}] \Rightarrow [a_{ij}] \cong [c_{ij}]$

2.2.11. Önerme: $[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}] \in SM[U]$ olsun. O halde,

- i. $[a_{ij}] = [b_{ij}]$ ve $[b_{ij}] = [c_{ij}] \Rightarrow [a_{ij}] = [c_{ij}]$
- ii. $[a_{ij}] \cong [b_{ij}]$ ve $[b_{ij}] \cong [a_{ij}] \Leftrightarrow [a_{ij}] = [b_{ij}]$

2.2.12. Önerme: $[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}] \in SM[U]$ olsun. O halde,

- i. $[a_{ij}] \tilde{\cap} [a_{ij}] = [a_{ij}]$ ve $[a_{ij}] \tilde{\cup} [a_{ij}] = [a_{ij}]$
- ii. $[a_{ij}] \tilde{\cap} [0] = [0]$ ve $[a_{ij}] \tilde{\cup} [0] = [a_{ij}]$
- iii. $[a_{ij}] \tilde{\cap} [1] = [a_{ij}]$ ve $[a_{ij}] \tilde{\cup} [1] = [1]$
- iv. $[a_{ij}] \tilde{\cap} [a_{ij}]^{\tilde{c}} = [0]$ ve $[a_{ij}] \tilde{\cup} [a_{ij}]^{\tilde{c}} = [1]$

- v. $[a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}] = [b_{ij}] \tilde{\cap} [a_{ij}]$ ve $[a_{ij}] \tilde{\cup} [b_{ij}] = [b_{ij}] \tilde{\cup} [a_{ij}]$
- vi. $([a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}]) \tilde{\cap} [c_{ij}] = [a_{ij}] \tilde{\cap} ([b_{ij}] \tilde{\cap} [c_{ij}])$ ve
 $([a_{ij}] \tilde{\cup} [b_{ij}]) \tilde{\cup} [c_{ij}] = [a_{ij}] \tilde{\cup} ([b_{ij}] \tilde{\cup} [c_{ij}])$
- vii. $[a_{ij}] \tilde{\cup} ([b_{ij}] \tilde{\cap} [c_{ij}]) = ([a_{ij}] \tilde{\cup} [b_{ij}]) \tilde{\cap} ([a_{ij}] \tilde{\cup} [c_{ij}])$ ve
 $[a_{ij}] \tilde{\cap} ([b_{ij}] \tilde{\cup} [c_{ij}]) = ([a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}]) \tilde{\cup} ([a_{ij}] \tilde{\cap} [c_{ij}])$

2.2.13. Önerme: $[a_{ij}], [b_{ij}] \in SM[U]$ olsun. O halde,

- i. $([a_{ij}] \tilde{\cup} [b_{ij}])^{\tilde{c}} = [a_{ij}]^{\tilde{c}} \tilde{\cap} [b_{ij}]^{\tilde{c}}$
- ii. $([a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}])^{\tilde{c}} = [a_{ij}]^{\tilde{c}} \tilde{\cup} [b_{ij}]^{\tilde{c}}$

2.3. Bulanık Kümeler

Bu bölümde Zadeh (1965) tarafından ortaya atılan bulanık kümeler sunulmuştur. Daha fazla bilgi için bkz. (Dubois ve Prade, 1980, Elmas, 2003; Klir ve Folger, 1988; Şen, 2001; Zimmermann, 2001).

2.3.1. Tanım: U bir evrensel küme ve $\mu: U \rightarrow [0,1]$ bir dönüşüm olsun. O halde, U üzerindeki μ bulanık kümesi $\mu := \{(x, \mu(x)): x \in U\}$ şeklinde tanımlanır.

Bu çalışma boyunca, bir μ bulanık kümesi için $\{(x, \mu(x)): x \in U\}$ yerine (Enginoğlu ve Çağman, 2020)'de verilen $\{\mu^{(x)}x: x \in U\}$ gösterimi kullanıldı ve U üzerindeki tüm bulanık kümelerin kümesi $F(U)$ ile gösterildi. Burada, bir karışıklığa yol açmadığı sürece, 1u yerine kısalık için u kullanılır. Ayrıca, 0u gibi elemanlar bir bulanık kümede gösterilmez. Bu durum bu tür elemanların yok sayıldığı anlamına gelmez.

2.3.2. Örnek: $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ için $\mu(u_1) = 0.2$, $\mu(u_2) = 0.5$, $\mu(u_3) = 0.6$, $\mu(u_4) = 0.7$, $\mu(u_5) = 0$ ve $\mu(u_6) = 1$ biçiminde verilsin. O halde, $\mu = \{^{0.2}u_1, ^{0.5}u_2, ^{0.6}u_3, ^{0.7}u_4, u_6\}$ biçimindedir.

2.3.3. Tanım: $\mu \in F(U)$ olsun. Eğer her $x \in U$ için $\mu(x) = 0$ oluyorsa μ 'ye boş bulanık küme denir ve 0U ile gösterilir. Eğer her $x \in U$ için $\mu(x) = 1$ oluyorsa μ 'ye evrensel bulanık küme denir ve 1U ile gösterilir.

2.3.4. Tanım: $\mu, \nu \in F(U)$ olsun.

- i. Eğer her $x \in U$ için $\mu(x) \leq \nu(x)$ oluyorsa, μ 'ye ν 'nün bir bulanık alt kümesidir denir ve $\mu \subseteq \nu$ ile gösterilir.
- ii. Eğer $\mu \subseteq \nu$ ve en az bir $x \in U$ için $\mu(x) \neq \nu(x)$ ise μ 'ye ν 'nün bir bulanık öz alt kümesidir denir ve $\mu \subset \nu$ ile gösterilir.
- iii. Eğer, her $x \in U$ için $\mu(x) = \nu(x)$ oluyorsa, μ ve ν 'ye eşit bulanık kümelerdir denir ve $\mu = \nu$ ile gösterilir.

2.3.5. Örnek: $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ üzerinde $\mu = \{^{0.2}u_1, ^{0.5}u_2, ^{0.6}u_3\}$ ve $\nu = \{^{0.8}u_1, ^{0.7}u_2, ^{0.6}u_3\}$ bulanık kümeleri için $\mu \subseteq \nu$ bulanık kapsaması geçerlidir.

2.3.6. Tanım: $\mu, \nu, \rho \in F(U)$ olsun.

- i. Eğer her $x \in U$ için $\rho(x) = \max\{\mu(x), \nu(x)\}$ oluyorsa ρ 'ya μ ile ν 'nün bulanık birleşimi denir ve $\mu \cup \nu$ ile gösterilir.
- ii. Eğer her $x \in U$ için $\rho(x) = \min\{\mu(x), \nu(x)\}$ oluyorsa ρ 'ya μ ile ν 'nün bulanık kesişimi denir ve $\mu \cap \nu$ ile gösterilir.
- iii. Eğer her $x \in U$ için $\rho(x) = \max\{0, \mu(x) - \nu(x)\}$ oluyorsa, ρ 'ya μ ile ν 'nün bulanık farkı denir ve $\mu \setminus \nu$ ile gösterilir.
- iv. Eğer her $x \in U$ için $\rho(x) = |\mu(x) - \nu(x)|$ oluyorsa, ρ 'ya μ ile ν 'nün bulanık simetrik farkı denir ve $\mu \Delta \nu$ ile gösterilir.
- v. Eğer her $x \in U$ için $\nu(x) = 1 - \mu(x)$ oluyorsa, ν 'ye μ 'nün bulanık tümleyeni denir ve μ^c ile gösterilir.

2.3.7. Tanım: $\mu, \nu \in F(U)$ olsun. Eğer $\mu \cap \nu = {}^0U$ ise μ ve ν ayrıktır denir.

2.3.8. Örnek: $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ kümesi üzerinde $\mu = \{^{0.3}u_1, ^{0.7}u_3, ^{0.6}u_5, u_6\}$ ve $\nu = \{^{0.8}u_1, ^{0.9}u_2, ^{0.2}u_3, ^{0.9}u_4, ^{0.7}u_5\}$ bulanık kümeleri verilsin. O halde,

$$\begin{aligned}\mu^c &= \{^{0.7}u_1, ^1u_2, ^{0.3}u_3, ^1u_4, ^{0.4}u_5\} \\ \mu \cup \nu &= \{^{0.8}u_1, ^{0.9}u_2, ^{0.7}u_3, ^{0.9}u_4, ^{0.7}u_5, u_6\} \\ \mu \cap \nu &= \{^{0.3}u_1, ^{0.2}u_3, ^{0.6}u_5\} \\ \mu \setminus \nu &= \{^{0.5}u_3, u_6\}\end{aligned}$$

ve

$$\mu \tilde{\Delta} v = \{^{0.5}u_1, ^{0.9}u_2, ^{0.5}u_3, ^{0.9}u_4, ^{0.1}u_5, u_6\}$$

biçimindedir.

2.3.9 Not: $\mu \tilde{\cup} \mu^{\tilde{c}} = {}^1U$ ve $\mu \tilde{\cap} \mu^{\tilde{c}} = {}^0U$ eşitliklerinin her $\mu \in F(U)$ için sağlanmadığına dikkat edilmelidir.

2.3.10. Önerme: $\mu \in F(U)$ olsun. O halde,

- i. $(\mu^{\tilde{c}})^{\tilde{c}} = \mu$
- ii. ${}^0U^{\tilde{c}} = {}^1U$

2.3.11. Önerme: $\mu, \nu, \rho \in F(U)$ olsun. O halde,

- i. $\mu \subseteq {}^1U$
- ii. ${}^0U \subseteq \mu$
- iii. $\mu \subseteq \mu$
- iv. $\mu \subseteq \nu$ ve $\nu \subseteq \rho \Rightarrow \mu \subseteq \rho$

2.3.12. Önerme: $\mu, \nu, \rho \in F(U)$ olsun. O halde,

- i. $\mu = \nu$ ve $\nu = \rho \Rightarrow \mu = \rho$
- ii. $\mu \subseteq \nu$ ve $\nu \subseteq \mu \Leftrightarrow \mu = \nu$

2.3.13. Önerme: $\mu, \nu, \rho \in F(U)$ olsun. O halde,

- i. $\mu \tilde{\cup} \mu = \mu$ ve $\mu \tilde{\cap} \mu = \mu$
- ii. $\mu \tilde{\cup} {}^0U = \mu$ ve $\mu \tilde{\cap} {}^0U = {}^0U$
- iii. $\mu \tilde{\cup} {}^1U = {}^1U$ ve $\mu \tilde{\cap} {}^1U = \mu$
- iv. $\mu \tilde{\cup} \nu = \nu \tilde{\cup} \mu$ ve $\mu \tilde{\cap} \nu = \nu \tilde{\cap} \mu$
- v. $\mu \tilde{\cup} (\nu \tilde{\cup} \rho) = (\mu \tilde{\cup} \nu) \tilde{\cup} \rho$ ve $\mu \tilde{\cap} (\nu \tilde{\cap} \rho) = (\mu \tilde{\cap} \nu) \tilde{\cap} \rho$
- vi. $\mu \tilde{\cup} (\nu \tilde{\cap} \rho) = (\mu \tilde{\cup} \nu) \tilde{\cap} (\mu \tilde{\cup} \rho)$ ve $\mu \tilde{\cap} (\nu \tilde{\cup} \rho) = (\mu \tilde{\cap} \nu) \tilde{\cup} (\mu \tilde{\cap} \rho)$

2.3.14. Önerme: $\mu, \nu \in F(U)$ olsun. O halde,

- i. $(\mu \tilde{\cup} \nu)^{\tilde{c}} = \mu^{\tilde{c}} \tilde{\cap} \nu^{\tilde{c}}$
- ii. $(\mu \tilde{\cap} \nu)^{\tilde{c}} = \mu^{\tilde{c}} \tilde{\cup} \nu^{\tilde{c}}$

2.4. Bulanık Esnek Kümeler

Bulanık esnek küme kavramı ile ilgili ilk çalışma 2001 yılındadır (Maji ve ark., 2001). Daha sonra bu kavram, (Çağman ve Enginoğlu, 2010a)'da verilen yeni biçimi bakımından tekrar ele alındı (Çağman ve ark., 2011). Bu çalışmada, kavramın (Çağman ve ark., 2011)'de verilen biçimi kullanıldı.

2.4.1. Tanım: U evrensel küme, $F(U)$, U üzerindeki tüm bulanık kümelerin kümesi, E parametreler kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. O halde, $\gamma_A: E \rightarrow F(U)$, $x \notin A$ iken $\gamma_A(x) = {}^0U$ olacak biçimde bir dönüşüm olmak üzere, U üzerinde bir Γ_A bulanık esnek kümesi $\Gamma_A := \{(x, \gamma_A(x)): x \in E\}$ biçiminde tanımlanır. Burada, U üzerindeki tüm bulanık esnek kümelerin kümesi $FS(U)$ ile gösterilir.

2.4.2. Örnek: $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ve $A = \{x_2, x_3, x_4\}$ olsun. O halde, $\gamma_A(x_2) = \{^{0.8}u_1, ^{0.9}u_2\}$, $\gamma_A(x_3) = {}^0U$ ve $\gamma_A(x_4) = {}^1U$ için Γ_A bulanık esnek kümesi $\Gamma_A = \{(x_2, \{^{0.8}u_1, ^{0.9}u_2\}), (x_4, {}^1U)\}$ biçiminde yazılır.

2.4.3. Tanım: $\Gamma_A \in FS(U)$ olsun. Eğer her $x \in A$ için $\gamma_A(x) = {}^0U$ oluyorsa Γ_A 'ya boş bulanık esnek küme denir ve $\Gamma_\emptyset$ ile gösterilir. Eğer her $x \in E$ için $\gamma_E(x) = {}^1U$ oluyorsa Γ_E 'ye evrensel bulanık esnek küme denir ve $\Gamma_{\bar{E}}$ ile gösterilir.

2.4.4. Tanım: $\Gamma_A, \Gamma_B \in FS(U)$ olsun.

- i. Eğer her $x \in E$ için $\gamma_A(x) \subseteq \gamma_B(x)$ oluyorsa Γ_A 'ya Γ_B 'nin bir bulanık esnek alt kümesi denir ve $\Gamma_A \subseteq \Gamma_B$ ile gösterilir.
- ii. Eğer $\Gamma_A \subseteq \Gamma_B$ ve en az bir $x \in E$ için $\gamma_A(x) \neq \gamma_B(x)$ ise Γ_A 'ya Γ_B 'nin bir bulanık esnek öz alt kümesi denir ve $\Gamma_A \subset \Gamma_B$ ile gösterilir.
- iii. Eğer her $x \in E$ için $\gamma_A(x) = \gamma_B(x)$ oluyorsa Γ_A ve Γ_B eşit bulanık esnek kümelerdir denir ve $\Gamma_A = \Gamma_B$ ile gösterilir.

2.4.5. Örnek: $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $A = \{x_2, x_3\}$ ve $B = \{x_2, x_3, x_4\}$ olsun. O halde, $\gamma_A(x_2) = \{^{0.8}u_1, ^{0.9}u_2\}$, $\gamma_A(x_3) = {}^0U$, $\gamma_B(x_2) = \{u_1, ^{0.9}u_2, ^{0.7}u_3\}$, $\gamma_B(x_3) = \{^{0.2}u_4\}$ ve $\gamma_B(x_4) = {}^1U$ için $\Gamma_A \subseteq \Gamma_B$ biçimindedir.

2.4.6. Tanım: $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C \in FS(U)$ olsun. O halde,

- i. Eğer her $x \in E$ için $\gamma_C(x) = \gamma_A(x) \tilde{\cup} \gamma_B(x)$ oluyorsa Γ_C 'ye Γ_A ile Γ_B 'nin bulanık esnek birleşimi denir ve $\Gamma_A \tilde{\cup} \Gamma_B$ ile gösterilir.
- ii. Eğer her $x \in E$ için $\gamma_C(x) = \gamma_A(x) \tilde{\cap} \gamma_B(x)$ oluyorsa Γ_C 'ye Γ_A ile Γ_B 'nin bulanık esnek kesişimi denir ve $\Gamma_A \tilde{\cap} \Gamma_B$ ile gösterilir.
- iii. Eğer her $x \in E$ için $\gamma_C(x) = \gamma_A(x) \tilde{\setminus} \gamma_B(x)$ oluyorsa Γ_C 'ye Γ_A ile Γ_B 'nin bulanık esnek farkı denir ve $\Gamma_A \tilde{\setminus} \Gamma_B$ ile gösterilir.
- iv. Eğer her $x \in E$ için $\gamma_C(x) = \gamma_A(x) \tilde{\Delta} \gamma_B(x)$ oluyorsa Γ_C 'ye Γ_A ile Γ_B 'nin bulanık esnek simetrik farkı denir ve $\Gamma_A \tilde{\Delta} \Gamma_B$ ile gösterilir.
- v. Eğer her $x \in E$ için $\gamma_B(x) = \gamma_A^{\tilde{c}}(x)$ oluyorsa Γ_B 'ye Γ_A 'nın bulanık esnek tümleyeni denir ve $\Gamma_A^{\tilde{c}}$ ile gösterilir.

2.4.7. Tanım: $\Gamma_A, \Gamma_B \in FS(U)$ olsun. Eğer $\Gamma_A \tilde{\cap} \Gamma_B = \Gamma_{\emptyset}$ oluyorsa Γ_A ile Γ_B ayrıktır denir.

2.4.8. Örnek: $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, $E = \{x_1, x_2, x_3\}$, $A = \{x_1, x_2\}$ ve $B = \{x_1, x_3\}$ için $\Gamma_A = \{(x_1, \{^{0.8}u_1, ^{0.9}u_2\}), (x_2, ^1U)\}$ ve $\Gamma_B = \{(x_1, \{^{0.6}u_1, ^{0.3}u_2, ^{0.5}u_3, ^{0.2}u_4\})\}$ olsun. O halde, $\Gamma_A^{\tilde{c}} = \{(x_1, \{^{0.2}u_1, ^{0.1}u_2, u_3, u_4\}), (x_3, ^1U)\}$, $\Gamma_A \tilde{\cap} \Gamma_B = \{(x_1, \{^{0.6}u_1, ^{0.3}u_2\})\}$ ve $\Gamma_A \tilde{\cup} \Gamma_B = \{(x_1, \{^{0.8}u_1, ^{0.9}u_2, ^{0.5}u_3, ^{0.2}u_4\}), (x_2, ^1U)\}$ biçimindedir.

2.4.9. Önerme: $\Gamma_A \in FS(U)$ olsun. O halde,

- i. $(\Gamma_A^{\tilde{c}})^{\tilde{c}} = \Gamma_A$
- ii. $\Gamma_{\emptyset}^{\tilde{c}} = \Gamma_{\tilde{E}}$

2.4.10. Önerme: $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C \in FS(U)$ olsun. O halde,

- i. $\Gamma_A \cong \Gamma_{\tilde{E}}$
- ii. $\Gamma_{\emptyset} \cong \Gamma_A$
- iii. $\Gamma_A \cong \Gamma_A$
- iv. $\Gamma_A \cong \Gamma_B$ ve $\Gamma_B \cong \Gamma_C \Rightarrow \Gamma_A \cong \Gamma_C$

2.4.11. Önerme: $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C \in FS(U)$ olsun. O halde,

- i. $\Gamma_A = \Gamma_B$ ve $\Gamma_B = \Gamma_C \Rightarrow \Gamma_A = \Gamma_C$
- ii. $\Gamma_A \cong \Gamma_B$ ve $\Gamma_B \cong \Gamma_A \Leftrightarrow \Gamma_A = \Gamma_B$

2.4.12. Önerme: $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C \in FS(U)$ olsun. O halde,

- i. $\Gamma_A \tilde{\cap} \Gamma_A = \Gamma_A$ ve $\Gamma_A \tilde{\cup} \Gamma_A = \Gamma_A$
- ii. $\Gamma_A \tilde{\cap} \Gamma_\emptyset = F_\emptyset$ ve $\Gamma_A \tilde{\cup} \Gamma_\emptyset = \Gamma_A$
- iii. $\Gamma_A \tilde{\cap} \Gamma_{\tilde{E}} = \Gamma_A$ ve $\Gamma_A \tilde{\cup} \Gamma_{\tilde{E}} = \Gamma_{\tilde{E}}$
- iv. $\Gamma_A \tilde{\cap} \Gamma_B = \Gamma_B \tilde{\cap} \Gamma_A$ ve $\Gamma_A \tilde{\cup} \Gamma_B = \Gamma_B \tilde{\cup} \Gamma_A$
- v. $\Gamma_A \tilde{\cap} (\Gamma_B \tilde{\cap} \Gamma_C) = (\Gamma_A \tilde{\cap} \Gamma_B) \tilde{\cap} \Gamma_C$ ve $\Gamma_A \tilde{\cup} (\Gamma_B \tilde{\cup} \Gamma_C) = (\Gamma_A \tilde{\cup} \Gamma_B) \tilde{\cup} \Gamma_C$
- vi. $\Gamma_A \tilde{\cap} (\Gamma_B \tilde{\cup} \Gamma_C) = (\Gamma_A \tilde{\cap} \Gamma_B) \tilde{\cup} (\Gamma_A \tilde{\cap} \Gamma_C)$ ve $\Gamma_A \tilde{\cup} (\Gamma_B \tilde{\cap} \Gamma_C) = (\Gamma_A \tilde{\cup} \Gamma_B) \tilde{\cap} (\Gamma_A \tilde{\cup} \Gamma_C)$

2.4.13. Önerme: $\Gamma_A, \Gamma_B \in FS(U)$ olsun. O halde,

- i. $(\Gamma_A \tilde{\cup} \Gamma_B)^{\tilde{c}} = \Gamma_A^{\tilde{c}} \tilde{\cap} \Gamma_B^{\tilde{c}}$
- ii. $(\Gamma_A \tilde{\cap} \Gamma_B)^{\tilde{c}} = \Gamma_A^{\tilde{c}} \tilde{\cup} \Gamma_B^{\tilde{c}}$

2.5. Bulanık Esnek Matrisler

Bu bölümde bulanık esnek matrisler (Çağman ve Enginoğlu, 2012) ve bazı temel özellikleri (Çağman ve Enginoğlu, 2012)'de verildiği biçimiyle sunulmuştur.

2.5.1. Tanım: U evrensel küme, E parametreler kümesi, $A \subseteq E$ ve $\Gamma_A \in FS(U)$ olsun. O halde, Γ_A üzerinde $R_A = \{\mu_{R_A}(u, x): (u, x) \in U \times E\}$ bulanık bağıntısı ve $\mu_{R_A}(u, x) := \mu_{\Gamma_A(x)}(u)$ ile tanımlı $\mu_{R_A}: U \times E \rightarrow [0,1]$ bulanık fonksiyonu için $a_{ij} := \mu_{R_A}(u_j, x_j)$ olmak üzere Γ_A 'nın bulanık esnek matrisi

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & \dots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Burada, eğer $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ ve $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ise $[a_{ij}]$ bulanık esnek matrisi $m \times n$ tipindedir. Ayrıca, U üzerinde E ile parametrize edilmiş bütün bulanık esnek matrislerin kümesi $FSM[U]$ şeklinde gösterilir.

2.5.2. Örnek: $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $A = \{x_1, x_3, x_4\}$ olmak üzere $\Gamma_A = \{(x_1, \{^{0.5}u_1, ^{0.9}u_3\}), (x_3, \{^{0.8}u_2, ^{0.3}u_4, ^{0.4}u_5\}), (x_4, ^1U)\}$ biçiminde verilsin. O halde,

$$R_A = \{^{0.5}(u_1, x_1), ^{0.9}(u_3, x_1), ^{0.8}(u_2, x_3), ^{0.3}(u_4, x_3), ^{0.4}(u_5, x_3), ^1(u_1, x_4), ^1(u_2, x_4), ^1(u_3, x_4), ^1(u_4, x_4), ^1(u_5, x_4)\}$$

için $[a_{ij}]$ bulanık esnek matrisi aşağıdaki gibidir:

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.8 & 1 \\ 0.9 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.3 & 1 \\ 0 & 0 & 0.4 & 1 \end{bmatrix}$$

2.5.3. Tanım: $[a_{ij}] \in FSM[U]$ olsun. Eğer her i, j için $a_{ij} = 0$ ise $[a_{ij}]$ 'ye boş bulanık esnek matris denir ve $[0]$ ile gösterilir. Eğer her i, j için $a_{ij} = 1$ ise $[a_{ij}]$ 'ye evrensel bulanık esnek matris denir ve $[1]$ ile gösterilir.

2.5.4. Tanım: $[a_{ij}], [b_{ij}] \in FSM[U]$ olsun. O halde,

- i. Eğer her i, j için $a_{ij} \leq b_{ij}$ oluyorsa $[a_{ij}]$ 'ye $[b_{ij}]$ 'nin bir bulanık esnek alt matrisidir denir ve $[a_{ij}] \subseteq [b_{ij}]$ ile gösterilir.
- ii. Eğer $[a_{ij}] \subseteq [b_{ij}]$ ve en az bir i, j için $a_{ij} \neq b_{ij}$ oluyorsa $[a_{ij}]$ 'ye $[b_{ij}]$ 'nin bir bulanık esnek öz alt matrisidir denir ve $[a_{ij}] \subset [b_{ij}]$ ile gösterilir.
- iii. Eğer her i, j için $a_{ij} = b_{ij}$ oluyorsa $[a_{ij}]$ ve $[b_{ij}]$ eşit bulanık esnek matrislerdir denir ve $[a_{ij}] = [b_{ij}]$ ile gösterilir.

2.5.5. Tanım: $[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}] \in FSM[U]$ olsun. O halde,

- i. Eğer her i, j için $c_{ij} = \max\{a_{ij}, b_{ij}\}$ oluyorsa $[c_{ij}]$ 'ye $[a_{ij}]$ ile $[b_{ij}]$ 'nin bulanık esnek birleşimi denir ve $[a_{ij}] \cup [b_{ij}]$ ile gösterilir.
- ii. Eğer her i, j için $c_{ij} = \min\{a_{ij}, b_{ij}\}$ oluyorsa $[c_{ij}]$ 'ye $[a_{ij}]$ ile $[b_{ij}]$ 'nin bulanık esnek kesişimi denir ve $[a_{ij}] \cap [b_{ij}]$ ile gösterilir.
- iii. Eğer her i, j için $c_{ij} = \min\{a_{ij}, 1 - b_{ij}\}$ oluyorsa $[c_{ij}]$ 'ye $[a_{ij}]$ ile $[b_{ij}]$ 'nin bulanık esnek farkı denir ve $[a_{ij}] \setminus [b_{ij}]$ ile gösterilir.

iv. Eğer her i, j için $c_{ij} = |a_{ij} - b_{ij}|$ oluyorsa $[c_{ij}]$ 'ye $[a_{ij}]$ ile $[b_{ij}]$ 'nin bulanık esnek simetrik farkı denir ve $[a_{ij}] \tilde{\Delta} [b_{ij}]$ ile gösterilir.

v. Eğer her i, j için $b_{ij} = 1 - a_{ij}$ oluyorsa $[b_{ij}]$ 'ye $[a_{ij}]$ 'nin bulanık esnek tümleyeni denir ve $[a_{ij}]^{\tilde{c}}$ ile gösterilir.

2.5.6. Tanım: $[a_{ij}], [b_{ij}] \in FSM[U]$ olsun. Eğer $[a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}] = [0]$ ise $[a_{ij}]$ ve $[b_{ij}]$ ayrıktır denir.

2.5.7. Örnek: $[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.8 & 1 \\ 0.9 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.3 & 1 \\ 0 & 0 & 0.4 & 1 \end{bmatrix}$ ve $[b_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 1 \\ 0.1 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}$ olsun. O

halde,

$$[a_{ij}] \tilde{\cup} [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.4 & 1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.8 & 1 \\ 0.9 & 0 & 0.9 & 1 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 1 \\ 0.2 & 0 & 0.7 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } [a_{ij}]^{\tilde{c}} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0.7 & 0 \\ 1 & 1 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

2.5.8. Önerme: $[a_{ij}] \in FSM[U]$ olsun. O halde,

i. $\left([a_{ij}]^{\tilde{c}}\right)^{\tilde{c}} = [a_{ij}]$

ii. $[0]^{\tilde{c}} = [1]$

2.5.9. Önerme: $[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}] \in FSM[U]$ olsun. O halde,

i. $[a_{ij}] \cong [1]$

ii. $[0] \cong [a_{ij}]$

iii. $[a_{ij}] \cong [a_{ij}]$

iv. $[a_{ij}] \cong [b_{ij}]$ ve $[b_{ij}] \cong [c_{ij}] \Rightarrow [a_{ij}] \cong [c_{ij}]$

2.5.10. Önerme: $[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}] \in FSM[U]$ olsun. O halde,

- i. $[a_{ij}] = [b_{ij}]$ ve $[b_{ij}] = [c_{ij}] \Rightarrow [a_{ij}] = [c_{ij}]$
- ii. $[a_{ij}] \cong [b_{ij}]$ ve $[b_{ij}] \cong [a_{ij}] \Leftrightarrow [a_{ij}] = [b_{ij}]$

2.5.11. Önerme: $[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}] \in FSM[U]$ olsun. O halde,

- i. $[a_{ij}] \tilde{\cap} [a_{ij}] = [a_{ij}]$ ve $[a_{ij}] \tilde{\cup} [a_{ij}] = [a_{ij}]$
- ii. $[a_{ij}] \tilde{\cap} [0] = [0]$ ve $[a_{ij}] \tilde{\cup} [0] = [a_{ij}]$
- iii. $[a_{ij}] \tilde{\cap} [1] = [a_{ij}]$ ve $[a_{ij}] \tilde{\cup} [1] = [1]$
- iv. $[a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}] = [b_{ij}] \tilde{\cap} [a_{ij}]$ ve $[a_{ij}] \tilde{\cup} [b_{ij}] = [b_{ij}] \tilde{\cup} [a_{ij}]$
- v. $([a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}]) \tilde{\cap} [c_{ij}] = [a_{ij}] \tilde{\cap} ([b_{ij}] \tilde{\cap} [c_{ij}])$ ve
 $([a_{ij}] \tilde{\cup} [b_{ij}]) \tilde{\cup} [c_{ij}] = [a_{ij}] \tilde{\cup} ([b_{ij}] \tilde{\cup} [c_{ij}])$
- vi. $[a_{ij}] \tilde{\cap} ([b_{ij}] \tilde{\cup} [c_{ij}]) = ([a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}]) \tilde{\cup} ([a_{ij}] \tilde{\cap} [c_{ij}])$ ve
 $[a_{ij}] \tilde{\cup} ([b_{ij}] \tilde{\cap} [c_{ij}]) = ([a_{ij}] \tilde{\cup} [b_{ij}]) \tilde{\cap} ([a_{ij}] \tilde{\cup} [c_{ij}])$

2.5.12. Önerme: $[a_{ij}], [b_{ij}] \in FSM[U]$ olsun. O halde,

- i. $([a_{ij}] \tilde{\cup} [b_{ij}])^{\tilde{c}} = [a_{ij}]^{\tilde{c}} \tilde{\cap} [b_{ij}]^{\tilde{c}}$
- ii. $([a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}])^{\tilde{c}} = [a_{ij}]^{\tilde{c}} \tilde{\cup} [b_{ij}]^{\tilde{c}}$

3. ÇOKLU KÜMELER

Çalışmanın bu bölümünde çoklu kümeler ve bazı özellikleri sunulmuştur. Çoklu kümeler klasik kümelerin aksine öğelerin tekrarına izin verir. Örneğin, bir şirkette çalışanların yaşları ve maaşları ile ilgili işlem yapılırken, tekrar eden girişlerin sisteme işlenmesi gerekmektedir. Bu gibi durumlarda klasik kümeler yetersiz kalır. Bu zorluğun üstesinden gelebilmek için çoklu küme kavramı ortaya atılmıştır. 1970'lerde Bruijn'den sonra çoklu kümeler olarak anılan bu kavram liste (list), demet (bunch), koleksiyon (collection) ve paket (bag) gibi başka isimlerle kullanılmıştır (Knuth, 1998).

3.1. Tanım: U bir evrensel küme, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ve $X \subseteq U$ olsun. O halde, U üzerinde tanımlı M_X çoklu kümesi $M_X := \left\{ \frac{f_X(u)}{u} : u \in U \right\}$ biçiminde tanımlanır. Burada, $u \notin X$ için $f_X(u) = 0$ olmak üzere f_X , U 'dan $\mathbb{N}$ 'ye bir dönüşümdür. Ayrıca, $\frac{f_X(u)}{u}$ notasyonu u 'nun $f_X(u)$ kez tekrar ettiğini gösterir. Kısalık için $\frac{0}{u}$ biçimindeki elemanlar bir çoklu kümede gösterilmez. Bu durum bu tür elemanların yok sayıldığı anlamına gelmez.

Eğer her $u \in X$ için $f_X(u) < 2$ ise M_X bir klasik küme olarak görülebilir. Bu anlamda çoklu kümeler klasik kümelerin bir tür genellemesi olarak kabul edilebilir. Ayrıca, $X = U$ ise çoklu kümeler M veya $M_1, M_2, \dots$ ile gösterilir. Bu çalışma boyunca, U üzerindeki tüm çoklu kümelerin kümesi $M(U)$ ve elemanların maksimum tekrar sayısı $n \in \mathbb{N}$ olan U üzerindeki tüm çoklu kümelerin kümesi $M^n(U)$ ile gösterilsin.

3.2. Örnek: $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ ve $X = \{u_1, u_2\}$ olsun ve u_1, u_2 ve u_3 sırasıyla 15, 33 ve 40 kez tekrar etsin. O halde, $f_X(u_1) = 15$, $f_X(u_2) = 33$ ve $f_X(u_3) = 0$ değerleri için $M_X = \left\{ \frac{15}{u_1}, \frac{33}{u_2} \right\}$ biçimindedir.

3.3. Tanım: $M_X \in M(U)$ olsun. Eğer her $u \in U$ için $f_X(u) = 0$ ise M_X 'e U üzerinde boş çoklu küme denir ve $M_\emptyset$ ile gösterilir.

3.4. Tanım: $M_U \in M^n(U)$ olsun. Eğer her $u \in U$ için $f_U(u) = n$ ise M_U 'ya U üzerinde n -evrensel çoklu küme (kısaca evrensel çoklu küme) denir ve M_U^n (kısaca M_U^n) ile gösterilir.

3.5. Tanım: $M_X, M_Y \in M(U)$ olsun. O halde,

- i. Eğer her $u \in U$ için $f_X(u) \leq f_Y(u)$ oluyorsa M_X 'e M_Y 'nin bir çoklu alt kümesidir denir ve $M_X \subseteq M_Y$ ile gösterilir.
- ii. Eğer $M_X \subseteq M_Y$ ve en az bir $u \in U$ için $f_X(u) \neq f_Y(u)$ oluyorsa M_X 'e M_Y 'nin bir çoklu öz alt kümesidir denir ve $M_X \subset M_Y$ ile gösterilir.
- iii. Eğer her $u \in U$ için $f_X(u) = f_Y(u)$ oluyorsa M_X ve M_Y eşit çoklu kümelerdir denir ve $M_X = M_Y$ ile gösterilir.

3.6. Örnek: $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ üzerinde iki çoklu küme $M_X = \left\{\frac{15}{u_1}, \frac{33}{u_2}\right\}$ ve $M_Y = \left\{\frac{22}{u_1}, \frac{35}{u_2}, \frac{24}{u_3}\right\}$ olsun. O halde, $f_X(u_1) = 15 \leq f_Y(u_1) = 22$, $f_X(u_2) = 33 \leq f_Y(u_2) = 35$ ve $f_X(u_3) = 0 \leq f_Y(u_3) = 24$ olduğundan $M_X \subseteq M_Y$ sağlanır.

3.7. Tanım: $M_X, M_Y, M_Z \in M(U)$ olsun. O halde,

- i. Eğer her $u \in U$ için $f_Z(u) = \max\{f_X(u), f_Y(u)\}$ oluyorsa M_Z 'ye M_X ile M_Y 'nin çoklu birleşimi denir ve $M_X \cup M_Y$ ile gösterilir.
- ii. Eğer her $u \in U$ için $f_Z(u) = \min\{f_X(u), f_Y(u)\}$ oluyorsa M_Z 'ye M_X ile M_Y 'nin çoklu kesişimi denir ve $M_X \cap M_Y$ ile gösterilir.
- iii. Eğer her $u \in U$ için $f_Z(u) = \max\{0, f_X(u) - f_Y(u)\}$ oluyorsa M_Z 'ye M_X ile M_Y 'nin çoklu farkı denir ve $M_X \setminus M_Y$ ile gösterilir.
- iv. Eğer her $u \in U$ için $f_Z(u) = |f_X(u) - f_Y(u)|$ oluyorsa M_Z 'ye M_X ile M_Y 'nin çoklu simetrik farkı denir ve $M_X \tilde{\Delta} M_Y$ ile gösterilir.

3.8. Tanım: $M_X, M_Y \in M^n(U)$ olsun. Eğer her $u \in U$ için $f_Y(u) = n - f_X(u)$ oluyorsa M_Y 'ye M_X 'in çoklu tümleyeni denir ve M_X^c ile gösterilir.

3.9. Örnek: $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ olmak üzere $M_X = \left\{\frac{21}{u_1}, \frac{44}{u_2}\right\} \in M^{100}(U)$ çoklu kümesi için $M_X^c = \left\{\frac{79}{u_1}, \frac{56}{u_2}, \frac{100}{u_3}\right\}$ biçimindedir.

3.10. Örnek: $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ olsun. $M_X = \left\{\frac{15}{u_1}, \frac{33}{u_2}, \frac{40}{u_3}\right\}$ ve $M_Y = \left\{\frac{22}{u_1}, \frac{35}{u_2}, \frac{24}{u_3}\right\}$ için

$$M_X \cup M_Y = \left\{\frac{22}{u_1}, \frac{35}{u_2}, \frac{40}{u_3}\right\}$$

$$M_X \cap M_Y = \left\{\frac{15}{u_1}, \frac{33}{u_2}, \frac{24}{u_3}\right\}$$

ve

$$M_X \Delta M_Y = \left\{\frac{7}{u_1}, \frac{2}{u_2}, \frac{16}{u_3}\right\}$$

biçimindedir.

3.11. Tanım: $M_X, M_Y \in M(U)$ olsun. Eğer $M_X \cap M_Y = M_\emptyset$ ise M_X ve M_Y ayrıktır denir.

3.12. Önerme: $M_X \in M^n(U)$ olsun. O halde,

- i. $(M_X^c)^c = M_X$
- ii. $(M_\emptyset)^c = M_{\bar{U}}$

3.13. Önerme: $M_X, M_Y, M_Z \in M(U)$ olsun. O halde,

- i. $M_X \subseteq M_{\bar{U}}$
- ii. $M_\emptyset \subseteq M_X$
- iii. $M_X \subseteq M_X$
- iv. $M_X \subseteq M_Y$ ve $M_Y \subseteq M_Z \Rightarrow M_X \subseteq M_Z$

3.14. Önerme: $M_X, M_Y, M_Z \in M(U)$ olsun. O halde,

- i. $M_X = M_Y$ ve $M_Y = M_Z \Rightarrow M_X = M_Z$
- ii. $M_X \subseteq M_Y$ ve $M_Y \subseteq M_X \Leftrightarrow M_X = M_Y$

3.15. Önerme: $M_X, M_Y, M_Z \in M(U)$ olsun. O halde,

- i. $M_X \cup M_X = M_X$ ve $M_X \cap M_X = M_X$
- ii. $M_X \cup M_\emptyset = M_{\bar{U}}$ ve $M_X \cap M_\emptyset = M_\emptyset$
- iii. $M_X \cup M_{\bar{U}} = M_{\bar{U}}$ ve $M_X \cap M_{\bar{U}} = M_X$
- iv. $M_X \cup M_Y = M_Y \cup M_X$ ve $M_X \cap M_Y = M_Y \cap M_X$

v. $(M_X \widetilde{\cup} M_Y) \widetilde{\cup} M_Z = M_X \widetilde{\cup} (M_Y \widetilde{\cup} M_Z)$ ve

$$(M_X \widetilde{\cap} M_Y) \widetilde{\cap} M_Z = M_X \widetilde{\cap} (M_Y \widetilde{\cap} M_Z)$$

vi. $M_X \widetilde{\cap} (M_Y \widetilde{\cup} M_Z) = (M_X \widetilde{\cap} M_Y) \widetilde{\cup} (M_X \widetilde{\cap} M_Z)$ ve

$$M_X \widetilde{\cup} (M_Y \widetilde{\cap} M_Z) = (M_X \widetilde{\cup} M_Y) \widetilde{\cap} (M_X \widetilde{\cup} M_Z)$$

3.16. Önerme: $M_X, M_Y, M_Z \in M^n(U)$ olsun. O halde,

i. $(M_X \widetilde{\cup} M_Y)^{\tilde{c}} = M_X^{\tilde{c}} \widetilde{\cap} M_Y^{\tilde{c}}$

ii. $(M_X \widetilde{\cap} M_Y)^{\tilde{c}} = M_X^{\tilde{c}} \widetilde{\cup} M_Y^{\tilde{c}}$

4. ESNEK ÇOKLU KÜMELER

Çalışmanın bu bölümünde esnek çoklu kümeler (Alkhazaleh ve ark., 2011) ve bazı özellikleri sunulmuştur.

4.1. Tanım: U bir evrensel küme, E parametreler kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. O halde, $M(U)$, U üzerinde tanımlı tüm çoklu kümelerin kümesi olmak üzere U üzerinde bir esnek çoklu küme $\Omega_A := \{(x, \Omega_A(x)) : x \in E\}$ biçiminde tanımlanır. Burada Ω_A , $x \notin A$ için $\Omega_A(x) = M_\emptyset$ olacak biçimde E 'den $M(U)$ 'ya bir dönüşümdür. Ayrıca, $\Omega_A(x)(u)$ notasyonu u 'nun $\Omega_A(x)$ çoklu kümesindeki tekrar sayısını gösterir. Kısalık için $(x, M_\emptyset)$ biçimindeki elemanlar bir esnek çoklu kümede gösterilmez. Bu durum bu tür elemanların yok sayıldığı anlamına gelmez.

Eğer her $x \in E$ ve her $u \in X$ için $\Omega_A(x)(u) < 2$ ise Ω_A bir esnek küme olarak görülebilir. Bu anlamda esnek çoklu kümeler esnek kümelerin bir tür genellemesi olarak kabul edilebilir. Ayrıca, $A = E$ ise esnek çoklu kümeler Ω veya $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ ile gösterilir. Bu çalışma boyunca, U üzerindeki tüm esnek çoklu kümelerin kümesi $SM(U)$ ve elemanların maksimum tekrar sayısı $n \in \mathbb{N}$ olan U üzerindeki tüm esnek çoklu kümelerin kümesi $SM^n(U)$ ile gösterilsin.

4.2. Örnek: Örnek 2.1.3'te verilen

$$F_A = \{(x_1, \{u_2, u_4\}), (x_3, \{u_3, u_4, u_5\}), (x_4, \{u_1, u_3, u_5\}), (x_5, \{u_1\})\}$$

esnek kümesi göz önüne alınsın. Ayrıca, daha önce bu tesislerde kalan müşterilerden

“Bu tesisi denize yakın bir tesis olarak değerlendiriyor musunuz?”

“Bu tesisi pahalı bir tesis olarak değerlendiriyor musunuz?”

“Bu tesisi havuz bulunan bir tesis olarak değerlendiriyor musunuz?”

“Bu tesisi evcil hayvan bulundurulabilen bir tesis olarak değerlendiriyor musunuz?”

“Bu tesisi otoparkı mevcut bir tesis olarak değerlendiriyor musunuz?”

sorularına evet yanıtını verenlerin sayıları

x_1 için sırasıyla 17, 24, 11, 46, 23 ve 8

x_2 için sırasıyla 13, 19, 28, 12, 43 ve 37

x_3 için sırasıyla 47, 7, 25, 12, 34 ve 33

x_4 için sırasıyla 9, 24, 36, 48, 29 ve 41

x_5 için sırasıyla 23, 17, 30, 25, 34 ve 16

biçiminde olsun. O halde,

$$\Omega_A = \left\{ \left(x_1, \left\{ \frac{24}{u_2}, \frac{46}{u_4} \right\} \right), \left(x_3, \left\{ \frac{25}{u_3}, \frac{12}{u_4}, \frac{34}{u_5} \right\} \right), \left(x_4, \left\{ \frac{9}{u_1}, \frac{36}{u_3}, \frac{29}{u_5} \right\} \right), \left(x_5, \left\{ \frac{23}{u_1} \right\} \right) \right\}$$

U üzerinde bir esnek çoklu kümedir.

4.3. Tanım: $\Omega_A \in SM(U)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için $\Omega_A(x) = M_\emptyset$ oluyorsa Ω_A 'ya boş esnek çoklu küme denir ve $\Omega_\emptyset$ ile gösterilir.

4.4. Tanım: $\Omega_E \in SM^n(U)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için $\Omega_E(x) = M_U$ oluyorsa Ω_E 'ye n -evrensel esnek çoklu küme (kısaca evrensel çoklu küme) denir ve Ω_E^n (kısaca Ω_E) ile gösterilir.

4.5. Tanım: $\Omega_A, \Omega_B \in SM(U)$ olsun. O halde,

- i. Eğer her $x \in E$ için $\Omega_A(x) \subseteq \Omega_B(x)$ oluyorsa Ω_A 'ya Ω_B 'nin bir esnek çoklu alt kümesidir denir ve $\Omega_A \subseteq \Omega_B$ ile gösterilir.
- ii. Eğer $\Omega_A \subseteq \Omega_B$ ve en az bir $x \in E$ için $\Omega_A(x) \neq \Omega_B(x)$ oluyorsa Ω_A 'ya Ω_B 'nin bir esnek çoklu öz alt kümesidir denir ve $\Omega_A \subset \Omega_B$ şeklinde gösterilir
- iii. Eğer her $x \in E$ için $\Omega_A(x) = \Omega_B(x)$ oluyorsa Ω_A ve Ω_B eşit esnek çoklu kümelerdir denir ve $\Omega_A = \Omega_B$ ile gösterilir.

4.6. Tanım: $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_C \in SM(U)$ olsun. O halde,

- i. Eğer her $x \in E$ için $\Omega_C(x) = \Omega_A(x) \cup \Omega_B(x)$ oluyorsa Ω_C 'ye Ω_A ile Ω_B 'nin esnek çoklu birleşimi denir ve $\Omega_A \cup \Omega_B$ ile gösterilir.
- ii. Eğer her $x \in E$ için $\Omega_C(x) = \Omega_A(x) \cap \Omega_B(x)$ oluyorsa Ω_C 'ye Ω_A ile Ω_B 'nin esnek çoklu kesişimi denir ve $\Omega_A \cap \Omega_B$ ile gösterilir.
- iii. Eğer her $x \in E$ için $\Omega_C(x) = \Omega_A(x) \setminus \Omega_B(x)$ oluyorsa Ω_C 'ye Ω_A ile Ω_B 'nin esnek çoklu farkı denir ve $\Omega_A \setminus \Omega_B$ ile gösterilir.

iv. Eğer her $x \in E$ için $\Omega_C(x) = \Omega_A(x) \tilde{\Delta} \Omega_B(x)$ oluyorsa Ω_C 'ye Ω_A ile Ω_B 'nin esnek çoklu simetrik farkı denir ve $\Omega_A \tilde{\Delta} \Omega_B$ ile gösterilir.

4.7. Tanım: $\Omega_A, \Omega_B \in SM^n(U)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için $\Omega_B(x) = \Omega_A^{\tilde{c}}(x)$ oluyorsa Ω_B 'ye Ω_A 'nın esnek çoklu tümleyeni denir ve $\Omega_A^{\tilde{c}}$ ile gösterilir.

4.8. Tanım: $\Omega_A, \Omega_B \in SM(U)$ olsun. Eğer $\Omega_A \tilde{\cap} \Omega_B = \Omega_{\emptyset}$ ise Ω_A ve Ω_B ayrıktır denir.

4.9. Önerme: $\Omega_A \in SM^n(U)$ olsun. O halde,

i. $(\Omega_A^{\tilde{c}})^{\tilde{c}} = \Omega_A^{\tilde{c}}$

ii. $(\Omega_{\emptyset})^{\tilde{c}} = \Omega_{\tilde{E}}$

4.10. Önerme: $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_C \in SM(U)$ olsun. O halde,

i. $\Omega_A \cong \Omega_{\tilde{E}}$

ii. $\Omega_{\emptyset} \cong \Omega_A$

iii. $\Omega_A \cong \Omega_A$

iv. $\Omega_A \cong \Omega_B$ ve $\Omega_B \cong \Omega_C \Rightarrow \Omega_A \cong \Omega_C$

4.11. Önerme: $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_C \in SM(U)$ olsun. O halde,

i. $\Omega_A = \Omega_B$ ve $\Omega_B = \Omega_C \Rightarrow \Omega_A = \Omega_C$

ii. $\Omega_A \cong \Omega_B$ ve $\Omega_B \cong \Omega_A \Leftrightarrow \Omega_A = \Omega_B$

4.12. Önerme: $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_C \in SM(U)$ olsun. O halde,

i. $\Omega_A \tilde{\cup} \Omega_A = \Omega_A$ ve $\Omega_A \tilde{\cap} \Omega_A = \Omega_A$

ii. $\Omega_A \tilde{\cup} \Omega_{\emptyset} = \Omega_A$ ve $\Omega_A \tilde{\cap} \Omega_{\emptyset} = \Omega_{\emptyset}$

iii. $\Omega_A \tilde{\cup} \Omega_{\tilde{E}} = \Omega_{\tilde{E}}$ ve $\Omega_A \tilde{\cap} \Omega_{\tilde{E}} = \Omega_A$

iv. $\Omega_A \tilde{\cup} \Omega_B = \Omega_B \tilde{\cup} \Omega_A$ ve $\Omega_A \tilde{\cap} \Omega_B = \Omega_B \tilde{\cap} \Omega_A$

v. $(\Omega_A \tilde{\cup} \Omega_B) \tilde{\cup} \Omega_C = \Omega_A \tilde{\cup} (\Omega_B \tilde{\cup} \Omega_C)$ ve

$(\Omega_A \tilde{\cap} \Omega_B) \tilde{\cap} \Omega_C = \Omega_A \tilde{\cap} (\Omega_B \tilde{\cap} \Omega_C)$

vi. $(\Omega_A \tilde{\cup} \Omega_B) \tilde{\cap} \Omega_C = (\Omega_A \tilde{\cap} \Omega_C) \tilde{\cup} (\Omega_B \tilde{\cap} \Omega_C)$ ve

$(\Omega_A \tilde{\cap} \Omega_B) \tilde{\cup} \Omega_C = (\Omega_A \tilde{\cup} \Omega_C) \tilde{\cap} (\Omega_B \tilde{\cup} \Omega_C)$

4.13. Önerme: $\Omega_A, \Omega_B \in SM^n(U)$ olsun. O halde,

$$i. \quad (\Omega_A \tilde{\cup} \Omega_B)^{\tilde{c}} = \Omega_A^{\tilde{c}} \tilde{\cap} \Omega_B^{\tilde{c}}$$

$$ii. \quad (\Omega_A \tilde{\cap} \Omega_B)^{\tilde{c}} = \Omega_A^{\tilde{c}} \tilde{\cup} \Omega_B^{\tilde{c}}$$



5. ESNEK ÇOKLU KÜMELERDE KARAR VERME

Bu bölümde, ilk olarak (Riaz, Çağman, Wali ve Mushtaq, 2020) çalışmasında önerilen karar verme metodunu çoklu esnek kümeler için modifiye ederek KPS21 (Kaya Pezük ve Şenel, 2021) ile gösterilen bir esnek çoklu karar verme yöntemi önerildi ve COVID-19 aşılarının hafif yan etkilerinin sıralamasının elde edilmesi problemine uygulandı.

KPS21 Algoritma Adımları:

Adım 1: E parametre kümesi, $A \subseteq E$ kümesi, U evrensel kümesi ve $X \subseteq U$ kümesini oluşturun.

Adım 2: U üzerinde M_X çoklu kümesini oluşturun.

Adım 3: U üzerinde Ω_A esnek çoklu kümesini oluşturun.

Adım 4: $\Gamma_A(x) = \left\{ \frac{\Omega_A(x)(u)/\sum_v \Omega_A(x)(v)}{u} : x \in E \right\}$ olmak üzere $\Gamma_A = \{(x, \Gamma_A(x)) : x \in E\}$ bulanık esnek kümesini oluşturun.

Adım 5: Γ_A 'ya karşılık gelen $[a_{ij}]$ bulanık esnek matrisini inşa edin.

Adım 6: sMBR01 metodunu $[a_{ij}]$ matrisine uygulayın.

Burada, (Enginoğlu, Memiş, 2018)'de bulanık parametrelili bulanık esnek matrisler (*fpfs*-matrisler) (Enginoğlu ve Çağman, 2020) için verilen sMBR01 esnek karar verme metodu bulanık esnek matrisler için aşağıdaki gibi verildi.

sMBR01 Algoritma Adımları:

Adım 1: $[a_{ij}]_{m \times n}$ bulanık esnek matris oluşturulur.

Adım 2: $s_{i1} := \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \text{sgn}(a_{ij} - a_{kj}), i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ile tanımlanan $[s_{i1}]$ skor matrisi elde edilir.

Adım 3: $\{\hat{s}_{k1} u_k | u_k \in U\}$ karar kümesi elde edilir.

Bu çalışma boyunca, $[s_{i1}]_{m \times 1}$ skor matrisinin normalleştirilmiş sütun matrisi $[\hat{s}_{i1}]_{m \times 1}$

$$\hat{s}_{i1} := \begin{cases} \frac{s_{i1} - \min_k s_{k1}}{\max_k s_{k1} - \min_k s_{k1}}, & \max_k s_{k1} \neq \min_k s_{k1} \\ 1, & \max_k s_{k1} = \min_k s_{k1} \end{cases}$$

biçimindedir.

Bu tez çalışmasında, Tablo 1’de verilen Manisa/Türkiye’den 791 kişi (Şenol ve ark., 2021), ABD’den 530 kişi, (Michaud ve ark., 2020), Konya/Türkiye’den 80 kişi (Batur, Korez, Gezer, Levendoğlu ve Ural, 2021) ve Çek Cumhuriyeti’nden 814 kişinin (Riad ve ark., 2021) COVID-19 aşısı uygulandıktan sonra yaşadıkları yan etkilerine dair veriler göz önüne alındı, Ardından, söz konusu bu 14 yan etkinin bir sıralamasının elde edilmesi için bu çalışmada önerilen KPS21 metodu kullanıldı.

Çizelge 5.1. COVID-19 aşısı sonrası yan etki sıklığının (%) semptomlara göre dağılımı

	Belirtiler/kaynaklar	n*=791	n=530	n=80	n=814
s_1	Baş ağrısı	11.9	13	13.8	45.6
s_2	Kas/eklem ağrısı	9.5	11.6	46.3	64.9
s_3	Boğaz ağrısı	3.7	8.5	23.8	-
s_4	Titreme/Ateş	3.2	2.8	37.5	55.6
s_5	İshal/Bulantı/Kusma	3.4	5.7	5	13
s_6	Tat veya koku kaybı/değişimi	1.2	1.6	6.3	10
s_7	Öksürük	1.6	9.9	61.3	-
s_8	Hipertansiyon	0.9	-	26.2	-
s_9	Nefes darlığı	0.4	4.1	20	-
s_{10}	Enjeksiyon yeri ağrısı	18	-	-	89.8
s_{11}	Enjeksiyon yeri şişme	1.3	-	-	25.6
s_{12}	Enjeksiyon yeri kaşıntı/kızarıklık	1.4	-	-	23
s_{13}	Lenfadenopati	0.4	-	-	16.2
s_{14}	Bitkinlik	-	17.9	50	62.2

*kişi sayısı

Adım 1: $u_i = s_i, i \in \{1,2, \dots, 14\}$

x_1 = Manisa/Türkiye verileri

x_2 = ABD verileri

x_3 = Konya/Türkiye verileri

x_4 = Çek Cumhuriyeti verileri

olmak üzere $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{14}\}$ biçimindedir. Burada, tüm parametreler ve tüm yan etkiler dikkate alınmak istendiğinden $A = E$ ve $X = U$ alındı.

Adım 2: Tablo 1’de verilen değerlerin en yakın tam sayıya yuvarlanmasıyla elde edilen U üzerindeki M_1, M_2, M_3 ve M_4 çoklu kümeleri aşağıdaki gibidir:

$$M_1 = \left\{ \frac{12}{u_1}, \frac{10}{u_2}, \frac{4}{u_3}, \frac{3}{u_4}, \frac{3}{u_5}, \frac{1}{u_6}, \frac{2}{u_7}, \frac{1}{u_8}, \frac{18}{u_{10}}, \frac{1}{u_{11}}, \frac{1}{u_{12}} \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \frac{13}{u_1}, \frac{12}{u_2}, \frac{9}{u_3}, \frac{3}{u_4}, \frac{6}{u_5}, \frac{2}{u_6}, \frac{10}{u_7}, \frac{4}{u_9}, \frac{18}{u_{14}} \right\}$$

$$M_3 = \left\{ \frac{14}{u_1}, \frac{46}{u_2}, \frac{24}{u_3}, \frac{38}{u_4}, \frac{5}{u_5}, \frac{6}{u_6}, \frac{61}{u_7}, \frac{26}{u_8}, \frac{20}{u_9}, \frac{50}{u_{14}} \right\}$$

ve

$$M_4 = \left\{ \frac{46}{u_1}, \frac{65}{u_2}, \frac{56}{u_4}, \frac{13}{u_5}, \frac{10}{u_6}, \frac{90}{u_{10}}, \frac{26}{u_{11}}, \frac{23}{u_{12}}, \frac{16}{u_{13}}, \frac{62}{u_{14}} \right\}$$

Adım 3: U üzerindeki Ω esnek çoklu kümesi aşağıdaki gibidir:

$$\Omega = \{(x_1, M_1), (x_2, M_2), (x_3, M_3), (x_3, M_4)\}$$

Adım 4: Ω aracılığıyla elde edilen Γ bulanık esnek kümesi aşağıdaki gibidir:

$$\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} (x_1, \{^{0.21}u_1, ^{0.18}u_2, ^{0.07}u_3, ^{0.05}u_4, ^{0.05}u_5, ^{0.02}u_6, ^{0.04}u_7, ^{0.02}u_8, ^{0.32}u_{10}, ^{0.02}u_{11}, ^{0.02}u_{12}\}), \\ (x_2, \{^{0.17}u_1, ^{0.16}u_2, ^{0.12}u_3, ^{0.04}u_4, ^{0.08}u_5, ^{0.03}u_6, ^{0.13}u_7, ^{0.05}u_9, ^{0.23}u_{14}\}), \\ (x_3, \{^{0.05}u_1, ^{0.16}u_2, ^{0.08}u_3, ^{0.13}u_4, ^{0.02}u_5, ^{0.02}u_6, ^{0.21}u_7, ^{0.09}u_8, ^{0.07}u_9, ^{0.17}u_{14}\}), \\ (x_4, \{^{0.11}u_1, ^{0.16}u_2, ^{0.14}u_3, ^{0.03}u_4, ^{0.02}u_5, ^{0.22}u_6, ^{0.06}u_7, ^{0.06}u_8, ^{0.04}u_9, ^{0.15}u_{14}\}), \end{array} \right\}$$

Burada,

$$\begin{aligned} \Gamma_A(x_1)(u_1) &= \frac{\Omega_A(x_1)(u_1)}{\sum_{v \in U} \Omega_A(x_1)(v)} \\ &= \frac{12}{12 + 10 + 4 + 3 + 3 + 1 + 2 + 1 + 18 + 1 + 1} \\ &= \frac{12}{56} \end{aligned}$$

$$= 0.21$$

biçiminde elde edildi. Diğer değerler de benzer biçimde hesaplandı.

Adım 5: Γ bulanık esnek kümesine karşılık gelen $[a_{ij}]$ bulanık esnek matrisi aşağıdaki gibidir:

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.21 & 0.17 & 0.05 & 0.11 \\ 0.18 & 0.16 & 0.16 & 0.16 \\ 0.07 & 0.12 & 0.08 & 0 \\ 0.05 & 0.04 & 0.13 & 0.14 \\ 0.05 & 0.08 & 0.02 & 0.03 \\ 0.02 & 0.03 & 0.02 & 0.02 \\ 0.04 & 0.13 & 0.21 & 0 \\ 0.02 & 0 & 0.09 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0.07 & 0 \\ 0.32 & 0 & 0 & 0.22 \\ 0.02 & 0 & 0 & 0.06 \\ 0.02 & 0 & 0 & 0.06 \\ 0 & 0 & 0 & 0.04 \\ 0 & 0.23 & 0.17 & 0.15 \end{bmatrix}$$

Adım 6: sMBR01 metodu $[a_{ij}]$ 'ye uygulandığında elde edilen karar kümesi ve alternatiflerin sıralaması aşağıdaki gibidir:

$$\{^{0.83}u_1, ^1u_2, ^{0.52}u_3, ^{0.7}u_4, ^{0.45}u_5, ^{0.22}u_6, ^{0.61}u_7, ^{0.19}u_8, ^{0.03}u_9, ^{0.7}u_{10}, \\ ^{0.14}u_{11}, ^{0.14}u_{12}, ^0u_{13}, ^{0.77}u_{14}\}$$

ve

$$u_{13} < u_9 < u_{11} \approx u_{12} < u_8 < u_6 < u_5 < u_3 < u_7 < u_4 \approx u_{10} < u_{14} < u_1 < u_2$$

İkinci olarak, KPS21'in sıralama performansının karşılaştırılabilmesi için (Enginoğlu ve Memiş, 2018)'de verilen CCE10 esnek karar verme metodu yoluyla KPS21/2 çoklu karar verme metodu önerildi.

KPS21/2 Algoritma Adımları:

Adım 1: E parametre kümesi, $A \subseteq E$ kümesi, U evrensel kümesi ve $X \subseteq U$ kümesini oluşturun.

Adım 2: U üzerinde M_X çoklu kümesini oluşturun.

Adım 3: U üzerinde Ω_A esnek çoklu kümesini oluşturun.

Adım 4: $\Gamma_A(x) = \left\{ \frac{\Omega_A(x)(u)/\sum_v \Omega_A(x)(v)}{u} : x \in E \right\}$ olmak üzere $\Gamma_A = \{(x, \Gamma_A(x)) : x \in E\}$ bulanık esnek kümesini oluşturun.

Adım 5: Γ_A 'ya karşılık gelen $[a_{ij}]$ bulanık esnek matrisini inşa edin.

Adım 6: CCE10 metodunu $[a_{ij}]$ matrisine uygulayın.

Burada, (Enginoğlu, Memiş, 2018)'de *fpfs*-matrisler için verilen CCE10 esnek karar verme metodu bulanık esnek matrisler için aşağıdaki gibi verildi.

CCE10 Algoritma Adımları:

Adım 1: $[a_{ij}]_{m \times n}$ bulanık esnek matrisi oluşturulur.

Adım 2: $s_{i1} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij}, i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ile tanımlanan $[s_{i1}]$ skor matrisi elde edilir.

Adım 3: $\{\hat{s}_{k1} u_k | u_k \in U\}$ karar kümesi elde edilir.

CCE10 metodu KPS21 Adım 5'te elde edilen $[a_{ij}]$ 'ye uygulandığında elde edilen karar kümesi ve alternatiflerin sıralaması aşağıdaki gibidir:

$$\{^{0.82}u_1, ^1u_2, ^{0.41}u_3, ^{0.54}u_4, ^{0.27}u_5, ^{0.14}u_6, ^{0.58}u_7, ^{0.17}u_8, ^{0.11}u_9, ^{0.89}u_{10}, \\ ^{0.12}u_{11}, ^{0.12}u_{12}, ^{0.06}u_{13}, ^{0.83}u_{14}\}$$

ve

$$u_{13} < u_9 < u_{11} \approx u_{12} < u_8 < u_6 < u_5 < u_3 < u_4 < u_7 < u_1 < u_{14} < u_{10} < u_2$$

Burada, sMBR01 ve CCE10 esnek karar verme metotları (Enginoğlu, Aydın, Memiş ve Arslan, 2021)'de verilen tüm testleri geçtiğinden güvenilirdir. Bu nedenle, KPS21 ve KPS21/2 metotları da sırasıyla yukarıda belirtilen metotlara dayandıkları için güvenilirdir. Her iki metot u_{13} , u_9 , u_{11} , u_{12} , u_8 , u_6 , u_5 ve u_3 yan etkilerinin görülme oranlarının diğerlerine göre az olduğunu gösterir. Ayrıca bu yan etkiler için her iki metot aynı sıralamayı üretmiştir. Benzer şekilde, her iki metot u_2 'nin en sık görülen yan etki olduğunu ifade eder. Ancak, metotlar u_1 , u_4 , u_7 , u_{10} ve u_{14} için farklı sıralamalar üretse de bu sıra sayıları birbirine yakındır.



6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, esnek kümeler, esnek matrisler, bulanık kümeler, bulanık esnek kümeler ve bulanık esnek matrisler sunuldu. Ardından, çoklu kümeler ve esnek çoklu kümeler verildi. Daha sonra, KPS21 ve KPS21/2 ile gösterilen iki çoklu karar verme metodu önerildi ve COVID-19 aşısının yan etkilerinin görülme sıklıklarının bir sıralamasını elde etme problemine uygulandı. Sonuçlar metotların bu tür karar verme problemlerine başarıyla uygulanabildiğini gösterdi. Diğer taraftan, bir kısım yan etkilerin sıralamasında meydana gelen belirsizlik, bu tür belirsizlikleri modellemek için bulanık esnek çoklu kümeler gibi daha genel yapıların ihtiyaç duyulduğunu gösterdi. Ayrıca, önerilen metotlarda farklı esnek karar verme metotlarının kullanılabilir olması KPS21'in geliştirilmeye açık olduğuna işaret etmektedir. Ek olarak, sonraki çalışmalarda bu metotlar farklı karar verme problemlerine uygulanabilir.

KAYNAKLAR

- Acar, U., Koyuncu, F., & Tanay, B. (2010). Soft Sets and Soft Rings. *Computers and Mathematics with Applications*, 59, 3458-3463.
- Aktaş, H., & Çağman, N. (2007). Soft Sets and Soft Groups. *Information Sciences*, 177(13), 2726-2735.
- Alkhazaleh, S., Salleh, A. R., & Hassan, N. (2011). Soft Multisets Theory. *Applied Mathematical Sciences*, 5(72), 3561-3573.
- Babitha, K. V., & Sunil, J. J. (2010). Soft Set Relations and Functions. *Computers & Mathematics with Applications*, 60(7), 1840-1849.
- Babitha, K. V., & Sunil, J. J. (2013). On Soft Multi Sets. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 5(1), 35-44.
- Balami, H. M., Yusuf, A. O., & Terkimbir, S. (2018). Soft Multiset: A Different View. *International Journal of Contemporary Applied Researches*, 5(10), 21-39.
- Batur, E. B., Korez, M. K., Gezer, I. A., Levendoğlu, F. & Ural, O. (2021). Musculoskeletal Symptoms and Relationship With Laboratory Findings in Patients With COVID-19. *International Journal of Clinical Practice*, 75(6), 1-7.
- Baykal, N., & Beyan, T. (2004). *Bulanık Mantık İlke ve Temelleri*. Bıçaklar Kitabevi, Ankara, ISBN 978-975-869-508-9
- Blizzard, W. D. (1989). Multiset Theory. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 30(1), 36-66.
- Cerf, V., Fernandez, E., Gostelow, K., & Volausky, S. (1971). Formal Control and Low Properties of a Model Of Computation, Report ENG 7178. *Computer Science Department, University of California, Los Angeles, CA*, 81.
- Çağman, N., & Enginoğlu, S. (2010). Soft Set Theory and uni-int Decision Making. *European Journal of Operational Research*, 207, 848-855.
- Çağman, N., & Enginoğlu, S. (2010a). Soft Set Theory and uni-int Decision Making. *European Journal of Operational Research*, 207, 848-855.
- Çağman, N., & Enginoğlu, S. (2010b). Soft Matrix Theory and Its Decision Making. *Computers & Mathematics with Applications*, 207, 848-855.
- Çağman, N., & Enginoğlu, S. (2012). Fuzzy Soft Matrix Theory and Its Application in Decision Making. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 9(1), 109-119.
- Çağman, N., Çıtak, F., & Enginoğlu, S. (2010). Fuzzy Parameterized Fuzzy Soft Set Theory and Its Applications. *Turkish Journal of Fuzzy Systems*, 1(1), 21-35.

- Çağman, N., Enginoğlu, S., & Çıtak, F. (2011). Fuzzy Soft Set Theory and Its Applications. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 8(3), 137-147.
- Çağman, N., Karataş, S., & Enginoğlu, S. (2011). Soft Topology. *Computers and Mathematics with Applications*, 62, 351-358.
- Demirbilek, Y., Pehlivanürk, G., Özgüler, Z. Ö., & Meşe, E. (2014). COVID-19 Outbreak Control, Example of Ministry of Health of Turkey. *Turkish Journal of Medical Sciences*, 50(SI-1), 489-494.
- Dubois, D., & Prade, H. (1980). *Fuzzy Set and Systems. Theory and application*, Academic press, New York, 190.
- Elmas, Ç. (2003). *Bulanık Mantık Denetleyiciler*. Seçkin Yayıncılık, Ankara, ISBN 975-347-613-2
- Enginoğlu, S. (2012). *Soft Matrices*. PhD Dissertation, Gaziosmanpaşa University Graduate School of Natural and Applied Sciences, Turkey.
- Enginoğlu, S., & Çağman, N. (2020) Fuzzy Parameterized Fuzzy Soft Matrices and Their Application in Decision-Making, *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 10(4), 1105-1115.
- Enginoğlu, S., & Memiş, S. (2018). A Configuration of Some Soft Decision-Making Algorithms via fpts-Matrices. *Cumhuriyet Science Journal*, 39(4), 871-881.
- Enginoğlu, S., & Memiş, S. (2018). Comment on Fuzzy Soft Sets. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, 9(3), 589-602.
- Enginoğlu, S., Aydın, T., Memiş, S., & Arslan, B. (2021). Operability-Oriented Configurations of the Soft Decision Making Methods Proposed between 2013 and 2016 and Their Comparisons. *Journal of New Theory*, 34, 82-114.
- Eren, Ö. F. (2019). *On Soft Set Theory*, Master's Thesis, Ondokuz Mayıs University Institute of Science, Samsun.
- Feng, F., Jun, Y. B., & Zhao, X. (2008). Soft Semirings. *Computers & Mathematics with Applications*, 56(10), 2621-2628.
- Jena, S. P., Ghosh, S. K., & Tripathy, B. K. (2001). On the Theory of Bags and Lists. *Information Sciences*, 132(1-4), 241-254.
- Jun, Y. B., & Park, C. H. (2009). Applications of Soft Sets in Hilbert Algebras. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 6(2), 75-86.
- Jun, Y. B., Lee, K. J., & Khan, A. (2010). Soft Ordered Semigroups. *Mathematical Logic Quarterly*, 56(1), 42-50.
- Karakaşoğlu, N. (2008). *Fuzzy multi-criteria decision making methods and application*. Master's Thesis, Pamukkale University Institute of Social Sciences, Denizli.

- Karataş, İ. (2018). Bulanık Mantık ile Klasik ve Sembolik Mantık İlişkisi (Karşılaştırılması). *European Journal of Educational & Social Sciences*, 3(2), 144-163.
- Klir, G. J., & Folger, T. A. (1987). *Fuzzy Sets, Uncertainty, And Information*. Prentice-Hall, New Jersey, ISBN 013-345-984-5.
- Knuth, D. E. (1998). *Seminumerical Algorithms. The Art of Computer Programming* (Vol 3). Addison Wesley, Boston, ISBN 020-189-684-2
- Maji, P. K., Biswas, R., & Roy, A. R. (2001). Fuzzy Soft Sets. *Journal of Fuzzy*, 9(3), 589-602.
- Maji, P. K., Biswas, R., & Roy, A. R. (2003). Soft Set Theory. *Computers & Mathematics with Applications*, 45(4-5), 555-562.
- Maji, P. K., Roy, A. R., & Biswas, R. (2002). An Application of Soft Sets in a Decision. *Computers & Mathematics with Applications*, 44(1), 1077-1083.
- Majumdar, P., & Samanta, S. K. (2008). Similarity Measure of Soft Sets. *New Mathematics & Natural Computation*, 4(1), 1-12.
- Michaud, K., Wipfler, K., Shaw, Y., Simon, T. A., Cornish, A., England, B. R., ..., Katz, P. (2020). Experiences of Patients with Rheumatic Diseases in the United States During Early Days of the COVID-19 Pandemic. *American College of Rheumatology*, 2(6), 335-343.
- Molodtsov, D. (2004). *The theory of soft sets (in Russian)*, URSS Publications, Moscow.
- Molodtsov, D. (1999). Soft Set Theory - First Results. *Computers & Mathematics with Applications*, 37(4-5), 19-31.
- Mukherjee, A. (2015). Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Soft Multi-Sets and Their Relations. *In Generalized Rough Sets*, 67-87.
- Naveed, M., Saqlain, M., Saeed, M., & Abbas, Q. (2020). Application of Soft-Set Relations and Soft Matrices in Medical Diagnosis using Sanchez's Approach. *International Journal of Computer Applications*, 177(32).
- Osmanoğlu, İ. (2013). *Soft multisets and topological spaces*. Master's Thesis, Nevşehir University Graduate School of Natural and Applied Sciences, Nevşehir.
- Öner, N. (1998). *Klasik Mantık*, Bilim Yayınları, Ankara, ISBN 978-975-556-010-6.
- Pawlak, Z. (1982). Rough Sets. *International Journal of Computer & Information Sciences*, 11(5), 341-356.
- Pei, D., & Miao, D. (2005). From Soft Sets to Information Systems. *Proceedings of the IEEE International Conference on Granular Computing*, 2, 617-621.

- Peterson, J. (1976). Computation Sequence Sets. *Journal of Computer and System Sciences*, 13(1), 1-24.
- Riad, A., Pokorna, A., Attia, S., Klugarova, J., Koscik, M. & Klugar, M. (2021). Prevalence of COVID-19 Vaccine Side Effects among Healthcare Workers in the Czech Republic. *Journal of Clinical Medicine*, 10, 1-18.
- Riaz, M., Çağman, N., Wali, N., & Mushteaq, A. (2020). Certain Properties of Soft Multiset Topology with Applications in Multicriteria Decision Making. *Applications in Management and Engineering*, 3(2), 70-96.
- Sezgin, A., & Atagün, A. O. (2011). On Operations of Soft Sets. *Computers & Mathematics with Applications*, 61(5), 1457-1467.
- Shabir, M., & Naz, M. (2011). On Soft Topological Spaces. *Computers & Mathematics with Applications*, 61(7), 1786-1799.
- Syropoulos, A. (2001). Mathematics of Multisets. *Multiset processing. C.S. Calude et al. (Eds.) Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 347-358.
- Şen, Z. (2001). *Bulanık Mantık ve Modelleme İlkeleri*. Bilgi Kültür Kitap Sanatevi, İstanbul ISBN 978-975-850-923-2.
- Şenel, G., & Kaya Pezük, Ş. (2021). An Application of Soft Multisets to a Decision-Making Problem Concerning Side Effects of COVID-19 Vaccines. *Journal of New Theory*, 35, 103-113.
- Şenol, Ş., Eser, E., Akçalı, S., Özyurt, B. C., Dündar, P. E., Ecemiş, T., ..., Karadağ, F. (2021). *CoronaVac Aşı Koruyuculuğu Çalışması Ara Sonuçları*. 12 Nisan 2021 tarihinde https://www.mcbu.edu.tr/Haber/MCBUTipFakultesiHastanesiSaglikCalisanlariininYurttuguCoronovaVacAasiKoruyuculuguCalismasiAraSonuclariniYayimladi_19_35_35 adresinden alındı
- Taylan, N. (2011). *Ana Hatlarıyla Mantık*. Ensar Yayınları, İstanbul, ISBN 978-994-470-481-6
- Thomason, M. G. (1977). Convergence of Powers of A Fuzzy Matrix. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 57, 476-480.
- Varol, B. P., & Aygün, H. (2012). Fuzzy Soft Topology. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 41(3), 407-419.
- Yager, R. R. (1986). A Characterization of the Extension Principle. *Fuzzy Sets and Systems*, 18(3), 205-217.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8(3), 338-353.

Zimmermann, H. J. (2001). *Fuzzy Set. Theory-and Its Applications* (Fourth Edition). Springer Dordrecht, Berlin, ISBN 978-94-010-3870-6.

Zorlutuna, İ., Akdağ, M., Min, W. K., & Atmaca, S. (2012). Remarks on Soft Topological Spaces. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics* 3(2), 171-185.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı Şeyda KAYA PEZÜK

Eğitim Derecesi	Okul/Program	Mezuniyet Yılı
Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi	2013

İş Deneyimi/Yıl	Çalıştığı Yer	Görevi
2015-2022	Amasya Şehit Muharrem Saygün Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dili

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler

(a) Yayınlar – SCI – Diğer

1. Şenel G., Kaya Pezük Ş. (2021). An Application of Soft Multisets to a Decision-Making Problem Concerning Side Effects of COVID-19 Vaccines, *Journal of New Theory*, 35, 103-113.

(b) Bildiriler -Uluslararası -Ulusal Uluslararası sempozyum/kongrelerde yayımlanan tam metin bildiri

2. Kaya Pezük Ş., Şenel G. (2019). The First Step of Soft Multi Topological Spaces: Soft Bitopological Spaces, Sakhi, Z., Kutuk, M. (Eds.), *3rd International Zeugma Conference on Scientific Researches*, Gaziantep, Turkey, November 22-24, p. 250.
3. Kaya Pezük Ş., Şenel G. (2019). The First Step of Soft Multi Topological Spaces: Soft Ditopological Spaces, Sakhi, Z., Kutuk, M. (Eds.), *3rd International Zeugma Conference on Scientific Researches*, Gaziantep, Turkey, November 22-24, p. 251.