

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ESNEK GENELLEŞTİRİLMİŞ GRUPLAR



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Leyla KILINÇ

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mustafa Habi GÜRSOY

AĞUSTOS 2020

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ESNEK GENELLEŞTİRİLMİŞ GRUPLAR



YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Leyla KILINÇ
(36183614083)**

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mustafa Habil GÜRSOY

AĞUSTOS 2020

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Yüksek lisans tez çalışmamı yöneten, tezin hazırlanmasının her aşamasında yardımlarını esirgemeyen, engin tecrübe ve deneyimleriyle büyük katkılarda bulunan, bilgilerini benimle cömertçe paylaşan saygı değer hocam Doç. Dr. Mustafa Habil GÜRSOY' a teşekkürü bir borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum. Tez çalışmam boyunca fikirlerinden yararlandığım Prof. Dr. İlhan İÇEN hocama, tezin yazım aşamasında kıymetli zamanını bana ayıran Prof. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR hocama, yüksek lisans çalışmamı FYL-2019-1786 proje numarası ile destekleyen İnönü Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi' ne ve hayatımın her döneminde maddi ve manevi yanımda olan, tüm sıkıntılarımı paylaşan, her konuda benim için fedakarlık gösteren aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.



ONUR SÖZÜ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “Esnek Genelleştirilmiş Gruplar” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Leyla KILINÇ



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	iv
ÖZET	v
ABSTRACT.....	vi
1. GİRİŞ	1
2. ESNEK KÜMELER VE ÖZELLİKLERİ	7
3. ESNEK GRUPLAR	15
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ GRUPLAR	19
5. ESNEK GENELLEŞTİRİLMİŞ GRUPLAR.....	30
6. SONUÇ.....	37
KAYNAKLAR.....	38
ÖZGEÇMİŞ	40

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\forall$	: Her
$\exists$	: En az
$\neq$	: Eşit değildir
$\in$	: Elemanıdır
$\notin$	: Elemanı değildir
$\implies$	: Gerek şart
$\impliedby$	: Yeter şart
$H < G$	: altgrup
$N \triangleleft G$	: normal altgrup
$H \leqslant G$	: genelleştirilmiş altgrup
$N \trianglelefteq G$	: genelleştirilmiş normal altgrup
U ve X	: Evrensel küme
E	: Parametrelerin kümesi
$\emptyset$	: Boş küme
$\neg e$	: e parametresinin değili
$A - B$	: A kümesinin B den farkı
(F, A) veya F_A	: Esnek küme
$S(U)$	: U üzerinde tanımlı tüm esnek kümelerin ailesi
$(F, A)^c$ veya F_A^c	: Esnek kümenin tümleyeni
$\tilde{\cap}$	: Esnek kesişim
$\tilde{\cup}$	: Esnek birleşim
$\tilde{\subset}$	: Esnek alt küme
$\tilde{\setminus}$	: Esnek fark
$P(U)$ veya $P(X)$	: Kuvvet kümesi
$\tilde{<}$	: Esnek alt grup
$\tilde{\leqslant}$	: Esnek genelleştirilmiş altgrup
$\tilde{\triangleleft}$	: Esnek normal altgrup
$\tilde{\trianglelefteq}$	: Esnek genelleştirilmiş normal altgrup
(X, τ, E)	: Esnek topolojik uzay
$\tilde{X}$	: Esnek tam küme
Φ	: Esnek boş küme
$\tilde{\vee}$	: OR operatörü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ESNEK GENELLEŞTİRİLMİŞ GRUPLAR

LEYLA KILINÇ

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

40+vi sayfa

2020

Danışman: Doç. Dr. Mustafa Habil GÜRSOY

Bu yüksek lisans tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır.

Tezin giriş bölümünde, bu tezde ele alınacak olan esnek küme, esnek grup ve genelleştirilmiş grup kavramları ile ilgili olarak literatür bilgisi verilerek tezin amacından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, esnek kümeler ve onlar arasındaki temel işlemler verilmiştir.

Üçüncü bölüm, esnek küme teorisinin cebirsel bir kavram olan grup kavramı ile birleştirildiği esnek grup kavramına ve esnek gruplar ile ilgili temel bilgilere ayrılmıştır.

Dördüncü bölümde, tezin temelini oluşturan genelleştirilmiş grup kavramı ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

Beşinci bölümde esnek genelleştirilmiş grup kavramı tanımlanarak grup teorisindeki bazı temel bilgiler esnek genelleştirilmiş gruplar açısından incelenmiş ve bazı sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak, altıncı bölüm Sonuç kısmına ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Esnek küme, esnek grup, genelleştirilmiş grup, esnek genelleştirilmiş grup.

ABSTRACT

Master Thesis

SOFT GENERALIZED GROUPS

Leyla KILINÇ

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

40+vi pages

2020

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mustafa Habil GÜRSOY

This master thesis consists of six chapters.

In the introduction of the thesis, the literature about the notions of the soft set, soft group and generalized group considered in this thesis is given and the purpose of the thesis is mentioned and the emergence of the features of soft sets are mentioned.

In the second chapter, soft sets and their operations are given.

The third chapter is devoted to soft group, which combined the theory of soft set and the concept of group which is an algebraic concept, and basic information related to the soft group.

In the chapter 4, the notion of generalized group is discussed in detail.

In the chapter 5, the notion of soft generalized group is defined and some basic information in group theory is examined in terms of soft generalized groups and some results are obtained. Finally, the last chapter is devoted to the Conclusion.

Keywords: Soft set, soft group, generalized group, soft generalized group.

1. GİRİŞ

Günlük hayattaki problemler pek çok belirsizlik taşımaktadır. Örneğin, havanın soğuk veya sıcak olması: kime göre soğuk veya kime göre sıcak. Kutuplarda yaşayan bir insana göre sıcaklık kavramı ile ekvator bölgesinde yaşayan bir insana göre sıcaklık kavramı görecelilik içermektedir. 15 santigrad derecelik hava kutup bölgesinde sıcak kabul edilirken ekvator bölgesinde serin veya soğuk kabul edilebilir. Bu örnekten de görüleceği üzere belirsiz, göreceli durumlar için klasik doğru-yanlış mantığı yeterli gelmemektedir. Özellikle ekonomi, sosyoloji gibi sosyal bilimlerde ve mühendislik, tıp gibi pek çok bilim dalında bilim insanları kesin olmayan bilgilerin modellenmesinin karmaşıklığı ile uğraşmaktadır. Bu durum bilim insanlarını belirsizliklerin üstesinden gelmek için çok farklı matematiksel modellemeler ve araçlar geliştirmeye sevk etmiştir. Bu çalışmaların sonucunda belirsiz tipteki problemlerin çözümü için, aralık matematiği, bulanık (fuzzy) küme teorisi, yaklaşımlı (rough) küme teorisi, esnek (soft) küme teorisi gibi farklı teoriler geliştirilmiştir [1–3].

Belirsizlikle ilgili problemlerde kullanılan en yaygın yöntem Azeri bilim insanı Zadeh tarafından 1965 yılında geliştirilen bulanık küme teorisidir [3]. Aristo mantığıyla bir önermenin doğruluk değeri 0 veya 1 iken bulanık mantıkta doğruluk değeri $[0, 1]$ aralığındaki tüm sayılardır. Diğer bir ifadeyle bir bulanık küme, bir kümedeki her bir elemanı $[0,1]$ birim aralığındaki bir reel sayı ile eşleştiren bir fonksiyon olarak düşünülür. Bu reel sayı sözkonusu elemanın kümeye ait olma derecesini gösterir. Bu fonksiyona da üyelik fonksiyonu adı verilir. Oldukça yaygın ve kullanışlı bir teori olmakla birlikte bulanık küme teorisinde bazı zorluklar karşımıza çıkmaktadır. Şöyle ki, bulanık küme işlemlerinde farklı yazarlar tarafından yapılan farklı tanımlar bulunmaktadır. Mesela iki bulanık kümenin kesişimi veya birleşimi için farklı tanımlar bulunmaktadır. Dolayısıyla yegâne bir tanımın olmaması aynı problem için farklı çözümleri doğurmaktadır. Bunun yanı sıra bir üyelik fonksiyonunun değeri tek yönlü olduğundan bir elemanın kümeye ait olma derecesi her kişiye göre farklı yorumlanabilir. Ayrıca üyelik fonksiyonunun inşa edilmesi tamamen bireysel olduğundan, her bir durum için birden fazla üyelik fonksiyonu oluşturulabilir. Bunun sonucu olarak aynı problem için farklı sonuçlar çıkar. Bulanık küme teorisi, klasik olasılık teorisinin bir alternatifidir. Bu teori ile gerçek dünyada var olan belirsizlik kavramı matematiksel olarak incelenmeye başlanmış ve özellikle görüntü işleme, karar verme mekanizmalarında, modellemede, robotik, kontrol mühendisliği, bilgisayar mühendisliği, bilgi-işlem, yapay zeka gibi pek çok alanda uygulama imkânı bulmuştur.

Üyelik fonksiyonu ile ilgili yukarıda bahsedilen yapısal zorluklardan dolayı Molodtsov 1999 yılında üyelik fonksiyonu inşasından bağımsız bir kümeler teorisine ihtiyaç olduğunu görerek belirsizliklerin giderilmesine yönelik olarak esnek küme teorisini literatüre kazandırmıştır [1]. Bu teori ile bulanık küme teorisini birbirine benzeyen sistemler olmakla birlikte esnek küme teorisini bulanık küme teorisinin aksine reel değerli bir fonksiyon yerine, küme değerli bir fonksiyonla belirsizliği ortadan kaldırmaktadır. Esnek küme teorisinde üyelik fonksiyonu kurma problemi olmaması, teoriyi daha kullanışlı kılmaktadır. Bu avantaj sayesinde esnek küme teorisini ile ilgili çalışmalar başta matematik olmak üzere mühendislik, tıp, sosyal bilimler gibi pek çok bilim dalında ve günlük hayatta karşılaştığımız bilgi sistemleri, karar verme problemleri gibi pek çok alanda hızlı bir şekilde uygulama imkânı bulmuştur [4–11].

Molodtsov ilk çalışmasında esnek kümelerin bazı özelliklerini inceleyerek bu teoriyi matematiğin pek çok alanına uygulamıştır [1]. Ayrıca bu çalışmada esnek küme teorisinin yukarıda bahsedilen olumsuz durumlardan bağımsız olduğunu ortaya koymuştur.

2003 yılında Maji ve arkadaşları Molodtsov'un çalışmasını ilerileterek iki esnek kümenin kesişimi, birleşimi, bir esnek kümenin tümleyeni, esnek alt küme, esnek eşit küme, boş esnek küme, mutlak esnek küme gibi temel cebirsel işlemleri tanımlamışlardır [9]. Özellikle bu çalışmadan sonra esnek kümeler ile ilgili çalışmalar büyük bir hız kazanmıştır.

2009 yılında Ali ve arkadaşları, Maji ve arkadaşları tarafından verilen bazı sonuçların yanlış olduğunu göstererek esnek kümeler ile ilgili bazı yeni kavramlar tanımladılar [5].

2010 yılında Babitha ve Sunil, esnek kümeler üzerinde kartezyen çarpımı ve bağıntıları tanımlayarak esnek kümeler üzerinde denklik bağıntısı ve parçalanma ile ilgili önemli sonuçlar elde etmişlerdir [6]. Yine bu çalışmada esnek küme fonksiyonu tanımlanmıştır. Kharal ve Ahmad ise 2011 yılında esnek sınıflar üzerinde esnek dönüşüm kavramını vermişlerdir [8]. Ayrıca bir esnek kümenin esnek dönüşüm altındaki görüntüsünü ve ters görüntüsünü incelemişlerdir.

Esnek küme teorisinin topolojik açıdan incelenmesi ise yine 2011'de Shabir ve Naz tarafından olmuştur [11]. Shabir ve Naz bu çalışmada esnek topoloji kavramını vererek esnek açık küme, esnek kapalı küme, esnek alt uzay, esnek iç nokta, esnek kapanış, bir esnek noktanın esnek komşuluğu gibi temel topolojik araçları tanımlamışlardır. Esnek topolojik uzayın klasik topolojik uzaydan daha kapsamlı ve genelleştirilmiş olduğunu ortaya koymuşlardır. Ayrıca esnek topolojik uzaylarda esnek ayırma aksiyomlarını incelemişlerdir.

Esnek kümeler kullanılarak oluşturulan ilk cebirsel yapı ise Aktaş ve Çağman tarafından tanımlanan esnek grup kavramıdır [4]. Bu çalışmada esnek grupların özellikleri incelenmiş, ve ayrıca esnek kümeler ile bulanık ve kaba kümelerin bir karşılaştırması yapılarak aralarındaki farklılıklar örnekler ile açıklanmıştır.

Matematiksel fizikte oldukça eski bir problem vardır: Bir Lorentz metriğini bir Riemann metriğine nasıl dönüştürebiliriz? Bu problemi çözmek için 20. yüzyılın sonlarında matematikçiler ve fizikçiler, uzay-zamandaki fiziksel bilgileri, twistor alanı olarak bilinen karmaşık bir projektif uzaydaki geometrik veriler olarak kodlamak için bir çatı olan Twistor teorisini [12], fizikte partiküllerin hareketine matematiksel bir yaklaşımın getirildiği izotoplar teorisi (veya isothory) [13] gibi bazı uyumlu birleşik teoriler inşa etmeye çalışmışlardır. Bir genelleştirilmiş grup da bu birleşik teorilerden biri olan birleşik gösterge teorisinde (unified gauge theory) derin bir fiziksel altyapıya sahip olan cebirsel bir yapıdır ve izotoplarla direkt ilişkilidir. Ayrıca birleşik geometrik teorisinin (unified geometric theory) inşası için de önemli bir araçtır.

Grupların ilginç ve büyüleyici bir genellemesi olan genelleştirilmiş grup kavramı ve onun fiziksel yapısı ilk defa 1999'da Molaei [14] tarafından sunulmuştur. Bir grupta sadece bir tek birim eleman varken, bir genelleştirilmiş grupta her bir eleman için bir birim eleman bulunmaktadır. Bu özelliği ile genetik kodlamada ve dinamik sistemlerde kullanışlı bir araç durumundadır. Şöyle ki, DNA tüm canlılarda kalıtsal bir materyaldir. DNA'daki bilgi adenin, guanin, sitozin ve timin dediğimiz dört kimyasal bazdan meydana gelen bir şifre halinde bulunur. İnsan DNA'sı tahmini olarak 3 milyar bazdan meydana gelir ve bunların yüzde 99'undan fazlası bütün insanlarda aynıdır. Bunların dizilimi, tıpkı alfabedeki harflerin belirli bir sırada biraraya gelerek kelimeleri ve cümleleri oluşturması gibi, organizmanın inşası ve devamı için gerekli bilgileri belirler. DNA analizine matematiksel teknikleri uygulamak için, DNA dizilerinin kümesinin bir matematiksel yapıya dönüştürülmesi gerekir. Bu yapı bir cebirsel yapı veya bir topolojik yapı olabilir. Bu yapılar DNA rekombinasyonundan gelir. DNA rekombinasyonu kalıtım ve evrimde önemli bir rol oynar. Rekombinant DNA molekülleri, birçok kaynaktan genetik materyalleri bir araya getirerek laboratuvar yöntemlerinin (moleküler klonlama) kullanımından kaynaklanan DNA dizileridir. Rekombinant DNA mümkündür, çünkü tüm organizmalardan gelen DNA molekülleri aynı kimyasal yapıyı paylaşır; onlar sadece aynı özdeş yapı içindeki nükleotitler dizisinde farklılık gösterirler. Rekombinasyondan bir cebirsel

yapının oluşturulmasındaki ilk problem, kimlik olarak hareket eden hiçbir DNA dizisinin olmamasıdır. Bu durum bizi genelleştirilmiş grup kavramını kullanmaya götürür [15].

Bunun dışında genelleştirilmiş gruplar cebirsel, topolojik ve geometrik açıdan da pek çok matematikçi tarafından çalışılmıştır [16–21]. Fatehi ve Molaei, bir genelleştirilmiş grup üzerinde bölüm yapısını ve homomorfizm teoremlerini hem cebirsel hem de topolojik açıdan çalışmıştır [22].

2004'te Araujo ve Konieczny, genelleştirilmiş grup kavramının tamamen basit (simply) yarı grup kavramına denk olduğunu ispatlamıştır [17].

2009'da Akinmoyewa, klasik grup teorideki bazı sonuçları genelleştirilmiş gruplarda incelemiştir [16]. Bazı sonuçların genelleştirilmiş gruplarda da aynen geçerli olduğunu, fakat bazı sonuçların ise genelleştirilmiş grupların bazı özel türlerinde doğru olduğunu göstermiştir. Ayrıca bir Bol grupoidin ve bir Bol quasi-grubun abelyan olmayan genelleştirilmiş grup kullanılarak oluşturulabileceğini ispatlamıştır.

[23]'de genelleştirilmiş grup kullanılarak cebirsel topolojide önemli bir araç olan etki kavramının bir genellemesi olarak genelleştirilmiş etki kavramı sunulmuştur. Bu kavramın verilmesiyle 2011'de Farhangdoost, manifoldlar üzerinde genelleştirilmiş grupların etkileri ile ilgili önemli sonuçlar elde etmiştir [18].

Mehrabi ve arkadaşları genelleştirilmiş altgruplar ve homomorfizmler ile ilgili önemli sonuçlar ortaya koymuşlardır [24].

Genelleştirilmiş grupların cebirsel olarak çalıştığı bir diğer makale ise Gürsoy ve arkadaşları tarafından 2017 yılında yapılmıştır [25]. Bu makalede genelleştirilmiş gruplar üzerinde crossed modül kavramı sunulmuştur. Ayrıca bir genelleştirilmiş grup ile bir grupoidin uyumlu bir şekilde kombine edilmesiyle genelleştirilmiş grup-grupoid kavramı tanımlanmıştır. Böylece yapısal grupoidlerden biri olan grup-grupoid kavramına yeni bir bakış açısı getirilmiştir.

Yukarıda kısa bir literatür taraması verilen genelleştirilmiş grupların cebirsel, topolojik ve diferensiyellenebilir olarak matematiğin pek çok alanında ve ayrıca genetik, dinamik sistemler, isoteori, twistor teori, electroweak teori gibi pek çok uygulamalı alanda çalışıldığı görülmektedir.

Bununla birlikte literatürde esnek küme teorisi ile genelleştirilmiş grup kavramının bir arada ele alındığı bir çalışma bulunmamaktadır. Dolayısıyla esnek genelleştirilmiş grup kavramı

tanımlandığında özgün bir değere sahip olmakla birlikte ileride yapılacak pek çok çalışmaya kaynak teşkil edecektir.

Tezin ilk bölümünde, her ikisi de hemen hemen 20 yıllık bir geçmişe sahip olan esnek küme teorisi ve genelleştirilmiş gruplar ile ilgili olarak yapılan çalışmalar hakkında ayrıntılı bir literatür verilmiştir.

Tezin ikinci bölümü tezde kullanılacak olan esnek kümelerle ilgili tanım ve teoremlere ayrılmıştır. Ayrıca bu bölümde tez boyunca kullanılacak kavramlar için bir notasyon bütünlüğü oluşturulmuştur.

Üçüncü bölümde esnek gruplar hakkında temel bilgiler sunulmuştur. İki esnek grup arasındaki esnek kesişim, esnek birleşim, "ve" ile "veya" işlemlerinin, bir esnek grubun esnek altgrupları ve esnek normal altgrupları ile ilgili bazı karakterizasyonların ve iki esnek grubun esnek çarpımının tanımlandığı bu bölüm için Aktaş ve Çağman'ın 2007'de yayımladığı esnek kümeler ve esnek gruplar isimli makalesi referans alınmıştır.

Dördüncü bölüm Molaei tarafından tanımlanan ve grupların oldukça büyüleyici bir genellemesi olan genelleştirilmiş grup kavramı ve onunla ilgili temel bilgilere ayrılmıştır. Daha net olarak belirtmek gerekirse, bir genelleştirilmiş grubun özellikle birim eleman ve ters elemanla ilgili yapısal özellikleri, grup ile genelleştirilmiş grup kavramları arasındaki ilişki, genelleştirilmiş altgrup ve genelleştirilmiş normal altgrup kavramları ile ilgili sonuçlar bu bölümde ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Ayrıca genelleştirilmiş grup homomorfizmi kavramı verilerek iki genelleştirilmiş grup arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Bu bölümdeki kavramlar hakkında daha detaylı bilgi için Molaei'nin [14] nolu çalışması ile Akinmoyewa'nın [16] nolu çalışmasına bakılabilir.

Tezin son ve orijinal bölümü olan beşinci bölümde, Molodtsov tarafından tanımlanan esnek küme kavramı ile Molaei tarafından tanımlanan genelleştirilmiş grup kavramı birleştirilerek ilk defa esnek genelleştirilmiş grup kavramı elementer ve anlaşılır örnekleriyle birlikte sunulmuştur. Birim esnek genelleştirilmiş grup ve mutlak esnek genelleştirilmiş grup kavramları tanımlanmıştır. Esnek genelleştirilmiş gruplar arasında esnek kesişim ve esnek birleşim ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. Esnek genelleştirilmiş altgrup ve esnek genelleştirilmiş normal altgrup tanımları verilerek bir esnek genelleştirilmiş grup homomorfizmi altında onların durumları ve bir esnek genelleştirilmiş grubun esnek genelleştirilmiş altgruplarının esnek kesişimin hangi şartlar altında bir esnek genelleştirilmiş grup olacağı incelenmiştir. Bir esnek

genelleştirilmiş grup homomorfizmi altında birim ve mutlak esnek genelleştirilmiş grupların görüntüleri ile ilgili önemli bir sonuç elde edilmiştir. Son olarak iki esnek genelleştirilmiş grubun esnek çarpımı tanımlanarak onun da yine bir esnek genelleştirilmiş grup olduğu ispatlanmıştır.



2. ESNEK KÜMELER VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde esnek küme teorisiyle ilgili bazı temel kavramlar, esnek küme örnekleri ve esnek kümenin özellikleri verilecektir.

Tanım 2.0.1. [1] Bir evrensel kümeyi U , bir parametre kümesini E ve U nun kuvvet kümesini $P(U)$ ile gösterelim. Bir $A \subseteq E$ alt kümesi için $F : A \rightarrow P(U)$ fonksiyonunu ele alalım. Bu takdirde,

$$(F, A) = \{(e, F(e)) \mid e \in A, F(e) \in P(U)\}$$

şeklinde ikililerin oluşturduğu kümeye U üzerinde bir **esnek küme** denir.

Diğer bir ifade ile, U üzerinde bir esnek küme, U nun alt kümelerinin parametrelendirilmiş bir kolleksiyonudur. Yukarıda sıralı ikili şeklinde verilen (F, A) esnek kümesini notasyon kolaylığı açısından çoğu zaman

$$F_A = \{F_e \mid e \in A, F_e \in P(U)\}$$

ile göstereceğiz.

Örnek 2.0.1. [1] Evlerin kümesini U ile gösterelim ve parametrelerin kümesi olarak $E = \{\text{pahalı, güzel, ahşap, bahçeli}\}$ yi alalım. Bu durumda tanımlanacak esnek kümenin anlamı pahalı evler, güzel evler, ahşap evler, bahçeli evler şeklinde olur. F_E esnek kümesi, bay Y nin alacağı ev için evlerin cazipliğini tarif eden bir kümedir. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ ve parametrelerin kümesi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olsun. $F_{e_1} = \{u_1, u_2\}$, $F_{e_2} = \{u_3, u_4\}$, $F_{e_3} = \{u_5\}$, $F_{e_4} = \{u_1, u_2, u_4\}$ alalım. F_E esnek kümesi, U kümesinin alt kümelerinin parametrelendirilmiş bir ailesidir. Böylece F_{e_1} in anlamı e_1 parametresini sağlayan evlerin kümesidir. Dolayısıyla F_E esnek kümesi,

$$F_E = \{F_{e_1}, F_{e_2}, F_{e_3}, F_{e_4}\} = \{\{u_1, u_2\}, \{u_3, u_4\}, \{u_5\}, \{u_1, u_2, u_4\}\}$$

şeklinde olur.

Tanım 2.0.2. [9] F_A ve G_B , U üzerinde iki esnek küme olsun.

i) $A \subset B$,

ii) A nun her e parametresi için F_e ile G_e özdeş yaklaşımlardır

şartları sağlanırsa F_A ya G_B nin **esnek alt kümesi** denir ve $F_A \widetilde{\subset} G_B$ yazılır.

Örnek 2.0.2. [9] $A = \{e_1, e_2\}$, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ olsun. $A \subset B$ olduğu açıktır. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ evrensel kümesi üzerinde F_A ve G_B esnek kümelerini

$$\begin{aligned} F_{e_1} &= \{u_2, u_3\} & G_{e_1} &= \{u_2, u_3\} \\ F_{e_2} &= \{u_2, u_3, u_4\} & \text{ve} & & G_{e_2} &= \{u_2, u_3, u_4\} \\ & & & & G_{e_3} &= \{u_3, u_4\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $F_A \widetilde{\subset} G_B$ dir.

Tanım 2.0.3. [9] F_A ve G_B , U üzerinde iki esnek küme olsun. Eğer hem $F_A \widetilde{\subset} G_B$ hem de $G_B \widetilde{\subset} F_A$ oluyorsa F_A ve G_B **esnek kümeleri eşittir** denir.

Tanım 2.0.4. [9] Verilen bir $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ parametre kümesi için

$$\neg E = \{\neg e_1, \neg e_2, \neg e_3, \dots, \neg e_n\}$$

kümesine parametre kümesinin **değili** denir. Burada $\neg e_i$ nin anlamı, her i için e_i parametresinin değildir.

Örnek 2.0.3. [9] Örnek 2.0.1 göz önüne alınırsa,

$$\neg E = \{\text{pahalı değil, güzel değil, ahsap değil, bahçeli değil}\}$$

dir.

Önerme 2.0.1. [9] E parametrelerin kümesi ve $A, B \subseteq E$ olsun. Bu durumda

$$i) \neg(\neg A) = A,$$

$$ii) \neg(A \cup B) = (\neg A \cup \neg B),$$

$$iii) \neg(A \cap B) = (\neg A \cap \neg B).$$

İspat:

i) $A = \{e_i \mid e_i \in E\}$ olsun. Tanım. 2.0.4 ten

$$\neg A = \{\neg e_i \mid e_i \in E\}$$

$$\neg(\neg A) = \{\neg(\neg e_i) \mid e_i \in E\}$$

$$A = \{e_i \mid e_i \in E\}$$

elde edilir.

ii) $\neg A = \{\neg e_i \mid e_i \in A\}$ ve $\neg B = \{\neg e_i \mid e_i \in B\}$ olsun.

$$A \cup B = \{e_i \mid e_i \in A \text{ veya } e_i \in B\}$$

dir. Bu takdirde Tanım. 2.0.4 ten

$$\neg A \cup \neg B = \{\neg e_i \mid e_i \in A \text{ veya } e_i \in B\} \quad (2.0.1)$$

ve

$$\neg(A \cup B) = \{\neg e_i \mid e_i \in A \text{ veya } e_i \in B\} \quad (2.0.2)$$

olup, (2.0.1) ve (2.0.2) den $\neg(A \cup B) = (\neg A \cup \neg B)$ elde edilir.

iii) $\neg A = \{\neg e_i \mid e_i \in A\}$ ve $\neg B = \{\neg e_i \mid e_i \in B\}$ olsun.

$$A \cap B = \{e_i \mid e_i \in A \text{ ve } e_i \in B\}$$

dir. Bu takdirde Tanım. 2.0.4 ten

$$\neg A \cap \neg B = \{\neg e_i \mid e_i \in A \text{ ve } e_i \in B\} \quad (2.0.3)$$

ve

$$\neg(A \cap B) = \{\neg e_i \mid e_i \in A \text{ ve } e_i \in B\} \quad (2.0.4)$$

olup, (2.0.3) ve (2.0.4) den $\neg(A \cap B) = (\neg A \cap \neg B)$ elde edilir.

Tanım 2.0.5. [5] U üzerinde bir esnek küme F_A olsun. F_A nın **esnek tümleyeni**, $a \in \neg A$ için $F_a^c = U - F_{\neg a}$ ile tanımlanan $F^c : \neg A \rightarrow P(U)$ dönüşümüdür ve $(F, A)^c$ ya da F_A^c ile gösterilir.

Örnek 2.0.4. $A = \{e_1, e_2\}$ olmak üzere $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ üzerinde bir $F_A = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}\}$ esnek kümesinin esnek tümleyeni $F_A^c = \{\{x_3\}, \{x_2\}\}$ dir.

Tanım 2.0.6. [9] U üzerindeki bir F_A esnek kümesi için, eğer her $e \in A$ için $F_e = \emptyset$ oluyorsa F_A ya **boş (null)** esnek küme deriz ve Φ ile gösteririz.

Uyarı 2.0.1. Bazı ispatlarda kolaylık olması açısından $\Phi = (\Phi, A)$ notasyonu kullanılacaktır.

Örnek 2.0.5. [9] U evrensel kümesi ahşap evlerden oluşan küme olarak ele alınsın ve $A = \{tuğla, \text{çelik}, \text{taş}\}$ olsun. Bu durumda

$$(F, A) = \{(tuğla, \emptyset), (\text{çelik}, \emptyset), (\text{taş}, \emptyset)\}$$

esnek kümesi boş (null) esnek kümedir.

Tanım 2.0.7. [9] U üzerindeki bir F_A esnek kümesi için, eğer her $e \in A$ için $F_e = U$ oluyorsa F_A ya **mutlak (absolute)** esnek küme denir ve $\tilde{U}$ veya $\tilde{U}_A$ ile gösterilir.

Örnek 2.0.6. [9] U evrensel kümesi ahşap evlerden oluşan küme olsun ve

$$A = \{\text{tuğla değil}, \text{çelik değil}, \text{taş değil}\}$$

parametre kümesini alalım. Bu durumda

$$(F, A) = \{(\text{tuğla değil}, U), (\text{çelik değil}, U), (\text{taş değil}, U)\}$$

esnek kümesi mutlak esnek kümedir.

Tanım 2.0.8. [9] Bir U evrensel kümesi üzerindeki F_A ve G_B esnek kümelerinin kesişimi aşağıdaki şartları sağlayan H_C esnek kümesidir:

i) $C = A \cap B$,

ii) Her $e \in C$ için $H_e = F_e$ veya $H_e = G_e$.

$F_A \tilde{\cap} G_B = H_C$ ile gösterilir.

Örnek 2.0.7. [9] Evlerin maliyetini ve evlerin cazipliğini belirleyen, aynı U evrensel kümesi üzerinde iki esnek küme sırasıyla F_A ve G_B olsun.

$$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}, A = \{\text{maliyetli}, \text{ucuz}\}, B = \{\text{güzel}, \text{ucuz}\} \text{ olduğunu kabul edelim.}$$

$$F_{\text{maliyetli}} = \{u_1, u_2\}$$

$$G_{\text{güzel}} = \{u_1, u_5\}$$

$$F_{\text{ucuz}} = \{u_2, u_3, u_4\}$$

ve

$$G_{\text{ucuz}} = \{u_2, u_3, u_4\}$$

olsun. Bu takdirde $C = A \cap B = \{\text{ucuz}\}$ ve $H_{\text{ucuz}} = \{u_2, u_3, u_4\}$ olup F_A ve G_B esnek kümelerinin kesişimi $H_C = \{\{u_2, u_3, u_4\}\}$ tür.

Önerme 2.0.2. [9] U üzerindeki bir F_A esnek kümesi için aşağıdaki ifadeler sağlanır:

i) $F_A \tilde{\cap} F_A = F_A$,

ii) $F_A \tilde{\cap} \Phi = \Phi$.

Tanım 2.0.9. [9] U üzerinde iki esnek küme F_A ile G_B ve $C = A \cup B$ olsun. Her $e \in C$ için

$$H_e = \begin{cases} F_e & , e \in A - B \\ G_e & , e \in B - A \\ F_e \cup G_e & , e \in A \cap B \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan H_C esnek kümesine F_A ile G_B esnek kümelerinin **birleşimi** denir ve $F_A \tilde{\cup} G_B = H_C$ ile gösterilir.

Örnek 2.0.8. [9] Örnek 2.0.7 yi göz önüne alalım. $C = A \cup B = \{\text{maliyetli}, \text{güzel}, \text{ucuz}\}$ dur. $F_A \tilde{\cup} G_B = H_C$ dersek

$$H_{\text{maliyetli}} = \{u_1, u_2\} ,$$

$$H_{\text{güzel}} = \{u_1, u_5\}$$

$$H_{\text{ucuz}} = \{u_2, u_3, u_4\} ,$$

olup $H_C = \{\{u_1, u_2\}, \{u_1, u_5\}, \{u_2, u_3, u_4\}\}$ tür.

Önerme 2.0.3. [9] F_A ve G_B , U üzerinde tanımlı olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler sağlanır:

i) $F_A \tilde{\cup} F_A = F_A$,

ii) $F_A \tilde{\cup} \Phi = F_A$,

iii) $F_A \tilde{\cup} G_B = G_B \tilde{\cup} F_A$.

İspat: İki esnek kümenin birleşimi tanımını kullanırsak,

i) Her $e \in A$ için

$$\begin{aligned} H_e &= \begin{cases} F_e & , e \in A - A = \emptyset \\ F_e & , e \in A - A = \emptyset \\ F_e \cup F_e & , e \in A \cap A = A \end{cases} \\ &= F_e \end{aligned}$$

olup buradan $F_A \tilde{\cup} F_A = F_A$ elde edilir.

ii) Her $e \in A$ için

$$\begin{aligned} (F_A \tilde{\cup} \Phi)_e &= \begin{cases} F_e & , e \in A - A = \emptyset \\ \Phi_e & , e \in A - A = \emptyset \\ F_e \cup \Phi_e & , e \in A \cap A = A \end{cases} \\ &= F_e \cup \emptyset , e \in A \\ &= F_e \end{aligned}$$

olduğundan $F_A \widetilde{\cup} \Phi = F_A$ dir.

iii) Her $e \in A$ için

$$\begin{aligned} (F_A \widetilde{\cup} G_B)_e &= \begin{cases} F_e & , e \in A - B \\ G_e & , e \in B - A \\ F_e \cup G_e & , e \in A \cap B \end{cases} \\ &= \begin{cases} G_e & , e \in B - A \\ F_e & , e \in A - B \\ G_e \cup F_e & , e \in B \cap A \end{cases} \\ &= (G_B \widetilde{\cup} F_A)_e \end{aligned}$$

olduğundan $F_A \widetilde{\cup} G_B = G_B \widetilde{\cup} F_A$ dir.

Önerme 2.0.4. [9] F_A ve G_B U üzerinde tanımlı olsun. Bu takdirde

i) $(F_A \widetilde{\cup} G_B)^c = F_A^c \widetilde{\cap} G_B^c$,

ii) $(F_A \widetilde{\cap} G_B)^c = F_A^c \widetilde{\cup} G_B^c$ dir.

İspat:

i) $F_A \widetilde{\cup} G_B = H_{A \cup B}$ yazalım, burada

$$H_e = \begin{cases} F_e & , e \in A - B \\ G_e & , e \in B - A \\ F_e \cup G_e & , e \in A \cap B \end{cases}$$

dir. Esnek tümleyen tanımından

$$\begin{aligned} (F_A \widetilde{\cup} G_B)^c &= (H_{A \cup B})^c \\ &= H_{\neg A \cup \neg B}^c \end{aligned}$$

yazılır, burada her $\neg e \in \neg A \cup \neg B$ için $H_{\neg e}^c = U - H_e$ dir. Böylece

$$H_{\neg e}^c = \begin{cases} F_{\neg e}^c & , \neg e \in \neg A - \neg B \\ G_{\neg e}^c & , \neg e \in \neg B - \neg A \\ F_{\neg e}^c \cup G_{\neg e}^c & , \neg e \in \neg A \cap \neg B \end{cases}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$(F_A)^c \widetilde{\cup} (G_B)^c = (F_{\neg A}^c) \widetilde{\cup} (G_{\neg B}^c)$$

olup bu esnek kümeyi kısaca $K_{\neg A \cup \neg B}$ şeklinde gösterelim. Esnek birleşim tanımından

$$K_{\neg e} = \begin{cases} F_{\neg e}^c & , \neg e \in \neg A - \neg B \\ G_{\neg e}^c & , \neg e \in \neg B - \neg A \\ F_{\neg e}^c \cup G_{\neg e}^c & , \neg e \in \neg A \cap \neg B \end{cases}$$

dir. Böylece $H_{\neg A \cup \neg B}^c$ ve $K_{\neg A \cup \neg B}$ esnek kümelerinin aynı olduğu görülür. O halde $(F_A \tilde{\cup} G_B)^c = F_A^c \tilde{\cap} G_B^c$ olur ve ispat tamamlanır.

ii) Esnek kesişim ve esnek tümleyen tanımları kullanılarak kolayca ispatlanır.

Tanım 2.0.10. [9] F_A ve G_B , U üzerinde tanımlı olsun. Bu takdirde, “ F_A VE G_B ” işlemi $F_A \tilde{\wedge} G_B = H_{A \times B}$ ile gösterilir ve her $(a, b) \in A \times B$ için $H_{(a,b)} = F_a \cap G_b$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.0.9. U evrensel kümesi üzerinde evlerin maliyetini ve cazipliğini belirleyen F_A ve G_B esnek kümeleri verilsin. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ ve $A = \{\text{güzel, maliyetli, ahşap}\}$ ve $B = \{\text{güzel, bahçeli, ucuz}\}$ olduğunu varsayalım.

$$\begin{array}{ll} F_{\text{güzel}} = \{u_1, u_2\} & G_{\text{güzel}} = \{u_1, u_2\} \\ F_{\text{maliyetli}} = \{u_3, u_4, u_7\} & \text{ve } G_{\text{bahçeli}} = \{u_3, u_5, u_6\} \\ F_{\text{ahşap}} = \{u_5, u_6\} & G_{\text{ucuz}} = \{u_4, u_7\} \end{array}$$

olarak alınırsa $F_A \tilde{\wedge} G_B = H_{A \times B}$,

$$\begin{array}{lll} H_{(\text{maliyetli}, \text{güzel})} = \emptyset, & H_{(\text{güzel}, \text{güzel})} = \{u_1, u_2\}, & H_{(\text{ahşap}, \text{güzel})} = \emptyset \\ H_{(\text{maliyetli}, \text{bahçeli})} = \{u_3\}, & H_{(\text{güzel}, \text{bahçeli})} = \emptyset, & H_{(\text{ahşap}, \text{bahçeli})} = \{u_5, u_6\} \\ H_{(\text{maliyetli}, \text{ucuz})} = \{u_4\}, & H_{(\text{güzel}, \text{ucuz})} = \emptyset & H_{(\text{ahşap}, \text{ucuz})} = \emptyset \end{array}$$

şeklindedir.

Tanım 2.0.11. [9] F_A ve G_B , U üzerinde tanımlı olmak üzere “ F_A YA DA G_B ” işlemi $F_A \tilde{\vee} G_B = K_{A \times B}$ ile gösterilir ve her $(a, b) \in A \times B$ için $K_{(a,b)} = F_a \cup G_b$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.0.10. Örnek 2.0.9 dikkate alınırsa $F_A \tilde{\vee} G_B = K_{A \times B}$

$$\begin{array}{ll} K_{(\text{maliyetli}, \text{güzel})} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_7\}, & K_{(\text{güzel}, \text{güzel})} = \{u_1, u_2\}, \\ K_{(\text{maliyetli}, \text{bahçeli})} = \{u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}, & K_{(\text{güzel}, \text{bahçeli})} = \{u_1, u_2, u_3, u_5, u_6\}, \\ K_{(\text{maliyetli}, \text{ucuz})} = \{u_3, u_4, u_7\}, & K_{(\text{güzel}, \text{ucuz})} = \{u_1, u_2, u_4, u_7\}, \\ K_{(\text{ahşap}, \text{güzel})} = \{u_1, u_2, u_5, u_6\} & K_{(\text{ahşap}, \text{ucuz})} = \{u_4, u_5, u_6, u_7\} \\ K_{(\text{ahşap}, \text{bahçeli})} = \{u_3, u_5, u_6\} & \end{array}$$

şeklindedir.

Tanım 2.0.12. [26] F_A esnek kümesi U üzerinde tanımlı ve $u \in U$ olsun. $u \in U$ için $F_e = \{u\}$ ve her $e' \in A \setminus \{e\}$ için $F_{e'} = \emptyset$ olacak şekilde sadece bir tane $e \in A$ elemanı varsa F_A esnek kümesine bir esnek nokta denir ve F_e^u ile veya kısaca u^e ile gösterilir.

Örnek 2.0.11. [26] $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ ve $A = \{e, e'\}$ olsun. $F_A = \{\{u_1\}, \emptyset\}$ ve $G_A = \{\{u_1, u_2, u_3\}, \{u_2, u_3\}\}$ esnek kümelerini ele alalım. Bu takdirde, $F_A = u_1^e$ bir esnek noktadır ve ayrıca $u_1^e \in G_A$ dır.

Tanım 2.0.13. [6] F_A ve G_B U üzerinde tanımlı olmak üzere F_A ile G_B nin **kartezyen çarpımı** $H_{A \times B} = F_A \times G_B$ şeklinde tanımlı olup burada $H : A \times B \longrightarrow P(U \times U)$ ve $(a, b) \in A \times B$ için $H_{(a,b)} = F_a \times G_b$ dir, yani $H_{(a,b)} = \{(x_i, x_j) \mid x_i \in F_a \text{ ve } x_j \in G_b\}$ dir.

$x = (x_1, x_2) \in H_{A \times B}$ noktası için π_i **izdüşüm fonksiyonu**,

$i = 1, 2$ için $\pi_i : H_{A \times B} \longrightarrow (H_{A \times B})_i$ öyle ki $\pi_1(x) = x_1$ ve $\pi_2(x) = x_2$ şeklindedir.

Sonlu tane boştan farklı esnek kümenin kartezyen çarpımı, bu tanımın genelleştirilmesiyle tanımlanabilir. Boştan farklı $(F_1)_A, (F_2)_A, \dots, (F_n)_A$ esnek kümelerinin $(F_1)_A \times (F_2)_A \times \dots \times (F_n)_A$ kartezyen çarpımı, $h_i \in (F_i)_A$ olmak üzere bütün $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ sıralı n lilerin esnek kümesidir.

3. ESNEK GRUPLAR

Tanım 3.0.1. [4] F_A , bir G grubu üzerinde esnek küme olsun. Her $x \in A$ için $F_x < G$ ise F_A ya G üzerinde bir **esnek grup** denir.

Örnek 3.0.1. [27] $G = A = S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ olsun ve

$$F_{(x)} = \{y \in G \mid xRy \iff y = x^n, n \in \mathbb{N}\}$$

küme değerli fonksiyonunu göz önüne alalım. Açıkça $F_{(e)} = \{e\}$, $F_{(12)} = \{e, (12)\}$, $F_{(13)} = \{e, (13)\}$, $F_{(23)} = \{e, (23)\}$, $F_{(123)} = F_{(132)} = \{e, (123), (132)\}$ olup, bu kümelerin her biri $G = S_3$ ün altgrubudur. Dolayısıyla F_A , G üzerinde bir esnek gruptur.

Önerme 3.0.1. [4] F_A ve H_A , G grubu üzerinde esnek gruplar olsun. Bu durumda $F_A \tilde{\cap} H_A$, G üzerinde bir esnek gruptur.

İspat: Esnek kümelerin kesişimi tanımından $F_A \tilde{\cap} H_A = K_C$ yazabiliriz. Burada $C = A \cap A = A$ ve her $x \in C$ için $K_x = F_x$ veya $K_x = H_x$ dir. $K : A \rightarrow P(G)$ bir dönüşüm olup her $x \in A$ için K_A , G üzerinde bir esnek kümedir. F_A ve H_A , G grubu üzerinde esnek gruplar olduğundan her $x \in A$ için $K_x = F_x < G$ veya $K_x = H_x < G$ dir. Böylece $F_A \tilde{\cap} H_A$, G üzerinde bir esnek gruptur.

Önerme 3.0.2. [4] G üzerinde herhangi iki F_A ve H_B esnek grubu için eğer $A \cap B = \emptyset$ ise $F_A \tilde{\cup} H_B$ de G üzerinde bir esnek gruptur.

İspat: Esnek kümelerin birleşimi tanımından $C = A \cup B$ olmak üzere, $F_A \tilde{\cup} H_B = K_C$ yazabiliriz. $A \cap B = \emptyset$ olduğundan C nin her x elemanı ya $A - B = A$ ya da $B - A = B$ ye aittir. Bu durumda

$$x \in A - B \text{ olduğunda } K_x = F_x < G$$

$$x \in B - A \text{ olduğunda } K_x = H_x < G$$

dir. Böylece $F_A \tilde{\cup} H_B$ de G üzerinde bir esnek gruptur.

Teorem 3.0.1. [4] G üzerinde herhangi iki F_A ve H_B esnek grubu için $F_A \tilde{\cap} H_B$ de G üzerinde bir esnek gruptur.

İspat: Tanım 2.0.10 dan $F_A \tilde{\cap} H_B = K_{A \times B}$ diyelim. Bir grubun herhangi iki altgrubunun kesişimi de yine bir alt grup olduğundan her (x, y) parametre çifti için $K_{(x, y)} = F_x \cap G_y$ de G nin bir altgrubudur. Böylece $F_A \tilde{\cap} H_B$, G üzerinde bir esnek gruptur.

Tanım 3.0.2. [4] F_A , birim elemanı e olan G grubu üzerinde bir esnek grup olsun. Bu takdirde

- i) Her $x \in A$ için $F_x = \{e\}$ ise F_A ya **birim esnek grup** deriz.
- ii) Her $x \in A$ için $F_x = G$ ise F_A ya **mutlak esnek grup** deriz.

Önerme 3.0.3. [4] $\eta : G \rightarrow K$ bir grup homomorfizmi olsun.

- i) F_A, G üzerinde bir esnek grup olmak üzere, her $x \in A$ için $F_x = \text{Ker}\eta$ ise $\eta(F)_A, K$ üzerinde birim esnek gruptur.
- ii) F_A, G üzerinde mutlak esnek grup ise $\eta(F)_A$ da K üzerinde bir mutlak esnek gruptur.

İspat:

- i) e_K, K grubunun birim elemanını gösterebiliriz. $x \in A$ için $\eta(F_x) = e_K$ dir. Böylece Tanım 3.0.2 den $\eta(F)_A$ görüntüsü birim esnek gruptur.
- ii) Hipotezden dolayı her $x \in A$ için $F_x = G$ dir. Buradan her $x \in A$ için $\eta(F_x) = \eta(G) = K$ dir. Böylece Tanım 3.0.2 den $\eta(F)_A$ görüntüsü mutlak esnek gruptur.

Tanım 3.0.3. [4] F_A ve H_B, G üzerinde esnek gruplar olsun. Bu takdirde,

- i) $B \subset A$,
- ii) Her $x \in B$ için $H_x < F_x$

şartları sağlanıyorsa H_B ye F_A nın **esnek altgrubu** deriz ve $H_B \widetilde{<} F_A$ ile gösteririz.

Örnek 3.0.2. [4] $G = A = S_3$ ve $B = A_3$ alalım.

$$F_x = \{y \in S_3 \mid x \sim y \iff y = x^n, n \in \mathbb{N}\}$$

ve

$$H_x = \{y \in A_3 \mid x \sim y \iff y = \langle x \rangle\}$$

fonksiyonlarını tanımlarsak $H_B \widetilde{<} F_A$ olur. Çünkü her $x \in A_3$ için $A_3 \subset S_3$ ve $H_x < F_x$ dir.

Teorem 3.0.2. [4] F_A, G üzerinde bir esnek grup ve $\{(H_i)_{B_i}\}_{i \in I}$, F_A nın esnek altgruplarının boş olmayan bir koleksiyonu olsun, burada I bir indis kümesidir. Bu takdirde $\bigcap_{i \in I} (H_i)_{B_i}$, F_A nın bir esnek altgrubudur.

İspat: Açıkça $\bigcap_{i \in I} B_i \subset A$ dır. Her bir i indisi için $(H_i)_{B_i} \lesssim F_A$ olduğundan $\bigcap_{i \in I} (H_i)_{B_i}$, F_A nın bir esnek altgrubudur.

Önerme 3.0.4. [4] G üzerinde F_A ve H_B iki esnek grup ve $F_A \lesssim H_B$ olsun. Eğer $\eta : G \rightarrow K$ bir grup homomorfizmi ise $(\eta(F))_A$ ve $(\eta(H))_B$, K üzerinde esnek altgruplardır ve $(\eta(F))_A \lesssim (\eta(H))_B$ dir.

İspat: $\eta : G \rightarrow K$ bir homomorfizm olduğundan her $x \in A$ ve her $y \in B$ için $\eta(F_x)$ ve $\eta(H_y)$, K nın altgruplarıdır. Böylece $(\eta(F))_A$ ve $(\eta(H))_B$, K üzerinde esnek altgruplardır. Diğer taraftan F_A , H_B nin bir esnek altgrubu olduğundan her $x \in A$ için F_x , H_x in ve $\eta(F_x)$ de $\eta(H_x)$ in altgrubudur. Böylece Tanım 3.0.3 den $(\eta(F))_A \lesssim (\eta(H))_B$ gelir.

Tanım 3.0.4. [4] F_A ve H_B sırasıyla G ve K grupları üzerinde esnek gruplar, $\eta : G \rightarrow K$ bir grup homomorfizmi ve $g : A \rightarrow B$ bir dönüşüm olsun. Eğer η ile g örten ve her $x \in A$ için $\eta(F_x) = H_{g(x)}$ ise (η, g) ikilisine bir **esnek homomorfizm** deriz. Bu durumda F_A ile H_B nin **esnek homomorfik** olduğunu söyleriz ve $F_A \sim H_B$ şeklinde gösteririz.

Bu tanımda, η bir izomorfizm ve g dönüşümü bire-bir ise (η, g) çiftine bir **esnek izomorfizm** denir. Bu durumda F_A ile H_B nin **esnek izomorfik** olduğunu söyleriz ve $F_A \simeq H_B$ yazarız.

Tanım 3.0.5. [4] F_A , G üzerinde ve H_B , K üzerinde esnek gruplar ise F_A ve H_B nin çarpımı her (x, y) parametre çifti için

$$T_{(x,y)} = F_x \times H_y$$

olmak üzere $F_A \times H_B = T_{A \times B}$ şeklinde tanımlıdır.

Önerme 3.0.5. [4] Eğer F_A , G üzerinde ve H_B , K üzerinde esnek gruplar ise $F_A \times H_B$ de $G \times K$ üzerinde bir esnek gruptur.

İspat: F_A , G üzerinde bir esnek grup olduğundan her $x \in A$ için $\phi \neq F_x < G$ ve benzer şekilde H_B , K üzerinde bir esnek grup olduğundan her $y \in B$ için $\phi \neq H_y < K$ dır. Dolayısıyla her $(x, y) \in A \times B$ için $T_{(x,y)} = F_x \times H_y \neq \phi$ olup $U_{(x,y)}$, $G \times K$ üzerinde bir esnek kümedir. Diğer taraftan $G \times K$ kümesi açıkça, her $(g_1, k_1), (g_2, k_2) \in G \times K$ için $(g_1, k_1) \cdot (g_2, k_2) = (g_1 g_2, k_1 k_2)$ çarpımı ile bir grup olup, bu grupta birim eleman (e_G, e_K) , bir (g, k) elemanın tersi (g^{-1}, k^{-1}) ile tanımlıdır. O halde her bir $(x, y) \in A \times B$ için $T_{(x,y)} = F_x \times H_y$ esnek kümesinin, $G \times K$ çarpım grubunun bir altgrubu olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olur. Her $(x, y) \in A \times B$ parametre çifti için herhangi iki $(g_1, k_1), (g_2, k_2) \in T_{(x,y)}$ elemanı alalım. Buradan $(g_1, k_1) \cdot (g_2^{-1}, k_2^{-1}) =$

$(g_1g_2^{-1}, k_1k_2^{-1})$ olur. F_x ve H_y , sırasıyla G ve K nın altgrupları olduğundan $g_1g_2^{-1} \in F_x$ ve $k_1k_2^{-1} \in H_y$ dir. Böylece her bir (x,y) parametresi için $T_{(x,y)}$, $G \times K$ nın bir alt grubudur. Sonuç olarak $T_{A \times B} = F_A \times H_B$, $G \times K$ üzerinde bir esnek gruptur.

Tanım 3.0.6. [4] F_A , G üzerinde bir esnek grup ve $H_B \widetilde{\triangleleft} F_A$ olsun. Her $x \in B$ için H_x , F_x ' in bir normal alt grubu ise H_B ' ye F_A ' nın bir **normal esnek alt grubu** denir ve $H_B \widetilde{\triangleleft} F_A$ şeklinde yazılır.

Teorem 3.0.3. [4] F_A , G üzerinde bir esnek grup, I bir indis kümesi ve $\{(H_i)_{B_i}\}_{i \in I}$, F_A ' nın normal esnek alt gruplarının bir koleksiyonu olsun. Bu takdirde $\bigcap_{i \in I} (H_i)_{B_i}$, F_A ' nın bir normal esnek alt grubudur.

İspat: Açıkça $\bigcap_{i \in I} B_i \subset A$ dır. Her i indisi için $(H_i)_{B_i} \widetilde{\triangleleft} F_A$ olduğundan $\bigcap_{i \in I} (H_i)_{B_i}$, F_A nın normal esnek alt grubudur.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ GRUPLAR

Tezin bu bölümünde genelleştirilmiş gruplar ile ilgili bazı temel kavramlar hakkında bilgiler verildi.

Tanım 4.0.1. [14] Bir G *genelleştirilmiş grubu*, üzerinde tanımlanan bir $: G \times G \rightarrow G$, $(a, b) \mapsto ab$ çarpma işlemi ile birlikte aşağıdaki koşulları sağlayan bir kümedir:

- i) Her $a, b, c \in G$ için $(ab)c = a(bc)$, (birleşme özelliği),
- ii) Her $a \in G$ için bir tek $e(a) \in G$ vardır öyle ki $ae(a) = e(a)a = a$ (birim eleman),
- iii) Her $a \in G$ için $a^{-1} \in G$ vardır öyle ki $aa^{-1} = a^{-1}a = e(a)$ (ters eleman).

Bir genelleştirilmiş grubun yapısı ile ilgili olarak aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 4.0.1. [14] Bir G *genelleştirilmiş grubu* aşağıdaki özellikleri sağlar:

- i) Her $a \in G$ için $e(e(a)) = e(a)$ ve $e(a^{-1}) = e(a)$ dir.
- ii) Her $a \in G$ için $(a^{-1})^{-1} = a$ dir.

İspat:

- i) G bir genelleştirilmiş grup olduğundan herhangi bir a elemanı için $a = ae(a) = e(a)a$ olacak şekilde bir tek $e(a)$ birim elemanı bulunmaktadır. Dolayısıyla, özel olarak a elemanı yerine $e(a)$ elemanı alınırsa benzer olarak $e(e(a))e(a) = e(a)$ eşitliğini yazabiliriz. Bu son eşitliğin her iki tarafını sağ taraftan a ile çarparsak $[e(e(a))e(a)]a = e(a)a$ elde edilir. Genelleştirilmiş grubun birleşme özelliğinden $e(e(a))[e(a)a] = a$ gelir. Böylece $e(e(a))a = a$ elde edilir. Benzer işlemler sol taraftan yapılırsa $ae(e(a)) = a$ bulunur. a elemanı için birim eleman tek olmak zorunda olduğundan bu iki sonuç $e(e(a)) = e(a)$ olmasını gerektirir.

İkinci olarak herhangi bir $a \in G$ için $e(a^{-1}) = e(a)$ olduğunu gösterelim. $a \in G$ olsun. Bu takdirde,

$$a = ae(a) = a(a^{-1}a) = a(a^{-1}e(a^{-1}))a = (e(a)e(a^{-1}))a$$

dır. Benzer olarak

$$a = a(e(a^{-1}))e(a)$$

dır. $e(a)$ birim elemanın tekliğinden

$$e(a)e(a^{-1}) = e(a^{-1}) = e(a)$$

olup

$$e(a^{-1}) = e(a) \quad (4.0.1)$$

olduğu gelir.

ii) Ters eleman özelliğinden $(a^{-1})^{-1}a^{-1} = e(a^{-1}) = e(a)$ dır.

$$(a^{-1})^{-1}a^{-1} = e(a)$$

eşitliğinin her iki tarafını sağ taraftan a ile çarparsak

$$[(a^{-1})^{-1}a^{-1}]a = e(a)a \quad (4.0.2)$$

elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafını ele alır ve genelleştirilmiş grubun ilk aksiyomunu kullanırsak

$$(a^{-1})^{-1}(a^{-1}a) = (a^{-1})^{-1}e(a) = (a^{-1})^{-1}e(a^{-1}) = (a^{-1})^{-1}e(a^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1} \quad (4.0.3)$$

olur. Buradan (4.0.2) ve (4.0.3) eşitlikleri aracılığıyla $(a^{-1})^{-1} = a$ elde edilir.

Teorem 4.0.1. [14] Bir G genelleştirilmiş grubunda her a elemanı için bir tek $a^{-1} \in G$ ters elemanı vardır.

İspat: $a \in G$ nin b ve c gibi iki farklı ters elemanının olduğunu kabul edelim. Bu takdirde, $ba = ab = e(a)$ ve $ca = ac = e(a)$ dır. Buradan $b(ac) = b(e(a))$ elde edilir. Dolayısıyla $e(a)c = be(a)$ olup bu da (4.0.1) eşitliğinden $b = c$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak, bir G genelleştirilmiş grubunda her a elemanı için bir ters eleman vardır.

Örnek 4.0.1. [14] $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olmak üzere, $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ olsun. G ,

$$(a_1, b_1, c_1)(a_2, b_2, c_2) = (b_1a_2, b_1b_2, b_1c_2)$$

çarpım işlemine göre bir genelleştirilmiş gruptur.

Genelleştirilmiş grup tanımındaki aksiyomların sağlandığını gösterelim.

i) $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3) \in G$ alalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
 [(a_1, b_1, c_1)(a_2, b_2, c_2)](a_3, b_3, c_3) &= (b_1 a_2, b_1 b_2, b_1 c_2)(a_3, b_3, c_3) \\
 &= [(b_1 b_2) a_3, (b_1 b_2) b_3, (b_1 b_2) c_3] \\
 &= [b_1 (b_2 a_3), b_1 (b_2 b_3), b_1 (b_2 c_3)] \\
 &= (a_1, b_1, c_1)(b_2 a_3, b_2 b_3, b_2 c_3) \\
 &= (a_1, b_1, c_1)[(a_2, b_2, c_2)(a_3, b_3, c_3)]
 \end{aligned}$$

olduğundan birleşme özelliği sağlanır.

ii) $(a_1, b_1, c_1) \in G$ için birim eleman $e(a_1, b_1, c_1) = \left(\frac{a_1}{b_1}, 1, \frac{c_1}{b_1}\right)$ şeklindedir.

Gerçekten,

$$\begin{aligned}
 (a_1, b_1, c_1)e(a_1, b_1, c_1) &= (a_1, b_1, c_1) \left(\frac{a_1}{b_1}, 1, \frac{c_1}{b_1}\right) \\
 &= (b_1 \frac{a_1}{b_1}, b_1 1, b_1 \frac{c_1}{b_1}) \\
 &= (a_1, b_1, c_1)
 \end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
 e(a_1, b_1, c_1)(a_1, b_1, c_1) &= \left(\frac{a_1}{b_1}, 1, \frac{c_1}{b_1}\right) (a_1, b_1, c_1) \\
 &= (1 a_1, 1 b_1, 1 c_1) \\
 &= (a_1, b_1, c_1)
 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$(a_1, b_1, c_1)e(a_1, b_1, c_1) = e(a_1, b_1, c_1)(a_1, b_1, c_1) = (a_1, b_1, c_1)$$

eşitliği sağlanır.

iii) $(a_1, b_1, c_1) \in G$ için ters eleman $(a_1, b_1, c_1)^{-1} = \left(\frac{a_1}{b_1^2}, \frac{1}{b_1}, \frac{c_1}{b_1^2}\right)$ kuralı ile verilir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
 (a_1, b_1, c_1)(a_1, b_1, c_1)^{-1} &= (a_1, b_1, c_1) \left(\frac{a_1}{b_1^2}, \frac{1}{b_1}, \frac{c_1}{b_1^2}\right) \\
 &= (b_1 \frac{a_1}{b_1^2}, b_1 \frac{1}{b_1}, b_1 \frac{c_1}{b_1^2}) \\
 &= \left(\frac{a_1}{b_1}, 1, \frac{c_1}{b_1}\right) \\
 &= e(a_1, b_1, c_1)
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(a_1, b_1, c_1)^{-1}(a_1, b_1, c_1) &= \left(\frac{a_1}{b_1^2}, \frac{1}{b_1}, \frac{c_1}{b_1^2} \right) (a_1, b_1, c_1) \\
&= \left(\frac{1}{b_1} a_1, \frac{1}{b_1} b_1, \frac{1}{b_1} c_1 \right) \\
&= \left(\frac{a_1}{b_1}, 1, \frac{c_1}{b_1} \right) \\
&= e(a_1, b_1, c_1)
\end{aligned}$$

olup, ters eleman kuralı sağlanır. Böylece G bir genelleştirilmiş gruptur.

Örnek 4.0.2. [25] G , üzerinde tanımlanan bir m çarpım işlemi ile bir genelleştirilmiş grup olsun. Bu takdirde $G \times G$ kartezyen çarpım kümesi,

$$m_1((a, b), (c, d)) = (m(a, c), m(b, d))$$

çarpım işlemi ile genelleştirilmiş gruptur. Herhangi bir $(a, b) \in G \times G$ elemanı için birim eleman $e_1(a, b) = (e(a), e(b))$ ve ters eleman $(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$ ile tanımlıdır.

Tanım 4.0.1 den her grubun bir genelleştirilmiş grup olduğu açıktır. Fakat bunun tersi doğru değildir, yani her genelleştirilmiş grup bir grup olmayabilir. Aşağıdaki teorem bir genelleştirilmiş grubun ne zaman bir grup olabileceğini ifade etmektedir.

Teorem 4.0.2. [25] Her G abelyan genelleştirilmiş grubu bir gruptur.

İspat: Bir grupta sadece bir tane birim eleman olması gerektiğinden, bir G abelyan genelleştirilmiş grubundaki herhangi $a, b \in G$ elemanları için $e(a) = e(b)$ olduğunu göstermek ispat için yeterli olacaktır. $a, b \in G$ verilsin. Bu takdirde $ae(a) = e(a)a = a$ ve $be(b) = e(b)b = b$ eşitlikleri vardır. $e(a)a = a$ ve $e(b)b = b$ eşitliklerini sırasıyla b ve a ile sağdan çarpalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
e(a)a = a &\Rightarrow (e(a)a)b = ab \\
&\Rightarrow e(a)(ab) = ab \\
&\Rightarrow e(a) = e(ab)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
e(b)b = b &\Rightarrow (e(b)b)a = ba \\
&\Rightarrow e(b)(ba) = ba \\
&\Rightarrow e(b) = e(ba)
\end{aligned}$$

elde edilir. G abelyan olduğundan $ab = ba$ ise $e(ab) = e(ba)$ dır. Ayrıca birim elemanın tekliğinden $e(a) = e(ab) = e(ba) = e(b)$ bulunur. Böylece G abelyan genelleştirilmiş grubunda birim elemanın tek olduğu sonucu gelir. Sonuç olarak, G bir gruptur.

Tanım 4.0.2. [14] Bir G genelleştirilmiş grubunda her $a, b \in G$ için $e(ab) = e(a)e(b)$ oluyorsa G ye **normal genelleştirilmiş grup** denir.

Tanım 4.0.3. [24] H bir G genelleştirilmiş grubunun boşolmayan bir alt kümesi olsun. H , G nin çarpım işlemi ile bir genelleştirilmiş grup ise H ya bir genelleştirilmiş altgrup deriz ve $H \leq G$ ile gösteririz.

Teorem 4.0.3. [24] G bir genelleştirilmiş grup ve $\emptyset \neq H \subset G$ olsun. Bu takdirde H , G nin bir genelleştirilmiş altgrubudur ancak ve ancak her $a, b \in H$ için $ab^{-1} \in H$ dır.

İspat: ($\Rightarrow$): H bir genelleştirilmiş altgrup olsun. O zaman her $a, b \in H$ için $b^{-1} \in H$ ve $ab^{-1} \in H$ dır.

($\Leftarrow$): $H \neq \emptyset$ olmak üzere, her $a, b \in H$ için $ab^{-1} \in H$ olsun. Bu durumda $bb^{-1} = e(b) \in H$, $e(b)b^{-1} = b^{-1} \in H$ ve $ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$ olup H bir genelleştirilmiş gruptur. Dolayısıyla da bir genelleştirilmiş altgruptur.

Teorem 4.0.4. [24] $\{H_i \mid i \in I\}$, bir G genelleştirilmiş grubunun genelleştirilmiş altgruplarının bir ailesi ve $\bigcap_{i \in I} H_i \neq \emptyset$ olsun. Bu takdirde $H = \bigcap_{i \in I} H_i$, G nin bir genelleştirilmiş altgrubudur.

İspat: Önceki teorem gereğince herhangi $a, b \in H$ için $ab^{-1} \in H$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} a, b \in H &\Rightarrow \forall i \in I \text{ için } a, b \in H_i \\ &\Rightarrow \forall i \in I \text{ için } ab^{-1} \in H_i \text{ (çünkü her bir } H_i \text{ genelleştirilmiş altgrup)} \\ &\Rightarrow ab^{-1} \in H = \bigcap_{i \in I} H_i \end{aligned}$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Aşağıdaki örnek iki genelleştirilmiş altgrubun kesişiminin boş olabileceğini göstermektedir.

Örnek 4.0.3. [24] $G = IR \times (IR - \{0\}) \times IR$ kümesi, $(a, b, c)(d, e, f) = (bd, be, bf)$ çarpımı ile bir normal genelleştirilmiş gruptur. $H_1 = \{0\} \times \{1\} \times (IR - \{0\})$ ve $H_2 = (IR - \{0\}) \times \{1\} \times \{0\}$ kümeleri G 'nin çarpım işlemi ile genelleştirilmiş altgruplardır ve $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ dir.

Teorem 4.0.5. [24] Bir G genelleştirilmiş grubunda herhangi bir a elemanı için

$$G_a = \{x \in G : e(x) = e(a)\}$$

kümesi G nin bir genelleştirilmiş altgrubudur. Üstelik, G_a aslında bir gruptur.

İspat: Her $b, c \in G_a$ için $(bc)e(a) = (bc)e(c) = bc$ ve $e(a)(bc) = e(b)(bc) = bc$ eşitliklerini yazabiliriz. Buradan da $e(bc) = e(a)$ olduğu gelir. Diğer taraftan $e(c) = e(c^{-1})$ dir. Dolayısıyla $b, c^{-1} \in G_a$ olup $bc^{-1} \in G_a$ dır. Böylece G_a, G nin bir genelleştirilmiş altgrubudur. Ayrıca birim fonksiyon G_a üzerinde bir sabit fonksiyon olduğundan G_a aynı zamanda bir gruptur.

Tanım 4.0.4. [24] G ve H genelleştirilmiş gruplar olsun. $\eta : G \rightarrow H$ dönüşümü her $a, b \in G$ için $\eta(ab) = \eta(a)\eta(b)$ şartını sağlıyorsa η dönüşümüne G den H ya bir **genelleştirilmiş grup homomorfizmi** denir.

Örnek 4.0.4. [24] $G = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\})$ kümesi $(a, b)(c, d) = (bc, bd)$ çarpımı ile bir genelleştirilmiş gruptur. Herhangi bir $(a, b) \in G$ elemanı için birim eleman ve ters eleman sırasıyla $e(a, b) = (\frac{a}{b}, 1)$ ve $(a, b)^{-1} = (\frac{a}{b^2}, \frac{1}{b})$ şeklinde tanımlıdır.

$H = \mathbb{R}$ kümesi $ab = b$ çarpımı ile bir genelleştirilmiş gruptur. Herhangi bir $a \in H$ elemanı için birim eleman ve ters eleman sırasıyla $e(a) = a$ ve $a^{-1} = a$ şeklinde tanımlıdır.

Yukarıdaki gibi belirlenen G ve H genelleştirilmiş grupları arasında tanımlanan

$$\eta : G \rightarrow H$$

$$(a, b) \mapsto \frac{a}{b}$$

dönüşümü bir genelleştirilmiş grup homomorfizmidir.

Gerçekten, herhangi $(a, b), (c, d) \in G$ için

$$\eta((a, b)(c, d)) = \eta(bc, bd) = \frac{bc}{bd} = \frac{c}{d}$$

ve

$$\eta(a, b)\eta(c, d) = \frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{c}{d}$$

olup, $\eta((a, b)(c, d)) = \eta(a, b)\eta(c, d)$ olduğu görülür.

Teorem 4.0.6. [16] G ve H ayrık genelleştirilmiş gruplar ve $\eta : G \rightarrow H$ bir genelleştirilmiş grup homomorfizmi olsun. Bu takdirde

i) Her $a \in G$ için $\eta(e(a)) = e(\eta(a))$, H da birim elemandır.

ii) Her $a \in G$ için $\eta(a^{-1}) = [\eta(a)]^{-1}$.

iii) K, G nin bir genelleştirilmiş altgrubu ise $\eta(K)$ da H nın bir genelleştirilmiş altgrubudur.

iv) G bir normal genişletilmiş grup ise, o zaman

$$\{(e(a), \eta(a)) \mid a \in G\}$$

kümesi

$$(e(a), \eta(a))(e(b), \eta(b)) = (e(ab), \eta(ab))$$

çarpımı ile birlikte $\bigcup_{e(a) \in G} \eta(G_{e(a)})$ ile gösterilen bir genişletilmiş gruptur.

İspat:

i) Her $a \in G$ için, $\eta(e(a)) = e(\eta(a))$ ile tanımlanan $e(\eta(a))$ 'nın $\eta(a) \in H$ nin birimi olduğunu gösterelim. Bunun için $e(\eta(a))\eta(a) = \eta(a)e(\eta(a)) = \eta(a)$ eşitliğinin sağlandığını görmeliyiz.

$$e(\eta(a))\eta(a) = \eta(e(a))\eta(a) = \eta(e(a)a) = \eta(a)$$

ve

$$\eta(a)e(\eta(a)) = \eta(a)\eta(e(a)) = \eta(ae(a)) = \eta(a)$$

olup $\eta(e(a)) = e(\eta(a))$ H da bir birim elemandır, yani bir η genişletilmiş grup homomorfizmi birim elemanı birim elemana götürür.

ii)

$$\begin{aligned} \eta(a^{-1}) &= \eta(e(a^{-1})a^{-1}) \\ &= \eta(e(a)a^{-1}) \\ &= \eta(e(a))\eta(a^{-1}) \\ &= e(\eta(a))\eta(a^{-1}) \\ &= ([\eta(a)]^{-1}(\eta(a)))\eta(a^{-1}) \\ &= [\eta(a)]^{-1}(\eta(a)\eta(a^{-1})) \\ &= [\eta(a)]^{-1}\eta(aa^{-1}) \\ &= [\eta(a)]^{-1}\eta(e(a)) \\ &= [\eta(a)]^{-1}e(\eta(a)) \\ &= [\eta(a)]^{-1}e([\eta(a)]^{-1}) \\ &= [\eta(a)]^{-1} \end{aligned}$$

iii) $x, y \in \eta(K)$ alalım. $x, y \in \eta(K) \Rightarrow \eta(a) = x, \eta(b) = y$ olacak şekilde $\exists a, b \in K$ vardır. K genelleştirilmiş altgrup olduğundan $ab^{-1} \in K$ olup buradan

$$\eta(ab^{-1}) = \eta(a)\eta(b^{-1}) = \eta(a)[\eta(b)]^{-1} = xy^{-1} \in \eta(K)$$

dır. Bu da $\eta(K)$ nın, H nın bir genelleştirilmiş altgrubu olduğunu gösterir.

iv) Genelleştirilmiş grup koşullarını sağladığını gösterelim.

- Her bir $a, b, c \in G$ için

$$\begin{aligned} [(e(a), \eta(a))(e(b), \eta(b))](e(c), \eta(c)) &= (e(ab), \eta(ab))(e(c), \eta(c)) \\ &= (e(abc), \eta(abc)) \end{aligned} \quad (4.0.4)$$

ve

$$\begin{aligned} (e(a), \eta(a))[(e(b), \eta(b)), (e(c), \eta(c))] &= (e(a), \eta(a))(e(bc), \eta(bc)) \\ &= (e(abc), \eta(abc)) \end{aligned} \quad (4.0.5)$$

olup (4.0.4) ve (4.0.5) den

$$[(e(a), \eta(a))(e(b), \eta(b))](e(c), \eta(c)) = (e(a), \eta(a))[(e(b), \eta(b)), (e(c), \eta(c))]$$

elde edilir. Böylece birleşme özelliği sağlanır.

- $a \in G$ olmak üzere $(e(a), \eta(a)) \in \bigcup_{e(a) \in G} \eta(G_{e(a)})$ elemanı için birim eleman $e(e(a), \eta(a)) = (e(a), \eta(e(a)))$ ile tanımlı olup

$$(e(a), \eta(a))e(e(a), \eta(a)) = e(e(a), \eta(a))(e(a), \eta(a)) = (e(a), \eta(a))$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

- $a \in G$ olmak üzere $(e(a), \eta(a)) \in \bigcup_{e(a) \in G} \eta(G_{e(a)})$ elemanı için ters eleman $(e(a), \eta(a))^{-1} = (e(a), \eta(a^{-1}))$ ile tanımlı olup

$$(e(a), \eta(a))(e(a), \eta(a))^{-1} = (e(a), \eta(a))^{-1}(e(a), \eta(a)) = e(e(a), \eta(a))$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

Tanım 4.0.5. [24] $\eta : G \rightarrow H$ bir genelleştirilmiş grup homomorfizmi ve $a \in G$ olsun. Bu durumda η nin a daki çekirdeği $\ker \eta(a) = \{x \in G \mid \eta(x) = \eta(e(a))\}$ kümesidir.

Teorem 4.0.7. [24] G ve H birer genelleştirilmiş grup, $\eta : G \rightarrow H$ bir genelleştirilmiş grup homomorfizmi ve $a \in G$ olsun. Bu takdirde a' da η' nin çekirdeği $\ker\eta(a) = \{x \in G \mid \eta(x) = \eta(e(a))\}$ G' nin bir genelleştirilmiş altgrubudur. Ayrıca η bire-birdir gerek ve yeter şart her $a \in G$ için $\ker\eta(a) = \{e(a)\}$ dır.

İspat: $x, y \in \ker\eta(a)$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}\eta(xy^{-1}) &= \eta(x)(\eta(y))^{-1} = \eta(e(a))(\eta(e(a)))^{-1} \\ &= \eta(e(a))\eta(e(a)^{-1}) = \eta(e(a))\eta(e(a)) \\ &= \eta(e(a))\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $xy^{-1} \in \ker\eta(a)$ dır.

İkinci olarak η bire-bir olsun. Bu takdirde her $a \in G$ için $\ker\eta(a) = \{e(a)\}$ dır. Şimdi de $\ker\eta(a) = \{e(a)\}$ ise η' nin bire-bir olduğunu gösterelim. $\eta(x) = \eta(y)$ olsun. Bu takdirde $\eta(x)\eta(y^{-1}) = \eta(y)\eta(y^{-1}) = \eta(e(y))$ olup buradan $\eta(xy^{-1}) = \eta(e(y))$ gelir. $\ker\eta(y) = \{e(y)\}$ olduğundan

$$xy^{-1} = e(y) = e(y^{-1}) \quad (4.0.6)$$

elde edilir. Benzer şekilde $\eta(y^{-1}x) = \eta(e(y))$ dir. Dolayısıyla

$$y^{-1}x = e(y) = e(y^{-1}) \quad (4.0.7)$$

olup buradan (4.0.6) ve (4.0.7) aracılığıyla $x = ((y^{-1}))^{-1} = y$ bulunur.

Teorem 4.0.8. [24] G , birim elemanı e olan bir grup ve $\eta : G \rightarrow H$ bir genelleştirilmiş grup homomorfizmi olsun. Bu takdirde $\eta(G)$, $H_{\eta(e)}$ nin bir genelleştirilmiş altgrubudur. Aslında $\eta(G)$ bir gruptur.

İspat: Eğer $z \in \eta(G)$ ise $\eta(a) = z$ olacak şekilde $a \in G$ vardır. Böylece $z\eta(e) = \eta(a)\eta(e) = \eta(ae) = \eta(a) = z$ ve $\eta(e)z = \eta(e)\eta(a) = \eta(ea) = \eta(a) = z$ dir. Böylece $e(z) = \eta(e)$ gelir. Dolayısıyla $z \in H_{\eta(e)}$ dir.

Tanım 4.0.6. [24] G bir genelleştirilmiş grup ve $N \leq G$ olsun. Her $a \in G$ için, $G_a = \{g \in G \mid e(g) = e(a)\}$, $N_a = N \cap G_a$ ve $\eta_a = \eta|_{G_a}$ olmak üzere eğer $N_a = \emptyset$ yada $N_a = \ker(\eta_a)$ olacak şekilde bir E genelleştirilmiş grubu ve bir $\eta : G \rightarrow E$ genelleştirilmiş grup homomorfizmi varsa N' ye bir **genelleştirilmiş normal altgrup** denir.

Örnek 4.0.5. [24] Örnek 4.0.4 de verilen G genelleştirilmiş grubunu gözönüne alalım. Bu takdirde, $N = \{(a,b) \mid a = b \text{ veya } a = 3b\}$ kümesi G' nin bir genelleştirilmiş normal alt grubudur. Tanımda geçen E genelleştirilmiş grubu G olarak alınır ve $\eta : G \rightarrow E = G$ genelleştirilmiş grup homomorfizmi $\eta(a,b) = (\frac{a}{b}, 1)$ şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.0.9. [24] G bir normal genelleştirilmiş grup ve $N \trianglelefteq G$ olsun. Bu takdirde $G/N = \bigcup_{a \in G} G_a/N_a$ kümesi

$$: G/N \times G/N \rightarrow G/N, (xN_a, yN_b) \mapsto (xy)N_{ab}$$

çarpımı ile bir normal genelleştirilmiş gruptur.

İspat: G/N nin tanımına dikkat edildiğinde, eğer $G_a = G_b$ ise $N_a = N_b$ olduğu, ve dolayısıyla $G_a/N_a = G_b/N_b$ olduğu görülür. Bu sebeple G/N birleşimi, ayrık G_a ' lar üzerinden alınabilir. Şimdi çarpımın iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $\eta : G \rightarrow E, N'$ ye karşılık gelen genelleştirilmiş grup homomorfizmi olsun. Bu takdirde $a \in G$ olmak üzere $N_a = \ker \eta_a$ ve $N_a \neq \emptyset$ dir. Eğer $x_1N_a = x_2N_a$ ve $y_1N_b = y_2N_b$ ise o zaman en az bir $n_a \in N_a$ ve $n_b \in N_b$ vardır öyle ki $x_1 = x_2n_a$ ve $y_1 = y_2n_b$ dir. G bir normal genelleştirilmiş grup olduğundan $i = 1, 2$ için $e(x_iy_i) = e(x_i)e(y_i) = e(a)e(b) = e(ab)$ dir. Dolayısıyla $x_1, x_2, y_1, y_2 \in G_{ab}$ olup

$$\begin{aligned} \eta_{ab}(x_1, y_1) &= \eta(x_2n_a, y_2n_b) \\ &= \eta(x_2)\eta(n_a)\eta(y_2)\eta(n_b) \\ &= \eta(x_2)\eta(e(a))\eta(y_2)\eta(e(b)) \\ &= \eta(x_2e(a))\eta(y_2e(a)) \\ &= \eta(x_2)\eta(y_2) \\ &= \eta_{ab}(x_2y_2) \end{aligned}$$

dir. Buradan $x_1y_1\ker \eta_{ab} = x_2y_2\ker \eta_{ab}$ ya da $x_1y_1N_{ab} = x_2y_2N_{ab}$ olur.

Şimdi $e(xN_a) = e(x)N_a$ olduğunu gösterelim. $(xN_a)(yN_b) = (yN_b)(xN_a) = xN_a$ olsun. Böylece $e(b)e(a) = e(ba) = e(a) = e(ab) = e(a)e(b)$ dir. Buradan da $e(b) = e(e(a)) = e(a)$ ve $N_a = N_b$ bulunur. Ayrıca G_a/N_b , yegane $e(x)N_a = e(a)N_a$ birimi ile bir gruptur. Dolayısıyla $yN_b = yN_a = e(x)N_a$ dir. İspatın diğer ayrıntıları kolayca gösterilebilir.

G/N genelleştirilmiş grubuna **faktör genelleştirilmiş grubu** veya **bölüm genelleştirilmiş grubu** denir.

Tanım 4.0.7. [16] G ve H genelleştirilmiş gruplarının çarpımı $G \times H = \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}$ kümesidir.

Teorem 4.0.10. [16] G ve H genelleştirilmiş gruplarının $G \times H = \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}$ çarpımı

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$$

şeklinde tanımlanan çarpım işlemi ile bir genelleştirilmiş gruptur.

İspat: Çarpım işleminin kapalı ve birleşimli olduğu açıktır. Ayrıca bir $(g, h) \in G \times H$ elemanı için birim eleman $e(g, h) = (e_G(g), e_H(h))$ ve ters eleman $(g, h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$ ile tanımlanır. Bu tanımlamalarla genelleştirilmiş grup tanımındaki (ii) ve (iii) aksiyomlarının sağlandığı kolayca gösterilir.



5. ESNEK GENELLEŞTİRİLMİŞ GRUPLAR

Bu bölümde Molodtsov tarafından verilen esnek küme teorisi ile Molaei tarafından verilen genelleştirilmiş grup kavramını birleştirerek esnek genelleştirilmiş grup kavramını tanımlıyoruz. Ayrıca bu kavram ile ilgili bazı sonuçlar elde ediyoruz. Notasyon karmaşıklığından kurtulmak için bu bölümde bir G genelleştirilmiş grubu üzerinde bir esnek kümeyi (F, A) ile göstereceğiz.

Tanım 5.0.1. (F, A) , bir G genelleştirilmiş grubu üzerinde bir esnek küme olsun. Her $a \in A$ için $F(a)$, G nin bir genelleştirilmiş altgrubu oluyorsa (F, A) ya G üzerinde bir **esnek genelleştirilmiş grup** adı verilir.

Örnek 5.0.1. Örnek 4.0.4 ten $G = \mathbb{R}$, $ab = b$ çarpma işlemi ile bir genelleştirilmiş gruptur. Birim eleman her $a \in \mathbb{R}$ için $e(a) = a$ ve ters eleman $a^{-1} = a$ şeklindedir. Parametrelerin kümesi olarak $E = \mathbb{N}^+$ yı alalım. $G = \mathbb{R}$ üzerinde $(F, E) = (F, \mathbb{N}^+)$ esnek kümesini her $n \in \mathbb{N}^+$ için

$$F(1) = \{1\}$$

$$F(2) = \{1, 2\}$$

•
•
•

şeklinde tanımlayalım. Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $F(n)$ kümesinin $ab = b$ çarpma işlemine göre $G = \mathbb{R}$ nin bir genelleştirilmiş altgrubu olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece $(F, \mathbb{N}^+)$ esnek kümesi, $G = \mathbb{R}$ üzerinde bir esnek genelleştirilmiş gruptur.

Tanım 5.0.2. Bir G genelleştirilmiş grubu üzerinde (F, A) ve (H, B) esnek genelleştirilmiş grupları verildiğinde

i) $B \subset A$,

ii) Her $b \in B$ için $H(b) \leq F(b)$

aksiyomları gerçekleşiyorsa (H, B) ye (F, A) nın bir **esnek genelleştirilmiş altgrubu** adı verilir ve $(H, B) \widetilde{\leq} (F, A)$ yazılır.

Örnek 5.0.2. Örnek 4.0.4 teki $ab = b$ çarpma işlemi ile tanımlanan $G = \mathbb{R}$ genelleştirilmiş grubunu ve $G = \mathbb{R}$ üzerinde yukarıda verilen örnekteki gibi tanımlanan $(F, A = \mathbb{N}^+)$ esnek

genelleştirilmiş grubunu göz önüne alalım. $G = \mathbb{R}$ üzerinde ikinci bir esnek genelleştirilmiş grup için B parametre kümesi olarak tek doğal sayıların kümesini düşünelim. Bu takdirde her $n \in B$ için

$$\begin{aligned} H(1) &= \{1\} \\ H(3) &= \{3\} \\ &\bullet \\ &\bullet \\ &\bullet \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan (H, B) esnek kümesi de açıkça aşikâr esnek genelleştirilmiş grup adı verilen bir esnek genelleştirilmiş gruptur.

Bu şekilde tanımlanan (F, A) ve (H, B) esnek genelleştirilmiş grupları için $B \subseteq A$ ve her $b \in B$ için $H(b) \leq F(b)$ olduğundan (H, B) , (F, A) nın bir esnek genelleştirilmiş altgrubudur, yani $(H, B) \widetilde{\leq} (F, A)$ dir.

Önerme 5.0.1. Bir G genelleştirilmiş grubu üzerinde iki esnek genelleştirilmiş grup (F, A) ve (H, A) olsun. Bu takdirde $(F, A) \widetilde{\cap} (H, A)$ esnek genelleştirilmiş gruptur.

İspat: Esnek kesişim tanımından yararlanacağız. $C = A \cap A = A$ olmak üzere $(F, A) \widetilde{\cap} (H, A) = (K, C) = (K, A)$ olup her $a \in C (= A)$ için $K(a) = F(a)$ veya $K(a) = H(a)$ dir.

Her $a \in A$ için $K(a)$ lar G nin genelleştirilmiş alt gruplarıdır. (F, A) ve (H, A) esnek genelleştirilmiş gruplar olduğundan her $a \in A$ için $K(a) = F(a) \leq G$ veya $K(a) = H(a) \leq G$ dir. Böylece $(F, A) \widetilde{\cap} (H, A)$ da bir esnek genelleştirilmiş gruptur.

Örnek 5.0.3. Örnek 4.0.4 deki $ab = b$ çarpma işlemi ile tanımlanan $G = \mathbb{R}$ genelleştirilmiş grubu üzerinde $A = B = \mathbb{N}^+$ parametre kümeleri olmak üzere $(F, \mathbb{N}^+)$ ve $(H, \mathbb{N}^+)$ esnek genelleştirilmiş grupları aşağıdaki gibi verilsin:

her $n \in \mathbb{N}^+$ için

$$\begin{array}{ll} F(1) = \{1\} & H(1) = \{1\} \\ F(2) = \{1, 2\} & H(2) = \{2\} \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{array}$$

Bu takdirde iki esnek kümenin esnek kesişimi tanımından $C = A \cap B = \mathbb{N}^+ \cap \mathbb{N}^+ = \mathbb{N}^+$ olup, $(F, \mathbb{N}^+) \widetilde{\cap} (H, \mathbb{N}^+) = (K, \mathbb{N}^+)$ dersek her $n \in C = \mathbb{N}^+$ için

$$\begin{array}{ccc}
K(1) = F(1) = \{1\} & & K(1) = H(1) = \{1\} \\
K(2) = F(2) = \{1, 2\} & & K(2) = H(2) = \{2\} \\
\bullet & \text{veya} & \bullet \\
\bullet & & \bullet \\
\bullet & & \bullet
\end{array}$$

dir. Her iki durumda da $n \in \mathbb{N}^+$ için $K(n) \leq G = \mathbb{R}$ olduğundan $(F, \mathbb{N}^+) \widetilde{\cap} (H, \mathbb{N}^+)$ esnek kümesi $G = \mathbb{R}$ üzerinde bir esnek genelleştirilmiş gruptur.

Önerme 5.0.2. Bir G genelleştirilmiş grubu üzerinde herhangi iki (F, A) ve (H, B) esnek genelleştirilmiş grubu için $A \cap B = \emptyset$ ise $(F, A) \widetilde{\cup} (H, B)$ de bir esnek genelleştirilmiş gruptur.

İspat: İspat için esnek birleşim tanımından yararlanacağız. $C = A \cup B$ olmak üzere $(F, A) \widetilde{\cup} (H, B) = (K, C)$ diyelim. $A \cap B = \emptyset$ olduğundan esnek birleşim tanımından her $a \in C$ için $a \in A - B = A$ veya $a \in B - A = B$ dir. Bu takdirde (F, A) ve (H, B) iki esnek genelleştirilmiş grup olduğundan her $a \in C$ için eğer $a \in A - B = A$ ise $K(a) = F(a) \leq G$ ve eğer $a \in B - A = B$ ise $K(a) = H(a) \leq G$ dir. Dolayısıyla $(F, A) \widetilde{\cup} (H, B)$ bir esnek genelleştirilmiş gruptur.

Örnek 5.0.4. Örnek 4.0.4 teki $ab = b$ çarpma işlemi ile tanımlanan $G = \mathbb{R}$ genelleştirilmiş grubunu ele alalım. A ve B parametre kümeleri sırasıyla çift ve tek doğal sayıların kümesi olmak üzere $G = \mathbb{R}$ üzerinde her $n \in A$ için

$$\begin{array}{l}
F(2) = \{1, 2\} \\
F(4) = \{1, 2, 3, 4\} \\
\bullet \\
\bullet \\
\bullet
\end{array}$$

ve her $n \in B$ için

$$\begin{array}{l}
H(1) = \{1\} \\
H(3) = \{3\} \\
\bullet \\
\bullet \\
\bullet
\end{array}$$

şeklinde tanımlanan (F, A) ve (H, B) esnek kümeleri birer esnek genelleştirilmiş gruptur. Ayrıca açıkça $A \cap B = \emptyset$ ve $A \cup B = \mathbb{N}^+$ dir. $(F, A) \widetilde{\cup} (H, B) = (K, \mathbb{N}^+)$ diyelim. Her $n \in \mathbb{N}^+$ için eğer $n \in A - B = A$ ise $K(n) = F(n) \leq G$ ve $n \in B - A = B$ ise $K(n) = H(n) \leq G$ dir. Sonuç olarak, $(F, A) \widetilde{\cup} (H, B)$ esnek kümesi de $G = \mathbb{R}$ üzerinde bir esnek genelleştirilmiş gruptur.

Teorem 5.0.1. G genelleştirilmiş grubu üzerinde iki esnek genelleştirilmiş grup (F, A) ve (H, B) olsun. Eğer herhangi $x \in A$ ve $y \in B$ için $F(x) \cap H(y) \neq \emptyset$ ise $(F, A) \widetilde{\cap} (H, B)$ bir esnek genelleştirilmiş gruptur.

İspat: Herhangi $x \in A$ ve $y \in B$ için $F(x) \cap H(y) \neq \emptyset$ olsun. Tanım 2.0.10 dan her (x, y) parametre çifti için $K(x, y) = F(x) \cap H(y)$ olmak üzere, $(F, A) \widetilde{\wedge} (H, B) = (K, A \times B)$ yazalım. $F(x) \leq G$ ve $H(y) \leq G$ olduğundan Teorem 4.0.4 den dolayı $F(x) \cap H(y)$ kesişimi G nin bir genelleştirilmiş altgrubudur, yani her (x, y) parametre çifti için $K(x, y) = F(x) \cap H(y) \leq G$ olup buradan $(F, A) \widetilde{\wedge} (H, B)$, G üzerinde bir esnek genelleştirilmiş gruptur.

Teorem 5.0.2. Bir G genelleştirilmiş grubu üzerinde bir esnek genelleştirilmiş grup (F, A) ve (F, A) nın esnek genelleştirilmiş altgruplarının bir ailesi $\{(H_i, B_i)\}_{i \in I}$ olsun. Bu takdirde, $B = \bigcap_{i \in I} B_i$ olmak üzere eğer her $b \in B$ için $\bigcap_{i \in I} H_i(b) \neq \emptyset$ ise $\bigcap_{i \in I} (H_i, B_i)$ esnek kesişimi de (F, A) nın bir esnek genelleştirilmiş altgrubudur.

İspat: Her bir i indisi için $B_i \subset A$ olduğundan, $B = \bigcap_{i \in I} B_i \subset A$ dır. Dolayısıyla esnek genelleştirilmiş altgrup tanımındaki ilk şartın sağlandığı açıktır. Her bir i indisi için $(H_i, B_i) \widetilde{\leq} (F, A)$ olduğundan, verilen her $b \in B$ parametresi için $H_i(b) \leq F(b)$ dir. $\bigcap_{i \in I} H_i(b) \neq \emptyset$ olduğundan, Teorem 4.0.4 ten dolayı $\bigcap_{i \in I} H_i(b) \leq F(b)$ dir, yani bir genelleştirilmiş altgruptur. Buradan esnek genelleştirilmiş altgrup tanımındaki ikinci şart da sağlanır. Böylece $\bigcap_{i \in I} (H_i, B_i)$ esnek kesişimi (F, A) nın bir esnek genelleştirilmiş altgrubudur.

Tanım 5.0.3. (F, A) , bir G genelleştirilmiş grubu üzerinde bir esnek genelleştirilmiş grup olsun. Eğer her bir $a \in A$ için $F(a)$ lar G nin (tüm elemanları için bir tek durumdaki) birim elemanlarından oluşuyorsa (F, A) ya G genelleştirilmiş grubu üzerinde **birim esnek genelleştirilmiş grup** adı verilir, yani, her a parametresi için

$$(F, A) = \bigcup_{g \in G} \{e(g)\}$$

ise (F, A) birim esnek genelleştirilmiş gruptur.

Tanım 5.0.4. (F, A) , bir G genelleştirilmiş grubu üzerinde bir esnek genelleştirilmiş grup olsun. Her $a \in A$ için $F(a) = G$ oluyorsa (F, A) ya **mutlak esnek genelleştirilmiş grup** adı verilir.

Teorem 5.0.3. $\eta : G \rightarrow K$ dönüşümü bir genelleştirilmiş grup homomorfizmi olsun. Bu takdirde,

- i) (F, A) , G üzerinde bir esnek genelleştirilmiş grup olmak üzere, her $a \in A$ ve her $g \in G$ için $F(a) = \ker \eta(g)$ ise $(\eta(F), A)$, K üzerinde birim esnek genelleştirilmiş gruptur.
- ii) (F, A) , G üzerinde mutlak esnek genelleştirilmiş grup ise $(\eta(F), A)$ da K üzerinde bir mutlak esnek genelleştirilmiş gruptur.

İspat:

- i) Her bir $a \in A$ parametresi ve $g \in G$ için $F(a) = \ker \eta(g)$ olsun. Bu takdirde açıkça $F(a) \leq G$ genelleştirilmiş altgrubu, görüntüsü $\eta(e(g))$ ye eşit olan $h \in G$ elemanlarından oluşur, yani $F(a) = \{h \in G \mid \eta(h) = \eta(e(g))\}$ dir. η bir genelleştirilmiş grup homomorfizmi olduğundan, G nin birim elemanlarını K nin birim elemanlarına dönüştürür. Dolayısıyla her bir $g \in G$ için $\eta(e(g))$ görüntüsü K genelleştirilmiş grubunun bir birim elemanına karşılık gelir, yani $F(a) = \{h \in G \mid \eta(h) = e(k), \exists k \in K\}$ yazabiliriz. Bu kümenin η altındaki görünüsünü düşünersek $\eta(F(a)) = \{e(k) \in K \mid k \in K\}$ elde edilir. Bu da $(\eta(F), A)$ nin K üzerinde birim esnek genelleştirilmiş grup olması demektir.
- ii) (F, A) , G genelleştirilmiş grubu üzerinde mutlak esnek genelleştirilmiş grup olduğu için her $a \in A$ için $F(a) = G$ dir. Buradan her $a \in A$ için $(\eta(F))(a) = \eta(F(a)) = \eta(G) = K$ elde edilir. Böylece Tanım 5.0.4 den $(\eta(F), A)$ da K üzerinde mutlak esnek genelleştirilmiş gruptur.

Tanım 5.0.5. (F, A) ve (H, B) sırasıyla G ve K genelleştirilmiş grupları üzerinde esnek genelleştirilmiş gruplar olsun. $\eta : G \rightarrow K$ ve $g : A \rightarrow B$ dönüşümleri aşağıdaki şartları sağlıyorsa $(\eta, g) : (F, A) \rightarrow (H, B)$ ikilisine **esnek genelleştirilmiş grup homomorfizmi** denir.

- i) $\eta : G \rightarrow K$ örten genelleştirilmiş grup homomorfizmi,
- ii) $g : A \rightarrow B$ örten dönüşüm,
- iii) Her $a \in A$ için $\eta(F(a)) = H(g(a))$.

Bu takdirde (F, A) ve (H, B) esnek genelleştirilmiş gruplarına esnek genelleştirilmiş homomorftur deriz ve $(F, A) \sim (H, B)$ ile gösteririz.

Teorem 5.0.4. (F, A) ve (H, B) , G genelleştirilmiş grubu üzerinde esnek genelleştirilmiş gruplar ve $(F, A) \widetilde{\leq} (H, B)$ olsun. $\eta : G \rightarrow K$ genelleştirilmiş grup homomorfizmi ise $(\eta(F), A)$ ve $(\eta(H), B)$, K genelleştirilmiş grubu üzerinde esnek genelleştirilmiş gruplardır ve $(\eta(F), A) \widetilde{\leq} (\eta(H), B)$ dir.

İspat: $\eta : G \rightarrow K$ bir genelleştirilmiş grup homomorfizmi olduğundan her $x \in A$ ve her $y \in B$ için $\eta(F(x))$ ve $\eta(H(y))$, K nin genelleştirilmiş alt gruplarıdır. Dolayısıyla $(\eta(F), A)$ ve $(\eta(H), B)$, K üzerinde birer esnek genelleştirilmiş gruptur. Diğer taraftan $(F, A) \widetilde{\leq} (H, B)$ ise Tanım 5.0.2 den her $x \in A$ için $F(x) \leq H(x)$ ve $\eta(F(x)) \leq \eta(H(x))$ dir. Böylece $(\eta(F), A) \widetilde{\leq} (\eta(H), B)$ dir.

Tanım 5.0.6. (F,A) , G genelleştirilmiş grubu üzerinde bir esnek genelleştirilmiş grup ve $(H,B) \widetilde{\leq} (F,A)$ olsun. Her $x \in B$ için $H(x) \trianglelefteq F(x)$ oluyorsa (H,B) ye (F,A) nın **esnek genelleştirilmiş normal altgrubu** deriz ve $(H,B) \widetilde{\leq} (F,A)$ ile gösteririz.

Teorem 5.0.5. Bir G genelleştirilmiş grubu üzerinde bir esnek genelleştirilmiş grup (F,A) ve (F,A) nın esnek genelleştirilmiş normal altgruplarının boştan farklı bir kolleksiyonu $\{(H_i, B_i)\}_{i \in I}$ olsun. Bu takdirde, $B = \bigcap_{i \in I} B_i$ olmak üzere eğer her $b \in B$ için $\bigcap_{i \in I} H_i(b) \neq \emptyset$ ise $\bigcap_{i \in I} (H_i, B_i)$ esnek kesişimi de (F,A) nın bir esnek genelleştirilmiş normal alt grubudur.

İspat: Her bir $i \in I$ için $B_i \subset A$ olduğundan açıkça $B = \bigcap_{i \in I} B_i \subset A$ dır. Her bir i indisi için $(H_i, B_i) \widetilde{\leq} (F,A)$ olduğundan, verilen her $b \in B$ parametresi için $H_i(b) \trianglelefteq F(b)$ dir. $\bigcap_{i \in I} H_i(b) \neq \emptyset$ olduğundan $\bigcap_{i \in I} H_i(b) \trianglelefteq F(b)$ dir, yani bir genelleştirilmiş normal altgruptur. Böylece $\bigcap_{i \in I} (H_i, B_i)$ esnek kesişimi (F,A) nın bir esnek genelleştirilmiş normal alt grubudur.

Tanım 5.0.7. G üzerinde (F,A) ve K üzerinde (H,B) (esnek boş olmayan) esnek genelleştirilmiş grupları verildiğinde (F,A) ve (H,B) nin $(F,A) \times (H,B) = (T, A \times B)$ çarpımı her $(x,y) \in A \times B$ için

$$T(x,y) = F(x) \times H(y)$$

şeklinde tanımlıdır.

Önerme 5.0.3. Yukarıdaki gibi tanımlanan $(T, A \times B) = (F,A) \times (H,B)$ çarpımı $G \times K$ üzerinde bir esnek genelleştirilmiş gruptur.

İspat: Öncelikle $G \times K$ nın, ayrıntıları Teorem 4.0.10 deki gibi olan bir genelleştirilmiş grup olduğunu belirtelim. Tanım 5.0.7 den $(T, A \times B) = (F,A) \times (H,B)$ çarpımı her (x,y) parametre çifti için $T(x,y) = F(x) \times H(y)$ şeklinde tanımlıdır. (F,A) ve (H,B) esnek boş olmayan birer esnek genelleştirilmiş grup olduğundan her $(x,y) \in A \times B$ için $T(x,y) = F(x) \times H(y) \neq \emptyset$ dir, çünkü $F(x) \neq \emptyset$ ve $H(y) \neq \emptyset$ dir. Göstermemiz gereken, her (x,y) parametre çifti için $F(x) \times H(y) \leq G \times K$ olup olmadığıdır. Her $x \in A$ için $F(x) \leq G$ olduğundan herhangi $g_1, g_2 \in F(x)$ için $g_1 g_2^{-1} \in F(x)$ dir. Benzer şekilde her $y \in B$ için $H(y) \leq K$ olduğundan herhangi $k_1, k_2 \in H(y)$ için $k_1 k_2^{-1} \in H(y)$ dir. $F(x) \times H(y)$ kartezyen çarpım kümesinin herhangi iki $(g_1, k_1), (g_2, k_2)$ elemanı için

$$\begin{aligned} (g_1, k_1) \cdot (g_2, k_2)^{-1} &= (g_1, k_1) \cdot (g_2^{-1}, k_2^{-1}) \\ &= (g_1 g_2^{-1}, k_1 k_2^{-1}) \end{aligned}$$

olup $g_1 g_2^{-1} \in F(x)$ ve $k_1 k_2^{-1} \in H(y)$ olduğundan $(g_1 g_2^{-1}, k_1 k_2^{-1}) \in F(x) \times H(y)$ bulunur. Yani her $(x, y) \in A \times B$ için $F(x) \times H(y) \leq G \times K$ dir. Dolayısıyla $(F, A) \times (H, B)$, $G \times K$ üzerinde bir esnek genelleştirilmiş gruptur. Böylece ispat tamamlanır.



6. SONUÇ

Bu tez çalışmasında Molodtsov tarafından ortaya koyulan esnek küme teorisi ile Molaei tarafından tanımlanan geliştirilmiş grup kavramı birleştirilerek esnek geliştirilmiş grup kavramı tanımlanmıştır. Bu amaçla, Bölüm 2’ de esnek küme teorisi ile ilgili temel bilgiler sunulmuştur. Bölüm 3’ te Aktaş ve Çağman tarafından esnek küme teorisinin cebir alanına uygulandığı esnek grup kavramı ile ilgili temel tanım ve sonuçlar ele alındı. Bölüm 4 ise Molaei tarafından tanımlanan geliştirilmiş grup kavramı ve onunla ilgili temel sonuçlara ayrılmıştır. Tezin orijinal kısmı olan son bölümde esnek geliştirilmiş grup kavramı tanımlanarak esnek gruplar için geçerli olan sonuçlar esnek geliştirilmiş gruplar açısından incelenmiştir.



KAYNAKLAR

- [1] **Molodtsov, D.** (1999). Soft set theory-First results, *Computers & Mathematics with Applications*, 37(4-5), 19–31.
- [2] **Pawlak, Z.** (1982). Rough sets, *International Journal of Computer and Information Sciences*, 11(5), 341–356.
- [3] **Zadeh, L.A.** (1965). Fuzzy sets, *Information and Control*, 8, 338–353.
- [4] **Aktaş, H. ve Çağman, N.** (2007). Soft sets and soft groups, *Information Sciences*, 177(13), 2726–2735.
- [5] **Ali, M.I., Feng, F., Liu, X., Min, W.K. ve Shabir, M.** (2009). On some new operations in soft set theory, *Computers & Mathematics with Applications*, 57(9), 1547–1553.
- [6] **Babitha, K.V. ve Sunil, J.J.** (2010). Soft set relations and functions, *Computers & Mathematics with Applications*, 60(7), 1840–1849.
- [7] **Oğuz, G., Gürsoy, M.H. ve Icen, I.** (2019). On soft topological categories, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 48(6), 1675–1681.
- [8] **Kharal, A. ve Ahmad, B.** (2011). Mappings on soft classes, *New Mathematics and Natural Computation*, 7(3), 471–481.
- [9] **Maji, P.K., Biswas, R. ve Roy, A.R.** (2003). Soft set theory, *Computers & Mathematics with Applications*, 45(4-5), 555–562.
- [10] **Oguz, G., Icen, I. ve Gürsoy, M.H.** (2020). A new concept in the soft theory: soft groupoids, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 44(4), 555–565.
- [11] **Shabir, M. ve Naz, M.** (2011). On soft topological spaces, *Computers & Mathematics with Applications*, 61(7), 1786–1799.
- [12] **Penrose, R. ve Rindler, W.** (1984). *Spinors and space-time*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge.
- [13] **Santilli, R.M.** (1998). Isominkowskian geometry for the gravitational treatment of matter and its isodual for antimatter, *International Journal of Modern Physics D*, 7(3), 351–407.
- [14] **Molaei, M.R.** (1999). Generalized groups, *Buletinul Institutului Politehnic din Iași. Secția I. Matematică. Mecanică Teoretică. Fizică*, 65, 21–24.
- [15] **Ahmadi, S.A.** (2013). Generalized topological groups and genetic recombination, *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 11(1-2), 51–58.
- [16] **Akinmoyewa, J.T.** (2009). A study of some properties of generalized groups, *Octagon Mathematical Magazine*, 17(2), 599–626.
- [17] **Araújo, J. ve Konieczny, J.** (2004). Molaei's generalized groups are completely simple semigroups, *Buletinul Institutului Polithnic Din Iasi*, 52, 1–5.

- [18] **Farhangdoost, M.R.** (2011). Action of generalized Lie groups on manifolds, *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 80(2), 221–227.
- [19] **Ghane, F.H. ve Hamed, Z.** (2010). Upper topological generalized groups, *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 27, 321–332.
- [20] **Gürsoy, M.H.** (2018). Bundles of topological generalized groups, *Analele Universității din Oradea. Fascicola Matematică*, 25(2), 115–119.
- [21] **Molaei, M.R.** (2005). *Generalized structures based on completely simple semigroups*, Hadronic Press, Florida, USA.
- [22] **Fatehi, F. ve Molaei, M.R.** (2012). On completely simple semigroups, *Acta Mathematica. Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis*, 28(2), 95–102.
- [23] **Molaei, M.R.** (1999). Generalized actions, *In: Proceedings of the First International Conference on Geometry, Integrability and Quantization*, Coral Press Scientific Publishing, Sofia, Bulgaria.
- [24] **Mehrabi, M., Molaei, M.R. ve Oloomi, A.** (2000). Generalized subgroups and homomorphisms, *Arab Journal of Mathematical Sciences*, 6(2), 1–7.
- [25] **Gürsoy, M.H., Aslan, H. ve İcen, I.** (2017). Generalized crossed modules and group-groupoids, *Turkish Journal of Mathematics*, 41(6), 1535–1551.
- [26] **Das, S. ve Samanta, S.K.** (2013). Soft metric, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 6(1), 77–94.
- [27] **Oguz, G., Icen, I. ve Gürsoy, M.H.** (2019). Actions of soft groups, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 68(1), 1163–1174.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Leyla KILINÇ

Doğum Tarihi ve Yeri : 12.04.1991, Malatya

E-Posta : leyla.4423@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2014, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

**YÜKSEK LİSANS TEZİNDEN TÜRETİLEN ÇALIŞMALAR (Makaleler,
Bildiriler, Patentler v.b.)**