



**T. C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ESNEK İKİLİ PARÇALI İŞLEMLER VE ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EDA YAVUZ

OCAK

EDA YAVUZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

OCAK 2024

ESNEK İKİLİ PARÇALI İŞLEMLER VE ÖZELLİKLERİ

Eda YAVUZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman
Prof. Dr. Ashhan SEZGİN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2024

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Eda YAVUZ tarafından hazırlanan “Esnek İkili Parçalı İşlemler ve Özellikleri” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Prof. Dr. Naim ÇAĞMAN

Matematik Anabilim Dalı, Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Tahir COŞGUN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 22/01/2024

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

(İmza)

Eda YAVUZ

(Tarih)

ESNEK İKİLİ PARÇALI İŞLEMLER VE ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Eda YAVUZ

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2024

ÖZET

Yüksek lisans tez çalışması, 1999 yılında Molodtsov tarafından belirsizliği modellemek için ortaya atılan esnek küme teorisi üzerinedir. Tezde yeni pek çok esnek ikili parçalı işlemler tanımlanmış, işlemlerin özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiş ve bu işlemlerin U evreni üzerindeki esnek kümeler kümesi ve sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde, hangi cebirsel yapılar oluşturdukları tüm ayrıntılarıyla sunulmuştur.

On bölümden oluşan bu çalışmada birinci bölümde esnek kümeler, esnek işlemler ve cebirsel yapılar ile ilgili literatürde yer alan çalışmalara değinilmiştir. İkinci bölümde, bu tez çalışmasında kullanılacak olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde esnek ikili parçalı kesişim işlemi, dördüncü bölümde esnek ikili parçalı birleşim işlemi, beşinci bölümde esnek ikili parçalı artı işlemi, altıncı bölümde esnek ikili parçalı gamma işlemi, yedinci bölümde esnek ikili parçalı lamda işlemi, sekizinci bölümde esnek ikili parçalı yıldız işlemi, dokuzuncu bölümde esnek ikili parçalı teta işlemi tanıtılmış, örneği verilmiş, bu işlemlerin tüm özellikleri ayrıntılı şekilde incelenmiştir. Bu işlemlerin diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkilerine bakmak adına, bu yeni esnek küme işlemlerinin; diğer esnek küme işlemlerinden olan, kısıtlanmış, genişletilmiş ve esnek ikili parçalı işlemler üzerine dağılma kurallarına bakılmıştır. İşlemlerimizin cebirsel özellikleri ve dağılma kuralları göz önünde bulundurularak, bu işlemlerle birlikte esnek kümeler kümesinin hangi cebirsel yapılar oluşturduğuna bakılmış; belli şartlar altında monoid, sınırlı yarı-kafes, grup, yarı-halka, yarı yakın halka, sağ yarı yakın-halka, hemihalka, sol-sağ sistem, sınırlı dağılmalı kafes, Bool Halkası; Bool cebiri, De Morgan Cebiri, Kleene Cebiri, Stone cebiri gibi çok çeşitli yapılar oluşturduğu sistematik bir şekilde gösterilmiştir. Son bölümde ise bu çalışmadan elde edilen sonuçlara yer verilmiş ve sonuçların önemi tartışılmıştır.

Sayfa Adedi	: 238
Anahtar Kelimeler	: Esnek Küme, Esnek Küme İşlemleri, Cebirsel Yapılar
Danışman	: Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

SOFT BINARY PIECEWISE OPERATIONS AND THEIR PROPERTIES

(M. Sc. Thesis)

Eda YAVUZ

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2024

ABSTRACT

This master's thesis is on soft set theory, introduced by Molodtsov in 1999 to model uncertainty. Many new soft binary piecewise operations are defined, their properties are thoroughly examined, and it is examined in full detail which algebraic structures these operations together with soft sets form in the set of soft sets over the universe U and in the set of soft sets with a fixed parameter

This study, consisting of ten sections, begins with the first chapter where the literature on soft sets, set operations, and algebraic structures are discussed. In the second section, fundamental definitions and theorems to be used in this thesis are provided. In the third section, soft binary piecewise intersection operation; in the fourth section, the soft binary piecewise union operation; in the fifth section, the soft binary piecewise addition operation; in the sixth section, the soft binary piecewise gamma operation; in the seventh section, the soft binary piecewise lambda operation; in the eighth section, the soft binary piecewise star operation; in the ninth section, and the soft binary piecewise theta operation are introduced, their examples are given, and all the properties of these operations are examined in detail. In order to obtain the relationships of these operations with other soft set operations, the distributions of these operations on other soft set operations such as restricted, extended and soft binary piecewise operations are explored. Considering the algebraic properties and distributive rules of the operations, it is shown that the set of soft sets together with these operations form a wide variety of algebraic structures such as monoid, bounded semi-lattice, group, semiring, hemiring, left-right system, zero-symmetric right seminearring, bounded distributive lattice, Boolean ring, Boolean algebra, De Morgan Algebra, Kleene Algebra and Stone algebra under certain conditions. In the conclusion section, the results obtained from this study are presented, and the significance of the results is discussed.

Number of pages	: 238
KeyWords	: Soft set, Soft set operations, Algebraic structures
Supervisor	: Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Gerek çalışmalarım ve gerekse çalışmalarım dışında her konuda varlığını hissettiğim, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenin fazlasını sunan her sorun yaşadığımda yanına çekinmeden gidebildiğim, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen, birlikte çalışmaktan keyif aldığım, onur duyduğum ve bir danışmanın çok ötesinde bilgisi, deneyimi ve bana kattıklarıyla yolumu aydınlatan değerli danışmanım Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN hocama teşekkürü bir borç bilir ve şükranlarımı sunuyorum.

Teşekkürlerin az kalacağı diğer üniversite hocalarımdan da bana 4 yıllık üniversite hayatım boyunca kazandırdıkları her şey için ve beni gelecekte söz sahibi yapacak bilgilerle donattıkları için hepsine teker teker teşekkürlerimi sunuyorum.

Son olarak hayattaki en büyük şansım olan desteklerini her an yanımda hissettiğim, varlıkları beni her daim cesaretlendiren kıymetli aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
1.GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER.....	10
2.1. Kümeler	10
2.2. Bazı Cebirsel Yapılar	15
2.3. Esnek Kümeler.....	20
3. ESNEK İKİLİ PARÇALI KESİŞİM İŞLEMİ	28
4. ESNEK İKİLİ PARÇALI BİRLEŞİM İŞLEMİ	69
5. ESNEK İKİLİ PARÇALI ARTI İŞLEMİ.....	101
6. ESNEK İKİLİ PARÇALI GAMMA İŞLEMİ.....	123
7. ESNEK İKİLİ PARÇALI LAMDA İŞLEMİ	158
8. ESNEK İKİLİ PARÇALI YILDIZ İŞLEMİ.....	183
9. ESNEK İKİLİ PARÇALI TETA İŞLEM	203
10. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	224
KAYNAKLAR	230
ÖZGEÇMİŞ	238

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
$\emptyset$	Boş küme
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
$\forall$	Evrensel niceleyici, her
$\exists$	Varlıksal niceleyici, en az bir
$\neq$	Eşit değildir
$\Rightarrow$	Gerek şart
$\Leftarrow$	Yeter şart
E	Parametre kümesi
U	Evrensel küme
$P(U)$	U nun kuvvet kümesi
(F,K)	(F,K) esnek kümesi
$(F,K)^r$	(F,K) esnek kümenin tümleyeni
$\emptyset_A$	A ya göre boş esnek küme
$\emptyset_E$	E ye göre boş esnek küme
U_A	A ya göre evrensel küme
U_E	Mutlak esnek küme
$\emptyset_\emptyset$	Boş esnek küme
$S_E(U)$	U üzerinde tanımlı tüm esnek kümelerin kümesi
$S_K(U)$	K kümesi üzerinde tanımlı tüm esnek kümelerin kümesi

+	Artı işlemi
λ	Lamda işlemi
θ	Teta işlemi
*	Yıldız işlemi
γ	Gamma işlemi



1.GİRİŞ

Günlük yaşamda karşılaştığımız bazı durumları açıklamak ve bu durumlar hakkında kesin yorum yapmak oldukça zordur. Bu durumların doğru, yanlış ya da kime göre doğru veya kime göre yanlış olduğu zamana, ortama ve kişilere göre değişiklik göstermektedir. Her insanın günlük yaşamda kullandığı belirsizlik içeren ifadeler vardır. Güzel araba, yüksek hız, lezzetli yemek, kısa boy, genç kız, zor soru gibi kelimeler örnek olarak verilebilir. Belirsizlikler matematikle birlikte diğer bilim dallarını da etkilemektedir. Araştırmacılar biyoloji, sosyoloji, mühendislik, ekonomi, çevre bilimleri, tıp bilimleri ve daha birçok alanda karmaşık problemleri çözmeye çalışırken aynı zamanda belirsizliklerin modellemesiyle de uğraşmışlardır. Farklı türlerde ortaya çıkan bu belirsizliklerin klasik yöntemlerle modellenmesi her zaman mümkün değildir. Zaman geçtikçe etrafımızda bulunan belirsizlikleri giderebilmek ve modelleyebilmek için birçok farklı matematiksel teori ortaya atılmıştır.

Olasılık teorisi, aralık matematiği, sezgisel bulanık kümeler teorisi, bulanık kümeler teorisi gibi matematiksel teoriler belirsizliği açıklamak için kullanılabilir teorilerdir ancak bu teorilerin her birinin kendi içinde zorlukları vardır. Bu modellemelerin birçoğuna öncülük eden bulanık kümeler teorisi Zadeh (1965) tarafından ortaya atılmıştır. Bir bulanık küme üyelik fonksiyonu tarafından tanımlanmaktadır. Her bir önerme için bu fonksiyon $[0,1]$ aralığında bir gerçek sayı ile ilişkilendirilir. Bu gerçek sayı bulanık kümeye aidiyet derecesi olarak yorumlanır. Aitlik derecesi 1'e yaklaşırken artarken; 0'a yaklaşırken azalır. Eleman kümeye ait değilse aitlik değeri 0'a eşittir.

Üyelik fonksiyonunu belirlemek için tek yol olmadığından üyelik fonksiyonu doğası gereği son derece kişiseldir ve her özel durum için üyelik fonksiyonunun nasıl ayarlayacağı büyük bir sorun oluşturmıştır. Bu nedenle üyelik fonksiyonundan bağımsız bir kümeler teorisine ihtiyaç duyulmuştur. Molodtsov (1999) belirsizliği modellemek ve belirsizlik içeren problemlerde kullanmak için yeni bir yaklaşım olan Esnek Küme Teorisini ortaya atmıştır. Bu teori, üyelik fonksiyonun ayarlanma sorununu ortadan kaldırmış; dolayısıyla teorisinin birçok farklı alana kolayca uygulanmasını sağlamıştır (Molodtsov, 1999). Molodtsov esnek kümeler teorisini matematiğin birçok alanında başarı ile uygulamıştır. Bu alanlara oyun

teorisi, Reimann integrasyonu, Perron integrasyonu işlem araştırmaları, olasılık teorisi ölçüm teorisi örnek olarak verilebilir.

Esnek küme teorisinin, teori ortaya atıldığından itibaren en yoğun uygulama bulduğu alan, karar verme problemleridir. Maji, Roy ve Biswas (2002) esnek küme ve bulanık kümeyi birleştirip bulanık esnek küme ve daha sonrasında sezgisel bulanık esnek küme kavramını ortaya atmış, ayrıca çok aralık değerli bulanık esnek küme kavramını, tümleyen, birleşim, kesişim, ve, veya gibi temel işlemleri inceleyip karar verme probleminde uygulamışlardır. Chen, Tsang ve Yeung (2003), Maji ve diğerlerinin (2002) esnek kümelerin indirgeme sonucunun yanlış olduğunu ve indirgeme esnek küme tanımının uygun olmadığını belirtmişlerdir. Xioa, Li, Zhong ve Yang (2003) esnek kümelerde kullanılmak üzere yapay bir hesaplama yöntemi geliştirmiştir. Yang, Qu ve Li (2004) esnek kümeler ve yaklaşımlı esnek kümelere dayalı karar analizi çalışmasını yayımlamıştır. Chen, Kong, Zhong ve Ye (2005) esnek kümelerde parametre indirgemesi üzerine çalışmalar yapmıştır. Chen, Tsang, Yeung ve Wang (2005) parametreleştirme azaltmasının yeni bir tanımını kullanarak karar verme probleminde esnek küme uygulamasının geliştirmişlerdir. Xiao, Chen, Zhong ve Ye (2005) esnek küme teorisine dayalı bilgi tablosu oluşturularak esnek bilgi örüntülerinin tanınması; aynı zamanda farklı tanıma vektörlerine karşılık gelen çözümler önermişlerdir. Müsrif, Sengupta ve Ray (2006) sınıflandırmalarda, esnek küme teorisinin karar verme uygulamalarını kullanarak yeni bir algoritma sunmuşlardır. Herawan ve Deriş (2010) gripten şüphelenen hastaların karar vermesinde esnek küme teorisinin uygulanabilirliğini yapay bir veri seti üzerinden güncel esnek karar verme tekniklerine karşı niteliksel bir bakış açısı ile tartışıp sunmuşlardır. Ayrıca Herawan (2010) şüphelenilen hastaların veri kümesinden Boolean değerli bir bilgi sistemi aracılığıyla esnek kümeye dayalı karar verme sürecimizin genişletilmiş bir uygulamasını sunmuş ve esnek küme teorisini ve hastalarda maksimum semptomların birlikte ortaya çıkmasını kullanarak, esnek kümeye dayalı karar verme tekniğinin, vazgeçilebilir semptomların sayısını azaltmak ve ayrıca doğru ve hızlı bir karar vermek için nasıl kullanılabileceğini araştırmıştır. Çağman ve Enginoğlu (2010a) belirsizlik içeren problemlere uygulanabilecek esnek maksimum-minimum karar verme yöntemini oluşturmuşlar ve Çağman ve Enginoğlu (2010b), Molodtsov'un esnek küme işlemlerini daha işlevsel hale getirmek için işlemleri yeniden tanımlamışlar ve esnek kümelerin karar fonksiyonunun çarpımlarını göstermişlerdir. Jiang, Tang, Chen, Wang ve (2010), genişletilmiş bir esnek küme teorisi sunmuşlardır. Genişletilmiş esnek kümeler için

bazı işlemleri tanımlayarak bu işlemlerle ilgili olarak genişletilmiş esnek küme teorisinde bazı De Morgan yasalarının geçerli olduğunu kanıtlamışlardır. Gong, Xiao ve Zhang (2010) bijektif esnek küme kavramını ve karar verme problemlerinde bijektif esnek kümenin uygulanmasını araştırmışlardır. Xia, Gong, Xiao ve Zou (2010), bijektif esnek kümeler arasındaki bağımlılık, dışlayıcı ayırıcı esnek kümeler, dışlayıcı ayırıcı esnek karar sistemlerinin azaltılması gibi bazı kavramları incelemişlerdir. Feng, Li ve Çağman (2012) üniter karar verme yöntemini geliştirip tekdüze karar verme ilkesine daha derin bir bakış açısı kazandırıp sınırlarını göstermişlerdir. Kharal (2014), bir esnek kümenin üyelik yapısını incelenmiş ve özelliklerini sunmuştur (Kharal, 2014). Atagün, Kamacı ve Oktay (2018) daha önce tanımlanan esnek matris çarpımlarını farklı türlerdeki esnek matrisleri de çarpacak şekilde genelleştirmiş, bu yeni işlemleri karar verme problemlerini çözme sürecini daha hızlı, daha anlaşılır ve daha rahat hale getirmişlerdir. Kamacı, Saltık, Akız ve Atagün (2018) ters esnek matris teorisini ve işlemlerini çarpımlarını ve cebirsel yapılarını ayrıntılı olarak tanıtmış, esnek toplam satırlı karar verme algoritması olarak adlandırdıkları algoritmanın Scilab kodlarını vermiş ve bu kodların karar verme sürecinin birçok nesneden oluştuğunu savunmuşlardır. Yang ve Yao (2020) esnek kümenin çekirdeğine ve desteğine dayanan üç yönlü kararın niteliksel bir modelini sunmuşlardır. Petchimuthu, Garg, Kamacı ve Atagün (2020), bulanık esnek matrislerin ortalama operatörlerini ve normalleştirilmiş bulanık ağırlıklı ortalama operatörlerini tanıtmış, çok kriterli grup karar verme problemini farklı değerlendirme kriter setleri ile tanımlamış ve benzer problemlerle başa çıkmak için ortalama operatörleri ve bulanık esnek matrislerin genelleştirilmiş çarpımlarını kullanarak iki algoritma oluşturmuşlardır. Zorlutuna (2021) esnek sınıflar üzerinde küme değerli haritalama kavramını tanıtmış örnekler ve karşı örneklerle desteklenen görüntülerin çeşitli özelliklerini ve esnek kümelerin ters görüntülerini incelemiş, bu kavramı karar verme problemlerine uygulamışlardır.

Esnek kümeler yardımıyla, esnek cebirsel yapılar da pek çok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Aktaş ve Çağman (2007) esnek kümeleri, bulanık kümeler ve yaklaşımlı kümelerin ilgili kavramlarıyla karşılaştırmıştır. Ayrıca pek çok yeni çalışmaya ışık tutan esnek grup teorisini literatüre kazandırmışlardır. Esnek grup yapısı üzerinde esnek alt grup, normal esnek alt grup, esnek grup homomorfizmi gibi cebirsel yapıları da tanımlamışlardır. Jun (2008) esnek BCK-BCI-cebirleri ve esnek alt cebir kavramlarını tanımlayarak bazı temel özellikleri incelemiştir. Jun ve Park (2008) esnek kümeleri BCK-BCI-cebirlerine

uygulayarak, BCK-BCI-cebirlerinin esnek cebirsel özelliklerini araştırmış ve çeşitli örnekler vermişlerdir. Park, Jun ve Öztürk (2008) esnek WS-cebirleri üzerine çalışmalar yapmışlardır. Feng, Jun ve Zhao (2008) esnek küme teorisini kullanarak esnek yarı halkaları, esnek yarı halkalardaki esnek idealleri ve idealistik yarı halkaları tanımlamışlardır. Sun, Zhang ve Liu (2008) esnek modüllerin kavramını tanıtıp, esnek küme teorisinden yararlanarak esnek modüllerin temel özelliklerini incelemişlerdir. Jun, Lee ve Zhan (2009) esnek p-idealleri ve p-idealistik esnek BCI-cebirleri kavramını tanıtmış ve temel özelliklerini araştırmışlardır. Esnek kümeleri kullanarak, BCI cebirlerindeki bulanık p-ideallerinin ayrıcalıklarını vermişlerdir. Zhan ve Jun (2010) esnek BL-cebirleri üzerine çalışmalar yapmışlardır. Acar, Koyuncu ve Tanay (2010) esnek halka kavramını tanıtıp, esnek alt halka, esnek idealler, idealistik esnek halkalar ve esnek halka homomorfizmalarını ilgili özellikleriyle birlikte incelemişlerdir. Kazancı, Yılmaz ve Yamak (2010), esnek BCH-cebiri kavramı tanıtıp, yapısal özellikleri incelenmiştir. Esnek BCH-cebirleri ve esnek BCH-alt cebirleri ailesinin ikili kesişimi, genişletilmiş kesişimi, kısıtlı birleşimi, $\vee$ -birleşimi, $\wedge$ -kesişimi ve kartezyen çarpımını oluşturmuşlardır. Esnek kümelerin homomorfik görüntü ve esnek BCH-homomorfizmi kavramları tanıtmış ve temel özellikleri incelemiştir. Jun, Lee ve Khan (2010) esnek küme kavramını sıralı yarıgruplara uygulamışlardır. Esnek sıralı yarı grup, esnek sıralı alt yarı grup, esnek sol (sağ) ideal ve sol (sağ) idealistik, esnek sıralı yarı grup kavramlarını tanıtmışlar ve ilgili özellikleri araştırmışlardır. Jun, Lee ve Park (2010), BCK/BCI cebirlerindeki çeşitli türleri ele almak için yapıyı, bulanık esnek kümeye uygulayarak bulanık esnek BCK/BCI cebirleri, bulanık esnek idealleri ve bulanık esnek p-idealleri kavramlarını tanıtmış ve ilgili özelliklerini araştırmışlardır. Sezgin ve Atagün (2011) esnek gruplar ve normalistik esnek grupları incelemişlerdir. Sezgin, Atagün ve Aygün (2011) idealistik esnek yakın halkaların özelliklerini araştırmış ve yakın halka epimorfizmleri altında yapının korunduğunu göstermişlerdir. Esnek yakın halkalarla ilgili çalışmaları teorik açıdan genişletmişlerdir. Sezer, Çağman ve Atagün (2014), yarı grupların esnek kesişimli iç ideallerini, yarı-ideallerini ve genelleştirilmiş iki-ideallerini tanımlamış ve aralarındaki ilişkileri vermişlerdir. Ayrıca düzenli, tam düzenli, zayıf düzenli ve yarı-düzenli yarı grupları bu idealler açısından karakterize etmişlerdir. Aktaş ve Özlü (2014) devirli esnek grupları incelemişlerdir. Sen (2014) sabit parametreler kümesindeki tüm esnek kümelerin kümesinin cebirsel yapısını incelemiştir. Sezer, Çağman, Atagün, Ali ve Türkmen (2015) yarı grupların esnek kesişimsel yarı gruplarını, esnek kesişim sol (sağ, iki taraflı)

ideallerini ve iki ideallerini tanımlayıp, özelliklerini ve aralarındaki ilişkileri bulmuşlardır. Ullah, Ahmad, Karaaslan, Hayat ve Rashad (2018) esnek kesişimli AG-grubunun tanımlanmış ve esnek küme teorisi ve AG grupları arasında bir bağlantı kurmuşlardır. Karaaslan (2019) AG-grupoid, AG*-grupoid ve AG-bant üzerindeki esnek küme ailesinin bazı özelliklerini araştırmış, ayrıca esnek idempotent eleman, esnek kesişimli AG-bandı, sol s(sağ) bağlantılı esnek küme, esnek kesişimel-ideali ve esnek kesişimsel AG-grupoidinin esnek asal ideali gibi yeni kavramlar tanımlamıştır. Karaaslan, Ullah ve Ahmed (2021), normal bipolar esnek alt grup kavramını tanıtmış ve normal bipolar esnek alt grupların özelliklerini araştırmışlardır. Ayrıca bir bipolar esnek grubun bipolar esnek sol ve sağ kosetleri kavramlarını ve eşlenik bipolar esnek alt grup kavramını tanıtmışlardır.

Molodsov tarafından 1999 yılında esnek küme teorisi ortaya atıldığında, temel esnek küme işlemleri bu makalede verilmiş olsa da, bilinen esnek küme işlemleri ve özellikleri Pawlak'ın (1982) yaklaşımlı küme teorisinden yararlanılarak, Maji, Biswas ve Roy (2003) tarafından tanımlanmıştır. Maji ve diğerleri (2003), esnek alt küme, bir esnek kümenin tümleyeni, iki esnek kümenin birleşimi ve kesişimi gibi esnek kümeler üzerinde yeni işlemleri ilk olarak tanımlayanlar olmuş, Pei ve Miao (2005) esnek kümeler için kesişim, alt küme gibi temel kavramları literatüre kazandırmıştır. Yang (2008) pek çok araştırmacı gibi, Maji ve diğerleri (2003) çalışmasındaki esnek küme işlemlerinde birtakım yanlışlar olduğunu karşı örnekle göstermiştir. Yang, Lin, Yang, Li, Yu (2009) aralık değerli bulanık esnek küme kavramını tanıtmış; tümleyen, “VE” ve “VEYA” işlemlerini aralık değerli bulanık esnek kümeler üzerinde tanımlayarak aralık değerli bulanık esnek kümelerin De Morgan, birleşme ve dağılıma özelliklerini ispatlamışlardır. Ali, Feng, Liu, Min ve Shabir (2009) de, Maji ve arkadaşlarının (2002) tanımladığı esnek küme işlemleri ve özelliklerindeki bir takım problemleri düzelterek, esnek kümelerin kısıtlı birleşim, kısıtlı kesişim, kısıtlı fark ve esnek kümelerin genişletilmiş kesişimi gibi bazı yeni çok önemli işlemlerini tanımlamış ve temel özelliklerini incelemişlerdir. Bir esnek kümenin tümleyeni kavramını geliştirmiş ve bu yeni tanımlara göre bazı De Morgan yasalarının esnek küme teorisinde geçerli olduğunu kanıtlamışlardır. Feng, Li, Davvaz ve Irfan Ali (2010), bulanık esnek kümeler olarak adlandırılan hibrit bir model elde etmek için bir esnek kümelerin yaklaşımı üzerinde durmuşlardır. Qin ve Hong (2010) esnek kümelerin cebirsel yapılarını ele almışlar; esnek kümelerin kafes yapılarını incelemişlerdir. Sezgin ve Atagün (2011) esnek kümelerle ilgili çalışmada, daha önce çalışılmamış olan esnek

kümelerin temel özelliklerini çalışmışlardır. Esnek kümeler üzerindeki temel işlemlerin temel özelliklerini tartışmış ve bunların birbirleriyle olan bağlantılarını göstermiş ve esnek kümelerin kısıtlı simetrik farkını tanımlayıp özelliklerini vermişlerdir. Ali, Shabir ve Naz (2011), esnek kümelerin cebirsel yapılarını detaylı şekilde incelemiş; monoid, hemihalka ve kafes gibi yapılar oluşturduğunu görmüşlerdir. Ge ve Yang (2011), Maji ve arkadaşlarının (2011) tanımladığı işlemleri ayrıntılı incelemişlerdir. Neog ve Sut (2011) bir esnek kümenin tümleyeni kavramını yeniden tanımlamış ve yeni tümleyen tanımlarına göre De Morgan gibi yasaları tekrar ele almışlardır. Liu, Feng ve Jun (2012), esnek L-eşitlik tanımını formüle etmiş ve esnek çarpım işlemlerinin bağlantılı yasalarının bir esnek L-eşit ilişki anlamında karşılandığını kanıtlamışlardır. Singh ve Onyeozili (2012a, 2012b, 2012c, 2012d), bir esnek kümenin tümleyeni kavramını yeniden tanımlamış ve esnek küme işlemlerinin bazı özellikleri üzerine özellikle dağılma ve yutma kuralları üzerinde çalışmalar yapmışlardır. Liu, Feng ve Jun (2012) esnek eşitlik ilişkileri türleri hakkında detaylı incelemeler yapmış, esnek M-alt küme ve esnek M-eşit ilişkilerini doğal bir şekilde genelleştiren yeni kavramlar ortaya koymuşlardır. Feng ve Li (2013) esnek çarpım işlemlerine ilişkin bazı eksik sonuçları tamamlayıp, esnek çarpım işlemlerinin cebirsel özelliklerini detaylı olarak incelemişlerdir. Serbest esnek cebirleri de ele alıp esnek L-eşit bağıntıların serbest esnek cebirler üzerindeki uyum bağıntıları olduğu ve yapılarının değişmeli yarı gruplar olduğunu göstermişlerdir. Zhu ve Wen (2013) esnek kümelerin kesişimini, tümleyenini ve farkını yeniden tanımlamışlar ve bu işlemlerin cebirsel özelliklerini bilinen bir birleştirme işlemiyle birlikte araştırmışlardır. Abbas, Ali ve Romaguera (2014) iki esnek kümenin genelleştirilmiş esnek eşitliği kavramını tanıtmışlar ve iki esnek kümenin alt ve üst esnek eşitliği olarak adlandırılan eşitliğin g-esnek eşitlik anlamına geldiğini ancak bunun tersinin geçerli olmadığını kanıtlamışlardır. Ayrıca esnek kümelerin ve esnek kafes yapılarının toplanmasına ilişkin tolerans veya bağımlılık ilişkisini vermişlerdir. Mujahid Abbas, Ali ve Romaguera (2017) parametreler üzerindeki koşulları hafifleterek iki esnek kümenin genelleştirilmiş sonlu esnek eşitliği, genelleştirilmiş sonlu esnek birleşimi ve genelleştirilmiş sonlu esnek kesişimi kavramlarını tanıtmışlardır. Husain ve Shivani (2018) iki esnek kümenin eşitliği, bir esnek kümenin alt kümesi, esnek kümenin üst kümesi, boş esnek küme, veya, ve, birleşim, kesişim bağıl kesişim, bağıl birleşim, simetrik fark, bağıl simetrik fark gibi esnek küme işlemlerini örneklemişlerdir. Sezgin, Ahmad ve Mehmood (2019) esnek kümelerin genişletilmiş farkını incelemiş ve özelliklerini araştırmışlardır. Alshami ve El-Shafei (2020) T-esnek alt

küme ve T-esnek eşitlik ilişkilerini tanıtır; bunları herhangi bir esnek küme ailesi için T-esnek birleşme ve T-esnek kesişme için kullanmışlar ve bazı esnek eşitlik ilişkilerine göre esnek doğrusal denklemleri incelemişlerdir. Stojanovic (2021) esnek kümelerin genişletilmiş simetrik farkını tanımlamış ve özelliklerini araştırmıştır. Ali, Saleem, Sundus ve Khaleeq (2022) genelleştirilmiş yeni kavramlar üzerinde çalışmışlardır.

Bu zamana kadar yapılan çalışmalar incelendiğinde, genel anlamda esnek küme işlemlerin kısıtlanmış esnek küme işlemleri ve genişletilmiş esnek küme işlemleri olmak üzere iki ana başlık altında ilerlediği görülmektedir. Eren (2019) esnek kümelerde ikili parçalı fark işlemini tanımlamış ve özelliklerini çalışmış; Sezgin ve Çalışıcı (2024), klasik kümelerde yer alan fark işleminin özelliklerini esnek ikili parçalı fark işleminde detaylı incelemiştir. Çağman (2021) iki yeni tümleyen işlemini literatüre kazandırmış; Sezgin, Çağman, Atagün ve Aybek (2023c) yeni ikili küme işlemleri çalışmıştır. Ayrıca, bu küme işlemleri esnek kümeye aktararak, yeni kısıtlanmış esnek küme işlemleri ve yeni genişletilmiş esnek küme işlemleri tanıtılmıştır (Aybek, 2024). Demirci (2024), Sarılioğlu (2024), Akbulut (2024) esnek kümelerdeki genişletilmiş işlemlerinin formunu değiştirerek, tümleyenli genişletilmiş işlemler üzerinde çalışmalarını sürdürmüştür. Ayrıca, esnek kümelerdeki ikili parçalı işleminin formu biraz daha değiştirilerek, tümleyenli ikili parçalı esnek küme işlemleri de Sezgin ve Demirci (2023), Sezgin ve Sarılioğlu (2024), Sezgin ve Akbulut (2023), Sezgin ve Yavuz (2023b), Sezgin ve Aybek (2023), Sezgin ve Atagün (2023), Sezgin, Aybek ve Atagün (2023a); Sezgin, Aybek ve Güngör (2023b), Sezgin ve Çağman (2024a) tarafından çalışılmıştır.

Soyut cebir, matematiksel nesnelerin genel ve soyut bir perspektifte incelenmesini sağlayarak, matematikçilere bu yapıların derinlemesine anlaşılmasında bir çerçeve sunmaktadır. Bu açıdan, soyut cebir, bir küme üzerinde tanımlanan ikili işlemlerle oluşturulan yapıları inceleyen matematiğin önemli bir dalıdır. Amacı, bu cebirsel yapıları sınıflandırmak, ortak özelliklerini bağımsız olarak bulmak ve bu özelliklerden genel sonuçlar çıkarmaktır. Cebirsel yapılar, matematikte ve diğer bilim alanlarında, özellikle fizik, kimya ve bilgisayar bilimi gibi uygulamalarda temel bir rol oynar. Grup, halka, cisim gibi cebirsel yapılar, simetri analizinden sayı teorisine kadar birçok alanda kullanılır. Ayrıca, vektör uzayları, modüller gibi cebirsel yapılar, matematiksel mantık, fizik ve bilgisayar bilimlerinde geniş bir uygulama yelpazesine sahiptir. Belli bir cebirsel yapı için

önemli olan, çoğu özelliğinin içerdiği işlemlerden tahmin edilebilmesidir. Bunun anlamı, ortak özelliklere sahip cebirsel yapıların sınıflara (ailelere) ayrılabilmesidir. Verilen bir cebirsel yapının hangi belli yapı ailesine ait olduğunu bulabilmek, bu ailenin tüm elemanlarının hangi karakteristik özelliklere sahip olduğu sonucuna varabilmemize imkan verir. Yani eğer belli bir yapının ‘grup’ olduğunu anlayabiliyorsak bu yapının grupların tüm karakteristik özelliklerine sahip olduğunu varsayabiliriz. Bu fayda, büyük ölçüde soyutlamanın arkasındaki ana motivasyondur. Bu nedenlerle, cebirsel yapıların soyut matematik ve soyut cebirdeki önemi oldukça büyüktür.

Genelleştirilmiş halkalar olan yakın halkalar Dickson tarafından 1905 yılında ortaya atılmıştır. Tek yönlü dağılma özelliğine sahip cisimlerin varlığını ispatlamış ve cisimler yakın cisim olarak adlandırılmıştır (Dickson, 1905). Yakın halka kavramı ise ilk defa Zassenhaus tarafından kullanılmıştır (Zassenhaus, 1935). Clay ve Lawyer (1969) birimli bir Boole halkadan Boole yakın halka elde etmenin yolunu göstermiş, bu yolla elde edilen yakın halkaları özel yakın halkalar olarak ifade etmiştir. Aynı zamanda bu yakın halkalar sağ değişmeli yakın halkalardır (Clay ve Lawyer, 1969). Vandiver (1935) yarı halka kavramını tanıtmış ve sonrasında pek çok yazar bu konu üzerine araştırma yapmıştır. Vandiver (1935), yarı halkaların matematikte büyük bir önem taşımakla birlikte geniş bir uygulama alanına sahip olduğunu belirtmiştir. Terslenebilir yarı halkalar Karvellas (1974) tarafından incelenmiş olup; Kaplansky (1979), Petrich (1973) ve Goodearl (1979) yarı halkalar üzerine bazı çalışmalardır. Reutenauer ve Straubing (1984) değişmeli yarı halkalar üzerinde çalışmalar yapmışlardır. Li (1996), yarıgrup halkalarının regüler olması için yeterli koşullar elde etmiştir. Hoorn ve Rootselaar (1967) yarı halka cebirsel yapısından daha genel bir yapı olan yakın-halka kavramını tanıtır özelliklerini incelemiştir.

Esnek küme teorisinde yer alan esnek küme işlemleri, matematikteki işlemler, kümeler ve sayılar kadar temel bir kavramdır. Bu işlemler, esnek hesaplama ve karar verme yöntemlerinin teorik temelini oluşturur. Ayrıca, literatürdeki esnek cebirsel çalışmalar, esnek küme işlemlerinin etkisi altında şekillenir. Esnek kümelerin ve işlemlerinin cebirsel yapılarını incelemek, esnek küme cebirinin klasik ve klasik olmayan mantığa nasıl uygulanabileceğini anlamak için kapsamlı bir bakış açısı sunar. Esnek küme işlemleri, bu teorik çerçevede pratikten uygulamalara dönüşen köşe taşı bir kavramdır.

Bu tez çalışmasında, Eren (2019) çalışmasındaki, esnek ikili parçalı fark işleminden esinlenerek, yeni pek çok esnek ikili parçalı küme işlemi tanıtılmış, bu işlemlerin özellikleri ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Klasik kümelerde var olan işlemlerin özelliklerinin bu esnek küme işlemleri üzerine yansması nasıl olur sorusu göz önünde bulundurularak, klasik kümelerdeki kesişim ve birleşim işlemlerinin özellikleri, esnek ikili parçalı kesişim ve birleşime aktarılmış ve esnek kümeler üzerinde her birinin bir karşılığı olduğu ortaya koyulmuştur. Bu işlemlerin, U üzerindeki tüm esnek kümeler kümesi üzerinde ve sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde, hangi cebirsel yapılar oluşturdukları tüm ayrıntılarıyla sunulmuştur.

Tezin ilk bölümünde esnek kümeler, esnek işlemler ve cebirsel yapılar ile ilgili ayrıntılı bir literatür taraması yapılmış; ikinci bölümde, tez çalışmasında da kullanılacak olan klasik küme işlemleri, cebirsel yapılar ve esnek kümeler ilgili temel tanımlara yer verilmiştir. Tezin özgün bölümlerinden üçüncü bölümde esnek ikili parçalı kesişim işlemi; dördüncü bölümde esnek ikili parçalı birleşim işlemi; beşinci bölümde esnek ikili parçalı artı işlemi; altıncı bölümde esnek ikili parçalı gamma işlemi; yedinci bölümde esnek ikili parçalı lamda işlemi; sekizinci bölümde esnek ikili parçalı yıldız işlemi; dokuzuncu bölümde esnek ikili parçalı teta işlemi tanıtılmış, örneği verilmiş, özellikleri incelenmiştir. Bu işlemlerin, diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkilerine bakmak adına her bir ikili parçalı esnek küme işleminin; kısıtlanmış esnek küme işlemlerine, genişletilmiş esnek küme işlemlerine ve ikili parçalı esnek küme işlemlerine sağdan ve soldan dağılma kurallarına bakılmıştır. İşlemlerimizin cebirsel özellikleri ve dağılma kuralları göz önünde bulundurularak U evreni üzerindeki tüm esnek kümeler kümesi üzerinde ve sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde belli şartlar altında monoid, sınırlı yarı-kafes, grup, yarı-halka, yarı yakın halka, sağ yarı yakın-halka, hemihalka, sol-sağ sistem, sınırlı dağılmalı kafes, Bool Halkası; Bool cebiri, De Morgan Cebiri, Kleene Cebiri, Stone cebiri gibi çok çeşitli yapılar oluşturduğu sistematik bir şekilde gösterilmiştir. Matematikte yapılan en önemli işlemlerden biri, bir küme üzerinde tanımlanan bağıntı veya işlemin özelliklerini incelemektir (Hacısalıhoğlu, 2007:181). Soyut matematik ve soyut cebirdeki önemi oldukça büyük olan pek çok cebirsel yapının elde edilmiş olması, ve işlemlerinin özelliklerinin detaylı şekilde incelenmiş olması çalışmanın önemini arttırmaktadır. Son bölümde ise bu çalışmadan elde edilen sonuçlara yer verilmiş ve sonuçların önemi tartışılmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Kümeler

İyi tanımlanmış nesneler topluluğuna küme denir. Küme teorisi ilk defa Alman matematikçi Georg Cantor tarafından sonsuz büyüklükleri tanımlamak ve karşılaştırmak için ortaya atılan, 1874 ile 1895 yılları arasında geliştirilen bir teoridir (Dauben, 1990).

Kümeler genelde $A, B, C, \dots$ gibi büyük harflerle; kümenin elemanları ise $a, b, c, \dots$ gibi küçük harflerle gösterilir. Eğer bir x eleman bir A kümesine aitse bunu $x \in A$; aksi halde $x \notin A$ şeklinde gösterilir. Kümeler, listeleme yöntemi, ortak özellik yöntemi ve Venn şeması yöntemi ile gösterilir. A ve B iki küme olmak üzere; A nın her elemanı aynı zamanda B nin de bir elemanı ise A 'ya B 'nin bir alt kümesi denir ve $A \subseteq B$ şeklinde yazılır. $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise o zaman A ile B kümelerine eşittir denir ve $A = B$ yazılır. Üzerinde çalışılan en geniş kümeye evrensel küme denir ve E ile gösterilir. Hiçbir elemanı olmayan kümeye boş küme denir ve $\emptyset$ ile gösterilir. Boş küme her kümenin alt kümesidir (Çallıalp, 1994: 1-7).

Kümelerde, kesişim, birleşim, fark ve simetrik fark gibi ikili işlemler ile tümleyen gibi birli işlem vardır. Tezimiz boyunca, küme işlemlerine dayalı ispatlara yer verileceğinden, temel küme işlemleri ve özellikleri bu bölümde verilmiştir.

2.1.1. Kesişim işlemi

K ve Y iki küme olmak üzere, hem K ya hem de Y kümesine ait olan elemanların kümesine K ile Y nin kesişimi (arakesiti) denir ve $K \cap Y$ ile gösterilir.

$$K \cap Y = \{x: x \in K \text{ ve } x \in Y\}$$

Kesişim işleminin temel özellikleri aşağıda belirtilmiştir:

- $(K \cap Y) \cap D = K \cap (Y \cap D)$ (Birleşme özelliği)
- $K \cap Y = Y \cap K$ (Değişme özelliği)
- $K \cap \emptyset = \emptyset \cap K = \emptyset$ (Yutan eleman özelliği)

- $K \cap E = E \cap K = K$ (Etkisiz eleman özelliği)
- $K \cap K = K$ (Denk güçlülük özelliği)
- $K \cap Y = \emptyset \Leftrightarrow K \subseteq Y'$. Benzer şekilde, $K \cap Y = \emptyset \Leftrightarrow Y \subseteq K'$
- $\emptyset \subseteq K \cap Y, K \cap Y \subseteq E$
- $K \cap Y = E \Leftrightarrow K = Y = E$
- $K \cap Y = \emptyset \Rightarrow K = \emptyset \vee Y = \emptyset$ veya K ve Y ayrıktır.
- $K \cap Y \subseteq K, K \cap Y \subseteq Y$
- $K \subseteq Y \Leftrightarrow K \cap Y = K$
- $K \cap Y = K \cup Y \Leftrightarrow K = Y$
- $K \cap Y \subseteq K \cup Y$
- $K \subseteq Y \Rightarrow K \cap D \subseteq Y \cap D$. Tersisi doğru değildir.
- $K \subseteq Y$ ve $V \subseteq L \Rightarrow K \cap V \subseteq Y \cap L$
- $K \cap (K \cup Y) = K \cup (K \cap Y) = K$ (Yutma Kuralı)
- $K \cap (Y \cup D) = (K \cap Y) \cup (K \cap D)$ (Kesişimin birleşim üzerine soldan dağılması)
- $(K \cup Y) \cap D = (K \cap D) \cup (Y \cap D)$ (Kesişimin birleşim üzerine sağdan dağılması)
- $K \cap (Y \setminus D) = (K \cap Y) \setminus (K \cap D)$ (Kesişimin fark üzerine soldan dağılması)
- $(K \setminus Y) \cap D = (K \cap D) \setminus (Y \cap D)$ (Kesişimin fark üzerine sağdan dağılması)

(Nesin, 2019: 7-59).

2.1.2. Birleşim işlemi

K ve Y iki küme olsun. K ya, Y ye veya her ikisine ait olan elemanların kümesine K ile Y nin birleşimi denir ve $K \cup Y$ ile gösterilir.

$$K \cup Y = \{x: x \in K \text{ veya } x \in Y\}$$

Birleşim işleminin özellikleri aşağıda belirtilmiştir:

- $(K \cup Y) \cup D = K \cup (Y \cup D)$ (Birleşme özelliği)
- $K \cup Y = Y \cup K$ (Değişme özelliği)
- $K \cup \emptyset = \emptyset \cup K = K$ (Birim eleman özelliği)
- $K \cup K = K$ (Denk güçlülük özelliği)
- $K \cup E = E \cup K = E$ (Yutan eleman özelliği)
- $K \subseteq K \cup Y, Y \subseteq K \cup Y$
- $\emptyset \subseteq K \cup Y, K \cup Y \subseteq E$
- $K \cup Y = Y \Leftrightarrow K \subseteq Y$
- $K \cap Y \subseteq K \cup Y$
- $K \cup Y = K \cap Y \Leftrightarrow K = Y$
- $K \cup Y = \emptyset \Rightarrow K = Y = \emptyset$
- $K \subseteq Y \Rightarrow K \cup D \subseteq Y \cup D$. Tersisi doğru değildir.
- $K \subseteq Y$ ve $V \subseteq L \Rightarrow K \cup V \subseteq Y \cup L$ ve $V \cup K \subseteq L \cup Y$
- $K \cap (K \cup Y) = K \cup (K \cap Y) = K$ (Yutma kuralı)
- $K \cup (Y \cap D) = (K \cup Y) \cap (K \cup D)$ (Birleşimin kesişim üzerine soldan dağılması)
- $(K \cap Y) \cup D = (K \cup D) \cap (Y \cup D)$ (Birleşimin kesişim üzerine sağdan dağılması)

(Çallıalp, 1994: 1-7).

2.1.3. Fark işlemi

K ve Y iki küme olsun. K da olup Y de olmayan elemanların kümesine K ile Y nin farkı denir ve $K \setminus Y$ veya $K - Y$ ile gösterilir.

$$K \setminus Y = \{x: x \in K, x \notin Y\} = \{x \in K: x \notin Y\}$$

Bu tezimiz boyunca, K ile Y işlemlerinin farkı için K-Y gösterimini tercih ediyoruz. Aşağıda fark işleminin özellikleri verilmiştir.

- $K-Y \neq Y-K$
- $(K-Y)-D \neq K-(Y-D)$
- $K-\emptyset=K, K-E=\emptyset$
- $\emptyset-K=\emptyset$ ve $K-K=\emptyset$
- $(K-Y) \cap (K \cap Y) = \emptyset$ ve $(Y-K) \cap (K \cap Y) = \emptyset$
- $K-(K-Y) = K \cap Y$ ve $Y-(Y-K) = K \cap Y$
- $K \cap Y = \emptyset$ ise $K-Y=K$. Buradan, $K \cap (Y-K) = \emptyset$ olup $K-(Y-K)=K$; $Y \cap (K-Y) = \emptyset$ olup $Y-(K-Y)=Y$; $(K-Y) \cap (Y-K) = \emptyset$ olup $(K-Y)-(Y-K)=K-Y$; $(Y-K) \cap (K-Y) = \emptyset$ olup $(Y-K)-(K-Y)=Y-K$; $(K-Y) \cap Y = \emptyset$ olup $(K-Y)-Y=K-Y$
- $(K-Y) \subseteq K$ ve $(Y-K) \subseteq Y$
- $K=(K-Y) \cup (K \cap Y)$ ve $Y=(Y-K) \cup (K \cap Y)$
- $K \cup Y = (K-Y) \cup (Y-K) \cup (K \cap Y) = (K-Y) \cup Y = (Y-K) \cup K$
- $K \subseteq Y \Leftrightarrow K-Y = \emptyset$
- $(K \cap Y)-D = (K-D) \cap (Y-D)$ (Farkın kesişime sağdan dağılması)
- $(K \cup Y)-D = (K-D) \cup (Y-D)$ (Farkın birleşime sağdan dağılması)
- $(K-Y)-D = (K-D)-(Y-D)$ (Farkın farka sağdan dağılması)
- $K-(Y \cap D) = (K-Y) \cup (K-D)$
- $K-(Y \cup D) = (K-Y) \cap (K-D)$

(Nesin, 2019: 7-59; Çallıalp, 1994: 1-7).

2.1.4. Simetrik fark işlemi

K ve Y kümeleri verildiğinde, $K \cup Y$ ye ait olup $K \cap Y$ ye ait olmayan elemanların oluşturduğu kümeye K ile Y kümelerinin simetrik farkı denir ve $K \Delta Y$ ile gösterilir.

$$K \Delta Y = \{x: x \in K \cup Y, x \notin K \cap Y\} = (K \cup Y) - (K \cap Y)$$

Bu tanımın bir sonucu olarak $K\Delta Y=(K-Y)\cup(Y-K)$ olduğu açıktır. Simetrik fark işleminin özellikleri aşağıda verilmiştir.

- $(K\Delta Y)\Delta D=K\Delta(Y\Delta D)$ (Birleşme özelliği)
- $K\Delta Y=Y\Delta K$ (Değişme özelliği)
- $K\Delta\emptyset=\emptyset\Delta K=K$ (Birim eleman özelliği)
- $K\Delta K=\emptyset$ (Ters eleman özelliği)
- $K\Delta K'=K'\Delta K=U$
- $(K\Delta Y)\Delta(Y\Delta D)=K\Delta D$
- $K'\Delta Y'=K\Delta Y$
- $K\Delta Y=K\Delta D\Rightarrow Y=D$ (Kısaltma kuralı)
- $K\Delta Y\subseteq K\cup Y$
- $K\Delta Y=\emptyset\Leftrightarrow K=Y$
- $K\subseteq Y\Rightarrow K\Delta Y=Y\setminus K$
- $K\Delta(K\cap Y)=K\setminus Y$
- $K\cup Y=(K\Delta Y)\cup(K\cap Y)$
- $K\cap(Y\Delta D)=(K\cap Y)\Delta(K\cap D)$ (Kesişimin simetrik fark işlemi üzerine soldan dağılımı)
- $(K\Delta Y)\cap D=(K\cap D)\Delta(Y\cap D)$ (Kesişimin simetrik fark işlemi üzerine sağdan dağılımı)

(Karaçay, Eş ve İbrahimoglu, 2017: 61-71).

2.1.5. Tümleyen işlemi

K bir küme olmak üzere, evrensel kümede olup, K da olmayan elemanların kümesine K nın tümleyeni denir ve K' ile gösterilir. O halde:

$$K' = \{x: x \notin K\} = \{x \in E: x \notin K\} = E - K$$

Tümleyen işleminin özellikleri aşağıda verilmiştir.

- $K \cup K' = E$ ve $K \cap K' = \emptyset$
 - $E' = \emptyset$ ve $\emptyset' = E$
 - $(K')' = K$
 - $K \Delta E = E \Delta K = K'$
 - $(K \cup Y)' = K' \cap Y'$ (De Morgan Kuralı)
 - $(K \cap Y)' = K' \cup Y'$ (De Morgan Kuralı)
- (Nesin, 2019: 7-59).

2.2. Bazı Cebirsel Yapılar

Bu alt bölümde, tezimizde de geçen bazı cebirel yapılar hakkında bilgi verilecektir.

2.2.1. Tanım A boş olmayan bir küme olmak üzere

$$*: A \times A \rightarrow A$$

fonksiyonuna, A kümesi üzerinde bir (ikili) işlem denir (Aydın ve Kandamar, 2013:71).

* ikili işlemi, bir fonksiyon olduğundan $\forall a, b \in A$ için, $a * b \in A$ ve $\forall a, b, c, d \in A$ için $(a, b) = (c, d)$ iken $a * b = c * d$ koşullarının sağlandığı açıktır. Bu koşullardan ilki, A kümesinin * işlemine göre kapalı olması; ikincisi ise * işleminin A üzerinde iyi tanımlı olması olarak da isimlendirilir (Aydın ve Kandamar, 2013:71).

Herhangi bir kümede tanımlanan işlem/işlemler bu küme ile birlikte cebirsel yapı (matematiksel yapı/matematiksel sistem) oluşturur (Hacısalıoğlu, 2007:181). Matematikteki üç temel cebirsel yapı olan grup, halka ve cisimden, grup bir işlemli bir cebirsel yapı iken halka ve cisim gibi iki işlemli cebirsel yapılardır.

2.2.2. Tanım G boş olmayan bir küme ve *, G kümesi üzerinde bir ikili işlem olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $(G, *)$ cebirsel yapısına grup denir.

- Her $a, b, c \in G$ için; $(a * b) * c = a * (b * c)$ (Birleşme özelliği)
- Öyle bir $e \in G$ vardır ki, her $a \in G$ için $a * e = e * a = a$ (Birim eleman özelliği)
- e , birim eleman olmak üzere, her $a \in G$ için öyle bir $y \in G$ vardır ki $a * b = b * a = e$ (Ters eleman özelliği)

$\forall a, b \in G$ için $a * b = b * a$ şartını sağlayan $(G, *)$ grubuna ise değişmeli grup denir $(S, *)$ bir

cebirsel yapı olduğunda, $*$ S de bir ikili işlem olduğundan, her $a, b \in G$ için, $a*b \in G$ özelliği yani kapalılık özelliği sağlanır ve bu durumda $(S, *)$ cebirsel yapısı grupoid adını alır (Aydın ve Kandamar, 2013:72).

$(S, *)$ bir grupoid olsun. $\forall s \in S$ için $e*s = s$ olacak şekilde $e \in S$ var ise, e elemanına S nin sol birim elemanı; $s*e = s$ olacak şekilde $e \in S$ varsa, e elemanına S nin sağ birim elemanı denir. Birim eleman hem sağ birim, hem de sol birimdir ve tektir. $(S, *)$, birim elemanı e olan bir cebirsel yapı olsun. $s \in S$ için $s'*s = e$ olacak şekilde $s' \in S$ var ise, s' elemanına s elemanın sol ters elemanı; $s*s' = e$ olacak şekilde $s' \in S$ varsa, s' elemanına s elemanının sağ tersi denir. s elemanının tersi, hem sağ ters, hem de sol terstir ve tektir. $\forall s \in S$ için, $z*s = z$ olacak şekilde $z \in S$ varsa, z elemanına S nin sol yutan elemanı; $s*z = z$ olacak şekilde $z \in S$ varsa, z elemanına S nin sağ yutan elemanı denir. Yutan eleman hem sağ yutan, hem de sol yutan elemandır ve tektir (Kilp, Knauer and Mikhalev, 2001).

2.2.3. Tanım $(G, *)$ cebirsel yapısı, birleşme özelliğini sağlıyorsa bu cebirsel yapıya yarı grup; birleşme ve birim eleman özelliklerini sağlıyorsa bu cebirsel yapıya monoid denir. Değişme özelliğini sağlayan yarıgruba komutatif (değişmeli) yarıgrup; monoide komutatif (değişmeli) monoid denir (Aydın ve Kandamar, 2013:72).

2.2.4. Tanım $(S, *)$ bir cebirsel yapı olsun. $a \in S$ için, $a^2 = a$ ($a*a = a$) ise a elemanına idempotent eleman denir. $\forall a \in S$ için, $a^2 = a$ ise, $(S, *)$ cebirsel yapısına idempotentir denir (Clifford, 1954).

2.2.5. Tanım İdempotent yarı gruba bant; idempotent ve değişmeli yarıgruba yarı kafes; idempotent ve değişmeli monoide sınırlı yarı kafes denir (Clifford, 1954).

Bir monoidin birim elemanı tek olmasına rağmen bir yarıgrup/grupoid, bir veya birden çok sol birime sahip olabilir; fakat birden çok sol birime sahip ise, sağ birim elemanı yoktur, dolayısıyla birim elemanı yoktur. Benzer şekilde, bir yarıgrup/grupoid, bir veya birden çok sağ birime sahip olabilir; fakat birden çok sağ birime sahip ise, sol birim elemanı yoktur, dolayısıyla birim elemanı yoktur (Clifford, 1954).

Benzer şekilde, bir grupta her elemanın tersi tek olmasına rağmen, bir monoidde bir elemanın bir veya birden çok sol tersi olabilir; fakat o eleman birden çok sol terse sahip ise, sağ terse sahip değildir; dolayısıyla ters elemana sahip değildir. Benzer şekilde bir monoidde bir elemanın bir veya birden çok sağ tersi olabilir; fakat o eleman birden çok sağ terse sahip ise, sol terse sahip değildir; dolayısıyla ters elemana sahip değildir (Clifford, 1954).

2.2.6. Teorem G boştan farklı bir küme ve $*$, G de birleşme özelliğini sağlayan bir küme olsun. $\forall a \in G$ için $e*a = a$ olacak şekilde $e \in G$ var (sol birim) ve $\forall a \in G$ için $a'*a = e$ olacak şekilde $\exists a' \in G$ var (a elemanının sol tersi) ise bu durumda $(G, *)$ bir gruptur (Çallıalp, 2011: 72-73).

2.2.7. Teorem G boştan farklı bir küme ve $*$, G de birleşme özelliğini sağlayan bir küme olsun. $\forall a \in G$ için $a*e = a$ olacak şekilde $e \in G$ var (sağ birim) ve $\forall a \in G$ için $a*a' = e$ olacak şekilde $\exists a' \in G$ var (a elemanının sağ tersi) ise bu durumda $(G, *)$ bir gruptur (Çallıalp, 2011: 72-73).

2.2.8. Tanım $(S, *)$ yarıgrubu sol birime sahip ve her elemanın sağ tersi var ise, bu yarıgruba bir sol-sağ sistem denir. $(S, *)$ sol-sağ sistemini, gruptan ayıran fark, $(S, *)$ cebirsel yapısının, sol birim ve sol ters (ya da sağ birim ve sağ ters) yerine; sol birim ve sağ ters içermesidir (Maan, 1944).

2.2.9. Tanım R boştan farklı bir küme, “+” ve “.” R kümesi üzerinde tanımlı birer ikili işlem olsun. $(R, +, .)$ cebirsel yapısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $(R, +, .)$ üçlüsüne bir halka denir.

- $(R, +)$ değişmeli bir gruptur.
- $(R, .)$ yarıgruptur.
- $\forall a, b, c \in R$ için $a.(b + c) = a.b + a.c$ ve $(a + b).c = a.c + b.a$.

$(R, +, .)$ halkası kısaca R ile gösterilir. $(R, +)$ nın birim elemanı 0_R ile gösterilir ve R halkasının sıfırı denir. R halkası $\forall a, b \in R$ için $a.b = b.a$ şartını sağlıyorsa R 'ye değişmeli halka denir. R halkasında $\forall a \in R$ için, $a.e = e.a = a$ olacak şekilde bir $e \in R$ var ise, e ye R nin

birim elemanı denir ve 1_R ile gösterilir. Birim elemana sahip halkaya birimli halka denir (Bayraktar, 2006:177).

2.2.10. Tanım S boştan farklı bir küme, “+” ve “.” S kümesi üzerinde tanımlı birer ikili işlem olsun. $(S, +, .)$ cebirsel yapısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $(S, +, .)$ üçlüsüne bir yarıhalka denir.

- $(S, +)$ yarıgruptur.
- $(S, .)$ yarıgruptur.
- $\forall a, b, c \in S$ için $a.(b + c) = a.b + a.c$ ve $(a + b).c = a.c + b.a$.

Her $a, b \in S$ için, $a+b=b+a$ ise S yarı halkasına toplamsal değişmeli yarıhalka; her $a, b \in S$ için $a.b=b.a$ ise S yarı halkasına çarpımsal değişmeli yarıhalka; her $a \in S$ için, $a.1=1.a=a$ olacak şekilde $1 \in S$ varsa yani çarpımsal birimli yarıhalkaya birimli yarıhalka denir. Her $a \in S$ için $0.a=a.0=0$ ve $0+a=a+0=a$ olacak şekilde $0 \in R$ elemanı varsa, $0 \in R$ elemanına R yarıhalkasının sıfırı denir. Toplamsal değişmeli ve sıfırlı yarıhalkaya hemihalka denir (Vandiver, 1934).

2.2.11. Tanım N boştan farklı bir küme, “+” ve “.” N kümesi üzerinde tanımlı birer ikili işlem olsun. $(N, +, .)$ cebirsel yapısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $(N, +, .)$ üçlüsüne bir yakın-halka denir.

- i. $(N, +)$ değişmeli olması gerekmeyen bir gruptur.
- ii. $(N, .)$ bir yarı gruptur.
- iii. $\forall x, y, z \in N$ için $(x + y).z = x.z + y.z$

Burada iii) şıkında sağdan dağılma özelliği verildiğinden, bu şartları sağlayan $(N, +, .)$ üçlüsüne bir sağ yakın-halka denir. Eğer iii) şıkkı yerine, $\forall x, y, z \in N$ için $x.(y + z) = x.y + x.z$ soldan dağılma sağlanırsa, bu şartları sağlayan $(N, +, .)$ üçlüsüne bir sol yakın-halka denir. Dağılma özelliğinin hangi taraftan kullanıldığı, yakın-halkanın sağ veya sol olmasını belirler (Pilz, 1983:4)

2.2.12. Tanım S boştan farklı bir küme, “+” ve “.” S kümesi üzerinde tanımlı birer ikili işlem olsun. $(S, +, .)$ cebirsel yapısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $(S, +, .)$ üçlüsüne bir yakın yarıhalka denir.

- $(S, +)$ yarıgruptur.
- $(S, .)$ yarıgruptur.
- Her $a, b, c \in S$ için $(a+b).c = a.c+b.c$ (Sağdan dağılma kuralı)

Eğer $(S, +, .)$ nin toplamsal birimi olan 0 , her $a \in S$ için $0.a=0$ (sol yutan) şartını sağlıyorsa, $(S, +, .)$ (sağ) yakın yarıhalkasına sıfırlı (sağ) yakın yarıhalka denir. $(S, +, .)$ sıfırlı (sağ) yakın yarı halkası, eğer her $s \in S$ için $s.0=0$ (sol yutan) şartını da sağlıyorsa S 'ye sıfır simetrik yakın yarı halka denir. (Hoorn ve Rootselaar, 1967)

2.2.13. Tanım L boştan farklı bir küme, “ $\vee$ ” ve “ $\wedge$ ” S kümesi üzerinde tanımlı birer ikili işlem olsun. $(L, \vee, \wedge)$ aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, $(L, \vee, \wedge)$ üçlüsüne bir kafes (latis) denir.

- $(L, \vee)$ değişmeli, idempotent bir yarı grup (yarı kafes)
- $(L, \wedge)$ değişmeli, idempotent bir yarı grup (yarı kafes)
- Her $a, b, c \in L$ için, $a \vee (a \wedge b) = a \wedge (a \vee b)$ (yutma kuralı)

Her iki işleme göre birim elemana sahip olan kafese sınırlı kafes denir. Sınırlı kafeste genellikle L nin $\wedge$ işlemine göre birim elemanı 1 ile gösterilirken, $\vee$ işlemine göre birim eleman 0 ile gösterilir. Sınırlı L kafesi, her $a \in L$ için $a \wedge a' = 0$ ve $a \vee a' = 1$ olacak şekilde bir a' elamanına sahip ise L ye tümlenmiş kafes denir. Dağılma kuralları geçerli olan kafese dağılmalı kafes denir. Sınırlı, dağılmalı, aynı zamanda tümlemeli olan kafese Boole cebri denir. De Morgan yasalarına yani her $x, y \in L$ için $(x \vee y)' = x' \wedge y'$ ve $(x \wedge y)' = x' \vee y'$ sahip kafese De Morgan cebiri denir. De Morgan cebiri her $x, y \in L$ için $x \wedge x' \leq y \vee y'$ şartını sağlıyorsa, Kleene cebiri denir. $x \in L$ olmak üzere, $x \wedge x^* = 0$ ve $x \wedge y = 0$ olduğunda $y \leq x^*$ ise x^* elemanına x in sözde tümleyeni denir. $x^* \vee x^{**} = 1$ eşitliğine Stone özelliği denir. Stone özelliğini sağlayan sözde tümlenmiş dağılmalı kafese Stone cebiri denir (Birkhoff, 1967).

2.3. Esnek Kümeler

Bu bölümde, esnek küme teorisiyle ilgili temel kavramlar derlenerek verilmiştir.

2.3.1. Tanım U evrensel küme, E parametreler kümesi, $P(U)$ U 'nun kuvvet kümesi ve $K \subseteq E$ olarak verilsin. Bir (F, K) sıralı ikilisi U üzerinde esnek küme olarak adlandırılır. Burada F ,

$$F: K \rightarrow P(U)$$

ile verilen bir fonksiyondur. Başka bir şekilde ifade edecek olursak, U üzerinde bir esnek küme, U evreninin alt kümelerinin parametrize edilmiş bir ailesidir. (Molodtsov, 1999)

(F, K) esnek kümesi gösterimi, kimi kaynaklarda F_K şeklinde gösterilse de biz Molodtsov (1999) ve Maji ve diğerleri (2003) çalışmasında da kullanılan esnek kümenin (F, K) gösterimini tercih edeceğiz. Molodtsov tarafından ortaya atılan bu tanım, Çağman ve Enginoğlu (2010) tarafından yeniden düzenlenerek aşağıdaki tanımı vermişlerdir.

2.3.2. Tanım U başlangıç evrensel kümesi, E parametreler kümesi; $P(U)$, U 'nun kuvvet cümlesi ve $K \subseteq E$ olsun. $\forall \alpha \in K$ için $F(\alpha) = \emptyset$ olacak şekilde $F: E \rightarrow P(U)$ fonksiyonuna, U üzerinde bir esnek küme denir. O halde bir (F, K) esnek kümesi

$$(F, K) = F_K = \{(\alpha, F(\alpha)): \alpha \in E, F(\alpha) \in P(U)\}$$

biçiminde sıralı ikililerin kümesidir.

Biz bu tez boyunca, aslına sadık kalarak ilk olarak Molodtsov (1999) tarafından verilen esnek küme tanımını kullanacağız. E parametreler kümesinin bir K alt kümesi ile birden fazla esnek küme tanımlanabilir. Bu durumda bu esnek kümeler (F, K) , (G, K) , (H, K) vb. şeklinde gösterilecektir. Ayrıca, E parametreler kümesinin K , L , Z vb. farklı alt kümeleri ile de birden fazla esnek küme tanımlanabilir. Bu durumda esnek kümeler (F, K) , (F, L) , (F, Z) vb şeklinde olur.

Yine bu tez boyunca, U üzerindeki tüm esnek kümelerin kümesi (parametre kümesi ne olursa olsun) $S_E(U)$ ile gösterilecektir. A , E kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, sabit A parametre kümesi ile U üzerindeki tüm esnek kümelerin kümesi, $S_A(U)$ ile gösterilecektir. Yani, $S_A(U)$ kümesinde, parametre kümesi sadece A olan esnek kümeler yer alırken; $S_E(U)$ kümesinde, parametre kümesi herhangi bir küme olan U üzerindeki tüm esnek kümeler yer alabilir. Açıkça, $S_A(U)$ kümesi $S_E(U)$ kümesinin alt kümesidir.

$F: A \rightarrow B$ bir fonksiyon olduğunda, tanım kümesi olan A kümesinin $\emptyset$ olabilir; fakat değer kümesi olan B kümesinin $\emptyset$ olamayacağı bilinmektedir. $F: \emptyset \rightarrow B$ fonksiyonuna boş fonksiyon denildiği bilinmektedir. Esnek kümenin de bir fonksiyon olduğu gerçeğinden yola çıkacak olursak, tanım kümesi $\emptyset$ alınırsa, $F: \emptyset \rightarrow P(U)$ olacak şekilde bir esnek küme tanımlanabileceği aşıkardır. Böyle esnek kümeye, boş esnek küme denilir ve $\emptyset_\emptyset$ ile gösterilir. $\emptyset_\emptyset$, parametre kümesi boş küme olan tek esnek kümedir (Ali ve diğerleri, 2011). Bu tez boyunca $(F, A) = \emptyset_\emptyset$ diye belirtilmediği sürece $A = \emptyset$ alınmayacaktır; yani aksi belirtilmediği sürece, esnek kümelerin tümü boş esnek küme olan $\emptyset_\emptyset$ den farklıdır.

2.3.3. Örnek U satın almak için üzerinde düşünülen oyuncakların bir kümesi, E 'nin de parametrelerin kümesi olduğunu kabul edelim. Her bir parametre bir kelime veya bir cümledir. $E = \{\text{ilginç, klasik, ucuz, yıkanabilir, büyük, kaliteli}\}$ olsun. Bu durumda bir esnek küme tanımlamak, "ucuz oyuncak, büyük oyuncak vb." oluşturmak demektir. (F, K) ; esnek kümesi Pelin Hanım'ın almayı düşündüğü "oyuncakların çekiciliği" olarak tanımlanır. U evrensel kümesinde aşağıdaki şekilde verilen 7 tane oyuncak olduğunu düşünelim.

$$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\} \text{ ve } E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}, K = \{e_1, e_2, e_3, e_6\}$$

olsun. Burada, e_1 "ilginç" parametresini; e_2 "klasik" parametresini; e_3 "ucuz" parametresini; e_4 "yıkanabilir" parametresini; e_5 "büyük" parametresini; e_6 "kaliteli" parametresini temsil etsin. Buna göre oyuncak almaya gelen Pelin Hanım için F_K esnek kümesini oluşturalım. Bunun için önce verilen parametrelere göre oyuncakları sınıflandıralım:

$$F(e_1) = \{u_2, u_4\}, F(e_2) = \{u_3, u_6\}, F(e_3) = U, F(e_6) = \{u_1, u_3, u_5\}$$

Bu durumda esnek kümemiz:

$$(F, K) = \{(e_1, \{u_2, u_4\}), (e_2, \{u_3, u_6\}), (e_3, U), (e_6, \{u_1, u_3, u_5\})\}$$

şeklinde yazılabilir.

2.3.4. Tanım (F, K) , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $e \in K$ için; $F(e) = \emptyset$ ise (F, K) esnek kümesine K ya göre boş esnek küme denir ve $\emptyset_K$ ile gösterilir. (F, E) , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $e \in E$ için; $F(e) = \emptyset$ ise (F, E) esnek kümesine E ye göre boş esnek küme denir ve $\emptyset_E$ ile gösterilir (Ali ve diğerleri, 2009).

2.3.5. Tanım (F, K) , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $e \in K$ için; $F(e) = U$ ise (F, K) esnek kümesine K ya göre mutlak esnek küme denir ve U_K ile gösterilir. (F, E) , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $e \in E$ için; $F(e) = U$ ise (F, E) esnek kümesine E ye göre mutlak esnek küme denir ve U_E ile gösterilir (Ali ve diğerleri, 2009).

2.3.6. Tanım (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde esnek kümeler olsun. Eğer, $K \subseteq Y$ ve her $e \in K$ için $F(e) = G(e)$ ise (F, K) ya (G, Y) nin esnek alt kümesidir denir $(F, K) \subseteq (G, Y)$ gösterilir. Eğer (G, Y) , (F, K) nin esnek alt kümesi ise (F, K) ya (G, Y) nin esnek üst kümesidir denir ve $(F, K) \supseteq (G, Y)$ ile gösterilir. Eğer $(F, K) \subseteq (G, Y)$ ve $(G, Y) \subseteq (F, K)$ ise (F, K) ve (G, Y) esnek kümelerine esnek eşit kümeler denir (Pei ve Maio, 2005).

2.3.7. Tanım (F, K) , U üzerinde bir esnek küme olsun. (F, K) esnek kümesinin esnek tümleyeni $(F, K)^c = (F^c, K)$ ve her $e \in K$ için; $F^c(e) = U - F(e)$ şeklinde tanımlanır (Ali ve diğerleri, 2009).

Buradan, $(\emptyset_A)^c = U_A$, $(U_A)^c = \emptyset_A$, $(\emptyset_E)^c = U_E$, $(U_E)^c = \emptyset_E$, $(\emptyset_\emptyset)^c = \emptyset_\emptyset$, $((F, A)^c)^c = (F, A)$. Ayrıca, $\emptyset_A \subseteq (F, A) \subseteq U_A \subseteq U_E$ olduğu açıktır. (Ali ve diğerleri, 2010).

Esnek kümelerdeki işlemler, genel anlamda kısıtlanmış esnek küme işlemleri ve genişletilmiş esnek küme işlemleri olmak üzere iki kategoride tanımlanmıştır. Sırasıyla

önce kısıtlanmış esnek küme işlemleri, sonra genişletilmiş esnek küme işlemleri verilecektir.

2.3.8. Tanım (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin $(F, K) \cap_R (G, Y)$ ile gösterilen kısıtlanmış kesişimi $P = K \cap Y$ ve $\forall e \in P$ için $H(e) = F(e) \cap G(e)$ olmak üzere $(F, K) \cap_R (G, Y) = (H, P)$ olarak tanımlanır (Pei ve Miao, 2005). Burada, $P = K \cap Y = \emptyset$ ise $(F, K) \cap_R (G, Y) = \emptyset_\emptyset$ (Ali ve diğerleri, 2011)

2.3.9. Tanım (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin $(F, K) \cup_{\mathfrak{R}} (G, Y)$ ile gösterilen kısıtlanmış birleşimi $P = K \cap Y$ ve $\forall e \in P$ için $H(e) = F(e) \cup G(e)$ olmak üzere $(F, K) \cup_{\mathfrak{R}} (G, Y) = (H, P)$ olarak tanımlanır (Ali ve diğerleri, 2009). Burada, $P = K \cap Y = \emptyset$ ise $(F, K) \cup_R (G, Y) = \emptyset_\emptyset$ (Ali ve diğerleri, 2011).

2.3.10. Tanım (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin $(F, K) \setminus_{\mathfrak{R}} (G, Y)$ ile gösterilen kısıtlanmış farkı $P = K \cap Y$ ve $\forall e \in P$ için $H(e) = F(e) \setminus G(e)$ olmak üzere $(F, K) \setminus_{\mathfrak{R}} (G, Y) = (H, P)$ olarak tanımlanır (Ali ve diğerleri, 2009). Burada, $P = K \cap Y = \emptyset$ ise $(F, K) \setminus_R (G, Y) = \emptyset_\emptyset$ (Ali ve diğerleri, 2011)

2.3.11. Tanım (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin $(F, K) \Delta_{\mathfrak{R}} (G, Y)$ ile gösterilen kısıtlanmış simetrik farkı $P = K \cap Y$ ve $\forall e \in P$ için $H(e) = F(e) \Delta G(e)$ olmak üzere $(F, K) \Delta_{\mathfrak{R}} (G, Y) = (H, P)$ olarak tanımlanır (Sezgin ve Atagün, 2011). Burada, $P = K \cap Y = \emptyset$ ise $(F, K) \Delta_R (G, Y) = \emptyset_\emptyset$ (Ali ve diğerleri, 2011)

2.3.12. Tanım (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin genişletilmiş birleşimi (H, P) 'dir. Burada $P = K \cup Y$ ve $\forall e \in P$ için,

$$H(e) = \begin{cases} F(e), & e \in K - Y \\ G(e), & e \in Y - K \\ F(e) \cup G(e), & e \in K \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır, $(F, K) \cup_{\varepsilon} (G, Y) = (H, P)$ şeklinde yazılır (Maji ve diğerleri, 2003)

2.3.13. Tanım (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin

genişletilmiş kesişimi (H, P) 'dir. Burada $P = K \cup Y$ ve $\forall e \in P$ için,

$$H(e) = \begin{cases} F(e), & e \in K - Y \\ G(e), & e \in Y - K \\ F(e) \cap G(e), & e \in K \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır, $(F, K) \cap_{\varepsilon} (G, Y) = (H, P)$ şeklinde yazılır (Ali ve diğerleri, 2009).

2.3.14. Tanım (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin genişletilmiş fark (H, P) 'dir. Burada, $P = K \cup Y$ ve $\forall e \in P$ için,

$$H(e) = \begin{cases} F(e), & e \in K - Y \\ G(e), & e \in Y - K \\ F(e) \setminus G(e), & e \in K \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır, $(F, K) \setminus_{\varepsilon} (G, Y) = (H, P)$ şeklinde yazılır (Sezgin ve diğerleri, 2019).

2.3.15. Tanım (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin genişletilmiş simetrik farkı (H, P) 'dir. Burada, $P = K \cup Y$ ve $\forall e \in P$ için,

$$H(e) = \begin{cases} F(e), & e \in K - Y \\ G(e), & e \in Y - K \\ F(e) \Delta G(e), & e \in K \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır, $(F, K) \Delta_{\varepsilon} (G, Y) = (H, P)$ şeklinde yazılır (Stojanovic, 2021).

2.3.16. *Örnek* $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametreler kümesi $K = \{e_1, e_5\}$ ve $Y = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, E nin iki alt kümesi olsun. (F, K) ve (G, Y) , $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlı iki esnek küme olsun:

$$(F, K) = \{(e_1, \{h_1, h_2, h_4\}), (e_5, \{h_3, h_4, h_5, h_6\})\}, (G, Y) = \{(e_1, \{h_1, h_3, h_4\}), (e_2, \{h_5, h_6\}), \\ (e_3, \{h_2, h_4, h_6\}), (e_4, \{h_1, h_2, h_3, h_4\})\}.$$

Bu durumda,

- $(F,K) \cap_R (G,Y) = \{(e_1, \{h_1, h_4\})\}$
- $(F,K) \cup_R (G,Y) = \{(e_1, \{h_1, h_2, h_3, h_4\})\}$
- $(F,K) \setminus_R (G,Y) = \{(e_1, \{h_2\})\}$
- $(F,K) \Delta_R (G,Y) = \{(e_1, \{h_2, h_3\})\}$
- $(F,K) \cap_\varepsilon (G,Y) = \{(e_1, \{h_1, h_4\}), (e_2, \{h_5, h_6\}), (e_3, \{h_2, h_4, h_6\}), (e_4, \{h_1, h_2, h_3, h_4\}), (e_5, \{h_3, h_4, h_5, h_6\})\}$,
- $(F,K) \cup_\varepsilon (G,Y) = \{(e_1, \{h_1, h_2, h_3, h_4\}), (e_2, \{h_5, h_6\}), (e_3, \{h_2, h_4, h_6\}), (e_4, \{h_1, h_2, h_3, h_4\}), (e_5, \{h_3, h_4, h_5, h_6\})\}$,
- $(F,K) \setminus_\varepsilon (G,Y) = \{(e_1, \{h_2\}), (e_2, \{h_5, h_6\}), (e_3, \{h_2, h_4, h_6\}), (e_4, \{h_1, h_2, h_3, h_4\}), (e_5, \{h_3, h_4, h_5, h_6\})\}$,
- $(F,K) \Delta_\varepsilon (G,Y) = \{(e_1, \{h_2, h_3\}), (e_2, \{h_5, h_6\}), (e_3, \{h_2, h_4, h_6\}), (e_4, \{h_1, h_2, h_3, h_4\}), (e_5, \{h_3, h_4, h_5, h_6\})\}$

Çağman (2021), küme teorisinin yeni bir kavramı olarak, kapsayıcı tümleyen ve dışlayıcı tümleyen şeklinde iki yeni tümleyen tanımlamıştır. Gösterim kolaylığı açısından, biz bu ikili işlemleri, $+$ ve θ işlemleri şeklinde gösteriyoruz. K ve D iki küme olmak üzere, bu ikili işlemler, $K+Y=K' \cup Y$, $K \theta Y=K' \cap Y$. Sezgin ve diğerleri (2023c), bu iki işlem arasındaki ilişkileri incelemiş ve ayrıca bunun gibi üç yeni ikili işlem tanımlayıp, bunların birbirleriyle olan ilişkisini incelemiştir. K ve D iki küme olmak üzere $K*Y=K' \cup Y$, $K\gamma Y=K' \cap Y$, $K\lambda Y=K \cup Y$ (Sezgin ve diğerleri, 2023c)

Gösterim kolaylığı açısından, $\otimes$ kümelerdeki işlemleri göstermek üzere (yani burada $\otimes$; $\cap, \cup, -, \Delta, \lambda, \gamma, \theta, +, *$ gibi küme işlemlerini göstermek üzere) esnek kümelerdeki kısıtlanmış işlemler, genişletilmiş işlemler, tümleyenli genişletilmiş işlemler, esnek ikili parçalı işlemler, tümleyenli esnek ikili parçalı işlemler aşağıda verilen genellenmiş tanımlar ile genel formda verilebilir.

2.3.17. Tanım (F,K) ve (G,Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin $(F,K) \otimes_{\mathfrak{R}} (G,Y)$ ile gösterilen kısıtlanmış $\otimes$ işlemi, $P = K \cap Y$ ve $\forall e \in P$ için $H(e) = F(e) \otimes G(e)$ olmak üzere $(F,K) \otimes_{\mathfrak{R}} (G,Y) = (H,P)$ olarak tanımlanır. Burada, $P = K \cap Y = \emptyset$ ise $(F,K) \otimes_R (G,Y) = \emptyset_\emptyset$ (Ali ve diğerleri, 2009; Sezgin ve Atagün, 2011; Aybek, 2024).

2.3.18. Tanım (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin genişletilmiş $\otimes$ işlemi (H, P) 'dir. Burada, $P = K \cup Y$ ve $\forall e \in P$ için,

$$H(e) = \begin{cases} F(e), & e \in K - Y \\ G(e), & e \in Y - K \\ F(e) \otimes G(e), & e \in K \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(F, K) \otimes_\varepsilon (G, Y) = (H, P)$ şeklinde yazılır (Maji ve diğerleri, 2003; Ali ve diğerleri, 2009; Sezgin ve diğerleri, 2019; Stojanovic, 2021; Aybek, 2024).

2.3.19. Tanım (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin tümleyenli genişletilmiş $\otimes$ işlemi (H, P) 'dir. Burada $P = K \cup Y$ ve $\forall e \in P$ için,

$$H(e) = \begin{cases} F'(e), & e \in K - Y \\ G'(e), & e \in Y - K \\ F(e) \otimes G(e), & e \in K \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(F, K) \overset{*}{\otimes}_\varepsilon (G, Y) = (H, P)$ şeklinde yazılır (Saralioğlu, 2024; Demirci, 2024; Akbulut, 2024).

2.3.20. Tanım (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin ensek ikili parçalı fark işlemi (H, K) 'dir ve $\forall e \in K$ için,

$$H(e) = \begin{cases} F(e), & e \in K - Y \\ F(e) - G(e), & e \in K \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(F, K) \widetilde{\setminus} G, Y = (H, K)$ şeklinde gösterilir (Eren, 2019; Sezgin ve Çalışıcı, 2024).

2.3.21. Tanım (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin ensek ikili parçalı simetrik fark işlemi (H, K) 'dir ve $\forall e \in K$ için,

$$H(e) = \begin{cases} F(e), & e \in K - Y \\ F(e) \Delta G(e), & e \in K \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(F, K) \widetilde{\Delta} (G, Y) = (H, K)$ şeklinde gösterilir (Yavuz, 2023b).

2.3.22. Tanım (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin tümleyenli ensek ikili parçalı $\otimes$ işlemi (H, K) 'dir ve $\forall e \in K$ için,

$$H(e) = \begin{cases} F'(e), & e \in K - Y \\ F(e) \otimes G(e), & e \in K \cap Y \end{cases}$$

$*$
ile tanımlanır ve $(F, K) \widetilde{\otimes} (G, Y) = (H, K)$ şeklinde gösterilir (Sezgin ve Demirci, 2023; Sezgin ve Aybek, 2023; Sezgin ve diğerleri, 2023a; Sezgin ve diğerleri, 2023b; Sezgin ve Atagün, 2023; Sezgin ve Yavuz, 2023a; Sezgin ve Sarıalioğlu, 2024; Sezgin ve Çağman, 2024b)

2.3.23. Tanım (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin kartezyen çarpımı $(F, K) \times (G, Y) = (H, K \times Y)$ dir. Burada, $H = K \times Y$ ve $\forall (k, y) \in K \times Y$ için, $H(k, y) = F(k) \times G(y)$ şeklinde tanımlıdır (Babitha ve Sunil, 2010)

3. ESNEK İKİLİ PARÇALI KESİŞİM İŞLEMİ

Bu bölümde, esnek ikili parçalı kesişim adı verilen yeni esnek küme işlemi tanıtılmış, örneği verilmiş, işlemin cebirsel özellikleri ile diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkisine bakılarak dağılma kuralları ve $S_E(U)$ kümesi üzerinde bu işlemin hangi cebirsel yapıları oluşturduğu incelenmiş ve çok önemli sonuçlar elde edilmiştir.

3.1. Tanım (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde tanımlı iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin $(F, K) \widetilde{\cap} (G, Y)$ ile gösterilen esnek ikili parçalı kesişim işlemi $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

olmak üzere $(F, K) \widetilde{\cap} (G, Y) = (H, K)$ ile tanımlanır.

Burada, esnek kümelerin parametre kümeleri eşit ise $(F, K) \widetilde{\cap} (G, K) = (F, K) \cap_R (G, K) = (F, K) \cap_E (G, K)$ olur. Yani, K , E evrensel kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $S_K(U)$ kümesi üzerinde esnek ikili parçalı kesişim işlemi, kısıtlanmış kesişim ve genişletilmiş kesişim işlemleri ile çakışıktır.

3.2. *Örnek* $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesi, $K = \{e_1, e_4\}$, $Y = \{e_2, e_3, e_4\}$ E 'nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evrensel küme, (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde $(F, K) = \{(e_1, \{h_2, h_4, h_6\}), (e_4, \{h_1, h_2, h_6\})\}$, $(G, Y) = \{(e_2, \{h_1, h_2\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4, h_5\}), (e_4, \{h_2, h_4\})\}$ olarak tanımlanan iki esnek küme olsun. $(F, K) \widetilde{\cap} (G, Y) = (H, K)$ olmak üzere,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Burada, $K = \{e_1, e_4\}$, $K - Y = \{e_1\}$ olmak üzere, $\forall \omega \in K - Y = \{e_1\}$ için, $H(\omega) = F(\omega)$ olup, $H(e_1) = F(e_1) = \{h_2, h_4, h_6\}$, $\forall \omega \in K \cap Y = \{e_4\}$ için, $H(\omega) = F(\omega) \cap G(\omega)$ olup, $H(e_4) = F(e_4) \cap G(e_4) = \{h_1, h_2, h_6\} \cap \{h_2, h_4\} = \{h_2\}$. Böylece, $(F, K) \widetilde{\cap} (G, Y) = \{(e_1, \{h_2, h_4, h_6\}), (e_4, \{h_2\})\}$.

Teorem 3.3. (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1) $\sim_{\cap}$, $S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: $\sim_{\cap}$ 'nın $S_E(U)$ üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$\begin{aligned} \sim_{\cap} : S_E(U) \times S_E(U) &\rightarrow S_E(U) \\ ((F,K), (G,Y)) &\rightarrow (F,K) \sim_{\cap} (G,Y) = (H,K) \end{aligned}$$

olup, (F,K) ve (G,Y) , U üzerinde iki esnek küme olduğunda $(F,T) \sim_{\cap} (G,Y)$ de, U üzerinde bir esnek kümedir. $K \subseteq E$ sabit bir parametre kümesi olmak üzere, $\sim_{\cap}$ işleminin $S_K(U)$ üzerinde de bir ikili işlem olduğu açıktır.

2) $K \cap Y' \cap D = \emptyset$ ise $[(F,K) \sim_{\cap} (G,Y)] \sim_{\cap} (H,D) = (F,K) \sim_{\cap} [(G,Y) \sim_{\cap} (H,D)]$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F,K) \sim_{\cap} (G,Y) = (T,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(T,K) \sim_{\cap} (H,D) = (M,K)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in K - D \\ T(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K - Y) - D = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap D = K \cap Y' \cap D \\ [F(\omega) \cap G(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

$(G,Y) \sim_{\cap} (H,D) = (K,Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$K(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y-D \\ G(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(F, K) \underset{\cap}{\sim} (K, Y) = (S, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$S(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ F(\omega) \cap K(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Böylece,

$$S(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D \\ F(\omega) \cap [G(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in K \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

S fonksiyonundaki, $K-Y$ ye bakacak olursak, $K-Y = K \cap Y'$ olup, eğer $\omega \in Y'$ ise $\omega \in D-Y$ veya $\omega \in (Y \cup D)'$. Buradan $\omega \in K-Y$ ise $\omega \in K \cap Y' \cap D'$ ve $\omega \in K \cap Y' \cap D$ olur. Böylece, $K \cap Y' \cap D = \emptyset$ için $M=S$ olur. Yani uygun koşullar altında, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\underset{\cap}{\sim}$ işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

$$3) [(F, K) \underset{\cap}{\sim} (G, K)] \underset{\cap}{\sim} (H, K) = (F, K) \underset{\cap}{\sim} [(G, K) \underset{\cap}{\sim} (H, K)]$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F, K) \underset{\cap}{\sim} (G, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-K = \emptyset \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$(T, K) \underset{\cap}{\sim} (H, K) = (M, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in K-K = \emptyset \\ T(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece,

$$M(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in K-K = \emptyset \\ [F(\omega) \cap G(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına bakalım. $(G, K) \widetilde{\cap} (H, K) = (L, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$L(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ G(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$(F, K) \widetilde{\cap} (L, K) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cap L(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cap [G(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan $M = N$ olduğu görülür. Yani, $S_K(U)$ kümesi üzerinde de (parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler üzerinde), $\widetilde{\cap}$ işleminin birleşme özelliği vardır.

$$4) (F, K) \widetilde{\cap} (G, Y) \neq (G, Y) \widetilde{\cap} (F, K).$$

İspat: $(F, K) \widetilde{\cap} (G, Y) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(G, Y) \widetilde{\cap} (F, K) = (T, Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - K \\ G(\omega) \cap F(\omega), & \omega \in Y \cap K \end{cases}$$

Burada, sol taraftaki esnek kümenin parametre kümesi K ; sağ taraftaki esnek kümenin parametre kümesi Y dir. Böylece esnek kümelerin eşitliği tanımı gereği;

$$(F, K) \widetilde{\cap} (G, Y) \neq (G, Y) \widetilde{\cap} (F, K).$$

Fakat $(F, K) \underset{\cap}{\sim} (G, K) = (G, K) \underset{\cap}{\sim} (F, K)$ olduğu açıktır. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\underset{\cap}{\sim}$ işlemi, değişme özelliğine sahip değilken, $K \subseteq E$ sabit bir parametre kümesi olmak üzere $S_K(U)$ kümesi üzerinde $\underset{\cap}{\sim}$ işlemi değişme özelliğine sahiptir.

$$5) (F, K) \underset{\cap}{\sim} (F, K) = (F, K).$$

İspat: $(F, K) \underset{\cap}{\sim} (F, K) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cap F(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Burada, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F(\omega) \cap F(\omega) = F(\omega)$, böylece $(H, K) = (F, K)$. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\underset{\cap}{\sim}$ işlemi, denk güçlülük (idempotent) özelliğine sahiptir.

$$6) (F, K) \underset{\cap}{\sim} U_K = U_K \underset{\cap}{\sim} (F, K) = (F, K).$$

İspat: $U_K = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = U$. $(F, K) \underset{\cap}{\sim} (T, K) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cap T(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için; $H(\omega) = F(\omega) \cap T(\omega) = F(\omega) \cap U = F(\omega)$ olur ve böylece $(H, K) = (F, K)$.

$S_K(U)$ kümesi üzerinde $\underset{\cap}{\sim}$ işleminin birim elemanı U_K esnek kümesidir.

3.3.1. *Sonuç* Teorem 3.3 (1), (2), (4) ve (5) den, (F, K) , (G, Y) ve (H, D) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $K \cap Y' \cap D = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \underset{\cap}{\sim})$ komutatif olmayan, idempotent bir yarıgruptur yani komutatif olmayan bir banddır. $K \subseteq E$ sabit bir parametre kümesi olmak üzere, Teorem 3.3 (1), (3), (4), (5) ve (6) dan $(S_K(U), \underset{\cap}{\sim})$ cebirsel yapısı birimi U_K olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafestir.

$$7) (F, K) \underset{\cap}{\sim} U_E = (F, K).$$

İspat: $\emptyset_E = (S, E)$ olsun. Burada $\forall \omega \in E$; $S(\omega) = \emptyset$. $(F, K) \underset{\cap}{\sim} (S, E) = (H, K)$. Böylece, $\forall \omega \in K$ için;

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - E = \emptyset \\ F(\omega) \cap S(\omega), & \omega \in K \cap E = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için; $H(\omega) = F(\omega) \cap S(\omega) = F(\omega) \cap U = F(\omega)$ olur ve böylece $(H, K) = (F, K)$.

$S_E(U)$ kümesi üzerinde $\underset{\cap}{\sim}$ işleminin sağ birim elemanı U_E esnek kümesidir.

$$8) (F, K) \underset{\cap}{\sim} \emptyset_\emptyset = (F, K).$$

İspat: $\emptyset_\emptyset = (S, \emptyset)$ ve $(F, K) \underset{\cap}{\sim} (S, \emptyset) = (H, K)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - \emptyset = K \\ F(\omega) \cap S(\omega), & \omega \in K \cap \emptyset = \emptyset \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için; $H(\omega) = F(\omega)$ olup, $(H, K) = (F, K)$.

$S_E(U)$ kümesi üzerinde $\underset{\cap}{\sim}$ işleminin sağ birim elemanı $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir.

$$9) \emptyset_\emptyset \underset{\cap}{\sim} (F, K) = \emptyset_\emptyset.$$

İspat: $\emptyset_\emptyset = (S, \emptyset)$ ve $(S, \emptyset) \underset{\cap}{\sim} (F, K) = (H, \emptyset)$ olsun. $\emptyset_\emptyset$, parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme olduğu için, $(H, \emptyset) = \emptyset_\emptyset$ olur.

Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\underset{\cap}{\sim}$ işlemi için, her elemanın sağ birim eleman olan $\emptyset_\emptyset$ ye göre sol tersi, $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir. Ayrıca, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\underset{\cap}{\sim}$ işleminin sol yutan elemanı $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir.

3.3.2. *Sonuç* Teorem 3.3 (1), (2), (8) ve (9) dan, (F, K) , (G, Y) ve (H, D) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $K \cap Y' \cap D = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \underset{\cap}{\sim})$ cebirsel yapısı, sağ birimi $\emptyset_\emptyset$, her elemanın sol tersi $\emptyset_\emptyset$ olan idempotent bir sol-sağ sistemdir.

$$10) (F, K) \underset{\cap}{\sim} \emptyset_K = \emptyset_K \underset{\cap}{\sim} (F, K) = \emptyset_K.$$

İspat $\emptyset_K = (S, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için; $S(\omega) = \emptyset$. $(F, K) \underset{\cap}{\sim} (S, K) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cap S(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F(\omega) \cap S(\omega) = F(\omega) \cap \emptyset = \emptyset$ Buradan $(H, K) = \emptyset_K$.

$S_K(U)$ kümesi üzerinde $\underset{\cap}{\sim}$ işleminin yutan elemanı $\emptyset_K$ esnek kümesidir.

$$11) (F, K) \underset{\cap}{\sim} \emptyset_E = \emptyset_K.$$

İspat: $U_E = (T, E)$ olsun. Burada $\forall \omega \in E$ için, $T(\omega) = \emptyset$. $(F, K) \underset{\cap}{\sim} (T, E) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - E = \emptyset \\ F(\omega) \cap T(\omega), & \omega \in K \cap E = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F(\omega) \cap T(\omega) = F(\omega) \cap \emptyset = \emptyset$ olur. Böylece, $(H, K) = \emptyset_K$.

$$12) \emptyset_E \underset{\cap}{\sim} (F, K) = \emptyset_E.$$

İspat: $U_E = (T, E)$ olsun. Burada $\forall \omega \in E$ için, $T(\omega) = \emptyset$. $(T, E) \underset{\cap}{\sim} (F, K) = (H, E)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için ;

$$H(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in E - K = K' \\ F(\omega) \cap T(\omega), & \omega \in E \cap K = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F(\omega) \cap T(\omega) = F(\omega) \cap \emptyset = \emptyset$ olur. Böylece,

$$H(\omega) = \begin{cases} \emptyset, & \omega \in E - K = K' \\ \emptyset, & \omega \in E \cap K = K \end{cases}$$

Buradan, $(H, E) = \emptyset_E$.

$S_E(U)$ kümesi üzerinde $\widetilde{\cap}$ işleminin sol yutan elemanı $\emptyset_E$ esnek kümesidir.

$$13) (F, K) \widetilde{\cap} (F, K)^r = (F, K)^r \widetilde{\cap} (F, K) = \emptyset_K.$$

İspat: $(F, K)^r = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F'(\omega)$. $(F, K) \widetilde{\cap} (H, K) = (T, K)$ olsun.

Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = F(\omega) \cap H(\omega) = F(\omega) \cap F'(\omega) = \emptyset$ olur. Burada $(T, K) = \emptyset_K$.

$$14) [(F, K) \widetilde{\cap} (G, Y)]^r = (F, K) \overset{*}{\sim} (G, Y) \text{ ve } [(F, K) \widetilde{\cap} (G, K)]^r = (F, K)^r \overset{*}{\cup} (G, K)^r.$$

İspat: $(F, K) \widetilde{\cap} (G, Y) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(H, K)^r = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$T(\omega) = \begin{cases} F'(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cap G'(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Böylece, $(T, K) = (F, K) \overset{*}{\sim} (G, Y)$. Benzer şekilde, $[(F, K) \widetilde{\cap} (G, K)]^r = (F, K)^r \overset{*}{\cup} (G, K)^r$ olduğu

gösterilebilir. Bu son eşitlikte, esnek ikili parçalı birleşim yani $\widetilde{\cup}$ işlemi yerine, kısıtlanmış birleşim yani $\cup_R$ ve genişletilmiş birleşim yani $\cup_E$ işlemi de getirilse, Teorem 3.3 (14) özelliğinin sağlanacağı K , E evrensel kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $S_K(U)$ kümesi üzerinde bu işlemlerin çakışık olduğundan aşıkardır.

$$15) (F, K) \widetilde{\cap} (G, K) = U_K \Leftrightarrow (F, K) = (G, K) = U_K$$

İspat: $(F, K) \widetilde{\cap} (G, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$(T, K) = U_K$ olduğundan, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = U$. Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = F(\omega) \cap G(\omega) = U \Leftrightarrow \forall \omega \in K$ için, $F(\omega) = U$ ve $G(\omega) = U \Leftrightarrow (F, K) = (G, K) = U_K$.

$$16) (F, K) \widetilde{\cap} (G, K) = \emptyset_K \Leftrightarrow (G, K) \widetilde{\subseteq} (F, K)^r \text{ ve } (F, K) \widetilde{\subseteq} (G, K)^r$$

İspat: $(F, K) \widetilde{\cap} (G, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$(T, K) = \emptyset_K$ olduğundan, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = \emptyset$. Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = F(\omega) \cap G(\omega) = \emptyset \Leftrightarrow \forall \omega \in K$ için, $x \in G(\omega)$ ise $x \notin F(\omega)$, dolayısıyla $x \in F'(\omega)$. Buradan, $G(\omega) \subseteq F'(\omega)$. Dolayısıyla, $(G, K) \widetilde{\subseteq} (F, K)^r$.

Benzer şekilde, $(F, K) \widetilde{\cap} (G, K) = \emptyset_K$ ise $(F, K) \widetilde{\subseteq} (G, K)^r$ olduğu gösterilebilir. Tersine, $(G, K) \widetilde{\subseteq} (F, K)^r$ olsun. Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $x \in G(\omega)$ ise $x \notin F(\omega)$, dolayısıyla $\forall \omega \in K$; $F(\omega) \cap G(\omega) = \emptyset$. Böylece, $(F, K) \widetilde{\cap} (G, K) = \emptyset_K$.

$$17) \emptyset_K \widetilde{\subseteq} (F, K) \widetilde{\cap} (G, Y) \text{ ve } \emptyset_Y \widetilde{\subseteq} (G, Y) \widetilde{\cap} (F, K).$$

$$18) (F, K) \widetilde{\cap} (G, Y) \widetilde{\subseteq} U_K \text{ ve } (G, Y) \widetilde{\cap} (F, K) \widetilde{\subseteq} U_Y.$$

$$19) (F, K) \widetilde{\cap} (G, Y) \widetilde{\subseteq} (F, K) \text{ ve } (G, Y) \widetilde{\cap} (F, K) \widetilde{\subseteq} (G, Y).$$

İspat: $(F, K) \widetilde{\cap} (G, Y) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$\forall \omega \in K-Y; H(\omega)=F(\omega) \subseteq F(\omega), \forall \omega \in K \cap Y; H(\omega)=F(\omega) \cap G(\omega) \subseteq F(\omega),$
 $(F, K) \cong (F, K) \tilde{\cap} (G, Y). (G, Y) \cong (G, Y) \tilde{\cap} (F, K)$ benzer şekilde gösterilebilir.

20) $(F, K) \cong (G, Y)$ ise $(F, K) \tilde{\cap} (G, Y) = (F, K).$

İspat: $(F, K) \cong (G, Y)$ ise $K \subseteq Y$ ve her $\omega \in K$ için, $F(\omega) \subseteq G(\omega)$. $(F, K) \tilde{\cap} (G, Y) = (H, K)$ olsun.

Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y = \emptyset \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y = K \end{cases}$$

Böylece, $\forall \omega \in K; H(\omega) = F(\omega) \cap G(\omega) = F(\omega)$. Buradan, $(F, K) \tilde{\cap} (G, Y) = (F, K).$

21) $(F, K) \cong (G, K)$ ise $(F, K) \tilde{\cap} (H, Z) \cong (G, K) \tilde{\cap} (H, Z)$ ve $(H, Z) \tilde{\cap} (F, K) \cong (H, Z) \tilde{\cap} (G, K).$

İspat: $(F, K) \cong (G, K)$ olsun. Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $F(\omega) \subseteq G(\omega)$. $(F, K) \cap (H, Z) = (W, K)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in Z$ için,

$$W(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Z \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap Z \end{cases}$$

$(G, K) \tilde{\cap} (H, Z) = (L, Y)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in K$ için,

$$L(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in K-Z \\ G(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap Z \end{cases}$$

Böylece, $\forall \omega \in K-Z$ için, $W(\omega) = F(\omega) \subseteq G(\omega) = L(\omega)$ ve $\forall \omega \in K \cap Z$ için,

$W(\omega) = F(\omega) \cap H(\omega) \subseteq G(\omega) \cap H(\omega) = L(\omega)$ olup, $(F, K) \tilde{\cap} (H, Z) \cong (G, K) \tilde{\cap} (H, Z).$

Şimdi de $(H, Z) \tilde{\cap} (F, K) = (Y, K)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in Z$ için,

$$Y(\omega) = \begin{cases} H(\omega), & \omega \in Z-K \\ H(\omega) \cap F(\omega), & \omega \in Z \cap K \end{cases}$$

$(H, Z) \widetilde{\cap} (G, K) = (S, Y)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in K$ için,

$$S(\omega) = \begin{cases} H(\omega), & \omega \in Z - K \\ H(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in Z \cap K \end{cases}$$

Böylece, $\forall \omega \in Z - K$ için, $Y(\omega) = H(\omega) \subseteq H(\omega) = S(\omega)$ ve $\forall \omega \in Z \cap K$ için, $Y(\omega) = H(\omega) \cap F(\omega) \subseteq H(\omega) \cap G(\omega) = S(\omega)$ olup, $(H, Z) \widetilde{\cap} (F, K) \subseteq (H, Z) \widetilde{\cap} (G, K)$.

22) $(F, K) \widetilde{\cap} (H, Z) \subseteq (G, K) \widetilde{\cap} (H, Z)$ ise $(F, K) \subseteq (G, K)$ olmak zorunda değildir. Benzer şekilde, $(H, Z) \widetilde{\cap} (F, K) \subseteq (H, Z) \widetilde{\cap} (G, K)$ ise $(F, K) \subseteq (G, K)$ olmak zorunda değildir. Yani Teorem 3.3. (21) nin tersi doğru değildir.

İspat: Teorem 3.3 (21) nin tersinin doğru olmadığını göstermek için bir örnek verelim. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi, $K = \{e_1, e_3, e_5\}$ ve $Z = \{e_1, e_3\}$ E'nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme, (F, K) , (G, K) ve (H, Z) , U üzerinde $(F, K) = (e_1, h_2, h_5)$, $(e_3, \{h_1, h_2, h_5\})$, $(e_5, \{h_1, h_3, h_5\})$, $(G, K) = \{(e_1, \{h_2\})$, $(e_3, \{h_1, h_2\})$, $(e_5, \{h_2\})$, $(H, Z) = \{(e_1, \emptyset)$, $(e_3, \emptyset)\}$ olarak tanımlanan esnek kümeler olsun.

$(F, K) \widetilde{\cap} (H, Z) = (L, K)$ olmak üzere $\forall \omega \in K - Z = \{e_5\}$ için, $L(e_5) = F(e_5) = (h_1, h_3, h_5)$; $\forall \omega \in K \cap Z = \{e_1, e_3\}$ için, $L(e_1) = F(e_1) \cap H(e_1) = \emptyset$, $L(e_3) = F(e_3) \cap H(e_3) = \emptyset$. Buradan, $(F, K) \widetilde{\cap} (H, Z) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset), (e_5, (h_1, h_3, h_5))\}$.

$(G, K) \widetilde{\cap} (H, Z) = (T, K)$ olmak üzere $\forall \omega \in K - Z = \{e_5\}$ için, $T(e_5) = F(h_1, h_3, h_5)$; $\forall \omega \in K \cap Z = \{e_1, e_3\}$ için, $T(e_1) = G(e_1) \cap H(e_1) = \emptyset$, $T(e_3) = F(e_3) \cap H(e_3) = \emptyset$. Buradan, $(G, K) \widetilde{\cap} (H, Z) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset), (e_5, (h_1, h_3, h_5))\}$.

Buradan, $(F, K) \widetilde{\cap} (H, Z) \subseteq (G, K) \widetilde{\cap} (H, Z)$ olmasına rağmen $(F, K) \subseteq (G, K)$ olmadığı görülmektedir. Aynı örnek üzerinde, $(H, Z) \widetilde{\cap} (F, K) \subseteq (H, Z) \widetilde{\cap} (G, K)$ olmasına rağmen, $(F, K) \subseteq (G, K)$ olmak zorunda olmadığı gösterilebilir.

$$23) (F,T) \tilde{\subseteq} (G,T) \text{ ve } (K,V) \tilde{\subseteq} (L,V) \text{ ise } (F,T) \tilde{\cap} (K,V) \tilde{\subseteq} (G,T) \tilde{\cap} (L,V) \text{ ve } (K,V) \tilde{\cap} (F,T) \tilde{\subseteq} (L,V) \tilde{\cap} (G,T).$$

İspat: $(F,T) \tilde{\subseteq} (G,M)$ ve $(K,V) \tilde{\subseteq} (L,V)$ olsun. Buradan, $\forall \omega \in T$ için, $F(\omega) \subseteq G(\omega)$ ve $\forall \omega \in V$ için, $K(\omega) \subseteq L(\omega)$. $(F,T) \tilde{\cap} (K,V) = (Y,T)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in T$ için,

$$Y(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in T-V \\ F(\omega) \cap K(\omega), & \omega \in T \cap V \end{cases}$$

$(G,T) \tilde{\cap} (L,V) = (W,T)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in T$ için,

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in T-V \\ G(\omega) \cap L(\omega), & \omega \in T \cap V \end{cases}$$

$\forall \omega \in T-V$ için, $Y(\omega) = F(\omega) \subseteq G(\omega) = W(\omega)$; $\forall \omega \in T \cap V$ için, $Y(\omega) = F(\omega) \cap K(\omega) \subseteq G(\omega) \cap L(\omega) = W(\omega)$ olur. Böylece $(F,T) \tilde{\cap} (K,V) \tilde{\subseteq} (G,T) \tilde{\cap} (L,V)$.

Şimdi de $(K,V) \tilde{\cap} (F,T) = (M,V)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in V$ için,

$$M(\omega) = \begin{cases} K(\omega), & \omega \in V-T \\ K(\omega) \cap F(\omega), & \omega \in V \cap T \end{cases}$$

$(L,V) \tilde{\cap} (G,T) = (N,V)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in T$ için,

$$N(\omega) = \begin{cases} L(\omega), & \omega \in V-T \\ L(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in V \cap T \end{cases}$$

$\forall \omega \in V-T$ için, $M(\omega) = K(\omega) \subseteq L(\omega) = N(\omega)$; $\forall \omega \in V \cap T$ için, $M(\omega) = K(\omega) \cap F(\omega) \subseteq L(\omega) \cap G(\omega) = N(\omega)$ olur. Böylece $(K,V) \tilde{\cap} (F,T) \tilde{\subseteq} (L,V) \tilde{\cap} (G,T)$.

Klasik kümelerde $F \cap (F \cup G) = F \cup (F \cap G) = F$ olup, kesişim ve birleşim işlemleri yutma kuralı ile birbirine bağlıdır. Aşağıda ise değişme özelliğine sahip $S_K(U)$ kümesi üzerinde, esnek ikili parçalı kesişim ve birleşim işlemi için bu özelliğin analogisini veriyoruz:

$$24) (F,K) \tilde{\cap} [(F,K) \tilde{\cup} (G,K)] = (F,K) \text{ ve } (F,K) \tilde{\cup} [(F,K) \tilde{\cap} (G,K)] = (F,K).$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F, K) \widetilde{\cup} (G, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$(F, K) \widetilde{\cap} (T, K) = (M, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cap T(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece,

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cup [F(\omega) \cap G(\omega)], & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan,

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece, $(M, K) = (F, K)$. Yani, $(F, K) \widetilde{\cap} [(F, K) \widetilde{\cup} (G, K)] = (F, K)$.

Benzer şekilde, $(F, K) \widetilde{\cup} [(F, K) \widetilde{\cap} (G, K)] = (F, K)$ sağlandığı da gösterilir. Burada, esnek ikili parçalı birleşim yani $\widetilde{\cup}$ işlemi yerine, kısıtlanmış birleşim yani $\cup_R$ veya genişletilmiş birleşim yani $\cup_E$ işlemi de getirilse, Teorem 3.3 (24) özelliğinin sağlanacağı K, E evrensel kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $S_K(U)$ kümesi üzerinde bu işlemlerin çakışık olduğundan aşıkardır.

3.4. Teorem $(F, K), (G, Y), (H, D), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, aşağıdaki gibi esnek ikili parçalı kesişim işleminin diğer esnek küme işlemlere dağılması mevcuttur:

3.4.1. Teorem $(F, K), (G, Y), (H, D), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, aşağıdaki gibi esnek ikili parçalı kesişim işleminin kısıtlanmış işlemlere dağılması mevcuttur:

i) Esnek İkili Parçalı Kesişim İşleminin Kısıtlanmış İşlemlere Soldan Dağılıması:

$$1) (F, K) \underset{\cap}{\sim} [(G, Y) \cup_R (H, D)] = [(F, K) \underset{\cap}{\sim} (G, Y)] \cup_R [(F, K) \underset{\cap}{\sim} (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, Y) \cup_R (H, D) = (M, Y \cap D)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y \cap D$, $M(\omega) = G(\omega) \cup H(\omega)$. $(F, K) \underset{\cap}{\sim} (M, Y \cap D) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - (Y \cap D) \\ F(\omega) \cap M(\omega), & \omega \in K \cap (Y \cap D) \end{cases}$$

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - (Y \cap D) \\ F(\omega) \cap [G(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in K \cap (Y \cap D) \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım.

$[(F, K) \underset{\cap}{\sim} (G, Y)] \cup_R [(F, K) \underset{\cap}{\sim} (H, D)]$. $(F, K) \underset{\cap}{\sim} (G, Y) = (V, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(F, K) \underset{\cap}{\sim} (H, D) = (W, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$W(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \cup_R (W, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = V(\omega) \cup W(\omega)$,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cup F(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap (K - D) \\ F(\omega) \cup [F(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K - Y) \cap (K \cap D) \\ [F(\omega) \cap G(\omega)] \cup F(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap (K - D) \\ [F(\omega) \cap G(\omega)] \cup [F(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K \cap Y) \cap (K \cap D) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ F(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap [G(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

N fonksiyonunun ilk satırındaki parametre kümesi dikkate alındığında $K-(Y \cap D) = K \cap (Y \cap D)'$ olup eğer $\omega \in (Y \cap D)'$ ise $\omega \in Y-D$ veya $\omega \in D-Y$ veya $\omega \in Y \cup D$ olarak düşünebiliriz. Böylece, $\omega \in K-(Y \cap D)$ ise $\omega \in K \cap Y \cap D'$ veya $\omega \in K \cap Y' \cap D$ veya $\omega \in K \cap Y' \cap D'$. Böylece, $N=T$ olduğu görülür.

$$2) K \cap (Y \Delta D) = \emptyset \text{ ise } (F, K) \underset{\cap}{\sim} [(G, Y) \cap_R (H, D)] = [(F, K) \underset{\cap}{\sim} (G, Y)] \cap_R [(F, K) \underset{\cap}{\sim} (H, D)].$$

ii) Esnek İkili Parçalı Kesişim İşleminin Kısıtlanmış İşlemlere Sağdan Dağılıması:

$$1) [(F, K) \cap_R (G, Y)] \underset{\cap}{\sim} (H, D) = [(F, K) \underset{\cap}{\sim} (H, D)] \cap_R [(G, Y) \underset{\cap}{\sim} (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, K) \cap_R (G, Y) = (M, K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için, $M(\omega) = F(\omega) \cup G(\omega)$. $(M, K \cap Y) \underset{\cap}{\sim} (H, D) = (N, K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için,

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D \\ M(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ [F(\omega) \cap G(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $[(F, K) \underset{\cap}{\sim} (H, D)] \cap_R [(G, Y) \underset{\cap}{\sim} (H, D)]$.

$(F, K) \underset{\cap}{\sim} (H, D) = (V, K)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K$ için,

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G, Y) \underset{\cap}{\sim} (H, D) = (W, Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in Y$ için,

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ G(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \cap_R (W, Y) = (T, K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için, $T(\omega) = V(\omega) \cap W(\omega)$,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K-D) \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D \\ F(\omega) \cap [G(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K-D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cap H(\omega)] \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y-D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cap H(\omega)] \cap [G(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \\ F(\omega) \cap G(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece, $N=T$ olduğu görülür.

$$2)[(F,K) \cup_R (G,Y)] \tilde{\cap} (H,D) = [(F,K) \tilde{\cap} (H,D)] \cup_R [(G,Y) \tilde{\cap} (H,D)].$$

$$3)[(F,K) \Delta_R (G,Y)] \tilde{\cap} (H,D) = [(F,K) \tilde{\cap} (H,D)] \Delta_R [(G,Y) \tilde{\cap} (H,D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F,K) \Delta_R (G,Y) = (M, K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için, $M(\omega) = F(\omega) \Delta G(\omega)$. $(M, K \cap Y) \tilde{\cap} (H,D) = (N, K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için,

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D \\ M(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \Delta G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D \\ [F(\omega) \Delta G(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım.

$$[(F,K) \tilde{\cap} (H,D)] \Delta_R [(G,Y) \tilde{\cap} (H,D)]. (F,K) \tilde{\cap} (H,D) = (V,K) \text{ olsun. Burada, } \forall \omega \in K \text{ için,}$$

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$$(G,Y) \tilde{\cap} (H,D) = (W,Y) \text{ olsun. Burada, } \forall \omega \in Y \text{ için,}$$

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y-D \\ G(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \Delta_R (W, Y) = (T, K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için, $T(\omega) = V(\omega) \cap W(\omega)$,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \Delta G(\omega), & \omega \in (K-D) \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \Delta [G(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K-D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cap H(\omega)] \Delta G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y-D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cap H(\omega)] \Delta [G(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \Delta G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ [F(\omega) \Delta G(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece, $N = T$ olduğu görülür.

$$4) [(F, K) \gamma_R (G, Y)]_{\cap}^{\sim} (H, D) = [(F, K)_{\cap}^{\sim} (H, D)] \gamma_R [(G, Y)_{\cap}^{\sim} (H, D)].$$

$$5) [(F, K) \setminus_R (G, Y)]_{\cap}^{\sim} (H, D) = [(F, K)_{\cap}^{\sim} (H, D)] \setminus_R [(G, Y)_{\cap}^{\sim} (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, K) \setminus_R (G, Y) = (M, K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için, $M(\omega) = F(\omega) - G(\omega)$. $(M, K \cap Y)_{\cap}^{\sim} (H, D) = (N, K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için,

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D \\ M(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega) - G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ [F(\omega) - G(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım.

$$[(F, K)_{\cap}^{\sim} (H, D)] \setminus_R [(G, Y)_{\cap}^{\sim} (H, D)]. (F, K)_{\cap}^{\sim} (H, D) = (V, K) \text{ olsun. Burada, } \forall \omega \in K \text{ için,}$$

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-D \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G, Y) \tilde{\cap} (H, D) = (W, Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in Y$ için,

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y-D \\ G(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \setminus_R (W, Y) = (T, K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için, $T(\omega) = V(\omega) \cap W(\omega)$,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) - G(\omega), & \omega \in (K-D) \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) - [G(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K-D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cap H(\omega)] - G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y-D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cap H(\omega)] - [G(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) - G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ [F(\omega) - G(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece, $N = T$ olduğu görülür.

3.4.1.1. Sonuç Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cap_R)$ cebirsel yapısının birimi U_E olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 3.3.1* de $(S_E(U), \tilde{\cap})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup olduğu, Teorem 3.4.1 (i) (2) başlığında, $\tilde{\cap}$ işleminin $\cap_R$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartı ile soldan dağıldığı, Teorem 3.4.1 (ii) (1) başlığında, $\tilde{\cap}$ işleminin $\cap_R$ işlemine sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap (Z \Delta M) = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cap_R, \tilde{\cap})$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halkadır. $(S_E(U), \gamma_R)$, $(S_E(U), \setminus_R)$ cebirsel yapıları birleşmeli olmadığından yarıgrup oluşturamaz. Dolayısıyla bu cebirsel yapılar bir yarı-halka oluşturmaz.

3.4.1.2. Sonuç Ali ve diğerleri (2011), K , E evrensel kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $(S_K(U), \cap_R)$ cebirsel yapısının birimi U_K olan komutatif, idempotent bir monoid yani

sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. Sonuç 3.3.1.'de $(S_K(U), \tilde{\cap})$ cebirsel yapısının da birimi U_K olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu gösterildi. Teorem 3.4.1 (i) (2) başlığından $S_K(U)$ kümesi üzerinde, $\tilde{\cap}$ işleminin U_R işlemine soldan dağıldığı, Teorem 3.4.1 (ii) (1) başlığından, $\tilde{\cap}$ işleminin U_R işlemine sağdan dağıldığı kolaylıkla gösterilebilir. Sonuç olarak, hiçbir şart olmaksızın, $(S_K(U), \cap_R, \tilde{\cap})$ cebirsel yapısı komutatif, idempotent, birimli, sıfırsız bir yarı-halkadır. $(S_K(U), \gamma_R)$, $(S_K(U), \setminus_R)$ cebirsel yapıları birleşmeli olmadığından, yarıgrup oluşturamaz. Dolayısıyla bu cebirsel yapılar bir yarı-halka ve sağ yarı-halka oluşturamaz.

3.4.1.3. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), U_R)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_E$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 3.3.1* de $(S_E(U), \tilde{\cap})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup olduğu, Teorem 3.4.1 (i) (1) başlığında, $\tilde{\cap}$ işleminin U_R işlemine soldan dağıldığı, Teorem 3.4.1 (ii) (2) başlığında, $\tilde{\cap}$ işleminin U_R işlemine altından sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), U_R, \tilde{\cap})$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halkadır.

Ayrıca, Teorem 3.3 (12) de, $\emptyset_E \tilde{\cap} (F, T) = \emptyset_E$, yani $\emptyset_E$ nin $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{\cap}$ işlemine göre sol yutan eleman olduğu gösterilmişti. Sonuç olarak, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında, $(S_E(U), U_R, \tilde{\cap})$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, idempotent, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halkadır. Üstelik, $(F, K) \tilde{\cap} \emptyset_E \neq \emptyset_E$ olduğundan, $(S_E(U), U_R, \tilde{\cap})$ sıfır simetrik olmayan bir (sağ) yakın yarı-halkadır.

3.4.1.4. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_K(U), U_R)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_K$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 3.3.1* de $(S_K(U), \tilde{\cap})$ cebirsel yapısının, birimi U_K olan, komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes olduğu, 3.4.1. (i) (1)

başlığında, $\tilde{\cap}$ işleminin $\cup_R$ işlemine soldan, Teorem 3.4.1 (ii) (2) başlığında, $\tilde{\cap}$ işleminin $\cap_R$ işlemine sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Ayrıca, Teorem 3.3 (10)'da $(F, K) \tilde{\cap} \emptyset_K = \emptyset_K \tilde{\cap} (F, K) = \emptyset_K$ ve $(F, K) \cup_R \emptyset_K = \emptyset_K \cup_R (F, K) = (F, K)$ olduğundan, $(S_K(U), \cup_R, \tilde{\cap})$ cebirsel yapısı komutatif, idempotent, birimli bir hemihalkadır. Benzer şekilde, $(F, K) \tilde{\cap} \emptyset_K = \emptyset_K \tilde{\cap} (F, K) = \emptyset_K$ ve $(F, K) \Delta_R \emptyset_K = \emptyset_K \Delta_R (F, K) = (F, K)$ olduğundan, $(S_K(U), \Delta_R, \tilde{\cap})$ cebirsel yapısı komutatif, çarpımsal idempotent, birimli bir hemihalkadır.

3.4.1.5. *Sonuç* Sezgin ve Çağman (2024b), $(S_K(U), \Delta_R)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_K$ olup, her elemanın tersi kendisi olan, değişmeli bir grup olduğunu göstermişti. Sonuç 3.3.1 de $(S_K(U), \tilde{\cap})$ cebirsel yapısının, birimi U_K olan, komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes, dolayısıyla bir yarıgrup olduğu, Teorem 3.4.1 (i) (1) başlığında, $\tilde{\cap}$ işleminin Δ_R işlemine soldan, Teorem 3.4.1 (ii) (2) başlığında, $\tilde{\cap}$ işleminin Δ_R işlemine sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Dolayısıyla $(S_K(U), \Delta_R, \tilde{\cap})$ cebirsel yapısı birimli değişmeli bir halkadır. Ayrıca, $(F, K)^2 = (F, K) \tilde{\cap} (F, K)$ olduğundan, $(S_K(U), \Delta_R, \tilde{\cap})$ cebirsel yapısı bir Bool Halkasıdır. $(F, K) \tilde{\Delta} (F, K) = \emptyset_K$ ve $(F, K) \tilde{\cap} (G, K) = (G, K) \tilde{\cap} (F, K)$ olması, $(S_K(U), \Delta_R, \tilde{\cap})$ cebirsel yapısının bir Bool halkası olmasının doğal sonucudur.

3.4.1.6. *Sonuç* $(S_K(U), \cup_R)$ cebirsel yapısı, birimi $\emptyset_K$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes dolayısıyla bir yarıgruptur. $(S_K(U), \tilde{\cap})$ cebirsel yapısı, birimi U_A olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes dolayısıyla bir yarıgruptur. Teorem 3.3 (24) de, $\tilde{\cap}$ ve $\cup_R$ işlemlerinin yutan kuralını sağladığı gösterilmiştir. Dolayısıyla, $(S_K(U), \emptyset_K, U_K, \cup_R, \tilde{\cap})$ sınırlı bir kafestir. Ayrıca, $\forall (F, K) \in S_K(U)$ için, $(F, K) \cup_R (F, K)^r = U_K$ ve $(F, K) \tilde{\cap} (F, K)^r = \emptyset_K$ olduğundan, $(S_K(U), \emptyset_K, U_K, \cup_R, \tilde{\cap})$ tümlemeli sınırlı bir kafestir. Üstelik, Teorem 3.4.1 (i) (1) başlığında, $\tilde{\cup}$ işleminin $\cap_R$ işlemine soldan, Teorem 3.4.1. (ii) (2) başlığında, $\tilde{\cap}$ işleminin $\cup_R$ işlemine sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Dolayısıyla, $(S_K(U), \emptyset_K, U_K, \cup_R, \tilde{\cap})$ dağılmalı, tümlemeli, sınırlı bir kafes, dolayısıyla bir Boolean Cebiridir.

Üstelik, $[(F,K) \underset{\cap}{\sim} (G,K)]^r = (F,K)^r \cup_R (G,K)^r$ ve $[(F,K) \cup_R (G,K)]^r = (F,K)^r \underset{\cap}{\sim} (G,K)^r$ yani De Morgan kuralı da sağladığından, $(S_K(U), \emptyset_K, U_K, ^c, \cup_R, \underset{\cap}{\sim})$ De Morgan Cebiridir.

Ayrıca, $\forall (F,K), (G,K) \in S_K(U)$ için, $(F,K) \underset{\cap}{\sim} (F,K)^r = \emptyset_K \overset{\sim}{\subseteq} (G,K) \cup_R (G,K)^r = U_K$ olduğundan, $(S_K(U), \emptyset_K, U_K, ^c, \cup_R, \underset{\cap}{\sim})$ bir Kleene Cebiridir. Ayrıca, $(F,K) \underset{\cap}{\sim} (F,K)^r = \emptyset_K$ olduğu bilinmektedir ve $(F,K) \underset{\cap}{\sim} (G,K) = \emptyset_K$ iken $(G,K) \overset{\sim}{\subseteq} (F,K)^r$ olduğu Teorem 3.3 (16) da gösterilmişti. Bu $(F,K)^r$ nin (F,K) nin sözde tümleyeni olduğunu gösterir.

Ayrıca, $(F,K)^r \cup_R [(F,K)^r]^r = U_K$ olduğundan, $(S_K(U), \emptyset_K, U_K, ^c, \cup_R, \underset{\cap}{\sim})$ Stone'nun birimi özelliğini sağlar ve $(S_K(U), \emptyset_K, U_K, ^c, \cup_R, \underset{\cap}{\sim})$ bir Stone cebiridir. Burada hemen not edelim ki, $(S_E(U), \underset{\cap}{\sim})$ cebirsel yapısı, komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup olduğu için, $\cup_R$ ile birlikte $S_E(U)$ kümesi üzerinde bir kafes oluşturma durumu yoktur.

3.4.2. Teorem $(F,K), (G,Y), (H,D), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, aşağıdaki gibi esnek ikili parçalı kesişim işleminin genişletilmiş işlemlere dağılması mevcuttur:

$$1) K \cap (Y \Delta D) = \emptyset \text{ ise } (F,K) \underset{\cap}{\sim} [(G,Y) \cup_\varepsilon (H,D)] = [(F,K) \underset{\cap}{\sim} (G,Y)] \cup_\varepsilon [(F,K) \underset{\cap}{\sim} (H,D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G,Y) \cup_\varepsilon (H,D) = (M, Y \cup D)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y \cup D$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ H(\omega), & \omega \in D - Y \\ G(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(F,K) \underset{\cap}{\sim} (M, Y \cup D) = (N,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - (Y \cup D) \\ F(\omega) \cap M(\omega), & \omega \in K \cap (Y \cup D) \end{cases}$$

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - (Y \cup D) = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap (Y - D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap (D - Y) = K \cap Y' \cap D \\ F(\omega) \cap [(G(\omega) \cup H(\omega))], & \omega \in K \cap Y \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım:

$[(F, K) \tilde{\cap} (G, Y)] \cup_{\varepsilon} [(F, K) \tilde{\cap} (H, D)]$. $(F, K) \tilde{\cap} (G, Y) = (V, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(F, K) \tilde{\cap} (H, D) = (W, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \cup_{\varepsilon} (W, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ W(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ V(\omega) \cup W(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cup F(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap (K - D) = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cup [F(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K - Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y' \cap D \\ [F(\omega) \cap G(\omega)] \cup F(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap (K - D) = K \cap Y \cap D' \\ [F(\omega) \cap G(\omega)] \cup [F(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K \cap Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap (K - D) = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y' \cap D \\ F(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap (K - D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap [G(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in (K \cap Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

$K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D' = \emptyset$ için $N = T$ olduğu görülür. $K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D' = \emptyset$ şartının, $K \cap (Y \Delta D) = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikârdır.

$$2) (F, K) \tilde{\cap} [(G, Y) \cap_{\varepsilon} (H, D)] = [(F, K) \tilde{\cap} (G, Y)] \cap_{\varepsilon} [(F, K) \tilde{\cap} (H, D)].$$

ii) Esnek İkili Parçalı Kesişim İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1) [(F,K) \cup_{\varepsilon} (G,Y)] \tilde{\cap} (H,D) = [(F,K) \tilde{\cap} (H,D)] \cup_{\varepsilon} [(G,Y) \tilde{\cap} (H,D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F,K) \cup_{\varepsilon} (G,Y) = (M, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ G(\omega), & \omega \in Y - K \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(M, K \cup Y) \tilde{\cap} (H,D) = (N, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in (K \cup Y) - D \\ M(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K \cup Y) \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K - Y) - D = K \cap Y' \cap D' \\ G(\omega), & \omega \in (Y - K) - D = K' \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap D = K \cap Y' \cap D \\ G(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (Y - K) \cap D = K' \cap Y \cap D \\ [F(\omega) \cup G(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F,K) \tilde{\cap} (H,D)] \cup_{\varepsilon} [(G,Y) \tilde{\cap} (H,D)]$. $(F,K) \tilde{\cap} (H,D) = (V,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G,Y) \tilde{\cap} (H,D) = (W,Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ G(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V,K) \cup_{\varepsilon} (W,Y) = (T, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K-Y \\ W(\omega), & \omega \in Y-K \\ V(\omega) \cup W(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-D)-Y = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap D)-Y = K \cap Y' \cap D \\ G(\omega), & \omega \in (Y-D)-K = K' \cap Y \cap D' \\ G(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (Y \cap D)-K = K' \cap Y \cap D \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in (K-D) \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cup [G(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K-D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cap H(\omega)] \cup G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y-D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cap H(\omega)] \cup [G(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ G(\omega), & \omega \in K' \cap Y \cap D' \\ G(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K' \cap Y \cap D \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ [F(\omega) \cup G(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece $N=T$ olduğu görülür.

$$2) [(F,K) \cap_{\varepsilon} (G,Y)] \tilde{\cap} (H,D) = [(F,K) \tilde{\cap} (H,D)] \cap_{\varepsilon} [(G,Y) \tilde{\cap} (H,D)].$$

$$3) [(F,K) \Delta_{\varepsilon} (G,Y)] \tilde{\cap} (H,D) = [(F,K) \tilde{\cap} (H,D)] \Delta_{\varepsilon} [(G,Y) \tilde{\cap} (H,D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F,K) \Delta_{\varepsilon} (G,Y) = (M, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ G(\omega), & \omega \in Y-K \\ F(\omega) \Delta G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(M, K \cup Y) \tilde{\cap} (H,D) = (N, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in (K \cup Y) - D \\ M(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K \cup Y) \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K - Y) - D = K \cap Y' \cap D' \\ G(\omega), & \omega \in (Y - K) - D = K' \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \Delta G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap D = K \cap Y' \cap D \\ G(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (Y - K) \cap D = K' \cap Y \cap D \\ [F(\omega) \Delta G(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F, K) \tilde{\cap} (H, D)] \Delta_\varepsilon [(G, Y) \tilde{\cap} (H, D)]$. $(F, K) \tilde{\cap} (H, D) = (V, K)$

olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G, Y) \tilde{\cap} (H, D) = (W, Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ G(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \Delta_\varepsilon (W, Y) = (T, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K - Y \\ W(\omega), & \omega \in Y - K \\ V(\omega) \Delta W(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K - D) - Y = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap D) - Y = K \cap Y' \cap D \\ G(\omega), & \omega \in (Y - D) - K = K' \cap Y \cap D' \\ G(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (Y \cap D) - K = K' \cap Y \cap D \\ F(\omega) \Delta G(\omega), & \omega \in (K - D) \cap (Y - D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \Delta [G(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K - D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cap H(\omega)] \Delta G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y - D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cap H(\omega)] \Delta [G(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ G(\omega), & \omega \in K' \cap Y \cap D' \\ G(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K' \cap Y \cap D \\ F(\omega) \Delta G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ [F(\omega) \Delta G(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece $N=T$ olduğu görülür.

$$4) [(F,K) \gamma_\varepsilon (G,Y)] \tilde{\cap} (H,D) = [(F,K) \tilde{\cap} (H,D)] \gamma_\varepsilon [(G,Y) \tilde{\cap} (H,D)].$$

$$5) [(F,K) \setminus_\varepsilon (G,Y)] \tilde{\cap} (H,D) = [(F,K) \tilde{\cap} (H,D)] \setminus_\varepsilon [(G,Y) \tilde{\cap} (H,D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F,K) \setminus_\varepsilon (G,Y) = (M, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ G(\omega), & \omega \in Y - K \\ F(\omega) - G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(M, K \cup Y) \tilde{\cap} (H,D) = (N, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in (K \cup Y) - D \\ M(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K \cup Y) \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K - Y) - D = K \cap Y' \cap D' \\ G(\omega), & \omega \in (Y - K) - D = K' \cap Y \cap D' \\ F(\omega) - G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap D = K \cap Y' \cap D \\ G(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (Y - K) \cap D = K' \cap Y \cap D \\ [F(\omega) - G(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F,K) \tilde{\cap} (H,D)] \setminus_\varepsilon [(G,Y) \tilde{\cap} (H,D)]$. $(F,K) \tilde{\cap} (H,D) = (V,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-D \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G, Y) \sim_{\cap} (H, D) = (W, Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y-D \\ G(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \setminus_{\varepsilon} (W, Y) = (T, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K-Y \\ W(\omega), & \omega \in Y-K \\ V(\omega) - W(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-D)-Y = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap D)-Y = K \cap Y' \cap D \\ G(\omega), & \omega \in (Y-D)-K = K' \cap Y \cap D' \\ G(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (Y \cap D)-K = K' \cap Y \cap D \\ F(\omega) - G(\omega), & \omega \in (K-D) \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) - [G(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K-D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cap H(\omega)] - G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y-D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cap H(\omega)] - [G(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ G(\omega), & \omega \in K' \cap Y \cap D' \\ G(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K' \cap Y \cap D \\ F(\omega) - G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ [F(\omega) - G(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece $N=T$ olduğu görülür.

Aşağıda yer alan eşitlikler ise $K \cap Y \cap D = \emptyset$ şartı altında sağlanır. İspatları benzer şekilde yapıldığı için, ispatsız şekilde verilmiştir.

$$6) [(F,K) +_{\varepsilon} (G,Y)]_{\sim} (H,D) = [(F,K)_{\sim} (H,D)] +_{\varepsilon} [(G,Y)_{\sim} (H,D)].$$

$$7) [(F,K) \lambda_{\varepsilon} (G,Y)]_{\sim} (H,D) = [(F,K)_{\sim} (H,D)] \lambda_{\varepsilon} [(G,Y)_{\sim} (H,D)].$$

$$8) [(F,K) *_{\varepsilon} (G,Y)]_{\sim} (H,D) = [(F,K)_{\sim} (H,D)] *_{\varepsilon} [(G,Y)_{\sim} (H,D)].$$

$$9) [(F,K) \theta_{\varepsilon} (G,Y)]_{\sim} (H,D) = [(F,K)_{\sim} (H,D)] \theta_{\varepsilon} [(G,Y)_{\sim} (H,D)].$$

3.4.2.1. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cap_{\varepsilon})$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_{\emptyset}$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 3.3.1* de $(S_E(U), \sim_{\cap})$ cebirsel yapısının, (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup olduğu, Teorem 3.4.2 (i) (2) başlığında, $\sim_{\cap}$ işleminin $\cap_{\varepsilon}$ işlemine soldan dağıldığı, Teorem 3.4.2 (ii) (2) başlığında, $\sim_{\cap}$ işleminin $\cap_{\varepsilon}$ işlemine sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cap_{\varepsilon}, \sim_{\cap})$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halkadır.

3.4.2.2. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), K, E evrensel kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $(S_K(U), \cap_{\varepsilon})$ cebirsel yapısının birimi U_K olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 3.3.1* de $(S_K(U), \sim_{\cap})$ cebirsel yapısının da birimi U_K olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu gösterildi. Teorem 3.4.2 (i) (2) başlığından $S_K(U)$ kümesi üzerinde, $\sim_{\cap}$ işleminin $\cap_{\varepsilon}$ işlemine soldan dağıldığı, Teorem 3.4.2 (ii) (2) başlığından, $\sim_{\cap}$ işleminin $\cap_{\varepsilon}$ işlemine sağdan dağıldığı kolaylıkla gösterilebilir. Sonuç olarak, hiçbir şart olmaksızın, $(S_K(U), \cap_{\varepsilon}, \sim_{\cap})$ cebirsel yapısı komutatif, idempotent, birimli, sıfırsız bir yarı-halkadır. Benzer şekilde, hiçbir şart olmaksızın, $(S_K(U), \Delta_{\varepsilon}, \sim_{\cap})$ cebirsel yapısı komutatif, çarpımsal idempotent, birimli, sıfırsız bir yarı-halkadır. $(S_K(U), \setminus_{\varepsilon}, \sim_{\cap}), (S_K(U), \gamma_{\varepsilon}, \sim_{\cap}), (S_K(U), *_{\varepsilon}, \sim_{\cap}), (S_K(U), \theta_{\varepsilon}, \sim_{\cap}), (S_K(U), +_{\varepsilon}, \sim_{\cap}), (S_K(U), \lambda_{\varepsilon}, \sim_{\cap})$

cebirsel yapılarında ise ilk işlem $S_K(U)$ kümesinde birleşmeli olmadığı için yarıgrup oluşturamaz, dolayısıyla bu cebirsel yapılar yarı-halka veya sağ-yarı halka oluşturamaz.

3.4.2.3. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cup_\varepsilon)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_\emptyset$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 3.3.1.* de $(S_E(U), \tilde{\cap})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup olduğu, Teorem 3.4.2 (i) (1) başlığında, $\tilde{\cap}$ işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartı ile soldan dağıldığı, Teorem 3.4.2 (ii) (1) başlığında, $\tilde{\cap}$ işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z' \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \tilde{\cap})$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halkadır.

Ayrıca, Teorem 3.3 (9)'da, $\emptyset_\emptyset \tilde{\cap} (F, T) = \emptyset_\emptyset$, yani $\emptyset_\emptyset$ nin $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{\cap}$ işlemine göre sol yutan eleman olduğu gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında, $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \tilde{\cap})$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, idempotent, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halkadır. Üstelik, $(F, K) \tilde{\cap} \emptyset_\emptyset \neq \emptyset_\emptyset$ olduğundan, $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \tilde{\cap})$ sıfır simetrik olmayan bir (sağ) yakın yarı-halkadır.

Benzer şekilde, $(S_E(U), \Delta_\varepsilon, \tilde{\cap})$, $(S_E(U), \setminus_\varepsilon, \tilde{\cap})$, $(S_E(U), \gamma_\varepsilon, \tilde{\cap})$ cebirsel yapılarının da $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında bir komutatif ve sıfır simetrik olmayan, çarpımsal idempotent, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı halkadır. $(S_E(U), +_\varepsilon, \tilde{\cap})$, $(S_E(U), \lambda_\varepsilon, \tilde{\cap})$, $(S_E(U), *_\varepsilon, \tilde{\cap})$, $(S_E(U), \theta_\varepsilon, \tilde{\cap})$ cebirsel yapılarının da $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları altında, sıfır simetrik ve komutatif olmayan, çarpımsal idempotent, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halka olduğu gösterilebilir.

Buradaki, ilk işlemlerin $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında (Δ_ε işlemi şartsız bir şekilde) birleşmeli olduğu, Aybek (2023) tarafından gösterilmiştir.

3.4.2.4. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_K(U), \cup_\varepsilon)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_K$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç* 3.3.2 de $(S_K(U), \tilde{\cap})$ cebirsel yapısının, birimi U_K olan, komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes olduğu, Teorem 3.4.2 (i) (1) başlığında, $\tilde{\cap}$ işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine soldan, Teorem 3.4.2 (ii) (1) başlığında, $\tilde{\cap}$ işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Ayrıca, Teorem 3.3 (10)'da $(F, K) \tilde{\cap} \emptyset_K = \emptyset_K \tilde{\cap} (F, K) = \emptyset_K$ ve $(F, K) \cup_\varepsilon \emptyset_K = \emptyset_K \cup_\varepsilon (F, K) = (F, K)$ olduğundan, $(S_K(U), \cup_\varepsilon, \tilde{\cap})$ cebirsel yapısı komutatif, idempotent, birimli bir hemihalkadır.

Üstelik, $(F, K) \tilde{\cap} \emptyset_K = \emptyset_K \tilde{\cap} (F, K) = \emptyset_K$ ve $(F, K) \Delta_\varepsilon \emptyset_A = \emptyset_A \Delta_\varepsilon (F, K) = (F, K)$ olduğundan, $(S_K(U), \Delta_\varepsilon, \tilde{\cap})$ cebirsel yapısı da komutatif, idempotent, birimli bir hemihalkadır.

3.4.2.5. *Sonuç* $(S_K(U), \cup_\varepsilon)$ cebirsel yapısı, birimi $\emptyset_K$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes dolayısıyla bir yarıgruptur. $(S_K(U), \tilde{\cap})$ cebirsel yapısı, birimi U_K olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes dolayısıyla bir yarıgruptur. Teorem 3.3 (24) de, $\tilde{\cap}$ ve $\cup_\varepsilon$ işlemlerinin yutan kuralını sağladığı gösterilmiştir. Dolayısıyla, $(S_K(U), \emptyset_K, U_K, \cup_\varepsilon, \tilde{\cap})$ sınırlı bir kafestir. Ayrıca, $\forall (F, K) \in S_K(U)$ için, $(F, K) \cup_\varepsilon (F, K)^r = U_K$ ve $(F, K) \tilde{\cap} (F, K)^r = \emptyset_K$ olduğundan, $(S_K(U), \emptyset_K, U_K, \cup_\varepsilon, \tilde{\cap})$ tümlemeli sınırlı bir kafestir. Üstelik, Teorem 3.4.2 (i) (1) başlığında, $\tilde{\cap}$ işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine soldan, Teorem 3.4.2 (ii) (1) başlığında, $\tilde{\cap}$ işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Dolayısıyla, $(S_K(U), \emptyset_K, U_K, \cup_\varepsilon, \tilde{\cap})$ dağılmalı, tümlemeli, sınırlı bir kafes, dolayısıyla bir Boolean Cebiridir.

Üstelik, $[(F, K) \tilde{\cap} (G, K)]^r = (F, K)^r \cup_\varepsilon (G, K)^r$ ve $[(F, K) \cup_\varepsilon (G, K)]^r = (F, K)^r \tilde{\cap} (G, K)^r$ yani De Morgan kuralı da sağladığından, $(S_K(U), \emptyset_K, U_K, \cup_\varepsilon, \tilde{\cap})$ De Morgan Cebiridir. Ayrıca, $\forall (F, K), (G, K) \in S_K(U)$ için, $(F, K) \tilde{\cap} (F, K)^r = \emptyset_K \cong (G, K) \cup_\varepsilon (G, A)^r = U_K$ olduğundan, $(S_K(U), \emptyset_K, U_K, \cup_\varepsilon, \tilde{\cap})$ bir Kleene Cebiridir. Ayrıca, $(F, K) \tilde{\cap} (F, K)^r = \emptyset_K$ olduğu bilinmektedir ve $(F, K) \tilde{\cap} (G, K) = \emptyset_K$ iken $(G, K) \cong (F, K)^r$ olduğu Teorem 3.3 (16) da gösterilmiştir. Bu $(F, K)^r$ nin (F, K) nin sözde tümleyen olduğunu gösterir. Ayrıca,

$(F,K)^r \cup_\varepsilon [(F,K)^r]^r = U_K$ olduğundan, $(S_K(U), \emptyset_K, U_K, ^c, \cup_\varepsilon, \sim_\cap)$ Stone'nun birimi özelliğini sağlar ve $(S_K(U), \emptyset_K, U_K, ^c, \cup_\varepsilon, \sim_\cap)$ bir Stone cebiridir.

Burada hemen not edelim ki, $(S_E(U), \sim_\cap)$ cebirsel yapısı, komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup olduğu için, $\cup_\varepsilon$ ile birlikte $S_E(U)$ kümesi üzerinde kafes oluşturma durumu yoktur.

3.4.3. Teorem $(F,K), (G,Y), (H,D), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, aşağıdaki gibi esnek ikili parçalı kesişim işleminin esnek ikili parçalı işlemlere dağılması mevcuttur:

i) Esnek İkili Parçalı Kesişim İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Soldan Dağılması:

$$1) K \cap Y \cap D' = \emptyset \text{ ise } (F,K) \sim_\cap [(G,Y) \sim_\cup (H,D)] = [(F,K) \sim_\cap (G,Y)] \sim_\cup [(F,K) \sim_\cap (H,D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G,Y) \sim_\cup (H,D) = (M,Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y-D \\ G(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(F,K) \sim_\cap (M,Y) = (N,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ F(\omega) \cap M(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap [G(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in K \cap Y \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $[(F,K) \sim_\cap (G,Y)] \sim_\cup [(F,K) \sim_\cap (H,D)]$.

$(F,K) \sim_\cap (G,Y) = (V,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(F, K) \underset{\cap}{\sim} (H, D) = (W, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-D \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \underset{\cup}{\sim} (W, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K-K=\emptyset \\ V(\omega) \cup W(\omega), & \omega \in K \cap K=K \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cup F(\omega), & \omega \in (K-Y) \cap (K-D) = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cup [F(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K-Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y' \cap D \\ [F(\omega) \cap G(\omega)] \cup F(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap (K-D) = K \cap Y \cap D' \\ [F(\omega) \cap G(\omega)] \cup [F(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K \cap Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ F(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap [G(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

N fonksiyonundaki $K-Y$ yi düşünecek olursak, $\omega \in K-Y$ ise, $K-Y = K \cap Y'$ olacağından, $\omega \in Y'$ ise $\omega \in D-Y$ veya $\omega \in (Y \cup D)'$ olacağından, buradan, $\omega \in K-Y$ ise, $\omega \in K \cap Y' \cap D'$ veya $\omega \in K \cap Y' \cap D$ olur. Böylece $K \cap Y \cap D' = \emptyset$ için $N=T$ olduğu görülür.

$$2) K \cap Y' \cap D = \emptyset \text{ ise } (F, K) \underset{\cap}{\sim} [(G, Y) \underset{\cap}{\sim} (H, D)] = [(F, K) \underset{\cap}{\sim} (G, Y)] \underset{\cap}{\sim} [(H, D) \underset{\cap}{\sim} (F, K)].$$

ii) Esnek İkili Parçalı Kesişim İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1) [(F, K) \underset{\cup}{\sim} (G, Y)] \underset{\cap}{\sim} (H, D) = [(F, K) \underset{\cap}{\sim} (H, D)] \underset{\cup}{\sim} [(G, Y) \underset{\cap}{\sim} (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, K) \widetilde{\cup} (G, Y) = (M, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(M, K) \widetilde{\cap} (H, D) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in K - D \\ M(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K - Y) - D = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap D = K \cap Y' \cap D \\ [F(\omega) \cup G(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $[(F, K) \widetilde{\cap} (H, D)] \widetilde{\cup} [(G, Y) \widetilde{\cap} (H, D)]$.

$(F, K) \widetilde{\cap} (H, D) = (V, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G, Y) \widetilde{\cap} (H, D) = (W, Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ G(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \widetilde{\cup} (W, Y) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K - Y \\ V(\omega) \cup W(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-D) - Y = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap D) - Y = K \cap Y' \cap D \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in (K-D) \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cup [G(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K-D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cap H(\omega)] \cup G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y-D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cap H(\omega)] \cup [G(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ [F(\omega \cup G(\omega))] \cap H(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece $N=T$ olduğu görülür.

$$2) [(F, K) \underset{\cap}{\sim} (G, Y)] \underset{\cap}{\sim} (H, D) = [(F, K) \underset{\cap}{\sim} (H, D)] \underset{\cap}{\sim} [(G, Y) \underset{\cap}{\sim} (H, D)].$$

$$3) [(F, K) \underset{\Delta}{\sim} (G, Y)] \underset{\cap}{\sim} (H, D) = [(F, K) \underset{\cap}{\sim} (H, D)] \underset{\Delta}{\sim} [(G, Y) \underset{\cap}{\sim} (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, K) \underset{\Delta}{\sim} (G, Y) = (M, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \Delta G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(M, K) \underset{\cap}{\sim} (H, D) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in K - D \\ M(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K - Y) - D = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \Delta G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap D = K \cap Y' \cap D \\ [F(\omega) \Delta G(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $[(F,K) \sim_{\cap} (H,D)] \Delta [(G,Y) \sim_{\cap} (H,D)]$.

$(F,K) \sim_{\cap} (H,D) = (V,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-D \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G,Y) \sim_{\cap} (H,D) = (W,Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y-D \\ G(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V,K) \sim_{\Delta} (W,Y) = (T,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K-Y \\ V(\omega) \Delta W(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-D)-Y = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap D)-Y = K \cap Y' \cap D \\ F(\omega) \Delta G(\omega), & \omega \in (K-D) \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \Delta [G(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K-D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cap H(\omega)] \Delta G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y-D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cap H(\omega)] \Delta [G(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ F(\omega) \Delta G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ [F(\omega) \Delta G(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece $N=T$ olduğu görülür.

$$4) [(F,K) \sim_{\setminus} (G,Y)] \sim_{\cap} (H,D) = [(F,K) \sim_{\cap} (H,D)] \sim_{\setminus} [(G,Y) \cap (H,D)].$$

$$5) [(F,K) \sim_{\gamma} (G,Y)] \sim_{\cap} (H,D) = [(F,K) \sim_{\cup} (H,D)] \sim_{\gamma} [(G,Y) \sim_{\cap} (H,D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, K) \tilde{\gamma} (G, Y) = (M, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \gamma G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(M, K) \tilde{\cap} (H, D) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in K - D \\ M(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K - Y) - D = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \gamma G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap D = K \cap Y' \cap D \\ [F(\omega) \gamma G(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $[(F, K) \tilde{\cap} (H, D)] \tilde{\gamma} [(G, Y) \tilde{\cap} (H, D)]$.

$(F, K) \tilde{\cap} (H, D) = (V, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G, Y) \tilde{\cap} (H, D) = (W, Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ G(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \tilde{\gamma} (W, Y) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K - Y \\ V(\omega) \gamma W(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-D) - Y = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap D) - Y = K \cap Y' \cap D \\ F(\omega) \gamma G(\omega), & \omega \in (K-D) \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \gamma [G(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K-D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cap H(\omega)] \gamma G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y-D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cap H(\omega)] \gamma [G(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ F(\omega) \gamma G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ [F(\omega) \gamma G(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece $N=T$ olduğu görülür.

Burada yer alan eşitlikler ise $K \cap Y \cap D = \emptyset$ şartı altında sağlanır. İspatlar benzer şekilde yapıldığı için, ispatsız şekilde verilmiştir.

$$6) [(F,K) \tilde{+} (G,Y)] \tilde{\cap} (H,D) = [(F,K) \tilde{\cap} (H,D)] \tilde{+} [(G,Y) \tilde{\cap} (H,D)].$$

$$7) [(F,K) \tilde{\lambda} (G,Y)] \tilde{\cap} (H,D) = [(F,K) \tilde{\cap} (H,D)] \tilde{\lambda} [(G,Y) \tilde{\cap} (H,D)].$$

$$8) [(F,K) \tilde{*} (G,Y)] \tilde{\cap} (H,D) = [(F,K) \tilde{\cap} (H,D)] \tilde{*} [(G,Y) \tilde{\cap} (H,D)].$$

$$9) [(F,K) \tilde{\theta} (G,Y)] \tilde{\cap} (H,D) = [(F,K) \tilde{\cap} (H,D)] \tilde{\theta} [(G,Y) \tilde{\cap} (H,D)].$$

3.4.3.1. Sonuç Sonuç 3.3.1 de $(S_E(U), \tilde{\cap})$ cebirsel yapısının, (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup yani bir band olduğu, Teorem 3.4.3 (i) (2) başlığında, $\tilde{\cap}$ işleminin $\tilde{\cap}$ işlemine $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı ile soldan, Teorem 3.4.3 (ii) (2) başlığında, $\tilde{\cap}$ işleminin $\tilde{\cap}$ işlemine sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında, $(S_E(U), \tilde{\cap}, \tilde{\cap})$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir

yarı-halkadır. Benzer şekilde, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M' = \emptyset$ şartı altında, $(S_E(U), \tilde{\cup}, \tilde{\cap})$ cebirsel yapısı da komutatif olmayan, idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halkadır.

Yine benzer şekilde, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ ise $(S_E(U), \tilde{\Delta}, \tilde{\cap}), (S_E(U), \tilde{\setminus}, \tilde{\cap}), (S_E(U), \tilde{\gamma}, \tilde{\cap})$ cebirsel yapılarının; $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ ise $(S_E(U), \tilde{+}, \tilde{\cup}), (S_E(U), \tilde{*}, \tilde{\cap}), (S_E(U), \tilde{\theta}, \tilde{\cap}), (S_E(U), \tilde{\lambda}, \tilde{\cap})$ cebirsel yapılarının komutatif olmayan, çarpımsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir sağ yarı-halka olduğu gösterilebilir. Buradaki, ilk işlemlerin $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında ($\tilde{\Delta}$ işlemi $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında) birleşmeli olduğu, bu tezin ilerleyen kısımlarında gösterilmiştir.

3.4.3.2. Sonuç *Sonuç 3.3.1* de K, E evrensel kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $(S_K(U), \tilde{\cap})$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_K$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu gösterilmişti. Teorem 3.4.3 (i) (2) başlığından $S_K(U)$ kümesi üzerinde, $\tilde{\cap}$ işleminin $\tilde{\cap}$ işlemine soldan dağıldığı, Teorem 3.4.3 (ii) (2) başlığından, $\tilde{\cap}$ işleminin $\tilde{\cap}$ işlemine sağdan dağıldığı kolaylıkla gösterilebilir. Sonuç olarak, hiçbir şart olmaksızın, $(S_K(U), \tilde{\cap}, \tilde{\cap})$ cebirsel yapısı komutatif, idempotent, birimli ve sıfırsız bir yarı-halkadır. Benzer şekilde, $(S_K(U), \tilde{\Delta}, \tilde{\cap})$ cebirsel yapısı da hiçbir şart olmaksızın, komutatif, toplamsal idempotent, birimli ve sıfırsız bir yarı-halkadır. $(S_K(U), \tilde{\setminus}, \tilde{\cap}), (S_K(U), \tilde{\gamma}, \tilde{\cap}), (S_K(U), \tilde{*}, \tilde{\cap}), (S_K(U), \tilde{\theta}, \tilde{\cap}), (S_K(U), \tilde{+}, \tilde{\cap}), (S_K(U), \tilde{\lambda}, \tilde{\cap})$ cebirsel yapılarında ise ilk işlem $S_K(U)$ kümesinde birleşmeli olmadığı için yarıgrup oluşturamaz, dolayısıyla bu cebirsel yapılar yarı-halka veya sağ-yarı halka oluşturamaz.

3.4.3.3. Sonuç *Sonuç 3.3.1* de K, E evrensel kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $(S_K(U), \tilde{\cup})$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_K$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu, *Sonuç 3.3.1* de, $(S_K(U), \tilde{\cap})$ cebirsel yapısının birimi U_K olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti göstermişti. Teorem 3.4.3 (i) (2)

başlığından $S_K(U)$ kümesi üzerinde, $\tilde{\cap}$ işleminin $\tilde{\cup}$ işlemine soldan dağıldığı, Teorem 3.4.3 (ii) (2) başlığından, $\tilde{\cap}$ işleminin $\tilde{\cup}$ işlemine sağdan dağıldığı kolaylıkla gösterilebilir.

Ayrıca, Teorem 3.3 (10) da $(F, K) \tilde{\cap} \emptyset_K = \emptyset_K \tilde{\cap} (F, K) = \emptyset_K$ ve $(F, K) \tilde{\cup} \emptyset_K = \emptyset_K \tilde{\cup} (F, K) = (F, K)$ olduğundan, $(S_K(U), \tilde{\cup}, \tilde{\cap})$ cebirsel yapısı komutatif, idempotent, birimli bir hemihalkadır.

3.4.3.4. Sonuç $(S_K(U), \tilde{\cup})$ cebirsel yapısı, birimi $\emptyset_K$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes dolayısıyla bir yarıgruptur. $(S_K(U), \tilde{\cap})$ cebirsel yapısı, birimi U_K olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes dolayısıyla bir yarıgruptur. Teorem 3.3 (24) de, $\tilde{\cap}$ ve $\tilde{\cup}$ işlemlerinin yutan kuralını sağladığı gösterilmiştir. Dolayısıyla, $(S_K(U), \emptyset_K, U_K, \tilde{\cup}, \tilde{\cap})$ sınırlı bir kafestir. Ayrıca, $\forall (F, K) \in S_K(U)$ için, $(F, K) \tilde{\cup} (F, K)^r = U_K$ ve $(F, K) \tilde{\cap} (F, K)^r = \emptyset_K$ olduğundan, $(S_K(U), \emptyset_K, U_K, \tilde{\cup}, \tilde{\cap})$ tümlemeli sınırlı bir kafestir. Üstelik, Teorem 3.4.3 (i) (1) başlığında, $\tilde{\cap}$ işleminin $\tilde{\cup}$ işlemine soldan, Teorem 3.4.3 (ii) (1) başlığında, $\tilde{\cap}$ işleminin $\tilde{\cup}$ işlemine sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Dolayısıyla, $(S_K(U), \emptyset_K, U_K, \tilde{\cup}, \tilde{\cap})$ dağılmalı, tümlemeli, sınırlı bir kafes, dolayısıyla bir Boolean Cebiridir.

Üstelik, $[(F, K) \tilde{\cap} (G, K)]^r = (F, K)^r \tilde{\cup} (G, K)^r$ ve $[(F, K) \tilde{\cup} (G, K)]^r = (F, K)^r \tilde{\cap} (G, K)^r$ yani De Morgan kuralı da sağladığından, $(S_K(U), \emptyset_K, U_K, \tilde{\cup}, \tilde{\cap})$ De Morgan Cebiridir.

Ayrıca, $\forall (F, K), (G, K) \in S_K(U)$ için, $(F, K) \tilde{\cap} (F, K)^r = \emptyset_K \cong (G, K) \tilde{\cup} (G, K)^r = U_K$ olduğundan, $(S_K(U), \emptyset_K, U_K, \tilde{\cup}, \tilde{\cap})$ bir Kleene Cebiridir. Ayrıca, $(F, K) \tilde{\cap} (F, K)^r = \emptyset_K$ olduğu bilinmektedir ve $(F, K) \tilde{\cap} (G, K) = \emptyset_K$ iken $(G, K) \cong (F, K)^r$ olduğu Teorem 3.3 (16) da gösterilmişti. Bu, $(F, K)^r$ nin (F, K) nin sözde tümleyeni olduğunu gösterir. Ayrıca, $(F, K)^r \tilde{\cup} ((F, K)^r)^r = U_K$ olduğundan, $(S_K(U), \emptyset_K, U_K, \tilde{\cup}, \tilde{\cap})$ Stone'nun birimi özelliğini sağlar ve $(S_K(U), \emptyset_K, U_K, \tilde{\cup}, \tilde{\cap})$ bir Stone cebiridir.

Burada hemen not edelim ki, $(S_E(U), \tilde{\cap})$ ve $(S_E(U), \tilde{\cup})$ cebirsel yapıları, komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup olduğu için bu işlemlerin, $S_E(U)$ kümesi üzerinde kafes oluşturma durumu yoktur.

3.4.4. Teorem (F,K) , (G,Y) ve (H,D) , U üzerinde esnek küme olsun. Bu durumda

- i. $(F,K) \times [(G,Y) \tilde{\cap} (H,Z)] = [(F,K) \times (G,Y)] \tilde{\cap} [(F,K) \times (H,Z)]$
- ii. $[(F,K) \tilde{\cap} (G,Y)] \times (H,Z) = [(F,K) \times (H,Z)] \tilde{\cap} [(G,Y) \times (H,Z)]$

İspat: (i) İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G,Y) \tilde{\cap} (H,D) = (M,Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y-D \\ G(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(F,K) \times (M,Y) = (N, K \times Y)$ olsun. Burada $\forall (\omega,y) \in K \times Y$ için; $N(\omega,y) = F(\omega) \times M(y)$. Böylece,

$$N(\omega,y) = \begin{cases} F(\omega) \times G(y) & (\omega,y) \in K \times (Y-D) = (K \times Y) - (K \times D) \\ F(\omega) \times [G(y) \cap H(y)], & (\omega,y) \in K \times (Y \cap D) = (K \times Y) \cap (K \times D) \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım.

$[(F,K) \times (G,Y)] \tilde{\cap} [(F,K) \times (H,D)]$. $(F,K) \times (G,Y) = (V, K \times Y)$ olsun. Burada $\forall (\omega,y) \in K \times Y$ için;

$V(\omega,y) = F(\omega) \times G(y)$. $(F,K) \times (H,D) = (W, K \times D)$ olsun. Burada $\forall (\omega,d) \in K \times D$ için;

$W(\omega,d) = F(\omega) \times H(d)$. $(V, K \times Y) \tilde{\cap} (W, K \times D) = (T, K \times Y)$ olsun. Burada $\forall (\omega,y) \in K \times Y$ için;

$$T(\omega,y) = \begin{cases} V(\omega,y), & (\omega,y) \in (K \times Y) - (K \times D) \\ V(\omega,y) \cap W(\omega,y) & (\omega,y) \in (K \times Y) \cap (K \times D) \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega,y) = \begin{cases} F(\omega) \times G(y), & (\omega,y) \in (K \times Y) - (K \times D) \\ [F(\omega) \times G(y)] \cap [F(\omega) \times H(y)], & (\omega,y) \in (K \times Y) \cap (K \times D) \end{cases}$$

Buradan, $N(\omega,y) = T(\omega,y)$ olduğu görülür.

ii) İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F,K) \tilde{\cap} (G,Y) = (S,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$S(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(S, K) \times (H, Z) = (T, K \times Z)$ olsun. Burada $\forall (\omega, y) \in K \times Z$ için; $T(\omega, y) = S(\omega) \times H(y)$. Böylece,

$$T(\omega, y) = \begin{cases} F(\omega) \times H(y) & (\omega, y) \in (K - Y) \times Z = (K \times Z) \times (Y - Z) \\ [F(\omega) \cap G(\omega)] \times H(y), & (\omega, y) \in (K \cap Y) \times Z = (K \times Z) \cap (Y \times Z) \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $[(F, K) \times (H, Z)] \sim_{\cap} [(G, Y) \times (H, Z)]$. $(F, K) \times (H, Z) = (W, K \times Z)$ olsun. Burada $\forall (\omega, y) \in K \times Z$ için; $V(\omega, y) = F(\omega) \times H(y)$. $(G, Y) \times (H, Z) = (R, Y \times Z)$ olsun. Burada $\forall (\omega, d) \in Y \times Z$ için; $R(\omega, d) = G(\omega) \times H(d)$.

$(W, K \times Z) \sim_{\cap} (R, Y \times Z) = (M, K \times Z)$ olsun. Burada $\forall (\omega, y) \in K \times Z$ için;

$$M(\omega, y) = \begin{cases} W(\omega, y), & (\omega, y) \in (K \times Z) - (Y \times Z) \\ W(\omega, y) \cap R(\omega, y) & (\omega, y) \in (K \times Z) \cap (Y \times Z) \end{cases}$$

$$T(\omega, y) = \begin{cases} F(\omega) \times H(y), & (\omega, y) \in (K \times Y) - (K \times D) \\ [F(\omega) \times H(y)] \cap [G(\omega) \times H(y)], & (\omega, y) \in (K \times Y) \cap (K \times D) \end{cases}$$

Buradan, $N(\omega, y) = M(\omega, y)$ olduğu görülür.

4. ESNEK İKİLİ PARÇALI BİRLEŞİM İŞLEMİ

Bu bölümde, esnek ikili parçalı birleşim adı verilen yeni esnek küme işlemi tanıtılmış, örneği verilmiş, işlemin cebirsel özellikleri ile diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkisine bakılarak dağılma kuralları ve $S_E(U)$ kümesi üzerinde bu işlemin hangi cebirsel yapıları oluşturduğu incelenmiş ve çok önemli sonuçlar elde edilmiştir.

4.1. Tanım (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde tanımlı iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin $(F, K) \widetilde{\cup} (G, Y)$ ile gösterilen esnek ikili parçalı birleşim işlemi $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

olmak üzere $(F, K) \widetilde{\cup} (G, Y) = (H, K)$ ile tanımlanır.

Burada, esnek kümelerin parametre kümeleri eşit ise $(F, K) \widetilde{\cup} (G, K) = (F, K) \cup_R (G, K) = (F, K) \cup_E (G, K)$ olur. Yani, K , E evrensel kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $S_K(U)$ kümesi üzerinde esnek ikili parçalı birleşim işlemi, kısıtlanmış birleşim ve genişletilmiş birleşim işlemleri ile çakışıktır.

4.2. *Örnek* $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesi, $K = \{e_1, e_4\}$, $Y = \{e_2, e_3, e_4\}$ E 'nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evrensel küme, (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde $(F, K) = \{(e_1, \{h_2, h_4, h_6\}), (e_4, \{h_1, h_6\})\}$, $(G, Y) = \{(e_2, \{h_1, h_2\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4, h_5\}), (e_4, \{h_2, h_4\})\}$ olarak tanımlanan iki esnek küme olsun. $(F, K) \widetilde{\cup} (G, Y) = (H, K)$ olmak üzere,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Burada, $K = \{e_1, e_4\}$, $K - Y = \{e_1\}$ olmak üzere, $\forall \omega \in K - Y = \{e_1\}$ için, $H(\omega) = F(\omega)$ olup, $H(e_1) = F(e_1) = \{h_2, h_4, h_6\}$, $\forall \omega \in K \cap Y = \{e_4\}$ için, $H(\omega) = F(\omega) \cup G(\omega)$ olup, $H(e_4) = F(e_4) \cup G(e_4) = \{h_1, h_6\} \cup \{h_2, h_4\} = \{h_1, h_2, h_4, h_6\}$. Böylece, $(F, K) \widetilde{\cup} (G, Y) = \{(e_1, \{h_2, h_4, h_6\}), (e_4, \{h_1, h_2, h_4, h_5\})\}$.

4.3. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1) $\tilde{\cup}$, $S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: $\tilde{\cup}$ işleminin $S_E(U)$ üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$\begin{aligned} \tilde{\cup}: S_E(U) \times S_E(U) &\rightarrow S_E(U) \\ ((F,K), (G,Y)) &\rightarrow (F,K) \tilde{\cup} (G,Y) = (H,K) \end{aligned}$$

olup, (F,K) ve (G,Y) , U üzerinde iki esnek küme olduğunda $(F,T) \tilde{\cup} (G,Y)$ de, U üzerinde bir esnek kümedir. $K \subseteq E$ sabit bir parametre kümesi olmak üzere, $\tilde{\cup}$ işleminin $S_K(U)$ üzerinde de bir ikili işlem olduğu açıktır.

$$2) K \cap Y' \cap D = \emptyset \text{ ise } [(F,K) \tilde{\cup} (G,Y)] \tilde{\cup} (H,D) = (F,K) \tilde{\cup} [(G,Y) \tilde{\cup} (H,D)]$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F,K) \tilde{\cup} (G,Y) = (T,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(T,K) \tilde{\cup} (H,D) = (M,K)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in K - D \\ T(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K - Y) - D = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap D = K \cap Y' \cap D \\ [F(\omega) \cup G(\omega)] \cup H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

$(G,Y) \tilde{\cup} (H,D) = (K,Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$K(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ G(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(F, K) \widetilde{\cup} (K, Y) = (S, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$S(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cup K(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Böylece,

$$S(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap (Y - D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cup [G(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in K \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

S fonksiyonundaki, $K - Y$ ye bakacak olursak, $K - Y = K \cap Y'$ olup, eğer $\omega \in Y'$ ise $\omega \in D - Y$ veya $\omega \in (Y \cup D)'$. Buradan $\omega \in K - Y$ ise $\omega \in K \cap Y' \cap D'$ ve $\omega \in K \cap Y' \cap D$ olur. Böylece, $K \cap Y' \cap D = \emptyset$ için $M = S$ olur. Yani uygun koşullar altında, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\widetilde{\cup}$ işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

$$3) [(F, K) \widetilde{\cup} (G, K)] \widetilde{\cup} (H, K) = (F, K) \widetilde{\cup} [(G, K) \widetilde{\cup} (H, K)]$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F, K) \widetilde{\cup} (G, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$(T, K) \widetilde{\cup} (H, K) = (M, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ T(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece,

$$M(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ [F(\omega) \cup G(\omega)] \cup H(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına bakalım. $(G, K) \widetilde{\cup} (H, K) = (L, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$L(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ G(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$(F, K) \underset{\sim}{\cup} (L, K) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cup L(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cup [G(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan $M = N$ olduğu görülür. Yani, $S_K(U)$ kümesi üzerinde de (parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler üzerinde), $\underset{\sim}{\cup}$ işleminin birleşme özelliği vardır.

$$4) (F, K) \underset{\sim}{\cup} (G, Y) \neq (G, Y) \underset{\sim}{\cup} (F, K).$$

İspat: $(F, K) \underset{\sim}{\cup} (G, Y) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(G, Y) \underset{\sim}{\cup} (F, K) = (T, Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - K \\ G(\omega) \cup F(\omega), & \omega \in Y \cap K \end{cases}$$

Burada, sol taraftaki esnek kümenin parametre kümesi K ; sağ taraftaki esnek kümenin parametre kümesi Y dir. Böylece esnek kümelerin eşitliği tanımı gereği;

$$(F, K) \underset{\sim}{\cup} (G, Y) \neq (G, Y) \underset{\sim}{\cup} (F, K).$$

Fakat $(F, K) \underset{\sim}{\cup} (G, K) = (G, K) \underset{\sim}{\cup} (F, K)$ olduğu açıktır. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\underset{\sim}{\cup}$ işlemi, değişme özelliğine sahip değilken, $K \subseteq E$ sabit bir parametre kümesi olmak üzere $S_K(U)$ kümesi üzerinde $\underset{\sim}{\cup}$ işlemi değişme özelliğine sahiptir.

$$5) (F, K) \underset{\sim}{\cup} (F, K) = (F, K).$$

İspat: $(F, K) \underset{\sim}{\cup} (F, K) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cup F(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Burada, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F(\omega) \cup F(\omega) = F(\omega)$, böylece $(H, K) = (F, K)$. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\underset{\sim}{\cup}$ işlemi, denk güçlülük (idempotent) özelliğine sahiptir.

$$6) (F, K) \underset{\sim}{\cup} \emptyset_K = \emptyset_K \underset{\sim}{\cup} (F, K) = (F, K).$$

İspat: $\emptyset_K = (S, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için; $S(\omega) = \emptyset$. $(F, K) \underset{\sim}{\cup} (S, K) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cup S(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F(\omega) \cup S(\omega) = F(\omega) \cup \emptyset = F(\omega)$. Buradan $(H, K) = (F, K)$.

$S_K(U)$ kümesi üzerinde $\underset{\sim}{\cup}$ işleminin birim elemanı $\emptyset_K$ esnek kümesidir.

4.3.1. *Sonuç* Teorem 4.3 (1), (2), (4) ve (5) den, (F, K) , (G, Y) ve (H, D) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $K \cap Y' \cap D = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \underset{\sim}{\cup})$ komutatif olmayan, idempotent bir yarıgruptur yani komutatif olmayan bir banddır. $K \subseteq E$ sabit bir parametre kümesi olmak üzere, Teorem 4.3 (1), (3), (4), (5) ve (6) dan $(S_K(U), \underset{\sim}{\cup})$ cebirsel yapısı birimi $\emptyset_K$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafestir.

$$7) (F, K) \underset{\sim}{\cup} \emptyset_E = (F, K).$$

İspat: $\emptyset_E = (S, E)$ olsun. Burada $\forall \omega \in E$; $S(\omega) = \emptyset$. $(F, K) \underset{\sim}{\cup} (S, E) = (H, K)$. Böylece, $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - E = \emptyset \\ F(\omega) \cup S(\omega), & \omega \in K \cap E = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için; $H(\omega) = F(\omega) \cup S(\omega) = F(\omega) \cup \emptyset = F(\omega)$ olur ve böylece $(H, K) = (F, K)$.

$S_E(U)$ kümesi üzerinde $\widetilde{\cup}$ işleminin sağ birim elemanı $\emptyset_E$ esnek kümesidir.

$$8) (F, K) \widetilde{\cup} \emptyset_\emptyset = (F, K).$$

İspat: $\emptyset_\emptyset = (S, \emptyset)$ ve $(F, K) \widetilde{\cup} (S, \emptyset) = (H, K)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - \emptyset = K \\ F(\omega) \cup S(\omega), & \omega \in K \cap \emptyset = \emptyset \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için; $H(\omega) = F(\omega)$ olup, $(H, K) = (F, K)$. $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\widetilde{\cup}$ işleminin sağ birim elemanı $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir.

$$9) \emptyset_\emptyset \widetilde{\cup} (F, K) = \emptyset_\emptyset.$$

İspat: $\emptyset_\emptyset = (S, \emptyset)$ ve $(S, \emptyset) \widetilde{\cup} (F, K) = (H, \emptyset)$ olsun. $\emptyset_\emptyset$, parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme olduğu için, $(H, \emptyset) = \emptyset_\emptyset$ olur. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\widetilde{\cup}$ işlemi için, her elemanın sağ birim eleman olan $\emptyset_\emptyset$ ye göre sol tersi, $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir. Ayrıca, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\widetilde{\cup}$ işleminin sol yutan elemanı $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir.

4.3.2. *Sonuç* Teorem 4.3 (1), (2), (8) ve (9) dan, (F, K) , (G, Y) ve (H, D) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $K \cap Y' \cap D = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \widetilde{\cup})$ cebirsel yapısı, sağ birimi $\emptyset_\emptyset$, her elemanın sol tersi $\emptyset_\emptyset$ olan idempotent bir sol-sağ sistemdir.

$$10) (F, K) \widetilde{\cup} U_K = U_K \widetilde{\cup} (F, K) = U_K.$$

İspat: $U_K = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = U$. $(F, K) \widetilde{\cup} (T, K) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cup T(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için; $H(\omega) = F(\omega) \cup T(\omega) = F(\omega) \cup U = U$ olur ve böylece $(H, K) = U_K$. $S_K(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{\cup}$ işleminin yutan elemanı U_K esnek kümesidir.

$$11) (F, K) \tilde{\cup} U_E = U_K.$$

İspat: $U_E = (T, E)$ olsun. Burada $\forall \omega \in E$ için, $T(\omega) = U$. $(F, K) \tilde{\cup} (T, E) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için ;

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - E = \emptyset \\ F(\omega) \cup T(\omega), & \omega \in K \cap E = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F(\omega) \cup T(\omega) = F(\omega) \cup U = U$ olur. Böylece, $(H, K) = U_K$

$$12) U_E \tilde{\cup} (F, K) = U_E.$$

İspat: $U_E = (T, E)$ olsun. Burada $\forall \omega \in E$ için, $T(\omega) = U$. $(T, E) \tilde{\cup} (F, K) = (H, E)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için ;

$$H(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in E - K = K' \\ F(\omega) \cup T(\omega), & \omega \in E \cap K = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F(\omega) \cup T(\omega) = F(\omega) \cup U = U$ olur. Böylece,

$$H(\omega) = \begin{cases} U, & \omega \in E - K = K' \\ U, & \omega \in E \cap K = K \end{cases}$$

Buradan, $(H, E) = U_E$. $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{\cup}$ işleminin sol yutan elemanı U_E esnek kümesidir.

$$13) (F, K) \tilde{\cup} (F, K)^r = (F, K)^r \tilde{\cup} (F, K) = U_K.$$

İspat: $(F, K)^r = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F'(\omega)$. $(F, K) \underset{U}{\sim} (H, K) = (T, K)$ olsun.

Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = F(\omega) \cup H(\omega) = F(\omega) \cup F'(\omega) = U$ olur. Burada $(T, K) = U_K$.

$$14) [(F, K) \underset{U}{\sim} (G, Y)]^r = (F, K) \underset{\theta}{\sim}^* (G, Y) \text{ ve } [(F, K) \underset{U}{\sim} (G, K)]^r = (F, K)^r \underset{\cap}{\sim} (G, K)^r.$$

İspat: $(F, K) \underset{U}{\sim} (G, Y) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(H, K)^r = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$T(\omega) = \begin{cases} F'(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cap G'(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Böylece, $(T, K) = (F, K) \underset{\theta}{\sim}^* (G, Y)$. Benzer şekilde, $[(F, K) \underset{U}{\sim} (G, K)]^r = (F, K)^r \underset{\cap}{\sim} (G, K)^r$ olduğu

gösterilebilir. Bu son eşitlikte, esnek ikili parçalı kesişim yani $\underset{\cap}{\sim}$ işlemi yerine, kısıtlanmış kesişim yani $\cap_R$ ve genişletilmiş kesişim yani $\cap_E$ işlemi de getirilse, Teorem 4.3 (14) özelliğinin sağlanacağı K , E evrensel kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $S_K(U)$ kümesi üzerinde bu işlemlerin çakışık olduğundan aşıkardır.

$$15) (F, K) \underset{U}{\sim} (G, K) = \emptyset_K \Leftrightarrow (F, K) = (G, K) = \theta_K.$$

İspat: $(F, K) \underset{U}{\sim} (G, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$(T, K) = \emptyset_K$ olduğundan, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = \emptyset$. Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = F(\omega) \cup G(\omega) = \emptyset \Leftrightarrow \forall \omega \in K$ için, $F(\omega) = \emptyset$ ve $G(\omega) = \emptyset \Leftrightarrow (F, K) = (G, K) = \emptyset_K$.

$$16) \emptyset_K \cong (F, K) \widetilde{\cup} (G, Y) \text{ ve } \emptyset_Y \cong (G, Y) \widetilde{\cup} (F, K).$$

$$17) (F, K) \widetilde{\cup} (G, Y) \cong U_K \text{ ve } (G, Y) \widetilde{\cup} (F, K) \cong U_Y.$$

$$18) (F, K) \widetilde{\cap} (G, Y) \cong (F, K) \widetilde{\cup} (G, Y).$$

İspat: $(F, K) \widetilde{\cap} (G, Y) = (T, K)$. Buradan, $\forall \omega \in K$ için,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(F, K) \widetilde{\cup} (G, Y) = (W, K)$. Buradan, $\forall \omega \in K$ için,

$$W(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Tümü için $\forall \omega \in K - Y$ için, $T(\omega) = F(\omega) \subseteq F(\omega) = W(\omega)$ ve $\forall \omega \in K \cap Y$ için, $T(\omega) = F(\omega) \cap G(\omega) \subseteq F(\omega) \cup G(\omega) = W(\omega)$. Böylece, $(F, K) \widetilde{\cap} (G, Y) \cong (F, K) \widetilde{\cup} (G, Y)$.

$$19) (F, K) \widetilde{\cap} (G, K) = (F, K) \widetilde{\cup} (G, K) \Leftrightarrow (F, K) = (G, K).$$

İspat: $(F, K) \widetilde{\cap} (G, K) = (F, K) \widetilde{\cup} (G, K)$ ve $(F, K) \widetilde{\cap} (G, K) = (T, K)$ olsun. Buradan, $\forall \omega \in K$ için

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$(F, K) \widetilde{\cup} (G, K) = (W, K)$ olsun. Buradan $\forall \omega \in K$ için,

$$W(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$(T, K) = (W, K)$ olduğu için, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = W(\omega)$. Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $F(\omega) \cap G(\omega) = F(\omega) \cup G(\omega)$ olup, $F(\omega) = G(\omega)$. Buradan, $(F, K) = (G, K)$. Tersine, $(F, K) = (G, K)$ olsun. Buradan, $(F, K) \widetilde{\cap} (G, K) = (F, K) \widetilde{\cap} (F, K) = (F, K)$ ve $(F, K) \widetilde{\cup} (G, K) = (F, K) \widetilde{\cup} (F, K) = (F, K)$ olup, ispat tamamlanır.

$$20) (F, K) \cong (F, K) \widetilde{\cup} (G, Y) \text{ ve } (G, Y) \cong (G, Y) \widetilde{\cup} (F, K).$$

İspat: $(F, K) \widetilde{\cup} (G, Y) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$\forall \omega \in K - Y$; $H(\omega) = F(\omega) \subseteq F(\omega)$, $\forall \omega \in K \cap Y$; $H(\omega) = F(\omega) \subseteq F(\omega) \cup G(\omega)$.

$(F, K) \cong (F, K) \widetilde{\cup} (G, Y)$. $(G, Y) \cong (G, Y) \widetilde{\cup} (F, K)$ benzer şekilde gösterilebilir.

$$21) (F, K) \cong (G, Y) \text{ ise } (F, K) \widetilde{\cup} (G, Y) = (G, K) \text{ ve } (F, K) \cong (G, K) \text{ ise } (F, K) \widetilde{\cup} (G, K) = (G, K).$$

İspat: $(F, K) \cong (G, Y)$ ise $K \subseteq Y$ ve her $\omega \in K$ için, $F(\omega) \subseteq G(\omega)$. $(F, K) \widetilde{\cup} (G, Y) = (H, K)$ olsun.

Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y = \emptyset \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y = K \end{cases}$$

Böylece, $\forall \omega \in K$; $H(\omega) = F(\omega) \cup G(\omega) = G(\omega)$. Buradan, $(F, K) \widetilde{\cup} (G, Y) = (G, K)$.

$(F, K) \cong (G, K)$ ise $(F, K) \widetilde{\cup} (G, K) = (G, K)$ olacağı açıktır.

$$22) (F, K) \cong (G, K) \text{ ise } (F, K) \widetilde{\cup} (H, Z) \cong (G, K) \widetilde{\cup} (H, Z) \text{ ve } (H, Z) \widetilde{\cup} (F, K) \cong (H, Z) \widetilde{\cup} (G, K).$$

İspat: $(F,K) \subseteq (G,K)$ olsun. Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $F(\omega) \subseteq G(\omega)$. $(F,K) \cup (H,Z) = (W,K)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in Z$ için,

$$W(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Z \\ F(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap Z \end{cases}$$

$(G,K) \cup (H,Z) = (L,Y)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in K$ için,

$$L(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in K-Z \\ G(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap Z \end{cases}$$

Böylece, $\forall \omega \in K-Z$ için, $W(\omega) = F(\omega) \subseteq G(\omega) = L(\omega)$ ve $\forall \omega \in K \cap Z$ için, $W(\omega) = F(\omega) \cup H(\omega) \subseteq G(\omega) \cup H(\omega) = L(\omega)$ olup, $(F,K) \cup (H,Z) \subseteq (G,K) \cup (H,Z)$.

Şimdi de $(H,Z) \cup (F,K) = (Y,K)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in Z$ için,

$$Y(\omega) = \begin{cases} H(\omega), & \omega \in Z-K \\ H(\omega) \cup F(\omega), & \omega \in Z \cap K \end{cases}$$

$(H,Z) \cup (G,K) = (S,Y)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in K$ için,

$$S(\omega) = \begin{cases} H(\omega), & \omega \in Z-K \\ H(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in Z \cap K \end{cases}$$

Böylece, $\forall \omega \in Z-K$ için, $Y(\omega) = H(\omega) \subseteq H(\omega) = S(\omega)$ ve $\forall \omega \in Z \cap K$ için, $Y(\omega) = H(\omega) \cup F(\omega) \subseteq H(\omega) \cup G(\omega) = S(\omega)$ olup, $(H,Z) \cup (F,K) \subseteq (H,Z) \cup (G,K)$.

23) $(F,K) \cup (H,Z) \subseteq (G,K) \cup (H,Z)$ ise $(F,K) \subseteq (G,K)$ olmak zorunda değildir. Benzer şekilde, $(H,Z) \cup (F,K) \subseteq (H,Z) \cup (G,K)$ ise $(F,K) \subseteq (G,K)$ olmak zorunda değildir. Yani Teorem 4.3 (22) nin tersi doğru değildir.

İspat: Teorem 4.3 (22) nin tersinin doğru olmadığını göstermek için bir örnek verelim. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi, $K = \{e_1, e_3, e_5\}$ ve $Z = \{e_1, e_3\}$ E'nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme, (F,K) , (G,K) ve (H,Z) , U üzerinde $(F,K) = (e_1, h_2, h_5)$,

$(e_3, \{h_1, h_2, h_5\}), (e_5, \{h_1, h_3, h_5\})\}, (G, K) = \{(e_1, \{h_2\}), (e_3, \{h_1, h_2\}), (e_5, \{h_2\})\}, (H, Z) = \{(e_1, U), (e_3, U)\}$ olarak tanımlanan esnek kümeler olsun.

$(F, K) \widetilde{\bigcup} (H, Z) = (L, K)$ olmak üzere $\forall \omega \in K - Z = \{e_5\}$ için, $L(e_5) = F(e_5) = \{h_1, h_3, h_5\}$; $\forall \omega \in K \cap Z = \{e_1, e_3\}$ için, $L(e_1) = F(e_1) \cup H(e_1) = U$, $L(e_3) = F(e_3) \cup H(e_3) = U$. Buradan, $(F, K) \widetilde{\bigcup} (H, Z) = \{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, \{h_1, h_3, h_5\})\}$.

$(G, K) \widetilde{\bigcup} (H, Z) = (T, K)$ olmak üzere $\forall \omega \in K - Z = \{e_5\}$ için, $T(e_5) = F(e_5) = \{h_1, h_3, h_5\}$; $\forall \omega \in K \cap Z = \{e_1, e_3\}$ için, $T(e_1) = G(e_1) \cup H(e_1) = U$, $T(e_3) = F(e_3) \cup H(e_3) = U$. Buradan, $(G, K) \widetilde{\bigcup} (H, Z) = \{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, \{h_1, h_3, h_5\})\}$.

Buradan, $(F, K) \widetilde{\bigcup} (H, Z) \cong (G, K) \widetilde{\bigcup} (H, Z)$ olmasına rağmen $(F, K) \not\cong (G, K)$ olmadığı görülmektedir. Aynı örnek üzerinde, $(H, Z) \widetilde{\bigcup} (F, K) \cong (H, Z) \widetilde{\bigcup} (G, K)$ olmasına rağmen, $(F, K) \not\cong (G, K)$ olmak zorunda olmadığı gösterilebilir.

24) $(F, T) \cong (G, T)$ ve $(K, V) \cong (L, V)$ ise $(F, T) \widetilde{\bigcup} (K, V) \cong (G, T) \widetilde{\bigcup} (L, V)$ ve $(K, V) \widetilde{\bigcup} (F, T) \cong (L, V) \widetilde{\bigcup} (G, T)$.

İspat: $(F, T) \cong (G, M)$ ve $(K, V) \cong (L, V)$ olsun. Buradan, $\forall \omega \in T$ için, $F(\omega) \subseteq G(\omega)$ ve $\forall \omega \in V$ için, $K(\omega) \subseteq L(\omega)$. $(F, T) \widetilde{\bigcup} (K, V) = (Y, T)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in T$ için,

$$Y(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in T - V \\ F(\omega) \cup K(\omega), & \omega \in T \cap V \end{cases}$$

$(G, T) \widetilde{\bigcup} (L, V) = (W, T)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in T$ için,

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in T - V \\ G(\omega) \cup L(\omega), & \omega \in T \cap V \end{cases}$$

$\forall \omega \in T - V$ için, $Y(\omega) = F(\omega) \subseteq G(\omega) = W(\omega)$; $\forall \omega \in T \cap V$ için, $Y(\omega) = F(\omega) \cup K(\omega) \subseteq G(\omega) \cup L(\omega) = W(\omega)$ olur. Böylece $(F, T) \widetilde{\bigcup} (K, V) \cong (G, T) \widetilde{\bigcup} (L, V)$.

Şimdi de $(K, V) \widetilde{\cup} (F, T) = (M, V)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in V$ için,

$$M(\omega) = \begin{cases} K(\omega), & \omega \in V - T \\ K(\omega) \cup F(\omega), & \omega \in V \cap T \end{cases}$$

$(L, V) \widetilde{\cup} (G, T) = (N, V)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in T$ için,

$$N(\omega) = \begin{cases} L(\omega), & \omega \in V - T \\ L(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in V \cap T \end{cases}$$

$\forall \omega \in V - T$ için, $M(\omega) = K(\omega) \subseteq L(\omega) = N(\omega)$; $\forall \omega \in V \cap T$ için, $M(\omega) = K(\omega) \cup F(\omega) \subseteq L(\omega) \cup G(\omega) = N(\omega)$ olur. Böylece $(K, V) \widetilde{\cup} (F, T) \subseteq (L, V) \widetilde{\cup} (G, T)$.

Klasik kümelerde $F \cap (F \cup G) = F \cup (F \cap G) = F$ olup, kesişim ve birleşim işlemleri yutma kuralı ile birbirine bağlıdır. Aşağıda ise değişme özelliğine sahip $S_K(U)$ kümesi üzerinde, esnek ikili parçalı kesişim ve birleşim işlemi için bu özelliğin analogisini veriyoruz:

$$25) (F, K) \widetilde{\cap} [(F, K) \widetilde{\cup} (G, K)] = (F, K) \text{ ve } (F, K) \widetilde{\cup} [(F, K) \widetilde{\cap} (G, K)] = (F, K).$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F, K) \widetilde{\cup} (G, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$(F, K) \widetilde{\cap} (T, K) = (M, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cap T(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cup [F(\omega) \cap G(\omega)], & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan,

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece, $(M, K) = (F, K)$. Yani, $(F, K) \widetilde{\cup} [(F, K) \widetilde{\cap} (G, Y)] = (F, K)$.

Benzer şekilde, $(F, K) \widetilde{\cup} [(F, K) \widetilde{\cap} (G, K)] = (F, K)$ sağlandığı da gösterilir. Burada, esnek ikili parçalı kesişim yani $\widetilde{\cap}$ işlemi yerine, kısıtlanmış kesişim yani $\cap_R$ ve genişletilmiş kesişim yani $\cap_E$ işlemi de getirilse, Teorem 4.3 (25) özelliğinin sağlanacağı K, E evrensel kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $S_K(U)$ kümesi üzerinde bu işlemlerin çakışık olduğundan aşıkardır.

4.4. Teorem $(F, K), (G, Y), (H, D), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, aşağıdaki gibi esnek ikili parçalı birleşim işleminin diğer esnek küme işlemlere dağılması mevcuttur:

4.4.1. Teorem $(F, K), (G, Y), (H, D), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, aşağıdaki gibi esnek ikili parçalı birleşim işleminin kısıtlanmış işlemlere dağılması mevcuttur:

i) Esnek İkili Parçalı Birleşim İşleminin Kısıtlanmış İşlemlere Soldan Dağılması:

$$1) (F, K) \widetilde{\cup} [(G, Y) \cap_R (H, D)] = [(F, K) \widetilde{\cup} (G, Y)] \cap_R [(F, K) \widetilde{\cup} (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, Y) \cap_R (H, D) = (M, Y \cap D)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y \cap D, M(\omega) = G(\omega) \cap H(\omega)$. $(F, K) \widetilde{\cup} (M, Y \cap D) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - (Y \cap D) \\ F(\omega) \cup M(\omega), & \omega \in K \cap (Y \cap D) \end{cases}$$

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - (Y \cap D) \\ F(\omega) \cup [G(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in K \cap (Y \cap D) \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım.

$$[(F, K) \widetilde{\cup} (G, Y)] \cap_R [(F, K) \widetilde{\cup} (H, D)]. (F, K) \widetilde{\cup} (G, Y) = (V, K) \text{ olsun. Burada } \forall \omega \in K \text{ için,}$$

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(F, K) \widetilde{\cup} (H, D) = (W, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$W(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-D \\ F(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \cap_R (W, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = V(\omega) \cap W(\omega)$,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cap F(\omega), & \omega \in (K-Y) \cap (K-D) \\ F(\omega) \cap [F(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in (K-Y) \cap (K \cap D) \\ [F(\omega) \cup G(\omega)] \cap F(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap (K-D) \\ [F(\omega) \cup G(\omega)] \cap [F(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in (K \cap Y) \cap (K \cap D) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ F(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cup [G(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

N fonksiyonun ilk satırındaki parametre kümesi dikkate alındığında $K - (Y \cap D) = K \cap (Y \cap D)'$ olup eğer $\omega \in (Y \cap D)'$ ise $\omega \in Y-D$ veya $\omega \in D-Y$ veya $\omega \in Y \cup D$ olarak düşünebiliriz. Böylece, $\omega \in K - (Y \cap D)$ ise $\omega \in K \cap Y \cap D'$ veya $\omega \in K \cap Y' \cap D$ veya $\omega \in K \cap Y' \cap D'$. Böylece, $N=T$ olduğu görülür.

$$2) K \cap (Y \Delta D) = \emptyset \text{ ise } (F, K) \widetilde{\cup} [(G, Y) \cup_R (H, D)] = [(F, K) \widetilde{\cup} (G, Y)] \cup_R [(F, K) \widetilde{\cup} (H, D)].$$

ii) Esnek İkili Parçalı Birleşim İşleminin Kısıtlanmış İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1) [(F, K) \cup_R (G, Y)] \widetilde{\cup} (H, D) = [(F, K) \widetilde{\cup} (H, D)] \cup_R [(G, Y) \widetilde{\cup} (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, K) \cup_R (G, Y) = (M, K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için, $M(\omega) = F(\omega) \cup G(\omega)$. $(M, K \cap Y) \widetilde{\cup} (H, D) = (N, K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için,

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D \\ M(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ [F(\omega) \cup G(\omega)] \cup H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $[(F, K) \widetilde{\cup} (H, D)] \cup_R [(G, Y) \widetilde{\cup} (H, D)]$.

$(F, K) \widetilde{\cup} (H, D) = (V, K)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K$ için,

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G, Y) \widetilde{\cup} (H, D) = (W, Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in Y$ için,

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ G(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \cup_R (W, Y) = (T, K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için, $T(\omega) = V(\omega) \cup W(\omega)$,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in (K - D) \cap (Y - D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cup [G(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in (K - D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cup H(\omega)] \cup G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y - D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cup H(\omega)] \cup [G(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cup G(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece, $N = T$ olduğu görülür.

$$2)[(F, K) \cap_R (G, Y)] \widetilde{\cup} (H, D) = [(F, K) \widetilde{\cup} (H, D)] \cap_R [(G, Y) \widetilde{\cup} (H, D)].$$

4.4.1.1. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cup_R)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_E$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup)

olduğunu göstermişti. *Sonuç 4.3.1* de $(S_E(U), \widetilde{\cup})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup olduğu, Teorem 4.4.1 (i) (2) başlığında, $\widetilde{\cup}$ işleminin $\cup_R$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartı ile soldan dağıldığı, Teorem 4.4.1 (ii) (1) başlığında, $\widetilde{\cup}$ işleminin $\cup_R$ işlemine sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap (Z \Delta M) = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cup_R, \widetilde{\cup})$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halkadır.

4.4.1.2. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), K, E evrensel kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $(S_K(U), \cup_R)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_K$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 4.3.1* de $(S_K(U), \widetilde{\cup})$ cebirsel yapısının da birimi $\emptyset_K$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu gösterildi. Teorem 4.4.1 (i) (2) başlığından $S_K(U)$ kümesi üzerinde, $\widetilde{\cup}$ işleminin $\cup_R$ işlemine soldan dağıldığı, Teorem 4.4.1 (ii) (1) başlığından, $\widetilde{\cup}$ işleminin $\cup_R$ işlemine sağdan dağıldığı kolaylıkla gösterilebilir. Sonuç olarak, hiçbir şart olmaksızın, $(S_K(U), \cup_R, \widetilde{\cup})$ cebirsel yapısı komutatif, idempotent, birimli, sıfırsız bir yarı-halkadır.

4.4.1.3. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cap_R)$ cebirsel yapısının birimi U_E olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 4.3.1* de $(S_E(U), \widetilde{\cup})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup olduğu, Teorem 4.4.1 (i) (1) başlığında, $\widetilde{\cup}$ işleminin $\cap_R$ işlemine soldan dağıldığı, Teorem 4.4.1 (ii) (2) başlığında, $\widetilde{\cup}$ işleminin $\cap_R$ işlemine altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \cap_R, \widetilde{\cup})$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halkadır.

Ayrıca, Teorem 4.3 (12)'de, $U_E \widetilde{\cup} (F, T) = U_E$, yani U_E nin $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\widetilde{\cup}$ işlemine göre sol yutan eleman olduğu gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında,

$(S_E(U), \cap_R, \tilde{\cup})$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, idempotent, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halkadır. Üstelik, $(F, K) \tilde{\cup} U_E \neq U_E$ olduğundan, $(S_E(U), \cap_R, \tilde{\cup})$ sıfır simetrik olmayan bir (sağ) yakın yarı-halkadır.

4.4.1.4. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_K(U), \cap_R)$ cebirsel yapısının birimi U_K olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 4.3.1* de $(S_K(U), \tilde{\cup})$ cebirsel yapısının, birimi $\emptyset_K$ olan, komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes olduğu, Teorem 4.4.1 (i) (1) başlığında, $\tilde{\cup}$ işleminin $\cap_R$ işlemine soldan, Teorem 4.4.1 (ii) (2) başlığında, $\tilde{\cup}$ işleminin $\cap_R$ işlemine sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Ayrıca, Teorem 4.3 (10) da $(F, K) \tilde{\cup} U_K = U_K \tilde{\cup} (F, K) = U_K$ ve $(F, K) \cap_R U_K = U_K \cap_R (F, K) = (F, K)$ olduğundan, $(S_K(U), \cap_R, \tilde{\cup})$ cebirsel yapısı komutatif, idempotent, birimli bir hemirhalkadır.

4.4.1.5. *Sonuç* $(S_K(U), \cap_R)$ cebirsel yapısı, birimi U_K olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes dolayısıyla bir yarıgruptur. $(S_K(U), \tilde{\cup})$ cebirsel yapısı, birimi $\emptyset_K$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes dolayısıyla bir yarıgruptur. Teorem 4.3 (25) de, $\tilde{\cup}$ ve $\cap_R$ işlemlerinin yutan kuralını sağladığı gösterilmiştir. Dolayısıyla, $(S_K(U), U_K, \emptyset_K, \cap_R, \tilde{\cup})$ sınırlı bir kafestir. Ayrıca, $\forall (F, K) \in S_K(U)$ için, $(F, K) \cap_R (F, K)^r = \emptyset_K$ ve $(F, K) \tilde{\cup} (F, K)^r = U_K$ olduğundan, $(S_K(U), U_K, \emptyset_K, \cap_R, \tilde{\cup})$ tümlemeli sınırlı bir kafestir. Üstelik, Teorem 4.4.1 (i) (1) başlığında, $\tilde{\cup}$ işleminin $\cap_R$ işlemine soldan, Teorem 4.4.1 (ii) (2) başlığında, $\tilde{\cup}$ işleminin $\cap_R$ işlemine sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Dolayısıyla, $(S_K(U), U_K, \emptyset_K, \cap_R, \tilde{\cup})$ dağılmalı, tümlemeli, sınırlı bir kafes, dolayısıyla bir Boolean Cebiridir. Üstelik, $[(F, K) \tilde{\cup} (G, K)]^r = (F, K)^r \cap_R (G, K)^r$ ve $[(F, K) \cap_R (G, K)]^r = (F, K)^r \tilde{\cup} (G, K)^r$ yani De Morgan kuralı da sağladığından, $(S_K(U), U_K, \emptyset_K, \cap_R, \tilde{\cup})$ De Morgan Cebiridir.

Burada hemen not edelim ki, $(S_E(U), \widetilde{\cup})$ cebirsel yapısı, komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup olduğu için, $\cap_R$ ile birlikte $S_E(U)$ kümesi üzerinde bir kafes oluşturma durumu yoktur.

4.4.2. Teorem $(F, K), (G, Y), (H, D), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, aşağıdaki gibi esnek ikili parçalı birleşim işleminin genişletilmiş işlemlere dağılması mevcuttur:

i) Esnek İkili Parçalı Birleşim İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Soldan Dağılması:

$$1) K \cap (Y \Delta D) = \emptyset \text{ ise } (F, K) \widetilde{\cup} [(G, Y) \cap_\varepsilon (H, D)] = [(F, K) \widetilde{\cup} (G, Y)] \cap_\varepsilon [(F, K) \widetilde{\cup} (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, Y) \cap_\varepsilon (H, D) = (M, Y \cup D)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y \cup D$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ H(\omega), & \omega \in D - Y \\ G(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(F, K) \widetilde{\cup} (M, Y \cup D) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - (Y \cup D) \\ F(\omega) \cup M(\omega), & \omega \in K \cap (Y \cup D) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - (Y \cup D) = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap (Y - D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap (D - Y) = K \cap Y' \cap D \\ F(\omega) \cup [(G(\omega) \cap H(\omega))], & \omega \in K \cap Y \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım:

$[(F, K) \widetilde{\cup} (G, Y)] \cap_\varepsilon [(F, K) \widetilde{\cup} (H, D)]$. $(F, K) \widetilde{\cup} (G, Y) = (V, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(F, K) \widetilde{\cup} (H, D) = (W, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-D \\ F(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \cap_{\varepsilon} (W, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K-K=\emptyset \\ W(\omega), & \omega \in K-K=\emptyset \\ V(\omega) \cap W(\omega), & \omega \in K \cap K=K \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cap F(\omega), & \omega \in (K-Y) \cap (K-D) = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cap [F(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in (K-Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y' \cap D \\ [F(\omega) \cup G(\omega)] \cap F(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap (K-D) = K \cap Y \cap D' \\ [F(\omega) \cup G(\omega) \cap [F(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in (K \cap Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-Y) \cap (K-D) = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) & \omega \in (K-Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y' \cap D \\ F(\omega) & \omega \in (K \cap Y) \cap (K-D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cup [G(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K \cap Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

$K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D' = \emptyset$ için $N=T$ olduğu görülür. $K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D' = \emptyset$ şartının, $K \cap (Y \Delta D) = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$2) (F, K) \tilde{\cup} [(G, Y) \cup_{\varepsilon} (H, D)] = [(F, K) \tilde{\cup} (G, Y)] \cup_{\varepsilon} [(F, K) \tilde{\cup} (H, D)].$$

ii) Esnek İkili Parçalı Birleşim İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1) [(F, K) \cap_{\varepsilon} (G, Y)] \tilde{\cup} (H, D) = [(F, K) \tilde{\cup} (H, D)] \cap_{\varepsilon} [(G, Y) \tilde{\cup} (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, K) \cap_{\varepsilon} (G, Y) = (M, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ G(\omega), & \omega \in Y-K \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(M, K \cup Y) \tilde{\cup} (H, D) = (N, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in (K \cup Y) - D \\ M(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in (K \cup Y) \cap D \end{cases}$$

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K - Y) - D = K \cap Y' \cap D' \\ G(\omega), & \omega \in (Y - K) - D = K' \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap D = K \cap Y' \cap D \\ G(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in (Y - K) \cap D = K' \cap Y \cap D \\ [F(\omega) \cap G(\omega)] \cup H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F, K) \widetilde{\cup} (H, D)] \cap_{\varepsilon} [(G, Y) \widetilde{\cup} (H, D)]$. $(F, K) \widetilde{\cup} (H, D) = (V, K)$

olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G, Y) \widetilde{\cup} (H, D) = (W, Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ G(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \cap_{\varepsilon} (W, Y) = (T, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K - Y \\ W(\omega), & \omega \in Y - K \\ V(\omega) \cap W(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K - D) - Y = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in (K \cap D) - Y = K \cap Y' \cap D \\ G(\omega), & \omega \in (Y - D) - K = K' \cap Y \cap D' \\ G(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in (Y \cap D) - K = K' \cap Y \cap D \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K - D) \cap (Y - D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap [G(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in (K - D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cup H(\omega)] \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y - D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cup H(\omega)] \cap [G(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ G(\omega), & \omega \in K' \cap Y \cap D' \\ G(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K' \cap Y \cap D \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ [F(\omega) \cap G(\omega)] \cup H(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece $N=T$ olduğu görülür.

$$2) [(F,K) \cup_{\varepsilon} (G,Y)] \widetilde{\cup} (H,D) = [(F,K) \widetilde{\cup} (H,D)] \cup_{\varepsilon} [(G,Y) \widetilde{\cup} (H,D)].$$

Buradaki eşitlikler ise $K \cap Y \cap D = \emptyset$ şartı altında sağlanır. İspatları benzer şekilde yapıldığı için, ispatsız bir şekilde verilmiştir.

$$3) [(F,K) \Delta_{\varepsilon} (G,Y)] \widetilde{\cup} (H,D) = [(F,K) \widetilde{\cup} (H,D)] \Delta_{\varepsilon} [(G,Y) \widetilde{\cup} (H,D)].$$

$$4) [(F,K) \setminus_{\varepsilon} (G,Y)] \widetilde{\cup} (H,D) = [(F,K) \widetilde{\cup} (H,D)] \setminus_{\varepsilon} [(G,Y) \widetilde{\cup} (H,D)].$$

$$5) [(F,K) +_{\varepsilon} (G,Y)] \widetilde{\cup} (H,D) = [(F,K) \widetilde{\cup} (H,D)] +_{\varepsilon} [(G,Y) \widetilde{\cup} (H,D)].$$

$$6) [(F,K) \gamma_{\varepsilon} (G,Y)] \widetilde{\cup} (H,D) = [(F,K) \widetilde{\cup} (H,D)] \gamma_{\varepsilon} [(G,Y) \widetilde{\cup} (H,D)].$$

$$7) [(F,K) \lambda_{\varepsilon} (G,Y)] \widetilde{\cup} (H,D) = [(F,K) \widetilde{\cup} (H,D)] \lambda_{\varepsilon} [(G,Y) \widetilde{\cup} (H,D)].$$

$$8) [(F,K) *_{\varepsilon} (G,Y)] \widetilde{\cup} (H,D) = [(F,K) \widetilde{\cup} (H,D)] *_{\varepsilon} [(G,Y) \widetilde{\cup} (H,D)].$$

$$9) [(F,K) \theta_{\varepsilon} (G,Y)] \widetilde{\cup} (H,D) = [(F,K) \widetilde{\cup} (H,D)] \theta_{\varepsilon} [(G,Y) \widetilde{\cup} (H,D)].$$

4.4.2.1. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cup_{\varepsilon})$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_{\emptyset}$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup)

olduğunu göstermişti. *Sonuç 4.3.1* de $(S_E(U), \widetilde{\cup})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup olduğu, Teorem 4.4.2. (i) (2) başlığında, $\widetilde{\cup}$ işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine soldan dağıldığı, Teorem 4.4.2 (ii) (2) başlığında, $\widetilde{\cup}$ işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \widetilde{\cup})$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halkadır.

4.4.2.2. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), K, E evrensel kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $(S_K(U), \cup_\varepsilon)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_K$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 4.3.1* de $(S_K(U), \widetilde{\cup})$ cebirsel yapısının da birimi $\emptyset_K$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu gösterildi. Teorem 4.4.2 (i) (2) başlığından $S_K(U)$ kümesi üzerinde, $\widetilde{\cup}$ işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine soldan dağıldığı, Teorem 4.4.2 (ii) (2) başlığından, $\widetilde{\cup}$ işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine sağdan dağıldığı kolaylıkla gösterilebilir. Sonuç olarak, hiçbir şart olmaksızın, $(S_K(U), \cup_\varepsilon, \widetilde{\cup})$ cebirsel yapısı komutatif, idempotent, birimli, sıfırsız bir yarı-halkadır.

$(S_K(U), \setminus_\varepsilon, \widetilde{\cup})$, $(S_K(U), \gamma_\varepsilon, \widetilde{\cup})$, $(S_K(U), *_\varepsilon, \widetilde{\cup})$, $(S_K(U), \theta_\varepsilon, \widetilde{\cup})$, $(S_K(U), +_\varepsilon, \widetilde{\cup})$, $(S_K(U), \lambda_\varepsilon, \widetilde{\cup})$ cebirsel yapılarında ise ilk işlem $S_K(U)$ kümesinde birleşmeli olmadığı için yarıgrup oluşturamaz, dolayısıyla bu cebirsel yapılar yarı-halka veya sağ-yarı halka oluşturamaz. $(S_K(U), \Delta_\varepsilon, \widetilde{\cup})$ cebirsel yapısında ise Δ_ε işlemi, $S_K(U)$ kümesinde birleşmeli olmasına rağmen, $\widetilde{\cup}$ işlemi Δ_ε işleminin sağdan, ne de soldan dağılmadığı için bir yarı-halka veya sağ-yarı halka oluşturamaz.

4.4.2.3. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cap_\varepsilon)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_\emptyset$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 4.3.1* de $(S_E(U), \widetilde{\cup})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup olduğu, Teorem 4.4.2 (i) (1) başlığında, $\widetilde{\cup}$ işleminin $\cap_\varepsilon$ işlemine

$T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartı ile soldan dağıldığı, Teorem 4.4.2 (ii) (1) başlığında, $\tilde{\cup}$ işleminin $\cap_\varepsilon$ işlemine altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z' \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \tilde{\cup})$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halkadır.

Ayrıca, Teorem 4.3 (9)'da, $\emptyset_\emptyset \tilde{\cup} (F, T) = \emptyset_\emptyset$, yani $\emptyset_\emptyset$ nin $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{\cup}$ işlemine göre sol yutan eleman olduğu gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \tilde{\cup})$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, idempotent, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halkadır. Üstelik, $(F, K) \tilde{\cup} \emptyset_\emptyset \neq \emptyset_\emptyset$ olduğundan, $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \tilde{\cup})$ sıfır simetrik olmayan bir (sağ) yakın yarı-halkadır.

Benzer şekilde, $(S_E(U), \Delta_\varepsilon, \tilde{\cup})$, $(S_E(U), \setminus_\varepsilon, \tilde{\cup})$, $(S_E(U), +_\varepsilon, \tilde{\cup})$, $(S_E(U), \gamma_\varepsilon, \tilde{\cup})$, $(S_E(U), \lambda_\varepsilon, \tilde{\cup})$, $(S_E(U), *_\varepsilon, \tilde{\cup})$, $(S_E(U), \theta_\varepsilon, \tilde{\cup})$, cebirsel yapılarının da $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları altında, sıfır simetrik ve komutatif olmayan, çarpımsal idempotent, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halka olduğu gösterilebilir. Buradaki, ilk işlemlerin $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında birleşmeli olduğu, Aybek (2023) de gösterilmiştir.

4.4.2.4. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_K(U), \cap_\varepsilon)$ cebirsel yapısının birimi U_K olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç* 4.3.2 de $(S_K(U), \tilde{\cup})$ cebirsel yapısının, birimi $\emptyset_K$ olan, komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes olduğu, Teorem 4.4.2 (i) (1) başlığında, $\tilde{\cup}$ işleminin $\cap_\varepsilon$ işlemine soldan, Teorem 4.4.2 (ii) (1) başlığında, $\tilde{\cup}$ işleminin $\cap_\varepsilon$ işlemine sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Ayrıca, Teorem 4.3 (10) da $(F, K) \tilde{\cup} U_K = U_K \tilde{\cup} (F, K) = U_K$ ve $(F, K) \cap_\varepsilon U_K = U_K \cap_\varepsilon (F, K) = (F, K)$ olduğundan, $(S_K(U), \cap_\varepsilon, \tilde{\cup})$ cebirsel yapısı komutatif, idempotent, birimli bir hemihalkadır.

4.4.2.5. *Sonuç* $(S_K(U), \cap_\varepsilon)$ cebirsel yapısı, birimi U_K olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes dolayısıyla bir yarıgruptur. $(S_K(U), \tilde{\cup})$ cebirsel yapısı, birimi $\emptyset_K$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes dolayısıyla bir

yarıgruptur. Teorem 4.3 (25) de, $\tilde{\cup}$ ve $\cap_\varepsilon$ işlemlerinin yutan kuralını sağladığı gösterilmiştir. Dolayısıyla, $(S_K(U), U_K, \emptyset_K, \cap_\varepsilon, \tilde{\cup})$ sınırlı bir kafestir. Ayrıca, $\forall (F, K) \in S_K(U)$ için, $(F, K) \cap_\varepsilon (F, K)^r = \emptyset_K$ ve $(F, K) \tilde{\cup} (F, K)^r = U_K$ olduğundan, $(S_K(U), U_K, \emptyset_K, \cap_\varepsilon, \tilde{\cup})$ tümlemeli sınırlı bir kafestir. Üstelik, Teorem 4.4.2 (i) (1) başlığında, $\tilde{\cup}$ işleminin $\cap_\varepsilon$ işlemine soldan, Teorem 4.4.2 (ii) (1) başlığında, $\tilde{\cup}$ işleminin $\cap_\varepsilon$ işlemine sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Dolayısıyla, $(S_K(U), U_K, \emptyset_K, \cap_\varepsilon, \tilde{\cup})$ dağılmalı, tümlemeli, sınırlı bir kafes, dolayısıyla bir Boolean Cebiridir.

Üstelik, $[(F, K) \tilde{\cup} (G, K)]^r = (F, K)^r \cap_\varepsilon (G, K)^r$ ve $[(F, K) \cap_\varepsilon (G, K)]^r = (F, K)^r \tilde{\cup} (G, K)^r$ yani De Morgan kuralı da sağladığından, $(S_K(U), U_K, \emptyset_K, \cap_\varepsilon, \tilde{\cup})$ De Morgan Cebiridir.

Burada hemen not edelim ki, $(S_E(U), \tilde{\cup})$ cebirsel yapısı, komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup olduğu için, $\cap_\varepsilon$ ile birlikte $S_E(U)$ kümesi üzerinde kafes oluşturma durumu yoktur.

4.4.3. Teorem $(F, K), (G, Y), (H, D), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, aşağıdaki gibi esnek ikili parçalı birleşim işleminin esnek ikili parçalı işlemler dağılması mevcuttur:

i) Esnek İkili Parçalı Birleşim İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Soldan Dağılması:

$$1) K \cap Y \cap D^c = \emptyset \text{ ise } (F, K) \tilde{\cup} [(G, Y) \cap (H, D)] = [(F, K) \tilde{\cup} (G, Y)] \cap [(F, K) \tilde{\cup} (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, Y) \cap (H, D) = (M, Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ G(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(F, K) \tilde{\cup} (M, Y) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cup M(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cup [G(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in K \cap Y \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $(F, K) \widetilde{\cup} (G, Y) = (V, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(F, K) \widetilde{\cap} (H, D) = (W, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-D \\ F(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \widetilde{\cap} (W, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K-K=\emptyset \\ V(\omega) \cap W(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cap F(\omega), & \omega \in (K-Y) \cap (K-D) = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cap [F(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in (K-Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y' \cap D \\ [F(\omega) \cup G(\omega)] \cap F(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap (K-D) = K \cap Y \cap D' \\ [F(\omega) \cup G(\omega)] \cap [F(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in (K \cap Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ F(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cup [G(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

N fonksiyonundaki $K-Y$ yi düşünecek olursak, $\omega \in K-Y$ ise, $K-Y = K \cap Y'$ olacağından, $\omega \in Y'$ ise $\omega \in D-Y$ veya $\omega \in (Y \cup D)'$ olacağından, buradan, $\omega \in K-Y$ ise, $\omega \in K \cap Y' \cap D'$ veya $\omega \in K \cap Y' \cap D$ olur. Böylece $K \cap Y \cap D' = \emptyset$ için $N=T$ olduğu görülür.

$$2) K \cap Y' \cap D = \emptyset \text{ ise } (F, K) \widetilde{\cup} [(G, Y) \widetilde{\cap} (H, D)] = [(F, K) \widetilde{\cap} (G, Y)] \widetilde{\cap} [(H, D) \widetilde{\cap} (F, K)].$$

ii) Esnek İkili Parçalı Birleşim İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1)[(F, K) \widetilde{\cap} (G, Y)] \widetilde{\cup} (H, D) = [(F, K) \widetilde{\cup} (H, D)] \widetilde{\cap} [(G, Y) \widetilde{\cup} (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, K) \widetilde{\cap} (G, Y) = (M, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(M, K) \widetilde{\cup} (H, D) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in K - D \\ M(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K - Y) - D = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap D = K \cap Y' \cap D \\ [F(\omega) \cap G(\omega)] \cup H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $[(F, K) \widetilde{\cup} (H, D)] \widetilde{\cap} [(G, Y) \widetilde{\cup} (H, D)]$. $(F, K) \widetilde{\cup} (H, D) = (V, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G, Y) \widetilde{\cup} (H, D) = (W, Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ G(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \widetilde{\cap} (W, Y) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K - Y \\ V(\omega) \cap W(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-D) - Y = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in (K \cap D) - Y = K \cap Y' \cap D \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K-D) \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap [G(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in (K-D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cup H(\omega)] \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y-D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cup H(\omega)] \cap [G(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ [F(\omega) \cap G(\omega)] \cup H(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece $N=T$ olduğu görülür.

$$2) [(F, K) \widetilde{\cup} (G, Y)] \widetilde{\cup} (H, D) = [(F, K) \widetilde{\cup} (H, D)] \widetilde{\cup} [(G, Y) \widetilde{\cup} (H, D)].$$

Buradaki eşitlikler ise $K \cap Y \cap D = \emptyset$ şartı altında sağlanır. İspatları benzer şekilde yapıldığı için, ispatsız bir şekilde verilmiştir.

$$3) [(F, K) \widetilde{\Delta} (G, Y)] \widetilde{\cup} (H, D) = [(F, K) \widetilde{\cup} (H, D)] \widetilde{\Delta} [(G, Y) \widetilde{\cup} (H, D)].$$

$$4) [(F, K) \widetilde{\setminus} (G, Y)] \widetilde{\cup} (H, D) = [(F, K) \widetilde{\cup} (H, D)] \widetilde{\setminus} [(G, Y) \widetilde{\cup} (H, D)].$$

$$5) [(F, K) \widetilde{+} (G, Y)] \widetilde{\cup} (H, D) = [(F, K) \widetilde{\cup} (H, D)] \widetilde{+} [(G, Y) \widetilde{\cup} (H, D)].$$

$$6) [(F, K) \widetilde{\gamma} (G, Y)] \widetilde{\cup} (H, D) = [(F, K) \widetilde{\cup} (H, D)] \widetilde{\gamma} [(G, Y) \widetilde{\cup} (H, D)].$$

$$7) [(F, K) \widetilde{\lambda} (G, Y)] \widetilde{\cup} (H, D) = [(F, K) \widetilde{\cup} (H, D)] \widetilde{\lambda} [(G, Y) \widetilde{\cup} (H, D)].$$

$$8) [(F, K) \widetilde{*} (G, Y)] \widetilde{\cup} (H, D) = [(F, K) \widetilde{\cup} (H, D)] \widetilde{*} [(G, Y) \widetilde{\cup} (H, D)].$$

$$9) [(F,K) \tilde{\cap} (G,Y)] \tilde{\cup} (H,D) = [(F,K) \tilde{\cup} (H,D)] \tilde{\cap} [(G,Y) \tilde{\cup} (H,D)].$$

4.4.3.1. *Sonuç* Sonuç 4.3.1 de $(S_E(U), \tilde{\cup})$ cebirsel yapısının, (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup yani bir band olduğu, Teorem 4.4.3 (i) (2) başlığında, $\tilde{\cup}$ işleminin $\tilde{\cup}$ işlemine $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı ile soldan, Teorem 4.4.3 (ii) (2) başlığında, $\tilde{\cup}$ işleminin $\tilde{\cup}$ işlemine sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında, $(S_E(U), \tilde{\cup}, \tilde{\cup})$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halkadır. Benzer şekilde, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M' = \emptyset$ şartı altında, $(S_E(U), \tilde{\cap}, \tilde{\cup})$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halkadır. Yine benzer şekilde, eğer $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ ise, $(S_E(U), \tilde{\Delta}, \tilde{\cup})$, $(S_E(U), \tilde{\cap}, \tilde{\cup})$, $(S_E(U), \tilde{+}, \tilde{\cup})$, $(S_E(U), \tilde{\gamma}, \tilde{\cup})$, $(S_E(U), \tilde{*}, \tilde{\cup})$, $(S_E(U), \tilde{\theta}, \tilde{\cup})$, $(S_E(U), \tilde{\lambda}, \tilde{\cup})$ cebirsel yapılarının komutatif olmayan, çarpımsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir sağ yarı-halka olduğu gösterilebilir. Buradaki, ilk işlemlerin $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında ($\tilde{\Delta}$ işlemi $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında) birleşmeli olduğu, bu tezin ilerleyen kısımlarında gösterilmiştir.

4.4.3.2. *Sonuç* Sonuç 4.3.1 de K , E evrensel kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $(S_K(U), \tilde{\cup})$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_K$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. Teorem 4.4.3 (i) (2) başlığından $S_K(U)$ kümesi üzerinde, $\tilde{\cup}$ işleminin $\tilde{\cup}$ işlemine soldan dağıldığı, Teorem 4.4.3 (ii) (2) başlığından, $\tilde{\cup}$ işleminin $\tilde{\cup}$ işlemine sağdan dağıldığı kolaylıkla gösterilebilir. Sonuç olarak, hiçbir şart olmaksızın, $(S_K(U), \tilde{\cup}, \tilde{\cup})$ cebirsel yapısı komutatif, idempotent, birimli ve sıfırsız bir yarı-halkadır. $(S_K(U), \tilde{\cap}, \tilde{\cup})$, $(S_K(U), \tilde{\gamma}, \tilde{\cup})$, $(S_K(U), \tilde{*}, \tilde{\cup})$, $(S_K(U), \tilde{\theta}, \tilde{\cup})$, $(S_K(U), \tilde{+}, \tilde{\cup})$, $(S_K(U), \tilde{\lambda}, \tilde{\cup})$ cebirsel yapılarında, ilk işlem $S_K(U)$ kümesinde birleşmeli olmadığı için yarıgrup oluşturamaz, dolayısıyla bu cebirsel yapılar yarı-halka veya sağ-yarı halka oluşturamaz. $(S_K(U), \tilde{\Delta}, \tilde{\cup})$ cebirsel yapısında ise $\tilde{\cup}$ işlemi $\tilde{\Delta}$ işlemine dağılmadığı için bir yarı-halka veya sağ-yarı halka oluşturamaz.

4.4.3.3. *Sonuç* Sonuç 3.3.1 de K, E evrensel kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $(S_K(U), \widetilde{\cap})$ cebirsel yapısının birimi U_K olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğu, *Sonuç 4.3.1* de, $(S_K(U), \widetilde{\cup})$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_K$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti göstermişti. Teorem 4.4.3 (i) (2) başlığından $S_K(U)$ kümesi üzerinde, $\widetilde{\cup}$ işleminin $\widetilde{\cap}$ işlemine soldan dağıldığı, Teorem 4.4.3 (ii) (2) başlığından, $\widetilde{\cup}$ işleminin $\widetilde{\cap}$ işlemine sağdan dağıldığı kolaylıkla gösterilebilir. Ayrıca, Teorem 4.3 (10)'da $(F, K) \widetilde{\cup} U_K = U_K \widetilde{\cup} (F, K) = U_K$ ve $(F, K) \widetilde{\cap} U_K = U_K \widetilde{\cap} (F, K) = (F, K)$ olduğundan, $(S_K(U), \widetilde{\cap}, \widetilde{\cup})$ cebirsel yapısı komutatif, idempotent, birimli bir hemihalkadır.

4.4.3.4. *Sonuç* $(S_K(U), \widetilde{\cap})$ cebirsel yapısı, birimi U_K olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes dolayısıyla bir yarıgruptur. $(S_K(U), \widetilde{\cup})$ cebirsel yapısı, birimi $\emptyset_K$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes dolayısıyla bir yarıgruptur. Teorem 4.3 (25) de, $\widetilde{\cup}$ ve $\widetilde{\cap}$ işlemlerinin yutan kuralını sağladığı gösterilmiştir. Dolayısıyla, $(S_K(U), U_K, \emptyset_K, \widetilde{\cap}, \widetilde{\cup})$ sınırlı bir kafestir. Ayrıca, $\forall (F, K) \in S_K(U)$ için, $(F, K) \widetilde{\cap} (F, K)^r = \emptyset_K$ ve $(F, K) \widetilde{\cup} (F, K)^r = U_K$ olduğundan, $(S_K(U), U_K, \emptyset_K, \widetilde{\cap}, \widetilde{\cup})$ tümlemeli sınırlı bir kafestir. Üstelik, Teorem 4.4.3 (i) (1) başlığında, $\widetilde{\cup}$ işleminin $\widetilde{\cap}$ işlemine soldan, Teorem 4.4.3. (ii) (1) başlığında, $\widetilde{\cup}$ işleminin $\widetilde{\cap}$ işlemine sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Dolayısıyla, $(S_K(U), U_K, \emptyset_K, \widetilde{\cap}, \widetilde{\cup})$ dağılmalı, tümlemeli, sınırlı bir kafes, dolayısıyla bir Boolean Cebiridir. Üstelik, $[(F, K) \widetilde{\cup} (G, K)]^r = (F, K)^r \widetilde{\cap} (G, K)^r$ ve $[(F, K) \widetilde{\cap} (G, K)]^r = (F, K)^r \widetilde{\cup} (G, K)^r$ yani De Morgan kuralı da sağladığından, $(S_K(U), U_K, \emptyset_K, \widetilde{\cap}, \widetilde{\cup})$ De Morgan Cebiridir.

Burada hemen not edelim ki, $(S_E(U), \widetilde{\cup})$ ve $(S_E(U), \widetilde{\cap})$ cebirsel yapıları, komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup olduğu için bu işlemlerin $S_E(U)$ kümesi üzerinde kafes oluşturma durumu yoktur.

4.4.4. Teorem $(F, K), (G, Y)$ ve $(H, D), U$ üzerinde esnek küme olsun. Bu durumda

- i. $(F,K) \times [(G,Y) \widetilde{\cup} (H,Z)] = [(F,K) \times (G,Y)] \widetilde{\cup} [(F,K) \times (H,Z)]$
 ii. $[(F,K) \widetilde{\cup} (G,Y)] \times (H,Z) = [(F,K) \times (H,Z)] \widetilde{\cup} [(G,Y) \times (H,Z)]$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G,Y) \widetilde{\cup} (H,D) = (M,Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ G(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(F,K) \times (M,Y) = (N, K \times Y)$ olsun. Burada $\forall (\omega, y) \in K \times Y$ için; $N(\omega, y) = F(\omega) \times M(y)$. Böylece,

$$N(\omega, y) = \begin{cases} F(\omega) \times G(y) & (\omega, y) \in K \times (Y - D) = (K \times Y) - (K \times D) \\ F(\omega) \times [G(y) \cup H(y)], & (\omega, y) \in K \times (Y \cap D) = (K \times Y) \cap (K \times D) \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $[(F,K) \times (G,Y)] \widetilde{\cup} [(F,K) \times (H,D)]$. $(F,K) \times (G,Y) = (V, K \times Y)$ olsun. Burada $\forall (\omega, y) \in K \times Y$ için; $V(\omega, y) = F(\omega) \times G(y)$. $(F,K) \times (H,D) = (W, K \times D)$ olsun. Burada $\forall (\omega, d) \in K \times D$ için; $W(\omega, d) = F(\omega) \times H(d)$. $(V, K \times Y) \widetilde{\cup} (W, K \times D) = (T, K \times Y)$ olsun. Burada $\forall (\omega, y) \in K \times Y$ için;

$$T(\omega, y) = \begin{cases} V(\omega, y), & (\omega, y) \in (K \times Y) - (K \times D) \\ V(\omega, y) \cup W(\omega, y) & (\omega, y) \in (K \times Y) \cap (K \times D) \end{cases}$$

$$T(\omega, y) = \begin{cases} F(\omega) \times G(y), & (\omega, y) \in (K \times Y) - (K \times D) \\ [F(\omega) \times G(y)] \cup [F(\omega) \times H(y)], & (\omega, y) \in (K \times Y) \cap (K \times D) \end{cases}$$

Buradan, $N(\omega, y) = T(\omega, y)$ olduğu görülür.

ii) İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F,K) \widetilde{\cup} (G,Y) = (S,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$S(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(S,K) \times (H,Z) = (T, K \times Z)$ olsun. Burada $\forall (\omega, y) \in K \times Z$ için; $T(\omega, y) = S(\omega) \times H(y)$. Böylece,

$$T(\omega, y) = \begin{cases} F(\omega) \times H(y) & (\omega, y) \in (K - Y) \times Z = (K \times Z) \times (Y - Z) \\ [F(\omega) \cup G(\omega)] \times H(y), & (\omega, y) \in (K \cap Y) \times Z = (K \times Z) \cap (Y \times Z) \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $[(F, K) \times (H, Z)] \tilde{\cup} [(G, Y) \times (H, Z)]$. $(F, K) \times (H, Z) = (W, K \times Z)$ olsun. Burada $\forall (\omega, y) \in K \times Z$ için; $V(\omega, y) = F(\omega) \times H(y)$. $(G, Y) \times (H, Z) = (R, Y \times Z)$ olsun. Burada $\forall (\omega, d) \in Y \times Z$ için; $R(\omega, d) = G(\omega) \times H(d)$. $(W, K \times Z) \tilde{\cup} (R, Y \times Z) = (M, K \times Z)$ olsun. Burada $\forall (\omega, y) \in K \times Z$ için;

$$M(\omega, y) = \begin{cases} W(\omega, y), & (\omega, y) \in (K \times Z) - (Y \times Z) \\ W(\omega, y) \cup R(\omega, y) & (\omega, y) \in (K \times Z) \cap (Y \times Z) \end{cases}$$

$$T(\omega, y) = \begin{cases} F(\omega) \times H(y), & (\omega, y) \in (K \times Y) - (K \times D) \\ [F(\omega) \times H(y)] \cup [G(\omega) \times H(y)], & (\omega, y) \in (K \times Y) \cap (K \times D) \end{cases}$$

Buradan, $N(\omega, y) = M(\omega, y)$ olduğu görülür.

5. ESNEK İKİLİ PARÇALI ARTI İŞLEMİ

Bu bölümde, esnek ikili parçalı artı adı verilen yeni esnek küme işlemi tanıtılmış, örneği verilmiş, işlemin cebirsel özellikleri ile birlikte diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkisine bakılarak dağılma kuralları ve $S_E(U)$ kümesi üzerinde bu işlemin hangi cebirsel yapıları oluşturduğu incelenmiş ve çok önemli sonuçlar elde edilmiştir.

5.1. Tanım (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde tanımlı iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin $(F, K) \widetilde{+} (G, Y)$ ile gösterilen esnek ikili parçalı artı işlemi $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

olmak üzere $(F, K) \widetilde{+} (G, Y) = (H, K)$ ile tanımlanır.

5.2. *Örnek* $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesi, $K = \{e_1, e_4\}$, $Y = \{e_2, e_3, e_4\}$ E 'nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evrensel küme, (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde $(F, K) = \{(e_1, \{h_2, h_4, h_6\}), (e_4, \{h_1, h_2, h_5, h_6\})\}$, $(G, Y) = \{(e_2, \{h_1, h_2\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4, h_5\}), (e_4, \{h_2, h_3, h_4\})\}$ olarak tanımlanan iki esnek küme olsun. $(F, K) \widetilde{+} (G, Y) = (H, K)$ olmak üzere,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Burada, $K = \{e_1, e_4\}$, $K - Y = \{e_1\}$ olmak üzere, $\forall \omega \in K - Y = \{e_1\}$ için, $H(\omega) = F(\omega)$ olup, $H(e_1) = F(e_1) = \{h_2, h_4, h_6\}$, $\forall \omega \in K \cap Y = \{e_4\}$ için, $H(\omega) = F'(\omega) \cup G(\omega)$ olup, $H(e_4) = F'(e_4) \cup G(e_4) = \{h_3, h_4\} \cup \{h_2, h_3, h_4\} = \{h_2, h_3, h_4\}$. Böylece, $(F, K) \widetilde{+} (G, Y) = \{(e_1, \{h_2, h_4, h_6\}), (e_4, \{h_2, h_3, h_4\})\}$.

5.3. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1) $\widetilde{+}$, $S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: $\sim_+$ 'nın $S_E(U)$ üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$\begin{aligned} \sim_+ : S_E(U) \times S_E(U) &\rightarrow S_E(U) \\ ((F,K), (G,Y)) &\rightarrow (F,K) \sim_+ (G,Y) = (H,K) \end{aligned}$$

olup, (F,K) ve (G,Y) , U üzerinde iki esnek küme olduğunda $(F,T) \sim_+ (G,Y)$ de, U üzerinde bir esnek kümedir. $K \subseteq E$ sabit bir parametre kümesi olmak üzere, $\sim_+$ 'nın $S_K(U)$ üzerinde de bir ikili işlem olduğu açıktır.

$$2) K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D = \emptyset \text{ ise } [(F,K) \sim_+ (G,Y)] \sim_+ (H,D) = (F,K) \sim_+ [(G,Y) \sim_+ (H,D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F,K) \sim_+ (G,Y) = (T,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(T,K) \sim_+ (H,D) = (M,K)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in K - D \\ T'(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K - Y) - D = K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap D = K \cap Y' \cap D \\ [F(\omega) \cap G'(\omega)] \cup H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

$(G,Y) \sim_+ (H,D) = (K,Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$K(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ G'(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(F,K) \sim_+ (K,Y) = (S,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$S(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ F'(\omega) \cup K(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Böylece,

$$S(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ F'(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cup [G'(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in K \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

S fonksiyonundaki, K-Y ye bakacak olursak, $K-Y = K \cap Y'$ olup, eğer $\omega \in Y'$ ise $\omega \in D-Y$ veya $\omega \in (Y \cup D)'$. Buradan $\omega \in K-Y$ ise $\omega \in K \cap Y' \cap D'$ ve $\omega \in K \cap Y' \cap D$ olur. Böylece, $K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D = \emptyset$ için $M=S$ olur. Yani uygun koşullar altında, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{*}$ işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

$$3) [(F,K) \tilde{+} (G,K)] \tilde{+} (H,K) \neq (F,K) \tilde{+} [(G,K) \tilde{+} (H,K)]$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F,K) \tilde{+} (G,K) = (T,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-K = \emptyset \\ F'(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$(T,K) \tilde{+} (H,K) = (M,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in K-K = \emptyset \\ T'(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece,

$$M(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in K-K = \emptyset \\ [F(\omega) \cap G'(\omega)] \cup H(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına bakalım. $(G,K) \tilde{+} (H,K) = (L,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$L(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in K-K = \emptyset \\ G'(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$(F, K) \sim_+ (L, K) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cup L(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cup [G'(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan $M \neq N$ olduğu görülür. Yani $S_K(U)$ kümesi üzerinde (parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler üzerinde), $\sim_+$ işleminin birleşme özelliği yoktur.

$$4) (F, K) \sim_+ (G, Y) \neq (G, Y) \sim_+ (F, K).$$

İspat: $(F, K) \sim_+ (G, Y) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(G, Y) \sim_+ (F, K) = (T, Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - K \\ G'(\omega) \cup F(\omega), & \omega \in Y \cap K \end{cases}$$

Burada, sol taraftaki esnek kümenin parametre kümesi K ; sağ taraftaki esnek kümenin parametre kümesi Y dir. Böylece esnek kümelerin eşitliği tanımı gereği;

$$(F, K) \sim_+ (G, Y) \neq (G, Y) \sim_+ (F, K).$$

Ayrıca, $(F, K) \sim_+ (G, K) \neq (G, K) \sim_+ (F, K)$ olduğu açıktır. Yani, $S_E(U)$ ve $K \subseteq E$ sabit bir parametre kümesi olmak üzere $S_K(U)$ kümesi üzerinde $\sim_+$ işlemi değişme özelliğine sahip değildir.

5.3.1. *Sonuç* Teorem 5.3 (1), (2) ve (4) den, (F,K) , (G,Y) ve (H,D) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \widetilde{+})$ komutatif ve idempotent olmayan bir yarı gruptur. $K \subseteq E$ sabir bir parametre kümesi olmak üzere, $(S_K(U), \widetilde{+})$ cebirsel yapısı Teorem 5.3 (3) den, birleşme özelliğine sahip olmadığı için yarıgrup olamaz; fakat bu yapının komutatif olmayan bir grupoid olduğu açıktır.

$$5) (F, K) \widetilde{+} (F, K) = U_K.$$

İspat: $(F, K) \widetilde{+} (F, K) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cup F(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Burada, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F'(\omega) \cup F(\omega) = U$, böylece $(H, K) = U_K$.

Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\widetilde{+}$ işlemi, denk güçlülük özelliğine sahip değildir.

$$6) (F, K) \widetilde{+} \emptyset_K = (F, K)^r.$$

İspat: $\emptyset_K = (S, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için; $S(\omega) = \emptyset$. $(F, K) \widetilde{+} (S, K) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cup S(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F'(\omega) \cup S(\omega) = F'(\omega) \cup \emptyset = F'(\omega)$. Buradan $(H, K) = (F, K)^r$.

$$7) \emptyset_K \widetilde{+} (F, K) = U_K.$$

İspat: $\emptyset_K = (S, K)$ olsun. Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $S(\omega) = \emptyset$. $(S, K) \widetilde{+} (F, K) = (H, K)$ olsun.

Buradan, $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} S(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ S'(\omega) \cup F(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = S'(\omega) \cup F(\omega) = U \cup F(\omega) = U$ olup, $(H, K) = U_K$.

$$8) (F, K) \underset{+}{\sim} \emptyset_E = (F, K)^r.$$

İspat: $\emptyset_E = (S, E)$ olsun. Burada $\forall \omega \in E$; $S(\omega) = \emptyset$. $(F, K) \underset{+}{\sim} (S, E) = (H, K)$. Böylece, $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - E = \emptyset \\ F'(\omega) \cup S(\omega), & \omega \in K \cap E = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için; $H(\omega) = F'(\omega) \cup S(\omega) = F'(\omega) \cup \emptyset = F'(\omega)$ olur ve böylece $(H, K) = (F, K)^r$.

$$9) (F, K) \underset{+}{\sim} \emptyset_\emptyset = (F, K).$$

İspat: $\emptyset_\emptyset = (S, \emptyset)$ ve $(F, K) \underset{+}{\sim} (S, \emptyset) = (H, K)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - \emptyset = K \\ F'(\omega) \cup S(\omega), & \omega \in K \cap \emptyset = \emptyset \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için; $H(\omega) = F(\omega)$ olup, $(H, K) = (F, K)$. $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\underset{+}{\sim}$ işleminin sağ birim elemanı $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir.

$$10) \emptyset_\emptyset \underset{+}{\sim} (F, K) = \emptyset_\emptyset.$$

İspat: $\emptyset_\emptyset = (S, \emptyset)$ ve $(S, \emptyset) \underset{+}{\sim} (F, K) = (H, \emptyset)$ olsun. $\emptyset_\emptyset$, parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme olduğu için, $(H, \emptyset) = \emptyset_\emptyset$ olur. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\underset{+}{\sim}$ işlemi için, her elemanın sağ birim eleman olan $\emptyset_\emptyset$ ye göre sol tersi, $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir. Ayrıca, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\underset{+}{\sim}$ işleminin sol yutan elemanı $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir.

5.3.2. *Sonuç* Teorem 5.3 (1), (2), (9) ve (10) dan, (F,K) , (G,Y) ve (H,D) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \widetilde{+})$ cebirsel yapısı, sağ birimi $\emptyset_\emptyset$, her elemanın sol tersi $\emptyset_\emptyset$ olan idempotent olmayan bir sol-sağ sistemdir.

$$11) U_K \widetilde{+} (F, K) = (F, K).$$

İspat: $U_K = (T, K)$. Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = U$. $(T, K) \widetilde{+} (F, K) = (H, K)$ olsun. Buradan $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ T'(\omega) \cup F(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = T'(\omega) \cup F(\omega) = \emptyset \cup F(\omega) = F(\omega)$ dolayısıyla $(H, K) = (F, K)$.

$S_K(U)$ kümesi üzerinde $\widetilde{+}$ işleminin sol birim elemanı U_K esnek kümesidir.

$$12) (F, K) \widetilde{+} U_K = U_K.$$

İspat: $U_K = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = U$. $(F, K) \widetilde{+} (T, K) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cup T(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için; $H(\omega) = F'(\omega) \cup T(\omega) = F'(\omega) \cup U = U$ olur ve böylece $(H, K) = U_K$. Yani, $S_K(U)$ kümesi üzerinde $\widetilde{+}$ işlemi için, her elemanın sol birim eleman olan U_K ye göre sağ tersi, U_K esnek kümesidir. Ayrıca, $S_K(U)$ kümesi üzerinde $\widetilde{+}$ işleminin sağ yutan elemanı U_K esnek kümesidir.

$$13) (F, K) \widetilde{+} U_E = U_K.$$

İspat: $U_E = (T, E)$ olsun. Burada $\forall \omega \in E$ için, $T(\omega) = U$. $(F, K) \widetilde{+} (T, E) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için ;

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - E = \emptyset \\ F'(\omega) \cup T(\omega), & \omega \in K \cap E = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F'(\omega) \cup T(\omega) = F'(\omega) \cup U = U$ olur. $(H, K) = U_K$.

$$14) (F, K) \underset{+}{\sim} (F, K)^r = (F, K)^r.$$

İspat: $(F, K)^r = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F'(\omega)$. $(F, K) \underset{+}{\sim} (H, K) = (T, K)$ olsun.

Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = F'(\omega) \cup H(\omega) = F'(\omega) \cup F'(\omega) = F'(\omega)$ olur. Burada $(T, K) = (F, K)^r$

$S_E(U)$ kümesi üzerinde, her esnek kümenin tümleyeni $\underset{+}{\sim}$ işlemi için kendisinin sağda yutan elemanıdır.

$$15) (F, K)^r \underset{+}{\sim} (F, K) = (F, K).$$

İspat: $(F, K)^r = (H, K)$. Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F'(\omega)$. $(H, K) \underset{+}{\sim} (F, K) = (T, K)$ olsun.

$\forall \omega \in K$ için,

$$T(\omega) = \begin{cases} H(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ H'(\omega) \cup F(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = H'(\omega) \cup F(\omega) = F(\omega) \cup F(\omega) = F(\omega)$ olur. $(T, K) = (F, K)$.

$S_E(U)$ kümesi üzerinde, her esnek kümenin tümleyeni $\underset{+}{\sim}$ işlemi için kendisinin solda birim elemanıdır.

$$16) [(F, K) \underset{+}{\sim} (G, Y)]^r = (F, K) \underset{\setminus}{*} (G, Y).$$

İspat: $(F, K) \underset{+}{\sim} (G, Y) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(H, K)^r = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$T(\omega) = \begin{cases} F'(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cap G'(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Böylece, $(T, K) = (F, K) \underset{\setminus}{*} (G, Y)$.

$$17) (F, K) \underset{+}{\sim} (G, K) = \emptyset_K \Leftrightarrow (F, K) = U_K \text{ ve } (G, K) = \emptyset_K.$$

İspat: $(F, K) \underset{+}{\sim} (G, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$(T, K) = \emptyset_K$ olduğundan, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = \emptyset$.

Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = F'(\omega) \cup G(\omega) = \emptyset \Leftrightarrow \forall \omega \in K$ için, $F'(\omega) = \emptyset$ ve $G(\omega) = \emptyset \Leftrightarrow \forall \omega \in K$ için, $F(\omega) = U$ ve $G(\omega) = \emptyset \Leftrightarrow (F, K) = U_K$ ve $(G, K) = \emptyset_K$.

$$18) \emptyset_K \cong (F, K) \underset{+}{\sim} (G, Y) \text{ ve } \emptyset_Y \cong (G, Y) \underset{+}{\sim} (F, K).$$

$$19) (F, K) \underset{+}{\sim} (G, Y) \cong U_K \text{ ve } (G, Y) \underset{+}{\sim} (F, K) \cong U_Y.$$

$$20) (F, K)^r \cong (F, K) \underset{+}{\sim} (G, K) \text{ ve } (G, K) \cong (F, K) \underset{+}{\sim} (G, K).$$

İspat: $(F, K) \underset{+}{\sim} (G, K) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$$\forall \omega \in K; H(\omega) = F'(\omega) \subseteq F'(\omega) \cup G(\omega), (F, K)^r \cong (F, K)_+^{\sim} (G, K). (G, K) \cong (F, K)_+^{\sim} (G, K)$$

benzer şekilde gösterilebilir.

$$21) (F, K) \cong (G, K) \text{ ise } (H, Z)_+^{\sim} (F, K) \cong (H, Z)_+^{\sim} (G, K) \text{ ve } (G, K)_+^{\sim} (H, K) \cong (F, K)_+^{\sim} (H, K).$$

İspat: $(F, K) \cong (G, K)$ olsun. Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $F(\omega) \subseteq G(\omega)$. $(H, Z)_+^{\sim} (F, K) = (W, Z)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in Z$ için,

$$W(\omega) = \begin{cases} H(\omega), & \omega \in Z - K \\ H'(\omega) \cup F(\omega), & \omega \in Z \cap K \end{cases}$$

$(H, Z)_+^{\sim} (G, K) = (L, Z)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in Z$ için,

$$L(\omega) = \begin{cases} H(\omega), & \omega \in Z - K \\ H'(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in Z \cap K \end{cases}$$

Böylece, $\forall \omega \in Z - K$ için, $W(\omega) = H(\omega) \subseteq H(\omega) = L(\omega)$, $\forall \omega \in Z \cap K$ için $W(\omega) = H'(\omega) \cup F(\omega) \subseteq H'(\omega) \cup G(\omega) = L(\omega)$ olup, $(H, Z)_+^{\sim} (F, K) \cong (H, Z)_+^{\sim} (G, K)$. Aynı şartlar altında, $\forall \omega \in K$ için, $G'(\omega) \cup H(\omega) \subseteq F'(\omega) \cup H(\omega)$ olacağından $(G, K)_+^{\sim} (H, K) \cong (F, K)_+^{\sim} (H, K)$ sağlanacağı açıktır.

22) $(H, Z)_+^{\sim} (F, K) \cong (H, Z)_+^{\sim} (G, K)$ ise $(F, K) \cong (G, K)$ olmak zorunda değildir. Yani Teorem 5.3 (21) nın tersi doğru değildir. Benzer şekilde, $(G, K)_+^{\sim} (H, K) \cong (F, K)_+^{\sim} (H, K)$ ise $(F, K) \cong (G, K)$ olmak zorunda değildir.

İspat: Teorem 5.3 (21) in tersi doğru olmadığını göstermek için bir örnek verelim. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi, $K = \{e_1, e_3\}$ ve $Z = \{e_1, e_3, e_5\}$ E'nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme olsun.

$(F,K), (G,K), (H,Z), U$ üzerinde $(F,K) = (e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})$,
 $(G,K) = \{(e_1, \{h_2\}), (e_3, \{h_1, h_2\})\}$, $(H,Z) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset), (e_5, \{h_2, h_5\})\}$ olarak tanımlanan
 esnek kümeler olsun.

$(H,Z)_+^{\sim}(F,K) = (L,Z)$ olmak üzere $\forall \omega \in Z-K = \{e_5\}$ için, $L(e_5) = H(e_5) = \{h_2, h_5\}$; $\forall \omega \in Z \cap K = \{e_1, e_3\}$ için, $L(e_1) = H'(e_1) \cup F(e_1) = U$, $L(e_3) = H'(e_3) \cup F(e_3) = U$. Buradan,
 $(H,Z)_+^{\sim}(F,K) = \{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, \{h_2, h_5\})\}$.

Şimdi de, $(H,Z)_+^{\sim}(G,K) = (W,Z)$ olmak üzere $\forall \omega \in ZK = \{e_5\}$ için, $W(e_5) = H(e_5) = \{h_2, h_5\}$;
 $\forall \omega \in Z \cap K = \{e_1, e_3\}$ için, $W(e_1) = H'(e_1) \cup G(e_1) = U$, $W(e_3) = H'(e_3) \cup G(e_3) = U$. Böylece
 $(H,Z)_+^{\sim}(G,K) = \{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, \{h_2, h_5\})\}$.

Buradan, $(H,Z)_+^{\sim}(F,K) \cong (H,Z)_+^{\sim}(G,K)$; fakat $(F,K) \not\cong (G,K)$ olmadığı açıktır. Benzer
 şekilde, $(G,K)_+^{\sim}(H,K) \cong (F,K)_+^{\sim}(H,K)$ ise $(F,K) \not\cong (G,K)$ olmak zorunda olmadığı,
 yukarıdaki örnekte, $(H,K) = \{(e_1, U), (e_3, U)\}$ seçilerek gösterilebilir.

23) $(F,T) \cong (G,T)$ ve $(K,T) \cong (L,T)$ ise $(G,T)_+^{\sim}(K,T) \cong (F,T)_+^{\sim}(L,T)$ ve $(L,T)_+^{\sim}(F,T) \cong (K,T)_+^{\sim}(G,T)$.

İspat: $(F,T) \cong (G,T)$ olsun. Buradan, $\forall \omega \in T$ için, $F(\omega) \subseteq G(\omega)$. Böylece $\forall \omega \in T$ için,
 $G'(\omega) \subseteq F'(\omega)$. $(G,T)_+^{\sim}(K,T) = (M,T)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in T$ için, $M(\omega) = G'(\omega) \cup K(\omega)$.
 $(F,T)_+^{\sim}(L,T) = (N,T)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in T$ için, $N(\omega) = F'(\omega) \cup L(\omega)$. $\forall \omega \in T$ için, $G'(\omega) \subseteq F'(\omega)$
 olduğundan, $M(\omega) = G'(\omega) \cup K(\omega) \subseteq F'(\omega) \cup L(\omega) = N(\omega)$ olur. Böylece, $(G,T)_+^{\sim}(K,T) \cong (F,T)_+^{\sim}(L,T)$. Aynı şartlar altında, $(L,T)_+^{\sim}(F,T) \cong (K,T)_+^{\sim}(G,T)$ olduğu benzer şekilde
 gösterilebilir.

5.4. Teorem $(F,K), (G,Y), (H,D), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, aşağıdaki gibi
 esnek ikili parçalı artı işleminin diğer esnek küme işlemlere dağılması mevcuttur:

5.4.1. Teorem $(F, K), (G, Y), (H, D)$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, aşağıdaki gibi esnek ikili parçalı artı işleminin kısıtlanmış işlemlere dağılması mevcuttur: Bu alt başlık altındaki eşitlikler, $K \cap Y \cap D = \emptyset$ için sağlanır.

$$1)[(F, K) \cup_R (G, Y)]_+^{\sim} (H, D) = [(F, K)_+^{\sim} (H, D)] \cup_R [(G, Y)_+^{\sim} (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, K) \cup_R (G, Y) = (M, K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için, $M(\omega) = F(\omega) \cup G(\omega)$. $(M, K \cap Y)_+^{\sim} (H, D) = (N, K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için,

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D \\ M'(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ [F'(\omega) \cap G'(\omega)] \cup H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $[(F, K)_+^{\sim} (H, D)] \cup_R [(G, Y)_+^{\sim} (H, D)]$.

$(F, K)_+^{\sim} (H, D) = (V, K)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K$ için,

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F'(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G, Y)_+^{\sim} (H, D) = (W, Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in Y$ için,

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ G'(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \cup_R (W, Y) = (T, K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için, $T(\omega) = V(\omega) \cup W(\omega)$,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in (K - D) \cap (Y - D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cup [G'(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in (K - D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cup H(\omega)] \cup G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y - D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cup H(\omega)] \cup [G'(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cup G'(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece $K \cap Y \cap D = \emptyset$ için $N=T$ olduğu görülür.

$$2)[(F,K) \cap_R (G,Y)]_+^{\sim}(H,D) = [(F,K)_+^{\sim}(H,D)] \cap_R [(G,Y)_+^{\sim}(H,D)].$$

5.4.1.1. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cup_R)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_E$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-latis olduğu (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 5.3.1* de $(S_E(U), \tilde{+})$ cebirsel yapısının, (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, 5.4.1. (1) başlığında, $\tilde{+}$ işleminin $\cup_R$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cup_R, \tilde{+})$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir (sağ) yakın yarı-halkadır.

5.4.1.2. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cap_R)$ cebirsel yapısının birimi U_E olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-latis olduğunu (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 5.3.1* de $(S_E(U), \tilde{+})$ cebirsel yapısının, (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 5.4.1 (2) başlığında, $\tilde{+}$ işleminin $\cap_R$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cap_R, \tilde{+})$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız, bir (sağ) yakın yarı-halkadır.

5.4.2. Teorem (F,K) , (G,Y) , (H,D) , U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, aşağıdaki gibi esnek ikili parçalı artı işleminin genişletilmiş işlemlere dağılması mevcuttur:

i) Esnek İkili Parçalı Artı İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Soldan Dağılması:

Bu alt başlık altındaki eşitlikler, $K \cap (Y \Delta D) = \emptyset$ ise sağlanır.

$$1) (F, K) \underset{+}{\sim} [(G, Y) \cup_{\varepsilon} (H, D)] = [(F, K) \underset{+}{\sim} (G, Y)] \cup_{\varepsilon} [(F, K) \underset{+}{\sim} (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, Y) \cup_{\varepsilon} (H, D) = (M, Y \cup D)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y \cup D$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ H(\omega), & \omega \in D - Y \\ G(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(F, K) \underset{+}{\sim} (M, Y \cup D) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - (Y \cup D) \\ F'(\omega) \cup M(\omega), & \omega \in K \cap (Y \cup D) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - (Y \cup D) = K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap (Y - D) = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap (D - Y) = K \cap Y' \cap D \\ F'(\omega) \cup [(G(\omega) \cup H(\omega))], & \omega \in K \cap Y \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım: $[(F, K) \underset{+}{\sim} (G, Y)] \cup_{\varepsilon} [(F, K) \underset{+}{\sim} (H, D)]$.

$(F, K) \underset{+}{\sim} (G, Y) = (V, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(F, K) \underset{+}{\sim} (H, D) = (W, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F'(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \cup_{\varepsilon} (W, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ W(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ V(\omega) \cap W(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cup F(\omega), & \omega \in (K-Y) \cap (K-D) = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cup [F'(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in (K-Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y' \cap D \\ [F'(\omega) \cup G(\omega)] \cup F(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap (K-D) = K \cap Y \cap D' \\ [F'(\omega) \cup G(\omega)] \cup [F'(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in (K \cap Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-Y) \cap (K-D) = K \cap Y' \cap D' \\ U & \omega \in (K-Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y' \cap D \\ U & \omega \in (K \cap Y) \cap (K-D) = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cup G(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

$K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D' = \emptyset$ için $N=T$ olduğu görülür. $K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D' = \emptyset$ şartının, $K \cap (Y \Delta D) = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$2) (F, K) \underset{+}{\cap}_{\varepsilon} [(G, Y) \cap_{\varepsilon} (H, D)] = [(F, K) \underset{+}{\cap}_{\varepsilon} (G, Y)] \cap_{\varepsilon} [(F, K) \underset{+}{\cap}_{\varepsilon} (H, D)].$$

ii) Esnek İkili Parçalı Artı İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Sağdan Dağılması:

Bu alt başlık altındaki eşitlikler $K \cap Y \cap D = \emptyset$ ise sağlanır.

$$1) [(F, K) \cap_{\varepsilon} (G, Y)] \underset{+}{\cap}_{\varepsilon} (H, D) = [(F, K) \underset{+}{\cap}_{\varepsilon} (H, D)] \cap_{\varepsilon} [(G, Y) \underset{+}{\cap}_{\varepsilon} (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, K) \cap_{\varepsilon} (G, Y) = (M, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ G(\omega), & \omega \in Y-K \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(M, K \cup Y) \underset{+}{\cap}_{\varepsilon} (H, D) = (N, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in (K \cup Y) - D \\ M'(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in (K \cup Y) \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-Y)-D = K \cap Y' \cap D' \\ G(\omega), & \omega \in (Y-K)-D = K' \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap Y)-D = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in (K-Y) \cap D = K \cap Y' \cap D \\ G'(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in (Y-K) \cap D = K' \cap Y \cap D \\ [F'(\omega) \cup G'(\omega)] \cup H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F, K) \widetilde{+} (H, D)] \cap_{\varepsilon} [(G, Y) \widetilde{+} (H, D)]$. $(F, K) \widetilde{+} (H, D) = (V, K)$

olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-D \\ F'(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G, Y) \widetilde{+} (H, D) = (W, Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y-D \\ G'(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \cap_{\varepsilon} (W, Y) = (T, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K-Y \\ W(\omega), & \omega \in Y-K \\ V(\omega) \cap W(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-D)-Y = K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in (K \cap D)-Y = K \cap Y' \cap D \\ G(\omega), & \omega \in (Y-D)-K = K' \cap Y \cap D' \\ G'(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in (Y \cap D)-K = K' \cap Y \cap D \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K-D) \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap [G'(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in (K-D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cup H(\omega)] \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y-D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cup H(\omega)] \cap [G'(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ G(\omega), & \omega \in K' \cap Y \cap D' \\ G'(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K' \cap Y \cap D \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ [F'(\omega) \cap G'(\omega)] \cup H(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece $K \cap Y \cap D = \emptyset$ için $N = T$ olduğu görülür.

Aşağıda yer alan eşitlikler de $K \cap Y \cap D = \emptyset$ için sağlanır. İspatlar benzer şekilde yapıldığı için, ispatsız şekilde verilmiştir.

$$2) [(F, K) \cup_{\varepsilon} (G, Y)]_{+}^{\sim}(H, D) = [(F, K)_{+}^{\sim}(H, D)] \cup_{\varepsilon} [(G, Y)_{+}^{\sim}(H, D)].$$

$$3) [(F, K) \setminus_{\varepsilon} (G, Y)]_{+}^{\sim}(H, D) = [(F, K)_{+}^{\sim}(H, D)] \setminus_{\varepsilon} [(G, Y)_{+}^{\sim}(H, D)].$$

$$4) [(F, K) \Delta_{\varepsilon} (G, Y)]_{+}^{\sim}(H, D) = [(F, K)_{+}^{\sim}(H, D)] \Delta_{\varepsilon} [(G, Y)_{+}^{\sim}(H, D)].$$

$$5) [(F, K) +_{\varepsilon} (G, Y)]_{+}^{\sim}(H, D) = [(F, K)_{+}^{\sim}(H, D)] +_{\varepsilon} [(G, Y)_{+}^{\sim}(H, D)].$$

$$6) [(F, K) \gamma_{\varepsilon} (G, Y)]_{+}^{\sim}(H, D) = [(F, K)_{+}^{\sim}(H, D)] \gamma_{\varepsilon} [(G, Y)_{+}^{\sim}(H, D)].$$

$$7) [(F, K) *_{\varepsilon} (G, Y)]_{+}^{\sim}(H, D) = [(F, K)_{+}^{\sim}(H, D)] *_{\varepsilon} [(G, Y)_{+}^{\sim}(H, D)].$$

$$8) [(F, K) \theta_{\varepsilon} (G, Y)]_{+}^{\sim}(H, D) = [(F, K)_{+}^{\sim}(H, D)] \theta_{\varepsilon} [(G, Y)_{+}^{\sim}(H, D)].$$

5.4.2.1. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cup_{\varepsilon})$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_{\emptyset}$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-latis (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 5.3.1* de $(S_E(U), \sim_{+})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, üstelik Teorem 5.3 (10) da, $\emptyset_{\emptyset} \sim_{+} (F, T) = \emptyset_{\emptyset}$, yani

$\emptyset_\emptyset$ nin $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\widetilde{+}$ işlemi altında, sol yutan eleman olduğu ve Teorem 5.4.2 (ii) (2) başlığında, $\widetilde{+}$ işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \widetilde{+})$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halkadır. Ayrıca, $(F, K)_{\widetilde{+}} \emptyset_\emptyset \neq \emptyset_\emptyset$ olduğundan, $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \widetilde{+})$ sıfır simetrik olmayan bir (sağ) yakın yarı-halkadır. Benzer şekilde $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \widetilde{+})$ cebirsel yapısının da sıfır simetrik ve komutatif olmayan, birimsiz ve sıfırlı, toplamsal idempotent (sağ) yakın yarı-halka olduğu gösterilebilir.

Benzer şekilde, $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \widetilde{+})$ cebirsel yapısının aynı şartlar altında komutatif ve sıfır simetrik olmayan toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halka olduğu gösterilebilir. Yine, $(S_E(U), \setminus_\varepsilon, \widetilde{+})$, $(S_E(U), \Delta_\varepsilon, \widetilde{+})$, $(S_E(U), +_\varepsilon, \widetilde{+})$, $(S_E(U), \gamma_\varepsilon, \widetilde{+})$, $(S_E(U), \lambda_\varepsilon, \widetilde{+})$, $(S_E(U), *_\varepsilon, \widetilde{+})$, $(S_E(U), \theta_\varepsilon, \widetilde{+})$ cebirsel yapılarının da aynı şartlar altında komutatif, sıfır simetrik ve idempotent olmayan, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halka olduğu gösterilebilir. Buradaki, ilk işlemlerin $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında (Δ_ε işlemi şartsız bir şekilde) birleşmeli olduğu, Aybek (2023) tarafından gösterilmiştir.

5.4.2.2. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cup_\varepsilon)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_\emptyset$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-latis (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 5.3.1* de $(S_E(U), \widetilde{+})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 5.4.2 (i) (1) başlığında, $\widetilde{+}$ işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartı altında soldan dağıldığı, Teorem 5.4.2 (ii) (2) başlığında, $\widetilde{+}$ işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \widetilde{+})$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halkadır.

5.4.2.3. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cap_\epsilon)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_\emptyset$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-latis olduğunu göstermişti. *Sonuç* 5.3.1 de $(S_E(U), \tilde{+})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 5.4.2 (i) (2) başlığında, $\tilde{+}$ işleminin $\cap_\epsilon$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartı altında soldan dağıldığı, Teorem 5.4.2 (ii) (1) başlığında, $\tilde{+}$ işleminin $\cap_\epsilon$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. *Sonuç* olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cap_\epsilon, \tilde{+})$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halkadır.

5.4.3. Teorem (F, K) , (G, Y) , (H, D) , U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, aşağıdaki gibi esnek ikili parçalı artı işleminin esnek ikili parçalı işlemlere dağılması mevcuttur: Buradaki eşitlikler, $K \cap Y \cap D = \emptyset$ ise sağlanır.

$$1) [(F, K) \tilde{\cap} (G, Y)] \tilde{+} (H, D) = [(F, K) \tilde{+} (H, D)] \tilde{\cap} [(G, Y) \tilde{+} (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, K) \tilde{\cap} (G, Y) = (M, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(M, K) \tilde{+} (H, D) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in K - D \\ M'(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K - Y) - D = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap D = K \cap Y' \cap D \\ [F'(\omega) \cup G'(\omega)] \cup H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $[(F,K) \widetilde{+} (H,D)] \widetilde{\cap} [(G,Y) \widetilde{+} (H,D)]. (F,K) \widetilde{+} (H,D)=(V,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-D \\ F'(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G,Y) \widetilde{+} (H,D)=(W,Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y-D \\ G'(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V,K) \widetilde{\cap} (W,Y)=(T,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K-Y \\ V(\omega) \cap W(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-D)-Y = K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in (K \cap D)-Y = K \cap Y' \cap D \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K-D) \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap [G'(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in (K-D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cup H(\omega)] \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y-D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cup H(\omega)] \cap [G'(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ [F'(\omega) \cap G'(\omega)] \cup H(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece $K \cap Y \cap D = \emptyset$ için $N=T$ olduğu görülür.

Aşağıda yer alan eşitlikler de $K \cap Y \cap D = \emptyset$ şartı altında sağlanır. İspatlar benzer şekilde yapıldığı için, ispatları verilmeyecektir.

$$2)[(F, K) \widetilde{\cup} (G, Y)] \widetilde{+} (H, D) = [(F, K) \widetilde{+} (H, D)] \widetilde{\cup} [(G, Y) \widetilde{+} (H, D)].$$

$$3)[(F, K) \widetilde{\setminus} (G, Y)]_+ \widetilde{(H, D)} = [(F, K) \widetilde{+} (H, D)] \widetilde{\setminus} [(G, Y) \widetilde{+} (H, D)].$$

$$4)[(F, K) \widetilde{\Delta} (G, Y)]_+ \widetilde{(H, D)} = [(F, K) \widetilde{+} (H, D)] \widetilde{\Delta} [(G, Y) \widetilde{+} (H, D)].$$

$$5)[(F, K) \widetilde{+} (G, Y)]_+ \widetilde{(H, D)} = [(F, K) \widetilde{+} (H, D)] \widetilde{+} [(G, Y) \widetilde{+} (H, D)].$$

$$6)[(F, K) \widetilde{\gamma} (G, Y)]_+ \widetilde{(H, D)} = [(F, K) \widetilde{+} (H, D)] \widetilde{\gamma} [(G, Y) \widetilde{+} (H, D)].$$

$$7)[(F, K) \widetilde{*} (G, Y)]_+ \widetilde{(H, D)} = [(F, K) \widetilde{+} (H, D)] \widetilde{*} [(G, Y) \widetilde{+} (H, D)].$$

$$8)[(F, K) \widetilde{\theta} (G, Y)]_+ \widetilde{(H, D)} = [(F, K) \widetilde{+} (H, D)] \widetilde{\theta} [(G, Y) \widetilde{+} (H, D)].$$

$$9)[(F, K) \widetilde{\lambda} (G, Y)]_+ \widetilde{(H, D)} = [(F, K) \widetilde{+} (H, D)] \widetilde{\lambda} [(G, Y) \widetilde{+} (H, D)].$$

5.4.3.1. *Sonuç* Bu tezimizde, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \widetilde{\cap})$ cebirsel yapısının komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup yani bir band olduğu gösterildi. *Sonuç 5.3.1* de $(S_E(U), \widetilde{+})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 5.4.3 (1) başlığında, $\widetilde{+}$ işleminin $\widetilde{\cap}$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. *Sonuç* olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \widetilde{\cap}, \widetilde{+})$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir (sağ) yakın yarı-halkadır.

5.4.3.2. *Sonuç* Bu tezimizde, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \widetilde{\cup})$ cebirsel yapısının komutatif olmayan, idempotent bir yarı grup yani bir band olduğu gösterildi. *Sonuç 5.3.1* de $(S_E(U), \widetilde{+})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere,

$T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarı grup olduğu, Teorem 5.4.3 (2) başlığında, $\tilde{+}$ işleminin $\tilde{\cup}$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \tilde{\cup}, \tilde{+})$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir (sağ) yakın yarı-halkadır.

5.4.3.3. *Sonuç* (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında, $(S_E(U), \tilde{\setminus}, \tilde{+})$, $(S_E(U), \tilde{\Delta}, \tilde{+})$, $(S_E(U), \tilde{+}, \tilde{+})$, $(S_E(U), \tilde{\gamma}, \tilde{+})$, $(S_E(U), \tilde{*}, \tilde{+})$, $(S_E(U), \tilde{\theta}, \tilde{+})$ cebirsel yapılarının, komutatif ve idempotent olmayan, birimsiz ve sıfırsız bir (sağ) yakın yarı-halka olduğu gösterilebilir. Buradaki, ilk işlemlerin $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında ($\tilde{\Delta}$ işlemi $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında) birleşmeli olduğu, bu tezin ilerleyen kısımlarında gösterilmiştir.

6. ESNEK İKİLİ PARÇALI GAMMA İŞLEMİ

Bu bölümde, esnek ikili parçalı gamma adı verilen yeni esnek küme işlemi tanıtılmış, örneği verilmiş, işlemin cebirsel özellikleri ile birlikte diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkisine bakılarak dağılma kuralları ve $S_E(U)$ kümesi üzerinde bu işlemin hangi cebirsel yapıları oluşturduğu incelenmiş ve çok önemli sonuçlar elde edilmiştir.

6.1. Tanım (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde tanımlı iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin $(F, K) \underset{\gamma}{\sim} (G, Y)$ ile gösterilen esnek ikili parçalı gamma işlemi $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

olmak üzere $(F, K) \underset{\gamma}{\sim} (G, Y) = (H, K)$ ile tanımlanır.

6.2. *Örnek* $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesi, $K = \{e_1, e_4\}$, $Y = \{e_2, e_3, e_4\}$ E 'nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evrensel küme, (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde $(F, K) = \{(e_1, \{h_2, h_4, h_6\}), (e_4, \{h_1, h_2, h_5, h_6\})\}$, $(G, Y) = \{(e_2, \{h_1, h_2\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4, h_5\}), (e_4, \{h_2, h_3, h_4\})\}$ olarak tanımlanan iki esnek küme olsun. $(F, K) \underset{\gamma}{\sim} (G, Y) = (H, K)$ olmak üzere,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Burada, $K = \{e_1, e_4\}$, $K - Y = \{e_1\}$ olmak üzere, $\forall \omega \in K - Y = \{e_1\}$ için, $H(\omega) = F(\omega)$ olup, $H(e_1) = F(e_1) = \{h_2, h_4, h_6\}$, $\forall \omega \in K \cap Y = \{e_4\}$ için, $H(\omega) = F'(\omega) \cap G(\omega)$ olup, $H(e_4) = F'(e_4) \cap G(e_4) = \{h_3, h_4\} \cap \{h_2, h_3, h_4\} = \{h_3, h_4\}$. Böylece, $(F, K) \underset{\gamma}{\sim} (G, Y) = \{(e_1, \{h_2, h_4, h_6\}), (e_4, \{h_3, h_4\})\}$.

6.3. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1) $\underset{\gamma}{\sim}$, $S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: $\sim_{\gamma}$ 'nın $S_E(U)$ üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$\begin{aligned} \sim_{\gamma} : S_E(U) \times S_E(U) &\rightarrow S_E(U) \\ ((F,K), (G,Y)) &\rightarrow (F,K) \sim_{\gamma} (G,Y) = (H,K) \end{aligned}$$

olup, (F,K) ve (G,Y) , U üzerinde iki esnek küme olduğunda $(F,T) \sim_{\gamma} (G,Y)$ de, U üzerinde bir esnek kümedir. $K \subseteq E$ sabit bir parametre kümesi olmak üzere, $\sim_{\gamma}$ 'nın $S_K(U)$ üzerinde de bir ikili işlem olduğu açıktır.

$$2) K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D = \emptyset \text{ ise } [(F,K) \sim_{\gamma} (G,Y)] \sim_{\gamma} (H,D) = (F,K) \sim_{\gamma} [(G,Y) \sim_{\gamma} (H,D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F,K) \sim_{\gamma} (G,Y) = (T,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(T,K) \sim_{\gamma} (H,D) = (M,K)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in K - D \\ T'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K - Y) - D = K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap D = K \cap Y' \cap D \\ [F(\omega) \cup G'(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

$(G,Y) \sim_{\gamma} (H,D) = (K,Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$K(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ G'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(F,K) \sim_{\gamma} (K,Y) = (S,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$S(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ F'(\omega) \cap K(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Böylece,

$$S(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ F'(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cap [G'(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in K \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

S fonksiyonundaki, K-Y ye bakacak olursak, $K-Y = K \cap Y'$ olup, eğer $\omega \in Y'$ ise $\omega \in D-Y$ veya $\omega \in (Y \cup D)'$. Buradan $\omega \in K-Y$ ise $\omega \in K \cap Y' \cap D'$ ve $\omega \in K \cap Y' \cap D$ olur. Böylece, $K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D = \emptyset$ için $M=S$ olur. Yani uygun koşullar altında, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\sim_*$ işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

$$3) [(F, K) \sim_Y (G, K)] \sim_Y (H, K) \neq (F, K) \sim_Y [(G, K) \sim_Y (H, K)]$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F, K) \sim_Y (G, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-K = \emptyset \\ F'(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$(T, K) \sim_Y (H, K) = (M, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in K-K = \emptyset \\ T'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece,

$$M(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in K-K = \emptyset \\ [F(\omega) \cup G'(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına bakalım. $(G, K) \sim_Y (H, K) = (L, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$L(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in K-K = \emptyset \\ G'(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$(F, K) \sim_{\gamma} (L, K) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cap L(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cap [G'(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan $M \neq N$ olduğu görülür. Yani $S_K(U)$ kümesi üzerinde (parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler üzerinde), $\sim_{\gamma}$ işleminin birleşme özelliği yoktur.

$$4) (F, K) \sim_{\gamma} (G, Y) \neq (G, Y) \sim_{\gamma} (F, K).$$

İspat: $(F, K) \sim_{\gamma} (G, Y) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(G, Y) \sim_{\gamma} (F, K) = (T, Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - K \\ G'(\omega) \cap F(\omega), & \omega \in Y \cap K \end{cases}$$

Burada, sol taraftaki esnek kümenin parametre kümesi K ; sağ taraftaki esnek kümenin parametre kümesi Y dir. Böylece esnek kümelerin eşitliği tanımı gereği;

$$(F, K) \sim_{\gamma} (G, Y) \neq (G, Y) \sim_{\gamma} (F, K).$$

Ayrıca, $(F, K) \sim_{\gamma} (G, K) \neq (G, K) \sim_{\gamma} (F, K)$ olduğu açıktır. Yani, $S_E(U)$ ve $K \subseteq E$ sabit bir parametre kümesi olmak üzere, $S_K(U)$ kümesi üzerinde $\sim_{\gamma}$ işlemi değişme özelliğine sahip değildir.

6.3.1. *Sonuç* Teorem 6.3 (1), (2) ve (4) den, (F,K) , (G,Y) ve (H,D) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \tilde{\gamma})$ komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgruptur. $K \subseteq E$ sabir bir parametre kümesi olmak üzere, $(S_K(U), \tilde{\gamma})$ cebirsel yapısı Teorem 6.3 (3) den, birleşme özelliğine sahip olmadığı için yarıgrup olamaz; fakat bu yapının komutatif olmayan bir grupoid olduğu açıktır.

$$5) (F, K) \tilde{\gamma} (F, K) = \emptyset_K.$$

İspat: $(F, K) \tilde{\gamma} (F, K) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cap F(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Burada, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F'(\omega) \cap F(\omega) = \emptyset$, böylece $(H, K) = \emptyset_K$. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{\gamma}$ işlemi, denk güçlülük özelliğine sahip değildir.

$$6) (F, K) \tilde{\gamma} \emptyset_K = \emptyset_K.$$

İspat: $\emptyset_K = (S, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için; $S(\omega) = \emptyset$. $(F, K) \tilde{\gamma} (S, K) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cap S(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F'(\omega) \cap S(\omega) = F'(\omega) \cap \emptyset = \emptyset$. Buradan $(H, K) = \emptyset_K$. $S_K(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{\gamma}$ işleminin sağ yutan elemanı $\emptyset_K$ esnek kümesidir.

$$7) \emptyset_K \tilde{\gamma} (F, K) = (F, K).$$

İspat: $\emptyset_K = (S, K)$ olsun. Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $S(\omega) = \emptyset$. $(S, K) \tilde{\gamma} (F, K) = (H, K)$ olsun. Buradan, $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} S(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ S'(\omega) \cap F(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = S'(\omega) \cap F(\omega) = U \cap F(\omega) = F(\omega)$ olup, $(H, K) = (F, K)$. $S_K(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{\gamma}$ işleminin sol birim elemanı $\emptyset_K$ esnek kümesidir.

$$8) (F, K) \tilde{\gamma} \emptyset_E = \emptyset_K.$$

İspat: $\emptyset_E = (S, E)$ olsun. Burada $\forall \omega \in E$; $S(\omega) = \emptyset$. $(F, K) \tilde{\gamma} (S, E) = (H, K)$. Böylece, $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - E = \emptyset \\ F'(\omega) \cap S(\omega), & \omega \in K \cap E = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için; $H(\omega) = F'(\omega) \cap S(\omega) = F'(\omega) \cap \emptyset = \emptyset$ olur ve böylece $(H, K) = \emptyset_K$.

$$9) (F, K) \tilde{\gamma} \emptyset_\emptyset = (F, K).$$

İspat: $\emptyset_\emptyset = (S, \emptyset)$ ve $(F, K) \tilde{\gamma} (S, \emptyset) = (H, K)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - \emptyset = K \\ F'(\omega) \cap S(\omega), & \omega \in K \cap \emptyset = \emptyset \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için; $H(\omega) = F(\omega)$ olup, $(H, K) = (F, K)$. $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{\gamma}$ işleminin sağ birim elemanı $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir.

$$10) \emptyset_\emptyset \tilde{\gamma} (F, K) = \emptyset_\emptyset.$$

İspat: $\emptyset_\emptyset = (S, \emptyset)$ ve $(S, \emptyset) \tilde{\gamma} (F, K) = (H, \emptyset)$ olsun. $\emptyset_\emptyset$, parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme olduğu için, $(H, \emptyset) = \emptyset_\emptyset$ olur. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{\gamma}$ işlemi için, her elemanın sağ birim eleman olan $\emptyset_\emptyset$ ye göre sol tersi, $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir. Ayrıca, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{\gamma}$ işleminin sol yutan elemanı $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir.

6.3.2. *Sonuç* Teorem 6.3 (1), (2), (9) ve (10) dan, (F,K) , (G,Y) ve (H,D) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \tilde{\gamma})$ cebirsel yapısı, sağ birimi $\emptyset_\emptyset$, her elemanın sol tersi $\emptyset_\emptyset$ olan idempotent olmayan bir sol-sağ sistemdir.

$$11) U_K \tilde{\gamma} (F, K) = \emptyset_K.$$

İspat: $U_K = (T, K)$. Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = U$. $(T, K) \tilde{\gamma} (F, K) = (H, K)$ olsun. Buradan $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ T'(\omega) \cap F(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = T'(\omega) \cap F(\omega) = \emptyset \cap F(\omega) = \emptyset$ dolayısıyla $(H, K) = \emptyset_K$.

$$12) (F, K) \tilde{\gamma} U_K = (F, K)^r.$$

İspat: $U_K = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = U$. $(F, K) \tilde{\gamma} (T, K) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cap T(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için; $H(\omega) = F'(\omega) \cap T(\omega) = F'(\omega) \cap U = F'(\omega)$ olur ve böylece $(H, K) = (F, K)^r$.

$$13) (F, K) \tilde{+} U_E = (F, K)^r.$$

İspat: $U_E = (T, E)$ olsun. Burada $\forall \omega \in E$ için, $T(\omega) = U$. $(F, K) \tilde{\gamma} (T, E) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için ;

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - E = \emptyset \\ F'(\omega) \cap T(\omega), & \omega \in K \cap E = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F'(\omega) \cap T(\omega) = F'(\omega) \cap U = F'(\omega)$ olur. $(H, K) = (F, K)^r$.

$$14) (F, K) \underset{\gamma}{\sim} (F, K)^r = (F, K)^r.$$

İspat: $(F, K)^r = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F'(\omega)$. $(F, K) \underset{\gamma}{\sim} (H, K) = (T, K)$ olsun.

Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = F'(\omega) \cap H(\omega) = F'(\omega) \cap F'(\omega) = F'(\omega)$ olur. Burada $(T, K) = (F, K)^r$

$S_E(U)$ kümesi üzerinde, her esnek kümenin tümleyeni $\underset{\gamma}{\sim}$ işlemi için kendisinin sağda yutan elemanıdır.

$$15) (F, K)^r \underset{\gamma}{\sim} (F, K) = (F, K).$$

İspat: $(F, K)^r = (H, K)$. Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F'(\omega)$. $(H, K) \underset{\gamma}{\sim} (F, K) = (T, K)$ olsun.

$\forall \omega \in K$ için,

$$T(\omega) = \begin{cases} H(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ H'(\omega) \cap F(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = H'(\omega) \cap F(\omega) = F(\omega) \cap F(\omega) = F(\omega)$ olur. $(T, K) = (F, K)$. $S_E(U)$ kümesi üzerinde, her esnek kümenin tümleyeni $\underset{\gamma}{\sim}$ işlemi için kendisinin solda birim elemanıdır.

$$16) [(F, K) \underset{\gamma}{\sim} (G, Y)]^r = (F, K) \underset{\lambda}{\sim}^* (G, Y).$$

İspat: $(F, K) \underset{\gamma}{\sim} (G, Y) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(H, K)^r = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$T(\omega) = \begin{cases} F'(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Böylece, $(T, K) = (F, K) \underset{\sim}{*} (G, Y)$.

$$17) (F, K) \underset{\sim}{\gamma} (G, K) = U_K \Leftrightarrow (F, K) = \emptyset_K \text{ ve } (G, K) = U_K.$$

İspat: $(F, K) \underset{\sim}{\gamma} (G, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$(T, K) = U_K$ olduğundan, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = U$.

Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = F'(\omega) \cap G(\omega) = U \Leftrightarrow \forall \omega \in K$ için, $F'(\omega) = U$ ve $G(\omega) = U \Leftrightarrow \forall \omega \in K$ için, $F(\omega) = \emptyset$ ve $G(\omega) = U \Leftrightarrow (F, K) = \emptyset_K$ ve $(G, K) = U_K$.

$$18) \emptyset_K \underset{\sim}{\subseteq} (F, K) \underset{\sim}{\gamma} (G, Y) \text{ ve } \emptyset_Y \underset{\sim}{\subseteq} (G, Y) \underset{\sim}{\gamma} (F, K).$$

$$19) (F, K) \underset{\sim}{\gamma} (G, Y) \underset{\sim}{\subseteq} U_K \text{ ve } (G, Y) \underset{\sim}{\gamma} (F, K) \underset{\sim}{\subseteq} U_Y.$$

$$20) (F, K) \underset{\sim}{\gamma} (G, K) \underset{\sim}{\subseteq} (F, K)^r \text{ ve } (F, K) \underset{\sim}{\gamma} (G, K) \underset{\sim}{\subseteq} (G, K).$$

İspat: $(F, K) \underset{\sim}{\gamma} (G, K) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$\forall \omega \in K$; $H(\omega) = F'(\omega) \cap G(\omega) \subseteq F'(\omega)$, $(F, K) \underset{\sim}{\gamma} (G, K) \underset{\sim}{\subseteq} (F, K)^r$. $(F, K) \underset{\sim}{\gamma} (G, K) \underset{\sim}{\subseteq} (G, K)$

benzer şekilde gösterilebilir.

21) $(F,K) \subseteq (G,K)$ ise $(H,Z) \sim_{\gamma} (F,K) \subseteq (H,Z) \sim_{\gamma} (G,K)$ ve $(G,K) \sim_{\gamma} (H,K) \subseteq (F,K) \sim_{\gamma} (H,K)$.

İspat: $(F,K) \subseteq (G,K)$ olsun. Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $F(\omega) \subseteq G(\omega)$ ve dolayısıyla, $G'(\omega) \subseteq F'(\omega)$. $(H,Z) \sim_{\gamma} (F,K) = (W,Z)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in Z$ için,

$$W(\omega) = \begin{cases} H(\omega), & \omega \in Z-K \\ H'(\omega) \cap F(\omega), & \omega \in Z \cap K \end{cases}$$

$(H,Z) \sim_{\gamma} (G,K) = (L,Z)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in Z$ için,

$$L(\omega) = \begin{cases} H(\omega), & \omega \in Z-K \\ H'(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in Z \cap K \end{cases}$$

Böylece, $\forall \omega \in Z-K$ için, $W(\omega) = H(\omega) \subseteq H(\omega) = L(\omega)$, $\forall \omega \in Z \cap K$ için $W(\omega) = H'(\omega) \cap F(\omega) \subseteq H'(\omega) \cap G(\omega) = L(\omega)$ olup, $(H,Z) \sim_{\gamma} (F,K) \subseteq (H,Z) \sim_{\gamma} (G,K)$. Aynı şartlar altında, $\forall \omega \in K$ için, $G'(\omega) \cap H(\omega) \subseteq F'(\omega) \cap H(\omega)$ olup, $(G,K) \sim_{\gamma} (H,K) \subseteq (F,K) \sim_{\gamma} (H,K)$.

22) $(H,Z) \sim_{\gamma} (F,K) \subseteq (H,Z) \sim_{\gamma} (G,K)$ ise $(F,K) \subseteq (G,K)$ olmak zorunda değildir. Benzer şekilde, $(G,K) \sim_{\gamma} (H,K) \subseteq (F,K) \sim_{\gamma} (H,K)$ ise $(F,K) \subseteq (G,K)$ olmak zorunda değildir. Yani Teorem 6.3. (21) nın tersi doğru değildir.

İspat: Teorem 6.3. (21) in tersi doğru olmadığını göstermek için bir örnek verelim. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi, $K = \{e_1, e_3\}$ ve $Z = \{e_1, e_3, e_5\}$ E'nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme, (F,K) , (G,K) ve (H,Z) , U üzerinde $(F,K) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G,K) = \{(e_1, \{h_2\}), (e_3, \{h_1, h_2\})\}$, $(H,Z) = \{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, \{h_2, h_5\})\}$ olarak tanımlanan esnek kümeler olsun.

$(H,Z) \sim_{\gamma} (F,K) = (L,Z)$ olmak üzere $\forall \omega \in Z-K = \{e_5\}$ için, $L(e_5) = H(e_5) = \{h_2, h_5\}$; $\forall \omega \in Z \cap K = \{e_1, e_3\}$ için, $L(e_1) = H'(e_1) \cap F(e_1) = \emptyset$, $L(e_3) = H'(e_3) \cap F(e_3) = \emptyset$. Buradan, $(H,Z) \sim_{\gamma} (F,K) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset), (e_5, \{h_2, h_5\})\}$.

Şimdi de, $(H, Z) \sim_{\gamma} (G, K) = (W, Z)$ olmak üzere $\forall \omega \in Z - K = \{e_5\}$ için, $W(e_5) = H(e_5) = \{h_2, h_5\}$; $\forall \omega \in Z \cap K = \{e_1, e_3\}$ için, $W(e_1) = H'(e_1) \cap G(e_1) = \emptyset$, $W(e_3) = H'(e_3) \cap G(e_3) = \emptyset$. Böylece $(H, Z) \sim_{\gamma} (G, K) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset), (e_5, \{h_2, h_5\})\}$.

Buradan, $(H, Z) \sim_{\gamma} (F, K) \not\subseteq (H, Z) \sim_{\gamma} (G, K)$; fakat $(F, K) \not\subseteq (G, K)$ olmadığı açıktır. Benzer şekilde, $(G, K) \sim_{\gamma} (H, K) \not\subseteq (F, K) \sim_{\gamma} (H, K)$ ise $(F, K) \not\subseteq (G, K)$ olmak zorunda olmadığını aynı örnek üzerinde, $(H, K) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset)\}$ seçilerek gösterilebilir.

23) $(F, T) \subseteq (G, T)$ ve $(K, T) \subseteq (L, T)$ ise $(G, T) \sim_{\gamma} (K, T) \subseteq (F, T) \sim_{\gamma} (L, T)$ ve $(L, T) \sim_{\gamma} (F, T) \subseteq (K, T) \sim_{\gamma} (G, T)$.

İspat: $(F, T) \subseteq (G, T)$ olsun. Buradan, $\forall \omega \in T$ için, $F(\omega) \subseteq G(\omega)$. Böylece $\forall \omega \in T$ için, $G'(\omega) \subseteq F'(\omega)$. $(G, T) \sim_{\gamma} (K, T) = (M, T)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in T$ için, $M(\omega) = G'(\omega) \cap K(\omega)$. $(F, T) \sim_{\gamma} (L, T) = (N, T)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in T$ için, $N(\omega) = F'(\omega) \cap L(\omega)$. $\forall \omega \in T$ için, $G'(\omega) \subseteq F'(\omega)$ olduğundan, $M(\omega) = G'(\omega) \cap K(\omega) \subseteq F'(\omega) \cap L(\omega) = N(\omega)$ olur. Böylece, $(G, T) \sim_{\gamma} (K, T) \subseteq (F, T) \sim_{\gamma} (L, T)$. Aynı şartlar altında, $(L, T) \sim_{\gamma} (F, T) \subseteq (K, T) \sim_{\gamma} (G, T)$ olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

6.4. Teorem $(F, K), (G, Y), (H, D), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, aşağıdaki gibi esnek ikili parçalı gamma işleminin diğer esnek küme işlemlere dağılması mevcuttur:

6.4.1. Teorem $(F, K), (G, Y), (H, D), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, aşağıdaki gibi esnek ikili parçalı gamma işleminin kısıtlanmış işlemlere dağılması mevcuttur:

i) Esnek İkili Parçalı Gamma İşleminin Kısıtlanmış İşlemlere Soldan Dağılması:

Bu alt başlık altındaki (1) ve (2) numaralı eşitlikler, $K \cap (Y \Delta D) = \emptyset$ şartı ile sağlanır.

1) $(F, K) \sim_{\gamma} [(G, Y) \cap_R (H, D)] = [(F, K) \sim_{\gamma} (G, Y)] \cap_R [(F, K) \sim_{\gamma} (H, D)]$.

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, Y) \cap_R (H, D) = (M, Y \cap D)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y \cap D$, $M(\omega) = G(\omega) \cap H(\omega)$. $(F, K) \sim_Y (M, Y \cap D) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - (Y \cap D) \\ F'(\omega) \cap M(\omega), & \omega \in K \cap (Y \cap D) \end{cases}$$

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - (Y \cap D) \\ F'(\omega) \cap [G(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in K \cap (Y \cap D) \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $[(F, K) \sim_Y (G, Y)] \cap_R [(F, K) \sim_Y (H, D)]$. $(F, K) \sim_Y (G, Y) = (V, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(F, K) \sim_Y (H, D) = (W, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$W(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \cap_R (W, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = V(\omega) \cap W(\omega)$,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cap F(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap (K - D) \\ F(\omega) \cap [F'(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K - Y) \cap (K \cap D) \\ [F'(\omega) \cap G(\omega)] \cap F(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap (K - D) \\ [F'(\omega) \cap G(\omega)] \cap [F'(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K \cap Y) \cap (K \cap D) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D' \\ \emptyset, & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ \emptyset, & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cap G(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

N fonksiyonun ilk satırındaki parametre kümesi dikkate alındığında $K - (Y \cap D) = K \cap (Y \cap D)'$ olup eğer $\omega \in (Y \cap D)'$ ise $\omega \in Y - D$ veya $\omega \in D - Y$ veya $\omega \in Y \cup D$ olarak düşünebiliriz.

Böylece, $\omega \in K - (Y \cap D)$ ise $\omega \in K \cap (Y \cap D)'$ veya $\omega \in K \cap (Y' \cap D)$ veya $\omega \in K \cap (Y' \cap D')$.

Böylece $K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D' = \emptyset$ için, $N=T$ olduğu görülür. $K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D' = \emptyset$ şartının $K \cap (Y \Delta D) = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikârdır.

$$2) (F, K) \underset{\gamma}{\sim} [(G, Y) \cup_R (H, D)] = [(F, K) \underset{\gamma}{\sim} (G, Y)] \cup_R [(F, K) \underset{\gamma}{\sim} (H, D)]$$

$$3) K \cap Y' \cap D' = K \cap Y \cap D' = \emptyset, (F, K) \underset{\gamma}{\sim} [(G, Y) \setminus_R (H, D)] = [(F, K) \underset{\gamma}{\sim} (G, Y)] \setminus_R [(F, K) \underset{\gamma}{\sim} (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, Y) \setminus_R (H, D) = (M, Y \cap D)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y \cap D, M(\omega) = G(\omega) - H(\omega)$. $(F, K) \underset{\gamma}{\sim} (M, Y \cap D) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - (Y \cap D) \\ F'(\omega) \cap M(\omega), & \omega \in K \cap (Y \cap D) \end{cases}$$

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - (Y \cap D) \\ F'(\omega) \cap [G(\omega) - H(\omega)], & \omega \in K \cap (Y \cap D) \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $(F, K) \underset{\gamma}{\sim} (G, Y) = (V, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(F, K) \underset{\gamma}{\sim} (H, D) = (W, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$W(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \setminus_R (W, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = V(\omega) \setminus W(\omega)$,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) - F(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap (K - D) \\ F(\omega) - [F'(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K - Y) \cap (K \cap D) \\ [F'(\omega) \cap G(\omega)] - F(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap (K - D) \\ [F'(\omega) \cap G(\omega)] - [F'(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K \cap Y) \cap (K \cap D) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} \emptyset, & \omega \in K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ F'(\omega) \cap G(\omega) & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cap [G(\omega) - H(\omega)], & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Buradan, $K \cap Y' \cap D' = K \cap Y \cap D' = \emptyset$ için, $N = T$ olduğu görülür.

ii) Esnek İkili Parçalı Gamma İşleminin Kısıtlanmış İşlemlere Sağdan Dağılması:

Bu alt başlık altındaki eşitlikler, $K \cap Y \cap D = \emptyset$ için sağlanır.

$$1) [(F, K) \cup_R (G, Y)] \tilde{\gamma} (H, D) = [(F, K) \tilde{\gamma} (H, D)] \cup_R [(G, Y) \tilde{\gamma} (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, K) \cup_R (G, Y) = (M, K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için, $M(\omega) = F(\omega) \cup G(\omega)$. $(M, K \cap Y) \tilde{\gamma} (H, D) = (N, K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için,

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D \\ M'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ [F'(\omega) \cap G'(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım.

$[(F, K) \tilde{\gamma} (H, D)] \cup_R [(G, Y) \tilde{\gamma} (H, D)]$. $(F, K) \tilde{\gamma} (H, D) = (V, K)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K$ için,

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G, Y) \tilde{\gamma} (H, D) = (W, Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in Y$ için,

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ G'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V,K) \cup_R (W,Y) = (T, K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için, $T(\omega) = V(\omega) \cup W(\omega)$,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in (K-D) \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cup [G'(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K-D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cap H(\omega)] \cup G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y-D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cap H(\omega)] \cup [G'(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ [F'(\omega) \cup G'(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece $K \cap Y \cap D = \emptyset$ için $N=T$ olduğu görülür.

$$2) [(F,K) \cap_R (G,Y)] \tilde{\gamma}_Y (H,D) = [(F,K) \tilde{\gamma}_Y (H,D)] \cap_R [(G,Y) \tilde{\gamma}_Y (H,D)].$$

$$3) [(F,K) \setminus_R (G,Y)] \tilde{\gamma}_Y (H,D) = [(F,K) \tilde{\gamma}_Y (H,D)] \setminus_R [(G,Y) \tilde{\gamma}_Y (H,D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F,K) \setminus_R (G,Y) = (M, K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için, $M(\omega) = F(\omega) - G(\omega)$. $(M, K \cap Y) \tilde{\gamma}_Y (H,D) = (N, K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için,

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D \\ M'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega) - G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ [F'(\omega) \cup G(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $[(F,K) \tilde{\gamma}_Y (H,D)] \setminus_R [(G,Y) \tilde{\gamma}_Y (H,D)]$.

$(F,K) \tilde{\gamma}_Y (H,D) = (V,K)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K$ için,

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G,Y) \tilde{\gamma}_Y (H,D) = (W,Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in Y$ için,

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y-D \\ G'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \setminus_R (W, Y) = (T, K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için, $T(\omega) = V(\omega) \setminus W(\omega)$,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) - G(\omega), & \omega \in (K-D) \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) - [G'(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K-D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cap H(\omega)] - G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y-D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cap H(\omega)] - [G'(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) - G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ [F'(\omega) \cap G(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece $K \cap Y \cap D = \emptyset$ için $N=T$ olduğu görülür.

6.4.1.1. Sonuç Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cup_R)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_E$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-latis olduğu (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 6.3.1* de $(S_E(U), \tilde{\gamma})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 6.4.1 (i) (2) başlığında, $\tilde{\gamma}$ işleminin $\cup_R$ işlemine $K \cap (Y \Delta D) = \emptyset$ şartı ile soldan dağıldığı, Teorem 6.4.1 (ii) (1) başlığında, $\tilde{\gamma}$ işleminin $\cup_R$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cup_R, \tilde{\gamma})$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, toplamsal idempotent birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halkadır.

6.4.1.2. Sonuç Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cap_R)$ cebirsel yapısının birimi U_E olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-latis olduğu olduğunu (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 6.3.1* de $(S_E(U), \tilde{\gamma})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 6.4.1 (i) (1) başlığında, $\tilde{\gamma}$ işleminin $\cap_R$ işlemine $K \cap (Y \Delta D) = \emptyset$ şartı ile soldan dağıldığı, Teorem 6.4.1 (ii) (2) başlığında, $\tilde{\gamma}$ işleminin $\cap_R$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan

gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cap_R, \sim_\gamma)$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halkadır.

6.4.1.3. Not $(S_E(U), \setminus_R)$ cebirsel yapısı birleşme özelliğine sahip olmadığı için bir yarıgrup olamayacağından $\sim_\gamma$ işlemi ile birlikte bir cebirsel yapı oluşturması beklenemez.

6.4.2. Teorem $(F, K), (G, Y), (H, D), U$ üzerinde esnek kümeler olmak üzere, aşağıdaki gibi esnek ikili parçalı gamma işleminin genişletilmiş işlemlere dağılması mevcuttur:

i) Esnek İkili Parçalı Gamma İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Soldan Dağılması:

Bu alt başlık altındaki (1) ve (2) numaralı eşitlikler, $K \cap (Y \Delta D) = \emptyset$ ise sağlanır.

$$1) (F, K) \sim_\gamma [(G, Y) \cup_\varepsilon (H, D)] = [(F, K) \sim_\gamma (G, Y)] \cup_\varepsilon [(F, K) \sim_\gamma (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, Y) \cup_\varepsilon (H, D) = (M, Y \cup D)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y \cup D$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ H(\omega), & \omega \in D - Y \\ G(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(F, K) \sim_\gamma (M, Y \cup D) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - (Y \cup D) \\ F'(\omega) \cap M(\omega), & \omega \in K \cap (Y \cup D) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - (Y \cup D) = K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap (Y - D) = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap (D - Y) = K \cap Y' \cap D \\ F'(\omega) \cap [(G(\omega) \cup H(\omega))], & \omega \in K \cap Y \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım: $[(F,K) \sim_Y (G,Y)] \cup_\varepsilon [(F,K) \sim_Y (H,D)]$.

$(F,K) \sim_Y (G,Y) = (V,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ F'(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(F,K) \sim_Y (H,D) = (W,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-D \\ F'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(V,K) \cup_\varepsilon (W,K) = (T,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K-K=\emptyset \\ W(\omega), & \omega \in K-K=\emptyset \\ V(\omega) \cap W(\omega), & \omega \in K \cap K=K \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cup F(\omega), & \omega \in (K-Y) \cap (K-D) = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cup [F'(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K-Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y' \cap D \\ [F'(\omega) \cap G(\omega)] \cup F(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap (K-D) = K \cap Y \cap D' \\ [F'(\omega) \cap G(\omega)] \cup [F'(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K \cap Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-Y) \cap (K-D) = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in (K-Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y' \cap D \\ G(\omega) \cup F(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap (K-D) = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cap [G(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in (K \cap Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

$K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D' = \emptyset$ için $N=T$ olduğu görülür. $K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D' = \emptyset$ şartının, $K \cap (Y \Delta D) = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikârdır.

$$2) (F,K) \sim_Y [(G,Y) \cap_\varepsilon (H,D)] = [(F,K) \sim_Y (G,Y)] \cap_\varepsilon [(F,K) \sim_Y (H,D)].$$

$$3) K \cap Y' \cap D' = K \cap Y' \cap D = \emptyset \text{ ise } (F,K) \sim_Y [(G,Y) \setminus_\varepsilon (H,D)] = [(F,K) \sim_Y (G,Y)] \setminus_\varepsilon [(F,K) \sim_Y (H,D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, Y) \setminus_{\varepsilon} (H, D) = (M, Y \cup D)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y \cup D$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ H(\omega), & \omega \in D - Y \\ G(\omega) - H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(F, K) \sim_{\gamma} (M, Y \cup D) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - (Y \cup D) \\ F'(\omega) \cap M(\omega), & \omega \in K \cap (Y \cup D) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - (Y \cup D) = K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap (Y - D) = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap (D - Y) = K \cap Y' \cap D \\ F'(\omega) \cap [(G(\omega) - H(\omega))], & \omega \in K \cap Y \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım:

$[(F, K) \sim_{\gamma} (G, Y)] \setminus_{\varepsilon} [(F, K) \sim_{\gamma} (H, D)]$. $(F, K) \sim_{\gamma} (G, Y) = (V, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(F, K) \sim_{\gamma} (H, D) = (W, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \setminus_{\varepsilon} (W, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ W(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ V(\omega) - W(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) - F(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap (K - D) = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) - [F'(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K - Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y' \cap D \\ [F'(\omega) \cap G(\omega)] - F(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap (K - D) = K \cap Y \cap D' \\ [F'(\omega) \cap G(\omega)] - [F'(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K \cap Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} \emptyset, & \omega \in (K-Y) \cap (K-D) = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega), & \omega \in (K-Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y' \cap D \\ F'(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap (K-D) = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cap [G(\omega) - H(\omega)], & \omega \in (K \cap Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

$K \cap Y' \cap D' = K \cap Y' \cap D = \emptyset$ için $N=T$ olduğu görülür.

ii) Esnek İkili Parçalı Gamma İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Sağdan Dağılması:

Bu alt başlık altındaki eşitlikler $K \cap Y \cap D = \emptyset$ ise sağlanır.

$$1) [(F,K) \cap_{\varepsilon} (G,Y)]_{\gamma}^{\sim}(H,D) = [(F,K)_{\gamma}^{\sim}(H,D)] \cap_{\varepsilon} [(G,Y)_{\gamma}^{\sim}(H,D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F,K) \cap_{\varepsilon} (G,Y) = (M, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ G(\omega), & \omega \in Y-K \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(M, K \cup Y)_{\gamma}^{\sim}(H,D) = (N, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in (K \cup Y) - D \\ M'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K \cup Y) \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-Y) - D = K \cap Y' \cap D' \\ G(\omega), & \omega \in (Y-K) - D = K' \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K-Y) \cap D = K \cap Y' \cap D \\ G'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (Y-K) \cap D = K' \cap Y \cap D \\ [F'(\omega) \cup G'(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F,K)_{\gamma}^{\sim}(H,D)] \cap_{\varepsilon} [(G,Y)_{\gamma}^{\sim}(H,D)]$. $(F,K)_{\gamma}^{\sim}(H,D) = (V,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-D \\ F'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G, Y) \underset{\gamma}{\sim} (H, D) = (W, Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y-D \\ G'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \cap_{\varepsilon} (W, Y) = (T, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K-Y \\ W(\omega), & \omega \in Y-K \\ V(\omega) \cap W(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-D)-Y = K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap D)-Y = K \cap Y' \cap D \\ G(\omega), & \omega \in (Y-D)-K = K' \cap Y \cap D' \\ G'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (Y \cap D)-K = K' \cap Y \cap D \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K-D) \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap [G'(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K-D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cap H(\omega)] \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y-D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cap H(\omega)] \cap [G'(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ G(\omega), & \omega \in K' \cap Y \cap D' \\ G'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K' \cap Y \cap D \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cap G'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece $K \cap Y \cap D = \emptyset$ için $N = T$ olduğu görülür.

$$2) [(F, K) \cup_{\varepsilon} (G, Y)] \underset{\gamma}{\sim} (H, D) = [(F, K) \underset{\gamma}{\sim} (H, D)] \cup_{\varepsilon} [(G, Y) \underset{\gamma}{\sim} (H, D)].$$

$$3) [(F, K) \setminus_{\varepsilon} (G, Y)] \underset{\gamma}{\sim} (H, D) = [(F, K) \underset{\gamma}{\sim} (H, D)] \setminus_{\varepsilon} [(G, Y) \underset{\gamma}{\sim} (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, K) \setminus_{\varepsilon} (G, Y) = (M, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ G(\omega), & \omega \in Y - K \\ F(\omega) - G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(M, K \cup Y) \tilde{\gamma} (H, D) = (N, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in (K \cup Y) - D \\ M'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K \cup Y) \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K - Y) - D = K \cap Y' \cap D' \\ G(\omega), & \omega \in (Y - K) - D = K' \cap Y \cap D' \\ F(\omega) - G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap D = K \cap Y' \cap D \\ G'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (Y - K) \cap D = K' \cap Y \cap D \\ [F'(\omega) \cup G(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F, K) \tilde{\gamma} (H, D)] \setminus_{\varepsilon} [(G, Y) \tilde{\gamma} (H, D)]$. $(F, K) \tilde{\gamma} (H, D) = (V, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G, Y) \tilde{\gamma} (H, D) = (W, Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ G'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \setminus_{\varepsilon} (W, Y) = (T, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K - Y \\ W(\omega), & \omega \in Y - K \\ V(\omega) - W(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-D) - Y = K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap D) - Y = K \cap Y' \cap D \\ G(\omega), & \omega \in (Y-D) - K = K' \cap Y \cap D' \\ G'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (Y \cap D) - K = K' \cap Y \cap D \\ F(\omega) - G(\omega), & \omega \in (K-D) \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) - [G'(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K-D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cap H(\omega)] - G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y-D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cap H(\omega)] - [G'(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ G(\omega), & \omega \in K' \cap Y \cap D' \\ G'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K' \cap Y \cap D \\ F(\omega) - G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ [F'(\omega) \cap G(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece $K \cap Y \cap D = \emptyset$ için $N=T$ olduğu görülür. Aşağıda yer alan eşitlikler de $K \cap Y \cap D = \emptyset$ için sağlanır. İspatlar benzer şekilde yapıldığı için, ispatsız şekilde verilmiştir.

$$4) [(F,K) \Delta_\varepsilon(G,Y)]_{\tilde{\gamma}}(H,D) = [(F,K)_{\tilde{\gamma}}(H,D)] \Delta_\varepsilon[(G,Y)_{\tilde{\gamma}}(H,D)].$$

$$5) [(F,K) +_\varepsilon(G,Y)]_{\tilde{\gamma}}(H,D) = [(F,K)_{\tilde{\gamma}}(H,D)] +_\varepsilon[(G,Y)_{\tilde{\gamma}}(H,D)].$$

$$6) [(F,K) \gamma_\varepsilon(G,Y)]_{\tilde{\gamma}}(H,D) = [(F,K)_{\tilde{\gamma}}(H,D)] \gamma_\varepsilon[(G,Y)_{\tilde{\gamma}}(H,D)].$$

$$7) [(F,K) *_\varepsilon(G,Y)]_{\tilde{\gamma}}(H,D) = [(F,K)_{\tilde{\gamma}}(H,D)] *_\varepsilon[(G,Y)_{\tilde{\gamma}}(H,D)].$$

$$8) [(F,K) \theta_\varepsilon(G,Y)]_{\tilde{\gamma}}(H,D) = [(F,K)_{\tilde{\gamma}}(H,D)] \theta_\varepsilon[(G,Y)_{\tilde{\gamma}}(H,D)].$$

6.4.2.1. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cup_\varepsilon)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_\emptyset$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-latis (dolayısıyla bir yarıgrup)

olduğunu göstermişti. *Sonuç 6.3.1* de $(S_E(U), \tilde{\gamma})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, üstelik Teorem 6.3 (10) da, $\emptyset_{\emptyset} \tilde{\gamma}(F, T) = \emptyset_{\emptyset}$, yani $\emptyset_{\emptyset}$ nin $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{\gamma}$ işlemi altında, sol yutan eleman olduğu ve Teorem 6.4.2 (ii) (2) başlığında, $\tilde{\gamma}$ işleminin $\cup_{\varepsilon}$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cup_{\varepsilon}, \tilde{\gamma})$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halkadır. Ayrıca, $(F, K) \tilde{\gamma} \emptyset_{\emptyset} \neq \emptyset_{\emptyset}$ olduğundan, $(S_E(U), \cup_{\varepsilon}, \tilde{\gamma})$ cebirsel yapısının sıfır simetrik olmayan bir (sağ) yakın yarı-halka olduğu açıktır. Benzer şekilde, $(S_E(U), \cap_{\varepsilon}, \tilde{\gamma})$ cebirsel yapısının da aynı şartlar altında komutatif ve sıfır simetrik olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halka olduğu gösterilebilir. Yine, $(S_E(U), \setminus_{\varepsilon}, \tilde{\gamma})$, $(S_E(U), \Delta_{\varepsilon}, \tilde{\gamma})$, $(S_E(U), +_{\varepsilon}, \tilde{\gamma})$, $(S_E(U), \gamma_{\varepsilon}, \tilde{\gamma})$, $(S_E(U), \lambda_{\varepsilon}, \tilde{\gamma})$, $(S_E(U), *_{\varepsilon}, \tilde{\gamma})$, $(S_E(U), \theta_{\varepsilon}, \tilde{\gamma})$ cebirsel yapılarının da aynı şartlar altında komutatif, sıfır simetrik ve idempotent olmayan, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halka olduğu gösterilebilir. Buradaki, ilk işlemlerin $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında (Δ_{ε} işlemi şartsız bir şekilde) birleşmeli olduğu, Aybek (2023) tarafından gösterilmiştir.

6.4.2.2. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cup_{\varepsilon})$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_{\emptyset}$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-latis (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 6.3.1* de $(S_E(U), \tilde{\gamma})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 6.4.2 (i) (1) başlığında, $\tilde{\gamma}$ işleminin $\cup_{\varepsilon}$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartı altında soldan dağıldığı, Teorem 6.4.2 (ii) (2) başlığında, $\tilde{\gamma}$ işleminin $\cup_{\varepsilon}$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cup_{\varepsilon}, \tilde{\gamma})$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halkadır.

6.4.2.3. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cap_\varepsilon)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_\emptyset$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-latis (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 6.3.1* de $(S_E(U), \tilde{\gamma})$ cebirsel yapısının, (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 6.4.2 (i) (2) başlığında, $\tilde{\gamma}$ işleminin $\cap_\varepsilon$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartı altında soldan dağıldığı, Teorem 6.4.2 (ii) (1) başlığında, $\tilde{\gamma}$ işleminin $\cap_\varepsilon$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. *Sonuç* olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \tilde{\gamma})$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halkadır.

6.4.2.4. *Sonuç* Kökçü (2024), (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı ile $(S_E(U), \setminus_\varepsilon)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_\emptyset$ olan bir yarıgrup olduğunu göstermişti. *Sonuç 6.3.1* de $(S_E(U), \tilde{\gamma})$ cebirsel yapısının, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 6.4.2 (i) (3) başlığında, $\tilde{\gamma}$ işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine $T \cap Z' \cap M' = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında soldan dağıldığı, Teorem 6.4.2 (ii) (3) başlığında, $\tilde{\gamma}$ işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. *Sonuç* olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = T \cap Z' \cap M' = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \setminus_\varepsilon, \tilde{\gamma})$ cebirsel yapısı bir komutatif ve idempotent olmayan, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halkadır.

6.4.3. Teorem (F,K) , (G,Y) , (H,D) , U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, aşağıdaki gibi esnek ikili parçalı gamma işleminin esnek ikili parçalı işlemlere dağılması mevcuttur:

i) Esnek İkili Parçalı Gamma İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Soldan Dağılması:

Bu alt başlık altındaki (1) ve (2) numaralı eşitlikler, $K \cap (Y \Delta D) = \emptyset$ ise sağlanır.

$$1) (F,K) \tilde{\gamma} [(G,Y) \tilde{\cup} (H,D)] = [(F,K) \tilde{\gamma} (G,Y)] \tilde{\cup} [(F,K) \tilde{\gamma} (H,D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, Y) \widetilde{\cup} (H, D) = (M, Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ G(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(F, K) \widetilde{\gamma} (M, Y) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cap M(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap (Y - D) = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cap [G(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in K \cap Y \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $[(F, K) \widetilde{\gamma} (G, Y)] \widetilde{\cup} [(F, K) \widetilde{\gamma} (H, D)] = (F, K) \widetilde{\gamma}$

$(G, Y) = (V, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(F, K) \widetilde{\gamma} (H, D) = (W, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \widetilde{\cup} (W, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ V(\omega) \cup W(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cup F(\omega) & \omega \in (K - Y) \cap (K - D) = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cup [F'(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K - Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y' \cap D \\ [F'(\omega) \cap G(\omega)] \cup F(\omega) & \omega \in (K \cap Y) \cap (K - D) = K \cap Y \cap D' \\ [F'(\omega) \cap G(\omega)] \cup [F'(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K \cap Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ G(\omega) \cup F(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cap [G(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

N fonksiyonundaki K-Y yi düşünecek olursak, $\omega \in K-Y$ ise, $K-Y = K \cap Y'$ olacağından, $\omega \in Y'$ ise $\omega \in D-Y$ veya $\omega \in (Y \cup D)'$ olacağından, buradan, $\omega \in K-Y$ ise, $\omega \in K \cap Y' \cap D'$ veya $\omega \in K \cap Y' \cap D$ olur. Böylece, $K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D' = \emptyset$ için $N=T$ olduğu görülür. $K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D' = \emptyset$ şartının, $K \cap (Y \Delta D) = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikardır.

$$2) (F,K) \underset{\gamma}{\sim} [(G,Y) \underset{\cap}{\sim} (H,D)] = [(F,K) \underset{\gamma}{\sim} (G,Y)] \underset{\cap}{\sim} [(F,K) \underset{\gamma}{\sim} (H,D)].$$

$$3) K \cap Y' \cap D' = \emptyset \text{ ise } (F,K) \underset{\gamma}{\sim} [(G,Y) \underset{\setminus}{\sim} (H,D)] = [(F,K) \underset{\gamma}{\sim} (G,Y)] \underset{\setminus}{\sim} [(F,K) \underset{\gamma}{\sim} (H,D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G,Y) \underset{\setminus}{\sim} (H,D) = (M,Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y-D \\ G(\omega)-H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(F,K) \underset{\gamma}{\sim} (M,Y) = (N,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ F'(\omega) \cap M(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ F'(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cap [G(\omega)-H(\omega)], & \omega \in K \cap Y \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $[(F,K) \underset{\gamma}{\sim} (G,Y)] \underset{\setminus}{\sim} [(F,K) \underset{\gamma}{\sim} (H,D)]$. $(F,K) \underset{\gamma}{\sim} (G,Y) = (V,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ F'(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(F, K) \sim_{\gamma} (H, D) = (W, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-D \\ F'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \sim_{\gamma} (W, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K-K=\emptyset \\ V(\omega)-W(\omega), & \omega \in K \cap K=K \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) - F(\omega) & \omega \in (K-Y) \cap (K-D) = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) - [F'(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K-Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y' \cap D \\ [F'(\omega) \cap G(\omega)] - F(\omega) & \omega \in (K \cap Y) \cap (K-D) = K \cap Y \cap D' \\ [F'(\omega) \cap G(\omega)] - [F'(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K \cap Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} \emptyset, & \omega \in K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ F'(\omega) \cap G(\omega) & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cap [G(\omega) - H(\omega)], & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

$K \cap Y' \cap D' = \emptyset$ için $N=T$ olduğu görülür.

ii) Esnek İkili Parçalı Gamma İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Sağdan Dağılması:

Bu alt başlık altındaki eşitlikler, $K \cap Y \cap D = \emptyset$ ise sağlanır.

$$1) [(F, K) \sim_{\cap} (G, Y)] \sim_{\gamma} (H, D) = [(F, K) \sim_{\gamma} (H, D)] \sim_{\cap} [(G, Y) \sim_{\gamma} (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, K) \sim_{\cap} (G, Y) = (M, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(M, K) \stackrel{\sim}{\gamma} (H, D) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in K-D \\ M'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

Böylece

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-Y)-D = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap Y)-D = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K-Y) \cap D = K \cap Y' \cap D \\ [F'(\omega) \cup G'(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $[(F, K) \stackrel{\sim}{\gamma} (H, D)] \stackrel{\sim}{\cap} [(G, Y) \stackrel{\sim}{\gamma} (H, D)]$. $(F, K) \stackrel{\sim}{\gamma}$

$(H, D) = (V, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-D \\ F'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G, Y) \stackrel{\sim}{\gamma} (H, D) = (W, Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y-D \\ G'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \stackrel{\sim}{\cap} (W, Y) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K-Y \\ V(\omega) \cap W(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Buradan,

$$\begin{aligned}
 T(\omega) = & \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-D)-Y = K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap D)-Y = K \cap Y' \cap D \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K-D) \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap [G'(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K-D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cap H(\omega)] \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y-D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cap H(\omega)] \cap [G'(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases} \\
 T(\omega) = & \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cap G'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}
 \end{aligned}$$

Böylece $K \cap Y \cap D = \emptyset$ için $N=T$ olduğu görülür.

$$2) [(F, K) \cup (G, Y)]_{\gamma}^{\sim} (H, D) = [(F, K)_{\gamma}^{\sim} (H, D)] \cup [(G, Y)_{\gamma}^{\sim} (H, D)]$$

$$3) [(F, K) \setminus (G, Y)]_{\gamma}^{\sim} (H, D) = [(F, K)_{\gamma}^{\sim} (H, D)] \setminus [(G, Y)_{\gamma}^{\sim} (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, K) \setminus (G, Y) = (M, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ F(\omega) - G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(M, K)_{\gamma}^{\sim} (H, D) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in K-D \\ M'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-Y)-D = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) - G(\omega), & \omega \in (K \cap Y)-D = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K-Y) \cap D = K \cap Y' \cap D \\ [F'(\omega) \cup G(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $[(F,K) \sim_{\gamma} (H,D)] \sim_{\Delta} [(G,Y) \sim_{\gamma} (H,D)]$. $(F,K) \sim_{\gamma} (H,D)=(V,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-D \\ F'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G,Y) \sim_{\gamma} (H,D)=(W,Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y-D \\ G'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V,K) \sim_{\Delta} (W,Y)=(T,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K-Y \\ V(\omega) \setminus W(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-D)-Y = K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in (K \cap D)-Y = K \cap Y' \cap D \\ F(\omega) - G(\omega), & \omega \in (K-D) \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) - [G'(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K-D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cap H(\omega)] - G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y-D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cap H(\omega)] - [G'(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cap H(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ F(\omega) - G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ [F'(\omega) - G'(\omega)] \cap H(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece $K \cap Y \cap D = \emptyset$ için $N=T$ olduğu görülür. Aşağıda yer alan eşitlikler de $K \cap Y \cap D = \emptyset$ şartı altında sağlanır. İspatlar benzer şekilde yapıldığı için, ispatsız şekilde verilmiştir.

$$4) [(F, K) \sim_{\Delta} (G, Y)] \sim_{\gamma} (H, D) = [(F, K) \sim_{\gamma} (H, D)] \sim_{\Delta} [(G, Y) \sim_{\gamma} (H, D)].$$

$$5) [(F, K) \sim_{+} (G, Y)] \sim_{\gamma} (H, D) = [(F, K) \sim_{\gamma} (H, D)] \sim_{+} [(G, Y) \sim_{\gamma} (H, D)].$$

$$6)[(F, K) \tilde{\gamma} (G, Y)]_{\gamma} \tilde{\gamma} (H, D) = [(F, K) \tilde{\gamma} (H, D)]_{\gamma} \tilde{\gamma} [(G, Y) \tilde{\gamma} (H, D)].$$

$$7)[(F, K) \tilde{*} (G, Y)]_{\gamma} \tilde{\gamma} (H, D) = [(F, K) \tilde{\gamma} (H, D)]_{\gamma} \tilde{*} [(G, Y) \tilde{\gamma} (H, D)].$$

$$8)[(F, K) \tilde{\theta} (G, Y)]_{\gamma} \tilde{\gamma} (H, D) = [(F, K) \tilde{\gamma} (H, D)]_{\gamma} \tilde{\theta} [(G, Y) \tilde{\gamma} (H, D)].$$

$$9)[(F, K) \tilde{\lambda} (G, Y)]_{\gamma} \tilde{\gamma} (H, D) = [(F, K) \tilde{\gamma} (H, D)]_{\gamma} \tilde{\lambda} [(G, Y) \tilde{\gamma} (H, D)].$$

6.4.3.1. *Sonuç* Bu tezimizde, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \tilde{\cap})$ cebirsel yapısının komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup yani bir band olduğunu gösterildi. *Sonuç 6.3.1* de $(S_E(U), \tilde{\gamma})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 6.4.3 (i) (2) başlığında, $\tilde{\gamma}$ işleminin $\tilde{\cap}$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartı ile soldan dağıldığı, Teorem 6.4.3 (ii) (1) başlığında, $\tilde{\gamma}$ işleminin $\tilde{\cap}$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \tilde{\cap}, \tilde{\gamma})$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, toplamsal idempotent birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halkadır.

6.4.3.2. *Sonuç* Bu tezimizde, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \tilde{\cup})$ cebirsel yapısının komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup yani bir band olduğunu gösterildi. *Sonuç 6.3.1* de $(S_E(U), \tilde{\gamma})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 6.4.3 (i) (1) başlığında, $\tilde{\gamma}$ işleminin $\tilde{\cup}$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartı ile soldan dağıldığı, Teorem 6.4.3 (ii) (2) başlığında, $\tilde{\gamma}$ işleminin $\tilde{\cup}$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$

şartları altında, $(S_E(U), \tilde{\cup}, \tilde{\gamma})$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halkadır.

6.4.3.3. Sonuç Bu tezimizde, (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \tilde{\setminus})$ cebirsel yapısının komutatif olmayan bir yarıgrup olduğunu gösterildi.. *Sonuç 6.3.1* de $(S_E(U), \tilde{\gamma})$ cebirsel yapısının, (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 6.4.3 (i) (3) başlığında, $\tilde{\gamma}$ işleminin $\tilde{\setminus}$ işlemine $T \cap Z' \cap M' = \emptyset$ şartı ile soldan dağıldığı, Teorem 6.4.3 (ii) (3) başlığında, $\tilde{\gamma}$ işleminin $\tilde{\setminus}$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = T \cap Z' \cap M' = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \tilde{\setminus}, \tilde{\gamma})$ cebirsel yapısı bir komutatif ve idempotent olmayan, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halkadır.

6.4.3.4. Sonuç (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında, $(S_E(U), \tilde{\Delta}, \tilde{\gamma})$, $(S_E(U), \tilde{+}, \tilde{\gamma})$, $(S_E(U), \tilde{\gamma}, \tilde{\gamma})$, $(S_E(U), \tilde{*}, \tilde{\gamma})$, $(S_E(U), \tilde{\theta}, \tilde{\gamma})$ cebirsel yapılarının, komutatif ve idempotent olmayan, birimsiz ve sıfırsız bir (sağ) yakın yarı-halka olduğu gösterilebilir. Buradaki, ilk işlemlerin $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında $\tilde{\Delta}$ işlemi $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında) birleşmeli olduğu, bu tezin ilerleyen kısımlarında gösterilmiştir.

6.4.3.5. Teorem (F,K) , (G,Y) ve (H,D) , U üzerinde esnek küme olsun. Bu durumda

- i) $(F,K) \times [(G,Y) \tilde{\gamma} (H,Z)] = [(F,K) \times (G,Y)] \tilde{\gamma} [(F,K) \times (H,Z)]$
- ii) $[(F,K) \tilde{\gamma} (G,Y)] \times (H,Z) = [(F,K) \times (H,Z)] \tilde{\gamma} [(G,Y) \times (H,Z)]$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G,Y) \tilde{\gamma} (H,D) = (M,Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y-D \\ G(\omega) \gamma H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(F, K) \times (M, Y) = (N, K \times Y)$ olsun. Burada $\forall (\omega, y) \in K \times Y$ için; $N(\omega, y) = F(\omega) \times M(y)$. Böylece,

$$N(\omega, y) = \begin{cases} F(\omega) \times G(y) & (\omega, y) \in K \times (Y-D) = (K \times Y) - (K \times D) \\ F(\omega) \times [G(y) \gamma H(y)], & (\omega, y) \in K \times (Y \cap D) = (K \times Y) \cap (K \times D) \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $[(F, K) \times (G, Y)] \tilde{\gamma} [(F, K) \times (H, D)]$. $(F, K) \times (G, Y) = (V, K \times Y)$ olsun.

Burada $\forall (\omega, y) \in K \times Y$ için; $V(\omega, y) = F(\omega) \times G(y)$. $(F, K) \times (H, D) = (W, K \times D)$ olsun. Burada $\forall (\omega, d) \in K \times D$ için; $W(\omega, d) = F(\omega) \times H(d)$. $(V, K \times Y) \tilde{\gamma} (W, K \times D) = (T, K \times Y)$ olsun. Burada $\forall (\omega, y) \in K \times Y$ için;

$$T(\omega, y) = \begin{cases} V(\omega, y), & (\omega, y) \in (K \times Y) - (K \times D) \\ V(\omega, y) \gamma W(\omega, y) & (\omega, y) \in (K \times Y) \cap (K \times D) \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega, y) = \begin{cases} F(\omega) \times G(y), & (\omega, y) \in (K \times Y) - (K \times D) \\ [F(\omega) \times G(y)] \gamma [F(\omega) \times G(y)], & (\omega, y) \in (K \times Y) \cap (K \times D) \end{cases}$$

Burada $(A \gamma B) = B - A$ ve $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$ olduğu ve dolayısıyla $A \times (B \gamma C) = A \times (C - B) = (A \times C) - (A \times B) = (A \times B) \gamma (A \times C)$ sağlandığından, $N(\omega, y) = T(\omega, y)$ olduğu görülür.

ii) İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, K) \tilde{\gamma} (G, Y) = (S, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$S(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \gamma G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(S, K) \times (H, Z) = (T, K \times Z)$ olsun. Burada $\forall (\omega, y) \in K \times Z$ için; $T(\omega, y) = S(\omega) \times H(y)$. Böylece,

$$T(\omega, y) = \begin{cases} F(\omega) \times H(y) & (\omega, y) \in (K - Y) \times Z = (K \times Z) \times (Y - Z) \\ [F(\omega) \gamma G(\omega)] \times H(y), & (\omega, y) \in (K \cap Y) \times Z = (K \times Z) \cap (Y \times Z) \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $[(F,K) \times (H,Z)] \sim_{\gamma} [(G,Y) \times (H,Z)]$. $(F,K) \times (H,Z) = (W, K \times Z)$ olsun. Burada $\forall (\omega, y) \in K \times Z$ için; $V(\omega, y) = F(\omega) \times H(y)$. $(G,Y) \times (H,Z) = (R, Y \times Z)$ olsun. Burada $\forall (\omega, d) \in Y \times Z$ için; $R(\omega, d) = G(\omega) \times H(d)$. $(W, K \times Z) \sim_{\gamma} (R, Y \times Z) = (M, K \times Z)$ olsun. Burada $\forall (\omega, y) \in K \times Z$ için;

$$M(\omega, y) = \begin{cases} W(\omega, y), & (\omega, y) \in (K \times Z) - (Y \times Z) \\ W(\omega, y) \gamma R(\omega, y) & (\omega, y) \in (K \times Z) \cap (Y \times Z) \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega, y) = \begin{cases} F(\omega) \times H(y), & (\omega, y) \in (K \times Y) - (K \times D) \\ [F(\omega) \times H(y)] \gamma [G(\omega) \times H(y)], & (\omega, y) \in (K \times Y) \cap (K \times D) \end{cases}$$

Buradan, $N(\omega, y) = M(\omega, y)$ olduğu görülür.

7. ESNEK İKİLİ PARÇALI LAMDA İŞLEMİ

Bu bölümde, esnek ikili parçalı lamda adı verilen yeni esnek küme işlemi tanıtılmış, örneği verilmiş, işlemin cebirsel özellikleri ile birlikte diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkisine bakılarak dağılma kuralları ve $S_E(U)$ kümesi üzerinde bu işlemin hangi cebirsel yapıları oluşturduğu incelenmiş ve çok önemli sonuçlar elde edilmiştir.

7.1. Tanım (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde tanımlı iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin $(F, K) \sim_{\lambda} (G, Y)$ ile gösterilen esnek ikili parçalı lamda işlemi $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

olmak üzere $(F, K) \sim_{\lambda} (G, Y) = (H, K)$ ile tanımlanır.

7.2. *Örnek* $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesi, $K = \{e_1, e_4\}$, $Y = \{e_2, e_3, e_4\}$ E 'nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evrensel küme, (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde $(F, K) = \{ (e_1, \{h_2, h_4, h_6\}), (e_4, \{h_1, h_2, h_5, h_6\}) \}$, $(G, Y) = \{ (e_2, \{h_1, h_2\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4, h_5\}), (e_4, \{h_2, h_3, h_4\}) \}$ olarak tanımlanan iki esnek küme olsun. $(F, K) \sim_{\lambda} (G, Y) = (H, K)$ olmak üzere,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Burada, $K = \{e_1, e_4\}$, $K - Y = \{e_1\}$ olmak üzere, $\forall \omega \in K - Y = \{e_1\}$ için, $H(\omega) = F(\omega)$ olup, $H(e_1) = F(e_1) = \{h_2, h_4, h_6\}$, $\forall \omega \in K \cap Y = \{e_4\}$ için, $H(\omega) = F(\omega) \cup G'(\omega)$ olup, $H(e_4) = F(e_4) \cup G'(e_4) = \{h_1, h_2, h_5, h_6\} \cup \{h_1, h_5, h_6\} = \{h_1, h_2, h_5, h_6\}$. Böylece, $(F, K) \sim_{\lambda} (G, Y) = \{ (e_1, \{h_2, h_4, h_6\}), (e_4, \{h_1, h_2, h_5, h_6\}) \}$.

7.3. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1) $\sim_{\lambda}$, $S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: $\tilde{\lambda}$ 'nın $S_E(U)$ üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}: S_E(U) \times S_E(U) &\rightarrow S_E(U) \\ ((F,K), (G,Y)) &\rightarrow (F,K) \tilde{\lambda} (G,Y) = (H,K) \end{aligned}$$

olup, (F,K) ve (G,Y) , U üzerinde iki esnek küme olduğunda $(F,T) \tilde{\lambda} (G,Y)$ de, U üzerinde bir esnek kümedir. $K \subseteq E$ sabit bir parametre kümesi olmak üzere, $\tilde{\lambda}$ 'nın $S_K(U)$ üzerinde de bir ikili işlem olduğu açıktır.

$$2) K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D = \emptyset \text{ ise } [(F,K) \tilde{\lambda} (G,Y)] \tilde{\lambda} (H,D) = (F,K) \tilde{\lambda} [(G,Y) \tilde{\lambda} (H,D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F,K) \tilde{\lambda} (G,Y) = (T,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(T,K) \tilde{\lambda} (H,D) = (M,K)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in K - D \\ T(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K - Y) - D = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap D = K \cap Y' \cap D \\ [F(\omega) \cup G'(\omega)] \cup H'(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

$(G,Y) \tilde{\lambda} (H,D) = (K,Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$K(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ G(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(F,K) \tilde{\lambda} (K,Y) = (S,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$S(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ F(\omega) \cup K'(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Böylece,

$$S(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ F(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in K \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cup [G'(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in K \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

S fonksiyonundaki, K-Y ye bakacak olursak, $K-Y = K \cap Y'$ olup, eğer $\omega \in Y'$ ise $\omega \in D-Y$ veya $\omega \in (Y \cup D)'$. Buradan $\omega \in K-Y$ ise $\omega \in K \cap Y' \cap D'$ ve $\omega \in K \cap Y' \cap D$ olur. Böylece, $K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D = \emptyset$ için $M=S$ olur. Yani uygun koşullar altında, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{\lambda}$ işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

$$3) [(F, K) \tilde{\lambda} (G, K)] \tilde{\lambda} (H, K) \neq (F, K) \tilde{\lambda} [(G, K) \tilde{\lambda} (H, K)]$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F, K) \tilde{\lambda} (G, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-K = \emptyset \\ F(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$(T, K) \tilde{\lambda} (H, K) = (M, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in K-K = \emptyset \\ T(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece,

$$M(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in K-K = \emptyset \\ [F(\omega) \cup G'(\omega)] \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına bakalım. $(G, K) \tilde{\lambda} (H, K) = (L, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$L(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in K-K = \emptyset \\ G(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$(F, K) \sim_{\lambda} (L, K) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cup L'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cup [G'(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan $M \neq N$ olduğu görülür. Yani $S_K(U)$ kümesi üzerinde (parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler üzerinde), $\sim_{\lambda}$ işleminin birleşme özelliği yoktur.

$$4) (F, K) \sim_{\lambda} (G, Y) \neq (G, Y) \sim_{\lambda} (F, K).$$

İspat: $(F, K) \sim_{\lambda} (G, Y) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(G, Y) \sim_{\lambda} (F, K) = (T, Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - K \\ G(\omega) \cup F'(\omega), & \omega \in Y \cap K \end{cases}$$

Burada, sol taraftaki esnek kümenin parametre kümesi K ; sağ taraftaki esnek kümenin parametre kümesi Y dir. Böylece esnek kümelerin eşitliği tanımı gereği;

$$(F, K) \sim_{\lambda} (G, Y) \neq (G, Y) \sim_{\lambda} (F, K).$$

Ayrıca, $(F, K) \sim_{\lambda} (G, K) \neq (G, K) \sim_{\lambda} (F, K)$ olduğu açıktır. Yani, $S_E(U)$ ve $K \subseteq E$ sabit bir paramere kümesi olmak üzere $S_K(U)$ kümesi üzerinde $\sim_{\lambda}$ işlemi değişme özelliğine sahip değildir.

7.3.1. *Sonuç* Teorem 7.3 (1), (2) ve (4) den, (F, K) , (G, Y) ve (H, D) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \sim_{\lambda})$ komutatif ve

idempotent olmayan bir yarıgruptur. $K \subseteq E$ sabir bir parametre kümesi olmak üzere, $(S_K(U), \tilde{\lambda})$ cebirsel yapısı Teorem 7.3 (3) den, birleşme özelliğine sahip olmadığı için yarıgrup olamaz; fakat bu yapının komutatif olmayan bir grupoid olduğu açıktır.

$$5) (F, K) \tilde{\lambda} (F, K) = U_K.$$

İspat: $(F, K) \tilde{\lambda} (F, K) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cup F'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Burada, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F(\omega) \cup F'(\omega) = U$, böylece $(H, K) = U_K$. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{+}$ işlemi, denk güçlülük özelliğine sahip değildir.

$$6) (F, K) \tilde{\lambda} \emptyset_K = U_K.$$

İspat: $\emptyset_K = (S, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için; $S(\omega) = \emptyset$. $(F, K) \tilde{\lambda} (S, K) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cup S(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F'(\omega) \cup S'(\omega) = F'(\omega) \cup U = U$. Buradan $(H, K) = U_K$

$$7) \emptyset_K \tilde{\lambda} (F, K) = (F, K)^r.$$

İspat: $\emptyset_K = (S, K)$ olsun. Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $S(\omega) = \emptyset$. $(S, K) \tilde{\lambda} (F, K) = (H, K)$ olsun.

Buradan, $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} S(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ S(\omega) \cup F'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = S(\omega) \cup F'(\omega) = \emptyset \cup F'(\omega) = F'(\omega)$ olup, $(H, K) = (F, K)^r$.

$$8) (F, K) \tilde{\lambda} \emptyset_E = U_K.$$

İspat: $\emptyset_E = (S, E)$ olsun. Burada $\forall \omega \in E$; $S(\omega) = \emptyset$. $(F, K) \tilde{\lambda}_+ (S, E) = (H, K)$. Böylece, $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - E = \emptyset \\ F(\omega) \cup S'(\omega), & \omega \in K \cap E = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için; $H(\omega) = F(\omega) \cup S'(\omega) = F(\omega) \cup U = U$ olur ve böylece $(H, K) = U_K$.

$$9) (F, K) \tilde{\lambda} \emptyset_\emptyset = (F, K).$$

İspat: $\emptyset_\emptyset = (S, \emptyset)$ ve $(F, K) \tilde{\lambda} (S, \emptyset) = (H, K)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - \emptyset = K \\ F(\omega) \cup S'(\omega), & \omega \in K \cap \emptyset = \emptyset \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için; $H(\omega) = F(\omega)$ olup, $(H, K) = (F, K)$. $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{\lambda}$ işleminin sağ birim elemanı $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir.

$$10) \emptyset_\emptyset \tilde{\lambda} (F, K) = \emptyset_\emptyset.$$

İspat: $\emptyset_\emptyset = (S, \emptyset)$ ve $(S, \emptyset) \tilde{\lambda} (F, K) = (H, \emptyset)$ olsun. $\emptyset_\emptyset$, parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme olduğu için, $(H, \emptyset) = \emptyset_\emptyset$ olur. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{\lambda}$ işlemi için, her elemanın sağ birim eleman olan $\emptyset_\emptyset$ ye göre sol tersi, $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir. Ayrıca, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{\lambda}$ işleminin sol yutan elemanı $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir.

7.3.2. *Sonuç* Teorem 7.3 (1), (2), (9) ve (10) dan, (F, K) , (G, Y) ve (H, D) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \tilde{\lambda})$ cebirsel yapısı, sağ birimi $\emptyset_\emptyset$, her elemanın sol tersi $\emptyset_\emptyset$ olan idempotent olmayan bir sol-sağ sistemdir.

$$11) (F, K) \tilde{\lambda} U_K = (F, K).$$

İspat: $U_K=(T,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega)=U$. $(F,K) \tilde{\lambda} (T,K)=(H,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$H(\omega)=\begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-K=\emptyset \\ F(\omega) \cup T'(\omega), & \omega \in K \cap K=K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için; $H(\omega)=F(\omega) \cup T'(\omega)=F(\omega) \cup \emptyset = F(\omega)$ olur ve böylece $(H,K)=(F,K)$.

$S_K(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{\lambda}$ işleminin sağ birim elemanı U_K esnek kümesidir.

$$12) U_K \tilde{\lambda} (F,K)=U_K.$$

İspat: $U_K=(T,K)$. Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega)=U$. $(T,K) \tilde{\lambda} (F,K)=(H,K)$ olsun. Buradan $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega)=\begin{cases} T(\omega), & \omega \in K-K=\emptyset \\ T(\omega) \cup F'(\omega), & \omega \in K \cap K=K \end{cases}$$

Buradan $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega)=T(\omega) \cup F'(\omega)=U \cup F'(\omega)=U$ dolayısıyla $(H,K)=U_K$. Yani, $S_K(U)$

kümesi üzerinde $\tilde{\lambda}$ işlemi için, her elemanın sağ birim eleman olan U_K ye göre sol tersi,

U_K esnek kümesidir. Ayrıca, $S_K(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{\lambda}$ işleminin sol yutan elemanı U_K esnek kümesidir.

$$13) (F,K) \tilde{\lambda} U_E=(F,K).$$

İspat: $U_E=(T,E)$ olsun. Burada $\forall \omega \in E$ için, $T(\omega)=U$. $(F,K) \tilde{\lambda} (T,E)=(H,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için ;

$$H(\omega)=\begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-E=\emptyset \\ F(\omega) \cup T'(\omega), & \omega \in K \cap E=K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega)=F(\omega) \cup T'(\omega)=F(\omega) \cup \emptyset = F(\omega)$ olur. Böylece, $(H,K)=(F,K)$.

$S_E(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{\lambda}$ işleminin sağ birim elemanı U_E esnek kümesidir.

$$14) U_E \tilde{\lambda} (F, K) = U_E.$$

İspat: $U_E = (T, E)$ olsun. Burada $\forall \omega \in E$ için; $T(\omega) = U$. $(T, E) \tilde{\lambda} (F, K) = (H, D)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$H(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in E - K = K' \\ T(\omega) \cup F'(\omega), & \omega \in E \cap K = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in E$ için; $H(\omega) = T(\omega) \cup F'(\omega) = U \cup F'(\omega) = U$ ve böylece

$$H(\omega) = \begin{cases} U, & \omega \in E - K = K' \\ U, & \omega \in E \cap K = K \end{cases}$$

Böylece, $(H, K) = U_E$. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{\lambda}$ işleminin sol yutan elemanı U_E esnek kümesidir. Teorem 7.3 (13) ve (14) ün genellemesi olarak aşağıdaki (15) ve (16) verilebilir.

$$15) (F, K) \tilde{\lambda} U_D = (F, K).$$

İspat: $U_D = (T, D)$ olsun. Burada $\forall \omega \in D$ için, $T(\omega) = U$. $(F, K) \tilde{\lambda} (T, D) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için ;

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F(\omega) \cup T'(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F(\omega) \cup T'(\omega) = F(\omega) \cup \emptyset = F(\omega)$ olur. Böylece, $(H, K) = (F, K)$.

$S_E(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{\lambda}$ işleminin sağ birim elemanı U_D esnek kümesidir. (Burada D , E nin herhangi bir alt kümesidir.)

$$16) U_D \tilde{\lambda} (F, K) = U_D.$$

İspat: $U_D = (T, D)$ olsun. Burada $\forall \omega \in D$ için; $T(\omega) = U$. $(T, E) \tilde{\lambda} (F, K) = (H, D)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$H(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in D-K \\ T(\omega) \cup F'(\omega), & \omega \in D \cap K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in$ için; $H(\omega) = T(\omega) \cup F'(\omega) = U \cup F'(\omega) = U$ ve böylece

$$H(\omega) = \begin{cases} U, & \omega \in D-K \\ U, & \omega \in D \cap K \end{cases}$$

Böylece, $(H, K) = U_D$. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{\lambda}$ işleminin sol yutan elemanı U_D esnek kümesidir. (Burada D, E nin herhangi bir alt kümesidir.)

7.3.3. *Sonuç* Teorem 7.3 (1), (2), (15) ve (16) dan, (F, K) , (G, Y) ve (H, D) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \tilde{\lambda})$ cebirsel yapısı, sağ birimi U_D , her elemanın sol tersi U_D olan bir sol-sağ sistemdir. (Burada D, E nin herhangi bir alt kümesidir).

$$17) (F, K) \tilde{\lambda} (F, K)^r = (F, K).$$

İspat: $(F, K)^r = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F'(\omega)$. $(F, K) \tilde{\lambda} (H, K) = (T, K)$ olsun.

Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-K = \emptyset \\ F(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = F(\omega) \cup H'(\omega) = F(\omega) \cup F(\omega) = F(\omega)$ olur. Burada (F, K) . $S_E(U)$ kümesi üzerinde, her esnek kümenin tümleyeni $\tilde{\lambda}$ işlemi için kendisinin sağda birim elemanıdır.

$$18) (F, K)^r \tilde{\lambda} (F, K) = (F, K)^r.$$

İspat: $(F, K)^r = (H, K)$. Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F'(\omega)$. $(H, K) \tilde{\lambda} (F, K) = (T, K)$ olsun.

$\forall \omega \in K$ için,

$$T(\omega) = \begin{cases} H(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ H(\omega) \cup F'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = H(\omega) \cup F'(\omega) = F'(\omega) \cup F'(\omega) = F'(\omega)$ olur. $(T, K) = (F, K)^f$.

$S_E(U)$ kümesi üzerinde, her esnek kümenin tümleyeni $\tilde{\lambda}$ işlemi için kendisinin solda yutan elemanıdır.

$$19) [(F, K) \tilde{\lambda} (G, Y)]^r = (F, K) \underset{Y}{\overset{*}{\sim}} (G, Y).$$

İspat: $(F, K) \tilde{\lambda} (G, Y) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(H, K)^r = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$T(\omega) = \begin{cases} F'(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$$\text{Böylece, } (T, K) = (F, K) \underset{Y}{\overset{*}{\sim}} (G, Y).$$

$$20) (F, K) \tilde{\lambda} (G, K) = \emptyset_K \Leftrightarrow (F, K) = \emptyset_K \text{ ve } (G, K) = U_K.$$

İspat: $(F, K) \tilde{\lambda} (G, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$(T, K) = \emptyset_K$ olduğundan, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = \emptyset$.

Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = F(\omega) \cup G'(\omega) = \emptyset \Leftrightarrow \forall \omega \in K$ için, $F(\omega) = \emptyset$ ve $G'(\omega) = \emptyset \Leftrightarrow \forall \omega \in K$ için, $F(\omega) = \emptyset$ ve $G'(\omega) = \emptyset \Leftrightarrow (F, K) = \emptyset_K$ ve $(G, K) = U_K$.

$$21) \emptyset_K \cong (F, K) \tilde{\lambda} (G, Y) \text{ ve } \emptyset_Y \cong (G, Y) \tilde{\lambda} (F, K).$$

$$22) (F, K) \tilde{\lambda} (G, Y) \cong U_K \text{ ve } (G, Y) \tilde{\lambda} (F, K) \cong U_Y.$$

$$23) (G, K)^r \cong (F, K) \tilde{\lambda} (G, K) \text{ ve } (F, K) \cong (F, K) \tilde{\lambda} (G, K).$$

İspat: $(F, K) \tilde{\lambda} (G, K) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$\forall \omega \in K; H(\omega) = G'(\omega) \subseteq F(\omega) \cup G'(\omega), (G, K)^r \cong (F, K) \tilde{\lambda} (G, K). (F, K) \cong (F, K) \tilde{\lambda} (G, K)$ benzer şekilde gösterilebilir.

$$24) (F, K) \cong (G, K) \text{ ise } (F, K) \tilde{\lambda} (H, Z) \cong (G, K) \tilde{\lambda} (H, Z) \text{ ve } (H, Z) \tilde{\lambda} (G, K) \cong (H, Z) \tilde{\lambda} (F, K).$$

İspat: $(F, K) \cong (G, K)$ olsun. Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $F(\omega) \subseteq G(\omega)$. $(F, K) \tilde{\lambda} (H, Z) = (M, K)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in K$ için,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Z \\ F(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap Z \end{cases}$$

$(G, K) \tilde{\lambda} (H, Z) = (N, K)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in K$ için,

$$N(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in K - Z \\ G(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap Z \end{cases}$$

Böylece, $\forall \omega \in K - Z$ için, $T(\omega) = F(\omega) \subseteq G(\omega) = N(\omega)$. $\forall \omega \in K \cap Z$ için $T(\omega) = F(\omega) \cup H'(\omega) \subseteq G(\omega) \cup H'(\omega) = N(\omega)$ olup, $(F, K) \tilde{\lambda} (H, Z) \cong (G, K) \tilde{\lambda} (H, Z)$.

Şimdi de $(F, K) \cong (G, K)$ ise $(H, Z) \tilde{\lambda} (G, K) \cong (H, Z) \tilde{\lambda} (F, K)$ olduğunu gösterelim.

$(F, K) \cong (G, K)$ olduğundan, $\forall \omega \in K$ için, $F(\omega) \subseteq G(\omega)$ ve $G'(\omega) \subseteq F'(\omega)$. $(H, Z) \tilde{\lambda} (G, K) = (W, Z)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in Z$ için,

$$W(\omega) = \begin{cases} H(\omega), & \omega \in Z-K \\ H(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in Z \cap K \end{cases}$$

$(H, Z) \stackrel{\sim}{\lambda} (F, K)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in Z$ için,

$$L(\omega) = \begin{cases} H(\omega), & \omega \in Z-K \\ H(\omega) \cup F'(\omega), & \omega \in Z \cap K \end{cases}$$

Her $\omega \in Z-K$ için, $W(\omega) = H(\omega) \subseteq H(\omega) = L(\omega)$, $\forall \omega \in Z \cap K$ için $W(\omega) = H(\omega) \cup G'(\omega) \subseteq H(\omega) \cup F'(\omega) = L(\omega)$ olup, $(H, Z) \stackrel{\sim}{\lambda} (G, K) \subseteq (H, Z) \stackrel{\sim}{\lambda} (F, K)$.

25) $(H, Z) \stackrel{\sim}{\lambda} (G, K) \subseteq (H, Z) \stackrel{\sim}{\lambda} (F, K)$ ise $(F, K) \subseteq (G, K)$ olmak zorunda değildir. Benzer şekilde, $(F, K) \stackrel{\sim}{\lambda} (H, Z) \subseteq (G, K) \stackrel{\sim}{\lambda} (H, Z)$ ise $(F, K) \subseteq (G, K)$ olmak zorunda değildir. Yani Teorem 7.3. (24) nın tersi doğru değildir.

İspat: Teorem 7.3. (24) in tersi doğru olmadığını göstermek için bir örnek verelim. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi, $K = \{e_1, e_3\}$ ve $Z = \{e_1, e_3, e_5\}$ E'nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme, (F, K) , (G, K) ve (H, Z) , U üzerinde $(F, K) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G, K) = \{(e_1, \{h_2\}), (e_3, \{h_1, h_2\})\}$, $(H, Z) = \{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, \{h_2, h_5\})\}$ olarak tanımlanan örnek kümeler olsun.

$(H, Z) \stackrel{\sim}{\lambda} (G, K) = (L, Z)$ olmak üzere $\forall \omega \in Z-K = \{e_5\}$ için, $L(e_5) = H(e_5) = \{h_2, h_5\}$; $\forall \omega \in Z \cap K = \{e_1, e_3\}$ için, $L(e_1) = H(e_1) \cup G'(e_1) = U$, $L(e_3) = H(e_3) \cup G'(e_3) = U$. Buradan, $(H, Z) \stackrel{\sim}{\lambda} (G, K) = \{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, \{h_2, h_5\})\}$.

Şimdi de, $(H, Z) \stackrel{\sim}{\lambda} (F, K) = (W, Z)$ olmak üzere $\forall \omega \in Z-K = \{e_5\}$ için, $W(e_5) = H(e_5) = \{h_2, h_5\}$; $\forall \omega \in Z \cap K = \{e_1, e_3\}$ için, $W(e_1) = H(e_1) \cup F'(e_1) = U$, $W(e_3) = H(e_3) \cup F'(e_3) = U$. Böylece $(H, Z) \stackrel{\sim}{\lambda} (F, K) = \{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, \{h_2, h_5\})\}$.

Buradan, $(H,Z) \widetilde{\lambda} (G,K) \subseteq (H,Z) \widetilde{\lambda} (F,K)$; fakat $(F,K) \subseteq (G,K)$ olmadığı açıktır. Benzer şekilde, $(F,K) \widetilde{\lambda} (H,Z) \subseteq (G,K) \widetilde{\lambda} (H,Z)$ ise $(F,K) \subseteq (G,K)$ olmak zorunda olmadığı yukarıdaki örnekte, $(H,Z)=\{(e_1,\emptyset),(e_3,\emptyset),(e_5,\{h_2,h_5\})\}$ seçilerek gösterilebilir.

26) $(F,T) \subseteq (G,T)$ ve $(K,V) \subseteq (L,V)$ ise $(F,T) \widetilde{\lambda} (L,V) \subseteq (G,T) \widetilde{\lambda} (K,V)$ ve $(K,V) \widetilde{\lambda} (G,T) \subseteq (L,V) \widetilde{\lambda} (F,T)$.

İspat: $(F,T) \subseteq (G,T)$ ve $(K,V) \subseteq (L,V)$ olsun. Buradan, $\forall \omega \in T$ için, $F(\omega) \subseteq G(\omega)$ ve $\forall \omega \in V$ için $K(\omega) \subseteq L(\omega)$. Böylece $\forall \omega \in V$ için, $L'(\omega) \subseteq K'(\omega)$. $(F,T) \widetilde{\lambda} (L,V) = (Y,T)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in T$ için,

$$Y(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in T-V \\ F(\omega) \cup L'(\omega), & \omega \in T \cap V \end{cases}$$

$(G,T) \widetilde{\lambda} (K,V) = (W,T)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in T$ için,

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in T-V \\ G(\omega) \cup K'(\omega), & \omega \in T \cap V \end{cases}$$

$\forall \omega \in T-V$ için, $Y(\omega) = F(\omega) \subseteq G(\omega) = W(\omega)$; $\forall \omega \in T \cap V$ için, $Y(\omega) = F(\omega) \cup L'(\omega) \subseteq G(\omega) \cup K'(\omega) = W(\omega)$ olur. Böylece $(F,T) \widetilde{\lambda} (L,V) \subseteq (G,T) \widetilde{\lambda} (K,V)$. Aynı şartlar altında, $(K,V) \widetilde{\lambda} (G,T) \subseteq (L,V) \widetilde{\lambda} (F,T)$ olduğu da benzer şekilde gösterilir.

7.4. Teorem $(F,K), (G,Y), (H,D)$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, aşağıdaki gibi esnek ikili parçalı lamda işleminin diğer esnek küme işlemlere dağılması mevcuttur:

7.4.1. Teorem $(F,K), (G,Y), (H,D)$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, aşağıdaki gibi esnek ikili parçalı lamda işleminin kısıtlanmış işlemlere dağılması mevcuttur:

i) Esnek İkili Parçalı Lamda İşleminin Kısıtlanmış İşlemlere Soldan Dağılması:

Bu alt başlık altındaki eşitlikler, $K \cap Y \cap D = \emptyset$ için sağlanır.

$$1) (F, K) \tilde{\lambda} [(G, Y) \cap_R (H, D)] = [(F, K) \tilde{\lambda} (G, Y)] \cap_R [(F, K) \tilde{\lambda} (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, Y) \cap_R (H, D) = (M, Y \cap D)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y \cap D, M(\omega) = G(\omega) \cap H(\omega)$. $(F, K) \tilde{\lambda} (M, Y \cap D) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - (Y \cap D) \\ F(\omega) \cup M'(\omega), & \omega \in K \cap (Y \cap D) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - (Y \cap D) \\ F(\omega) \cup [G'(\omega) \cup H'(\omega)], & \omega \in K \cap (Y \cap D) \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $[(F, K) \tilde{\lambda} (G, Y)] \cap_R [(F, K) \tilde{\lambda} (H, D)]$. $(F, K) \tilde{\lambda} (G, Y) = (V, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(F, K) \tilde{\lambda} (H, D) = (W, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$W(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \cap_R (W, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = V(\omega) \cap W(\omega)$,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cap F(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap (K - D) \\ F(\omega) \cap [F(\omega) \cup H'(\omega)], & \omega \in (K - Y) \cap (K \cap D) \\ [F(\omega) \cup G'(\omega)] \cap F(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap (K - D) \\ [F(\omega) \cup G'(\omega)] \cap [F(\omega) \cup H'(\omega)], & \omega \in (K \cap Y) \cap (K \cap D) \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ F(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cup [G'(\omega) \cap H'(\omega)], & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

N fonksiyonun ilk satırındaki parametre kümesi dikkate alındığında $K - (Y \cap D) = K \cap (Y \cap D)'$ olup eğer $\omega \in (Y \cap D)'$ ise $\omega \in Y - D$ veya $\omega \in D - Y$ veya $\omega \in Y \cup D$ olarak düşünebiliriz.

Böylece, $\omega \in K - (Y \cap D)$ ise $\omega \in K \cap Y \cap D'$ veya $\omega \in K \cap Y' \cap D$ veya $\omega \in K \cap Y' \cap D'$. Böylece $K \cap Y \cap D = \emptyset$ için, $N=T$ olduğu görülür.

ii) Esnek İkili Parçalı Lamda İşleminin Kısıtlanmış İşlemlere Sağdan Dağılıması:

$$1)[(F,K) \cup_R (G,Y)]_{\lambda}^{\sim} (H,D) = [(F,K)_{\lambda}^{\sim} (H,D)] \cup_R [(G,Y)_{\lambda}^{\sim} (H,D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F,K) \cup_R (G,Y) = (M, K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için, $M(\omega) = F(\omega) \cup G(\omega)$. $(M, K \cap Y)_{\lambda}^{\sim} (H,D) = (N, K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için,

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D \\ M(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ [F(\omega) \cup G(\omega)] \cup H'(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $(F,K)_{\lambda}^{\sim} (H,D) = (V,K)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K$ için,

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G,Y)_{\lambda}^{\sim} (H,D) = (W,Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in Y$ için,

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ G(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V,K) \cup_R (W,Y) = (T, K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için, $T(\omega) = V(\omega) \cup W(\omega)$,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in (K - D) \cap (Y - D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cup [G(\omega) \cup H'(\omega)], & \omega \in (K - D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cup H'(\omega)] \cup G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y - D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cup H'(\omega)] \cup [G(\omega) \cup H'(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cup G(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece, $N=T$ olduğu görülür.

$$2)[(F,K) \cap_R (G,Y)]_{\tilde{\lambda}}(H,D) = [(F,K)_{\tilde{\lambda}}(H,D)] \cap_R [(G,Y)_{\tilde{\lambda}}(H,D)].$$

7.4.1.1. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cup_R)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_E$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani bir yarı-latis (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 7.3.1* de $(S_E(U), \tilde{\lambda})$ cebirsel yapısının, (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 7.4.1 (ii) (1) başlığında, $\tilde{\lambda}$ işleminin $\cup_R$ işlemine sağdan dağıldığı gösterilmiştir. *Sonuç* olarak, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cup_R, \tilde{\lambda})$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir (sağ) yakın yarı-halkadır.

7.4.1.2. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cap_R)$ cebirsel yapısının birimi U_E olan komutatif, idempotent bir monoid yani bir yarı-latis (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 7.3.1* de $(S_E(U), \tilde{\lambda})$ cebirsel yapısının, (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, üstelik Teorem 7.3.1. (14) da, $U_E \tilde{\lambda} (F,T) = U_E$, yani U_E nin $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{\lambda}$ işlemine göre sol yutan eleman olduğu, Teorem 7.4.1 (ii) (2) başlığında, $\tilde{\lambda}$ işleminin $\cap_R$ işlemine sağdan dağıldığı gösterilmiştir. *Sonuç* olarak, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cap_R, \tilde{\lambda})$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halkadır. Ayrıca, $(F,K)_{\tilde{\lambda}} U_E \neq U_E$ olduğundan, $(S_E(U), \cup_E, \tilde{\lambda})$ sıfır simetrik olmayan bir (sağ) yakın yarı-halkadır.

7.4.1.3. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cap_R)$ cebirsel yapısının birimi U_E olan komutatif, idempotent bir monoid yani bir yarı-latis (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu

göstermişti. *Sonuç 7.3.1.* de $(S_E(U), \tilde{\lambda})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 7.4.1 (i) (1) başlığında, $\tilde{\lambda}$ işleminin $\cap_R$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı; Teorem 7.4.1 (ii) (2) başlığında, $\tilde{\lambda}$ işleminin $\cap_R$ işlemine soldan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cap_R, \tilde{\lambda})$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz sıfırsız bir yarı-halkadır

7.4.2. Teorem (F, K) , (G, Y) , (H, D) , U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, aşağıdaki gibi esnek ikili parçalı lamda işleminin genişletilmiş işlemlere dağılması mevcuttur:

i) Esnek İkili Parçalı Lamda İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Soldan Dağılması:

Bu alt başlık altındaki eşitlikler $K \cap Y \cap D = \emptyset$ ise sağlanır.

$$1) (F, K) \tilde{\lambda} [(G, Y) \cup_{\varepsilon} (H, D)] = [(F, K) \tilde{\lambda} (G, Y)] \cup_{\varepsilon} [(F, K) \tilde{\lambda} (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, Y) \cup_{\varepsilon} (H, D) = (M, Y \cup D)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y \cup D$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ H(\omega), & \omega \in D - Y \\ G(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(F, K) \tilde{\lambda} (M, Y \cup D) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - (Y \cup D) \\ F(\omega) \cup M'(\omega), & \omega \in K \cap (Y \cup D) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - (Y \cup D) = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in K \cap (Y - D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap (D - Y) = K \cap Y' \cap D \\ F(\omega) \cup [(G'(\omega) \cap H'(\omega))], & \omega \in K \cap Y \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım: $[(F,K) \tilde{\lambda} (G,Y)] \cup_{\varepsilon} [(F,K) \tilde{\lambda} (H,D)]$.

$(F,K) \tilde{\lambda} (G,Y) = (V,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ F(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(F,K) \tilde{\lambda} (H,D) = (W,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-D \\ F(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(V,K) \cup_{\varepsilon} (W,K) = (T,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K-K=\emptyset \\ W(\omega), & \omega \in K-K=\emptyset \\ V(\omega) \cap W(\omega), & \omega \in K \cap K=K \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cup F(\omega), & \omega \in (K-Y) \cap (K-D) = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cup [F(\omega) \cup H'(\omega)], & \omega \in (K-Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y' \cap D \\ [F(\omega) \cup G'(\omega)] \cup F(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap (K-D) = K \cap Y \cap D' \\ [F(\omega) \cup G'(\omega)] \cup [F(\omega) \cup H'(\omega)], & \omega \in (K \cap Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-Y) \cap (K-D) = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in (K-Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y' \cap D \\ F(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap (K-D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cup G'(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

$K \cap Y \cap D = \emptyset$ için $N=T$ olduğu görülür.

$$2) (F,K) \tilde{\lambda} [(G,Y) \cap_{\varepsilon} (H,D)] = [(F,K) \tilde{\lambda} (G,Y)] \cap_{\varepsilon} [(F,K) \tilde{\lambda} (H,D)].$$

ii) Esnek İkili Parçalı Lamda İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Sağdan Dağılıması:

$$1) [(F,K) \cap_{\varepsilon} (G,Y)] \tilde{\lambda} (H,D) = [(F,K) \tilde{\lambda} (H,D)] \cap_{\varepsilon} [(G,Y) \tilde{\lambda} (H,D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, K) \cap_{\varepsilon} (G, Y) = (M, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ G(\omega), & \omega \in Y - K \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(M, K \cup Y) \overset{\sim}{\lambda} (H, D) = (N, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in (K \cup Y) - D \\ M(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in (K \cup Y) \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K - Y) - D = K \cap Y' \cap D' \\ G(\omega), & \omega \in (Y - K) - D = K' \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap D = K \cap Y' \cap D \\ G(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in (Y - K) \cap D = K' \cap Y \cap D \\ [F(\omega) \cap G(\omega)] \cup H'(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F, K) \overset{\sim}{\lambda} (H, D)] \cap_{\varepsilon} [(G, Y) \overset{\sim}{\lambda} (H, D)]$. $(F, K) \overset{\sim}{\lambda} (H, D) = (V, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G, Y) \overset{\sim}{\lambda} (H, D) = (W, Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ G(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \cap_{\varepsilon} (W, Y) = (T, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K - Y \\ W(\omega), & \omega \in Y - K \\ V(\omega) \cap W(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-D) - Y = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in (K \cap D) - Y = K \cap Y' \cap D \\ G(\omega), & \omega \in (Y-D) - K = K' \cap Y \cap D' \\ G(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in (Y \cap D) - K = K' \cap Y \cap D \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K-D) \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap [G(\omega) \cup H'(\omega)], & \omega \in (K-D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cup H'(\omega)] \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y-D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cup H'(\omega)] \cap [G(\omega) \cup H'(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ G(\omega), & \omega \in K' \cap Y \cap D' \\ G(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K' \cap Y \cap D \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ [F(\omega) \cap G(\omega)] \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece $N=T$ olduğu görülür.

Aşağıda yer alan eşitlikler de $K \cap Y \cap D = \emptyset$ için sağlanır. İspatlar benzer şekilde yapıldığı için, ispatsız şekilde verilmiştir.

$$2) [(F,K) \cup_{\varepsilon} (G,Y)]_{\tilde{\lambda}}(H,D) = [(F,K)_{\tilde{\lambda}}(H,D)] \cup_{\varepsilon} [(G,Y)_{\tilde{\lambda}}(H,D)].$$

$$3) [(F,K) \setminus_{\varepsilon} (G,Y)]_{\tilde{\lambda}}(H,D) = [(F,K)_{\tilde{\lambda}}(H,D)] \setminus_{\varepsilon} [(G,Y)_{\tilde{\lambda}}(H,D)].$$

$$4) [(F,K) \Delta_{\varepsilon} (G,Y)]_{\tilde{\lambda}}(H,D) = [(F,K)_{\tilde{\lambda}}(H,D)] \Delta_{\varepsilon} [(G,Y)_{\tilde{\lambda}}(H,D)].$$

$$5) [(F,K) +_{\varepsilon} (G,Y)]_{\tilde{\lambda}}(H,D) = [(F,K)_{\tilde{\lambda}}(H,D)] +_{\varepsilon} [(G,Y)_{\tilde{\lambda}}(H,D)].$$

$$6) [(F,K) \gamma_{\varepsilon} (G,Y)]_{\tilde{\lambda}}(H,D) = [(F,K)_{\tilde{\lambda}}(H,D)] \gamma_{\varepsilon} [(G,Y)_{\tilde{\lambda}}(H,D)].$$

$$7) [(F,K) *_{\varepsilon} (G,Y)]_{\tilde{\lambda}}(H,D) = [(F,K)_{\tilde{\lambda}}(H,D)] *_{\varepsilon} [(G,Y)_{\tilde{\lambda}}(H,D)].$$

$$8) [(F,K) \theta_\varepsilon(G,Y)]_{\tilde{\lambda}}(H,D)=[(F,K)_{\tilde{\lambda}}(H,D)]\theta_\varepsilon[(G,Y)_{\tilde{\lambda}}(H,D)].$$

7.4.2.1. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cup_\varepsilon)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_\emptyset$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani bir yarı-latis (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 7.3.1* de $(S_E(U), \tilde{\lambda})$ cebirsel yapısının, (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, üstelik Teorem 7.3 (10) da, $\emptyset_\emptyset \tilde{\lambda}(F,T) = \emptyset_\emptyset$, yani $\emptyset_\emptyset$ nin $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{\lambda}$ işlemi altında, sol yutan eleman olduğu ve Teorem 7.4.2 (ii) (2) başlığında, $\tilde{\lambda}$ işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \tilde{\lambda})$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halkadır. Ayrıca, $(F,K)_{\tilde{\lambda}} \emptyset_\emptyset \neq \emptyset_\emptyset$ olduğundan, $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \tilde{\lambda})$ sıfır simetrik olmayan bir (sağ) yakın yarı-halkadır. Benzer şekilde $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \tilde{\lambda})$ cebirsel yapısının da sıfır simetrik olmayan, komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halka olduğu gösterilebilir. Yine, $(S_E(U), \setminus_\varepsilon, \tilde{\lambda})$, $(S_E(U), \Delta_\varepsilon, \tilde{\lambda})$, $(S_E(U), +_\varepsilon, \tilde{\lambda})$, $(S_E(U), \gamma_\varepsilon, \tilde{\lambda})$, $(S_E(U), \lambda_\varepsilon, \tilde{\lambda})$, $(S_E(U), *_\varepsilon, \tilde{\lambda})$, $(S_E(U), \theta_\varepsilon, \tilde{\lambda})$ cebirsel yapılarının da aynı şartlar altında komutatif, sıfır simetrik ve idempotent olmayan, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halka olduğu gösterilebilir. Buradaki, ilk işlemlerin $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında (Δ_ε işlemi şartsız bir şekilde) birleşmeli olduğu, Aybek (2023) tarafından gösterilmiştir.

7.4.2.2. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cup_\varepsilon)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_\emptyset$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani bir yarı-latis (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 7.3.1* de $(S_E(U), \tilde{\lambda})$ cebirsel yapısının, (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 7.4.2 (i) (1) başlığında, $\tilde{\lambda}$ işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında soldan dağıldığı, Teorem 7.4.2 (ii) (2) başlığında, $\tilde{\lambda}$ işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$

şartları altında, $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \tilde{\lambda})$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halkadır.

7.4.2.3. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cap_\varepsilon)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_\emptyset$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani bir yarı-latis olduğunu göstermişti. *Sonuç 7.3.1* de $(S_E(U), \tilde{\lambda})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 7.4.2 (i) (2) başlığında, $\tilde{\lambda}$ işleminin $\cap_\varepsilon$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında soldan dağıldığı, Teorem 7.4.2 (ii) (1) başlığında, $\tilde{\lambda}$ işleminin $\cap_\varepsilon$ işlemine sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \tilde{\lambda})$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halkadır.

7.4.3. Teorem (F, K) , (G, Y) , (H, D) , U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, aşağıdaki gibi esnek ikili parçalı lamda işleminin esnek ikili parçalı işlemlere dağılması mevcuttur:

$$1) [(F, K) \tilde{\cap} (G, Y)] \tilde{\lambda} (H, D) = [(F, K) \tilde{\lambda} (H, D)] \tilde{\cap} [(G, Y) \tilde{\lambda} (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, K) \tilde{\cap} (G, Y) = (M, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(M, K) \tilde{\lambda} (H, D) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in K - D \\ M(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-Y)-D = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap Y)-D = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in (K-Y) \cap D = K \cap Y' \cap D \\ [F(\omega) \cap G(\omega)] \cup H'(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $[(F,K) \overset{\sim}{\lambda} (H,D)] \overset{\sim}{\cap} [(G,Y) \overset{\sim}{\lambda} (H,D)]$. $(F,K) \overset{\sim}{\lambda} (H,D) = (V,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-D \\ F(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G,Y) \overset{\sim}{\lambda} (H,D) = (W,Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y-D \\ G(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V,K) \overset{\sim}{\cap} (W,Y) = (T,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K-Y \\ V(\omega) \cap W(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-D)-Y = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in (K \cap D)-Y = K \cap Y' \cap D \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K-D) \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap [G(\omega) \cup H'(\omega)], & \omega \in (K-D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cup H'(\omega)] \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y-D) = \emptyset \\ [F(\omega) \cup H'(\omega)] \cap [G(\omega) \cup H'(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ [F(\omega) \cap G(\omega)] \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece, $N=T$ olduğu görülür.

Aşağıda yer alan eşitlikler de $K \cap Y \cap D = \emptyset$ şartı altında sağlanır. İspatlar benzer şekilde yapıldığı için, ispatsız şekilde verilmiştir.

$$2) [(F, K) \cup (G, Y)]_{\lambda} (H, D) = [(F, K)_{\lambda} (H, D)] \cup [(G, Y)_{\lambda} (H, D)].$$

$$3) [(F, K) \setminus (G, Y)]_{\lambda} (H, D) = [(F, K)_{\lambda} (H, D)] \setminus [(G, Y)_{\lambda} (H, D)].$$

$$4) [(F, K) \Delta (G, Y)]_{\lambda} (H, D) = [(F, K)_{\lambda} (H, D)] \Delta [(G, Y)_{\lambda} (H, D)].$$

$$5) [(F, K) + (G, Y)]_{\lambda} (H, D) = [(F, K)_{\lambda} (H, D)] + [(G, Y)_{\lambda} (H, D)].$$

$$6) [(F, K) \gamma (G, Y)]_{\lambda} (H, D) = [(F, K)_{\lambda} (H, D)] \gamma [(G, Y)_{\lambda} (H, D)].$$

$$7) [(F, K) * (G, Y)]_{\lambda} (H, D) = [(F, K)_{\lambda} (H, D)] * [(G, Y)_{\lambda} (H, D)].$$

$$8) [(F, K) \theta (G, Y)]_{\lambda} (H, D) = [(F, K)_{\lambda} (H, D)] \theta [(G, Y)_{\lambda} (H, D)].$$

$$9) [(F, K) \tilde{\lambda} (G, Y)]_{\lambda} (H, D) = [(F, K)_{\lambda} (H, D)] \tilde{\lambda} [(G, Y)_{\lambda} (H, D)].$$

7.4.3.1. Sonuç Bu tezimizde, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \tilde{\cap})$ cebirsel yapısının komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup yani bir band olduğu gösterildi. *Sonuç 7.3.1* de $(S_E(U), \tilde{\lambda})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 7.4.3 (1) başlığında, $\tilde{\lambda}$ işleminin $\tilde{\cap}$ işlemine sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \tilde{\cap}, \tilde{\lambda})$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir (sağ) yakın yarı-halkadır.

7.4.3.2. *Sonuç* Bu tezimizde, (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \tilde{\cup})$ cebirsel yapısının komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup olduğu gösterildi. *Sonuç 7.3.1* de $(S_E(U), \tilde{\lambda})$ cebirsel yapısının, (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 7.4.3 (2) başlığında, $\tilde{\lambda}$ işleminin $\tilde{\cup}$ işlemine sağdan dağıldığı gösterilmiştir. *Sonuç* olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \tilde{\cup}, \tilde{\lambda})$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir (sağ) yakın yarı-halkadır.

7.4.3.3. *Sonuç* (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında, $(S_E(U), \tilde{\setminus}, \tilde{\lambda})$, $(S_E(U), \tilde{\Delta}, \tilde{\lambda})$, $(S_E(U), \tilde{+}, \tilde{\lambda})$, $(S_E(U), \tilde{\gamma}, \tilde{\lambda})$, $(S_E(U), \tilde{*}, \tilde{\lambda})$, $(S_E(U), \tilde{\theta}, \tilde{\lambda})$ cebirsel yapılarının, komutatif ve idempotent olmayan, birimsiz ve sıfırsız bir (sağ) yakın yarı-halka olduğu gösterilebilir. Buradaki, ilk işlemlerin $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında ($\tilde{\Delta}$ işlemi $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında) birleşmeli olduğu, bu tezin ilerleyen kısımlarında gösterilmiştir.

8. ESNEK İKİLİ PARÇALI YILDIZ İŞLEMİ

Bu bölümde, esnek ikili parçalı yıldız adı verilen yeni esnek küme işlemi tanıtılmış, örneği verilmiş, işlemin cebirsel özellikleri ile diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkisine bakılarak dağılma kuralları ve $S_E(U)$ kümesi üzerinde bu işlemin hangi cebirsel yapıları oluşturduğu incelenmiş ve çok önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Tanım 8.1. (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde tanımlı iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin $(F, K) \widetilde{*} (G, Y)$ ile gösterilen esnek ikili parçalı yıldız işlemi $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

olmak üzere $(F, K) \widetilde{*} (G, Y) = (H, K)$ ile tanımlanır.

8.2. *Örnek* $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesi, $K = \{e_1, e_4\}$, $Y = \{e_2, e_3, e_4\}$ E 'nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evrensel küme, (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde $(F, K) = \{(e_1, \{h_2, h_4, h_6\}), (e_4, \{h_1, h_2, h_5, h_6\})\}$, $(G, Y) = \{(e_2, \{h_1, h_2\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4, h_5\}), (e_4, \{h_2, h_3, h_4\})\}$ olarak tanımlanan iki esnek küme olsun. $(F, K) \widetilde{*} (G, Y) = (H, K)$ olmak üzere,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Burada, $K = \{e_1, e_4\}$, $K - Y = \{e_1\}$ olmak üzere, $\forall \omega \in K - Y = \{e_1\}$ için, $H(\omega) = F(\omega)$ olup, $H(e_1) = F(e_1) = \{h_2, h_4, h_6\}$, $\forall \omega \in K \cap Y = \{e_4\}$ için, $H(\omega) = F'(\omega) \cup G'(\omega)$ olup, $H(e_4) = F'(e_4) \cup G'(e_4) = \{h_3, h_4\} \cup \{h_1, h_5, h_6\} = \{h_1, h_3, h_4, h_5, h_6\}$. Böylece, $(F, K) \widetilde{*} (G, Y) = \{(e_1, \{h_2, h_4, h_6\}), (e_4, \{h_1, h_3, h_4, h_5, h_6\})\}$.

8.3. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1) $\widetilde{*}$, $S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: $\sim_*$ 'nın $S_E(U)$ üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$\begin{aligned} \sim_* : S_E(U) \times S_E(U) &\rightarrow S_E(U) \\ ((F,K), (G,Y)) &\rightarrow (F,K) \sim_* (G,Y) = (H,K) \end{aligned}$$

olup, (F,K) ve (G,Y) , U üzerinde iki esnek küme olduğunda $(F,T) \sim_* (G,Y)$ de, U üzerinde bir esnek kümedir. $K \subseteq E$ sabit bir parametre kümesi olmak üzere, $\sim_*$ 'nın $S_K(U)$ üzerinde de bir ikili işlem olduğu açıktır.

$$2) K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D = \emptyset \text{ ise } [(F,K) \sim_* (G,Y)] \sim_* (H,D) = (F,K) \sim_* [(G,Y) \sim_* (H,D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F,K) \sim_* (G,Y) = (T,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(T,K) \sim_* (H,D) = (M,K)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in K - D \\ T'(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K - Y) - D = K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap D = K \cap Y' \cap D \\ [F(\omega) \cap G(\omega)] \cup H'(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

$(G,Y) \sim_* (H,D) = (K,Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$K(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ G'(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(F,K) \sim_* (K,Y) = (S,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$S(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ F'(\omega) \cup K'(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Böylece,

$$S(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ F'(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in K \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cup [G(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in K \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

S fonksiyonundaki, K-Y ye bakacak olursak, $K-Y = K \cap Y'$ olup, eğer $\omega \in Y'$ ise $\omega \in D-Y$ veya $\omega \in (Y \cup D)'$. Buradan $\omega \in K-Y$ ise $\omega \in K \cap Y' \cap D'$ ve $\omega \in K \cap Y' \cap D$ olur. Böylece, $K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D = \emptyset$ için $M=S$ olur. Yani uygun koşullar altında, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\sim_*$ işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

$$3) [(F, K) \sim_*(G, K)] \sim_*(H, K) \neq (F, K) \sim_* [(G, K) \sim_*(H, K)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F, K) \sim_*(G, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-K = \emptyset \\ F'(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$(T, K) \sim_*(H, K) = (M, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in K-K = \emptyset \\ T'(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece,

$$M(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in K-K = \emptyset \\ [F(\omega) \cap G(\omega)] \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına bakalım. $(G, K) \sim_*(H, K) = (L, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$L(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in K-K = \emptyset \\ G'(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$(F, K) \sim_* (L, K) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cup L'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cup [G(\omega) \cap H(\omega)], & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan $M \neq N$ olduğu görülür. Yani $S_K(U)$ kümesi üzerinde (parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler üzerinde), $\sim_*$ işleminin birleşme özelliği yoktur.

$$4) (F, K) \sim_* (G, Y) \neq (G, Y) \sim_* (F, K).$$

İspat: $(F, K) \sim_* (G, Y) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(G, Y) \sim_* (F, K) = (T, Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - K \\ G'(\omega) \cup F'(\omega), & \omega \in Y \cap K \end{cases}$$

Burada, sol taraftaki esnek kümenin parametre kümesi K ; sağ taraftaki esnek kümenin parametre kümesi Y dir. Böylece esnek kümelerin eşitliği tanımı gereği;

$$(F, K) \sim_* (G, Y) \neq (G, Y) \sim_* (F, K).$$

Fakat $(F, K) \sim_* (G, K) = (G, K) \sim_* (F, K)$ olduğu açıktır. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\sim_*$ işlemi, değişme özelliğine sahip değilken, $K \subseteq E$ sabit bir paramere kümesi olmak üzere $S_K(U)$ kümesi üzerinde $\sim_*$ işlemi değişme özelliğine sahiptir.

8.3.1. *Sonuç* Teorem 8.3 (1), (2) ve (4) den, (F,K) , (G,Y) ve (H,D) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \tilde{*})$ komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgruptur.

$K \subseteq E$ sabir bir parametre kümesi olmak üzere, $(S_K(U), \tilde{*})$ cebirsel yapısı Teorem 8.3 (3) den, birleşme özelliğine sahip olmadığı için yarıgrup olamaz; fakat bu yapının komutatif bir grupoid olduğu açıktır.

$$5) (F, K) \tilde{*} (F, K) = (F, K)^r.$$

İspat: $(F, K) \tilde{*} (F, K) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cup F'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Burada, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F'(\omega) \cup F'(\omega) = F'(\omega)$, böylece $(H, K) = (F, K)^r$. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{*}$ işlemi, denk güçlülük özelliğine sahip değildir.

$$6) (F, K) \tilde{*} \emptyset_K = \emptyset_K \tilde{*} (F, K) = U_K.$$

İspat: $\emptyset_K = (S, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için; $S(\omega) = \emptyset$. $(F, K) \tilde{*} (S, K) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cup S'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F'(\omega) \cup S'(\omega) = F'(\omega) \cup U = U$. Buradan $(H, K) = U_K$.

$$7) (F, K) \tilde{*} \emptyset_E = U_K.$$

İspat: $\emptyset_E = (S, E)$ olsun. Burada $\forall \omega \in E$; $S(\omega) = \emptyset$. $(F, K) \tilde{*} (S, E) = (H, K)$. Böylece, $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - E = \emptyset \\ F'(\omega) \cup S'(\omega), & \omega \in K \cap E = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için; $H(\omega) = F'(\omega) \cup S'(\omega) = F'(\omega) \cup U = U$ olur ve böylece $(H, K) = U_K$.

$$8) (F, K) \underset{*}{\sim} \emptyset_\emptyset = (F, K).$$

İspat: $\emptyset_\emptyset = (S, \emptyset)$ ve $(F, K) \underset{*}{\sim} (S, \emptyset) = (H, K)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - \emptyset = K \\ F'(\omega) \cup S'(\omega), & \omega \in K \cap \emptyset = \emptyset \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için; $H(\omega) = F(\omega)$ olup, $(H, K) = (F, K)$. $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\underset{*}{\sim}$ işleminin sağ birim elemanı $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir.

$$9) \emptyset_\emptyset \underset{*}{\sim} (F, K) = \emptyset_\emptyset.$$

İspat: $\emptyset_\emptyset = (S, \emptyset)$ ve $(S, \emptyset) \underset{*}{\sim} (F, K) = (H, \emptyset)$ olsun. $\emptyset_\emptyset$, parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme olduğu için, $(H, \emptyset) = \emptyset_\emptyset$ olur.

Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\underset{*}{\sim}$ işlemi için, her elemanın sağ birim eleman olan $\emptyset_\emptyset$ ye göre sol tersi, $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir. Ayrıca, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\underset{*}{\sim}$ işleminin sol yutan elemanı $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir.

8.3.2. *Sonuç* Teorem 8.3 (1), (2), (8) ve (9) dan, (F, K) , (G, Y) ve (H, D) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \underset{*}{\sim})$ cebirsel yapısı, sağ birimi $\emptyset_\emptyset$, her elemanın sol tersi $\emptyset_\emptyset$ olan idempotent olmayan bir sol-sağ sistemdir.

$$10) (F, K) \underset{*}{\sim} U_K = U_K \underset{*}{\sim} (F, K) = (F, K)^r.$$

İspat: $U_K = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = U$. $(F, K) \underset{*}{\sim} (T, K) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cup T'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için; $H(\omega) = F'(\omega) \cup T'(\omega) = F'(\omega) \cup \emptyset = F'(\omega)$ olur ve böylece $(H, K) = (F, K)^r$.

$$11) (F, K) \overset{\sim}{*} U_E = (F, K)^r.$$

İspat: $U_E = (T, E)$ olsun. Burada $\forall \omega \in E$ için, $T(\omega) = U$. $(F, K) \overset{\sim}{*} (T, E) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için ;

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - E = \emptyset \\ F'(\omega) \cup T'(\omega), & \omega \in K \cap E = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F'(\omega) \cup T'(\omega) = F'(\omega) \cup \emptyset = F'(\omega)$ olur. $(H, K) = (F, K)^r$.

$$12) (F, K) \overset{\sim}{*} (F, K)^r = (F, K)^r \overset{\sim}{*} (F, K) = U_K.$$

İspat: $(F, K)^r = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F'(\omega)$. $(F, K) \overset{\sim}{*} (H, K) = (T, K)$ olsun.

Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = F'(\omega) \cup H'(\omega) = F'(\omega) \cup F(\omega) = U$ olur. Burada $(T, K) = U_K$.

$$13) [(F, K) \overset{\sim}{*} (G, Y)]^r = (F, K) \overset{*}{\cap} (G, Y).$$

İspat: $(F, K) \overset{\sim}{*} (G, Y) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(H, K)^r = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$T(\omega) = \begin{cases} F'(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Böylece, $(T, K) = (F, K) \underset{\cap}{*} (G, Y)$.

$$14) (F, K) \underset{*}{\sim} (G, K) = \emptyset_K \Leftrightarrow (F, K) = (G, K) = U_K.$$

İspat: $(F, K) \underset{*}{\sim} (G, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$(T, K) = \emptyset_K$ olduğundan, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = \emptyset$. Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = F'(\omega) \cup G'(\omega) = \emptyset \Leftrightarrow \forall \omega \in K$ için, $F'(\omega) = \emptyset$ ve $G'(\omega) = \emptyset \Leftrightarrow \forall \omega \in K$ için, $F(\omega) = U$ ve $G(\omega) = U \Leftrightarrow (F, K) = (G, K) = U_K$.

$$15) \emptyset_K \cong (F, K) \underset{*}{\sim} (G, Y) \text{ ve } \emptyset_Y \cong (G, Y) \underset{*}{\sim} (F, K).$$

$$16) (F, K) \underset{*}{\sim} (G, Y) \cong U_K \text{ ve } (G, Y) \underset{*}{\sim} (F, K) \cong U_Y.$$

$$17) (F, K)^r \cong (F, K) \underset{*}{\sim} (G, K) \text{ ve } (G, K)^r \cong (F, K) \underset{*}{\sim} (G, K).$$

İspat: $(F, K) \underset{*}{\sim} (G, K) = (H, K)$. Öncelikle, $K \subseteq K$ olur. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$\forall \omega \in K; H(\omega) = F'(\omega) \subseteq F'(\omega) \cup G'(\omega), (F, K)^r \cong (F, K) \underset{*}{\sim} (G, K). (G, K)^r \cong (F, K) \underset{*}{\sim} (G, K)$ benzer şekilde gösterilebilir.

$$18) (F, K) \cong (G, Y) \text{ ise } (F, K) \underset{*}{\sim} (G, Y) = (F, K)^r.$$

İspat: $(F,K) \tilde{\subseteq} (G,Y)$ ise $K \subseteq Y$ ve her $\omega \in K$ için, $F(\omega) \subseteq G(\omega)$. $(F,K) \tilde{*} (G,Y) = (H,K)$ olsun.

Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y = \emptyset \\ F'(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in K \cap Y = K \end{cases}$$

$F(\omega) \subseteq G(\omega)$ ise $G'(\omega) \subseteq F'(\omega)$. Böylece, $\forall \omega \in K$; $H(\omega) = F'(\omega) \cup G'(\omega) = F'(\omega)$. Buradan, $(F,K) \tilde{*} (G,Y) = (F,K)^r$.

19) $(F,K) \tilde{\subseteq} (G,K)$ ise $(H,Z) \tilde{*} (G,K) \tilde{\subseteq} (H,Z) \tilde{*} (F,K)$ ve $(G,K) \tilde{*} (H,K) \tilde{\subseteq} (F,K) \tilde{*} (H,K)$.

İspat: $(F,K) \tilde{\subseteq} (G,K)$ olsun. Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $F(\omega) \subseteq G(\omega)$ ve böylece $\forall \omega \in K$ için, $G'(\omega) \subseteq F'(\omega)$ olur. $(H,Z) \tilde{*} (G,K) = (W,Z)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in Z$ için,

$$W(\omega) = \begin{cases} H(\omega), & \omega \in Z - K \\ H'(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in Z \cap K \end{cases}$$

$(H,Z) \tilde{*} (F,K) = (L,Z)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in Z$ için

$$L(\omega) = \begin{cases} H(\omega), & \omega \in Z - K \\ H'(\omega) \cup F'(\omega), & \omega \in Z \cap K \end{cases}$$

$\forall \omega \in Z - K$ için, $W(\omega) = H(\omega) \subseteq H(\omega) = L(\omega)$, $\forall \omega \in Z \cap K$ için $W(\omega) = H'(\omega) \cup G'(\omega) \subseteq H'(\omega) \cup F'(\omega) = L(\omega)$ olup, $(H,Z) \tilde{*} (G,K) \tilde{\subseteq} (H,Z) \tilde{*} (F,K)$. Ayrıca, her $\omega \in K$ için, $G'(\omega) \cup H'(\omega) \subseteq F'(\omega) \cup H'(\omega)$ olup, $(G,K) \tilde{*} (H,K) \tilde{\subseteq} (F,K) \tilde{*} (H,K)$.

20) $(H,Z) \tilde{*} (G,K) \tilde{\subseteq} (H,Z) \tilde{*} (F,K)$ ise $(F,K) \tilde{\subseteq} (G,K)$ olmak zorunda değildir. Benzer şekilde, $(G,K) \tilde{*} (H,K) \tilde{\subseteq} (F,K) \tilde{*} (H,K)$ ise $(F,K) \tilde{\subseteq} (G,K)$ olmak zorunda değildir. Yani Teorem 8.3 (19) nın tersi doğru değildir.

İspat: Teorem 8.3 (19) un tersi doğru olmadığını göstermek için bir örnek verelim. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi, $K = \{e_1, e_3\}$ ve $Z = \{e_1, e_3, e_5\}$ E'nin iki alt kümesi,

$U = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 \}$ evrensel küme, (F, K) , (G, K) ve (H, Z) , U üzerinde $(F, K) = \{ (e_1, \{ h_2, h_5 \}), (e_3, \{ h_1, h_2, h_5 \}) \}$, $(G, K) = \{ (e_1, \{ h_2 \}), (e_3, \{ h_1, h_2 \}) \}$, $(H, Z) = \{ (e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset), (e_5, \{ h_2, h_5 \}) \}$ olarak tanımlanan esnek kümeler olsun.

$(H, Z) \widetilde{*} (G, K) = (L, Z)$ olmak üzere $\forall \omega \in Z - K = \{ e_5 \}$ için, $L(e_5) = H(e_5) = \{ h_2, h_5 \}$; $\forall \omega \in Z \cap K = \{ e_1, e_3 \}$ için, $L(e_1) = H'(e_1) \cup G'(e_1) = U$, $L(e_3) = H'(e_3) \cup G'(e_3) = U$. Buradan, $(H, Z) \widetilde{*} (G, K) = \{ (e_1, U), (e_3, U), (e_5, \{ h_2, h_5 \}) \}$.

Şimdi de, $(H, Z) \widetilde{*} (F, K) = (W, Z)$ olmak üzere $\forall \omega \in Z - K = \{ e_5 \}$ için, $W(e_5) = H(e_5) = \{ h_2, h_5 \}$; $\forall \omega \in Z \cap K = \{ e_1, e_3 \}$ için, $W(e_1) = H'(e_1) \cup F'(e_1) = U$, $W(e_3) = H'(e_3) \cup F'(e_3) = U$. Böylece $(H, Z) \widetilde{*} (F, K) = \{ (e_1, U), (e_3, U), (e_5, \{ h_2, h_5 \}) \}$.

Buradan, $(H, Z) \widetilde{*} (G, K) \cong (H, Z) \widetilde{*} (F, K)$; fakat $(F, K) \cong (G, K)$ olmadığı açıktır. $(G, K) \widetilde{*} (H, K) \cong (F, K) \widetilde{*} (H, K)$ ise $(F, K) \cong (G, K)$ olmak zorunda olmadığı, aynı örnek üzerinde $(H, K) = \{ (e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset) \}$ alınarak gösterilebilir.

21) $(F, T) \cong (G, T)$ ve $(K, T) \cong (L, T)$ ise $(G, T) \widetilde{*} (L, T) \cong (F, T) \widetilde{*} (K, T)$.

İspat: $(F, T) \cong (G, T)$ ve $(K, T) \cong (L, T)$ olsun. Buradan, $\forall \omega \in T$ için, $F(\omega) \subseteq G(\omega)$ ve $K(\omega) \subseteq L(\omega)$. Böylece $\forall \omega \in T$ için, $G'(\omega) \subseteq F'(\omega)$ ve $L'(\omega) \subseteq K'(\omega)$. $(G, T) \widetilde{*} (L, T) = (M, T)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in T$ için, $M(\omega) = G'(\omega) \cup L'(\omega)$. $(F, T) \widetilde{*} (K, T) = (N, T)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in T$ için, $N(\omega) = F'(\omega) \cup K'(\omega)$. $\forall \omega \in T$ için, $G'(\omega) \subseteq F'(\omega)$ ve $L'(\omega) \subseteq K'(\omega)$ olduğundan, $M(\omega) = G'(\omega) \cup L'(\omega) \subseteq F'(\omega) \cup K'(\omega) = N(\omega)$ olur. Böylece, $(G, T) \widetilde{*} (L, T) \cong (F, T) \widetilde{*} (K, T)$

8.4. Teorem (F, K) , (G, Y) , (H, D) , U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, aşağıdaki gibi esnek ikili parçalı yıldız işleminin diğer esnek küme işlemlere dağılması mevcuttur:

8.4.1. Teorem (F, K) , (G, Y) , (H, D) , U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, aşağıdaki gibi esnek ikili parçalı yıldız işleminin kısıtlanmış işlemlere dağılması mevcuttur. Bu alt başlık altındaki eşitlikler, $K \cap Y \cap D = \emptyset$ için sağlanır.

$$1)[(F,K) \cup_R (G,Y)] \tilde{*} (H,D) = [(F,K) \tilde{*} (H,D)] \cup_R [(G,Y) \tilde{*} (H,D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F,K) \cup_R (G,Y) = (M,K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için, $M(\omega) = F(\omega) \cup G(\omega)$. $(M,K \cap Y) \tilde{*} (H,D) = (N,K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için,

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D \\ M'(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D^c \\ [F'(\omega) \cap G'(\omega)] \cup H'(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $[(F,K) \tilde{*} (H,D)] \cup_R [(G,Y) \tilde{*} (H,D)]$.

$(F,K) \tilde{*} (H,D) = (V,K)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K$ için,

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F'(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G,Y) \tilde{*} (H,D) = (W,Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in Y$ için,

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ G'(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V,K) \cup_R (W,Y) = (T,K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için, $T(\omega) = V(\omega) \cup W(\omega)$,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in (K - D) \cap (Y - D) = K \cap Y \cap D^c \\ F(\omega) \cup [G'(\omega) \cup H'(\omega)], & \omega \in (K - D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cup H'(\omega)] \cup G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y - D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cup H'(\omega)] \cup [G'(\omega) \cup H'(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D^c \\ [F'(\omega) \cup H'(\omega)] \cup [G'(\omega) \cup H'(\omega)], & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece $K \cap Y \cap D = \emptyset$ için $N=T$ olduğu görülür.

$$2)[(F,K) \cap_R (G,Y)] \widetilde{*_\epsilon} (H,D) = [(F,K) \widetilde{*_\epsilon} (H,D)] \cap_R [(G,Y) \widetilde{*_\epsilon} (H,D)].$$

8.4.1.1. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cup_R)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_E$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-latis (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 8.3.1* de $(S_E(U), \widetilde{*_\epsilon})$ cebirsel yapısının, (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 8.4.1 (1) başlığında, $\widetilde{*_\epsilon}$ işleminin $\cup_R$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. *Sonuç* olarak, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cup_R, \widetilde{*_\epsilon})$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir (sağ) yakın yarı-halkadır.

8.4.1.2. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cap_R)$ cebirsel yapısının birimi U_E olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-latis (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 8.3.1* de $(S_E(U), \widetilde{*_\epsilon})$ cebirsel yapısının, (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 8.4.1 (2) başlığında, $\widetilde{*_\epsilon}$ işleminin $\cap_R$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. *Sonuç* olarak, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cap_R, \widetilde{*_\epsilon})$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir (sağ) yakın yarı-halkadır.

8.4.2. Teorem $(F,K), (G,Y), (H,D)$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, aşağıdaki gibi esnek ikili parçalı yıldız işleminin genişletilmiş işlemlere dağılması mevcuttur:

i) Esnek İkili Parçalı Yıldız İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Soldan Dağılması:

Bu alt başlık altındaki eşitlikler, $K \cap (Y \Delta D) = K \cap Y \cap D = \emptyset$ ise sağlanır.

$$1) (F,K) \widetilde{*_\epsilon} [(G,Y) \cup_\epsilon (H,D)] = [(F,K) \widetilde{*_\epsilon} (G,Y)] \cup_\epsilon [(F,K) \widetilde{*_\epsilon} (H,D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G,Y) \cup_\epsilon (H,D) = (M, Y \cup D)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y \cup D$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y-D \\ H(\omega), & \omega \in D-Y \\ G(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(F, K) \stackrel{\sim}{*} (M, Y \cup D) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - (Y \cup D) \\ F'(\omega) \cup M'(\omega), & \omega \in K \cap (Y \cup D) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - (Y \cup D) = K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in K \cap (Y - D) = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap (D - Y) = K \cap Y' \cap D \\ F'(\omega) \cup [(G'(\omega) \cap H'(\omega))], & \omega \in K \cap Y \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım: $(F, K) \stackrel{\sim}{*} (G, Y) = (V, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(F, K) \stackrel{\sim}{*} (H, D) = (W, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F'(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \cup_{\varepsilon} (W, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ W(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ V(\omega) \cap W(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cup F(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap (K - D) = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cup [F'(\omega) \cup H'(\omega)], & \omega \in (K - Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y' \cap D \\ [F'(\omega) \cup G'(\omega)] \cup F(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap (K - D) = K \cap Y \cap D' \\ [F'(\omega) \cup G'(\omega)] \cup [F'(\omega) \cup H'(\omega)], & \omega \in (K \cap Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-Y) \cap (K-D) = K \cap Y' \cap D' \\ U & \omega \in (K-Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y' \cap D \\ U & \omega \in (K \cap Y) \cap (K-D) = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cup G'(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

$K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D' = K \cap Y \cap D = \emptyset$ için $N=T$ olduğu görülür. $K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D' = \emptyset$ şartının, $K \cap (Y \Delta D) = \emptyset$ şartına denk olduğu aşıkardır.

$$2) (F, K) \underset{*}{\sim} [(G, Y) \cap_{\varepsilon} (H, D)] = [(F, K) \underset{*}{\sim} (G, Y)] \cap_{\varepsilon} [(F, K) \underset{*}{\sim} (H, D)].$$

ii) Esnek İkili Parçalı Yıldız İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Sağdan Dağılması:

Bu alt başlık altındaki eşitlikler $K \cap Y \cap D = \emptyset$ ise sağlanır.

$$1) [(F, K) \cap_{\varepsilon} (G, Y)] \underset{*}{\sim} (H, D) = [(F, K) \underset{*}{\sim} (H, D)] \cap_{\varepsilon} [(G, Y) \underset{*}{\sim} (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, K) \cap_{\varepsilon} (G, Y) = (M, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ G(\omega), & \omega \in Y - K \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(M, K \cup Y) \underset{*}{\sim} (H, D) = (N, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in (K \cup Y) - D \\ M'(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in (K \cup Y) \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K - Y) - D = K \cap Y' \cap D' \\ G(\omega), & \omega \in (Y - K) - D = K' \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap D = K \cap Y' \cap D \\ G'(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in (Y - K) \cap D = K' \cap Y \cap D \\ [F'(\omega) \cup G'(\omega)] \cup H'(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F, K) \widetilde{*_\varepsilon}(H, D)] \cap_\varepsilon [(G, Y) \widetilde{*_\varepsilon}(H, D)]$. $(F, K) \widetilde{*_\varepsilon}(H, D) = (V, K)$

olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F'(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G, Y) \widetilde{*_\varepsilon}(H, D) = (W, Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ G'(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \cap_\varepsilon (W, Y) = (T, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K - Y \\ W(\omega), & \omega \in Y - K \\ V(\omega) \cap W(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K - D) - Y = K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in (K \cap D) - Y = K \cap Y' \cap D \\ G(\omega), & \omega \in (Y - D) - K = K' \cap Y \cap D' \\ G'(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in (Y \cap D) - K = K' \cap Y \cap D \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K - D) \cap (Y - D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap [G'(\omega) \cup H'(\omega)], & \omega \in (K - D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cup H'(\omega)] \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y - D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cup H'(\omega)] \cap [G'(\omega) \cup H'(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ G(\omega), & \omega \in K' \cap Y \cap D' \\ G'(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K' \cap Y \cap D \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ [F'(\omega) \cup H'(\omega)] \cap [G'(\omega) \cup H'(\omega)], & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece $K \cap Y \cap D = \emptyset$ için $N = T$ olduğu görülür.

Aşağıda yer alan eşitlikler de $K \cap Y \cap D = \emptyset$ için sağlanır. İspatlar benzer şekilde yapıldığı için, ispatsız şekilde verilmiştir.

$$2) [(F, K) \cup_{\varepsilon} (G, Y)]_{*}^{\sim} (H, D) = [(F, K)_{*}^{\sim} (H, D)] \cup_{\varepsilon} [(G, Y)_{*}^{\sim} (H, D)].$$

$$3) [(F, K) \setminus_{\varepsilon} (G, Y)]_{*}^{\sim} (H, D) = [(F, K)_{*}^{\sim} (H, D)] \setminus_{\varepsilon} [(G, Y)_{*}^{\sim} (H, D)].$$

$$4) [(F, K) \Delta_{\varepsilon} (G, Y)]_{*}^{\sim} (H, D) = [(F, K)_{*}^{\sim} (H, D)] \Delta_{\varepsilon} [(G, Y)_{*}^{\sim} (H, D)].$$

$$5) [(F, K) +_{\varepsilon} (G, Y)]_{*}^{\sim} (H, D) = [(F, K)_{*}^{\sim} (H, D)] +_{\varepsilon} [(G, Y)_{*}^{\sim} (H, D)].$$

$$6) [(F, K) \gamma_{\varepsilon} (G, Y)]_{*}^{\sim} (H, D) = [(F, K)_{*}^{\sim} (H, D)] \gamma_{\varepsilon} [(G, Y)_{*}^{\sim} (H, D)].$$

$$7) [(F, K) *_{\varepsilon} (G, Y)]_{*}^{\sim} (H, D) = [(F, K)_{*}^{\sim} (H, D)] *_{\varepsilon} [(G, Y)_{*}^{\sim} (H, D)].$$

$$8) [(F, K) \theta_{\varepsilon} (G, Y)]_{*}^{\sim} (H, D) = [(F, K)_{*}^{\sim} (H, D)] \theta_{\varepsilon} [(G, Y)_{*}^{\sim} (H, D)].$$

8.4.2.1. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cup_{\varepsilon})$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_{\emptyset}$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı yarı-latis (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç* 8.3.1 de $(S_E(U), \sim_{*})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, üstelik Teorem 8.3 (9) da, $\emptyset_{\emptyset} \sim_{*} (F, T) = \emptyset_{\emptyset}$, yani $\emptyset_{\emptyset}$ nin $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\sim_{*}$ işlemi altında, sol yutan eleman olduğu ve 8.4.2. (ii) (2) başlığında, $\sim_{*}$ işleminin $\cup_{\varepsilon}$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. *Sonuç* olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cup_{\varepsilon}, \sim_{*})$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halkadır. Ayrıca, $(F, K) \sim_{*} \emptyset_{\emptyset} \neq \emptyset_{\emptyset}$ olduğundan, $(S_E(U), \cup_{\varepsilon}, \sim_{*})$ sıfır simetrik olmayan bir (sağ) yakın yarı-halkadır. Benzer şekilde $(S_E(U), \cap_{\varepsilon}, \sim_{*})$ cebirsel yapısının da sıfır simetrik olmayan bir (sağ) yakın yarı-halka olduğu gösterilebilir. Yine, $(S_E(U), \setminus_{\varepsilon}, \sim_{*})$,

$(S_E(U), \Delta_\varepsilon, \sim_*)$, $(S_E(U), +_\varepsilon, \sim_*)$, $(S_E(U), \gamma_\varepsilon, \sim_*)$, $(S_E(U), \lambda_\varepsilon, \sim_*)$, $(S_E(U), *_\varepsilon, \sim_*)$, $(S_E(U), \theta_\varepsilon, \sim_*)$ cebirsel yapılarının da aynı şartlar altında komutatif, sıfır simetrik ve idempotent olmayan, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halka olduğu gösterilebilir. Buradaki, ilk işlemlerin $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında (Δ_ε işlemi şartsız bir şekilde) birleşmeli olduğu, Aybek (2023) tarafından gösterilmiştir.

8.4.2.2. Sonuç Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cup_\varepsilon)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_\emptyset$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-latis (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 8.3.1* de $(S_E(U), \sim_*)$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 8.4.2 (i) (1) başlığında, $\sim_*$ işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında soldan dağıldığı, Teorem 8.4.2 (ii) (2) başlığında, $\sim_*$ işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \sim_*)$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halkadır.

8.4.2.3. Sonuç Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cap_\varepsilon)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_\emptyset$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-latis (dolayısıyla yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 8.3.1* de $(S_E(U), \sim_*)$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 8.4.2 (i) (2) başlığında, $\sim_*$ işleminin $\cap_\varepsilon$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında soldan dağıldığı, Teorem 8.4.2 (ii) (1) başlığında, $\sim_*$ işleminin $\cap_\varepsilon$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \sim_*)$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halkadır.

8.4.3. Teorem $(F, K), (G, Y), (H, D)$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, aşağıdaki gibi esnek ikili parçalı yıldız işleminin esnek ikili parçalı işlemlere dağılması mevcuttur. Bu alt başlık altındaki eşitlikler, $K \cap Y \cap D = \emptyset$ ise sağlanır.

$$1) [(F, K) \underset{\cap}{\sim} (G, Y)] \underset{*}{\sim} (H, D) = [(F, K) \underset{*}{\sim} (H, D)] \underset{\cap}{\sim} [(G, Y) \underset{*}{\sim} (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, K) \underset{\cap}{\sim} (G, Y) = (M, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(M, K) \underset{*}{\sim} (H, D) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in K - D \\ M'(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K - Y) - D = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap D = K \cap Y' \cap D \\ [F'(\omega) \cup G'(\omega)] \cup H'(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $[(F, K) \underset{*}{\sim} (H, D)] \underset{\cap}{\sim} [(G, Y) \underset{*}{\sim} (H, D)]$. $(F, K) \underset{*}{\sim} (H, D) = (V, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F'(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G, Y) \underset{*}{\sim} (H, D) = (W, Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ G'(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \underset{\cap}{\sim} (W, Y) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K-Y \\ V(\omega) \cap W(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-D)-Y = K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in (K \cap D)-Y = K \cap Y' \cap D \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K-D) \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap [G'(\omega) \cup H'(\omega)], & \omega \in (K-D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cup H'(\omega)] \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y-D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cup H'(\omega)] \cap [G'(\omega) \cup H'(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ [F'(\omega) \cap G'(\omega)] \cup H'(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece $K \cap Y \cap D = \emptyset$ için $N=T$ olduğu görülür. Aşağıda yer alan eşitlikler de $K \cap Y \cap D = \emptyset$ şartı altında sağlanır. İspatlar benzer şekilde yapıldığı için, ispatsız şekilde verilmiştir.

$$2) [(F, K) \widetilde{\cup} (G, Y)]_* \widetilde{(H, D)} = [(F, K) \widetilde{(H, D)}]_* \widetilde{[(G, Y) \widetilde{(H, D)}]}.$$

$$3) [(F, K) \widetilde{\setminus} (G, Y)]_* \widetilde{(H, D)} = [(F, K) \widetilde{(H, D)}]_* \widetilde{[(G, Y) \widetilde{(H, D)}]}.$$

$$4) [(F, K) \widetilde{\Delta} (G, Y)]_* \widetilde{(H, D)} = [(F, K) \widetilde{(H, D)}]_* \widetilde{[(G, Y) \widetilde{(H, D)}]}.$$

$$5) [(F, K) \widetilde{+} (G, Y)]_* \widetilde{(H, D)} = [(F, K) \widetilde{(H, D)}]_* \widetilde{[(G, Y) \widetilde{(H, D)}]}.$$

$$6) [(F, K) \widetilde{\gamma} (G, Y)]_* \widetilde{(H, D)} = [(F, K) \widetilde{(H, D)}]_* \widetilde{[(G, Y) \widetilde{(H, D)}]}.$$

$$7) [(F, K) \widetilde{*} (G, Y)]_* \widetilde{(H, D)} = [(F, K) \widetilde{(H, D)}]_* \widetilde{[(G, Y) \widetilde{(H, D)}]}.$$

$$8) [(F, K) \widetilde{\theta} (G, Y)]_* \widetilde{(H, D)} = [(F, K) \widetilde{(H, D)}]_* \widetilde{[(G, Y) \widetilde{(H, D)}]}.$$

$$9) [(F,K) \tilde{\lambda} (G,Y)]_* \tilde{\lambda} (H,D) = [(F,K) \tilde{*} (H,D)] \tilde{\lambda} [(G,Y) \tilde{*} (H,D)].$$

8.4.3.1. Sonuç Bu tezimizde, (F,T), (G,Z) ve (H,M), $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \tilde{\cap})$ cebirsel yapısının komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup yani bir band olduğu gösterildi. *Sonuç 8.3.1* de $(S_E(U), \tilde{*})$ cebirsel yapısının, (F,T), (G,Z) ve (H,M), $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 8.4.3 (1) başlığında, $\tilde{*}$ işleminin $\tilde{\cap}$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \tilde{\cap}, \tilde{*})$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir (sağ) yakın yarı-halkadır.

8.4.3.2. Sonuç Bu tezimizde (F,T), (G,Z) ve (H,M), $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \tilde{\cup})$ cebirsel yapısının komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup yani bir band olduğu gösterildi. *Sonuç 8.3.1* de $(S_E(U), \tilde{*})$ cebirsel yapısının, (F,T), (G,Z) ve (H,M), $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 8.4.3 (2) başlığında, $\tilde{*}$ işleminin $\tilde{\cup}$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \tilde{\cup}, \tilde{*})$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir (sağ) yakın yarı-halkadır.

8.4.3.3. Sonuç (F,T), (G,Z) ve (H,M), $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında, $(S_E(U), \tilde{\setminus}, \tilde{*})$, $(S_E(U), \tilde{\Delta}, \tilde{*})$, $(S_E(U), \tilde{+}, \tilde{*})$, $(S_E(U), \tilde{\gamma}, \tilde{*})$, $(S_E(U), \tilde{*}, \tilde{*})$, $(S_E(U), \tilde{\theta}, \tilde{*})$ cebirsel yapılarının, komutatif ve idempotent olmayan, birimsiz ve sıfırsız bir (sağ) yakın yarı-halka olduğu gösterilebilir. Buradaki, ilk işlemlerin $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında ($\tilde{\Delta}$ işlemi $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında) birleşmeli olduğu, bu tezin ilerleyen kısımlarında gösterilmiştir.

9. ESNEK İKİLİ PARÇALI TETA İŞLEMİ

Bu bölümde, esnek ikili parçalı teta adı verilen yeni esnek küme işlemi tanıtılmış, örneği verilmiş, işlemin cebirsel özellikleri ile birlikte diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkisine bakılarak dağılma kuralları ve $S_E(U)$ kümesi üzerinde bu işlemin hangi cebirsel yapıları oluşturduğu incelenmiş ve çok önemli sonuçlar elde edilmiştir.

9.1. Tanım (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde tanımlı iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin $(F, K) \sim_{\theta} (G, Y)$ ile gösterilen esnek ikili parçalı teta işlemi $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cap G'(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

olmak üzere $(F, K) \sim_{\theta} (G, Y) = (H, K)$ ile tanımlanır.

9.2. Örnek $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesi, $K = \{e_1, e_4\}$, $Y = \{e_2, e_3, e_4\}$ E 'nin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evrensel küme, (F, K) ve (G, Y) , U üzerinde $(F, K) = \{(e_1, \{h_2, h_4, h_6\}), (e_4, \{h_1, h_2, h_5, h_6\})\}$, $(G, Y) = \{(e_2, \{h_1, h_2\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4, h_5\}), (e_4, \{h_2, h_3, h_5\})\}$ olarak tanımlanan iki esnek küme olsun. $(F, K) \sim_{\theta} (G, Y) = (H, K)$ olmak üzere,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cap G'(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Burada, $K = \{e_1, e_4\}$, $K - Y = \{e_1\}$ olmak üzere, $\forall \omega \in K - Y = \{e_1\}$ için, $H(\omega) = F(\omega)$ olup, $H(e_1) = F(e_1) = \{h_2, h_4, h_6\}$, $\forall \omega \in K \cap Y = \{e_4\}$ için, $H(\omega) = F'(\omega) \cap G'(\omega)$ olup, $H(e_4) = F'(e_4) \cap G'(e_4) = \{h_3, h_4\} \cap \{h_1, h_4, h_6\} = \{h_4\}$. Böylece, $(F, K) \sim_{\theta} (G, Y) = \{(e_1, \{h_2, h_4, h_6\}), (e_4, \{h_4\})\}$.

9.3. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1) $\sim_{\theta}$, $S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: $\tilde{\theta}$ 'nın $S_E(U)$ üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}: S_E(U) \times S_E(U) &\rightarrow S_E(U) \\ ((F,K), (G,Y)) &\rightarrow (F,K) \tilde{\theta} (G,Y) = (H,K) \end{aligned}$$

olup, (F,K) ve (G,Y) , U üzerinde iki esnek küme olduğunda $(F,T) \tilde{\theta} (G,Y)$ de, U üzerinde bir esnek kümedir. $K \subseteq E$ sabit bir parametre kümesi olmak üzere, $\tilde{\theta}$ 'nın $S_K(U)$ üzerinde de bir ikili işlem olduğu açıktır.

$$2) K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D = \emptyset \text{ ise } [(F,K) \tilde{\theta} (G,Y)] \tilde{\theta} (H,D) = (F,K) \tilde{\theta} [(G,Y) \tilde{\theta} (H,D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F,K) \tilde{\theta} (G,Y) = (T,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cap G'(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(T,K) \tilde{\theta} (H,D) = (M,K)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in K - D \\ T'(\omega) \cap H'(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K - Y) - D = K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cap G'(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cap H'(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap D = K \cap Y' \cap D \\ [F(\omega) \cup G(\omega)] \cap H'(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

$(G,Y) \tilde{\theta} (H,D) = (K,Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$K(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ G'(\omega) \cap H'(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(F,K) \tilde{\theta} (K,Y) = (S,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$S(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ F'(\omega) \cap K'(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Böylece,

$$S(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ F'(\omega) \cap G'(\omega), & \omega \in K \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cap [G(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in K \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

S fonksiyonundaki, K-Y ye bakacak olursak, $K-Y = K \cap Y'$ olup, eğer $\omega \in Y'$ ise $\omega \in D-Y$ veya $\omega \in (Y \cup D)'$. Buradan $\omega \in K-Y$ ise $\omega \in K \cap Y' \cap D'$ ve $\omega \in K \cap Y' \cap D$ olur. Böylece, $K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D = \emptyset$ için $M=S$ olur. Yani uygun koşullar altında, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{\theta}$ işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

$$3) [(F,K) \tilde{\theta} (G,K)] \tilde{\theta} (H,K) \neq (F,K) \tilde{\theta} [(G,K) \tilde{\theta} (H,K)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım. $(F,K) \tilde{\theta} (G,K) = (T,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-K = \emptyset \\ F'(\omega) \cap G'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$(T,K) \tilde{\theta} (H,K) = (M,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in K-K = \emptyset \\ T'(\omega) \cap H'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece,

$$M(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in K-K = \emptyset \\ [F(\omega) \cup G(\omega)] \cap H'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına bakalım. $(G,K) \tilde{\theta} (H,K) = (L,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$L(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in K-K = \emptyset \\ G'(\omega) \cap H'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$(F, K) \sim_{\theta} (L, K) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cap L'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cap [G(\omega) \cup H(\omega)], & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Buradan $M \neq N$ olduğu görülür. Yani $S_K(U)$ kümesi üzerinde (parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler üzerinde), $\sim_{\theta}$ işleminin birleşme özelliği yoktur.

$$4) (F, K) \sim_{\theta} (G, Y) \neq (G, Y) \sim_{\theta} (F, K).$$

İspat: $(F, K) \sim_{\theta} (G, Y) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F'(\omega) \cap G'(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(G, Y) \sim_{\theta} (F, K) = (T, Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - K \\ G'(\omega) \cap F'(\omega), & \omega \in Y \cap K \end{cases}$$

Burada, sol taraftaki esnek kümenin parametre kümesi K ; sağ taraftaki esnek kümenin parametre kümesi Y dir. Böylece esnek kümelerin eşitliği tanımı gereği;

$$(F, K) \sim_{\theta} (G, Y) \neq (G, Y) \sim_{\theta} (F, K).$$

Fakat $(F, K) \sim_{\theta} (G, K) = (G, K) \sim_{\theta} (F, K)$ olduğu açıktır. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\sim_{\theta}$ işlemi, değişme özelliğine sahip değilken, $K \subseteq E$ sabit bir paramere kümesi olmak üzere $S_K(U)$ kümesi üzerinde $\sim_{\theta}$ işlemi değişme özelliğine sahiptir.

9.3.1. *Sonuç* Teorem 9.3 (1), (2) ve (4) den, (F,K) , (G,Y) ve (H,D) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \sim_\theta)$ komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgruptur.

$K \subseteq E$ sabir bir parametre kümesi olmak üzere, $(S_K(U), \sim_\theta)$ cebirsel yapısı Teorem 9.3 (3) den, birleşme özelliğine sahip olmadığı için yarıgrup olamaz; fakat bu yapının komutatif bir grupoid olduğu açıktır.

$$5) (F, K) \sim_\theta (F, K) = (F, K)^r.$$

İspat: $(F, K) \sim_\theta (F, K) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cap F'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Burada, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F'(\omega) \cap F'(\omega) = F'(\omega)$, böylece $(H, K) = (F, K)^r$. Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\sim_\theta$ işlemi, denk güçlülük özelliğine sahip değildir.

$$6) (F, K) \sim_\theta \emptyset_K = \emptyset_K \sim_\theta (F, K) = (F, K)^r.$$

İspat: $\emptyset_K = (S, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için; $S(\omega) = \emptyset$. $(F, K) \sim_\theta (S, K) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cap S'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Böylece, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega) = F'(\omega) \cap S'(\omega) = F'(\omega) \cap U = F'(\omega)$. Buradan $(H, K) = (F, K)^r$.

$$7) (F, K) \sim_\theta \emptyset_E = (F, K)^r.$$

İspat: $\emptyset_E = (S, E)$ olsun. Burada $\forall \omega \in E$; $S(\omega) = \emptyset$. $(F, K) \sim_\theta (S, E) = (H, K)$. Böylece, $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - E = \emptyset \\ F'(\omega) \cap S'(\omega), & \omega \in K \cap E = K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için; $H(\omega) = F'(\omega) \cap S'(\omega) = F'(\omega) \cap U = F'(\omega)$ olur ve böylece $(H, K) = (F, K)^r$.

$$8) (F, K) \underset{\emptyset}{\sim} \emptyset_\emptyset = (F, K).$$

İspat: $\emptyset_\emptyset = (S, \emptyset)$ ve $(F, K) \underset{\emptyset}{\sim} (S, \emptyset) = (H, K)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - \emptyset = K \\ F'(\omega) \cap S'(\omega), & \omega \in K \cap \emptyset = \emptyset \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için; $H(\omega) = F(\omega)$ olup, $(H, K) = (F, K) \cdot S_E(U)$ kümesi üzerinde $\underset{\emptyset}{\sim}$ işleminin sağ birim elemanı $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir.

$$9) \emptyset_\emptyset \underset{\emptyset}{\sim} (F, K) = \emptyset_\emptyset.$$

İspat: $\emptyset_\emptyset = (S, \emptyset)$ ve $(S, \emptyset) \underset{\emptyset}{\sim} (F, K) = (H, \emptyset)$ olsun. $\emptyset_\emptyset$, parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme olduğu için, $(H, \emptyset) = \emptyset_\emptyset$ olur.

Yani, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\underset{\emptyset}{\sim}$ işlemi için, her elemanın sağ birim eleman olan $\emptyset_\emptyset$ ye göre sol tersi, $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir. Ayrıca, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\underset{\emptyset}{\sim}$ işleminin sol yutan elemanı $\emptyset_\emptyset$ esnek kümesidir.

9.3.2. *Sonuç* Teorem 9.3 (1), (2), (8) ve (9) dan, (F, K) , (G, Y) ve (H, D) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \underset{\emptyset}{\sim})$ cebirsel yapısı, sağ birimi $\emptyset_\emptyset$, her elemanın sol tersi $\emptyset_\emptyset$ olan idempotent olmayan bir sol-sağ sistemdir.

$$10) (F, K) \underset{\emptyset}{\sim} U_K = U_K \underset{\emptyset}{\sim} (F, K) = \emptyset_K.$$

İspat: $U_K=(T,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega)=U$. $(F,K) \sim_{\theta} (T,K)=(H,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$H(\omega)=\begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-K=\emptyset \\ F'(\omega) \cap T'(\omega), & \omega \in K \cap K=K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için; $H(\omega)=F'(\omega) \cap T'(\omega)=F'(\omega) \cap \emptyset = \emptyset$ olur ve böylece $(H,K)=\emptyset_K$.

$$11) (F,K) \sim_{\theta} U_E=\emptyset_K.$$

İspat: $U_E=(T,E)$ olsun. Burada $\forall \omega \in E$ için, $T(\omega)=U$. $(F,K) \sim_{\theta} (T,E)=(H,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için ;

$$H(\omega)=\begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-E=\emptyset \\ F'(\omega) \cap T'(\omega), & \omega \in K \cap E=K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega)=F'(\omega) \cap T'(\omega)=F'(\omega) \cap \emptyset = \emptyset$ olur. $(H,K)=\emptyset_K$.

$$12) (F,K) \sim_{\theta} (F,K)^r=(F,K)^r \sim_{\theta} (F,K) = \emptyset_K.$$

İspat: $(F,K)^r=(H,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için, $H(\omega)=F'(\omega)$. $(F,K) \sim_{\theta} (H,K)=(T,K)$ olsun.

Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$T(\omega)=\begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-K=\emptyset \\ F'(\omega) \cap H'(\omega), & \omega \in K \cap K=K \end{cases}$$

Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega)=F'(\omega) \cap H'(\omega)=F'(\omega) \cap F(\omega) = \emptyset$ olur. Burada $(T,K)=\emptyset_K$.

$$13) [(F,K) \sim_{\theta} (G,Y)]^r=(F,K) \overset{*}{\underset{U}{\sim}} (G,Y).$$

İspat: $(F,K) \sim_{\theta} (G,Y)=(H,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega)=\begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ F'(\omega) \cap G'(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(H, K)^r = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$T(\omega) = \begin{cases} F'(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Böylece, $(T, K) = (F, K) \underset{U}{*} (G, Y)$.

$$14) (F, K) \underset{\theta}{\sim} (G, K) = \emptyset_K \Leftrightarrow (F, K) = (G, K) = \emptyset_K.$$

İspat: $(F, K) \underset{\theta}{\sim} (G, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cap G'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$(T, K) = \emptyset_K$ olduğundan, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = \emptyset$. Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = F'(\omega) \cap G'(\omega) = \emptyset \Leftrightarrow \forall \omega \in K$ için, $F'(\omega) = \emptyset$ ve $G'(\omega) = \emptyset \Leftrightarrow \forall \omega \in K$ için, $F(\omega) = \emptyset$ ve $G(\omega) = \emptyset \Leftrightarrow (F, K) = (G, K) = \emptyset_K$.

$$15) \emptyset_K \underset{\theta}{\cong} (F, K) \underset{\theta}{\sim} (G, Y) \text{ ve } \emptyset_Y \underset{\theta}{\cong} (G, Y) \underset{\theta}{\sim} (F, K).$$

$$16) (F, K) \underset{\theta}{\sim} (G, Y) \underset{\theta}{\cong} U_K \text{ ve } (G, Y) \underset{\theta}{\sim} (F, K) \underset{\theta}{\cong} U_Y.$$

$$17) (F, K) \underset{\theta}{\sim} (G, K) \underset{\theta}{\cong} (F, K)^r \text{ ve } (F, K) \underset{\theta}{\sim} (G, K) \underset{\theta}{\cong} (G, K)^r.$$

İspat: $(F, K) \underset{\theta}{\sim} (G, K) = (H, K)$. Öncelikle, $K \subseteq K$ olur. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cap G'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$\forall \omega \in K$; $H(\omega) = F'(\omega) \cap G'(\omega) \subseteq F'(\omega)$, $(F, K) \underset{\theta}{\sim} (G, K) \underset{\theta}{\cong} (F, K)^r$. $(F, K) \underset{\theta}{\sim} (G, K) \underset{\theta}{\cong} (G, K)^r$ benzer şekilde gösterilir.

18) $(F, K) \subseteq (G, K)$ ise $(F, K) \sim_{\theta} (G, K) = (G, K)^r$.

İspat: $(F, K) \subseteq (G, K)$ ise her $\omega \in K$ için, $F(\omega) \subseteq G(\omega)$. $(F, K) \sim_{\theta} (G, K) = (H, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cap G'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$\forall \omega \in K$ için $F(\omega) \subseteq G(\omega)$ ise $G'(\omega) \subseteq F'(\omega)$. Böylece, $\forall \omega \in K$; $H(\omega) = F'(\omega) \cap G'(\omega) = G'(\omega)$. Buradan, $(F, K) \sim_{\theta} (G, K) = (G, K)^r$.

19) $(F, K) \subseteq (G, K)$ ise $(H, Z) \sim_{\theta} (G, K) \subseteq (H, Z) \sim_{\theta} (F, K)$ ve $(G, K) \sim_{\theta} (H, K) \subseteq (F, K) \sim_{\theta} (H, K)$.

İspat: $(F, K) \subseteq (G, K)$ olsun. Buradan, $\forall \omega \in K$ için, $F(\omega) \subseteq G(\omega)$ ve böylece $\forall \omega \in K$ için, $G'(\omega) \subseteq F'(\omega)$ olur. $(H, Z) \sim_{\theta} (G, K) = (W, Z)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in Z$ için,

$$W(\omega) = \begin{cases} H(\omega), & \omega \in Z - K \\ H'(\omega) \cap G'(\omega), & \omega \in Z \cap K \end{cases}$$

$(H, Z) \sim_{\theta} (F, K) = (L, Z)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in Z$ için,

$$L(\omega) = \begin{cases} H(\omega), & \omega \in Z - K \\ H'(\omega) \cap F'(\omega), & \omega \in Z \cap K \end{cases}$$

Böylece, $\forall \omega \in Z - K$ için, $W(\omega) = H(\omega) \subseteq H(\omega) = L(\omega)$, $\forall \omega \in Z \cap K$ için $W(\omega) = H'(\omega) \cap G'(\omega) \subseteq H'(\omega) \cap F'(\omega) = L(\omega)$ olup, $(H, Z) \sim_{\theta} (G, K) \subseteq (H, Z) \sim_{\theta} (F, K)$. Ayrıca, her $\omega \in K$ için, $G'(\omega) \cap H'(\omega) \subseteq F'(\omega) \cap H'(\omega)$ olup, $(G, K) \sim_{\theta} (H, K) \subseteq (F, K) \sim_{\theta} (H, K)$.

20) $(H, Z) \sim_{\theta} (G, K) \subseteq (H, Z) \sim_{\theta} (F, K)$ ise $(F, K) \subseteq (G, K)$ olmak zorunda değildir. Benzer şekilde, $(G, K) \sim_{\theta} (H, K) \subseteq (F, K) \sim_{\theta} (H, K)$ ise $(F, K) \subseteq (G, K)$ olmak zorunda değildir. Yani Teorem 9.3 (19) nin tersi doğru değildir.

İspat: Teorem 9.3 (19) un tersi doğru olmadığını göstermek için bir örnek verelim. $E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi, $K=\{e_1, e_3\}$ ve $Z=\{e_1, e_3, e_5\}$ E'nin iki alt kümesi, $U=\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme, (F, K) , (G, K) ve (H, Z) , U üzerinde $(F, K)=\{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$, $(G, K)=\{(e_1, \{h_2\}), (e_3, \{h_1, h_2\})\}$, $(H, Z)=\{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, \{h_2, h_5\})\}$ olarak tanımlanan esnek kümeler olsun.

$(H, Z) \sim_{\emptyset} (G, K) = (L, Z)$ olmak üzere $\forall \omega \in Z-K=\{e_5\}$ için, $L(e_5)=H(e_5)=\{h_2, h_5\}$; $\forall \omega \in Z \cap K=\{e_1, e_3\}$ için, $L(e_1)=H'(e_1) \cap G'(e_1)=\emptyset$, $L(e_3)=H'(e_3) \cap G'(e_3)=\emptyset$. Buradan, $(H, Z) \sim_{\emptyset} (G, K)=\{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset), (e_5, \{h_2, h_5\})\}$.

Şimdi de, $(H, Z) \sim_{\emptyset} (F, K)=(W, Z)$ olmak üzere $\forall \omega \in Z-K=\{e_5\}$ için, $W(e_5)=H(e_5)=\{h_2, h_5\}$; $\forall \omega \in Z \cap K=\{e_1, e_3\}$ için, $W(e_1)=H'(e_1) \cap F'(e_1)=\emptyset$, $W(e_3)=H'(e_3) \cap F'(e_3)=\emptyset$. Böylece $(H, Z) \sim_{\emptyset} (F, K)=\{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset), (e_5, \{h_2, h_5\})\}$.

Buradan, $(H, Z) \sim_{\emptyset} (G, K) \cong (H, Z) \sim_{\emptyset} (F, K)$; fakat $(F, K) \cong (G, K)$ olmadığı açıktır. $(G, K) \sim_{\emptyset} (H, K) \cong (F, K) \sim_{\emptyset} (H, K)$ ise $(F, K) \cong (G, K)$ olmak zorunda olmadığı, aynı örnek üzerinde, $(H, K)=\{(e_1, U), (e_3, U)\}$ alınarak gösterilebilir.

$$21) (F, T) \cong (G, T) \text{ ve } (K, T) \cong (L, T) \text{ ise } (G, T) \sim_{\emptyset} (L, T) \cong (F, T) \sim_{\emptyset} (K, T).$$

İspat: $(F, T) \cong (G, T)$ ve $(K, T) \cong (L, T)$ olsun. Buradan, $\forall \omega \in T$ için, $F(\omega) \subseteq G(\omega)$ ve $K(\omega) \subseteq L(\omega)$. Böylece $\forall \omega \in T$ için, $G'(\omega) \subseteq F'(\omega)$ ve $L'(\omega) \subseteq K'(\omega)$. $(G, T) \sim_{\emptyset} (L, T)=(M, T)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in T$ için, $M(\omega)=G'(\omega) \cap L'(\omega)$. $(F, T) \sim_{\emptyset} (K, T)=(N, T)$ olsun. Böylece, $\forall \omega \in T$ için, $N(\omega)=F'(\omega) \cap K'(\omega)$. $\forall \omega \in T$ için, $G'(\omega) \subseteq F'(\omega)$ ve $L'(\omega) \subseteq K'(\omega)$ olduğundan, $M(\omega)=G'(\omega) \cap L'(\omega) \subseteq F'(\omega) \cap K'(\omega)=N(\omega)$ olur. Böylece, $(G, T) \sim_{\emptyset} (L, T) \cong (F, T) \sim_{\emptyset} (K, T)$.

$$22) (F, K) \sim_{\emptyset} (G, K) \cong (F, K) \sim_{*} (G, K).$$

İspat: $(F, K) \sim_{\emptyset} (G, K) = (T, K)$. Buradan, $\forall \omega \in K$ için,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cap G'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

$(F, K) \overset{\sim}{*} (G, K) = (W, K)$. Buradan, $\forall \omega \in K$ için,

$$W(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - K = \emptyset \\ F'(\omega) \cup G'(\omega), & \omega \in K \cap K = K \end{cases}$$

Tümü için $\forall \omega \in K$ için, $T(\omega) = F'(\omega) \cap G'(\omega) \subseteq F(\omega) \cup G'(\omega) = W(\omega)$. Böylece, $(F, K) \overset{\sim}{\theta} (G, K) \subseteq (F, K) \overset{\sim}{*} (G, K)$.

9.4. Teorem $(F, K), (G, Y), (H, D)$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, aşağıdaki gibi esnek ikili parçalı teta işleminin diğer esnek küme işlemlere dağılması mevcuttur:

9.4.1. Teorem $(F, K), (G, Y), (H, D)$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, aşağıdaki gibi esnek ikili parçalı teta işleminin kısıtlanmış işlemlere dağılması mevcuttur. Bu alt başlık altındaki eşitlikler, $K \cap Y \cap D = \emptyset$ için sağlanır.

$$1) [(F, K) \cup_R (G, Y)] \overset{\sim}{\theta} (H, D) = [(F, K) \overset{\sim}{\theta} (H, D)] \cup_R [(G, Y) \overset{\sim}{\theta} (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, K) \cup_R (G, Y) = (M, K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için, $M(\omega) = F(\omega) \cup G(\omega)$. $(M, K \cap Y) \overset{\sim}{\theta} (H, D) = (N, K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için,

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D \\ M'(\omega) \cap H'(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D^c \\ [F'(\omega) \cap G'(\omega)] \cap H'(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $[(F, K) \overset{\sim}{\theta} (H, D)] \cup_R [(G, Y) \overset{\sim}{\theta} (H, D)]$.

$(F, K) \overset{\sim}{\theta} (H, D) = (V, K)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K$ için,

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-D \\ F'(\omega) \cap H'(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G, Y) \tilde{\cap}_{\theta} (H, D) = (W, Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in Y$ için,

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y-D \\ G'(\omega) \cap H'(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \cup_R (W, Y) = (T, K \cap Y)$ olsun. Burada, $\forall \omega \in K \cap Y$ için, $T(\omega) = V(\omega) \cup W(\omega)$,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in (K-D) \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cup [G'(\omega) \cap H'(\omega)], & \omega \in (K-D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cap H'(\omega)] \cup G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y-D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cap H'(\omega)] \cup [G'(\omega) \cap H'(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ [F'(\omega) \cap H'(\omega)] \cup [G'(\omega) \cap H'(\omega)], & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece $K \cap Y \cap D = \emptyset$ için $N=T$ olduğu görülür.

$$2) [(F, K) \cap_R (G, Y)] \tilde{\cap}_{\theta} (H, D) = [(F, K) \tilde{\cap}_{\theta} (H, D)] \cap_R [(G, Y) \tilde{\cap}_{\theta} (H, D)].$$

9.4.1.1. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cup_R)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_E$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-latis (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 9.3.1* de $(S_E(U), \tilde{\cap}_{\theta})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 9.4.1 (1) başlığında, $\tilde{\cap}_{\theta}$ işleminin $\cup_R$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. *Sonuç* olarak, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cup_R, \tilde{\cap}_{\theta})$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir (sağ) yakın yarı-halkadır.

9.4.1.2. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cap_R)$ cebirsel yapısının birimi U_E olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-latis (dolayısıyla bir yarıgrup)

olduğunu göstermişti *Sonuç 9.3.1* de $(S_E(U), \tilde{\cap}_\theta)$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 9.4.1 (2) başlığında, $\tilde{\cap}_\theta$ işleminin $\cap_R$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cap_R, \tilde{\cap}_\theta)$ cebirsel yapısı komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir (sağ) yakın yarı-halkadır.

9.4.2. Teorem (F, K) , (G, Y) , (H, D) , U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, aşağıdaki gibi esnek ikili parçalı teta işleminin genişletilmiş işlemlere dağılması mevcuttur:

i) Esnek İkili Parçalı Teta İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Soldan Dağılması: Bu alt başlık altındaki eşitlikler, $K \cap (Y \Delta D) = K \cap Y \cap D = \emptyset$ ise sağlanır.

$$1) (F, K) \tilde{\cap}_\theta [(G, Y) \cup_\varepsilon (H, D)] = [(F, K) \tilde{\cap}_\theta (G, Y)] \cup_\varepsilon [(F, K) \tilde{\cap}_\theta (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(G, Y) \cup_\varepsilon (H, D) = (M, Y \cup D)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y \cup D$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ H(\omega), & \omega \in D - Y \\ G(\omega) \cup H(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(F, K) \tilde{\cap}_\theta (M, Y \cup D) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - (Y \cup D) \\ F'(\omega) \cap M'(\omega), & \omega \in K \cap (Y \cup D) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - (Y \cup D) = K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cap G'(\omega), & \omega \in K \cap (Y - D) = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cap H'(\omega), & \omega \in K \cap (D - Y) = K \cap Y' \cap D \\ F'(\omega) \cap [(G'(\omega) \cap H'(\omega))], & \omega \in K \cap Y \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım: $(F, K) \tilde{\cap}_\theta (G, Y) = (V, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-Y \\ F'(\omega) \cap G'(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(F, K) \underset{\theta}{\sim} (H, D) = (W, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-D \\ F'(\omega) \cap H'(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \cup_{\varepsilon} (W, K) = (T, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K-K=\emptyset \\ W(\omega), & \omega \in K-K=\emptyset \\ V(\omega) \cap W(\omega), & \omega \in K \cap K=K \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cup F(\omega), & \omega \in (K-Y) \cap (K-D) = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cup [F'(\omega) \cap H'(\omega)], & \omega \in (K-Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y' \cap D \\ [F'(\omega) \cap G'(\omega)] \cup F(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap (K-D) = K \cap Y \cap D' \\ [F'(\omega) \cap G'(\omega)] \cup [F'(\omega) \cap H'(\omega)], & \omega \in (K \cap Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-Y) \cap (K-D) = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cup H'(\omega), & \omega \in (K-Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y' \cap D \\ G'(\omega) \cup F(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap (K-D) = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cap [G'(\omega) \cup H'(\omega)], & \omega \in (K \cap Y) \cap (K \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

$K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D' = K \cap Y \cap D = \emptyset$ için $N=T$ olduğu görülür. $K \cap Y' \cap D = K \cap Y \cap D' = \emptyset$ şartının, $K \cap (Y \Delta D) = \emptyset$ şartına denk olduğu aşikârdır.

$$2) (F, K) \underset{\theta}{\sim} [(G, Y) \cap_{\varepsilon} (H, D)] = [(F, K) \underset{\theta}{\sim} (G, Y)] \cap_{\varepsilon} [(F, K) \underset{\theta}{\sim} (H, D)].$$

ii) Esnek İkili Parçalı Teta İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Sağdan Dağılması. Bu alt başlık altındaki eşitlikler $K \cap Y \cap D = \emptyset$ ise sağlanır.

$$1) [(F, K) \cap_{\varepsilon} (G, Y)] \underset{\theta}{\sim} (H, D) = [(F, K) \underset{\theta}{\sim} (H, D)] \cap_{\varepsilon} [(G, Y) \underset{\theta}{\sim} (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, K) \cap_{\varepsilon} (G, Y) = (M, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ G(\omega), & \omega \in Y - K \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(M, K \cup Y) \overset{\sim}{\theta} (H, D) = (N, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in (K \cup Y) - D \\ M'(\omega) \cap H'(\omega), & \omega \in (K \cup Y) \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K - Y) - D = K \cap Y' \cap D' \\ G(\omega), & \omega \in (Y - K) - D = K' \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap Y) - D = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cap H'(\omega), & \omega \in (K - Y) \cap D = K \cap Y' \cap D \\ G'(\omega) \cap H'(\omega), & \omega \in (Y - K) \cap D = K' \cap Y \cap D \\ [F'(\omega) \cup G'(\omega)] \cap H'(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım $[(F, K) \overset{\sim}{\theta} (H, D)] \cap_{\varepsilon} [(G, Y) \overset{\sim}{\theta} (H, D)] = (F, K) \overset{\sim}{\theta} (H, D) = (V, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - D \\ F'(\omega) \cap H'(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G, Y) \overset{\sim}{\theta} (H, D) = (W, Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y - D \\ G'(\omega) \cap H'(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V, K) \cap_{\varepsilon} (W, Y) = (T, K \cup Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K \cup Y$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K - Y \\ W(\omega), & \omega \in Y - K \\ V(\omega) \cap W(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-D) - Y = K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cap H'(\omega), & \omega \in (K \cap D) - Y = K \cap Y' \cap D \\ G(\omega), & \omega \in (Y-D) - K = K' \cap Y \cap D' \\ G'(\omega) \cap H'(\omega), & \omega \in (Y \cap D) - K = K' \cap Y \cap D \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K-D) \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap [G'(\omega) \cap H'(\omega)], & \omega \in (K-D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cap H'(\omega)] \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y-D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cap H'(\omega)] \cap [G'(\omega) \cap H'(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cap H'(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ G(\omega), & \omega \in K' \cap Y \cap D' \\ G'(\omega) \cap H'(\omega), & \omega \in K' \cap Y \cap D \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cap G'(\omega) \cap H'(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece $K \cap Y \cap D = \emptyset$ için $N=T$ olduğu görülür.

Aşağıda yer alan eşitlikler de $K \cap Y \cap D = \emptyset$ için sağlanır. İspatlar benzer şekilde yapıldığı için, ispatsız şekilde verilmiştir.

$$2) [(F,K) \cup_{\varepsilon} (G,Y)]_{\theta} \widetilde{(H,D)} = [(F,K)_{\theta} \widetilde{(H,D)}] \cup_{\varepsilon} [(G,Y)_{\theta} \widetilde{(H,D)}].$$

$$3) [(F,K) \setminus_{\varepsilon} (G,Y)]_{\theta} \widetilde{(H,D)} = [(F,K)_{\theta} \widetilde{(H,D)}] \setminus_{\varepsilon} [(G,Y)_{\theta} \widetilde{(H,D)}].$$

$$4) [(F,K) \Delta_{\varepsilon} (G,Y)]_{\theta} \widetilde{(H,D)} = [(F,K)_{\theta} \widetilde{(H,D)}] \Delta_{\varepsilon} [(G,Y)_{\theta} \widetilde{(H,D)}].$$

$$5) [(F,K) +_{\varepsilon} (G,Y)]_{\theta} \widetilde{(H,D)} = [(F,K)_{\theta} \widetilde{(H,D)}] +_{\varepsilon} [(G,Y)_{\theta} \widetilde{(H,D)}].$$

$$6) [(F,K) \gamma_{\varepsilon} (G,Y)]_{\theta} \widetilde{(H,D)} = [(F,K)_{\theta} \widetilde{(H,D)}] \gamma_{\varepsilon} [(G,Y)_{\theta} \widetilde{(H,D)}].$$

$$7) [(F,K) *_{\varepsilon} (G,Y)]_{\theta} \widetilde{(H,D)} = [(F,K)_{\theta} \widetilde{(H,D)}] *_{\varepsilon} [(G,Y)_{\theta} \widetilde{(H,D)}].$$

$$8) [(F,K) \theta_\varepsilon(G,Y)]_{\tilde{\theta}}(H,D)=[(F,K)_{\tilde{\theta}}(H,D)]\theta_\varepsilon[(G,Y)_{\tilde{\theta}}(H,D)].$$

9.4.2.1. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cup_\varepsilon)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_\emptyset$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-latis (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 9.3.1* de $(S_E(U), \tilde{\theta})$ cebirsel yapısının, (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, üstelik Teorem 9.3 (9) da, $\emptyset_\emptyset \tilde{*} (F,T) = \emptyset_\emptyset$, yani $\emptyset_\emptyset$ nin $S_E(U)$ kümesi üzerinde θ işlemi altında, sol yutan eleman olduğu ve 9.4.2. (ii) (2) başlığında, $\tilde{\theta}$ işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \tilde{\theta})$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halkadır.

Ayrıca, $(F,K)_{\tilde{*}} \emptyset_\emptyset \neq \emptyset_\emptyset$ olduğundan, $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \tilde{\theta})$ sıfır simetrik olmayan bir (sağ) yakın yarı-halkadır. Benzer şekilde $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \tilde{\theta})$ cebirsel yapısının da sıfır simetrik olmayan bir (sağ) yakın yarı-halka olduğu gösterilebilir. Yine, $(S_E(U), \setminus_\varepsilon, \tilde{\theta})$, $(S_E(U), \Delta_\varepsilon, \tilde{\theta})$, $(S_E(U), +_\varepsilon, \tilde{\theta})$, $(S_E(U), \gamma_\varepsilon, \tilde{\theta})$, $(S_E(U), \lambda_\varepsilon, \tilde{\theta})$, $(S_E(U), *_\varepsilon, \tilde{\theta})$, $(S_E(U), \theta_\varepsilon, \tilde{\theta})$ cebirsel yapılarının da aynı şartlar altında komutatif, sıfır simetrik ve idempotent olmayan, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halka olduğu gösterilebilir. Buradaki, ilk işlemlerin $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında (Δ_ε işlemi şartsız bir şekilde) birleşmeli olduğu, Aybek (2023) tarafından gösterilmiştir.

9.4.2.2. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cup_\varepsilon)$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_\emptyset$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-latis (dolayısıyla bir yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 9.3.1* de $(S_E(U), \tilde{\theta})$ cebirsel yapısının, (F,T) , (G,Z) ve (H,M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 9.4.2 (i) (1) başlığında, $\tilde{\theta}$ işleminin $\cup_\varepsilon$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında soldan dağıldığı, Teorem 9.4.2 (ii) (2)

başlığında, $\tilde{\theta}$ işleminin $\cup_{\varepsilon}$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cup_{\varepsilon}, \tilde{\theta})$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halkadır.

9.4.2.3. *Sonuç* Ali ve diğerleri (2011), $(S_E(U), \cap_{\varepsilon})$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_{\emptyset}$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-latis (dolayısıyla yarıgrup) olduğunu göstermişti. *Sonuç 9.3.1* de $(S_E(U), \tilde{\theta})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 9.4.2 (i) (2) başlığında, $\tilde{\theta}$ işleminin $\cap_{\varepsilon}$ işlemine $T \cap (Z \Delta M) = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında soldan dağıldığı, Teorem 9.4.2 (ii) (1) başlığında, $\tilde{\theta}$ işleminin $\cap_{\varepsilon}$ işlemine $T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \cap_{\varepsilon}, \tilde{\theta})$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halkadır.

9.4.3. Teorem (F, K) , (G, Y) , (H, D) , U üzerinde esnek kümeler olmak üzere, aşağıdaki gibi esnek ikili parçalı teta işleminin esnek ikili parçalı işlemlere dağılması mevcuttur. Bu alt başlık altındaki eşitlikler, $K \cap Y \cap D = \emptyset$ ise sağlanır.

$$1) [(F, K) \tilde{\cap} (G, Y)] \tilde{\cap} (H, D) = [(F, K) \tilde{\cap} (H, D)] \tilde{\cap} [(G, Y) \tilde{\cap} (H, D)].$$

İspat: İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım. $(F, K) \tilde{\cap} (G, Y) = (M, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$M(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K - Y \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

$(M, K) \tilde{\cap} (H, D) = (N, K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için,

$$N(\omega) = \begin{cases} M(\omega), & \omega \in K-D \\ M'(\omega) \cap H'(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-Y)-D = K \cap Y' \cap D' \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap Y)-D = K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cap H'(\omega), & \omega \in (K-Y) \cap D = K \cap Y' \cap D \\ [F'(\omega) \cup G'(\omega)] \cap H'(\omega), & \omega \in (K \cap Y) \cap D = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım. $[(F,K) \sim_{\theta} (H,D)] \sim_{\cap} [(G,Y) \sim_{\theta} (H,D)]$. $(F,K) \sim_{\theta} (H,D) = (V,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$V(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K-D \\ F'(\omega) \cap H'(\omega), & \omega \in K \cap D \end{cases}$$

$(G,Y) \sim_{\theta} (H,D) = (W,Y)$ olsun. Burada $\forall \omega \in Y$ için;

$$W(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \omega \in Y-D \\ G'(\omega) \cap H'(\omega), & \omega \in Y \cap D \end{cases}$$

$(V,K) \sim_{\cap} (W,Y) = (T,K)$ olsun. Burada $\forall \omega \in K$ için;

$$T(\omega) = \begin{cases} V(\omega), & \omega \in K-Y \\ V(\omega) \cap W(\omega), & \omega \in K \cap Y \end{cases}$$

Buradan,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in (K-D)-Y = K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cap H'(\omega), & \omega \in (K \cap D)-Y = K \cap Y' \cap D \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in (K-D) \cap (Y-D) = K \cap Y \cap D' \\ F(\omega) \cap [G'(\omega) \cap H'(\omega)], & \omega \in (K-D) \cap (Y \cap D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cap H'(\omega)] \cap G(\omega), & \omega \in (K \cap D) \cap (Y-D) = \emptyset \\ [F'(\omega) \cap H'(\omega)] \cap [G'(\omega) \cap H'(\omega)], & \omega \in (K \cap D) \cap (Y \cap D) = K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece,

$$T(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D' \\ F'(\omega) \cap H'(\omega), & \omega \in K \cap Y' \cap D \\ F(\omega) \cap G(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D' \\ F'(\omega) \cap G'(\omega) \cap H'(\omega), & \omega \in K \cap Y \cap D \end{cases}$$

Böylece $K \cap Y \cap D = \emptyset$ için $N = T$ olduğu görülür.

Aşağıda yer alan eşitlikler de $K \cap Y \cap D = \emptyset$ şartı altında sağlanır. İspatlar benzer şekilde yapıldığı için, ispatsız şekilde verilmiştir.

$$2) [(F, K) \widetilde{\cup} (G, Y)]_{\theta} (H, D) = [(F, K) \widetilde{\theta} (H, D)] \widetilde{\cup} [(G, Y) \widetilde{\theta} (H, D)].$$

$$3) [(F, K) \widetilde{\setminus} (G, Y)]_{\theta} (H, D) = [(F, K) \widetilde{\theta} (H, D)] \widetilde{\setminus} [(G, Y) \widetilde{\theta} (H, D)].$$

$$4) [(F, K) \widetilde{\Delta} (G, Y)]_{\theta} (H, D) = [(F, K) \widetilde{\theta} (H, D)] \widetilde{\Delta} [(G, Y) \widetilde{\theta} (H, D)].$$

$$5) [(F, K) \widetilde{+} (G, Y)]_{\theta} (H, D) = [(F, K) \widetilde{\theta} (H, D)] \widetilde{+} [(G, Y) \widetilde{\theta} (H, D)].$$

$$6) [(F, K) \widetilde{\gamma} (G, Y)]_{\theta} (H, D) = [(F, K) \widetilde{\theta} (H, D)] \widetilde{\gamma} [(G, Y) \widetilde{\theta} (H, D)].$$

$$7) [(F, K) \widetilde{*} (G, Y)]_{\theta} (H, D) = [(F, K) \widetilde{\theta} (H, D)] \widetilde{*} [(G, Y) \widetilde{\theta} (H, D)].$$

$$8) [(F, K) \widetilde{\theta} (G, Y)]_{\theta} (H, D) = [(F, K) \widetilde{\theta} (H, D)] \widetilde{\theta} [(G, Y) \widetilde{\theta} (H, D)].$$

$$9) [(F, K) \widetilde{\lambda} (G, Y)]_{\theta} (H, D) = [(F, K) \widetilde{*} (H, D)] \widetilde{\lambda} [(G, Y) \widetilde{\theta} (H, D)].$$

9.4.3.1. Sonuç Bu tezimizde, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \widetilde{\cap})$ cebirsel yapısının komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup yani bir band olduğu gösterildi. *Sonuç 9.3.1* de $(S_E(U), \widetilde{\theta})$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu,

Teorem 9.4.3 (1) başlığında, $\tilde{\cdot}_\theta$ işleminin $\tilde{\cdot}_\cap$ işlemine $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı, gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \tilde{\cdot}_\cap, \tilde{\cdot}_\theta)$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, toplamsal idempotent birimsiz ve sıfırsız bir (sağ) yakın yarı-halkadır.

9.4.3.2. *Sonuç* Bu tezimizde, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında $(S_E(U), \tilde{\cdot}_\cup)$ cebirsel yapısının komutatif olmayan, idempotent bir yarıgrup yani bir band olduğu gösterildi. *Sonuç 9.3.1* de $(S_E(U), \tilde{\cdot}_\theta)$ cebirsel yapısının, (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında komutatif ve idempotent olmayan bir yarıgrup olduğu, Teorem 9.4.3 (2) başlığında, $\tilde{\cdot}_\theta$ işleminin $\tilde{\cdot}_\cup$ işlemine $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında sağdan dağıldığı gösterilmiştir. Sonuç olarak, $T \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartları altında, $(S_E(U), \tilde{\cdot}_\cup, \tilde{\cdot}_\theta)$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir (sağ) yakın yarı-halkadır.

9.4.3.3. *Sonuç* (F, T) , (G, Z) ve (H, M) , $S_E(U)$ kümesinin elemanları olmak üzere, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında, $(S_E(U), \tilde{\cdot}_\setminus, \tilde{\cdot}_\theta)$, $(S_E(U), \tilde{\cdot}_\Delta, \tilde{\cdot}_\theta)$, $(S_E(U), \tilde{\cdot}_+, \tilde{\cdot}_\theta)$, $(S_E(U), \tilde{\cdot}_\gamma, \tilde{\cdot}_\theta)$, $(S_E(U), \tilde{\cdot}_*, \tilde{\cdot}_\theta)$, $(S_E(U), \tilde{\cdot}_\theta, \tilde{\cdot}_\theta)$ cebirsel yapılarının, komutatif ve idempotent olmayan, birimsiz ve sıfırsız bir (sağ) yakın yarı-halka olduğu gösterilebilir. Buradaki, ilk işlemlerin $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$ şartı altında $(\tilde{\cdot}_\Delta)$ işlemi $T \cap Z' \cap M = \emptyset$ şartı altında birleşmeli olduğu, gösterilmiştir.

10. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, yeni esnek küme işlemi olarak esnek ikili parçalı kesişim, birleşim, artı, gamma, lamda, teta, yıldız işlemleri tanıtılmış, bu işlemlerin özellikleri incelenmiş; bu işlemlerin birbirleri ile olan ilişkilerine bakılmış, hem $S_E(U)$ hem de sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde, bu işlemlerin hangi birli ve ikili cebirsel yapılar oluşturduğu tüm detaylarıyla birlikte sunulmuştur.

Tezin ilk bölümünde, esnek kümeler, esnek işlemler ve cebirsel yapılar ile ilgili detaylı bir literatür taraması yapılmış; ikinci bölümünde tez boyunca kullanılacak olan klasik küme işlemleri, esnek kümeler ve cebirsel yapılar ile ilgili temel kavramlar sunulmuştur. Üçüncü bölümde esnek ikili parçalı kesişim işlemi; dördüncü bölümde esnek ikili parçalı birleşim işlemi; beşinci bölümde esnek ikili parçalı artı işlemi; altıncı bölümde esnek ikili parçalı gamma işlemi; yedinci bölümde esnek ikili parçalı lamda işlemi; sekizinci bölümde esnek ikili parçalı yıldız işlemi; dokuzuncu bölümde esnek ikili parçalı teta işleminin tüm özellikleri detaylı şekilde incelenmiş, ispatlarıyla sunulmuş, dağılma kuralları detaylı bir şekilde incelenmiştir. Kesişim ve birleşim işlemleri klasik kümelerde de olduğundan, özellikle esnek ikili parçalı kesişim ve birleşim işlemleri için, klasik kümelerde bu işlemlerin özelliklerinin esnek küme işlemlerinde yansımaları nasıl olur sorusu özellikle göz önünde bulundurularak yeni pek çok özellik verilmiş ve ispatlarıyla sunulmuştur. Ayrıca, bu işlemlerin sadece hangi birli cebirsel yapılar oluşturduğunu değil; hangi ikili cebirsel yapılar da oluşturduğunu da görebilmek için her bir işlemin diğer esnek küme işlemlerine dağılmasına da tek tek bakılmış ve tezin bu bölümünde sistematik olarak verilen aşağıdaki çok ilginç sonuçlar elde edilmiştir.

$S_E(U)$ kümesi üzerinde belirli şartlar altında, esnek işlemlerin hangi birli cebirsel yapılar oluşturduğuna bakılmış ve $(S_E(U), \widetilde{\cap})$ cebirsel yapısının, sağ birimi $\emptyset_\emptyset$ ve her elemanın sol tersi $\emptyset_\emptyset$ olan idempotent bir sol-sağ sistem; $(S_E(U), \widetilde{\cup})$ cebirsel yapısının, sağ birimi $\emptyset_\emptyset$, her elemanın sol tersi $\emptyset_\emptyset$ olan idempotent bir sol-sağ sistem; $(S_E(U), \widetilde{+})$ cebirsel yapısının sağ birimi $\emptyset_\emptyset$, her elemanın sol tersi $\emptyset_\emptyset$ olan idempotent olmayan bir sol-sağ sistem; $(S_E(U), \widetilde{\gamma})$ cebirsel yapısının, sağ birimi $\emptyset_\emptyset$, her elemanın sol tersi $\emptyset_\emptyset$ olan

komutatif ve idempotent olmayan bir sol-sağ sistem; $(S_E(U), \tilde{\lambda})$ cebirsel yapısının, sağ birimi $\emptyset_\emptyset$, her elemanın sol tersi $\emptyset_\emptyset$ olan komutatif ve idempotent olmayan bir sol-sağ sistem; $(S_E(U), \tilde{*})$ cebirsel yapısının, sağ birimi $\emptyset_\emptyset$, her elemanın sol tersi $\emptyset_\emptyset$ olan komutatif ve idempotent olmayan bir sol-sağ sistem; $(S_E(U), \tilde{\theta})$ cebirsel yapısının, sağ birimi $\emptyset_\emptyset$, her elemanın sol tersi $\emptyset_\emptyset$ olan komutatif ve idempotent olmayan bir sol-sağ sistem olduğu görülmüştür.

K , E kümesinin bir alt kümesi olmak üzere, $S_K(U)$ kümesi üzerinde esnek işlemlerin hangi birli cebirsel yapılar oluşturduğuna bakılmış ve $(S_K(U), \tilde{\cap})$ cebirsel yapısının birimi U_K olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes; $(S_K(U), \tilde{\cup})$ cebirsel yapısının birimi $\emptyset_A$ olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafes olduğu gösterilmiştir.

$S_E(U)$ kümesi üzerinde esnek işlemlerin hangi ikili cebirsel yapılar oluşturduğuna bakılmış ve $(S_E(U), \cap_R, \tilde{\cap})$, $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \tilde{\cap})$, $(S_E(U), \tilde{\cap}, \tilde{\cap})$ cebirsel yapısının komutatif olmayan, idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halka; $(S_E(U), \cup_R, \tilde{\cap})$, $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \tilde{\cap})$ ve $(S_E(U), \tilde{\cup}, \tilde{\cap})$ cebirsel yapılarının komutatif olmayan, idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halka; $(S_E(U), \cup_R, \tilde{\cap})$ ve $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \tilde{\cap})$ cebirsel yapılarının sıfır simetrik olmayan komutatif bir (sağ) yakın yarı-halka;

$(S_E(U), \Delta_\varepsilon, \tilde{\cap})$, $(S_E(U), \setminus_\varepsilon, \tilde{\cap})$, $(S_E(U), \gamma_\varepsilon, \tilde{\cap})$, $(S_E(U), +_\varepsilon, \tilde{\cap})$, $(S_E(U), \lambda_\varepsilon, \tilde{\cap})$, $(S_E(U), *_\varepsilon, \tilde{\cap})$, $(S_E(U), \theta_\varepsilon, \tilde{\cup})$ cebirsel yapılarının da sıfır simetrik ve komutatif olmayan, çarpımsal idempotent, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halka; $(S_E(U), \tilde{\Delta}, \tilde{\cap})$, $(S_E(U), \tilde{\setminus}, \tilde{\cap})$, $(S_E(U), \tilde{\gamma}, \tilde{\cap})$ cebirsel yapılarının; belirli şartlar altında $(S_E(U), \tilde{+}, \tilde{\cup})$, $(S_E(U), \tilde{*}, \tilde{\cap})$, $(S_E(U), \tilde{\theta}, \tilde{\cap})$, $(S_E(U), \tilde{\lambda}, \tilde{\cap})$ cebirsel yapılarının komutatif olmayan, çarpımsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir sağ yarı-halka olduğu verilmiştir.

Ayrıca, $S_K(U)$ kümesi üzerinde esnek işlemlerin hangi ikili cebirsel yapılar oluşturduğuna bakılmıştır. $(S_K(U), \cap_R, \tilde{\cap})$, $(S_K(U), \tilde{\cap}, \tilde{\cap})$ ve $(S_K(U), \cap_\varepsilon, \tilde{\cap})$ cebirsel yapılarının belirli şartlar

altında, komutatif, idempotent, birimli, sıfırsız bir yarı-halka; $(S_K(U), \cup_R, \sim)$, $(S_K(U), \cup_\varepsilon, \sim)$ ve $(S_K(U), \sim, \sim)$ cebirsel yapılarının komutatif, idempotent, birimli bir hemihalka; $(S_K(U), \Delta_R, \sim)$ cebirsel yapısının da komutatif, çarpımsal idempotent, birimli bir hemihalka ve yine aynı yapının birimli değişmeli bir halka, ayrıca bir Bool Halkası; $(S_K(U), \emptyset_K, U_K, \cup_R, \sim)$, $(S_K(U), \emptyset_K, U_K, \cup_\varepsilon, \sim)$ ve $(S_K(U), \emptyset_K, U_K, \sim, \sim)$ yapısının dağılmalı, tümlemeli, sınırlı bir kafes, dolayısıyla bir Boolean Cebiri; $(S_K(U), \emptyset_K, U_K, ^c, \cup_R, \sim)$, $(S_K(U), \emptyset_K, U_K, ^c, \cup_\varepsilon, \sim)$ ve $(S_K(U), \emptyset_K, U_K, ^c, \sim, \sim)$ De Morgan , Kleene ve Stone cebiri; $(S_K(U), \Delta_\varepsilon, \sim)$ cebirsel yapısının da komutatif, çarpımsal idempotent, birimli, sıfırsız bir yarı-halka; $(S_K(U), \sim, \sim)$ cebirsel yapısının hiçbir şart olmaksızın, komutatif, toplamsal idempotent, birimli ve sıfırsız bir yarı-halka oldukları verilmiştir.

$S_E(U)$ kümesi üzerinde belirli şartlar altında; $(S_E(U), \cup_R, \sim)$, $(S_E(U), \cap_R, \sim)$, $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \sim)$, $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \sim)$, $(S_E(U), \sim, \sim)$ ve $(S_E(U), \sim, \sim)$ cebirsel yapılarının komutatif olmayan, idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halka; $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \sim)$ ve $(S_E(U), \cap_R, \sim)$ cebirsel yapılarının komutatif olmayan, idempotent, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halka ve ayrıca bu yapıların sıfır simetrik olmayan bir (sağ) yakın yarı-halka: $(S_E(U), \Delta_\varepsilon, \sim)$, $(S_E(U), \setminus_\varepsilon, \sim)$, $(S_E(U), +_\varepsilon, \sim)$, $(S_E(U), \gamma_\varepsilon, \sim)$, $(S_E(U), \lambda_\varepsilon, \sim)$, $(S_E(U), *_\varepsilon, \sim)$, $(S_E(U), \theta_\varepsilon, \sim)$ cebirsel yapılarının sıfır simetrik ve komutatif olmayan, çarpımsal idempotent, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halka; $(S_E(U), \sim, \sim)$, $(S_E(U), \sim, \sim)$, $(S_E(U), \sim, \sim)$, $(S_E(U), \sim, \sim)$, $(S_E(U), \sim, \sim)$, $(S_E(U), \sim, \sim)$, $(S_E(U), \sim, \sim)$ cebirsel yapılarının da komutatif olmayan, çarpımsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir sağ yarı-halka olduğu gösterilmiştir.

$S_K(U)$ kümesi üzerinde $(S_K(U), \cup_R, \sim)$, $(S_K(U), \cup_\varepsilon, \sim)$ ve $(S_K(U), \sim, \sim)$ cebirsel yapılarının komutatif, idempotent, birimli, sıfırsız bir yarı-halka; belirli şartlar altında $(S_K(U), \cup_R, \sim)$, $(S_K(U), \cup_\varepsilon, \sim)$ ve $(S_K(U), \sim, \sim)$ cebirsel yapılarının komutatif, idempotent, birimli, sıfırsız bir yarı-halka; $(S_K(U), \cap_R, \sim)$, $(S_K(U), \cap_\varepsilon, \sim)$ ve $(S_K(U), \sim, \sim)$ cebirsel yapılarının komutatif,

idempotent, birimli bir hemihalka; $(S_K(U), U_K, \emptyset_K, \cap_\varepsilon, \widetilde{\cup})$, $(S_K(U), U_K, \emptyset_K, \cap_R, \widetilde{\cup})$ ve $(S_K(U), U_K, \emptyset_K, \widetilde{\cap}, \widetilde{\cup})$ dağılmalı, tümlemeli, sınırlı bir kafes, dolayısıyla bir Boolean Cebiri ve $(S_K(U), U_K, \emptyset_K, \cap_\varepsilon, \widetilde{\cup})$, $(S_K(U), U_K, \emptyset_K, \cap_\varepsilon, \widetilde{\cap})$ ve $(S_K(U), U_K, \emptyset_K, \cap_\varepsilon, \widetilde{\cap}, \widetilde{\cup})$ yapılarının De Morgan Cebiri olduğu gösterilmiştir.

$S_E(U)$ kümesi üzerinde belirli şartlar altında $(S_E(U), U_R, \widetilde{+})$, $(S_E(U), \cap_R, \widetilde{+})$, $(S_E(U), \widetilde{\cap}, \widetilde{+})$ ve $(S_E(U), \widetilde{\cup}, \widetilde{+})$ cebirsel yapılarının komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir (sağ) yakın yarı-halka; $(S_E(U), U_\varepsilon, \widetilde{+})$, $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \widetilde{+})$ cebirsel yapılarının komutatif ve sıfır simetrik olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halka olduğu gösterilmiştir. Benzer şekilde, $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \widetilde{+})$ cebirsel yapısının belli şartlar altında, komutatif ve sıfır simetrik olmayan toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halka olduğu, $(S_E(U), \setminus_\varepsilon, \widetilde{+})$, $(S_E(U), \Delta_\varepsilon, \widetilde{+})$, $(S_E(U), +_\varepsilon, \widetilde{+})$, $(S_E(U), \gamma_\varepsilon, \widetilde{+})$, $(S_E(U), \lambda_\varepsilon, \widetilde{+})$, $(S_E(U), *_\varepsilon, \widetilde{+})$, $(S_E(U), \theta_\varepsilon, \widetilde{+})$ cebirsel yapılarının da belli şartlar altında komutatif, sıfır simetrik ve idempotent olmayan, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halka olduğu gösterilmiştir.

$S_E(U)$ kümesi üzerinde belirli şartlar altında $(S_E(U), U_R, \widetilde{\gamma})$, $(S_E(U), \cap_R, \widetilde{\gamma})$, $(S_E(U), U_\varepsilon, \widetilde{\gamma})$, $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \widetilde{\gamma})$, $(S_E(U), \widetilde{\cap}, \widetilde{\gamma})$ ve $(S_E(U), \widetilde{\cup}, \widetilde{\gamma})$ cebirsel yapılarının komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halka; $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \widetilde{\gamma})$ ve $(S_E(U), U_\varepsilon, \widetilde{\gamma})$ cebirsel yapılarının da komutatif ve sıfır simetrik olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halka; $(S_E(U), \setminus_\varepsilon, \widetilde{\gamma})$, $(S_E(U), \Delta_\varepsilon, \widetilde{\gamma})$, $(S_E(U), +_\varepsilon, \widetilde{\gamma})$, $(S_E(U), \gamma_\varepsilon, \widetilde{\gamma})$, $(S_E(U), \lambda_\varepsilon, \widetilde{\gamma})$, $(S_E(U), *_\varepsilon, \widetilde{\gamma})$, $(S_E(U), \theta_\varepsilon, \widetilde{\gamma})$ cebirsel yapılarının komutatif, sıfır simetrik ve idempotent olmayan, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halka; $(S_E(U), \setminus_\varepsilon, \widetilde{\gamma})$ ve $(S_E(U), \setminus, \widetilde{\gamma})$ cebirsel yapılarının komutatif ve idempotent olmayan, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halka; $(S_E(U), \widetilde{\Delta}, \widetilde{\gamma})$, $(S_E(U), \widetilde{+}, \widetilde{\gamma})$, $(S_E(U), \widetilde{\gamma}, \widetilde{\gamma})$, $(S_E(U), \widetilde{*}, \widetilde{\gamma})$ ve $(S_E(U), \widetilde{\theta}, \widetilde{\gamma})$ cebirsel yapılarının da, komutatif ve idempotent olmayan, birimsiz ve sıfırsız bir (sağ) yakın yarı-halka olduğu gösterilmiştir.

$S_E(U)$ kümesi üzerinde belirli şartlar altında, $(S_E(U), \cap_R, \tilde{\lambda})$ ve $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \tilde{\lambda})$ cebirsel yapılarının komutatif ve sıfır simetrik olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halka; $(S_E(U), \cap_R, \tilde{\lambda})$, $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \tilde{\lambda})$ ve $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \tilde{\lambda})$ cebirsel yapılarının komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halka; $(S_E(U), \cup_R, \tilde{\lambda})$, $(S_E(U), \cap, \tilde{\lambda})$ ve $(S_E(U), \cup, \tilde{\lambda})$ cebirsel yapılarının da komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir (sağ) yakın yarı-halka; $(S_E(U), \setminus_\varepsilon, \tilde{\lambda})$, $(S_E(U), \Delta_\varepsilon, \tilde{\lambda})$, $(S_E(U), +_\varepsilon, \tilde{\lambda})$, $(S_E(U), \gamma_\varepsilon, \tilde{\lambda})$, $(S_E(U), \lambda_\varepsilon, \tilde{\lambda})$, $(S_E(U), *_\varepsilon, \tilde{\lambda})$, $(S_E(U), \theta_\varepsilon, \tilde{\lambda})$ cebirsel yapılarının komutatif, sıfır simetrik ve idempotent olmayan, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halka; $(S_E(U), \setminus, \tilde{\lambda})$, $(S_E(U), \Delta, \tilde{\lambda})$, $(S_E(U), +, \tilde{\lambda})$, $(S_E(U), \gamma, \tilde{\lambda})$, $(S_E(U), *, \tilde{\lambda})$, $(S_E(U), \theta, \tilde{\lambda})$ cebirsel yapılarının da komutatif ve idempotent olmayan, birimsiz ve sıfırsız bir (sağ) yakın yarı-halka oldukları bulunmuştur.

$S_E(U)$ kümesi üzerinde belirli şartlar altında $(S_E(U), \cup_R, \tilde{*})$, $(S_E(U), \cap_R, \tilde{*})$, $(S_E(U), \cap, \tilde{*})$ ve $(S_E(U), \cup, \tilde{*})$ cebirsel yapılarının komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir (sağ) yakın yarı-halka; $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \tilde{*})$ ve $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \tilde{*})$ cebirsel yapılarının komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halka; $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \tilde{*})$ ve $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \tilde{*})$ cebirsel yapılarının sıfır simetrik olmayan bir (sağ) yakın yarı-halka; $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \tilde{*})$ cebirsel yapısı bir komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halka; $(S_E(U), \setminus_\varepsilon, \tilde{*})$, $(S_E(U), \Delta_\varepsilon, \tilde{*})$, $(S_E(U), +_\varepsilon, \tilde{*})$, $(S_E(U), \gamma_\varepsilon, \tilde{*})$, $(S_E(U), \lambda_\varepsilon, \tilde{*})$, $(S_E(U), *_\varepsilon, \tilde{*})$, $(S_E(U), \theta_\varepsilon, \tilde{*})$ cebirsel yapılarının belirli şartlar altında komutatif, sıfır simetrik ve idempotent olmayan, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halka; $(S_E(U), \setminus, \tilde{*})$, $(S_E(U), \Delta, \tilde{*})$, $(S_E(U), +, \tilde{*})$, $(S_E(U), \gamma, \tilde{*})$, $(S_E(U), *, \tilde{*})$, $(S_E(U), \theta, \tilde{*})$ cebirsel yapılarının da komutatif ve idempotent olmayan, birimsiz ve sıfırsız bir (sağ) yakın yarı-halka olduğu verilmiştir.

$S_E(U)$ kümesi üzerinde belirli şartlar altında $(S_E(U), \cup_R, \tilde{\theta})$, $(S_E(U), \cap_R, \tilde{\theta})$, $(S_E(U), \cap, \tilde{\theta})$ ve $(S_E(U), \cup, \tilde{\theta})$ cebirsel yapılarının komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve

sıfırsız bir (sağ) yakın yarı-halka; $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \tilde{\theta})$ ve $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \tilde{\theta})$ cebirsel yapılarının komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırsız bir yarı-halka; $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \tilde{\theta})$ cebirsel yapısının komutatif olmayan, toplamsal idempotent, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halka; $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \tilde{\theta})$ ve $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \tilde{\theta})$ cebirsel yapılarının sıfır simetrik olmayan bir (sağ) yakın yarı-halka; $(S_E(U), \setminus_\varepsilon, \tilde{\theta})$, $(S_E(U), \Delta_\varepsilon, \tilde{\theta})$, $(S_E(U), +_\varepsilon, \tilde{\theta})$, $(S_E(U), \gamma_\varepsilon, \tilde{\theta})$, $(S_E(U), \lambda_\varepsilon, \tilde{\theta})$, $(S_E(U), *_\varepsilon, \tilde{\theta})$ ve $(S_E(U), \theta_\varepsilon, \tilde{\theta})$ cebirsel yapılarının komutatif, sıfır simetrik ve idempotent olmayan, birimsiz ve sıfırlı bir (sağ) yakın yarı-halka; $(S_E(U), \tilde{\setminus}, \tilde{\theta})$, $(S_E(U), \tilde{\Delta}, \tilde{\theta})$, $(S_E(U), \tilde{+}, \tilde{\theta})$, $(S_E(U), \tilde{\gamma}, \tilde{\theta})$, $(S_E(U), \tilde{*}, \tilde{\theta})$ ve $(S_E(U), \tilde{\theta}, \tilde{\theta})$ cebirsel yapılarının da komutatif ve idempotent olmayan, birimsiz ve sıfırsız bir (sağ) yakın yarı-halka olduğu sonucuna varılmıştır.

Soyut cebirin amacı, cebirsel yapıları sınıflandırarak, aynı sınıf içinde olan cebirsel yapıların, onları oluşturan küme ve ikili işlemlerden bağımsız olarak, ortak özelliklerini bulmak, sergilemek ve bu özelliklerden bazı sonuçlar çıkarmak olduğundan, çalışmanın sadece esnek küme teorisine değil, klasik cebire de fayda sağlayacağını ümit ederek gelecek çalışmalarda, yeni esnek küme işlemleri tanımlayıp, bu işlemlerin esnek ikili parçalı işlemlerle olan ilişkilerine bakılarak bu katkı değerinin daha da arttırılabileceğini düşünüyoruz.

KAYNAKLAR

- Abbas, M., Ali, B. and Romaguera, S. (2014). On Generalized Soft Equality and Soft Lattice Structure. *Filomat*, 28(6), 1191–1203.
- Abbas, M., Ali, M. I and Romaguera, S. (2017). Generalized Operations in Soft Set Theory via Relaxed Conditions on Parameters. *Filomat*, 31(19), 5955–5964.
- Acar, U., Koyuncu, F. and Tanay, B. (2010). Soft Sets and Soft Rings. *Computers Mathematics Applications*, 59(11), 3458-3463.
- Akbulut, E. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended Difference and Lamda Operations*. Unpublished Master's Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Aktaş, H. and Çağman, N. (2007). Soft Sets and Soft Groups. *Information Sciences*, 177(1), 2726-2735.
- Aktaş, H. and Özlü, Ş. (2014). Cyclic Soft Groups and Their Applications on Groups. *The Scientific World Journal*, Volume 2014 Article ID 437324, 5 pages.
- Ali, B., Saleem, N., Sundus, N., Khaleeq, S., Saeed, M. and George, R. A. (2002). Contribution to the Theory of Soft Sets via Generalized Relaxed Operations. *Mathematics*, 10(15), 2636.
- Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K. and Shabir, M. (2009). On Some New Operations in Soft Set Theory. *Computers Mathematics with Applications*, 57(9), 1547-1553.
- Ali, M. I., Shabir, M. and Naz, M. (2011). Algebraic Structures of Soft Sets Associated with New Operations. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(9), 2647–2654.
- Al-shami, T. M. and El-Shafei, M. (2020). T-soft Equality Relation. *Turkish Journal of Mathematics*, 44(4), 1427-1441.
- Atagün, A. O., Kamacı, H. and Oktay, O. (2018). Reduced Soft Matrices and Generalized Products with Applications in Decision Making. *Neural Computing and Applications*, 29(9), 445-456.
- Aybek, F. (2024). *New Restricted and Extended Soft Set Operations*. Unpublished Master's Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Aydın, K. ve Kandamar, H. (2013). *Soyut Cebir* (Birinci Baskı). Türkiye: Kriter Yayınevi, 71-72.
- Babitha, K. V. and Sunil, J. J. (2010). Soft Set Relations And Functions. *Computers and Mathematics with Applications*, 60(7), 1840–1849.

- Bayraktar, M. (2006). *Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi* (Birinci Baskı). Türkiye: Gazi Kitabevi, 87-185.
- Birkhoff, G. (1967). *Lattice Theory*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- Chen, D., Tsang, E. C. C. and Yeung, D.S. (2003). Some Notes on the Parameterization Reduction of Soft Sets. *International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, 3, 1442–1445.
- Chen, D., Tsang, E. C. C., Yeung, D. S. and Wang, X. (2005). The Parametrization Reduction of Soft Sets and its Applications. *Computers Mathematics Applications*, 49(5-6), 757–763.
- Clay, J. R. and Lawver, D. A. (1969). Boolean Near-Rings. *Canadian Mathematical Bulletin*, 12(3), 265- 273.
- Clifford, A. H. (1954). Bands of Semigroups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 5(3), 499–504.
- Çağman, N. (2021). Conditional Complements of Sets and Their Application to Group Theory. *Journal of New Results in Science*, 10(3), 67-74.
- Çağman, N. and Enginoğlu, S. (2010a) Soft Set Theory and Uni-int Decision Making. *European Journal of Operational Research*, 207(2), 848-855.
- Çağman, N. and Enginoğlu, S. (2010b). Soft Matrix Theory and its Decision Making. *Computers Mathematics with Applications*, 59(10), 3308-3314.
- Çallıalp, F. (1994). *Örneklerle Soyut Matematik* (Altıncı Baskı). Türkiye: Birsen Yayınevi, 1-7.
- Dauben, J. W. (1990). *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton University Press.
- Demirci, A. M. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended Union, Plus and Theta Operations*. Unpublished Master's Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Dickson, L. E. (1905). Definitions of a Group and a Field by Independent Postulates. *Transactions American Mathematical Society*, 6(2), 198-204.
- Eren, Ö. F. (2019). *Esnek Küme Teorisi Üzerine*. Yayımlanmış Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.
- Feng, F. and Li, Y. (2013). Soft Subsets and Soft Product Operations. *Information Sciences*, 232(20), 44-57.
- Feng, F., Jun, Y. B. and Zhao, X. (2008). Soft Semirings. *Computers and Mathematics with Applications*, 56 (10), 2621-2628.

- Feng, F., Li, C., Davvaz, B. and Ali, M. I. (2010). Soft Sets Combined with Fuzzy Sets and Rough Sets: A Tentative Approach. *Soft Computing- A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications*, 14(9), 899–911.
- Feng, F., Li Y. and Çağman N. (2012). Generalized Uni-Int Decision Making Schemes Based on Choice Value Soft Sets. *European Journal of Operational Research*, 220(1), 162–170.
- Ge, X. and Yang, S. (2011). Investigations on Some Operations of Soft Sets. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 75, 1113-1116.
- Gong, K., Xiao, Z. and Zhang, X. (2010). The Bijective Soft Set with its Operations. *Computers Mathematics Applications*, 60(8), 2270–2278.
- Goodearl, K. R. (1979). *Von Neumann Regular Rings*. Pitman, Londra.
- Hacısalıhoğlu, H. (2007). *Soyut Matematik (İkinci Baskı)*. Türkiye: Üniversite Yayınevi, 181.
- Herawan, T. (2010). Soft Set-Based Decision Making For Patients Suspected Influenza-Like Illness. *International Journal of Modern Physics Conference Series*, 1(1), 1–5.
- Herawan, T. and Deris M. M. (2010). Soft Decision Making for Patients Suspected Influenza. *Lecture Notes In Computer Science, Springer* 6018, 405–418.
- Hoorn, W. G. V. and Rootselaar, V. B. (1967). Fundamental Notions in the Theory of Seminearrings. *Compositio Mathematica*, 18(1-2), 65-78.
- Husain, S. and Shivani K. M. (2018). A Study of Properties of Soft Set and its Applications. *International Research Journal of Engineering and Technology*, 5(1), 363-372.
- Jiang, Y., Tang, Y., Chen, Q., Wang, J. and Tang, S. (2010). Extending Soft Sets with Descriptionlogics. *Computers Mathematics Applications*, 59(6), 2087–2096.
- Jun, Y. B. (2008). Soft BCK-BCI-algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(5), 1408-1413.
- Jun, Y. B. and Park, C. H. (2008). Applications of Soft Sets in Ideal Theory of BCK-BCI-Algebras. *Information Sciences: An International Journal*, 178 (11), 2466-2475.
- Jun, Y. B., Lee K. J. and Khan, A. (2010). Soft Ordered Semigroups. *Mathematical Logic Quarterly*, 56(1), 42–50.
- Jun, Y. B., Lee, K. J. and Zhan, J. (2009). Soft p-ideals of Soft BCI-algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, 58(10), 2060-2068.
- Jun, Y. B., Lee, K. S. and Park, C. H. (2010). Fuzzy Soft Set Theory Applied to BCK/BCI-Algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, 59, 3180-3192.

- Kamacı, H., Saltık, K., Akız, H. F. and Atagün, A. O. (2018). Cardinality Inverse Soft Matrix Theory and its Applications in Multicriteria Group Decision Making. *Journal of Intelligent Fuzzy Systems*, 34, 2031-2049.
- Karaaslan, F. (2019). Some Properties of AG*-groupoids and AG-bands Under SI-product Operation. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 36(1), 231-239.
- Karaaslan, F., Ullah, A. and Ahmad, I. (2021). Normal Bipolar Soft Subgroups. *Fuzzy Information and Engineering*, 13(1), 79-98.
- Karaçay, T., Eş, H. ve İbrahimoglu, İ. (2017). *Calculus* (Birinci Baskı). Ankara:Seçkin Yayıncılık, 61-71.
- Karvellas, P. H. (1974). Inversive Semirings. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 18(3), 277-288.
- Kazancı, O., Yılmaz, S. and Yamak, S. (2010). Soft Sets and Soft BCH-algebras. *Hacettepe Journal of Mathematics Statistics*, 39(2), 205-217.
- Kharal, A. (2014). Soft Approximations and Uni-Int Decision Making. *The Scientific World Journal*, 10(2), 143-162.
- Kilp, M., Knauer, U. and Mikhalev, A. V. (2000). *Monoids, Acts and Categories* (İkinci Baskı). Berlin: De Gruyter Expositions in Mathematics, (29).
- Kökçü, H. (2024). *A Detailed Perspective On Restricted and Extended Intersection, Union and Difference Soft Set Operations*. Unpublished Master's Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Li, F. (1996). Regularity of Semigroup Rings. *Semigroup Forum*, 53, 72-81.
- Liu, X. Y., Feng F. and Jun, Y. B. (2012). A Note on Generalized Soft Equal Relations. *Computers and Mathematics with Applications*, 64(4), 572-578.
- Maan, H. B. (1944). On Certain Systems Which are Almost Groups. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 50(12), 879-881.
- Maji, P. K., Biswas, R. and Roy, A. R. (2003). Soft Set Theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 45, 555-562.
- Maji, P. K., Roy, A. R. and Biswas, R. (2002). An Application of Soft Sets in a Decision Making Problem. *Computers and Mathematics with Applications*, 44(8-9), 1077-1083.
- Molodtsov, D. (1999). Soft Set Theory-First Results. *Computers and Mathematics with Applications*, 37(4-5), 19-31.
- Mushrif, M., Sengupta, S. and Ray, A. K. (2006). Texture Classification Using a Novel, Soft-Set Theory Based Classification, Algorithm. *Lecture Notes Computer Science*, 3851, 246-254.

- Neog ,T. J. and Sut D. K. (2011). A New Approach to the Theory of Soft Set. *International Journal of Computer Applications*, 32(2), 1-6.
- Nesin, A. (2019). *Sezgisel Kümeler Kuramı* (Altıncı Baskı). Türkiye: Nesin Yayıncılık, 7-59.
- Park, C. H., Jun, Y. B. and Öztürk, M. A. (2008). Soft WS-algebras. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 23(2), 313-324.
- Pawlak, Z. (1982). Rough Sets. *Internatiol Journal of Information and Computer Sciences*, 11(1), 341-356.
- Pei, D. and Miao, D. (2005). From Soft Sets to Information Systems. *2005 IEEE International Conference on Granular Computing*, 2, 617-621.
- Petchimuthu, S., Garg, H., Kamacı, H. and Atagün, A.O. (2020). The Mean Operators and Generalized Products of Fuzzy Soft Matrices and Their Applications in MCGDM. *Computational and Applied Mathematics*, 39 (2), 1-32.
- Petrich, M. (1973). *Introduction to Semiring*. Charles E Merrill Publishing Company, Ohio, 198.
- Pilz, G. (1983). *Near-rings*. North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 470.
- Qin, K. and Hong, Z. (2010). On Soft Equality. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(5), 1347-1355.
- Reutenauer, C. and Straubing, H. (1984). Inversion of Matrices Over a Commutative Semiring. *Journal of Algebra*, 88(2), 350-360.
- Sarialioğlu, M. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended Intersection, Gamma and Star Operations*. Unpublished Master's Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Sen, J. (2014). On Algebraic Structure of Soft Sets. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 7(6), 1013-1020.
- Sezer, A. S., Çağman, N. and Atagün, A. O. (2014). Soft Intersection Interior Ideals, Quasi-ideals and Generalized Bi-Ideals; A New Approach to Semigroup Theory II. *Journal of Multiple-valued Logic and Soft Computing*, 23(1-2), 161-207.
- Sezer, A. S., Çağman, N., Atagün, A.O., Irfan Ali, M. and Türkmen, E. (2015). Soft Intersection Semigroups, Ideals and Bi-Ideals; A New Application on Semigroup Theory I. *Filomat*, 29(5), 917-946.
- Sezgin, A., Ahmad, S. and Mehmood, A. (2019). A New Operation on Soft Sets: Extended Difference of Soft Sets. *Journal of New Theory*, 27, 33-42.

- Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2011a). On Operations of Soft Sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(5), 1457- 1467.
- Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2011b). Soft Groups and Normalistic Soft Groups. *Computers and Mathematics with Applications*, 62 (2), 685-698.
- Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2023). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Plus Operation. *Matrix Science Mathematic*, 7(2), 110-127.
- Sezgin, A., Atagün, A. O. and Aygün, E. (2011). A Note on Soft Near-rings and Idealistic Soft Near-rings, *Filomat*, 25(1), 53-68.
- Sezgin, A., Aybek, F. (2023). New soft set operation: Complementary Soft Binary Piecewise Gamma Operation. *Matrix Science Mathematic*, 7(1), 27-45.
- Sezgin, A., Aybek, F. and Atagün, A. O. (2023a). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Intersection Operation. *Black Sea Journal of Engineering and Science*, 6(4), 330-346.
- Sezgin, A., Aybek, F. and Güngör N. B. (2023b). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Union Operation. *Acta Informatica Malaysia*, (7)1, 38-53.
- Sezgin, A. and Çağman, N. (2024a). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Difference Operation. *Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 7(1), 1-37.
- Sezgin, A. and Çağman, N. (2024b), An extensive study on restricted and extended symmetric difference operations of soft sets, *Collectanea Mathematica*.
- Sezgin, A., Çağman, N., Atagün, A. O. and Aybek, F. (2023c). Complemental Binary Operations of Sets and Their Application to Group Theory. *Matrix Science Mathematic*, 7(2), 99-106.
- Sezgin, A. and Çalışıcı, H. (2024) A Comprehensive Study on Soft Binary Piecewise Difference Operation. *Eskişehir Teknik Üniversitesi Bilim Ve Teknoloji Dergisi B-Teorik Bilimler*, 12(1), 1-23
- Sezgin, A. and Demirci, A. M. (2023). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Star Operation. *Ikonion Journal of Mathematics*, 5(2), 24-52.
- Sezgin, A. and Sarıalioğlu, M. (2024). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Theta Operation. *Kadirli Uygulamalı Bilimler Fakültesi Dergisi*, 4(1), 1-33.
- Sezgin, A. and Yavuz, E. (2023a). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Lambda Operation. *Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 8(2), 101-133.

- Sezgin, A. and Yavuz, E. (2023b). A New Soft Set Operation: Soft Binary Piecewise Symmetric Difference Operation. *Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 5(2), 150-168.
- Singh, D. and Onyeozili, I. A. (2012a). Notes on Soft Matrices Operations. *ARNP Journal of Science and Technology*, 2(9), 861-869.
- Singh, D. and Onyeozili, I. A. (2012b). On Some New Properties on Soft Set Operations. *International Journal of Computer Applications*, 59(4), 39-44.
- Singh, D. and Onyeozili, I. A. (2012c). Some Conceptual Misunderstanding of the Fundamentals of Soft Set Theory. *ARNP Journal of Systems And Softwares*, 2(9), 251-254.
- Singh, D. and Onyeozili, I. A. (2012d). Some Results on Distributive and Absorption Properties on Soft Operations. *IOSR Journal of Mathematics*, 4(2), 18-30.
- Stojanovic, N. S. (2021). A New Operation on Soft Sets: Extended Symmetric Difference of Soft Sets. *Military Technical Courier*, 69(4), 779-791.
- Sun, Q. M., Zhang, Z. L. and Liu, J. (2008). Soft Sets and Soft Modules. *Lecture Notes in Computer Science*, 5009, 403–409.
- Ullah, A., Ahmad, I., Hayat, F., Karaaslan, F. and Rashad, M. (2018). Soft Intersection Abel-Grassmann's Groups. *Journal of Hyperstructures*, 7 (2), 149-173.
- Ullah, A., Karaaslan, F. and Ahmad, I. (2018). Soft uni-Abel-Grassmann's groups. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 11(2), 517-536.
- Vandiver, H. S. (1934). Note on a Simple Type of Algebra in Which The Cancellation Law of Addition Does Not Hold. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 40(12), 914-920.
- Xiao Z., Chen L., Zhong B. and Ye S. (2005). Recognition for Soft Information Based on the Theory of Soft Sets. In: *Chen J (ed) IEEE proceedings of ICSSSM-05*, 2, 1104–1106.
- Xiao Z., Gong K., Xia S. and Zou Y.(2010). Exclusive Disjunctive Soft Sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(6), 2128–2137.
- Xiao, Z., Li, Y., Zhong, B. and Yang, X. (2003). Research on Synthetically Evaluating Method for Business Competitive Capacity Based on Soft Set. *Statistical Research*, 52-54.
- Yang X., Lin T. S., Yang J., Li Y. and Yu D. (2009). Combination of Interval-Valued Fuzzy Set and Soft Set. *Computers and Mathematics with Applications*, 58(3) ,521–527.

- Yang, C. F. (2008). "A note on: "Soft set theory" [*Computers and Mathematics with Applications*, 45(4-5) (2003) 555–562]," *Computers and Mathematics with Applications*, 56(7), 1899–1900.
- Yang, J. and Yao, Y. (2020). Semantics of Soft Sets and Three-way Decision with Soft Sets. *Knowledge Based Systems*, 194, 105538.
- Yang, H., Qu, C., Li, N. C. (2004). The Induction and Decision Analysis of Clinical Diagnosis Based on Rough Sets and Soft Sets. *Fangzhi Gaoxiao Jichukexue Xuebao*, 17(3), 208-212.
- Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8(3), 338–353.
- Zassenhaus, H. (1935). Über Endliche Fastkörper. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 11, 187-220.
- Zhan, J. and Jun, Y. B. (2010). Soft BL-algebras Based on Fuzzy Sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(6), 2037–2046.
- Zhu, P. and Wen, Q. (2013). Operations on Soft Sets Revisited. *Journal of Applied Mathematics* 2013(5), 1-7.
- Zorlutuna, İ. (2021). Soft Set-Valued Mappings and Their Application in Decision Making Problems. *Filomat*, 35(5), 1725–1733.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı: Eda YAVUZ

Eğitim Derecesi	Okul/Program	Mezuniyet Yılı
Lisans	Amasya Üniversitesi	2021
Yüksek Lisans	Amasya Üniversitesi	

İş Deneyimi/Yıl	Çalıştığı Yer	Görevi
2022	İstanbul/Sultanbeyli	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dili

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler(Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1) Sezgin, A. and Yavuz, E. (2023a). A New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Lambda Operation. *Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 8(2),101-133.

2) Sezgin, A. and Yavuz, E. (2023b). A New Soft Set Operation: Soft Binary Piecewise Symmetric Difference Operation. *Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 5(2), 150-168.