



**T. C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ESNEK KÜMELERDE TETA-ÇARPIM, ARTI-ÇARPIM, FARK-
ÇARPIM, KARTEZYEN ÇARPIM İŞLEMLERİ VE KARAR VERME
PROBLEMLERİNE UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NAZLI HELİN ÇAM

EKİM

NAZLI HELİN ÇAM	MATEMATİK ANABİLİM DALI	EKİM 2025
-----------------	-------------------------	-----------

**ESNEK KÜMELERDE TETA-ÇARPIM, ARTI-ÇARPIM, FARK-ÇARPIM,
KARTEZYEN ÇARPIM İŞLEMLERİ VE KARAR VERME
PROBLEMLERİNE UYGULAMALARI**

Nazlı Helin ÇAM

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

EKİM 2025

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Nazlı Helin ÇAM tarafından hazırlanan “Esnek Kümelerde Teta-Çarpım, Artı-Çarpım, Fark-Çarpım, Kartezyen-Çarpım İşlemleri ve Karar Verme Problemlerine Uygulamaları” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Doç. Dr. Mehmet DAĞLI

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Filiz ÇITAK

Matematik Anabilim Dalı, Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 03/10/2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Nazlı Helin ÇAM

03/10/2025

ESNEK KÜMELERDE TETA-ÇARPIM, ARTI-ÇARPIM, FARK-ÇARPIM,
KARTEZYEN-ÇARPIM İŞLEMLERİ VE KARAR VERME PROBLEMLERİNE
UYGULAMALARI
(Yüksek Lisans Tezi)

Nazlı Helin ÇAM

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ekim 2025

ÖZET

Bu tez çalışmasında, esnek küme teorisine katkı sağlamak amacıyla yeni esnek küme çarpımları tanıtılmış ve bu çarpımların temel cebirsel özellikleri detaylı şekilde incelenmiştir. Çalışma kapsamında, tanımlanan çarpımların kısıtlanmış, genişletilmiş ve ikili esnek ikili parça işlemleri üzerine dağılma özellikleri analiz edilmiştir. Ayrıca, karar verme metodu kullanılarak, verilen çarpımların karar verme problemlerine uygulanabilirliği değerlendirilmiş ve konunun anlaşılmasını desteklemek amacıyla çeşitli örnekler sunulmuştur. Tez, altı bölümden oluşmakta olup, ilk bölümde, esnek kümeler ve temel kavramlarıyla ilgili genel bir bilgi sunulmuş, literatürde var olan çeşitli esnek altkümeler ve esnek eşitlik türleri ayrıntılı biçimde incelenmiştir. İkinci bölümde, esnek teta-çarpım tanıtılmış, esnek teta-çarpımın cebirsel özellikleri, diğer esnek küme işlemlerine dağılması; esnek-teta çarpımının günlük hayat karar verme problemine uygulaması ele alınmıştır. Sırasıyla üçüncü, dördüncü, beşinci bölümlerde, esnek artı-çarpım, esnek fark-çarpım, esnek kartezyen çarpım tanıtılmış olup, bu çarpımların cebirsel özellikleri, diğer esnek küme işlemlerine dağılması ve günlük hayat karar verme problemine uygulaması çalışılmıştır. Son bölüm, genel bulguları bir araya getirmekte, elde edilen sonuçların eleştirel bir değerlendirmesini sunmakta ve önerilen esnek küme çarpımlarının kuramsal önemini ve potansiyel uygulamalarını vurgulayarak, bu çalışmanın esnek küme teorisinin daha geniş kapsamlı gelişimine yaptığı katkıyı öne çıkarmaktadır.

Sayfa Adedi	: 136
Anahtar Kelimeler	: Esnek küme, Esnek teta-çarpım, Esnek artı-çarpım, Esnek fark-çarpım, Esnek kartezyen-çarpım
Danışman	: Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

THETA-PRODUCT, PLUS-PRODUCT, DIFFERENCE-PRODUCT, CARTESIAN-
PRODUCT OPERATIONS IN SOFT SETS AND THEIR APPLICATIONS TO
DECISION-MAKING PROBLEMS

(M. Sc. Thesis)

Nazlı Helin ÇAM

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

October 2025

ABSTRACT

In this thesis, new soft set products are introduced with the aim of contributing to the theory of soft sets, and their fundamental algebraic properties are examined in detail. Within the scope of the study, the distributive properties of the defined products over restricted, extended, and binary soft partial operations are analyzed. Furthermore, by employing a decision-making method, the applicability of these products to decision-making problems is evaluated, and several illustrative examples are provided to support the understanding of the subject. The thesis is organized into six chapters, each addressing a distinct yet interconnected aspect of soft set theory. The first chapter presents a comprehensive introduction to soft sets and their foundational concepts, with particular emphasis on an in-depth review of various soft subsets and soft equalities extensively studied in the literature. Chapter two formally introduces the soft theta-product, rigorously establishes its algebraic properties, examines its distributive rules over other soft set operations, and illustrates its practical relevance through an application to real-life decision-making problems. Chapters three, four, and five are respectively devoted to the soft plus-product, the soft difference-product, and the soft cartesian product. For each of these operations, a systematic and detailed investigation is conducted, focusing on their algebraic properties, distributive behaviors over existing soft set operations, and their applicability to decision-making frameworks. The final chapter consolidates the overall findings, provides a critical evaluation of the results obtained, and underscores the theoretical significance and potential applications of the proposed soft set products, thereby highlighting the contribution of this study to the broader development of soft set theory.

Number of pages	: 136
Keywords	: Soft set, Soft theta-product, Soft plus-product, Soft difference-product, Soft Cartesian-product
Supervisor	: Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca engin bilgisi, rehberliği ve sabrıyla yolumu aydınlatan; her an desteğini hissettiren, ilham veren ve akademik yolculuğumu daha anlamlı kılan kıymetli danışmanım Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN'e en derin teşekkürlerimi sunarım. Onun bilgeliği, anlayışı ve teşvik edici tutumu olmasaydı, bu süreci bu denli verimli ve anlamlı tamamlamak mümkün olmazdı. Kendisiyle çalışmak benim için büyük bir ayrıcalık ve onur kaynağıdır.

Bu tez çalışması, TÜBİTAK Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı (BİDEB) 2211-Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı kapsamında desteklenmiştir. Sağladığı mali ve akademik katkılar nedeniyle TÜBİTAK'a teşekkür ederim. Bilimsel araştırmalara sunduğu katkılar ve genç araştırmacıları teşvik eden destek programlarıyla akademik gelişimi teşvik eden TÜBİTAK, bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde önemli bir rol oynamıştır. Sağladıkları bu değerli destek için kurumun tüm yetkililerine ve emeği geçen herkese şükranlarımı sunarım.

Tez sürecimde bana her zaman destek olan ve varlıklarıyla güç veren aileme en içten teşekkürlerimi sunarım. Özverileri ve teşvik edici tutumlarıyla her adımda yanımda olan annem İkramiye Çam, babam Metin Çam ve kardeşlerim Derya Çam ile Deniz Çam'a minnettarım. Onların desteği, bu çalışmayı tamamlamamda önemli bir güç kaynağı olmuştur.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	9
3. ESNEK TETA-ÇARPIM.....	17
3.1. Esnek Teta-Çarpım ve Özellikleri	17
3.2. Esnek Teta-Çarpım ve Dağılımları	24
3.3. Esnek Teta-Çarpım ve Karar Verme Problemi.....	33
4. ESNEK ARTI-ÇARPIM.....	42
4.1. Esnek Artı-Çarpım ve Özellikleri	42
4.2. Esnek Artı-Çarpım ve Dağılımları	50
4.3. Esnek Artı-Çarpım ve Karar Verme Problemi	59
5. ESNEK FARK-ÇARPIM	68
5.1. Esnek Fark-Çarpım ve Özellikleri	69
5.2. Esnek Fark-Çarpım ve Dağılımları	78
5.3. Esnek Fark-Çarpım ve Karar Verme Problemi	87
6. ESNEK KARTEZYEN-ÇARPIM	94
6.1. Esnek Kartezyen-Çarpım ve Özellikleri.....	94
6.2. Esnek Kartezyen-Çarpım ve Dağılımları.....	103
6.3. Esnek Kartezyen-Çarpım ve Karar Verme Problemi	112

7. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	129
KAYNAKLAR.....	131
ÖZGEÇMİŞ.....	136



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
U	Evrensel küme
E	Parametre kümesi
$\emptyset$	Boş küme
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
$\subseteq$	Alt kümesidir
$\not\subseteq$	Alt kümesi değildir
$\cap$	Kesişim
$\cup$	Birleşim
$\Rightarrow$	Gerek şart
$\Leftrightarrow$	Gerek ve yeter şart
$(\mathcal{O}, \mathcal{M})$	$(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ esnek kümesi
$(\mathcal{O}, \mathcal{M})^r$	$(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ esnek kümesinin tümleyeni
$P(U)$	U nun kuvvet kümesi
$S_E(U)$	E üzerinde tanımlı tüm esnek kümelerin kümesi
$S_{\mathcal{M}}(U)$	$\mathcal{M}$ üzerinde tanımlı tüm esnek kümelerin kümesi
$\emptyset_{\mathcal{M}}$	$\mathcal{M}$ ye göre boş esnek küme
$\emptyset_E$	E ye göre boş esnek küme
$U_{\mathcal{M}}$	$\mathcal{M}$ ye göre evrensel esnek küme
U_E	E ye göre evrensel esnek küme

$\cap_R$	Kısıtlanmış kesişim
$\cup_R$	Kısıtlanmış birleşim
$\cap_\varepsilon$	Genişletilmiş kesişim
$\cup_\varepsilon$	Genişletilmiş birleşim
$\tilde{\cap}$	Esnek ikili parçalı kesişim
$\tilde{\cup}$	Esnek ikili parçalı birleşim
$\emptyset_\emptyset$	Boş esnek küme
$+$	Artı işlemi
$\setminus$	Fark işlemi
θ	Teta işlemi
$\times$	Kartezyen işlemi
λ	Lamda işlemi
$*$	Yıldız işlemi
γ	Gamma işlemi
$=_M$	M-eşitlik
$=_F$	F-eşitlik
$=_J$	J-eşitlik
$=_L$	L-eşitlik
Λ_θ	Esnek teta-çarpım
V_+	Esnek artı-çarpım
$\Lambda_\setminus$	Esnek fark-çarpım
$\tilde{\times}$	Esnek kartezyen-çarpım

1. GİRİŞ

Günlük yaşamda karşılaşılan bazı durumları açıklamak ve bunlar hakkında kesin yargılara ulaşmak çoğu zaman oldukça güçtür. Bunun temel sebebi, herhangi bir olgunun doğru ya da yanlış olarak değerlendirilmesinin, içinde bulunulan zaman, ortam ve bireylerin bakış açılarına bağlı olarak değişkenlik göstermesidir. Örneğin, "pahalı bir konut", "şık bir otomobil", "sağlam bir masa" veya "yüksek kaliteli bir kıyafet" gibi ifadeler, kişiden kişiye farklı anlamlar taşıyabilir ve bu tür belirsizlikler günlük hayatta sıkça karşılaşılan durumlardır. Ancak belirsizlik olgusu yalnızca gündelik yaşamla sınırlı kalmaz; matematik ve diğer bilim dallarında da mevcuttur. Araştırmacılar, ekonomi, sosyoloji, mühendislik, çevre bilimleri ve tıp gibi disiplinlerde karşılaştıkları karmaşık problemlere çözüm üretmeye çalışırken, aynı zamanda belirsizlikleri doğru bir biçimde modelleme gerekliliğiyle de yüzleşmişlerdir. Bununla birlikte, klasik yöntemler her zaman belirsizlikleri tam anlamıyla açıklamak veya modellemek için yeterli olmayabilir. Bu nedenle, zamanla çevremizdeki belirsizlikleri daha iyi analiz edebilmek ve matematiksel olarak ifade edebilmek adına farklı teoriler geliştirilmiştir. Bu teoriler, belirsizliklerin daha sistematik ve tutarlı bir şekilde ele alınmasını sağlamayı amaçlamakta olup, bilimsel araştırmalara önemli katkılar sunmaktadır. Olasılık teorisi, aralık analizi, sezgisel bulanık kümeler teorisi ve bulanık kümeler teorisi, belirsizliklerin modellenmesinde sıkça kullanılan matematiksel yaklaşımlar arasında yer almaktadır. Ancak, her bir yaklaşımın kendine özgü zorlukları ve sınırlamaları bulunmaktadır.

Bu bağlamda, belirsizliklerin modellenmesi konusunda öncü yaklaşımlardan biri olan bulanık kümeler teorisi, Zadeh (1965) tarafından geliştirilmiştir. Bu teori, bir kümeye ait olma durumunu üyelik fonksiyonu aracılığıyla tanımlamakta olup, her bir öğenin $[0,1]$ aralığında bir üyelik derecesine sahip olduğunu öne sürmektedir. Geleneksel Aristo mantığı, bir önermenin doğruluk değerini ya 0 ya da 1 olarak kabul ederken, bulanık mantıkta doğruluk değeri $[0,1]$ aralığında herhangi bir reel sayı olabilir. Bu, bulanık mantığın, belirli bir durumu ya tamamen doğru ya da tamamen yanlış olarak değerlendirmek yerine, o durumun belirli bir dereceye kadar doğru olduğunu ifade etmesine olanak tanır. Üyelik derecesi 1'e yaklaştıkça aitlik düzeyi artarken, 0'a yaklaştıkça azalır ve tamamen kümeye ait olmayan bir öğe için bu değer 0 olarak kabul edilir. Bu teori, gerçek dünyada karşılaşılan belirsizlik ve belirsizliğin dereceleriyle ilgili sorunların çözülmesinde önemli bir araç olarak

kullanılmaktadır. Görüntü işleme, karar verme sistemleri, yapay zeka, robotik, kontrol mühendisliği, bilgisayar mühendisliği ve bilişim gibi pek çok alanda uygulama imkanı bulmuş olan bulanık küme teorisi, daha doğru ve esnek modeller sunarak, bu alanlarda yaşanan belirsizlikleri yönetmeye yardımcı olmaktadır. Ancak, üyelik fonksiyonunun belirlenmesinde tek bir standart yöntemin bulunmaması, sürece yüksek derecede öznel bir boyut kazandırmakta ve spesifik durumlar için uygun üyelik fonksiyonunun nasıl oluşturulacağı sorusunu gündeme getirmektedir. Bu nedenle, üyelik fonksiyonuna bağımlı olmayan alternatif kümeler teorilerinin geliştirilmesi gerekliliği ortaya çıkmıştır. Bu eksiklik, araştırmacıları daha kapsamlı ve tutarlı bir küme teorisi geliştirmeye yönlendirmiştir.

Bu bağlamda, belirsizlikle başa çıkmak amacıyla 1999 yılında Molodtsov tarafından geliştirilen "Esnek Küme Teorisi", yeni bir matematiksel yaklaşım olarak dikkat çekmektedir. Esnek küme teorisinin önemli bir avantajı, üyelik fonksiyonu kurma probleminin olmamasıdır. Bulanık küme teorisinde üyelik fonksiyonu, her elemanın kümeye aitlik derecesini tanımlayan önemli bir bileşenken, esnek küme teorisi, bu tür bir fonksiyon gereksinimi olmadan doğrudan kümelerle işlem yapma imkanı sunar. Bu özellik, esnek küme teorisinin daha pratik ve uygulanabilir bir çözüm sunduğu anlamına gelmektedir. Teorinin bu avantajı, onu sadece matematiksel alanla sınırlı kalmayıp mühendislik, tıp, sosyal bilimler gibi farklı disiplinlerde ve günlük hayatta karşılaşılan bilgi sistemleri, karar verme süreçleri gibi birçok alanda hızlıca uygulanabilir hale getirmiştir (Molodtsov, 1999).

Molodtsov (1999), esnek küme teorisini, oyun teorisi, işlem araştırmaları, sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, olasılık, ölçüm teorisi, Riemann integrasyonu, Perron integrasyonu gibi pek çok farklı alanda kullanarak önemli başarılarla imza atmıştır. Bu alanlarda esnek küme teorisinin sağladığı esneklik ve işlevsellik, teorinin çok çeşitli matematiksel ve mühendisliksel problemlerin çözümünde önemli bir araç olarak kabul edilmesini sağlamıştır. Özellikle belirsizliklerin yönetilmesi ve analiz edilmesi gereken durumlarda, esnek küme teorisi, klasik yöntemlerin yetersiz kaldığı noktada devreye girerek daha doğru ve etkili sonuçlar elde edilmesine olanak tanımaktadır. Bu yüzden, esnek küme teorisinin gelişimi, sadece matematiksel kuramlar için değil, aynı zamanda gerçek dünya problemlerinin çözümü için de büyük bir yenilik ve avantaj sağlamaktadır.

Pawlak (1982), yaklaşımlı kümeleri tanımlayarak belirsizlikle ilgili alandaki çalışmalara önemli bir başlangıç sağlamıştır. Ardından, Maji, Roy ve Biswas (2002), esnek kümelerde parametre indirgemesi kavramını tanımlayarak, esnek kümelerin karar verme problemleri üzerindeki uygulamalarını sunmuşlar ve esnek kümeleri bulanık alt kümelerle ilişkilendirerek, bulanık esnek kümeleri tanımlamışlardır. Bu yaklaşım, esnek kümelerle ilgili daha önce geliştirilmiş tanım ve teoremleri bulanık küme yapısına uyarlayarak, teoremin daha geniş bir çerçevede uygulanabilmesine olanak tanımıştır. Xiao, Li, Zhong ve Yang (2003) ise esnek küme temelli iş rekabet kapasitesini hesaplamak için yapay bir hesaplama metodolojisi üzerine çalışmış ve bu metodun iş dünyasında uygulanabilirliğini araştırmışlardır. Yang, Qu ve Li (2004), esnek kümeler ve yaklaşımlı kümelere dayalı klinik teşhis ve karar analizi ile indüksiyon konularında dikkat çekici bir çalışma sunmuşlardır. Chen, Tsang ve Yeung (2003), Chen, Tsang, Yeung ve Wang (2005), Kong, Gao, Wang ve Li (2008) ise esnek kümelerde parametre indirgemesi üzerine derinlemesine araştırmalar yapmış ve bu çalışmaları, esnek kümelerin daha verimli bir şekilde analiz edilmesine yönelik yeni yöntemler geliştirmiştir. Xiao, Chen, Zhong ve Ye (2005) ile Pei ve Miao (2005), esnek tabanlı bilgi sistemleri üzerinde yaptıkları çalışmalarla, bu teoremin bilgi teknolojileri ve veri analizindeki potansiyelini ortaya koymuşlardır. Mushrif, Sengupta ve Ray (2006), esnek küme temelli sınıflandırmalar üzerine önemli bir araştırma yaparak, esnek kümelerin sınıflandırma problemlerindeki uygulanabilirliğini incelemişlerdir. Yang, Yu, Yang ve Wu (2007) ise geleneksel esnek küme teorisini bulanık bir çerçevede genişleterek, bulanık üyelik fonksiyonları kullanarak bulanık esnek kümelerin parametreye yakın elemanlarını tanımlamışlardır. Enginoğlu (2008), esnek kümelerin ve esnek küme işlemlerinin daha işlevsel bir şekilde tanımlandığı yeni kavramlar geliştirmiş, ayrıca esnek çarpım ve çeşitli karar verme fonksiyonlarını tanıtarak esnek karar verme metodlarını ortaya koymuştur. Herewan ve Deriş (2010) esnek küme teorisi altında parametrelendirme indirgemesini tıbbi karar verme için bir teknik olarak düşünmüş ve olası uygulamalardan birini grip şüphesi olan hastaların karar vermesi için uygulanabildiğini sunmuşlardır. Bununla birlikte Herewan (2010) influenza şüphesi olan hastalardan oluşan bir veri kümesinden Boolean değerli bir bilgi sistemi aracılığıyla esnek küme temelli karar verme tekniğinin genişletilmiş bir uygulamasını sunmuştur. Çağman ve Enginoğlu (2010a) esnek küme ve esnek küme işlemlerini daha kullanışlı hale getirmek için yeniden tanımlamış, uni-int karar fonksiyonları, VE-çarpımları, VEYA-çarpımları, VE-DEĞİL-çarpımları ve VEYA-DEĞİL-çarpımları gibi çeşitli esnek çarpımları esnek küme teorisine kazandırmışlardır. Ayrıca, bu

yöntemleri kullanarak alternatifler arasında en iyi seçeneği belirlemeye yönelik sistematik bir karar verme süreci geliştirmişlerdir. Çağman ve Enginoğlu (2010b) esnek matrisleri tanımlayıp, bu matrisleri daha işlevsel hale getirerek, esnek maksimum-minimum karar verme yöntemini belirsizlik içeren problemlere uygulanabilecek şekilde oluşturmuşlardır. Feng, Li ve Çağman (2012), tekdüze karar verme ilkesinin sınırlarını incelemiş ve bu ilkenin karar süreçlerinde nasıl sınırlı bir etki yarattığını göstermiştir. Kharal (2014), esnek kümelerin üyelik yapısını derinlemesine inceleyerek, bu yapıların daha iyi anlaşılmasına katkıda bulunmuştur. Atagün, Kamacı ve Oktay (2018), genelleştirilmiş bir karar verme yöntemi geliştirerek, daha esnek ve dinamik karar süreçleri için yeni bir yaklaşım önermişlerdir. Kamacı, Saltık, Akız ve Atagün (2018) ters esnek matris teorisini ayrıntılı olarak tanıtmış ve bu teorinin karar verme ve problem çözme süreçlerindeki uygulamalarını ele almışlardır. Yang ve Yao (2020), üç yönlü karar verme süreçlerine dair niteliksel bir model sunarak, bu tür karar sistemlerinin daha iyi modellenmesine katkı sağlamışlardır. Petchimuthu, Garg, Kamacı ve Atagün (2020) çok kriterli grup karar verme problemini, farklı değerlendirme kriterlerine göre tanımlayarak, bu problemlerin çözümü için yeni bir algoritma geliştirmişlerdir. Zorlutuna (2021) esnek sınıflar üzerinde küme değerli dönüşümleri incelemiş ve bu kavramı, özellikle karar verme problemlerine nasıl entegre edilebileceğini araştırmıştır. Bu çalışmalar, esnek küme teorisinin karar verme ve bilgi işleme alanlarındaki geniş uygulama potansiyelini ortaya koyarak, teorinin gelişimine önemli katkılar sağlamıştır.

Esnek küme teorisi, Molodtsov tarafından 1999 yılında ilk ortaya atıldığında, esnek kümelerde kartezyen çarpım kavramı ilk defa tanımlanarak, bir dönüm noktasına işaret etmiştir. Bu çalışma, esnek küme teorisinin temellerini atmış ve sonraki yıllarda yapılacak birçok araştırmanın önünü açmıştır. Ardından, Maji, Biswas ve Roy (2003) esnek kümeler üzerinde yapılan çalışmalara önemli katkılarda bulunmuş, esnek alt küme, esnek kümelerin eşitliği, esnek tümleyen, boş esnek küme ve mutlak esnek küme kavramlarını literatüre kazandırmışlardır. Bu kavramlar, aynı zamanda VE ve VEYA işlemleri ile birlikte esnek birleşim ve kesişim işlemleriyle ilişkilendirilmiş, esnek küme teorisinin genişlemesine olanak sağlamıştır. Pei ve Miao (2005), esnek tabanlı bilgi sistemleri üzerine sundukları çalışmada, Maji ve diğerlerinin (2003) tanımladığı esnek kesişim ve esnek alt küme kavramlarından farklı bir yaklaşım geliştirmiştir. Bu yenilik, esnek kümeler için daha farklı bir teorik çerçeve sunmuş ve esnek küme teorisinin uygulama alanlarını daha da

genişletmiştir. Feng, Liu, Li ve diğerkleri (2008), esnek kümelerdeki kesişim işlemi için alternatif bir esnek ikili kesişim kavramı tanıtarak, bu işlemin esnek kümeler üzerindeki uygulanabilirliğine değinmiştir. Ali, Feng, Liu, Min ve Shabir (2009), Maji ve diğerklerinin (2003) tanımladığı esnek küme işlemlerindeki bazı problemli durumları düzeltmiş, esnek kümelerde kısıtlanmış ve genişletilmiş birleşim, kesişim, fark gibi yeni önemli işlemleri literatüre kazandırmışlardır. Bu çalışmada ayrıca esnek kümenin tümleyeni kavramı geliştirilmiş ve bazı De Morgan yasalarının esnek küme teorisinde geçerli olduğu kanıtlanmıştır. Qin ve Hong (2010), esnek eşitlik kavramını tanımlayarak, esnek kümelerin cebirsel yapısını ve yutma kurallarını inceleyerek esnek kümelerin kafes yapılarının özelliklerini ele almışlardır. Ali, Shabir ve Naz (2011), esnek kümeler kümesi üzerinde yapılan önceki çalışmalara dayanarak, bu kümeler üzerinde oluşturulabilecek cebirsel yapıları detaylı bir şekilde incelemiş, monoid, hemihalka ve kafes gibi yapıları tanımlamışlardır. Ayrıca sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde bazı işlemlerin MV-cebiri ve BCK-cebiri oluşturduğunu göstermişlerdir. Sezgin ve Atagün (2011), esnek küme işlemleri ile ilgili daha önce yeterince incelenmemiş olan temel özellikleri araştırmış, esnek kümeler için kısıtlanmış simetrik fark işlemini tanımlayarak, bu işlemin özelliklerini detaylandırmışlardır. Singh ve Onyeozili (2012a, 2012b, 2012c, 2012d), esnek kümelerin tümleyeni kavramını yeniden tanımlamış ve esnek küme işlemlerinin dağılma ve yutma kuralları üzerindeki etkilerini araştırmışlardır. Sen (2014) ise sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde, kısıtlanmış ve genişletilmiş kesişim ve birleşim işlemlerinin bir Boole cebiri oluşturduğunu göstermiştir. Sezgin, Shahzad ve Mehmood (2019), esnek kümelerde var olan genişletilmiş işlemlere bir yenisini ekleyerek, genişletilmiş fark işlemini tanımlamış ve bu işlemin diğerk esnek küme işlemleri ile olan ilişkisini incelemişlerdir. Stojanovic (2021), esnek küme literatüründeki genişletilmiş işlem eksikliğini fark ederek, genişletilmiş simetrik fark işlemini tanımlamış ve bu işlemin özelliklerini araştırarak önemli bir boşluğu doldurmuştur. Günümüze kadar yapılan çalışmalar incelendiğinde, esnek küme işlemlerinin kısıtlanmış esnek küme işlemleri ve genişletilmiş esnek küme işlemleri olmak üzere iki ana başlık altında ilerlediği gözlemlenmektedir. Eren (2019), kısıtlanmış ve genişletilmiş işlem formundan farklı olarak, esnek ikili parçalı fark işlemini tanımlamış ve bu işlemin özelliklerini derinlemesine incelemiştir. Sezgin ve  alışıcı (2024), esnek ikili parçalı fark işleminin özellikleri üzerine detaylı bir çalışma sunmuşlardır. Çağman (2021) ise kümelerin koşullu tümleyenlerini ve bunların grup teorisine uygulanmasını incelemiş, bu çalışmadan esinlenerek Sezgin,  ağman, Atagün ve Aybek (2023) yeni ikili küme işlemleri

üzerinde çalışmalar yapmıştır. Aybek (2024), bu yeni ikili küme işlemlerini esnek kümeye uyarlayarak, yeni kısıtlanmış ve genişletilmiş esnek küme işlemleri tanımlamış ve bu işlemlerin özelliklerini detaylı bir şekilde incelemiştir. Yeni bir esnek küme işlem formu olan tümleyenli genişletilmiş esnek küme işlemleri ise Akbulut (2024), Demirci (2024) ve Sarılioğlu (2024) tarafından çalışılmıştır. Eren (2019) çalışmasındaki esnek ikili parçalı fark işlemi formunda, Yavuz (2024), esnek ikili parçalı birleşim, kesişim, gama, lambda, teta, yıldız, artı gibi çeşitli yeni esnek küme işlemleri tanımlamış ve bu işlemlerin özelliklerini detaylı bir şekilde incelemiştir.

Esnek eşitlik ilişkileri, esnek küme teorisinin temel kavramları arasında yer almaktadır. Maji ve diğerleri (2003), esnek altkümeler için oldukça katı bir tanım ortaya koyarak bu alanda öncü çalışmalar yapmışlardır. Ancak, matematiksel doğrulama olmaksızın esnek dağılım yasaları üzerine bazı sonuçlar sunmuşlardır. Ali ve diğerleri (2009) tarafından vurgulandığı ve diğer araştırmacılar tarafından da çürütüldüğü üzere, Maji ve diğerleri (2003) çalışmasında bazı önermeler yanlıştır. Esnek altküme kavramı daha sonra Pei ve Miao (2005) ile Feng ve diğerleri (2008) tarafından genişletilmiş ve Maji ve diğerlerinin (2003) yöntemlerinin bir genellemesi şeklinde ele alınmıştır. Esnek kümeler üzerinde kongruens ilişkileri, Qin ve Hong (2010) tarafından tanıtılmış olup, ayrıca iki yeni tür esnek eşitlik ilişkisi incelenmiştir. Aralıklı değerli bulanık esnek kümeler üzerine çalışmalarında Jun ve Yang (2011), esnek altküme kavramını daha da genişletmiş ve Maji'nin dağılım yasalarını, geliştirilmiş esnek eşitlik ilişkileri (bu çalışmada J-esnek eşitlik ilişkisi olarak adlandırılmaktadır) aracılığıyla yeniden düzenlemeye çalışmışlardır. Literatürde “esnek çarpım işlemlerinin geliştirilmiş dağılım yasaları” olarak bilinen güncel bir sonuç ortaya koymuşlardır. Liu, Feng ve Jun (2012) ise kısa bir araştırma notunda, Jun ve Yang'ın (2011) fikirlerinden hareketle esnek L-altkümeleri ve esnek L-eşitlik ilişkilerini tanımlamışlardır. Önemli bir bulgu, dağılım yasalarının literatürdeki tüm esnek eşitlik türleri için geçerli olmamasıdır. Bu bağlamda Feng ve Li (2013), Maji ve diğerlerinde (2003) tanımlanan esnek çarpım işlemleriyle ilgilenmiş ve Liu ve diğerleri (2012) çalışmasında başlatılan araştırmaları sürdürmüştür. Liu ve diğerleri (2012) ile karşılaştırıldığında Feng ve Li (2013), farklı esnek altküme türlerine ve esnek çarpım işlemlerinin cebirsel özelliklerine odaklanmış, dağılım yasalarının yanı sıra değişme, birleşme gibi diğer temel özellikleri de incelemişlerdir. Ayrıca, esnek L-altkümeleri aracılığıyla AND-çarpımı ve OR-çarpımı gibi esnek çarpım işlemleri üzerine teorik sonuçlar sunmuşlardır. Bu kapsamda, literatürde eksik

kalan bazı sonuçlar tamamlanmış ve J-eşitlik ile L-eşitlik durumlarında esnek çarpım işlemlerinin cebirsel özellikleri ayrıntılı biçimde incelenmiştir. Sonuç olarak, esnek L-eşitlik ilişkilerinin serbest esnek cebirler üzerinde kongruens ilişkileri olduğu ve karşılık gelen bölüm yapılarının değişmeli yarıgruplar oluşturduğu ortaya koymuşlardır. Esnek eşitlik ilişkileri hakkında ayrıntılı bilgi için Abbas, Ali ve Romaguer (2014, 2017), Abbas, Ali, Al-shami (2019), Al-shami ve El-Shafei (2020); Ali, Saleem, Sundus, Khaleeq, Saeed ve George (2022) çalışmalarına referans veriyoruz. Sezgin, Atagün ve Çağman (2025a) ise AND-çarpım üzerine detaylı bir çalışma yayınlamışlardır. VE-çarpımının cebirsel özelliklerini (idempotentlik, değişme ve birleşme yasaları dahil olmak üzere) kapsamlı bir şekilde analiz etmiş ve bu özellikleri esnek F, M, L ve J eşitlikleri bağlamında karşılaştırmıştır. Çalışmalarında, evrensel küme üzerinde tanımlanan tüm esnek kümelerin, kısıtlı veya genişletilmiş birleşim ve VE-çarpımı altında, esnek L-eşitliği çerçevesinde birim elemanlı değişmeli yarıhalka (hemiring) oluşturduğunu ortaya koymuşlardır. Bunun yanı sıra, kısıtlı veya genişletilmiş simetrik fark ile VE-çarpımının kombinasyonunun da aynı cebirsel yapıyı sağladığını göstermişlerdir.

Çağman ve Enginoğlu (2010a) esnek küme ve esnek küme işlemlerini daha kullanışlı hale getirmek için yeniden tanımlamış, uni-int karar fonksiyonları, VE-çarpımları, VEYA-çarpımları, VE-DEĞİL-çarpımları ve VEYA-DEĞİL-çarpımları gibi çeşitli esnek çarpımları esnek küme teorisine kazandırmışlardır. Ayrıca, bu yöntemleri kullanarak alternatifler arasında en iyi seçeneği belirlemeye yönelik sistematik bir karar verme süreci geliştirmişlerdir. Esnek çarpımlar, teorik açıdan büyük önem taşıırken, aynı zamanda uygulama alanlarında da geniş bir kullanım yelpazesi bulmaktadır. Özellikle esnek hesaplama ve esnek karar verme yöntemleri, esnek küme işlemleri üzerine inşa edilen teorik temellere dayanmaktadır. Bu işlemler, belirsiz ve bulanık verilerle çalışırken karar alma süreçlerinin daha esnek ve doğru bir şekilde modellenmesine olanak sağlar, böylece çeşitli mühendislik, matematiksel modelleme, yapay zekâ ve benzeri alanlarda etkin çözümler üretmektedir.

Bu bağlamda, bu tezde dört yeni esnek çarpım işlemi tanımlanmış, işlemlerin temel cebirsel özellikleri incelenmiş ve bu işlemler problem durumuna göre Çağman ve Enginoğlu (2010a) çalışmasında önerilen bir-kes ve kes-bir karar verme yöntemi ile karar verme problemlerine uygulanmıştır. Tezin ilk bölümünde, esnek kümeler kuramına dair kapsamlı bir literatür

taraması gerçekleştirilmiş; esnek küme işlemleri ile bu yapılara dayalı karar verme problemleri detaylı biçimde incelenmiştir. İkinci bölümde, çalışmanın temelini oluşturan klasik küme işlemleriyle birlikte, esnek kümelerle dair tanımlar, özellikler ve teoremler sunularak gerekli altyapı hazırlanmıştır. Tezin özgün katkılarını içeren bölümlerinde ise, esnek kümeler kuramına yeni çarpım türleri kazandırılmıştır. Üçüncü bölümde esnek teta-çarpımı, dördüncü bölümde esnek fark-çarpımı, beşinci bölümde esnek artı-çarpımı, altıncı bölümde ise esnek kartezyen-çarpımı tanıtılmış; bu yapılarla ilgili örnekler verilmiş, çeşitli esnek altkümeler ve eşitlik türleri (M, F, L ve J) açısından cebirsel özellikleri ayrıntılı biçimde incelenmiş, ilgili dağılma kuralları araştırılmış, günlük hayatta karşımıza çıkabilecek karar verme problemlerine, tanımlanan bu esnek çarpımlar ile Çağman ve Enginoğlu (2010a) tarafından önerilen bir-kes ve kes-bir karar verme yöntemi uygulanarak çözüm yolları ortaya konmuştur. Bu tez, esnek kümelerin belirsizliklerin modellenmesinde sağladığı avantajları temel alarak, teoriye yeni katkılar sağlamayı ve alanyazına teorik ve uygulama bağlamında kuramsal bir zenginlik kazandırmayı amaçlamaktadır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, tez çalışmasında kullanılan esnek küme teorisi ile ilgili temel kavramlar ve özellikleri, Çağman (2021), Sezgin, Çağman, Atagün ve Aybek (2023) tarafından sunulan yeni ikili işlemler de detaylı olarak incelenecektir.

2.1.1. Tanım U evrensel kümesi, E parametreler kümesi, $P(U)$, U 'nun kuvvet kümesi olarak verilsin. Bir $(\mathfrak{F}, E)$ sıralı ikilisi, U üzerinde esnek küme olarak adlandırılır. Burada $\mathfrak{F}$,

$$\mathfrak{F}: E \rightarrow P(U)$$

ile verilen bir fonksiyondur (Molodtsov, 1999).

Maji ve diğerleri (2003), Molodtsov'un (1999) esnek küme tanımında, E parametreler kümesinin sabit bir alt kümesini seçerek, esnek küme tanımını aşağıdaki şekilde vermiştir:

U evrensel kümesi, E parametreler kümesi; $P(U)$, U 'nun kuvvet kümesi ve $\mathcal{M} \subseteq E$ olarak verilsin. Bir $(\mathfrak{F}, \mathcal{M})$ sıralı ikilisi, U üzerinde esnek küme olarak adlandırılır. Burada $\mathfrak{F}$,

$$\mathfrak{F}: \mathcal{M} \rightarrow P(U)$$

ile verilen bir fonksiyondur (Maji ve diğerleri, 2003).

Literatürde esnek küme gösterimi bazı çalışmalarda $\mathfrak{F}_{\mathcal{M}}$ biçiminde ifade edilse de, çalışma boyunca, Maji ve diğerleri (2003) tarafından da benimsenen $(\mathfrak{F}, \mathcal{M})$ gösterimini tercih edeceğiz. Ayrıca, bu çalışma boyunca, U üzerindeki tüm esnek kümelerin kümesi $S_E(U)$ ile gösterilecektir. $\mathcal{M}$, E parametre kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, $S_{\mathcal{M}}(U)$ parametre kümesi $\mathcal{M}$ olan tüm esnek kümelerin oluşturduğu kümedir. Yani, $S_{\mathcal{M}}(U)$ kümesinde parametre kümesi yalnızca $\mathcal{M}$ olan esnek kümeler bulunurken, $S_E(U)$ kümesinde parametre kümesi herhangi bir küme olabilen esnek kümeler yer almaktadır.

2.1.2. Tanım $(\mathfrak{F}, \mathcal{M})$, U üzerinde tanımlı bir esnek küme olsun. Her $m \in \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{F}(m) = \emptyset$ ise, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M})$ esnek kümesine $\mathcal{M}$ ye göre boş esnek küme denir ve $\emptyset_{\mathcal{M}}$ ile gösterilir. Benzer

şekilde eğer, her $m \in \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{T}(m) = U$ ise $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$ esnek kümesine evrensel esnek küme denir ve $U_{\mathcal{M}}$ ile gösterilir (Ali ve diğerleri, 2009).

U üzerinde tanımlı boş esnek küme, boş parametre kümesine sahip olan tek esnek kümedir ve $\emptyset_{\mathcal{M}}$ ile gösterilir. Burada, $\emptyset_{\mathcal{M}}$ ve $\emptyset$ 'nin farklı kavramlar olduğu unutulmamalıdır.

Esnek alt küme kavramını, ilk olarak Maji ve diğerleri (2003) tarafından son derece katı şekilde tanımlanmıştır. Karışıklığı önlemek amacıyla bu tanım esnek M-alt küme olarak adlandırılacaktır.

2.1.3. Tanım $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde iki esnek küme olsun. Eğer,

- i. $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$ ve
- ii. Her $m \in \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{T}(m) = \check{Y}(m)$

ise $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$, $(\check{Y}, \mathcal{D})$ 'nin esnek M-alt kümesidir denir ve bu durum $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \subseteq_M (\check{Y}, \mathcal{D})$ şeklinde gösterilir. Buna ek olarak, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$ birbirlerinin esnek M-alt kümesi ise, yani hem $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \subseteq_M (\check{Y}, \mathcal{D})$ hem de $(\check{Y}, \mathcal{D}) \subseteq_M (\mathfrak{T}, \mathcal{M})$ koşulları sağlanıyorsa, bu iki esnek küme esnek M-eşit olarak adlandırılır ve $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) =_M (\check{Y}, \mathcal{D})$ şeklinde gösterilir (Maji ve diğerleri, 2003).

2.1.4. Tanım $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde iki esnek küme olsun. Eğer,

- i. $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$ ve
- ii. Her $m \in \mathcal{M}$ olacak şekilde, $\mathfrak{T}(m) \subseteq \check{Y}(m)$

ise $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$, $(\check{Y}, \mathcal{D})$ 'nin esnek F-alt kümesidir denir ve bu durum $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \subseteq_F (\check{Y}, \mathcal{D})$ şeklinde gösterilir. Buna ek olarak, eğer $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$ birbirlerinin esnek F-alt kümesi ise, yani hem $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \subseteq_F (\check{Y}, \mathcal{D})$ hem de $(\check{Y}, \mathcal{D}) \subseteq_F (\mathfrak{T}, \mathcal{M})$ koşulları sağlanıyorsa, bu iki esnek küme esnek F-eşit olarak adlandırılır ve $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) =_F (\check{Y}, \mathcal{D})$ şeklinde gösterilir (Feng ve diğerleri, 2008).

Esnek F-alt küme ve esnek F-eşit tanımları ilk olarak Pei ve Miao (2005) tarafından verilmiştir. Ancak, bazı esnek küme makaleleri, esnek alt kümeler ve esnek eşitlikler ile ilgili olarak, bu tanımları ilk kez Feng ve diğerleri (2008) çalışmasında sunduklarını iddia etmiştir. Sonuç olarak, bu bağlantıyı ifade etmek için, "F" harfi kullanılmaktadır.

M ve F esnek eşitlik ilişkileri yani $=_M$ ve $=_F$ birbirine denktir. Başka bir ifadeyle,

$$(\mathcal{O}, \mathcal{M}) =_M (\ddot{Y}, \mathcal{D}) \Leftrightarrow (\mathcal{O}, \mathcal{M}) =_F (\ddot{Y}, \mathcal{D})$$

Bu durum, söz konusu esnek kümelerin aynı parametre kümesini ve yaklaşım fonksiyonuna sahip olmasından kaynaklanmaktadır. Dolayısıyla, bu esnek eşitliği sağlayan iki esnek küme, gerçekte birbiriyle tamamen aynıdır. Bu nedenle, $(\mathcal{O}, \mathcal{M}) =_M (\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ifadesi aslında, $(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = (\ddot{Y}, \mathcal{D})$ anlamına gelmektedir.

2.1.5. Tanım $(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde iki esnek küme olsun. Eğer, her $m \in \mathcal{M}$ için, $\mathcal{O}(m) \subseteq \ddot{Y}(d)$ olacak şekilde $d \in \mathcal{D}$ varsa $(\mathcal{O}, \mathcal{M})$, $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ 'nin esnek J-alt kümesidir denir ve bu durum $(\mathcal{O}, \mathcal{M}) \preceq_J (\ddot{Y}, \mathcal{D})$ şeklinde gösterilir. Eğer, $(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ birbirlerinin esnek J-alt kümesi ise, yani hem $(\mathcal{O}, \mathcal{M}) \preceq_J (\ddot{Y}, \mathcal{D})$ hem de $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \preceq_J (\mathcal{O}, \mathcal{M})$ koşulları sağlanıyorsa, bu iki esnek küme esnek J-eşit olarak adlandırılır ve $(\mathcal{O}, \mathcal{M}) =_J (\ddot{Y}, \mathcal{D})$ şeklinde gösterilir (Jun ve Yang, 2011).

$$(\mathcal{O}, \mathcal{M}) \preceq_M (\ddot{Y}, \mathcal{D}) \Rightarrow (\mathcal{O}, \mathcal{M}) \preceq_F (\ddot{Y}, \mathcal{D}) \Rightarrow (\mathcal{O}, \mathcal{M}) \preceq_J (\ddot{Y}, \mathcal{D})$$

olduğu Liu ve diğerleri (2012) ve Feng ve Li (2013) çalışmasında gösterilmiştir; ancak tersinin doğru olmayabileceği belirtilmiştir.

Liu ve diğerleri (2012), esnek M-altkümeleri ve ontoloji tabanlı esnek altkümeleri daha genel bir yapıya kavuşturarak, esnek L-altküme ve esnek L-eşitlik adı verilen yeni kavram tanıtmışlardır. Bu yeni kavramlar, esnek J-altkümeleri ve ontoloji tabanlı esnek altkümeler üzerine yapılan çalışmalardan esinlenerek geliştirilmiş ve esnek küme teorisinde daha kapsamlı bir yaklaşım sunmayı amaçlamaktadır.

2.1.6. Tanım $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde iki esnek küme olsun. Eğer, her $m \in \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{O}(m) = \check{Y}(d)$ olacak şekilde $d \in \mathcal{D}$ varsa $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$, $(\check{Y}, \mathcal{D})$ 'nin esnek L-alt kümesidir denir ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \subseteq_L (\check{Y}, \mathcal{D})$ şeklinde gösterilir. Eğer, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$ birbirlerinin esnek L-alt kümesi ise, yani hem $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \subseteq_L (\check{Y}, \mathcal{D})$ hem de $(\check{Y}, \mathcal{D}) \subseteq_J (\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ koşulları sağlanıyorsa, bu iki esnek küme esnek L-eşit olarak adlandırılır ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) =_L (\check{Y}, \mathcal{D})$ şeklinde gösterilir (Liu ve diğerleri, 2012).

Liu ve diğerleri (2012), $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde iki esnek küme olmak üzere,

$$(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \subseteq_M (\check{Y}, \mathcal{D}) \Rightarrow (\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \subseteq_L (\check{Y}, \mathcal{D}) \Rightarrow (\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \subseteq_J (\check{Y}, \mathcal{D})$$

$$(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) =_M (\check{Y}, \mathcal{D}) \Rightarrow (\mathfrak{O}, \mathcal{M}) =_L (\check{Y}, \mathcal{D}) \Rightarrow (\mathfrak{O}, \mathcal{M}) =_J (\check{Y}, \mathcal{D})$$

olduğunu, ancak, bu sıralamanın tersinin doğru olmayabileceği belirtilmiştir.

Bu nedenle, esnek M-eşitliği (ve dolayısıyla esnek F-eşitliği), en güçlü ve katı eşitlik ilişkisi olarak kabul edilir. Diğer taraftan, esnek J-eşitliği en zayıf eşitlik bağlantısı olarak değerlendirilir. Bu iki kavram arasında ise esnek L-eşitlik bulunmaktadır (Liu ve diğerleri, 2012).

2.1.7. Örnek $E = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$ parametre kümesi, $\mathcal{M} = \{c_1, c_4\}$ ve $\mathcal{D} = \{c_1, c_4, c_5\}$, E parametre kümesinin iki alt kümesi, $U = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ evrensel küme olmak üzere, U üzerinde $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$, $(\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{D})$ esnek kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) = \{(c_1, \{s_1, s_3\}), (c_4, \{s_2, s_3, s_5\})\},$$

$$(\check{Y}, \mathcal{D}) = \{(c_1, \{s_1, s_3\}), (c_4, \{s_2, s_3\}), (c_5, \{s_1, s_2, s_3, s_5\})\},$$

$$(\mathfrak{O}, \mathcal{D}) = \{(c_1, \{s_2, s_3, s_5\}), (c_4, \{s_1, s_3\}), (c_5, \{s_1, s_2, s_3, s_5\})\}$$

$\mathfrak{O}(c_1) \subseteq \check{Y}(c_1)$ (ve aynı zamanda $\mathfrak{O}(c_1) \subseteq \check{Y}(c_5)$) ve $\mathfrak{O}(c_4) \subseteq \check{Y}(c_5)$ olduğundan, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \subseteq_J (\check{Y}, \mathcal{D})$ olduğu açıktır. Ancak, $\mathfrak{O}(c_4) \neq \check{Y}(c_1)$, $\mathfrak{O}(c_4) \neq \check{Y}(c_4)$ ve $\mathfrak{O}(c_4) \neq \check{Y}(c_5)$ olduğu için, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ 'nin $(\check{Y}, \mathcal{D})$ 'nin esnek L-alt kümesi olmadığı sonucuna ulaşabiliriz.

Ayrıca, $\mathfrak{O}(c_4) \neq \check{Y}(c_4)$ olduğu için $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$, $(\check{Y}, \mathcal{D})$ 'nin esnek M-alt kümesi de değildir. Bunun yanı sıra, $\mathfrak{O}(c_1) = \mathfrak{O}(c_4)$ ve $\mathfrak{O}(c_4) = \mathfrak{O}(c_1)$ olduğundan, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \subseteq_L (\mathfrak{O}, \mathcal{D})$ olduğu açıktır. Ancak, $\mathfrak{O}(c_1) \neq \mathfrak{O}(c_1)$ ve $\mathfrak{O}(c_4) \neq \mathfrak{O}(c_4)$ olduğu için, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$, $(\mathfrak{O}, \mathcal{D})$ 'nin esnek M-alt kümesi değildir (Sezgin ve diğerleri, 2025a).

2.1.8. *Örnek* $E = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$ parametre kümesi, $\mathcal{M} = \{c_1, c_4\}$ ve $\mathcal{D} = \{c_1, c_4, c_5\}$, E parametre kümesinin iki alt kümesi, $U = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ evrensel küme olmak üzere, U üzerinde $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$ esnek kümeleri tanımlansın.

$$(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) = \{(c_1, \{s_1, s_3\}), (c_4, \{s_1, s_2, s_3, s_5\})\}$$

$$(\check{Y}, \mathcal{D}) = \{(c_1, \{s_1, s_2, s_3\}), (c_4, \{s_1, s_2, s_3, s_5\}), (c_5, \{s_1\})\}$$

$\mathfrak{O}(c_1) \neq \check{Y}(c_1)$, $\mathfrak{O}(c_1) \neq \check{Y}(c_4)$ ve $\mathfrak{O}(c_1) \neq \check{Y}(c_5)$ olduğundan, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \neq_L (\check{Y}, \mathcal{D})$ olduğu açıktır. Ancak, $\mathfrak{O}(c_1) \subseteq \check{Y}(c_1)$ (hatta $\mathfrak{O}(c_1) \subseteq \check{Y}(c_4)$) ve $\mathfrak{O}(c_4) \subseteq \check{Y}(c_4)$ olduğundan, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \subseteq_J (\check{Y}, \mathcal{D})$ olduğu sonucuna varabiliriz. Bunun yanı sıra, $\check{Y}(c_1) \subseteq \mathfrak{O}(c_4)$, $\check{Y}(c_4) \subseteq \mathfrak{O}(c_4)$ ve $\check{Y}(c_5) \subseteq \mathfrak{O}(c_1)$ olduğundan, $(\check{Y}, \mathcal{D}) \subseteq_J (\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ olduğu sonucuna varabiliriz. Dolayısıyla, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) =_J (\check{Y}, \mathcal{D})$ geçerlidir. Son olarak, $\mathfrak{O}(c_1) \neq \check{Y}(c_1)$ ve $\mathfrak{O}(c_4) \neq \check{Y}(c_4)$ olduğundan, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ 'nin $(\check{Y}, \mathcal{D})$ 'nin esnek M-alt kümesi olmadığı açıktır (Sezgin ve diğerleri, 2025a).

2.1.9. Tanım $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$, U üzerinde bir esnek küme olsun. $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ esnek kümesinin esnek (bağıl) tümleyeni $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})^r = (\mathfrak{O}^r, \mathcal{M})$ ve her $m \in \mathcal{M}$ için; $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})^r(m) = U \setminus \mathfrak{O}(m) = [\mathfrak{O}(m)]'$ şeklinde tanımlanır.

Bundan sonra, $U \setminus \mathfrak{O}(m) = [\mathfrak{O}(m)]'$ ifadesi, kısalık açısından $\mathfrak{O}'(m)$ olarak gösterilecektir (Ali ve diğerleri, 2009).

2.1.10. Tanım $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu iki esnek kümelerin $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \wedge (\check{Y}, \mathcal{D})$ ile gösterilen VE-çarpımı, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için,

$$\mathfrak{O}(m, d) = \mathfrak{O}(m) \cap \check{Y}(d)$$

olmak üzere, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \wedge (\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{G}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ şeklinde tanımlanır (Maji ve diğerleri, 2003).

2.1.11. Tanım $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu iki esnek kümelerin $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \vee (\check{Y}, \mathcal{D})$ ile gösterilen VEYA-çarpımı, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için,

$$\mathfrak{G}(m, d) = \mathfrak{G}(m) \cup \check{Y}(d)$$

olmak üzere, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \vee (\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{G}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ şeklinde tanımlanır (Maji ve diğerleri, 2003).

2.1.12. Not Çağman (2021) kapsayıcı ve dışlayıcı tümleyen şeklinde iki yeni tümleyen tanımlamıştır. X ve Y iki sabit küme ve $+$ ve θ sırasıyla kapsayıcı ve dışlayıcı tümleyenleri göstermek üzere, bu ikili işlemler

$$X + Y = X' \cup Y, \quad X\theta Y = X' \cap Y'$$

olarak tanımlanmıştır. Sezgin ve diğerleri (2023), bu iki işlem arasındaki ilişkileri incelemiş ve ayrıca bunun gibi üç yeni ikili işlem tanımlayıp, bunların birbirleriyle olan ilişkisini incelemiştir. X ve Y iki sabit küme olmak üzere,

$$X * Y = X' \cup Y', \quad X_Y Y = X' \cap Y, \quad X \lambda Y = X \cup Y'$$

şeklinde tanımlanmıştır (Sezgin ve diğerleri, 2023).

“ $\odot$ ” sembolünü, küme işlemlerini temsil etmek üzere, kısıtlanmış, genişletilmiş ve esnek ikili parça işlemleri için aşağıda verilen tanımlar bulunmaktadır:

2.1.13. Tanım $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \odot_R (\check{Y}, \mathcal{D})$ ile gösterilen kısıtlanmış $\odot$ işlemi, $\mathcal{J} = \mathcal{M} \cap \mathcal{D}$ ve her $j \in \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{G}(j) = \mathfrak{G}(j) \odot \check{Y}(j)$ olmak üzere, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \odot_R (\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{G}, \mathcal{J})$ olarak tanımlanır. Burada, $\mathcal{J} = \mathcal{M} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ ise $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \odot_R (\check{Y}, \mathcal{D}) = \emptyset_\emptyset$. (Ali ve diğerleri, 2009; Sezgin ve Atagün, 2011; Aybek, 2024).

2.1.14. Tanım $(\mathfrak{F}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin genişletilmiş $\odot$ işlemi $(\varsigma, \mathcal{J})$ olup, burada, $\mathcal{J} = \mathcal{M} \cup \mathcal{D}$ ve her $j \in \mathcal{J}$ için,

$$\varsigma(j) = \begin{cases} \mathfrak{F}(j), & j \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{D} \\ \check{Y}(j), & j \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{M} \\ \mathfrak{F}(j) \odot \check{Y}(j), & j \in \mathcal{M} \cap \mathcal{D} \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(\mathfrak{F}, \mathcal{M}) \odot_{\varepsilon} (\check{Y}, \mathcal{D}) = (\varsigma, \mathcal{J})$ şeklinde yazılır. (Maji ve diğerleri, 2003; Ali ve diğerleri, 2009; Sezgin ve diğerleri, 2019; Stojanovic, 2021; Aybek, 2024).

2.1.15. Tanım $(\mathfrak{F}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin esnek ikili parçalı $\odot$ işlemi $(\varsigma, \mathcal{M})$ olup, her $j \in \mathcal{M}$ için,

$$\varsigma(j) = \begin{cases} \mathfrak{F}(j), & j \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{D}, \\ \mathfrak{F}(j) \odot \check{Y}(j), & j \in \mathcal{M} \cap \mathcal{D} \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(\mathfrak{F}, \mathcal{M}) \widetilde{\odot} (\check{Y}, \mathcal{D}) = (\varsigma, \mathcal{J})$ şeklinde yazılır. (Eren, 2019; Sezgin ve Çalışıcı, 2024; Yavuz, 2024).

2.1.16. Tanım $(\mathfrak{F}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$, U kümesi üzerinde birer esnek küme olsun. $(\mathfrak{F}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$ esnek kümelerinin esnek yıldız-çarpımı (V_* -çarpımı) $(\mathfrak{F}, \mathcal{M})V_*(\check{Y}, \mathcal{D})$, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için,

$$\varsigma(m, d) = \mathfrak{F}(m) * \check{Y}(d)$$

olmak üzere, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M})V_*(\check{Y}, \mathcal{D}) = (\varsigma, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ şeklinde tanımlanır. Burada, $\mathfrak{F}(m) * \check{Y}(d) = \mathfrak{F}'(m) \cup \check{Y}'(d)$ olduğu bilinmektedir (Sezgin, Güngör ve Şenyiğit, 2024).

2.1.17. Tanım $(\mathfrak{F}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$, U kümesi üzerinde birer esnek küme olsun. $(\mathfrak{F}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$ esnek kümelerinin esnek gamma-çarpımı (Λ_γ -çarpımı) $(\mathfrak{F}, \mathcal{M})\Lambda_\gamma(\check{Y}, \mathcal{D})$, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için,

$$\varsigma(m, d) = \mathfrak{F}(m) \gamma \check{Y}(d)$$

olmak üzere, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\gamma}(\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{G}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ şeklinde tanımlanır. Burada, $\mathfrak{G}(m) \gamma \check{Y}(d) = \mathfrak{G}'(m) \cap \check{Y}(d)$ olduğu bilinmektedir (Sezgin, Luzum ve Şenyiğit, 2025).

2.1.18. Tanım $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$, U kümesi üzerinde birer esnek küme olsun. $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$ esnek kümelerinin esnek lambda-çarpımı (V_{λ} -çarpımı) $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) V_{\lambda}(\check{Y}, \mathcal{D})$, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için,

$$\mathfrak{G}(m, d) = \mathfrak{G}(m) \lambda \check{Y}(d)$$

olmak üzere, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) V_{\lambda}(\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{G}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ şeklinde tanımlanır. Burada, $\mathfrak{G}(m) \lambda \check{Y}(d) = \mathfrak{G}(m) \cup \check{Y}'(d)$ olduğu bilinmektedir (Sezgin ve Şenyiğit, 2025).

3. ESNEK TETA-ÇARPIM

Bu bölümde, esnek teta-çarpım adı verilen yeni bir esnek çarpım işlemi tanıtılmış, örneği verilmiş, cebirsel özellikleri ayrıntılı şekilde sunulmuş, dağılma kuralları araştırılmış, bu çarpım karar verme problemlerine uygulanmıştır.

3.1. Esnek Teta-Çarpım ve Özellikleri

Bu alt bölümde, esnek teta-çarpım tanıtılmış, belirli türdeki esnek alt kümeler ve esnek eşitlikler bağlamında cebirsel özellikleri detaylı olarak incelenmiştir.

3.1.1. Tanım $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U kümesi üzerinde birer esnek küme olsun. $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ esnek kümelerinin esnek teta-çarpımı (Λ_θ -çarpımı) $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için,

$$\mathfrak{O}(m, d) = \mathfrak{T}(m) \theta \ddot{Y}(d)$$

olmak üzere, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ şeklinde tanımlanır. Burada, $\mathfrak{T}(m) \theta \ddot{Y}(d) = \mathfrak{T}'(m) \cap \ddot{Y}'(d)$ olduğu bilinmektedir.

3.1.2. Örnek $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi, $\mathcal{M} = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve $\mathcal{D} = \{e_1, e_4, e_5\}$, E parametre kümesinin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evrensel küme olmak üzere, U üzerinde $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ esnek kümeleri,

$$(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) = \{(e_1, \{h_1, h_2, h_3, h_5\}), (e_2, \{h_1, h_2, h_3\}), (e_3, \{h_4, h_5, h_6\})\}$$

$$(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = \{(e_1, \{h_6\}), (e_4, \{h_2, h_3, h_5\}), (e_5, \{h_2\})\}$$

olarak tanımlanan iki esnek küme ve $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) \\ &= \{((e_1, e_1), \{h_4\}), ((e_1, e_4), \{h_4, h_6\}), ((e_1, e_5), \{h_4, h_6\}), ((e_2, e_1), \{h_4, h_5\}), ((e_2, e_4), \{h_4, h_6\}), \\ & ((e_2, e_5), \{h_4, h_5, h_6\}), ((e_3, e_1), \{h_1, h_2, h_3\}), ((e_3, e_4), \{h_1\}), ((e_3, e_5), \{h_1, h_3\})\} \end{aligned}$$

şeklindedir.

3.1.3. Önerme $\Lambda_\theta, S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: Λ_θ -çarpımının, $S_E(U)$ üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Gerçekten, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere,

$$\Lambda_\theta: S_E(U) \times S_E(U) \rightarrow S_E(U)$$

$$((\mathfrak{G}, \mathcal{M}), (\check{Y}, \mathcal{D})) \rightarrow (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_\theta (\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{J})$$

olup, buradan $(\mathfrak{Q}, \mathcal{J})$ de U üzerinde bir esnek kümedir.

3.1.4. Önerme $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}), (\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{J})$, U kümesi üzerinde birer esnek küme olmak üzere,

$$(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_\theta ((\check{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_\theta (\mathfrak{Q}, \mathcal{J})) \neq_M ((\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_\theta (\check{Y}, \mathcal{D})) \Lambda_\theta (\mathfrak{Q}, \mathcal{J})$$

olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, Λ_θ -çarpımı birleşme özelliğine sahip değildir.

İspat: $S_E(U)$ kümesi üzerinde, Λ_θ -çarpımının birleşme özelliğine sahip olmadığını göstermek için bir örnek verelim. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesi, $\mathcal{M} = \{e_2, e_3\}$, $\mathcal{D} = \{e_1\}$, $\mathcal{J} = \{e_4\}$ E parametre kümesinin alt kümeleri, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme olmak üzere, U üzerinde $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}), (\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{J})$ esnek kümeleri,

$$(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) = \{(e_2, \{h_3, h_4\}), (e_3, \{h_1\})\}, (\check{Y}, \mathcal{D}) = \{(e_1, \emptyset)\}, (\mathfrak{Q}, \mathcal{J}) = \{(e_4, \{h_1, h_3, h_5\})\}$$

olarak tanımlansın. İlk olarak eşitsizliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\check{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_\theta (\mathfrak{Q}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{G}, \mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan,

$$(\mathfrak{G}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = \{((e_1, e_4), \{h_2, h_4\})\}$$

elde edilir. $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_\theta (\mathfrak{G}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J}))$ olsun. Böylece,

$$(\mathfrak{X}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J})) = \{((e_2, (e_1, e_4)), \{h_1, h_5\}), ((e_3, (e_1, e_4)), \{h_3, h_5\}))\}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafından devam edilecek olursa, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan,

$$(\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) = \{((e_2, e_1), \{h_1, h_2, h_5\}), ((e_3, e_1), \{h_2, h_3, h_4, h_5\}))\}$$

elde edilir. $(\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) \Lambda_\theta (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times \mathcal{J})$ olsun. Böylece,

$$(\mathfrak{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times \mathcal{J}) = \{(((e_2, e_1), e_4), \{h_4\}), (((e_3, e_1), e_4), \emptyset)\}$$

elde edilir. Buradan, $(\mathfrak{X}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J})) \neq_M (\mathfrak{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times \mathcal{J})$ olduğu görülür. Ayrıca,

$$(\mathfrak{X}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J})) \neq_L (\mathfrak{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times \mathcal{J}) \text{ ve } (\mathfrak{X}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J})) \neq_J (\mathfrak{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times \mathcal{J})$$

olduğu da açıktır.

3.1.5. Önerme $(\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})$, U üzerinde birer esnek küme olmak üzere, $(\check{Y}, \mathcal{D})\Lambda_\theta(\mathfrak{O}, \mathcal{J}) \neq_M (\mathfrak{O}, \mathcal{J})\Lambda_\theta(\check{Y}, \mathcal{D})$ olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde Λ_θ -çarpımı M-eşitliği altında değişme özelliğine sahip değildir.

İspat: $(\check{Y}, \mathcal{D})\Lambda_\theta(\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{D} \times \mathcal{J})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})\Lambda_\theta(\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{J} \times \mathcal{D})$ olsun. $\mathcal{D} \times \mathcal{J} \neq \mathcal{J} \times \mathcal{D}$ olduğundan, ispatın kalanı açıktır.

3.1.6. Önerme $(\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})$, U üzerinde iki esnek küme olmak üzere, $(\check{Y}, \mathcal{D})\Lambda_\theta(\mathfrak{O}, \mathcal{J}) =_L (\mathfrak{O}, \mathcal{J})\Lambda_\theta(\check{Y}, \mathcal{D})$ olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde Λ_θ -çarpımı L-eşitliği altında değişme özelliğine sahiptir.

İspat: $(\check{Y}, \mathcal{D})\Lambda_\theta(\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{D} \times \mathcal{J})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})\Lambda_\theta(\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{J} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(d, j) \in \mathcal{D} \times \mathcal{J}$ için $\mathfrak{O}(d, j) = \check{Y}'(d) \cap \mathfrak{O}'(j)$ ve her $(j, d) \in \mathcal{J} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{X}(j, d) = \mathfrak{O}'(j) \cap \check{Y}'(d)$. Her $(d, j) \in \mathcal{D} \times \mathcal{J}$ için $\check{Y}'(d) \cap \mathfrak{O}'(j) = \mathfrak{O}'(j) \cap \check{Y}'(d)$ olacak şekilde $(j, d) \in \mathcal{J} \times \mathcal{D}$ olduğundan, $(\check{Y}, \mathcal{D})\Lambda_\theta(\mathfrak{O}, \mathcal{J}) \subseteq_L (\mathfrak{O}, \mathcal{J})\Lambda_\theta(\check{Y}, \mathcal{D})$.

Benzer şekilde her $(j, d) \in J \times \mathcal{D}$ için $\mathcal{Q}'(j) \cap \check{Y}'(d) = \check{Y}'(d) \cap \mathcal{Q}'(j)$ olacak şekilde $(d, j) \in \mathcal{D} \times J$ olduğundan, $(\mathcal{Q}, J)\Lambda_\theta(\check{Y}, \mathcal{D}) \subseteq_L (\check{Y}, \mathcal{D})\Lambda_\theta(\mathcal{Q}, J)$ elde edilir. Böylece, $(\check{Y}, \mathcal{D})\Lambda_\theta(\mathcal{Q}, J) =_L (\mathcal{Q}, J)\Lambda_\theta(\check{Y}, \mathcal{D})$.

3.1.7. Önerme $(\check{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde bir esnek küme olmak üzere, $(\check{Y}, \mathcal{D})\Lambda_\theta \emptyset_\emptyset =_M \emptyset_\emptyset \Lambda_\theta(\check{Y}, \mathcal{D}) =_M \emptyset_\emptyset$ olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, Λ_θ -çarpımının M -eşitliğine göre yutan elemanı boş esnek kümedir.

İspat: $\emptyset_\emptyset = (\mathcal{Q}, \emptyset)$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})\Lambda_\theta \emptyset_\emptyset = (\check{Y}, \mathcal{D})\Lambda_\theta(\mathcal{Q}, \emptyset) = (\mathcal{Q}, \mathcal{D} \times \emptyset) = (\mathcal{Q}, \emptyset)$ olsun. Parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_\emptyset$ olduğundan, $(\mathcal{Q}, \emptyset) = \emptyset_\emptyset$ elde edilir. $\emptyset_\emptyset \Lambda_\theta(\check{Y}, \mathcal{D}) = \emptyset_\emptyset$ olduğunun ispatı ise benzer şekilde gösterilir.

3.1.8. Önerme $(\check{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde bir esnek küme olsun. O halde, $(\check{Y}, \mathcal{D})\Lambda_\theta \emptyset_{\mathcal{D}} =_M \emptyset_{\mathcal{D}} \Lambda_\theta(\check{Y}, \mathcal{D}) =_M (\check{Y}, \mathcal{D} \times \mathcal{D})^r$.

İspat: $\emptyset_{\mathcal{D}} = (\mathcal{Q}, \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $d \in \mathcal{D}$ için $\mathcal{Q}(d) = \emptyset$. $(\check{Y}, \mathcal{D})\Lambda_\theta \emptyset_{\mathcal{D}} = (\check{Y}, \mathcal{D})\Lambda_\theta(\mathcal{Q}, \mathcal{D}) = (\mathcal{Q}, \mathcal{D} \times \mathcal{D})$ olsun. Böylece, her $(d, m) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ için $\mathcal{Q}(d, m) = \check{Y}'(d) \cap \mathcal{Q}'(m) = \check{Y}'(d) \cap \emptyset' = \check{Y}'(d) \cap U = \check{Y}'(d)$ olup $(\mathcal{Q}, \mathcal{D} \times \mathcal{D}) = (\check{Y}, \mathcal{D} \times \mathcal{D})^r$ elde edilir. Benzer şekilde $\emptyset_{\mathcal{D}} \Lambda_\theta(\check{Y}, \mathcal{D}) =_M (\check{Y}, \mathcal{D} \times \mathcal{D})^r$ olduğu da gösterilir.

3.1.9. Önerme $(\check{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde bir esnek küme olsun. O halde, $(\check{Y}, \mathcal{D})\Lambda_\theta U_{\mathcal{D}} =_M U_{\mathcal{D}} \Lambda_\theta(\check{Y}, \mathcal{D}) =_M \emptyset_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}$.

İspat: $U_{\mathcal{D}} = (\mathcal{Q}, \mathcal{D})$ olsun. O halde, her $d \in \mathcal{D}$ için $\mathcal{Q}(d) = U$. $(\check{Y}, \mathcal{D})\Lambda_\theta U_{\mathcal{D}} = (\check{Y}, \mathcal{D})\Lambda_\theta(\mathcal{Q}, \mathcal{D}) = (\mathcal{X}, \mathcal{D} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(d, m) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ için $\mathcal{X}(d, m) = \check{Y}'(d) \cap \mathcal{Q}'(m) = \check{Y}'(d) \cap U' = \check{Y}'(d) \cap \emptyset = \emptyset$ olup $(\mathcal{X}, \mathcal{D} \times \mathcal{D}) = \emptyset_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}$ elde edilir. Benzer şekilde $U_{\mathcal{D}} \Lambda_\theta(\check{Y}, \mathcal{D}) = \emptyset_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}$ olduğu da gösterilir.

3.1.10. Önerme $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$, U üzerinde bir esnek küme olmak üzere, $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\mathcal{Q}, \mathcal{M}) \subseteq_J (\mathcal{Q}, \mathcal{M})^r$ olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde Λ_θ -çarpımı J -eşitliğine göre denk güçlülük (idempotent) özelliğine sahip değildir.

İspat: $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) = (\ddot{Y}, \mathcal{M} \times \mathcal{M})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ için $\ddot{Y}(m, d) = \mathfrak{G}'(m) \cap \mathfrak{G}'(d)$. Her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ için $\ddot{Y}(m, d) = \mathfrak{G}'(m) \cap \mathfrak{G}'(d) \subseteq \mathfrak{G}'(m)$ olacak şekilde $m \in \mathcal{M}$ olduğundan, $(\ddot{Y}, \mathcal{M} \times \mathcal{M}) \subseteq_J (\mathfrak{G}, \mathcal{M})^r$ elde edilir.

3.1.11. Önerme $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \subseteq_J (\ddot{Y}, \mathcal{D})^r$ ve $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \subseteq_J (\mathfrak{G}, \mathcal{M})^r$.

İspat: $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{G}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{G}(m, d) = \mathfrak{G}'(m) \cap \ddot{Y}'(d)$. Her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{G}'(m) \cap \ddot{Y}'(d) \subseteq \ddot{Y}'(d)$ olacak şekilde $d \in \mathcal{D}$ olduğundan $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \subseteq_J (\ddot{Y}, \mathcal{D})^r$ elde edilir. Benzer şekilde her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{G}'(m) \cap \ddot{Y}'(d) \subseteq \mathfrak{G}'(m)$ olacak şekilde bir $m \in \mathcal{M}$ olduğundan, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \subseteq_J (\mathfrak{G}, \mathcal{M})^r$ elde edilir.

3.1.12. Önerme $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde bir esnek küme olsun. Bu durumda, $[(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\ddot{Y}, \mathcal{D})]^r = (\mathfrak{G}, \mathcal{M})^r V_*(\ddot{Y}, \mathcal{D})^r$.

İspat: $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{G}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{G}(m, d) = \mathfrak{G}'(m) \cap \ddot{Y}'(d)$. Böylece, $\mathfrak{G}'(m, d) = \mathfrak{G}'(m) \cup \ddot{Y}'(d) = (\mathfrak{G}')'(m) \cup (\ddot{Y}')'(d)$. Buradan $(\mathfrak{G}', \mathcal{M} \times \mathcal{D}) = (\mathfrak{G}, \mathcal{M})^r V_*(\ddot{Y}, \mathcal{D})^r$ elde edilir.

3.1.13. Önerme $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \subseteq_F (\mathfrak{G}, \mathcal{M})V_*(\ddot{Y}, \mathcal{D})$.

İspat: $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{G}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})V_*(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{G}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{G}(m, d) = \mathfrak{G}'(m) \cap \ddot{Y}'(d)$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{G}(m, d) = \mathfrak{G}'(m) \cup \ddot{Y}'(d)$. Böylece, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{G}'(m) \cap \ddot{Y}'(d) \subseteq \mathfrak{G}'(m) \cup \ddot{Y}'(d)$ olduğundan, ispat elde edilir.

3.1.14. Önerme $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$, $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{G}, \mathcal{J})$, U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})^r \subseteq_F (\ddot{Y}, \mathcal{D})^r$ ise $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\mathfrak{G}, \mathcal{J}) \subseteq_F (\ddot{Y}, \mathcal{D})\Lambda_\theta(\mathfrak{G}, \mathcal{J})$.

İspat: $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})^r \subseteq_F (\ddot{Y}, \mathcal{D})^r$ olsun. Buradan, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$ ve her $m \in \mathcal{M}$ için $\mathfrak{O}'(m) \subseteq \ddot{Y}'(m)$. Böylece $\mathcal{M} \times \mathcal{J} \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{J}$ ve her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için $\mathfrak{O}'(m) \cap \mathfrak{O}'(j) \subseteq \ddot{Y}'(m) \cap \mathfrak{O}'(j)$ olup, ispat elde edilir.

3.1.15. Önerme $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$, $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathfrak{X})$, U üzerinde birer esnek küme olsun. $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})^r \subseteq_F (\ddot{Y}, \mathcal{D})^r$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})^r \subseteq_F (\mathfrak{O}, \mathfrak{X})^r$ ise, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\mathfrak{O}, \mathcal{J}) \subseteq_F (\ddot{Y}, \mathcal{D})\Lambda_\theta(\mathfrak{O}, \mathfrak{X})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})\Lambda_\theta(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \subseteq_F (\mathfrak{O}, \mathfrak{X})\Lambda_\theta(\ddot{Y}, \mathcal{D})$.

İspat: $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})^r \subseteq_F (\ddot{Y}, \mathcal{D})^r$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})^r \subseteq_F (\mathfrak{O}, \mathfrak{X})^r$ olsun. Böylece, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$, $\mathcal{J} \subseteq \mathfrak{X}$, her $m \in \mathcal{M}$ için $\mathfrak{O}'(m) \subseteq \ddot{Y}'(m)$ ve her $j \in \mathcal{J}$ için $\mathfrak{O}'(j) \subseteq \mathfrak{O}'(j)$. Buradan, $\mathcal{M} \times \mathcal{J} \subseteq \mathcal{D} \times \mathfrak{X}$ olup, her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için $\mathfrak{O}'(m) \cap \mathfrak{O}'(j) \subseteq \ddot{Y}'(m) \cap \mathfrak{O}'(j)$ ve her $(j, m) \in \mathcal{J} \times \mathcal{M}$ için $\mathfrak{O}'(j) \cap \mathfrak{O}'(m) \subseteq \mathfrak{O}'(j) \cap \ddot{Y}'(m)$ olup, ispat elde edilir.

3.1.16. Önerme $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$, $(\ddot{Y}, \mathcal{M})$, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$, U üzerinde birer esnek küme olsun. $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \subseteq_F (\ddot{Y}, \mathcal{M})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \subseteq_F (\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ise, $(\ddot{Y}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \subseteq_F (\mathfrak{O}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$.

İspat: $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \subseteq_F (\ddot{Y}, \mathcal{M})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \subseteq_F (\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ olsun. Buradan, her $m \in \mathcal{M}$ için $\mathfrak{O}(m) \subseteq \ddot{Y}(m)$ ve her $j \in \mathcal{M}$ için $\mathfrak{O}(j) \subseteq \mathfrak{O}(j)$. Böylece, $\mathcal{M} \times \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ ve her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ için $\ddot{Y}'(m) \cap \mathfrak{O}'(j) \subseteq \mathfrak{O}'(m) \cap \mathfrak{O}'(j)$ olup, ispat elde edilir.

3.1.17. Önerme $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu durumda, $\emptyset_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}} \subseteq_F (\mathfrak{O}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ve $\emptyset_{\mathcal{D} \times \mathcal{M}} \subseteq_F (\ddot{Y}, \mathcal{D})\Lambda_\theta(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$.

İspat: $\emptyset_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}} = (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{O}(m, d) = \emptyset$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{O}(m, d) = \mathfrak{O}'(m) \cap \ddot{Y}'(d)$. $\mathcal{M} \times \mathcal{D} \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\emptyset \subseteq \mathfrak{O}'(m) \cap \ddot{Y}'(d)$ olduğundan $\emptyset_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}} \subseteq_F (\mathfrak{O}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ispatı elde edilir. Benzer şekilde, $\emptyset_{\mathcal{D} \times \mathcal{M}} \subseteq_F (\ddot{Y}, \mathcal{D})\Lambda_\theta(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ olduğu da gösterilir.

3.1.18. Önerme $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu durumda, $\emptyset_{\mathcal{M}} \subseteq_J (\mathfrak{O}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, $\emptyset_{\mathcal{D}} \subseteq_J (\mathfrak{O}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ve $\emptyset_E \subseteq_J (\mathfrak{O}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\ddot{Y}, \mathcal{D})$.

İspat: $\emptyset_{\mathcal{M}} = (\emptyset, \mathcal{M})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})\Lambda_{\theta}(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $m \in \mathcal{M}$ için $\emptyset(m) = \emptyset$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{Z}(m, d) = \mathfrak{O}'(m) \cap \ddot{Y}'(d)$. Her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\emptyset \subseteq \mathfrak{O}'(m) \cap \ddot{Y}'(d)$ olduğundan, $\emptyset_{\mathcal{M}} \tilde{\subseteq}_J (\mathfrak{O}, \mathcal{M})\Lambda_{\theta}(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ sağlanır. $\emptyset_{\mathcal{D}} \tilde{\subseteq}_J (\mathfrak{O}, \mathcal{M})\Lambda_{\theta}(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ve $\emptyset_E \tilde{\subseteq}_J (\mathfrak{O}, \mathcal{M})\Lambda_{\theta}(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ olduğu da benzer şekilde gösterilir.

3.1.19. Önerme $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})\Lambda_{\theta}(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\subseteq}_F U_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}}$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})\Lambda_{\theta}(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_F U_{\mathcal{D} \times \mathcal{M}}$.

İspat: $U_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}} = (\emptyset, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})\Lambda_{\theta}(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\emptyset(m, d) = U$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{Z}(m, d) = \mathfrak{O}'(m) \cap \ddot{Y}'(d)$. $\mathcal{M} \times \mathcal{D} \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{O}'(m) \cap \ddot{Y}'(d) \subseteq U$ olduğundan $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})\Lambda_{\theta}(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\subseteq}_F U_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}}$ elde edilir. $(\ddot{Y}, \mathcal{D})\Lambda_{\theta}(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_F U_{\mathcal{D} \times \mathcal{M}}$ olduğu da benzer şekilde gösterilir.

3.1.20. Önerme $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})\Lambda_{\theta}(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\subseteq}_J U_{\mathcal{M}}$, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})\Lambda_{\theta}(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\subseteq}_J U_{\mathcal{D}}$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})\Lambda_{\theta}(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\subseteq}_F U_E$.

İspat: $U_{\mathcal{M}} = (\emptyset, \mathcal{M})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})\Lambda_{\theta}(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $m \in \mathcal{M}$ için $\emptyset(m) = U$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{Z}(m, d) = \mathfrak{O}'(m) \cap \ddot{Y}'(d)$. Her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{O}'(m) \cap \ddot{Y}'(d) \subseteq U$ olduğundan $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})\Lambda_{\theta}(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\subseteq}_J U_{\mathcal{M}}$ elde edilir. $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})\Lambda_{\theta}(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\subseteq}_J U_{\mathcal{D}}$ olduğu da benzer şekilde gösterilir.

$U_E = (\mathfrak{X}, E)$ olsun. Buradan, her $m \in E$ için $\mathfrak{X}(m) = U$. $\mathcal{M} \times \mathcal{D} \subseteq E$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{O}'(m) \cap \ddot{Y}'(d) \subseteq U$ olduğundan, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})\Lambda_{\theta}(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\subseteq}_F U_E$ elde edilir.

3.1.21. Önerme $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})\Lambda_{\theta}(\ddot{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathcal{M}} U_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}}$ olması için gerek ve yeter şart, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\mathcal{M}}$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\mathcal{D}}$ sağlanmasıdır.

İspat: $U_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}} = (\emptyset, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})\Lambda_{\theta}(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\emptyset, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\emptyset(m, d) = U$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\emptyset(m, d) = \mathfrak{O}'(m) \cap \ddot{Y}'(d)$ olur. $(\emptyset, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) = (\emptyset, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için

$\mathfrak{T}'(m) \cap \check{Y}'(d) = U$. Böylece, her $m \in \mathcal{M}$ için $\mathfrak{T}'(m) = U$ ve her $d \in \mathcal{D}$ için $\check{Y}'(d) = U$. Buradan, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) = \emptyset_{\mathcal{M}}$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D}) = \emptyset_{\mathcal{D}}$ elde edilir.

Tersine, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\mathcal{M}}$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathcal{D}} \emptyset_{\mathcal{D}}$ olsun. Böylece, her $m \in \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{T}(m) = \emptyset$ ve her $d \in \mathcal{D}$ için $\check{Y}(d) = \emptyset$. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{O}(m, d) = \mathfrak{T}'(m) \cap \check{Y}'(d) = U \cap U = U$ olup, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}(\check{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}} U_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}}$ elde edilir.

3.1.22. Önerme $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}(\check{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\emptyset}$ olması için gerek ve yeter şart, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\emptyset}$ veya $(\check{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathcal{D}} \emptyset_{\emptyset}$ olmasıdır.

İspat: $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}(\check{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\emptyset}$ olsun. Buradan, $\mathcal{M} \times \mathcal{D} = \emptyset$ olup, $\mathcal{M} = \emptyset$ veya $\mathcal{D} = \emptyset$ olur. Parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_{\emptyset}$ olduğundan, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) = \emptyset_{\emptyset}$ veya $(\check{Y}, \mathcal{D}) = \emptyset_{\emptyset}$ elde edilir.

Tersine, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) = \emptyset_{\emptyset}$ veya $(\check{Y}, \mathcal{D}) = \emptyset_{\emptyset}$ olsun. Böylece, $\mathcal{M} = \emptyset$ veya $\mathcal{D} = \emptyset$ olur. Bu durumda, $\mathcal{M} \times \mathcal{D} = \emptyset$ ve parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_{\emptyset}$ olduğundan, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}(\check{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\emptyset}$ olur.

3.2. Esnek Teta-Çarpım ve Dağılmaları

Bu bölümde, esnek teta-çarpımının kısıtlanmış kesişim ve birleşime, genişletilmiş kesişim ve birleşime, esnek ikili parçalı kesişim ve birleşime, VE-çarpıma ve VEYA-çarpıma dağılma durumu ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

3.2.1. Teorem $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$, $(\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})$, U üzerinde birer esnek küme olmak üzere,

$$i) \quad (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}[(\check{Y}, \mathcal{D}) \cup_{\mathcal{R}} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})] =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}(\check{Y}, \mathcal{D})] \cap_{\mathcal{R}} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}(\mathfrak{O}, \mathcal{J})]$$

$$ii) \quad (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}[(\check{Y}, \mathcal{D}) \cap_{\mathcal{R}} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})] =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}(\check{Y}, \mathcal{D})] \cup_{\mathcal{R}} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}(\mathfrak{O}, \mathcal{J})]$$

$$iii) \quad [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \cap_{\mathcal{R}} (\check{Y}, \mathcal{D})] \Lambda_{\theta}(\mathfrak{O}, \mathcal{J}) =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}(\mathfrak{O}, \mathcal{J})] \cup_{\mathcal{R}} [(\check{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\theta}(\mathfrak{O}, \mathcal{J})]$$

$$iv) \quad [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \cup_{\mathcal{R}} (\check{Y}, \mathcal{D})] \Lambda_{\theta}(\mathfrak{O}, \mathcal{J}) =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}(\mathfrak{O}, \mathcal{J})] \cap_{\mathcal{R}} [(\check{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\theta}(\mathfrak{O}, \mathcal{J})]$$

İspat: (i) Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $\mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J})$, sağ tarafının parametre kümesi $(\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olup, $\mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J}) = (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\check{\mathcal{Y}}, \mathcal{D}) \cup_R (\mathcal{Q}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{D} \cap \mathcal{J})$ olsun. Buradan, her $\varphi \in \mathcal{D} \cap \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{X}(\varphi) = \check{\mathcal{Y}}(\varphi) \cup \mathcal{Q}(\varphi)$. $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_\theta(\mathfrak{X}, \mathcal{D} \cap \mathcal{J}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J}))$ olsun. Buradan, her $(m, \varphi) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J})$ için, $\mathfrak{Z}(m, \varphi) = \mathfrak{G}'(m) \cap \mathfrak{X}'(\varphi)$. O halde,

$$\mathfrak{Z}(m, \varphi) = \mathfrak{G}'(m) \cap [\check{\mathcal{Y}}(\varphi) \cup \mathcal{Q}(\varphi)]' = \mathfrak{G}'(m) \cap [\check{\mathcal{Y}}'(\varphi) \cap \mathcal{Q}'(\varphi)]$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_\theta(\check{\mathcal{Y}}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_\theta(\mathcal{Q}, \mathcal{J}) = (\mathcal{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olsun. O halde, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) = \mathfrak{G}'(m) \cap \check{\mathcal{Y}}'(d)$ ve her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için, $(\mathcal{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \mathfrak{G}'(m) \cap \mathcal{Q}'(j)$. Buradan, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap_R (\mathcal{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{G}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}))$ olsun. Böylece, her $(m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J})$ için,

$$\mathfrak{G}(m, \varphi) = \mathfrak{F}(m, \varphi) \cap \mathcal{Q}(m, \varphi) = [\mathfrak{G}'(m) \cap \check{\mathcal{Y}}'(\varphi)] \cap [\mathfrak{G}'(m) \cap \mathcal{Q}'(\varphi)]$$

Böylece, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_\theta[(\check{\mathcal{Y}}, \mathcal{D}) \cup_R (\mathcal{Q}, \mathcal{J})] =_M [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_\theta(\check{\mathcal{Y}}, \mathcal{D})] \cap_R [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_\theta(\mathcal{Q}, \mathcal{J})]$ elde edilir.

Burada, $\mathcal{D} \cap \mathcal{J} = \emptyset$ ise $\mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J}) = (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \emptyset$ olup, parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_\emptyset$ olduğundan, eşitliğin her iki tarafı $\emptyset_\emptyset$ olur. $(\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J})$ olduğundan, $(\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \emptyset$ ise $\mathcal{M} = \emptyset$ veya $\mathcal{D} \cap \mathcal{J} = \emptyset$ olur. Kabul gereği $\mathcal{M} \neq \emptyset$ olup, $(\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \emptyset$ olması $\mathcal{D} \cap \mathcal{J} = \emptyset$ olmasını gerektirdiğinden, bu durumda da yine eşitliğin her iki tarafı $\emptyset_\emptyset$ olur.

(iii) Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $(\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times \mathcal{J}$, sağ tarafının parametre kümesi $(\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olup, $(\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times \mathcal{J} = (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \cap_R (\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{M} \cap \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $\varphi \in \mathcal{M} \cap \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{X}(\varphi) = \mathfrak{G}(\varphi) \cap \check{Y}(\varphi)$. $(\mathfrak{X}, \mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \Lambda_\theta(\mathfrak{Q}, J) = (\mathfrak{Z}, (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times J)$ olsun. Buradan, her $(\varphi, j) \in (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times J$ için, $\mathfrak{Z}(\varphi, j) = \mathfrak{X}'(\varphi) \cap \mathfrak{Q}'(j)$. O halde,

$$\mathfrak{Z}(\varphi, j) = [\mathfrak{G}(\varphi) \cap \check{Y}(\varphi)]' \cap \mathfrak{Q}'(j) = [\mathfrak{G}'(\varphi) \cup \check{Y}'(\varphi)] \cap \mathfrak{Q}'(j)$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_\theta(\mathfrak{Q}, J) = (\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times J)$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_\theta(\mathfrak{Q}, J) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times J)$ olsun. O halde, her $(m, j) \in \mathcal{M} \times J$ için, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times J) = \mathfrak{G}'(m) \cap \mathfrak{Q}'(j)$ ve her $(d, j) \in \mathcal{D} \times J$ için, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times J) = \check{Y}'(d) \cap \mathfrak{Q}'(j)$. Buradan, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times J) \cup_R (\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times J) = (\mathfrak{S}, (\mathcal{M} \times J) \cap (\mathcal{D} \times J))$ olsun. Böylece, her $(\varphi, j) \in (\mathcal{M} \times J) \cap (\mathcal{D} \times J)$ için,

$$\mathfrak{S}(\varphi, j) = \mathfrak{F}(\varphi, j) \cup \mathfrak{Q}(\varphi, j) = [\mathfrak{G}'(\varphi) \cap \mathfrak{Q}'(j)] \cup [\check{Y}'(\varphi) \cap \mathfrak{Q}'(j)]$$

Böylece, $[(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \cap_R (\check{Y}, \mathcal{D})] \Lambda_\theta(\mathfrak{Q}, J) =_M [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_\theta(\mathfrak{Q}, J)] \cup_R [(\check{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_\theta(\mathfrak{Q}, J)]$ elde edilir.

Burada, $\mathcal{M} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ ise $(\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times J = (\mathcal{M} \times J) \cap (\mathcal{D} \times J) = \emptyset$ olup, parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_\emptyset$ olduğundan, eşitliğin her iki tarafı da $\emptyset_\emptyset$ olur. $(\mathcal{M} \times J) \cap (\mathcal{D} \times J) = (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times J$ olduğundan, $(\mathcal{M} \times J) \cap (\mathcal{D} \times J) = \emptyset$ ise $\mathcal{M} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ veya $J = \emptyset$ olur. Kabul gereği $J \neq \emptyset$ olup, $(\mathcal{M} \times J) \cap (\mathcal{D} \times J) = \emptyset$ olması $\mathcal{M} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ olmasını gerektirdiğinden, bu durumda da yine eşitliğin her iki tarafı $\emptyset_\emptyset$ olur.

3.2.2. *Not* Kısıtlanmış esnek küme işlemi, esnek teta-çarpıma dağılmaz; çünkü kesişim, kartezyen çarpıma dağılmadığından, M-eşitliğin ilk şartı olan iki esnek kümenin parametre kümesinin aynı olması şartı bozulmaktadır.

3.2.3. Teorem $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$, $(\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{Q}, J)$, U üzerinde birer esnek küme olmak üzere,

$$i) \quad (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_\theta[(\check{Y}, \mathcal{D}) \cap_\varepsilon (\mathfrak{Q}, J)] =_M [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_\theta(\check{Y}, \mathcal{D})] \cup_\varepsilon [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_\theta(\mathfrak{Q}, J)]$$

$$ii) \quad (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_\theta[(\check{Y}, \mathcal{D}) \cup_\varepsilon (\mathfrak{Q}, J)] =_M [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_\theta(\check{Y}, \mathcal{D})] \cap_\varepsilon [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_\theta(\mathfrak{Q}, J)]$$

$$iii) \quad [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \cup_\varepsilon (\check{Y}, \mathcal{D})] \Lambda_\theta(\mathfrak{Q}, J) =_M [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_\theta(\mathfrak{Q}, J)] \cap_\varepsilon [(\check{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_\theta(\mathfrak{Q}, J)]$$

$$iv) [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \cap_{\varepsilon} (\ddot{Y}, \mathcal{D})] \Lambda_{\theta}(\mathfrak{D}, \mathcal{J}) =_M [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}(\mathfrak{D}, \mathcal{J})] \cup_{\varepsilon} [(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\theta}(\mathfrak{D}, \mathcal{J})]$$

İspat: (i) Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $\mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cup \mathcal{J})$, sağ tarafının parametre kümesi $(\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cup (\mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olup, $\mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cup \mathcal{J}) = (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cup (\mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır. Ayrıca, kabul gereği $\mathcal{M} \neq \emptyset$, $\mathcal{D} \neq \emptyset$ ve $\mathcal{J} \neq \emptyset$ olduğundan, $\mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cup \mathcal{J}) \neq \emptyset$ ve $(\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cup (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \neq \emptyset$. Dolayısıyla sağ ve sol tarafın boş esnek kümeye eşit olma durumu bulunmamaktadır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \cap_{\varepsilon} (\mathfrak{D}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{D} \cup \mathcal{J})$ olsun. Buradan, her $\varphi \in \mathcal{D} \cup \mathcal{J}$ için,

$$\mathfrak{X}(\varphi) = \begin{cases} \ddot{Y}(\varphi), & \varphi \in \mathcal{D} - \mathcal{J} \\ \mathfrak{D}(\varphi), & \varphi \in \mathcal{J} - \mathcal{D} \\ \ddot{Y}(\varphi) \cap \mathfrak{D}(\varphi), & \varphi \in \mathcal{D} \cap \mathcal{J} \end{cases}$$

$(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}(\mathfrak{X}, \mathcal{D} \cup \mathcal{J}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cup \mathcal{J}))$ olsun. Buradan, her $(m, \varphi) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cup \mathcal{J})$ için, $\mathfrak{Z}(m, \varphi) = \mathfrak{T}'(m) \cap \mathfrak{X}'(\varphi)$. O halde, her $(m, \varphi) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cup \mathcal{J})$ için,

$$\mathfrak{Z}(m, \varphi) = \begin{cases} \mathfrak{T}'(m) \cap \ddot{Y}'(\varphi), & (m, \varphi) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} - \mathcal{J}) \\ \mathfrak{T}'(m) \cap \mathfrak{D}'(\varphi), & (m, \varphi) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{J} - \mathcal{D}) \\ \mathfrak{T}'(m) \cap [\ddot{Y}'(\varphi) \cup \mathfrak{D}'(\varphi)], & (m, \varphi) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J}) \end{cases}$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}(\mathfrak{D}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) = \mathfrak{T}'(m) \cap \ddot{Y}'(d)$ ve her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \mathfrak{T}'(m) \cap \mathfrak{D}'(j)$. Buradan, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cup_{\varepsilon} (\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{S}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cup (\mathcal{M} \times \mathcal{J}))$ olsun. O halde her $(m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cup (\mathcal{M} \times \mathcal{J})$ için,

$$\mathfrak{S}(m, \varphi) = \begin{cases} \mathfrak{F}(m, \varphi), & (m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) - (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \\ \mathfrak{Q}(m, \varphi), & (m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) - (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \\ \mathfrak{F}(m, \varphi) \cup \mathfrak{Q}(m, \varphi), & (m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \end{cases}$$

Buradan,

$$\mathfrak{Q}(m, \varphi) = \begin{cases} \mathfrak{O}'(m) \cap \mathfrak{Y}'(\varphi), & (m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) - (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \\ \mathfrak{O}'(m) \cap \mathfrak{O}'(\varphi), & (m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) - (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \\ [\mathfrak{O}'(m) \cap \mathfrak{Y}'(\varphi)] \cup [\mathfrak{O}'(m) \cap \mathfrak{O}'(\varphi)], & (m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \end{cases}$$

Böylece, ispat elde edilir.

(iii) Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $(\mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \times \mathcal{J}$, sağ tarafının parametre kümesi $(\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cup (\mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olup, $(\mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \times \mathcal{J} = (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cup (\mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır. Ayrıca, kabul gereği $\mathcal{M} \neq \emptyset$, $\mathcal{D} \neq \emptyset$ ve $\mathcal{J} \neq \emptyset$ olduğundan, $(\mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \times \mathcal{J} \neq \emptyset$ ve $(\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cup (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) \neq \emptyset$. Dolayısıyla sağ ve sol tarafın boş esnek kümeye eşit olma durumu bulunmamaktadır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \cup_{\varepsilon} (\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{M} \cup \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $\varphi \in \mathcal{M} \cup \mathcal{D}$ için,

$$\mathfrak{X}(\varphi) = \begin{cases} \mathfrak{O}(\varphi), & \varphi \in \mathcal{M} - \mathcal{D} \\ \mathfrak{Y}(\varphi), & \varphi \in \mathcal{D} - \mathcal{M} \\ \mathfrak{O}(\varphi) \cup \mathfrak{Y}(\varphi), & \varphi \in \mathcal{M} \cap \mathcal{D} \end{cases}$$

$(\mathfrak{X}, \mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \Lambda_{\theta}(\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{Z}, (\mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan her $(\varphi, j) \in (\mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \times \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{Z}(\varphi, j) = \mathfrak{X}'(\varphi) \cap \mathfrak{O}'(j)$ olur. O halde, her $(\varphi, j) \in (\mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \times \mathcal{J}$ için,

$$\mathfrak{Z}(\varphi, j) = \begin{cases} \mathfrak{O}'(\varphi) \cap \mathfrak{O}'(j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{M} - \mathcal{D}) \times \mathcal{J} \\ \mathfrak{Y}'(\varphi) \cap \mathfrak{O}'(j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{D} - \mathcal{M}) \times \mathcal{J} \\ [\mathfrak{O}'(\varphi) \cap \mathfrak{Y}'(\varphi)] \cap \mathfrak{O}'(j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times \mathcal{J} \end{cases}$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}(\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ ve $(\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\theta}(\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olsun. O halde, her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \mathfrak{O}'(m) \cap \mathfrak{O}'(j)$ ve her $(d, j) \in \mathcal{D} \times \mathcal{J}$ için, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = \mathfrak{Y}'(d) \cap \mathfrak{O}'(j)$. Buradan, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap_{\varepsilon} (\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cup (\mathcal{D} \times \mathcal{J}))$ olsun. O halde, her $(\varphi, j) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cup (\mathcal{D} \times \mathcal{J})$ için,

$$\mathfrak{Q}(\varphi, j) = \begin{cases} \mathfrak{F}(\varphi, j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) - (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) \\ \mathfrak{Q}(\varphi, j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) - (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \\ \mathfrak{F}(\varphi, j) \cap \mathfrak{Q}(\varphi, j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) \end{cases}$$

Buradan,

$$\odot(\varphi, j) = \begin{cases} \mathfrak{T}'(\varphi) \cap \mathfrak{D}'(j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) - (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) \\ \check{\mathfrak{Y}}'(\varphi) \cap \mathfrak{D}'(j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) - (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \\ [\mathfrak{T}'(\varphi) \cap \mathfrak{D}'(j)] \cap [\check{\mathfrak{Y}}'(\varphi) \cap \mathfrak{D}'(j)], & (\varphi, j) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) \end{cases}$$

Böylece, ispat elde edilir.

3.2.4. *Not* Genişletilmiş esnek küme işlemi, esnek teta-çarpıma dağılmaz; çünkü birleşim, kartezyen çarpıma dağılmadığından, M-eşitliğin ilk şartı olan iki esnek kümenin parametre kümesinin aynı olması şartı bozulmaktadır.

3.2.5. Teorem $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$, $(\check{\mathfrak{Y}}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{D}, \mathcal{J})$, U üzerinde birer esnek küme olmak üzere,

$$i) (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}[(\check{\mathfrak{Y}}, \mathcal{D}) \tilde{\cap} (\mathfrak{D}, \mathcal{J})] =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}(\check{\mathfrak{Y}}, \mathcal{D})] \tilde{\cup} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}(\mathfrak{D}, \mathcal{J})]$$

$$ii) (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}[(\check{\mathfrak{Y}}, \mathcal{D}) \tilde{\cup} (\mathfrak{D}, \mathcal{J})] =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}(\check{\mathfrak{Y}}, \mathcal{D})] \tilde{\cap} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}(\mathfrak{D}, \mathcal{J})]$$

$$iii) [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\cup} (\check{\mathfrak{Y}}, \mathcal{D})] \Lambda_{\theta}(\mathfrak{D}, \mathcal{J}) =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}(\mathfrak{D}, \mathcal{J})] \tilde{\cap} [(\check{\mathfrak{Y}}, \mathcal{D}) \Lambda_{\theta}(\mathfrak{D}, \mathcal{J})]$$

$$iv) [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\cap} (\check{\mathfrak{Y}}, \mathcal{D})] \Lambda_{\theta}(\mathfrak{D}, \mathcal{J}) =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}(\mathfrak{D}, \mathcal{J})] \tilde{\cup} [(\check{\mathfrak{Y}}, \mathcal{D}) \Lambda_{\theta}(\mathfrak{D}, \mathcal{J})]$$

İspat: (i) Eşitliğin sol ve sağ tarafının parametre kümesi $\mathcal{M} \times \mathcal{D}$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır. Ayrıca, kabul gereği $\mathcal{M} \neq \emptyset$ ve $\mathcal{D} \neq \emptyset$ olduğundan, $\mathcal{M} \times \mathcal{D} \neq \emptyset$. Dolayısıyla sağ ve sol tarafın boş esnek kümeye eşit olma durumu bulunmamaktadır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\check{\mathfrak{Y}}, \mathcal{D}) \tilde{\cap} (\mathfrak{D}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $d \in \mathcal{D}$ için,

$$\mathfrak{X}(d) = \begin{cases} \check{\mathfrak{Y}}(d), & d \in \mathcal{D} - \mathcal{J} \\ \check{\mathfrak{Y}}(d) \cap \mathfrak{D}(d), & d \in \mathcal{D} \cap \mathcal{J} \end{cases}$$

$(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}(\mathfrak{X}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{Q}(m, d) = \mathfrak{T}'(m) \cap \mathfrak{X}'(d)$. O halde,

$$q(m, d) = \begin{cases} \mathfrak{O}'(m) \cap \ddot{Y}'(d), & (m, d) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} - \mathcal{J}) \\ \mathfrak{O}'(m) \cap [\ddot{Y}'(d) \cup \mathfrak{O}'(d)], & (m, d) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J}) \end{cases}$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathbb{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}(\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{E}, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $(\mathbb{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) = \mathfrak{O}'(m) \cap \ddot{Y}'(d)$ ve her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için, $(\mathfrak{E}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \mathfrak{O}'(m) \cap \mathfrak{O}'(j)$. Buradan $(\mathbb{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) \tilde{\cup} (\mathfrak{E}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. O halde her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için,

$$\mathfrak{O}(m, d) = \begin{cases} \mathbb{F}(m, d), & (m, d) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) - (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \\ \mathbb{F}(m, d) \cup \mathfrak{E}(m, d), & (m, d) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \end{cases}$$

Buradan,

$$\mathfrak{O}(m, d) = \begin{cases} \mathfrak{O}'(m) \cap \ddot{Y}'(d), & (m, d) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) - (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \\ [\mathfrak{O}'(m) \cap \ddot{Y}'(d)] \cup [\mathfrak{O}'(m) \cap \mathfrak{O}'(d)], & (m, d) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \end{cases}$$

Böylece, ispat elde edilir. Burada $\mathcal{M} \neq \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ olduğu için, esnek ikili parçalı işlemlerin, esnek teta-çarpıma soldan dağılım gösteremeyeceği açıktır.

(iii) Eşitliğin sol ve sağ tarafının parametre kümesi $\mathcal{M} \times \mathcal{J}$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır. Ayrıca, kabul gereği $\mathcal{M} \neq \emptyset$ ve $\mathcal{J} \neq \emptyset$ olduğundan, $\mathcal{M} \times \mathcal{J} \neq \emptyset$. Dolayısıyla sağ ve sol tarafın boş esnek kümeye eşit olma durumu bulunmamaktadır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\cup} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{M})$ olur. Buradan her $m \in \mathcal{M}$ için,

$$\mathfrak{X}(m) = \begin{cases} \mathfrak{O}(m), & m \in \mathcal{M} - \mathcal{D} \\ \mathfrak{O}(m) \cup \ddot{Y}(m), & m \in \mathcal{M} \cap \mathcal{D} \end{cases}$$

$(\mathfrak{X}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta}(\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (q, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan, her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için, $q(m, j) = \mathfrak{X}'(m) \cap \mathfrak{O}'(j)$. Böylece,

$$\mathfrak{X}(m, j) = \begin{cases} \mathfrak{O}'(m) \cap \mathfrak{O}'(j), & (m, j) \in (\mathcal{M} - \mathcal{D}) \times \mathcal{J} \\ [\mathfrak{O}'(m) \cap \ddot{Y}'(m)] \cap \mathfrak{O}'(j), & (m, j) \in (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times \mathcal{J} \end{cases}$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\mathfrak{D}, J) = (\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times J)$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})\Lambda_\theta(\mathfrak{D}, J) = (\mathfrak{E}, \mathcal{D} \times J)$ olsun. Buradan her $(m, j) \in \mathcal{M} \times J$ için, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times J) = \mathfrak{G}'(m) \cap \mathfrak{D}'(j)$ ve her $(d, j) \in \mathcal{D} \times J$ için, $(\mathfrak{E}, \mathcal{D} \times J) = \check{Y}'(d) \cap \mathfrak{D}'(j)$. Buradan, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times J) \tilde{\cap} (\mathfrak{E}, \mathcal{D} \times J) = (\mathfrak{G}, \mathcal{M} \times J)$ olsun. O halde, her $(m, j) \in \mathcal{M} \times J$ için,

$$\mathfrak{G}(m, j) = \begin{cases} \mathfrak{F}(m, j), & (m, j) \in (\mathcal{M} \times J) - (\mathcal{D} \times J) \\ \mathfrak{F}(m, j) \cap \mathfrak{E}(m, j), & (m, j) \in (\mathcal{M} \times J) \cap (\mathcal{D} \times J) \end{cases}$$

Buradan,

$$\mathfrak{G}(m, j) = \begin{cases} \mathfrak{G}'(m) \cap \mathfrak{D}'(j), & (m, j) \in (\mathcal{M} \times J) - (\mathcal{D} \times J) \\ [\mathfrak{G}'(m) \cap \mathfrak{D}'(j)] \cap [\check{Y}'(m) \cap \mathfrak{D}'(j)], & (m, j) \in (\mathcal{M} \times J) \cap (\mathcal{D} \times J) \end{cases}$$

Böylece, ispat elde edilir.

3.2.6. Önerme $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$, $(\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{D}, J)$, U üzerinde birer esnek küme olsun. Buradan,

$$i) (\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_\theta[(\check{Y}, \mathcal{D})\Lambda(\mathfrak{D}, J)] \subseteq_L [(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\check{Y}, \mathcal{D})]V[(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\mathfrak{D}, J)]$$

$$ii) (\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_\theta[(\check{Y}, \mathcal{D})V(\mathfrak{D}, J)] \subseteq_L [(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\check{Y}, \mathcal{D})]\Lambda[(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\mathfrak{D}, J)]$$

İspat: (i) İlk olarak sol tarafa bakılacak olursa, $(\check{Y}, \mathcal{D})\Lambda(\mathfrak{D}, J) = (\mathfrak{U}, \mathcal{D} \times J)$ olsun. Buradan, her $(d, j) \in \mathcal{D} \times J$ için, $\mathfrak{U}(d, j) = \check{Y}(d) \cap \mathfrak{D}(j)$. $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\mathfrak{U}, \mathcal{D} \times J) = (\mathfrak{X}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times J))$ olsun. Buradan, her $(m, (d, j)) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times J)$ için,

$$\mathfrak{X}(m, (d, j)) = \mathfrak{G}'(m) \cap [\check{Y}(d) \cap \mathfrak{D}(j)]' = \mathfrak{G}'(m) \cap [\check{Y}'(d) \cup \mathfrak{D}'(j)]$$

Sağ tarafa bakılacak olursa, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{G}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\mathfrak{D}, J) = (\mathfrak{E}, \mathcal{M} \times J)$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{G}(m, d) = \mathfrak{G}'(m) \cap \check{Y}'(d)$ ve her $(m, j) \in \mathcal{M} \times J$ için, $\mathfrak{E}(m, j) = \mathfrak{G}'(m) \cap \mathfrak{D}'(j)$. $(\mathfrak{G}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})V(\mathfrak{E}, \mathcal{M} \times J) = (\mathfrak{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times (\mathcal{M} \times J))$ olsun. Buradan, her $((m, d), (m, j)) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times (\mathcal{M} \times J)$ için,

$$\mathfrak{Q}((m, d), (m, j)) = [\mathfrak{G}'(m) \cap \check{Y}'(d)] \cup [\mathfrak{G}'(m) \cap \mathfrak{D}'(j)]$$

Böylece, her $(m, (d, j)) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J})$ için,

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}(m, (d, j)) &= \mathfrak{T}'(m) \cap [\ddot{Y}'(d) \cup \mathfrak{O}'(j)] = [\mathfrak{T}'(m) \cap \ddot{Y}'(d)] \cup [\mathfrak{T}'(m) \cap \mathfrak{O}'(j)] \\ &= \mathfrak{Q}((m, d), (m, j))\end{aligned}$$

olacak şekilde $((m, d), (m, j)) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times (\mathcal{M} \times \mathcal{J})$ vardır. Böylece, istenen elde edilir. (ii)'nin ispatı da benzer şekilde yapılır. Önerme 3.2.6'da yer alan L-alt kümesinin, L-eşit olamayacağı Örnek 3.2.7'de gösterilmektedir:

3.2.7. Örnek $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi, $\mathcal{M} = \{e_1, e_5\}$, $\mathcal{D} = \{e_3\}$ ve $\mathcal{J} = \{e_2\}$, E parametre kümesinin alt kümeleri, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evrensel küme olmak üzere, U üzerinde $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$, $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})$ esnek kümeleri,

$$\begin{aligned}(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) &= \{(e_1, \{h_1, h_6\}), (e_5, \{h_2, h_4, h_5\})\}, (\ddot{Y}, \mathcal{D}) = \{(e_3, \{h_1, h_3, h_4\})\}, (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = \\ &\{(e_2, \{h_1, h_4, h_5\})\}\end{aligned}$$

olarak tanımlansın.

$$(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta} [(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \Lambda (\mathfrak{O}, \mathcal{J})] \neq_L [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta} (\ddot{Y}, \mathcal{D})] \vee [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})]$$

olduğu gösterilecektir. İlk olarak sol tarafa bakılacak olursa, $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \Lambda (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan,

$$(\mathfrak{O}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = \{((e_3, e_2), \{h_1, h_4\})\}$$

$(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta} (\mathfrak{O}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J}))$ olsun. Böylece,

$$(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta} (\mathfrak{X}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J})) = \{((e_1, (e_3, e_2)), \{h_2, h_3, h_5\}), ((e_5, (e_3, e_2)), \{h_3, h_6\})\}$$

Sağ taraftan devam edilecek olursa, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\theta} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan,

$$(\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) = \{((e_1, e_3), \{h_2, h_5\}), ((e_5, e_3), \{h_6\})\}$$

$(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_{\theta}(\mathfrak{D}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{G}, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan,

$$(\mathfrak{G}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \{((e_1, e_2), \{h_2, h_3\}), ((e_5, e_2), \{h_3, h_6\})\}$$

$(\mathfrak{E}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})V(\mathfrak{G}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times (\mathcal{M} \times \mathcal{J}))$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times (\mathcal{M} \times \mathcal{J})) \\ &= \{(((e_1, e_3), (e_1, e_2)), \{h_2, h_3, h_5\}), (((e_1, e_3), (e_5, e_2)), \{h_2, h_3, h_5, h_6\}), \\ & \quad (((e_5, e_3), (e_1, e_2)), \{h_2, h_3, h_6\}), (((e_5, e_3), (e_5, e_2)), \{h_3, h_6\})\} \end{aligned}$$

Böylece, $\mathfrak{Q}((e_1, e_3), (e_5, e_2)) \neq \mathfrak{X}(e_1, (e_3, e_2))$, $\mathfrak{Q}((e_1, e_3), (e_5, e_2)) \neq \mathfrak{X}((e_5, (e_3, e_2)))$, $\mathfrak{Q}((e_5, e_3), (e_1, e_2)) \neq \mathfrak{X}(e_1, (e_3, e_2))$ ve $\mathfrak{Q}((e_5, e_3), (e_1, e_2)) \neq \mathfrak{X}((e_5, (e_3, e_2)))$ olduğu görülür. Buradan, $(\mathfrak{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times (\mathcal{M} \times \mathcal{J})) \not\subseteq_L (\mathfrak{X}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J}))$ olup, istenen elde edilir.

3.3. Esnek Teta-Çarpım ve Karar Verme Problemi

Bu bölümde, Çağman ve Enginoğlu (2010a) tarafından tanımlanan bir-kes operatörü ve bir-kes karar fonksiyonu, bir-kes karar verme yöntemi kapsamında esnek teta-çarpımına uygulanmaktadır. Bu yöntemle bir küme, karar vericilerin parametrelerine göre alt kümelerle indirgenir. Sonuç olarak, karar vericiler çok sayıda seçenek yerine sınırlı sayıda seçeneğe odaklanır.

Bölüm boyunca, U üzerindeki esnek kümelerin tüm esnek teta-çarpımının kümesi " $\Lambda_{\theta}(U)$ " ile $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ ve $(\mathfrak{Y}, \mathcal{D})$ esnek kümelerinin esnek teta-çarpımının esnek yaklaşım fonksiyonu

$$\mathfrak{G}_{\mathcal{M}}\Lambda_{\theta}\mathfrak{Y}_{\mathcal{D}}: \mathcal{M} \times \mathcal{D} \rightarrow P(U)$$

ile gösterilecektir. Burada, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $(\mathfrak{G}_{\mathcal{M}}\Lambda_{\theta}\mathfrak{Y}_{\mathcal{D}})(m, d) = \mathfrak{G}'(m) \cap \mathfrak{Y}'(d)$ olduğu bilinmektedir.

3.3.1. Tanım $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$, U kümesi üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. $\text{bir}_m \text{kes}_d$ ve $\text{bir}_d \text{kes}_m$ ile gösterilen, esnek teta-çarpım için bir-kes operatörü sırasıyla,

$$\text{bir}_m \text{kes}_d: \Lambda_\theta(U) \rightarrow P(U),$$

$$\text{bir}_m \text{kes}_d(\mathfrak{T}_\mathcal{M} \Lambda_\theta \check{Y}_\mathcal{D}) = \bigcup_{m \in \mathcal{M}} \left(\bigcap_{d \in \mathcal{D}} ((\mathfrak{T}_\mathcal{M} \Lambda_\theta \check{Y}_\mathcal{D})(m, d)) \right)$$

$$\text{bir}_d \text{kes}_m: \Lambda_\theta(U) \rightarrow P(U),$$

$$\text{bir}_d \text{kes}_m(\mathfrak{T}_\mathcal{M} \Lambda_\theta \check{Y}_\mathcal{D}) = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} \left(\bigcap_{m \in \mathcal{M}} ((\mathfrak{T}_\mathcal{M} \Lambda_\theta \check{Y}_\mathcal{D})(m, d)) \right)$$

şeklinde tanımlanır.

3.3.2. Tanım $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_\theta(\check{Y}, \mathcal{D}) \in \Lambda_\theta(U)$ olsun. bir-kes olarak gösterilen esnek teta-çarpımın bir-kes fonksiyonu,

$$\text{bir-kes}: \Lambda_\theta(U) \rightarrow P(U),$$

$$\text{bir-kes}(\mathfrak{T}_\mathcal{M} \Lambda_\theta \check{Y}_\mathcal{D}) = [\text{bir}_m \text{kes}_d(\mathfrak{T}_\mathcal{M} \Lambda_\theta \check{Y}_\mathcal{D})] \cup [\text{bir}_d \text{kes}_m(\mathfrak{T}_\mathcal{M} \Lambda_\theta \check{Y}_\mathcal{D})]$$

şeklindedir ve U evrensel kümesinin boyutunu küçültür. Burada, $\text{bir-kes}(\mathfrak{T}_\mathcal{M} \Lambda_\theta \check{Y}_\mathcal{D})$ nin U kümesinin bir alt kümesi olduğu aşıkardır. $\text{bir-kes}(\mathfrak{T}_\mathcal{M} \Lambda_\theta \check{Y}_\mathcal{D})$ değerine, $\mathfrak{T}_\mathcal{M} \Lambda_\theta \check{Y}_\mathcal{D}$ esnek çarpımının bir-kes karar kümesi denir.

Belirsizlik içeren bir gerçek hayat problemi için bir-kes karar verme metodu esnek teta çarpımına aşağıdaki algoritma yardımıyla oluşturulur:

ALGORİTMA

Adım 1: Parametre kümesinin uygun alt kümeleri seçilir.

Adım 2: Parametre kümesinin her bir alt kümesi için esnek kümeler inşa edilir.

Adım 3: Esnek kümelerin Λ_0 -çarpımı hesaplanır.

Adım 4: Çarpımın bir-kes karar kümesi hesaplanır.

Şimdi esnek teta-çarpımın bir-kes karar verme problemine nasıl uygulandığı ile ilgili bir örnek verilecektir.

3.3.3. *Örnek* Zorlu bir üniversiteye giriş sınavı sürecinin ardından, ÇAM ailesi, ikiz kızları Derya ve Deniz'in özel üniversite tercihlerini belirlemek amacıyla bir karar verme sürecine girmişlerdir. Bu süreçte, anne-baba ve ikizler tercih edecekleri özel üniversitede olmasını kesinlikle hiç istemedikleri parametreleri göz önüne alarak, kararlarını esnek teta-çarpımın bir-kes karar verme metodu ile belirleyeceklerdir. ÇAM ailesinin tercih listesinde bulunan ve öncesinde gezip görme imkanları buldukları özel üniversitelerin kümesi $U = \{s_1, s_2, \dots, s_{17}\}$ ile, SEÇİLECEK üniversiteyi belirlemek için kullanılan parametreler kümesi ise $E = \{c_1, c_2, \dots, c_8\}$ ile temsil edilsin. Burada,

- $c_1 = \text{"Eve uzak mesafeye sahip"}$
- $c_2 = \text{"Yüksek harç ücretine sahip"}$
- $c_3 = \text{"Güvenli olmayan kampüs çevresine sahip"}$
- $c_4 = \text{"Yetersiz eğitim kadrosuna sahip"}$
- $c_5 = \text{"Kısıtlı sosyal faaliyetleri olan"}$
- $c_6 = \text{"Düşük öğrenci memnuniyetli"}$
- $c_7 = \text{"Yetersiz teknolojik alt yapıya sahip"}$
- $c_8 = \text{"Yemekhane kalitesi düşük"}$

Burada, dört karar verici olduğundan, önce anne ve babanın esnek kümesine, sonra Derya ve Deniz'in esnek kümesine esnek teta-çarpımın bir-kes karar verme metodu uygulanarak, aile içinde demokratik bir karar için bu iki sonuçtan çıkan ortak değerler belirlenerek tercih yapılacaktır. Bu süreç, ebeveynlerin ve ikizlerin tercihlerini dikkate alarak en iyi üniversiteyi

seçmek için dengeli ve demokratik bir karar alınmasını sağlar. Bu adımlar, bir algoritma ile ifade edilecek olursa:

Adım 1: Parametreler Kümesinin Belirlenmesi.

Karar vericilerin parametre kümeleri belirlenir. Evin ablası Helin, karar vericilerden var olan parametreler kümesinden, SEÇECEKLERİ üniversitede bulunmasını İSTEMEDİKLERİ özellikleri ifade eden parametreleri seçmesini ister. Bu kümeler, anne, baba, Derya ve Deniz için sırasıyla şu şekilde tanımlanır:

- Anne için ($\mathcal{M}$): $\mathcal{M} = \{c_1, c_8\}$, yani anne, evden uzak olan veya düşük kaliteli yemekhanelere sahip üniversiteleri istememektedir.
- Baba için ($\mathcal{D}$): $\mathcal{D} = \{c_2, c_3\}$, yani baba, yüksek öğrenim ücretlerine sahip veya güvenli olmayan kampüs çevresine sahip üniversiteleri istememektedir.
- Derya için ($\mathcal{J}$): $\mathcal{J} = \{c_4, c_7\}$, yani Derya, düşük kaliteli öğretim kadrosuna sahip veya yetersiz teknolojik altyapıya sahip üniversiteleri istememektedir.
- Deniz için ($\mathcal{H}$): $\mathcal{H} = \{c_5, c_6\}$, yani Deniz, sınırlı sosyal etkinliklere sahip veya düşük öğrenci memnuniyetine sahip üniversiteleri istememektedir.

Bu parametreler, bir üniversitenin seçim için uygun olmamasına neden olan istenmeyen özellikleri temsil etmektedir.

Adım 2: Adım 1'de Belirlenen Parametre Kümeleri Kullanarak Esnek kümelerin Oluşturulması.

- İlk olarak, ebeveynlerin esnek kümeleri, tercih etmek istedikleri üniversitede bulunmasını İSTEMEDİKLERİ parametreler değerlendirilerek belirlenir.
- Ardından, ikizlerin esnek kümeleri, tercih etmek istedikleri üniversitede bulunmasını İSTEMEDİKLERİ parametreler değerlendirilerek belirlenir.

$(\mathcal{O}, \mathcal{M})$, $(\mathcal{Y}, \mathcal{D})$, $(\mathcal{O}, \mathcal{J})$ ve $(\mathcal{Z}, \mathcal{H})$ esnek kümeleri sırasıyla şu şekildedir:

$$(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) = \{(c_1, \{s_2, s_6, s_7, s_8, s_{11}, s_{17}\}), (c_8, \{s_1, s_3, s_5, s_7, s_{12}, s_{15}\})\}$$

$$(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = \{(c_2, \{s_3, s_7, s_9, s_{13}, s_{15}, s_{16}\}), (c_3, \{s_1, s_5, s_6, s_7, s_{11}, s_{12}, s_{15}\})\}$$

$$(\mathfrak{D}, \mathcal{J}) = \{(c_4, \{s_4, s_7, s_9, s_{11}, s_{13}, s_{17}\}), (c_7, \{s_1, s_3, s_5, s_7, s_{12}, s_{15}\})\}$$

$$(\mathfrak{Z}, \mathcal{H}) = \{(c_5, \{s_2, s_5, s_8, s_{10}, s_{16}, s_{17}\}), (c_6, \{s_2, s_4, s_7, s_{10}, s_{11}, s_{13}\})\}$$

Ailenin amacının üniversiteleri elemek değil, seçmek olduğu unutulmamalıdır.

Adım 3: Esnek Kümelerin Λ_θ -çarpımının belirlenmesi.

$$\begin{aligned} & \mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_\theta \ddot{Y}_{\mathcal{D}} \\ &= \{((c_1, c_2), \{s_1, s_4, s_5, s_{10}, s_{12}, s_{14}\}), ((c_1, c_3), \{s_3, s_4, s_9, s_{10}, s_{13}, s_{14}, s_{16}\}), \\ & ((c_8, c_2), \{s_2, s_4, s_6, s_8, s_{10}, s_{11}, s_{14}, s_{17}\}), ((c_8, c_3), \{s_2, s_4, s_8, s_9, s_{10}, s_{13}, s_{14}, s_{16}\})\}. \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \mathfrak{D}_{\mathcal{J}} \Lambda_\theta \mathfrak{Z}_{\mathcal{H}} \\ &= \{((c_4, c_5), \{s_1, s_3, s_6, s_{12}, s_{14}, s_{15}\}), ((c_4, c_6), \{s_1, s_3, s_5, s_6, s_8, s_{12}, s_{14}, s_{15}, s_{16}\}), \\ & ((c_7, c_5), \{s_4, s_6, s_9, s_{11}, s_{13}, s_{14}\}), ((c_7, c_6), \{s_6, s_8, s_9, s_{14}, s_{16}, s_{17}\})\}. \end{aligned}$$

Adım 4: Önce bir-kes($\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_\theta \ddot{Y}_{\mathcal{D}}$) karar verme kümesi, daha sonra bir-kes($\mathfrak{D}_{\mathcal{J}} \Lambda_\theta \mathfrak{Z}_{\mathcal{H}}$) bulunur ve demokratik bir karar verme süreci için en son aşamada bir-kes($\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_\theta \ddot{Y}_{\mathcal{D}}$) $\cap$ bir-kes($\mathfrak{D}_{\mathcal{J}} \Lambda_\theta \mathfrak{Z}_{\mathcal{H}}$) hesaplanır.

$$\text{bir}_m \text{kes}_d(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_\theta \ddot{Y}_{\mathcal{D}}) = \bigcup_{m \in \mathcal{M}} \left(\bigcap_{d \in \mathcal{D}} ((\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_\theta \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(m, d)) \right)$$

olmak üzere, önce

$$\bigcap_{d \in \mathcal{D}} ((\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_{\theta} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(m, d))$$

hesaplayalım:

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_{\theta} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(c_1, c_2) \cap (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_{\theta} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(c_1, c_3) \\ &= \{s_1, s_4, s_5, s_{10}, s_{12}, s_{14}\} \cap \{s_3, s_4, s_9, s_{10}, s_{13}, s_{14}, s_{16}\} \\ &= \{s_4, s_{10}, s_{14}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_{\theta} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(c_8, c_2) \cap (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_{\theta} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(c_8, c_3) \\ &= \{s_2, s_4, s_6, s_8, s_{10}, s_{11}, s_{14}, s_{17}\} \cap \{s_2, s_4, s_8, s_9, s_{10}, s_{13}, s_{14}, s_{16}\} \\ &= \{s_2, s_4, s_8, s_{10}, s_{14}\} \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan,

$$\begin{aligned} \text{bir}_{m \text{ kes } d}(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_{\theta} \ddot{Y}_{\mathcal{D}}) &= \bigcup_{m \in \mathcal{M}} \left(\bigcap_{d \in \mathcal{D}} ((\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_{\theta} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(m, d)) \right) \\ &= \{s_4, s_{10}, s_{14}\} \cup \{s_2, s_4, s_8, s_{10}, s_{14}\} = \{s_2, s_4, s_8, s_{10}, s_{14}\} \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi

$$\bigcap_{m \in \mathcal{M}} ((\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_{\theta} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(m, d))$$

hesaplayalım:

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_{\theta} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(c_1, c_2) \cap (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_{\theta} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(c_8, c_2) \\ &= \{s_1, s_4, s_5, s_{10}, s_{12}, s_{14}\} \cap \{s_2, s_4, s_6, s_8, s_{10}, s_{11}, s_{14}, s_{17}\} \\ &= \{s_4, s_{10}, s_{14}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_{\theta} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(c_1, c_3) \cap (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_{\theta} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(c_8, c_3) \\ &= \{s_3, s_4, s_9, s_{10}, s_{13}, s_{14}, s_{16}\} \cap \{s_2, s_4, s_8, s_9, s_{10}, s_{13}, s_{14}, s_{16}\} = \{s_4, s_9, s_{10}, s_{13}, s_{14}, s_{16}\} \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan,

$$\begin{aligned} \text{bir}_d \text{kes}_m(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_{\theta} \ddot{Y}_{\mathcal{D}}) &= \bigcup_{d \in \mathcal{D}} \left(\bigcap_{m \in \mathcal{M}} ((\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_{\theta} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(m, d)) \right) \\ &= \{s_4, s_{10}, s_{14}\} \cup \{s_4, s_9, s_{10}, s_{13}, s_{14}, s_{16}\} = \{s_4, s_9, s_{10}, s_{13}, s_{14}, s_{16}\} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} \text{bir-kes}(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_{\theta} \ddot{Y}_{\mathcal{D}}) &= [\text{bir}_m \text{kes}_d(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_{\theta} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})] \cup [\text{bir}_d \text{kes}_m(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_{\theta} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})] = \\ &= \{s_2, s_4, s_8, s_{10}, s_{14}\} \cup \{s_4, s_9, s_{10}, s_{13}, s_{14}, s_{16}\} = \{s_2, s_4, s_8, s_9, s_{10}, s_{13}, s_{14}, s_{16}\} \end{aligned}$$

Dolayısıyla, anne ve babanın tercihlerine uygun olan özel üniversiteler $\{s_2, s_4, s_8, s_9, s_{10}, s_{13}, s_{14}, s_{16}\}$ şeklindedir.

$$\text{bir}_j \text{kes}_h(\mathfrak{D}_J \Lambda_{\theta} \mathfrak{Z}_{\mathcal{H}}) = \bigcup_{j \in J} \left(\bigcap_{h \in \mathcal{H}} ((\mathfrak{D}_J \Lambda_{\theta} \mathfrak{Z}_{\mathcal{H}})(j, h)) \right)$$

olmak üzere önce,

$$\bigcap_{h \in \mathcal{H}} ((\mathfrak{D}_J \Lambda_{\theta} \mathfrak{Z}_{\mathcal{H}})(j, h))$$

hesaplayalım:

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{D}_J \Lambda_{\theta} \mathfrak{Z}_{\mathcal{H}})(c_4, c_5) \cap (\mathfrak{D}_J \Lambda_{\theta} \mathfrak{Z}_{\mathcal{H}})(c_4, c_6) \\ &= \{s_1, s_3, s_6, s_{12}, s_{14}, s_{15}\} \cap \{s_1, s_3, s_5, s_6, s_8, s_{12}, s_{14}, s_{15}, s_{16}\} = \{s_1, s_3, s_6, s_{12}, s_{14}, s_{15}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{D}_J \Lambda_{\theta} \mathfrak{Z}_{\mathcal{H}})(c_7, c_5) \cap (\mathfrak{D}_J \Lambda_{\theta} \mathfrak{Z}_{\mathcal{H}})(c_7, c_6) \\ &= \{s_4, s_6, s_9, s_{11}, s_{13}, s_{14}\} \cap \{s_6, s_8, s_9, s_{14}, s_{16}, s_{17}\} \\ &= \{s_6, s_9, s_{14}\} \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\text{bir}_j \text{kes}_h(\mathcal{D}_j \Lambda_\theta \mathcal{E}_\mathcal{H}) &= \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \left(\bigcap_{h \in \mathcal{H}} ((\mathcal{D}_j \Lambda_\theta \mathcal{E}_\mathcal{H})(j, h)) \right) \\
&= \{s_1, s_3, s_6, s_{12}, s_{14}, s_{15}\} \cup \{s_6, s_9, s_{14}\} \\
&= \{s_1, s_3, s_6, s_9, s_{12}, s_{14}, s_{15}\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi,

$$\bigcap_{j \in \mathcal{J}} ((\mathcal{D}_j \Lambda_\theta \mathcal{E}_\mathcal{H})(j, h))$$

hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{D}_j \Lambda_\theta \mathcal{E}_\mathcal{H})(c_4, c_5) \cap (\mathcal{D}_j \Lambda_\theta \mathcal{E}_\mathcal{H})(c_7, c_5) \\
&= \{s_1, s_3, s_6, s_{12}, s_{14}, s_{15}\} \cap \{s_4, s_6, s_9, s_{11}, s_{13}, s_{14}\} \\
&= \{s_6, s_{14}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{D}_j \Lambda_\theta \mathcal{E}_\mathcal{H})(c_4, c_6) \cap (\mathcal{D}_j \Lambda_\theta \mathcal{E}_\mathcal{H})(c_7, c_6) \\
&= \{s_1, s_3, s_5, s_6, s_8, s_{12}, s_{14}, s_{15}, s_{16}\} \cap \{s_6, s_8, s_9, s_{14}, s_{16}, s_{17}\} \\
&= \{s_6, s_8, s_{14}, s_{16}\}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\text{bir}_h - \text{kes}_j(\mathcal{D}_j \Lambda_\theta \mathcal{E}_\mathcal{H}) &= \bigcup_{h \in \mathcal{H}} \left(\bigcap_{j \in \mathcal{J}} ((\mathcal{D}_j \Lambda_\theta \mathcal{E}_\mathcal{H})(j, h)) \right) = \{s_6, s_{14}\} \cup \{s_6, s_8, s_{14}, s_{16}\} \\
&= \{s_6, s_8, s_{14}, s_{16}\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
\text{bir-kes}(\mathcal{D}_j \Lambda_\theta \mathcal{E}_\mathcal{H}) &= [\text{bir}_j \text{kes}_h(\mathcal{D}_j \Lambda_\theta \mathcal{E}_\mathcal{H})] \cup [\text{bir}_h \text{kes}_j(\mathcal{D}_j \Lambda_\theta \mathcal{E}_\mathcal{H})] = \\
&\{s_1, s_3, s_6, s_9, s_{12}, s_{14}, s_{15}\} \cup \{s_6, s_8, s_{14}, s_{16}\} = \{s_1, s_3, s_6, s_8, s_9, s_{12}, s_{14}, s_{15}, s_{16}\}
\end{aligned}$$

Dolayısıyla, Derya ve Deniz için tercihlerine uygun olan özel üniversiteler $\{s_1, s_3, s_6, s_8, s_9, s_{12}, s_{14}, s_{15}, s_{16}\}$ şeklindedir.

Son olarak, demokratik karar verme süreci için, $\text{bir-kes}(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_{\theta} \ddot{Y}_{\mathcal{D}}) \cap \text{bir-kes}(\mathfrak{Q}_{\mathcal{J}} \Lambda_{\theta} \mathfrak{Z}_{\mathcal{H}})$ hesaplayalım:

$$\begin{aligned} & \text{bir-kes}(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_{\theta} \ddot{Y}_{\mathcal{D}}) \cap \text{bir-kes}(\mathfrak{Q}_{\mathcal{J}} \Lambda_{\theta} \mathfrak{Z}_{\mathcal{H}}) \\ &= \{s_2, s_4, s_8, s_9, s_{10}, s_{13}, s_{14}, s_{16}\} \cap \{s_1, s_3, s_6, s_8, s_9, s_{12}, s_{14}, s_{15}, s_{16}\} = \{s_8, s_9, s_{14}, s_{16}\} \end{aligned}$$

Buna göre, ÇAM ailesinin ikiz kızları Derya ve Deniz için özel üniversite tercih sürecinde, anne, baba, Derya ve Deniz için en uygun özel üniversiteler kümesi $\{s_8, s_9, s_{14}, s_{16}\}$ olarak belirlenmiştir. Bu küme hem ebeveynlerin hem de Derya ve Deniz'in tercihlerine uygun üniversiteleri temsil etmektedir. Bu kesişimin sonucu, tüm karar vericilerin tercihlerine uygun olan üniversiteleri göstererek, bu süreç, en iyi üniversiteyi seçmek için hem ebeveynlerin hem de ikizlerin tercihlerinin dikkate alındığı dengeli ve demokratik bir karar verilmesini sağlayacaktır.

4. ESNEK ARTI-ÇARPIM

Bu bölümde, esnek artı-çarpım adı verilen yeni bir esnek çarpım işlemi tanıtılmış, örneği verilmiş, cebirsel özellikleri ayrıntılı şekilde sunulmuş, dağılma kuralları araştırılmış, bu çarpım karar verme problemlerine uygulanmıştır.

4.1. Esnek Artı-Çarpım ve Özellikleri

Bu alt bölümde, esnek artı-çarpım tanıtılmış, belirli türdeki esnek alt kümeler ve esnek eşitlikler bağlamında cebirsel özellikleri detaylı olarak incelenmiştir.

4.1.1. Tanım $(\mathfrak{F}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U kümesi üzerinde birer esnek küme olsun. $(\mathfrak{F}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ esnek kümelerinin esnek artı çarpımı (V_+ -çarpımı) $(\mathfrak{F}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için

$$\mathfrak{O}(m, d) = \mathfrak{F}(m) + \ddot{Y}(d)$$

olmak üzere, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ şeklinde tanımlanır. Buradan $\mathfrak{F}(m) + \ddot{Y}(d) = \mathfrak{F}'(m) \cup \ddot{Y}(d)$ şeklinde tanımlanır.

4.1.2. Örnek $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi, $\mathcal{M} = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve $\mathcal{D} = \{e_1, e_4, e_5\}$, E parametre kümesinin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evrensel küme olmak üzere, U üzerinde $(\mathfrak{F}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ esnek kümeleri,

$$(\mathfrak{F}, \mathcal{M}) = \{(e_1, \{h_1, h_2, h_3, h_5\}), (e_2, \{h_1, h_2, h_3\}), (e_3, \{h_4, h_5, h_6\})\}$$

$$(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = \{(e_1, \{h_6\}), (e_4, \{h_2, h_3, h_5\}), (e_5, \{h_2\})\}$$

olarak tanımlanan iki esnek küme ve $(\mathfrak{F}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) \\ &= \{((e_1, e_1), \{h_4, h_6\}), ((e_1, e_4), \{h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}), ((e_1, e_5), \{h_2, h_4, h_6\}), ((e_2, e_1), \{h_4, h_5, h_6\}), \\ & ((e_2, e_4), \{h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}), ((e_2, e_5), \{h_2, h_4, h_5, h_6\}), ((e_3, e_1), \{h_1, h_2, h_3, h_6\}), \end{aligned}$$

$$((e_3, e_4), \{h_1, h_2, h_3, h_5\}), ((e_3, e_5), \{h_1, h_2, h_3\}))\}$$

şeklindedir.

4.1.3. Önerme V_+ , $S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: V_+ -çarpımının, $S_E(U)$ üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Gerçekten, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere,

$$V_+: S_E(U) \times S_E(U) \rightarrow S_E(U)$$

$$((\mathfrak{G}, \mathcal{M}), (\check{Y}, \mathcal{D})) \rightarrow (\mathfrak{G}, \mathcal{M})V_+(\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{J})$$

olup, buradan $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})$ de U üzerinde bir esnek kümedir.

4.1.4. Önerme $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$, $(\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})$, U kümesi üzerinde birer esnek küme olmak üzere,

$$(\mathfrak{G}, \mathcal{M})V_+[(\check{Y}, \mathcal{D})V_+(\mathfrak{O}, \mathcal{J})] \neq [(\mathfrak{G}, \mathcal{M})V_+(\check{Y}, \mathcal{D})]V_+(\mathfrak{O}, \mathcal{J})$$

olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, V_+ -çarpımı birleşme özelliğine sahip değildir.

İspat: $S_E(U)$ kümesi üzerinde, V_+ -çarpımının birleşme özelliğine sahip olmadığını göstermek için bir örnek verelim. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesi, $\mathcal{M} = \{e_2, e_3\}$, $\mathcal{D} = \{e_1\}$, $\mathcal{J} = \{e_4\}$ E parametre kümesinin alt kümeleri, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme olmak üzere, U üzerinde $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$, $(\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})$ esnek kümeleri,

$$(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) = \{(e_2, \{h_3, h_4\}), (e_3, \{h_1\})\}, (\check{Y}, \mathcal{D}) = \{(e_1, \emptyset)\} \text{ ve } (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = \{(e_4, \{h_1, h_3, h_5\})\}$$

olarak tanımlansın.

İlk olarak eşitsizliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\check{Y}, \mathcal{D})V_+(\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan,

$$(\ddot{Y}, \mathcal{D})V_+(\mathcal{Q}, \mathcal{J}) = (\mathcal{O}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = \{((e_1, e_4), U)\}$$

elde edilir. $(\mathcal{O}, \mathcal{M})V_+(\mathcal{O}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J}))$ olsun. Böylece,

$$(\mathfrak{X}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J})) = \{((e_2, (e_1, e_4)), U), ((e_3, (e_1, e_4)), U)\}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafından devam edilecek olursa, $(\mathcal{O}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan,

$$(\mathcal{O}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) = \{((e_2, e_1), \{h_1, h_2, h_5\}), ((e_3, e_1), \{h_2, h_3, h_4, h_5\})\}$$

elde edilir. $(\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})V_+(\mathcal{Q}, \mathcal{J}) = (\mathcal{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times \mathcal{J})$ olsun. Böylece,

$$(\mathcal{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times \mathcal{J}) = \{(((e_2, e_1), e_4), \{h_1, h_3, h_4, h_5\}), (((e_3, e_1), e_4), \{h_1, h_3, h_5\})\}$$

elde edilir. Buradan, $(\mathfrak{X}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J})) \neq (\mathcal{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times \mathcal{J})$ olduğu görülür.

4.1.5. Tanım $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathcal{Q}, \mathcal{J})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olmak üzere, $(\ddot{Y}, \mathcal{D})V_+(\mathcal{Q}, \mathcal{J}) \neq_M (\mathcal{Q}, \mathcal{J})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde V_+ -çarpımı M -eşitliği altında değişme özelliğine sahip değildir.

İspat: $(\ddot{Y}, \mathcal{D})V_+(\mathcal{Q}, \mathcal{J}) = (\mathcal{O}, \mathcal{D} \times \mathcal{J})$ ve $(\mathcal{Q}, \mathcal{J})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{J} \times \mathcal{D})$ olsun. $\mathcal{D} \times \mathcal{J} \neq \mathcal{J} \times \mathcal{D}$ olduğundan, ispatın kalanı açıktır.

4.1.6. Önerme $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathcal{Q}, \mathcal{J})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olmak üzere, $(\ddot{Y}, \mathcal{D})V_+(\mathcal{Q}, \mathcal{J}) \neq_J (\mathcal{Q}, \mathcal{J})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde V_+ -çarpımı J -eşitliği altında değişme özelliğine sahip değildir.

İspat: $S_E(U)$ kümesi üzerinde V_+ -çarpımı J -eşitliği altında değişme özelliğine sahip olmadığını göstermek için bir örnek verelim. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi, $\mathcal{D} = \{e_3, e_5\}$ ve $\mathcal{J} = \{e_1\}$ E parametre kümesinin alt kümeleri, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme olmak üzere, U üzerinde $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathcal{Q}, \mathcal{J})$ esnek kümeleri,

$$(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = \{(e_3, \{h_1, h_2\}), (e_5, U)\} \text{ ve } (\mathcal{O}, \mathcal{J}) = \{(e_1, \{h_5\})\}$$

olarak tanımlansın.

İlk olarak eşitsizliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\ddot{Y}, \mathcal{D})V_+(\mathcal{O}, \mathcal{J}) = (\mathcal{O}, \mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olsun.

Buradan,

$$(\mathcal{O}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = \{((e_3, e_1), \{h_3, h_4, h_5\}), ((e_5, e_1), \{h_5\})\}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafından devam edilecek olursa, $(\mathcal{O}, \mathcal{J})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathcal{E}, \mathcal{J} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan,

$$(\mathcal{E}, \mathcal{J} \times \mathcal{D}) = \{((e_1, e_3), \{h_1, h_2, h_3, h_4\}), ((e_1, e_5), U)\}$$

elde edilir. Böylece, $(\ddot{Y}, \mathcal{D})V_+(\mathcal{O}, \mathcal{J}) \neq_L (\mathcal{O}, \mathcal{J})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ olduğu görülür.

4.1.7. Önerme $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış bir esnek küme olsun. Buradan, $(\ddot{Y}, \mathcal{D})V_+\emptyset_\emptyset =_M \emptyset_\emptyset V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) =_M \emptyset_\emptyset$ olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, V_+ -çarpımının M -eşitliğe göre yutan elemanı boş esnek kümedir.

İspat: $\emptyset_\emptyset = (\mathcal{O}, \emptyset)$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})V_+\emptyset_\emptyset = (\ddot{Y}, \mathcal{D})V_+(\mathcal{O}, \emptyset) = (\mathcal{O}, \mathcal{D} \times \emptyset) = (\mathcal{O}, \emptyset)$ olsun. Parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_\emptyset$ olduğundan, $(\mathcal{O}, \emptyset) = \emptyset_\emptyset$ elde edilir. $\emptyset_\emptyset V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) =_M \emptyset_\emptyset$ olduğunun ispatı ise benzer şekilde gösterilir.

4.1.8. Önerme $(\mathcal{O}, \mathcal{M})$, U üzerinde tanımlanmış bir esnek küme olsun. Buradan, $(\mathcal{O}, \mathcal{M})V_+U_\mathcal{M} =_L U_\mathcal{M}$ olup, $S_\mathcal{M}(U)$ kümesi üzerinde, V_+ -çarpımının L -eşitliğe göre sağdan yutan elemanı $U_\mathcal{M}$ esnek kümesidir.

İspat: $U_\mathcal{M} = (\mathcal{O}, \mathcal{M})$ ve $(\mathcal{O}, \mathcal{M})V_+(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = (\mathcal{E}, \mathcal{M} \times \mathcal{M})$ olsun. Buradan, her $m \in \mathcal{M}$ için, $\mathcal{O}(m) = U$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ için, $\mathcal{E}(m, d) = \mathcal{O}'(m) \cup \mathcal{O}(d) = \mathcal{O}'(m) \cup U = U$. Böylece, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ için, $m \in \mathcal{M}$ olacak şekilde $\mathcal{E}(m, d) = U = \mathcal{O}(m)$. Buradan, $(\mathcal{O}, \mathcal{M})V_+U_\mathcal{M} \tilde{=}_L U_\mathcal{M}$ ilişkisinin sağlandığı gösterilmektedir. Ayrıca, her $m \in \mathcal{M}$ için, $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ olacak şekilde $\mathcal{O}(m) = U = \mathcal{E}(m, d)$. Buradan,

$U_{\mathcal{M}} \tilde{\subseteq}_L (\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+U_{\mathcal{M}}$ ilişkisinin sağlandığı gösterilmektedir. Böylece, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+U_{\mathcal{M}} =_L U_{\mathcal{M}}$ olduğu sonucuna varılır.

4.1.9. Önerme $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$, U üzerinde tanımlanmış bir esnek küme olsun. Buradan, $U_{\mathcal{M}}V_+(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) =_L (\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ olup, $S_{\mathcal{M}}(U)$ kümesi üzerinde, V_+ -çarpımının L -eşitliğe göre soldan yutan elemanı $U_{\mathcal{M}}$ esnek kümesidir.

İspat: $U_{\mathcal{M}} = (\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) = (\mathfrak{E}, \mathcal{M} \times \mathcal{M})$ olsun. Buradan, her $m \in \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{O}(m) = U$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{E}(m, d) = \mathfrak{O}'(m) \cup \mathfrak{O}(d) = \emptyset \cup \mathfrak{O}(d) = \mathfrak{O}(d)$. Böylece, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ için, $d \in \mathcal{M}$ olacak şekilde $\mathfrak{E}(m, d) = \mathfrak{O}(d)$. Buradan, $U_{\mathcal{M}}V_+(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_L (\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ilişkisinin sağlandığı gösterilmektedir. Ayrıca, her $d \in \mathcal{M}$ için, $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ olacak şekilde $\mathfrak{O}(d) = \mathfrak{E}(m, d)$. Buradan, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_L U_{\mathcal{M}}V_+(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ilişkisinin sağlandığı gösterilmektedir. Böylece, $U_{\mathcal{M}}V_+(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) =_L (\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ olduğu sonucuna varılır.

4.1.10. Önerme $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış bir esnek küme olsun. O halde, $(\ddot{Y}, \mathcal{D})V_+\emptyset_{\mathcal{D}} =_M (\ddot{Y}, \mathcal{D} \times \mathcal{D})^r$ ve $\emptyset_{\mathcal{D}}V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) =_M U_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}$.

İspat: $\emptyset_{\mathcal{D}} = (\mathfrak{O}, \mathcal{D})$ olsun. Böylece, her $d \in \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{O}(d) = \emptyset$. $(\ddot{Y}, \mathcal{D})V_+\emptyset_{\mathcal{D}} = (\ddot{Y}, \mathcal{D})V_+(\mathfrak{O}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times \mathcal{D})$ olsun. Böylece, her $(d, m) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{Q}(d, m) = \ddot{Y}'(d) \cup \mathfrak{O}(m) = \ddot{Y}'(d) \cup \emptyset = \ddot{Y}'(d)$ olup, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times \mathcal{D}) = (\ddot{Y}, \mathcal{D} \times \mathcal{D})^r$ elde edilir. $\emptyset_{\mathcal{D}}V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) =_M (\mathfrak{X}, \mathcal{D} \times \mathcal{D})$ olsun. Böylece, her $(d, m) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{X}(d, m) = \mathfrak{O}'(d) \cup \ddot{Y}(m) = \emptyset' \cup \ddot{Y}(m) = U \cup \ddot{Y}(m) = U$ olup, $(\mathfrak{X}, \mathcal{D} \times \mathcal{D}) = U_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}$ elde edilir.

4.1.11. Önerme $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış bir esnek küme olsun. Buradan, $(\ddot{Y}, \mathcal{D})V_+U_{\mathcal{D}} =_M U_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}$ ve $U_{\mathcal{D}}V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) =_M (\ddot{Y}, \mathcal{D} \times \mathcal{D})$.

İspat: $U_{\mathcal{D}} = (\mathfrak{O}, \mathcal{D})$ olsun. Böylece, her $d \in \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{O}(d) = U$. $(\ddot{Y}, \mathcal{D})V_+U_{\mathcal{D}} = (\ddot{Y}, \mathcal{D})V_+(\mathfrak{O}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{D} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(d, m) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{X}(d, m) = \ddot{Y}'(d) \cup \mathfrak{O}(m) = \ddot{Y}'(d) \cup U = U$ olup, $(\mathfrak{X}, \mathcal{D} \times \mathcal{D}) = U_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}$ elde edilir. $U_{\mathcal{D}}V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) =_M (\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times \mathcal{D})$ olsun. Böylece, her $(d, m) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{Q}(d, m) = \mathfrak{O}'(d) \cup \ddot{Y}(m) = U' \cup \ddot{Y}(m) = \emptyset \cup \ddot{Y}(m) = \ddot{Y}(m)$ olup, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times \mathcal{D}) = (\ddot{Y}, \mathcal{D} \times \mathcal{D})$ elde edilir.

4.1.12. Önerme $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$, U üzerinde tanımlanmış bir esnek küme olsun. Buradan, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \cong_J (\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, V_+ -çarpımı J -eşitliğe göre denk güçlülük (idempotent) özelliğe sahip değildir.

İspat: $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) = (\ddot{Y}, \mathcal{M} \times \mathcal{M})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ için, $\ddot{Y}(m, d) = \mathfrak{O}'(m) \cup \mathfrak{O}(d)$. Böylece, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ için, $\ddot{Y}(m, d) = \mathfrak{O}(d) \subseteq \mathfrak{O}'(m) \cup \mathfrak{O}(d)$ olacak şekilde $d \in \mathcal{M}$ olduğundan, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \cong_J (\ddot{Y}, \mathcal{M} \times \mathcal{M})$ elde edilir.

4.1.13. Önerme $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan, $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \cong_J (\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})^r \cong_J (\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D})$.

İspat: $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{O}(m, d) = \mathfrak{O}'(m) \cup \ddot{Y}(d)$. Böylece, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\ddot{Y}(d) \subseteq \mathfrak{O}'(m) \cup \ddot{Y}(d)$ olacak şekilde $d \in \mathcal{D}$ olduğundan, $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \cong_J (\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ elde edilir. Benzer şekilde, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{O}'(m) \subseteq \mathfrak{O}'(m) \cup \ddot{Y}(d)$ olacak şekilde $m \in \mathcal{M}$ olduğundan, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})^r \cong_J (\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ elde edilir.

4.1.14. Önerme $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan, $[(\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D})]^r = (\mathfrak{O}, \mathcal{M})^r \Lambda_Y(\ddot{Y}, \mathcal{D})^r$.

İspat: $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{O}(m, d) = \mathfrak{O}'(m) \cup \ddot{Y}(d)$. Böylece, $\mathfrak{O}'(m, d) = \mathfrak{O}(m) \cap \ddot{Y}'(d) = (\mathfrak{O}')'(m) \cap \ddot{Y}'(d)$. Buradan, $(\mathfrak{O}', \mathcal{M} \times \mathcal{D}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{M})^r \Lambda_Y(\ddot{Y}, \mathcal{D})^r$ elde edilir.

4.1.15. Önerme $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})\Lambda_Y(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \cong_F (\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D})$.

İspat: $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})\Lambda_Y(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_*(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{O}(m, d) = \mathfrak{O}'(m) \cap \ddot{Y}(d)$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{O}(m, d) = \mathfrak{O}'(m) \cap \ddot{Y}(d) \subseteq \mathfrak{O}'(m) \cup \ddot{Y}(d) = \mathfrak{O}(m, d)$ olduğundan, ispat elde edilir.

4.1.16. Önerme $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$, $(\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_F (\check{Y}, \mathcal{D})$ ise $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})V_+(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{O}, \mathcal{J})V_+(\check{Y}, \mathcal{D})$.

İspat: $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_F (\check{Y}, \mathcal{D})$ olsun. Buradan, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$ ve her $m \in \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{G}(m) \subseteq \check{Y}(m)$. Böylece, $\mathcal{J} \times \mathcal{M} \subseteq \mathcal{J} \times \mathcal{D}$ ve her $(j, m) \in \mathcal{J} \times \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{O}'(j) \cup \mathfrak{G}(m) \subseteq \mathfrak{O}'(j) \cup \check{Y}(m)$ olup, ispat elde edilir.

4.1.17. Önerme $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$, $(\check{Y}, \mathcal{D})$, $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathfrak{X})$, U kümesi üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})^r \tilde{\subseteq}_F (\check{Y}, \mathcal{D})^r$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J}) \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{O}, \mathfrak{X})$ ise, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{O}, \mathcal{J}) \tilde{\subseteq}_F (\check{Y}, \mathcal{D})V_+(\mathfrak{O}, \mathfrak{X})$.

İspat: $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})^r \tilde{\subseteq}_F (\check{Y}, \mathcal{D})^r$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J}) \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{O}, \mathfrak{X})$ olsun. Buradan, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$ ve $\mathcal{J} \subseteq \mathfrak{X}$, her $m \in \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{G}'(m) \subseteq \check{Y}'(m)$ ve her $j \in \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{O}(j) \subseteq \mathfrak{O}(j)$. Böylece, $\mathcal{M} \times \mathcal{J} \subseteq \mathcal{D} \times \mathfrak{X}$, her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{G}'(m) \cup \mathfrak{O}(j) \subseteq \check{Y}'(m) \cup \mathfrak{O}(j)$ olup, ispat elde edilir.

4.1.18. Önerme $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$, $(\check{Y}, \mathcal{D})$, $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathfrak{X})$, U kümesi üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_F (\check{Y}, \mathcal{M})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ise, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\check{Y}, \mathcal{M})$.

İspat: $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_F (\check{Y}, \mathcal{M})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ olsun. Buradan, her $m \in \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{G}(m) \subseteq \check{Y}(m)$ ve her $j \in \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{O}(j) \subseteq \mathfrak{O}(j)$. Böylece, her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{O}'(j) \cup \mathfrak{G}(m) \subseteq \mathfrak{O}'(j) \cup \check{Y}(m)$ olup, ispat elde edilir.

4.1.19. Önerme $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan, $\emptyset_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}} \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{G}, \mathcal{M})V_+(\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $\emptyset_{\mathcal{D} \times \mathcal{M}} \tilde{\subseteq}_F (\check{Y}, \mathcal{D})V_+(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$.

İspat: $\emptyset_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}} = (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})V_+(\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{E}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{O}(m, d) = \emptyset$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{E}(m, d) = \mathfrak{G}'(m) \cup \check{Y}(d)$. $\mathcal{M} \times \mathcal{D} \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{O}(m, d) = \emptyset \subseteq \mathfrak{G}'(m) \cup \check{Y}(d) = (\mathfrak{E}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olduğundan, $\emptyset_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}} \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_\theta(\check{Y}, \mathcal{D})$ ispatı elde edilir. Benzer şekilde, $\emptyset_{\mathcal{D} \times \mathcal{M}} \tilde{\subseteq}_F (\check{Y}, \mathcal{D})V_+(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ olduğu da gösterilir.

4.1.20. Önerme $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan, $\emptyset_{\mathcal{M}} \cong_J (\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, $\emptyset_{\mathcal{D}} \cong_J (\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ve $\emptyset_E \cong_J (\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D})$.

İspat: $\emptyset_{\mathcal{M}} = (\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $m \in \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{O}(m) = \emptyset$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{Z}(m, d) = \mathfrak{O}'(m) \cup \ddot{Y}(d)$. Böylece, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{O}(m, d) = \emptyset \subseteq \mathfrak{O}'(m) \cup \ddot{Y}(d) = \mathfrak{Z}(m, d)$ olup, $\emptyset_{\mathcal{M}} \cong_J (\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ispatı elde edilir. Benzer şekilde, $\emptyset_{\mathcal{D}} \cong_J (\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ve $\emptyset_E \cong_J (\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ olduğu da gösterilir.

4.1.21. Önerme $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \cong_F U_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}}$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})\Lambda_{\theta}(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \cong_F U_{\mathcal{D} \times \mathcal{M}}$.

İspat: $U_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}} = (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{O}(m, d) = U$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{Z}(m, d) = \mathfrak{O}'(m) \cup \ddot{Y}(d)$. $\mathcal{M} \times \mathcal{D} \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{Z}(m, d) = \mathfrak{O}'(m) \cup \ddot{Y}(d) \subseteq U = \mathfrak{O}(m, d)$ olup, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \cong_F U_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}}$ ispatı elde edilir. Benzer şekilde $(\ddot{Y}, \mathcal{D})V_+(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \cong_F U_{\mathcal{D} \times \mathcal{M}}$ olduğu da gösterilir.

4.1.22. Önerme $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \cong_J U_{\mathcal{M}}$, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \cong_J U_{\mathcal{D}}$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \cong_F U_E$.

İspat: $U_{\mathcal{M}} = (\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $m \in \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{O}(m) = U$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{Z}(m, d) = \mathfrak{O}'(m) \cup \ddot{Y}(d)$. Böylece, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{Z}(m, d) = \mathfrak{O}'(m) \cup \ddot{Y}(d) \subseteq U$ olup, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \cong_J U_{\mathcal{M}}$ ispatı elde edilir. Benzer şekilde $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \cong_J U_{\mathcal{D}}$ olduğu da gösterilir.

$U_E = (\mathfrak{X}, E)$ olsun. Buradan, her $m \in E$ için $\mathfrak{X}(m) = U$. $\mathcal{M} \times \mathcal{D} \subseteq E$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{O}'(m) \cup \ddot{Y}(d) \subseteq U$ olduğundan, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \cong_F U_E$ elde edilir.

4.1.23. Önerme $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathcal{M}} U_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}}$ olması için gerek ve yeter şart $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\mathcal{M}}$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathcal{M}} U_{\mathcal{D}}$ olmasıdır.

İspat: $U_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}} = (\mathcal{U}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{D}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathcal{U}(m, d) = U$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{D}(m, d) = \mathfrak{T}'(m) \cup \ddot{Y}(d)$ olur. $(\mathcal{U}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) = (\mathfrak{D}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{T}'(m) \cup \ddot{Y}(d) = U$. Böylece, her $m \in \mathcal{M}$ için $\mathfrak{T}'(m) = U$ ve her $d \in \mathcal{D}$ için $\ddot{Y}(d) = U$. Buradan, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) = \emptyset_{\mathcal{M}}$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = U_{\mathcal{D}}$ elde edilir. Tersine, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\mathcal{M}}$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathcal{M}} U_{\mathcal{D}}$ olsun. Böylece, her $m \in \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{T}(m) = \emptyset$ ve her $d \in \mathcal{D}$ için $\ddot{Y}(d) = U$. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{D}(m, d) = \mathfrak{T}'(m) \cup \ddot{Y}(d) = U \cup U = U$ olup, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathcal{M}} U_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}}$ elde edilir.

4.1.24. Önerme $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\emptyset}$ olması için gerek ve yeter şart $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\emptyset}$ veya $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\emptyset}$ olmasıdır.

İspat: $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\emptyset}$ olsun. Buradan, $\mathcal{M} \times \mathcal{D} = \emptyset$ olup, $\mathcal{M} = \emptyset$ veya $\mathcal{D} = \emptyset$ olur. Parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_{\emptyset}$ olduğundan, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) = \emptyset_{\emptyset}$ veya $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = \emptyset_{\emptyset}$ elde edilir. Tersine, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) = \emptyset_{\emptyset}$ veya $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = \emptyset_{\emptyset}$ olsun. Böylece, $\mathcal{M} = \emptyset$ veya $\mathcal{D} = \emptyset$ olur. Bu durumda, $\mathcal{M} \times \mathcal{D} = \emptyset$ ve parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_{\emptyset}$ olduğundan, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\emptyset}$ olur.

4.2. Esnek Artı-Çarpım ve Dağılımları

Bu bölümde, esnek artı-çarpımının kısıtlanmış kesişim ve birleşime, genişletilmiş kesişim ve birleşime, esnek ikili parçalı kesişim ve birleşime, VE-çarpıma ve VEYA-çarpıma dağılma durumu ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

4.2.1. Teorem $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$, $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{D}, \mathcal{J})$, U üzerinde birer esnek küme olmak üzere,

$$i) \quad (\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+[(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \cup_R (\mathfrak{D}, \mathcal{J})] =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D})] \cup_R [(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{D}, \mathcal{J})]$$

$$ii) \quad (\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+[(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \cap_R (\mathfrak{D}, \mathcal{J})] =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D})] \cap_R [(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{D}, \mathcal{J})]$$

$$iii) \quad [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \cap_R (\ddot{Y}, \mathcal{D})]V_+(\mathfrak{D}, \mathcal{J}) =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{D}, \mathcal{J})] \cup_R [(\ddot{Y}, \mathcal{D})V_+(\mathfrak{D}, \mathcal{J})]$$

$$iv) \quad [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \cup_R (\ddot{Y}, \mathcal{D})]V_+(\mathfrak{D}, \mathcal{J}) =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{D}, \mathcal{J})] \cap_R [(\ddot{Y}, \mathcal{D})V_+(\mathfrak{D}, \mathcal{J})]$$

İspat: (i) Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $\mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J})$, sağ tarafının parametre kümesi $(\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olup, $\mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J}) = (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\check{Y}, \mathcal{D}) \cup_R (\mathfrak{D}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{D} \cap \mathcal{J})$ olsun. Buradan, her $\varphi \in \mathcal{D} \cap \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{X}(\varphi) = \check{Y}(\varphi) \cup \mathfrak{D}(\varphi)$. $(\mathfrak{D}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{X}, \mathcal{D} \cap \mathcal{J}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J}))$ olsun. Buradan, her $(m, \varphi) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J})$ için, $\mathfrak{Z}(m, \varphi) = \mathfrak{D}'(m) \cup \mathfrak{X}(\varphi)$. O halde,

$$\mathfrak{Z}(m, \varphi) = \mathfrak{D}'(m) \cup [\check{Y}(\varphi) \cup \mathfrak{D}(\varphi)]$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{D}, \mathcal{M})V_+(\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{D}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{D}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olsun. O halde, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) = \mathfrak{D}'(m) \cup \check{Y}(d)$ ve her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \mathfrak{D}'(m) \cup \mathfrak{D}(j)$. Buradan, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cup_R (\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{G}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}))$ olsun. Böylece, her $(m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J})$ için,

$$\mathfrak{G}(m, \varphi) = \mathfrak{F}(m, \varphi) \cup \mathfrak{Q}(m, \varphi) = [\mathfrak{D}'(m) \cup \check{Y}(\varphi)] \cup [\mathfrak{D}'(m) \cup \mathfrak{D}(\varphi)]$$

Böylece, ispat elde edilir.

Burada, $\mathcal{D} \cap \mathcal{J} = \emptyset$ ise $\mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J}) = (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \emptyset$ olup, parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_\emptyset$ olduğundan, eşitliğin her iki tarafı da $\emptyset_\emptyset$ olur. $(\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J}) = \emptyset$ olduğundan, $(\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \emptyset$ ise $\mathcal{M} = \emptyset$ veya $\mathcal{D} \cap \mathcal{J} = \emptyset$ olur. Kabul gereği $\mathcal{M} \neq \emptyset$ olup, $(\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \emptyset$ olması $\mathcal{D} \cap \mathcal{J} = \emptyset$ olmasını gerektirdiğinden, bu durumda da yine eşitliğin her iki tarafı $\emptyset_\emptyset$ olur.

(iii) Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $(\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times \mathcal{J}$, sağ tarafının parametre kümesi $(\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olup, $(\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times \mathcal{J} = (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \cap_R (\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{M} \cap \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $\varphi \in \mathcal{M} \cap \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{X}(\varphi) = \mathfrak{T}(\varphi) \cap \ddot{Y}(\varphi)$. $(\mathfrak{X}, \mathcal{M} \cap \mathcal{D})V_+(\mathfrak{D}, J) = (\mathfrak{Z}, (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times J)$ olsun. Buradan, her $(\varphi, j) \in (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times J$ için, $\mathfrak{Z}(\varphi, j) = \mathfrak{X}'(\varphi) \cup \mathfrak{D}(j)$. O halde,

$$\mathfrak{Z}(\varphi, j) = [\mathfrak{T}(\varphi) \cap \ddot{Y}(\varphi)]' \cup \mathfrak{D}(j) = [\mathfrak{T}'(\varphi) \cup \ddot{Y}'(\varphi)] \cup \mathfrak{D}(j)$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{D}, J) = (\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times J)$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})V_+(\mathfrak{D}, J) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times J)$ olsun. O halde, her $(m, j) \in \mathcal{M} \times J$ için, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times J) = \mathfrak{T}'(m) \cup \mathfrak{D}(j)$ ve her $(d, j) \in \mathcal{D} \times J$ için, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times J) = \ddot{Y}'(d) \cup \mathfrak{D}(j)$. Buradan, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times J) \cup_R (\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times J) = (\mathfrak{S}, (\mathcal{M} \times J) \cap (\mathcal{D} \times J))$ olsun. Böylece, her $(\varphi, j) \in (\mathcal{M} \times J) \cap (\mathcal{D} \times J)$ için,

$$\mathfrak{S}(\varphi, j) = \mathfrak{F}(\varphi, j) \cup \mathfrak{Q}(\varphi, j) = [\mathfrak{T}'(\varphi) \cup \mathfrak{D}(j)] \cup [\ddot{Y}'(\varphi) \cup \mathfrak{D}(j)]$$

Böylece, ispat elde edilir.

Burada, $\mathcal{M} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ ise $(\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times J = (\mathcal{M} \times J) \cap (\mathcal{D} \times J) = \emptyset$ olup, parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_\emptyset$ olduğundan, eşitliğin her iki tarafı da $\emptyset_\emptyset$ olur. $(\mathcal{M} \times J) \cap (\mathcal{D} \times J) = (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times J = \emptyset$ olduğundan, $(\mathcal{M} \times J) \cap (\mathcal{D} \times J) = \emptyset$ ise $\mathcal{M} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ veya $J = \emptyset$ olur. Kabul gereği $J \neq \emptyset$ olup, $(\mathcal{M} \times J) \cap (\mathcal{D} \times J) = \emptyset$ olması $\mathcal{M} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ olmasını gerektirdiğinden, bu durumda da yine eşitliğin her iki tarafı $\emptyset_\emptyset$ olur.

4.2.2. Teorem $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$, $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{D}, J)$, U üzerinde birer esnek küme olmak üzere,

$$i) (\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+[(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \cap_\varepsilon (\mathfrak{D}, J)] =_M [(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D})] \cap_\varepsilon [(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{D}, J)]$$

$$ii) (\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+[(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \cup_\varepsilon (\mathfrak{D}, J)] =_M [(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D})] \cup_\varepsilon [(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{D}, J)]$$

$$iii) [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \cup_\varepsilon (\ddot{Y}, \mathcal{D})]V_+(\mathfrak{D}, J) =_M [(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{D}, J)] \cap_\varepsilon [(\ddot{Y}, \mathcal{D})V_+(\mathfrak{D}, J)]$$

$$iv) [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \cap_\varepsilon (\ddot{Y}, \mathcal{D})]V_+(\mathfrak{D}, J) =_M [(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{D}, J)] \cup_\varepsilon [(\ddot{Y}, \mathcal{D})V_+(\mathfrak{D}, J)]$$

İspat: (i) Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $\mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cup J)$, sağ tarafının parametre kümesi $(\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cup (\mathcal{M} \times J)$ olup, $\mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cup J) = (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cup (\mathcal{M} \times J)$ olduğundan, M-

eşitliğin ilk şartı sağlanır. Ayrıca, kabul gereği $\mathcal{M} \neq \emptyset$, $\mathcal{D} \neq \emptyset$ ve $\mathcal{J} \neq \emptyset$ olduğundan, $\mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cup \mathcal{J}) \neq \emptyset$ ve $(\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cup (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \neq \emptyset$. Dolayısıyla sağ ve sol tarafın boş esnek kümeye eşit olma durumu bulunmamaktadır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\check{Y}, \mathcal{D}) \cap_{\varepsilon} (\mathfrak{D}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{D} \cup \mathcal{J})$ olsun. Buradan, her $\varphi \in \mathcal{D} \cup \mathcal{J}$ için,

$$\mathfrak{X}(\varphi) = \begin{cases} \check{Y}(\varphi), & \varphi \in \mathcal{D} - \mathcal{J} \\ \mathfrak{D}(\varphi), & \varphi \in \mathcal{J} - \mathcal{D} \\ \check{Y}(\varphi) \cap \mathfrak{D}(\varphi), & \varphi \in \mathcal{D} \cap \mathcal{J} \end{cases}$$

$(\mathfrak{D}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{X}, \mathcal{D} \cup \mathcal{J}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cup \mathcal{J}))$ olsun. Buradan, her $(m, \varphi) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cup \mathcal{J})$ için, $\mathfrak{Z}(m, \varphi) = \mathfrak{D}'(m) \cup \mathfrak{X}(\varphi)$. O halde, her $(m, \varphi) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cup \mathcal{J})$ için,

$$\mathfrak{Z}(m, \varphi) = \begin{cases} \mathfrak{D}'(m) \cup \check{Y}(\varphi), & (m, \varphi) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} - \mathcal{J}) \\ \mathfrak{D}'(m) \cup \mathfrak{D}(\varphi), & (m, \varphi) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{J} - \mathcal{D}) \\ \mathfrak{D}'(m) \cup [\check{Y}(\varphi) \cap \mathfrak{D}(\varphi)], & (m, \varphi) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J}) \end{cases}$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{D}, \mathcal{M})V_+(\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{D}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{D}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) = \mathfrak{D}'(m) \cup \check{Y}(d)$ ve her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \mathfrak{D}'(m) \cup \mathfrak{D}(j)$. Buradan, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap_{\varepsilon} (\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{S}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cup (\mathcal{M} \times \mathcal{J}))$ olsun. O halde her $(m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cup (\mathcal{M} \times \mathcal{J})$ için,

$$\mathfrak{S}(m, \varphi) = \begin{cases} \mathfrak{F}(m, \varphi), & (m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) - (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \\ \mathfrak{Q}(m, \varphi), & (m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) - (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \\ \mathfrak{F}(m, \varphi) \cap \mathfrak{Q}(m, \varphi), & (m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \end{cases}$$

Buradan,

$$\mathfrak{S}(m, \varphi) = \begin{cases} \mathfrak{D}'(m) \cup \check{Y}(\varphi), & (m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) - (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \\ \mathfrak{D}'(m) \cup \mathfrak{D}(\varphi), & (m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) - (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \\ [\mathfrak{D}'(m) \cup \check{Y}(\varphi)] \cap [\mathfrak{D}'(m) \cup \mathfrak{D}(\varphi)], & (m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \end{cases}$$

Böylece, ispat elde edilir.

(iii) Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $(\mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \times \mathcal{J}$, sağ tarafının parametre kümesi $(\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cup (\mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olup, $(\mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \times \mathcal{J} = (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cup (\mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır. Ayrıca, kabul gereği $\mathcal{M} \neq \emptyset$, $\mathcal{D} \neq \emptyset$ ve $\mathcal{J} \neq \emptyset$ olduğundan, $(\mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \times \mathcal{J} \neq \emptyset$ ve $(\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cup (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) \neq \emptyset$. Dolayısıyla sağ ve sol tarafın boş esnek kümeye eşit olma durumu bulunmamaktadır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \cup_{\varepsilon} (\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{M} \cup \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $\varphi \in \mathcal{M} \cup \mathcal{D}$ için,

$$\mathfrak{X}(\varphi) = \begin{cases} \mathfrak{T}(\varphi), & \varphi \in \mathcal{M} - \mathcal{D} \\ \mathfrak{Y}(\varphi), & \varphi \in \mathcal{D} - \mathcal{M} \\ \mathfrak{T}(\varphi) \cup \mathfrak{Y}(\varphi), & \varphi \in \mathcal{M} \cap \mathcal{D} \end{cases}$$

$(\mathfrak{X}, \mathcal{M} \cup \mathcal{D}) V_+(\mathfrak{Q}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{Z}, (\mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan her $(\varphi, j) \in (\mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \times \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{Z}(\varphi, j) = \mathfrak{X}'(\varphi) \cup \mathfrak{Q}(j)$. O halde, her $(\varphi, j) \in (\mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \times \mathcal{J}$ için,

$$\mathfrak{Z}(\varphi, j) = \begin{cases} \mathfrak{T}'(\varphi) \cup \mathfrak{Q}(j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{M} - \mathcal{D}) \times \mathcal{J} \\ \mathfrak{Y}'(\varphi) \cup \mathfrak{Q}(j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{D} - \mathcal{M}) \times \mathcal{J} \\ [\mathfrak{T}'(\varphi) \cap \mathfrak{Y}'(\varphi)] \cup \mathfrak{Q}(j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times \mathcal{J} \end{cases}$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) V_+(\mathfrak{Q}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ ve $(\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) V_+(\mathfrak{Q}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olsun. O halde, her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \mathfrak{T}'(m) \cup \mathfrak{Q}(j)$ ve her $(d, j) \in \mathcal{D} \times \mathcal{J}$ için, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = \mathfrak{Y}'(d) \cup \mathfrak{Q}(j)$. Buradan, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap_{\varepsilon} (\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{G}, (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cup (\mathcal{D} \times \mathcal{J}))$ olsun. O halde, her $(\varphi, j) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cup (\mathcal{D} \times \mathcal{J})$ için,

$$\mathfrak{G}(\varphi, j) = \begin{cases} \mathfrak{F}(\varphi, j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) - (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) \\ \mathfrak{Q}(\varphi, j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) - (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \\ \mathfrak{F}(\varphi, j) \cap \mathfrak{Q}(\varphi, j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) \end{cases}$$

Buradan,

$$\odot(\varphi, j) = \begin{cases} \mathfrak{T}'(\varphi) \cup \mathfrak{D}(j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) - (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) \\ \check{\mathcal{Y}}'(\varphi) \cup \mathfrak{D}(j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) - (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \\ [\mathfrak{T}'(\varphi) \cup \mathfrak{D}(j)] \cap [\check{\mathcal{Y}}'(\varphi) \cup \mathfrak{D}(j)], & (\varphi, j) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) \end{cases}$$

Böylece, ispat elde edilir.

4.2.3. Teorem $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$, $(\check{\mathcal{Y}}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{D}, \mathcal{J})$, $\mathcal{U}$ üzerinde birer esnek küme olmak üzere,

$$i) (\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+[(\check{\mathcal{Y}}, \mathcal{D}) \tilde{\cap} (\mathfrak{D}, \mathcal{J})] =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\check{\mathcal{Y}}, \mathcal{D})] \tilde{\cap} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{D}, \mathcal{J})]$$

$$ii) (\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+[(\check{\mathcal{Y}}, \mathcal{D}) \tilde{\cup} (\mathfrak{D}, \mathcal{J})] =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\check{\mathcal{Y}}, \mathcal{D})] \tilde{\cup} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{D}, \mathcal{J})]$$

$$iii) [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\cup} (\check{\mathcal{Y}}, \mathcal{D})]V_+(\mathfrak{D}, \mathcal{J}) =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{D}, \mathcal{J})] \tilde{\cap} [(\check{\mathcal{Y}}, \mathcal{D})V_+(\mathfrak{D}, \mathcal{J})]$$

$$iv) [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\cap} (\check{\mathcal{Y}}, \mathcal{D})]V_+(\mathfrak{D}, \mathcal{J}) =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{D}, \mathcal{J})] \tilde{\cup} [(\check{\mathcal{Y}}, \mathcal{D})V_+(\mathfrak{D}, \mathcal{J})]$$

İspat: (i) Eşitliğin sol ve sağ tarafının parametre kümesi $\mathcal{M} \times \mathcal{D}$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır. Ayrıca, kabul gereği $\mathcal{M} \neq \emptyset$ ve $\mathcal{D} \neq \emptyset$ olduğundan, $\mathcal{M} \times \mathcal{D} \neq \emptyset$. Dolayısıyla sağ ve sol tarafın boş esnek kümeye eşit olma durumu bulunmamaktadır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\check{\mathcal{Y}}, \mathcal{D}) \tilde{\cap} (\mathfrak{D}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $d \in \mathcal{D}$ için,

$$\mathfrak{X}(d) = \begin{cases} \check{\mathcal{Y}}(d), & d \in \mathcal{D} - \mathcal{J} \\ \check{\mathcal{Y}}(d) \cap \mathfrak{D}(d), & d \in \mathcal{D} \cap \mathcal{J} \end{cases}$$

$(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{X}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{Q}(m, d) = \mathfrak{T}'(m) \cup \mathfrak{X}(d)$. O halde,

$$\mathfrak{Q}(m, d) = \begin{cases} \mathfrak{T}'(m) \cup \check{\mathcal{Y}}(d), & (m, d) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} - \mathcal{J}) \\ \mathfrak{T}'(m) \cup [\check{\mathcal{Y}}(d) \cap \mathfrak{D}(d)], & (m, d) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J}) \end{cases}$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\check{\mathcal{Y}}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{D}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{E}, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) =$

$\mathfrak{T}'(m) \cup \mathfrak{Y}(d)$ ve her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için, $(\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \mathfrak{T}'(m) \cup \mathfrak{O}(j)$. Buradan $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) \tilde{\cap} (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. O halde her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için,

$$\mathfrak{O}(m, d) = \begin{cases} \mathfrak{F}(m, d), & (m, d) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) - (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \\ \mathfrak{F}(m, d) \cap \mathfrak{Z}(m, d), & (m, d) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \end{cases}$$

Buradan,

$$\mathfrak{O}(m, d) = \begin{cases} \mathfrak{T}'(m) \cup \mathfrak{Y}(d), & (m, d) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) - (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \\ [\mathfrak{T}'(m) \cup \mathfrak{Y}(d)] \cap [\mathfrak{T}'(m) \cup \mathfrak{O}(d)], & (m, d) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \end{cases}$$

Böylece, ispat elde edilir. $\mathcal{M} \neq \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ olduğu için, esnek ikili parçalı işlemlerin, esnek artı-çarpımına soldan dağılım gösteremeyeceği açıktır.

(iii) Eşitliğin sol ve sağ tarafının parametre kümesi $\mathcal{M} \times \mathcal{J}$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır. Ayrıca, kabul gereği $\mathcal{M} \neq \emptyset$ ve $\mathcal{J} \neq \emptyset$ olduğundan, $\mathcal{M} \times \mathcal{J} \neq \emptyset$. Dolayısıyla sağ ve sol tarafın boş esnek kümeye eşit olma durumu bulunmamaktadır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\cup} (\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{M})$ olur. Buradan her $m \in \mathcal{M}$ için,

$$\mathfrak{X}(m) = \begin{cases} \mathfrak{T}(m), & m \in \mathcal{M} - \mathcal{D} \\ \mathfrak{T}(m) \cup \mathfrak{Y}(m), & m \in \mathcal{M} \cap \mathcal{D} \end{cases}$$

$(\mathfrak{X}, \mathcal{M}) V_+(\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan, her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için $\mathfrak{O}(m, j) = \mathfrak{X}'(m) \cup \mathfrak{O}(j)$. Böylece,

$$\mathfrak{X}(m, j) = \begin{cases} \mathfrak{T}'(m) \cup \mathfrak{O}(j), & (m, j) \in (\mathcal{M} - \mathcal{D}) \times \mathcal{J} \\ [\mathfrak{T}'(m) \cap \mathfrak{Y}'(m)] \cup \mathfrak{O}(j), & (m, j) \in (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times \mathcal{J} \end{cases}$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) V_+(\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ ve $(\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) V_+(\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \mathfrak{T}'(m) \cup \mathfrak{O}(j)$ ve her $(d, j) \in \mathcal{D} \times \mathcal{J}$ için, $(\mathfrak{Z}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = \mathfrak{Y}'(d) \cup \mathfrak{O}(j)$. Buradan, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) \tilde{\cap} (\mathfrak{Z}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olsun. O halde, her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için,

$$\star(m, j) = \begin{cases} \mathbb{F}(m, j), & (m, j) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) - (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) \\ \mathbb{F}(m, j) \cap \mathbb{E}(m, j), & (m, j) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) \end{cases}$$

Buradan,

$$\star(m, j) = \begin{cases} \mathfrak{T}'(m) \cup \mathfrak{D}(j), & (m, j) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) - (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) \\ [\mathfrak{T}'(m) \cup \mathfrak{D}(j)] \cap [\mathfrak{Y}'(m) \cup \mathfrak{D}(j)], & (m, j) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) \end{cases}$$

Böylece, ispat elde edilir.

4.2.4. Tanım $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$, $(\mathfrak{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{D}, \mathcal{J})$, $\mathcal{U}$ üzerinde birer esnek küme olsun. Buradan,

$$i) (\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+[(\mathfrak{Y}, \mathcal{D})\Lambda(\mathfrak{D}, \mathcal{J})] \subseteq_L [(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{Y}, \mathcal{D})]\Lambda[(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{D}, \mathcal{J})]$$

$$ii) (\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+[(\mathfrak{Y}, \mathcal{D})V(\mathfrak{D}, \mathcal{J})] \subseteq_L [(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{Y}, \mathcal{D})]V[(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{D}, \mathcal{J})]$$

İspat: (i) İlk olarak sol tarafa bakılacak olursa, $(\mathfrak{Y}, \mathcal{D})\Lambda(\mathfrak{D}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan, her $(d, j) \in \mathcal{D} \times \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{O}(d, j) = \mathfrak{Y}(d) \cap \mathfrak{D}(j)$. $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{O}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J}))$ olsun. Buradan, her $(m, (d, j)) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J})$ için,

$$\mathfrak{X}(m, (d, j)) = \mathfrak{T}'(m) \cup [\mathfrak{Y}(d) \cap \mathfrak{D}(j)]$$

Sağ tarafa bakılacak olursa, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\mathfrak{D}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{Q}(m, d) = \mathfrak{T}'(m) \cup \mathfrak{Y}(d)$ ve her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{Z}(m, j) = \mathfrak{T}'(m) \cup \mathfrak{D}(j)$. $(\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})\Lambda(\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times (\mathcal{M} \times \mathcal{J}))$ olsun. Buradan, her $((m, d), (m, j)) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times (\mathcal{M} \times \mathcal{J})$ için,

$$\mathfrak{Q}((m, d), (m, j)) = [\mathfrak{T}'(m) \cup \mathfrak{Y}(d)] \cap [\mathfrak{T}'(m) \cup \mathfrak{D}(j)]$$

Burada, her $(m, (d, j)) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J})$ için,

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(m, (d, j)) &= \mathfrak{T}'(m) \cup [\mathfrak{Y}(d) \cap \mathfrak{D}(j)] = [\mathfrak{T}'(m) \cup \mathfrak{Y}(d)] \cap [\mathfrak{T}'(m) \cup \mathfrak{D}(j)] \\ &= \mathfrak{Q}((m, d), (m, j)) \end{aligned}$$

olacak şekilde $((m, d), (m, j)) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times (\mathcal{M} \times \mathcal{J})$ vardır. Böylece, istenen elde edilir. (ii)'nin ispatı da benzer şekilde yapılır. Önerme 4.2.4'te yer alan L-alt kümesinin, L-eşit olamayacağı Örnek 4.2.5'te gösterilmektedir:

4.2.5. *Örnek* $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi, $\mathcal{M} = \{e_1, e_5\}$, $\mathcal{D} = \{e_3\}$, $\mathcal{J} = \{e_2\}$ E parametre kümesinin alt kümeleri, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evrensel küme olmak üzere, U üzerinde $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$, $(\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})$ esnek kümeleri,

$$\begin{aligned} (\mathfrak{O}, \mathcal{M}) &= \{(e_1, \{h_1, h_6\}), (e_5, \{h_2, h_4, h_5\})\}, \\ (\check{Y}, \mathcal{D}) &= \{(e_3, \{h_1, h_3, h_4\})\}, (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = \{(e_2, \{h_1, h_4, h_5\})\} \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. İlk olarak sol tarafa bakılacak olursa, $(\check{Y}, \mathcal{D}) \wedge (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan,

$$(\mathfrak{O}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = \{((e_3, e_2), \{h_1, h_4\})\}$$

$(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \vee_+ (\mathfrak{O}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J}))$ olsun. Böylece,

$$(\mathfrak{X}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J})) = \{((e_1, (e_3, e_2)), \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}), ((e_5, (e_3, e_2)), \{h_1, h_3, h_4, h_6\})\}$$

Sağ taraftan devam edilecek olursa, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \vee_+ (\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan,

$$(\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) = \{((e_1, e_3), \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}), ((e_5, e_3), \{h_1, h_3, h_4, h_6\})\}$$

$(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \vee_+ (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan,

$$(\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \{((e_1, e_2), \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}), ((e_5, e_2), \{h_1, h_3, h_4, h_5, h_6\})\}$$

$(\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) \wedge (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times (\mathcal{M} \times \mathcal{J}))$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} & \left(\mathfrak{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \right) \\ &= \{(((e_1, e_3), (e_1, e_2)), \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}), (((e_1, e_3), (e_5, e_2)), \{h_1, h_3, h_4, h_5\})\}, \end{aligned}$$

$$\left(((e_5, e_3), (e_1, e_2)), \{h_1, h_3, h_4\} \right), \left(((e_5, e_3), (e_5, e_2)), \{h_1, h_3, h_4, h_6\} \right) \}$$

Böylece, $q((e_1, e_3), (e_5, e_2)) \neq \mathfrak{X}(e_1, (e_3, e_2))$, $q((e_1, e_3), (e_5, e_2)) \neq \mathfrak{X}((e_5, (e_3, e_2))$, $q((e_5, e_3), (e_1, e_2)) \neq \mathfrak{X}(e_1, (e_3, e_2))$ ve $q((e_5, e_3), (e_1, e_2)) \neq \mathfrak{X}((e_5, (e_3, e_2))$ olduğu görülür. Buradan, $(q, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times (\mathcal{M} \times \mathcal{J})) \not\subseteq_L (\mathfrak{X}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J}))$ olup, istenen elde edilir.

4.3. Esnek Artı-Çarpım ve Karar Verme Problemi

Bu bölümde, Çağman ve Enginoğlu (2010a) tarafından tanımlanan kes-bir operatörü ve kes-bir karar fonksiyonu, kes-bir karar verme yöntemi kapsamında esnek artı-çarpımına uygulanmaktadır. Bu yöntemle bir küme, karar vericilerin parametrelerine göre alt kümelere indirgenir. Sonuç olarak, karar vericiler çok sayıda seçenek yerine sınırlı sayıda seçeneğe odaklanır.

Bölüm boyunca, U üzerindeki esnek kümelerin tüm esnek artı-çarpımının kümesi " $V_+(U)$ " ile $(\mathfrak{F}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ esnek kümelerinin esnek artı-çarpımının esnek yaklaşım fonksiyonu

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{M}} V_+ \ddot{Y}_{\mathcal{D}}: \mathcal{M} \times \mathcal{D} \rightarrow P(U)$$

ile gösterilecektir. Burada, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $(\mathfrak{F}_{\mathcal{M}} V_+ \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(m, d) = \mathfrak{F}'(m) \cup \ddot{Y}(d)$ olduğu bilinmektedir.

4.3.1. Tanım $(\mathfrak{F}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U kümesi üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. $\text{kes}_m \text{bir}_d$ ve $\text{kes}_d \text{bir}_m$ ile gösterilen, esnek-artı çarpım için *kes-bir* operatörü sırasıyla,

$$\text{kes}_m \text{bir}_d: V_+(U) \rightarrow P(U),$$

$$\text{kes}_m \text{bir}_d(\mathfrak{F}_{\mathcal{M}} V_+ \ddot{Y}_{\mathcal{D}}) = \bigcap_{m \in \mathcal{M}} \left(\bigcup_{d \in \mathcal{D}} ((\mathfrak{F}_{\mathcal{M}} V_+ \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(m, d)) \right)$$

$$\text{kes}_d \text{bir}_m: V_+(U) \rightarrow P(U),$$

$$\text{kes}_d\text{bir}_m(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+\ddot{Y}_{\mathcal{D}}) = \bigcap_{d \in \mathcal{D}} \left(\bigcup_{m \in \mathcal{M}} ((\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+\ddot{Y}_{\mathcal{D}})(m, d)) \right)$$

şeklinde tanımlanır.

4.3.2. Tanım $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})V_+(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \in V_+(U)$ olsun. kes-bir olarak gösterilen esnek artı-çarpımın kes-bir fonksiyonu,

kes-bir: $V_+(U) \rightarrow P(U)$,

$$\text{kes-bir}(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+\ddot{Y}_{\mathcal{D}}) = [\text{kes}_m\text{bir}_d(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+\ddot{Y}_{\mathcal{D}})] \cup [\text{kes}_d\text{bir}_m(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+\ddot{Y}_{\mathcal{D}})]$$

şeklinde dir. Burada, $\text{kes-bir}(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+\ddot{Y}_{\mathcal{D}})$ nin U kümesinin bir alt kümesi olduğu aşıkardır. $\text{kes-bir}(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+\ddot{Y}_{\mathcal{D}})$ değerine, $\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+\ddot{Y}_{\mathcal{D}}$ esnek çarpımının kes-bir karar kümesi denir.

Belirsizlik içeren bir gerçek hayat problemi için kes-bir karar verme metodu esnek artı-çarpımına aşağıdaki algoritma yardımıyla oluşturulur:

ALGORİTMA

Adım 1: Parametre kümesinin uygun alt kümeleri seçilir.

Adım 2: Parametre kümesinin her bir alt kümesi için esnek kümeler inşa edilir.

Adım 3: Esnek kümelerin V_+ -çarpımı hesaplanır.

Adım 4: Çarpımın kes-bir karar kümesi hesaplanır.

Şimdi esnek artı-çarpımın kes-bir karar verme problemine nasıl uygulandığı ile ilgili bir örnek verilecektir.

4.3.3. *Örnek* Pilot alım süreci, mülakatlar, psikoteknik değerlendirmeler, simülatör uçuşları, tıbbi değerlendirmeler gibi adımlardan oluşmakla birlikte, alımda adayın İngilizce dil becerisi, teknik bilgi değerlendirmeleri, matematik ve fizik alanlarındaki bilgi ve yetenekleri, görsel hafıza ve sosyal becerileri ayrıca büyük bir etkiye sahiptir. Bir hava yolu şirketi, genç

ve dinamik bir pilot kadrosu oluşturmak için pilot alımı yapmak üzere ilana çıkmıştır. Başvurular, başvuru pozisyon için aranan niteliklere uygunluk yönünden ön incelemeden geçerek, başvuru şartlarından herhangi birini taşımadığı tespit edilenlerin başvurusu iptal edilmiştir. Başvuran adaylar arasında, başvurusu geçersiz sayılanlar çıkartıldığında, geriye çok fazla sayıda başvuru kaldığından, şirket iki aşamalı bir değerlendirme süreci uygulamaya karar vermiştir.

Bu süreçte, çok fazla başvuru olduğundan, şirketin İnsan Kaynakları biriminden yetkili Utku Bey pilot adaylarıyla yaptıkları görüşmeler ve adayların tabi tutulduğu sınavlar neticesinde elde edilen sonuçları göz önünde bulundurarak bir ELEME işlemi yapacak, kalan adaylar kapsamlı bir eğitim programına dahil edilerek şirketin profesyonel pilot ekibine katılmaya hak kazanacaklardır.

Utku Bey, ELENECEK pilot adaylarında, olmasını İSTEMEDİĞİ parametreleri ve yine ELENECEK pilot adaylarında olmasını İSTEDİĞİ parametreleri göz önüne alarak, kararını esnek artı-çarpımın kes-bir karar verme metodu ile belirleyecektir. Hava yolu şirketinde pilot olmak için başvurusu geçerli sayılan adayların kümesi $U = \{s_1, s_2, \dots, s_{40}\}$ ile ELENECEK pilotları belirlemek için kullanılacak parametreler kümesi $E = \{c_1, c_2, \dots, c_8\}$ ile temsil edilsin. Burada, c_i , $i = 1, 2, \dots, 8$ parametreleri sırasıyla şunları temsil eder:

- c_1 = "Kendine güvenen ve özdisiplinli"
- c_2 = "Matematik bilgisi ve yaratıcı becerisi yeterli olmayan"
- c_3 = "Liderlik ruhuna ve takım olarak çalışma yeteneğine sahip"
- c_4 = "Durumsal farkındalığı yeterli olmayan"
- c_5 = "Açık iletişim becerisi olmayan"
- c_6 = "Teknik bilgileri anlama yeteneği yüksek"
- c_7 = "Stres anında sakin kalma yeteneği düşük"
- c_8 = "İyi derecede İngilizce bilgisine sahip"

Pilot alım süreci ile ilgili bu problemi çözmek için esnek artı-çarpım yöntemini problem durumuna şu şekilde uygulayabiliriz:

Adım 1: Parametreler Kümesinin Belirlenmesi.

Karar verici Utku Bey, var olan parametreler kümesinden, ELENECEK pilot adaylarında, ilk olarak bulunmasını İSTEMEDİĞİ parametreleri, daha sonra ELENECEK pilot adaylarında bulunmasını İSTEDİĞİ parametreleri seçer. Bunlar, sırasıyla $\mathcal{M} = \{c_1, c_3, c_6, c_8\}$ ve $\mathcal{D} = \{c_2, c_4, c_5, c_7\}$ şeklinde belirlenmiş olsun.

1. Elenen adaylarda bulunmaması gereken parametreler:
Bunlar, bir pilot için hayati öneme sahip ve aranan özellikler ile becerilerdir; eksiklikleri, adayın niteliksiz olmasına yol açar.
2. Elenen adaylarda bulunması tercih edilen parametreler:
Bunlar, adayın seçim için uygun olmamasına neden olan istenmeyen özellikler veya eksikliklerdir.

Bu parametreler iki küme halinde sınıflandırılarak, seçim sürecinin netliği sağlanır ve karar vericinin öncelikleriyle uyumlu hale getirilir.

Adım 2: Adım 1'de Belirlenen Parametre Kümeleri Kullanarak Esnek kümelerin Oluşturulması.

Bu parametre kümelerini kullanarak, karar verici esnek kümeleri $(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ ve $(\mathcal{O}, \mathcal{D})$ oluşturur.

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{O}, \mathcal{M}) = & \{(c_1, \{s_2, s_6, s_7, s_8, s_{11}, s_{17}, s_{19}, s_{24}, s_{26}, s_{31}, s_{33}, s_{38}, s_{39}, s_{40}\}), \\
 & (c_3, \{s_2, s_3, s_6, s_7, s_{11}, s_{17}, s_{21}, s_{23}, s_{30}, s_{31}, s_{32}, s_{33}, s_{39}\}), \\
 & (c_6, \{s_6, s_9, s_{11}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{21}, s_{22}, s_{24}, s_{30}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}), \\
 & (c_8, \{s_1, s_3, s_6, s_{10}, s_{11}, s_{13}, s_{17}, s_{22}, s_{23}, s_{25}, s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{31}, s_{38}, s_{39}, s_{40}\})\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{O}, \mathcal{D}) = & \{(c_2, \{s_8, s_9, s_{12}, s_{14}, s_{16}, s_{17}, s_{22}, s_{25}, s_{32}, s_{33}\}), \\
 & (c_4, \{s_1, s_3, s_5, s_7, s_{12}, s_{15}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{35}, s_{36}, s_{37}\}),
 \end{aligned}$$

$$(c_5, \{s_3, s_4, s_6, s_9, s_{13}, s_{18}, s_{19}, s_{25}, s_{28}, s_{38}, s_{40}\}), \\ (c_7, \{s_7, s_{10}, s_{13}, s_{14}, s_{19}, s_{20}, s_{23}, s_{27}, s_{29}, s_{30}, s_{34}, s_{37}, s_{40}\})\}$$

Bu kümelerin oluşturulma süreci, her bir parametrenin karar verme sürecindeki önemini değerlendirilip ağırlıklandırılmasını kapsar. Böylece dengeli ve haklı bir elenme süreci sağlanır. Utku Bey'in görevinin, fazla miktarda başvurudan kaynaklı olarak adayları ELEMEK olduğunu unutmamak gerekir.

Adım 3: Esnek Kümelerin V_+ -çarpımının belirlenmesi.

$$\begin{aligned} & \mathfrak{O}_{\mathcal{M}} V_+ \mathfrak{O}_{\mathcal{D}} = \\ & \left\{ \left((c_1, c_2), \left\{ \begin{array}{c} s_1, s_3, s_4, s_5, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{25}, \\ s_{27}, s_{30}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37} \end{array} \right\} \right), \right. \\ & \left((c_1, c_4), \left\{ \begin{array}{c} s_1, s_3, s_4, s_5, s_7, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{25}, \\ s_{27}, s_{30}, s_{32}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37} \end{array} \right\} \right), \\ & \left((c_1, c_5), \left\{ \begin{array}{c} s_1, s_3, s_4, s_5, s_6, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{25}, \\ s_{27}, s_{28}, s_{30}, s_{32}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{40} \end{array} \right\} \right), \\ & \left((c_1, c_7), \left\{ \begin{array}{c} s_1, s_3, s_4, s_5, s_7, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{25}, \\ s_{27}, s_{29}, s_{30}, s_{32}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{40} \end{array} \right\} \right), \\ & \left((c_3, c_2), \left\{ \begin{array}{c} s_1, s_4, s_5, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{22}, s_{24}, s_{25}, \\ s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{32}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{40} \end{array} \right\} \right) \\ & \left((c_3, c_4), \left\{ \begin{array}{c} s_1, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{24}, \\ s_{25}, s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{40} \end{array} \right\} \right), \\ & \left((c_3, c_5), \left\{ \begin{array}{c} s_1, s_3, s_4, s_5, s_6, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{22}, s_{24}, s_{25}, \\ s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{40} \end{array} \right\} \right), \\ & \left((c_3, c_7), \left\{ \begin{array}{c} s_1, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{22}, s_{23}, s_{24}, s_{25}, \\ s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{40} \end{array} \right\} \right), \\ & \left((c_6, c_2), \left\{ \begin{array}{c} s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{20}, s_{22}, s_{23}, s_{25}, \\ s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{39}, s_{40} \end{array} \right\} \right), \\ & \left((c_6, c_4), \left\{ \begin{array}{c} s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{17}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{23}, s_{25}, \\ s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{39}, s_{40} \end{array} \right\} \right), \\ & \left. \left((c_6, c_5), \left\{ \begin{array}{c} s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{23}, s_{25}, \\ s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{39}, s_{40} \end{array} \right\} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left((c_6, c_7), \left\{ \begin{array}{c} s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{17}, s_{19}, s_{20}, s_{23}, s_{25}, s_{26}, s_{27}, \\ s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{39}, s_{40} \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_8, c_2), \left\{ \begin{array}{c} s_2, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9, s_{12}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{24}, s_{25}, s_{26}, \\ s_{27}, s_{29}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37} \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_8, c_4), \left\{ \begin{array}{c} s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9, s_{12}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{24}, s_{26}, s_{27}, \\ s_{29}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37} \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_8, c_5), \left\{ \begin{array}{c} s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{24}, s_{25}, \\ s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{40} \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_8, c_7), \left\{ \begin{array}{c} s_2, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{23}, s_{24}, s_{26}, \\ s_{27}, s_{29}, s_{30}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{40} \end{array} \right\} \right) \}
\end{aligned}$$

Adım 4: kes-bir $(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}V_+} \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})$ kümesi belirlenir:

$$\text{kes}_{m\text{bir}}(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}V_+} \mathfrak{T}_{\mathcal{D}}) = \bigcap_{m \in \mathcal{M}} \left(\bigcup_{d \in \mathcal{D}} ((\mathfrak{T}_{\mathcal{M}V_+} \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(m, d)) \right)$$

Öncelikle,

$$\bigcup_{d \in \mathcal{D}} ((\mathfrak{T}_{\mathcal{M}V_+} \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(m, d))$$

ifadesini belirlenir.

$$\begin{aligned}
& (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}V_+} \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_1, c_2) \cup (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}V_+} \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_1, c_4) \cup (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}V_+} \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_1, c_5) \cup (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}V_+} \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_1, c_7) \\
& = \left\{ \begin{array}{c} s_1, s_3, s_4, s_5, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{25}, \\ s_{27}, s_{30}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37} \end{array} \right\} \\
& \cup \left\{ \begin{array}{c} s_1, s_3, s_4, s_5, s_7, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{25}, \\ s_{27}, s_{30}, s_{32}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37} \end{array} \right\} \\
& \cup \left\{ \begin{array}{c} s_1, s_3, s_4, s_5, s_6, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{25}, \\ s_{27}, s_{28}, s_{30}, s_{32}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{40} \end{array} \right\} \\
& \cup \left\{ \begin{array}{c} s_1, s_3, s_4, s_5, s_7, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{25}, \\ s_{27}, s_{29}, s_{30}, s_{32}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{40} \end{array} \right\} \\
& = \left\{ \begin{array}{c} s_1, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{25}, \\ s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{40} \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

$$(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}V_+} \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_3, c_2) \cup (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}V_+} \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_3, c_4) \cup (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}V_+} \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_3, c_5) \cup (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}V_+} \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_3, c_7)$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ s_1, s_4, s_5, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{22}, s_{24}, s_{25}, \right. \\
&\quad \left. s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{32}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{40} \right\} \\
&\cup \left\{ s_1, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{24}, \right. \\
&\quad \left. s_{25}, s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{40} \right\} \\
&\cup \left\{ s_1, s_3, s_4, s_5, s_6, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{22}, s_{24}, s_{25}, s_{26}, s_{27}, \right. \\
&\quad \left. s_{28}, s_{29}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{40} \right\} \\
&\cup \left\{ s_1, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{22}, s_{23}, s_{24}, s_{25}, s_{26}, s_{27}, \right. \\
&\quad \left. s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{40} \right\} \\
&= \left\{ s_1, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, \right. \\
&\quad \left. s_{23}, s_{24}, s_{25}, s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{32}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{40} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_6, c_2) \cup (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_6, c_4) \cup (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_6, c_5) \cup (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_6, c_7) \\
&= \left\{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{20}, s_{22}, s_{23}, s_{25}, \right. \\
&\quad \left. s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{39}, s_{40} \right\} \\
&\cup \left\{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{17}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{23}, s_{25}, \right. \\
&\quad \left. s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{39}, s_{40} \right\} \\
&\cup \left\{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{23}, s_{25}, \right. \\
&\quad \left. s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{39}, s_{40} \right\} \\
&\cup \left\{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{17}, s_{19}, s_{20}, s_{23}, s_{25}, \right. \\
&\quad \left. s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{39}, s_{40} \right\} \\
&= \left\{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, \right. \\
&\quad \left. s_{22}, s_{23}, s_{25}, s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{39}, s_{40} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_8, c_2) \cup (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_8, c_4) \cup (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_8, c_5) \cup (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_8, c_7) \\
&= \left\{ s_2, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9, s_{12}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{24}, s_{25}, \right. \\
&\quad \left. s_{26}, s_{27}, s_{29}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37} \right\} \\
&\cup \left\{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9, s_{12}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{24}, s_{26}, \right. \\
&\quad \left. s_{27}, s_{29}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37} \right\} \\
&\cup \left\{ s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{24}, s_{25}, \right. \\
&\quad \left. s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{40} \right\} \\
&\cup \left\{ s_2, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{23}, s_{24}, \right. \\
&\quad \left. s_{26}, s_{27}, s_{29}, s_{30}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{40} \right\} \\
&= \left\{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, \right. \\
&\quad \left. s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{24}, s_{25}, s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{40} \right\}
\end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned}
&\text{kes}_m \text{bir}_d(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}}) = \bigcap_{m \in \mathcal{M}} \left(\bigcup_{d \in \mathcal{D}} ((\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(m, d)) \right) = \\
&\left\{ s_1, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{25}, \right. \\
&\quad \left. s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{40} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cap \left\{ s_1, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, \right. \\
& \quad \left. s_{23}, s_{24}, s_{25}, s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{32}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{40} \right\} \\
& \cap \left\{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, \right. \\
& \quad \left. s_{25}, s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{39}, s_{40} \right\} \\
& \cap \left\{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, \right. \\
& \quad \left. s_{23}, s_{24}, s_{25}, s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{40} \right\} \\
& = \{s_1, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, \\
& \quad s_{23}, s_{25}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{32}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{40}\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\text{kes}_d \text{bir}_m(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}}) = \bigcap_{d \in \mathcal{D}} \left(\bigcup_{m \in \mathcal{M}} ((\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(m, d)) \right)$$

Öncelikle,

$$\bigcup_{m \in \mathcal{M}} ((\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(m, d))$$

ifadesini belirlenir.

$$\begin{aligned}
& (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_1, c_2) \cup (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_3, c_2) \cup (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_6, c_2) \cup (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_8, c_2) \\
& = \left\{ s_1, s_3, s_4, s_5, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{25}, \right. \\
& \quad \left. s_{27}, s_{30}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37} \right\} \\
& \cup \left\{ s_1, s_4, s_5, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{22}, s_{24}, s_{25}, s_{26}, s_{27}, \right. \\
& \quad \left. s_{28}, s_{29}, s_{32}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{40} \right\} \\
& \cup \left\{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{20}, s_{22}, s_{23}, s_{25}, \right. \\
& \quad \left. s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{39}, s_{40} \right\} \\
& \cup \left\{ s_2, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9, s_{12}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{24}, s_{25}, \right. \\
& \quad \left. s_{26}, s_{27}, s_{29}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37} \right\} \\
& = \left\{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, \right. \\
& \quad \left. s_{24}, s_{25}, s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{39}, s_{40} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_1, c_4) \cup (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_3, c_4) \cup (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_6, c_4) \cup (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_8, c_4) \\
& = \left\{ s_1, s_3, s_4, s_5, s_7, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{25}, \right. \\
& \quad \left. s_{27}, s_{30}, s_{32}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37} \right\} \\
& \cup \left\{ s_1, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{24}, s_{25}, s_{26}, s_{27}, \right. \\
& \quad \left. s_{28}, s_{29}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{40} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cup \left\{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{17}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{23}, s_{25}, s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, \right. \\
& \quad \left. s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{39}, s_{40} \right\} \\
& \cup \left\{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9, s_{12}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{24}, s_{26}, s_{27}, s_{29}, s_{32}, \right. \\
& \quad \left. s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37} \right\} \\
& = \left\{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, \right. \\
& \quad \left. s_{24}, s_{25}, s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{39}, s_{40} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_1, c_5) \cup (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_3, c_5) \cup (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_6, c_5) \cup (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_8, c_5) \\
& = \left\{ s_1, s_3, s_4, s_5, s_6, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{25}, \right. \\
& \quad \left. s_{27}, s_{28}, s_{30}, s_{32}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{40} \right\} \\
& \cup \left\{ s_1, s_3, s_4, s_5, s_6, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{22}, s_{24}, s_{25}, s_{26}, s_{27}, \right. \\
& \quad \left. s_{28}, s_{29}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{40} \right\} \\
& \cup \left\{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{23}, s_{25}, \right. \\
& \quad \left. s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{39}, s_{40} \right\} \\
& \cup \left\{ s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{24}, s_{25}, s_{26}, s_{27}, \right. \\
& \quad \left. s_{28}, s_{29}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{40} \right\} \\
& = \left\{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, \right. \\
& \quad \left. s_{23}, s_{24}, s_{25}, s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{39}, s_{40} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_1, c_7) \cup (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_3, c_7) \cup (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_6, c_7) \cup (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_8, c_7) \\
& = \left\{ s_1, s_3, s_4, s_5, s_7, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{25}, \right. \\
& \quad \left. s_{27}, s_{29}, s_{30}, s_{32}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{40} \right\} \\
& \cup \left\{ s_1, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{22}, s_{23}, s_{24}, s_{25}, s_{26}, s_{27}, \right. \\
& \quad \left. s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{40} \right\} \\
& \cup \left\{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{17}, s_{19}, s_{20}, s_{23}, s_{25}, s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, \right. \\
& \quad \left. s_{30}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{39}, s_{40} \right\} \\
& \cup \left\{ s_2, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{23}, s_{24}, s_{26}, s_{27}, s_{29}, \right. \\
& \quad \left. s_{30}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{40} \right\} \\
& = \left\{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{24}, \right. \\
& \quad \left. s_{25}, s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{39}, s_{40} \right\}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan,

$$\begin{aligned}
& \text{kes}_d \text{bir}_m(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}}) = \bigcap_{d \in \mathcal{D}} \left(\bigcup_{m \in \mathcal{M}} ((\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(m, d)) \right) \\
& = \left\{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{24}, s_{25}, \right. \\
& \quad \left. s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{39}, s_{40} \right\} \\
& \cap \left\{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, \right. \\
& \quad \left. s_{24}, s_{25}, s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{39}, s_{40} \right\} \\
& \cap \left\{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, \right. \\
& \quad \left. s_{24}, s_{25}, s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{39}, s_{40} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cap \left\{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{24}, \right. \\
& \quad \left. s_{25}, s_{26}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{39}, s_{40} \right\} \\
& = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, \\
& \quad s_{24}, s_{25}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{39}, s_{40}\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
& \text{kes} - \text{bir}(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}}) = [\text{kes}_m \text{bir}_d(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})] \cup [\text{kes}_d \text{bir}_m(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}V_+ \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})] \\
& = \{s_1, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, \\
& \quad s_{25}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{32}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{40}\} \\
& \cup \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, \\
& \quad s_{24}, s_{25}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{39}, s_{40}\} \\
& = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, \\
& \quad s_{24}, s_{25}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}, s_{38}, s_{39}, s_{40}\}
\end{aligned}$$

Böylece, hava yolu şirketi pilot alım sürecinde başvurusu kabul olan 40 adaydan 37 tanesi ilk aşamada elemiş olup, kalan $\{s_{11}, s_{26}, s_{31}\}$ adayları kapsamlı bir eğitim programına dahil edilerek şirketin profesyonel pilot ekibine katılmaya hak kazanmışlardır.

5. ESNEK FARK-ÇARPIM

Bu bölümde, esnek fark-çarpım adı verilen yeni bir esnek çarpım işlemi tanıtılmış, örneği verilmiş, cebirsel özellikleri ayrıntılı şekilde sunulmuş, dağılma kuralları araştırılmış, bu çarpım karar verme problemlerine uygulanmıştır.

5.1. Esnek Fark-Çarpım ve Özellikleri

Bu alt bölümde, esnek fark-çarpım tanıtılmış, belirli türdeki esnek alt kümeler ve esnek eşitlikler bağlamında cebirsel özellikleri detaylı olarak incelenmiştir.

Çağman and Enginoğlu (2010a) esnek kümeler için VE-DEĞİL çarpımını aşağıdaki şekilde tanımlamıştır:

5.1.1. Tanım $(\mathcal{T}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$, U kümesi üzerinde birer esnek küme olsun. $(\mathcal{T}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$ esnek kümelerinin esnek $\bar{\Lambda}$ -çarpımı (AND-NOT çarpımı) $(\mathcal{T}, \mathcal{M})\bar{\Lambda}(\check{Y}, \mathcal{D})$, her $(m, d) \in E \times E$ için,

$$\mathcal{U}(m, d) = \mathcal{T}(m) \setminus \check{Y}(d)$$

olmak üzere, $(\mathcal{T}, \mathcal{M})\bar{\Lambda}(\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathcal{U}, E \times E)$ şeklinde tanımlanır. Burada, $\mathcal{T}(m) \setminus \check{Y}(d) = \mathcal{T}(m) \cap \check{Y}'(d)$ olduğu bilinmektedir (Çağman and Enginoğlu, 2010a).

5.1.2. Tanım $(\mathcal{T}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$, U kümesi üzerinde birer esnek küme olsun. $(\mathcal{T}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$ esnek kümelerinin esnek fark çarpımı ($\Lambda_{\setminus}$ -çarpımı) $(\mathcal{T}, \mathcal{M})\Lambda_{\setminus}(\check{Y}, \mathcal{D})$, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için

$$\mathcal{U}(m, d) = \mathcal{T}(m) \setminus \check{Y}(d)$$

olmak üzere, $(\mathcal{T}, \mathcal{M})\Lambda_{\setminus}(\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathcal{U}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ şeklinde tanımlanır. Burada, $\mathcal{T}(m) \setminus \check{Y}(d) = \mathcal{T}(m) \cap \check{Y}'(d)$ olduğu bilinmektedir.

Çağman ve Enginoğlu (2010a) tanımladığı VE-DEĞİL çarpımında, yaklaşım fonksiyonunun tanım kümesi $E \times E$ iken, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$ esnek kümelerinin esnek fark-çarpımında ise $\mathcal{M} \times \mathcal{D}$ 'dir.

5.1.3. *Örnek* $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi, $\mathcal{M} = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve $\mathcal{D} = \{e_1, e_4, e_5\}$, E parametre kümesinin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evrensel küme olmak üzere, U üzerinde $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$ esnek kümeleri,

$$(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) = \{(e_1, \{h_1, h_2, h_3, h_5\}), (e_2, \{h_1, h_2, h_3\}), (e_3, \{h_4, h_5, h_6\})\}$$

$$(\check{Y}, \mathcal{D}) = \{(e_1, \{h_6\}), (e_4, \{h_2, h_3, h_5\}), (e_5, \{h_2\})\}$$

olarak tanımlanan iki esnek küme ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) \\ &= \{((e_1, e_1), \{h_1, h_2, h_3, h_5\}), ((e_1, e_4), \{h_1\}), ((e_1, e_5), \{h_1, h_3, h_5\}), ((e_2, e_1), \{h_1, h_2, h_3\}), \\ & ((e_2, e_4), \{h_1\}), ((e_2, e_5), \{h_1, h_3\}), ((e_3, e_1), \{h_4, h_5\}), ((e_3, e_4), \{h_4, h_6\}), ((e_3, e_5), \{h_4, h_5, h_6\})\} \end{aligned}$$

$(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \bar{\Lambda} (\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{O}, E \times E)$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{O}, E \times E) \\ &= \{((e_1, e_1), \{h_1, h_2, h_3, h_5\}), ((e_1, e_2), \{h_1, h_2, h_3, h_5\}), ((e_1, e_3), \{h_1, h_2, h_3, h_5\}), \\ & ((e_1, e_4), \{h_1\}), ((e_1, e_5), \{h_1, h_3, h_5\}), ((e_2, e_1), \{h_1, h_2, h_3\}), ((e_2, e_2), \{h_1, h_2, h_3\}), \\ & ((e_2, e_3), \{h_1, h_2, h_3\}), ((e_2, e_4), \{h_1\}), ((e_2, e_5), \{h_1, h_3\}), ((e_3, e_1), \{h_4, h_5\}), \\ & ((e_3, e_2), \{h_4, h_5, h_6\}), ((e_3, e_3), \{h_4, h_5, h_6\}), ((e_3, e_4), \{h_4, h_6\}), ((e_3, e_5), \{h_4, h_5, h_6\})\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{O}(e_4, e_1) &= \mathfrak{O}(e_4, e_2) = \mathfrak{O}(e_4, e_3) = \mathfrak{O}(e_4, e_4) = \mathfrak{O}(e_4, e_5) = \mathfrak{O}(e_5, e_1) = \mathfrak{O}(e_5, e_2) \\ &= \mathfrak{O}(e_5, e_3) = \mathfrak{O}(e_5, e_4) = \mathfrak{O}(e_5, e_5) = \emptyset \end{aligned}$$

olduğundan, $(\mathfrak{O}, E \times E)$ esnek kümesine yazılmamıştır. $(\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) \neq (\mathfrak{O}, E \times E)$ olduğu açıkça görülmektedir.

5.1.4. Önerme $\Lambda_{\setminus}, S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: $\Lambda_{\setminus}$ -çarpımının, $S_E(U)$ üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Gerçekten, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere,

$$\Lambda_{\setminus}: S_E(U) \times S_E(U) \rightarrow S_E(U)$$

$$((\mathfrak{T}, \mathcal{M}), (\check{Y}, \mathcal{D})) \rightarrow (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{J})$$

olup, buradan $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})$ de U üzerinde bir esnek kümedir.

5.1.5. Önerme $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$, $(\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})$, U kümesi üzerinde birer esnek küme olmak üzere,

$$(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} [(\check{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})] \neq_M [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\check{Y}, \mathcal{D})] \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})$$

olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $\Lambda_{\setminus}$ -çarpımı birleşme özelliğine sahip değildir.

İspat: $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $\Lambda_{\setminus}$ -çarpımının birleşme özelliğine sahip olmadığını göstermek için bir örnek verelim. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesi, $\mathcal{M} = \{e_2, e_3\}$, $\mathcal{D} = \{e_1\}$, $\mathcal{J} = \{e_4\}$ E parametre kümesinin alt kümeleri, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme olmak üzere, U üzerinde $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$, $(\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})$ esnek kümeleri,

$$(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) = \{(e_2, \{h_3, h_4\}), (e_3, \{h_1\})\}, (\check{Y}, \mathcal{D}) = \{(e_1, \emptyset)\} \text{ ve } (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = \{(e_4, \{h_1, h_3, h_5\})\}$$

olarak tanımlansın. İlk olarak eşitsizliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\check{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan,

$$(\check{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = \{((e_1, e_4), \emptyset)\}$$

elde edilir. $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J}))$ olsun. Böylece,

$$(\mathfrak{X}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J})) = \{((e_2, (e_1, e_4)), \{h_3, h_4\}), ((e_3, (e_1, e_4)), \{h_1\})\}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafından devam edilecek olursa, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})\Lambda_{\setminus}(\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan,

$$(\mathfrak{T}, \mathcal{M})\Lambda_{\setminus}(\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) = \{((e_2, e_1), \{h_3, h_4\}), ((e_3, e_1), \{h_1\})\}$$

elde edilir. $(\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})\Lambda_{\setminus}(\mathfrak{Q}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times \mathcal{J})$ olsun. Böylece,

$$(\mathfrak{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times \mathcal{J}) = \{(((e_2, e_1), e_4), \{h_4\}), (((e_3, e_1), e_4), \emptyset)\}$$

elde edilir. Buradan, $(\mathfrak{X}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J})) \neq_M (\mathfrak{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times \mathcal{J})$ olduğu görülür.

$$(\mathfrak{T}, \mathcal{M})\Lambda_{\setminus}[(\check{Y}, \mathcal{D})\Lambda_{\setminus}(\mathfrak{Q}, \mathcal{J})] \neq_L [(\mathfrak{T}, \mathcal{M})\Lambda_{\setminus}(\check{Y}, \mathcal{D})]\Lambda_{\setminus}(\mathfrak{Q}, \mathcal{J})$$

$$(\mathfrak{T}, \mathcal{M})\Lambda_{\setminus}[(\check{Y}, \mathcal{D})\Lambda_{\setminus}(\mathfrak{Q}, \mathcal{J})] \neq_J [(\mathfrak{T}, \mathcal{M})\Lambda_{\setminus}(\check{Y}, \mathcal{D})]\Lambda_{\setminus}(\mathfrak{Q}, \mathcal{J})$$

olduğu da açıktır.

5.1.6. Önerme $(\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{J})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan, $(\check{Y}, \mathcal{D})\Lambda_{\setminus}(\mathfrak{Q}, \mathcal{J}) \neq_M (\mathfrak{Q}, \mathcal{J})\Lambda_{\setminus}(\check{Y}, \mathcal{D})$ olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\Lambda_{\setminus}$ -çarpımı M -eşitliği altında değişme özelliğine sahip değildir.

İspat: $(\check{Y}, \mathcal{D})\Lambda_{\setminus}(\mathfrak{Q}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{U}, \mathcal{D} \times \mathcal{J})$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{J})\Lambda_{\setminus}(\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{J} \times \mathcal{D})$ olsun. $\mathcal{D} \times \mathcal{J} \neq \mathcal{J} \times \mathcal{D}$ olduğundan, ispatın kalanı açıktır.

5.1.7. Önerme $(\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{J})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan, $(\check{Y}, \mathcal{D})\Lambda_{\setminus}(\mathfrak{Q}, \mathcal{J}) \neq_J (\mathfrak{Q}, \mathcal{J})\Lambda_{\setminus}(\check{Y}, \mathcal{D})$ olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\Lambda_{\setminus}$ -çarpımı J -eşitliği altında değişme özelliğine sahip değildir.

İspat: $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\Lambda_{\setminus}$ -çarpımı J -eşitliği altında değişme özelliğine sahip olmadığını göstermek için bir örnek verelim. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi, $\mathcal{D} = \{e_3, e_5\}$ ve $\mathcal{J} = \{e_1\}$ E parametre kümesinin alt kümeleri, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme olmak üzere, U üzerinde $(\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{J})$ esnek kümeleri,

$$(\check{Y}, \mathcal{D}) = \{(e_3, \{h_1, h_2\}), (e_5, U)\} \text{ ve } (\mathcal{Q}, \mathcal{J}) = \{(e_1, \{h_5\})\}$$

olarak tanımlansın. İlk olarak eşitsizliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\check{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} (\mathcal{Q}, \mathcal{J}) = (\mathcal{U}, \mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan,

$$(\mathcal{U}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = \{((e_3, e_1), \{h_1, h_2\}), ((e_5, e_1), \{h_1, h_2, h_3, h_4\})\}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafından devam edilecek olursa, $(\mathcal{Q}, \mathcal{J}) \Lambda_{\setminus} (\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathcal{Z}, \mathcal{J} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan,

$$(\mathcal{Z}, \mathcal{J} \times \mathcal{D}) = \{((e_1, e_3), \{h_5\}), ((e_1, e_5), \emptyset)\}$$

elde edilir. Böylece, $(\check{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} (\mathcal{Q}, \mathcal{J})$ ve $(\mathcal{Q}, \mathcal{J}) \Lambda_{\setminus} (\check{Y}, \mathcal{D})$ ifadelerinin J-eşitliği altında birbirine eşit olmadığı gösterilmiştir, yani $(\check{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} (\mathcal{Q}, \mathcal{J}) \neq_J (\mathcal{Q}, \mathcal{J}) \Lambda_{\setminus} (\check{Y}, \mathcal{D})$.

5.1.8. Önerme $(\check{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış bir esnek küme olsun. Buradan, $(\check{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} \emptyset_{\emptyset} =_M \emptyset_{\emptyset} \Lambda_{\setminus} (\check{Y}, \mathcal{D}) =_M \emptyset_{\emptyset}$ olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $\Lambda_{\setminus}$ -çarpımının M-eşitliğe göre yutan elemanı boş esnek kümedir.

İspat: $\emptyset_{\emptyset} = (\mathcal{U}, \emptyset)$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} \emptyset_{\emptyset} = (\check{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} (\mathcal{U}, \emptyset) = (\mathcal{Q}, \mathcal{D} \times \emptyset) = (\mathcal{Q}, \emptyset)$ olsun. Parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_{\emptyset}$ olduğundan, $(\mathcal{Q}, \emptyset) = \emptyset_{\emptyset}$ elde edilir. $\emptyset_{\emptyset} \Lambda_{\setminus} (\check{Y}, \mathcal{D}) =_M \emptyset_{\emptyset}$ olduğunun ispatı benzer şekilde gösterilir.

5.1.9. Önerme $(\mathcal{T}, \mathcal{M})$, U üzerinde tanımlanmış bir esnek küme olsun. Buradan, $\emptyset_{\mathcal{M}} \Lambda_{\setminus} (\mathcal{T}, \mathcal{M}) =_L \emptyset_{\mathcal{M}}$ olup, $S_{\mathcal{M}}(U)$ kümesi üzerinde, $\Lambda_{\setminus}$ -çarpımının L-eşitliğe göre soldan yutan elemanı $\emptyset_{\mathcal{M}}$ olur.

İspat: $\emptyset_{\mathcal{M}} = (\mathcal{Q}, \mathcal{M})$ ve $(\mathcal{Q}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathcal{T}, \mathcal{M}) = (\mathcal{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{M})$ olsun. Buradan, her $m \in \mathcal{M}$ için, $\mathcal{Q}(m) = \emptyset$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ için, $\mathcal{Z}(m, d) = \mathcal{Q}(m) \cap \mathcal{T}'(d) = \emptyset \cap \mathcal{T}'(d) = \emptyset$. Böylece, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ için, $m \in \mathcal{M}$ olacak şekilde $\mathcal{Z}(m, d) = \emptyset = \mathcal{Q}(m)$. Buradan, $\emptyset_{\mathcal{M}} \Lambda_{\setminus} (\mathcal{T}, \mathcal{M}) \subseteq_L \emptyset_{\mathcal{M}}$ ilişkisinin sağlandığı gösterilmektedir. Ayrıca, her $m \in \mathcal{M}$ için, $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ olacak şekilde $\mathcal{Q}(m) = \emptyset = \mathcal{Z}(m, d)$. Buradan,

$\emptyset_{\mathcal{M}} \tilde{\subseteq}_L \emptyset_{\mathcal{M}} \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{T}, \mathcal{M})$ ilişkisinin sağlandığı gösterilmektedir. Böylece, $\emptyset_{\mathcal{M}} \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) =_L \emptyset_{\mathcal{M}}$ olduğu ispatı elde edilir.

5.1.10. Önerme $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$, U üzerinde tanımlanmış bir esnek küme olsun. Buradan, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} \emptyset_{\mathcal{M}} =_L (\mathfrak{T}, \mathcal{M})$ olup, $S_{\mathcal{M}}(U)$ kümesi üzerinde, $\Lambda_{\setminus}$ -çarpımının L -eşitliğe göre sağdan etkisiz elemanı $\emptyset_{\mathcal{M}}$ olur.

İspat: $\emptyset_{\mathcal{M}} = (\emptyset, \mathcal{M})$ ve $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} \emptyset_{\mathcal{M}} = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{M})$ olsun. Buradan, her $m \in \mathcal{M}$ için, $\emptyset(m) = \emptyset$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{Z}(m, d) = \mathfrak{T}(m) \cap \emptyset'(d) = \mathfrak{T}(m) \cap \emptyset' = \mathfrak{T}(m) \cap U = \mathfrak{T}(m)$. Böylece, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ için, $m \in \mathcal{M}$ olacak şekilde $\mathfrak{Z}(m, d) = \mathfrak{T}(m)$. Buradan, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} \emptyset_{\mathcal{M}} \tilde{\subseteq}_L (\mathfrak{T}, \mathcal{M})$ ilişkisinin sağlandığı gösterilmektedir. Ayrıca, her $m \in \mathcal{M}$ için, $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ olacak şekilde $\mathfrak{T}(m) = \mathfrak{Z}(m, d)$. Buradan, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_L (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} \emptyset_{\mathcal{M}}$ ilişkisinin sağlandığı gösterilmektedir. Böylece, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} \emptyset_{\mathcal{M}} =_L (\mathfrak{T}, \mathcal{M})$ olduğu ispatı elde edilir.

5.1.11. Önerme $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış bir esnek küme olsun. O halde, $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} \emptyset_{\mathcal{D}} =_M (\ddot{Y}, \mathcal{D} \times \mathcal{D})$ ve $\emptyset_{\mathcal{D}} \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) =_M \emptyset_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}$.

İspat: $\emptyset_{\mathcal{D}} = (\emptyset, \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $d \in \mathcal{D}$ için $\emptyset(d) = \emptyset$. $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} \emptyset_{\mathcal{D}} = (\ddot{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} (\emptyset, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times \mathcal{D})$ olsun. Böylece, her $(d, m) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{Q}(d, m) = \ddot{Y}(d) \cap \emptyset'(m) = \ddot{Y}(d) \cap \emptyset' = \ddot{Y}(d) \cap U = \ddot{Y}(d)$ olup $(\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times \mathcal{D}) = (\ddot{Y}, \mathcal{D} \times \mathcal{D})$ elde edilir. Benzer şekilde, $\emptyset_{\mathcal{D}} \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\emptyset, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\emptyset, \mathcal{D} \times \mathcal{D})$ olsun. Böylece, her $(d, m) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ için $\emptyset(d, m) = \emptyset(d) \cap \ddot{Y}'(m) = \emptyset \cap \ddot{Y}'(m) = \emptyset$ olup $(\emptyset, \mathcal{D} \times \mathcal{D}) = \emptyset_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}$ elde edilir.

5.1.12. Önerme $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış bir esnek küme olsun. Buradan, $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} U_{\mathcal{D}} =_M \emptyset_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}$ ve $U_{\mathcal{D}} \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) =_M (\ddot{Y}, \mathcal{D} \times \mathcal{D})^r$.

İspat: $U_{\mathcal{D}} = (\emptyset, \mathcal{D})$ olsun. Böylece, her $d \in \mathcal{D}$ için, $\emptyset(d) = U$. $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} U_{\mathcal{D}} = (\ddot{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} (\emptyset, \mathcal{D}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{D} \times \mathcal{D})$ olsun. Böylece, her $(d, m) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{X}(d, m) = \ddot{Y}(d) \cap \emptyset'(m) = \ddot{Y}(d) \cap U' = \ddot{Y}(d) \cap \emptyset = \emptyset$ olup $(\mathfrak{X}, \mathcal{D} \times \mathcal{D}) = \emptyset_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}$ elde edilir. Benzer şekilde, $U_{\mathcal{D}} \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\emptyset, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times \mathcal{D})$ olsun. Böylece, her $(d, m) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$

için, $\mathfrak{Q}(d, m) = \mathfrak{D}(d) \cap \ddot{Y}'(m) = U \cap \ddot{Y}'(m) = \ddot{Y}'(m)$ olup $(\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times \mathcal{D}) = (\ddot{Y}, \mathcal{D} \times \mathcal{D})^r$ elde edilir.

5.1.13. Önerme $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$, U üzerinde tanımlanmış bir esnek küme olsun. Buradan, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_{\setminus}(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \cong_J (\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $\Lambda_{\setminus}$ -çarpımı J -eşitliğe göre denk güçlülük (idempotent) özelliğine sahip değildir.

İspat: $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_{\setminus}(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) = (\ddot{Y}, \mathcal{M} \times \mathcal{M})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ için $\ddot{Y}(m, d) = \mathfrak{G}(m) \cap \mathfrak{G}'(d)$. Böylece, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ için $\ddot{Y}(m, d) = \mathfrak{G}(m) \cap \mathfrak{G}'(d) \subseteq \mathfrak{G}(m)$ olacak şekilde $m \in \mathcal{M}$ olduğundan, $(\ddot{Y}, \mathcal{M} \times \mathcal{M}) \cong_J (\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ elde edilir.

5.1.14. Önerme $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_{\setminus}(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \cong_J (\ddot{Y}, \mathcal{D})^r$ ve $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_{\setminus}(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \cong_J (\mathfrak{G}, \mathcal{M})$.

İspat: $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_{\setminus}(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{D}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{D}(m, d) = \mathfrak{G}(m) \cap \ddot{Y}'(d)$. Böylece, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{G}(m) \cap \ddot{Y}'(d) \subseteq \ddot{Y}'(d)$ olacak şekilde $d \in \mathcal{D}$ olduğundan, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_{\setminus}(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \cong_J (\ddot{Y}, \mathcal{D})^r$ elde edilir. Benzer şekilde, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{G}(m) \cap \ddot{Y}'(d) \subseteq \mathfrak{G}(m)$ olacak şekilde $m \in \mathcal{M}$ olduğundan, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_{\setminus}(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \cong_J (\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ elde edilir.

5.1.15. Önerme $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan, $[(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_{\setminus}(\ddot{Y}, \mathcal{D})]^r = (\mathfrak{G}, \mathcal{M})^r V_{\lambda}(\ddot{Y}, \mathcal{D})^r$.

İspat: $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_{\setminus}(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{D}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{D}(m, d) = \mathfrak{G}(m) \cap \ddot{Y}'(d)$. Böylece, $\mathfrak{D}'(m, d) = \mathfrak{G}'(m) \cup \ddot{Y}(d) = \mathfrak{G}'(m) \cup (\ddot{Y}')'(d)$. Buradan, $(\mathfrak{D}', \mathcal{M} \times \mathcal{D}) = (\mathfrak{G}, \mathcal{M})^r V_{\lambda}(\ddot{Y}, \mathcal{D})^r$ elde edilir.

5.1.16. Önerme $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_{\setminus}(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \cong_F (\mathfrak{G}, \mathcal{M})V_{\lambda}(\ddot{Y}, \mathcal{D})$.

İspat: $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})\Lambda_{\setminus}(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{D}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})V_{\lambda}(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{D}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{D}(m, d) = \mathfrak{G}(m) \cap \ddot{Y}'(d)$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için,

$\mathcal{O}(m, d) = \mathfrak{O}(m) \cup \mathfrak{Y}'(d)$. Böylece, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{O}(m, d) = \mathfrak{O}(m) \cap \mathfrak{Y}'(d) \subseteq \mathfrak{O}(m) \cup \mathfrak{Y}'(d) = \mathcal{O}(m, d)$ olduğundan, ispat elde edilir.

5.1.17. Önerme $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\mathfrak{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})$, $\mathcal{U}$ üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{Y}, \mathcal{D})$ ise $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})$.

İspat: $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{Y}, \mathcal{D})$ olsun. Buradan, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$ ve her $m \in \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{O}(m) \subseteq \mathfrak{Y}(m)$. Böylece, $\mathcal{M} \times \mathcal{J} \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{J}$ ve her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{O}(m) \cap \mathfrak{O}'(j) \subseteq \mathfrak{Y}(m) \cap \mathfrak{O}'(j)$ olup, ispat elde edilir.

5.1.18. Önerme $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$, $(\mathfrak{Y}, \mathcal{D})$, $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})$ ve $(\mathcal{O}, \mathfrak{X})$, $\mathcal{U}$ üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})^r \tilde{\subseteq}_F (\mathcal{O}, \mathfrak{X})^r$ ise, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} (\mathcal{O}, \mathfrak{X})$.

İspat: $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})^r \tilde{\subseteq}_F (\mathcal{O}, \mathfrak{X})^r$ olsun. Böylece, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$ ve $\mathcal{J} \subseteq \mathfrak{X}$, her $m \in \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{O}(m) \subseteq \mathfrak{Y}(m)$ ve her $j \in \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{O}'(j) \subseteq \mathcal{O}'(j)$. Buradan, $\mathcal{M} \times \mathcal{J} \subseteq \mathcal{D} \times \mathfrak{X}$, her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{O}(m) \cap \mathfrak{O}'(j) \subseteq \mathfrak{Y}(m) \cap \mathcal{O}'(j)$ olup, ispat elde edilir.

5.1.19. Önerme $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$, $(\mathfrak{Y}, \mathcal{M})$, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\mathcal{O}, \mathcal{M})$, $\mathcal{U}$ kümesi üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{Y}, \mathcal{M})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_F (\mathcal{O}, \mathcal{M})$ ise $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathcal{O}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{Y}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{M})$.

İspat: $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_F (\mathcal{O}, \mathcal{M})$ olsun. Buradan, her $m \in \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{O}(m) \subseteq \mathfrak{Y}(m)$ ve her $j \in \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{O}(j) \subseteq \mathcal{O}(j)$. Böylece, $\mathcal{M} \times \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ ve her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{O}(m) \cap \mathcal{O}'(j) \subseteq \mathfrak{Y}(m) \cap \mathfrak{O}'(j)$ olup, ispat elde edilir.

5.1.20. Önerme $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\mathfrak{Y}, \mathcal{D})$, $\mathcal{U}$ üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan, $\emptyset_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}} \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{Y}, \mathcal{D})$ ve $\emptyset_{\mathcal{D} \times \mathcal{M}} \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{M})$.

İspat: $\emptyset_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}} = (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{O}(m, d) = \emptyset$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{Z}(m, d) = \mathfrak{O}(m) \cap \mathfrak{Y}'(d)$. Böylece, $\mathcal{M} \times \mathcal{D} \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\emptyset \subseteq \mathfrak{O}(m) \cap \mathfrak{Y}'(d)$

olduğundan, $\emptyset_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}} \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ispatı elde edilir. Benzer şekilde $\emptyset_{\mathcal{D} \times \mathcal{M}} \tilde{\subseteq}_F (\ddot{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ olduğu da gösterilir.

5.1.21. Önerme $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan, $\emptyset_{\mathcal{M}} \tilde{\subseteq}_J (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D})$, $\emptyset_{\mathcal{D}} \tilde{\subseteq}_J (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ve $\emptyset_E \tilde{\subseteq}_J (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D})$.

İspat: $\emptyset_{\mathcal{M}} = (\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Böylece, her $m \in \mathcal{M}$ için $\mathfrak{O}(m) = \emptyset$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{Z}(m, d) = \mathfrak{G}(m) \cap \ddot{Y}'(d)$. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\emptyset \subseteq \mathfrak{G}(m) \cap \ddot{Y}'(d)$ olduğundan, $\emptyset_{\mathcal{M}} \tilde{\subseteq}_J (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D})$ sağlanır. $\emptyset_{\mathcal{D}} \tilde{\subseteq}_J (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ve $\emptyset_E \tilde{\subseteq}_J (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D})$ olduğu da benzer şekilde gösterilir.

5.1.22. Önerme $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\subseteq}_F U_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}}$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_F U_{\mathcal{D} \times \mathcal{M}}$.

İspat: $U_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}} = (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{O}(m, d) = U$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{Z}(m, d) = \mathfrak{G}(m) \cap \ddot{Y}'(d)$. Böylece, $\mathcal{M} \times \mathcal{D} \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{G}(m) \cap \ddot{Y}'(d) \subseteq U$ olduğundan $\mathfrak{Z}(m, d) = (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\subseteq}_F U_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}}$ elde edilir.

Benzer şekilde, $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_F U_{\mathcal{D} \times \mathcal{M}}$ olduğu da gösterilir.

5.1.23. Önerme $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\subseteq}_J U_{\mathcal{M}}$, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\subseteq}_J U_{\mathcal{D}}$ ve $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\subseteq}_F U_E$.

İspat: $U_{\mathcal{M}} = (\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $m \in \mathcal{M}$ için $\mathfrak{O}(m) = U$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{Z}(m, d) = \mathfrak{G}(m) \cap \ddot{Y}'(d)$. Her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{G}(m) \cap \ddot{Y}'(d) \subseteq U$ olduğundan $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\subseteq}_J U_{\mathcal{M}}$ elde edilir. $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\subseteq}_J U_{\mathcal{D}}$ olduğu da benzer şekilde gösterilir.

$U_E = (\mathfrak{X}, E)$ olsun. Buradan, her $m \in E$ için $\mathfrak{X}(m) = U$. $\mathcal{M} \times \mathcal{D} \subseteq E$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{G}(m) \cap \ddot{Y}'(d) \subseteq U$ olduğundan, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\subseteq}_F U_E$ elde edilir.

5.1.24. Önerme $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathbf{M}} U_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}}$ olması için gerek ve yeter şart, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) =_{\mathbf{M}} U_{\mathcal{M}}$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathbf{M}} \emptyset_{\mathcal{D}}$ sağlamasıdır.

İspat: $U_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}} = (\mathfrak{G}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{G}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{G}(m, d) = U$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{D}(m, d) = \mathfrak{G}(m) \cap \ddot{Y}'(d)$ olur. $(\mathfrak{G}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) = (\mathfrak{G}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{G}(m) \cap \ddot{Y}'(d) = U$. Böylece, her $m \in \mathcal{M}$ için $\mathfrak{G}(m) = U$ ve her $d \in \mathcal{D}$ için $\ddot{Y}'(d) = U$. Buradan, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) = U_{\mathcal{M}}$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = \emptyset_{\mathcal{D}}$ elde edilir.

Tersine, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) =_{\mathbf{M}} U_{\mathcal{M}}$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathbf{M}} \emptyset_{\mathcal{D}}$ olsun. Böylece, her $m \in \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{G}(m) = U$ ve her $d \in \mathcal{D}$ için $\ddot{Y}(d) = \emptyset$. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için $\mathfrak{D}(m, d) = \mathfrak{G}(m) \cap \ddot{Y}'(d) = U \cap U = U$ olup, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathbf{M}} U_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}}$ elde edilir.

5.1.25. Önerme $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathbf{M}} \emptyset_{\emptyset}$ olması için gerek ve yeter şart, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) =_{\mathbf{M}} \emptyset_{\emptyset}$ veya $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathbf{M}} \emptyset_{\emptyset}$ olmasıdır.

İspat: $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathbf{M}} \emptyset_{\emptyset}$ olsun. Buradan, $\mathcal{M} \times \mathcal{D} = \emptyset$ olup, $\mathcal{M} = \emptyset$ veya $\mathcal{D} = \emptyset$ olur. Parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_{\emptyset}$ olduğundan, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) = \emptyset_{\emptyset}$ veya $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = \emptyset_{\emptyset}$ elde edilir. Tersine, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) = \emptyset_{\emptyset}$ veya $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = \emptyset_{\emptyset}$ olsun. Böylece, $\mathcal{M} = \emptyset$ veya $\mathcal{D} = \emptyset$ olur. Bu durumda, $\mathcal{M} \times \mathcal{D} = \emptyset$ ve parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_{\emptyset}$ olduğundan, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathbf{M}} \emptyset_{\emptyset}$ olur.

5.2. Esnek Fark-Çarpım ve Dağılmaları

Bu bölümde, esnek fark-çarpımının kısıtlanmış kesişim ve birleşime, genişletilmiş kesişim ve birleşime, esnek ikili parçalı kesişim ve birleşime, VE-çarpıma ve VEYA-çarpıma dağılma durumu ayrıntılı bir şekilde incelenecektir.

5.2.1. Teorem $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$, $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{G}, \mathcal{J})$, U üzerinde birer esnek küme olmak üzere,

$$i) \quad (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} [(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \cup_{\mathbf{R}} (\mathfrak{G}, \mathcal{J})] =_{\mathbf{M}} [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D})] \cap_{\mathbf{R}} [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{G}, \mathcal{J})]$$

$$ii) (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} [(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \cap_R (\mathfrak{O}, \mathcal{J})] =_M [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D})] \cup_R [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})]$$

$$iii) [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \cap_R (\ddot{Y}, \mathcal{D})] \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) =_M [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})] \cap_R [(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})]$$

$$iv) [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \cup_R (\ddot{Y}, \mathcal{D})] \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) =_M [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})] \cup_R [(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})]$$

İspat: (i) Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $\mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J})$, sağ tarafının parametre kümesi $(\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olup, $\mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J}) = (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \cup_R (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{D} \cap \mathcal{J})$ olsun. Buradan, her $\varphi \in \mathcal{D} \cap \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{X}(\varphi) = \ddot{Y}(\varphi) \cup \mathfrak{O}(\varphi)$. $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{X}, \mathcal{D} \cap \mathcal{J}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J}))$ olsun. Buradan, her $(m, \varphi) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J})$ için, $\mathfrak{Z}(m, \varphi) = \mathfrak{T}(m) \cap \mathfrak{X}'(\varphi)$. O halde,

$$\mathfrak{Z}(m, \varphi) = \mathfrak{T}(m) \cap [\ddot{Y}(\varphi) \cup \mathfrak{O}(\varphi)]' = \mathfrak{T}(m) \cap [\ddot{Y}'(\varphi) \cap \mathfrak{O}'(\varphi)]$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathbb{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olsun. O halde, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathbb{F}(m, d) = \mathfrak{T}(m) \cap \ddot{Y}'(d)$ ve her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{Q}(m, j) = \mathfrak{T}(m) \cap \mathfrak{O}'(j)$. Burada, $(\mathbb{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap_R (\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{G}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}))$ olsun. Böylece, her $(m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J})$ için,

$$\mathfrak{G}(m, \varphi) = \mathbb{F}(m, \varphi) \cap \mathfrak{Q}(m, \varphi) = [\mathfrak{T}(m) \cap \ddot{Y}'(\varphi)] \cap [\mathfrak{T}(m) \cap \mathfrak{O}'(\varphi)]$$

Böylece, ispat elde edilir. Burada, $\mathcal{D} \cap \mathcal{J} = \emptyset$ ise $\mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J}) = (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \emptyset$ olup, parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_{\emptyset}$ olduğundan, eşitliğin her iki tarafı da $\emptyset_{\emptyset}$ olur. $(\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J}) = \emptyset$ olduğundan, $(\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \emptyset$ ise $\mathcal{M} = \emptyset$ veya $\mathcal{D} \cap \mathcal{J} = \emptyset$ olur. Kabul gereği $\mathcal{M} \neq \emptyset$ olup, $(\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \emptyset$ olması $\mathcal{D} \cap \mathcal{J} = \emptyset$ olmasını gerektirdiğinden, bu durumda da yine eşitliğin her iki tarafı $\emptyset_{\emptyset}$ olur.

(iii) Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $(\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times \mathcal{J}$, sağ tarafının parametre kümesi $(\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olup, $(\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times \mathcal{J} = (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \cap_R (\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{M} \cap \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $\varphi \in \mathcal{M} \cap \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{X}(\varphi) = \mathfrak{T}(\varphi) \cap \check{Y}(\varphi)$. $(\mathfrak{X}, \mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{Z}, (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan, her $(\varphi, j) \in (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{Z}(\varphi, j) = \mathfrak{X}(\varphi) \cap \mathfrak{O}'(j)$. O halde,

$$\mathfrak{Z}(\varphi, j) = [\mathfrak{T}(\varphi) \cap \check{Y}(\varphi)] \cap \mathfrak{O}'(j)$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olsun. O halde, her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{F}(m, j) = \mathfrak{T}(m) \cap \mathfrak{O}'(j)$ ve her $(d, j) \in \mathcal{D} \times \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{Q}(d, j) = \check{Y}(d) \cap \mathfrak{O}'(j)$. Buradan, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap_R (\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{S}, (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J}))$ olsun. Böylece, her $(\varphi, j) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) = (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times \mathcal{J}$ için,

$$\mathfrak{S}(\varphi, j) = \mathfrak{F}(\varphi, j) \cap \mathfrak{Q}(\varphi, j) = [\mathfrak{T}(\varphi) \cap \mathfrak{O}'(j)] \cap [\check{Y}(\varphi) \cap \mathfrak{O}'(j)]$$

Böylece, ispat elde edilir. Burada, $\mathcal{M} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ ise $(\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times \mathcal{J} = (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) = \emptyset$ olup, parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_{\emptyset}$ olduğundan, eşitliğin her iki tarafı da $\emptyset_{\emptyset}$ olur. $(\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) = (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times \mathcal{J} = \emptyset$ olduğundan, $(\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) = \emptyset$ ise $\mathcal{M} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ veya $\mathcal{J} = \emptyset$ olur. Kabul gereği $\mathcal{J} \neq \emptyset$ olup, $(\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) = \emptyset$ olması $\mathcal{M} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ olmasını gerektirdiğinden, bu durumda da yine eşitliğin her iki tarafı $\emptyset_{\emptyset}$ olur.

5.2.2. Teorem $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$, $(\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})$, U üzerinde birer esnek küme olmak üzere,

$$i) (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} [(\check{Y}, \mathcal{D}) \cap_{\varepsilon} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})] =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\check{Y}, \mathcal{D})] \cup_{\varepsilon} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})]$$

$$ii) (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} [(\check{Y}, \mathcal{D}) \cup_{\varepsilon} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})] =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\check{Y}, \mathcal{D})] \cap_{\varepsilon} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})]$$

$$iii) [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \cup_{\varepsilon} (\check{Y}, \mathcal{D})] \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})] \cup_{\varepsilon} [(\check{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})]$$

$$iv) [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \cap_{\varepsilon} (\ddot{Y}, \mathcal{D})] \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{D}, \mathcal{J}) =_M [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{D}, \mathcal{J})] \cap_{\varepsilon} [(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{D}, \mathcal{J})]$$

İspat: (i) Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $\mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cup \mathcal{J})$, sağ tarafının parametre kümesi $(\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cup (\mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olup, $\mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cup \mathcal{J}) = (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cup (\mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır. Ayrıca, kabul gereği $\mathcal{M} \neq \emptyset$, $\mathcal{D} \neq \emptyset$ ve $\mathcal{J} \neq \emptyset$ olduğundan, $\mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cup \mathcal{J}) \neq \emptyset$ ve $(\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cup (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \neq \emptyset$. Dolayısıyla sağ ve sol tarafın boş esnek kümeye eşit olma durumu bulunmamaktadır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \cap_{\varepsilon} (\mathfrak{D}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{D} \cup \mathcal{J})$ olsun. Buradan, her $\varphi \in \mathcal{D} \cup \mathcal{J}$ için,

$$\mathfrak{X}(\varphi) = \begin{cases} \ddot{Y}(\varphi), & \varphi \in \mathcal{D} - \mathcal{J} \\ \mathfrak{D}(\varphi), & \varphi \in \mathcal{J} - \mathcal{D} \\ \ddot{Y}(\varphi) \cap \mathfrak{D}(\varphi), & \varphi \in \mathcal{D} \cap \mathcal{J} \end{cases}$$

$(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{X}, \mathcal{D} \cup \mathcal{J}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cup \mathcal{J}))$ olsun. Buradan, her $(m, \varphi) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cup \mathcal{J})$ için, $\mathfrak{Z}(m, \varphi) = \mathfrak{T}(m) \cap \mathfrak{X}'(\varphi)$. O halde, her $(m, \varphi) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cup \mathcal{J})$ için,

$$\mathfrak{Z}(m, \varphi) = \begin{cases} \mathfrak{T}(m) \cap \ddot{Y}'(\varphi), & (m, \varphi) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} - \mathcal{J}) \\ \mathfrak{T}(m) \cap \mathfrak{D}'(\varphi), & (m, \varphi) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{J} - \mathcal{D}) \\ \mathfrak{T}(m) \cap [\ddot{Y}'(\varphi) \cup \mathfrak{D}'(\varphi)], & (m, \varphi) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J}) \end{cases}$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{D}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{F}(m, d) = \mathfrak{T}(m) \cap \ddot{Y}'(d)$ ve her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için $\mathfrak{Q}(m, j) = \mathfrak{T}(m) \cap \mathfrak{D}'(j)$. Burada, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cup_{\varepsilon} (\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{S}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cup (\mathcal{M} \times \mathcal{J}))$ olsun. O halde her $(m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cup (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cup \mathcal{J})$ için,

$$\mathfrak{S}(m, \varphi) = \begin{cases} \mathfrak{F}(m, \varphi), & (m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) - (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \mathcal{M} \times (\mathcal{D} - \mathcal{J}) \\ \mathfrak{Q}(m, \varphi), & (m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) - (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) = \mathcal{M} \times (\mathcal{J} - \mathcal{D}) \\ \mathfrak{F}(m, \varphi) \cup \mathfrak{Q}(m, \varphi), & (m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J}) \end{cases}$$

Buradan,

$$\mathfrak{Q}(m, \varphi) = \begin{cases} \mathfrak{T}(m) \cap \mathfrak{Y}'(\varphi), & (m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) - (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \mathcal{M} \times (\mathcal{D} - \mathcal{J}) \\ \mathfrak{T}(m) \cap \mathfrak{O}'(\varphi), & (m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) - (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) = \mathcal{M} \times (\mathcal{J} - \mathcal{D}) \\ [\mathfrak{T}(m) \cap \mathfrak{Y}'(\varphi)] \cup [\mathfrak{T}(m) \cap \mathfrak{O}'(\varphi)], & (m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J}) \end{cases}$$

Böylece, ispat elde edilir.

(iii) Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $(\mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \times \mathcal{J}$, sağ tarafının parametre kümesi $(\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cup (\mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olup, $(\mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \times \mathcal{J} = (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cup (\mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır. Ayrıca, kabul gereği $\mathcal{M} \neq \emptyset$, $\mathcal{D} \neq \emptyset$ ve $\mathcal{J} \neq \emptyset$ olduğundan, $(\mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \times \mathcal{J} \neq \emptyset$ ve $(\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cup (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) \neq \emptyset$. Dolayısıyla sağ ve sol tarafın boş esnek kümeye eşit olma durumu bulunmamaktadır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \cup_{\varepsilon} (\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{M} \cup \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $\varphi \in \mathcal{M} \cup \mathcal{D}$ için,

$$\mathfrak{X}(\varphi) = \begin{cases} \mathfrak{T}(\varphi), & \varphi \in \mathcal{M} - \mathcal{D} \\ \mathfrak{Y}(\varphi), & \varphi \in \mathcal{D} - \mathcal{M} \\ \mathfrak{T}(\varphi) \cup \mathfrak{Y}(\varphi), & \varphi \in \mathcal{M} \cap \mathcal{D} \end{cases}$$

$(\mathfrak{X}, \mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{Z}, (\mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan, her $(\varphi, j) \in (\mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \times \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{Z}(\varphi, j) = \mathfrak{X}(\varphi) \cap \mathfrak{O}'(j)$ olur. O halde, her $(\varphi, j) \in (\mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \times \mathcal{J}$ için,

$$\mathfrak{Z}(\varphi, j) = \begin{cases} \mathfrak{T}(\varphi) \cap \mathfrak{O}'(j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{M} - \mathcal{D}) \times \mathcal{J} \\ \mathfrak{Y}(\varphi) \cap \mathfrak{O}'(j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{D} - \mathcal{M}) \times \mathcal{J} \\ [\mathfrak{T}(\varphi) \cup \mathfrak{Y}(\varphi)] \cap \mathfrak{O}'(j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times \mathcal{J} \end{cases}$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ ve $(\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olsun. O halde, her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{F}(m, j) = \mathfrak{T}(m) \cap \mathfrak{O}'(j)$ ve her $(d, j) \in \mathcal{D} \times \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{Q}(d, j) = \mathfrak{Y}(d) \cap \mathfrak{O}'(j)$. Burada, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cup_{\varepsilon} (\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cup (\mathcal{D} \times \mathcal{J}))$ olsun. O halde, her $(\varphi, j) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cup (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) = (\mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \times \mathcal{J}$ için,

$$\odot(\varphi, j) = \begin{cases} \mathbb{F}(\varphi, j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) - (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) = (\mathcal{M} - \mathcal{D}) \times \mathcal{J} \\ \mathbb{Q}(\varphi, j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) - (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) = (\mathcal{D} - \mathcal{M}) \times \mathcal{J} \\ \mathbb{F}(\varphi, j) \cup \mathbb{Q}(\varphi, j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) = (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times \mathcal{J} \end{cases}$$

Buradan,

$$\odot(\varphi, j) = \begin{cases} \mathfrak{T}(\varphi) \cap \mathfrak{D}'(j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) - (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) = (\mathcal{M} - \mathcal{D}) \times \mathcal{J} \\ \mathfrak{Y}(\varphi) \cap \mathfrak{D}'(j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) - (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) = (\mathcal{D} - \mathcal{M}) \times \mathcal{J} \\ [\mathfrak{T}(\varphi) \cap \mathfrak{D}'(j)] \cup [\mathfrak{Y}(\varphi) \cap \mathfrak{D}'(j)], & (\varphi, j) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) = (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times \mathcal{J} \end{cases}$$

Böylece, ispat elde edilir.

5.2.3. Teorem $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$, $(\mathfrak{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{D}, \mathcal{J})$, $\mathcal{U}$ üzerinde birer esnek küme olmak üzere,

$$i) (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} [(\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\cap} (\mathfrak{D}, \mathcal{J})] =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{Y}, \mathcal{D})] \tilde{\cup} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{D}, \mathcal{J})]$$

$$ii) (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} [(\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\cup} (\mathfrak{D}, \mathcal{J})] =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{Y}, \mathcal{D})] \tilde{\cap} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{D}, \mathcal{J})]$$

$$iii) [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\cup} (\mathfrak{Y}, \mathcal{D})] \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{D}, \mathcal{J}) =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{D}, \mathcal{J})] \tilde{\cup} [(\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{D}, \mathcal{J})]$$

$$iv) [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\cap} (\mathfrak{Y}, \mathcal{D})] \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{D}, \mathcal{J}) =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{D}, \mathcal{J})] \tilde{\cap} [(\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{D}, \mathcal{J})]$$

İspat: (i) Eşitliğin sol ve sağ tarafının parametre kümesi $\mathcal{M} \times \mathcal{D}$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır. Ayrıca, kabul gereği $\mathcal{M} \neq \emptyset$ ve $\mathcal{D} \neq \emptyset$ olduğundan, $\mathcal{M} \times \mathcal{D} \neq \emptyset$. Dolayısıyla sağ ve sol tarafın boş esnek kümeye eşit olma durumu bulunmamaktadır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\cap} (\mathfrak{D}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $d \in \mathcal{D}$ için,

$$\mathfrak{X}(d) = \begin{cases} \mathfrak{Y}(d), & d \in \mathcal{D} - \mathcal{J} \\ \mathfrak{Y}(d) \cap \mathfrak{D}(d), & d \in \mathcal{D} \cap \mathcal{J} \end{cases}$$

$(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{X}, \mathcal{D}) = (\mathbb{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathbb{Q}(m, d) = \mathfrak{T}(m) \cap \mathfrak{X}'(d)$ olur. O halde,

$$\mathfrak{Q}(m, d) = \begin{cases} \mathfrak{T}(m) \cap \ddot{Y}'(d), & (m, d) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} - J) \\ \mathfrak{T}(m) \cap [\ddot{Y}'(d) \cup \mathfrak{O}'(d)], & (m, d) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap J) \end{cases}$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathbb{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, J) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times J)$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathbb{F}(m, d) = \mathfrak{T}(m) \cap \ddot{Y}'(d)$ ve her $(m, j) \in \mathcal{M} \times J$ için, $\mathfrak{Z}(m, j) = \mathfrak{T}(m) \cap \mathfrak{O}'(j)$. Burada, $(\mathbb{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) \tilde{\cup} (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times J) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. O halde her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için,

$$\mathfrak{Q}(m, d) = \begin{cases} \mathbb{F}(m, d), & (m, d) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) - (\mathcal{M} \times J) = \mathcal{M} \times (\mathcal{D} - J) \\ \mathbb{F}(m, d) \cup \mathfrak{Z}(m, d), & (m, d) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times J) = \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap J) \end{cases}$$

Buradan,

$$\mathfrak{Q}(m, d) = \begin{cases} \mathfrak{T}(m) \cap \ddot{Y}'(d), & (m, d) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) - (\mathcal{M} \times J) = \mathcal{M} \times (\mathcal{D} - J) \\ [\mathfrak{T}(m) \cap \ddot{Y}'(d)] \cup [\mathfrak{T}(m) \cap \mathfrak{O}'(d)], & (m, d) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times J) = \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap J) \end{cases}$$

Böylece, ispat elde edilir. Burada $\mathcal{M} \neq \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ olduğu için, esnek ikili parçalı işlemlerin, esnek fark-çarpımına soldan dağılım gösteremeyeceği açıktır.

(iii) Eşitliğin sol ve sağ tarafının parametre kümesi $\mathcal{M} \times J$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır. Ayrıca, kabul gereği $\mathcal{M} \neq \emptyset$ ve $J \neq \emptyset$ olduğundan, $\mathcal{M} \times J \neq \emptyset$. Dolayısıyla sağ ve sol tarafın boş esnek kümeye eşit olma durumu bulunmamaktadır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\cup} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{M})$ olur. Buradan her $m \in \mathcal{M}$ için,

$$\mathfrak{X}(m) = \begin{cases} \mathfrak{T}(m), & m \in \mathcal{M} - \mathcal{D} \\ \mathfrak{T}(m) \cup \ddot{Y}(m), & m \in \mathcal{M} \cap \mathcal{D} \end{cases}$$

$(\mathfrak{X}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{O}, J) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times J)$ olsun. Buradan, her $(m, j) \in \mathcal{M} \times J$ için, $\mathfrak{Q}(m, j) = \mathfrak{X}(m) \cap \mathfrak{O}'(j)$. Böylece,

$$\mathfrak{X}(m, j) = \begin{cases} \mathfrak{T}(m) \cap \mathfrak{O}'(j), & (m, j) \in (\mathcal{M} - \mathcal{D}) \times J \\ [\mathfrak{T}(m) \cup \ddot{Y}(m)] \cap \mathfrak{O}'(j), & (m, j) \in (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times J \end{cases}$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{D}, J) = (\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times J)$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{D}, J) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{D} \times J)$ olsun. Buradan, her $(m, j) \in \mathcal{M} \times J$ için, $\mathfrak{F}(m, j) = \mathfrak{G}(m) \cap \mathfrak{D}'(j)$ ve her $(d, j) \in \mathcal{D} \times J$ için, $\mathfrak{Z}(d, j) = \ddot{Y}(d) \cap \mathfrak{D}'(j)$. Burada, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times J) \tilde{\cup} (\mathfrak{Z}, \mathcal{D} \times J) = (\mathfrak{G}, \mathcal{M} \times J)$ olsun. O halde, her $(m, j) \in \mathcal{M} \times J$ için,

$$\mathfrak{G}(m, j) = \begin{cases} \mathfrak{F}(m, j), & (m, j) \in (\mathcal{M} \times J) - (\mathcal{D} \times J) = (\mathcal{M} - \mathcal{D}) \times J \\ \mathfrak{F}(m, j) \cup \mathfrak{Z}(m, j), & (m, j) \in (\mathcal{M} \times J) \cap (\mathcal{D} \times J) = (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times J \end{cases}$$

Böylece,

$$\mathfrak{G}(m, j) = \begin{cases} \mathfrak{G}(m) \cap \mathfrak{D}'(j), & (m, j) \in (\mathcal{M} \times J) - (\mathcal{D} \times J) = (\mathcal{M} - \mathcal{D}) \times J \\ [\mathfrak{G}(m) \cap \mathfrak{D}'(j)] \cup [\ddot{Y}(m) \cap \mathfrak{D}'(j)], & (m, j) \in (\mathcal{M} \times J) \cap (\mathcal{D} \times J) = (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times J \end{cases}$$

Böylece, ispat elde edilir.

5.2.4. Tanım $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$, $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{D}, J)$, U üzerinde birer esnek küme olsun. Buradan,

$$i) (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} [(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \Lambda (\mathfrak{D}, J)] \subseteq_L [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D})] V [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{D}, J)]$$

$$ii) (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} [(\ddot{Y}, \mathcal{D}) V (\mathfrak{D}, J)] \subseteq_L [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D})] \Lambda [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{D}, J)]$$

İspat: (i) İlk olarak sol tarafa bakılacak olursa, $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \Lambda (\mathfrak{D}, J) = (\mathfrak{U}, \mathcal{D} \times J)$ olsun. Buradan, her $(d, j) \in \mathcal{D} \times J$ için, $\mathfrak{U}(d, j) = \ddot{Y}(d) \cap \mathfrak{D}(j)$. $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{U}, \mathcal{D} \times J) = (\mathfrak{X}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times J))$ olsun. Buradan, her $(m, (d, j)) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times J)$ için,

$$\mathfrak{X}(m, (d, j)) = \mathfrak{G}(m) \cap [\ddot{Y}(d) \cap \mathfrak{D}(j)]' = \mathfrak{G}(m) \cap [\ddot{Y}'(d) \cup \mathfrak{D}'(j)]$$

Sağ tarafa bakılacak olursa, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{G}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\mathfrak{D}, J) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times J)$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{G}(m, d) = \mathfrak{G}(m) \cap \ddot{Y}'(d)$ ve her $(m, j) \in \mathcal{M} \times J$ için, $\mathfrak{Z}(m, j) = \mathfrak{G}(m) \cap \mathfrak{D}'(j)$. $(\mathfrak{G}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) V (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times J) = (\mathfrak{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times (\mathcal{M} \times J))$ olsun. Buradan, her $((m, d), (m, j)) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times (\mathcal{M} \times J)$ için,

$$\mathfrak{Q}((m, d), (m, j)) = [\mathfrak{G}(m) \cap \ddot{Y}'(d)] \cup [\mathfrak{G}(m) \cap \mathfrak{D}'(j)]$$

Burada, her $(m, (d, j)) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J})$ için,

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}(m, (d, j)) &= \mathfrak{T}(m) \cap [\check{Y}'(d) \cup \mathfrak{D}'(j)] = [\mathfrak{T}(m) \cap \check{Y}'(d)] \cup [\mathfrak{T}(m) \cap \mathfrak{D}'(j)] \\ &= \mathfrak{Q}((m, d), (m, j))\end{aligned}$$

olacak şekilde $((m, d), (m, j)) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times (\mathcal{M} \times \mathcal{J})$ vardır. Böylece, istenen elde edilir.

(ii)'nin ispatı da benzer şekilde yapılır. Önerme 5.2.4'te yer alan L-alt kümesinin, L-eşit olamayacağı Örnek 5.2.5'te gösterilmektedir:

5.2.5. Örnek $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi, $\mathcal{M} = \{e_1, e_5\}$, $\mathcal{D} = \{e_3\}$ ve $\mathcal{J} = \{e_2\}$ E parametre kümesinin alt kümeleri, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evrensel küme olmak üzere, U üzerinde $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$, $(\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{D}, \mathcal{J})$ esnek kümeleri,

$$\begin{aligned}(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) &= \{(e_1, \{h_1, h_6\}), (e_5, \{h_2, h_4, h_5\})\}, (\check{Y}, \mathcal{D}) = \{(e_3, \{h_1, h_3, h_4\})\}, (\mathfrak{D}, \mathcal{J}) = \\ &= \{(e_2, \{h_1, h_4, h_5\})\}\end{aligned}$$

olarak tanımlansın. İlk olarak sol tarafa bakılacak olursa, $(\check{Y}, \mathcal{D}) \wedge (\mathfrak{D}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{U}, \mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan,

$$(\mathfrak{U}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = \{((e_3, e_2), \{h_1, h_4\})\}$$

$(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \wedge (\mathfrak{U}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J}))$ olsun. Böylece,

$$(\mathfrak{X}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J})) = \{((e_1, (e_3, e_2)), \{h_6\}), ((e_5, (e_3, e_2)), \{h_2, h_5\})\}$$

Sağ taraftan devam edilecek olursa, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \wedge (\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan,

$$(\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) = \{((e_1, e_3), \{h_6\}), ((e_5, e_3), \{h_2, h_5\})\}$$

$(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \wedge (\mathfrak{D}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan,

$$(\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \{((e_1, e_2), \{h_6\}), ((e_5, e_2), \{h_2\})\}$$

$(\mathfrak{E}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})V(\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times (\mathcal{M} \times \mathcal{J}))$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} & \left(\mathfrak{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \right) = \\ & \left\{ \left(((e_1, e_3), (e_1, e_2)), \{h_6\} \right), \left(((e_1, e_3), (e_5, e_2)), \{h_2, h_6\} \right), \left(((e_5, e_3), (e_1, e_2)), \{h_2, h_5, h_6\} \right), \right. \\ & \quad \left. \left(((e_5, e_3), (e_5, e_2)), \{h_2, h_5\} \right) \right\} \end{aligned}$$

Böylece, $\mathfrak{Q}((e_1, e_3), (e_5, e_2)) \neq \mathfrak{X}(e_1, (e_3, e_2))$, $\mathfrak{Q}((e_1, e_3), (e_5, e_2)) \neq \mathfrak{X}((e_5, (e_3, e_2)))$, $\mathfrak{Q}((e_5, e_3), (e_1, e_2)) \neq \mathfrak{X}(e_1, (e_3, e_2))$ ve $\mathfrak{Q}((e_5, e_3), (e_1, e_2)) \neq \mathfrak{X}((e_5, (e_3, e_2)))$ olduğu görülür. Buradan, $(\mathfrak{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times (\mathcal{M} \times \mathcal{J})) \not\subseteq_L (\mathfrak{X}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J}))$ olup, istenen elde edilir.

5.3. Esnek Fark-Çarpım ve Karar Verme Problemi

Bölüm boyunca, U üzerindeki esnek kümelerin tüm esnek fark-çarpımının kümesi " $\Lambda_{\setminus}(U)$ " ile $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\check{\mathfrak{Y}}, \mathcal{D})$ esnek kümelerinin esnek fark-çarpımının esnek yaklaşım fonksiyonu

$$\mathfrak{O}_{\mathcal{M}}\Lambda_{\setminus}\check{\mathfrak{Y}}_{\mathcal{D}}: \mathcal{M} \times \mathcal{D} \rightarrow P(U)$$

ile gösterilecektir. Burada, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $(\mathfrak{O}_{\mathcal{M}}\Lambda_{\setminus}\check{\mathfrak{Y}}_{\mathcal{D}})(m, d) = \mathfrak{O}(m) \cap \check{\mathfrak{Y}}'(d)$ olduğu bilinmektedir.

5.3.1. Tanım $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\check{\mathfrak{Y}}, \mathcal{D})$, U kümesi üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun.

$\text{bir}_m \text{kes}_d$ ve $\text{bir}_d \text{kes}_m$ ile gösterilen, esnek fark-çarpım için bir-kes operatörü sırasıyla,

$$\text{bir}_m \text{kes}_d: \Lambda_{\setminus}(U) \rightarrow P(U),$$

$$\text{bir}_m \text{kes}_d(\mathfrak{O}_{\mathcal{M}}\Lambda_{\setminus}\check{\mathfrak{Y}}_{\mathcal{D}}) = \bigcup_{m \in \mathcal{M}} \left(\bigcap_{d \in \mathcal{D}} ((\mathfrak{O}_{\mathcal{M}}\Lambda_{\setminus}\check{\mathfrak{Y}}_{\mathcal{D}})(m, d)) \right)$$

$$\text{bir}_d \text{kes}_m: \Lambda_{\setminus}(U) \rightarrow P(U),$$

$$\text{bir}_d \text{kes}_m(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_{\setminus} \check{Y}_{\mathcal{D}}) = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} \left(\bigcap_{m \in \mathcal{M}} ((\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_{\setminus} \check{Y}_{\mathcal{D}})(m, d)) \right)$$

şeklinde tanımlanır.

5.3.2. Tanım $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \Lambda_{\setminus} (\check{Y}, \mathcal{D}) \in \Lambda_{\setminus}(U)$ olsun. bir-kes olarak gösterilen esnek fark-çarpımın bir-kes fonksiyonu,

bir-kes: $\Lambda_{\setminus}(U) \rightarrow P(U)$,

$$\text{bir-kes}(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_{\setminus} \check{Y}_{\mathcal{D}}) = [\text{bir}_m \text{kes}_d(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_{\setminus} \check{Y}_{\mathcal{D}})] \cup [\text{bir}_d \text{kes}_m(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_{\setminus} \check{Y}_{\mathcal{D}})]$$

şeklinde ve U evrensel kümesinin boyutunu küçültür. Burada, $\text{bir-kes}(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_{\setminus} \check{Y}_{\mathcal{D}})$ nin U kümesinin bir alt kümesi olduğu aşıkardır. $\text{bir-kes}(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_{\setminus} \check{Y}_{\mathcal{D}})$ değerine, $\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_{\setminus} \check{Y}_{\mathcal{D}}$ esnek çarpımının bir-kes karar kümesi denir.

Belirsizlik içeren bir gerçek hayat problemi için bir-kes karar verme metodu esnek fark-çarpımına aşağıdaki algoritma yardımıyla oluşturulur:

ALGORİTMA

Adım 1: Parametre kümesinin uygun alt kümeleri seçilir.

Adım 2: Parametre kümesinin her bir alt kümesi için esnek kümeler inşa edilir.

Adım 3: Esnek cümlelerin $\Lambda_{\setminus}$ -çarpımı hesaplanır.

Adım 4: Çarpımın bir-kes karar kümesi hesaplanır.

Şimdi esnek fark-çarpımın bir-kes karar verme problemine nasıl uygulandığı ile ilgili bir örnek verilecektir.

5.3.3. *Örnek* Bir özel kulüp sözleşmeli antrenör alım duyurusunda bulunmuş, boş kontenjan sayısının üç (3) katına kadar çağırılacak adaylar arasından, sözlü ve uygulamalı sınav başarı

durumuna göre alım yapacaktır. Başvurular, başvuru pozisyon için aranan niteliklere uygunluk yönünden ön incelemeden geçerek, başvuru şartlarından herhangi birini taşımadığı tespit edilenlerin başvurusu iptal edilmiştir. Başvurusu geçerli sayılan adaylar arasından, kulübün İnsan Kaynakları müdürü Sayın Çam adaylara uygulanan sözlü sınav ve adayların tabi tutulduğu uygulamalı sınav neticesinde elde edilen sonuçları göz önünde bulundurarak bir seçme işlemi yapacaktır.

Sayın Çam, bir antrenör adayında olması gereken özellikleri göz önüne alarak, ilk olarak SEÇİLECEK antrenör adayında olmasını İSTEDİĞİ, daha sonra olmasını İSTEMEDİĞİ parametreleri belirleyerek, kararını esnek fark-çarpımın bir-kes karar verme metodu ile oluşturacaktır. Başvurusu geçerli sayılan antrenör adayla $U = \{s_1, s_2, \dots, s_{25}\}$ ile, SEÇİLECEK antrenörleri belirlemek için kullanılacak parametreler kümesi, $E = \{c_1, c_2, \dots, c_8\}$ ile temsil edilsin. Burada, c_i parametreleri $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ olmak üzere, sırasıyla aşağıdaki açıklamalara karşılık gelmektedir:

- c_1 = “Görevin getirdiği mesleki alan bilgisine sahip”
- c_2 = “Genel kültür ve genel yeteneği düşük düzeyde”
- c_3 = “Görevin getirdiği mesleki alan uygulamasına sahip”
- c_4 = “İfade yeteneği ve muhakeme yeteneği güçlü”
- c_5 = “Fiziksel dayanıklılığı ve kondisyonu düşük”
- c_6 = “Yeniliklere, bilimsel ve teknolojik gelişmelere kapalı”
- c_7 = “Motivasyonlu ve azimli”
- c_8 = “Özgüven, ikna kabiliyeti ve inandırıcılığı düşük”

Bu antrenör alım süreci sorununu çözmek için, esnek fark-çarpım yöntemine bir-kes karar verme yöntemini şu şekilde uygulayabiliriz:

Adım 1: Parametreler Kümesinin Belirlenmesi.

Karar verici, mevcut parametreler kümesinden, öncelikle seçilecek antrenör adaylarında olmasını İSTEDİĞİ parametreleri (i) seçer, ardından olmasını İSTEMEDİĞİ parametreleri (ii) belirler: Yani,

- (i) Seçilen adaylarda bulunması gereken parametreler: Bunlar, bir antrenörde bulunması gereken temel ve istenen özellikler veya becerilerdir ve eksikliği, adayı eler.
- (ii) Seçilecek adaylarda bulunmaması tercih edilen parametreler: Bunlar, adayın seçim için uygun olmamasına neden olan istenmeyen özellikler veya eksikliklerdir.

Bu parametreler iki kümeye ayrılarak, seçim süreci karar vericinin öncelikleriyle uyumlu ve net bir şekilde gerçekleştirilmiş olur. Bu parametre kümeleri sırasıyla $\mathcal{M} = \{c_1, c_3, c_4, c_7\}$ ve $\mathcal{D} = \{c_2, c_5, c_6, c_8\}$ olarak belirlenmiştir.

Adım 2: Adım 1'de Belirlenen Parametre Kümeleri Kullanarak Esnek kümelerin Oluşturulması.

Bu parametre kümelerini kullanarak, karar verici sırasıyla $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$ ve $(\mathfrak{T}, \mathcal{D})$ esnek kümelerini oluşturur.

$$\begin{aligned}
 & (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \\
 &= \{(c_1, \{s_1, s_3, s_4, s_7, s_9, s_{13}, s_{15}, s_{17}, s_{22}, s_{24}\}), (c_3, \{s_2, s_3, s_5, s_8, s_{11}, s_{17}, s_{21}, s_{23}, s_{25}\}), \\
 & (c_4, \{s_6, s_9, s_{13}, s_{16}, s_{18}, s_{19}, s_{21}, s_{22}, s_{24}\}), (c_7, \{s_1, s_3, s_6, s_{10}, s_{11}, s_{13}, s_{17}, s_{22}, s_{23}, s_{25}\})\} \\
 & (\mathfrak{T}, \mathcal{D}) \\
 &= \{(c_2, \{s_8, s_9, s_{12}, s_{14}, s_{16}, s_{17}, s_{22}, s_{25}\}), (c_5, \{s_1, s_3, s_5, s_7, s_{11}, s_{15}, s_{19}, s_{20}, s_{21}\}), \\
 & (c_6, \{s_3, s_4, s_6, s_9, s_{13}, s_{18}, s_{19}, s_{25}\}), (c_8, \{s_7, s_{10}, s_{11}, s_{14}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{25}\})\}.
 \end{aligned}$$

Adım 3: Esnek Kümelerin $\Lambda_{\setminus}$ -çarpımının belirlenmesi.

$$\begin{aligned}
 & \mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda_{\setminus} \mathfrak{T}_{\mathcal{D}} \\
 &= \{((c_1, c_2), \{s_1, s_3, s_4, s_7, s_{13}, s_{15}, s_{24}\}), ((c_1, c_5), \{s_4, s_9, s_{13}, s_{17}, s_{22}, s_{24}\}), \\
 & ((c_1, c_6), \{s_4, s_9, s_{13}, s_{17}, s_{22}, s_{24}\}), ((c_1, c_8), \{s_4, s_9, s_{13}, s_{17}, s_{22}, s_{24}\})\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((c_1, c_6), \{s_1, s_7, s_{15}, s_{17}, s_{22}, s_{24}\}), ((c_1, c_8), \{s_1, s_3, s_4, s_9, s_{13}, s_{15}, s_{17}, s_{24}\}), \\
& ((c_3, c_2), \{s_2, s_3, s_5, s_{11}, s_{21}, s_{23}\}), ((c_3, c_5), \{s_2, s_8, s_{17}, s_{23}, s_{25}\}), \\
& ((c_3, c_6), \{s_2, s_5, s_8, s_{11}, s_{17}, s_{21}, s_{23}\}), ((c_3, c_8), \{s_2, s_3, s_5, s_8, s_{17}\}), \\
& ((c_4, c_2), \{s_6, s_{13}, s_{18}, s_{19}, s_{21}, s_{24}\}), ((c_4, c_5), \{s_6, s_9, s_{13}, s_{16}, s_{18}, s_{22}, s_{24}\}), \\
& ((c_4, c_6), \{s_{16}, s_{21}, s_{22}, s_{24}\}), ((c_4, c_8), \{s_6, s_9, s_{13}, s_{16}, s_{18}, s_{24}\}), \\
& ((c_7, c_2), \{s_1, s_3, s_6, s_{10}, s_{11}, s_{13}, s_{23}\}), ((c_7, c_5), \{s_6, s_{10}, s_{13}, s_{17}, s_{22}, s_{23}, s_{25}\}), \\
& ((c_7, c_6), \{s_1, s_{10}, s_{11}, s_{17}, s_{22}, s_{23}\}), ((c_7, c_8), \{s_1, s_3, s_6, s_{13}, s_{17}\})
\end{aligned}$$

Adım 4: bir-kes($\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}}$) karar verme kümesi bulunur.

$$\text{bir}_m \text{kes}_d(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}}) = \bigcup_{m \in \mathcal{M}} \left(\bigcap_{d \in \mathcal{D}} ((\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(m, d)) \right)$$

İlk olarak

$$\bigcap_{d \in \mathcal{D}} ((\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(m, d))$$

belirlenir:

$$\begin{aligned}
& (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_1, c_2) \cap (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_1, c_5) \cap (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_1, c_6) \cap (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_1, c_8) \\
& = \{s_1, s_3, s_4, s_7, s_{13}, s_{15}, s_{24}\} \cap \{s_4, s_9, s_{13}, s_{17}, s_{22}, s_{24}\} \cap \{s_1, s_7, s_{15}, s_{17}, s_{22}, s_{24}\} \\
& \quad \cap \{s_1, s_3, s_4, s_9, s_{13}, s_{15}, s_{17}, s_{24}\} = \{s_{24}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_3, c_2) \cap (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_3, c_5) \cap (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_3, c_6) \cap (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_3, c_8) \\
& = \{s_2, s_3, s_5, s_{11}, s_{21}, s_{23}\} \cap \{s_2, s_8, s_{17}, s_{23}, s_{25}\} \cap \{s_2, s_5, s_8, s_{11}, s_{17}, s_{21}, s_{23}\} \\
& \quad \cap \{s_2, s_3, s_5, s_8, s_{17}\} = \{s_2\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_4, c_2) \cap (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_4, c_5) \cap (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_4, c_6) \cap (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_4, c_8) \\
& = \{s_6, s_{13}, s_{18}, s_{19}, s_{21}, s_{24}\} \cap \{s_6, s_9, s_{13}, s_{16}, s_{18}, s_{22}, s_{24}\} \cap \{s_{16}, s_{21}, s_{22}, s_{24}\} \\
& \quad \cap \{s_6, s_9, s_{13}, s_{16}, s_{18}, s_{24}\} = \{s_{24}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_7, c_2) \cap (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_7, c_5) \cap (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_7, c_6) \cap (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_7, c_8) \\
&= \{s_1, s_3, s_6, s_{10}, s_{11}, s_{13}, s_{23}\} \cap \{s_6, s_{10}, s_{13}, s_{17}, s_{22}, s_{23}, s_{25}\} \cap \{s_1, s_{10}, s_{11}, s_{17}, s_{22}, s_{23}\} \\
&\quad \cap \{s_1, s_3, s_6, s_{13}, s_{17}\} = \emptyset
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\text{bir}_m \text{ kes}_d(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}}) &= \bigcup_{m \in \mathcal{M}} \left(\bigcap_{d \in \mathcal{D}} ((\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(m, d)) \right) = \{s_{24}\} \cup \{s_2\} \cup \{s_{24}\} \cup \emptyset \\
&= \{s_2, s_{24}\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra

$$\bigcap_{m \in \mathcal{M}} ((\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(m, d))$$

belirlenir:

$$\begin{aligned}
& (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_1, c_2) \cap (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_3, c_2) \cap (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_4, c_2) \cap (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_7, c_2) \\
&= \{s_1, s_3, s_4, s_7, s_{13}, s_{15}, s_{24}\} \cap \{s_2, s_3, s_5, s_{11}, s_{21}, s_{23}\} \cap \{s_6, s_{13}, s_{18}, s_{19}, s_{21}, s_{24}\} \\
&\quad \cap \{s_1, s_3, s_6, s_{10}, s_{11}, s_{13}, s_{23}\} = \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_1, c_5) \cap (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_3, c_5) \cap (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_4, c_5) \cap (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_7, c_5) \\
&= \{s_4, s_9, s_{13}, s_{17}, s_{22}, s_{24}\} \cap \{s_2, s_8, s_{17}, s_{23}, s_{25}\} \cap \{s_6, s_9, s_{13}, s_{16}, s_{18}, s_{22}, s_{24}\} \\
&\quad \cap \{s_6, s_{10}, s_{13}, s_{17}, s_{22}, s_{23}, s_{25}\} = \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_1, c_6) \cap (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_3, c_6) \cap (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_4, c_6) \cap (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_7, c_6) \\
&= \{s_1, s_7, s_{15}, s_{17}, s_{22}, s_{24}\} \cap \{s_2, s_5, s_8, s_{11}, s_{17}, s_{21}, s_{23}\} \cap \{s_{16}, s_{21}, s_{22}, s_{24}\} \\
&\quad \cap \{s_1, s_{10}, s_{11}, s_{17}, s_{22}, s_{23}\} = \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_1, c_8) \cap (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_3, c_8) \cap (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_4, c_8) \cap (\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})(c_7, c_8) \\
&= \{s_1, s_3, s_4, s_9, s_{13}, s_{15}, s_{17}, s_{24}\} \cap \{s_2, s_3, s_5, s_8, s_{17}\} \cap \{s_6, s_9, s_{13}, s_{16}, s_{18}, s_{24}\} \\
&\quad \cap \{s_1, s_3, s_6, s_{13}, s_{17}\} = \emptyset
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan,

$$\begin{aligned} \text{bir}_d \text{kes}_m(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}}) &= \bigcup_{d \in \mathcal{D}} \left(\bigcap_{m \in \mathcal{M}} ((\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \check{\mathfrak{Y}}_{\mathcal{D}})(m, d)) \right) \\ &= \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} \text{bir} - \text{kes}(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}}) &= [\text{bir}_m \text{kes}_d(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})] \cup [\text{bir}_d \text{kes}_m(\mathfrak{T}_{\mathcal{M}} \Lambda \setminus \mathfrak{T}_{\mathcal{D}})] \\ &= \{s_2, s_{24}\} \cup \emptyset = \{s_2, s_{24}\} \end{aligned}$$

Buradan, özel kulübün antrenör alım sürecine başvurusu kabul edilen 25 aday arasından, s_2 ve s_{24} , bu özel kulübün kapsamlı eğitim programına katılma ve devamında bu özel kulübe antrenör olmaya hak kazanmıştır.

6. ESNEK KARTEZYEN-ÇARPIM

Esnek kümeler literatüründe, esnek kartezyen-çarpım için şimdiye kadar iki farklı tanım yer almaktadır. İlk tanımı 2010 yılında Babitha ve Sunil (2010) önerirken, ikinci tanımı 2015 yılında Qin, Liu ve Xu (2015), Babitha ve Sunil'in (2010) tanımını genişleterek sunmuştur. Bu tanımlar kronolojik sırayla verilmektedir. Bu bölümde, esnek kartezyen-çarpımın cebirsel özellikleri ayrıntılı şekilde sunulmuş, dağılıma kuralları araştırılmış, bu çarpım karar verme problemlerine uygulanmıştır.

6.1. Esnek Kartezyen-Çarpım ve Özellikleri

Bu alt bölümde, esnek kartezyen-çarpım tanıtılmış, belirli türdeki esnek alt kümeler ve esnek eşitlikler bağlamında cebirsel özellikleri detaylı olarak incelenmiştir.

6.1.1. Tanım $(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$, U kümesi üzerinde birer esnek küme olsun. $(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$ esnek kümelerinin kartezyen-çarpımı, $U \times U$ üzerinde tanımlı bir esnek kümedir ve

$$(\mathcal{O}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathcal{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}),$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $\mathcal{O} : \mathcal{M} \times \mathcal{D} \rightarrow P(U \times U)$ fonksiyonu her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için,

$$\mathcal{O}(m, d) = \mathcal{O}(m) \times \check{Y}(d)$$

olarak verilmiştir (Babitha ve Sunil, 2010).

6.1.2. Tanım $(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$, sırasıyla U ve V kümesi üzerinde birer esnek küme olsun. $(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$ esnek kümelerinin kartezyen-çarpımı, $U \times V$ üzerinde tanımlı bir esnek kümedir ve

$$(\mathcal{O}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathcal{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}),$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $\mathcal{O} : \mathcal{M} \times \mathcal{D} \rightarrow P(U \times V)$ fonksiyonu her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için,

$$\mathcal{O}(m, d) = \mathcal{O}(m) \times \mathcal{Y}(d)$$

olarak verilmiştir (Qin ve diğerleri, 2015).

Babitha ve Sunil (2010) tanımında, $(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ ve $(\mathcal{Y}, \mathcal{D})$ esnek kümelerinin parametre kümeleri olan $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{D}$ 'nin, aynı parametre kümesi E'nin alt kümesi olma zorunluluğu yoktur. Ancak, her iki esnek küme de aynı evrensel kümesi U üzerinde tanımlı olması gerekir. Qin ve diğerleri (2015), Babitha ve Sunil (2010) tarafından tanımlanan esnek kümelerin kartezyen-çarpım kavramını değiştirmiş ve esnek küme ilişkileri, esnek küme fonksiyonları ve değiştirilmiş kartezyen-çarpım tanımlarına ilişkin bazı ilgili kavramları incelemiştir. Qin ve diğerleri (2015) tarafından yapılan tanımda, esnek kümelerin farklı evrenler üzerinde tanımlandığı görülmektedir. Ancak, esnek kümelerin parametre kümelerinin aynı parametre kümesi E'nin alt kümesi olması gerekmez.

Bundan sonra, "esnek kümelerin kartezyen-çarpımı" yerine, daha anlaşılır olması için "esnek kartezyen-çarpımı" terimini kullanılması tercih edilecektir.

Bu alt bölümde, Babitha ve Sunil (2010) tarafından tanımlanan esnek kümelerin kartezyen-çarpımının tüm özellikleri incelenecektir.

6.1.3. *Örnek* $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi, $\mathcal{M} = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve $\mathcal{D} = \{e_1, e_4, e_5\}$, E parametre kümesinin iki alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evrensel küme olmak üzere, U üzerinde $(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ ve $(\mathcal{Y}, \mathcal{D})$ esnek kümeleri,

$$(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \{(e_1, \{h_1, h_5\}), (e_2, \{h_2\}), (e_3, \emptyset)\}$$

$$(\mathcal{Y}, \mathcal{D}) = \{(e_1, \emptyset), (e_4, \{h_2, h_4\}), (e_5, \{h_2\})\}$$

olarak tanımlanan iki esnek küme ve $(\mathcal{O}, \mathcal{M}) \times (\mathcal{Y}, \mathcal{D}) = (\mathcal{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} & (\mathcal{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) \\ &= \{((e_1, e_1), \emptyset), ((e_1, e_4), \{(h_1, h_2), (h_1, h_4), (h_5, h_2), (h_5, h_4)\}), \\ & ((e_1, e_5), \{(h_1, h_2), (h_5, h_2)\}), ((e_2, e_1), \emptyset), ((e_2, e_4), \{(h_2, h_2), (h_2, h_4)\}), \end{aligned}$$

$$((e_2, e_5), \{(h_2, h_2)\}), ((e_3, e_1), \emptyset), ((e_3, e_4), \emptyset), ((e_3, e_5), \emptyset)\}$$

şeklindedir.

6.1.4. Önerme $\tilde{\times}$, $S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalı değildir.

İspat: $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere,

$$\tilde{\times}: S_E(U) \times S_E(U) \rightarrow S_E(U \times U)$$

$$((\mathfrak{O}, \mathcal{M}), (\check{Y}, \mathcal{D})) \rightarrow (\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{J})$$

olup, buradan $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})$ U üzerinde bir esnek küme değildir, $U \times U$ üzerinde tanımlıdır.

6.1.5. Önerme $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$, $(\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})$, U kümesi üzerinde birer esnek küme olmak üzere,

$$(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\times} [(\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})] \neq_M [(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D})] \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})$$

olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $\tilde{\times}$ -çarpımı birleşme özelliğine sahip değildir.

İspat: Eşitsizliğin sol tarafının parametre kümesi $\mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J})$, sağ tarafının parametre kümesi $(\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times \mathcal{J}$ olup, $\mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J})$ ile $(\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times \mathcal{J}$ birbirinden farklıdır ve dolayısıyla bu iki ifade, esnek M-eşitliği (veya esnek F-eşitliği) altında esnek eşitlik olarak kabul edilemez. Ayrıca,

$$(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\times} [(\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})] \neq_L [(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D})] \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})$$

$$(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\times} [(\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})] \neq_J [(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D})] \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})$$

6.1.6. Önerme $(\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olmak üzere, $(\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) \neq_M (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D})$ olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{\times}$ -çarpımı M-eşitliği altında değişme özelliğine sahip değildir.

İspat: $(\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathcal{Q}, \mathcal{J}) = (\mathcal{O}, \mathcal{D} \times \mathcal{J})$ ve $(\mathcal{Q}, \mathcal{J}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathcal{X}, \mathcal{J} \times \mathcal{D})$ olsun. $\mathcal{D} \times \mathcal{J} \neq \mathcal{J} \times \mathcal{D}$ olduğundan, ispatın kalanı açıktır.

6.1.7. Önerme $(\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathcal{Q}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olmak üzere, $(\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathcal{Q}, \mathcal{D}) \neq_M (\mathcal{Q}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D})$ olup, $S_{\mathcal{D}}(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{\times}$ -çarpımı M -eşitliği altında değişme özelliğine sahip değildir.

İspat: $S_{\mathcal{D}}(U)$ kümesi üzerinde $\tilde{\times}$ -çarpımı M -eşitliği altında değişme özelliğine sahip olmadığını göstermek için bir örnek verelim. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi, $\mathcal{D} = \{e_3, e_5\}$ E parametre kümesinin alt kümesi, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme olmak üzere, U üzerinde $(\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathcal{Q}, \mathcal{D})$ esnek kümeleri,

$$(\check{Y}, \mathcal{D}) = \{(e_3, \{h_1, h_2\}), (e_5, \emptyset)\}, (\mathcal{Q}, \mathcal{D}) = \{(e_3, \{h_5\}), (e_5, \emptyset)\}$$

olarak tanımlansın. İlk olarak eşitsizliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathcal{Q}, \mathcal{D}) = (\mathcal{O}, \mathcal{D} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan,

$$(\mathcal{O}, \mathcal{D} \times \mathcal{D}) = \{((e_3, e_3), \{(h_1, h_5), (h_2, h_5)\}), ((e_3, e_5), \emptyset), ((e_5, e_3), \emptyset), ((e_5, e_5), \emptyset)\}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafından devam edilecek olursa, $(\mathcal{Q}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathcal{X}, \mathcal{D} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan,

$$(\mathcal{X}, \mathcal{D} \times \mathcal{D}) = \{((e_3, e_3), \{(h_5, h_1), (h_5, h_2)\}), ((e_3, e_5), \emptyset), ((e_5, e_3), \emptyset), ((e_5, e_5), \emptyset)\}$$

elde edilir. Böylece, $(\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathcal{Q}, \mathcal{D})$ ve $(\mathcal{Q}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D})$ ifadelerinin M -eşitliği altında birbirine eşit olmadığı gösterilmiştir, yani $(\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathcal{Q}, \mathcal{D}) \neq_M (\mathcal{Q}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D})$ sağlanmaktadır.

6.1.8. Önerme $(\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathcal{Q}, \mathcal{J})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan, $(\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathcal{Q}, \mathcal{J}) =_M (\mathcal{Q}, \mathcal{J}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D})$ olması için gerek ve yeter şart $(\check{Y}, \mathcal{D}) =_M (\mathcal{Q}, \mathcal{J})$ veya $[(\check{Y}, \mathcal{D}) =_M \emptyset_\emptyset$ veya $(\mathcal{Q}, \mathcal{J}) =_M \emptyset_\emptyset]$ sağlanmasıdır.

İspat: $(\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathcal{Q}, \mathcal{J}) =_{\mathbf{M}} (\mathcal{Q}, \mathcal{J}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D})$ olsun. Buradan, $\mathcal{D} \times \mathcal{J} = \mathcal{J} \times \mathcal{D}$ olduğu yorumu yapılır bu da $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ olduğu ya da $[\mathcal{D} = \emptyset \text{ veya } \mathcal{J} = \emptyset]$ olduğu anlamına gelir.

- i. $\mathcal{D} = \emptyset$ veya $\mathcal{J} = \emptyset$ olsun. Buradan, parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_{\emptyset}$ 'dir. Bu durumda, $(\check{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathbf{M}} \emptyset_{\emptyset}$ veya $(\mathcal{Q}, \mathcal{J}) =_{\mathbf{M}} \emptyset_{\emptyset}$ olur.
- ii. $\mathcal{D} = \mathcal{J}$, $(\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathcal{Q}, \mathcal{D}) = (\mathcal{U}, \mathcal{D} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathcal{Q}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathcal{Z}, \mathcal{D} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan her $(d, j) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ için, $\mathcal{U}(d, j) = \check{Y}(d) \times \mathcal{Q}(j)$ ve $\mathcal{Z}(d, j) = \mathcal{Q}(d) \times \check{Y}(j)$. Varsayıma göre, $(\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathcal{Q}, \mathcal{D}) =_{\mathbf{M}} (\mathcal{Q}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D})$ olsun. Böylece, her $(d, j) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ için, $\check{Y}(d) \times \mathcal{Q}(j) = \mathcal{Q}(d) \times \check{Y}(j)$. Burada, d ve j 'nin $\mathcal{D}$ kümesinin rastgele elemanları olduğunu göz önünde bulundurursak ve kartezyen çarpımın değişmeli olmadığını bildiğimizden, her $(d, j) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ için, $\check{Y}(d) \times \mathcal{Q}(j) = \mathcal{Q}(d) \times \check{Y}(j)$ olması, $\check{Y}(d) = \mathcal{Q}(d)$ için, her $d \in \mathcal{D}$ ifadesinin geçerli olmasını gösterir. Sonuç olarak, $(\check{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathbf{M}} (\mathcal{Q}, \mathcal{J})$ elde edilir.

Tersine, $(\check{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathbf{M}} (\mathcal{Q}, \mathcal{J})$ veya $[(\check{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathbf{M}} \emptyset_{\emptyset} \text{ veya } (\mathcal{Q}, \mathcal{J}) =_{\mathbf{M}} \emptyset_{\emptyset}]$ olsun.

- i. $(\check{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathbf{M}} (\mathcal{Q}, \mathcal{J})$ olsun. Buradan, $(\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathcal{Q}, \mathcal{J}) =_{\mathbf{M}} (\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathcal{Q}, \mathcal{J}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D}) = (\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D})$.
- ii. $(\check{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathbf{M}} \emptyset_{\emptyset}$ veya $(\mathcal{Q}, \mathcal{J}) =_{\mathbf{M}} \emptyset_{\emptyset}$ olsun. Eğer, $(\check{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathbf{M}} \emptyset_{\emptyset}$ ise buradan, $\mathcal{D} = \emptyset$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathcal{Q}, \mathcal{J}) =_{\mathbf{M}} (\check{Y}, \emptyset) \tilde{\times} (\mathcal{Q}, \mathcal{J}) = \emptyset_{\emptyset}$, $(\mathcal{Q}, \mathcal{J}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathbf{M}} (\mathcal{Q}, \mathcal{J}) \tilde{\times} (\check{Y}, \emptyset) = \emptyset_{\emptyset}$ elde edilir.

6.1.9. Önerme $(\check{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış bir esnek küme olmak üzere, $(\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} \emptyset_{\emptyset} =_{\mathbf{M}} \emptyset_{\emptyset} \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathbf{M}} \emptyset_{\emptyset}$ olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $\times$ -çarpımının M-eşitliğe göre yutan elemanı boş esnek kümedir.

İspat: $\emptyset_{\emptyset} = (\mathcal{U}, \emptyset)$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} \emptyset_{\emptyset} = (\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathcal{U}, \emptyset) = (\mathcal{Q}, \mathcal{D} \times \emptyset) = (\mathcal{Q}, \emptyset)$ olsun. Parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_{\emptyset}$ olduğundan, $(\mathcal{Q}, \emptyset) = \emptyset_{\emptyset}$ elde edilir. Böylece, $\emptyset_{\emptyset} \times (\check{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathbf{M}} \emptyset_{\emptyset}$ olduğunun ispatı benzer şekilde gösterilir.

6.1.10. Önerme $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$, U üzerinde tanımlanmış bir esnek küme olmak üzere, $\emptyset_{\mathcal{M}} \tilde{\times} (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) =_L (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} \emptyset_{\mathcal{M}} =_L \emptyset_{\mathcal{M}}$ olup, $S_{\mathcal{M}}(U)$ kümesi üzerinde, $\times$ -çarpımının L -eşitliğe göre yutan elemanı $\emptyset_{\mathcal{M}}$ olur.

İspat: $\emptyset_{\mathcal{M}} = (\emptyset, \mathcal{M})$ ve $(\emptyset, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{M})$ olsun. Buradan, her $m \in \mathcal{M}$ için, $\emptyset(m) = \emptyset$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{Z}(m, d) = \emptyset(m) \times \mathfrak{T}(d) = \emptyset \times \mathfrak{T}(d) = \emptyset$. Böylece, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ için, $m \in \mathcal{M}$ olacak şekilde $\mathfrak{Z}(m, d) = \emptyset = \emptyset(m)$. Buradan, $\emptyset_{\mathcal{M}} \tilde{\times} (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \subseteq_L \emptyset_{\mathcal{M}}$ ilişkisinin sağlandığı gösterilmektedir. Ayrıca, her $m \in \mathcal{M}$ için, $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ olacak şekilde $\emptyset(m) = \emptyset = \mathfrak{Z}(m, d)$. Buradan, $\emptyset_{\mathcal{M}} \subseteq_L \emptyset_{\mathcal{M}} \tilde{\times} (\mathfrak{T}, \mathcal{M})$ ilişkisinin sağlandığı gösterilmektedir. Böylece, $\emptyset_{\mathcal{M}} \tilde{\times} (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) =_L \emptyset_{\mathcal{M}}$ olduğu sonucuna varılır.

Benzer şekilde, $\emptyset_{\mathcal{M}} \tilde{\times} (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) =_L \emptyset_{\mathcal{M}}$ olduğu da ispat edilir.

6.1.11. Önerme $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$, U üzerinde tanımlanmış bir esnek küme olmak üzere, $\emptyset_E \tilde{\times} (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) =_L \emptyset_E \tilde{\times} (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) =_L \emptyset_E$ olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, $\times$ -çarpımının L -eşitliğe göre soldan yutan elemanı $\emptyset_E$ olur.

İspat: $\emptyset_E = (\emptyset, E)$ ve $(\emptyset, E) \tilde{\times} (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) = (\mathfrak{Z}, E \times \mathcal{M})$ olsun. Buradan, her $e \in E$ için, $\emptyset(e) = \emptyset$ ve her $(e, m) \in E \times \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{Z}(e, m) = \emptyset(e) \times \mathfrak{T}(m) = \emptyset \times \mathfrak{T}(m) = \emptyset$. Böylece, her $(e, m) \in E \times \mathcal{M}$ için, $e \in E$ olacak şekilde $\mathfrak{Z}(e, m) = \emptyset = \emptyset(e)$. Buradan, $\emptyset_E \times (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \subseteq_L \emptyset_E$ ilişkisinin sağlandığı gösterilmektedir. Ayrıca, her $e \in E$ için, $(e, m) \in E \times \mathcal{M}$ olacak şekilde $\emptyset(e) = \emptyset = \mathfrak{Z}(e, m)$. Buradan, $\emptyset_E \subseteq_L \emptyset_E \times (\mathfrak{T}, \mathcal{M})$ ilişkisinin sağlandığı gösterilmektedir. Böylece, $\emptyset_E \tilde{\times} (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) =_L \emptyset_E$ olduğu sonucuna varılır. Benzer şekilde, $\emptyset_E \tilde{\times} (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) =_L \emptyset_E$ olduğu da ispat edilir.

6.1.12. Önerme $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış bir esnek küme olsun. Buradan, $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} \emptyset_{\mathcal{D}} =_M \emptyset_{\mathcal{D}} \tilde{\times} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) =_M \emptyset_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}$.

İspat: $\emptyset_{\mathcal{D}} = (\varnothing, \mathcal{D})$ olsun. Böylece, her $d \in \mathcal{D}$ için, $\varnothing(d) = \emptyset$. $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} \emptyset_{\mathcal{D}} = (\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\varnothing, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times \mathcal{D})$ olsun. Böylece, her $(d, m) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{Q}(d, m) = \ddot{Y}(d) \times \emptyset = \emptyset$. Buradan, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times \mathcal{D}) = \emptyset_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}$ olduğu görülmektedir. Benzer şekilde,

$\emptyset_{\mathcal{D}} \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D}) = (\varnothing, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D}) = (\emptyset, \mathcal{D} \times \mathcal{D})$ olsun. Böylece, her $(d, m) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ için, $\emptyset(d, m) = \varnothing(d) \times \emptyset = \emptyset$. Buradan, $(\emptyset, \mathcal{D} \times \mathcal{D}) = \emptyset_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}$ olduğu görülmektedir.

6.1.13. Önerme $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$, $(\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\emptyset, \mathcal{J})$, $\mathcal{U}$ üzerinde tanımlanmış birer esnek kümeler olsun. Eğer, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_F (\check{Y}, \mathcal{D})$ ise, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\emptyset, \mathcal{J}) \tilde{\subseteq}_F (\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\emptyset, \mathcal{J})$ ve $(\emptyset, \mathcal{J}) \tilde{\times} (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_F (\emptyset, \mathcal{J}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D})$.

İspat: $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_F (\check{Y}, \mathcal{D})$ olsun. Buradan, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$ ve her $m \in \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{G}(m) \subseteq \check{Y}(m)$. Böylece, $\mathcal{M} \times \mathcal{J} \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{J}$ ve her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{G}(m) \times \emptyset(j) \subseteq \check{Y}(m) \times \emptyset(j)$ ispatı elde edilir. Benzer şekilde, $\mathcal{J} \times \mathcal{M} \subseteq \mathcal{J} \times \mathcal{D}$ olduğu da ispat edilir.

Klasik küme teorisinde, $\mathcal{M} \times \mathcal{J} \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{J}$ olması $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$ olduğu anlamına gelmez. Ancak eğer, $\mathcal{M} \times \mathcal{J} \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{J}$ ve $\mathcal{J} \neq \emptyset$ ise, o zaman $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$ olur.

6.1.14. Önerme $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$, $(\check{Y}, \mathcal{D})$, $(\emptyset, \mathcal{J})$ ve $(\varnothing, \mathfrak{X})$, $\mathcal{U}$ üzerinde tanımlanmış birer esnek kümeler olsun. Eğer, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\emptyset, \mathcal{J}) \tilde{\subseteq}_F (\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\emptyset, \mathcal{J})$ ve $(\emptyset, \mathcal{J}) \neq_{\mathcal{M}} \emptyset_{\emptyset}$ ise, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_F (\check{Y}, \mathcal{D})$.

İspat: $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\emptyset, \mathcal{J}) \tilde{\subseteq}_F (\check{Y}, \mathcal{D}) \times (\emptyset, \mathcal{J})$ olsun. Buradan, $\mathcal{M} \times \mathcal{J} \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{J}$. Ayrıca, $(\emptyset, \mathcal{J}) \neq_{\mathcal{M}} \emptyset_{\emptyset}$ olduğu için, $\mathcal{J} \neq \emptyset$ 'dir. Dolayısıyla, $\mathcal{M} \times \mathcal{J} \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{J}$ ifadesinden $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$ sonucu elde edilir. Böylece, esnek F-altküme olma koşullarından ilki sağlanmış olur. $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\emptyset, \mathcal{J}) = (\varnothing, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ şeklinde tanımlansın. Buradan, her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için, $\varnothing(m, j) = \mathfrak{G}(m) \times \emptyset(j)$ ifadesi geçerlidir. $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$ olduğundan, $m \in \mathcal{M}$ ise $m \in \mathcal{D}$ de olur.

Benzer şekilde, $(\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\emptyset, \mathcal{J}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olarak tanımlandığında, $\mathfrak{Z}(m, j) = \check{Y}(m) \times \emptyset(j)$. Varsayıma göre, $(\varnothing, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{Z}, \mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olduğundan, her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için $\varnothing(m, j) \subseteq \mathfrak{Z}(m, j)$ sağlanır. Böylece, her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{G}(m) \times \emptyset(j) \subseteq \check{Y}(m) \times \emptyset(j)$ sonucuna ulaşılır. Burada, $(\emptyset, \mathcal{J}) \neq_{\mathcal{M}} \emptyset_{\mathcal{J}}$ olduğundan, her $j \in \mathcal{J}$ için, $\emptyset(j) \neq \emptyset$. Böylece, her $m \in \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{G}(m) \subseteq \check{Y}(m)$. Buradan, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_F (\check{Y}, \mathcal{D})$ ispatı elde edilir.

6.1.15. Önerme $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$, $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathfrak{X})$, $\mathcal{U}$ üzerinde tanımlanmış birer esnek kümeler olsun. $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \subseteq_F (\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J}) \subseteq_F (\mathfrak{O}, \mathfrak{X})$ ise, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \times (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) \subseteq_F (\ddot{Y}, \mathcal{D}) \times (\mathfrak{O}, \mathfrak{X})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J}) \times (\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \subseteq_F (\mathfrak{O}, \mathfrak{X}) \times (\ddot{Y}, \mathcal{D})$.

İspat: $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \subseteq_F (\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J}) \subseteq_F (\mathfrak{O}, \mathfrak{X})$ olsun. Buradan, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$ ve $\mathcal{J} \subseteq \mathfrak{X}$. Ayrıca her $m \in \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{O}(m) \subseteq \ddot{Y}(m)$ ve her $j \in \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{O}(j) \subseteq \mathfrak{O}(j)$. Böylece, $\mathcal{M} \times \mathcal{J} \subseteq \mathcal{D} \times \mathfrak{X}$ ve her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{O}(m) \times \mathfrak{O}(j) \subseteq \ddot{Y}(m) \times \mathfrak{O}(j)$ olup ispat elde edilir.

Klasik küme teorisinde, $(\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{J} \times \mathfrak{X}) = (\mathcal{M} \cap \mathcal{J}) \times (\mathcal{D} \cap \mathfrak{X})$ eşitliği sağlanmaktadır.

6.1.16. Önerme $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$, $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathfrak{X})$, $\mathcal{U}$ üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan,

$$[(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \times (\ddot{Y}, \mathcal{D})] \cap_R [(\mathfrak{O}, \mathcal{J}) \times (\mathfrak{O}, \mathfrak{X})] = [(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \cap_R (\mathfrak{O}, \mathcal{J})] \times [(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \cap_R (\mathfrak{O}, \mathfrak{X})]$$

İspat: Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $(\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{J} \times \mathfrak{X})$ ve sağ tarafının parametre kümesi $(\mathcal{M} \cap \mathcal{J}) \times (\mathcal{D} \cap \mathfrak{X})$. Buradan, $(\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{J} \times \mathfrak{X}) = (\mathcal{M} \cap \mathcal{J}) \times (\mathcal{D} \cap \mathfrak{X})$ olup, esnek M-eşitlik için ilk koşul sağlanmış olur.

$t \in \mathcal{M} \cap \mathcal{J}$ ve $f \in \mathcal{D} \cap \mathfrak{X}$ olsun. Bu durumda, $t \in \mathcal{M}$, $t \in \mathcal{J}$, $f \in \mathcal{D}$ ve $f \in \mathfrak{X}$ olur. Buradan, $(t, f) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ ve $(t, f) \in \mathcal{D} \cap \mathfrak{X}$. $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \times (\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J}) \times (\mathfrak{O}, \mathfrak{X}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{J} \times \mathfrak{X})$ olsun. Buradan, her $(t, f) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ ve her $(t, f) \in \mathcal{J} \times \mathfrak{X}$ için, $\mathfrak{F}(t, f) = \mathfrak{O}(t) \times \ddot{Y}(f)$ ve $\mathfrak{Z}(t, f) = \mathfrak{O}(t) \times \mathfrak{O}(f)$. $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap_R (\mathfrak{Z}, \mathcal{J} \times \mathfrak{X}) = (\mathfrak{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{J} \times \mathfrak{X}))$ olsun. Buradan, her $(t, f) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ ve her $(t, f) \in \mathcal{J} \times \mathfrak{X}$ için, $\mathfrak{Q}(t, f) = \mathfrak{F}(t, f) \cap \mathfrak{Z}(t, f)$. Böylece, $\mathfrak{Q}(t, f) = \mathfrak{F}(t, f) \cap \mathfrak{Z}(t, f) = [\mathfrak{O}(t) \times \ddot{Y}(f)] \cap [\mathfrak{O}(t) \times \mathfrak{O}(f)]$.

$(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \cap_R (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{S}, \mathcal{M} \cap \mathcal{J})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \cap_R (\mathfrak{O}, \mathfrak{X}) = (\mathfrak{S}, \mathcal{D} \cap \mathfrak{X})$ olsun. Buradan, her $t \in \mathcal{M} \cap \mathcal{J}$ ve her $f \in \mathcal{D} \cap \mathfrak{X}$ için, $\mathfrak{S}(t) = \mathfrak{O}(t) \cap \mathfrak{O}(t)$ ve $\mathfrak{S}(f) = \ddot{Y}(f) \cap \mathfrak{O}(f)$. $(\mathfrak{S}, \mathcal{M} \cap \mathcal{J}) \times (\mathfrak{S}, \mathcal{D} \cap \mathfrak{X}) = (\mathcal{W}, (\mathcal{M} \cap \mathcal{J}) \times (\mathcal{D} \cap \mathfrak{X}))$ olsun. Buradan, her $(t, f) \in (\mathcal{M} \cap \mathcal{J}) \times (\mathcal{D} \cap \mathfrak{X})$ için, $\mathcal{W}(t, f) = \mathfrak{S}(t) \times \mathfrak{S}(f)$. Böylece, $\mathcal{W}(t, f) = \mathfrak{S}(t) \times \mathfrak{S}(f) = [\mathfrak{O}(t) \cap \mathfrak{O}(t)] \times [\ddot{Y}(f) \cap \mathfrak{O}(f)]$ olup, ispat elde edilir.

6.1.17. Önerme $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan, $\emptyset_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}} \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ve $\emptyset_{\mathcal{D} \times \mathcal{M}} \tilde{\subseteq}_F (\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathfrak{G}, \mathcal{M})$.

İspat: $\emptyset_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}} = (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{O}(m, d) = \emptyset$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{Z}(m, d) = \mathfrak{G}(m) \times \ddot{Y}(d)$. Böylece, $\mathcal{M} \times \mathcal{D} \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{O}(m, d) = \emptyset \subseteq \mathfrak{G}(m) \times \ddot{Y}(d) = \mathfrak{Z}(m, d)$ olup, $\emptyset_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}} \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\ddot{Y}, \mathcal{D})$ olduğu ispatı elde edilir. Benzer şekilde, $\emptyset_{\mathcal{D} \times \mathcal{M}} \tilde{\subseteq}_F (\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ olduğu da gösterilir.

6.1.18. Önerme $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan, $\emptyset_{\mathcal{M}} \tilde{\subseteq}_J (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\ddot{Y}, \mathcal{D})$, $\emptyset_{\mathcal{D}} \tilde{\subseteq}_J (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ve $\emptyset_E \tilde{\subseteq}_J (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\ddot{Y}, \mathcal{D})$.

İspat: $\emptyset_{\mathcal{M}} = (\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan her $m \in \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{O}(m) = \emptyset$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{Z}(m, d) = \mathfrak{G}(m) \times \ddot{Y}(d)$. Böylece, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\emptyset \subseteq \mathfrak{G}(m) \times \ddot{Y}(d) = \mathfrak{Z}(m, d)$ olup $\emptyset_{\mathcal{M}} \tilde{\subseteq}_J (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ispatı elde edilir. Benzer şekilde $\emptyset_{\mathcal{D}} \tilde{\subseteq}_J (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ve $\emptyset_E \tilde{\subseteq}_J (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\ddot{Y}, \mathcal{D})$ olduğu da gösterilir.

6.1.19. Önerme $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\subseteq}_F U_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}}$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_F U_{\mathcal{D} \times \mathcal{M}}$.

İspat: $U_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}} = (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{O}(m, d) = U$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{Z}(m, d) = \mathfrak{G}(m) \times \ddot{Y}(d)$. Böylece, $\mathcal{M} \times \mathcal{D} \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{Z}(m, d) = \mathfrak{G}(m) \times \ddot{Y}(d) \subseteq U$ olup $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\subseteq}_F U_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}}$ olduğu ispatı elde edilir. Benzer şekilde, $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\subseteq}_F U_{\mathcal{D} \times \mathcal{M}}$ olduğu da ispat edilir.

6.1.20. Önerme $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\subseteq}_J U_{\mathcal{M}}$ ve $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\subseteq}_J U_{\mathcal{D}}$.

İspat: $U_{\mathcal{M}} = (\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $m \in \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{O}(m) = U$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{Z}(m, d) = \mathfrak{G}(m) \times \ddot{Y}(d)$. Böylece, her

$(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{E}(m, d) = \mathfrak{T}(m) \times \mathfrak{Y}(d) \subseteq U$ olup $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\subseteq}_J U_{\mathcal{M}}$ olduğu ispatı elde edilir. Benzer şekilde, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\subseteq}_J U_{\mathcal{D}}$ olduğu da ispat edilir.

6.1.21. Önerme $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$ ve $(\mathfrak{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}}$ ancak ve ancak $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\mathcal{M}}$ veya $(\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\mathcal{D}}$ olduğunda geçerlidir.

İspat: $U_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}} = (\mathfrak{U}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{D}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{U}(m, d) = \emptyset$ ve her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{D}(m, d) = \mathfrak{T}(m) \times \mathfrak{Y}(d)$. $(\mathfrak{U}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) = (\mathfrak{D}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{T}(m) \times \mathfrak{Y}(d) = \emptyset$. Buradan her $m \in \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{T}(m) = \emptyset$ veya her $d \in \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{Y}(d) = \emptyset$. Böylece, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) = \emptyset_{\mathcal{M}}$ ve $(\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) = \emptyset_{\mathcal{D}}$.

Tersine, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\mathcal{M}}$ veya $(\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\mathcal{D}}$ olsun. Buradan $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\mathcal{M}}$ olarak kabul edelim. Buradan her $m \in \mathcal{M}$ için, $\mathfrak{T}(m) = \emptyset$. Dolayısıyla, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{D}(m, d) = \mathfrak{T}(m) \times \mathfrak{Y}(d) = \emptyset \times \mathfrak{Y}(d) = \emptyset$ olup, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\mathcal{M} \times \mathcal{D}}$ ispatı elde edilir.

6.1.22. Önerme $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$ ve $(\mathfrak{Y}, \mathcal{D})$, U üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. Buradan, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\emptyset}$ ancak ve ancak, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\emptyset}$ veya $(\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\emptyset}$ olduğunda geçerlidir.

İspat: $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\emptyset}$ olsun. Buradan, $\mathcal{M} \times \mathcal{D} = \emptyset$ için, $\mathcal{M} = \emptyset$ veya $\mathcal{D} = \emptyset$ olmalıdır. Parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_{\emptyset}$ 'dir. Böylece, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\emptyset}$ veya $(\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\emptyset}$.

Tersine, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\emptyset}$ veya $(\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\emptyset}$ olsun. Buradan, $\mathcal{M} = \emptyset$ veya $\mathcal{D} = \emptyset$ için, $\mathcal{M} \times \mathcal{D} = \emptyset$ ve $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\emptyset}$ olduğu ispatı elde edilir.

6.2. Esnek Kartezyen-Çarpım ve Dağılımları

Bu bölümde, esnek kartezyen-çarpımının kısıtlanmış esnek küme işlemleri, genişletilmiş esnek küme işlemleri, esnek ikili parçalı küme işlemleri, VE-çarpımı ve VEYA-çarpımı

üzerindeki dağılımları ve esnek çarpımların esnek çarpımlar ile alt küme olma durumu ayrıntılı bir şekilde incelenecektir.

6.2.1. Teorem $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$, $(\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})$, U üzerinde birer esnek küme olmak üzere,

$$i) (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} [(\check{Y}, \mathcal{D}) \cup_R (\mathfrak{O}, \mathcal{J})] =_M [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D})] \cup_R [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})]$$

$$ii) (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} [(\check{Y}, \mathcal{D}) \cap_R (\mathfrak{O}, \mathcal{J})] =_M [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D})] \cap_R [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})]$$

$$iii) (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} [(\check{Y}, \mathcal{D}) \setminus_R (\mathfrak{O}, \mathcal{J})] =_M [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D})] \setminus_R [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})]$$

$$iv) [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \cap_R (\check{Y}, \mathcal{D})] \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) =_M [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})] \cap_R [(\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})]$$

$$v) [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \cup_R (\check{Y}, \mathcal{D})] \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) =_M [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})] \cup_R [(\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})]$$

$$vi) [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \setminus_R (\check{Y}, \mathcal{D})] \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) =_M [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})] \setminus_R [(\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})]$$

İspat: (i) Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $\mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J})$, sağ tarafının parametre kümesi $(\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olup, $\mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J}) = (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\check{Y}, \mathcal{D}) \cup_R (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{D} \cap \mathcal{J})$ olsun. Buradan, her $\varphi \in \mathcal{D} \cap \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{X}(\varphi) = \check{Y}(\varphi) \cup \mathfrak{O}(\varphi)$. $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{X}, \mathcal{D} \cap \mathcal{J}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J}))$ olsun. Buradan, her $(m, \varphi) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J})$ için, $\mathfrak{Z}(m, \varphi) = \mathfrak{G}(m) \times \mathfrak{X}(\varphi)$. O halde,

$$\mathfrak{Z}(m, \varphi) = \mathfrak{G}(m) \times [\check{Y}(\varphi) \cup \mathfrak{O}(\varphi)]$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olsun. O halde, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) = \mathfrak{G}(m) \times \check{Y}(d)$ ve her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \mathfrak{G}(m) \times \mathfrak{O}(j)$. Buradan, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap_R (\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{O}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}))$ olsun. Böylece, her $(m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J})$ için,

$$\mathfrak{O}(m, \varphi) = \mathfrak{F}(m, \varphi) \cup \mathfrak{Q}(m, \varphi) = [\mathfrak{G}(m) \times \check{Y}(\varphi)] \cup [\mathfrak{G}(m) \times \mathfrak{O}(\varphi)]$$

Böylece, ispat elde edilir. Burada, $\mathcal{D} \cap \mathcal{J} = \emptyset$ ise, $\mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J}) = (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \emptyset$ olup, parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_\emptyset$ olduğundan, her iki tarafı da $\emptyset_\emptyset$ olur. $\mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J}) = (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olduğundan, $(\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \emptyset$ ise, $\mathcal{M} = \emptyset$ veya $\mathcal{D} \cap \mathcal{J} = \emptyset$ olmalıdır. Kabul gereği, $\mathcal{M} \neq \emptyset$ olup, $(\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \emptyset$ olması $\mathcal{D} \cap \mathcal{J} = \emptyset$ olmasını gerektirdiğinden, bu durumda da yine eşitliğin her iki tarafı $\emptyset_\emptyset$ olur.

(iv) Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $(\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times \mathcal{J}$, sağ tarafının parametre kümesi $(\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olup, $(\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times \mathcal{J} = (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \cap_R (\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{M} \cap \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $\varphi \in \mathcal{M} \cap \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{X}(\varphi) = \mathfrak{T}(\varphi) \cap \mathfrak{Y}(\varphi)$. $(\mathfrak{X}, \mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{Z}, (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan, her $(\varphi, j) \in (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{Z}(\varphi, j) = \mathfrak{X}(\varphi) \times \mathfrak{O}(j)$. O halde,

$$\mathfrak{Z}(\varphi, j) = [\mathfrak{T}(\varphi) \cap \mathfrak{Y}(\varphi)] \times \mathfrak{O}(j)$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ ve $(\mathfrak{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan, her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \mathfrak{T}(m) \times \mathfrak{O}(j)$ ve her $(d, j) \in \mathcal{D} \times \mathcal{J}$ için, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = \mathfrak{Y}(d) \times \mathfrak{O}(j)$. Buradan, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cup_R (\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{S}, (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J}))$ olsun. Böylece, her $(\varphi, j) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J})$ için,

$$\mathfrak{S}(\varphi, j) = \mathfrak{F}(\varphi, j) \cap \mathfrak{Q}(\varphi, j) = [\mathfrak{T}(\varphi) \times \mathfrak{O}(j)] \cap [\mathfrak{Y}(\varphi) \times \mathfrak{O}(j)]$$

Böylece, ispat elde edilir. Buradan, eğer $\mathcal{M} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ ise, $(\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times \mathcal{J} = (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) = \emptyset$ olup, parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_\emptyset$ olduğundan, her iki tarafta $\emptyset_\emptyset$ olur. $(\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) = (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times \mathcal{J}$ olduğundan, $(\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) = \emptyset$ ise, $\mathcal{M} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ veya $\mathcal{J} = \emptyset$ olmalıdır. Kabul gereği, $\mathcal{J} \neq \emptyset$ olup, $(\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) = \emptyset$ olması, $\mathcal{M} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ olmasını gerektirdiğinden, bu durumda da yine eşitliğin her iki tarafı $\emptyset_\emptyset$ olur.

6.2.2. Teorem $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$, $(\check{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{D}, \mathcal{J})$, U üzerinde birer esnek küme olmak üzere,

$$i) (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} [(\check{Y}, \mathcal{D}) \cap_{\varepsilon} (\mathfrak{D}, \mathcal{J})] =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D})] \cap_{\varepsilon} [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{D}, \mathcal{J})]$$

$$ii) (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} [(\check{Y}, \mathcal{D}) \cup_{\varepsilon} (\mathfrak{D}, \mathcal{J})] =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D})] \cup_{\varepsilon} [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{D}, \mathcal{J})]$$

$$iii) (\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} [(\check{Y}, \mathcal{D}) \setminus_{\varepsilon} (\mathfrak{D}, \mathcal{J})] =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D})] \setminus_{\varepsilon} [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{D}, \mathcal{J})]$$

$$iv) [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \cup_{\varepsilon} (\check{Y}, \mathcal{D})] \tilde{\times} (\mathfrak{D}, \mathcal{J}) =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{D}, \mathcal{J})] \cup_{\varepsilon} [(\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathfrak{D}, \mathcal{J})]$$

$$v) [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \cap_{\varepsilon} (\check{Y}, \mathcal{D})] \tilde{\times} (\mathfrak{D}, \mathcal{J}) =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{D}, \mathcal{J})] \cap_{\varepsilon} [(\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathfrak{D}, \mathcal{J})]$$

$$vi) [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \setminus_{\varepsilon} (\check{Y}, \mathcal{D})] \tilde{\times} (\mathfrak{D}, \mathcal{J}) =_{\mathcal{M}} [(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{D}, \mathcal{J})] \setminus_{\varepsilon} [(\check{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathfrak{D}, \mathcal{J})]$$

İspat: (i) Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $\mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cup \mathcal{J})$, sağ tarafının parametre kümesi $(\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cup (\mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olup, $\mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cup \mathcal{J}) = (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cup (\mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır. Ayrıca, kabul gereği $\mathcal{M} \neq \emptyset$, $\mathcal{D} \neq \emptyset$ ve $\mathcal{J} \neq \emptyset$ olduğundan, $\mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cup \mathcal{J}) \neq \emptyset$ ve $(\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cup (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \neq \emptyset$. Dolayısıyla sağ ve sol tarafın boş esnek kümeye eşit olma durumu bulunmamaktadır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\check{Y}, \mathcal{D}) \cap_{\varepsilon} (\mathfrak{D}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{D} \cup \mathcal{J})$ olsun. Buradan, her $\varphi \in \mathcal{D} \cup \mathcal{J}$ için,

$$\mathfrak{X}(\varphi) = \begin{cases} \check{Y}(\varphi), & \varphi \in \mathcal{D} - \mathcal{J} \\ \mathfrak{D}(\varphi), & \varphi \in \mathcal{J} - \mathcal{D} \\ \check{Y}(\varphi) \cap \mathfrak{D}(\varphi), & \varphi \in \mathcal{D} \cap \mathcal{J} \end{cases}$$

$(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{X}, \mathcal{D} \cup \mathcal{J}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cup \mathcal{J}))$ olsun. Buradan, her $(m, \varphi) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cup \mathcal{J})$ için, $\mathfrak{Z}(m, \varphi) = \mathfrak{G}(m) \times \mathfrak{X}(\varphi)$. O halde, her $(m, \varphi) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cup \mathcal{J})$ için,

$$\mathfrak{Z}(m, \varphi) = \begin{cases} \mathfrak{G}(m) \times \check{Y}(\varphi), & (m, \varphi) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} - \mathcal{J}) \\ \mathfrak{G}(m) \times \mathfrak{D}(\varphi), & (m, \varphi) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{J} - \mathcal{D}) \\ \mathfrak{G}(m) \times [\check{Y}(\varphi) \cap \mathfrak{D}(\varphi)], & (m, \varphi) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J}) \end{cases}$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{D}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{F}(m, d) =$

$\mathfrak{T}(m) \times \check{Y}(d)$ ve her $(m, j) \in \mathcal{M} \times J$ için $q(m, j) = \mathfrak{T}(m) \times \mathfrak{D}(j)$. Burada, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cup_{\varepsilon} (q, \mathcal{M} \times J) = (\mathfrak{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cup (\mathcal{M} \times J))$ olsun. O halde her $(m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cup (\mathcal{M} \times J) = \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cup J)$ için,

$$\mathfrak{Q}(m, \varphi) = \begin{cases} \mathfrak{F}(m, \varphi), & (m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) - (\mathcal{M} \times J) = \mathcal{M} \times (\mathcal{D} - J) \\ q(m, \varphi), & (m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times J) - (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) = \mathcal{M} \times (J - \mathcal{D}) \\ \mathfrak{F}(m, \varphi) \cap q(m, \varphi), & (m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times J) = \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap J) \end{cases}$$

Buradan,

$$\mathfrak{Q}(m, \varphi) = \begin{cases} \mathfrak{T}(m) \times \check{Y}(\varphi), & (m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) - (\mathcal{M} \times J) = \mathcal{M} \times (\mathcal{D} - J) \\ \mathfrak{T}(m) \times \mathfrak{D}(\varphi), & (m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times J) - (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) = \mathcal{M} \times (J - \mathcal{D}) \\ [\mathfrak{T}(m) \times \check{Y}(\varphi)] \cap [\mathfrak{T}(m) \times \mathfrak{D}(\varphi)], & (m, \varphi) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times J) = \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap J) \end{cases}$$

Böylece, ispat elde edilir.

(iv) Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $(\mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \times J$, sağ tarafının parametre kümesi $(\mathcal{M} \times J) \cup (\mathcal{D} \times J)$ olup, $(\mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \times J = (\mathcal{M} \times J) \cup (\mathcal{D} \times J)$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır. Ayrıca, kabul gereği $\mathcal{M} \neq \emptyset$, $\mathcal{D} \neq \emptyset$ ve $J \neq \emptyset$ olduğundan, $(\mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \times J \neq \emptyset$ ve $(\mathcal{M} \times J) \cup (\mathcal{D} \times J) \neq \emptyset$. Dolayısıyla sağ ve sol tarafın boş esnek kümeye eşit olma durumu bulunmamaktadır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \cup_{\varepsilon} (\check{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{M} \cup \mathcal{D})$ olsun.

Buradan, her $\varphi \in \mathcal{M} \cup \mathcal{D}$ için,

$$\mathfrak{X}(\varphi) = \begin{cases} \mathfrak{T}(\varphi), & \varphi \in \mathcal{M} - \mathcal{D} \\ \check{Y}(\varphi), & \varphi \in \mathcal{D} - \mathcal{M} \\ \mathfrak{T}(\varphi) \cup \check{Y}(\varphi), & \varphi \in \mathcal{M} \cap \mathcal{D} \end{cases}$$

$(\mathfrak{X}, \mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathfrak{D}, J) = (\mathfrak{Z}, (\mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \times J)$ olsun. Buradan, her $(\varphi, j) \in (\mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \times J$ için, $\mathfrak{Z}(\varphi, j) = \mathfrak{T}(m) \times \mathfrak{X}(\varphi)$. O halde, her $(\varphi, j) \in (\mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \times J$ için,

$$\mathfrak{Z}(\varphi, j) = \begin{cases} \mathfrak{T}(\varphi) \times \mathfrak{D}(j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{M} - \mathcal{D}) \times J \\ \check{Y}(\varphi) \times \mathfrak{D}(j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{D} - \mathcal{M}) \times J \\ [\mathfrak{T}(\varphi) \cup \check{Y}(\varphi)] \times \mathfrak{D}(j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times J \end{cases}$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{D}, J) = (\mathbb{F}, \mathcal{M} \times J)$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathfrak{D}, J) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times J)$ olsun. O halde, her $(m, j) \in \mathcal{M} \times J$ için, $\mathbb{F}(m, j) = \mathfrak{T}(m) \times \mathfrak{D}(j)$ ve her $(d, j) \in \mathcal{D} \times J$ için, $\mathfrak{Q}(d, j) = \ddot{Y}(d) \times \mathfrak{D}(j)$. Burada, $(\mathbb{F}, \mathcal{M} \times J) \cup_{\varepsilon} (\mathfrak{Q}, \mathcal{D} \times J) = (\mathfrak{S}, (\mathcal{M} \times J) \cup (\mathcal{D} \times J))$ olsun. O halde, her $(\varphi, j) \in (\mathcal{M} \times J) \cup (\mathcal{D} \times J) = (\mathcal{M} \cup \mathcal{D}) \times J$ için,

$$\mathfrak{S}(\varphi, j) = \begin{cases} \mathbb{F}(\varphi, j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{M} \times J) - (\mathcal{D} \times J) = (\mathcal{M} - \mathcal{D}) \times J \\ \mathfrak{Q}(\varphi, j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{D} \times J) - (\mathcal{M} \times J) = (\mathcal{D} - \mathcal{M}) \times J \\ \mathbb{F}(\varphi, j) \cup \mathfrak{Q}(\varphi, j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{M} \times J) \cap (\mathcal{D} \times J) = (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times J \end{cases}$$

Buradan,

$$\mathfrak{S}(\varphi, j) = \begin{cases} \mathfrak{T}(\varphi) \times \mathfrak{D}(j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{M} \times J) - (\mathcal{D} \times J) = (\mathcal{M} - \mathcal{D}) \times J \\ \ddot{Y}(\varphi) \times \mathfrak{D}(j), & (\varphi, j) \in (\mathcal{D} \times J) - (\mathcal{M} \times J) = (\mathcal{D} - \mathcal{M}) \times J \\ [\mathfrak{T}(\varphi) \times \mathfrak{D}(j)] \cup [\ddot{Y}(\varphi) \times \mathfrak{D}(j)], & (\varphi, j) \in (\mathcal{M} \times J) \cap (\mathcal{D} \times J) = (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times J \end{cases}$$

Böylece, ispat elde edilir.

6.2.3. Teorem $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$, $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{D}, J)$, U üzerinde birer esnek küme olmak üzere,

$$i) (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} [(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\cap} (\mathfrak{D}, J)] =_M [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\ddot{Y}, \mathcal{D})] \tilde{\cap} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{D}, J)]$$

$$ii) (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} [(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\cup} (\mathfrak{D}, J)] =_M [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\ddot{Y}, \mathcal{D})] \tilde{\cup} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{D}, J)]$$

$$iii) (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} [(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\setminus} (\mathfrak{D}, J)] =_M [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\ddot{Y}, \mathcal{D})] \tilde{\setminus} [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{D}, J)]$$

$$iv) [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\cup} (\ddot{Y}, \mathcal{D})] \tilde{\times} (\mathfrak{D}, J) =_M [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{D}, J)] \tilde{\cup} [(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathfrak{D}, J)]$$

$$v) [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\cap} (\ddot{Y}, \mathcal{D})] \tilde{\times} (\mathfrak{D}, J) =_M [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{D}, J)] \tilde{\cap} [(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathfrak{D}, J)]$$

$$iv) [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\setminus} (\ddot{Y}, \mathcal{D})] \tilde{\times} (\mathfrak{D}, J) =_M [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{D}, J)] \tilde{\setminus} [(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathfrak{D}, J)]$$

İspat: (i) Eşitliğin sol ve sağ tarafının parametre kümesi $\mathcal{M} \times \mathcal{D}$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır. Ayrıca, kabul gereği $\mathcal{M} \neq \emptyset$ ve $\mathcal{D} \neq \emptyset$ olduğundan, $\mathcal{M} \times \mathcal{D} \neq \emptyset$. Dolayısıyla sağ ve sol tarafın boş esnek kümeye eşit olma durumu bulunmamaktadır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\cap} (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $d \in \mathcal{D}$ için,

$$\mathfrak{X}(d) = \begin{cases} \ddot{Y}(d), & d \in \mathcal{D} - \mathcal{J} \\ \ddot{Y}(d) \cap \mathfrak{O}(d), & d \in \mathcal{D} \cap \mathcal{J} \end{cases}$$

$(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{X}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{Q}(m, d) = \mathfrak{O}(m) \times \mathfrak{X}(d)$. O halde,

$$\mathfrak{Q}(m, d) = \begin{cases} \mathfrak{O}(m) \times \ddot{Y}(d), & (m, d) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} - \mathcal{J}) \\ \mathfrak{O}(m) \times [\ddot{Y}(d) \cap \mathfrak{O}(d)], & (m, d) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J}) \end{cases}$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathbb{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathbb{F}(m, d) = \mathfrak{O}(m) \times \ddot{Y}(d)$ ve her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{Z}(m, j) = \mathfrak{O}(m) \times \mathfrak{O}(j)$. Burada, $(\mathbb{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) \tilde{\cup} (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{S}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. O halde her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için,

$$\mathfrak{S}(m, d) = \begin{cases} \mathbb{F}(m, d), & (m, d) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) - (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \mathcal{M} \times (\mathcal{D} - \mathcal{J}) \\ \mathbb{F}(m, d) \cup \mathfrak{Z}(m, d), & (m, d) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J}) \end{cases}$$

Buradan,

$$\mathfrak{S}(m, d) = \begin{cases} \mathfrak{O}(m) \times \ddot{Y}(d), & (m, d) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) - (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \mathcal{M} \times (\mathcal{D} - \mathcal{J}) \\ [\mathfrak{O}(m) \times \ddot{Y}(d)] \cap [\mathfrak{O}(m) \times \mathfrak{O}(d)], & (m, d) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) = \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \cap \mathcal{J}) \end{cases}$$

Böylece, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\times} [(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\cap} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})] =_{\mathbf{M}} [(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\ddot{Y}, \mathcal{D})] \tilde{\cap} [(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})]$ elde edilir. $\mathcal{M} \neq \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ olduğundan, esnek ikili parçalı işlemler, esnek kartezyen-çarpımı üzerinde dağılım göstermez.

(iv) Eşitliğin sol ve sağ tarafının parametre kümesi $\mathcal{M} \times \mathcal{J}$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır. Ayrıca, kabul gereği $\mathcal{M} \neq \emptyset$ ve $\mathcal{J} \neq \emptyset$ olduğundan, $\mathcal{M} \times \mathcal{J} \neq \emptyset$. Dolayısıyla sağ ve sol tarafın boş esnek kümeye eşit olma durumu bulunmamaktadır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\cup} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{M})$ olur. Buradan her $m \in \mathcal{M}$ için,

$$\mathfrak{X}(m) = \begin{cases} \mathfrak{T}(m), & m \in \mathcal{M} - \mathcal{D} \\ \mathfrak{T}(m) \cup \ddot{Y}(m), & m \in \mathcal{M} \cap \mathcal{D} \end{cases}$$

$(\mathfrak{X}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan, her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{Q}(m, j) = \mathfrak{X}(m) \times \mathfrak{O}(j)$. Böylece,

$$\mathfrak{X}(m, j) = \begin{cases} \mathfrak{T}(m) \times \mathfrak{O}(j), & (m, j) \in (\mathcal{M} - \mathcal{D}) \times \mathcal{J} \\ [\mathfrak{T}(m) \cup \ddot{Y}(m)] \times \mathfrak{O}(j), & (m, j) \in (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times \mathcal{J} \end{cases}$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan, her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{F}(m, j) = \mathfrak{T}(m) \times \mathfrak{O}(j)$ ve her $(d, j) \in \mathcal{D} \times \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{Z}(d, j) = \ddot{Y}(d) \times \mathfrak{O}(j)$. Burada, $(\mathfrak{F}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) \tilde{\cup} (\mathfrak{Z}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{G}, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olsun. O halde, her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için,

$$\mathfrak{G}(m, j) = \begin{cases} \mathfrak{F}(m, j), & (m, j) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) - (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) = (\mathcal{M} - \mathcal{D}) \times \mathcal{J} \\ \mathfrak{F}(m, j) \cup \mathfrak{Z}(m, j), & (m, j) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) = (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times \mathcal{J} \end{cases}$$

Böylece,

$$\mathfrak{G}(m, j) = \begin{cases} \mathfrak{T}(m) \times \mathfrak{O}(j), & (m, j) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) - (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) = (\mathcal{M} - \mathcal{D}) \times \mathcal{J} \\ [\mathfrak{T}(m) \times \mathfrak{O}(j)] \cup [\ddot{Y}(m) \times \mathfrak{O}(j)], & (m, j) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{J}) \cap (\mathcal{D} \times \mathcal{J}) = (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}) \times \mathcal{J} \end{cases}$$

Böylece, ispat elde edilir.

6.2.4. Önerme $(\mathfrak{T}, \mathcal{M})$, $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{J})$, U üzerinde birer esnek küme olsun. Buradan,

$$i) (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} [(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \wedge (\mathfrak{O}, \mathcal{J})] \subseteq_L [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\ddot{Y}, \mathcal{D})] \wedge [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})]$$

$$ii) (\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} [(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \vee (\mathfrak{O}, \mathcal{J})] \subseteq_L [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\ddot{Y}, \mathcal{D})] \vee [(\mathfrak{T}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{O}, \mathcal{J})]$$

İspat: (i) İlk olarak sol tarafa bakılacak olursa, $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \wedge (\mathcal{O}, \mathcal{J}) = (\mathcal{O}, \mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan, her $(d, j) \in \mathcal{D} \times \mathcal{J}$ için, $\mathcal{O}(d, j) = \ddot{Y}(d) \cap \mathcal{O}(j)$. $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathcal{O}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J}))$ olsun. Buradan, her $(m, (d, j)) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J})$ için,

$$\mathfrak{X}(m, (d, j)) = \mathfrak{O}(m) \times [\ddot{Y}(d) \cap \mathcal{O}(j)]$$

Sağ tarafa bakılacak olursa, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\ddot{Y}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathcal{O}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $\mathfrak{O}(m, d) = \mathfrak{O}(m) \times \ddot{Y}(d)$ ve her $(m, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ için, $\mathfrak{O}(m, j) = \mathfrak{O}(m) \times \mathcal{O}(j)$. $(\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) \vee (\mathfrak{O}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{O}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times (\mathcal{M} \times \mathcal{J}))$ olsun. Buradan, her $((m, d), (m, j)) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times (\mathcal{M} \times \mathcal{J})$ için, $\mathfrak{O}((m, d), (m, j)) = [\mathfrak{O}(m) \times \ddot{Y}(d)] \cap [\mathfrak{O}(m) \times \mathcal{O}(j)]$. Burada, her $(m, (d, j)) \in \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J})$ için,

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(m, (d, j)) &= \mathfrak{O}(m) \times [\ddot{Y}(d) \cap \mathcal{O}(j)] = [[\mathfrak{O}(m) \times \ddot{Y}(d)] \cap [\mathfrak{O}(m) \times \mathcal{O}(j)]] \\ &= \mathfrak{O}((m, d), (m, j)) \end{aligned}$$

olacak şekilde, $((m, d), (m, j)) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times (\mathcal{M} \times \mathcal{J})$ vardır. Böylece, istenen elde edilir. (ii)'nin ispatı da benzer şekilde yapılır. Önerme 6.2.4'te yer alan L-alt kümesinin, L-eşit olamayacağı Örnek 6.2.5'te gösterilmektedir:

6.2.5. *Örnek* $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi, $\mathcal{M} = \{e_1, e_5\}$, $\mathcal{D} = \{e_3\}$, $\mathcal{J} = \{e_2\}$ E parametre kümesinin alt kümeleri, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evrensel küme olmak üzere, U üzerinde $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$, $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ ve $(\mathcal{O}, \mathcal{J})$ esnek kümeleri,

$$\begin{aligned} (\mathfrak{O}, \mathcal{M}) &= \{(e_1, \{h_1, h_6\}), (e_5, \{h_5\})\}, (\ddot{Y}, \mathcal{D}) = \{(e_3, \{h_1, h_3, h_4\})\}, (\mathcal{O}, \mathcal{J}) = \\ &= \{(e_2, \{h_1, h_4, h_5\})\} \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. İlk olarak sol tarafa bakılacak olursa, $(\ddot{Y}, \mathcal{D}) \wedge (\mathcal{O}, \mathcal{J}) = (\mathcal{O}, \mathcal{D} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan,

$$(\mathcal{O}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = \{((e_3, e_2), \{h_1, h_4\})\}$$

$(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{U}, \mathcal{D} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J}))$ olsun. Böylece,

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{X}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J})) \\ &= \{(e_1, (e_3, e_2)), \{(h_1, h_1), (h_1, h_4), (h_6, h_1), (h_6, h_4)\}, ((e_5, (e_3, e_2)), \{(h_5, h_1), (h_5, h_4)\})\} \end{aligned}$$

Sağ taraftan devam edilecek olursa, $(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\ddot{\mathfrak{Y}}, \mathcal{D}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D})$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} (\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) &= \{((e_1, e_3), \{(h_1, h_1), (h_1, h_3), (h_1, h_4), (h_6, h_1), (h_6, h_3), (h_6, h_4)\}), \\ &((e_5, e_3), \{(h_5, h_1), (h_5, h_3), (h_5, h_4)\})\} \end{aligned}$$

$(\mathfrak{O}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\mathfrak{Q}, \mathcal{J}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} (\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) &= \{((e_1, e_2), \{(h_1, h_1), (h_1, h_4), (h_1, h_5), (h_6, h_1), (h_6, h_4), (h_6, h_5)\}), \\ &((e_5, e_2), \{(h_5, h_1), (h_5, h_4), (h_5, h_5)\})\} \end{aligned}$$

$(\mathfrak{Z}, \mathcal{M} \times \mathcal{D}) \vee (\mathfrak{Q}, \mathcal{M} \times \mathcal{J}) = (\mathfrak{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times (\mathcal{M} \times \mathcal{J}))$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times (\mathcal{M} \times \mathcal{J})) \\ &= \{(((e_1, e_3), (e_1, e_2)), \{(h_1, h_1), (h_1, h_4), (h_6, h_1), (h_6, h_4)\}), (((e_1, e_3), (e_5, e_2)), \emptyset), \\ &(((e_5, e_3), (e_1, e_2)), \emptyset), (((e_5, e_3), (e_5, e_2)), \{(h_5, h_1), (h_5, h_4)\})\} \end{aligned}$$

Böylece, $\mathfrak{Q}((e_1, e_3), (e_5, e_2)) \neq \mathfrak{X}(e_1, (e_3, e_2))$, $\mathfrak{Q}((e_1, e_3), (e_5, e_2)) \neq \mathfrak{X}((e_5, (e_3, e_2)))$, $\mathfrak{Q}((e_5, e_3), (e_1, e_2)) \neq \mathfrak{X}(e_1, (e_3, e_2))$ ve $\mathfrak{Q}((e_5, e_3), (e_1, e_2)) \neq \mathfrak{X}((e_5, (e_3, e_2)))$ olduğu görülür. Buradan, $(\mathfrak{Q}, (\mathcal{M} \times \mathcal{D}) \times (\mathcal{M} \times \mathcal{J})) \not\subseteq_L (\mathfrak{X}, \mathcal{M} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{J}))$ olup, istenen elde edilir.

6.3. Esnek Kartezyen-Çarpım ve Karar Verme Problemi

Bölüm boyunca, U üzerindeki esnek kümelerin tüm esnek kartezyen-çarpımının kümesi “ $\tilde{\times} (U \times U)$ ” ile $(\mathfrak{O}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{\mathfrak{Y}}, \mathcal{D})$ esnek kümelerinin esnek kartezyen-çarpımının esnek yaklaşım fonksiyonu

$$\mathfrak{G}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \check{Y}_{\mathcal{D}}: \mathcal{M} \times \mathcal{D} \rightarrow P(U \times U)$$

ile gösterilecektir. Burada, her $(m, d) \in \mathcal{M} \times \mathcal{D}$ için, $(\mathfrak{G}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \check{Y}_{\mathcal{D}})(m, d) = \mathfrak{G}(m) \times \check{Y}(d)$ olduğu bilinmektedir.

6.3.1. Tanım $(\mathfrak{G}, \mathcal{M})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{D})$, U kümesi üzerinde tanımlanmış birer esnek küme olsun. $\text{bir}_m \text{kes}_d$ ve $\text{bir}_d \text{kes}_m$ ile gösterilen, esnek kartezyen-çarpım için bir-kes operatörü sırasıyla,

$$\text{bir}_m \text{kes}_d: \tilde{\times} (U \times U) \rightarrow P(U \times U),$$

$$\text{bir}_m \text{kes}_d(\mathfrak{G}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \check{Y}_{\mathcal{D}}) = \bigcup_{m \in \mathcal{M}} \left(\bigcap_{d \in \mathcal{D}} ((\mathfrak{G}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \check{Y}_{\mathcal{D}})(m, d)) \right)$$

$$\text{bir}_d \text{kes}_m: \tilde{\times} (U \times U) \rightarrow P(U \times U),$$

$$\text{bir}_d \text{kes}_m(\mathfrak{G}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \check{Y}_{\mathcal{D}}) = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} \left(\bigcap_{m \in \mathcal{M}} ((\mathfrak{G}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \check{Y}_{\mathcal{D}})(m, d)) \right)$$

şeklinde tanımlanır.

6.3.2. Tanım $(\mathfrak{G}, \mathcal{M}) \tilde{\times} (\check{Y}, \mathcal{D}) \in \tilde{\times} (U \times U)$ olsun. bir-kes olarak gösterilen esnek kartezyen-çarpımın bir-kes fonksiyonu,

$$\text{bir-kes}: \tilde{\times} (U \times U) \rightarrow P(U \times U),$$

$$\text{bir-kes}(\mathfrak{G}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \check{Y}_{\mathcal{D}}) = [\text{bir}_m \text{kes}_d(\mathfrak{G}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \check{Y}_{\mathcal{D}})] \cup [\text{bir}_d \text{kes}_m(\mathfrak{G}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \check{Y}_{\mathcal{D}})]$$

şeklindedir ve $U \times U$ evrensel kümesinin boyutunu küçültür. Burada, $\text{bir-kes}(\mathfrak{G}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \check{Y}_{\mathcal{D}})$ nin $U \times U$ kümesinin bir alt kümesi olduğu aşıkardır. $\text{bir-kes}(\mathfrak{G}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \check{Y}_{\mathcal{D}})$ değerine, $\mathfrak{G}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \check{Y}_{\mathcal{D}}$ esnek çarpımının bir-kes karar kümesi denir.

Belirsizlik içeren bir gerçek hayat problemi için bir-kes karar verme metodu esnek-kartezyen çarpımına aşağıdaki algoritma yardımıyla oluşturulur:

ALGORİTMA

Adım 1: Parametre kümesinin uygun alt kümeleri seçilir.

Adım 2: Parametre kümesinin her bir alt kümesi için esnek kümeler inşa edilir.

Adım 3: Esnek cümlelerin $\tilde{\times}$ -çarpımı hesaplanır.

Adım 4: Çarpımın bir-kes karar kümesi hesaplanır.

Şimdi esnek kartezyen-çarpımın bir-kes karar verme problemine nasıl uygulandığı ile ilgili bir örnek verilecektir.

6.3.3. Örnek Bir özel kurum biri iç kapıya, diğeri ise dış kapıya yerleştirilmek üzere iki sözleşmeli özel güvenlik alım duyurusunda bulunmuştur. İç kapıya yerleştirilecek güvenlik görevlisi sosyal beceriler yönünden değerlendirilerek istihdamı gerçekleştirilecek olan bir kadın, dış kapıya yerleştirilecek güvenlik görevlisi ise fiziksel uygunluk açısından değerlendirilerek istihdamı gerçekleştirilerek alınacak olan bir erkek olacaktır.

Kadın adayların, insanlarla etkili iletişim kurma yetenekleri ve sosyal ilişkilerdeki başarısını değerlendirebilmek amacıyla, toplumla etkileşimdeki tutumlarını, problem çözme becerilerini ve profesyonel duruşlarını ölçen sorular içeren sözlü mülakat gerçekleştirilecek iken, erkek adayların ise fiziksel uygunluklarını ölçmek üzere bir parkur hazırlanacak ve erkek adaylar bu parkuru tamamlayarak fiziksel yeterlilikleri konusunda bir sınava tabi tutulmuş olacaklardır. Bu uygulama, erkek adayların güvenlik görevini ifa ederken ihtiyaç duyacağı fiziksel dayanıklılık ve çevikliğe sahip olup olmadığını belirlemek amacıyla yapılacaktır. Seçim sürecinin yönetimi ise, belirtilen bu iki temel değerlendirme kriterine göre adayları belirleyecek olan kurumun Halkla İlişkiler Birimi sorumlu müdürü ve müdürü İkraniye Hanım ve Metin Bey olacaktır. İkraniye Hanım ve Metin Bey kararını esnek kartezyen-çarpımın bir-kes karar verme metodu ile oluşturacaklardır. Başvuru yapan erkek adayların kümesi $U_1 = \{s_1, s_2, \dots, s_{13}\}$ ve kadın adayların kümesi $U_2 =$

$\{k_1, k_2, \dots, k_8\}$ ile SEÇİLECEK güvenlik personelini belirlemek için kullanılan parametreler kümesi ise $E = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4\}$ ile temsil edilsin.

Burada, c_i parametreleri için $i = 1, 2 \dots 5$ aşağıdakilere karşılık gelmektedir:

- $c_1 = \text{"Refleksleri kuvvetli"}$
- $c_2 = \text{"Fiziksel dayanıklılığı ve kondisyonu yüksek"}$
- $c_3 = \text{"Kuvvetli"}$
- $c_4 = \text{"Kısa mesafelerde hızlı hareket edebilme kabiliyetine sahip"}$
- $c_5 = \text{"İnce motor becerileri gelişmiş"}$

Burada, ℓ_i parametreleri için $i = 1, 2 \dots 4$ aşağıdakilere karşılık gelmektedir:

- $\ell_1 = \text{"İletişim becerisi yüksek"}$
- $\ell_2 = \text{"Yüksek özgüvene sahip"}$
- $\ell_3 = \text{"İyi diksiyona sahip"}$
- $\ell_4 = \text{"Kendisini iyi ifade edebilen"}$

Özel güvenlik alım süreci ile ilgili bu problemi çözmek için esnek kartezyen-çarpım yöntemini problem durumuna şu şekilde uygulayabiliriz:

Adım 1: Parametreler Kümesinin Belirlenmesi.

Karar vericiler, İkramiye Hanım ve Metin Bey, önce güvenlik personeli adayları için mevcut parametreler kümesinden ilgili parametreleri seçerler. Bu parametreler, fiziksel uygunluk ve sosyal becerilere dayalı olarak seçilir. Hem İkramiye Hanım hem de Metin Bey için seçilen parametre kümeleri şunlardır:

- $\mathcal{M} = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$; Fiziksel uygunluk için parametreler

- $\mathcal{D} = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$; Sosyal beceriler için parametreler

Adım 2: Adım 1'de Belirlenen Parametre Kümeleri Kullanarak Esnek kümelerin Oluşturulması.

- İkrâmiye Hanım için, $(\ddot{Y}, \mathcal{M})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{D})$ esnek kümeleri sırasıyla fiziksel ve sosyal uygunluk değerlendirmesini temsil etmektedir.
- Metin Bey için, $(\mathfrak{M}, \mathcal{M})$ ve $(\mathfrak{M}, \mathcal{D})$ esnek kümeleri sırasıyla fiziksel ve sosyal uygunluk değerlendirmesini temsil etmektedir.

$$(\ddot{Y}, \mathcal{M}) = \{(c_1, \{s_1, s_3, s_4, s_7\}), (c_2, \{s_1, s_2, s_5\}), (c_3, \{s_1, s_9, s_{13}\}), (c_4, \{s_1, s_5, s_{10}, s_{12}\})\}$$

$$(\ddot{Y}, \mathcal{D}) = \{(\ell_1, \{k_1, k_3, k_5, k_8\}), (\ell_2, \{k_1, k_4, k_6, k_8\}), (\ell_3, \{k_2, k_7, k_8\})\}$$

$$(\mathfrak{M}, \mathcal{M}) = \{(c_1, \{s_1, s_9, s_{11}\}), (c_2, \{s_1, s_8, s_{12}\}), (c_3, \{s_1, s_{10}, s_{11}\}), (c_4, \{s_1, s_7, s_9\})\}$$

$$(\mathfrak{M}, \mathcal{D}) = \{(\ell_1, \{k_2, k_4, k_6, k_8\}), (\ell_2, \{k_3, k_5, k_7, k_8\}), (\ell_3, \{k_1, k_5, k_8\})\}$$

Adım 3: Esnek Kümelerin $\tilde{\times}$ -çarpımının belirlenmesi.

$$\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}}, \mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}}, \ddot{Y}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}} \text{ ve } \mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}}$$

Verilen esnek kümelerin sonuçları hesaplanır. Sonuç, adaylar için fiziksel ve sosyal uygunluk değerlendirmelerinin tüm olası kombinasyonlarını temsil eden kapsamlı bir küme olacaktır.

$$\begin{aligned} & \ddot{Y}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}} \\ &= \left\{ \left((c_1, \ell_1), \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_3, k_1), (s_3, k_3), (s_3, k_5), (s_3, k_8), \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. (s_4, k_1), (s_4, k_3), (s_4, k_5), (s_4, k_8), (s_7, k_1), (s_7, k_3), (s_7, k_5), (s_7, k_8) \right\} \right) \right\}, \\ & \left((c_1, \ell_2), \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_3, k_1), (s_3, k_4), (s_3, k_6), (s_3, k_8), \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. (s_4, k_1), (s_4, k_4), (s_4, k_6), (s_4, k_8), (s_7, k_1), (s_7, k_4), (s_7, k_6), (s_7, k_8) \right\} \right) \right\}, \\ & \left((c_1, \ell_3), \left\{ (s_1, k_2), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_3, k_2), (s_3, k_7), (s_3, k_8), (s_4, k_2), (s_4, k_7), \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. (s_4, k_8), (s_7, k_2), (s_7, k_7), (s_7, k_8) \right\} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left((c_2, \ell_1), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_1), (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_2, k_1), (s_2, k_3), (s_2, k_5), (s_2, k_8), \\ (s_5, k_1), (s_5, k_3), (s_5, k_5), (s_5, k_8) \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_2, \ell_2), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_1), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_2, k_1), (s_2, k_4), (s_2, k_6), (s_2, k_8), \\ (s_5, k_1), (s_5, k_4), (s_5, k_6), (s_5, k_8) \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_2, \ell_3), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_2), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_2, k_2), (s_2, k_7), (s_2, k_8), (s_5, k_2), (s_5, k_7), \\ (s_5, k_8) \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_3, \ell_1), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_1), (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_9, k_1), (s_9, k_3), (s_9, k_5), (s_9, k_8), \\ (s_{13}, k_1), (s_{13}, k_3), (s_{13}, k_5), (s_{13}, k_8) \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_3, \ell_2), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_1), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_9, k_1), (s_9, k_4), (s_9, k_6), (s_9, k_8), \\ (s_{13}, k_1), (s_{13}, k_4), (s_{13}, k_6), (s_{13}, k_8) \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_3, \ell_3), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_2), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_9, k_2), (s_9, k_7), (s_9, k_8), (s_{13}, k_2), (s_{13}, k_7), \\ (s_{13}, k_8) \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_4, \ell_1), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_1), (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_5, k_1), (s_5, k_3), (s_5, k_5), (s_5, k_8), \\ (s_{10}, k_1), (s_{10}, k_3), (s_{10}, k_5), (s_{10}, k_8), (s_{12}, k_1), (s_{12}, k_3), (s_{12}, k_5), (s_{12}, k_8) \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_4, \ell_2), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_1), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_5, k_1), (s_5, k_4), (s_5, k_6), (s_5, k_8), \\ (s_{10}, k_1), (s_{10}, k_4), (s_{10}, k_6), (s_{10}, k_8), (s_{12}, k_1), (s_{12}, k_4), (s_{12}, k_6), (s_{12}, k_8) \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_4, \ell_3), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_2), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_5, k_2), (s_5, k_7), (s_5, k_8), (s_{10}, k_2), (s_{10}, k_7), \\ (s_{10}, k_8), (s_{12}, k_2), (s_{12}, k_7), (s_{12}, k_8) \end{array} \right\} \right).
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$$

$$\begin{aligned}
& = \left\{ \left((c_1, \ell_1), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_2), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_9, k_2), (s_9, k_4), (s_9, k_6), (s_9, k_8), \\ (s_{11}, k_2), (s_{11}, k_4), (s_{11}, k_6), (s_{11}, k_8) \end{array} \right\} \right) \right), \\
& \left((c_1, \ell_2), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_9, k_3), (s_9, k_5), (s_9, k_7), (s_9, k_8), \\ (s_{11}, k_3), (s_{11}, k_5), (s_{11}, k_7), (s_{11}, k_8) \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_1, \ell_3), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_1), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_9, k_1), (s_9, k_5), (s_9, k_8), (s_{11}, k_1), (s_{11}, k_5), \\ (s_{11}, k_8) \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_2, \ell_1), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_2), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_8, k_2), (s_8, k_4), (s_8, k_6), (s_8, k_8), \\ (s_{12}, k_2), (s_{12}, k_4), (s_{12}, k_6), (s_{12}, k_8) \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_2, \ell_2), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_8, k_3), (s_8, k_5), (s_8, k_7), (s_8, k_8), \\ (s_{12}, k_3), (s_{12}, k_5), (s_{12}, k_7), (s_{12}, k_8) \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_2, \ell_3), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_1), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_8, k_1), (s_8, k_5), (s_8, k_8), (s_{12}, k_1), (s_{12}, k_5), \\ (s_{12}, k_8) \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_3, \ell_1), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_2), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_{10}, k_2), (s_{10}, k_4), (s_{10}, k_6), (s_{10}, k_8), \\ (s_{11}, k_2), (s_{11}, k_4), (s_{11}, k_6), (s_{11}, k_8) \end{array} \right\} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left((c_3, \ell_2), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_{10}, k_3), (s_{10}, k_5), (s_{10}, k_7), (s_{10}, k_8), \\ (s_{11}, k_3), (s_{11}, k_5), (s_{11}, k_7), (s_{11}, k_8) \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_3, \ell_3), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_1), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_{10}, k_1), (s_{10}, k_5), (s_{10}, k_8), (s_{11}, k_1), (s_{11}, k_5), \\ (s_{11}, k_8) \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_4, \ell_1), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_2), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_7, k_2), (s_7, k_4), (s_7, k_6), (s_7, k_8), \\ (s_9, k_2), (s_9, k_4), (s_9, k_6), (s_9, k_8) \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_4, \ell_2), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_7, k_3), (s_7, k_5), (s_7, k_7), (s_7, k_8), \\ (s_9, k_3), (s_9, k_5), (s_9, k_7), (s_9, k_8) \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_4, \ell_3), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_1), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_7, k_1), (s_7, k_5), (s_7, k_8), (s_9, k_1), (s_9, k_5), \\ (s_9, k_8) \end{array} \right\} \right) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{Y}_M \widetilde{\times} \mathfrak{M}_D \\
& = \left\{ \left((c_1, \ell_1), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_2), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_3, k_2), (s_3, k_4), (s_3, k_6), (s_3, k_8), \\ (s_4, k_2), (s_4, k_4), (s_4, k_6), (s_4, k_8), (s_7, k_2), (s_7, k_4), (s_7, k_6), (s_7, k_8) \end{array} \right\} \right), \right. \\
& \left((c_1, \ell_2), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_3, k_3), (s_3, k_5), (s_3, k_7), (s_3, k_8), \\ (s_4, k_3), (s_4, k_5), (s_4, k_7), (s_4, k_8), (s_7, k_3), (s_7, k_5), (s_7, k_7), (s_7, k_8) \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_1, \ell_3), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_1), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_3, k_1), (s_3, k_5), (s_3, k_8), (s_4, k_1), (s_4, k_5), \\ (s_4, k_8), (s_7, k_1), (s_7, k_5), (s_7, k_8) \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_2, \ell_1), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_2), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_2, k_2), (s_2, k_4), (s_2, k_6), (s_2, k_8), \\ (s_5, k_2), (s_5, k_4), (s_5, k_6), (s_5, k_8) \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_2, \ell_2), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_2, k_3), (s_2, k_5), (s_2, k_7), (s_2, k_8), \\ (s_5, k_3), (s_5, k_5), (s_5, k_7), (s_5, k_8) \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_2, \ell_3), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_1), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_2, k_1), (s_2, k_5), (s_2, k_8), (s_5, k_1), (s_5, k_5), \\ (s_5, k_8) \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_3, \ell_1), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_2), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_9, k_2), (s_9, k_4), (s_9, k_6), (s_9, k_8), \\ (s_{13}, k_2), (s_{13}, k_4), (s_{13}, k_6), (s_{13}, k_8) \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_3, \ell_2), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_9, k_3), (s_9, k_5), (s_9, k_7), (s_9, k_8), \\ (s_{13}, k_3), (s_{13}, k_5), (s_{13}, k_7), (s_{13}, k_8) \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_3, \ell_3), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_1), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_9, k_1), (s_9, k_5), (s_9, k_8), (s_{13}, k_1), (s_{13}, k_5), \\ (s_{13}, k_8) \end{array} \right\} \right), \\
& \left((c_4, \ell_1), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_2), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_5, k_2), (s_5, k_4), (s_5, k_6), (s_5, k_8), \\ (s_{10}, k_2), (s_{10}, k_4), (s_{10}, k_6), (s_{10}, k_8), (s_{12}, k_2), (s_{12}, k_4), (s_{12}, k_6), (s_{12}, k_8) \end{array} \right\} \right), \\
& \left. \left((c_4, \ell_2), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_5, k_3), (s_5, k_5), (s_5, k_7), (s_5, k_8), \\ (s_{10}, k_3), (s_{10}, k_5), (s_{10}, k_7), (s_{10}, k_8), (s_{12}, k_3), (s_{12}, k_5), (s_{12}, k_7), (s_{12}, k_8) \end{array} \right\} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\left((c_4, \ell_3), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_1), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_5, k_1), (s_5, k_5), (s_5, k_8), (s_{10}, k_1), (s_{10}, k_5), \\ (s_{10}, k_8), (s_{12}, k_1), (s_{12}, k_5), (s_{12}, k_8) \end{array} \right\} \right\}.$$

$$\begin{aligned} & \mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}} \\ &= \left\{ \left((c_1, \ell_1), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_1), (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_9, k_1), (s_9, k_3), (s_9, k_5), (s_9, k_8), \\ (s_{11}, k_1), (s_{11}, k_3), (s_{11}, k_5), (s_{11}, k_8) \end{array} \right\} \right), \right. \\ & \left((c_1, \ell_2), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_1), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_9, k_1), (s_9, k_4), (s_9, k_6), (s_9, k_8), \\ (s_{11}, k_1), (s_{11}, k_4), (s_{11}, k_6), (s_{11}, k_8) \end{array} \right\} \right), \\ & \left((c_1, \ell_3), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_2), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_9, k_2), (s_9, k_7), (s_9, k_8), (s_{11}, k_2), (s_{11}, k_7), \\ (s_{11}, k_8) \end{array} \right\} \right), \\ & \left((c_2, \ell_1), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_1), (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_8, k_1), (s_8, k_3), (s_8, k_5), (s_8, k_8), \\ (s_{12}, k_1), (s_{12}, k_3), (s_{12}, k_5), (s_{12}, k_8) \end{array} \right\} \right), \\ & \left((c_2, \ell_2), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_1), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_8, k_1), (s_8, k_4), (s_8, k_6), (s_8, k_8), \\ (s_{12}, k_1), (s_{12}, k_4), (s_{12}, k_6), (s_{12}, k_8) \end{array} \right\} \right), \\ & \left((c_2, \ell_3), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_2), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_8, k_2), (s_8, k_7), (s_8, k_8), (s_{12}, k_2), (s_{12}, k_7), \\ (s_{12}, k_8) \end{array} \right\} \right), \\ & \left((c_3, \ell_1), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_1), (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_{10}, k_1), (s_{10}, k_3), (s_{10}, k_5), (s_{10}, k_8), \\ (s_{11}, k_1), (s_{11}, k_3), (s_{11}, k_5), (s_{11}, k_8) \end{array} \right\} \right), \\ & \left((c_3, \ell_2), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_1), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_{10}, k_1), (s_{10}, k_4), (s_{10}, k_6), (s_{10}, k_8), \\ (s_{11}, k_1), (s_{11}, k_4), (s_{11}, k_6), (s_{11}, k_8) \end{array} \right\} \right), \\ & \left((c_3, \ell_3), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_2), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_{10}, k_2), (s_{10}, k_7), (s_{10}, k_8), (s_{11}, k_2), \\ (s_{11}, k_7), (s_{11}, k_8) \end{array} \right\} \right), \\ & \left((c_4, \ell_1), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_1), (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_7, k_1), (s_7, k_3), (s_7, k_5), (s_7, k_8), \\ (s_9, k_1), (s_9, k_3), (s_9, k_5), (s_9, k_8) \end{array} \right\} \right), \\ & \left((c_4, \ell_2), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_7, k_3), (s_7, k_5), (s_7, k_7), (s_7, k_8), \\ (s_9, k_3), (s_9, k_5), (s_9, k_7), (s_9, k_8) \end{array} \right\} \right), \\ & \left. \left((c_4, \ell_3), \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_1), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_7, k_1), (s_7, k_5), (s_7, k_8), (s_9, k_1), (s_9, k_5), \\ (s_9, k_8) \end{array} \right\} \right) \right\} \end{aligned}$$

Adım 4: Karar kümelerinin elde edilmesiyle, aşağıdaki bir-kes kümeleri elde edilir:

bir-kes $(\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})$, bir-kes $(\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})$, bir-kes $(\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})$ ve bir-kes $(\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})$:

Öncelikle, bir-kes $(\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})$ hesaplanır. Buradan,

$$\text{bir}_m - \text{kes}_d(\ddot{Y}_M \tilde{\times} \ddot{Y}_D) = \bigcup_{m \in \mathcal{M}} \left(\bigcap_{d \in \mathcal{D}} ((\ddot{Y}_M \tilde{\times} \ddot{Y}_D)(m, d)) \right)$$

İlk olarak,

$$\bigcap_{d \in \mathcal{D}} ((\ddot{Y}_M \tilde{\times} \ddot{Y}_D)(m, d))$$

hesaplanır.

$$\begin{aligned} & (\ddot{Y}_M \tilde{\times} \ddot{Y}_D)(c_1, \ell_1) \cap (\ddot{Y}_M \tilde{\times} \ddot{Y}_D)(c_1, \ell_2) \cap (\ddot{Y}_M \tilde{\times} \ddot{Y}_D)(c_1, \ell_3) \\ = & \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_3, k_1), (s_3, k_3), (s_3, k_5), (s_3, k_8), (s_4, k_1), (s_4, k_3), \right. \\ & \left. (s_4, k_5), (s_4, k_8), (s_7, k_1), (s_7, k_3), (s_7, k_5), (s_7, k_8) \right\} \\ \cap & \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_3, k_1), (s_3, k_4), (s_3, k_6), (s_3, k_8), (s_4, k_1), (s_4, k_4), \right. \\ & \left. (s_4, k_6), (s_4, k_8), (s_7, k_1), (s_7, k_4), (s_7, k_6), (s_7, k_8) \right\} \\ \cap & \left\{ (s_1, k_2), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_3, k_2), (s_3, k_7), (s_3, k_8), (s_4, k_2), (s_4, k_7), \right. \\ & \left. (s_4, k_8), (s_7, k_2), (s_7, k_7), (s_7, k_8) \right\} \\ = & \{(s_1, k_8), (s_3, k_8), (s_4, k_2), (s_4, k_8), (s_7, k_8)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\ddot{Y}_M \tilde{\times} \ddot{Y}_D)(c_2, \ell_1) \cap (\ddot{Y}_M \tilde{\times} \ddot{Y}_D)(c_2, \ell_2) \cap (\ddot{Y}_M \tilde{\times} \ddot{Y}_D)(c_2, \ell_3) \\ = & \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_2, k_1), (s_2, k_3), (s_2, k_5), (s_2, k_8), (s_5, k_1), (s_5, k_3), \right. \\ & \left. (s_5, k_5), (s_5, k_8) \right\} \\ \cap & \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_2, k_1), (s_2, k_4), (s_2, k_6), (s_2, k_8), (s_5, k_1), (s_5, k_4), \right. \\ & \left. (s_5, k_6), (s_5, k_8) \right\} \\ \cap & \{(s_1, k_2), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_2, k_2), (s_2, k_7), (s_2, k_8), (s_5, k_2), (s_5, k_7), (s_5, k_8)\} \\ = & \{(s_1, k_8), (s_2, k_8), (s_5, k_8)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\ddot{Y}_M \tilde{\times} \ddot{Y}_D)(c_3, \ell_1) \cap (\ddot{Y}_M \tilde{\times} \ddot{Y}_D)(c_3, \ell_2) \cap (\ddot{Y}_M \tilde{\times} \ddot{Y}_D)(c_3, \ell_3) \\ = & \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_9, k_1), (s_9, k_3), (s_9, k_5), (s_9, k_8), (s_{13}, k_1), (s_{13}, k_3), \right. \\ & \left. (s_{13}, k_5), (s_{13}, k_8) \right\} \\ \cap & \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_9, k_1), (s_9, k_4), (s_9, k_6), (s_9, k_8), (s_{13}, k_1), (s_{13}, k_4), \right. \\ & \left. (s_{13}, k_6), (s_{13}, k_8) \right\} \\ \cap & \{(s_1, k_2), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_9, k_2), (s_9, k_7), (s_9, k_8), (s_{13}, k_2), (s_{13}, k_7), (s_{13}, k_8)\} \\ = & \{(s_1, k_8), (s_9, k_8), (s_{13}, k_8)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \widetilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(c_4, \ell_1) \cap (\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \widetilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(c_4, \ell_2) \cap (\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \widetilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(c_4, \ell_3) \\
&= \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_5, k_1), (s_5, k_3), (s_5, k_5), (s_5, k_8), (s_{10}, k_1), (s_{10}, k_3), \right. \\
&\quad \left. (s_{10}, k_5), (s_{10}, k_8), (s_{12}, k_1), (s_{12}, k_3), (s_{12}, k_5), (s_{12}, k_8) \right\} \\
&\cap \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_5, k_1), (s_5, k_4), (s_5, k_6), (s_5, k_8), (s_{10}, k_1), (s_{10}, k_4), \right. \\
&\quad \left. (s_{10}, k_6), (s_{10}, k_8), (s_{12}, k_1), (s_{12}, k_4), (s_{12}, k_6), (s_{12}, k_8) \right\} \\
&\cap \left\{ (s_1, k_2), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_5, k_2), (s_5, k_7), (s_5, k_8), (s_{10}, k_2), (s_{10}, k_7), \right. \\
&\quad \left. (s_{10}, k_8), (s_{12}, k_2), (s_{12}, k_7), (s_{12}, k_8) \right\} \\
&= \{(s_1, k_8), (s_5, k_8), (s_{10}, k_8), (s_{12}, k_8)\}
\end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned}
\text{bir}_m - \text{kes}_d(\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \widetilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}}) &= \bigcup_{m \in \mathcal{M}} \left(\bigcap_{d \in \mathcal{D}} ((\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \widetilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(m, d)) \right) \\
&= \{(s_1, k_8), (s_3, k_8), (s_4, k_2), (s_4, k_8), (s_7, k_8)\} \cup \{(s_1, k_8), (s_2, k_8), (s_5, k_8)\} \\
&\quad \cup \{(s_1, k_8), (s_9, k_8), (s_{13}, k_8)\} \cup \{(s_1, k_8), (s_5, k_8), (s_{10}, k_8), (s_{12}, k_8)\} \\
&= \left\{ (s_1, k_8), (s_2, k_8), (s_3, k_8), (s_4, k_2), (s_4, k_8), (s_5, k_8), (s_7, k_8), (s_9, k_8), \right. \\
&\quad \left. (s_{10}, k_8), (s_{12}, k_8), (s_{13}, k_8) \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra,

$$\text{bir}_d - \text{kes}_m(\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \widetilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}}) = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} \left(\bigcap_{m \in \mathcal{M}} ((\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \widetilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(m, d)) \right)$$

hesaplanır. İlk olarak,

$$\bigcap_{m \in \mathcal{M}} ((\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \widetilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(m, d))$$

hesaplanır:

$$\begin{aligned}
& (\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \widetilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(c_1, \ell_1) \cap (\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \widetilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(c_2, \ell_1) \cap (\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \widetilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(c_3, \ell_1) \cap (\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \widetilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(c_4, \ell_1) \\
&= \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_3, k_1), (s_3, k_3), (s_3, k_5), (s_3, k_8), (s_4, k_1), (s_4, k_3), \right. \\
&\quad \left. (s_4, k_5), (s_4, k_8), (s_7, k_1), (s_7, k_3), (s_7, k_5), (s_7, k_8) \right\} \\
&\cap \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_2, k_1), (s_2, k_3), (s_2, k_5), (s_2, k_8), (s_5, k_1), (s_5, k_3), \right. \\
&\quad \left. (s_5, k_5), (s_5, k_8) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cap \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_9, k_1), (s_9, k_3), (s_9, k_5), (s_9, k_8), (s_{13}, k_1), (s_{13}, k_3), \right. \\
& \quad \left. (s_{13}, k_5), (s_{13}, k_8) \right\} \\
& \cap \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_5, k_1), (s_5, k_3), (s_5, k_5), (s_5, k_8), (s_{10}, k_1), (s_{10}, k_3), \right. \\
& \quad \left. (s_{10}, k_5), (s_{10}, k_8), (s_{12}, k_1), (s_{12}, k_3), (s_{12}, k_5), (s_{12}, k_8) \right\} \\
& = \{(s_1, k_1), (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_8)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(c_1, \ell_2) \cap (\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(c_2, \ell_2) \cap (\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(c_3, \ell_2) \cap (\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(c_4, \ell_2) \\
& = \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_3, k_1), (s_3, k_4), (s_3, k_6), (s_3, k_8), (s_4, k_1), (s_4, k_4), \right. \\
& \quad \left. (s_4, k_6), (s_4, k_8), (s_7, k_1), (s_7, k_4), (s_7, k_6), (s_7, k_8) \right\} \\
& \cap \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_2, k_1), (s_2, k_4), (s_2, k_6), (s_2, k_8), (s_5, k_1), (s_5, k_4), \right. \\
& \quad \left. (s_5, k_6), (s_5, k_8) \right\} \\
& \cap \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_9, k_1), (s_9, k_4), (s_9, k_6), (s_9, k_8), (s_{13}, k_1), (s_{13}, k_4), \right. \\
& \quad \left. (s_{13}, k_6), (s_{13}, k_8) \right\} \\
& \cap \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_5, k_1), (s_5, k_4), (s_5, k_6), (s_5, k_8), (s_{10}, k_1), (s_{10}, k_4), \right. \\
& \quad \left. (s_{10}, k_6), (s_{10}, k_8), (s_{12}, k_1), (s_{12}, k_4), (s_{12}, k_6), (s_{12}, k_8) \right\} \\
& = \{(s_1, k_1), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(c_1, \ell_3) \cap (\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(c_2, \ell_3) \cap (\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(c_3, \ell_3) \cap (\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(c_4, \ell_3) \\
& = \left\{ (s_1, k_2), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_3, k_2), (s_3, k_7), (s_3, k_8), (s_4, k_2), (s_4, k_7), \right. \\
& \quad \left. (s_4, k_8), (s_7, k_2), (s_7, k_7), (s_7, k_8) \right\} \\
& \cap \{(s_1, k_2), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_2, k_2), (s_2, k_7), (s_2, k_8), (s_5, k_2), (s_5, k_7), (s_5, k_8)\} \\
& \cap \{(s_1, k_2), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_9, k_2), (s_9, k_7), (s_9, k_8), (s_{13}, k_2), (s_{13}, k_7), (s_{13}, k_8)\} \\
& \cap \left\{ (s_1, k_2), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_5, k_2), (s_5, k_7), (s_5, k_8), (s_{10}, k_2), (s_{10}, k_7), \right. \\
& \quad \left. (s_{10}, k_8), (s_{12}, k_2), (s_{12}, k_7), (s_{12}, k_8) \right\} \\
& = \{(s_1, k_2), (s_1, k_7), (s_1, k_8)\}
\end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned}
\text{bir}_d - \text{kes}_m(\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}}) &= \bigcup_{d \in \mathcal{D}} \left(\bigcap_{m \in \mathcal{M}} ((\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})(m, d)) \right) \\
&= \{(s_1, k_1), (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_8)\} \cup \{(s_1, k_1), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8)\} \\
& \quad \cup \{(s_1, k_2), (s_1, k_7), (s_1, k_8)\} \\
&= \{(s_1, k_1), (s_1, k_3), (s_1, k_4), (s_1, k_5), (s_1, k_6), (s_1, k_7), (s_1, k_8)\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
\text{bir-kes}(\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}}) &= [\text{bir}_m \text{kes}_d(\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})] \cup [\text{bir}_d \text{kes}_m(\ddot{Y}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \ddot{Y}_{\mathcal{D}})] \\
&= \left\{ (s_1, k_8), (s_2, k_8), (s_3, k_8), (s_4, k_2), (s_4, k_8), (s_5, k_8), (s_7, k_8), (s_9, k_8), (s_{10}, k_8), \right. \\
&\quad \left. (s_{12}, k_8), (s_{13}, k_8) \right\} \\
&\cup \{ (s_1, k_1), (s_1, k_3), (s_1, k_4), (s_1, k_5), (s_1, k_6), (s_1, k_7), (s_1, k_8) \} \\
&= \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_3), (s_1, k_4), (s_1, k_5), (s_1, k_6), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_2, k_8), (s_3, k_8), \right. \\
&\quad \left. (s_4, k_2), (s_4, k_8), (s_5, k_8), (s_7, k_8), (s_9, k_8), (s_{10}, k_8), (s_{12}, k_8), (s_{13}, k_8) \right\}
\end{aligned}$$

$\text{bir-kes}(\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})$ hesaplanır.

$$\text{bir}_m - \text{kes}_d(\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}}) = \bigcup_{m \in \mathcal{M}} \left(\bigcap_{d \in \mathcal{D}} (\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(m, d) \right)$$

İlk olarak,

$$\bigcap_{d \in \mathcal{D}} (\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(m, d)$$

hesaplanır:

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(c_1, \ell_1) \cap (\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(c_1, \ell_2) \cap (\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(c_1, \ell_3) \\
&= \left\{ (s_1, k_2), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_9, k_2), (s_9, k_4), (s_9, k_6), (s_9, k_8), (s_{11}, k_2), \right. \\
&\quad \left. (s_{11}, k_4), (s_{11}, k_6), (s_{11}, k_8) \right\} \\
&\cap \left\{ (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_9, k_3), (s_9, k_5), (s_9, k_7), (s_9, k_8), (s_{11}, k_3), \right. \\
&\quad \left. (s_{11}, k_5), (s_{11}, k_7), (s_{11}, k_8) \right\} \\
&\cap \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_9, k_1), (s_9, k_5), (s_9, k_8), (s_{11}, k_1), (s_{11}, k_5), \right. \\
&\quad \left. (s_{11}, k_8) \right\} \\
&= \{(s_1, k_8), (s_9, k_8), (s_{11}, k_8)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(c_2, \ell_1) \cap (\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(c_2, \ell_2) \cap (\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(c_2, \ell_3) \\
&= \left\{ (s_1, k_2), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_8, k_2), (s_8, k_4), (s_8, k_6), (s_8, k_8), (s_{12}, k_2), \right. \\
&\quad \left. (s_{12}, k_4), (s_{12}, k_6), (s_{12}, k_8) \right\} \\
&\cap \left\{ (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_8, k_3), (s_8, k_5), (s_8, k_7), (s_8, k_8), (s_{12}, k_3), \right. \\
&\quad \left. (s_{12}, k_5), (s_{12}, k_7), (s_{12}, k_8) \right\} \\
&\cap \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_8, k_1), (s_8, k_5), (s_8, k_8), (s_{12}, k_1), (s_{12}, k_5), \right. \\
&\quad \left. (s_{12}, k_8) \right\}
\end{aligned}$$

$$= \{(s_1, k_8), (s_8, k_8), (s_{12}, k_8)\}$$

$$\begin{aligned}
& (\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(c_3, \ell_1) \cap (\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(c_3, \ell_2) \cap (\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(c_3, \ell_3) \\
&= \left\{ (s_1, k_2), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_{10}, k_2), (s_{10}, k_4), (s_{10}, k_6), (s_{10}, k_8), (s_{11}, k_2), \right. \\
&\quad \left. (s_{11}, k_4), (s_{11}, k_6), (s_{11}, k_8) \right\} \\
&\cap \left\{ (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_{10}, k_3), (s_{10}, k_5), (s_{10}, k_7), (s_{10}, k_8), (s_{11}, k_3), \right. \\
&\quad \left. (s_{11}, k_5), (s_{11}, k_7), (s_{11}, k_8) \right\} \\
&\cap \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_{10}, k_1), (s_{10}, k_5), (s_{10}, k_8), (s_{11}, k_1), (s_{11}, k_5), \right. \\
&\quad \left. (s_{11}, k_8) \right\} \\
&= \{(s_1, k_8), (s_{10}, k_8), (s_{11}, k_8)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(c_4, \ell_1) \cap (\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(c_4, \ell_2) \cap (\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(c_4, \ell_3) \\
&= \left\{ (s_1, k_2), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_7, k_2), (s_7, k_4), (s_7, k_6), (s_7, k_8), (s_9, k_2), (s_9, k_4), \right. \\
&\quad \left. (s_9, k_6), (s_9, k_8) \right\} \\
&\cap \left\{ (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_7, k_3), (s_7, k_5), (s_7, k_7), (s_7, k_8), (s_9, k_3), (s_9, k_5), \right. \\
&\quad \left. (s_9, k_7), (s_9, k_8) \right\} \\
&\cap \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_7, k_1), (s_7, k_5), (s_7, k_8), (s_9, k_1), (s_9, k_5), \right. \\
&\quad \left. (s_9, k_8) \right\} \\
&= \{(s_1, k_8), (s_7, k_8), (s_9, k_8)\}
\end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned}
\text{bir}_m - \text{kes}_d(\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}}) &= \bigcup_{m \in \mathcal{M}} \left(\bigcap_{d \in \mathcal{D}} (\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(m, d) \right) \\
&= \{(s_1, k_8), (s_9, k_8), (s_{11}, k_8)\} \cup \{(s_1, k_8), (s_8, k_8), (s_{12}, k_8)\} \\
&\cup \{(s_1, k_8), (s_{10}, k_8), (s_{11}, k_8)\} \cup \{(s_1, k_8), (s_7, k_8), (s_9, k_8)\} = \\
&\{(s_1, k_8), (s_7, k_8), (s_8, k_8), (s_9, k_8), (s_{10}, k_8), (s_{11}, k_8), (s_{12}, k_8)\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
& (\text{bir}_d - \text{kes}_m)(\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}}) = \\
& \bigcup_{d \in \mathcal{D}} \left(\bigcap_{m \in \mathcal{M}} (\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(m, d) \right)
\end{aligned}$$

hesaplanır. İlk olarak,

$$\bigcap_{m \in \mathcal{M}} (\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(m, d)$$

hesaplanır:

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \times \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(c_1, \ell_1) \cap (\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \times \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(c_2, \ell_1) \cap (\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \times \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(c_3, \ell_1) \\ & \quad \cap (\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \times \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(c_4, \ell_1) \\ &= \left\{ (s_1, k_2), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_9, k_2), (s_9, k_4), (s_9, k_6), (s_9, k_8), (s_{11}, k_2), \right. \\ & \quad \left. (s_{11}, k_4), (s_{11}, k_6), (s_{11}, k_8) \right\} \\ & \cap \left\{ (s_1, k_2), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_8, k_2), (s_8, k_4), (s_8, k_6), (s_8, k_8), (s_{12}, k_2), \right. \\ & \quad \left. (s_{12}, k_4), (s_{12}, k_6), (s_{12}, k_8) \right\} \\ & \cap \left\{ (s_1, k_2), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_{10}, k_2), (s_{10}, k_4), (s_{10}, k_6), (s_{10}, k_8), (s_{11}, k_2), \right. \\ & \quad \left. (s_{11}, k_4), (s_{11}, k_6), (s_{11}, k_8) \right\} \\ & \cap \left\{ (s_1, k_2), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8), (s_7, k_2), (s_7, k_4), (s_7, k_6), (s_7, k_8), (s_9, k_2), \right. \\ & \quad \left. (s_9, k_4), (s_9, k_6), (s_9, k_8) \right\} \\ &= \{(s_1, k_2), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(c_1, \ell_2) \cap (\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(c_2, \ell_2) \cap (\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(c_3, \ell_2) \\ & \quad \cap (\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(c_4, \ell_2) \\ &= \left\{ (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_9, k_3), (s_9, k_5), (s_9, k_7), (s_9, k_8), (s_{11}, k_3), \right. \\ & \quad \left. (s_{11}, k_5), (s_{11}, k_7), (s_{11}, k_8) \right\} \\ & \cap \left\{ (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_8, k_3), (s_8, k_5), (s_8, k_7), (s_8, k_8), (s_{12}, k_3), \right. \\ & \quad \left. (s_{12}, k_5), (s_{12}, k_7), (s_{12}, k_8) \right\} \\ & \cap \left\{ (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_{10}, k_3), (s_{10}, k_5), (s_{10}, k_7), (s_{10}, k_8), (s_{11}, k_3), \right. \\ & \quad \left. (s_{11}, k_5), (s_{11}, k_7), (s_{11}, k_8) \right\} \\ & \cap \left\{ (s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_7, k_3), (s_7, k_5), (s_7, k_7), (s_7, k_8), (s_9, k_3), \right. \\ & \quad \left. (s_9, k_5), (s_9, k_7), (s_9, k_8) \right\} \\ &= \{(s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_7), (s_1, k_8)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(c_1, \ell_3) \cap (\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(c_2, \ell_3) \cap (\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(c_3, \ell_3) \\ & \quad \cap (\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(c_4, \ell_3) \\ &= \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_9, k_1), (s_9, k_5), (s_9, k_8), (s_{11}, k_1), (s_{11}, k_5), \right. \\ & \quad \left. (s_{11}, k_8) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cap \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_8, k_1), (s_8, k_5), (s_8, k_8), (s_{12}, k_1), (s_{12}, k_5), \right. \\
& \quad \left. (s_{12}, k_8) \right\} \\
& \cap \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_{10}, k_1), (s_{10}, k_5), (s_{10}, k_8), (s_{11}, k_1), (s_{11}, k_5), \right. \\
& \quad \left. (s_{11}, k_8) \right\} \\
& \cap \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_5), (s_1, k_8), (s_7, k_1), (s_7, k_5), (s_7, k_8), (s_9, k_1), (s_9, k_5), \right. \\
& \quad \left. (s_9, k_8) \right\} \\
& = \{(s_1, k_1), (s_1, k_5), (s_1, k_8)\}
\end{aligned}$$

Böylece,

$$\begin{aligned}
& \text{bir}_d - \text{kes}_m(\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}}) = \\
& \bigcup_{d \in \mathcal{D}} \left(\bigcap_{m \in \mathcal{M}} (\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})(m, d) \right) \\
& = \{(s_1, k_2), (s_1, k_4), (s_1, k_6), (s_1, k_8)\} \cup \{(s_1, k_3), (s_1, k_5), (s_1, k_7), (s_1, k_8)\} \\
& \quad \cup \{(s_1, k_1), (s_1, k_5), (s_1, k_8)\} \\
& = \{(s_1, k_1), (s_1, k_2), (s_1, k_3), (s_1, k_4), (s_1, k_5), (s_1, k_6), (s_1, k_7), (s_1, k_8)\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
& \text{bir-kes}(\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}}) = [\text{bir}_m \text{kes}_d(\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})] \cup [\text{bir}_d \text{kes}_m(\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})] \\
& = \{(s_1, k_8), (s_7, k_8), (s_8, k_8), (s_9, k_8), (s_{10}, k_8), (s_{11}, k_8), (s_{12}, k_8)\} \\
& \quad \cup \{(s_1, k_1), (s_1, k_2), (s_1, k_3), (s_1, k_4), (s_1, k_5), (s_1, k_6), (s_1, k_7), (s_1, k_8)\} \\
& = \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_2), (s_1, k_3), (s_1, k_4), (s_1, k_5), (s_1, k_6), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_7, k_8), (s_8, k_8), \right. \\
& \quad \left. (s_9, k_8), (s_{10}, k_8), (s_{11}, k_8), (s_{12}, k_8) \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
& \text{bir-kes}(\ddot{\mathfrak{Y}}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}}) = [\text{bir}_m \text{kes}_d(\ddot{\mathfrak{Y}}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})] \cup [\text{bir}_d \text{kes}_m(\ddot{\mathfrak{Y}}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}})] \\
& = \{(s_1, k_8), (s_2, k_8), (s_3, k_8), (s_4, k_8), (s_5, k_8), (s_7, k_8), (s_9, k_8), (s_{10}, k_8), (s_{11}, k_8), (s_{12}, k_8)\} \\
& \quad \cup \{(s_1, k_1), (s_1, k_2), (s_1, k_3), (s_1, k_4), (s_1, k_5), (s_1, k_6), (s_1, k_7), (s_1, k_8)\} \\
& = \left\{ (s_1, k_1), (s_1, k_2), (s_1, k_3), (s_1, k_4), (s_1, k_5), (s_1, k_6), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_2, k_8), (s_3, k_8), \right. \\
& \quad \left. (s_4, k_8), (s_5, k_8), (s_7, k_8), (s_9, k_8), (s_{10}, k_8), (s_{11}, k_8), (s_{12}, k_8) \right\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \text{bir-kes}(\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \check{Y}_{\mathcal{D}}) = [\text{bir}_m - \text{kes}_d(\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \check{Y}_{\mathcal{D}})] \cup [\text{bir}_d - \text{kes}_m(\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \check{Y}_{\mathcal{D}})] \\
& = \{(s_1, k_8), (s_7, k_8), (s_8, k_8), (s_9, k_8), (s_{10}, k_8), (s_{11}, k_8), (s_{12}, k_8)\} \\
& \cup \{(s_1, k_1), (s_1, k_2), (s_1, k_3), (s_1, k_4), (s_1, k_5), (s_1, k_6), (s_1, k_7), (s_1, k_8)\} \\
& = \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_1), (s_1, k_2), (s_1, k_3), (s_1, k_4), (s_1, k_5), (s_1, k_6), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_7, k_8), (s_8, k_8), \\ (s_9, k_8), (s_{10}, k_8), (s_{11}, k_8), (s_{12}, k_8) \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Alım sürecini yöneten İkramiye Hanım ve Metin Bey'in ortak belirlediği adayları tespit etmek ve böylece, yaptıkları seçimler sonucunda belirledikleri adaylar kümesini, daha demokratik bir seçim süreci ile sağlamak amacıyla kesiştirerek, her iki tarafın da ortak olarak belirlediği adaylar tespit etmiş olunur.

$$\begin{aligned}
& [\text{bir-kes}(\check{Y}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \check{Y}_{\mathcal{D}}) \cap \text{bir-kes}(\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}}) \cap \text{bir-kes}(\check{Y}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \mathfrak{M}_{\mathcal{D}}) \cap \text{bir-kes}(\mathfrak{M}_{\mathcal{M}} \tilde{\times} \check{Y}_{\mathcal{D}})] \\
& = \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_1), (s_1, k_3), (s_1, k_4), (s_1, k_5), (s_1, k_6), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_2, k_8), (s_3, k_8), (s_4, k_2), \\ (s_4, k_8), (s_5, k_8), (s_7, k_8), (s_9, k_8), (s_{10}, k_8), (s_{12}, k_8), (s_{13}, k_8) \end{array} \right\} \\
& \cap \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_1), (s_1, k_2), (s_1, k_3), (s_1, k_4), (s_1, k_5), (s_1, k_6), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_7, k_8), (s_8, k_8), \\ (s_9, k_8), (s_{10}, k_8), (s_{11}, k_8), (s_{12}, k_8) \end{array} \right\} \\
& \cap \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_1), (s_1, k_2), (s_1, k_3), (s_1, k_4), (s_1, k_5), (s_1, k_6), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_2, k_8), (s_3, k_8), \\ (s_4, k_8), (s_5, k_8), (s_7, k_8), (s_9, k_8), (s_{10}, k_8), (s_{11}, k_8), (s_{12}, k_8) \end{array} \right\} \\
& \cap \left\{ \begin{array}{l} (s_1, k_1), (s_1, k_2), (s_1, k_3), (s_1, k_4), (s_1, k_5), (s_1, k_6), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_7, k_8), (s_8, k_8), \\ (s_9, k_8), (s_{10}, k_8), (s_{11}, k_8), (s_{12}, k_8) \end{array} \right\} \\
& = \{(s_1, k_1), (s_1, k_3), (s_1, k_4), (s_1, k_5), (s_1, k_6), (s_1, k_7), (s_1, k_8), (s_7, k_8) \\
& \quad (s_9, k_8), (s_{10}, k_8), (s_{12}, k_8)\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Özel güvenlik pozisyonuna başvuran 13 erkek, 8 kadın aday içerisinde muhtemel tüm durumlar olan 104 (erkek, kadın) sıralı ikilisinden, sadece 11 (erkek, kadın) sıralı ikilisinin ortak karar kümesinde olduğu görülmektedir. Bu 11 çift, erkek adayın ilk, kadın adayın ise ikinci bileşen olarak yer aldığı sıralı çiftlerdir. Karar verme sürecinde, bu çiftler, her bir adayın karar kümesinde ne kadar yer aldığına göre sıralanır.

- Her bir bileşenin en fazla sıklığa sahip adayları ana listeye alınır.

- İkinci en fazla sıklıkla yer alan adaylar birinci yedek listeyi oluşturur.
- Üçüncü en fazla sıklıkla yer alan adaylar ikinci yedek listeyi oluşturur ve bu şekilde sırasıyla üçüncü, dördüncü, beşinci vb. yedek listeler oluşturulur.

Bu bağlamda, karar kümesinde en fazla tekrar eden erkek aday (7 kere) " s_1 ", kadın aday (5 kere) " k_8 " olduğundan, özel güvenlik pozisyonunda istihdam edilmeye hak kazanan asil aday " (s_1, k_8) " olarak belirlenmiş olur. Karar kümesinde yer alan diğer erkek adaylar ve kadın adaylar, aynı sayıda tekrar ettiğinden (1'er kere) yedek liste oluşturulmasına ihtiyaç duyulmamıştır.



7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, esnek küme teorisine katkıda bulunmak amacıyla esnek teta-çarpım, esnek artı-çarpım, esnek fark-çarpım ve esnek kartezyen-çarpım olmak üzere dört yeni esnek çarpım tanıtılmıştır. Çalışmanın temel amacı, bu çarpımların sahip oldukları temel cebirsel özellikleri ayrıntılı şekilde ortaya koymak ve söz konusu işlemlerin kısıtlanmış, genişletilmiş ve esnek ikili parçalı işlemlere dağılma durumlarını incelemek ve ortaya çıkan sonuçları hem teorik hem de uygulama açıdan değerlendirmektir. Yalnızca teorik tanımlar yapmakla kalınmamış, bu çarpımların karar verme süreçlerinde nasıl kullanılabileceğini göstermek amacıyla günlük hayat problemine yer verilmiştir.

Tezin birinci bölümünde, giriş niteliğinde esnek kümeler, esnek çarpımlar ve karar verme yöntemleri üzerine geniş bir literatür taraması yapılmıştır. Konu ile ilgili temel kavramlar, tanımlar ve daha önce yapılmış çalışmalar bir araya getirilerek çalışmanın teorik altyapısı hazırlanmıştır.

İkinci bölümde, esnek kümeler ile ilgili temel kavramlar incelenmiştir. M, F, L ve J türü alt kümeler ile eşitlikler gibi yapılara yer verilmiş, tanımları ve mevcut teorideki konumları açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde, esnek teta-çarpım tanıtılmış, örneği verilmiş ve cebirsel özellikleri detaylı olarak incelenmiştir. Bu çarpımın kısıtlanmış, genişletilmiş ve esnek ikili parçalı işlemlere dağılma durumları araştırılmış; hangi koşullarda belirli cebirsel özelliklerin sağlandığı veya sağlanmadığı ortaya konmuştur. Bölümün sonunda, esnek teta-çarpım bir-kes karar verme yöntemiyle özel üniversite tercihi problemine uygulanmıştır. Karar vericilerin belirlediği parametreler doğrultusunda mevcut seçenekler daraltılmış ve yalnızca tüm karar vericilerin ortak beklentilerine uyan üniversiteler listede bırakılmıştır. Bu sayede, çok kriterli bir seçim sürecinde nesnel ve hızlı bir eleme yapılabilmektedir.

Dördüncü bölümde, esnek artı-çarpım tanıtılmış, örneği verilmiş ve cebirsel özellikleri ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Kısıtlanmış, genişletilmiş ve esnek ikili parçalı işlemlere dağılma durumları incelenmiştir. Bölümün sonunda, esnek artı-çarpım kes-bir yöntemiyle

pilot aday seçimi problemine uygulanmıştır. Bu sayede, çok adaylı bir seçim sürecinde nesnel ve hızlı bir eleme yapılabilmektedir.

Beşinci bölümde, esnek fark-çarpım tanıtılmış, örneği verilmiş ve cebirsel özellikleri detaylı olarak incelenmiştir. Kısıtlanmış, genişletilmiş ve esnek ikili parçalı işlemlere dağılma durumları araştırılmıştır. Bölüm sonunda bir-kes yöntemi karar verme problemine uygulanarak, antrenör alımı problemine uygulanmıştır. “Bir-kes” metodu ile mevcut seçenekler daraltılarak; kriterleri taşımayanlar hızla elenirken, uygun adaylar net biçimde öne çıkmıştır.

Altıncı bölümde, esnek kartezyen-çarpım tanıtılmış, örneği verilmiş ve cebirsel özellikleri kapsamlı olarak incelenmiştir. Kısıtlanmış, genişletilmiş ve esnek ikili parçalı işlemlere dağılma durumları değerlendirilmiştir. Bu bölümün sonunda kartezyen-çarpımı bir-kes yöntemiyle özel güvenlik görevlisi alımı problemine uygulanmıştır. Fiziksel uygunluk ve sosyal beceri parametreleri birlikte değerlendirilerek; iki boyut birleştirilerek ortak karar kümesindeki uygun (erkek, kadın) çiftleri belirlenmiştir.

Tezin uygulama kısmında, Çağman ve Enginoğlu (2010a) tarafından geliştirilen bir-kes ve kes-bir temelli karar verme yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntem sayesinde, çok kriterli karar verme süreçlerinde seçenekler daha yönetilebilir bir seviyeye indirgenmiş, en uygun sonuca ulaşmak kolaylaşmış ve adil bir süreç izlenmiştir. Örneğin, özel üniversite tercihi senaryosunda teta-çarpımın bir-kes yöntemiyle tüm karar vericilerin ortak beklentilerine uyan adaylar nesnel bir şekilde azaltılmıştır. Özel güvenlik görevlisi seçiminde ise kartezyen-çarpımın bir-kes yöntemiyle hem sosyal hem de fiziksel yeterlilik kriterlerini sağlayan adaylar belirlenmiştir.

Sonuç olarak bu çalışma; yeni esnek çarpım türlerini literatüre kazandırmış, bu çarpımların farklı versiyonlar altındaki cebirsel özellikleri ortaya koyulmuş ve bir-kes ile kes-bir karar verme yöntemleriyle karar verme süreçlerine katkı sağlamıştır. Böylece, hem esnek küme teorisinin teorik yönü güçlendirilmiş hem de çok kriterli seçim problemleri için alternatif bir yöntem sunulmuştur.

KAYNAKLAR

- Abbas, M., Ali, B. and Romaguera, S. (2014). On Generalized Soft Equality and Soft Lattice Structure. *Filomat*, 28(6), 1191-1203.
- Abbas, M., Ali, M. I. and Romaguera, S. (2017). Generalized Operations in Soft Set Theory Via Relaxed Conditions on Parameters. *Filomat*, 31(19), 5955–5964.
- Akbulut, E. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended Difference and Lambda Operations*. Unpublished Master Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Ali, B., Saleem, N., Sundus, N., Khaleeq, S., Saeed, M. and George, R. (2002). A Contribution to the Theory of Soft Sets via Generalized Relaxed Operations. *Mathematics*, 10(15), 26–36.
- Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K. and Shabir, M. (2009). On Some New Operations in Soft Set Theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 57(9), 1547–1553.
- Ali, M. I., Shabir, M. and Naz, M. (2011). Algebraic Structures of Soft Sets Associated with New Operations. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(9), 2647–2654.
- Al-shami, T. M. and El-Shafei, M. (2020). T-soft Equality Relation. *Turkish Journal of Mathematics*, 44(4), 1427–1441.
- Al-shami, T. M. (2019). Investigation and Corrigendum to Some Results Related to g -Soft Equality and g f -Soft Equality Relations. *Filomat*, 33(11), 3375–3383.
- Atagün, A. O., Kamacı, H. and Oktay, O. (2018). Reduced Soft Matrices and Generalized Products with Applications in Decision Making. *Neural Computing and Applications*, 29, 445–456.
- Aybek, F. (2024). *New Restricted and Extended Soft Set Operations*. Unpublished Master Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Babitha, K. V. and Sunil, J. J. (2010). Soft set relations and functions, *Computers and Mathematics with Applications*, 60, 1840–1849.
- Chen, D. G., Tsang, E. C. and Yeung, D. S. (2003). Some Notes on The Parameterization Reduction of Soft Sets. *International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, 3, 1442–1445.
- Chen, D., Tsang, E. C. C., Yeung, D. S. and Wang, X. (2005). The Parametrization Reduction of Soft Sets and Its Applications. *Computers and Mathematics with Applications*, 49(5-6), 757–763.
- Çağman, N. (2021). Conditional Complements of Sets and Their Application to Group Theory. *Journal of New Results in Science*, 10(3), 67–74.

- Çağman, N. and Enginoğlu, S. (2010a). Soft Set Theory and Uni-int Decision Making. *European Journal of Operational Research*, 207(2), 848-855.
- Çağman, N. and Enginoğlu, S. (2010b). Soft Matrix Theory and Its Decision Making. *Computers and Mathematics with Applications*, 59, 3308-3314.
- Demirci, A. M. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended Union, Plus and Theta Operations*. Unpublished Master Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Enginoğlu, S. (2008). *Esnek Karar Verme Metodları*. Unpublished Master Thesis, Gaziosmanpaşa University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Tokat.
- Eren, Ö. F. (2019). *Esnek Küme İşlemleri Üzerine*. Unpublished Master Thesis, Ondokuz Mayıs University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Samsun.
- Feng, F. and Li, Y. (2013). Soft Subsets and Soft Product Operations. *Information Sciences*, 232, 44–57.
- Feng, F., Li, Y. and Çağman, N. (2012). Generalized Uni-int Decision Making Schemes Based on Choice Value Soft Sets. *European Journal of Operational Research*, 220(1), 162–170.
- Feng, F., Li, Y. M., Davvaz, B. and Ali, M. I. (2010). Soft Sets Combined with Fuzzy Sets and Rough Sets: A Tentative Approach. *Soft Computing*, 14, 899–911.
- Jun, Y. B. and Yang, X. (2011). A Note on The Paper Combination of Interval-Valued Fuzzy Set and Soft Set. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(5), 1468–1470.
- Kamacı, H., Saltık, K., Akız, H. F. and Atagün, A. O. (2018). Cardinality Inverse Soft Matrix Theory and Its Applications In Multicriteria Group Decision Making. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 34(3), 2031–2049.
- Kharal, A. (2014). Soft Approximations and Uni-int Decision Making. *The Scientific World Journal*, Article ID 327408.
- Kong, Z., Gao, L., Wang, L. and Li, S. (2008). The Normal Parameter Reduction of Soft Sets and Its Algorithm. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(12), 3029-3037.
- Liu, X., Feng, F. and Jun, Y. B. (2012). A Note on Generalized Soft Equal Relations. *Computers and Mathematics with Applications*, 64(4), 572–578.
- Maji, P. K., Biswas, R. and Roy, A. R. (2003). Soft Set Theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 45(4-5), 555–562.
- Maji, P. K., Roy, A. R., and Biswas, R. (2002). An Application of Soft Sets in a Decision Making Problem. *Computers and Mathematics with Applications*, 44(8-9), 1077–1083.

- Molodtsov, D. (1999). Soft Set Theory-first Results. *Computers and Mathematics with Applications*, 37(4-5), 19-31.
- Mushrif, M. M., Sengupta, S. and Ray, A. K. (2006). Texture Classification Using a Novel, Soft-Set Theory Based Classification, Algorithm. *Lecture Notes in Computer Science*, 3851, 246-254.
- Pawlak, Z. (1982). Rough Sets. *International Journal of Computer Information Sciences*, 11, 341-356.
- Pei, D. and Miao, D. (2005). From Soft Sets to Information Systems. In *2005 IEEE International Conference on Granular Computing*, 2, 617-621.
- Petchimuthu, S., Garg, H., Kamacı, H. and Atagün, A. O. (2020). The Mean Operators and Generalized Products of Fuzzy Soft Matrices and Their Applications in MCGDM. *Computational and Applied Mathematics*, 39(2), 1-32.
- Qin, K. and Hong, Z. (2010). On Soft Equality. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(5), 1347-1355.
- Qin, K., Liu, Q. and Xu, Y. (2015). Redefined Soft Relations and Soft Functions. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 8(5), 819-828.
- Roy, A. R. and Maji, P. K. (2007). A Fuzzy Soft Set Theoretic Approach to Decision Making Problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 203(2), 412- 418.
- Sarıalioğlu, M. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended Intersection, Gamma and Star Operations*. Unpublished Master Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Sen, J. (2014). On Algebraic Structure of Soft Sets. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 7(6), 1013-1020.
- Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2011). On Operations of Soft Sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(5), 1457-1467.
- Sezgin, A., Atagün, A. O. and Çağman, N. (2025a). A Complete Study on And-product of Soft Sets. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 43(1), 1-14.
- Sezgin, A., Çağman, N., Atagün, A. O. and Aybek, F. (2023). Complemental Binary Operations of Sets and Their Application to Group Theory. *Matrix Science Mathematic*, 7(2), 99-106.
- Sezgin A. and Çalışıcı, H. (2024). Comprehensive Study on Soft Binary Piecewise Difference Operation. *Eskişehir Teknik Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B-Teorik Bilimler*, 12(1), 1-23.
- Sezgin, A., Shahzad, A. and Mehmood, A. (2019). New Operation on Soft Sets: Extended Difference of Soft Sets. *Journal of New Theory*, 27, 33-42.

- Sezgin, A. and Şenyiğit, E. (2025). A New Product for Soft Sets with Its Decision-making: Soft lambda-product, *Mathematics and Systems Science*, 3(1), 3139.
- Sezgin, A., Şenyiğit, E. and Güngör, N. B. (2024). A New Product for Soft Sets with Its Decision-making: Soft Star-product, *Big Data and Computing Visions*, 5(1), 52-73.
- Sezgin, A., Şenyiğit, E. and Luzum, M. (2025b). A New Product for Soft Sets with Its Decision-making: Soft Gamma-product, *Earthline Journal of Mathematical Sciences*, 15(2), 211-234.
- Singh, D. and Onyeozili, I. A. (2012a). Notes on Soft Matrices Operations. *ARPN Journal of Science and Technology*, 2(9), 861–869.
- Singh, D. and Onyeozili, I. A. (2012b). On Some New Properties of Soft Set Operations. *International Journal of Computer Applications*, 59(4), 39–44.
- Singh, D. and Onyeozili, I. A. (2012c). Some Conceptual Misunderstandings of The Fundamentals of Soft Set Theory. *ARPN Journal of Systems and Software*, 2(9), 251–254.
- Singh, D. and Onyeozili, I. A. (2012d). Some Results on Distributive and Absorption Properties on Soft Operations. *IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM)*, 4(2), 18–30.
- Stojanović, N. S. (2021). A New Operation on Soft Sets: Extended Symmetric Difference of Soft Sets. *Military Technical Courier*, 69(4), 779–791.
- Xiao, Z., Chen, L., Zhong, B. and Ye, S. (2005). Recognition for Soft Information Based on the Theory of Soft Sets. *Proceedings of ICSSSM'05. 2005 International Conference on Services Systems and Services Management*, 2, 1104–1106.
- Xiao, Z., Li, Y., Zhong, B. and Yang, X. (2003). Research on Synthetically Evaluating Method for Business Competitive Capacity Based on Soft Set. *Statistical Research*, 10, 52-54.
- Yang, H., Qu, C. and Li, N. C. (2004). The Induction and Decision Analysis of Clinical Diagnosis Based on Rough Sets and Soft Sets. *September*, (2007), 17(3), 208-212.
- Yang, J. L. and Yao, Y. Y. (2020). Semantics of Soft Sets and Three-way Decision with Soft Sets. *Knowledge-based Systems*, 194, 105538.
- Yang, X., Yu, D., Yang, J. and Wu, C. (2007). Generalization of Soft Set Theory: From Crisp to Fuzzy Case. In *Fuzzy Information and Engineering: Proceedings of the Second International Conference of Fuzzy Information and Engineering (ICFIE)* (pp. 345-354). Springer Berlin Heidelberg.
- Yavuz, E. (2024). *Soft Binary Piecewise Operations and Their Properties*. Unpublished Master Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8(1), 338–353.

Zorlutuna, İ. (2021). Soft Set-Valued Mappings and Their Application in Decision Making Problems. *Filomat*, 35(5), 1725–1733.



ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Nazlı Helin ÇAM

Eğitim Derecesi	Okul/Program	Mezuniyet Yılı
Lisans	Amasya Üniversitesi	2023
Yüksek Lisans	Amasya Üniversitesi	

Yabancı Dili

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

- 1) Sezgin, A. and Çam, N. H. (2025). Soft Theta-product: A New Product for Soft Sets with Its Decision-Making. *Multicriteria Algorithms with Applications*, 6, 9-33.
- 2) Sezgin, A. and Çam, N. H. (2024). Soft Difference-product: A New Product for Soft Sets with Its Decision-Making. *Journal of Amasya University The Institute of Sciences and Technology*, 5(2), 114-137.
- 3) Sezgin, A. and Çam, N. H. (Baskıda/In press). Soft Plus-product: A New Product for Soft Sets with Its Decision-Making. *Complexity Analysis and Applications*.
- 4) Sezgin, A. and Çam, N. H. (Baskıda/In press). Insight into Soft Cartesian-product: with its Decision-Making. *Computational Algorithms and Numerical Dimensions*.
- 5) Çam, N. H. and Sezgin, A. (Baskıda/In press). A New Product for Soft Sets: Soft Symmetric Difference-product Complement.