



**T. C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ESNEK KÜMELERDE YILDIZ-ÇARPIM, GAMMA-ÇARPIM,
LAMDA-ÇARPIM İŞLEMLERİ VE KARAR VERME
PROBLEMLERİNE UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EYLÜL ŞENYİĞİT

EKİM

EYLÜL ŞENYİĞİT

MATEMATİK ANABİLİM DALI

EKİM 2025

**ESNEK KÜMELERDE YILDIZ-ÇARPIM, GAMMA-ÇARPIM, LAMDA-
ÇARPIM İŞLEMLERİ VE KARAR VERME PROBLEMLERİNE
UYGULAMALARI**

Eylül ŞENYİĞİT

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Danışman
Prof. Dr. Ashhan SEZGİN**

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

EKİM 2025

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Eylül ŞENYİĞİT tarafından hazırlanan “Esnek Kümelerde Yıldız-Çarpım, Gamma-Çarpım, Lamda-Çarpım İşlemleri ve Karar Verme Problemlerine Uygulamaları” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Prof. Dr. Faruk KARASLAN

Matematik Anabilim Dalı, Çankırı Karatekin Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Doç. Dr. Zehra ÖZDEMİR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 03/10/2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Eylül ŞENYİĞİT

03/10/2025

ESNEK KÜMELERDE YILDIZ-ÇARPIM, GAMMA-ÇARPIM, LAMDA-ÇARPIM İŞLEMLERİ VE KARAR VERME PROBLEMLERİNE UYGULAMALARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Eylül ŞENYİĞİT

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ekim 2025

ÖZET

Molodtsov, 1999 yılında belirsizlikle başa çıkmak için, esnek küme teorisini ortaya atmış, sonraki çalışmalar çeşitli esnek çarpım işlemleri tanıtarak, alternatifler arasında en iyi seçeneği belirlemeye yönelik sistematik bir karar verme süreci geliştirerek, bunun belirsizlikle başa çıkmada etkili olduğunu göstermişlerdir. Bu tezde, esnek gamma-çarpımı, esnek lamda-çarpımı, esnek yıldız-çarpımı olarak adlandırılan yeni esnek çarpımlar tanıtılmaktadır. Bu çarpımların, M-alküme/eşitlik, F-alküme/eşitlik, L-alküme/eşitlik ve J-alküme/eşitlik gibi farklı alt küme ve eşitlik türleriyle olan cebirsel özellikleri detaylı bir şekilde değerlendirilmiştir. Ayrıca bu çarpımların, çeşitli esnek küme işlemleri üzerine dağılım özellikleri incelenmiştir. Son olarak, karar verme senaryosunda en iyi seçeneği belirlemek amacıyla bu çarpımlar problem durumuna uygun olarak, belirsizlik içeren günlük hayat problemlerine uygulanmış ve karar verme sürecindeki uygulanabilirliği gösterilmiştir. Bu çalışma, hem teorik derinlik hem de karar verme uygulamalarıyla uygulama olarak gerekli kuramsal temelleri oluşturarak, esnek küme teorisi literatürüne katkı sağlamayı hedeflemektedir.

Sayfa Adedi	: 97
Anahtar Kelimeler	: Esnek yıldız-çarpım, Esnek lamda-çarpım, Esnek gamma-çarpım, Karar verme
Danışman	: Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

STAR-PRODUCT, GAMMA-PRODUCT, LAMBDA-PRODUCT OPERATIONS ON
SOFT SETS AND THEIR APPLICATIONS TO DECISION-MAKING PROBLEMS

(M. Sc. Thesis)

Eylül ŞENYİĞİT

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

October 2025

ABSTRACT

In 1999, Molodtsov introduced the theory of soft sets to address problems of uncertainty. Subsequent studies expanded upon this framework by introducing various soft set products and developing systematic decision-making processes aimed at identifying the optimal alternatives, demonstrating their effectiveness in handling uncertainty. In this thesis, new soft set products—namely, the soft gamma-product, soft lambda-product, and soft star-product—are introduced. The algebraic properties of these products are evaluated in detail with respect to different types of subsets and equalities, including M-subset/equality, F-subset/equality, L-subset/equality, and J-subset/equality. Furthermore, the distributive properties of these operations over various soft set operations are investigated. Finally, in order to determine the optimal alternative in the decision-making scenario, these products were applied to real-life problem involving uncertainty, in a manner appropriate to the problem context, demonstrating their practical applicability in the decision-making process. This study aims to contribute to the soft set theory literature by providing both theoretical depth and practical foundations for decision-making applications.

Number of pages	: 97
Keywords	: Soft star-product, Soft lamda-product, Soft gamma-product, Decision making
Supervisor	: Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Hayat, insanın kendini keşfetme yolculuğudur. Bu yolculukta karşılaştığımız her zorluk, bizi biraz daha olgunlaştırırken; her başarı, çabalarımızın karşılığını aldığımız birer kıymetli duraktır. Elinizdeki bu tez çalışması da benim için uzun, yoğun ve öğretici bir sürecin bir ürünü olarak anlam kazanmaktadır.

Matematiğin soyut dünyasında yaptığım bu akademik yolculukta, hem bilimsel gelişimime hem de kişisel olgunlaşmama katkı sağlayan birçok değerli isim oldu. Onların destekleri, rehberlikleri ve yanımda olmaları, bu çalışmanın ortaya çıkmasında en büyük itici güç olmuştur.

Bu süreçte kazandığım her bir deneyim, bundan sonraki akademik ve kişisel yaşamımda bana yol göstermeye devam edecektir.

Bu tez çalışmamın hazırlanmasında bilgi, ilgi ve desteğini benden hiçbir zaman esirgemeyen, akademik rehberliğiyle bana yol gösteren saygıdeğer danışmanım Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN'e en içten teşekkürlerimi sunuyorum. Kıymetli katkıları ve yol göstericiliği sayesinde, bu süreci hem verimli hem de anlamlı bir şekilde tamamlayabildim.

Hayatım boyunca her zaman yanımda olan, koşulsuz sevgileri ve destekleriyle varlığı bana güç veren sevgili annem Nazlan ŞENYİĞİT, babam Hüseyin ŞENYİĞİT, canım kardeşim Duru ŞENYİĞİT'e ve hayat arkadaşım Ufuk YAZICI'ya sonsuz teşekkür ederim. Varlıklarıyla bana umut oldular.

Bu yolculukta yanımda olan, emeği geçen herkese gönülden teşekkür ederim. Bu çalışmanın, alana katkı sunmasını ve bu alanda çalışmak isteyen araştırmacılar için yol gösterici olmasını temenni ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	9
3. ESNEK YILDIZ-ÇARPIM.....	16
3.1 Esnek Yıldız-Çarpım ve Özellikleri.....	16
3.2. Esnek Yıldız-Çarpım ve Dağılımları.....	23
3.3. Esnek Yıldız-Çarpım ve Karar Verme Problemi.....	33
4. ESNEK LAMDA-ÇARPIM.....	40
4.1. Esnek Lamda-Çarpımı ve Özellikleri.....	40
4.2. Esnek Lamda-Çarpımı ve Dağılımları.....	48
4.3. Esnek Lamda-Çarpım ve Karar Verme Problemi.....	57
5. ESNEK GAMMA-ÇARPIM.....	67
5.1. Esnek Gamma-Çarpımı ve Özellikleri.....	67
5.2. Esnek Gamma-Çarpımı ve Dağılımları.....	75
5.3. Esnek Gamma-Çarpım ve Karar Verme Problemi.....	84
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	91
KAYNAKLAR.....	92
ÖZGEÇMİŞ.....	97

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
$\emptyset$	Boş küme
$\exists$	Varlıksal niceleyici, en az bir
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
$\neq$	Eşit değildir
$\subseteq$	Alt kümesidir
$\not\subseteq$	Alt kümesi değildir
$\supseteq$	Kapsar
$\not\supseteq$	Kapsamaz
$\cap$	Kesişim
$\cup$	Birleşim
E	Parametre kümesi
$S_E(U)$	E üzerinde tanımlı tüm esnek kümelerin kümesi
U	Evrensel küme
$P(U)$	U nun kuvvet kümesi
(F, A)	(F, A) esnek kümesi
$(F, A)^r$	(F, A) esnek kümenin tümleyeni
$\emptyset_A$	A ya göre boş esnek küme
$\emptyset_E$	E ye göre boş esnek küme

U_A	A ya göre evrensel küme
U_E	Tam esnek küme
$\emptyset_\emptyset$	Boş esnek küme
$S_A(U)$	A kümesi üzerinde tanımlı tüm esnek kümelerin kümesi
$+$	Kapsayıcı tümleyen işlemi
λ	Lamda işlemi
θ	Dışlayıcı tümleyen işlemi
$*$	Yıldız işlemi
γ	Gama işlemi
Δ	Simetrik fark işlemi
$\cong$	Esnek alt küme
Λ_γ	Esnek gamma-çarpım
V_λ	Esnek lamda-çarpım
V_*	Esnek yıldız-çarpım

1. GİRİŞ

Gündelik hayatta karşılaşılan pek çok durumu açıklamak ve bu durumlar hakkında kesin yargılara varmak çoğu zaman güçtür. Çünkü bir olgunun doğru ya da yanlış, hatta kime göre doğru veya yanlış olduğuna ilişkin değerlendirmeler; zaman, mekân ve bireyler bağlamında farklılık göstermektedir. İnsanlar günlük yaşamda sıkça belirsizlik içeren ifadelerle başvururlar. Örneğin, “pahalı bir konut”, “şık bir otomobil”, “kaliteli bir kıyafet”, “güzel araba”, “yüksek hız”, “lezzetli yemek”, “kısa boy” veya “zor soru” gibi nitelendirmeler, kişiden kişiye değişen algılara dayanmakta ve bu da söz konusu ifadelerin belirsizlik taşımasına neden olmaktadır. Bu tür belirsizlikler yalnızca gündelik dilin değil, aynı zamanda matematiğin ve diğer bilim dallarının da temel sorun alanlarından birini oluşturmaktadır. Nitekim biyoloji, sosyoloji, mühendislik, ekonomi, çevre bilimleri, tıp ve daha birçok disiplinde araştırmacılar karmaşık problemleri çözmeye çalışırken aynı zamanda bu problemlerin içerdiği belirsizliklerin modellenmesiyle de uğraşmışlardır. Ancak farklı biçimlerde ortaya çıkan belirsizliklerin klasik yöntemlerle modellenmesi her zaman mümkün olmamaktadır. Bu nedenle zaman içinde, çevremizdeki belirsizlikleri giderebilmek ve matematiksel olarak ifade edebilmek için çeşitli teorik yaklaşımlar geliştirilmiştir.

Bu noktada, sezgisel bulanık kümeler teorisi (Atanassov, 1986) ve bulanık kümeler teorisi (Zadeh, 1965) gibi çeşitli matematiksel yöntemler belirsizliği açıklamaya yönelik temel araçlar arasında yer almaktadır. Bununla birlikte bu teorilerin her birinin kendi içinde belirli sınırlılıkları ve güçlükleri bulunmaktadır. Belirsizliğin modellenmesinde öncü yaklaşımlardan biri olan bulanık kümeler teorisi, Zadeh (1965) tarafından geliştirilmiş olup üyelik fonksiyonu aracılığıyla tanımlanmaktadır. Her bir öge için bu fonksiyon, $[0,1]$ aralığında bir reel sayı ile ifade edilir ve bu değer, ögenin kümeye ait olma derecesini göstermektedir. Ancak üyelik fonksiyonunun belirlenmesinde tek bir yöntem bulunmadığından, söz konusu fonksiyon doğası gereği öznel bir karakter taşımakta ve her özel durumda fonksiyonun nasıl tanımlanacağı ciddi bir sorun oluşturmaktadır.

Bu zorlukları aşmak amacıyla Molodtsov (1999), belirsizliği ifade etmek ve belirsizlik içeren problemlerin çözümünde kullanılmak üzere “Esnek Küme Teorisi” adı verilen yeni bir yaklaşım geliştirmiştir. Esnek küme teorisini ön plana çıkaran en temel özelliklerden biri, üyelik fonksiyonuna duyulan gereksinimin ortadan kaldırılmış olmasıdır. Bilindiği üzere,

klasik bulanık küme yaklaşımında üyelik fonksiyonu, her bir elemanın ilgili kümeye aitlik düzeyini belirleyen temel bir yapı taşıdır. Oysa esnek küme teorisinde, böyle bir fonksiyon tanımlamaya gerek duyulmaksızın kümeler doğrudan parametreler aracılığıyla ele alınmakta ve işlenebilmektedir. Bu durum, teoriyi uygulamada daha sade, esnek ve kullanıcı dostu bir yapıya kavuşturmuştur. Esnek küme teorisinin, üyelik fonksiyonunun belirlenmesine ilişkin öznel sorunları ortadan kaldırmış ve böylece farklı disiplinlerde uygulanabilirliğini önemli ölçüde artırmış olması, onu klasik yaklaşımlara kıyasla çeşitli alanlarda daha elverişli bir araç hâline getirmiştir. Bu sayede esnek kümeler, yalnızca kuramsal matematik alanında değil; mühendislikten tıba, sosyal bilimlerden ekonomi ve yönetim bilimlerine kadar geniş bir yelpazede karşılaşılan belirsizlik içeren problemler için etkili bir modelleme aracı olarak kullanılabilmektedir. Bilgi sistemlerinin analizi, çok kriterli karar verme süreçleri ve karmaşık veri yapılarına dayalı uygulamalar, esnek küme teorisinin başarılı bir şekilde entegre edildiği alanlar arasında yer almaktadır. Nitekim Molodtsov (1999), esnek küme teorisini matematiğin pek çok alanına başarıyla uygulamış; bu kapsamda oyun teorisi, Riemann integrali, Perron integrali, yöneylem araştırması, olasılık teorisi ve ölçüm teorisi gibi alanlarda dikkate değer katkılar sunmuştur. Molodtsov'un öncülüğünü yaptığı bu yaklaşım, kısa sürede geniş bir araştırma alanı doğurmuş ve pek çok matematikçi tarafından geliştirilmiştir. Bu çok yönlü kullanım olanakları, esnek küme teorisinin yalnızca soyut matematiksel yapılarla sınırlı olmadığını, aynı zamanda mühendisliksel problemlerin çözümünde de etkili bir yöntem olarak değerlendirilebileceğini göstermektedir. Teorinin sunduğu yapısal esneklik ve parametrik tanımlama imkânı, belirsizlik içeren sistemlerin daha gerçekçi ve uygulanabilir biçimde modellenmesine olanak tanımakta; klasik yaklaşımların yetersiz kaldığı durumlarda daha güvenilir ve etkili sonuçlara ulaşılmasını sağlamaktadır. Bu bağlamda esnek küme teorisi, yalnızca yeni bir matematiksel kuram olarak değil, aynı zamanda belirsizliklerin yoğun şekilde hissedildiği gerçek yaşam problemleri için güçlü bir çözüm alternatifi olarak değerlendirilmektedir. Dolayısıyla, esnek küme teorisinin gelişimi, hem teorik matematik açısından hem de uygulamalı bilimlerde karar verme, modelleme ve analiz süreçlerine katkı sunan önemli bir yenilik olarak literatürdeki yerini almıştır. Bugün gelinen noktada esnek küme teorisi, hem teorik matematikte hem de yapay zekâ, bilgi sistemleri, karar verme problemleri, tıp ve mühendislik gibi uygulamalı alanlarda etkin bir biçimde kullanılmaktadır. Böylece, belirsizliğin modellenmesi için Zadeh'in (1965) bulanık kümeler teorisi ile başlayan süreç,

Molodtsov'un (1999) soft set yaklaşımıyla daha esnek ve geniş kapsamlı bir çerçeveye kavuşmuştur.

Esnek küme teorisinin gelişim süreci, birçok araştırmacının katkısıyla zenginleşmiş ve teori zamanla çok sayıda uygulama alanına yayılmıştır. Bu çerçevede ilk önemli adımlardan biri, Pawlak'ın (1982) yaklaşımlı kümeleri tanımlayarak belirsizliğin modellenmesine yönelik sunduğu kavramsal altyapıdır. Bu çalışmayı takiben, Maji, Roy ve Biswas (2002), esnek kümeler bağlamında parametre indirgemesi kavramını ortaya koymuş; esnek kümelerle bulanık kümeleri birleştirerek "bulanık esnek küme" yapısını tanımlamışlardır. Böylece, daha önce esnek kümeler için geliştirilen tanım ve yöntemlerin bulanık yapı içerisine adapte edilmesi sağlanmış ve teorisinin uygulama alanı genişletilmiştir. Xiao, Li, Zhong ve Yang (2003), esnek kümelere dayalı bir yapay hesaplama metodolojisi geliştirerek, bu yöntemi iş dünyasındaki rekabet gücünün değerlendirilmesi amacıyla uygulamışlardır. Bu çalışmayı izleyen Yang, Qu ve Li (2004), esnek kümeler ile yaklaşımlı kümelere yararlanarak klinik teşhis, karar analizi ve indüksiyon süreçlerinde uygulanabilir örnekler sunmuşlardır. Benzer şekilde, Chen, Tsang ve Yeung (2003), ardından Chen, Tsang, Yeung ve Wang (2005) ile Kong, Gao, Wang ve Li (2008), parametre indirgemesi üzerine odaklanarak, esnek kümelerin daha verimli analiz edilebilmesi için yeni yöntemler geliştirmişlerdir. Xiao, Chen, Zhong ve Ye (2005) ile Pei ve Miao (2005) tarafından yapılan çalışmalar, esnek küme tabanlı bilgi sistemlerinin yapılandırılması ve bu yapıların veri analizi ile bilgi teknolojileri alanlarındaki potansiyelini ortaya koymuştur. Mushrif, Sengupta ve Ray (2006), sınıflandırma problemlerine yönelik olarak esnek küme temelli bir yaklaşım geliştirmiş ve bu yaklaşımın sınıflandırma süreçlerinde uygulanabilirliğini incelemişlerdir. Yang, Yu, Yang ve Wu (2007), geleneksel esnek küme teorisini bulanık bağlamda yeniden ele alarak, bulanık üyelik fonksiyonları ile parametreye yakın elemanları tanımlamış ve bu yapıya yeni bir boyut kazandırmışlardır. Enginoğlu (2008), esnek kümeler ve işlemleri üzerine işlevsel yaklaşımlar sunarak, esnek çarpım ve çeşitli karar fonksiyonlarını tanımlamış ve esnek karar verme yöntemlerini sistematik hâle getirmiştir. Çağman ve Enginoğlu (2010a), esnek kümeleri ve esnek küme işlemlerini daha işlevsel hâle getirmek amacıyla yeniden tanımlamış; alternatifler arasında en uygun seçeneği belirlemeye yönelik sistematik bir karar verme süreci geliştirmişlerdir. Takip eden çalışmada, Çağman ve Enginoğlu (2010b) esnek matrisleri tanımlamış ve bu matrisleri daha işlevsel hâle getirerek, esnek maksimum-minimum karar verme yöntemini belirsizlik içeren problemlere uygulanabilir biçimde

sunmuşlardır. Feng, Li ve Çağman (2012), tekdüze karar verme ilkesini incelemiş ve bu ilkenin karar süreçlerinde ne ölçüde sınırlayıcı etki yarattığını analiz etmişlerdir. Kharal (2014), esnek kümelerdeki üyelik yapısını derinlemesine analiz ederek bu yapıların daha iyi anlaşılmasına katkı sağlamıştır. Atagün, Kamacı ve Oktay (2018) ise genelleştirilmiş karar verme yöntemi geliştirerek, daha esnek ve dinamik bir karar süreci için yeni bir yaklaşım önermişlerdir. Aynı yıl Kamacı, Saltık, Akız ve Atagün (2018), ters esnek matris kavramını detaylı biçimde açıklamış ve bu yapının karar verme ile problem çözme süreçlerine olan katkısını ele almışlardır. Yang ve Yao (2020), üç yönlü karar verme sistemlerine ilişkin niteliksel bir model önererek bu sistemlerin belirsizlik ortamında nasıl daha etkin yapılandırılabilirliğini göstermiştir. Petchimuthu, Garg, Kamacı ve Atagün (2020), çok kriterli grup karar verme problemini farklı değerlendirme ölçütlerine göre analiz etmiş ve bu problemlerin çözümüne yönelik özgün bir algoritma geliştirmiştir. Zorlutuna (2021), esnek sınıflar üzerinde küme değerli dönüşüm kavramını irdelemiş ve bu yapının karar verme süreçlerine entegrasyonunu incelemiştir. Bu çalışmalar bütüncül olarak değerlendirildiğinde, esnek küme teorisinin yalnızca kuramsal açıdan değil, aynı zamanda karar verme, bilgi sistemleri ve veri analizi gibi uygulamalı alanlarda da güçlü bir potansiyel sunduğu görülmektedir. Söz konusu literatür, esnek kümelerin belirsizlik altında yapılan analizlerde giderek daha fazla tercih edilen bir yaklaşım hâline geldiğini ortaya koymaktadır.

Molodtsov tarafından 1999 yılında ortaya konulan esnek küme teorisinde temel işlemler tanımlanmış olmakla birlikte, bilinen esnek küme işlemleri ve özellikleri Pawlak'ın (1982) yaklaşımlı küme teorisinden de yararlanılarak Maji, Biswas ve Roy (2003) tarafından sistematik biçimde geliştirilmiştir. Bu çalışmada, esnek alt küme, esnek kümenin tümleyeni, iki esnek kümenin birleşimi ve kesişimi gibi yeni işlemler ilk kez ortaya konulmuştur. Devamında Pei ve Miao (2005), esnek kümeler için kesişim ve alt küme gibi temel kavramları ayrıntılı biçimde literatüre kazandırmıştır. Ancak, Yang (2008) ve diğer araştırmacılar, Maji ve arkadaşlarının (2003) tanımlamalarında birtakım hatalar bulunduğunu karşı örneklerle göstermiştir. Yang, Lin, Yang, Li ve Yu (2009), aralık değerli bulanık esnek küme kavramını geliştirmiş, bu kümeler üzerinde tümleyen, “VE” ve “VEYA” işlemlerini tanımlamış ve bu işlemler için De Morgan, birleşme ve dağılım özelliklerinin geçerliliğini kanıtlamışlardır. Benzer şekilde Ali, Feng, Liu, Min ve Shabir (2009), esnek kümelerle ilgili önceki çalışmalardaki bazı eksiklikleri gidererek, kısıtlanmış birleşim, kesişim, fark ve genişletilmiş kesişim gibi yeni ve önemli işlemleri literatüre kazandırmış,

ayrıca esnek kümelerin tümleyeni kavramını geliştirerek De Morgan yasalarının bu bağlamda geçerli olduğunu göstermişlerdir. Feng, Li, Davvaz ve Irfan Ali (2010), bulanık esnek kümeler olarak adlandırılan hibrit bir modeli tanımlarken; Qin ve Hong (2010), esnek kümelerin cebirsel yapılarını ve kafes özelliklerini incelemiştir. Sezgin ve Atagün (2011), esnek kümeler üzerinde daha önce ele alınmamış olan temel özellikleri sistematik biçimde çalışmış, bu işlemlerin birbirleriyle bağlantılarını göstermiş ve kısıtlı simetrik fark kavramını tanıtmıştır. Ali, Shabir ve Naz (2011) ise esnek kümelerin cebirsel yapısını derinlemesine inceleyerek monoid, hemihalka ve kafes gibi yapılar oluşturduğunu ortaya koymuştur. Ge ve Yang (2011), Maji ve arkadaşlarının (2011) işlemlerini detaylandırmış; Neog ve Sut (2011), esnek kümenin tümleyeni kavramını yeniden ele alarak De Morgan yasalarını bu yeni bağlamda tartışmıştır. Singh ve Onyeozili (2012a, 2012b, 2012c, 2012d) ise tümleyen kavramını yeniden tanımlayarak özellikle dağılma ve yutma kurallarına ilişkin önemli katkılar sunmuşlardır. Sonraki yıllarda çalışmalar, hem kısıtlanmış hem de genişletilmiş esnek küme işlemleri yönünde gelişmeye devam etmiştir. Zhu ve Wen (2013), kesişim, tümleyen ve fark işlemlerini yeniden tanımlayarak bu işlemlerin cebirsel özelliklerini analiz etmiştir. Son dönem çalışmalarda Husain ve Shivani (2018), esnek küme işlemlerini örneklerle detaylandırırken; Sezgin, Ahmad ve Mehmood (2019), genişletilmiş farkı incelemişlerdir. Stojanovic (2021) ise genişletilmiş simetrik fark kavramını tanımlamış ve özelliklerini açıklamıştır.

Güncel literatürde esnek küme işlemlerinin özellikle iki ana başlık altında yoğunlaştığı görülmektedir: kısıtlanmış işlemler ve genişletilmiş işlemler. Bu bağlamda Eren (2019) ikili parçalı fark işlemini tanımlamış, Sezgin ve Çalışıcı (2024) bu işlemin klasik fark işlemiyle ilişkisini incelemiştir. Çağman (2021), kümelerin koşullu tümleyenlerini tanımlayarak bunların grup teorisine uygulanabilirliğini ele almıştır. Bu çalışmadan hareketle Sezgin, Çağman, Atagün ve Aybek (2023), yeni ikili küme işlemlerini ortaya koymuştur. Daha sonra Aybek (2024), söz konusu ikili küme işlemlerini esnek küme teorisine uyarlamış ve bu bağlamda yeni kısıtlanmış ve genişletilmiş esnek küme işlemleri tanımlayarak, bu işlemlerin özelliklerini ayrıntılı biçimde incelemiştir. Esnek küme teorisine yeni bir boyut kazandıran tümleyenli esnek genişletilmiş işlemler ise Akbulut (2024), Demirci (2024) ve Sarılioğlu (2024) tarafından sistematik olarak çalışılmıştır. Öte yandan, Eren'in (2019) tanımladığı esnek ikili parçalı fark işlemi formunu temel alan Yavuz (2024), pek çok yeni esnek ikili parçalı işlem tanımlamış ve bu işlemlerin özelliklerini kapsamlı biçimde analiz etmiştir. Bu

çalışmalar, esnek küme teorisinin yapısal çeşitliliğini artırarak hem teorik hem de uygulamalı boyutlarda güçlü bir altyapı oluşturmuştur. Bu doğrultuda, ilgili literatür incelendiğinde, esnek küme teorisi üzerine yapılan çalışmaların yalnızca teorik açıdan değil, aynı zamanda uygulamalı matematik ve karar verme süreçlerinde de önemli bir ilerleme sağladığı görülmektedir. Mevcut araştırmalar, esnek küme işlemlerinin çeşitlendirilmesini ve bu işlemlerin özelliklerinin sistematik biçimde incelenmesini mümkün kılmıştır; bu da teorisinin farklı matematiksel ve uygulamalı alanlarda daha etkin bir şekilde kullanılmasına olanak tanımaktadır. Dolayısıyla, yapılan bu çalışmalar, esnek küme teorisinin hem teorik bütünlüğünü güçlendirmiş hem de pratik uygulamalar açısından literatüre değerli katkılar sunmuştur.

Klasik küme teorisinde yer alan temel kavramlardan olan altküme ve eşitlik kavramları, esnek küme teorisinde de farklı araştırmacılar tarafından çeşitli yönleriyle incelenmiştir. Maji ve diğerleri (2003), esnek altküme ve eşitlik için ilk tanımı vermiş olsalar da, tanım sağlanması oldukça zordur. Söz konusu çalışmada matematiksel doğrulama olmaksızın esnek dağılım yasaları üzerine bazı sonuçlar sunulmuş ve Ali ve diğerleri (2009) tarafından vurgulandığı gibi bu çalışmada çürütülmüş bazı önermeler yer almaktadır. Esnek altküme kavramı daha sonra Pei ve Miao (2005) ile Feng ve diğerleri (2008) tarafından genişletilmiş ve Maji ve arkadaşlarının (2003) yöntemlerinin bir genellemesi olarak ele alınmıştır. Qin ve Hong (2010), esnek kümeler üzerinde kongruens ilişkilerini tanıtmış ve iki yeni tür esnek eşitlik ilişkisini incelemiştir. Aralık değerli bulanık esnek kümeler üzerine çalışmalarda Jun ve Yang (2011), esnek altküme kavramını daha da genişletmiş ve Maji'nin dağılım yasalarını, genelleştirilmiş esnek eşitlik ilişkileri (J-esnek eşitlik ilişkisi olarak adlandırılmaktadır) aracılığıyla yeniden düzenlemeye çalışmıştır. Bu çalışma, literatürde "esnek çarpım işlemlerinin genelleştirilmiş dağılım yasaları" olarak bilinen güncel bir sonucu ortaya koymuştur. Liu, Feng ve Jun (2012), kısa bir araştırma notunda Jun ve Yang'ın (2011) çalışmalarından hareketle esnek L-altkümeleri ve esnek L-eşitlik ilişkilerini tanımlamışlardır. Önemli bir bulgu olarak, dağılım yasalarının literatürdeki tüm esnek eşitlik türleri için geçerli olmadığını göstermişlerdir. Bu bağlamda Feng ve Li (2013), Maji ve diğerlerinin (2003) tanımladığı esnek çarpım işlemlerini incelemiş ve Liu ve diğerlerinin (2012) çalışmasında başlatılan araştırmaları sürdürmüştür. Feng ve Li (2013), farklı esnek altküme türlerine ve esnek çarpım işlemlerinin cebirsel özelliklerine odaklanmış; dağılım yasalarının yanı sıra değişme ve birleşme gibi temel özellikleri de detaylı biçimde ele

almışlardır. Ayrıca, esnek L-altkümeleri aracılığıyla AND-çarpımı ve OR-çarpımı gibi esnek çarpım işlemleri üzerine teorik sonuçlar sunmuşlardır. Bu kapsamda, literatürde eksik kalan bazı sonuçlar tamamlanmış; J-eşitlik ve L-eşitlik durumlarında esnek çarpım işlemlerinin cebirsel özellikleri ayrıntılı biçimde incelenmiştir. Sonuç olarak, esnek L-eşitlik ilişkilerinin serbest esnek cebirler üzerinde kongruens ilişkileri olduğu ve karşılık gelen bölüm yapılarının değişmeli yarıgruplar oluşturduğu ortaya konmuştur. Abbas, Ali ve Romaguera (2014), genelleştirilmiş esnek eşitlik kavramını ortaya koymuş, bunun alt ve üst esnek eşitlikler ile ilişkisini tartışmıştır. Daha sonra Abbas, Ali ve Romaguera (2017), koşulları hafifleterek genelleştirilmiş sonlu esnek eşitlik, birleşim ve kesişim kavramlarını geliştirmiştir. Al-shami (2019), Al-shami ve El-Shafei (2020), T-esnek alt küme ve T-esnek eşitlik ilişkilerini tanıtmış, bu kavramları T-esnek birleşim ve kesişim işlemlerine uyarlamışlardır. Ali, Saleem, Sundus ve Khaleeq (2022), esnek kümeler bağlamında genelleştirilmiş yeni kavramlar üzerinde durmuştur. Sezgin, Atagün ve Çağman (2025), VE-çarpımının cebirsel özelliklerini (idempotentlik, değişme ve birleşme yasaları) kapsamlı bir şekilde analiz etmiş ve bu özellikleri esnek F, M, L ve J eşitlikleriyle karşılaştırmıştır. Çalışmalarında, evrensel küme üzerindeki tüm esnek kümelerin, kısıtlı/genişletilmiş birleşim ve VE-çarpımı altında, esnek L-eşitliği bağlamında birim elemanlı değişmeli yarıhalka (hemiring) oluşturduğunu göstermişlerdir. Ayrıca, kısıtlı/genişletilmiş simetrik fark ve VE-çarpımı kombinasyonunun da aynı yapıyı sağladığını ortaya koymuşlardır. Çağman ve Enginoğlu (2010a), esnek kümeler için VE-çarpım, VEYA-çarpım, VE-DEĞİL-çarpım ve VEYA-DEĞİL-çarpım gibi çeşitli esnek çarpım işlemlerini esnek küme teorisine kazandırmışlardır. Uni-int ve int-uni karar fonksiyonları ile bu çarpımları, alternatifler arasında en uygun seçeneği belirlemeye yönelik sistematik bir karar verme süreci geliştirmede kullanmış ve bunun belirsizlikle başa çıkmada etkili olduğunu göstermişlerdir.

Esnek çarpım işlemleri, esnek küme teorisinin yapısal temelini oluşturmaktadır. Bu işlemler, yalnızca teorik düzlemde anlamlı bir çerçeve sunmakla kalmayıp, aynı zamanda uygulamalı alanlarda da geniş kapsamlı ve işlevsel bir kullanım alanına sahiptir. Özellikle esnek hesaplama teknikleri ve esnek karar verme yaklaşımları, doğrudan bu işlemler üzerine inşa edilmekte; belirsizlik içeren problemlerin modellenmesinde güçlü bir araç olarak öne çıkmaktadır. Bu sayede, mühendislik, matematiksel modelleme, yapay zekâ, bilgi sistemleri ve karar destek sistemleri gibi çok sayıda uygulama alanında, belirsizliklerin etkin biçimde yönetilmesine katkı sağlamaktadır. Dolayısıyla, esnek küme işlemleri hem kuramsal olarak

hem de uygulamalı bilimlerdeki etkileri bakımından esnek küme teorisinin en kritik bileşenlerinden biri olarak değerlendirilmektedir.

Bu tez çalışmasında, üç yeni esnek çarpım işlemi tanımlanmış, teorik olarak cebirsel özellikleri incelenmiş, bu çarpımlar, Çağman ve Enginoğlu (2010a) tarafından önerilen uni-int ve int-uni karar verme metoduyla, karar verme senaryosunda en iyi seçeneği belirlemek amacıyla bu çarpımlar günlük hayatta belirsizlik içeren problem durumlarına uygulayarak, karar verme sürecinde nasıl sonuçlar verdiği açıklanmıştır. Tezin ilk bölümünde, esnek küme kuramına ilişkin kapsamlı bir literatür taraması gerçekleştirilmiştir. İkinci bölümde, çalışmanın kuramsal temelini oluşturmak amacıyla esnek kümelerle dair temel tanımlar sunulmuş; böylece tezde ele alınacak özgün katkılar için gerekli altyapı hazırlanmıştır. Tezin özgün yönünü oluşturan üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerde, esnek küme kuramına yeni çarpım türleri kazandırılarak kuramsal yapının genişletilmesi hedeflenmiştir. Bu bağlamda, üçüncü bölümde esnek yıldız-çarpımı, dördüncü bölümde esnek lamda-çarpımı, beşinci bölümde esnek gamm-çarpımı tanımlanmıştır. Her bir işlem için örnekler verilmiş, farklı esnek altküme ve eşitlik türleri (M-, F-, L- ve J-eşitlik ve alt küme) bağlamında cebirsel özellikleri ayrıntılı olarak incelenmiş ve söz konusu çarpımların, diğer esnek küme işlemleri üzerine dağılma kuralları üzerinde değerlendirmeler yapılmıştır. Ayrıca, geliştirilen bu işlemlerin karar verme süreçlerindeki uygulanabilirliğini göstermek amacıyla çeşitli karar problemleri oluşturulmuş ve çözüm süreçleri sistematik biçimde sunulmuştur. Bu kapsamda, Çağman ve Enginoğlu (2010a) tarafından önerilen uni-int ve int-uni karar verme yöntemi esas alınarak, önerilen yapıların farklı uygulama alanlarında kullanılabilirliği gösterilmiştir. Bu tez, esnek küme literatürüne teorik bir derinlik kazandırmakla birlikte, tezin belirsizliklerin modellenmesindeki avantajlarından yola çıkarak, esnek karar verme kuramına yeni katkılar sunmayı amaçlamaktadır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, tez çalışmasında kullanılan esnek küme teorisi ile ilgili temel kavramlar ve özellikleri, Çağman (2021), Sezgin ve diğerleri (2023) tarafından sunulan yeni ikili işlemler detaylı olarak incelenecektir.

2.1.1 Tanım U evrensel kümesi, E parametreler kümesi, $P(U)$, U 'nun kuvvet kümesi olarak verilsin. Bir (J, E) sıralı ikilisi, U üzerinde esnek küme olarak adlandırılır. Burada J ,

$$J: E \rightarrow P(U)$$

ile verilen bir fonksiyondur (Molodtsov, 1999).

Maji ve diğerleri (2003), Molodtsov'un (1999) esnek küme tanımında, E parametreler kümesinin sabit bir alt kümesini seçerek, esnek küme tanımını aşağıdaki şekilde vermiştir:

U evrensel kümesi, E parametreler kümesi; $P(U)$, U 'nun kuvvet kümesi ve $\mathcal{M} \subseteq E$ olarak verilsin. Bir (J, K) sıralı ikilisi, U üzerinde esnek küme olarak adlandırılır. Burada J ,

$$J: K \rightarrow P(U)$$

ile verilen bir fonksiyondur (Maji ve diğerleri, 2003).

Literatürde esnek kümeler farklı gösterimlerle ifade edilmiştir. Bazı çalışmalarda J_M biçiminde gösterim tercih edilse de, bu tez çalışmasında Molodtsov (1999) ile Maji ve arkadaşları (2003) tarafından kullanılan (J, M) gösterimi benimsenmiştir. Molodtsov (1999) tarafından önerilen esnek küme tanımı, Çağman ve Enginoğlu (2010a) tarafından güncellenerek daha çağdaş bir yapı kazandırılmıştır.

Bu tez kapsamında, U kümesi üzerinde tanımlı tüm esnek kümeler $S_E(U)$ ile gösterilecektir. K parametreler kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, yalnızca parametre kümesi K olan esnek kümeler $S_K(U)$ ile ifade edilecektir. Yani, $S_K(U)$, parametre kümesi sadece K

olan esnek kümelerden oluşurken, buna karşın, $S_E(U)$ kümesinde parametre kümesi herhangi bir küme olabilen, U üzerindeki tüm esnek kümeler yer alır.

2.1.2 Tanım (J, K) , U üzerinde tanımlı bir esnek küme olsun. Her $k \in K$ için, $J(k) = \emptyset$ ise, bu durumda (J, K) esnek kümesine boş esnek küme adı verilir ve $\emptyset_K$ ile gösterilir. Benzer şekilde, $k \in K$ için $J(k) = U$ ise, (J, K) evrensel esnek küme olarak adlandırılır ve U_K ile ifade edilir (Ali ve diğerleri, 2009).

U üzerinde tanımlı boş esnek küme, boş parametre kümesine sahip olan tek esnek kümedir ve $\emptyset_\emptyset$ ile gösterilir. Burada, $\emptyset_M$ ve $\emptyset_\emptyset$ 'nin farklı kavramlar olduğu unutulmamalıdır.

Maji ve arkadaşları (2003) tarafından geliştirilmiş ve oldukça katı bir biçimde tanımlanmış olan esnek alt küme için, karışıklığı önlemek amacıyla, özel bir isimlendirme yapılacaktır ve "esnek M-alt küme" terimi kullanılacaktır.

2.1.3 Tanım (J, K) ve (S, P) U üzerinde iki esnek küme olsun. Eğer,

- i. $K \subseteq P$ ve
- ii. Her $k \in K$ için $J(k) = S(k)$

sağlanıyorsa, bu durumda (J, K) , (S, P) 'nin esnek M-alt kümesi olarak adlandırılır ve bu ilişki $(J, K) \subseteq_M (S, P)$ şeklinde gösterilir. Buna ek olarak, $(S, D) \subseteq_M (J, K)$ ve aynı zamanda $(S, D) \subseteq_M (J, K)$ koşulları birlikte sağlanıyorsa, (J, K) ile (S, P) kümeleri birbirine esnek M-eşit olarak isimlendirilir ve bu durum $(J, K) =_M (S, P)$ biçiminde ifade edilir. (Maji ve diğerleri, 2003)

2.1.4 Tanım (J, K) ve (S, P) olmak üzere, U kümesi üzerinde iki esnek küme olsun. Eğer,

- i. $K \subseteq P$ ve
- ii. Her $k \in K$ için $J(k) \subseteq S(k)$

koşulları sağlanıyorsa, bu durumda (J, K) kümesi, (S, P) kümesinin esnek F-alt kümesi olarak adlandırılır ve bu ilişki $(J, K) \subseteq_F (S, P)$ biçiminde gösterilir. $(J, K) \subseteq_F (S, P)$ ve $(S, P) \subseteq_F (J, K)$ koşulları birlikte sağlanıyorsa, bu iki esnek küme F-eşit olarak tanımlanır ve bu durum $(J, K) \subseteq_F (S, P)$ şeklinde ifade edilir (Feng, Liu, Li ve arkadaşları, 2008).

Esnek F-alt küme ve esnek F-eşit tanımları ilk olarak Pei ve Miao (2005) tarafından verilmiştir. Ancak, bazı esnek küme makaleleri, esnek alt kümeler ve esnek eşitlikler ile ilgili olarak, bu tanımları ilk kez Feng ve diğerleri (2008) çalışmasında sunduklarını iddia etmiştir. Sonuç olarak, bu bağlantıyı ifade etmek için, "F" harfi kullanılmaktadır.

M ve F esnek eşitlik ilişkileri yani $=_M$ ve $=_F$ birbirine denktir. Başka bir ifadeyle,

$$(J, K) =_M (S, P) \Leftrightarrow (J, K) =_F (S, P)$$

Bu durum, söz konusu esnek kümelerin aynı parametre kümesini ve yaklaşım fonksiyonuna sahip olmasından kaynaklanmaktadır. Dolayısıyla, bu esnek eşitliği sağlayan iki esnek küme, gerçekte birbiriyle tamamen aynıdır. Bu nedenle, $(J, K) =_M (S, P)$ ifadesi aslında, $(J, K) = (S, P)$ anlamına gelmektedir.

Jun ve Yang, çalışmalarında F-esnek altkümeleri ve F-eşitlik ilişkilerini ele alarak, parametre kümeleri üzerindeki kısıtlamaları daha da genişletmişlerdir. Bu doğrultuda, söz konusu kavramlar Jun'un adının baş harfi olan J kullanılarak esnek J-altküme ve esnek J-eşitlik ilişkileri şeklinde tanımlanmıştır. Ancak bu kavramlar, esnek altküme ve eşitlik kavramlarının daha genel bir biçimde ifade edilmesi amacıyla geliştirilmiştir.

2.1.5 Tanım (J, K) ve (S, P) , U üzerinde tanımlı iki esnek küme olsun. Her $k \in K$ için, $J(k) \subseteq S(p)$ olacak şekilde $p \in P$ varsa, bu durumda (J, K) , (S, P) 'nin esnek J-alt kümesi olarak adlandırılır ve bu ilişki $(J, K) \subseteq_J (S, P)$ biçiminde ifade edilir. $(J, K) \subseteq_J (S, P)$ ve $(S, P) \subseteq_J (J, K)$ koşulları birlikte sağlanıyorsa, bu iki esnek küme birbirine J-eşit olarak adlandırılır ve bu eşitlik $(J, K) =_J (S, P)$ şeklinde gösterilir (Jun ve Yang, 2011).

$$(J, K) \subseteq_M (S, P) \Rightarrow (J, K) \subseteq_F (S, P) \Rightarrow (J, K) \subseteq_J (S, P)$$

olduğu Liu ve diğerleri (2012) ve Feng ve Li (2013) çalışmasında gösterilmiştir; ancak tersinin doğru olmayabileceği belirtilmiştir.

Liu ve diğerleri (2012), esnek M-alkümeleri ve ontoloji tabanlı esnek altkümeleri daha genel bir yapıya kavuşturarak, esnek L-alküme ve esnek L-eşitlik adı verilen yeni kavram tanıtmışlardır. Bu yeni kavramlar, esnek J-alkümeleri ve ontoloji tabanlı esnek altkümeler üzerine yapılan çalışmalardan esinlenerek geliştirilmiş ve esnek küme teorisinde daha kapsamlı bir yaklaşım sunmayı amaçlamaktadır.

2.1.6 Tanım (J, K) ve (S, P) , U üzerinde tanımlı iki esnek küme olsun. Her $k \in K$ için, $J(k) = S(p)$ olacak şekilde $p \in P$ varsa, bu durumda (J, K) , (S, P) 'nin esnek L-alt kümesi olarak adlandırılır ve bu ilişki $(J, K) \subseteq_L (S, P)$ biçiminde ifade edilir. $(J, K) \subseteq_L (S, P)$ ve $(S, P) \subseteq_L (J, K)$ koşulları birlikte sağlanıyorsa, bu iki esnek küme birbirine J-eşit olarak adlandırılır ve bu eşitlik $(J, K) =_J (S, P)$ şeklinde gösterilir (Liu ve diğerleri, 2012).

Liu ve diğerleri (2012), (J, K) ve (S, P) , U üzerinde iki esnek küme olmak üzere,

$$(J, K) \subseteq_M (S, P) \Rightarrow (J, K) \subseteq_L (S, P) \Rightarrow (J, K) \subseteq_J (S, P)$$

$$(J, K) =_M (S, P) \Rightarrow (J, K) =_L (S, P) \Rightarrow (J, K) =_J (S, P)$$

olduğunu, ancak bu sıralamanın tersinin doğru olmayabileceği belirtilmiştir.

Bu nedenle, esnek M-eşitliği (ve dolayısıyla esnek F-eşitliği), en güçlü ve katı eşitlik ilişkisi olarak kabul edilir. Diğer taraftan, esnek J-eşitliği en zayıf eşitlik bağlantısı olarak değerlendirilir. Bu iki kavram arasında ise esnek L-eşitlik bulunmaktadır (Liu ve diğerleri, 2012).

2.1.7 Tanım (J, K) , U kümesi üzerinde tanımlı bir esnek küme olsun. (J, K) esnek kümesinin esnek (bağlı) tümleyeni $(J, K)^r$ ile gösterilir ve bu tümleyen, $(J, K)^r = (J^r, K)$ şeklinde tanımlanır. Burada, her $k \in K$ için, $(J, K)^r(k) = U \setminus J(k) = [J(k)]'$ olacak şekilde belirlenir.

Bundan sonra, kısalık amacıyla, $[J(k)]'$ yerine doğrudan $J'(k)$ gösterimi kullanılacaktır (Ali ve diğerleri, 2009)

2.1.8 Tanım (J, K) ve (S, P) , U üzerinde tanımlı iki esnek küme olsun. Bu iki esnek kümenin VE-çarpımı, $(J, K) \wedge (S, P)$ şeklinde gösterilir ve her $(k, p) \in K \times P$ için,

$$L(k, p) = J(k) \cap S(p)$$

olmak üzere $(J, K) \wedge (S, P) = (L, K \times P)$ şeklinde tanımlanır (Maji ve diğerleri, 2003).

2.1.9 Tanım (J, K) ve (S, P) , U üzerinde tanımlı iki esnek küme olsun. Bu iki esnek kümenin VEYA-çarpımı, $(J, K) \vee (S, P)$ şeklinde gösterilir ve her $(k, p) \in K \times P$ için,

$$L(k, p) = J(k) \cup S(p)$$

olmak üzere $(J, K) \vee (S, P) = (L, K \times P)$ şeklinde tanımlanır (Maji ve diğerleri, 2003).

2.1.10. Not Çağman (2021) kapsayıcı ve dışlayıcı tümleyen şeklinde iki yeni tümleyen tanımlamıştır. X ve Y iki sabit küme ve $+$ ve θ sırasıyla kapsayıcı ve dışlayıcı tümleyenleri göstermek üzere, bu ikili işlemler

$$X + Y = X' \cup Y, \quad X\theta Y = X' \cap Y'$$

olarak tanımlanmıştır. Sezgin ve diğerleri (2023), bu iki işlem arasındaki ilişkileri incelemiş ve ayrıca bunun gibi üç yeni ikili işlem tanımlayıp, bunların birbirleriyle olan ilişkisini incelemiştir. X ve Y iki sabit küme olmak üzere,

$$X * Y = X' \cup Y', \quad X\gamma Y = X' \cap Y, \quad X\lambda Y = X \cup Y'$$

şeklinde tanımlanmıştır (Sezgin ve diğerleri, 2023).

" $\odot$ " sembolünü, küme işlemlerini temsil etmek üzere, kısıtlanmış, genişletilmiş ve esnek ikili parçalı işlemleri için aşağıda verilen tanımlar bulunmaktadır:

2.1.11 Tanım (J, K) ve (S, P) , U kümesi üzerinde iki esnek küme olsun. Bu iki esnek kümenin kısıtlanmış $\odot$ işlemi, $(J, M) \odot_R (S, D)$ şeklinde gösterilir. Burada, $\mathcal{J} = K \cap P$ ve her $j \in \mathcal{J}$ için, $\mathcal{U}(j) = J(j) \odot S(j)$ olmak üzere, $(J, K) \odot_R (S, P) = (\mathcal{U}, \mathcal{J})$ olarak tanımlanır. Burada, $\mathcal{J} = K \cap P = \emptyset$ olduğunda, $(J, K) \odot_R (S, P) = \emptyset_\emptyset$. (Ali ve diğerleri, 2009; Sezgin ve Atagün, 2011; Aybek, 2024)

2.1.12 Tanım (J, K) ve (S, P) , U kümesi üzerinde iki esnek küme olsun. Bu iki esnek kümenin genişletilmiş $\odot$ işlemi $(Y, \mathcal{J})$ olup, Burada, $Y = K \cup P$ ve her $j \in \mathcal{J}$ için

$$Y(j) = \begin{cases} J(j), & j \in K \setminus P \\ S(j), & j \in P \setminus K \\ J(j) \odot S(j), & j \in K \cap P \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(J, K) \odot_\varepsilon (S, P) = (Y, \mathcal{J})$ şeklinde yazılır (Maji ve diğerleri, 2003; Ali ve diğerleri, 2009; Sezgin ve diğerleri, 2019; Stojanovic, 2021; Aybek, 2024).

2.1.13 Tanım (J, K) ve (S, P) , U kümesi üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümeler için tanımlanan esnek ikili parçalı $\odot$ işlemi (Y, K) 'dır ve her $j \in K$ için,

$$Y(j) = \begin{cases} J(j), & j \in K \setminus P \\ J(j) \odot S(j), & j \in K \cap P \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(J, K) \widetilde{\odot} (S, P) = (Y, \mathcal{J})$ şeklinde yazılır (Eren, 2019; Sezgin ve Çalışıcı, 2024; Yavuz, 2024).

2.1.14 Tanım $(\mathfrak{J}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) , U kümesi üzerinde birer esnek küme olsun. $(\mathfrak{J}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) esnek kümelerinin esnek artı-çarpımı (V_+ -çarpımı) $(\mathfrak{J}, \mathcal{K})V_+(\beta, Z)$, her $(\ell, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için,

$$\check{Y}(\ell, z) = \mathfrak{J}(\ell) + \beta(z)$$

olmak üzere $(\mathfrak{J}, \mathcal{K})V_+(\beta, Z) = (\check{Y}, \mathcal{K} \times Z)$ şeklinde tanımlanır. Burada, $\mathfrak{J}(\ell) + \beta(z) = \mathfrak{J}'(\ell) \cup \beta(z)$ olduğu bilinmektedir (Sezgin ve Çam, Baskıda).

2.1.15 Tanım $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) , U kümesi üzerinde birer esnek küme olsun. $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) esnek kümelerinin esnek teta-çarpımı (Λ_θ -çarpımı) $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})\Lambda_\theta(\beta, Z)$, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için,

$$\ddot{Y}(k, z) = \mathfrak{A}(k)\theta\beta(z)$$

olmak üzere $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})\Lambda_\theta(\beta, Z) = (\ddot{Y}, \mathcal{K} \times Z)$ şeklinde tanımlanır. Burada, $\mathfrak{A}(k)\theta\beta(z) = \mathfrak{A}'(k) \cap \beta'(z)$ olduğu bilinmektedir (Sezgin ve Çam, 2025).

2.1.16 Tanım $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) , U kümesi üzerinde birer esnek küme olsun. $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) esnek kümelerinin esnek fark-çarpımı ($\Lambda_\setminus$ -çarpımı) $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})\Lambda_\setminus(\beta, Z)$, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için,

$$\ddot{Y}(k, z) = \mathfrak{A}(k) \setminus \beta(z)$$

olmak üzere $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})\Lambda_\setminus(\beta, Z) = (\ddot{Y}, \mathcal{K} \times Z)$ şeklinde tanımlanır. Burada, $\mathfrak{A}(k) \setminus \beta(z) = \mathfrak{A}(k) \cap \beta'(z)$ olduğu bilinmektedir (Sezgin ve Çam, 2024).

3. ESNEK YILDIZ-ÇARPIM

Bu bölümde, esnek yıldız-çarpımı adı verilen yeni bir çarpım tanımlanmış, örneği verilmiş, çarpımın tüm cebirsel özellikleri çeşitli esnek alt küme ve eşitlik kavramlarıyla ilişkili olarak detaylı bir şekilde incelenmiş, bu çarpımın diğer esnek küme işlemlerine dağılma kuralları araştırılmış ve son olarak bu çarpım karar verme problemlerine uygulanmıştır.

3.1. Esnek Yıldız-Çarpım ve Özellikleri

Bu alt bölümde, esnek yıldız-çarpım tanımlanmış, örneği verilmiş, çarpımın cebirsel özellikleri çeşitli esnek alt küme ve eşitlik kavramlarıyla ilişkili olarak detaylı bir şekilde incelenmiştir.

3.1.1 Tanım $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$ ve $(\mathfrak{B}, \mathcal{Z})$, U kümesi üzerinde birer esnek küme olsun. $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$ ve $(\mathfrak{B}, \mathcal{Z})$ esnek kümelerinin esnek yıldız-çarpımı (V_* -çarpımı) $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_*(\mathfrak{B}, \mathcal{Z})$, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için,

$$\check{Y}(k, z) = \mathfrak{A}(k) * \mathfrak{B}(z)$$

olmak üzere $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_*(\mathfrak{B}, \mathcal{Z}) = (\check{Y}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ şeklinde tanımlanır. Burada, $\mathfrak{A}(k) * \mathfrak{B}(z) = \mathfrak{A}'(k) \cup \mathfrak{B}'(z)$ olduğu bilinmektedir.

3.1.2 Örnek $E = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ parametre kümesi $\mathcal{K} = \{u_2, u_3\}$ ve $\mathcal{Z} = \{u_2, u_4\}$, E parametre kümesinin iki alt kümesi $U = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}$ evrensel küme olmak üzere, U üzerinde $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$ ve $(\mathfrak{B}, \mathcal{Z})$,

$$(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) = \{(u_2, \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}), (u_3, \{r_3, r_5\})\}$$

$$(\mathfrak{B}, \mathcal{Z}) = \{(u_2, \{r_1, r_2, r_3\}), (u_4, \{r_2, r_3, r_4\})\}$$

olarak tanımlanan iki esnek küme ve $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_*(\mathfrak{B}, \mathcal{Z}) = (\check{Y}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ olsun. Buradan,

$$(\ddot{Y}, \mathcal{K} \times Z) = \left\{ \left((l_2, l_2), \{r_4, r_5\} \right), \left((l_2, l_4), \{r_1, r_5\} \right), \left((l_3, l_2), \{r_1, r_2, r_4, r_5\} \right), \right. \\ \left. \left((l_3, l_4), \{r_1, r_2, r_4, r_5\} \right) \right\}$$

şeklindedir.

3.1.3 Önerme V_* -çarpımı, $S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: V_* -çarpımının, $S_E(U)$ kümesi üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Gerçekten $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) , U üzerinde esnek kümeler olmak üzere,

$$\Lambda_*: S_E(U) \times S_E(U) \rightarrow S_E(U)$$

$$((\mathfrak{Q}, \mathcal{K}), (\beta, Z)) \rightarrow (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z) = (\ddot{Y}, \mathcal{K} \times Z) = (\ddot{Y}, \mathcal{C})$$

olup, $(\ddot{Y}, \mathcal{C})$ de U üzerinde bir esnek kümedir.

3.1.4 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, (β, Z) ve $(\ddot{Y}, \mathcal{C})$, U kümesi üzerinde birer esnek küme olmak üzere,

$$(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*[(\beta, Z)V_*(\ddot{Y}, \mathcal{C})] \neq_M [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z)]V_*(\ddot{Y}, \mathcal{C})$$

olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, V_* -çarpımı birleşme özelliğine sahip değildir.

İspat: $S_E(U)$ kümesi üzerinde, V_* -çarpımının birleşme özelliğine sahip olmadığını göstermek için bir örnek verelim. $E = \{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ parametre kümesi, $\mathcal{K} = \{l_2, l_3\}$, $Z = \{l_1\}$ ve $\mathcal{C} = \{l_4\}$, E parametre kümesinin alt kümeleri, $U = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}$ evrensel küme olmak üzere, U üzerinde $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, (β, Z) ve $(\ddot{Y}, \mathcal{C})$ esnek kümeleri

$$(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = \{(l_2, \{r_3, r_4\}), (l_3, \{r_1\})\}, (\beta, Z) = \{(l_1, \emptyset)\}, (\ddot{Y}, \mathcal{C}) = \{(l_4, \{r_1, r_3, r_5\})\}$$

olarak tanımlansın. İlk olarak eşitsizliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\beta, Z)V_*(\ddot{Y}, \mathcal{C}) = (\zeta, Z \times \mathcal{C})$ olsun. Buradan,

$$(\zeta, Z \times C) = \{((\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_4), \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4, \mathfrak{r}_5\})\}$$

elde edilir. $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\zeta, Z \times C) = (\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times (Z \times C))$ olsun. Böylece,

$$(\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times (Z \times C)) = \{((\mathfrak{u}_2, (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_4)), \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_5\}), ((\mathfrak{u}_3, (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_4)), (\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4, \mathfrak{r}_5))\}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sol tarafından devam edilecek olursa, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \vee_* (\beta, Z) = (\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times Z)$ olsun. Buradan,

$$(\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times Z) = \{((\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_1), \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4, \mathfrak{r}_5\}), ((\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_1), \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4, \mathfrak{r}_5\})\}$$

elde edilir. $(\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times Z)V_*(\check{\gamma}, \mathcal{C}) = (\zeta, (\mathcal{K} \times Z) \times \mathcal{C})$ olsun. Böylece,

$$(\zeta, (\mathcal{K} \times Z) \times \mathcal{C}) = \{(((\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_1), \mathfrak{u}_4), \{\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_4\}), (((\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_1), \mathfrak{u}_4), \{\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_4\}))\}$$

elde edilir. Buradan, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times (Z \times C)) \neq_M (\zeta, (\mathcal{K} \times Z) \times \mathcal{C})$ olduğu görülür. Benzer şekilde, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times (Z \times C)) \neq_L (\zeta, (\mathcal{K} \times Z) \times \mathcal{C})$ ve $(\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times (Z \times C)) \neq_J (\zeta, (\mathcal{K} \times Z) \times \mathcal{C})$ tanımlardan açıktır.

3.1.5 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) , U üzerinde birer esnek küme olmak üzere $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z) \neq_M (\beta, Z)V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde V_* -çarpımı M -eşitliği altında değişme özelliğine sahip değildir.

İspat: $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z) = (\check{\gamma}, \mathcal{K} \times Z)$ ve $(\beta, Z)V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{A}, Z \times \mathcal{K})$ olsun. $\mathcal{K} \times Z \neq Z \times \mathcal{K}$ olduğundan ispat açıktır.

3.1.6 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) , U üzerinde birer esnek küme olmak üzere $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z) =_L (\beta, Z)V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde V_* -çarpımı L -eşitliği altında değişme özelliğine sahiptir.

İspat: $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z) = (\ddot{Y}, \mathcal{K} \times Z)$ ve $(\beta, Z)V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{A}, Z \times \mathcal{K})$ olsun. Buradan, her $(\ell, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için, $\ddot{Y}(\ell, z) = \mathfrak{Q}'(\ell) \cup \beta'(z)$ ve her $(z, \ell) \in Z \times \mathcal{K}$ için, $\mathfrak{A}(z, \ell) = \beta'(z) \cup \mathfrak{Q}'(\ell)$. Her $(\ell, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için $\ddot{Y}(\ell, z) = \mathfrak{Q}'(\ell) \cup \beta'(z) = \beta'(z) \cup \mathfrak{Q}'(\ell)$ olacak şekilde $(z, \ell) \in Z \times \mathcal{K}$ olduğundan, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z) \subseteq_L (\beta, Z)V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$.

Benzer şekilde her $(z, \ell) \in Z \times \mathcal{K}$ için $\beta'(z) \cup \mathfrak{Q}'(\ell) = \mathfrak{Q}'(\ell) \cup \beta'(z)$ olacak şekilde $(\ell, z) \in \mathcal{K} \times Z$ olduğundan, $(\beta, Z)V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \subseteq_L (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z)$ elde edilir. Böylece, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z) =_L (\beta, Z)V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, dolayısıyla $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z) =_J (\beta, Z)V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ de sağlanır.

3.1.7 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, U üzerinde bir esnek küme olmak üzere, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*\emptyset_\emptyset =_M \emptyset_\emptyset V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_M \emptyset_\emptyset$ olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, V_* -çarpımının M-eşitliğine göre yutan elemanı boş esnek kümedir.

İspat: $\emptyset_\emptyset = (\ddot{Y}, \emptyset)$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*\emptyset_\emptyset = (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\ddot{Y}, \emptyset) = (\beta, \mathcal{K} \times \emptyset) = (\beta, \emptyset)$ olsun. Parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_\emptyset$ olduğundan, $(\beta, \emptyset) = \emptyset_\emptyset$ elde edilir. $\emptyset_\emptyset V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_M \emptyset_\emptyset$ olduğunun ispatı ise benzer şekilde gösterilir.

3.1.8 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, U üzerinde bir esnek küme olsun. O halde, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*\emptyset_{\mathcal{K}} =_M \emptyset_{\mathcal{K}} V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_M U_{\mathcal{K} \times \mathcal{K}}$.

İspat: $\emptyset_{\mathcal{K}} = (\ddot{Y}, \mathcal{K})$ olsun. Buradan, her $\ell \in \mathcal{K}$ için $\ddot{Y}(\ell) = \emptyset$. $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*\emptyset_{\mathcal{K}} = (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\ddot{Y}, \mathcal{K}) = (\beta, \mathcal{K} \times \mathcal{K})$ olsun. Böylece, her $(\ell, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ için $\beta(\ell, z) = \mathfrak{Q}'(\ell) \cup \ddot{Y}'(z) = \mathfrak{Q}'(\ell) \cup \emptyset' = \mathfrak{Q}'(\ell) \cup U = U$ olup $(\beta, \mathcal{K} \times \mathcal{K}) = U_{\mathcal{K} \times \mathcal{K}}$ elde edilir. Benzer şekilde $\emptyset_{\mathcal{K}} V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_M U_{\mathcal{K} \times \mathcal{K}}$ olduğu da gösterilebilir.

3.1.9 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, U üzerinde bir esnek küme olsun. O halde, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*U_{\mathcal{K}} =_M U_{\mathcal{K}} V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_M (\mathfrak{Q}, \mathcal{K} \times \mathcal{K})^r$.

İspat: $U_{\mathcal{K}} = (\ddot{Y}, \mathcal{K})$ olsun. O halde, her $\ell \in \mathcal{K}$ için $\ddot{Y}(\ell) = U$. $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*U_{\mathcal{K}} = (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\ddot{Y}, \mathcal{K}) = (\beta, \mathcal{K} \times \mathcal{K})$ olsun. Buradan, her $(\ell, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ için $\beta(\ell, z) =$

$\mathfrak{A}'(\mathcal{K}) \cup \ddot{Y}'(z) = \mathfrak{A}'(\mathcal{K}) \cup U' = \mathfrak{A}'(\mathcal{K}) \cup \emptyset = \mathfrak{A}'(\mathcal{K})$ olup $(\beta, \mathcal{K} \times \mathcal{K}) = (\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times \mathcal{K})^r$ elde edilir. Benzer şekilde $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_*(\ddot{Y}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times \mathcal{K})^r$ olduğu da gösterilir.

3.1.10 Önerme $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$, U üzerinde bir esnek küme olmak üzere, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})^r \cong_J (\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_*(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$ olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde V_* -çarpımı J -eşitliğine göre denk güçlülük (idempotent) özelliğine sahip değildir.

İspat: $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_*(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) = (\beta, \mathcal{K} \times \mathcal{K})$ olsun. Buradan, her $(\mathcal{K}, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$, $\beta(\mathcal{K}, z) = \mathfrak{A}'(\mathcal{K}) \cup \ddot{Y}'(z)$. Her $\mathcal{K} \in \mathcal{K}$ için, $\mathfrak{A}'(\mathcal{K}) \subseteq \beta(\mathcal{K}, z) = \mathfrak{A}'(\mathcal{K}) \cup \mathfrak{A}'(z)$ olacak şekilde $(\mathcal{K}, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ olduğundan, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})^r \cong_J (\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_*(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$ elde edilir.

3.1.11 Önerme $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$ ve $(\beta, \mathcal{Z})$, U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda, $(\beta, \mathcal{Z})^r \cong_J (\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_*(\beta, \mathcal{Z})$ ve $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})^r \cong_J (\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_*(\beta, \mathcal{Z})$.

İspat: $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_*(\beta, \mathcal{Z}) = (\ddot{Y}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ olsun. Buradan, her $(\mathcal{K}, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için $\ddot{Y}(\mathcal{K}, z) = \mathfrak{A}'(\mathcal{K}) \cup \beta'(z)$. Her $z \in \mathcal{Z}$ için, $\beta'(z) \subseteq \mathfrak{A}'(\mathcal{K}) \cup \beta'(z)$ olacak şekilde $(\mathcal{K}, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ olduğundan $(\beta, \mathcal{Z})^r \cong_J (\mathfrak{A}, \mathcal{K})\Lambda_*(\beta, \mathcal{Z})$ elde edilir. Benzer şekilde, her $\mathcal{K} \in \mathcal{K}$ için, $\mathfrak{A}'(\mathcal{K}) \subseteq \mathfrak{A}'(\mathcal{K}) \cup \beta'(z)$ olacak şekilde $(\mathcal{K}, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ olduğundan $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})^r \cong_J (\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_*(\beta, \mathcal{Z})$ olduğu da elde edilir.

3.1.12 Önerme $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$ ve $(\beta, \mathcal{Z})$, U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda, $[(\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_*(\beta, \mathcal{Z})]^r = (\mathfrak{A}, \mathcal{K})^r \wedge_\theta (\beta, \mathcal{Z})^r$.

İspat: $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_*(\beta, \mathcal{Z}) = (\ddot{Y}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ olsun. Buradan, her $(\mathcal{K}, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için, $\ddot{Y}(\mathcal{K}, z) = \mathfrak{A}'(\mathcal{K}) \cup \beta'(z)$. Böylece, $\ddot{Y}'(\mathcal{K}, z) = \mathfrak{A}(\mathcal{K}) \cap \beta(z) = (\mathfrak{A}')'(\mathcal{K}) \cap (\beta')'(z)$. Buradan $(\ddot{Y}', \mathcal{K} \times \mathcal{Z}) = (\mathfrak{A}, \mathcal{K})^r \wedge_\theta (\beta, \mathcal{Z})^r$ elde edilir.

3.1.13 Önerme $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$ ve $(\beta, \mathcal{Z})$, U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) \wedge_\theta (\beta, \mathcal{Z}) \cong_F (\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_*(\beta, \mathcal{Z})$.

İspat: $(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) \wedge_\theta (\beta, \mathcal{Z}) = (\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ ve $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})\Lambda_*(\beta, \mathcal{Z}) = (\zeta, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ olsun. Buradan, her $(\mathcal{K}, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için $\mathfrak{A}(\mathcal{K}, z) = \mathfrak{A}'(\mathcal{K}) \cap \beta'(z)$ ve her $(\mathcal{K}, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için $\zeta(\mathcal{K}, z) =$

$\mathfrak{A}'(\mathfrak{k}) \cup \beta'(z)$. Böylece, her $(\mathfrak{k}, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için, $\mathfrak{A}(\mathfrak{k}, z) = \mathfrak{A}'(\mathfrak{k}) \cap \beta'(z) \subseteq \mathfrak{A}'(\mathfrak{k}) \cup \beta'(z) = \zeta(\mathfrak{k}, z)$ olduğundan, ispat elde edilir.

3.1.14 Önerme $(\mathfrak{A}, \mathcal{K}), (\beta, \mathcal{Z})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{C}), U$ üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})^r \cong_F (\beta, \mathcal{Z})^r$ ise $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_*(\ddot{Y}, \mathcal{C}) \cong_F (\beta, \mathcal{Z})V_*(\ddot{Y}, \mathcal{C})$.

İspat: $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})^r \cong_F (\beta, \mathcal{Z})^r$ olsun. Buradan, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{Z}$ ve her $z \in \mathcal{Z}$ için $\mathfrak{A}'(z) \subseteq \beta'(z)$. Böylece $\mathcal{K} \times \mathcal{C} \subseteq \mathcal{Z} \times \mathcal{C}$ ve her $(\mathfrak{k}, c) \in \mathcal{K} \times \mathcal{C}$ için, $\mathfrak{A}'(\mathfrak{k}) \cup \ddot{Y}'(c) \subseteq \beta'(\mathfrak{k}) \cup \ddot{Y}'(c)$ olup, ispat elde edilir.

3.1.15 Önerme $(\mathfrak{A}, \mathcal{K}), (\beta, \mathcal{Z}), (\ddot{Y}, \mathcal{C})$ ve $(\mathfrak{A}, \mathcal{W}), U$ üzerinde birer esnek küme olsun. $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})^r \cong_F (\beta, \mathcal{Z})^r$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{C})^r \cong_F (\mathfrak{A}, \mathcal{W})^r$ ise $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_*(\ddot{Y}, \mathcal{C}) \cong_F (\beta, \mathcal{Z})V_*(\mathfrak{A}, \mathcal{W})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{C})V_*(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) \cong_F (\mathfrak{A}, \mathcal{W})V_*(\beta, \mathcal{Z})$.

İspat: $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})^r \cong_F (\beta, \mathcal{Z})^r$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{C})^r \cong_F (\mathfrak{A}, \mathcal{W})^r$ olsun. Böylece, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{Z}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{W}$, her $\mathfrak{k} \in \mathcal{K}$ için, $\mathfrak{A}'(\mathfrak{k}) \subseteq \beta'(\mathfrak{k})$ ve her $c \in \mathcal{C}$ için $\ddot{Y}'(c) \subseteq \mathfrak{A}'(c)$. Buradan, $\mathcal{K} \times \mathcal{C} \subseteq \mathcal{Z} \times \mathcal{W}$ olup, her $(\mathfrak{k}, c) \in \mathcal{K} \times \mathcal{C}$ için, $\mathfrak{A}'(\mathfrak{k}) \cup \ddot{Y}'(c) \subseteq \beta'(\mathfrak{k}) \cup \ddot{Y}'(c)$ ve her $(c, \mathfrak{k}) \in \mathcal{C} \times \mathcal{K}$ için, $\ddot{Y}'(c) \cup \mathfrak{A}'(\mathfrak{k}) \subseteq \mathfrak{A}'(c) \cup \beta'(\mathfrak{k})$ olup, ispat elde edilir.

3.1.16 Önerme $(\mathfrak{A}, \mathcal{K}), (\beta, \mathcal{K}), (\ddot{Y}, \mathcal{K})$ ve $(\mathfrak{A}, \mathcal{K}), U$ üzerinde birer esnek küme olsun. $(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) \cong_F (\beta, \mathcal{K})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{K}) \cong_F (\mathfrak{A}, \mathcal{K})$ ise $(\beta, \mathcal{K})V_*(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) \cong_F (\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_*(\ddot{Y}, \mathcal{K})$.

İspat: $(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) \cong_F (\beta, \mathcal{K})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{K}) \cong_F (\mathfrak{A}, \mathcal{K})$ olsun. Buradan, her $\mathfrak{k} \in \mathcal{K}$ için $\mathfrak{A}(\mathfrak{k}) \subseteq \beta(\mathfrak{k})$ ve her $\mathfrak{l} \in \mathcal{K}$ için $\ddot{Y}(\mathfrak{l}) \subseteq \mathfrak{A}(\mathfrak{l})$. Böylece, her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{l}) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ için, $\beta'(\mathfrak{k}) \cup \mathfrak{A}'(\mathfrak{l}) \subseteq \mathfrak{A}'(\mathfrak{k}) \cup \ddot{Y}'(\mathfrak{l})$ olup, ispat elde edilir.

3.1.17 Önerme $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$ ve $(\beta, \mathcal{Z}), U$ üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda $\emptyset_{\mathcal{K} \times \mathcal{Z}} \cong_F (\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_*(\beta, \mathcal{Z})$ ve $\emptyset_{\mathcal{Z} \times \mathcal{K}} \cong_F (\beta, \mathcal{Z})V_*(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$.

İspat: $\emptyset_{\mathcal{K} \times \mathcal{Z}} = (\mathcal{E}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ ve $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_*(\beta, \mathcal{Z}) = (\mathcal{S}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ olsun. Buradan, her $(\mathfrak{k}, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için, $\mathcal{E}(\mathfrak{k}, z) = \emptyset$ ve her $(\mathfrak{k}, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için, $\mathcal{S}(\mathfrak{k}, z) = \mathfrak{A}'(\mathfrak{k}) \cup \beta'(z)$. $\mathcal{K} \times \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ ve her $(\mathfrak{k}, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için $\mathcal{E}(\mathfrak{k}, z) = \emptyset \subseteq \mathfrak{A}'(\mathfrak{k}) \cup \beta'(z) = \mathcal{S}(\mathfrak{k}, z)$

olduğundan, $\emptyset_{\mathcal{K} \times Z} \cong_F (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z)$. Benzer şekilde, $\emptyset_{Z \times \mathcal{K}} \cong_F (\beta, Z)V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ olduğu da gösterilir.

3.1.18 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) , U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda $\emptyset_{\mathcal{K}} \cong_J (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z)$ ve $\emptyset_Z \cong_J (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z)$ ve $\emptyset_E \cong_J (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z)$.

İspat: $\emptyset_{\mathcal{K}} = (\mathcal{E}, \mathcal{K})$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z) = (\mathcal{S}, \mathcal{K} \times Z)$ olsun. Buradan, her $k \in \mathcal{K}$ için $\mathcal{E}(k) = \emptyset$ ve her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için $\mathcal{S}(k, z) = \mathfrak{Q}'(k) \cup \beta'(z)$. Her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için $\emptyset \subseteq \mathfrak{Q}'(k) \cup \beta'(z) = \mathcal{S}(k, z)$ olduğundan, $\emptyset_{\mathcal{K}} \cong_J (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z)$ sağlanır. $\emptyset_Z \cong_J (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z)$ ve $\emptyset_E \cong_J (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z)$ olduğu benzer şekilde gösterilir.

3.1.19 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) , U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z) \cong_F U_{\mathcal{K} \times Z}$ ve $(\beta, Z)V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \cong_F U_{Z \times \mathcal{K}}$.

İspat: $U_{\mathcal{K} \times Z} = (\ddot{Y}, \mathcal{K} \times Z)$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z) = (\mathfrak{d}, \mathcal{K} \times Z)$ olsun. Buradan, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için, $\ddot{Y}(k, z) = U$ ve her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için, $\mathfrak{d}(k, z) = \mathfrak{Q}'(k) \cup \beta'(z)$. $\mathcal{K} \times Z \subseteq \mathcal{K} \times Z$ ve her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için $\mathfrak{d}(k, z) = \mathfrak{Q}'(k) \cup \beta'(z) \subseteq U = \ddot{Y}(k, z)$ olduğundan $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z) \cong_F U_{\mathcal{K} \times Z}$ elde edilir. $(\beta, Z)V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \cong_F U_{Z \times \mathcal{K}}$ olduğu da benzer şekilde gösterilir.

3.1.20 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) , U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z) \cong_J U_{\mathcal{K}}$, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z) \cong_J U_Z$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z) \cong_J U_E$.

İspat: $U_{\mathcal{K}} = (\mathcal{W}, \mathcal{K})$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z) = (\mathcal{X}, \mathcal{K} \times Z)$ olsun. Buradan, her $k \in \mathcal{K}$ için $\mathcal{W}(k) = U$ ve her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için, $\mathcal{X}(k, z) = \mathfrak{Q}'(k) \cup \beta'(z)$. Her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için, $\mathcal{X}(k, z) = \mathfrak{Q}'(k) \cup \beta'(z) \subseteq U$ olduğundan $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z) \cong_J U_{\mathcal{K}}$ elde edilir. $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z) \cong_J U_Z$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z) \cong_J U_E$ olduğu benzer şekilde gösterilir.

3.1.21 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) , U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z) =_M \emptyset_{\mathcal{K} \times Z}$ olması için gerek ve yeter şart $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_M U_{\mathcal{K}}$ ve $(\beta, Z) =_M U_Z$ olmasıdır.

İspat: $\emptyset_{\mathcal{K} \times \mathcal{Z}} = (\mathcal{E}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ ve $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_*(\beta, \mathcal{Z}) = (\mathcal{X}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ olsun. Buradan, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için $\mathcal{E}(k, z) = \emptyset$ ve her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için, $\mathcal{X}(k, z) = \mathfrak{A}'(k) \cup \beta'(z)$ olur. $(\mathcal{E}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z}) = (\mathcal{X}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ olsun. Buradan, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için $\mathfrak{A}'(k) \cup \beta'(z) = \emptyset$. Böylece, her $k \in \mathcal{K}$ için $\mathfrak{A}'(k) = \emptyset$ ve her $z \in \mathcal{Z}$ için $\beta'(z) = \emptyset$. Buradan, her $k \in \mathcal{K}$ için $\mathfrak{A}(k) = U$ ve her $z \in \mathcal{Z}$ için $\beta(z) = U$. Böylece, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) = U_{\mathcal{K}}$ ve $(\beta, \mathcal{Z}) = U_{\mathcal{Z}}$ elde edilir.

Tersine, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) =_M U_{\mathcal{K}}$ ve $(\beta, \mathcal{Z}) =_M U_{\mathcal{Z}}$ olsun. Böylece, her $k \in \mathcal{K}$ için $\mathfrak{A}(k) = U$ ve her $z \in \mathcal{Z}$ için $\beta(z) = U$. Buradan, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için, $\mathcal{X}(k, z) = \mathfrak{A}'(k) \cup \beta'(z) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ olup, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_*(\beta, \mathcal{Z}) =_M \emptyset_{\mathcal{K} \times \mathcal{Z}}$ elde edilir.

3.1.22 Önerme $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$ ve $(\beta, \mathcal{Z})$, U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_*(\beta, \mathcal{Z}) =_M \emptyset_{\emptyset}$ olması için gerek ve yeter şart $(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) =_M \emptyset_{\emptyset}$ ve $(\beta, \mathcal{Z}) =_M \emptyset_{\emptyset}$ olmasıdır.

İspat: $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_*(\beta, \mathcal{Z}) =_M \emptyset_{\emptyset}$ olsun. Buradan, $\mathcal{K} \times \mathcal{Z} = \emptyset$ olup, $\mathcal{K} = \emptyset$ veya $\mathcal{Z} = \emptyset$ olur. Parametre kümesi boş olan tek esnek küme $\emptyset_{\emptyset}$ olduğundan, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) =_M \emptyset_{\emptyset}$ veya $(\beta, \mathcal{Z}) =_M \emptyset_{\emptyset}$ elde edilir.

Tersine, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) =_M \emptyset_{\emptyset}$ veya $(\beta, \mathcal{Z}) =_M \emptyset_{\emptyset}$ olsun. Böylece, $\mathcal{K} = \emptyset$ veya $\mathcal{Z} = \emptyset$ olur. Bu durumda, $\mathcal{K} \times \mathcal{Z} = \emptyset$ ve parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_{\emptyset}$ olduğundan, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_*(\beta, \mathcal{Z}) =_M \emptyset_{\emptyset}$ olur.

3.2. Esnek Yıldız-Çarpım ve Dağılmaları

Bu bölümde, esnek yıldız-çarpımının kısıtlanmış kesişim ve birleşime, genişletilmiş kesişim ve birleşime, esnek ikili parçalı kesişim ve birleşime, VE-çarpıma ve VEYA-çarpıma dağılma durumu ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

3.2.1 Teorem $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$, $(\beta, \mathcal{Z})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{C})$, U kümesi üzerinde birer esnek küme olmak üzere,

$$i) \quad (\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_*[(\beta, \mathcal{Z}) \cup_R (\check{Y}, \mathcal{C})] =_M [(\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_*(\beta, \mathcal{Z})] \cap_R [(\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_*(\check{Y}, \mathcal{C})]$$

$$\text{ii) } (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*[(\beta, Z) \cap_R (\check{Y}, \mathcal{C})] =_M [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z)] \cup_R [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\check{Y}, \mathcal{C})]$$

$$\text{iii) } [(\beta, Z) \cap_R (\check{Y}, \mathcal{C})]V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_M [(\beta, Z)V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})] \cup_R [(\check{Y}, \mathcal{C})V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})]$$

$$\text{iv) } [(\beta, Z) \cup_R (\check{Y}, \mathcal{C})]V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_M [(\beta, Z)V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})] \cap_R [(\check{Y}, \mathcal{C})V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})]$$

İspat (i) Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $\mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C})$ ve sağ tarafının parametre kümesi $(\mathcal{K} \times Z) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C})$ olup, $\mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{K} \times Z) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C})$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\beta, Z) \cup_R (\check{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{A}, Z \cap \mathcal{C})$ olsun. Buradan, her $\mathfrak{z} \in Z \cap \mathcal{C}$ için $\mathfrak{A}(\mathfrak{z}) = \beta(\mathfrak{z}) \cup \check{Y}(\mathfrak{z})$. $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\mathfrak{A}, Z \cap \mathcal{C}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C}))$ olsun. Buradan, her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C})$, için $\mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cup \mathfrak{A}'(\mathfrak{z})$. O halde,

$$\mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cup [\beta(\mathfrak{z}) \cup \check{Y}(\mathfrak{z})]' = \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cup [\beta'(\mathfrak{z}) \cap \check{Y}'(\mathfrak{z})]$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z) = (\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times Z)$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\check{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{K} \times \mathcal{C})$ olsun. O halde, her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times Z$ için $\mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cup \beta'(\mathfrak{z})$ ve her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{c}) \in \mathcal{K} \times \mathcal{C}$ için $\mathfrak{Z}(\mathfrak{k}, \mathfrak{c}) = \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cup \check{Y}'(\mathfrak{c})$. Burada, $(\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times Z) \cap_R (\mathfrak{Z}, \mathcal{K} \times \mathcal{C}) = (\mathfrak{C}, (\mathcal{K} \times Z) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C}))$ olsun. Böylece, her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{K} \times Z) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C})$ için,

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = [\mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cup \beta'(\mathfrak{z})] \cap [\mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cup \check{Y}'(\mathfrak{z})]$$

Böylece, ispat elde edilir.

Burada, $Z \cap \mathcal{C} = \emptyset$ ise $\mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{K} \times Z) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \emptyset$ olup, parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_\emptyset$ olduğundan, eşitliğin her iki tarafı da $\emptyset_\emptyset$ olur. $(\mathcal{K} \times Z) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C})$ olduğundan, $(\mathcal{K} \times Z) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \emptyset$ ise $\mathcal{K} = \emptyset$ veya $Z \cap \mathcal{C} = \emptyset$ olur. Kabul gereği $\mathcal{K} \neq \emptyset$ olup, $(\mathcal{K} \times Z) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \emptyset$ olması $Z \cap \mathcal{C} = \emptyset$ olmasını gerektirdiğinden, bu durumda da yine eşitliğin her iki tarafı $\emptyset_\emptyset$ olur.

(iii) Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $(Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K}$, sağ tarafının parametre kümesi $(Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K})$ olup, $(Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K} = (Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K})$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\beta, Z) \cap_R (\check{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{A}, Z \cap \mathcal{C})$ olsun. Buradan, her $\mathfrak{z} \in Z \cap \mathcal{C}$ için $\mathfrak{A}(\mathfrak{z}) = \beta(\mathfrak{z}) \cap \check{Y}(\mathfrak{z})$. $(\mathfrak{A}, Z \cap \mathcal{C}) V_*(\mathfrak{D}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C}))$ olsun. Buradan, her $(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) \in (Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K}$, için $\mathfrak{X}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) = \mathfrak{A}'(\mathfrak{z}) \cup \mathfrak{D}'(\mathfrak{k})$. O halde,

$$\mathfrak{X}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) = [\beta(\mathfrak{z}) \cap \check{Y}(\mathfrak{z})]' \cup \mathfrak{D}'(\mathfrak{k}) = [\beta'(\mathfrak{z}) \cup \check{Y}'(\mathfrak{z})] \cup \mathfrak{D}'(\mathfrak{k})$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\beta, Z) V_*(\mathfrak{D}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{X}, Z \times \mathcal{K})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{C}) V_*(\mathfrak{D}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{T}, \mathcal{C} \times \mathcal{K})$ olsun. O halde, her $(z, \mathfrak{k}) \in Z \times \mathcal{K}$ için $\mathfrak{X}(z, \mathfrak{k}) = \beta'(\mathfrak{z}) \cup \mathfrak{D}'(\mathfrak{k})$ ve her $(c, \mathfrak{k}) \in \mathcal{C} \times \mathcal{K}$ için $\mathfrak{T}(c, \mathfrak{k}) = \check{Y}'(c) \cup \mathfrak{D}'(\mathfrak{k})$. Burada, $(\mathfrak{X}, Z \times \mathcal{K}) \cup_R (\mathfrak{T}, \mathcal{C} \times \mathcal{K}) = (\mathfrak{U}, (Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K}))$ olsun. Böylece, her $(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) \in (Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) = (Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K}$ için,

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) = \mathfrak{X}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) \cup \mathfrak{T}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) = [\beta'(\mathfrak{z}) \cup \mathfrak{D}'(\mathfrak{k})] \cup [\check{Y}'(\mathfrak{z}) \cup \mathfrak{D}'(\mathfrak{k})]$$

Böylece, $[(\beta, Z) \cap_R (\check{Y}, \mathcal{C})] V_*(\mathfrak{D}, \mathcal{K}) =_M (\beta, Z) V_*(\mathfrak{D}, \mathcal{K}) \cup_R (\check{Y}, \mathcal{C}) V_*(\mathfrak{D}, \mathcal{K})$ elde edilir. $(Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K} = (Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K})$ olup burada, $Z \cap \mathcal{C} = \emptyset$ ise parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_\emptyset$ olduğundan, eşitliğin her iki tarafı da $\emptyset_\emptyset$ olur. Benzer şekilde, $(Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) = (Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K}$ olduğundan, $(Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) = \emptyset$ ise, $Z \cap \mathcal{C} = \emptyset$ veya $\mathcal{K} = \emptyset$ olur. Kabul gereği $\mathcal{K} \neq \emptyset$ olup, $(Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) = \emptyset$ olması $Z \cap \mathcal{C} = \emptyset$ olmasını gerektirdiğinden, bu durumda da yine eşitliğin her iki tarafı $\emptyset_\emptyset$ olur.

3.2.2 Not Esnek yıldız-çarpımının, kısıtlanmış kesişim ve birleşim işlemlerine dağılmaları incelenmiştir. İki esnek kümenin M-eşitliğini sağlaması için gerekli şart, her iki taraftaki esnek kümelerin parametre kümelerinin eşit olması gerektiği göz önüne alındığında, kısıtlanmış esnek küme işlemlerinin esnek yıldız-çarpımına dağılmasının incelenemeyeceği, kesişim işleminin kartezyen çarpım üzerine dağılım göstermediği gerçeğinden açıktır. Bu nedenle, kısıtlanmış esnek küme işlemlerinin esnek yıldız-çarpıma dağılmasına bakılmamıştır

3.2.3 Teorem $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, $(\beta, \mathcal{Z})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{C})$, $\mathcal{U}$ kümesi üzerinde birer esnek küme olmak üzere,

$$\text{i) } (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*[(\beta, \mathcal{Z}) \cap_{\varepsilon} (\ddot{Y}, \mathcal{C})] =_M [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, \mathcal{Z})] \cup_{\varepsilon} [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\ddot{Y}, \mathcal{C})]$$

$$\text{ii) } (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*[(\beta, \mathcal{Z}) \cup_{\varepsilon} (\ddot{Y}, \mathcal{C})] =_M [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, \mathcal{Z})] \cap_{\varepsilon} [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\ddot{Y}, \mathcal{C})]$$

$$\text{iii) } [(\beta, \mathcal{Z}) \cup_{\varepsilon} (\ddot{Y}, \mathcal{C})]V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_M [(\beta, \mathcal{Z})V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})] \cap_{\varepsilon} [(\ddot{Y}, \mathcal{C})V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})]$$

$$\text{iv) } [(\beta, \mathcal{Z}) \cap_{\varepsilon} (\ddot{Y}, \mathcal{C})]V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_M [(\beta, \mathcal{Z})V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})] \cup_{\varepsilon} [(\ddot{Y}, \mathcal{C})V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})]$$

İspat (i) Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $\mathcal{K} \times (\mathcal{Z} \cup \mathcal{C})$, sağ tarafının parametre kümesi $(\mathcal{K} \times \mathcal{Z}) \cup (\mathcal{K} \times \mathcal{C})$ olup, $\mathcal{K} \times (\mathcal{Z} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{K} \times \mathcal{Z}) \cup (\mathcal{K} \times \mathcal{C})$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır. Ayrıca, kabul gereği $\mathcal{K} \neq \emptyset$, $\mathcal{Z} \neq \emptyset$ ve $\mathcal{C} \neq \emptyset$ olduğundan, $\mathcal{K} \times (\mathcal{Z} \cup \mathcal{C}) \neq \emptyset$ ve $(\mathcal{K} \times \mathcal{Z}) \cup (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) \neq \emptyset$. Dolayısıyla sağ ve sol tarafın boş esnek kümeye eşit olma durumu bulunmamaktadır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\beta, \mathcal{Z}) \cap_{\varepsilon} (\ddot{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{Z} \cup \mathcal{C})$ olsun. Buradan, her $\mathfrak{z} \in \mathcal{Z} \cup \mathcal{C}$ için,

$$\mathfrak{Q}(\mathfrak{z}) = \begin{cases} \beta(\mathfrak{z}), & \mathfrak{z} \in \mathcal{Z} - \mathcal{C} \\ \ddot{Y}(\mathfrak{z}), & \mathfrak{z} \in \mathcal{C} - \mathcal{Z} \\ \beta(\mathfrak{z}) \cap \ddot{Y}(\mathfrak{z}), & \mathfrak{z} \in \mathcal{Z} \cap \mathcal{C} \end{cases}$$

$(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{Z} \cup \mathcal{C}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{K} \times (\mathcal{Z} \cup \mathcal{C}))$ olsun. Burada, her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (\mathcal{Z} \cup \mathcal{C})$ için $\mathfrak{Q}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cup \mathfrak{Q}'(\mathfrak{z})$. O halde, her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (\mathcal{Z} \cup \mathcal{C})$ için,

$$\mathfrak{Q}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cup \beta'(\mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (\mathcal{Z} - \mathcal{C}) \\ \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cup \ddot{Y}'(\mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (\mathcal{C} - \mathcal{Z}) \\ \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cup [\beta'(\mathfrak{z}) \cup \ddot{Y}'(\mathfrak{z})], & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (\mathcal{Z} \cap \mathcal{C}) \end{cases}$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, \mathcal{Z}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\ddot{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times \mathcal{C})$ olsun. Buradan, her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için $\mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cup \beta'(\mathfrak{z})$ ve her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{c}) \in \mathcal{K} \times \mathcal{C}$ için $\mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{c}) = \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cup \ddot{Y}'(\mathfrak{c})$. Burada, $(\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times$

$Z) \cup_{\varepsilon} (\mathfrak{I}, \mathcal{K} \times \mathcal{C}) = (\mathfrak{L}, (\mathcal{K} \times Z) \cup (\mathcal{K} \times \mathcal{C}))$ olsun. O halde her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{K} \times Z) \cup (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \mathcal{K} \times (Z \cup \mathcal{C})$ için,

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{K} \times Z) - (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \mathcal{K} \times (Z - \mathcal{C}) \\ \mathfrak{I}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) - (\mathcal{K} \times Z) = \mathcal{K} \times (\mathcal{C} - Z) \\ \mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \cup \mathfrak{I}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{K} \times Z) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C}) \end{cases}$$

Buradan,

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \mathfrak{O}'(\mathfrak{k}) \cup \mathfrak{P}'(\mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (Z - \mathcal{C}) \\ \mathfrak{O}'(\mathfrak{k}) \cup \mathfrak{Y}'(\mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (\mathcal{C} - Z) \\ [\mathfrak{O}'(\mathfrak{k}) \cup \mathfrak{P}'(\mathfrak{z})] \cup [\mathfrak{O}'(\mathfrak{k}) \cup \mathfrak{Y}'(\mathfrak{z})], & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C}) \end{cases}$$

Böylece, ispat elde edilir.

(iii) Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $(Z \cup \mathcal{C}) \times \mathcal{K}$, sağ tarafının parametre kümesi $(Z \times \mathcal{K}) \cup (\mathcal{C} \times \mathcal{K})$ olup, $(Z \cup \mathcal{C}) \times \mathcal{K} = (Z \times \mathcal{K}) \cup (\mathcal{C} \times \mathcal{K})$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır. Ayrıca, kabul gereği $\mathcal{K} \neq \emptyset$, $Z \neq \emptyset$ ve $\mathcal{C} \neq \emptyset$ olduğundan, $(Z \cup \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \neq \emptyset$ ve $(Z \times \mathcal{K}) \cup (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) \neq \emptyset$. Dolayısıyla sağ ve sol tarafın boş esnek kümeye eşit olma durumu bulunmamaktadır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{P}, Z) \cup_{\varepsilon} (\mathfrak{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{Q}, Z \cup \mathcal{C})$ olsun.

Buradan, her $\mathfrak{z} \in Z \cup \mathcal{C}$ için,

$$\mathfrak{Q}(\mathfrak{z}) = \begin{cases} \mathfrak{P}(\mathfrak{z}), & \mathfrak{z} \in Z - \mathcal{C} \\ \mathfrak{Y}(\mathfrak{z}), & \mathfrak{z} \in \mathcal{C} - Z \\ \mathfrak{P}(\mathfrak{z}) \cup \mathfrak{Y}(\mathfrak{z}), & \mathfrak{z} \in Z \cap \mathcal{C} \end{cases}$$

$(\mathfrak{Q}, Z \cup \mathcal{C}) V_*(\mathfrak{O}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{X}, (Z \cup \mathcal{C}) \times \mathcal{K})$ olsun. Buradan, her $(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) \in (Z \cup \mathcal{C}) \times \mathcal{K}$, için $\mathfrak{X}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) = \mathfrak{Q}'(\mathfrak{z}) \cup \mathfrak{O}'(\mathfrak{k})$ için,

$$\mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \mathfrak{P}'(\mathfrak{z}) \cup \mathfrak{O}'(\mathfrak{k}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (Z - \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \\ \mathfrak{Y}'(\mathfrak{z}) \cup \mathfrak{O}'(\mathfrak{k}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{C} - Z) \times \mathcal{K} \\ [\mathfrak{P}'(\mathfrak{z}) \cap \mathfrak{Y}'(\mathfrak{z})] \cup \mathfrak{O}'(\mathfrak{k}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \end{cases}$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\beta, Z)V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{X}, Z \times \mathcal{K})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{C})V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{I}, \mathcal{C} \times \mathcal{K})$ olsun. O halde, her $(z, k) \in Z \times \mathcal{K}$ için $\mathfrak{X}(z, k) = \beta'(z) \cup \mathfrak{Q}'(k)$ ve her $(c, k) \in \mathcal{C} \times \mathcal{K}$ için $\mathfrak{I}(c, k) = \ddot{Y}'(c) \cup \mathfrak{Q}'(k)$. Burada, $(\mathfrak{X}, Z \times \mathcal{K}) \cap_{\varepsilon} (\mathfrak{I}, \mathcal{C} \times \mathcal{K}) = (\mathfrak{E}, (Z \times \mathcal{K}) \cup (\mathcal{C} \times \mathcal{K}))$ olsun. Böylece, her $(z, k) \in (Z \times \mathcal{K}) \cup (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) = (Z \cup \mathcal{C}) \times \mathcal{K}$ için,

$$\mathfrak{E}(k, z) = \begin{cases} \mathfrak{X}(z, k), & (k, z) \in (Z \times \mathcal{K}) - (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) = (Z - \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \\ \mathfrak{I}(z, k), & (k, z) \in (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) - (Z \times \mathcal{K}) = (\mathcal{C} - Z) \times \mathcal{K} \\ \mathfrak{X}(z, k) \cap \mathfrak{I}(z, k), & (k, z) \in (Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) = (Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \end{cases}$$

Buradan,

$$\mathfrak{E}(k, z) = \begin{cases} \beta'(z) \cup \mathfrak{Q}'(k), & (k, z) \in (Z - \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \\ \ddot{Y}'(z) \cup \mathfrak{Q}'(k), & (k, z) \in (\mathcal{C} - Z) \times \mathcal{K} \\ [\beta'(z) \cup \mathfrak{Q}'(k)] \cap [\ddot{Y}'(z) \cup \mathfrak{Q}'(k)], & (k, z) \in (Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \end{cases}$$

Böylece, ispat elde edilir.

3.2.4 Not Esnek yıldız-çarpımının genişletilmiş kesişim ve birleşim işlemlerine dağılmaları incelenmiştir. İki esnek kümenin M-eşitliğini sağlaması için gerekli şart, her iki taraftaki esnek kümelerin parametre kümelerinin eşit olması gerektiği göz önüne alındığında genişletilmiş esnek küme işlemlerinin esnek yıldız-çarpımına dağılmasının incelenemeyeceği, birleşim işleminin kartezyen çarpım üzerine dağılım göstermediği gerçeğinden açıktır. Bu nedenle, genişletilmiş esnek küme işlemlerinin esnek yıldız-çarpımına dağılmasına bakılmamıştır.

3.2.5 Teorem $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, (β, Z) ve $(\ddot{Y}, \mathcal{C})$, U kümesi üzerinde birer esnek küme olmak üzere,

$$i) (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*[(\beta, Z) \tilde{\cap} (\ddot{Y}, \mathcal{C})] =_M [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z)] \tilde{\cup} [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\ddot{Y}, \mathcal{C})]$$

$$ii) (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*[(\beta, Z) \tilde{\cup} (\ddot{Y}, \mathcal{C})] =_M [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z)] \tilde{\cap} [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\ddot{Y}, \mathcal{C})]$$

$$iii) [(\beta, Z) \tilde{\cup} (\ddot{Y}, \mathcal{C})]V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_M [(\beta, Z)V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})] \tilde{\cap} [(\ddot{Y}, \mathcal{C})V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})]$$

$$iv) [(\beta, Z) \tilde{\cap} (\ddot{Y}, \mathcal{C})]V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_M [(\beta, Z)V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})] \tilde{\cup} [(\ddot{Y}, \mathcal{C})V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})]$$

İspat (i) Eşitliğin sol ve sağ tarafının parametre kümesi $\mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ olduğundan M-eşitliğin ilk şartı sağlanır. Ayrıca, kabul gereği $\mathcal{K} \neq \emptyset$, $\mathcal{Z} \neq \emptyset$ ve $\mathcal{C} \neq \emptyset$ olduğundan, $\mathcal{K} \times \mathcal{Z} \neq \emptyset$. Dolayısıyla sağ ve sol tarafın boş esnek kümeye eşit olma durumu bulunmamaktadır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\beta, \mathcal{Z}) \tilde{\cap} (\check{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{A}, \mathcal{Z})$ olsun. Buradan, her $\mathfrak{z} \in \mathcal{Z}$ için,

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{z}) = \begin{cases} \beta(\mathfrak{z}), & \mathfrak{z} \in \mathcal{Z} - \mathcal{C} \\ \beta(\mathfrak{z}) \cap \check{Y}(\mathfrak{z}), & \mathfrak{z} \in \mathcal{Z} \cap \mathcal{C} \end{cases}$$

$(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\mathfrak{A}, \mathcal{Z}) = (\mathfrak{V}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ olsun. Burada, her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için $\mathfrak{V}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cup \mathfrak{A}'(\mathfrak{z})$. O halde,

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cup \beta'(\mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (\mathcal{Z} - \mathcal{C}) \\ \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cup [\beta'(\mathfrak{z}) \cup \check{Y}'(\mathfrak{z})], & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (\mathcal{Z} \cap \mathcal{C}) \end{cases}$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, \mathcal{Z}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\check{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{K} \times \mathcal{C})$ olsun. Buradan, her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için $\mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cup \beta'(\mathfrak{z})$ ve her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{c}) \in \mathcal{K} \times \mathcal{C}$ için $\mathfrak{Z}(\mathfrak{k}, \mathfrak{c}) = \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cup \check{Y}'(\mathfrak{c})$. Burada, $(\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z}) \tilde{\cup} (\mathfrak{Z}, \mathcal{K} \times \mathcal{C}) = (\mathfrak{E}, (\mathcal{K} \times \mathcal{Z}))$ olsun. O halde her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için,

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{K} \times \mathcal{Z}) - (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \mathcal{K} \times (\mathcal{Z} - \mathcal{C}) \\ \mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \cup \mathfrak{Z}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{K} \times \mathcal{Z}) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \mathcal{K} \times (\mathcal{Z} \cap \mathcal{C}) \end{cases}$$

Buradan,

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cup \beta'(\mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (\mathcal{Z} - \mathcal{C}) \\ [\mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cup \beta'(\mathfrak{z})] \cup [\mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cup \check{Y}'(\mathfrak{z})], & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (\mathcal{Z} \cap \mathcal{C}) \end{cases}$$

Böylece, ispat elde edilir.

(iii) Eşitliğin sol ve sağ tarafının parametre kümesi $\mathcal{Z} \times \mathcal{K}$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır. Ayrıca, kabul gereği $\mathcal{K} \neq \emptyset$ ve $\mathcal{Z} \neq \emptyset$ olduğundan, $\mathcal{Z} \times \mathcal{K} \neq \emptyset$. Dolayısıyla sağ ve sol tarafın boş esnek kümeye eşit olma durumu bulunmamaktadır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\beta, Z) \tilde{\cup} (\check{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{A}, Z)$ olsun. Buradan, her $\mathfrak{z} \in Z$ için,

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{z}) = \begin{cases} \beta(\mathfrak{z}), & \mathfrak{z} \in Z - \mathcal{C} \\ \beta(\mathfrak{z}) \cup \check{Y}(\mathfrak{z}), & \mathfrak{z} \in Z \cap \mathcal{C} \end{cases}$$

$(\mathfrak{A}, Z)V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{X}, Z \times \mathcal{K})$ olsun. Buradan, her $(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) \in Z \times \mathcal{K}$, için $\mathfrak{X}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) = \mathfrak{A}'(\mathfrak{z}) \cup \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k})$. Böylece,

$$\mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \beta'(\mathfrak{z}) \cup \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (Z - \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \\ [\beta'(\mathfrak{z}) \cap \check{Y}'(\mathfrak{z})] \cup \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \end{cases}$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\beta, Z)V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{X}, Z \times \mathcal{K})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{C})V_*(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{T}, \mathcal{C} \times \mathcal{K})$ olsun. O halde, her $(z, \mathfrak{k}) \in Z \times \mathcal{K}$ için $\mathfrak{X}(z, \mathfrak{k}) = \beta'(\mathfrak{z}) \cup \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k})$ ve her $(c, \mathfrak{k}) \in \mathcal{C} \times \mathcal{K}$ için $\mathfrak{T}(c, \mathfrak{k}) = \check{Y}'(c) \cup \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k})$. Burada, $(\mathfrak{X}, Z \times \mathcal{K}) \tilde{\cap} (\mathfrak{T}, \mathcal{C} \times \mathcal{K}) = (\mathfrak{D}, (Z \times \mathcal{K}))$ olsun. Böylece, her $(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) \in (Z \times \mathcal{K})$ için,

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \mathfrak{X}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (Z \times \mathcal{K}) - (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) = (Z - \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \\ \mathfrak{X}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) \cap \mathfrak{T}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) = (Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \end{cases}$$

Buradan,

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \beta'(\mathfrak{z}) \cup \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (Z - \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \\ [\beta'(\mathfrak{z}) \cup \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k})] \cap [\check{Y}'(\mathfrak{z}) \cup \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k})], & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \end{cases}$$

Böylece, ispat elde edilir.

3.2.6 Not Burada $\mathcal{K} \neq \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ olduğu için, esnek ikili parçalı işlemlerin, esnek yıldız-çarpımına soldan dağılım göstermeyeceği açıktır.

3.2.7 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, (β, Z) ve $(\check{Y}, \mathcal{C})$, U kümesi üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda,

$$(1) (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*[(\beta, Z) \wedge (\check{Y}, \mathcal{C})] \cong_L [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z)]V[(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\check{Y}, \mathcal{C})],$$

$$(2) (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*[(\beta, Z)V(\ddot{Y}, \mathcal{C})] \cong_L [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z)] \wedge [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\ddot{Y}, \mathcal{C})].$$

İspat: (1) İlk olarak sol tarafa bakılacak olursa, $(\beta, Z) \wedge (\ddot{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{A}, Z \times \mathcal{C})$ olsun. Buradan, her $(z, c) \in Z \times \mathcal{C}$ için, $\mathfrak{A}(z, c) = \beta(z) \cap \ddot{Y}(c)$. $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\mathfrak{A}, Z \times \mathcal{C}) = \mathfrak{C}(\mathcal{K} \times (Z \times \mathcal{C}))$ olsun. Buradan, her $(k, (z, c)) \in \mathcal{K} \times (Z \times \mathcal{C})$ için

$$\mathfrak{C}(k, (z, c)) = \mathfrak{Q}'(k) \cup [\beta(z) \cap \ddot{Y}(c)]' = \mathfrak{Q}'(k) \cup [\beta'(z) \cup \ddot{Y}'(c)]$$

Sağ tarafa bakılacak olursa, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z) = (\mathcal{H}, \mathcal{K} \times Z)$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\ddot{Y}, \mathcal{C}) = (\mathcal{M}, \mathcal{K} \times \mathcal{C})$ olsun. Buradan, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için $\mathcal{H}(k, z) = \mathfrak{Q}'(k) \cup \beta'(z)$ ve her $(k, c) \in \mathcal{K} \times \mathcal{C}$ için $\mathcal{M}(k, c) = \mathfrak{Q}'(k) \cup \ddot{Y}'(c)$. $(\mathcal{H}, \mathcal{K} \times Z) \vee (\mathcal{M}, \mathcal{K} \times \mathcal{C}) = (\mathfrak{N}, (\mathcal{K} \times Z) \times (\mathcal{K} \times \mathcal{C}))$ olsun. Buradan her $((k, z), (k, c)) \in (\mathcal{K} \times Z) \times (\mathcal{K} \times \mathcal{C})$ için,

$$\mathfrak{N}((k, z), (k, c)) = [\mathfrak{Q}'(k) \cup \beta'(z)] \cup [\mathfrak{Q}'(k) \cup \ddot{Y}'(c)]$$

Burada her $(k, (z, c)) \in \mathcal{K} \times (Z \times \mathcal{C})$ için, $\mathfrak{C}(k, (z, c)) = \mathfrak{Q}'(k) \cup [\beta'(z) \cup \ddot{Y}'(c)] = [\mathfrak{Q}'(k) \cup \beta'(z)] \cup [\mathfrak{Q}'(k) \cup \ddot{Y}'(c)] = \mathfrak{N}((k, z), (k, c))$ olacak şekilde $((k, z), (k, c)) \in (\mathcal{K} \times Z) \times (\mathcal{K} \times \mathcal{C})$ vardır. Böylece, istenen elde edilir. (2) nin ispatı da benzer şekilde yapılır.

Önerme 3.2.7'deki L-alt kümelerin L-eşitlik olmayacağı Örnek 3.2.8 ile açıktır.

3.2.8 Örnek = E = $\{\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_4\}$ parametre kümesi, $\mathcal{K} = \{\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3\}$, $Z = \{\mathfrak{u}_1\}$ ve $\mathcal{C} = \{\mathfrak{u}_4\}$, E parametre kümesinin alt kümeleri, U = $\{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4, \mathfrak{r}_5\}$ evrensel küme olmak üzere, U üzerinde $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, (β, Z) ve $(\ddot{Y}, \mathcal{C})$ esnek kümeleri

$$(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = \{(\mathfrak{u}_2, \{\mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4\}), (\mathfrak{u}_3, \{\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3\})\}, (\beta, Z) = \{(\mathfrak{u}_1, U)\}, (\ddot{Y}, \mathcal{C}) = \{(\mathfrak{u}_4, \{\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4\})\}$$

olarak tanımlansın. İlk olarak sol tarafa bakılacak olursa, $(\beta, Z) \wedge (\ddot{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{A}, Z \times \mathcal{C})$ olsun. Buradan,

$$(\mathfrak{A}, Z \times \mathcal{C}) = \{((\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_4), \{\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4\})\}$$

$(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\mathfrak{A}, Z \times \mathcal{C}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times (Z \times \mathcal{C}))$ olsun. Böylece,

$$(\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times (Z \times \mathcal{C})) = \left(((\mathfrak{u}_2, (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_4)), \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_5\}), ((\mathfrak{u}_3, (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_4)), \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_4, \mathfrak{r}_5\}) \right)$$

Sağ taraftan devam edilecek olursa, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\beta, Z) = (\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times Z)$ olsun. Buradan,

$$(\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times Z) = \{((\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_1), \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_5\}), ((\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_1), \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_4, \mathfrak{r}_5\})\}$$

$(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_*(\ddot{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{D}, \mathcal{K} \times \mathcal{C})$ olsun. Buradan,

$$(\mathfrak{D}, \mathcal{K} \times \mathcal{C}) = [((\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_4), \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_5\}), ((\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_4), \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_4, \mathfrak{r}_5\})]$$

$(\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times Z)V(\mathfrak{D}, \mathcal{K} \times \mathcal{C}) = (\mathfrak{M}, (\mathcal{K} \times Z) \times (\mathcal{K} \times \mathcal{C}))$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{M}, (\mathcal{K} \times Z) \times (\mathcal{K} \times \mathcal{C})) \\ &= \left\{ \left(((\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_1), (\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_4)), \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_5\} \right), \left(((\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_1), (\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_4)), \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_4, \mathfrak{r}_5\} \right), \right. \\ & \quad \left. \left(((\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_1), (\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_4)), \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_4, \mathfrak{r}_5\} \right), \left(((\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_1), (\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_4)), \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_4, \mathfrak{r}_5\} \right) \right\} \end{aligned}$$

Böylece,

$$\mathfrak{M}((\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_1), (\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_4)) \neq \mathfrak{X}(\mathfrak{u}_2, (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_4)), \mathfrak{M}((\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_1), (\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_4)) \neq \mathfrak{X}(\mathfrak{u}_3, (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_4)),$$

$$\mathfrak{M}((\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_1), (\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_4)) \neq \mathfrak{X}(\mathfrak{u}_2, (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_4)), \mathfrak{M}((\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_1), (\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_4)) \neq \mathfrak{X}(\mathfrak{u}_3, (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_4))$$

olduğu görülür. Buradan,

$$(\mathfrak{M}, (\mathcal{K} \times Z) \times (\mathcal{K} \times \mathcal{C})) \tilde{\mathcal{E}}_L (\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times (Z \times \mathcal{C}))$$

olup, $(\mathfrak{M}, (\mathcal{K} \times Z) \times (\mathcal{K} \times \mathcal{C})) \neq_L (\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times (Z \times \mathcal{C}))$ elde edilir.

3.3. Esnek Yıldız-Çarpım ve Karar Verme Problemi

Bu bölümde, Çağman ve Enginoğlu (2010a) tarafından tanımlanmış, int-uni operatörü ve int-uni karar fonksiyonu, int-uni karar verme metodu esnek yıldız-çarpıma uygulanmıştır. Bu yöntemle bir küme, karar vericilerin parametrelerine göre alt kümelerle indirgenir. Sonuç olarak, karar vericiler çok sayıda seçenek yerine sınırlı sayıda seçeneğe odaklanır.

Bölüm boyunca, U üzerindeki esnek kümelerin tüm esnek yıldız-çarpımının kümesi " $V_*(U)$ " ile $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) esnek kümelerinin esnek artı-çarpımının esnek yaklaşım fonksiyonu

$$\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} \vee_* \beta_Z: \mathcal{K} \times Z \rightarrow P(U)$$

ile gösterilecektir. Burada, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için, $(\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} \vee_* \beta_Z)(k, z) = \mathfrak{Q}'(k) \cup \beta'(z)$ olduğu bilinmektedir.

3.3.1. Tanım $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) , U üzerinde birer esnek küme olsun. $int_k uni_z$ ve $int_z uni_k$ ile gösterilen, esnek-yıldız çarpım için int-uni operatörü sırasıyla,

$$int_k uni_z: V_*(U) \rightarrow P(U), \quad int_k uni_z(\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} \vee_* \beta_Z) = \bigcap_{k \in \mathcal{K}} \left(\bigcup_{z \in Z} ((\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} \vee_* \beta_Z)(k, z)) \right)$$

$$int_z uni_k: V_*(U) \rightarrow P(U), \quad int_z uni_k(\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} \vee_* \beta_Z) = \bigcap_{z \in Z} \left(\bigcup_{k \in \mathcal{K}} ((\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} \vee_* \beta_Z)(k, z)) \right)$$

şeklinde tanımlanır.

3.3.2. Tanım $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \vee_* (\beta, Z) \in V_\lambda(U)$ olsun. int-uni olarak gösterilen esnek yıldız-çarpımın int-uni fonksiyonu

$$int-uni: V_*(U) \rightarrow P(U), \quad int-uni(\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} \vee_* \beta_Z) = int_k uni_z(\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} \vee_* \beta_Z) \cup int_z uni_k(\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} \vee_* \beta_Z)$$

şeklinde dir. Burada, $int-uni(\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} \vee_* \beta_Z)$ nin U kümesinin bir alt kümesi olduğu aşıkardır. $int-uni(\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} \vee_* \beta_Z)$ değerine, $\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} \vee_* \beta_Z$ esnek yıldız-çarpımının int-uni karar kümesi denir.

Belirsizlik içerek bir gerçek hayat problemi için esnek kümeler yardımıyla, esnek yıldız-çarpımına dayanan int-uni karar verme metodu aşağıdaki algoritma yardımıyla oluşturulur.

ALGORİTMA

Adım 1: Parametre kümesinin uygun alt kümeleri seçilir.

Adım 2: Parametre kümesinin her bir alt kümesi için esnek kümeler inşa edilir.

Adım 3: Esnek cümlelerin V_* çarpımı hesaplanır.

Adım 4: Çarpımın int-uni karar kümesi hesaplanır.

Şimdi esnek yıldız-çarpımın int-uni karar verme problemine nasıl uygulandığı ile ilgili bir örnek verilecektir.

3.3.3. Örnek Ufuk Bey ve Eylül Hanım düğün sonrası balayı için otel arayışına girmişler ve konuyla ilgili olarak bir seyahat acentesiyle görüşmeye gitmişlerdir. Seyahat acentesi temsilcisi Duru Hanım, çok fazla seçenek sunduğundan, çiftin kafası bir hayli karışmış olup, çift ilk etapta kalmak istedikleri oteli seçmeye değil, kalmak istemedikleri otelleri ELEMeye karar vermişlerdir. Seyahat acentesi temsilcisinin sunduğu oteller kümesi $U = \{t_1, t_2, \dots, t_{21}\}$ kümesi ile ELENECEK otelleri belirlemek için kullanılan parametre kümesi $E = \{a_1, a_2, \dots, a_8\}$ temsil edilsin. Burada,

- $a_1 = \text{“Ucuz”}$
- $a_2 = \text{“Denize yakın”}$
- $a_3 = \text{“Su parkına sahip”}$
- $a_4 = \text{“Kuaföre sahip olan”}$
- $a_5 = \text{“Yeterli sosyal faaliyet ve etkinliklere sahip olan”}$
- $a_6 = \text{“Şehir merkezine yakın”}$

- a_7 = “24 saat açık kafeteryası olan”
- a_8 = “Fitness merkezine sahip olan”

Çift, kararlarını int-uni karar verme yöntemini esnek yıldız-çarpımına uygulayarak vereceklerdir. İki karar verici olduğundan, önce Eylül Hanım için, ardından Ufuk Bey için parametreler belirlenerek, esnek kümeler oluşturulacaktır. Her iki esnek küme de oluşturulduktan sonra, esnek yıldız-çarpımın üzerinde int-uni karar verme yöntemi uygulanacaktır. Elde edilen sonuçlar daha sonra çiftin nihai kararını demokratik olarak yönlendirecektir. Bu süreç, kararın dengeli olmasını ve hem Ufuk Bey'in hem de Eylül Hanım'ın tercihlerinin dikkate alınmasını sağlar. Bu adımlar bir algoritma olarak özetlenecek olursa, aşağıdaki şekilde ilerleyecektir.

Adım 1: Parametre Kümelerinin Belirlenmesi

Karar vericilerin parametre kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır. Seyahat acentesi temsilcisi Duru Hanım, her bir karar vericiden ELEYECEKLERİ otelde bulunmasını İSTEMEDİKLERİ özellikleri temsil eden parametreleri seçmelerini ister. Bu kümeler aşağıdaki gibi tanımlanır:

- Eylül Hanım için ($\mathcal{K}$): $\mathcal{K} = \{a_1, a_3, a_6\}$. Yani Eylül Hanım pahalı, su parkı olmayan veya şehir merkezine uzak otelleri elemek istiyor.
- Ufuk Bey için ($\mathcal{Z}$): $\mathcal{Z} = \{a_2, a_5, a_7\}$. Yani Ufuk Bey denize uzak, yeterli sosyal aktivite ve etkinliğe sahip olmayan veya 24 saat açık kafeteryası olmayan otelleri elemek istiyor.

Adım 2: Bu parametre kümeleri kullanılarak, karar vericinin $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{Z})$ esnek kümeleri inşa edilir.

- İlk olarak, Eylül Hanım'ın ELEYECEĞİ otelde bulunmasını İSTEMEDİĞİ parametreler değerlendirilerek Eylül Hanımın esnek kümesi belirlenir.

- Ardından, Ufuk Bey'in ELEMEDİĞİ otelde bulunmasını İSTEMEDİĞİ parametreler değerlendirilerek Ufuk Beyin esnek kümesi belirlenir.

Bu esnek kümeler sırasıyla $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve $(\beta, \mathcal{Z})$ şeklinde olsun.

$$(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = \{(a_1, \{t_2, t_3, t_4, t_6, t_{10}, t_{13}\}), (a_3, \{t_3, t_4, t_6, t_{10}, t_{11}, t_{17}, t_{18}, t_{21}\}), (a_6, \{t_1, t_3, t_4, t_{10}, t_{13}, t_{17}, t_{19}\})\}$$

$$(\beta, \mathcal{Z}) = \{(a_2, \{t_1, t_3, t_4, t_5, t_{10}, t_{17}, t_{21}\}), (a_5, \{t_1, t_3, t_{10}, t_{13}, t_{19}, t_{21}\}), (a_7, \{t_3, t_6, t_{10}, t_{17}, t_{21}\})\}$$

Adım 3: Verilen esnek kümelerin esnek yıldız-çarpımı hesaplanır.

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} V_* \beta_{\mathcal{Z}} = & \\ & ((a_1, a_5), \{t_1, t_2, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{11}, t_{12}, t_{14}, t_{15}, t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_{19}, t_{20}, t_{21}\}), \\ & ((a_1, a_7), \{t_1, t_2, t_4, t_5, t_7, t_8, t_9, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{15}, t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_{19}, t_{20}, t_{21}\}), \\ & ((a_3, a_2), \{t_1, t_2, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{15}, t_{16}, t_{18}, t_{19}, t_{20}\}), \\ & ((a_3, a_5), \{t_1, t_2, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{15}, t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_{19}, t_{20}\}), \\ & ((a_3, a_7), \{t_1, t_2, t_4, t_5, t_7, t_8, t_9, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{15}, t_{16}, t_{18}, t_{19}, t_{20}\}), \\ & ((a_6, a_2), \{t_2, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{15}, t_{16}, t_{18}, t_{19}, t_{20}, t_{21}\}), \\ & ((a_6, a_5), \{t_2, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{11}, t_{12}, t_{14}, t_{15}, t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_{20}, t_{21}\}), \\ & ((a_6, a_7), \{t_1, t_2, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{15}, t_{16}, t_{18}, t_{19}, t_{20}, t_{21}\}) \end{aligned}$$

Adım 4: $\text{int-uni}(\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} V_* \beta_{\mathcal{Z}})$ karar verme kümesi bulunur.

$$\text{int}_{\mathcal{K}} \text{uni}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} V_* \beta_{\mathcal{Z}}) = \bigcap_{\mathcal{K} \in \mathcal{K}} \left(\bigcup_{\mathcal{Z} \in \mathcal{Z}} \left((\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} V_* \beta_{\mathcal{Z}})(\mathcal{K}, \mathcal{Z}) \right) \right)$$

olmak üzere, önce $\bigcup_{\mathcal{Z} \in \mathcal{Z}} \left((\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} V_* \beta_{\mathcal{Z}})(\mathcal{K}, \mathcal{Z}) \right)$ hesaplayalım:

$$=\{t_1, t_2, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{15}, t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_{19}, t_{20}, t_{21}\}$$

Otel seçim sürecinde, 21 otelden 19'u ilk aşamada elenmiştir. Kalan oteller, $\{t_3, t_{10}\}$ hem Eylül Hanım'ın hem de Ufuk Bey'in tercihlerini karşılayan seçenekleri temsil etmektedir. Sonuç, ilgili tüm karar vericilerin tercihlerine uygun otelleri vurgulayacaktır. Bu süreç, kafa karışıklığını gidererek, otelleri eleme ile en iyi otelleri seçerken hem Eylül Hanım'ın hem de Ufuk Bey'in tercihlerini dikkate alarak dengeli ve demokratik bir karar alınmasını sağlar.



4. ESNEK LAMDA-ÇARPIM

Bu bölümde, esnek lamda-çarpımı adı verilen yeni bir çarpım tanımlanmış, örneği verilmiş, çarpımın tüm cebirsel özellikleri çeşitli esnek alt küme ve eşitlik kavramlarıyla ilişkili olarak detaylı bir şekilde incelenmiş, bu çarpımın diğer esnek küme işlemlerine dağılma kuralları araştırılmış ve son olarak bu çarpım karar verme problemlerine uygulanmıştır.

4.1. Esnek Lamda-Çarpım ve Özellikleri

Bu alt bölümde, esnek lamda-çarpım tanımlanmış, örneği verilmiş, çarpımın cebirsel özellikleri çeşitli esnek alt küme ve eşitlik kavramlarıyla ilişkili olarak detaylı bir şekilde incelenmiştir.

4.1.1 Tanım $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve $(\beta, \mathcal{Z})$, U kümesi üzerinde birer esnek küme olsun. $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve $(\beta, \mathcal{Z})$ esnek kümelerinin esnek lamda-çarpımı (V_λ -çarpımı) $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, \mathcal{Z})$, her $(\ell, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için,

$$\check{Y}(\ell, z) = \mathfrak{Q}(\ell)V_\lambda\beta(z)$$

olmak üzere $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, \mathcal{Z}) = (\check{Y}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ şeklinde tanımlanır. Burada, $\mathfrak{Q}(\ell)\lambda\beta(z) = \mathfrak{Q}(\ell) \cup \beta'(z)$ olduğu bilinmektedir.

4.1.2 Örnek $E = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ parametre kümesi $\mathcal{K} = \{u_2, u_3\}$ ve $\mathcal{Z} = \{u_2, u_4\}$, E parametre kümesinin iki alt kümesi $U = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}$ evrensel küme olmak üzere, U üzerinde $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve $(\beta, \mathcal{Z})$,

$$(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = \{(u_2, \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}), (u_3, \{r_3, r_5\})\}$$

$$(\beta, \mathcal{Z}) = \{(u_2, \{r_1, r_2, r_3\}), (u_4, \{r_2, r_3, r_4\})\}$$

olarak tanımlanan iki esnek küme ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, \mathcal{Z}) = (\check{Y}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned}
& ((\ddot{Y}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})) \\
& = \left\{ \left((\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_2), \{\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4, \mathfrak{F}_5\} \right), \left((\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_4), \{\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4, \mathfrak{F}_5\} \right), \left((\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2), \{\mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4, \mathfrak{F}_5\} \right), \right. \\
& \quad \left. \left((\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_4), \{\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_5\} \right) \right\}
\end{aligned}$$

şeklindedir.

4.1.3 Önerme V_λ -çarpımı, $S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: V_λ -çarpımının, $S_E(U)$ kümesi üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Gerçekten $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve $(\mathfrak{P}, \mathcal{Z})$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere,

$$V_\lambda: S_E(U) \times S_E(U) \rightarrow S_E(U)$$

$$((\mathfrak{Q}, \mathcal{K}), (\mathfrak{P}, \mathcal{Z})) \rightarrow (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\mathfrak{P}, \mathcal{Z}) = (\ddot{Y}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z}) = (\ddot{Y}, \mathcal{C})$$

olup, $(\ddot{Y}, \mathcal{C})$ de U üzerinde bir esnek kümedir.

4.1.4 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, $(\mathfrak{P}, \mathcal{Z})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{C})$, U kümesi üzerinde birer esnek küme olmak üzere,

$$(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda[(\mathfrak{P}, \mathcal{Z})V_\lambda(\ddot{Y}, \mathcal{C})] \neq_M [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\mathfrak{P}, \mathcal{Z})]V_\lambda(\ddot{Y}, \mathcal{C})$$

olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, V_λ -çarpımı birleşme özelliğine sahip değildir.

İspat: $S_E(U)$ kümesi üzerinde, V_λ -çarpımının birleşme özelliğine sahip olmadığını göstermek için bir örnek verelim. $E = \{\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_4\}$ parametre kümesi, $\mathcal{K} = \{\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3\}$, $\mathcal{Z} = \{\mathfrak{U}_1\}$ ve $\mathcal{C} = \{\mathfrak{U}_4\}$, E parametre kümesinin alt kümeleri, $U = \{\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4, \mathfrak{F}_5\}$ evrensel küme olmak üzere, U üzerinde $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, $(\mathfrak{P}, \mathcal{Z})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{C})$ esnek kümeleri

$$(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = \{(\mathfrak{U}_2, \{\mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4\}), (\mathfrak{U}_3, \{\mathfrak{F}_1\})\}, (\mathfrak{P}, \mathcal{Z}) = \{(\mathfrak{U}_1, \emptyset)\}, (\ddot{Y}, \mathcal{C}) = \{(\mathfrak{U}_4, \{\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_5\})\}$$

olarak tanımlansın. İlk olarak eşitsizliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{P}, \mathcal{Z})V_\lambda(\ddot{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{Z} \times \mathcal{C})$ olsun. Buradan,

$$(\zeta, Z \times C) = \{((u_1, u_4), \{r_2, r_4\})\}$$

elde edilir. $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\zeta, Z \times C) = (\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times (Z \times C))$ olsun. Böylece,

$$(\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times (Z \times C)) = \{((u_2, (u_1, u_4)), \{r_1, r_3, r_4, r_5\}), ((u_3, (u_1, u_4)), (r_1, r_3, r_5))\}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sol tarafından devam edilecek olursa, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, Z) = (\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times Z)$ olsun. Buradan,

$$(\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times Z) = \{((u_2, u_1), \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}), ((u_3, u_1), \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\})\}$$

elde edilir. $(\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times Z)V_\lambda(\check{Y}, \mathcal{C}) = (\zeta, (\mathcal{K} \times Z) \times \mathcal{C})$ olsun. Böylece,

$$\begin{aligned} & (\zeta, (\mathcal{K} \times Z) \times \mathcal{C}) \\ &= \{(((u_2, u_1), u_4), \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}), (((u_3, u_1), u_4), \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}))\} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times (Z \times C)) \neq_M (\zeta, (\mathcal{K} \times Z) \times \mathcal{C})$ olduğu görülür. Benzer şekilde, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times (Z \times C)) \neq_L (\zeta, (\mathcal{K} \times Z) \times \mathcal{C})$ ve $(\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times (Z \times C)) \neq_J (\zeta, (\mathcal{K} \times Z) \times \mathcal{C})$ açıktır.

4.1.5 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) , U üzerinde birer esnek küme olmak üzere $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, Z) \neq_M (\beta, Z)V_\lambda(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde V_λ -çarpımı M -eşitliği altında değişme özelliğine sahip değildir.

İspat: $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, Z) = (\check{Y}, \mathcal{K} \times Z)$ ve $(\beta, Z)V_\lambda(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{A}, Z \times \mathcal{K})$ olsun. $\mathcal{K} \times Z \neq Z \times \mathcal{K}$ olduğundan ispat açıktır.

4.1.6 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) , U üzerinde birer esnek küme olmak üzere $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, Z) \neq_J (\beta, Z)V_\lambda(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde V_λ -çarpımı J -eşitliği altında değişme özelliğine sahip değildir.

İspat: $S_E(U)$ kümesi üzerinde, V_λ -çarpımının J-eşitliği altında değişme özelliğine sahip olmadığını göstermek için bir örnek verelim. $E = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ parametre kümesi, $\mathcal{K} = \{u_2, u_3\}$, $Z = \{u_1\}$, E parametre kümesinin alt kümeleri, $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ evrensel küme olmak üzere, U üzerinde $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, (β, Z) esnek kümeleri

$$(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = \{(u_2, \{x_3, x_4\}), (u_3, \{x_1\})\}, (\beta, Z) = \{(u_1, \emptyset)\}$$

olarak tanımlansın. $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, Z) \neq_J (\beta, Z)V_\lambda(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ olduğu gösterilecektir.

İlk olarak eşitsizliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, Z) = (\mathcal{W}, \mathfrak{Q} \times Z)$ olsun. Buradan,

$$(\mathcal{W}, \mathfrak{Q} \times Z) = \{((u_2, u_1), \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}), ((u_3, u_1), \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\})\}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafından devam edilecek olursa, $(\beta, Z)V_\lambda(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = (\mathcal{H}, Z \times \mathcal{K})$ olsun. Buradan,

$$(\mathcal{H}, Z \times \mathcal{K}) = \{((u_1, u_2), \{x_1, x_2, x_5\}), ((u_1, u_3), \{x_2, x_3, x_4, x_5\})\}$$

elde edilir. Böylece, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, Z) \neq_J (\beta, Z)V_\lambda(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, Z) \neq_L (\beta, Z)V_\lambda(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$.

4.1.7 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, U üzerinde bir esnek küme olmak üzere, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda \emptyset_\emptyset =_M \emptyset_\emptyset V_\lambda(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_M \emptyset_\emptyset$ olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, V_λ - çarpımının M-eşitliğine göre yutan elemanı boş esnek kümedir.

İspat: $\emptyset_\emptyset = (\check{Y}, \emptyset)$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda \emptyset_\emptyset = (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\check{Y}, \emptyset) = (\beta, \mathcal{K} \times \emptyset) = (\beta, \emptyset)$ olsun. Parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_\emptyset$ olduğundan, $(\beta, \emptyset) = \emptyset_\emptyset$ elde edilir. $\emptyset_\emptyset V_\lambda(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = \emptyset_\emptyset$ olduğunun ispatı ise benzer şekilde gösterilir.

4.1.8 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, U üzerinde bir esnek küme olsun. O halde, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda \emptyset_{\mathcal{K}} =_M U_{\mathcal{K} \times \mathcal{K}}$ ve $\emptyset_{\mathcal{K}} V_\lambda(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_M (\mathfrak{Q}, \mathcal{K} \times \mathcal{K})^r$.

İspat: $\emptyset_{\mathcal{K}} = (\ddot{Y}, \mathcal{K})$ olsun. Buradan, her $k \in \mathcal{K}$ için $\ddot{Y}(k) = \emptyset$. $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_{\lambda}\emptyset_{\mathcal{K}} = (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_{\lambda}(\ddot{Y}, \mathcal{K}) = (\beta, \mathcal{K} \times \mathcal{K})$ olsun. Böylece, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ için $\beta(k, z) = \mathfrak{Q}(k) \cup \ddot{Y}'(z) = \mathfrak{Q}(k) \cup \emptyset' = \mathfrak{Q}(k) \cup U = U$ olup $(\beta, \mathcal{K} \times \mathcal{K}) = (U, \mathcal{K} \times \mathcal{K})$ elde edilir. $\emptyset_{\mathcal{K}}V_{\lambda}(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_{\mathbf{M}} (\mathfrak{N}, \mathcal{K} \times \mathcal{K})$ olsun. Böylece her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ için $\mathfrak{N}(k, z) = \ddot{Y}(k) \cup \mathfrak{Q}'(z) = \emptyset \cup \mathfrak{Q}'(z) = \mathfrak{Q}'(z)$ olup $(\mathfrak{N}, \mathcal{K} \times \mathcal{K}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{K} \times \mathcal{K})^r$ elde edilir.

4.1.9 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, U üzerinde bir esnek küme olsun. O halde, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_{\lambda}U_{\mathcal{K}} =_{\mathbf{M}} (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve $U_{\mathcal{K}}V_{\lambda}(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_{\mathbf{M}} U_{\mathcal{K} \times \mathcal{K}}$.

İspat: $U_{\mathcal{K}} = (\ddot{Y}, \mathcal{K})$ olsun. O halde, her $k \in \mathcal{K}$ için $\ddot{Y}(k) = U$. $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_{\lambda}U_{\mathcal{K}} = (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_{\lambda}(\ddot{Y}, \mathcal{K}) = (\beta, \mathcal{K} \times \mathcal{K})$ olsun. Buradan, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ için $\beta(k, z) = \mathfrak{Q}(k) \cup \ddot{Y}'(z) = \mathfrak{Q}(k) \cup U' = \mathfrak{Q}(k) \cup \emptyset = \mathfrak{Q}(k)$ olup $(\beta, \mathcal{K} \times \mathcal{K}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{K} \times \mathcal{K})$ elde edilir. $U_{\mathcal{K}}V_{\lambda}(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_{\mathbf{M}} (\mathfrak{T}, \mathcal{K} \times \mathcal{K})$ olsun. Buradan, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ için $\mathfrak{T}(k, z) = \ddot{Y}(k) \cup \mathfrak{Q}'(z) = U \cup \mathfrak{Q}'(z) = U$ olup $(\mathfrak{T}, \mathcal{K} \times \mathcal{K}) = U_{\mathcal{K} \times \mathcal{K}}$ elde edilir.

4.1.10 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, U üzerinde bir esnek küme olmak üzere, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \cong_{\mathbf{J}} (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_{\lambda}(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde V_{λ} -çarpımı J-eşitliğine göre denk güçlülük (idempotent) özelliğine sahip değildir.

İspat: $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_{\lambda}(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = (\beta, \mathcal{K} \times \mathcal{K})$ olsun. Buradan, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ için, $\beta(k, z) = \mathfrak{Q}(k) \cup \ddot{Y}'(z)$. Böylece, her $k \in \mathcal{K}$ için $\mathfrak{Q}(k) \subseteq \beta(k, z) = \mathfrak{Q}(k) \cup \mathfrak{Q}'(z)$ olacak şekilde $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ olduğundan, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \cong_{\mathbf{J}} (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_{\lambda}(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ elde edilir.

4.1.11 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve $(\beta, \mathcal{Z})$, U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda, $(\beta, \mathcal{Z})^r \cong_{\mathbf{J}} (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_{\lambda}(\beta, \mathcal{Z})$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \cong_{\mathbf{J}} (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_{\lambda}(\beta, \mathcal{Z})$.

İspat: $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_{\lambda}(\beta, \mathcal{Z}) = (\ddot{Y}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ olsun. Buradan, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için $\ddot{Y}(k, z) = \mathfrak{Q}(k) \cup \beta'(z)$. Her $z \in \mathcal{Z}$ için, $\beta'(z) \subseteq \mathfrak{Q}(k) \cup \beta'(z)$ olacak şekilde $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ olduğundan $(\beta, \mathcal{Z})^r \cong_{\mathbf{J}} (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_{\lambda}(\beta, \mathcal{Z})$ elde edilir. Benzer şekilde, her $k \in \mathcal{K}$ için, $\mathfrak{Q}(k) \subseteq \mathfrak{Q}(k) \cup \beta'(z)$ olacak şekilde $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ olduğundan $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \cong_{\mathbf{J}} (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_{\lambda}(\beta, \mathcal{Z})$ elde edilir.

4.1.12 Önerme $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$ ve $(\beta, \mathcal{Z})$, U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda, $[(\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, \mathcal{Z})]^r = (\mathfrak{A}, \mathcal{K})^r \wedge_\lambda (\beta, \mathcal{Z})^r$.

İspat: $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, \mathcal{Z}) = (\ddot{Y}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ olsun. Buradan, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için, $\ddot{Y}(k, z) = \mathfrak{A}(k) \cup \beta'(z)$. Böylece, $\ddot{Y}'(k, z) = \mathfrak{A}'(k) \cap \beta(z) = (\mathfrak{A})'(k) \cap (\beta')'(z)$. Buradan $(\ddot{Y}', \mathcal{K} \times \mathcal{Z}) = (\mathfrak{A}, \mathcal{K})^r \wedge_\lambda (\beta, \mathcal{Z})^r$ elde edilir.

4.1.13 Önerme $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$ ve $(\beta, \mathcal{Z})$, U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) \wedge_\lambda (\beta, \mathcal{Z}) \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, \mathcal{Z})$.

İspat: $(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) \wedge_\lambda (\beta, \mathcal{Z}) = (\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ ve $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, \mathcal{Z}) = (\zeta, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ olsun. Buradan, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için $\mathfrak{A}(k, z) = \mathfrak{A}(k) \cap \beta'(z)$ ve her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için $\zeta(k, z) = \mathfrak{A}(k) \cup \beta'(z)$. Böylece, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için, $\mathfrak{A}(k, z) = \mathfrak{A}(k) \cap \beta'(z) \subseteq \mathfrak{A}(k) \cup \beta'(z) = \zeta(k, z)$ olduğundan, ispat elde edilir.

4.1.14 Önerme $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$, $(\beta, \mathcal{Z})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{C})$, U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) \tilde{\subseteq}_F (\beta, \mathcal{Z})$ ise $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_\lambda(\ddot{Y}, \mathcal{C}) \tilde{\subseteq}_F (\beta, \mathcal{Z})V_\lambda(\ddot{Y}, \mathcal{C})$.

İspat: $(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) \tilde{\subseteq}_F (\beta, \mathcal{Z})$ olsun. Buradan, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{Z}$ ve her $z \in \mathcal{Z}$ için $\mathfrak{A}(z) \subseteq \beta(z)$. Böylece $\mathcal{K} \times \mathcal{C} \subseteq \mathcal{Z} \times \mathcal{C}$ ve her $(k, c) \in \mathcal{K} \times \mathcal{C}$ için, $\mathfrak{A}(k) \cup \ddot{Y}'(c) \subseteq \beta(k) \cup \ddot{Y}'(c)$ olup, ispat elde edilir.

4.1.15 Önerme $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$, $(\beta, \mathcal{Z})$, $(\ddot{Y}, \mathcal{C})$ ve $(\mathfrak{A}, \mathcal{W})$, U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda $(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) \tilde{\subseteq}_F (\beta, \mathcal{Z})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{C})^r \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{A}, \mathcal{W})^r$ ise $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_\lambda(\ddot{Y}, \mathcal{C}) \tilde{\subseteq}_F (\beta, \mathcal{Z})V_\lambda(\mathfrak{A}, \mathcal{W})$.

İspat: $(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) \tilde{\subseteq}_F (\beta, \mathcal{Z})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{C})^r \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{A}, \mathcal{W})^r$ olsun. Böylece, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{Z}$, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{W}$, her $k \in \mathcal{K}$ için, $\mathfrak{A}(k) \subseteq \beta(k)$ ve her $c \in \mathcal{C}$ için $\ddot{Y}'(c) \subseteq \mathfrak{A}'(c)$. Buradan $\mathcal{K} \times \mathcal{C} \subseteq \mathcal{Z} \times \mathcal{W}$ olup, her $(k, c) \in \mathcal{K} \times \mathcal{C}$ için, $\mathfrak{A}(k) \cup \ddot{Y}'(c) \subseteq \beta(k) \cup \ddot{Y}'(c)$ olup, ispat elde edilir.

4.1.16 Önerme $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$, $(\beta, \mathcal{K})$, $(\ddot{Y}, \mathcal{K})$ ve $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$, U üzerinde birer esnek küme olsun. $(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) \tilde{\subseteq}_F (\beta, \mathcal{K})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{K}) \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{A}, \mathcal{K})$ ise $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_\lambda(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) \tilde{\subseteq}_F (\beta, \mathcal{K})V_\lambda(\ddot{Y}, \mathcal{K})$.

İspat: $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \tilde{\subseteq}_F (\beta, \mathcal{K})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{K}) \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{d}, \mathcal{K})$ olsun. Buradan, her $k \in \mathcal{K}$ için $\mathfrak{Q}(k) \subseteq \beta(k)$ ve her $l \in \mathcal{K}$ için $\ddot{Y}(l) \subseteq \mathfrak{d}(l)$. Böylece, her $(k, l) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ için, $\mathfrak{Q}(k) \cup \mathfrak{d}'(l) \subseteq \beta(k) \cup \ddot{Y}'(l)$ olup, ispat elde edilir.

4.1.17 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve $(\beta, \mathcal{Z})$, U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda, $\emptyset_{\mathcal{K} \times \mathcal{Z}} \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, \mathcal{Z})$ ve $\emptyset_{\mathcal{Z} \times \mathcal{K}} \tilde{\subseteq}_F (\beta, \mathcal{Z})V_\lambda(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$.

İspat: $\emptyset_{\mathcal{K} \times \mathcal{Z}} = (\mathcal{E}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, \mathcal{Z}) = (\mathcal{S}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ olsun. Buradan, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için, $\mathcal{E}(k, z) = \emptyset$ ve her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için, $\mathcal{S}(k, z) = \mathfrak{Q}(k) \cup \beta'(z)$. $\mathcal{K} \times \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ ve her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için $\mathcal{E}(k, z) = \emptyset \subseteq \mathfrak{Q}(k) \cup \beta'(z) = \mathcal{S}(k, z)$ olduğundan, $\emptyset_{\mathcal{K} \times \mathcal{Z}} \tilde{\subseteq}_F (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, \mathcal{Z})$ elde edilir. Benzer şekilde, $\emptyset_{\mathcal{Z} \times \mathcal{K}} \tilde{\subseteq}_F (\beta, \mathcal{Z})V_\lambda(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ olduğu da gösterilir.

4.1.18 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve $(\beta, \mathcal{Z})$, U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda $\emptyset_{\mathcal{K}} \tilde{\subseteq}_J (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, \mathcal{Z})$, $\emptyset_{\mathcal{Z}} \tilde{\subseteq}_J (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, \mathcal{Z})$ ve $\emptyset_E \tilde{\subseteq}_J (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, \mathcal{Z})$.

İspat: $\emptyset_{\mathcal{K}} = (\mathcal{E}, \mathcal{K})$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, \mathcal{Z}) = (\mathcal{S}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ olsun. Buradan, her $k \in \mathcal{K}$ için $\mathcal{E}(k) = \emptyset$ ve her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için $\mathcal{S}(k, z) = \mathfrak{Q}(k) \cup \beta'(z)$. Her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için $\emptyset \subseteq \mathfrak{Q}(k) \cup \beta'(z) = \mathcal{S}(k, z)$ olduğundan, $\emptyset_{\mathcal{K}} \tilde{\subseteq}_J (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, \mathcal{Z})$ sağlanır. $\emptyset_{\mathcal{Z}} \tilde{\subseteq}_J (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, \mathcal{Z})$ ve $\emptyset_E \tilde{\subseteq}_J (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, \mathcal{Z})$ olduğu benzer şekilde gösterilir.

4.1.19 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve $(\beta, \mathcal{Z})$, U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, \mathcal{Z}) \tilde{\subseteq}_F U_{\mathcal{K} \times \mathcal{Z}}$ ve $(\beta, \mathcal{Z})V_\lambda(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \tilde{\subseteq}_F U_{\mathcal{Z} \times \mathcal{K}}$.

İspat: $U_{\mathcal{K} \times \mathcal{Z}} = (\ddot{Y}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, \mathcal{Z}) = (\mathfrak{d}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ olsun. Buradan, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için $\ddot{Y}(k, z) = U$ ve her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için $\mathfrak{d}(k, z) = \mathfrak{Q}(k) \cup \beta'(z)$. $\mathcal{K} \times \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ ve her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için $\mathfrak{d}(k, z) = \mathfrak{Q}(k) \cup \beta'(z) \subseteq U = \ddot{Y}(k, z)$ olduğundan $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, \mathcal{Z}) \tilde{\subseteq}_F U_{\mathcal{K} \times \mathcal{Z}}$ elde edilir. $(\beta, \mathcal{Z})V_\lambda(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \tilde{\subseteq}_F U_{\mathcal{Z} \times \mathcal{K}}$ olduğu da benzer şekilde gösterilir.

4.1.20 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve $(\beta, \mathcal{Z})$, U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, \mathcal{Z}) \tilde{\subseteq}_J U_{\mathcal{K}}$, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, \mathcal{Z}) \tilde{\subseteq}_J U_{\mathcal{Z}}$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, \mathcal{Z}) \tilde{\subseteq}_J U_E$.

İspat: $U_{\mathcal{K}} = (\mathcal{W}, \mathcal{K})$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{K})V_{\lambda}(\beta, Z) = (\mathcal{X}, \mathcal{K} \times Z)$ olsun. Buradan, her $k \in \mathcal{K}$ için $\mathcal{W}(k) = U$ ve her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için, $\mathcal{X}(k, z) = \mathfrak{O}(k) \cup \beta'(z)$. Her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için, $\mathcal{X}(k, z) = \mathfrak{O}(k) \cup \beta'(z) \subseteq U$ olduğundan $(\mathfrak{O}, \mathcal{K})V_{\lambda}(\beta, Z) \subseteq U_{\mathcal{K}}$ elde edilir. $(\mathfrak{O}, \mathcal{K})V_{\lambda}(\beta, Z) \subseteq U_Z$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{K})V_{\lambda}(\beta, Z) \subseteq U_E$ olduğu benzer şekilde gösterilir.

4.1.21 Önerme $(\mathfrak{O}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) , U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{O}, \mathcal{K})V_{\lambda}(\beta, Z) =_{\mathbf{M}} \emptyset_{\mathcal{K} \times Z}$ olması için gerek ve yeter şart $(\mathfrak{O}, \mathcal{K}) =_{\mathbf{M}} \emptyset_{\mathcal{K}}$ ve $(\beta, Z) =_{\mathbf{M}} U_Z$ olmasıdır.

İspat: $\emptyset_{\mathcal{K} \times Z} = (\mathcal{E}, \mathcal{K} \times Z)$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{K})V_{\lambda}(\beta, Z) = (\mathcal{X}, \mathcal{K} \times Z)$ olsun. Buradan, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için $\mathcal{E}(k, z) = \emptyset$ ve her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için, $\mathcal{X}(k, z) = \mathfrak{O}(k) \cup \beta'(z)$ olur. $(\mathcal{E}, \mathcal{K} \times Z) = (\mathcal{X}, \mathcal{K} \times Z)$ olsun. Buradan, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için $\mathfrak{O}(k) \cup \beta'(z) = \emptyset$. Böylece, her $k \in \mathcal{K}$ için $\mathfrak{O}(k) = \emptyset$ ve her $z \in Z$ için $\beta'(z) = \emptyset$. Buradan, her $k \in \mathcal{K}$ için $\mathfrak{O}(k) = \emptyset$ ve her $z \in Z$ için $\beta(z) = U$. Böylece, $(\mathfrak{O}, \mathcal{K}) = \emptyset_{\mathcal{K}}$ ve $(\beta, Z) = U_Z$ elde edilir.

Tersine, $(\mathfrak{O}, \mathcal{K}) =_{\mathbf{M}} \emptyset_{\mathcal{K}}$ ve $(\beta, Z) =_{\mathbf{M}} U_Z$ olsun. Böylece, her $k \in \mathcal{K}$ için $\mathfrak{O}(k) = \emptyset$ ve her $z \in Z$ için $\beta(z) = U$. Buradan, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için, $\mathcal{X}(k, z) = \mathfrak{O}(k) \cup \beta'(z) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ olup, $(\mathfrak{O}, \mathcal{K})V_{\lambda}(\beta, Z) =_{\mathbf{M}} \emptyset_{\mathcal{K} \times Z}$ elde edilir.

4.1.22 Önerme $(\mathfrak{O}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) , U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{O}, \mathcal{K})V_{\lambda}(\beta, Z) =_{\mathbf{M}} \emptyset_{\emptyset}$ olması için gerek ve yeter şart $(\mathfrak{O}, \mathcal{K}) =_{\mathbf{M}} \emptyset_{\emptyset}$ ve $(\beta, Z) =_{\mathbf{M}} \emptyset_{\emptyset}$ olmasıdır.

İspat: $(\mathfrak{O}, \mathcal{K})V_{\lambda}(\beta, Z) =_{\mathbf{M}} \emptyset_{\emptyset}$ olsun. Buradan, $\mathcal{K} \times Z = \emptyset$ olup, $\mathcal{K} = \emptyset$ veya $Z = \emptyset$ olur. Parametre kümesi boş olan tek esnek küme $\emptyset_{\emptyset}$ olduğundan, $(\mathfrak{O}, \mathcal{K}) = \emptyset_{\emptyset}$ veya $(\beta, Z) = \emptyset_{\emptyset}$ elde edilir.

Tersine, $(\mathfrak{O}, \mathcal{K}) = \emptyset_{\emptyset}$ veya $(\beta, Z) = \emptyset_{\emptyset}$ olsun. Böylece, $\mathcal{K} = \emptyset$ veya $Z = \emptyset$ olur. Bu durumda, $\mathcal{K} \times Z = \emptyset$ ve parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_{\emptyset}$ olduğundan, $(\mathfrak{O}, \mathcal{K})V_{\lambda}(\beta, Z) =_{\mathbf{M}} \emptyset_{\emptyset}$ olur.

4.2. Esnek Lamda-Çarpım ve Dağılmaları

Bu bölümde, esnek lamda-çarpımının kısıtlanmış kesişim ve birleşime, genişletilmiş kesişim ve birleşime, esnek ikili parçalı kesişim ve birleşime, VE-çarpıma ve VEYA-çarpıma dağılma durumu ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

4.2.1 Teorem $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, (β, Z) ve $(\check{Y}, \mathcal{C})$, U kümesi üzerinde birer esnek küme olmak üzere,

$$i) (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda[(\beta, Z) \cup_R (\check{Y}, \mathcal{C})] =_M [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, Z)] \cap_R [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\check{Y}, \mathcal{C})]$$

$$ii) (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda[(\beta, Z) \cap_R (\check{Y}, \mathcal{C})] =_M [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, Z)] \cup_R [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\check{Y}, \mathcal{C})]$$

$$iii) [(\beta, Z) \cap_R (\check{Y}, \mathcal{C})]V_\lambda(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_M [(\beta, Z)V_\lambda(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})] \cap_R [(\check{Y}, \mathcal{C})V_\lambda(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})]$$

$$iv) [(\beta, Z) \cup_R (\check{Y}, \mathcal{C})]V_\lambda(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_M [(\beta, Z)V_\lambda(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})] \cup_R [(\check{Y}, \mathcal{C})V_\lambda(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})]$$

İspat: (i) Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $\mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C})$ ve sağ tarafının parametre kümesi $(\mathcal{K} \times Z) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C})$ olup, $\mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{K} \times Z) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C})$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\beta, Z) \cup_R (\check{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{A}, Z \cap \mathcal{C})$ olsun. Buradan, her $\mathfrak{z} \in Z \cap \mathcal{C}$ için $\mathfrak{A}(\mathfrak{z}) = \beta(\mathfrak{z}) \cup \check{Y}(\mathfrak{z})$. $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\mathfrak{A}, Z \cap \mathcal{C}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C}))$ olsun. Buradan, her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C})$, için $\mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{k}) \cup \mathfrak{A}'(\mathfrak{z})$. O halde,

$$\mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{k}) \cup [\beta \cup \check{Y}(\mathfrak{z})]' = \mathfrak{Q}(\mathfrak{k}) \cup [\beta'(\mathfrak{z}) \cap \check{Y}'(\mathfrak{z})]$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, Z) = (\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times Z)$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\check{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{K} \times \mathcal{C})$ olsun. O halde, her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times Z$ için $\mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{k}) \cup \beta'(\mathfrak{z})$ ve her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{c}) \in \mathcal{K} \times \mathcal{C}$ için $\mathfrak{Z}(\mathfrak{k}, \mathfrak{c}) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{k}) \cup \check{Y}'(\mathfrak{c})$. Burada, $(\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times Z) \cap_R (\mathfrak{Z}, \mathcal{K} \times \mathcal{C}) = (\mathfrak{C}, (\mathcal{K} \times Z) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C}))$ olsun. Böylece, her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{K} \times Z) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C})$ için,

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = [\mathfrak{Q}(\mathfrak{k}) \cup \beta'(\mathfrak{z})] \cap [\mathfrak{Q}(\mathfrak{k}) \cup \check{Y}'(\mathfrak{z})]$$

Böylece, ispat elde edilir.

Burada, $Z \cap \mathcal{C} = \emptyset$ ise $\mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{K} \times Z) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \emptyset$ olup, parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_\emptyset$ olduğundan, eşitliğin her iki tarafı da $\emptyset_\emptyset$ olur. $(\mathcal{K} \times Z) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C})$ olduğundan, $(\mathcal{K} \times Z) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \emptyset$ ise $\mathcal{K} = \emptyset$ veya $Z \cap \mathcal{C} = \emptyset$ olur. Kabul gereği $\mathcal{K} \neq \emptyset$ olup, $(\mathcal{K} \times Z) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \emptyset$ olması $Z \cap \mathcal{C} = \emptyset$ olmasını gerektirdiğinden, bu durumda da yine eşitliğin her iki tarafı $\emptyset_\emptyset$ olur.

(iii) Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $(Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K}$, sağ tarafının parametre kümesi $(Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K})$ olup, $(Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K} = (Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K})$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\beta, Z) \cap_R (\ddot{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{A}, Z \cap \mathcal{C})$ olsun. Buradan, her $\mathfrak{z} \in Z \cap \mathcal{C}$ için $\mathfrak{A}(\mathfrak{z}) = \beta(\mathfrak{z}) \cap \ddot{Y}(\mathfrak{z})$. $(\mathfrak{A}, Z \cap \mathcal{C}) V_\lambda(\mathfrak{B}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C}))$ olsun. Buradan, her $(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) \in (Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K}$, için $\mathfrak{X}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{z}) \cup \mathfrak{B}'(\mathfrak{k})$. O halde,

$$\mathfrak{X}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) = [\beta(\mathfrak{z}) \cap \ddot{Y}(\mathfrak{z})] \cup \mathfrak{B}'(\mathfrak{k})$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\beta, Z) V_\lambda(\mathfrak{B}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{X}, Z \times \mathcal{K})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{C}) V_\lambda(\mathfrak{B}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{I}, \mathcal{C} \times \mathcal{K})$ olsun. O halde, her $(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) \in Z \times \mathcal{K}$ için $\mathfrak{X}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) = \beta(\mathfrak{z}) \cup \mathfrak{B}'(\mathfrak{k})$ ve her $(\mathfrak{c}, \mathfrak{k}) \in \mathcal{C} \times \mathcal{K}$ için $\mathfrak{I}(\mathfrak{c}, \mathfrak{k}) = \ddot{Y}(\mathfrak{c}) \cup \mathfrak{B}'(\mathfrak{k})$. Burada, $(\mathfrak{X}, Z \times \mathcal{K}) \cap_R (\mathfrak{I}, \mathcal{C} \times \mathcal{K}) = (\mathfrak{C}, (Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K}))$ olsun. Böylece, her $(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) \in (Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) = (Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K}$ için,

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) = \mathfrak{X}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) \cap \mathfrak{I}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) = [\beta(\mathfrak{z}) \cup \mathfrak{B}'(\mathfrak{k})] \cap [\ddot{Y}(\mathfrak{z}) \cup \mathfrak{B}'(\mathfrak{k})]$$

Böylece, ispat elde edilir.

$(Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K} = (Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K})$ olup burada, $Z \cap \mathcal{C} = \emptyset$ ise parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_\emptyset$ olduğundan, eşitliğin her iki tarafı da $\emptyset_\emptyset$ olur. Benzer şekilde, $(Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) = (Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K}$ olduğundan, $(Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) = \emptyset$ ise, $Z \cap \mathcal{C} =$

$\emptyset$ veya $\mathcal{K} = \emptyset$ olur. Kabul gereği $\mathcal{K} \neq \emptyset$ olup, $(Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) = \emptyset$ olması $Z \cap \mathcal{C} = \emptyset$ olmasını gerektirdiğinden, bu durumda da yine eşitliğin her iki tarafı $\emptyset_\emptyset$ olur.

4.2.2 *Not* Esnek lamda-çarpımının, kısıtlanmış kesişim ve birleşim işlemlerine dağılmaları incelenmiştir. İki esnek kümenin M-eşitliğini sağlaması için gerekli şart, her iki taraftaki esnek kümelerin parametre kümelerinin eşit olması gerektiği göz önüne alındığında, kısıtlanmış esnek küme işlemlerinin esnek lamda-çarpımına dağılmasının incelenemeyeceği, kesişim işleminin kartezyen çarpım üzerine dağılım göstermediği gerçeğinden açıktır. Bu nedenle, kısıtlanmış esnek küme işlemlerinin esnek lamda-çarpıma dağılmasına bakılmamıştır.

4.2.3 Teorem $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$, (β, Z) ve $(\check{Y}, \mathcal{C})$, U kümesi üzerinde birer esnek küme olmak üzere,

$$\text{i) } (\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_\lambda[(\beta, Z) \cap_\varepsilon (\check{Y}, \mathcal{C})] =_M [(\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, Z)] \cup_\varepsilon [(\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_\lambda(\check{Y}, \mathcal{C})]$$

$$\text{ii) } (\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_\lambda[(\beta, Z) \cup_\varepsilon (\check{Y}, \mathcal{C})] =_M [(\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, Z)] \cap_\varepsilon [(\mathfrak{A}, \mathcal{K})V_\lambda(\check{Y}, \mathcal{C})]$$

$$\text{iii) } [(\beta, Z) \cup_\varepsilon (\check{Y}, \mathcal{C})]V_\lambda(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) =_M [(\beta, Z)V_\lambda(\mathfrak{A}, \mathcal{K})] \cup_\varepsilon [(\check{Y}, \mathcal{C})V_\lambda(\mathfrak{A}, \mathcal{K})]$$

$$\text{iv) } [(\beta, Z) \cap_\varepsilon (\check{Y}, \mathcal{C})]V_\lambda(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) =_M [(\beta, Z)V_\lambda(\mathfrak{A}, \mathcal{K})] \cap_\varepsilon [(\check{Y}, \mathcal{C})V_\lambda(\mathfrak{A}, \mathcal{K})]$$

İspat: (i) Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $\mathcal{K} \times (Z \cup \mathcal{C})$, sağ tarafının parametre kümesi $(\mathcal{K} \times Z) \cup (\mathcal{K} \times \mathcal{C})$ olup, $\mathcal{K} \times (Z \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{K} \times Z) \cup (\mathcal{K} \times \mathcal{C})$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır. Ayrıca, kabul gereği $\mathcal{K} \neq \emptyset$, $Z \neq \emptyset$ ve $\mathcal{C} \neq \emptyset$ olduğundan, $\mathcal{K} \times (Z \cup \mathcal{C}) \neq \emptyset$ ve $(\mathcal{K} \times Z) \cup (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) \neq \emptyset$. Dolayısıyla sağ ve sol tarafın boş esnek kümeye eşit olma durumu bulunmamaktadır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\beta, Z) \cap_\varepsilon (\check{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{A}, Z \cup \mathcal{C})$ olsun.

Buradan, her $\mathfrak{z} \in Z \cup \mathcal{C}$ için,

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{z}) = \begin{cases} \beta(\mathfrak{z}), & \mathfrak{z} \in Z - \mathcal{C} \\ \check{Y}(\mathfrak{z}), & \mathfrak{z} \in \mathcal{C} - Z \\ \beta(\mathfrak{z}) \cap \check{Y}(\mathfrak{z}), & \mathfrak{z} \in Z \cap \mathcal{C} \end{cases}$$

$(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\mathfrak{A}, Z \cup \mathcal{C}) = (\mathfrak{V}, \mathcal{K} \times (Z \cup \mathcal{C}))$ olsun. Burada, her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (Z \cup \mathcal{C})$ için $\mathfrak{V}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{k}) \cup \mathfrak{A}'(\mathfrak{z})$. O halde, her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (Z \cup \mathcal{C})$ için,

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \mathfrak{Q}(\mathfrak{k}) \cup \mathfrak{A}'(\mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (Z - \mathcal{C}) \\ \mathfrak{Q}(\mathfrak{k}) \cup \mathfrak{A}'(\mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (\mathcal{C} - Z) \\ \mathfrak{Q}(\mathfrak{k}) \cup [\mathfrak{A}'(\mathfrak{z}) \cup \mathfrak{A}'(\mathfrak{z})], & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C}) \end{cases}$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\mathfrak{A}, Z) = ((\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times Z))$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\mathfrak{A}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times \mathcal{C})$ olsun. Buradan, her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times Z$ için $\mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{k}) \cup \mathfrak{A}'(\mathfrak{z})$ ve her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{c}) \in \mathcal{K} \times \mathcal{C}$ için $\mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{c}) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{k}) \cup \mathfrak{A}'(\mathfrak{c})$. Burada, $((\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times Z) \cup_\varepsilon (\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times \mathcal{C})) = (\mathfrak{C}, (\mathcal{K} \times Z) \cup (\mathcal{K} \times \mathcal{C}))$ olsun. O halde her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{K} \times Z) \cup (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \mathcal{K} \times (Z \cup \mathcal{C})$ için,

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{K} \times Z) - (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \mathcal{K} \times (Z - \mathcal{C}) \\ \mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) - (\mathcal{K} \times Z) = \mathcal{K} \times (\mathcal{C} - Z) \\ \mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \cup \mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{K} \times Z) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C}) \end{cases}$$

Buradan,

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \mathfrak{Q}(\mathfrak{k}) \cup \mathfrak{A}'(\mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (Z - \mathcal{C}) \\ \mathfrak{Q}(\mathfrak{k}) \cup \mathfrak{A}'(\mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (\mathcal{C} - Z) \\ [\mathfrak{Q}(\mathfrak{k}) \cup \mathfrak{A}'(\mathfrak{z})] \cup [\mathfrak{Q}(\mathfrak{k}) \cup \mathfrak{A}'(\mathfrak{z})], & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C}) \end{cases}$$

Böylece, ispat elde edilir.

(iii) Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $(Z \cup \mathcal{C}) \times \mathcal{K}$, sağ tarafının parametre kümesi $(Z \times \mathcal{K}) \cup (\mathcal{C} \times \mathcal{K})$ olup, $(Z \cup \mathcal{C}) \times \mathcal{K} = (Z \times \mathcal{K}) \cup (\mathcal{C} \times \mathcal{K})$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır. Ayrıca, kabul gereği $\mathcal{K} \neq \emptyset$, $Z \neq \emptyset$ ve $\mathcal{C} \neq \emptyset$ olduğundan, $(Z \cup \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \neq \emptyset$ ve $(Z \times \mathcal{K}) \cup (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) \neq \emptyset$. Dolayısıyla sağ ve sol tarafın boş esnek kümeye eşit olma durumu bulunmamaktadır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{A}, Z) \cup_\varepsilon (\mathfrak{A}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{A}, Z \cup \mathcal{C})$ olsun.

Buradan, her $z \in Z \cup C$ için,

$$\mathfrak{A}(z) = \begin{cases} \beta(z), & z \in Z - C \\ \check{Y}(z), & z \in C - Z \\ \beta(z) \cup \check{Y}(z), & z \in Z \cap C \end{cases}$$

$(\mathfrak{A}, Z \cup C)V_\lambda(\mathfrak{B}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{X}, (Z \cup C) \times \mathcal{K})$ olsun. Buradan, her $(z, k) \in (Z \cup C) \times \mathcal{K}$, için $\mathfrak{X}(z, k) = \mathfrak{A}(z) \cup \mathfrak{B}'(k)$ için,

$$\mathfrak{X}(k, z) = \begin{cases} \beta(z) \cup \mathfrak{B}'(k), & (k, z) \in (Z - C) \times \mathcal{K} \\ \check{Y}(z) \cup \mathfrak{B}'(k), & (k, z) \in (C - Z) \times \mathcal{K} \\ [\beta(z) \cup \check{Y}(z)] \cup \mathfrak{B}'(k), & (k, z) \in (Z \cap C) \times \mathcal{K} \end{cases}$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\beta, Z)V_\lambda(\mathfrak{B}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{X}, Z \times \mathcal{K})$ ve $(\check{Y}, C)V_\lambda(\mathfrak{B}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{I}, C \times \mathcal{K})$ olsun. O halde, her $(z, k) \in Z \times \mathcal{K}$ için $\mathfrak{X}(z, k) = \beta(z) \cup \mathfrak{B}'(k)$ ve her $(c, k) \in C \times \mathcal{K}$ için $\mathfrak{I}(c, k) = \check{Y}(c) \cup \mathfrak{B}'(k)$. Burada, $(\mathfrak{X}, Z \times \mathcal{K}) \cup_\varepsilon (\mathfrak{I}, C \times \mathcal{K}) = (\mathfrak{C}, (Z \times \mathcal{K}) \cup (C \times \mathcal{K}))$ olsun. Böylece, her $(z, k) \in (Z \times \mathcal{K}) \cup (C \times \mathcal{K}) = (Z \cup C) \times \mathcal{K}$ için,

$$\mathfrak{C}(k, z) = \begin{cases} \mathfrak{X}(z, k), & (k, z) \in (Z \times \mathcal{K}) - (C \times \mathcal{K}) = (Z - C) \times \mathcal{K} \\ \mathfrak{I}(z, k), & (k, z) \in (C \times \mathcal{K}) - (Z \times \mathcal{K}) = (C - Z) \times \mathcal{K} \\ \mathfrak{X}(z, k) \cup \mathfrak{I}(z, k), & (k, z) \in (Z \times \mathcal{K}) \cap (C \times \mathcal{K}) = (Z \cap C) \times \mathcal{K} \end{cases}$$

Buradan,

$$\mathfrak{C}(k, z) = \begin{cases} \beta(z) \cup \mathfrak{B}'(k), & (k, z) \in (Z - C) \times \mathcal{K} \\ \check{Y}(z) \cup \mathfrak{B}'(k), & (k, z) \in (C - Z) \times \mathcal{K} \\ [\beta(z) \cup \mathfrak{B}'(k)] \cup [\check{Y}(z) \cup \mathfrak{B}'(k)], & (k, z) \in (Z \cap C) \times \mathcal{K} \end{cases}$$

Böylece, ispat elde edilir.

2.4.4 Not Esnek lamda-çarpımının genişletilmiş kesişim ve birleşim işlemlerine dağılımları incelenmiştir. İki esnek kümenin M-eşitliğini sağlaması için gerekli şart, her iki taraftaki esnek kümelerin parametre kümelerinin eşit olması gerektiği göz önüne alındığında

genişletilmiş esnek küme işlemlerinin esnek lamda-çarpımına dağılmasının incelenemeyeceği, birleşim işleminin kartezyen çarpım üzerine dağılım göstermediği gerçeğinden açıktır. Bu nedenle, genişletilmiş esnek küme işlemlerinin esnek lamda-çarpımına dağılmasına bakılmamıştır.

4.2.5 Teorem $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, (β, Z) ve $(\check{Y}, \mathcal{C})$, U kümesi üzerinde birer esnek küme olmak üzere,

$$\text{i) } (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda[(\beta, Z) \tilde{\cap} (\check{Y}, \mathcal{C})] =_M [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, Z)] \tilde{\cup} [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\check{Y}, \mathcal{C})]$$

$$\text{ii) } (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda[(\beta, Z) \tilde{\cup} (\check{Y}, \mathcal{C})] =_M [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, Z)] \tilde{\cap} [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\check{Y}, \mathcal{C})]$$

$$\text{iii) } [(\beta, Z) \tilde{\cup} (\check{Y}, \mathcal{C})]V_\lambda(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_M [(\beta, Z)V_\lambda(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})] \tilde{\cup} [(\check{Y}, \mathcal{C})V_\lambda(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})]$$

$$\text{iv) } [(\beta, Z) \tilde{\cap} (\check{Y}, \mathcal{C})]V_\lambda(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_M [(\beta, Z)V_\lambda(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})] \tilde{\cap} [(\check{Y}, \mathcal{C})V_\lambda(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})]$$

İspat: (i) Eşitliğin sol ve sağ tarafının parametre kümesi $\mathcal{K} \times Z$ olduğundan M-eşitliğin ilk şartı sağlanır. Ayrıca, kabul gereği $\mathcal{K} \neq \emptyset$, $Z \neq \emptyset$ ve $\mathcal{C} \neq \emptyset$ olduğundan, $\mathcal{K} \times Z \neq \emptyset$. Dolayısıyla sağ ve sol tarafın boş esnek kümeye eşit olma durumu bulunmamaktadır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\beta, Z) \tilde{\cap} (\check{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{Q}, Z)$ olsun. Buradan, her $\mathfrak{z} \in Z$ için,

$$\mathfrak{Q}(\mathfrak{z}) = \begin{cases} \beta(\mathfrak{z}), & \mathfrak{z} \in Z - \mathcal{C} \\ \beta(\mathfrak{z}) \cap \check{Y}(\mathfrak{z}), & \mathfrak{z} \in Z \cap \mathcal{C} \end{cases}$$

$(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\mathfrak{Q}, Z) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{K} \times Z)$ olsun. Burada, her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times Z$ için $\mathfrak{Q}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{k}) \cup \mathfrak{Q}'(\mathfrak{z})$. O halde,

$$\mathfrak{Q}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \mathfrak{Q}(\mathfrak{k}) \cup \beta'(\mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (Z - \mathcal{C}) \\ \mathfrak{Q}(\mathfrak{k}) \cup [\beta'(\mathfrak{z}) \cup \check{Y}'(\mathfrak{z})], & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C}) \end{cases}$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\beta, Z) = (\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times Z)$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})V_\lambda(\check{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{Y}, \mathcal{K} \times \mathcal{C})$ olsun. Buradan, her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times Z$ için $\mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) =$

$\mathfrak{D}(\mathfrak{k}) \cup \mathfrak{B}'(\mathfrak{z})$ ve her $(\mathfrak{k}, c) \in \mathcal{K} \times \mathcal{C}$ için $\mathfrak{T}(\mathfrak{k}, c) = \mathfrak{D}(\mathfrak{k}) \cup \mathfrak{Y}'(c)$. Burada, $(\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z}) \tilde{\cup} (\mathfrak{T}, \mathcal{K} \times \mathcal{C}) = (\mathfrak{C}, (\mathcal{K} \times \mathcal{Z}))$ olsun. O halde her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için,

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{K} \times \mathcal{Z}) - (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \mathcal{K} \times (\mathcal{Z} - \mathcal{C}) \\ \mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \cup \mathfrak{T}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{K} \times \mathcal{Z}) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \mathcal{K} \times (\mathcal{Z} \cap \mathcal{C}) \end{cases}$$

Buradan,

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \mathfrak{D}(\mathfrak{k}) \cup \mathfrak{B}'(\mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (\mathcal{Z} - \mathcal{C}) \\ [\mathfrak{D}(\mathfrak{k}) \cup \mathfrak{B}'(\mathfrak{z})] \cup [\mathfrak{D}(\mathfrak{k}) \cup \mathfrak{Y}'(\mathfrak{z})], & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (\mathcal{Z} \cap \mathcal{C}) \end{cases}$$

Böylece, ispat elde edilir.

(iii) Eşitliğin sol ve sağ tarafının parametre kümesi $\mathcal{Z} \times \mathcal{K}$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır. Ayrıca, kabul gereği $\mathcal{K} \neq \emptyset$ ve $\mathcal{Z} \neq \emptyset$ olduğundan, $\mathcal{Z} \times \mathcal{K} \neq \emptyset$. Dolayısıyla sağ ve sol tarafın boş esnek kümeye eşit olma durumu bulunmamaktadır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{B}, \mathcal{Z}) \tilde{\cup} (\mathfrak{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{A}, \mathcal{Z})$ olsun. Buradan, her $\mathfrak{z} \in \mathcal{Z}$ için,

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{z}) = \begin{cases} \mathfrak{B}(\mathfrak{z}), & \mathfrak{z} \in \mathcal{Z} - \mathcal{C} \\ \mathfrak{B}(\mathfrak{z}) \cup \mathfrak{Y}(\mathfrak{z}), & \mathfrak{z} \in \mathcal{Z} \cap \mathcal{C} \end{cases}$$

$(\mathfrak{A}, \mathcal{Z})V_{\lambda}(\mathfrak{D}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{Z} \times \mathcal{K})$ olsun. Buradan, her $(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{K}$, için $\mathfrak{X}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{z}) \cup \mathfrak{D}'(\mathfrak{k})$. Böylece,

$$\mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \mathfrak{B}(\mathfrak{z}) \cup \mathfrak{D}'(\mathfrak{k}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{Z} - \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \\ [\mathfrak{B}(\mathfrak{z}) \cup \mathfrak{Y}(\mathfrak{z})] \cup \mathfrak{D}'(\mathfrak{k}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{Z} \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \end{cases}$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{B}, \mathcal{Z})V_{\lambda}(\mathfrak{D}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{Z} \times \mathcal{K})$ ve $(\mathfrak{Y}, \mathcal{C})V_{\lambda}(\mathfrak{D}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{T}, \mathcal{C} \times \mathcal{K})$ olsun. O halde, her $(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{K}$ için $\mathfrak{X}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) = \mathfrak{B}(\mathfrak{z}) \cup \mathfrak{D}'(\mathfrak{k})$ ve her $(c, \mathfrak{k}) \in \mathcal{C} \times \mathcal{K}$ için $\mathfrak{T}(c, \mathfrak{k}) = \mathfrak{Y}(c) \cup \mathfrak{D}'(\mathfrak{k})$. Burada, $(\mathfrak{X}, \mathcal{Z} \times \mathcal{K}) \tilde{\cup} (\mathfrak{T}, \mathcal{C} \times \mathcal{K}) = (\mathfrak{C}, (\mathcal{Z} \times \mathcal{K}))$ olsun. Böylece, her $(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) \in (\mathcal{Z} \times \mathcal{K})$ için,

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \mathfrak{X}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (Z \times \mathcal{K}) - (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) = (Z - \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \\ \mathfrak{X}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) \cup \mathfrak{Z}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) = (Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \end{cases}$$

Buradan,

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \beta(\mathfrak{z}) \cup \mathfrak{O}'(\mathfrak{k}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (Z - \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \\ [\beta(\mathfrak{z}) \cup \mathfrak{O}'(\mathfrak{k})] \cup [\check{\gamma}(\mathfrak{z}) \cup \mathfrak{O}'(\mathfrak{k})], & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \end{cases}$$

Böylece, ispat elde edilir.

4.2.6 *Not* $\mathcal{K} \neq \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ olduğu için, esnek ikili parçalı işlemlerin, esnek lamda-çarpımına soldan dağılım göstermeyeceği açıktır.

4.2.7 *Önerme* $(\mathfrak{O}, \mathcal{K})$, (β, Z) ve $(\check{\gamma}, \mathcal{C})$, U kümesi üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda,

$$i) (\mathfrak{O}, \mathcal{K})V_{\lambda}[(\beta, Z)\Lambda(\check{\gamma}, \mathcal{C})] \cong_L [(\mathfrak{O}, \mathcal{K})V_{\lambda}(\beta, Z)]V[(\mathfrak{O}, \mathcal{K})V_{\lambda}(\check{\gamma}, \mathcal{C})]$$

$$ii) (\mathfrak{O}, \mathcal{K})V_{\lambda}[(\beta, Z)V(\check{\gamma}, \mathcal{C})] \cong_L [(\mathfrak{O}, \mathcal{K})V_{\lambda}(\beta, Z)]\Lambda[(\mathfrak{O}, \mathcal{K})V_{\lambda_*}(\check{\gamma}, \mathcal{C})]$$

İspat: (i) İlk olarak sol tarafa bakılacak olursa, $(\beta, Z)\Lambda(\check{\gamma}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{A}, Z \times \mathcal{C})$ olsun. Buradan, her $(z, c) \in Z \times \mathcal{C}$ için $\mathfrak{A}(z, c) = \beta(z) \cap \check{\gamma}(c)$. $(\mathfrak{O}, \mathcal{K})V_{\lambda}(\mathfrak{A}, Z \times \mathcal{C}) = \mathfrak{C}(\mathcal{K} \times (Z \times \mathcal{C}))$ olsun. Buradan, her $(\mathfrak{k}, (z, c)) \in \mathcal{K} \times (Z \times \mathcal{C})$ için,

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{k}, (z, c)) = \mathfrak{O}(\mathfrak{k}) \cup [\beta(z) \cap \check{\gamma}(c)]' = \mathfrak{O}(\mathfrak{k}) \cup [\beta'(z) \cup \check{\gamma}'(c)]$$

Sağ tarafa bakılacak olursa, $(\mathfrak{O}, \mathcal{K})V_{\lambda}(\beta, Z) = (\mathbb{N}, \mathcal{K} \times Z)$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{K})V_{\lambda}(\check{\gamma}, \mathcal{C}) = (\mathcal{M}, \mathcal{K} \times \mathcal{C})$ olsun. Buradan, her $(\mathfrak{k}, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için $\mathcal{H}(\mathfrak{k}, z) = \mathfrak{O}(\mathfrak{k}) \cup \beta'(z)$ ve her $(\mathfrak{k}, c) \in \mathcal{K} \times \mathcal{C}$ için $\mathcal{M}(\mathfrak{k}, c) = \mathfrak{O}(\mathfrak{k}) \cup \check{\gamma}'(c)$. $(\mathcal{H}, \mathcal{K} \times Z)V(\mathcal{M}, \mathcal{K} \times \mathcal{C}) = (\mathfrak{M}, (\mathcal{K} \times Z) \times (\mathcal{K} \times \mathcal{C}))$ olsun. Buradan her $((\mathfrak{k}, z), (\mathfrak{k}, c)) \in (\mathcal{K} \times Z) \times (\mathcal{K} \times \mathcal{C})$ için

$$\mathfrak{M}((\mathfrak{k}, z), (\mathfrak{k}, c)) = [\mathfrak{O}(\mathfrak{k}) \cup \beta'(z)] \cup [\mathfrak{O}(\mathfrak{k}) \cup \check{\gamma}'(c)]$$

Burada her $(\ell, (z, c)) \in \mathcal{K} \times (Z \times \mathcal{C})$ için,

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(\ell, (z, c)) &= \mathfrak{L}(\ell) \cup [\beta'(z) \cup \check{Y}'(c)] = [\mathfrak{L}(\ell) \cup \beta'(z)] \cup [\mathfrak{L}(\ell) \cup \check{Y}'(c)] \\ &= \mathfrak{M}((\ell, z), (\ell, c))\end{aligned}$$

olacak şekilde $((\ell, z), (\ell, c)) \in (\mathcal{K} \times Z) \times (\mathcal{K} \times \mathcal{C})$ vardır. Böylece, istenen elde edilir. (2) nin ispatı da benzer şekilde yapılır.

Önerme 4.2.7'deki L-alt kümelerin L-eşitlik olmayacağı Örnek 4.2.8 ile açıktır.

4.2.8 Örnek = E = $\{\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_4\}$ parametre kümesi, $\mathcal{K} = \{\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3\}$, $Z = \{\mathfrak{u}_1\}$ ve $\mathcal{C} = \{\mathfrak{u}_4\}$, E parametre kümesinin alt kümeleri, $U = \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4, \mathfrak{r}_5\}$ evrensel küme olmak üzere, U üzerinde $(\mathfrak{L}, \mathcal{K})$, (β, Z) ve $(\check{Y}, \mathcal{C})$ esnek kümeleri

$$(\mathfrak{L}, \mathcal{K}) = \{(\mathfrak{u}_2, \{\mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4\}), (\mathfrak{u}_3, \{\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3\})\}, (\beta, Z) = \{(\mathfrak{u}_1, U)\}, (\check{Y}, \mathcal{C}) = \{(\mathfrak{u}_4, \{\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4\})\}$$

olarak tanımlansın. İlk olarak sol tarafa bakılacak olursa, $(\beta, Z) \wedge (\check{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{A}, Z \times \mathcal{C})$ olsun. Buradan,

$$(\mathfrak{A}, Z \times \mathcal{C}) = \{((\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_4), \{\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4\})\}$$

$(\mathfrak{L}, \mathcal{K}) V_\lambda (\mathfrak{A}, Z \times \mathcal{C}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times (Z \times \mathcal{C}))$ olsun. Böylece,

$$(\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times (Z \times \mathcal{C})) = \left(\left((\mathfrak{u}_2, (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_4)), \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4, \mathfrak{r}_5\} \right), \left((\mathfrak{u}_3, (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_4)), \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_5\} \right) \right)$$

Sağ taraftan devam edilecek olursa, $(\mathfrak{L}, \mathcal{K}) V_\lambda (\beta, Z) = (\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times Z)$ olsun. Buradan,

$$(\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times Z) = \{((\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_1), \{\mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4\}), ((\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_1), \{\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3\})\}$$

$(\mathfrak{L}, \mathcal{K}) V_\lambda (\check{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{L}, \mathcal{K} \times \mathcal{C})$ olsun. Buradan,

$$(\mathbb{C}, \mathcal{K} \times \mathcal{C}) = [((\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_4), \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4, \mathfrak{r}_5\}), ((\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_4), \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_5\})]$$

$(\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z}) \vee (\mathbb{C}, \mathcal{K} \times \mathcal{C}) = (\mathfrak{M}, (\mathcal{K} \times \mathcal{Z}) \times (\mathcal{K} \times \mathcal{C}))$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{M}, (\mathcal{K} \times \mathcal{Z}) \times (\mathcal{K} \times \mathcal{C})) \\ &= \left\{ \left(((\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_1), (\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_4)), \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4, \mathfrak{r}_5\} \right), \left(((\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_1), (\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_4)), \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4, \mathfrak{r}_5\} \right), \right. \\ & \left. \left(((\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_1), (\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_4)), \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4, \mathfrak{r}_5\} \right), \left(((\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_1), (\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_4)), \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_5\} \right) \right\} \end{aligned}$$

Böylece,

$$\mathfrak{M}((\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_1), (\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_4)) \neq \mathfrak{X}(\mathfrak{u}_2, (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_4)), \quad \mathfrak{M}((\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_1), (\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_4)) \neq \mathfrak{X}(\mathfrak{u}_3, (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_4)),$$

$$\mathfrak{M}((\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_1), (\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_4)) \neq \mathfrak{X}(\mathfrak{u}_2, (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_4)), \quad \mathfrak{M}((\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_1), (\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_4)) \neq \mathfrak{X}(\mathfrak{u}_3, (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_4))$$

olduğu görülür. Buradan,

$$(\mathfrak{M}, (\mathcal{K} \times \mathcal{Z}) \times (\mathcal{K} \times \mathcal{C})) \not\subseteq_L (\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times (\mathcal{Z} \times \mathcal{C}))$$

olup, $(\mathfrak{M}, (\mathcal{K} \times \mathcal{Z}) \times (\mathcal{K} \times \mathcal{C})) \neq_L (\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times (\mathcal{Z} \times \mathcal{C}))$ elde edilir.

4.3. Esnek Lamda-Çarpım ve Karar Verme Problemi

Bu bölümde, Çağman ve Enginoğlu (2010a) tarafından tanımlanmış, int-uni operatörü ve int-uni karar fonksiyonu, int-uni karar verme metodu esnek lamda-çarpıma uygulanmıştır. Bölüm boyunca, U üzerindeki esnek kümelerin tüm esnek lamda-çarpımının kümesi “ $\vee_\lambda(U)$ ” ile $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve $(\mathfrak{P}, \mathcal{Z})$ esnek kümelerinin esnek artı-çarpımının esnek yaklaşım fonksiyonu

$$\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} \vee_\lambda \mathfrak{P}_{\mathcal{Z}}: \mathcal{K} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{P}(U)$$

ile gösterilecektir. Burada, her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için, $(\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} \vee_\lambda \mathfrak{P}_{\mathcal{Z}})(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{k}) \cup \mathfrak{P}'(\mathfrak{z})$ olduğu bilinmektedir.

4.3.1. Tanım $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve $(\beta, \mathcal{Z})$, U üzerinde birer esnek küme olsun. $int_{\mathfrak{k}}uni_{\mathcal{Z}}$ ve $int_{\mathcal{Z}}uni_{\mathfrak{k}}$ ile gösterilen, esnek- yıldız çarpım için int-uni operatörü sırasıyla,

$$int_{\mathfrak{k}}uni_{\mathcal{Z}}: V_{\lambda}(U) \rightarrow P(U), \quad int_{\mathfrak{k}}uni_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} \vee_{\lambda} \beta_{\mathcal{Z}}) = \bigcap_{\mathfrak{k} \in \mathcal{K}} \left(\bigcup_{\mathcal{Z} \in \mathcal{Z}} \left((\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} \vee_{\lambda} \beta_{\mathcal{Z}})(\mathfrak{k}, \mathcal{Z}) \right) \right)$$

$$int_{\mathcal{Z}}uni_{\mathfrak{k}}: V_{\lambda}(U) \rightarrow P(U), \quad int_{\mathcal{Z}}uni_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} \vee_{\lambda} \beta_{\mathcal{Z}}) = \bigcap_{\mathcal{Z} \in \mathcal{Z}} \left(\bigcup_{\mathfrak{k} \in \mathcal{K}} (\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} \vee_{\lambda} \beta_{\mathcal{Z}})(\mathfrak{k}, \mathcal{Z}) \right)$$

4.3.2. Tanım $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \vee_{*} (\beta, \mathcal{Z}) \in V_{\lambda}(U)$ olsun. int-uni olarak gösterilen esnek yıldız-çarpımın int-uni fonksiyonu

$$int\text{-}uni: V_{\lambda}(U) \rightarrow P(U), \quad int\text{-}uni(\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} \vee_{\lambda} \beta_{\mathcal{Z}}) = int_{\mathfrak{k}}uni_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} \vee_{\lambda} \beta_{\mathcal{Z}}) \cup int_{\mathcal{Z}}uni_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} \vee_{\lambda} \beta_{\mathcal{Z}})$$

şeklindedir. Burada, $int\text{-}uni(\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} \vee_{\lambda} \beta_{\mathcal{Z}})$ nin U kümesinin bir alt kümesi olduğu aşıkardır. $int\text{-}uni(\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} \vee_{\lambda} \beta_{\mathcal{Z}})$ değerine, $\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} \vee_{\lambda} \beta_{\mathcal{Z}}$ esnek lamda çarpımının int-uni karar kümesi denir.

Belirsizlik içerek bir gerçek hayat problemi için esnek kümeler yardımıyla, esnek lamda-çarpımına dayanan int-uni karar verme metodu aşağıdaki algoritma yardımıyla oluşturulur.

ALGORİTMA

Adım 1: Parametre kümesinin uygun alt kümeleri seçilir.

Adım 2: Parametre kümesinin her bir alt kümesi için esnek kümeler inşa edilir.

Adım 3: Esnek cümlelerin $\vee_{\lambda}$ -çarpımı hesaplanır.

Adım 4: Çarpımın int-uni karar kümesi hesaplanır.

Şimdi esnek lamda-çarpımın int-uni karar verme problemine nasıl uygulandığı ile ilgili bir örnek verilecektir.

4.3.3. *Örnek* Özel bir dersane, genç ve dinamik bir öğretmen ekibi oluşturmak için işe alım sürecini duyurmuştur. İlk olarak başvurular pozisyon için gerekli nitelikleri karşıladıklarından emin olmak için incelenir ve uygun olmayan başvurular diskalifiye edilir. Bu ön eleme sonrasında aday sayısının çokluğu nedeniyle kurum, iki aşamalı bir değerlendirme sürecine geçilmesine karar verilmiştir. Nazlan Hanım'ın görevinin, çok başvuru olması sebebiyle, bu kriterlere dayalı olarak adayları ELEMENMEK olduğu unutulmamalıdır.

Bu süreçte:

1. Aşama: İnsan Kaynakları departmanı temsilcisi Nazlan Hanım, adayları mülakat performanslarına ve sınav sonuçlarına göre ELEYECEKTİR.
2. Aşama: İlk aşamayı geçen adaylar kapsamlı bir eğitim programına tabi tutulacak ve bu eğitimi başarıyla tamamlayanlar kurumun profesyonel öğretim ekibine katılmaya hak kazanacaktır.

Değerlendirme sırasında Nazlan Hanım şunları tespit edecektir:

- ELENMESİNİ istediği adaylarda görmek İSTEDİĞİ parametreler: Bunlar, bir aday pozisyon için uygunsuz kılan özellikler veya eksikliklerdir.
- ELENMESİNİ istediği adaylarda görmek İSTEMEDİĞİ parametreler: Bunlar, bir aday daha sonraki değerlendirmeler için uygun kılan temel özelliklerdir.

Nazlan Hanım, karar vermek için int-uni karar verme yöntemini esnek lamda-çarpımına uygulayarak kullanacaktır. Öğretmen alım süreci için başvuruları onaylanan adayların kümesi $U = \{t_1, t_2, \dots, t_{35}\}$ ile ELENMEK öğretmenleri belirlemek için kullanılacak parametreler kümesi $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$ ile temsil edilmiş olsun. Her a_i parametresi, $i = 1, 2, \dots, 10$ aşağıdaki açıklamalara karşılık gelmektedir:

- a_1 : "Hoşgörüsüz ve sabırsız"
- a_2 : "Alana yeterli düzeyde hâkim ve genel bilgiye sahip"

- a_3 : "Etkili sınıf yönetimi becerilerine sahip olmayan"
- a_4 : "Güçlü iletişim becerilerine sahip olan"
- a_5 : "Eğitimde bireysel farklılıkları dikkate alan"
- a_6 : "Öğretme becerileri yetersiz olan"
- a_7 : "Yenilik ve gelişmelere açık, kendini sürekli yenileyen"
- a_8 : "Teşvik edici ve destekleyici olmayan"
- a_9 : "Neşeli, esprili ve sevecen olmayan"
- a_{10} : "Zayıf diksiyona sahip"

Öğretmen seçim sürecini ele almak için esnek lamda-çarpım yöntemini aşağıdaki şekilde uygulanır:

Adım 1: Parametre Kümelerinin Belirlenmesi

Karar verici Nazlan Hanım, ELENECEK adayların özelliklerini tanımlayan parametreleri mevcut parametrelerden seçer.

- ELENECEK adaylarda olmasını İSTEDİĞİ parametreler: Bunlar, bir adayın seçimi için uygun olmayan, ancak elenmesi için uygun olan, istenmeyen özellikler veya eksikliklerdir.
- ELENECEK adaylarda olmasını İSTEMEDİĞİ parametreler: Bunlar bir öğretmende bulunması gereken temel nitelikleri veya becerileri temsil eder ve eksikliği ya da yokluğu bir adayın elenmesine sebep olabilir.

Bu parametreleri iki küme halinde düzenleyerek, seçim sürecine netlik ve karar vericinin önceliklerine uyum sağlanmaktadır. Parametreler aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{K} = \{a_1, a_3, a_6, a_8\} \text{ ve } \mathcal{Z} = \{a_2, a_4, a_5, a_7\}$$

şeklindedir.

Adım 2: Bu parametre kümeler kullanılarak, karar vericini $(\mathcal{Q}, \mathcal{K})$ ve $(\mathcal{Q}, \mathcal{Z})$ esnek kümeleri inşa edilir.

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}, \mathcal{K}) = & \{(a_1, \{t_2, t_6, t_7, t_{11}, t_{13}, t_{17}, t_{19}, t_{27}, t_{31}, t_{33}\}), \\ & (a_3, \{t_6, t_{10}, t_{11}, t_{18}, t_{19}, t_{21}, t_{22}, t_{30}, t_{32}, t_{33}\}), \\ & (a_6, \{t_1, t_3, t_6, t_{10}, t_{13}, t_{18}, t_{19}, t_{25}, t_{28}, t_{32}\}), \\ & (a_8, \{t_1, t_3, t_6, t_{10}, t_{11}, t_{13}, t_{17}, t_{22}, t_{25}, t_{27}, t_{29}, t_{33}\})\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}, \mathcal{Z}) = & \{(a_2, \{t_9, t_{14}, t_{17}, t_{23}, t_{25}, t_{27}\}), \\ & (a_4, \{t_2, t_3, t_7, t_9, t_{11}, t_{14}, t_{17}, t_{21}, t_{23}, t_{30}, t_{31}, t_{32}\}), \\ & (a_5, \{t_1, t_3, t_{14}, t_{19}, t_{20}, t_{23}, t_{27}, t_{32}\}), (a_7, \{t_7, t_{14}, t_{19}, t_{20}, t_{23}, t_{27}, t_{29}, t_{32}, t_{35}\})\} \end{aligned}$$

$(\mathcal{Q}, \mathcal{K})$ esnek kümesi, $\mathcal{K}$ 'daki istenmeyen parametreler nedeniyle elenecek adayların kümesini temsil ederken, $(\mathcal{Q}, \mathcal{Z})$ esnek kümesi, $\mathcal{Z}$ 'deki istenen parametrelere sahip olarak ideale daha yakın olan adaylar kümesini temsil eder.

Adım 3: Verilen esnek kümelerin esnek lamda-çarpımı (V_λ -çarpımı) hesaplanır.

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\mathcal{K}} V_\lambda \mathcal{Q}_{\mathcal{Z}} = & \left\{ \left((a_1, a_2), \left\{ t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{15}, t_{16}, t_{17}, t_{18}, \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. t_{19}, t_{20}, t_{21}, t_{22}, t_{24}, t_{26}, t_{28}, t_{29}, t_{30}, t_{31}, t_{32}, t_{33}, t_{34}, t_{35} \right\} \right), \right. \\ & \left((a_1, a_4), \left\{ t_1, t_2, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{15}, t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_{19}, \right. \right. \\ & \left. \left. t_{20}, t_{22}, t_{24}, t_{25}, t_{26}, t_{27}, t_{28}, t_{29}, t_{31}, t_{33}, t_{34}, t_{35} \right\} \right), \\ & \left((a_1, a_5), \left\{ t_2, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{15}, t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_{19}, t_{21}, t_{22}, \right. \right. \\ & \left. \left. t_{24}, t_{25}, t_{26}, t_{27}, t_{28}, t_{29}, t_{30}, t_{31}, t_{33}, t_{34}, t_{35} \right\} \right), \\ & \left((a_1, a_7), \left\{ t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{15}, t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_{19}, t_{21}, t_{22}, t_{24}, t_{25}, \right. \right. \\ & \left. \left. t_{26}, t_{27}, t_{28}, t_{30}, t_{31}, t_{33}, t_{34} \right\} \right), \\ & \left. \left((a_3, a_2), \left\{ t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{15}, t_{16}, t_{18}, t_{19}, t_{20}, t_{21}, t_{22}, t_{24}, \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. t_{26}, t_{28}, t_{29}, t_{30}, t_{31}, t_{32}, t_{33}, t_{34}, t_{35} \right\} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left((a_3, a_4), \left\{ \begin{array}{c} t_1, t_4, t_5, t_6, t_8, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{15}, t_{16}, t_{18}, t_{19}, t_{20}, t_{21}, t_{22}, t_{24}, t_{25}, \\ t_{26}, t_{27}, t_{28}, t_{29}, t_{30}, t_{33}, t_{34}, t_{35} \end{array} \right\} \right), \\ & \left((a_3, a_5), \left\{ \begin{array}{c} t_2, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{15}, t_{16}, t_{18}, t_{19}, t_{21}, t_{22}, t_{24}, t_{25}, \\ t_{26}, t_{28}, t_{29}, t_{30}, t_{31}, t_{32}, t_{33}, t_{34}, t_{35} \end{array} \right\} \right), \\ & \left((a_3, a_7), \left\{ \begin{array}{c} t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{15}, t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_{19}, t_{21}, t_{22}, t_{24}, t_{25}, \\ t_{26}, t_{28}, t_{30}, t_{31}, t_{32}, t_{33}, t_{34} \end{array} \right\} \right), \\ & \left((a_6, a_2), \left\{ \begin{array}{c} t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{15}, t_{16}, t_{18}, t_{19}, t_{20}, t_{22}, t_{24}, t_{25}, \\ t_{26}, t_{28}, t_{29}, t_{30}, t_{31}, t_{32}, t_{33}, t_{34}, t_{35} \end{array} \right\} \right), \\ & \left((a_6, a_4), \left\{ \begin{array}{c} t_1, t_3, t_4, t_5, t_6, t_8, t_{10}, t_{12}, t_{13}, t_{15}, t_{16}, t_{18}, t_{19}, t_{20}, t_{22}, t_{24}, t_{25}, \\ t_{26}, t_{27}, t_{28}, t_{29}, t_{32}, t_{33}, t_{34}, t_{35} \end{array} \right\} \right), \\ & \left((a_6, a_5), \left\{ \begin{array}{c} t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{15}, t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_{19}, t_{21}, t_{22}, t_{24}, t_{25}, \\ t_{26}, t_{28}, t_{29}, t_{30}, t_{31}, t_{32}, t_{33}, t_{34}, t_{35} \end{array} \right\} \right), \\ & \left((a_6, a_7), \left\{ \begin{array}{c} t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{15}, t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_{19}, t_{21}, t_{22}, t_{24}, t_{25}, \\ t_{26}, t_{28}, t_{30}, t_{31}, t_{32}, t_{33}, t_{34} \end{array} \right\} \right), \\ & \left((a_8, a_2), \left\{ \begin{array}{c} t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{15}, t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_{19}, t_{20}, t_{21}, t_{22}, t_{24}, t_{25}, \\ t_{26}, t_{27}, t_{28}, t_{29}, t_{30}, t_{31}, t_{32}, t_{33}, t_{34}, t_{35} \end{array} \right\} \right), \\ & \left((a_8, a_4), \left\{ \begin{array}{c} t_1, t_3, t_4, t_5, t_6, t_8, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{15}, t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_{19}, t_{20}, t_{22}, t_{24}, t_{25}, \\ t_{26}, t_{27}, t_{28}, t_{29}, t_{33}, t_{34}, t_{35} \end{array} \right\} \right), \\ & \left((a_8, a_5), \left\{ \begin{array}{c} t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{15}, t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_{21}, t_{22}, t_{24}, t_{25}, \\ t_{26}, t_{27}, t_{28}, t_{29}, t_{30}, t_{31}, t_{34}, t_{35} \end{array} \right\} \right), \\ & \left((a_8, a_7), \left\{ \begin{array}{c} t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{15}, t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_{21}, t_{22}, t_{24}, t_{25}, \\ t_{26}, t_{27}, t_{28}, t_{29}, t_{30}, t_{31}, t_{33}, t_{34} \end{array} \right\} \right) \end{aligned}$$

Adım 4: $\text{int-uni}(\mathfrak{Q}_{\mathcal{X}} V_{\lambda} \mathfrak{Q}_{\mathcal{Z}})$ karar verme kümesi bulunur.

$$\text{int}_{\mathcal{K}} - \text{uni}_Z(\mathfrak{O}_{\mathcal{K}} V_{\lambda} \mathfrak{O}_Z) = \bigcap_{\mathcal{K} \in \mathcal{K}} \left(\bigcup_{Z \in Z} ((\mathfrak{O}_{\mathcal{K}} V_{\lambda} \mathfrak{O}_Z)(\mathcal{K}, Z)) \right)$$

olmak üzere, önce $\cup_{z \in Z} ((\mathfrak{P}_{\mathcal{K}} V_{\lambda} \mathfrak{P}_Z)(k, z))$ hesaplayalım:

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{G}_{\mathcal{K}} V_{\lambda} \mathfrak{G}_{\mathcal{Z}})(a_1, a_2) \cup (\mathfrak{G}_{\mathcal{K}} V_{\lambda} \mathfrak{G}_{\mathcal{Z}})(a_1, a_4) \cup (\mathfrak{G}_{\mathcal{K}} V_{\lambda} \mathfrak{G}_{\mathcal{Z}})(a_1, a_5) \cup (\mathfrak{G}_{\mathcal{K}} V_{\lambda} \mathfrak{G}_{\mathcal{Z}})(a_1, a_7) \\ &= \left\{ \mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3, \mathfrak{t}_4, \mathfrak{t}_5, \mathfrak{t}_6, \mathfrak{t}_7, \mathfrak{t}_8, \mathfrak{t}_{10}, \mathfrak{t}_{11}, \mathfrak{t}_{12}, \mathfrak{t}_{13}, \mathfrak{t}_{15}, \mathfrak{t}_{16}, \mathfrak{t}_{17}, \mathfrak{t}_{18}, \mathfrak{t}_{19}, \mathfrak{t}_{20}, \mathfrak{t}_{21}, \mathfrak{t}_{22}, \right. \\ & \quad \left. \mathfrak{t}_{24}, \mathfrak{t}_{26}, \mathfrak{t}_{28}, \mathfrak{t}_{29}, \mathfrak{t}_{30}, \mathfrak{t}_{31}, \mathfrak{t}_{32}, \mathfrak{t}_{33}, \mathfrak{t}_{34}, \mathfrak{t}_{35} \right\} \\ & \quad \cup \left\{ \mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_4, \mathfrak{t}_5, \mathfrak{t}_6, \mathfrak{t}_7, \mathfrak{t}_8, \mathfrak{t}_{10}, \mathfrak{t}_{11}, \mathfrak{t}_{12}, \mathfrak{t}_{13}, \mathfrak{t}_{15}, \mathfrak{t}_{16}, \mathfrak{t}_{17}, \mathfrak{t}_{18}, \mathfrak{t}_{19}, \mathfrak{t}_{20}, \mathfrak{t}_{22}, \right. \\ & \quad \left. \mathfrak{t}_{24}, \mathfrak{t}_{25}, \mathfrak{t}_{26}, \mathfrak{t}_{27}, \mathfrak{t}_{28}, \mathfrak{t}_{29}, \mathfrak{t}_{31}, \mathfrak{t}_{33}, \mathfrak{t}_{34}, \mathfrak{t}_{35} \right\} \end{aligned}$$

5. ESNEK GAMMA-ÇARPIM

Bu bölümde, esnek gamma-çarpımı adı verilen yeni bir çarpım tanımlanmış, örneği verilmiş, çarpımın tüm cebirsel özellikleri çeşitli esnek alt küme ve eşitlik kavramlarıyla ilişkili olarak detaylı bir şekilde incelenmiş, bu çarpımın diğer esnek küme işlemlerine dağılma kuralları araştırılmış ve son olarak bu çarpım karar verme problemlerine uygulanmıştır.

5.1. Esnek Gamma-Çarpım ve Özellikleri

Bu alt bölümde, esnek gamma-çarpım tanımlanmış, örneği verilmiş, çarpımın cebirsel özellikleri çeşitli esnek alt küme ve eşitlik kavramlarıyla ilişkili olarak detaylı bir şekilde incelenmiştir.

5.1.1 Tanım $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) , U kümesi üzerinde birer esnek küme olsun. $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) esnek kümelerinin esnek gamma-çarpımı (Λ_γ -çarpımı) $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\beta, Z)$, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için,

$$\check{Y}(k, z) = \mathfrak{Q}(k) \gamma \beta(z)$$

olmak üzere $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\beta, Z) = (\check{Y}, \mathcal{K} \times Z)$ şeklinde tanımlanır. Burada, $\mathfrak{Q}(k) \gamma \beta(z) = \mathfrak{Q}'(k) \cap \beta(z)$ olduğu bilinmektedir.

5.1.2 Örnek $E = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ parametre kümesi $\mathcal{K} = \{u_2, u_3\}$ ve $Z = \{u_2, u_4\}$, E parametre kümesinin iki alt kümesi $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ evrensel küme olmak üzere, U üzerinde $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) ,

$$(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = \{(u_2, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}), (u_3, \{x_3, x_5\})\},$$

$$(\beta, Z) = \{(u_2, \{x_1, x_2, x_3\}), (u_4, \{x_2, x_3, x_4\})\}$$

olarak tanımlanan iki esnek küme ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\beta, Z) = (\check{Y}, \mathcal{K} \times Z)$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned}
& (\ddot{Y}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z}) \\
& = \left\{ \left((\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_2), \emptyset \right), \left((\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_4), \emptyset \right), \left((\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_2), \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2\} \right), \left((\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_4), \{\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_4\} \right) \right\}
\end{aligned}$$

şeklindedir.

5.1.3 Önerme Λ_{γ} -çarpımı, $S_E(U)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: Λ_{γ} -çarpımının, $S_E(U)$ kümesi üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Gerçekten, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve $(\beta, \mathcal{Z})$, U üzerinde esnek kümeler olmak üzere,

$$V_{\lambda}: S_E(U) \times S_E(U) \rightarrow S_E(U)$$

$$((\mathfrak{Q}, \mathcal{K}), (\beta, \mathcal{Z})) \rightarrow (\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_{\gamma} (\beta, \mathcal{Z}) = (\ddot{Y}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z}) = (\ddot{Y}, \mathcal{C})$$

olup, $(\ddot{Y}, \mathcal{C})$ de U üzerinde bir esnek kümedir.

5.1.4 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, $(\beta, \mathcal{Z})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{C})$, U kümesi üzerinde birer esnek küme olmak üzere,

$$(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_{\gamma} [(\beta, \mathcal{Z}) \Lambda_{\gamma} (\ddot{Y}, \mathcal{C})] \neq_M [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_{\gamma} (\beta, \mathcal{Z})] \Lambda_{\gamma} (\ddot{Y}, \mathcal{C})$$

olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, Λ_{γ} -çarpımı birleşme özelliğine sahip değildir.

İspat: $S_E(U)$ kümesi üzerinde, Λ_{γ} -çarpımının birleşme özelliğine sahip olmadığını göstermek için bir örnek verelim. $E = \{\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_4\}$ parametre kümesi, $\mathcal{K} = \{\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3\}$, $\mathcal{Z} = \{\mathfrak{u}_1\}$ ve $\mathcal{C} = \{\mathfrak{u}_4\}$, E parametre kümesinin alt kümeleri, $U = \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4, \mathfrak{r}_5\}$ evrensel küme olmak üzere, U üzerinde $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, $(\beta, \mathcal{Z})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{C})$ esnek kümeleri

$$(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = \{(\mathfrak{u}_2, \{\mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4\}), (\mathfrak{u}_3, \{\mathfrak{r}_1\})\}, (\beta, \mathcal{Z}) = \{(\mathfrak{u}_1, \emptyset)\}, (\ddot{Y}, \mathcal{C}) = \{(\mathfrak{u}_4, \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_5\})\}$$

olarak tanımlansın.

İlk olarak eşitsizliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\beta, Z)\Lambda_\gamma(\check{Y}, \mathcal{C}) = (\zeta, Z \times \mathcal{C})$ olsun. Buradan,

$$(\zeta, Z \times \mathcal{C}) = \{((l_1, l_4), \{r_1, r_3, r_5\})\}$$

elde edilir. $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\zeta, Z \times \mathcal{C}) = (\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times (Z \times \mathcal{C}))$ olsun. Böylece,

$$(\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times (Z \times \mathcal{C})) = \{((l_2, (l_1, l_4)), \{r_1, r_5\}), ((l_3, (l_1, l_4)), (r_3, r_5))\}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sol tarafından devam edilecek olursa, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\beta, Z) = (\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times Z)$ olsun. Buradan,

$$(\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times Z) = \{((l_2, l_1), \emptyset), ((l_3, l_1), \emptyset)\}$$

elde edilir. $(\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times Z)\Lambda_\gamma(\check{Y}, \mathcal{C}) = (\zeta, (\mathcal{K} \times Z) \times \mathcal{C})$ olsun. Böylece,

$$(\zeta, (\mathcal{K} \times Z) \times \mathcal{C}) = \{(((l_2, l_1), l_4), \{r_1, r_3, r_5\}), (((l_3, l_1), l_4), \{r_1, r_3, r_5\}))\}$$

elde edilir. Buradan, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times (Z \times \mathcal{C})) \neq_M (\zeta, (\mathcal{K} \times Z) \times \mathcal{C})$ olduğu görülür. Benzer şekilde, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times (Z \times \mathcal{C})) \neq_L (\zeta, (\mathcal{K} \times Z) \times \mathcal{C})$ ve $(\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times (Z \times \mathcal{C})) \neq_J (\zeta, (\mathcal{K} \times Z) \times \mathcal{C})$ olduğu açıktır.

5.1.5 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) , U üzerinde birer esnek küme olmak üzere $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\beta, Z) \neq_M (\beta, Z)\Lambda_\gamma(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde Λ_γ -çarpımı M-eşitliği altında değişme özelliğine sahip değildir.

İspat: $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\beta, Z) = (\check{Y}, \mathcal{K} \times Z)$ ve $(\beta, Z)\Lambda_\gamma(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{A}, Z \times \mathcal{K})$ olsun. $\mathcal{K} \times Z \neq Z \times \mathcal{K}$ olduğundan ispat açıktır.

5.1.6 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) , U üzerinde birer esnek küme olmak üzere $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\beta, Z) \neq_J (\beta, Z)\Lambda_\gamma(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde Λ_γ -çarpımı J-eşitliği altında değişme özelliğine sahip değildir.

İspat: $S_E(U)$ kümesi üzerinde, Λ_γ -çarpımının J-eşitliği altında değişme özelliğine sahip olmadığını göstermek için bir örnek verelim. $E = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ parametre kümesi, $\mathcal{K} = \{u_2, u_3\}$, $Z = \{u_1\}$, E parametre kümesinin alt kümeleri, $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ evrensel küme olmak üzere, U üzerinde $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, (β, Z) esnek kümeleri

$$(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = \{(u_2, \{x_3, x_4\}), (u_3, \{x_1\})\}, (\beta, Z) = \{(u_1, \emptyset)\}$$

olarak tanımlansın. İlk olarak eşitsizliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\beta, Z) = (\mathcal{W}, \mathfrak{Q} \times Z)$ olsun. Buradan,

$$(\mathcal{W}, \mathfrak{Q} \times Z) = \{((u_2, u_1), \emptyset), ((u_3, u_1), \emptyset)\}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafından devam edilecek olursa, $(\beta, Z)\Lambda_\gamma(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = (\mathcal{H}, Z \times \mathcal{K})$ olsun. Buradan,

$$(\mathcal{H}, Z \times \mathcal{K}) = \{((u_1, u_2), \{x_3, x_4\}), ((u_1, u_3), \{x_1\})\}$$

elde edilir. Böylece, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\beta, Z) \neq_J (\beta, Z)\Lambda_\gamma(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ olduğu görülür. Buradan, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\beta, Z) \neq_L (\beta, Z)\Lambda_\gamma(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ olduğu da açıktır.

5.1.7 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, U üzerinde bir esnek küme olmak üzere, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma\emptyset_\emptyset =_M \emptyset_\emptyset\Lambda_\gamma(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_M \emptyset_\emptyset$ olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde, V_λ - çarpımının M-eşitliğine göre yutan elemanı boş esnek kümedir.

İspat: $\emptyset_\emptyset = (\ddot{Y}, \emptyset)$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma\emptyset_\emptyset = (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\ddot{Y}, \emptyset) = (\beta, \mathcal{K} \times \emptyset) = (\beta, \emptyset)$ olsun. Parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_\emptyset$ olduğundan, $(\beta, \emptyset) = \emptyset_\emptyset$ elde edilir. $\emptyset_\emptyset\Lambda_\gamma(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = \emptyset_\emptyset$ olduğunun ispatı ise benzer şekilde gösterilir.

5.1.8 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, U üzerinde bir esnek küme olsun. O halde, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma\emptyset_{\mathcal{K}} =_M \emptyset_{\mathcal{K} \times \mathcal{K}}$ ve $\emptyset_{\mathcal{K}}\Lambda_\gamma(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_M (\mathfrak{Q}, \mathcal{K} \times \mathcal{K})$.

İspat: $\emptyset_{\mathcal{K}} = (\ddot{Y}, \mathcal{K})$ olsun. Buradan, her $k \in \mathcal{K}$ için $\ddot{Y}(k) = \emptyset$. $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_{\gamma}\emptyset_{\mathcal{K}} = (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_{\gamma}(\ddot{Y}, \mathcal{K}) = (\beta, \mathcal{K} \times \mathcal{K})$ olsun. Böylece, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ için $\beta(k, z) = \mathfrak{Q}'(k) \cap \ddot{Y}(z) = \mathfrak{Q}'(k) \cap \emptyset = \emptyset$ olup $(\beta, \mathcal{K} \times \mathcal{K}) = (\emptyset, \mathcal{K} \times \mathcal{K})$ elde edilir. $\emptyset_{\mathcal{K}}\Lambda_{\gamma}(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_{\mathbf{M}} (\mathfrak{N}, \mathcal{K} \times \mathcal{K})$ olsun. Böylece her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ için $\mathfrak{N}(k, z) = \ddot{Y}'(k) \cap \mathfrak{Q}(z) = U \cap \mathfrak{Q}(z) = \mathfrak{Q}(z)$ olup, $(\mathfrak{N}, \mathcal{K} \times \mathcal{K}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{K} \times \mathcal{K})$ elde edilir.

5.1.9 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, U üzerinde bir esnek küme olsun. O halde, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_{\gamma}U_{\mathcal{K}} =_{\mathbf{M}} (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})^r$ ve $U_{\mathcal{K}}\Lambda_{\gamma}(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_{\mathbf{M}} \emptyset_{\mathcal{K} \times \mathcal{K}}$.

İspat: $U_{\mathcal{K}} = (\ddot{Y}, \mathcal{K})$ olsun. O halde, her $k \in \mathcal{K}$ için $\ddot{Y}(k) = U$. $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_{\gamma}U_{\mathcal{K}} = (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_{\gamma}(\ddot{Y}, \mathcal{K}) = (\beta, \mathcal{K} \times \mathcal{K})$ olsun. Buradan, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ için $\beta(k, z) = \mathfrak{Q}'(k) \cap \ddot{Y}(z) = \mathfrak{Q}'(k) \cap U = \mathfrak{Q}'(k)$ olup $(\beta, \mathcal{K} \times \mathcal{K}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{K} \times \mathcal{K})^r$ elde edilir. $U_{\mathcal{K}}\Lambda_{\gamma}(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_{\mathbf{M}} (\mathfrak{T}, \mathcal{K} \times \mathcal{K})$ olsun. Buradan, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ için $\mathfrak{T}(k, z) = \ddot{Y}'(k) \cap \mathfrak{Q}(z) = \emptyset \cap \mathfrak{Q}(z) = \emptyset$ olup $(\mathfrak{T}, \mathcal{K} \times \mathcal{K}) = \emptyset_{\mathcal{K} \times \mathcal{K}}$ elde edilir.

5.1.10 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, U üzerinde bir esnek küme olmak üzere, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_{\gamma}(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \cong_J (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ olup, $S_E(U)$ kümesi üzerinde Λ_{γ} -çarpımı J-eşitliğine göre denk güçlülük (idempotent) özelliğine sahip değildir.

İspat: $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_{\gamma}(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = (\beta, \mathcal{K} \times \mathcal{K})$ olsun. Buradan, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ için, $\beta(k, z) = \mathfrak{Q}'(k) \cap \mathfrak{Q}(z)$. Her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ için, $\beta(k, z) = \mathfrak{Q}'(k) \cap \mathfrak{Q}(z) \subseteq \mathfrak{Q}(z)$ olacak şekilde $z \in \mathcal{K}$ için olduğundan, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_{\gamma}(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \cong_J (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ elde edilir.

5.1.11 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) , U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_{\gamma}(\beta, Z) \cong_J (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})^r$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_{\gamma}(\beta, Z) \cong_J (\beta, Z)$.

İspat: $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_{\gamma}(\beta, Z) = (\ddot{Y}, \mathcal{K} \times Z)$ olsun. Buradan, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için, $\ddot{Y}(k, z) = \mathfrak{Q}'(k) \cap \beta(z)$. Her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için, $\mathfrak{Q}'(k) \cap \beta(z) \subseteq \mathfrak{Q}'(k)$ olacak şekilde için $k \in \mathcal{K}$ olduğundan $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_{\gamma}(\beta, Z) \cong_J (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})^r$ elde edilir. Benzer şekilde, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için, $\mathfrak{Q}'(k) \cap \beta(z) \subseteq \beta(z)$ olacak şekilde $z \in Z$ olduğundan $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_{\gamma}(\beta, Z) \cong_J (\beta, Z)$ elde edilir.

5.1.12 Önerme $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) , U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda, $[(\mathfrak{A}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\beta, Z)]^r = (\mathfrak{A}, \mathcal{K})^r \vee_+ (\beta, Z)^r$.

İspat: $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\beta, Z) = (\ddot{Y}, \mathcal{K} \times Z)$ olsun. Buradan, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için, $\ddot{Y}(k, z) = \mathfrak{A}'(k) \cap \beta(z)$. Böylece, $\ddot{Y}'(k, z) = (\mathfrak{A}')'(k) \cup (\beta)'(z)$. Buradan $(\ddot{Y}', \mathcal{K} \times Z) = (\mathfrak{A}, \mathcal{K})^r \vee_+ (\beta, Z)^r$ elde edilir.

5.1.13 Önerme $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) , U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\beta, Z) \cong_F (\mathfrak{A}, \mathcal{K}) \vee_+ (\beta, Z)$.

İspat: $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\beta, Z) = (\zeta, \mathcal{K} \times Z)$ ve $(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) \vee_+ (\beta, Z) = (\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times Z)$ olsun. Buradan, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için $\zeta(k, z) = \mathfrak{A}'(k) \cap \beta(z)$ ve her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için $\mathfrak{A}(k, z) = \mathfrak{A}'(k) \cup \beta(z)$. Böylece, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için, $\zeta(k, z) = \mathfrak{A}'(k) \cap \beta(z) \subseteq \mathfrak{A}'(k) \cup \beta(z) = \mathfrak{A}(k, z)$ olduğundan, ispat elde edilir.

5.1.14 Önerme $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$, (β, Z) ve $(\ddot{Y}, \mathcal{C})$, U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})^r \cong_F (\beta, Z)^r$ ise $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\ddot{Y}, \mathcal{C}) \cong_F (\beta, Z)\Lambda_\gamma(\ddot{Y}, \mathcal{C})$.

İspat: $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})^r \cong_F (\beta, Z)^r$ olsun. Buradan, $\mathcal{K} \subseteq Z$ ve her $z \in Z$ için $\mathfrak{A}'(z) \subseteq \beta'(z)$. Böylece, $\mathcal{K} \times \mathcal{C} \subseteq Z \times \mathcal{C}$ ve her $(k, c) \in \mathcal{K} \times \mathcal{C}$ için, $\mathfrak{A}'(k) \cap \ddot{Y}(c) \subseteq \beta'(k) \cap \ddot{Y}(c)$ olup, ispat elde edilir.

5.1.15 Önerme $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$, (β, Z) , $(\ddot{Y}, \mathcal{C})$ ve $(\mathfrak{A}, \mathcal{W})$, U üzerinde birer esnek küme olsun. $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})^r \cong_F (\beta, Z)^r$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{C}) \cong_F (\mathfrak{A}, \mathcal{W})$ ise $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\ddot{Y}, \mathcal{C}) \cong_F (\beta, Z)\Lambda_\gamma(\mathfrak{A}, \mathcal{W})$.

İspat: $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})^r \cong_F (\beta, Z)^r$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{C}) \cong_F (\mathfrak{A}, \mathcal{W})$ olsun. Böylece, $\mathcal{K} \subseteq Z$, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{W}$, her $k \in \mathcal{K}$ için, $\mathfrak{A}'(k) \subseteq \beta'(k)$ ve her $c \in \mathcal{C}$ için $\ddot{Y}(c) \subseteq \mathfrak{A}(c)$. Buradan $\mathcal{K} \times \mathcal{C} \subseteq Z \times \mathcal{W}$ olup, her $(k, c) \in \mathcal{K} \times \mathcal{C}$ için, $\mathfrak{A}'(k) \cap \ddot{Y}(c) \subseteq \beta'(k) \cap \ddot{Y}(c)$ olup ispat elde edilir.

5.1.16 Önerme $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$, $(\beta, \mathcal{K})$, $(\ddot{Y}, \mathcal{K})$ ve $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$, U üzerinde birer esnek küme olsun. $(\beta, \mathcal{K}) \cong_F (\mathfrak{A}, \mathcal{K})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{K}) \cong_F (\mathfrak{A}, \mathcal{K})$ ise $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\ddot{Y}, \mathcal{K}) \cong_F (\beta, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$.

İspat: $(\beta, \mathcal{K}) \subseteq_F (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{K}) \subseteq_F (\mathfrak{d}, \mathcal{K})$ olsun. Buradan, her $k \in \mathcal{K}$ için $\mathfrak{Q}'(k) \subseteq \beta'(k)$ ve her $l \in \mathcal{K}$ için, $\ddot{Y}(l) \subseteq \mathfrak{d}(l)$. Böylece, her $(k, l) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ için, $\mathfrak{Q}'(k) \cap \ddot{Y}(l) \subseteq \beta'(k) \cap \mathfrak{d}(l)$ olup, ispat elde edilir.

5.1.17 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve $(\beta, \mathcal{Z})$, U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda, $\emptyset_{\mathcal{K} \times \mathcal{Z}} \subseteq_F (\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma (\beta, \mathcal{Z})$ ve $\emptyset_{\mathcal{Z} \times \mathcal{K}} \subseteq_F (\beta, \mathcal{Z}) \Lambda_\gamma (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$.

İspat: $\emptyset_{\mathcal{K} \times \mathcal{Z}} = (\mathcal{E}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma (\beta, \mathcal{Z}) = (\mathcal{S}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ olsun. Buradan, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için, $\mathcal{E}(k, z) = \emptyset$ ve her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için, $\mathcal{S}(k, z) = \mathfrak{Q}'(k) \cap \beta(z)$. $\mathcal{K} \times \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ ve her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için $\mathcal{E}(k, z) = \emptyset \subseteq \mathfrak{Q}'(k) \cap \beta(z) = \mathcal{S}(k, z)$ olduğundan, $\emptyset_{\mathcal{K} \times \mathcal{Z}} \subseteq_F (\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma (\beta, \mathcal{Z})$ elde edilir. Benzer şekilde, $\emptyset_{\mathcal{Z} \times \mathcal{K}} \subseteq_F (\beta, \mathcal{Z}) \Lambda_\gamma (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ olduğu da gösterilir.

5.1.18 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve $(\beta, \mathcal{Z})$, U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda, $\emptyset_{\mathcal{K}} \subseteq_J (\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma (\beta, \mathcal{Z})$ ve $\emptyset_{\mathcal{Z}} \subseteq_J (\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma (\beta, \mathcal{Z})$ ve $\emptyset_E \subseteq_J (\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma (\beta, \mathcal{Z})$.

İspat: $\emptyset_{\mathcal{K}} = (\mathcal{E}, \mathcal{K})$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma (\beta, \mathcal{Z}) = (\mathcal{S}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ olsun. Buradan, her $k \in \mathcal{K}$ için $\mathcal{E}(k) = \emptyset$ ve her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için $\mathcal{S}(k, z) = \mathfrak{Q}'(k) \cap \beta(z)$. Her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için $\mathcal{E}(k, z) = \emptyset \subseteq \mathfrak{Q}'(k) \cap \beta(z) = \mathcal{S}(k, z)$ olduğundan, $\emptyset_{\mathcal{K}} \subseteq_J (\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma (\beta, \mathcal{Z})$ sağlanır. $\emptyset_{\mathcal{Z}} \subseteq_J (\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma (\beta, \mathcal{Z})$ ve $\emptyset_E \subseteq_J (\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma (\beta, \mathcal{Z})$ olduğu benzer şekilde gösterilir.

5.1.19 Önerme $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve $(\beta, \mathcal{Z})$, U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma (\beta, \mathcal{Z}) \subseteq_F U_{\mathcal{K} \times \mathcal{Z}}$ ve $(\beta, \mathcal{Z}) \Lambda_\gamma (\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \subseteq_F U_{\mathcal{Z} \times \mathcal{K}}$.

İspat: $U_{\mathcal{K} \times \mathcal{Z}} = (\ddot{Y}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma (\beta, \mathcal{Z}) = (\mathfrak{d}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ olsun. Buradan, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için $\ddot{Y}(k, z) = U$ ve her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için $\mathfrak{d}(k, z) = \mathfrak{Q}'(k) \cap \beta(z)$. $\mathcal{K} \times \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ ve her $(k, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için $\mathfrak{d}(k, z) = \mathfrak{Q}'(k) \cap \beta(z) \subseteq U = \ddot{Y}(k, z)$ olduğundan $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma (\beta, \mathcal{Z}) \subseteq_F U_{\mathcal{K} \times \mathcal{Z}}$ elde edilir. $(\beta, \mathcal{Z}) \Lambda_\gamma (\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \subseteq_F U_{\mathcal{Z} \times \mathcal{K}}$ olduğu da benzer şekilde gösterilir.

5.1.20 Önerme $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) , U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\beta, Z) \cong_{\mathcal{J}} U_{\mathcal{K}}$, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\beta, Z) \cong_{\mathcal{J}} U_Z$ ve $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\beta, Z) \cong_{\mathcal{J}} U_E$.

İspat: $U_{\mathcal{K}} = (\mathcal{W}, \mathcal{K})$ ve $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\beta, Z) = (\mathcal{X}, \mathcal{K} \times Z)$ olsun. Buradan, her $k \in \mathcal{K}$ için $\mathcal{W}(k) = U$ ve her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için, $\mathcal{X}(k, z) = \mathfrak{A}'(k) \cap \beta(z)$. Her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için, $\mathcal{X}(k, z) = \mathfrak{A}'(k) \cap \beta(z) \subseteq U$ olduğundan $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\beta, Z) \cong_{\mathcal{J}} U_{\mathcal{K}}$ elde edilir. $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\beta, Z) \cong_{\mathcal{J}} U_Z$ ve $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\beta, Z) \cong_{\mathcal{J}} U_E$ olduğu benzer şekilde gösterilir.

5.1.21 Önerme $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) , U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\beta, Z) =_{\mathcal{M}} U_{\mathcal{K} \times Z}$ olması için gerek ve yeter şart $(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\mathcal{K}}$ ve $(\beta, Z) =_{\mathcal{M}} U_Z$ olmasıdır.

İspat: $U_{\mathcal{K} \times Z} = (\mathcal{E}, \mathcal{K} \times Z)$ ve $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\beta, Z) = (\mathcal{X}, \mathcal{K} \times Z)$ olsun. Buradan, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için $\mathcal{E}(k, z) = U$ ve her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için, $\mathcal{X}(k, z) = \mathfrak{A}'(k) \cap \beta(z)$ olur. $(\mathcal{E}, \mathcal{K} \times Z) = (\mathcal{X}, \mathcal{K} \times Z)$ olsun. Buradan, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için $\mathfrak{A}'(k) \cap \beta(z) = U$. Böylece, her $k \in \mathcal{K}$ için $\mathfrak{A}'(k) = U$ ve her $z \in Z$ için $\beta(z) = \emptyset$. Buradan, her $k \in \mathcal{K}$ için $\mathfrak{A}(k) = \emptyset$ ve her $z \in Z$ için $\beta(z) = U$. Böylece, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) = \emptyset_{\mathcal{K}}$ ve $(\beta, Z) = U_Z$ elde edilir.

Tersine, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\mathcal{K}}$ ve $(\beta, Z) =_{\mathcal{M}} U_Z$ olsun. Böylece, her $k \in \mathcal{K}$ için $\mathfrak{A}(k) = \emptyset$ ve her $z \in Z$ için $\beta(z) = U$. Buradan, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için, $\mathcal{X}(k, z) = \mathfrak{A}'(k) \cap \beta(z) = U \cap U = U$ olup, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\beta, Z) =_{\mathcal{M}} \emptyset_{\mathcal{K} \times Z}$ elde edilir.

5.1.22 Önerme $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) , U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\beta, Z) =_{\mathcal{M}} \emptyset_\emptyset$ olması için gerek ve yeter şart $(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) =_{\mathcal{M}} \emptyset_\emptyset$ ve $(\beta, Z) =_{\mathcal{M}} \emptyset_\emptyset$ olmasıdır.

İspat: $(\mathfrak{A}, \mathcal{K})\Lambda_\gamma(\beta, Z) =_{\mathcal{M}} \emptyset_\emptyset$ olsun. Buradan, $\mathcal{K} \times Z = \emptyset$ olup, $\mathcal{K} = \emptyset$ veya $Z = \emptyset$ olur. Parametre kümesi boş olan tek esnek küme $\emptyset_\emptyset$ olduğundan, $(\mathfrak{A}, \mathcal{K}) = \emptyset_\emptyset$ veya $(\beta, Z) = \emptyset_\emptyset$ elde edilir.

Tersine, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = \emptyset_\emptyset$ veya $(\beta, Z) = \emptyset_\emptyset$ olsun. Böylece, $\mathcal{K} = \emptyset$ veya $Z = \emptyset$ olur. Bu durumda, $\mathcal{K} \times Z = \emptyset$ ve parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_\emptyset$ olduğundan, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma(\beta, Z) =_M \emptyset_\emptyset$ olur.

5.2. Esnek Gamma-Çarpım ve Dağılımları

Bu bölümde, esnek gamma-çarpımının kısıtlanmış kesişim ve birleşime, genişletilmiş kesişim ve birleşime, esnek ikili parçalı kesişim ve birleşime, VE-çarpıma ve VEYA-çarpıma dağılma durumu ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

5.2.1 Teorem $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, (β, Z) ve $(\check{Y}, \mathcal{C})$, U kümesi üzerinde birer esnek küme olmak üzere,

$$\text{i) } (\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma[(\beta, Z) \cup_R (\check{Y}, \mathcal{C})] =_M [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma(\beta, Z)] \cup_R [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma(\check{Y}, \mathcal{C})]$$

$$\text{ii) } (\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma[(\beta, Z) \cap_R (\check{Y}, \mathcal{C})] =_M [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma(\beta, Z)] \cap_R [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma(\check{Y}, \mathcal{C})]$$

$$\text{iii) } [(\beta, Z) \cap_R (\check{Y}, \mathcal{C})] \Lambda_\gamma(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_M [(\beta, Z) \Lambda_\gamma(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})] \cup_R [(\check{Y}, \mathcal{C}) \Lambda_\gamma(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})]$$

$$\text{iv) } [(\beta, Z) \cup_R (\check{Y}, \mathcal{C})] \Lambda_\gamma(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_M [(\beta, Z) \Lambda_\gamma(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})] \cap_R [(\check{Y}, \mathcal{C}) \Lambda_\gamma(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})]$$

İspat: (i) Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $\mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C})$ ve sağ tarafının parametre kümesi $(\mathcal{K} \times Z) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C})$ olup, $\mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{K} \times Z) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C})$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\beta, Z) \cup_R (\check{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{A}, Z \cap \mathcal{C})$ olsun. Buradan, her $z \in Z \cap \mathcal{C}$ için $\mathfrak{A}(z) = \beta(z) \cup \check{Y}(z)$. $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma(\mathfrak{A}, Z \cap \mathcal{C}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C}))$ olsun. Buradan, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C})$, için $\mathfrak{X}(k, z) = \mathfrak{Q}'(k) \cap \mathfrak{A}(z)$. O halde,

$$\mathfrak{X}(k, z) = \mathfrak{Q}'(k) \cap [\beta(z) \cup \check{Y}(z)]$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma(\beta, Z) = (\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times Z)$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma(\check{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{T}, \mathcal{K} \times \mathcal{C})$ olsun. O halde, her $(k, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için $\mathfrak{X}(k, z) = \mathfrak{Q}'(k) \cap \beta(z)$ ve her $(k, c) \in \mathcal{K} \times \mathcal{C}$ için $\mathfrak{T}(k, c) = \mathfrak{Q}'(k) \cap \check{Y}(c)$. Burada, $(\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times$

$Z) \cup_R (\mathfrak{I}, \mathcal{K} \times \mathcal{C}) = (\mathfrak{C}, (\mathcal{K} \times Z) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C}))$ olsun. Böylece, her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{K} \times Z) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C})$ için

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \cup \mathfrak{I}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = [\mathfrak{O}'(\mathfrak{k}) \cap \mathfrak{B}(\mathfrak{z})] \cup [\mathfrak{O}'(\mathfrak{k}) \cap \mathfrak{Y}(\mathfrak{z})]$$

Böylece, ispat elde edilir.

Burada, $Z \cap \mathcal{C} = \emptyset$ ise $\mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{K} \times Z) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \emptyset$ olup, parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_\emptyset$ olduğundan, eşitliğin her iki tarafı da $\emptyset_\emptyset$ olur. $(\mathcal{K} \times Z) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C})$ olduğundan, $(\mathcal{K} \times Z) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \emptyset$ ise $\mathcal{K} = \emptyset$ veya $Z \cap \mathcal{C} = \emptyset$ olur. Kabul gereği $\mathcal{K} \neq \emptyset$ olup, $(\mathcal{K} \times Z) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \emptyset$ olması $Z \cap \mathcal{C} = \emptyset$ olmasını gerektirdiğinden, bu durumda da yine eşitliğin her iki tarafı $\emptyset_\emptyset$ olur.

(iii) Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $(Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K}$, sağ tarafının parametre kümesi $(Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K})$ olup, $(Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K} = (Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K})$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{B}, Z) \cap_R (\mathfrak{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{A}, Z \cap \mathcal{C})$ olsun. Buradan, her $\mathfrak{z} \in Z \cap \mathcal{C}$ için $\mathfrak{A}(\mathfrak{z}) = \mathfrak{B}(\mathfrak{z}) \cap \mathfrak{Y}(\mathfrak{z})$. $(\mathfrak{A}, Z \cap \mathcal{C}) \Lambda_\gamma(\mathfrak{O}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{X}, (Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K})$ olsun. Buradan, her $(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) \in (Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K}$, için $\mathfrak{X}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) = \mathfrak{A}'(\mathfrak{z}) \cap \mathfrak{O}(\mathfrak{k})$. O halde,

$$\mathfrak{X}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) = [\mathfrak{B}(\mathfrak{z}) \cap \mathfrak{Y}(\mathfrak{z})]' \cap \mathfrak{O}(\mathfrak{k}) = [\mathfrak{B}'(\mathfrak{z}) \cup \mathfrak{Y}'(\mathfrak{z})] \cap \mathfrak{O}(\mathfrak{k})$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{B}, Z) \Lambda_\gamma(\mathfrak{O}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{X}, Z \times \mathcal{K})$ ve $(\mathfrak{Y}, \mathcal{C}) \Lambda_\gamma(\mathfrak{O}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{I}, \mathcal{C} \times \mathcal{K})$ olsun. O halde, her $(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) \in Z \times \mathcal{K}$ için $\mathfrak{X}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) = \mathfrak{B}'(\mathfrak{z}) \cap \mathfrak{O}(\mathfrak{k})$ ve her $(\mathfrak{c}, \mathfrak{k}) \in \mathcal{C} \times \mathcal{K}$ için $\mathfrak{I}(\mathfrak{c}, \mathfrak{k}) = \mathfrak{Y}'(\mathfrak{c}) \cap \mathfrak{O}(\mathfrak{k})$. Burada, $(\mathfrak{X}, Z \times \mathcal{K}) \cup_R (\mathfrak{I}, \mathcal{C} \times \mathcal{K}) = (\mathfrak{C}, (Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K}))$ olsun. Böylece, her $(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) \in (Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) = (Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K}$ için

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) = \mathfrak{X}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) \cup \mathfrak{I}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) = [\mathfrak{B}'(\mathfrak{z}) \cap \mathfrak{O}(\mathfrak{k})] \cup [\mathfrak{Y}'(\mathfrak{z}) \cap \mathfrak{O}(\mathfrak{k})]$$

Böylece, ispat elde edilir.

$(Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K} = (Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K})$ olup burada, $Z \cap \mathcal{C} = \emptyset$ ise parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme $\emptyset_\emptyset$ olduğundan, eşitliğin her iki tarafı da $\emptyset_\emptyset$ olur. Benzer şekilde, $(Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) = (Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K}$ olduğundan, $(Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) = \emptyset$ ise, $Z \cap \mathcal{C} = \emptyset$ veya $\mathcal{K} = \emptyset$ olur. Kabul gereği $\mathcal{K} \neq \emptyset$ olup, $(Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) = \emptyset$ olması $Z \cap \mathcal{C} = \emptyset$ olmasını gerektirdiğinden, bu durumda da yine eşitliğin her iki tarafı $\emptyset_\emptyset$ olur.

5.2.2 Not Esnek gamma-çarpımının, kısıtlanmış kesişim ve birleşim işlemlerine dağılmaları incelenmiştir. İki esnek kümenin M-eşitliğini sağlaması için gerekli şart, her iki taraftaki esnek kümelerin parametre kümelerinin eşit olması gerektiği göz önüne alındığında, kısıtlanmış esnek küme işlemlerinin esnek gamma-çarpımına dağılmasının incelenemeyeceği, kesişim işleminin kartezyen çarpım üzerine dağılım göstermediği gerçeğinden açıktır. Bu nedenle, kısıtlanmış esnek küme işlemlerinin esnek gamma-çarpıma dağılmasına bakılmamıştır.

5.2.3 Teorem $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, (β, Z) ve $(\check{Y}, \mathcal{C})$, U kümesi üzerinde birer esnek küme olmak üzere,

$$i) (\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma [(\beta, Z) \cap_\epsilon (\check{Y}, \mathcal{C})] =_M [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma (\beta, Z)] \cap_\epsilon [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma (\check{Y}, \mathcal{C})]$$

$$ii) (\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma [(\beta, Z) \cup_\epsilon (\check{Y}, \mathcal{C})] =_M [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma (\beta, Z)] \cup_\epsilon [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma (\check{Y}, \mathcal{C})]$$

$$iii) [(\beta, Z) \cup_\epsilon (\check{Y}, \mathcal{C})] \Lambda_\gamma (\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_M [(\beta, Z) \Lambda_\gamma (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})] \cap_\epsilon [(\check{Y}, \mathcal{C}) \Lambda_\gamma (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})]$$

$$iv) [(\beta, Z) \cap_\epsilon (\check{Y}, \mathcal{C})] \Lambda_\gamma (\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_M [(\beta, Z) \Lambda_\gamma (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})] \cup_\epsilon [(\check{Y}, \mathcal{C}) \Lambda_\gamma (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})]$$

İspat: (i) Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $\mathcal{K} \times (Z \cup \mathcal{C})$, sağ tarafının parametre kümesi $(\mathcal{K} \times Z) \cup (\mathcal{K} \times \mathcal{C})$ olup, $\mathcal{K} \times (Z \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{K} \times Z) \cup (\mathcal{K} \times \mathcal{C})$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır. Ayrıca, kabul gereği $\mathcal{K} \neq \emptyset$, $Z \neq \emptyset$ ve $\mathcal{C} \neq \emptyset$ olduğundan, $\mathcal{K} \times (Z \cup \mathcal{C}) \neq \emptyset$ ve $(\mathcal{K} \times Z) \cup (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) \neq \emptyset$. Dolayısıyla sağ ve sol tarafın boş esnek kümeye eşit olma durumu bulunmamaktadır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\beta, Z) \cap_\epsilon (\check{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{Q}, Z \cup \mathcal{C})$ olsun. Buradan, her $z \in Z \cup \mathcal{C}$ için,

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{z}) = \begin{cases} \beta(\mathfrak{z}), & \mathfrak{z} \in Z - \mathcal{C} \\ \check{\mathfrak{Y}}(\mathfrak{z}), & \mathfrak{z} \in \mathcal{C} - Z \\ \beta(\mathfrak{z}) \cap \check{\mathfrak{Y}}(\mathfrak{z}), & \mathfrak{z} \in Z \cap \mathcal{C} \end{cases}$$

$(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_{\gamma} (\mathfrak{A}, Z \cup \mathcal{C}) = (\mathfrak{O}, \mathcal{K} \times (Z \cup \mathcal{C}))$ olsun. Burada, her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (Z \cup \mathcal{C})$ için $\mathfrak{O}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cap \mathfrak{A}(\mathfrak{z})$. O halde, her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (Z \cup \mathcal{C})$ için,

$$\mathfrak{O}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cap \beta(\mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (Z - \mathcal{C}) \\ \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cap \check{\mathfrak{Y}}(\mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (\mathcal{C} - Z) \\ \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cap [\beta(\mathfrak{z}) \cap \check{\mathfrak{Y}}(\mathfrak{z})], & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C}) \end{cases}$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_{\gamma} (\beta, Z) = (\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times Z)$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_{\gamma} (\check{\mathfrak{Y}}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{I}, \mathcal{K} \times \mathcal{C})$ olsun. Buradan, her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times Z$ için $\mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cap \beta(\mathfrak{z})$ ve her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{c}) \in \mathcal{K} \times \mathcal{C}$ için $\mathfrak{I}(\mathfrak{k}, \mathfrak{c}) = \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cap \check{\mathfrak{Y}}(\mathfrak{c})$. Burada, $(\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times Z) \cap_{\varepsilon} (\mathfrak{I}, \mathcal{K} \times \mathcal{C}) = (\mathfrak{E}, (\mathcal{K} \times Z) \cup (\mathcal{K} \times \mathcal{C}))$ olsun. O halde her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{K} \times Z) \cup (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \mathcal{K} \times (Z \cup \mathcal{C})$ için,

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{K} \times Z) - (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \mathcal{K} \times (Z - \mathcal{C}) \\ \mathfrak{I}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) - (\mathcal{K} \times Z) = \mathcal{K} \times (\mathcal{C} - Z) \\ \mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \cap \mathfrak{I}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{K} \times Z) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C}) \end{cases}$$

Buradan,

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cap \beta(\mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (Z - \mathcal{C}) \\ \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cap \check{\mathfrak{Y}}(\mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (\mathcal{C} - Z) \\ [\mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cap \beta(\mathfrak{z})] \cap [\mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cap \check{\mathfrak{Y}}(\mathfrak{z})], & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (Z \cap \mathcal{C}) \end{cases}$$

Böylece, ispat elde edilir.

(iii) Eşitliğin sol tarafının parametre kümesi $(Z \cup \mathcal{C}) \times \mathcal{K}$, sağ tarafının parametre kümesi $(Z \times \mathcal{K}) \cup (\mathcal{C} \times \mathcal{K})$ olup, $(Z \cup \mathcal{C}) \times \mathcal{K} = (Z \times \mathcal{K}) \cup (\mathcal{C} \times \mathcal{K})$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır. Ayrıca, kabul gereği $\mathcal{K} \neq \emptyset$, $Z \neq \emptyset$ ve $\mathcal{C} \neq \emptyset$ olduğundan, $(Z \cup \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \neq \emptyset$ ve $(Z \times \mathcal{K}) \cup (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) \neq \emptyset$. Dolayısıyla sağ ve sol tarafın boş esnek kümeye eşit olma durumu bulunmamaktadır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\beta, Z) \cup_{\varepsilon} (\ddot{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{A}, Z \cup \mathcal{C})$ olsun. Buradan, her $\mathfrak{z} \in Z \cup \mathcal{C}$ için,

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{z}) = \begin{cases} \beta(\mathfrak{z}), & \mathfrak{z} \in Z - \mathcal{C} \\ \ddot{Y}(\mathfrak{z}), & \mathfrak{z} \in \mathcal{C} - Z \\ \beta(\mathfrak{z}) \cup \ddot{Y}(\mathfrak{z}), & \mathfrak{z} \in Z \cap \mathcal{C} \end{cases}$$

$(\mathfrak{A}, Z \cup \mathcal{C}) \Lambda_{\gamma}(\mathfrak{B}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{X}, (Z \cup \mathcal{C}) \times \mathcal{K})$ olsun. Buradan, her $(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) \in (Z \cup \mathcal{C}) \times \mathcal{K}$, için $\mathfrak{X}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) = \mathfrak{A}'(\mathfrak{z}) \cap \mathfrak{B}(\mathfrak{k})$ için,

$$\mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \beta'(\mathfrak{z}) \cap \mathfrak{B}(\mathfrak{k}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (Z - \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \\ \ddot{Y}'(\mathfrak{z}) \cap \mathfrak{B}(\mathfrak{k}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{C} - Z) \times \mathcal{K} \\ [\beta'(\mathfrak{z}) \cap \ddot{Y}'(\mathfrak{z})] \cap \mathfrak{B}(\mathfrak{k}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \end{cases}$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\beta, Z) \Lambda_{\gamma}(\mathfrak{B}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{X}, Z \times \mathcal{K})$ ve $(\ddot{Y}, \mathcal{C}) \Lambda_{\gamma}(\mathfrak{B}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{Z}, \mathcal{C} \times \mathcal{K})$ olsun. O halde, her $(z, \mathfrak{k}) \in Z \times \mathcal{K}$ için $\mathfrak{X}(z, \mathfrak{k}) = \beta'(z) \cap \mathfrak{B}(\mathfrak{k})$ ve her $(c, \mathfrak{k}) \in \mathcal{C} \times \mathcal{K}$ için $\mathfrak{Z}(c, \mathfrak{k}) = \ddot{Y}'(c) \cap \mathfrak{B}(\mathfrak{k})$. Burada, $(\mathfrak{X}, Z \times \mathcal{K}) \cap_{\varepsilon} (\mathfrak{Z}, \mathcal{C} \times \mathcal{K}) = (\mathfrak{E}, (Z \times \mathcal{K}) \cup (\mathcal{C} \times \mathcal{K}))$ olsun. Böylece, her $(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) \in (Z \times \mathcal{K}) \cup (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) = (Z \cup \mathcal{C}) \times \mathcal{K}$ için

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \mathfrak{X}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (Z \times \mathcal{K}) - (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) = (Z - \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \\ \mathfrak{Z}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) - (Z \times \mathcal{K}) = (\mathcal{C} - Z) \times \mathcal{K} \\ \mathfrak{X}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) = (Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \end{cases}$$

Buradan,

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \beta'(\mathfrak{z}) \cap \mathfrak{B}(\mathfrak{k}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (Z - \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \\ \ddot{Y}'(\mathfrak{z}) \cap \mathfrak{B}(\mathfrak{k}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{C} - Z) \times \mathcal{K} \\ [\beta'(\mathfrak{z}) \cap \mathfrak{B}(\mathfrak{k})] \cap [\ddot{Y}'(\mathfrak{z}) \cap \mathfrak{B}(\mathfrak{k})], & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \end{cases}$$

Böylece, ispat elde edilmiş olur.

5.2.4 Not Esnek gamma-çarpımının genişletilmiş kesişim ve birleşim işlemlerine dağılmaları incelenmiştir. İki esnek kümenin M-eşitliğini sağlaması için gerekli şart, her iki taraftaki

esnek kümelerin parametre kümelerinin eşit olması gerektiği göz önüne alındığında genişletilmiş esnek küme işlemlerinin esnek gamma-çarpımına dağılmasının incelenemeyeceği, birleşim işleminin kartezyen çarpım üzerine dağılım göstermediği gerçeğinden açıktır. Bu nedenle, genişletilmiş esnek küme işlemlerinin esnek gamma-çarpımına dağılmasına bakılmamıştır.

5.2.5. Teorem $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, $(\beta, \mathcal{Z})$ ve $(\check{Y}, \mathcal{C})$, U kümesi üzerinde birer esnek küme olmak üzere,

$$i) (\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma [(\beta, \mathcal{Z}) \tilde{\cap} (\check{Y}, \mathcal{C})] =_M [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma (\beta, \mathcal{Z})] \tilde{\cap} [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma (\check{Y}, \mathcal{C})]$$

$$ii) (\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma [(\beta, \mathcal{Z}) \tilde{\cup} (\check{Y}, \mathcal{C})] =_M [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma (\beta, \mathcal{Z})] \tilde{\cap} [(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma (\check{Y}, \mathcal{C})]$$

$$iii) [(\beta, \mathcal{Z}) \tilde{\cup} (\check{Y}, \mathcal{C})] \Lambda_\gamma (\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_M [(\beta, \mathcal{Z}) \Lambda_\gamma (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})] \tilde{\cap} [(\check{Y}, \mathcal{C}) \Lambda_\gamma (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})]$$

$$iv) [(\beta, \mathcal{Z}) \tilde{\cap} (\check{Y}, \mathcal{C})] \Lambda_\gamma (\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) =_M [(\beta, \mathcal{Z}) \Lambda_\gamma (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})] \tilde{\cup} [(\check{Y}, \mathcal{C}) \Lambda_\gamma (\mathfrak{Q}, \mathcal{K})]$$

İspat: (i) Eşitliğin sol ve sağ tarafının parametre kümesi $\mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ olduğundan M-eşitliğin ilk şartı sağlanır. Ayrıca, kabul gereği $\mathcal{K} \neq \emptyset$, $\mathcal{Z} \neq \emptyset$ ve $\mathcal{C} \neq \emptyset$ olduğundan, $\mathcal{K} \times \mathcal{Z} \neq \emptyset$. Dolayısıyla sağ ve sol tarafın boş esnek kümeye eşit olma durumu bulunmamaktadır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\beta, \mathcal{Z}) \tilde{\cap} (\check{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{Z})$ olsun. Buradan, her $\mathfrak{z} \in \mathcal{Z}$ için,

$$\mathfrak{Q}(\mathfrak{z}) = \begin{cases} \beta(\mathfrak{z}), & \mathfrak{z} \in \mathcal{Z} - \mathcal{C} \\ \beta(\mathfrak{z}) \cap \check{Y}(\mathfrak{z}), & \mathfrak{z} \in \mathcal{Z} \cap \mathcal{C} \end{cases}$$

$(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma (\mathfrak{Q}, \mathcal{Z}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ olsun. Burada, her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için, $\mathfrak{Q}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cap \mathfrak{Q}(\mathfrak{z})$. O halde,

$$\mathfrak{Q}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cap \beta(\mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (\mathcal{Z} - \mathcal{C}) \\ \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cap [\beta(\mathfrak{z}) \cap \check{Y}(\mathfrak{z})], & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times \mathcal{C} \end{cases}$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma (\beta, \mathcal{Z}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma (\check{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{Y}, \mathcal{K} \times \mathcal{C})$ olsun. Buradan, her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için $\mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) =$

$\mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cap \beta(\mathfrak{z})$ ve her $(\mathfrak{k}, c) \in \mathcal{K} \times \mathcal{C}$ için $\mathfrak{T}(\mathfrak{k}, c) = \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cap \check{\mathfrak{Y}}(c)$. Burada, $(\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times \mathcal{Z}) \tilde{\cap} (\mathfrak{T}, \mathcal{K} \times \mathcal{C}) = (\mathfrak{C}, (\mathcal{K} \times \mathcal{Z}))$ olsun. O halde her $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için,

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{K} \times \mathcal{Z}) - (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \mathcal{K} \times (\mathcal{Z} - \mathcal{C}) \\ \mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \cap \mathfrak{T}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{K} \times \mathcal{Z}) \cap (\mathcal{K} \times \mathcal{C}) = \mathcal{K} \times (\mathcal{Z} \cap \mathcal{C}) \end{cases}$$

Buradan,

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cap \beta(\mathfrak{z}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (\mathcal{Z} - \mathcal{C}) \\ [\mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cap \beta(\mathfrak{z})] \cap [\mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cap \check{\mathfrak{Y}}(\mathfrak{z})], & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in \mathcal{K} \times (\mathcal{Z} \cap \mathcal{C}) \end{cases}$$

Böylece, ispat elde edilir.

(iii) Eşitliğin sol ve sağ tarafının parametre kümesi $\mathcal{Z} \times \mathcal{K}$ olduğundan, M-eşitliğin ilk şartı sağlanır. Ayrıca, kabul gereği $\mathcal{K} \neq \emptyset$ ve $\mathcal{Z} \neq \emptyset$ olduğundan, $\mathcal{Z} \times \mathcal{K} \neq \emptyset$. Dolayısıyla sağ ve sol tarafın boş esnek kümeye eşit olma durumu bulunmamaktadır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakılacak olursa, $(\beta, \mathcal{Z}) \tilde{\cup} (\check{\mathfrak{Y}}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{Q}, \mathcal{Z})$ olsun. Buradan, her $\mathfrak{z} \in \mathcal{Z}$ için,

$$\mathfrak{Q}(\mathfrak{z}) = \begin{cases} \beta(\mathfrak{z}), & \mathfrak{z} \in \mathcal{Z} - \mathcal{C} \\ \beta(\mathfrak{z}) \cup \check{\mathfrak{Y}}(\mathfrak{z}), & \mathfrak{z} \in \mathcal{Z} \cap \mathcal{C} \end{cases}$$

$(\mathfrak{Q}, \mathcal{Z}) \Lambda_{\gamma}(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{Z} \times \mathcal{K})$ olsun. Buradan, her $(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{K}$, için $\mathfrak{X}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) = \mathfrak{Q}'(\mathfrak{z}) \cap \mathfrak{Q}(\mathfrak{k})$. Böylece,

$$\mathfrak{X}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \beta'(\mathfrak{z}) \cap \mathfrak{Q}(\mathfrak{k}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{Z} - \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \\ [\beta'(\mathfrak{z}) \cap \check{\mathfrak{Y}}'(\mathfrak{z})] \cap \mathfrak{Q}(\mathfrak{k}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (\mathcal{Z} \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \end{cases}$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılacak olursa, $(\beta, \mathcal{Z}) \Lambda_{\gamma}(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{Z} \times \mathcal{K})$ ve $(\check{\mathfrak{Y}}, \mathcal{C}) \Lambda_{\gamma}(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = (\mathfrak{T}, \mathcal{C} \times \mathcal{K})$ olsun. O halde, her $(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{K}$ için $\mathfrak{X}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) = \beta'(\mathfrak{z}) \cap \mathfrak{Q}(\mathfrak{k})$ ve her $(c, \mathfrak{k}) \in \mathcal{C} \times \mathcal{K}$ için $\mathfrak{T}(c, \mathfrak{k}) = \check{\mathfrak{Y}}'(c) \cap \mathfrak{Q}(\mathfrak{k})$. Burada, $(\mathfrak{X}, \mathcal{Z} \times \mathcal{K}) \tilde{\cap} (\mathfrak{T}, \mathcal{C} \times \mathcal{K}) = (\mathfrak{C}, (\mathcal{Z} \times \mathcal{K}))$ olsun. Böylece, her $(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) \in (\mathcal{Z} \times \mathcal{K})$ için,

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \mathfrak{X}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (Z \times \mathcal{K}) - (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) = (Z - \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \\ \mathfrak{X}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}) \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{z}, \mathfrak{k}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (Z \times \mathcal{K}) \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{K}) = (Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \end{cases}$$

Buradan,

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) = \begin{cases} \beta'(\mathfrak{z}) \cap \mathfrak{O}(\mathfrak{k}), & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (Z - \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \\ [\beta'(\mathfrak{z}) \cap \mathfrak{O}(\mathfrak{k})] \cap [\check{\gamma}'(\mathfrak{z}) \cap \mathfrak{O}(\mathfrak{k})], & (\mathfrak{k}, \mathfrak{z}) \in (Z \cap \mathcal{C}) \times \mathcal{K} \end{cases}$$

Böylece, ispat elde edilir.

5.2.6 *Not* Burada $\mathcal{K} \neq \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ olduğu için, esnek ikili parçalı işlemlerin, esnek gamma-çarpımına soldan dağılım göstermeyeceği açıktır.

5.2.7 *Önerme* $(\mathfrak{O}, \mathcal{K})$, (β, Z) ve $(\check{\gamma}, \mathcal{C})$, U kümesi üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda,

$$(1) (\mathfrak{O}, \mathcal{K})\Lambda_{\gamma}[(\beta, Z)\Lambda(\check{\gamma}, \mathcal{C})] \cong_L [(\mathfrak{O}, \mathcal{K})\Lambda_{\gamma}(\beta, Z)]\Lambda[(\mathfrak{O}, \mathcal{K})\Lambda_{\gamma}(\check{\gamma}, \mathcal{C})]$$

$$(2) (\mathfrak{O}, \mathcal{K})\Lambda_{\gamma}[(\beta, Z)V(\check{\gamma}, \mathcal{C})] \cong_L [(\mathfrak{O}, \mathcal{K})\Lambda_{\gamma}(\beta, Z)]V[(\mathfrak{O}, \mathcal{K})\Lambda_{\gamma}(\check{\gamma}, \mathcal{C})]$$

İspat: (1) İlk olarak sol tarafa bakılacak olursa, $(\beta, Z)\Lambda(\check{\gamma}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{A}, Z \times \mathcal{C})$ olsun. Buradan, her $(z, c) \in Z \times \mathcal{C}$ için $\mathfrak{A}(z, c) = \beta(z) \cap \check{\gamma}(c)$. $(\mathfrak{O}, \mathcal{K})\Lambda_{\gamma}(\mathfrak{A}, Z \times \mathcal{C}) = \mathfrak{C}(\mathcal{K} \times (Z \times \mathcal{C}))$ olsun. Buradan, her $(\mathfrak{k}, (z, c)) \in \mathcal{K} \times (Z \times \mathcal{C})$ için

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{k}, (z, c)) = \mathfrak{O}'(\mathfrak{k}) \cap [\beta(z) \cap \check{\gamma}(c)]$$

Sağ tarafa bakılacak olursa, $(\mathfrak{O}, \mathcal{K})\Lambda_{\gamma}(\beta, Z) = (\mathcal{H}, \mathcal{K} \times Z)$ ve $(\mathfrak{O}, \mathcal{K})\Lambda_{\gamma}(\check{\gamma}, \mathcal{C}) = (\mathcal{M}, \mathcal{K} \times \mathcal{C})$ olsun. Buradan, her $(\mathfrak{k}, z) \in \mathcal{K} \times Z$ için $\mathcal{H}(\mathfrak{k}, z) = \mathfrak{O}'(\mathfrak{k}) \cap \beta(z)$ ve her $(\mathfrak{k}, c) \in \mathcal{K} \times \mathcal{C}$ için $\mathcal{M}(\mathfrak{k}, c) = \mathfrak{O}'(\mathfrak{k}) \cap \check{\gamma}(c)$. $(\mathcal{H}, \mathcal{K} \times Z)\Lambda(\mathcal{M}, \mathcal{K} \times \mathcal{C}) = (\mathfrak{N}, (\mathcal{K} \times Z) \times (\mathcal{K} \times \mathcal{C}))$ olsun. Buradan her $((\mathfrak{k}, z), (\mathfrak{k}, c)) \in (\mathcal{K} \times Z) \times (\mathcal{K} \times \mathcal{C})$ için

$$\mathfrak{N}((\mathfrak{k}, z), (\mathfrak{k}, c)) = [\mathfrak{O}'(\mathfrak{k}) \cap \beta(z)] \cap [\mathfrak{O}'(\mathfrak{k}) \cap \check{\gamma}(c)]$$

Burada her $(\ell, (z, c)) \in \mathcal{K} \times (Z \times \mathcal{C})$ için, $\mathfrak{C}(\ell, (z, c)) = \mathfrak{Q}'(\ell) \cap [\beta(z) \cap \check{Y}(c)] = [\mathfrak{Q}'(\ell) \cap \beta(z)] \cap [\mathfrak{Q}'(\ell) \cap \check{Y}(c)] = \mathfrak{M}((\ell, z), (\ell, c))$ olacak şekilde $(\ell, z), (\ell, c) \in (\mathcal{K} \times Z) \times (\mathcal{K} \times \mathcal{C})$ vardır. Böylece, istenen elde edilir. (2) nin ispatı da benzer şekilde yapılır.

Önerme 5.2.7'deki L-alt kümelerin L-eşitlik olmayacağı Örnek 5.2.8 ile açıktır.

5.2.8 Örnek $E = \{\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_4\}$ parametre kümesi, $\mathcal{K} = \{\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3\}$, $Z = \{\mathfrak{u}_1\}$ ve $\mathcal{C} = \{\mathfrak{u}_4\}$, E parametre kümesinin alt kümeleri, $U = \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4, \mathfrak{r}_5\}$ evrensel küme olmak üzere, U üzerinde $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, (β, Z) ve $(\check{Y}, \mathcal{C})$ esnek kümeleri

$$(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = \{(\mathfrak{u}_2, \{\mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4\}), (\mathfrak{u}_3, \{\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3\})\}, (\beta, Z) = \{(\mathfrak{u}_1, U)\}, (\check{Y}, \mathcal{C}) = \{(\mathfrak{u}_4, \{\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4\})\}$$

olarak tanımlansın. İlk olarak sol tarafa bakılacak olursa, $(\beta, Z) \wedge (\check{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{A}, Z \times \mathcal{C})$ olsun. Buradan,

$$(\mathfrak{A}, Z \times \mathcal{C}) = \{((\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_4), \{\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4\})\}$$

$(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \wedge_\gamma (\mathfrak{A}, Z \times \mathcal{C}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times (Z \times \mathcal{C}))$ olsun. Böylece,

$$(\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times (Z \times \mathcal{C})) = \left(\left((\mathfrak{u}_2, (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_4)), \{\mathfrak{r}_2\} \right), \left((\mathfrak{u}_3, (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_4)), \{\mathfrak{r}_4\} \right) \right)$$

Sağ taraftan devam edilecek olursa, $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \wedge_\gamma (\beta, Z) = (\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times Z)$ olsun. Buradan,

$$(\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times Z) = \{((\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_1), \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_5\}), ((\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_1), \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_4, \mathfrak{r}_5\})\}$$

$(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \wedge_\gamma (\check{Y}, \mathcal{C}) = (\mathfrak{C}, \mathcal{K} \times \mathcal{C})$ olsun. Buradan,

$$(\mathfrak{C}, \mathcal{K} \times \mathcal{C}) = [((\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_4), \{\mathfrak{r}_2\}), ((\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_4), \{\mathfrak{r}_4\})]$$

$(\mathfrak{A}, \mathcal{K} \times Z) \wedge (\mathfrak{C}, \mathcal{K} \times \mathcal{C}) = (\mathfrak{M}, (\mathcal{K} \times Z) \times (\mathcal{K} \times \mathcal{C}))$ olsun. Buradan,

$$(\mathfrak{M}, (\mathcal{K} \times \mathcal{Z}) \times (\mathcal{K} \times \mathcal{C})) = \left\{ \left(((\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_1), (\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_4)), \{\mathfrak{x}_2\} \right), \left(((\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_1), (\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_4)), \emptyset \right), \right. \\ \left. \left(((\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_1), (\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_4)), \emptyset \right), \left(((\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_1), (\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_4)), \{\mathfrak{x}_4\} \right) \right\}$$

Böylece,

$$\mathfrak{M}((\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_1), (\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_4)) \neq \mathfrak{X}(\mathfrak{u}_2, (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_4)), \quad \mathfrak{M}((\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_1), (\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_4)) \neq \mathfrak{X}(\mathfrak{u}_3, (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_4)),$$

$$\mathfrak{M}((\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_1), (\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_4)) \neq \mathfrak{X}(\mathfrak{u}_2, (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_4)), \quad \mathfrak{M}((\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_1), (\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_4)) \neq \mathfrak{X}(\mathfrak{u}_3, (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_4))$$

olduğu görülür. Buradan,

$$(\mathfrak{M}, (\mathcal{K} \times \mathcal{Z}) \times (\mathcal{K} \times \mathcal{C})) \tilde{\mathcal{L}}_L (\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times (\mathcal{Z} \times \mathcal{C}))$$

olup, $(\mathfrak{M}, (\mathcal{K} \times \mathcal{Z}) \times (\mathcal{K} \times \mathcal{C})) \neq_L (\mathfrak{X}, \mathcal{K} \times (\mathcal{Z} \times \mathcal{C}))$ istenen elde edilir.

5.3. Esnek Gamma-Çarpım ve Karar Verme Problemi

Bu bölümde, Çağman ve Enginoğlu (2010a) tarafından tanımlanmış, uni-int operatörü ve uni-int karar fonksiyonu, uni-int karar verme metodu esnek gamma-çarpıma uygulanmıştır. Bu yöntemle bir küme, karar vericilerin parametrelerine göre alt kümelerle indirgenir. Sonuç olarak, karar vericiler çok sayıda seçenek yerine sınırlı sayıda seçeneğe odaklanır.

Bölüm boyunca, U üzerindeki esnek kümelerin tüm esnek gamma-çarpımının kümesi " $\Lambda_\gamma(U)$ " ile $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve $(\mathfrak{J}, \mathcal{Z})$ esnek kümelerinin esnek gamma-çarpımının esnek yaklaşım fonksiyonu

$$\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} \Lambda_\gamma \mathfrak{J}_{\mathcal{Z}}: \mathcal{K} \times \mathcal{Z} \rightarrow P(U)$$

ile gösterilecektir. Burada, her $(\mathfrak{k}, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ için, $(\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}} \Lambda_\gamma \mathfrak{J}_{\mathcal{Z}})(\mathfrak{k}, z) = \mathfrak{Q}'(\mathfrak{k}) \cap \mathfrak{J}(z)$ olduğu bilinmektedir.

5.3.1. Tanım $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve (β, Z) , U üzerinde birer esnek küme olsun. $uni_{\mathfrak{k}}int_z$ ve $uni_zint_{\mathfrak{k}}$ ile gösterilen, esnek-gamma çarpım için uni-int operatörü sırasıyla,

$$uni_{\mathfrak{k}}int_z: \Lambda_Y(U) \rightarrow P(U), \quad uni_{\mathfrak{k}}int_z(\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\beta_Z) = \bigcup_{\mathfrak{k} \in \mathcal{K}} \left(\bigcap_{z \in Z} \left((\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\beta_Z)(\mathfrak{k}, z) \right) \right)$$

$$uni_zint_{\mathfrak{k}}: \Lambda_Y(U) \rightarrow P(U), \quad uni_zint_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\beta_Z) = \bigcup_{z \in Z} \left(\bigcap_{\mathfrak{k} \in \mathcal{K}} \left((\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\beta_Z)(\mathfrak{k}, z) \right) \right)$$

şeklinde tanımlanır.

5.3.2. Tanım $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})\Lambda_Y(\beta, Z) \in \Lambda_Y(U)$ olsun. uni-int olarak gösterilen esnek gamma-çarpımın uni-int fonksiyonu,

$$\begin{aligned} uni-int: \Lambda_Y(U) \rightarrow P(U), \quad uni-int(\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\beta_Z) = & uni_{\mathfrak{k}}int_z(\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\beta_Z) \cup \\ & uni_zint_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\beta_Z) \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada, $uni-int(\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\beta_Z)$ nin U kümesinin bir alt kümesi olduğu aşıkardır. $uni-int(\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\beta_Z)$ değerine, $\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\beta_Z$ esnek gamma-çarpımının uni-int karar kümesi denir.

Belirsizlik içerek bir gerçek hayat problemi için esnek kümeler yardımıyla, esnek gamma-çarpımına dayanan uni-int karar verme metodu aşağıdaki algoritma yardımıyla oluşturulur.

ALGORİTMA

Adım 1: Parametre kümesinin uygun alt kümeleri seçilir.

Adım 2: Parametre kümesinin her bir alt kümesi için esnek kümeler inşa edilir.

Adım 3: Esnek cümlelerin Λ_Y -çarpımı hesaplanır.

Adım 4: Çarpımın uni-int karar kümesi hesaplanır.

Şimdi esnek gamma-çarpımın uni-int karar verme problemine nasıl uygulandığı ile ilgili bir örnek verilecektir.

5.3.2. *Örnek* Bir özel tur şirketi tur rehberi alım ilanı vermiş, boş kontenjan sayısının 2 (iki) katına kadar çağırılacak adaylar arasından, mülakat başarı durumuna göre alım yapacaktır. Başvuran adaylar, tur rehberi pozisyonu için istenilen özelliklere yeterlilik yönünden ön elemeye tabi tutularak, istenilen özelliklerden herhangi birinde yetersiz olduğu tespit edilen adayların başvurusu reddedilmiştir. Tur şirketinin İnsan Kaynakları müdürü Hüseyin Bey, başvuruları yeterlilik açısından uygun olan adaylar içerisinde, adaylara yapılan mülakat sonucunda edindiği bilgileri ele alarak pozisyon için yeterli olan adayı SEÇME işlemi yapacaktır. Seçilen adaylar, tur şirketi tarafından daha sonra kapsamlı eğitime tabi tutularak, uygun pozisyonda istihdam edilmeye hak kazanacaklardır.

Hüseyin Bey, bir tur rehberi adayında olması gereken yetkinlikleri dikkate alarak, ilk olarak SEÇİLECEK tur rehberi adayında olmasını İSTEMEDİĞİ, daha sonra OLMASINI istediği parametreleri belirleyerek, kararını uni – int karar verme metodunu esnek gamma-çarpımına uygulayarak oluşturacaktır. Başvurusu geçerli sayılan tur rehberi adaylarının $U = \{t_1, t_2, \dots, t_{24}\}$ olduğunu ve seçilecek tur rehberini belirlemek için kullanılacak parametrelerin kümesinin $E = \{a_1, a_2, \dots, a_8\}$ olduğunu varsayalım.

Burada a_i parametreleri $i = 1, 2, 3, \dots, 8$ olmak üzere sırasıyla,

- a_1 : " Mesleği ile ilgili yeterli güncel bilgiye sahip"
- a_2 : " Genel kültür seviyesi yeterli düzeyde olmayan"
- a_3 : " Mesleki alanda deneyim sahibi olmayan "
- a_4 : " Etkili iletişim becerisine sahip"
- a_5 : "Zamanı verimli kullanan"
- a_6 : "Çözüm odaklı olan"
- a_7 : "Zorlu koşullara dayanıklı olan "
- a_8 : "Mizah anlayışı düşük olan"

Tur rehberi alım süreci ile ilgili bu problemi çözmek için uni-int karar verme metodunu, esnek gamma-çarpıma şu şekilde uygulayabiliriz.

Adım 1: Karar verici Hüseyin Bey, var olan parametreler kümesinden SEÇİLECEK tur rehberi adaylarında, ilk olarak olmasını İSTEMEDİĞİ, daha sonra olmasını İSTEDİĞİ parametreleri seçer. Bunlar, sırasıyla $\mathcal{K} = \{a_2, a_3, a_7, a_8\}$ ve $\mathcal{Z} = \{a_1, a_4, a_5, a_6\}$ olsun.

Adım 2: Bu parametre kümeleri kullanılarak, karar vericinin $(\mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathcal{Z})$ esnek kümeleri inşa edilir.

$$(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) = \left\{ \begin{array}{l} (a_2, \{t_2, t_4, t_5, t_8, t_{10}, t_{14}, t_{16}, t_{18}, t_{22}, t_{24}\}), \\ (a_3, \{t_1, t_2, t_3, t_7, t_{10}, t_{16}, t_{20}, t_{22}, t_{24}\}), \\ (a_7, \{t_5, t_8, t_{12}, t_{15}, t_{17}, t_{18}, t_{20}, t_{21}, t_{23}\}), \\ (a_8, \{t_2, t_4, t_6, t_{11}, t_{12}, t_{14}, t_{18}, t_{22}, t_{23}, t_{24}\}) \end{array} \right\}$$

$$(\mathfrak{Q}, \mathcal{Z}) = \left\{ \begin{array}{l} (a_1, \{t_8, t_{10}, t_{13}, t_{15}, t_{17}, t_{18}, t_{23}, t_{24}\}), \\ (a_4, \{t_2, t_4, t_6, t_8, t_9, t_{12}, t_{16}, t_{18}, t_{20}, t_{21}, t_{22}\}), \\ (a_5, \{t_2, t_3, t_5, t_8, t_9, t_{12}, t_{17}, t_{18}\}), \\ (a_6, \{t_8, t_9, t_{10}, t_{13}, t_{18}, t_{19}, t_{20}, t_{21}, t_{22}, t_{24}\}) \end{array} \right\}$$

Adım 3: Verilen esnek kümelerin esnek gamma-çarpımı (Λ_γ – çarpımı) hesaplanır.

$$(\mathfrak{Q}, \mathcal{K}) \Lambda_\gamma (\mathfrak{Q}, \mathcal{Z}) = \left\{ \begin{array}{l} ((a_2, a_1), \{t_{15}, t_{17}, t_{23}\}), ((a_2, a_4), \{t_6, t_9, t_{12}, t_{20}, t_{21}\}), \\ ((a_2, a_5), \{t_3, t_9, t_{12}, t_{17}\}), \\ ((a_2, a_6), \{t_9, t_{20}, t_{21}\}), ((a_3, a_1), \{t_8, t_{13}, t_{15}, t_{17}, t_{18}, t_{23}\}), \\ ((a_3, a_4), \{t_4, t_6, t_8, t_9, t_{12}, t_{18}, t_{21}\}), ((a_3, a_5), \{t_5, t_8, t_9, t_{12}, t_{17}, t_{18}\}), \\ ((a_3, a_6), \{t_8, t_9, t_{13}, t_{18}, t_{19}, t_{21}\}), ((a_7, a_1), \{t_{10}, t_{13}, t_{24}\}), \\ ((a_7, a_4), \{t_2, t_4, t_6, t_9, t_{16}, t_{22}\}), \\ ((a_7, a_5), \{t_2, t_3, t_9\}), ((a_7, a_6), \{t_9, t_{10}, t_{13}, t_{19}, t_{22}, t_{24}\}), \\ ((a_8, a_1), \{t_8, t_{10}, t_{13}, t_{15}, t_{17}\}), \\ ((a_8, a_4), \{t_8, t_9, t_{16}, t_{20}, t_{21}\}), ((a_8, a_5), \{t_3, t_5, t_8, t_9, t_{17}\}), \\ ((a_8, a_6), \{t_8, t_9, t_{10}, t_{13}, t_{19}, t_{20}, t_{21}\}) \end{array} \right\}$$

Adım 4: $\text{uni} - \text{int}(\mathfrak{Q}_\mathcal{K} \Lambda_\gamma \mathfrak{Q}_\mathcal{Z})$ karar verme kümesi bulunur:

$$\text{uni}_{\mathcal{K}} - \text{int}_Z(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\mathfrak{D}_Z) = \cup_{\mathcal{K} \in \mathcal{K}} \left(\cap_{Z \in Z} (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\mathfrak{D}_Z)(\mathcal{K}, Z) \right)$$

olmak üzere, önce $\left(\cap_{Z \in Z} (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\mathfrak{D}_Z)(\mathcal{K}, Z) \right)$ hesaplayalım:

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\mathfrak{D}_Z)(a_2, a_1) \cap (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\mathfrak{D}_Z)(a_2, a_4) \cap (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\mathfrak{D}_Z)(a_2, a_5) \\ & \cap (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\mathfrak{D}_Z)(a_2, a_6) \\ & = \{\mathfrak{t}_{13}, \mathfrak{t}_{15}, \mathfrak{t}_{17}, \mathfrak{t}_{23}\} \cap \{\mathfrak{t}_6, \mathfrak{t}_9, \mathfrak{t}_{12}, \mathfrak{t}_{20}, \mathfrak{t}_{21}\} \cap \{\mathfrak{t}_3, \mathfrak{t}_9, \mathfrak{t}_{12}, \mathfrak{t}_{17}\} \cap \{\mathfrak{t}_9, \mathfrak{t}_{20}, \mathfrak{t}_{21}\} \\ & = \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\mathfrak{D}_Z)(a_3, a_1) \cap (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\mathfrak{D}_Z)(a_3, a_4) \cap (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\mathfrak{D}_Z)(a_3, a_5) \\ & \cap (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\mathfrak{D}_Z)(a_3, a_6) \\ & = \{\mathfrak{t}_8, \mathfrak{t}_{13}, \mathfrak{t}_{15}, \mathfrak{t}_{17}, \mathfrak{t}_{18}, \mathfrak{t}_{23}\} \cap \{\mathfrak{t}_4, \mathfrak{t}_6, \mathfrak{t}_8, \mathfrak{t}_9, \mathfrak{t}_{12}, \mathfrak{t}_{18}, \mathfrak{t}_{21}\} \\ & \cap \{\mathfrak{t}_5, \mathfrak{t}_8, \mathfrak{t}_9, \mathfrak{t}_{12}, \mathfrak{t}_{17}, \mathfrak{t}_{18}\} \cap \{\mathfrak{t}_8, \mathfrak{t}_9, \mathfrak{t}_{13}, \mathfrak{t}_{18}, \mathfrak{t}_{19}, \mathfrak{t}_{21}\} = \{\mathfrak{t}_8, \mathfrak{t}_{18}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\mathfrak{D}_Z)(a_7, a_1) \cap (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\mathfrak{D}_Z)(a_7, a_4) \cap (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\mathfrak{D}_Z)(a_7, a_5) \\ & \cap (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\mathfrak{D}_Z)(a_7, a_6) \\ & = \{\mathfrak{t}_{10}, \mathfrak{t}_{13}, \mathfrak{t}_{24}\} \cap \{\mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_4, \mathfrak{t}_6, \mathfrak{t}_9, \mathfrak{t}_{16}, \mathfrak{t}_{22}\} \cap \{\mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3, \mathfrak{t}_9\} \\ & \cap \{\mathfrak{t}_9, \mathfrak{t}_{10}, \mathfrak{t}_{13}, \mathfrak{t}_{19}, \mathfrak{t}_{22}, \mathfrak{t}_{24}\} = \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\mathfrak{D}_Z)(a_8, a_1) \cap (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\mathfrak{D}_Z)(a_8, a_4) \cap (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\mathfrak{D}_Z)(a_8, a_5) \\ & \cap (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\mathfrak{D}_Z)(a_8, a_6) \\ & = \{\mathfrak{t}_8, \mathfrak{t}_{10}, \mathfrak{t}_{13}, \mathfrak{t}_{15}, \mathfrak{t}_{17}\} \cap \{\mathfrak{t}_8, \mathfrak{t}_9, \mathfrak{t}_{16}, \mathfrak{t}_{20}, \mathfrak{t}_{21}\} \cap \{\mathfrak{t}_3, \mathfrak{t}_5, \mathfrak{t}_8, \mathfrak{t}_9, \mathfrak{t}_{17}\} \\ & \cap \{\mathfrak{t}_8, \mathfrak{t}_9, \mathfrak{t}_{10}, \mathfrak{t}_{13}, \mathfrak{t}_{19}, \mathfrak{t}_{20}, \mathfrak{t}_{21}\} = \{\mathfrak{t}_8\} \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan,

$$\begin{aligned} \text{uni}_{\mathcal{K}} - \text{int}_Z(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\mathfrak{D}_Z) &= \cup_{\mathcal{K} \in \mathcal{K}} \left(\cap_{Z \in Z} (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\mathfrak{D}_Z)(\mathcal{K}, Z) \right) = \emptyset \cup \{\mathfrak{t}_8, \mathfrak{t}_{18}\} \cup \emptyset \cup \{\mathfrak{t}_8\} \\ &= \{\mathfrak{t}_8, \mathfrak{t}_{18}\} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\text{uni}_Z - \text{int}_{\mathcal{K}}(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\mathfrak{D}_Z) = \cup_{Z \in Z} \left(\cap_{\mathcal{K} \in \mathcal{K}} (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}\Lambda_Y\mathfrak{D}_Z)(\mathcal{K}, Z) \right)$$

olmak üzere, önce $\cap_{\ell \in \mathcal{K}} \left((\mathfrak{D}_{\mathcal{K}} \Lambda_{\mathcal{Y}} \mathfrak{D}_{\mathcal{Z}})(\ell, z) \right)$ hesaplayalım:

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}} \Lambda_{\mathcal{Y}} \mathfrak{D}_{\mathcal{Z}})(a_2, a_1) \cap (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}} \Lambda_{\mathcal{Y}} \mathfrak{D}_{\mathcal{Z}})(a_3, a_1) \cap (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}} \Lambda_{\mathcal{Y}} \mathfrak{D}_{\mathcal{Z}})(a_7, a_1) \\ & \quad \cap (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}} \Lambda_{\mathcal{Y}} \mathfrak{D}_{\mathcal{Z}})(a_8, a_1) \\ & = \{\mathfrak{t}_{15}, \mathfrak{t}_{17}, \mathfrak{t}_{23}\} \cap \{\mathfrak{t}_8, \mathfrak{t}_{13}, \mathfrak{t}_{15}, \mathfrak{t}_{17}, \mathfrak{t}_{18}, \mathfrak{t}_{23}\} \cap \{\mathfrak{t}_{10}, \mathfrak{t}_{13}, \mathfrak{t}_{24}\} \\ & \quad \cap \{\mathfrak{t}_8, \mathfrak{t}_{10}, \mathfrak{t}_{13}, \mathfrak{t}_{15}, \mathfrak{t}_{17}\} = \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}} \Lambda_{\mathcal{Y}} \mathfrak{D}_{\mathcal{Z}})(a_2, a_4) \cap (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}} \Lambda_{\mathcal{Y}} \mathfrak{D}_{\mathcal{Z}})(a_3, a_4) \cap (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}} \Lambda_{\mathcal{Y}} \mathfrak{D}_{\mathcal{Z}})(a_7, a_4) \\ & \quad \cap (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}} \Lambda_{\mathcal{Y}} \mathfrak{D}_{\mathcal{Z}})(a_8, a_4) \\ & = \{\mathfrak{t}_6, \mathfrak{t}_9, \mathfrak{t}_{12}, \mathfrak{t}_{20}, \mathfrak{t}_{21}\} \cap \{\mathfrak{t}_4, \mathfrak{t}_6, \mathfrak{t}_8, \mathfrak{t}_9, \mathfrak{t}_{12}, \mathfrak{t}_{18}, \mathfrak{t}_{21}\} \cap \{\mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_4, \mathfrak{t}_6, \mathfrak{t}_9, \mathfrak{t}_{16}, \mathfrak{t}_{22}\} \\ & \quad \cap \{\mathfrak{t}_8, \mathfrak{t}_9, \mathfrak{t}_{16}, \mathfrak{t}_{20}, \mathfrak{t}_{21}\} = \{\mathfrak{t}_9\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}} \Lambda_{\mathcal{Y}} \mathfrak{D}_{\mathcal{Z}})(a_2, a_5) \cap (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}} \Lambda_{\mathcal{Y}} \mathfrak{D}_{\mathcal{Z}})(a_3, a_5) \cap (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}} \Lambda_{\mathcal{Y}} \mathfrak{D}_{\mathcal{Z}})(a_7, a_5) \\ & \quad \cap (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}} \Lambda_{\mathcal{Y}} \mathfrak{D}_{\mathcal{Z}})(a_8, a_5) \\ & = \{\mathfrak{t}_3, \mathfrak{t}_9, \mathfrak{t}_{12}, \mathfrak{t}_{17}\} \cap \{\mathfrak{t}_5, \mathfrak{t}_8, \mathfrak{t}_9, \mathfrak{t}_{12}, \mathfrak{t}_{17}, \mathfrak{t}_{18}\} \cap \{\mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3, \mathfrak{t}_9\} \cap \{\mathfrak{t}_3, \mathfrak{t}_5, \mathfrak{t}_8, \mathfrak{t}_9, \mathfrak{t}_{17}\} \\ & = \{\mathfrak{t}_9\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}} \Lambda_{\mathcal{Y}} \mathfrak{D}_{\mathcal{Z}})(a_2, a_6) \cap (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}} \Lambda_{\mathcal{Y}} \mathfrak{D}_{\mathcal{Z}})(a_3, a_6) \cap (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}} \Lambda_{\mathcal{Y}} \mathfrak{D}_{\mathcal{Z}})(a_7, a_6) \\ & \quad \cap (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}} \Lambda_{\mathcal{Y}} \mathfrak{D}_{\mathcal{Z}})(a_8, a_6) \\ & = \{\mathfrak{t}_9, \mathfrak{t}_{20}, \mathfrak{t}_{21}\} \cap \{\mathfrak{t}_8, \mathfrak{t}_9, \mathfrak{t}_{13}, \mathfrak{t}_{18}, \mathfrak{t}_{19}, \mathfrak{t}_{21}\} \cap \{\mathfrak{t}_9, \mathfrak{t}_{10}, \mathfrak{t}_{13}, \mathfrak{t}_{19}, \mathfrak{t}_{22}, \mathfrak{t}_{24}\} \\ & \quad \cap \{\mathfrak{t}_8, \mathfrak{t}_9, \mathfrak{t}_{10}, \mathfrak{t}_{13}, \mathfrak{t}_{19}, \mathfrak{t}_{20}, \mathfrak{t}_{21}\} = \{\mathfrak{t}_9\} \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan,

$$\text{uni}_{\mathcal{Z}} - \text{int}_{\ell}(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}} \Lambda_{\mathcal{Y}} \mathfrak{D}_{\mathcal{Z}}) = \cup_{z \in \mathcal{Z}} \left(\cap_{\ell \in \mathcal{K}} (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}} \Lambda_{\mathcal{Y}} \mathfrak{D}_{\mathcal{Z}})(\ell, z) \right) = \emptyset \cup \{\mathfrak{t}_9\} \cup \{\mathfrak{t}_9\} \cup \{\mathfrak{t}_9\} = \{\mathfrak{t}_9\} \text{ elde edilir. Böylece,}$$

$$\begin{aligned} \text{uni} - \text{int}(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}} \Lambda_{\mathcal{Y}} \mathfrak{D}_{\mathcal{Z}}) &= [\text{uni}_{\ell} - \text{int}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}} \Lambda_{\mathcal{Y}} \mathfrak{D}_{\mathcal{Z}})] \cup [\text{uni}_{\mathcal{Z}} - \text{int}_{\ell}(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}} \Lambda_{\mathcal{Y}} \mathfrak{D}_{\mathcal{Z}})] = \\ & \quad \{\mathfrak{t}_8, \mathfrak{t}_{18}\} \cup \{\mathfrak{t}_9\} = \{\mathfrak{t}_8, \mathfrak{t}_9, \mathfrak{t}_{18}\}. \end{aligned}$$

Buradan, tur şirketine tur rehberi alım sürecinde başvurusu geçerli sayılan 24 adaydan $\{t_8, t_9, t_{18}\}$ adayları, tur şirketi tarafından yapılacak olan kapsamlı eğitime tabi tutularak, uygun pozisyonda istihdam edilmeye hak kazanmışlardır.



6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Molodtsov'un esnek küme teorisine dayalı olarak üretilen yeni esnek çarpım çeşitleri olan "esnek yıldız-çarpım, esnek lambda-çarpım, esnek gamma-çarpım" tanıtılmış, bu çarpımların sahip oldukları temel cebirsel özellikleri detaylı şekilde ortaya konulmuş, söz konusu işlemlerin kısıtlanmış, genişletilmiş ve esnek ikili parçalı işlemlere dağılma durumlarını incelenmiş ve elde edilen sonuçları hem teorik hem de bu çarpımların karar verme süreçlerinde nasıl kullanılabileceği ile ilgili olarak günlük hayat problemleri üzerinden örneklendirilerek uygulama açısından değerlendirilmiştir.

İlk olarak, esnek yıldız-çarpım, sonrasında esnek lambda-çarpım, en son olarak da esnek gamma-çarpım tanıtılmış, örneği verilmiş ve cebirsel özellikleri detaylı olarak incelenmiştir. Bu çarpımın kısıtlanmış, genişletilmiş ve esnek ikili parçalı işlemlere dağılma durumları araştırılmış; hangi koşullarda belirli cebirsel özelliklerin sağlandığı veya sağlanmadığı ortaya konmuştur. Bölüm sonunda, problem durumuna ve esnek çarpıma uygun olacak şekilde, Çağman ve Enginoğlu (2010a) tarafından geliştirilen uni-int veya int-uni yöntemi ile karar verme problemine uygulanmıştır. Bu yöntemler sayesinde, çok kriterli karar verme süreçlerinde seçenekler yönetilebilir bir seviyeye indirgenmiş, en uygun sonuca ulaşmak kolaylaşmış ve adil bir seçim süreci sağlanmıştır. Böylece hem esnek küme teorisinin teorik yönü güçlendirilmiş hem de çok kriterli seçim problemleri için alternatif ve uygulanabilir bir yöntem sunulmuştur. Gelecekteki çalışmalar daha fazla esnek çarpım işlemi önerebilir ve esnek küme literatürünü teorik ve pratik olarak geliştirmek için farklı esnek eşit ilişkilerle ilişkili temel özellikleri araştırabilir.

KAYNAKLAR

- Abbas, M., Ali, B. and Romaguera, S. (2014). On Generalized Soft Equality and Soft Lattice Structure. *Filomat*, 28(6), 1191-1203.
- Abbas, M., Ali, M. I. and Romaguera, S. (2017). Generalized Operations in Soft Set Theory Via Relaxed Conditions on Parameters. *Filomat*, 31(19), 5955–5964.
- Akbulut, E. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended Difference and Lambda Operations*. Unpublished Master Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Ali, B., Saleem, N., Sundus, N., Khaleeq, S., Saeed, M. and George, R. (2002). A Contribution to the Theory of Soft Sets via Generalized Relaxed Operations. *Mathematics*, 10(15), 26–36.
- Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K. and Shabir, M. (2009). On Some New Operations in Soft Set Theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 57(9), 1547–1553.
- Ali, M. I., Shabir, M. and Naz, M. (2011). Algebraic Structures of Soft Sets Associated with New Operations. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(9), 2647–2654.
- Al-shami, T. M. and El-Shafei, M. (2020). T-soft Equality Relation. *Turkish Journal of Mathematics*, 44(4), 1427–1441.
- Al-shami, T. M. (2019). Investigation and Corrigendum to Some Results Related to g -Soft Equality and g f -Soft Equality Relations. *Filomat*, 33(11), 3375–3383.
- Atagün, A. O., Kamacı, H. and Oktay, O. (2018). Reduced Soft Matrices and Generalized Products with Applications in Decision Making. *Neural Computing and Applications*, 29, 445–456.
- Atanassov, K. T. (1986). Intuitionistic Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 20(1), 87–96.
- Aybek, F. (2024). *New Restricted and Extended Soft Set Operations*. Unpublished Master Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Chen, D. G., Tsang, E. C. C. and Yeung, D. S. (2003). Some Notes on The Parameterization Reduction of Soft Sets. *International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, 3, 1442–1445.
- Chen, D., Tsang, E. C. C., Yeung, D. S. and Wang, X. (2005). The Parametrization Reduction of Soft Sets and Its Applications. *Computers and Mathematics with Applications*, 49(5-6), 757–763.
- Çağman, N. (2021). Conditional Complements of Sets and Their Application to Group Theory. *Journal of New Results in Science*, 10(3), 67–74.

- Çağman, N. and Enginoğlu, S. (2010a). Soft Set Theory and Uni-int Decision Making. *European Journal of Operational Research*, 207(2), 848-855.
- Çağman, N. and Enginoğlu, S. (2010b). Soft Matrix Theory and Its Decision Making. *Computers and Mathematics with Applications*, 59, 3308-3314.
- Demirci, A. M. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended Union, Plus and Theta Operations*. Unpublished Master Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Enginoğlu, S. (2008). *Esnek Karar Verme Metodları*. Unpublished Master Thesis, Gaziosmanpaşa University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Tokat.
- Eren, Ö. F. (2019). *Esnek Küme İşlemleri Üzerine*. Unpublished Master Thesis, Ondokuz Mayıs University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Samsun.
- Feng, F. and Li, Y. (2013). Soft Subsets and Soft Product Operations. *Information Sciences*, 232, 44–57.
- Feng, F., Li, Y. and Çağman, N. (2012). Generalized Uni-int Decision Making Schemes Based on Choice Value Soft Sets. *European Journal of Operational Research*, 220(1), 162–170.
- Feng, F., Li, Y. M., Davvaz, B. and Ali, M. I. (2010). Soft Sets Combined with Fuzzy Sets and Rough Sets: A Tentative Approach. *Soft Computing*, 14, 899–911.
- Ge, X. and Yang, S. (2011). Investigations on Some Operations of Soft Sets. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 75, 1113-1116.
- Husain, S. and Shivani K. M. (2018). A Study of Properties of Soft Set and Its Applications. *International Research Journal of Engineering and Technology*, 5(1), 363-372.
- Jun, Y. B. and Yang, X. (2011). A Note on The Paper Combination of Interval-Valued Fuzzy Set and Soft Set. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(5), 1468–1470.
- Kamacı, H., Saltık, K., Akız, H. F. and Atagün, A. O. (2018). Cardinality Inverse Soft Matrix Theory and Its Applications In Multicriteria Group Decision Making. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 34(3), 2031–2049.
- Kharal, A. (2014). Soft Approximations and Uni-int Decision Making. *The Scientific World Journal*, Article ID 327408.
- Kong, Z., Gao, L., Wang, L. and Li, S. (2008). The Normal Parameter Reduction of Soft Sets and Its Algorithm. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(12), 3029-3037.
- Liu, X., Feng, F. and Jun, Y. B. (2012). A Note on Generalized Soft Equal Relations. *Computers and Mathematics with Applications*, 64(4), 572–578.

- Maji, P. K., Biswas, R. and Roy, A. R. (2003). Soft Set Theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 45(4-5), 555–562.
- Maji, P. K., Roy, A. R., and Biswas, R. (2002). An Application of Soft Sets in a Decision Making Problem. *Computers and Mathematics with Applications*, 44(8-9), 1077–1083.
- Molodtsov, D. (1999). Soft Set Theory-first Results. *Computers and Mathematics with Applications*, 37(4–5), 19–31.
- Mushrif, M. M., Sengupta, S. and Ray, A. K. (2006). Texture Classification Using a Novel, Soft-Set Theory Based Classification, Algorithm. *Lecture Notes in Computer Science*, 3851, 246-254.
- Pawlak, Z. (1982). Rough Sets. *International Journal of Computer Information Sciences*, 11, 341-356.
- Pei, D. and Miao, D. (2005). From Soft Sets to Information Systems, IEEE Conference Proceedings, 2, 617-621.
- Petchimuthu, S., Garg, H., Kamacı, H. and Atagün, A. O. (2020). The Mean Operators and Generalized Products of Fuzzy Soft Matrices and Their Applications in MCGDM. *Computational and Applied Mathematics*, 39(2), 1–32.
- Qin, K. and Hong, Z. (2010). On Soft Equality. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(5), 1347–1355.
- Qin, K., Liu, Q. and Xu, Y. (2015). Redefined Soft Relations and Soft Functions. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 8(5), 819-828.
- Roy, A. R. and Maji, P. K. (2007). A Fuzzy Soft Set Theoretic Approach to Decision Making Problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 203(2), 412- 418.
- Sarıalioğlu, M. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended Intersection, Gamma and Star Operations*. Unpublished Master Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Sen, J. (2014). On Algebraic Structure of Soft Sets. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 7(6), 1013–1020.
- Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2011). On Operations of Soft Sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(5), 1457-1467.
- Sezgin, A., Atagün, A. O. and Çağman, N. (2025). A Complete Study on And-product of Soft Sets. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 43(1), 1-14.
- Sezgin, A., Çağman, N., Atagün, A. O. and Aybek, F. (2023). Complemental Binary Operations of Sets and Their Application to Group Theory. *Matrix Science Mathematic*, 7(2), 99-106.

- Sezgin, A. and Çalışıcı, H. (2024). Comprehensive Study on Soft Binary Piecewise Difference Operation. *Eskişehir Teknik Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B-Teorik Bilimler*, 12(1), 1-23.
- Sezgin, A. and Çam, N. H. (2025). Soft Theta-product: A New Product for Soft Sets with Its Decision-Making. *Multicriteria Algorithms with Applications*, 6, 9-33.
- Sezgin, A. and Çam, N. H. (2024). Soft Difference-product: A New Product for Soft Sets with Its Decision-Making. *Journal of Amasya University The Institute of Sciences and Technology*, 5(2), 114-137.
- Sezgin, A. and Çam, N. H. (Baskıda). Soft Plus-product: A New Product for Soft Sets with Its Decision-Making. *Complexity Analysis and Applications*.
- Sezgin, A., Shahzad, A. and Mehmood, A. (2019). New Operation on Soft Sets: Extended Difference of Soft Sets. *Journal of New Theory*, 27, 33-42.
- Singh, D. and Onyeozili, I. A. (2012a). Notes on Soft Matrices Operations. *ARPN Journal of Science and Technology*, 2(9), 861–869.
- Singh, D. and Onyeozili, I. A. (2012b). On Some New Properties of Soft Set Operations. *International Journal of Computer Applications*, 59(4), 39–44.
- Singh, D. and Onyeozili, I. A. (2012c). Some Conceptual Misunderstandings of The Fundamentals of Soft Set Theory. *ARPN Journal of Systems and Software*, 2(9), 251–254.
- Singh, D. and Onyeozili, I. A. (2012d). Some Results on Distributive and Absorption Properties on Soft Operations. *IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM)*, 4(2), 18–30.
- Stojanović, N. S. (2021). A New Operation on Soft Sets: Extended Symmetric Difference of Soft Sets. *Military Technical Courier*, 69(4), 779–791.
- Xiao, Z., Chen, L., Zhong, B. and Ye, S. (2005). Recognition for Soft Information Based on the Theory of Soft Sets. *Proceedings of ICSSSM'05. 2005 International Conference on Services Systems and Services Management*, 2, 1104–1106.
- Xiao, Z., Li, Y., Zhong, B. and Yang, X. (2003). Research on Synthetically Evaluating Method for Business Competitive Capacity Based on Soft Set. *Statistical Research*, 10, 52-54.
- Yang, C. F. (2008). A Note on: “Soft Set Theory”, *Computers and Mathematics with Applications*, 56(7), 1899–1900.
- Yang X., Lin T. S., Yang J., Li Y. and Yu D. (2009). Combination of Interval-Valued Fuzzy Set and Soft Set. *Computers and Mathematics with Applications*, 58(3), 521–527.
- Yang, H., Qu, C. and Li, N. C. (2004). The Induction and Decision Analysis of Clinical Diagnosis Based on Rough Sets and Soft Sets. *September*, (2007), 17(3), 208-212.

- Yang, J. L. and Yao, Y. Y. (2020). Semantics of Soft Sets and Three-way Decision with Soft Sets. *Knowledge-based Systems*, 194, 105538.
- Yang, X., Yu, D., Yang, J. and Wu, C. (2007). Generalization of Soft Set Theory: From Crisp to Fuzzy Case. In *Fuzzy Information and Engineering: Proceedings of the Second International Conference of Fuzzy Information and Engineering (ICFIE)* (pp. 345-354). Springer Berlin Heidelberg.
- Yavuz, E. (2024). *Soft Binary Piecewise Operations and Their Properties*. Unpublished Master Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8(1), 338–353.
- Zhu, P. and Wen, Q. (2013). Operations on Soft Sets Revisited. *Journal of Applied Mathematics* 2013(5), 1-7.
- Zorlutuna, İ. (2021). Soft Set-Valued Mappings and Their Application in Decision Making Problems. *Filomat*, 35(5), 1725–1733.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Eylül ŞENYİĞİT

Eğitim Derecesi	Okul/Program	Mezuniyet Yılı
Lisans	Amasya Üniversitesi	2023
Yüksek Lisans	Amasya Üniversitesi	

Yabancı Dili

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

- 1) Sezgin, A. and Şenyiğit, E. (2025). A New Product for Soft Sets with Its Decision-making: Soft Lambda-product, *Mathematics and Systems Science*, 3(1), 31-39.
- 2) Sezgin, A., Şenyiğit, E., Güngör, N. B. (2024). A New Product for Soft Sets with Its Decision-making: Soft Star-product, *Big Data and Computing Visions*, 5(1), 52-73.
- 3) Sezgin, A., Şenyiğit, E. and Luzum, M. (2025). A New Product for Soft Sets with Its Decision-making: Soft Gamma-product, *Earthline Journal of Mathematical Sciences*, 15(2), 211-234.
- 4) Şenyiğit, E. and Sezgin, A. (Baskıda). A New Product for Soft Sets: Soft Symmetric Difference-product.