



**T. C.  
AMASYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ESNEK KÜMELERDEKİ KISITLANMIŞ VE GENİŞLETİLMİŞ  
KESİŞİM, BİRLEŞİM VE FARK İŞLEMLERİNE DETAYLI BİR  
BAKIŞ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**HAKAN KÖKÇÜ**

**OCAK**

|             |                         |           |
|-------------|-------------------------|-----------|
| HAKAN KÖKÇÜ | MATEMATİK ANABİLİM DALI | OCAK 2024 |
|-------------|-------------------------|-----------|

ESNEK KÜMELERDEKİ KISITLANMIŞ VE GENİŞLETİLMİŞ KESİŞİM,  
BİRLEŞİM VE FARK İŞLEMLERİNE DETAYLI BİR BAKIŞ

Hakan KÖKÇÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman

Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2024

## Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Hakan KÖKÇÜ tarafından hazırlanan “‘Esnek Kümelerdeki Kısıtlanmış ve Genişletilmiş Kesişim, Birleşim ve Fark İşlemlerine Detaylı Bir Bakış” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

**Danışman:** Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum .....

**Başkan:** Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Matematik Anabilim Dalı, Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum .....

**Üye:** Prof. Dr. Kadriye AYDEMİR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum .....

Tez Savunma Tarihi: 17/01/2024

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

(İmza)

Hakan KÖKÇÜ

(Tarih)

# ESNEK KÜMELERDEKİ KISITLANMIŞ VE GENİŞLETİLMİŞ KESİŞİM, BİRLEŞİM VE FARK İŞLEMLERİNE DETAYLI BİR BAKIŞ

(Yüksek Lisans Tezi)

Hakan KÖKÇÜ

AMASYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2024

## ÖZET

Bu tez çalışmasında, temel esnek küme işlemlerinden olan kısıtlanmış ve genişletilmiş kesişim, kısıtlanmış ve genişletilmiş birleşim, kısıtlanmış ve genişletilmiş fark işlemlerinin literatürde mevcut olan özelliklerine yeni pek çok özellik eklenerek, bu işlemlerin özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiş ve bu işlemlerin yeni tanımlanmış tüm esnek küme işlemleri de dahil olmak üzere diğer tüm esnek küme işlemlere dağılmasına bakılarak esnek kümeler ile birlikte bu işlemlerin  $U$  evreni üzerindeki tüm esnek kümeler kümesi ve sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde, hangi cebirsel yapılar oluşturdukları tüm detaylarıyla sunulmuştur. Ayrıca, literatürde var olan bu alandaki çalışmalardaki bir birtakım matematiksel hatalar da düzeltilerek verilmiştir.

Tez altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, esnek kümeler, esnek işlemler, bazı cebirsel yapılar ile ilgili detaylı bir literatür taraması yapılmış; ikinci bölümünde bu tez boyunca kullanılacak olan klasik küme işlemleri, cebirsel yapılar ve esnek kümeler ile ilgili temel kavramlar sunulmuş; üçüncü bölümde kısıtlanmış ve genişletilmiş kesişim işleminin; dördüncü bölümde kısıtlanmış ve genişletilmiş birleşim işleminin; beşinci bölümde kısıtlanmış ve genişletilmiş fark işleminin tüm özellikleri detaylı şekilde incelenmiş, klasik kümelerdeki kesişim, birleşim ve fark işleminin özelliklerinin esnek küme işlemlerinde yansıması nasıl olur sorusu özellikle göz önünde bulundurularak bu esnek küme işlemleri ile yeni pek çok özellik verilmiş ve detaylı ispatlarıyla sunulmuştur. Ayrıca, esnek kümeler ile birlikte bu işlemlerin hangi cebirsel yapılar oluşturduğunu görebilmek için her bir işlemin diğer tüm esnek küme işlemlerine dağılmasına bakılmış ve bu işlemlerin esnek kümelerle birlikte  $U$  evreni üzerindeki tüm esnek kümeler kümesi ve sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde, bu tezin sonuç bölümünde toplu olarak verilen monoid, sınırlı yarı-kafes, grup, yarı-halka, hemihalka, sıfır simetrik olmayan sağ yarı yakın-halka, sınırlı dağılmalı kafes, Bool Halkası; Bool cebiri, De Morgan Cebiri, Kleene Cebiri, Stone cebiri, MV-cebiri, BCK-cebiri gibi çok çeşitli yapılar oluşturduğu elde edilmiştir. Bu alanda yapılmış diğer tüm çalışmaları da içine alan bu nitelikte kapsayıcı bir çalışmanın alanyazında olmamasının, bu tezin esnek küme teorisine yeni başlayanlar için bir el kitabı niteliğinde olmasını ve literatürdeki bu boşluğu dolduracağını düşünüyoruz.

Sayfa Adedi : 235

Anahtar Kelimeler : Esnek kümeler, Kısıtlanmış ve genişletilmiş işlemler, Cebirsel yapılar

Danışman : Prof. Dr. Ashihân SEZGİN

# A DETAILED PERSPECTIVE ON RESTRICTED AND EXTENDED INTERSECTION, UNION AND DIFFERENCE SOFT SET OPERATIONS

(M. Sc. Thesis)

Hakan KÖKÇÜ

AMASYA UNIVERSITY  
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2024

## ABSTRACT

In this thesis, restricted and extended intersection, restricted and extended union, and restricted and extended difference operations, the basic soft set operations, are investigated in detail by adding many new properties to the existing ones in the literature. By handling the distributions of these operations over all other soft set operations, including all newly defined soft set operations. it is examined in full detail which algebraic structures these operations along with soft sets form in the set of soft sets over the universe  $U$  and in the set of soft sets with a fixed parameter set. Also, some mathematical errors in some studies in the literature regarding these topics are corrected.

This thesis consists of six sections. In the first section, a detailed literature review is made on soft sets, soft set operations, and some algebraic structures. In the second section, basic concepts about classical set operations, algebraic structures and soft sets which are used throughout this thesis are presented. In the third section, all the properties of the restricted and extended intersection operations; in the fourth section, the restricted and extended union operations; in the fifth section, the restricted and extended difference operation are examined and considering the question of the properties of intersection, union and difference operations in classical sets have analogy on the soft set operations, many new properties are given regarding these soft set operations and presented with detailed proofs. In addition, in order to see which algebraic structures these basic soft set operations form together with soft sets, the distribution of each operation to all other soft set operations are examined, and it is observed that the soft sets as along with these soft set operations create a wide variety of algebraic structures in the set of soft sets over the universe  $U$  and in the set of soft sets with a fixed parameter set, such as monoid, bounded semi-lattice, group, semi ring, hemiring, zero-symmetric right semi-near-ring, bounded distributive lattice, Boolean ring Bool algebra, De Morgan Algebra, Kleene Algebra, Stone algebra, MV-algebra, BCK-algebra, which are given collectively in the conclusion section of this thesis. Since there is no comprehensive study in the existing literature, which includes all other studies made in this field, we believe that this thesis will serve as a handbook for those who start to study soft set theory and will fill this gap in the literature in this regard.

Number of : 235  
KeyWords : Soft sets, Restricted and extended soft set operations, algebraic structures  
Supervisor : Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN

## ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren, çalışmalarım boyunca beni destekleyen, yönlendiren ve yazımı sırasında bana zaman ayırarak yardımını esirgemeyen tez danışmanım Prof. Dr. Aslıhan SEZGİN'e teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca bu çalışmayı yaparken karşılaştığım zorlukları aşmamda maddi ve manevi desteklerinden ötürü, canım aileme sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.



## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

|                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ÖZET .....                                                                       | İV  |
| ABSTRACT .....                                                                   | V   |
| ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR .....                                                          | VI  |
| İÇİNDEKİLER .....                                                                | vii |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....                                             | İX  |
| 1.GİRİŞ .....                                                                    | 1   |
| 2.GENEL BİLGİLER .....                                                           | 9   |
| 2.1. Kümeler .....                                                               | 9   |
| 2.1.1. Kesişim işlemi .....                                                      | 10  |
| 2.1.2. Birleşim işlemi.....                                                      | 11  |
| 2.1.3. Fark işlemi .....                                                         | 12  |
| 2.1.4. Simetrik fark işlemi .....                                                | 13  |
| 2.1.5. Tümlleyen işlemi .....                                                    | 14  |
| 2.2. Cebirsel Yapılar.....                                                       | 14  |
| 2.3. Esnek Kümeler .....                                                         | 19  |
| 3. KISITLANMIŞ VE GENİŞLETİLMİŞ KESİŞİM İŞLEMLERİ.....                           | 27  |
| 3.1. Kısıtlanmış Kesişim İşlemi ve Özellikleri.....                              | 30  |
| 3.1.1. Kısıtlanmış kesişim işleminin diğer esnek küme işlemlere dağılması: ..... | 38  |
| 3.2. Genişletilmiş Kesişim İşlemi ve Özellikleri.....                            | 56  |
| 3.2.1. Genişletilmiş kesişim işleminin diğer esnek küme işlemlerine dağılması: . | 64  |
| 4. KISITLANMIŞ VE GENİŞLETİLMİŞ BİRLEŞİM İŞLEMLERİ .....                         | 96  |
| 4.1. Kısıtlanmış Birleşim İşlemi ve Özellikleri .....                            | 97  |

**Sayfa**

|                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1.1. Kısıtlanmış birleşim işleminin diğer esnek küme işlemlere dağılması: ....      | 105 |
| 4.2. Genişletilmiş Birleşim İşlemi ve Özellikleri .....                               | 118 |
| 4.2.1. Genişletilmiş birleşim işleminin diğer esnek küme işlemlerine dağılması: ..... | 128 |
| 5. KISITLANMIŞ VE GENİŞLETİLMİŞ FARK İŞLEMİ.....                                      | 142 |
| 5.1. Kısıtlanmış Fark İşlemi ve Özellikleri .....                                     | 143 |
| 5.1.1. Kısıtlanmış fark işleminin diğer esnek küme işlemlere dağılması: .....         | 155 |
| 5.2. Genişletilmiş Fark İşlemi ve Özellikleri.....                                    | 166 |
| 5.2.1. Genişletilmiş fark işleminin diğer esnek küme işlemlerine dağılması: .....     | 180 |
| 6. YUTMA KURALLARI VE CEBİRSEL YAPILAR .....                                          | 193 |
| 6.1. Yutma Kuralları:.....                                                            | 193 |
| 6.1.1. $S_E(U)$ kümesi üzerinde yutma kuralları: .....                                | 193 |
| 6.1.2. $S_T(U)$ Kümesi üzerinde yutma kuralları: .....                                | 198 |
| 6.2. Esnek Kümeler Kümesi Üzerinde Cebirsel Yapıları.....                             | 202 |
| 6.2.1. Esnek kümeler kümesi üzerinde birli cebirsel yapılar .....                     | 202 |
| 6.2.2. Esnek kümeler kümesi üzerinde ikili cebirsel yapılar .....                     | 204 |
| 7. SONUÇ VE ÖNERİLER.....                                                             | 220 |
| KAYNAKLAR .....                                                                       | 226 |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                                        | 235 |

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

| Simgeler              | Açıklama                                               |
|-----------------------|--------------------------------------------------------|
| $\subseteq$           | Alt küme                                               |
| $\emptyset$           | Boş küme                                               |
| $\in$                 | Elemanıdır                                             |
| $\notin$              | Elemanı değildir                                       |
| $\forall$             | Evrensel niceleyici, her                               |
| $\exists$             | Varlıksal niceleyici, en az bir                        |
| $\neq$                | Eşit değildir                                          |
| $E$                   | Parametre kümesi                                       |
| $U$                   | Evrensel küme                                          |
| $P(U)$                | $U$ nun kuvvet kümesi                                  |
| $(F,A)$               | Esnek küme                                             |
| $(F,A)^r$             | Esnek kümenin tümleyeni                                |
| $\emptyset_A$         | $A$ ya göre boş esnek küme                             |
| $\emptyset_E$         | $E$ ye göre boş esnek küme                             |
| $U_A$                 | $A$ ya göre evrensel küme                              |
| $U_E$                 | Tam esnek küme                                         |
| $\emptyset_\emptyset$ | Boş esnek küme                                         |
| $S_E(U)$              | $U$ üzerinde tanımlı tüm esnek kümelerin kümesi        |
| $S_A(U)$              | $A$ kümesi üzerinde tanımlı tüm esnek kümelerin kümesi |
| $+$                   | Artı işlemi                                            |

|             |                      |
|-------------|----------------------|
| $\lambda$   | Lamda işlemi         |
| $\theta$    | Teta işlemi          |
| $*$         | Yıldız işlemi        |
| $\gamma$    | Gama işlemi          |
| $\Delta$    | Simetrik fark işlemi |
| $\subseteq$ | Esnek alt küme       |



## 1. GİRİŞ

Günlük hayatta karşılaştığımız bazı olayları açıklamak ve onları kesin olarak tanımlamak oldukça güçtür. Kesinlik gerektiren problemleri modellemek belirsizlik içeren verilere göre daha kolaydır. Başka bir deyişle, belirsizlik içeren problemleri klasik matematikle yani Aristo mantığını kullanarak modellemek oldukça zordur. Gündelik hayatta kullandığımız cümleler içerisinde pahalı araba, yüksek hız, güzel ev, kısa boy gibi ölçüm değerleri kişiden kişiye değişen belirsiz ifadelerdir. Hayatımızda, buna benzer belirsizlikler içeren birçok olay vardır. Gün geçtikçe, etrafımızda bulunan belirsizliğin objektif olarak incelenmesi için klasik yöntemlerin dışında belirsizliği de inceleyen metotlara ihtiyaç duyulmaktadır. Belirsizlik içeren problemleri anlamak ve çözmek için farklı bilim dallarında pek çok bilim adamı tarafından çalışmalar yapılmış ve yeni teoriler ortaya atılmıştır. Bu karşılaşılan belirsizlikler için olasılık teorisi, bulanık küme teorisi, kaba küme teorisi, aralık matematiği gibi birçok matematiksel teori geliştirilmiştir.

Belirsizlikle ilgili problemlerde kullanılan en yaygın yöntem Azeri bilim insanı Zadeh (1965), tarafından geliştirilen bulanık küme teorisidir. Aristo mantığıyla bir önermenin doğruluk değeri 0 veya 1 iken, bulanık mantıkta doğruluk değeri  $[0,1]$  aralığındaki tüm reel sayılardır. Diğer bir ifadeyle bir bulanık küme, bir kümedeki her bir elemanı  $[0,1]$  birim aralığındaki bir reel sayı ile eşleştiren bir fonksiyon olarak düşünülür. Bu reel sayı, söz konusu elemanın kümeye ait olma derecesini gösterir. Bu fonksiyona da üyelik fonksiyonu adı verilir. Oldukça yaygın ve kullanışlı bir teori olmakla birlikte bulanık küme teorisinde bazı zorluklar karşımıza çıkmaktadır. Şöyle ki, bulanık küme işlemlerinde farklı yazarlar tarafından yapılan farklı tanımlar bulunmaktadır. Mesela iki bulanık kümenin kesişimi veya birleşimi için farklı tanımlar bulunmaktadır. Dolayısıyla yegâne bir tanımın olmaması aynı problem için farklı çözümleri doğurmaktadır. Bunun yanı sıra bir üyelik fonksiyonunun değeri tek yönlü olduğundan bir elemanın kümeye ait olma derecesi her kişiye göre farklı yorumlanabilir. Ayrıca üyelik fonksiyonunun inşa edilmesi tamamen bireysel olduğundan, her bir durum için birden fazla üyelik fonksiyonu oluşturulabilir. Bunun sonucu olarak aynı problem için farklı sonuçlar çıkar. Bulanık küme teorisi, klasik olasılık teorisinin bir alternatifidir. Bu teori ile gerçek dünyada var olan belirsizlik kavramı matematiksel olarak incelenmeye başlanmış ve özellikle görüntü işleme, karar verme mekanizmalarında, modellemede, robotik, kontrol mühendisliği, bilgisayar mühendisliği,

bilgiişlem, yapay zekâ gibi pek çok alanda uygulama imkânı bulmuştur. Bu sebeple, ilgili yukarıda bahsedilen yapısal zorluklardan dolayı bağımsız bir kümeler teorisine ihtiyaç duyulmuştur.

Bu amaçla, “Esnek Küme Teorisi”, Molodtsov, tarafından 1999 yılında belirsizlikle başa çıkmak için bir matematiksel araç olarak ortaya atılmıştır (Molodtsov, 1999). Esnek küme teorisinde üyelik fonksiyonu kurma problemi olmaması, teoriyi daha kullanışlı kılmaktadır. Bu avantaj sayesinde esnek küme teorisi ile ilgili çalışmalar başta matematik olmak üzere mühendislik, tıp, sosyal bilimler gibi pek çok bilim dalında ve günlük hayatta karşılaştığımız bilgi sistemleri, karar verme problemleri gibi pek çok alanda hızlı bir şekilde uygulama imkânı bulmuştur. Molodtsov (1999) oyun teorisi, işlem araştırmaları, sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, olasılık, ölçüm teorisi, Riemann integrasyonu, Perron integrasyonu vb. alanlarda esnek küme teorisini kullanarak başarılı çalışmalara imza atmıştır.

Pawlak (1982) tarafından yaklaşımlı kümeleri tanımlanmıştır. Maji, Roy ve Biswas (2002) esnek kümelerde parametre indirgenesini tanımlamış ve karar verme problemleri üzerinde esnek kümelerin bir uygulamasını vermiş ayrıca esnek kümeler bulanık alt kümelere taşınarak bulanık esnek kümeler tanımlanmıştır. Bu şekilde esnek kümeler için daha önceden bilinen tanım ve teoremler bulanık küme yapısına uyarlanmıştır. Xiao, Li, Zhong ve Yang (2003) esnek küme temelli iş rekabet kapasitesi için yapay bir hesaplama metodu üzerine çalışma yapmıştır. Yang, Qu ve Li (2004) esnek kümeler ve yaklaşımlı kümelere dayalı klinik teşhisin karar analizi ve indüksiyon başlıklı çalışmasıyla dikkat çekmiştir. Chen, Tsang ve Yeung (2003) ile Chen, Tsang, Yeung ve Wang (2005) ve Kong, Gao, Wang ve Li (2008) esnek kümelerde parametre indirgemesi üzerine çalışmalar yapmıştır. Xiao, Chen, Zhong ve Ye (2005) ile Pei ve Miao (2005) esnek tabanlı bilgi sistemleri üzerine çalışmalar sunmuşlardır. Mushrif, Sengupta ve Ray (2006) esnek küme temelli sınıflandırmalar konulu çalışma yapmışlardır. Roy ve Maji (2007) karar verme probleminde bulanık esnek kümelerin uygulanmasına ilişkin birtakım önemli sonuçlar elde etmiştir. Yang, Yu, Yang ve Wu (2007) geleneksel esnek küme teorisi bulanık olacak şekilde genişletip, bulanık üyeliği bulanık esnek kümenin parametreye yakın elemanlarını tanımlamak için kullanmıştır. Enginoğlu (2008), esnek kümelerin ve esnek küme işlemlerinin daha işlevsel olan yeni tanımlarını vermiştir. Ardından, esnek çarpım ve bazı

karar verme fonksiyonlarını tanımlanarak, esnek karar verme metotlarını ortaya atmıştır. Feng, Li ve Çağman (2012) tekdüze karar verme ilkesinin sınırlarını göstermişlerdir. Kharal (2014), bir esnek kümenin üyelik yapısını incelenmiştir. Atagün, Kamacı ve Oktay (2018) genelleştirmiş bir karar verme yöntemi getirmişlerdir. Kamacı, Saltık, Akız ve Atagün (2018) ters esnek matris teorisini ayrıntılı olarak tanıtmıştır. Yang ve Yao (2020) üç yönlü kararın niteliksel bir modelini sunmuşlardır. Petchimuthu, Garg, Kamacı ve Atagün (2020) çok kriterli grup karar verme problemini farklı değerlendirme kriterleri ile tanımlamış ve algoritma oluşturmuşlardır. Zorlutuna (2021) esnek sınıflar üzerinde küme değerli haritalama kavramını incelemiş, bu kavramı karar verme problemlerine uygulamışlardır.

Esnek cebirsel yapılar da günümüzde pek çok yazar tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmaların öncüsü, Aktaş ve Çağman (2007) olup, bu çalışmada esnek grup, esnek alt grup, normal esnek alt grup, esnek grup homomorfizmi gibi cebirsel yapıları da tanımlanmıştır. Ayrıca, esnek kümelerin, bulanık kümeler ve kaba kümelerle olan ilişkisini değerlendirmişlerdir. Jun (2008) esnek BCK/BCI-cebirleri ve esnek alt cebir kavramlarını tanımlayıp, bu yapılarla ilgili çalışmalar yapmıştır. Jun ve Park (2008) BCK/BCI-cebirlerinin cebirsel yapısını esnek küme teorisine uygulayarak, BCK/BCI-cebirlerinde esnek kümelerin cebirsel özelliklerini araştırmıştır. Park, Jun ve Öztürk (2008) esnek WS-cebirleri üzerine çalışmalar yapmıştır. Feng, Jun ve Zhao (2008) esnek yarı halka kavramını tanımlayıp, esnek kümeler için mevcut olan özellikleri yarı halka yapısına uyarlamışlardır. Bu çalışma da pek çok yeni çalışmanın önünü açan bir çalışma olmuştur. Sun, Zhang ve Liu (2008) esnek modüllerin tanımını, modülleri ve Molodtsov'un esnek küme tanımını kullanarak vermişlerdir. Acar, Koyuncu ve Tanay (2010) esnek halka kavramının tanımı ve ilgili özelliklerini, Sezgin ve Atagün (2011) esnek gruplar ve normalistik esnek grupları, Sezgin, Atagün ve Aygün (2011) esnek normalistik yakın halkaları, Sezgin, Atagün ve Çağman (2013) esnek N-grupları, Sezer, Çağman ve Atagün (2014) ve Sezer, Çağman, Atagün, Ali, Türkmen (2015) yarı grupların esnek kesişimsel ideallerini tanımlayıp, özelliklerini ve aralarındaki ilişkileri incelemişlerdir. Ullah, Ahmad, Karaaslan, Hayat ve Rashad (2018) esnek kesişimli AG-grubunun tanımlarını, Karaaslan (2019) AG-grupoid,  $AG^*$ -grupoid ve AG-bant üzerindeki esnek küme ailesinin bazı özelliklerini araştırmış, ayrıca esnek idempotent eleman, esnek kesişimli AG-bandı, sol (sağ) bağlantılı esnek küme, esnek kesişimsel-ideali ve esnek kesişimsel AG-grupoidinin

esnek asal ideali gibi yeni kavramlar tanımlamış, Karaaslan, Ullah ve Ahmed (2021), normal bipolar esnek alt grup kavramını tanıtmış ve normal bipolar esnek alt grupların özelliklerini araştırmışlardır.

Esnek küme Molodtsov tarafından 1999 yılında ortaya atıldığında, kartezyen çarpım kümesi üzerinde temel esnek küme işlemi ilk defa bu çalışmada verilmiştir. Daha sonrasında Maji, Biswas ve Roy (2003), esnek kümeler üzerinde tanımlanan işlemlere birtakım eklemeler yaparak, esnek alt küme, esnek kümelerin eşitliği, esnek tümleyen, boş esnek küme ve mutlak esnek küme kavramlarıyla VE ve VEYA işlemleri ile esnek birleşim ve kesişim işlemlerini esnek küme literatürüne kazandırmıştır. Pei ve Miao (2005) esnek tabanlı bilgi sistemleri üzerine çalışmalar sunduğu çalışmasında, esnek kümeler için Maji ve diğerleri (2003) çalışmasından farklı bir kesişim ve alt küme kavramı tanıtmıştır. Feng ve diğerleri (2008) ise esnek kümelerdeki kesişim için alternatif esnek ikili kesişim kavramını tanıtmıştır. Ali, Feng, Liu, Min ve Shabir (2009), Maji ve arkadaşlarının (2003) tanımladığı esnek küme işlemlerindeki bir takım problemleri düzelterek, esnek kümelerin kısıtlı birleşim, kısıtlı kesişim, kısıtlı fark ve esnek kümelerin genişletilmiş kesişimi gibi bazı yeni çok önemli esnek küme işlemlerini literatüre kazandırmış, temel özelliklerini incelemiş, esnek kümenin tümleyeni kavramını geliştirmiş ve bu yeni tanımlara göre bazı De Morgan yasalarının esnek küme teorisinde geçerli olduğunu kanıtlamışlardır. Qin ve Hong (2010) yeni bir esnek eşitlik kavramını tanımladığı çalışmasında, esnek kümelerin cebirsel yapısını ele alarak, yutma kurallarına bakarak esnek kümelerin kafes yapılarını incelemiştir. Ali, Shabir ve Naz (2011), Ali ve diğerleri (2009) çalışmasında tanımlanan yeni esnek küme işlemlerinin, esnek kümeler kümesi üzerinde hangi cebirsel yapılar oluşturduğunu detaylı şekilde incelemiş ve monoid, hemihalka ve kafes gibi çeşitli yapılar oluşturduğunu; sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde ise bazı işlemlerin MV-cebiri ve BCK-cebiri oluşturduğunu göstermiştir. Sezgin ve Atagün (2011) ise temel esnek küme işlemleri ile ilgili daha önce çalışılmamış olan temel özellikleri ele almış, esnek kümeler için kısıtlı simetrik fark işlemini tanımlayıp özelliklerini incelemişlerdir. Singh ve Onyeozili (2012a, 2012b, 2012c, 2012d), bir esnek kümenin tümleyeni kavramını yeniden tanımlamış ve esnek küme işlemlerinin özellikle dağılma ve yutma kuralları üzerine çalışma sunmuşlardır. Sen (2014) sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde, kısıtlanmış ve genişletilmiş kesişim ve birleşim işlemlerinin bir Boole cebiri oluşturduğunu göstermiştir. Sezgin, Shahzad ve Mehmood

(2019), esnek kümelerde var olan genişletilmiş işlemlere bir yenisini ekleyerek, genişletilmiş fark işlemini tanımlamış, özelliklerini ve diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkisini vermiştir. Stojanovic (2021) ise esnek küme literatürdeki genişletilmiş işlem adına var olan boşluğu, genişletilmiş simetrik fark işlemini tanımlayıp, özelliklerini araştırarak doldurmuştur. Günümüze kadar yapılan çalışmalar incelendiğinde, esnek küme işlemlerinin kısıtlanmış esnek küme işlemleri ve genişletilmiş esnek küme işlemleri olmak üzere 2 ana başlık altında ilerlediğini görmekteyiz. Eren (2019) kısıtlanmış ve genişletilmiş işlem formundan farklı bir işlem formu olan, esnek ikili parçalı fark işlemini tanımlamış ve özelliklerini çalışmış, Sezgin ve Çalışıcı (2024) esnek ikili parçalı fark işleminin özellikleri üzerine detaylı çalışma sunmuşlardır. Çağman (2021) çalışmasında, kümelerin koşullu tümleyenlerini ve bunların grup teorisine uygulanmasını vermesiyle, bu çalışmadan esinlenerek, Sezgin, Çağman, Atagün ve Aybek (2023c) yeni ikili küme işlemleri çalışmıştır. Aybek (2024), bu yeni ikili küme işlemlerini esnek kümeye aktararak, yeni kısıtlanmış ve genişletilmiş esnek küme işlemleri tanımlamış, özelliklerini incelemiş ve diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkisine bakmıştır. Yeni bir esnek küme işlem formu olan tümleyenli esnek ikili parçalı işlemler ise Akbulut (2024), Demirci (2024), Sarılioğlu (2024) tarafından çalışılmıştır. Eren (2019) çalışmasındaki esnek ikili parçalı fark işlemi formunda, Yavuz (2024), esnek ikili parçalı birleşim, kesişim, gama, lamda, teta, yıldız, artı gibi çeşitli yeni esnek küme işlemleri tanımlamış ve özelliklerini detaylı şekilde incelemiştir. Esnek ikili parçalı işlem formunun ilk satırının tümleyeni alınarak, tümleyenli esnek ikili parçalı işlemler tanımlanmış ve çeşitli yazarlar tarafından çalışılmıştır (Sezgin ve Demirci, 2023; Sezgin ve Sarılioğlu 2024; Sezgin ve Akbulut 2023; Sezgin ve Yavuz 2023b; Sezgin ve Aybek 2023; Sezgin ve Atagün, 2023; Sezgin, Aybek ve Atagün, 2023a; Sezgin, Aygün ve Güngör, 2023b; Sezgin ve Çağman, 2024b).

Bir küme üzerinde, bir veya birden fazla ikili işlem tanımlanmış ise bu ikili işlem(ler) ile birlikte o kümeye bir cebirsel yapı denir. Soyut cebirin amacı, cebirsel yapıları sınıflandırarak, aynı sınıf içinde olan cebirsel yapıların, onları oluşturan küme ve ikili işlemlerden bağımsız olarak, orta özelliklerini bulmak, sergilemek ve bu özelliklerden bazı sonuçlar çıkarmaktır. Matematik bu dalının soyut cebir olarak adlandırılmasının nedeni budur. Cebirsel yapılar, matematiksel nesneleri genel ve soyut bir şekilde incelemenin ve anlamının bir yolunu sağladığından, matematikçiler yüzyıllardır cebirsel yapılarla ilgili çalışmalarını sürdürmektedirler. Esasen cebirsel yapılar matematiğin birçok alanında temel

bir rol oynar. Gruplar, halkalar ve cisimler gibi cebirsel yapıların matematikte ve fizik ve bilgisayar bilimi gibi diğer alanlarda birçok önemli uygulaması vardır. Ayrıca cebirsel geometri (çok değişkenli polinomların çözümlerinin analizi), cebirsel topoloji, modüler aritmetik, fizik, sayı teorisi, bilgisayar grafikleri açısından çok önemli olup, bu yapılar daha gelişmiş matematiksel kavram ve yapıların anlaşılması için de bir temel sağlarlar. Ayrıca, matematiksel yapılar çeşitli matematiksel nesneleri ve bunların etkileşimlerini incelemek ve anlamak için bir çerçeve sağlar. Daha detaylı olarak, cebirsel yapılardan olan gruplar, matematiksel bağlamlarda simetrileri, rotasyonları ve dönüşümleri incelemek için kullanılır ve fizik, kimya ve kriptografide uygulamaları vardır. Temel grup gibi cebirsel yapılar ve bunların bir grup dönüşüm olarak temsilleri, ilginç geometrik nesnelerin ve şekillerin simetrilerinin incelenmesinde önemli bir araç oluşturur. Halkalar, soyut cebirde, sayı teorisinde ve kodlama teorisinde kullanılır. Cisim cebir, geometri ve matematiğin diğer alanlarında temeldir. Vektör uzayları doğrusal cebirde, kuantum mekaniğinde ve mühendislikte kullanılır. Cebirler matematiksel mantık, fizik ve bilgisayar bilimlerinde uygulamaları vardır. Modüller, soyut cebir ve temsil teorisinde kullanılırlar.

Ayrıca cebirsel yapıların incelenmesi, farklı cebirsel sistemler tarafından paylaşılan ortak özellikleri ve yapıları araştıran soyut cebirde, matematikçilerin bu yapıların özelliklerini anlayarak karmaşık problemleri çözebilmesi, yeni teoriler geliştirip, kavramları matematiğin, bilimin ve mühendisliğin çeşitli alanlarına uygulayabilmesi açısından çok önemlidir. Üstelik, cebirsel yapıların belirli örnekleri uygulamalarda ortaya çıkmaktadır ve bizlere belirli durumlar hakkında cevaplar vereceğinden, daha genel durumu da incelememizde kolaylık sağlamaktadır. Belirli bir  $S$  kümesinin iyi bilinen bir cebirsel yapının bir örneği olarak bilinmesiyle, bu cebirsel yapı hakkında bilinen her sonucun otomatik olarak  $S$  için de geçerli olduğu bilinir. Bu fayda, büyük ölçüde soyutlamanın arkasındaki ana motivasyondur. Bu nedenlerle, cebirsel yapıların soyut matematik ve soyut cebirdeki önemi oldukça büyüktür.

En bilinen ikili cebirsel yapılardan olan, halkaların genellenmiş hali olan yakın halka, yarı halka ve yarı halka kavramları geçmişten günümüze çalışılan ve araştırmacıların dikkatin çeken konulardan olmuştur. Genelleştirilmiş halkalar olan yakın halkalar Dickson tarafından 1905 yılında ortaya atılmış olup, yakın halka kavramı ise ilk defa Zassenhaus (1935) tarafından kullanılmıştır. Yarı halka kavramı ilk olarak Vandiver (1935) tarafından

tanıtılmış ve sonrasında pek çok yazar bu konu üzerine çalışmalar yapmıştır. Vandiver (1935), yarı halkaların matematikte büyük bir önem taşımakla birlikte geniş bir uygulama alanına sahip olduğunu belirtmiştir. Yarı halkalar, geometride olduğu kadar pratik matematik ve bilgi bilimlerinin çeşitli uygulamalarındaki sorunların çözümü için de çok önemlidir (Vandiver, 1935). Terslenebilir yarı halkalar Karvellas (1974) tarafından incelenmiş olup; yarı halkalar üzerine pek çok çalışma yapılmıştır (Petrich 1973; Goodearl 1979). Reutenauer ve Straubing (1984) değişmeli yarı halkalar üzerine dikkat çeken çalışmaların literatüre kazandırmıştır. Hoorn ve Rootselaar (1967) ise yarı halka cebirsel yapısından da daha genel bir yapı olan yakın yarı halka kavramını tanıtip özelliklerini incelemişlerdir.

Tıpkı sayılar üzerindeki temel işlemler ve kümeler teorisindeki temel işlemler gibi, esnek küme işlemleri de esnek küme teorisi açısından oldukça önemlidir. Uygulama açısından çokça kullanılan esnek hesaplama ve esnek karar verme yöntemlerinin teorik temelleri esnek küme işlemlerinden beslenmektedir. Literatürde var olan esnek cebirsel yapılarla ilgili pek çok çalışma da esnek küme işlemler yardımıyla oluşmuştur. Ayrıca, esnek kümelerin ve işlemlerinin oluşturduğu cebirsel yapıların bu perspektifinden incelenmesi, esnek kümelerin cebirsel yapısına derinlemesine bir bakış açısı sağlamak ve uygulamaların kapsamlı bir şekilde anlaşılmasının yanı sıra esnek küme cebirinin klasik ve klasik olmayan mantığa nasıl uygulanabileceğinin takdir edilmesine olanak verdiğinden, yeni karar verme yöntemleri ve esnek kümelerle dayalı yeni kriptografi teknikleri de dahil olmak üzere çeşitli uygulamalara temel oluşturmaktadır.

Bu tez, temel esnek küme işlemlerinden olan kısıtlanmış ve genişletilmiş kesişim, kısıtlanmış ve genişletilmiş birleşim, kısıtlanmış ve genişletilmiş fark işlemlerinin tüm özelliklerinin literatürde var olan ve yeni pek özelliğin de eklenerek, detaylı bir şekilde incelendiği ve esnek kümeler ile birlikte bu işlemlerin hem  $U$  üzerindeki tüm esnek kümeler kümesi üzerinde ( $S_E(U)$ ) hem de sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde ( $S_A(U)$ ), hangi birli ve ikili cebirsel yapılar ile kafes yapılar oluşturduğunun tüm detaylarıyla birlikte sunulduğu ve bu açıdan, bu alanda yapılmış olan diğer tüm çalışmaları (Maji ve diğerleri, 2003; Pei ve Miao, 2005; Ali ve diğerleri, 2009; Qin ve Hong, 2010; Sezgin ve Atagün, 2011; Ali ve diğerleri, 2011; Singh ve Onyeozili, 2012c; Sen, 2014) kapsayıcı nitelikte olan bir çalışmadır.

Tezin ilk bölümünde, esnek kümeler ve esnek küme işlemleri ve bazı cebirsel yapılar ile ilgili detaylı bir literatür taraması yapılmış; ikinci bölümünde bu tez boyunca kullanılacak olan klasik küme işlemleri, esnek kümeler ve bazı cebirsel yapılar ile ilgili temel kavramlar sunulmuştur. Üçüncü bölümde, temel esnek küme işlemlerinden olan ve daha önce literatüre kazandırılmış olan kısıtlanmış ve genişletilmiş kesişim işleminin; dördüncü bölümde kısıtlanmış ve genişletilmiş birleşim işleminin; beşinci bölümde kısıtlanmış ve genişletilmiş fark işleminin tüm özellikleri detaylı şekilde incelenmiş ve detaylı ispatlarıyla sunulmuştur. Kısıtlanmış işlemlerinin tümü için özellikler ve dağılma kuralları araştırılırken, kısıtlanmış işlemleri alınacak esnek kümelerin parametre kümelerinin boş olması durumu da değerlendirilmiştir. Daha önceki bu alanda yapılmış olan çalışmalarda sunulmuş olan özelliklere yeni pek çok özellik eklenmiştir. Burada, klasik kümelerde de bu işlemler olduğundan, klasik kümelerde bu işlemlerinin özelliklerinin esnek küme işlemlerinde yansıması nasıl olur sorusu özellikle göz önünde bulundurularak yeni pek çok özellik verilmiş ve önceki çalışmalarda ispatsız ve/veya hatalı/uzun ispatlı olarak sunulan özellikler tekrar detaylı ama sade ispatlarıyla sunulmuş ve daha önce bu alanda yapılmış olan birtakım çalışmalardaki hatalı yerler de düzeltilerek doğrularıyla verilmiştir. Ayrıca, bu temel esnek küme işlemlerin, esnek kümeler ile birlikte sadece hangi birli cebirsel yapılar oluşturduğuna değil, hangi ikili cebirsel yapılar da oluşturduğunu görebilmek için her bir işlemin literatüre yeni kazandırılan esnek küme işlemlerinden olan esnek ikili parçalı işlemler de dahil olmak üzere tüm esnek küme işlemlerine dağılmasına tek tek bakılmış ve bu esnek küme işlemleri ve esnek kümelerin hem  $U$  üzerindeki tüm esnek kümeler kümesi üzerinde, hem de sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde monoid, sınırlı yarı-kafes, grup gibi birli cebirsel yapıların yani sıra, yarı-halka, hemihalka, sıfır simetrik olmayan sağ yarı yakın-halka gibi ikili cebirsel yapılar ile sınırlı dağılmalı kafes, Bool Halkası; Bool cebiri, De Morgan Cebiri, Kleene Cebiri, Stone cebiri, MV-cebiri, BCK-cebiri gibi çok çeşitli yapılar oluşturduğu görülmüş, daha önce elde edilen cebirsel yapılara yeni pek çok cebirsel yapılar eklenerek, bu çalışmada toplu olarak sunulmuştur. Tüm bunlar göz önüne alındığında bu çalışmanın bu alanda yapılmış diğer tüm çalışmaları da içine alan kapsayıcı bir çalışma olduğunu ve esnek küme teorisine yeni başlayanlar için bu çalışmanın bir el kitabı niteliğinde olduğunu söylemenin yanlış olmayacağını düşünüyor bu nitelikte kapsayıcı bir çalışmanın alan yazında olmayışının, literatürde var olan bu boşluğu dolduracağını ümit ediyoruz.

## 2. GENEL BİLGİLER

### 2.1. Kümeler

İyi tanımlanmış nesneler topluluğuna küme denir. Küme kavramının, Georg Cantor (1874) tarafında belirgin bir şekilde ifade edildiği ve küme kuramının temellerinin Cantor tarafından atılmaya başlandığı bilinmektedir. Bu kavramın, Cantor'dan önce de kullanıldığı; fakat adına küme denilmediği bilinmektedir (Yücesan, 2011).

Matematik dilinde uluslararası birlik sağlama ihtiyacı 19. yüzyıl sonlarına doğru zorunlu hale gelmiştir. Bu akımı başlatanların başında sonlu ve sonsuz kümeleri oluşturmayı amaçlayan Alman matematikçi Cantor gelmektedir. Cantor "sonsuz küme" kavramına matematiksel bir tanım getirmiş ve gerçel sayıların sonsuzluğunun doğal sayıların sonsuzluğundan "daha büyük" olduğunu göstermiştir. Cantor, ayrıca kardinal sayı ve ordinal sayı kavramları ile bu sayıların aritmetiğini de tanımlayarak matematiğe önemli katkılar sunmuştur. Aynı dönemlerde Bernard Bolzano, doğal sayıların ötesinde sayılabilme problemini ortaya koyan sonsuz kümeler üzerine çalışmalar yapmış ve bu çalışmaları yayımlamıştır. Frege, 1893 yılında Aritmetiğin Temel Yasaları isimli yapıtının ilk cildinde Cantor'unkine çok yakın bir küme kavramı oluşturmuştur. Frege çalışmalarında sayıların tanımını küme kavramına dayalı olarak yeniden vermeyi denemiştir (Yücesan, 2011).

Kümeler,  $X, Y, Z, \dots$  gibi büyük harflerle; kümenin elemanları ise  $x, y, z, \dots$  gibi küçük harflerle gösterilir. Eğer bir  $x$  elemanı bir  $A$  kümesine aitse bunu  $x \in A$ ; aksi halde  $x \notin A$  şeklinde gösterilir.  $X$  ve  $Y$  iki küme olmak üzere;  $X$  in her elemanı aynı zamanda  $Y$  nin de bir elemanı ise  $X$ 'e,  $Y$ 'nin bir alt kümesi denir ve  $X \subseteq Y$  şeklinde yazılır.  $X \subseteq Y$  ve  $Y \subseteq X$  ise o zaman  $X$  ile  $Y$  kümelerine eşittir denir ve  $X = Y$  şeklinde gösterilir. Küme teorisinde, üzerinde çalışılan en geniş kümeye evrensel küme denir ve  $E$  ile; hiçbir elemanı olmayan kümeye boş küme denir ve  $\emptyset$  ile gösterilir (Özer, Çoker, Taş, 1999:36-37).

Tez çalışmamızda, esnek kümeler için kısıtlanmış ve genişletilmiş kesişim, kısıtlanmış ve genişletilmiş birleşim ve kısıtlanmış ve genişletilmiş fark işlemlerinin özellikleri

inceleneceği ve ispatları kümelere dayalı yapılacağı için, klasik kümelerdeki temel küme işlemlerinin özellikleri bu bölümde verilmiştir.

### 2.1.1. Kesişim işlemi

$W$  ve  $Z$  iki küme olmak üzere hem  $W$  kümesine hem de  $Z$  kümesine ait olan elemanların kümesine  $W$  ile  $Z$  nin kesişimi (arakesiti) denir ve  $W \cap Z$  ile gösterilir.

$$W \cap Z = \{x: x \in W \text{ ve } x \in Z\}$$

Kesişim işleminin temel özellikleri aşağıda belirtilmiştir:

- $(W \cap Y) \cap Z = W \cap (Y \cap Z)$  (Birleşme özelliği)
- $W \cap Z = Z \cap W$  (Değişme özelliği)
- $W \cap \emptyset = \emptyset \cap W = \emptyset$  (Yutan eleman özelliği)
- $W \cap E = E \cap W = W$  (Etkisiz eleman özelliği)
- $W \cap W = W$  (Denk güçlülük özelliği)
- $W \cap Z = \emptyset \Leftrightarrow W \subseteq Z'$ . Benzer şekilde,  $W \cap Z = \emptyset \Leftrightarrow Z \subseteq W'$
- $\emptyset \subseteq W \cap Z, W \cap Z \subseteq E$
- $W \cap Z = E \Leftrightarrow W = Z = E$
- $W \cap Z = \emptyset \Rightarrow W = \emptyset \vee Z = \emptyset$  veya  $W$  ve  $Z$  ayrıktır.
- $W \cap Z \subseteq W, W \cap Z \subseteq Z$
- $W \subseteq Z \Leftrightarrow W \cap Z = W$
- $W \cap Z = W \cup Z \Leftrightarrow W = Z$
- $W \cap Z \subseteq W \cup Z$
- $W \subseteq Z \Rightarrow W \cap T \subseteq Z \cap T$ . Tersisi doğru değildir.
- $W \subseteq Y$  ve  $Z \subseteq T \Rightarrow W \cap Z \subseteq Y \cap T$
- $W \cap (W \cup Z) = W \cup (W \cap Z) = W$  (Yutma Kuralı)

- $W \cap (Z \cup Y) = (W \cap Z) \cup (W \cap Y)$  (Kesişimin birleşim üzerine soldan dağılıması)
- $(W \cup Z) \cap Y = (W \cap Y) \cup (Z \cap Y)$  (Kesişimin birleşim üzerine sağdan dağılıması)
- $W \cap (Z - Y) = (W \cap Z) - (W \cap Y)$  (Kesişimin fark üzerine soldan dağılıması)
- $(W - Z) \cap Y = (W \cap Y) - (Z \cap Y)$  (Kesişimin fark üzerine sağdan dağılıması)

(Özer, Çoker, Taş, 1999:38-50, Çallıalp, 1994: 1-7).

### 2.1.2. Birleşim işlemi

W ve Z iki küme olsun. W ye, Z ye veya her ikisine ait olan elemanların kümesine W ile Z nin birleşimi denir ve  $W \cup Z$  ile gösterilir.

$$W \cup Z = \{x: x \in W \text{ veya } x \in Z\}$$

Birleşim işleminin özellikleri aşağıda belirtilmiştir:

- $(W \cup Y) \cup Z = W \cup (Y \cup Z)$  (Birleşme özelliği)
- $W \cup Z = Z \cup W$  (Değişme özelliği)
- $W \cup \emptyset = \emptyset \cup W = W$  (Birim eleman özelliği)
- $W \cup W = W$  (Denk güçlülük özelliği)
- $W \cup E = E \cup W = E$  (Yutan eleman özelliği)
- $W \subseteq W \cup Z, Z \subseteq W \cup Z$
- $\emptyset \subseteq W \cup Z, W \cup Z \subseteq E$
- $W \cup Z = Z \Leftrightarrow W \subseteq Z$
- $W \cap Z \subseteq W \cup Z$
- $W \cup Z = W \cap Z \Leftrightarrow W = Z$
- $W \cup Z = \emptyset \Rightarrow W = Z = \emptyset$
- $W \subseteq Z \Rightarrow W \cup K \subseteq Z \cup K$ . Tersisi doğru değildir.
- $W \subseteq K \text{ ve } Z \subseteq T \Rightarrow W \cup Z \subseteq K \cup T$

- $W \cap (W \cup Z) = W \cup (W \cap Z) = W$  (Yutma kuralı)
- $W \cup (Z \cap Y) = (W \cup Z) \cap (W \cup Y)$  (Birleşimin kesişim üzerine soldan dağılması)
- $(W \cap Z) \cup Y = (W \cup Z) \cap (Z \cup Y)$  (Birleşimin kesişim üzerine sağdan dağılması)

(Hacısalioğlu, 2007: 43-62; Nesin, 2019: 7-59).

### 2.1.3. Fark işlemi

$W$  ve  $Y$  iki küme olsun.  $W$  da olup  $Y$  de olmayan elemanların kümesine  $W$  ile  $Y$  nin farkı denir ve  $W \setminus Y$  veya  $W - Y$  ile gösterilir.

$$W - Y = \{x: x \in W, x \notin Y\} = \{x \in W: x \notin Y\}$$

Bu tezimiz boyunca,  $W$  ile  $Y$  işlemlerinin farkı için  $W - Y$  gösterimini tercih ediyoruz. Aşağıda fark işleminin özellikleri verilmiştir.

- $W - Y \neq Y - W$
- $(W - Y) - Z \neq W - (Y - Z)$
- $W - \emptyset = W$ ,  $W - E = \emptyset$
- $\emptyset - W = \emptyset$  ve  $W - W = \emptyset$
- $(W - Y) \cap (W \cap Y) = \emptyset$  ve  $(Y - W) \cap (W \cap Y) = \emptyset$
- $W - (W - Y) = W \cap Y$  ve  $Y - (Y - W) = Y \cap W$
- $W \cap Y = \emptyset$  ise  $W - Y = W$ . Buradan,  $W \cap (Y - W) = \emptyset$  olup  $W - (Y - W) = W$ ;  $Y \cap (W - Y) = \emptyset$  olup  $Y - (W - Y) = Y$ ;  $(W - Y) \cap (Y - W) = \emptyset$  olup  $(W - Y) - (Y - W) = W - Y$ ;  $(Y - W) \cap (W - Y) = \emptyset$  olup  $(Y - W) - (W - Y) = Y - W$ ;  $(W - Y) \cap Y = \emptyset$  olup  $(W - Y) - Y = W - Y$
- $(W - Y) \subseteq W$  ve  $(Y - W) \subseteq Y$
- $W = (W - Y) \cup (W \cap Y)$  ve  $Y = (Y - W) \cup (W \cap Y)$
- $W \cup Y = (W - Y) \cup (Y - W) \cup (W \cap Y) = (W - Y) \cup Y = (Y - W) \cup W$
- $W \subseteq Y \Leftrightarrow W - Y = \emptyset$

- $(W \cap Y) - Z = (W - Z) \cap (Y - Z)$  (Farkın kesişime sağdan dağılması)
- $(W \cup Y) - Z = (W - Z) \cup (Y - Z)$  (Farkın birleşime sağdan dağılması)
- $(W - Y) - Z = (W - Z) - (Y - Z)$  (Farkın farka sağdan dağılması)
- $W - (Y \cap Z) = (W - Y) \cup (W - Z)$
- $W - (Y \cup Z) = (W - Y) \cap (W - Z)$

(Nesin, 2019: 7-59; Özer, Çoker, Taş, 1999:38-50).

#### 2.1.4. Simetrik fark işlemi

$W$  ve  $Y$  kümeleri verildiğinde,  $W \cup Y$  ye ait olup  $W \cap Y$  ye ait olmayan elemanların oluşturduğu kümeye  $K$  ile  $Y$  kümelerinin simetrik farkı denir ve  $W \Delta Y$  ile gösterilir.

$$W \Delta Y = \{x: x \in W \cup Y, x \notin W \cap Y\} = (W \cup Y) - (W \cap Y)$$

Bu tanımın bir sonucu olarak  $W \Delta Y = (W - Y) \cup (Y - W)$  olduğu açıktır. Simetrik fark işleminin özellikleri aşağıda verilmiştir.

- $(W \Delta Y) \Delta Z = W \Delta (Y \Delta Z)$  (Birleşme özelliği)
- $W \Delta Y = Y \Delta W$  (Değişme özelliği)
- $W \Delta \emptyset = \emptyset \Delta W = W$  (Birim eleman özelliği)
- $W \Delta W = \emptyset$  (Ters eleman özelliği)
- $W \Delta W' = W' \Delta W = E$
- $(W \Delta Y) \Delta (Y \Delta Z) = W \Delta Z$
- $W' \Delta Y' = W \Delta Y$
- $W \Delta Y = W \Delta Z \Rightarrow Y = Z$  (Kısaltma kuralı)
- $W \Delta Y \subseteq W \cup Y$
- $W \Delta Y = \emptyset \Leftrightarrow W = Y$

- $W \subseteq Y \Rightarrow W \Delta Y = Y - W$
- $W \Delta (W \cap Y) = W - Y$
- $W \cup Y = (W \Delta Y) \cup (W \cap Y)$
- $W \cap (Y \Delta Z) = (W \cap Y) \Delta (W \cap Z)$  (Kesişimin simetrik fark işlemi üzerine soldan dağılıması)
- $(W \Delta Y) \cap Z = (W \cap Z) \Delta (Y \cap Z)$  (Kesişimin simetrik fark işlemi üzerine sağdan dağılıması)

(Hacısalıoğlu, 2007: 43-62; Nesin, 2019: 7-59, Karaçay, Eş ve İbrahimoglu, 2017: 61-71).

### 2.1.5. Tümleyen işlemi

$W$  bir küme olmak üzere, evrensel kümede olup,  $W$  de olmayan elemanların kümesine  $W$  nin tümleyeni denir ve  $W'$  ile gösterilir. O halde:

$$W' = \{x: x \notin W\} = \{x \in E: x \notin W\} = E - W$$

Tümleyen işleminin özellikleri aşağıda verilmiştir.

- $W \cup W' = E$  ve  $W \cap W' = \emptyset$
- $E' = \emptyset$  ve  $\emptyset' = E$
- $(W')' = W$
- $W \Delta E = E \Delta X = W'$
- $(W \cup Y)' = W' \cap Y'$  (De Morgan Kuralı)
- $(W \cap Y)' = W' \cup Y'$  (De Morgan Kuralı)

(Nesin, 2019: 7-59; Hacısalıoğlu, 2007: 43-62, Özer, Çoker, Taş, 1999:38-50).

## 2.2. Cebirsel Yapılar

2.2.1. Tanım  $W$  boş olmayan bir küme olmak üzere

$$\star: W \times W \rightarrow W$$

fonksiyonuna,  $W$  kümesi üzerinde bir (ikili) işlem denir (Bayraktar, 2006:87).  $W$  boş olmayan bir küme olmak üzere,

$$\star: W \rightarrow W$$

fonksiyona birli işlem denir. Birli işlemler bir değişkenli fonksiyon iken, ikili işlemler iki değişkenli fonksiyondur (Hacısalıhoğlu, 2007: 163). Herhangi bir kümede tanımlanan işlem/işlemler bu küme ile birlikte cebirsel yapı (matematiksel yapı/matematiksel sistem) oluşturur (Hacısalıhoğlu, 2007:181). Cebirsel yapılar, matematiksel yapı ya da matematiksel sistem olarak da bilinmektedir. Cebirde en bilinen cebirsel yapılar bir işlemli olan grup; iki işlemli olan halka ve cisimdir. Cebirin amacı, cebirsel yapıları sınıflandırmak olup, bu bağlamda matematikte yapılan en önemli işlemlerden biri bir kümede tanımlanan bağıntı işlemin özelliklerini incelemektir (Hacısalıhoğlu, 2007: 181).

2.2.2. Tanım  $G$  boş olmayan bir küme ve  $\star$  bu küme üzerinde bir ikili işlem ise aşağıdaki şartları sağlayan  $(G, \star)$  cebirsel yapısına bir grup denir.

$$G_1) \forall a, b, c \in G \text{ için } (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$$

$G_2)$  Öyle bir  $e \in G$  vardır ki  $\forall a \in G$  için  $a \star e = e \star a = a$  olmalıdır ( $e$  elemanına  $G$ 'nin birim elemanı denir).

$G_3)$   $e$ ,  $G$  nin birim elemanı olmak üzere,  $G$  kümesindeki her bir  $a$  elemanı için  $a \star a' = a' \star a = e$  olacak şekilde bir tek  $a' \in G$  vardır ( $a'$  elemanına  $a$  elemanının tersi denir).

Burada;

- $(G_1)$  şartını sağlayan  $(G, \star)$  cebirsel yapısına yarı grup denir.
- $(G_1)$  ve  $(G_2)$  şartlarını sağlayan  $(G, \star)$  cebirsel yapısına monoid denir.
- $\forall a, b \in G$  için  $a \star b \in G$  şartını sağlayan  $(G, \star)$  grubuna grupoid denir.

$\forall a, b \in G$  için  $a \star b = b \star a$  şartını sağlayan  $(G, \star)$  grubuna ise değişmeli grup denir (Taşcı, 2007: 108-118) . Her değişmeli grubun bir grup; her grubun bir monoid, her monoidin bir yarıgrup; her yarıgrupun bir grupoid olduğu açıktır.

$(T, \star)$  bir grupoid olsun.  $\forall t \in T$  için  $e \star t = t$  olacak şekilde  $e \in T$  var ise,  $e$  elemanına  $T$  nin sol birim elemanı;  $t \star e = t$  olacak şekilde  $e \in T$  varsa,  $e$  elemanına  $T$  nin sağ birim elemanı denir. Birim eleman hem sağ birim, hem de sol birimdir ve tektir.  $(T, \star)$ , birim elemanı  $e$  olan bir cebirsel yapı olsun.  $t \in T$  için  $t \star t' = e$  olacak şekilde  $t' \in T$  var ise,  $t'$  elemanına  $t$  elemanının sol ters elemanı;  $t \star t' = e$  olacak şekilde  $t' \in T$  varsa,  $t'$  elemanına  $t$  elemanının sağ tersi denir.  $t$  elemanının tersi, hem sağ ters, hem de sol terstir ve tektir.  $\forall t \in T$  için,  $y \star k = y$

olacak şekilde  $y \in T$  varsa,  $y$  elemanına  $T$  nin sol yutan elemanı;  $t \star y = y$  olacak şekilde  $y \in T$  varsa,  $y$  elemanına  $T$  nin sağ yutan elemanı denir. Yutan eleman hem sağ yutan, hem de sol yutan elemandır ve tektir (Kilp, Knauer and Mikhalev, 2001).

2.2.3. Tanım  $(S, \star)$  bir cebirsel yapı olsun.  $s \in S$  için,  $s^2 = s$  ise  $s$  elemanına idempotent eleman denir.  $\forall s \in S$  için,  $s^2 = s$  ise,  $(S, \star)$  cebirsel yapısına idempotentir denir. İdempotent yarı gruba bant; idempotent ve değişmeli yarıgruba yarı kafes; idempotent ve değişmeli monoide sınırlı yarı kafes denir (Clifford, 1954).

Bir monoidin birim elemanı tek olmasına rağmen bir yarıgrup/grupoid, bir veya birden çok sol birime sahip olabilir; fakat birden çok sol birime sahip ise, sağ birim elemanı yoktur, dolayısıyla birim elemanı yoktur. Benzer şekilde, bir yarıgrup/grupoid, bir veya birden çok sağ birime sahip olabilir; fakat birden çok sağ birime sahip ise, sol birim elemanı yoktur, dolayısıyla birim elemanı yoktur (Clifford, 1954).

Benzer şekilde, bir grupta her elemanın tersi tek olmasına rağmen, bir monoidde bir elemanın bir veya birden çok sol tersi olabilir; fakat o eleman birden çok sol terse sahip ise, sağ terse sahip değildir; dolayısıyla ters elemana sahip değildir. Benzer şekilde bir monoidde bir elemanın bir veya birden çok sağ tersi olabilir; fakat o eleman birden çok sağ terse sahip ise, sol terse sahip değildir; dolayısıyla ters elemana sahip değildir (Clifford, 1954).

2.2.4. Teorem  $G$  boştan farklı bir küme ve  $\star$ ,  $G$  de birleşme özelliğini sağlayan bir küme olsun.  $\forall x \in G$  için  $e \star x = x$  olacak şekilde  $e \in G$  var (sol birim) ve  $\forall x \in G$  için  $x \star e = x$  olacak şekilde  $\exists x' \in G$  var ( $x$  elemanının sol tersi) ise bu durumda  $(G, \star)$  bir gruptur (Çallıalp, 2011: 72-73). Burada, benzer teorem sağ birim ve sağ ters için de yazılabilir.

2.2.5. Tanım  $H$  boştan farklı bir küme, “+” ve “ $\star$ ”  $H$  kümesi üzerinde tanımlı birer ikili işlem olsun.  $(H, +, \star)$  cebirsel yapısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa  $(H, +, \star)$  üçlüsüne bir halka denir.

- i.  $(H, +)$  değişmeli bir gruptur.
- ii.  $(H, \star)$  yarıgruptur.

iii.  $\forall x, y, z \in H$  için  $x \star (y + z) = x \star y + x \star z$  ve  $(x + y) \star z = x \star z + y \star z$

$(H, +, \star)$  halkası kısaca  $H$  ile gösterilir.  $(H, +)$  nın birim elemanı  $0_H$  ile gösterilir ve  $H$  halkasının sıfırı denir.  $H$  halkası  $\forall x, y \in H$  için  $x \star y = y \star x$  şartını sağlıyorsa  $H$ 'a değişmeli halka denir.  $H$  halkasında  $\forall x \in H$  için,  $x \star e = e \star x = x$  olacak şekilde bir  $e \in H$  var ise,  $e$  ye  $H$  nin birim elemanı denir ve  $1_H$  ile gösterilir. Birim elemana sahip halkaya birimli halka denir (Bayraktar, 2006:177; Aydın ve Kandamar, 2013:231).

2.2.6. Tanım  $S$  boştan farklı bir küme, “+” ve “ $\star$ ”  $S$  kümesi üzerinde tanımlı birer ikili işlem olsun.  $(S, +, \star)$  cebirsel yapısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa  $(S, +, \star)$  üçlüsüne bir yarıhalka denir.

- i.  $(S, +)$  yarıgruptur.
- ii.  $(S, \star)$  yarıgruptur.
- iii.  $\forall x, y, z \in S$  için  $x \star (y + z) = x \star y + x \star z$  ve  $(x + y) \star z = x \star z + y \star z$

Her  $x, y \in S$  için,  $x + y = y + x$  ise  $S$  yarı halkasına toplamsal değişmeli yarıhalka; her  $x, y \in S$  için  $x \star y = y \star x$  ise  $S$  yarı halkasına çarpımsal değişmeli yarıhalka; her  $x \in S$  için,  $x \star 1 = 1 \star x = x$  olacak şekilde  $1 \in S$  varsa yani çarpımsal birimli yarıhalkaya birimli yarıhalka denir. Her  $x \in S$  için  $0 \star x = x \star 0 = 0$  ve  $0 + x = x + 0 = x$  olacak şekilde  $0 \in S$  varsa,  $0 \in S$  elemanına  $S$  yarıhalkasının sıfırı denir. Toplamsal değişmeli ve sıfırlı yarıhalkaya hemihalka denir (Vandiver, 1934).

2.2.7. Tanım  $N$  boştan farklı bir küme, “+” ve “ $\star$ ”  $N$  kümesi üzerinde tanımlı birer ikili işlem olsun.  $(N, +, \star)$  cebirsel yapısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa  $(N, +, \star)$  üçlüsüne bir (sağ) yakın-halka denir.

- i.  $(N, +)$  değişmeli olması gerekmeyen bir gruptur.
- ii.  $(N, \star)$  bir yarı gruptur.
- iii.  $\forall x, y, z \in N$  için  $(x + y) \star z = x \star z + y \star z$  (sağdan dağılma)

Eğer iii) şıkkı yerine,  $\forall x, y, z \in N$  için  $x \star (y + z) = x \star y + x \star z$  soldan dağılma sağlanırsa, bu şartları sağlayan  $(N, +, \star)$  üçlüsüne bir sol yakın-halka denir (Pilz, 1983:4).

2.2.8. Tanım S boştan farklı bir küme, “+” ve “\*” S kümesi üzerinde tanımlı birer ikili işlem olsun.  $(S, +, *)$  cebirsel yapısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa  $(S, +, *)$  üçlüsüne bir yakın yarıhalka denir.

- i.  $(S, +)$  yarıgruptur.
- ii.  $(S, *)$  yarıgruptur.
- iii. Her  $x, y, z \in S$  için  $(x+y) * z = x * z + y * z$  (Sağdan dağılma kuralı)

Eğer  $(S, +, *)$  nin toplamsal birimi olan 0, her  $x \in S$  için  $0 * x = 0$  (sol yutan) şartını sağlıyorsa,  $(S, +, *)$  (sağ) yakın yarıhalkasına sıfırlı (sağ) yakın yarıhalka denir.  $(S, +, *)$  sıfırlı (sağ) yakın yarı halkası, eğer her  $x \in S$  için  $x * 0 = 0$  (sol yutan) şartını da sağlıyorsa S’ye sıfır simetrik yakın yarı halka denir (Hoorn ve Rootselaar, 1967).

2.2.9. Tanım L boştan farklı bir küme, “ $\vee$ ” ve “ $\wedge$ ” L kümesi üzerinde tanımlı birer ikili işlem olsun.  $(L, \vee, \wedge)$  aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa,  $(L, \vee, \wedge)$  üçlüsüne bir kafes (latis) denir.

- i.  $(L, \vee)$  değişmeli, idempotent bir yarı grup (yarı kafes)
- ii.  $(L, \wedge)$  değişmeli, idempotent bir yarı grup (yarı kafes)
- iii. Her  $a, b, c \in L$  için,  $a \vee (a \wedge b) = a \wedge (a \vee b)$  (yutma kuralı)

Her iki işleme göre birim elemana sahip olan kafese sınırlı kafes denir. Sınırlı kafeste genellikle L nin  $\wedge$  işlemine göre birim elemanı 1 ile gösterilirken,  $\vee$  işlemine göre birim eleman 0 ile gösterilir. Sınırlı L kafesi, her  $a \in L$  için  $a \wedge a' = 0$  ve  $a \vee a' = 1$  olacak şekilde bir  $a'$  elamanına sahip ise L ye tümlenmiş kafes denir. Dağılma kuralları geçerli olan kafese dağılmalı kafes denir. Sınırlı, dağılmalı, aynı zamanda tümlemeli olan kafese Boole cebri denir. De Morgan yasalarına yani her  $x, y \in L$  için  $(x \vee y)' = x' \wedge y'$  ve  $(x \wedge y)' = x' \vee y'$  sahip kafese De Morgan cebiri denir. De Morgan cebiri her  $x, y \in L$  için  $x \wedge x' \leq y \vee y'$  şartını sağlıyorsa, Kleene cebiri denir.  $x \in L$  olmak üzere,  $x \wedge x^* = 0$  ve  $x \wedge y = 0$  olduğunda  $y \leq x^*$  ise  $x^*$  elemanına x in sözde tümleyeni denir.  $x^* \vee x^{**} = 1$  eşitliğine Stone özelliği denir. Stone özelliğini sağlayan sözde tümlenmiş dağılmalı kafese Stone cebiri denir (Birkhoff, 1967).

2.2.10. Tanım  $M$  boştan farklı bir küme, " $\oplus$ "  $M$  de bir ikili işlem ve " $*$ "  $M$  de bir birli işlem olsun.  $0$  herhangi bir  $x, y \in M$  için aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir sabit ise  $(M, \oplus, *, 0)$  yapısına bir MV-cebiridir denir.

- i.  $(M, \oplus, 0)$  değişmeli monoiddir.
- ii.  $(x^*)^* = x$
- iii.  $0^* \oplus x = 0^*$
- iv.  $(x^* \oplus y)^* \oplus y = (y^* \oplus x)^* \oplus x$

MV-cebirleri 1920 lerde , Lukasiewicz tarafından tanıtılan çok değerli (many valued) lojigi olan Lukasiewicz lojiginin cebirsel semantiğidir. MV-cebiri kavramı, sonsuz değerli Lukasiewicz önerme mantığının tamlık teoreminin cebirsel kanıtını sağlamak amacıyla Chang (1958) tarafından tanıtılmıştır.

2.2.11. Tanım  $X$  bir küme, " $*$ ",  $X$  üzerinde bir ikili işlem ve  $0$ ,  $X$  kümesinin bir elemanı olsun.  $(X; *, 0)$  üçlüsü için aşağıdaki koşullar sağlanırsa  $X$  e bir BCK-cebiri denir. Her  $x, y, z \in X$  için;

$$\text{BCI-1 } ((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$$

$$\text{BCI-2 } (x * (x * y)) * y = 0$$

$$\text{BCI-3 } x * x = 0$$

$$\text{BCI-4 } x * y = 0 \text{ ve } y * x = 0, x = y \text{ anlamına gelir.}$$

Bir BCI cebiri ek olarak aşağıdakileri sağlıyorsa BCK cebiri olarak adlandırılır:

$$\text{BCK-5 } 0 * x = 0.$$

Eğer her  $x \in X$  için  $x * 1 = 0$  olacak şekilde bir  $1 \in X$  elemanı varsa,  $X$ 'e sınırlı bir BCK cebiri denir. Bir  $x \in X$  elemanı BCK cebiri için,  $1 * (1 * x) = x$  koşulunu sağlıyorsa,  $x$ 'e involusyon denir. Küme teorisi ve matematiksel lojik kavramlarından ortaya çıkan, BCK-cebiri kavramı ilk olarak 1966 yılında Iseki (1966) tarafından ortaya atılmıştır.

### 2.3. Esnek Kümeler

Bu bölümde, esnek küme teorisiyle ilgili temel kavramlara yer verilecektir.

2.3.1. Tanım U evrensel küme, E parametreler kümesi,  $P(U)$  U'nun kuvvet kümesi ve  $W \subseteq E$  olarak verilsin. Bir  $(F, W)$  sıralı ikilisi U üzerinde esnek küme olarak adlandırılır. Burada F,

$$F: W \rightarrow P(U)$$

ile verilen bir fonksiyondur. Başka bir şekilde ifade edecek olursak, U üzerinde bir esnek küme, U evreninin alt kümelerinin parametrize edilmiş bir ailesidir. (Molodtsov, 1999)

$(F, W)$  esnek kümesi gösterimi, bazı kaynaklarda  $F_W$  şeklinde gösterilse de biz Molodtsov (1999) ve Maji ve diğerleri (2003) çalışmasında da kullanılan esnek kümenin  $(F, W)$  gösterimini tercih edeceğiz. Molodtsov tarafından ortaya atılan bu tanım, Çağman ve Enginoğlu (2010) tarafından yeniden düzenlenerek aşağıdaki tanımı vermişlerdir.

2.3.2. Tanım U başlangıç evrensel kümesi, E parametreler kümesi;  $P(U)$ , U'nun kuvvet cümlesi ve  $W \subseteq E$  olsun.  $\forall \alpha \notin W$  için  $F(\alpha) = \emptyset$  olacak şekilde  $F: E \rightarrow P(U)$  fonksiyonuna, U üzerinde bir esnek küme denir. O halde bir  $(F, W)$  esnek kümesi

$$(F, W) = F_W = \{(\alpha, F(\alpha)): \alpha \in E, F(\alpha) \in P(U)\}$$

biçiminde sıralı ikililerin kümesidir. Biz bu tez boyunca, aslına sadık kalarak ilk olarak Molodtsov (1999) tarafından verilen esnek küme tanımını kullanacağız.

E parametreler kümesinin bir W alt kümesi ile birden fazla esnek küme tanımlanabilir. Bu durumda bu esnek kümeler  $(F, W)$ ,  $(G, W)$ ,  $(H, W)$  vb. şeklinde gösterilecektir. Ayrıca, E parametreler kümesinin W, Y, Z vb. farklı alt kümeleri ile de birden fazla esnek küme tanımlanabilir. Bu durumda esnek kümeler  $(F, W)$ ,  $(F, Y)$ ,  $(F, Z)$  vb şeklinde olur (Maji ve diğerleri, 2003).

U üzerindeki tüm esnek kümelerin kümesi (parametre kümesi ne olursa olsun)  $S_E(U)$  ile gösterilecek olup; W, E kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere, sabit W parametre kümesi ile U üzerindeki tüm esnek kümelerin kümesi,  $S_W(U)$  ile gösterilecektir. Yani,  $S_W(U)$  kümesinde, parametre kümesi sadece W olan esnek kümeler yer alırken;  $S_E(U)$  kümesinde, parametre kümesi herhangi bir küme olan U üzerindeki tüm esnek kümeler yer alabilir.  $S_W(U)$  kümesinin  $S_E(U)$  kümesinin alt kümesi olduğu açıktır.

Tanım kümesi boş küme olacak şekildeki,  $F:\emptyset \rightarrow K$  fonksiyonuna boş fonksiyon denildiği bilinmektedir. Esnek küme de bir fonksiyon olduğundan, tanım kümesi  $\emptyset$  alınarak,  $F:\emptyset \rightarrow P(U)$  olacak şekilde bir esnek küme tanımlanabileceği aşikardır. Böyle esnek kümeye, boş esnek küme denilir ve  $\emptyset_\emptyset$  ile gösterilir.  $\emptyset_\emptyset$ , parametre kümesi boş küme olan tek esnek kümedir (Ali ve diğerleri, 2011). Bu tez boyunca  $(F,A)=\emptyset_\emptyset$  diye belirtilmediği sürece  $A=\emptyset$  alınmayacaktır; yani aksi belirtilmediği sürece, esnek kümelerin tümü boş esnek küme olan  $\emptyset_\emptyset$  den farklıdır.

2.3.3. *Örnek* U satın almak için üzerinde düşünülen araçların bir kümesi, E'nin de parametrelerin kümesi olduğunu kabul edelim. Her bir parametre bir kelime veya bir cümledir.

$$E=\{\text{güzel, konforlu, ucuz, geniş, ekonomik}\}$$

olsun. Bu durumda bir esnek küme tanımlamak, “konforlu araç, ekonomik araç vb.” oluşturmak demektir.  $(F,E)$ ; esnek kümesi Mehmet Bey'in almayı düşündüğü “araçların çekiciliği” olarak tanımlanır. U evrensel kümesinde aşağıdaki şekilde verilen yedi tane olduğunu düşünelim.

$$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}, E = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\} \text{ ve } W=\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$$

olsun. Burada,  $\alpha_1$  "güzel" parametresini;  $\alpha_2$  "konforlu" parametresini;  $\alpha_3$  "ucuz" parametresini;  $\alpha_4$  "geniş" parametresini;  $\alpha_5$  "ekonomik" parametresini temsil etsin. Buna göre araç almaya gelen Mehmet Bey için  $(F,W)$  esnek kümesini oluşturalım. Bunun için önce verilen parametrelere göre araçları sınıflandıralım:  $F(\alpha_1) = \{u_3, u_4\}$ ,  $F(\alpha_3) = \{u_2, u_3, u_4\}$ ,  $F(\alpha_4)=U$ . Bu durumda esnek kümemiz,

$$(F, W) = \{(\alpha_1, \{u_3, u_4\}), (\alpha_3, u_2, u_3, u_4), (\alpha_4, U)\}$$

şeklinde olur.

2.3.4. Tanım  $(F,W)$ , U üzerinde bir esnek küme olsun. Her  $w \in W$  için;  $F(w)=\emptyset$  ise  $(F,T)$  esnek kümesine T ye göre boş esnek küme denir ve  $\emptyset_T$  ile gösterilir.  $(F,E)$ , U üzerinde bir

esnek küme olsun. Her  $w \in E$  için;  $F(w)=\emptyset$  ise  $(F,E)$  esnek kümesine  $E$  ye göre boş esnek küme denir ve  $\emptyset_E$  ile gösterilir (Ali ve diğerleri, 2009).

2.3.5. Tanım  $(F,W)$ ,  $U$  üzerinde bir esnek küme olsun. Her  $w \in W$  için;  $F(w)=U$  ise  $(F,W)$  esnek kümesine  $W$  ye göre mutlak esnek küme denir ve  $U_W$  ile gösterilir.  $(F,E)$ ,  $U$  üzerinde bir esnek küme olsun. Her  $x \in E$  için;  $F(w)=U$  ise  $(F,E)$  esnek kümesine  $E$  ye göre tam esnek küme denir ve  $U_E$  ile gösterilir (Ali ve diğerleri, 2009).

Boş esnek küme ve mutlak esnek küme tanımı ilk olarak Maji ve diğerleri (2003) tarafından verilmiş ve  $(F,A)$  boş esnek kümesi  $\Phi$  ile;  $(F,A)$  mutlak esnek kümesi  $\tilde{A}$  olarak gösterilmiştir. Fakat, bu tanımların ve gösterimlerin matematiksel olarak birtakım problemler içerdiği, Ali ve diğerleri (2009), Yang (2008) ve Sezgin ve Atagün (2010) tarafından gösterilmiştir. Zira, boş esnek küme ve mutlak evrensel küme tanımında, esnek kümenin parametre kümesi belirleyici olmadığı sürece, teorem ve önermelerde matematiksel pek çok sorunlu durum ortaya çıkmıştır ve bu sorunlu durumlar, Ali ve diğerleri (2009) tarafından detaylı şekilde gösterilmiştir.

Bu problemli durumların önüne geçmek için, Ali ve diğerleri (2009), boş esnek küme ve mutlak esnek küme tanımlarını güncelleyerek, esnek kümenin parametre kümesine göre boş esnek küme ve evrensel esnek küme tanımlarını esnek küme literatüre kazandırmıştır. Böylelikle, esnek küme işlemleri ile boş esnek küme ve evrensel esnek küme ile ilgili tüm problemli teorem ve önermelerin matematiksel olarak doğru halleri birtakım önemli çalışmalarda (Ali ve diğerleri, 2009; Sezgin ve Atagün, 2010; Ali ve diğerleri, 2010) verilmiştir.

Esnek küme literatüründe yer alan, ilk esnek alt küme tanımı Maji ve diğerleri (2003) tarafından verilmiştir. Bu tanım aşağıda mevcuttur:

2.3.6. Tanım  $(F,W)$  ve  $(G,Y)$ ,  $U$  üzerinde esnek kümeler olsun. Eğer,

i)  $W \subseteq Y$  ve

ii)  $\forall w \in W$  için  $F(w)=G(w)$

ise  $(F,W)$  ya  $(G,Y)$  nin esnek alt kümesidir denir  $(F,W) \subseteq (G,Y)$  gösterilir.

$(G,Y)$ ,  $(F,W)$  nin esnek alt kümesi ise  $(F,W)$  ye  $(G,Y)$  nin esnek üst kümesidir denir ve  $(F,W) \widetilde{\subseteq} (G,Y)$  ile gösterilir.  $(F,W) \widetilde{\subseteq} (G,Y)$  ve  $(G,Y) \widetilde{\subseteq} (F,W)$  ise  $(F,W)$  ve  $(G,Y)$  esnek kümelerine (esnek) eşit kümeler denir (Maji ve diğerleri,2003).

Sezgin ve Atagün (2010) çalışmasında, esnek küme işlemlerinin özelliklerini, Maji ve diğerleri (2003) esnek alt küme tanımına göre incelemiş olsa da, Pei ve Miao (2005) çalışmasındaki esnek alt küme tanımı klasik kümeler ile daha ilişkili olduğundan, bu çalışma boyunca Pei ve Miao (2005) çalışmasındaki esnek alt küme tanımı kullanılacaktır.

2.3.7. Tanım  $(F,W)$  ve  $(G,Y)$ ,  $U$  üzerinde esnek kümeler olsun. Eğer,  $W \subseteq Y$  ve her  $w \in W$  için  $F(w)=G(w)$  ise  $(F,W)$  ye  $(G,Y)$  nin esnek alt kümesidir denir  $(F,W) \widetilde{\subseteq} (G,Y)$  gösterilir. Eğer  $(G,Y)$ ,  $(F,W)$  nin esnek alt kümesi ise  $(F,W)$  ye  $(G,Y)$  nin esnek üst kümesidir denir ve  $(F,W) \widetilde{\supseteq} (G,Y)$  ile gösterilir. Eğer  $(F,W) \widetilde{\subseteq} (G,Y)$  ve  $(G,Y) \widetilde{\subseteq} (F,W)$  ise  $(F,W)$  ve  $(G,Y)$  esnek kümelerine esnek eşit kümeler denir (Pei ve Maio, 2005).

Literatüre, birtakım farklı ve güncel esnek alt küme ve esnek eşit küme tanımları da kazandırılmış olup, bu tanımlar ve bu tanımlar arasındaki ilişkiler için Qin ve Hong, 2010; Jun ve Yang, 2011; Liu, Feng ve Jun ,2012; Feng ve Yongming, 2013; Abbas, Ali ve Romaguera, 2014; Mujahid Abbas, Ali ve Romaguerac, 2017; Al-shami, 2019; Alshasi ve El-Shafei, 2020; Ali, Saleem, Sundus ve Khaleeq, 2022 çalışmalarından faydalanılabilir.

Bir esnek kümenin tümleyeni kavramı, ilk olarak Maji ve diğerleri (2003) tarafından literatüre kazandırılmıştır. Bu tanımda  $(F,A)$  esnek kümesinin tümleyeni alındığında,  $(F,A)$  esnek kümesinin parametre kümesi olan  $A$  kümesinin de değili alınıyor; dolayısıyla esnek kümenin parametre kümesi değişiyordu. Bunun ise De Morgan kuralları gibi bazı önemli hususlarda, problemleri durumlara yol açtığı Ali ve diğerleri (2009) tarafından gösterilmiştir. Bu karışıklığın önüne geçmek için, Ali ve diğerleri (2009) bir esnek kümenin bağlı tümleyeni kavramını literatüre kazandırmıştır. Bu tanımda ise, esnek kümenin tümleyeni alındığında, esnek kümenin parametre kümesi korunma olup, bu tanım Maji ve diğerleri (2003) de yer alan esnek tümleyen kavramından daha işlevsel olduğundan tercih edilir hale gelmiştir. Karışıklığa yol açmamak için, Ali ve diğerleri (2009) çalışmasında, Maji ve diğerleri (2003) de yer alan esnek tümleyeni negatif (sahte) tümleyen olarak adlandırmayı; güncelledikleri esnek tümleyen kavramını ise esnek bağlı tümleyen (kısaca esnek

tümleyen) olarak adlandırmışlardır. Aşağıda, Ali ve diğerleri (2009) tarafından verilen ve tezimiz boyunca kullanacağımız (bağıl) tümleyen kavramı verilmektedir.

2.3.8. Tanım  $(F, W)$ ,  $U$  üzerinde bir esnek küme olsun.  $(F, W)$  esnek kümesinin esnek (bağıl) tümleyeni  $(F, W)^r = (F^r, W)$  ve her  $w \in W$  için;  $F^r(w) = U - F(w)$  şeklinde tanımlanır (Ali ve diğerleri, 2009).

Buradan,  $(\emptyset_A)^r = U_A$ ,  $(U_A)^r = \emptyset_A$ ,  $(\emptyset_E)^r = U_E$ ,  $(U_E)^r = \emptyset_E$ ,  $(\emptyset_\emptyset)^r = \emptyset_\emptyset$  (Bağıl tümleyende parametre kümesi değişmediği ve parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme  $\emptyset_\emptyset$  olduğu için)  $((F, A)^r)^r = (F, A)$ . Ayrıca,  $\emptyset_A \subseteq (F, A) \subseteq U_A \subseteq U_E$  olduğu açıktır (Ali ve diğerleri, 2011).

Çağman (2021) kapsayıcı ve dışlayıcı tümleyen şeklinde iki yeni tümleyen tanımlamıştır. + ve  $\theta$  sırasıyla, kapsayıcı ve dışlayıcı tümleyenleri göstermek ve  $W$  ve  $Y$  iki küme olmak üzere, bu ikili işlemler,  $W + Y = W' \cup Y$ ,  $W \theta Y = W' \cap Y'$  olarak tanımlanmıştır. Sezgin ve diğerleri (2023c), bu iki işlem arasındaki ilişkileri incelemiş ve ayrıca bunun gibi üç yeni ikili işlem tanımlayıp, bunların birbirleriyle olan ilişkisini incelemiştir.  $W$  ve  $Y$  iki küme olmak üzere  $W * Y = W' \cup Y'$ ,  $W \gamma Y = W' \cap Y$ ,  $W \lambda Y = W \cup Y'$ .

$\otimes$  kümelerdeki işlemleri göstermek üzere ( $\otimes$  burada  $\cap$ ,  $\cup$ ,  $-$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda$ ,  $\gamma$ ,  $\theta$ ,  $+$ ,  $*$  gibi küme işlemlerini göstermek üzere) esnek kümelerdeki kısıtlanmış işlemler, genişletilmiş işlemler, tümleyenli genişletilmiş işlemler, esnek ikili parçalı işlemler, tümleyenli esnek ikili parçalı işlemler aşağıda verilen genellenmiş tanımlar ile genel formda verilebilir:

2.3.9. Tanım  $(F, W)$  ve  $(G, Y)$ ,  $U$  üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin  $(F, W) \otimes_{\mathfrak{R}} (G, Y)$  ile gösterilen kısıtlanmış  $\otimes$  işlemi,  $Z = W \cap Y$  ve  $\forall w \in Z$  için  $H(w) = F(w) \otimes G(w)$  olmak üzere  $(F, W) \otimes_{\mathfrak{R}} (G, Y) = (H, Z)$  olarak tanımlanır. Burada,  $Z = W \cap Y = \emptyset$  ise  $(F, W) \otimes_{\mathfrak{R}} (G, Y) = \emptyset_\emptyset$  (Ali ve diğerleri, 2009; Sezgin ve Atagün, 2011; Aybek, 2024).

2.3.10. Tanım  $(F, W)$  ve  $(G, Y)$ ,  $U$  üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin genişletilmiş  $\otimes$  işlemi  $(H, Z)$ 'dir. Burada,  $Z = W \cup Y$  ve  $\forall w \in Z$  için,

$$H(w) = \begin{cases} F(w), & w \in W - Y \\ G(w), & w \in Y - W \\ F(w) \otimes G(w), & w \in W \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır ve  $(F, W) \otimes_\varepsilon (G, Y) = (H, Z)$  şeklinde yazılır (Maji ve diğerleri, 2003; Ali ve diğerleri, 2009; Sezgin ve diğerleri, 2019; Stojanovic, 2021; Aybek, 2024).

2.3.11. Tanım  $(F, W)$  ve  $(G, Y)$ ,  $U$  üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin tümleyenli genişletilmiş  $\otimes$  işlemi  $(H, Z)$ 'dir. Burada  $Z = W \cup Y$  ve  $\forall w \in Z$  için,

$$H(w) = \begin{cases} F'(w), & w \in W - Y \\ G'(w), & w \in Y - W \\ F(w) \otimes G(w), & w \in W \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır ve  $(F, W) \overset{*}{\otimes}_\varepsilon (G, Y) = (H, Z)$  şeklinde yazılır (Saralioğlu, 2024; Demirci, 2024; Akbulut, 2024).

2.3.12. Tanım  $(F, W)$  ve  $(G, Y)$ ,  $U$  üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin esnek ikili parçalı  $\otimes$  işlemi  $(H, W)$ 'dir ve  $\forall w \in W$  için,

$$H(w) = \begin{cases} F(w), & w \in W - Y \\ F(w) \otimes G(w), & w \in W \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır ve  $(F, W) \overset{\sim}{\otimes}_\varepsilon (G, Y) = (H, W)$  şeklinde gösterilir (Eren, 2019; Sezgin ve Yavuz, 2023a; Sezgin ve Çalışıcı, 2024; Yavuz, 2024).

2.3.13. Tanım  $(F, W)$  ve  $(G, Y)$ ,  $U$  üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin tümleyenli esnek ikili parçalı  $\otimes$  işlemi  $(H, W)$ 'dir ve  $\forall w \in W$  için,

$$H(w) = \begin{cases} F'(w), & w \in W - Y \\ F(w) \otimes G(w), & w \in W \cap Y \end{cases}$$

ile tanımlanır ve  $(F, W) \overset{*}{\sim} (G, Y) = (H, W)$  şeklinde gösterilir (Sezgin ve Demirci, 2023; Sezgin ve Aybek, 2023; Sezgin ve diğerleri, 2023a; Sezgin ve diğerleri, 2023b; Sezgin ve Atagün, 2023; Sezgin ve Yavuz, 2023b; Sezgin ve Çağman, 2024b; Sezgin ve Sarılioğlu, 2024).

### 3. KISITLANMIŞ VE GENİŞLETİLMİŞ KESİŞİM İŞLEMLERİ

1999 yılında ortaya atılmış ve henüz 24 yıllık bir geçmişe sahip olan esnek küme teorisinde, pek çok esnek kesişim işlemi tanımlandığını ve bunlar arasında birtakım farklılıklar olduğunu ve bazı tanımların esasen çok da kullanışlı olmamasından kaynaklı artık kullanımının tercih edilmediğini hatırlatarak bu bölüme başlamakta fayda görüyoruz. Bu açıdan ilk olarak, literatürde var olan esnek kesişim işlemlerini kronolojik sıra ile vermeyi ve bu tanımların ne gibi eksik yönlerinin olduğunu belirtmenin, çalışmanın anlaşılır olması açısından katkı sağlayacağını düşünüyoruz.

Esnek kümelerin kesişimi ilk olarak Maji ve diğerleri (2003) yılında şu şekilde tanımlanmıştır:  $(F,A)$  ve  $(G,B)$ ,  $U$  üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin  $(F,A) \tilde{\cap} (G,B)$  ile gösterilen kesişim işlemi  $C=A \cap B$  ve  $\forall \alpha \in C$  için  $H(\alpha) = F(\alpha)$  veya  $H(\alpha) = G(\alpha)$  olmak üzere  $(F,A) \tilde{\cap} (G,B) = (H,C)$  ile tanımlanır (Maji ve diğerleri, 2003). Bu tanımda,  $\alpha \in C$  için  $F(\alpha) = G(\alpha)$  olduğu iddia edilmiş olsa da, böyle bir durumun olmak zorunda olmadığı esnek kümenin tanımından ve doğasından açıktır. Dolayısıyla bu tanımın problemli olduğu, Pei ve Miao (2005) ve Ali ve diğerleri (2009) çalışmalarında detaylı şekilde gösterilmiştir.

Pei ve Miao (2005) daha işlevsel olacağını düşündüğü yeni bir esnek kesişim işlemini ise şu şekilde tanımlamıştır.  $(F,A)$  ve  $(G,B)$ ,  $U$  üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin  $(F,A) \cap (G,B)$  ile gösterilen kısıtlanmış kesişim işlemi  $C=A \cap B$  ve  $\forall \alpha \in C$  için  $H(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$  olmak üzere  $(F,A) \cap (G,B) = (H,C)$  ile tanımlanır (Pei ve Miao, 2005). Bu tanımda ise  $A \cap B = \emptyset$  durumunda  $(F,A) \cap (G,B)$  işlem sonucunun ne olacağı üzerinde durulmamıştır ve esnek kesişim işleminin gösterimi için klasik kümelerdeki kesişim işlemi gösterimi tercih edilmiştir.

Feng ve diğerleri (2008) ikili-kesişim işlemi olarak adlandırılan kesişim işlemini şu şekilde tanımlamıştır:  $(F,A)$  ve  $(G,B)$ ,  $U$  üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin ikili-kesişimi  $C=A \cap B$  ve  $\forall x \in C$  için  $H: C \rightarrow P(U)$  dönüşümü  $H(x) = F(x) \cap G(x)$  olacak şekilde tanımlıdır ve  $(F,A) \tilde{\cap} (G,B) = (H,C)$  şeklinde gösterilir. Bu tanımda da yine  $A \cap B = \emptyset$  durumunda  $(F,A) \tilde{\cap} (G,B)$  işlem sonucunun ne olacağı üzerinde durulmamıştır.

Ali ve diğerleri (2009), kısıtlanmış keşim işlemi olarak adı verilen esnek küme işlemini şu şekilde tanımlamıştır:  $(F, A)$  ve  $(G, B)$ ,  $U$  üzerinde  $A \cap B \neq \emptyset$  olacak şekilde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin  $(F, A) \cap (G, B)$  ile gösterilen kısıtlanmış keşim işlemi  $C = A \cap B$  ve  $\forall \alpha \in C$  için  $H(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$  olmak üzere  $(F, A) \cap (G, B) = (H, C)$  ile tanımlanır. Bu tanımın, Feng ve diğerleri (2008) tanımından farklı olarak, “ $A \cap B \neq \emptyset$  olacak şekilde iki esnek küme” şartı ile bu şart bir gerek şartmışçasına tanıma başlanmış olup, üstelik  $A \cap B = \emptyset$  durumunda  $(F, A) \cap (G, B)$  işlem sonucunun ne olacağı üzerinde durulmamıştır.

Ali ve diğerleri (2011), Ali ve diğerleri (2009) çalışmasında verilen kısıtlanmış esnek keşim işlemi için, iki esnek kümenin parametre kümesinin keşimlerinin boş olması durumunu da değerlendirmiş, kısıtlanmış keşim işleminin tanımı şu şekilde güncellemiştir:  $(F, A)$  ve  $(G, B)$ ,  $U$  üzerinde  $A \cap B \neq \emptyset$  olacak şekilde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin  $(F, A) \cap_R (G, B)$  ile gösterilen kısıtlanmış keşim işlemi  $C = A \cap B$  ve  $\forall \alpha \in C$  için  $H(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$  olmak üzere  $(F, A) \cap_R (G, B) = (H, C)$  ile tanımlanır. “Burada,  $A \cap B = \emptyset$  ise, parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme  $\emptyset_\emptyset$  olacağından,  $(F, A) \cap_R (G, B) = \emptyset_\emptyset$  olur.” bilgi notunu da ekleyerek, parametre kümelerinin keşiminin boş olması durumunda da kısıtlanmış keşim işlem sonucunun ne olacağı hakkında ilk defa bilgi veren çalışmaya imza atmışlardır. Üstelik yine bu çalışmada, kısıtlanmış keşim işleminin en kullanışlı gösterimi olan “ $\cap_R$ ” simgesini kullanmayı tercih etmişlerdir. Burada keşim simgesinin altına yazı olan “R” harfi, İngilizcede “kısıtlanmış” anlamına gelen “restricted” kelimesi ile de uyumlu ve anlamlı bir bütün oluşturmuştur. Zaten, sonraki esnek küme işlemleri çalışmalarında da kısıtlanmış esnek küme işlemleri için, bu gösterim formu tercih edilmiştir.

En güncel ve kullanışlı tanım, Ali ve diğerleri (2011) tarafından verilen kısıtlanmış keşim tanımı olmakla birlikte, Ali ve diğerleri (2011) tarafından verilen tanımda  $(F, A)$  ve  $(G, B)$ ,  $U$  üzerinde iki esnek küme olmak üzere, bu iki esnek kümenin kısıtlanmış keşiminin tanımlı olması için  $A \cap B \neq \emptyset$  şartı yine gerek şart olarak tanıma konulmuştur; oysa ki  $A \cap B = \emptyset$  ise de yine bu esnek kümelerin kısıtlanmış keşim işlemi tanımlı olup, bu durumda  $(F, A) \cap_R (G, B) = \emptyset_\emptyset$  olur. Yani, kısıtlanmış keşimi alınacak iki esnek kümenin parametre kümelerinin keşimi ister boş küme olsun, ister boş kümeden farklı olsun, her durumda iki esnek kümenin kısıtlanmış keşimi tanımlı olup; kısıtlanmış keşimi alınacak

iki esnek kümenin parametre kümelerinin kesişiminin boştan farklı olması, bu iki esnek kümenin kısıtlanmış kesişimlerinin alınabilmesi için bir gerek şart asla değildir.

Bu anlamda, kronolojik sıra açısından da bakıldığında, esnek kümelerde kısıtlanmış kesişim işlemi düşüncesi ilk olarak Pei ve Miao (2005) tarafından ortaya atılmış olsa da bu tanımda, Ali ve diğerleri (2011) çalışmasındaki kısıtlanmış kesişimi alınacak esnek kümelerin parametre kümelerinin kesişiminin boş olması durumunu da değerlendirilerek, kısıtlanmış kesişim için bu bölümde güncellenmiş tanım olan Tanım 3.1.1 verilecek ve kullanılacaktır.

Bu bölümde, literatürde var olan ve yukarıdaki hususları göz önüne alarak güncellediğimiz kısıtlanmış kesişim ve genişletilmiş kesişim adı verilen esnek küme işlemlerinin cebirsel özellikleri klasik kümelerdeki kesişim işleminin özellikleri ile karşılaştırmalı olarak incelenmiş; sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde ve  $S_E(U)$  kümesi üzerinde bu işlemlerin hangi cebirsel yapıları oluşturduğu görmek için dağılma kurallarına bakılarak, diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkisi incelenmiştir.

Burada şu hususu belirtmekte fayda görüyoruz: Kısıtlanmış kesişim işlemi literatürde her ne kadar bu bölümde detaylı olarak belirttiğimiz önemli hususlar göz önünde bulundurulmadan verilmiş olsa da, kısıtlanmış ve genişletilmiş kesişim işlemleri, daha önceden tanımlanmış işlemler olduğu için, bu bölümde yer alan bazı özellikler daha önceki çalışmalarda (Maji ve diğerleri, 2003; Pei ve Miao, 2005; Feng ve diğerleri, 2008; Ali ve diğerleri 2009; Qin ve Hong, 2010; Ali ve diğerleri, 2011; Sezgin ve Atagün, 2011) verilmiştir. Fakat, çalışmaların çoğunda bu özelliklerin pek çoğu, ispatsız ve/veya detaysız ispatlı verilmiştir. Bu çalışmada ise fonksiyon eşitliğine dayalı ispatlar düzenli bir şekilde verilmiş olup; daha önceki çalışmalarda yer verilmemiş olan özellikle Pei ve Miao (2005) esnek alt küme tanımı ve kısıtlanmış/genişletilmiş kesişim işlemleri arasındaki ilişkiler, klasik kümelerdeki karşılıkları ile ilk defa bu çalışmada verilmiş ve yine detaylı ispatları ile sunulmuştur. Üstelik temel esnek küme işlemleri olan kısıtlanmış ve genişletilmiş kesişim işlemlerine ait tüm özelliklerin, ispatlarıyla birlikte bir arada olması ve esnek kümelerin kısıtlanmış kesişimi için daha önceki çalışmalarda göz ardı edilen, esnek kümelerin parametre kümelerinin kesişiminin boş küme olması durumu da bu çalışmada, her bir özellik için göz ardı edilmeden değerlendirilmiş olduğundan, çalışma diğer tüm

çalışmaları kapsayıcı nitelikte olup, bu açıdan, çalışmanın esnek küme teorisine yeni başlayanlar için, bir el kitabı niteliğinde olması ümidiyle çalışmamızı oldukça önemsemişimizi belirtmek istiyoruz.

### 3.1. Kısıtlanmış Kesişim İşlemi ve Özellikleri

Bu alt başlıkta, kısıtlanmış kesişim işleminin tanımı, örneği ve tüm özellikleri detaylı ispatlarıyla verilecektir.

3.1.1. Tanım  $(F, T)$  ve  $(G, Z)$ ,  $U$  üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin  $(F, T) \cap_R (G, Z)$  ile gösterilen kısıtlanmış kesişim işlemi  $C = T \cap Z$  olmak üzere,  $C = T \cap Z \neq \emptyset$  ise  $\forall \alpha \in C$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ ;  $C = T \cap Z = \emptyset$  ise  $(F, T) \cap_R (G, Z) = (H, C) = \emptyset_\emptyset$  olacak şekilde  $(F, T) \cap_R (G, Z) = (H, C)$  ile tanımlanır.

Parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme  $\emptyset_\emptyset$  olduğundan, tanımda  $C = T \cap Z = \emptyset$  ise,  $(F, T) \cap_R (G, Z) = \emptyset_\emptyset$  olduğu açıktır. Buradan, kısıtlanmış kesişim işleminin tanımlı olması için,  $(F, T)$  ve  $(G, Z)$ ,  $U$  üzerinde iki esnek küme olmak üzere,  $T \cap Z \neq \emptyset$  şartının bulunmadığı görülmektedir.

Bu tanıma ne Pei ve Miao (2005), ne Feng ve diğerleri (2008), ne Ali ve diğerleri (2009) ne de Ali ve diğerleri (2011) çalışmalarını referans olarak vermemiş olmamızın nedeni, 3. Bölümün giriş kısmında yaptığımız detaylı açıklamalar sebebiyle, parametre kümelerinin kesişiminin boş olması durumunun da değerlendirilerek, tanımın güncellenmiş olarak bu çalışmaya eklenmiş olmasından kaynaklıdır. Çalışmaların pek çoğunda (Ali ve diğerleri, 2009; Atagün ve Sezgin, 2011, Ali ve diğerleri, 2011; Singh ve Onyeozili, 2012c) kısıtlanmış kesişim işleminin geçtiği yerlerdeki özellikler bu şart ile yazılmış olup; esasen bu şartın bir gerek şart olmadığı bu çalışma boyunca ilgili yerlerde gösterilmiştir.

Kısıtlanmış kesişim işleminin gösterimi olan “ $\cap_R$ ” simgesinin altına yazı olan “R” harfi, İngilizcede “kısıtlanmış” anlamına gelen “restricted” kelimesi ile de uyumlu ve anlamlı bir bütün oluşturmaktadır. Zira, diğer esnek küme işlemleri çalışmalarında da kısıtlanmış esnek küme işlemleri için, bu gösterim formu tercih edilmiştir.

3.1.2. *Örnek*  $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$  parametre kümesi,  $T=\{e_1,e_3\}$ ,  $Z=\{e_2,e_3,e_4\}$   $E$ 'nin iki alt kümesi,  $U=\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$  evrensel küme,  $(F,T)$  ve  $(G,Z)$ ,  $U$  üzerinde  $(F,T)=\{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$ ,  $(G,Z)=\{(e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4\}), (e_4, \{h_3, h_5\})\}$  olarak tanımlanan iki esnek küme olsun.  $(F,T) \cap_R (G,Z) = (H, T \cap Z)$  olmak üzere  $\forall \alpha \in T \cap Z = \{e_3\}$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$  olup,  $H(e_3) = F(e_3) \cap G(e_3) = \{h_1, h_2, h_5\} \cap \{h_2, h_3, h_4\} = \{h_2\}$ . Böylece,  $(F,T) \cap_R (G,Z) = \{(e_3, \{h_2\})\}$ .

### 3.1.3. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1)  $\cap_R$  işlemi,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde kapalıdır.

*İspat:*  $\cap_R$  işleminin,  $S_E(U)$  üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$\cap_R: S_E(U) \times S_E(U) \rightarrow S_E(U)$$

$$((F,T), (G,Z)) \rightarrow (F,T) \cap_R (G,Z) = (H, T \cap Z)$$

olup,  $(F,T)$  ve  $(G,Z)$ ,  $U$  üzerinde iki esnek küme olduğunda  $(F,T) \cap_R (G,Z)$  de,  $U$  üzerinde bir esnek kümedir. Benzer şekilde,

$$\cap_R: S_T(U) \times S_T(U) \rightarrow S_T(U)$$

$$((F,T), (G,T)) \rightarrow (F,T) \cap_R (G,T) = (K, T \cap T) = (K, T)$$

olup,  $T$ ,  $E$  kümesinin sabit bir alt kümesi ve  $(F,T)$  ve  $(G,T)$ ,  $S_T(U)$  kümesinin elemanı olmak üzere,  $(F,T) \cap_R (G,T)$  de  $S_T(U)$  kümesinin elemanıdır. Yani  $\cap_R$  işlemi,  $S_T(U)$  kümesi üzerinde de kapalıdır.

2)  $[(F,T) \cap_R (G,Z)] \cap_R (H,M) = (F,T) \cap_R [(G,Z) \cap_R (H,M)]$  (Pei ve Miao, 2005).

*İspat:* Pei ve Miao (2005) çalışmasında bu özelliği ispatsız şekilde vermiş olup, biz detaylı şekilde ispatıyla veriyoruz.  $(F,T) \cap_R (G,Z) = (S, T \cap Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $T(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ .  $(S, T \cap Z) \cap_R (H,M) = (R, (T \cap Z) \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cap M$  için,  $R(\alpha) = T(\alpha) \cap H(\alpha)$ . Böylece,

$$R(\alpha) = [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \cap H(\alpha)$$

$(G,Z) \cap_R (H,M)=(K,Z \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cap M$  için,  $K(\alpha)=G(\alpha) \cap H(\alpha)$ .  
 $(F,T) \cap_R (K,Z \cap M) =(S,T \cap (Z \cap M))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap (Z \cap M)$  için,  $S(\alpha)=F(\alpha) \cap K(\alpha)$ .  
 Böylece,

$$S(\alpha)=F(\alpha) \cap [G(\alpha) \cap H(\alpha)]$$

Burada  $(R,(T \cap Z) \cap M)=(S, T \cap (Z \cap M))$  olduğu görülür. Yani  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\cap_R$  işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

$$3) [(F,T) \cap_R (G,T)] \cap_R (H,T)=(F,T) \cap_R [(G,T) \cap_R (H,T)].$$

*İspat:*  $(F,T) \cap_R (G,T)=(K,T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cap T=T$  için,  $K(\alpha)=F(\alpha) \cap G(\alpha)$ .  
 $(K,T) \cap_R (H,T)=(R,T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap T=T$  için,  $R(\alpha)=K(\alpha) \cap H(\alpha)$  olur. Böylece,

$$R(\alpha)=[F(\alpha) \cap G(\alpha)] \cap H(\alpha)$$

$(G,T) \cap_R (H,T)=(L,T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cap T$  için,  $L(\alpha)=G(\alpha) \cap H(\alpha)$ .  $(F,T) \cap_R (L,T)=(N,T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cap T$  için,  $N(\alpha)=F(\alpha) \cap L(\alpha)$ . Böylece,

$$N(\alpha)=F(\alpha) \cap [G(\alpha) \cap H(\alpha)]$$

Buradan,  $(R,T)=(N,T)$  olduğu görülür. Yani, parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler kümesi üzerinde  $\cap_R$  işleminin birleşme özelliği vardır.

$$4) (F,T) \cap_R (G,Z)=(G,Z) \cap_R (F,T) \text{ (Qin ve Hong, 2010).}$$

*İspat:* Qin ve Hong (2010) çalışmasında bu özelliği ispatsız şekilde vermiş olup, biz detaylı şekilde ispatıyla veriyoruz.  $(F,T) \cap_R (G,Z)=(H,T \cap Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $H(\alpha)=F(\alpha) \cap G(\alpha)$ .  $(G,Z) \cap_R (F,T)=(S,Z \cap T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cap T$  için,  $S(\alpha)=G(\alpha) \cap F(\alpha)$ .  
 Böylece,

$$(F,T) \cap_R (G,Z)=(G,Z) \cap_R (F,T).$$

$S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\cap_R$  işleminin değişme özelliği vardır.  $(F,T) \cap_R (G,T) = (G,T) \cap_R (F,T)$  olduğu, yani  $\cap_R$  işleminin parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler kümesi üzerinde de değişme özelliğine sahip olduğu açıktır.

5)  $(F,T) \cap_R (F,T) = (F,T)$  (Pei ve Miao, 2005).

*İspat:* Pei ve Miao (2005) çalışmasında bu özelliği ispatsız şekilde vermiş olup, biz detaylı şekilde ispatıyla veriyoruz.  $(F,T) \cap_R (F,T) = (H,T \cap T)$  olsun. Buradan,  $\forall \alpha \in T$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \cap F(\alpha) = F(\alpha)$  olur ve böylece  $(H,T) = (F,T)$  elde edilir. Yani  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\cap_R$  işlemi denk güçlülük (idempotent) özelliğine sahiptir.

6)  $(F,T) \cap_R U_T = U_T \cap_R (F,T) = (F,T)$  (Ali ve diğerleri, 2011).

*İspat:* Ali ve diğerleri (2011) çalışmasında bu özelliği  $T$  ye göre evrensel küme sadece sağda yer alacak şekilde ve ispatsız bir biçimde vermiş olup, biz  $T$  ye göre evrensel kümenin hem sağ hem de solda yer aldığı özelliği detaylı şekilde ispatıyla veriyoruz.  $U_T = (K,T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T$  için,  $K(\alpha) = U$ .  $(F,T) \cap_R (K,T) = (H,T \cap T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \cap T(\alpha) = F(\alpha) \cap U = F(\alpha)$ . Böylece,  $(H,T) = (F,T)$ . Yani  $T$ ,  $E$  parametre kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere,  $S_T(U)$  kümesi üzerinde  $\cap_R$  işleminin birim elemanı  $U_T$  esnek kümesidir.

Burada  $(F,T) \cap_R (G,T) = (G,T) \cap_R (F,T) = U_T$  olacak şekilde  $(G,T) \in S_E(U)$  bulamayacağımız aşıkardır. Buradan,  $S_T(U)$  kümesi üzerinde,  $\cap_R$  işleminin eskisiz elemanı olan  $U_T$  esnek kümesinden başka hiçbir elemanın tersi olmadığı sonucuna varabiliriz. Doğal olarak,  $U_T$  esnek kümesinin  $S_T(U)$  kümesi üzerinde,  $\cap_R$  işlemine göre etkisiz elemanı kendisi yani  $U_T$  esnek kümesidir.

7)  $(F,T) \cap_R U_E = U_E \cap_R (F,T) = (F,T)$ .

*İspat:*  $U_E = (K,E)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in E$  için,  $K(\alpha) = U$ .  $(F,T) \cap_R (K,E) = (H, T \cap E)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap E = T$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \cap K(\alpha) = F(\alpha) \cap U = F(\alpha)$ . Böylece  $(H,T) = (F,T)$ . Yani  $S_E(U)$  kümesi üzerinde  $\cap_R$  işleminin birim elemanı  $U_E$  esnek kümesidir.

Burada  $(F,T) \cap_R (G,Z) = (G,Z) \cap_R (F,T) = U_E$  olacak şekilde  $(G,Z) \in S_E(U)$  bulamayacağımızı hemen not edelim; çünkü bu durum  $T \cap Z = E$  olmasını, dolayısıyla  $T=E$  ve  $Z=E$  olmasını gerektirir. Buradan,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\cap_R$  işleminin etkisiz elemanı olan  $U_E$  esnek kümesinden başka hiçbir elemanın tersi olmadığı sonucuna varabiliriz. Doğal olarak,  $U_E$  esnek kümesinin  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\cap_R$  işlemine göre etkisiz elemanı kendisi yani  $U_E$  esnek kümesidir.

3.1.3.1. *Sonuç* Teorem 3.1.3 (1), (2), (4), (5) ve (7)'den,  $(S_E(U), \cap_R)$  cebirsel yapısı birimi  $U_E$  olan, komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafestir.

$A \subseteq E$  sabit bir parametre kümesi olmak üzere, Teorem 3.1.3 (1), (3), (4), (5) ve (6) dan,  $(S_A(U), \cap_R)$  cebirsel yapısı da birimi  $U_A$  olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafestir.

8)  $(F,T) \cap_R \emptyset_T = \emptyset_T \cap_R (F,T) = \emptyset_T$  (Ali ve diğerleri, 2011).

*İspat:* Ali ve diğerleri (2011) çalışmasında bu özelliği  $T$  ye göre boş esnek küme sadece sağda yer alacak şekilde ve ispatsız bir biçimde vermiş olup, biz  $T$  ye göre boş esnek kümenin hem sağ hem de solda yer aldığı özelliği detaylı şekilde ispatıyla veriyoruz.  $\emptyset_T = (S,T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T$  için,  $S(\alpha) = \emptyset$ .  $(F,T) \cap_R (S,T) = (H, T \cap T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \cap S(\alpha) = F(\alpha) \cap \emptyset = \emptyset$ . Böylece,  $(H,T) = \emptyset_T$ .  $S_T(U)$  kümesi üzerinde  $\cap_R$  işleminin yutan elemanı  $\emptyset_T$  esnek kümesidir.

9)  $(F,T) \cap_R \emptyset_E = \emptyset_E \cap_R (F,T) = \emptyset_T$ .

*İspat:*  $\emptyset_E = (S,E)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in E$  için,  $S(\alpha) = \emptyset$ .  $(F,T) \cap_R (S,E) = (H, T \cap E)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cap E = T$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \cap S(\alpha) = F(\alpha) \cap \emptyset = \emptyset$ . Böylece,  $(H,T) = \emptyset_T$ .

10)  $(F,T) \cap_R \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \cap_R (F,T) = \emptyset_\emptyset$ .

*İspat:*  $\emptyset_\emptyset = (S, \emptyset)$  olsun.  $(F,T) \cap_R (S, \emptyset) = (H, T \cap \emptyset) = (H, \emptyset)$  olup,  $\emptyset_\emptyset$  parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme olduğu için,  $(H, \emptyset) = \emptyset_\emptyset$ .

Yani,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\cap_R$  işleminin yutan elemanı  $\emptyset_\emptyset$  esnek kümesidir.

11)  $(F,T) \cap_R (F,T)^r = (F,T)^r \cap_R (F,T) = \emptyset_T$  (Sezgin ve Atagün, 2011).

*İspat:* Sezgin ve Atagün (2011) ve Ali ve diğerleri (2011) çalışmalarında, bu özelliği  $(F,T)$  esnek kümesinin tümleyeni sadece sağda yer alacak şekilde ve ispatsız bir biçimde vermiş olup, biz  $(F,T)$  esnek kümesinin tümleyeninin hem sağ hem de solda yer aldığı özelliği detaylı şekilde ispatıyla veriyoruz.  $(F,T)^r = (H,T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T$  için,  $H(\alpha) = F'(\alpha)$ .  $(F,T) \cap_R (H,T) = (L,T \cap T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T$  için,  $L(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha) = F(\alpha) \cap F'(\alpha) = \emptyset$ . Böylece,  $(L,T) = \emptyset_T$ .

12)  $[(F,T) \cap_R (G,Z)]^r = (F,T)^r \cup_R (G,Z)^r$  (De Morgan Kuralı) (Ali ve diğerleri, 2009).

*İspat:* Ali ve diğerleri, (2009) çalışmasında De Morgan özelliği için  $T \cap Z \neq \emptyset$  şartı ile üstelik ispatı nispeten uzun şekilde vermiştir. Biz bu çalışmada teorem için  $T \cap Z \neq \emptyset$  şartının gerek şart olmadığını belirterek ve ispatı daha sade bir sunumla veriyoruz.  $(F,T) \cap_R (G,Z) = (H,T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  $H(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ .  $(H,T \cap Z)^r = (K,T \cap Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $K(\alpha) = F'(\alpha) \cup G'(\alpha)$  olur. Böylece,  $(K,T \cap Z) = (F,T)^r \cup_R (G,Z)^r$ . Burada,  $T \cap Z \neq \emptyset$  ise sağ ve sol taraf  $\emptyset_\emptyset$  olacağından, eşitlik yine sağlanır. Yani, teorem için  $T \cap Z \neq \emptyset$  şartı gerek şart değildir.

13)  $(F,T) \cap_R (G,T) = U_T \Leftrightarrow (F,T) = U_T$  ve  $(G,T) = U_T$ .

*İspat:*  $(F,T) \cap_R (G,T) = (K,T \cap T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ .  $(K,T) = U_T$  olduğundan,  $\forall \alpha \in T$  için,  $K(\alpha) = U$ . Böylece,  $\forall \alpha \in T$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha) = U \Leftrightarrow \forall \alpha \in T$  için,  $F(\alpha) = U$  ve  $G(\alpha) = U \Leftrightarrow (F,T) = U_T$  ve  $(G,T) = U_T$ .

Sezgin ve Atagün (2011) çalışmasında, kısıtlanmış kesişim ve esnek alt küme ile ilgili özellikleri, Maji ve diğerleri (2003) çalışmasında yer alan esnek alt küme tanımına göre incelemiş olup, bizler bu çalışmada aşağıda yer alan esnek alt küme ile ilgili özellikleri, Pei ve Miao (2005) çalışmasında yer alan esnek alt küme tanımına göre inceleyeceğiz. Bu sebepten, esnek alt küme ile ilgili bu özellikler daha önceki çalışmalarda yer almamıştır.

14)  $\emptyset_\emptyset \subseteq (F,T) \cap_R (G,Z)$  ve  $(F,T) \cap_R (G,Z) \subseteq U_T$  ve  $(F,T) \cap_R (G,Z) \subseteq U_Z$ .

*İspat:* Boş kümenin her kümenin alt kümesi olmasından ve evrensel kümenin her kümeyi kapsamamasından ispat açıktır.

$$15) (F,T) \cap_R (G,Z) \subseteq (F,T) \text{ ve } (F,T) \cap_R (G,Z) \subseteq (G,Z).$$

*İspat:*  $(F,T) \cap_R (G,Z) = (H, T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$  olur. Böylece,  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha) \subseteq F(\alpha)$ . Böylece,  $(F,T) \cap_R (G,Z) \subseteq (F,T)$ .  $F(\alpha) \cap G(\alpha) \subseteq G(\alpha)$  olduğundan,  $(F,T) \cap_R (G,Z) \subseteq (G,Z)$ .

$$16) (F,T) \subseteq (G,Z) \text{ ancak ve ancak } (F,T) \cap_R (G,Z) = (F,T).$$

*İspat:*  $(F,T) \subseteq (G,Z)$  olsun. Buradan,  $T \subseteq Z$  ve  $\forall \alpha \in T$  için,  $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ .  $(F,T) \cap_R (G,Z) = (K, T \cap Z = T)$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in T$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha) = F(\alpha)$ . Böylece,  $(K,T) = (F,T) \cap_R (G,Z) = (F,T)$ . Tersine,  $(F,T) \cap_R (G,Z) = (F,T)$  olsun. Buradan,  $T \cap Z = T$  olup,  $T \subseteq Z$ . Ayrıca,  $\forall \alpha \in T$  için,  $F(\alpha) \cap G(\alpha) = F(\alpha)$  olup,  $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ . Böylece,  $(F,T) \subseteq (G,Z)$ .

$$17) (F,T) \subseteq (G,Z) \text{ ise } (F,T) \cap_R (H,M) \subseteq (G,Z) \cap_R (H,M).$$

*İspat:*  $(F,T) \subseteq (G,Z)$  olsun. Buradan,  $T \subseteq Z, \forall \alpha \in T$  için,  $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ .  $(F,T) \cap_R (H,M) = (K, T \cap M)$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$ .  $(G,Z) \cap_R (H,M) = (L, Z \cap M)$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in Z \cap M$  için,  $L(\alpha) = G(\alpha) \cap H(\alpha)$ . Buradan,  $T \cap M \subseteq Z \cap M$  olup,  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha) \subseteq G(\alpha) \cap H(\alpha) = L(\alpha)$  olup,  $(F,T) \cap_R (H,M) \subseteq (G,Z) \cap_R (H,M)$ .

Burada,  $T \cap M = \emptyset$  ise ispat yine açıktır;  $Z \cap M = \emptyset$  ise  $T \cap M \subseteq Z \cap M$  olduğundan, bu durum  $Z \cap M = \emptyset$  olmasını gerektireceğinden ispat yine açıktır. Yani kısıtlanmış kesişimleri alınacak esnek kümeleri parametre kümelerinin kesişimin boş kümeden farklı küme olması şartı yoktur.

18)  $(F,T) \cap_R (H,M) \subseteq (G,Z) \cap_R (H,M)$  ise  $(F,T) \subseteq (G,Z)$  olmak zorunda değildir. Yani Teorem 3.1.3 (17) nın tersi doğru değildir.

*İspat:* Teorem 3.1.3 (17) nın tersi doğru olmadığını göstermek için bir örnek verelim.  $E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  parametre kümesi,  $T=\{e_1, e_3\}$ ,  $Z=\{e_1, e_3, e_5\}$ ,  $M=\{e_1, e_3, e_5, e_6\}$  E'nin üç alt kümesi,  $U=\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$  evrensel küme olsun. U üzerinde  $(F, T)=\{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$ ,  $(G, Z)=\{(e_1, \{h_2\}), (e_3, \{h_1, h_2\}), (e_5, \{h_3\})\}$ ,  $(H, M)=\{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset), (e_5, \emptyset), (e_6, \{h_1, h_5\})\}$  olarak tanımlanan esnek kümeler olsun.  $(F, T) \cap_R (H, M) = (L, T \cap M)$  olmak üzere  $\forall \alpha \in T \cap M = \{e_1, e_3\}$  için,  $L(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$  olup,  $L(e_1) = F(e_1) \cap H(e_1) = \emptyset$ ,  $L(e_3) = F(e_3) \cap H(e_3) = \emptyset$ . Buradan,  $(F, T) \cap_R (H, M) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset)\}$ . Şimdi  $(G, Z) \cap_R (H, M) = (K, Z \cap M)$  olmak üzere  $\forall \alpha \in Z \cap M = \{e_1, e_3, e_5\}$  için,  $K(\alpha) = G(\alpha) \cap H(\alpha)$  olup,  $K(e_1) = G(e_1) \cap H(e_1) = \emptyset$ ,  $K(e_3) = G(e_3) \cap H(e_3) = \emptyset$  ve  $K(e_5) = G(e_5) \cap H(e_5) = \emptyset$ . Böylece,  $(G, Z) \cap_R (H, M) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset), (e_5, \emptyset)\}$ . Buradan,  $(F, T) \cap_R (H, M) \subseteq (G, Z) \cap_R (H, M)$ ; fakat  $(F, T) \not\subseteq (G, Z)$  olmadığı açıktır.

19)  $(F, T) \subseteq (G, Z)$  ve  $(K, V) \subseteq (L, W)$  ise  $(F, T) \cap_R (K, V) \subseteq (G, Z) \cap_R (L, W)$ .

*İspat:*  $(F, T) \subseteq (G, Z)$  ve  $(K, V) \subseteq (L, W)$  olsun. Buradan,  $\forall \alpha \in T$ ,  $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$  ve  $\forall \alpha \in V$  için  $K(\alpha) \subseteq L(\alpha)$ .  $(F, T) \cap_R (K, V) = (M, T \cap V)$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in T \cap V$  için,  $M(\alpha) = F(\alpha) \cap K(\alpha)$ .  $(G, Z) \cap_R (L, W) = (N, Z \cap W)$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in Z \cap W$  için,  $N(\alpha) = G(\alpha) \cap L(\alpha)$ . Buradan,  $\forall \alpha \in T \cap V$  için,  $M(\alpha) = F(\alpha) \cap K(\alpha) \subseteq FG(\alpha) \cap L(\alpha) = N(\alpha)$  olur. Buradan,  $(F, T) \cap_R (K, V) \subseteq (G, Z) \cap_R (L, W)$ .

Burada,  $T \cap V = \emptyset$  ise ispat yine açıktır;  $Z \cap W = \emptyset$  ise  $T \cap V \subseteq Z \cap W$  olduğundan, bu durum  $T \cap V = \emptyset$  olmasını gerektireceğinden ispat yine açıktır. Yani kısıtlanmış kesişimleri alınacak esnek kümelerin parametre kümelerinin kesişimin boş kümeden farklı küme olması şartı yoktur.

20)  $(F, T) \subseteq (G, Z)^r \implies (F, T) \cap_R (G, Z) = \emptyset_T$ .  $(F, T) \subseteq (G, T)^r \Leftrightarrow (F, T) \cap_R (G, T) = \emptyset_T$ .

*İspat:*  $(F, T) \subseteq (G, Z)^r$  olsun. Buradan,  $T \subseteq Z$  ve  $\forall \alpha \in T$  için  $F(\alpha) \subseteq G'(\alpha)$ .  $(F, T) \cap_R (G, Z) = (H, T \cap Z = T)$  olsun. Bu durumda,  $\forall \alpha \in T$  için  $H(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha) = \emptyset$ . Buradan  $(H, T) = \emptyset_T$  dir. Benzer şekilde,  $(F, T) \subseteq (G, T)^r \Leftrightarrow (F, T) \cap_R (G, T) = \emptyset_T$  olduğu da gösterilebilir. Yani teoremin tersinin de doğru olması için, esnek kümelerin parametre kümelerinin aynı olması gerekir.  $(F, T) \cap_R (G, T) = \emptyset_T$  ise  $(F, T) \subseteq (G, T)^r$  olduğu Ali ve diğerleri (2011) çalışmasında

ispatsız şekilde verilmiştir. Fakat,  $(F,T) \cong (G,T)^r$  ise  $(F,T) \cap_R (G,T) = \emptyset_T$  olacağı da aşıkardır.

### 3.1.1. Kısıtlanmış kesişim işleminin diğer esnek küme işlemlere dağılması:

Bu alt bölümde kısıtlanmış kesişim işleminin; kısıtlanmış işlemlere, genişletilmiş işlemlere ve esnek ikili parçalı işlemlere dağılmasına bakılmıştır.

#### Kısıtlanmış kesişim işleminin kısıtlanmış işlemlere dağılması:

Burada, kısıtlanmış kesişim işleminin, kısıtlanmış işlemlere dağılmasına bakılmıştır. İlk olarak sağdan dağılmalar, peşinden soldan dağılmalar incelenmiştir. Burada önemli bir hususu belirtmekte fayda görüyoruz. Sezgin ve Atagün (2011) çalışmasında, her ne kadar kısıtlanmış kesişim işleminin, kısıtlanmış birleşime ve kısıtlanmış farka sağdan ve soldan dağıldığını göstermiş olsa da, ispatlarda her seferinde, kısıtlanmış işlemleri alınacak olan esnek kümelerin parametre kümelerinin kesişiminin boştan farklı olmasına vurgu yapılmıştır. Oysaki kısıtlanmış işlemleri alınacak olan esnek kümelerin parametre kümelerinin her birinin kesişimi boş küme olsa dahi, bu dağılmalar sağlanmaktadır. Ali ve diğerleri (2011) çalışmasında ise sadece soldan dağılmalar ispatsız şekilde bir tablo ile verilmiştir. Dolayısıyla, bu başlık altındaki dağılmalarda bu durumlar göz önüne alınıp, ispatlar detayları ile verilmiştir.

#### i) Kısıtlanmış kesişim işleminin kısıtlanmış işlemlere soldan dağılması:

1)  $(F,T) \cap_R [(G,Z) \cup_R (H,M)] = [(F,T) \cap_R (G,Z)] \cup_R [(F,T) \cap_R (H,M)]$  (Sezgin ve Atagün, 2011).

*İspat:* Sezgin ve Atagün (2011), çalışmasında bu özelliğin ispatı için kısıtlanmış işlemleri alınacak olan esnek kümelerin parametre kümelerinin her birinin kesişiminin boş kümeden farklı olması şartıyla ispatı yapmış olup, kısıtlanmış işlemleri alınacak olan esnek kümelerin parametre kümelerinin her birinin kesişimi boş küme olsa dahi bu özelliğin sağlanacağı bu ispatta özellikle belirtilecektir.

İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım.  $(G,Z) \cup_R (H,M) = (R, Z \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cap M$  için,  $R(\alpha) = G(\alpha) \cup H(\alpha)$ .  $(F,T) \cap_R (R, Z \cap M) = (N, T \cap (Z \cap M))$  olsun,  $\forall \alpha \in T \cap (Z \cap M)$  için,  $N(\alpha) = F(\alpha) \cap R(\alpha)$ . Buradan,  $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$  için,

$$N(\alpha) = F(\alpha) \cap [(G(\alpha) \cup H(\alpha))]$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafını yani  $[(F,T) \cap_R (G,Z) \cup_R [(F,T) \cap_R (H,M)]]$  ele alalım:  $(F,T) \cap_R (G,Z) = (V, T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $V(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ . Şimdi  $(F,T) \cap_R (H,M) = (W, T \cap M)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $W(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$ .  $(V, T \cap Z) \cup_R (W, T \cap M) = (S, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$  olsun. Buradan  $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$  için,  $S(\alpha) = V(\alpha) \cup W(\alpha)$ ,

$$T(\alpha) = [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \cup [F(\alpha) \cap H(\alpha)]$$

Böylece,  $(N, T \cap Z \cap M) = (S, T \cap Z \cap M)$  olduğu görülür. Burada,  $Z \cap M = \emptyset$  veya  $T \cap Z = \emptyset$  veya  $T \cap M = \emptyset$  ise her durumda da sol taraf ve sağ taraf  $\emptyset$  esnek kümesi olacağından, eşitlik bu durumda da sağlanır. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$2) (F,T) \cap_R [(G,Z) \cap_R (H,M)] = [(F,T) \cap_R (G,Z)] \cap_R [(F,T) \cap_R (H,M)].$$

$$3) (F,T) \cap_R [(G,Z) \setminus_R (H,M)] = [(F,T) \cap_R (G,Z)] \setminus_R [(F,T) \cap_R (H,M)] \text{ (Sezgin ve Atagün, 2011).}$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım.  $(G,Z) \setminus_R (H,M) = (R, Z \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cap M$  için,  $R(\alpha) = G(\alpha) \setminus H(\alpha)$ .  $(F,T) \cap_R (R, Z \cap M) = (N, T \cap (Z \cap M))$  olsun,  $\forall \alpha \in T \cap (Z \cap M)$  için,  $N(\alpha) = F(\alpha) \cap R(\alpha)$ . Buradan,  $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$  için,

$$N(\alpha) = F(\alpha) \cap [(G(\alpha) \setminus H(\alpha))]$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafını yani  $[(F,T) \cap_R (G,Z)] \setminus_R [(F,T) \cap_R (H,M)]$  ele alalım:  $(F,T) \cap_R (G,Z) = (V, T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $V(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ .

Şimdi  $(F, T) \cap_R (H, M) = (W, T \cap M)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $W(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$ .  
 $(V, T \cap Z) \setminus_R (W, T \cap M) = (S, (T \cap Z) \cap (T \cap M))$  olsun. Buradan  $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$  için,  
 $S(\alpha) = V(\alpha) \setminus W(\alpha)$  olup,

$$S(\alpha) = [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \setminus [F(\alpha) \cap H(\alpha)]$$

Böylece,  $(N, T \cap Z \cap M) = (S, T \cap Z \cap M)$  olduğu görülür. Burada,  $Z \cap M = \emptyset$  veya  $T \cap Z = \emptyset$  veya  $T \cap M = \emptyset$  ise her durumda da sol taraf ve sağ taraf  $\emptyset$  esnek kümesi olacağından, eşitlik bu durumda da sağlanır. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$4) (F, T) \cap_R [(G, Z) \gamma_R (H, M)] = [(F, T) \cap_R (G, Z)] \gamma_R [(F, T) \cap_R (H, M)].$$

$$5) (F, T) \cap_R [(G, Z) \Delta_R (H, M)] = [(F, T) \cap_R (G, Z)] \Delta_R [(F, T) \cap_R (H, M)] \text{ (Singh ve Onyeozili, 2012c).}$$

*İspat:* Singh ve Onyeozili (2012c) çalışmasında, bu özelliği vermiş olsa da, ispatında matematiksel olarak pek çok yanlışlık içerdiğinden, ispatı tekrar düzenli şekilde veriyoruz. İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım.  $(G, Z) \Delta_R (H, M) = (R, Z \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cap M$  için,  $R(\alpha) = G(\alpha) \Delta H(\alpha)$ .  $(F, T) \cap_R (R, Z \cap M) = (N, T \cap (Z \cap M))$  olsun,  $\forall \alpha \in T \cap (Z \cap M)$  için,  $N(\alpha) = F(\alpha) \cap R(\alpha)$ . Buradan,  $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$  için,

$$N(\alpha) = F(\alpha) \cap [(G(\alpha) \Delta H(\alpha))]$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafını yani  $[(F, T) \cap_R (G, Z)] \Delta_R [(F, T) \cap_R (H, M)]$  ele alalım:  
 $(F, T) \cap_R (G, Z) = (V, T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $V(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ . Şimdi  
 $(F, T) \cap_R (H, M) = (W, T \cap M)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $W(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$ .  
 $(V, T \cap Z) \Delta_R (W, T \cap M) = (S, (T \cap Z) \cap (T \cap M))$  olsun. Buradan  $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$  için,  
 $S(\alpha) = V(\alpha) \Delta W(\alpha)$  olup

$$S(\alpha) = [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \Delta [F(\alpha) \cap H(\alpha)]$$

Böylece,  $(N, T \cap Z \cap M) = (S, T \cap Z \cap M)$  olduğu görülür. Burada,  $Z \cap M = \emptyset$  veya  $T \cap Z = \emptyset$  veya  $T \cap M = \emptyset$  ise her durumda da sol taraf ve sağ taraf  $\emptyset$  esnek kümesi olacağından, eşitlik bu durumda da sağlanır. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

ii) Kısıtlanmış kesişim işleminin kısıtlanmış işlemlere sağdan dağılması:

1)  $[(F, T) \cup_R (G, Z)] \cap_R (H, M) = [(F, T) \cap_R (H, M)] \cup_R [(G, Z) \cap_R (H, M)]$  (Sezgin ve Atagün, 2011).

*İspat:* Sezgin ve Atagün (2011), çalışmasında bu özelliği ispatsız şekilde vermiş olup, burada detaylı ispatıyla verilecektir. İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım:  $(F, T) \cup_R (G, Z) = (R, T \cap Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $R(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$ .  $(R, T \cap Z) \cap_R (H, M) = (N, (T \cap Z) \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cap M$  için,  $N(\alpha) = R(\alpha) \cap H(\alpha)$ . Buradan,

$$N(\alpha) = [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap H(\alpha)$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F, T) \cap_R (H, M)] \cup_R [(G, Z) \cap_R (H, M)]$  bakalım:  $(F, T) \cap_R (H, M) = (S, T \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $S(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$ .  $(G, Z) \cap_R (H, M) = (K, Z \cap M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in Z \cap M$  için,  $K(\alpha) = G(\alpha) \cap H(\alpha)$ .  $(S, T \cap M) \cap_R (K, Z \cap M) = (L, (T \cap M) \cap (Z \cap M))$  olup,  $\forall \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M)$  için,  $L(\alpha) = S(\alpha) \cap K(\alpha)$ . Buradan,

$$L(\alpha) = ([F(\alpha) \cap H(\alpha)] \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)])$$

Buradan,  $(N, T \cap Z \cap M) = (L, T \cap Z \cap M)$  olduğu görülür. Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  veya  $T \cap M = \emptyset$  veya  $Z \cap M = \emptyset$  ise her durumda da sol taraf ve sağ taraf  $\emptyset$  esnek kümesi olacağından, eşitlik bu durumda da sağlanır. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

2)  $[(F, T) \cap_R (G, Z)] \cap_R (H, M) = [(F, T) \cap_R (H, M)] \cap_R [(G, Z) \cap_R (H, M)]$ .

3)  $[(F,T) \setminus_R (G,Z)] \cap_R (H,M) = [(F,T) \cap_R (H,M)] \setminus_R [(G,Z) \cap_R (H,M)]$  (Sezgin ve Atagün, 2011).

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım:  $(F,T) \setminus_R (G,Z) = (R, T \cap Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $R(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ .  $(R, T \cap Z) \cap_R (H,M) = (N, (T \cap Z) \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cap M$  için,  $N(\alpha) = R(\alpha) \cap H(\alpha)$ . Buradan,

$$N(\alpha) = [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cap H(\alpha)$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F,T) \cap_R (H,M)] \setminus_R [(G,Z) \cap_R (H,M)]$  bakalım:  $(F,T) \cap_R (H,M) = (S, T \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $S(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$ .  $(G,Z) \cap_R (H,M) = (K, Z \cap M)$  olsun.

Burada  $\forall \alpha \in Z \cap M$  için,  $K(\alpha) = G(\alpha) \cap H(\alpha)$ .  $(S, T \cap M) \setminus_R (K, Z \cap M) = (L, (T \cap M) \cap (Z \cap M))$  olup,  $\forall \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M)$  için,  $L(\alpha) = S(\alpha) \setminus K(\alpha)$ . Buradan,

$$L(\alpha) = [F(\alpha) \cap H(\alpha)] \setminus [G(\alpha) \cap H(\alpha)]$$

Buradan,  $(N, T \cap Z \cap M) = (L, T \cap Z \cap M)$  olduğu görülür. Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  veya  $T \cap M = \emptyset$  veya  $Z \cap M = \emptyset$  ise her durumda da sol taraf ve sağ taraf  $\emptyset$  esnek kümesi olacağından, eşitlik bu durumda da sağlanır. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

4)  $[(F,T) \gamma_R (G,Z)] \cap_R (H,M) = [(F,T) \cap_R (H,M)] \gamma_R [(G,Z) \cap_R (H,M)]$ .

5)  $[(F,T) \Delta_R (G,Z)] \cap_R (H,M) = [(F,T) \cap_R (H,M)] \Delta_R [(G,Z) \cap_R (H,M)]$ .

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım:  $(F,T) \Delta_R (G,Z) = (R, T \cap Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $R(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ .  $(R, T \cap Z) \cap_R (H,M) = (N, (T \cap Z) \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cap M$  için,  $N(\alpha) = R(\alpha) \cap H(\alpha)$ . Buradan,

$$N(\alpha) = [F(\alpha) \Delta G(\alpha)] \cap H(\alpha)$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F,T) \cap_R (H,M)] \Delta_R [(G,Z) \cap_R (H,M)]$  bakalım:  $(F,T) \cap_R (H,M) = (S,T \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $S(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$ .  $(G,Z) \cap_R (H,M) = (K,Z \cap M)$  olsun.

Burada  $\forall \alpha \in Z \cap M$  için,  $K(\alpha) = G(\alpha) \cap H(\alpha)$ .  $(S,T \cap M) \Delta_R (K,Z \cap M) = (L,(T \cap M) \cap (Z \cap M))$  olup,  $\forall \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M)$  için,  $L(\alpha) = T(\alpha) \Delta K(\alpha)$ . Buradan,

$$L(\alpha) = [F(\alpha) \cap H(\alpha)] \Delta [G(\alpha) \cap H(\alpha)]$$

Buradan,  $(N,T \cap Z \cap M) = (L,T \cap Z \cap M)$  olduğu görülür. Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  veya  $T \cap M = \emptyset$  veya  $Z \cap M = \emptyset$  ise her durumda da sol taraf ve sağ taraf  $\emptyset_\emptyset$  esnek kümesi olacağından, eşitlik bu durumda da sağlanır. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

#### Kısıtlanmış kesişim işleminin genişletilmiş işlemlere dağılması

Burada, kısıtlanmış kesişim işleminin, genişletilmiş işlemlere dağılmasına bakılmıştır. İlk olarak sağdan dağılmalar, peşinden soldan dağılmalar incelenmiştir. Burada önemli bir hususu belirtmekte fayda görüyoruz. Birtakım çalışmalarda, her ne kadar kısıtlanmış kesişim işleminin genişletilmiş birleşim, kesişim ve fark işlemlerine soldan dağıldığı verilmiş olsa da, sağdan dağılmaların hiçbirine bakılmamış olup, yine sağdan dağılmaların tümü Ali ve diğerleri (2011) çalışmasında, ispatsız şekilde sadece tablo ile verilmiştir. Diğer ispatlı şekilde verilen çalışmalarda ise her seferinde, kısıtlanmış işlemleri alınacak olan esnek kümelerin parametre kümelerinin kesişiminin boştan farklı olmasına vurgu yapılmıştır. Oysaki kısıtlanmış işlemleri alınacak olan esnek kümelerin parametre kümelerinin her birinin kesişimi boş küme olsa dahi, bu dağılmalar sağlanmaktadır. Dolayısıyla, bu başlık altındaki dağılmalarda bu durumlar özellikle göz önüne alınarak detaylı ispatlar verilmiştir.

#### i) Kısıtlanmış Kesişim İşleminin Genişletilmiş İşlemlere Soldan Dağılması:

1)  $(F,T) \cap_R [(G,Z) \cup_\varepsilon (H,M)] = [(F,T) \cap_R (G,Z)] \cup_\varepsilon [(F,T) \cap_R (H,M)]$  (Pei ve Miao, 2008).

*İspat:* Pei ve Miao (2008) çalışmasında bu dağılmayı ispatsız bir şekilde vermiş olup, biz detaylı ispatıyla veriyoruz. Ayrıca, kısıtlanmış işlemleri alınacak esnek kümelerin parametre kümelerinin kesişiminin boş küme olması durumunda da özelliğin sağlandığı hususunu belirterek ispatı vereceğiz. İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım.  $(G,Z) \cup_{\varepsilon} (H,M)=(R,Z \cup M)$  burada  $\forall \alpha \in Z \cup M$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus Z \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F,T) \cap_R (R,Z \cup M) = (N,(T \cap (Z \cup M)))$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap (Z \cup M)$  için,  $N(\alpha) = F(\alpha) \cap R(\alpha)$ . Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \cap [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım:  $[(F,T) \cap_R (G,Z)] \cup_{\varepsilon} [(F,T) \cap_R (H,M)]$ .  $(F,T) \cap_R (G,Z) = (K,T \cap Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ .  $(F,T) \cap_R (H,M) = (S,T \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $S(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$ . Daha sonra,  $(K,T \cap Z) \cup_{\varepsilon} (S,T \cap M) = (L,(T \cap Z) \cup (T \cap M))$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cup (T \cap M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cap M) = T \cap (Z \setminus M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (T \cap Z) = T \cap (M \setminus Z) \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \cap [F(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece,  $(N,T \cap (Z \cup M)) = (L,(T \cap Z) \cup (T \cap M))$  olduğu görülür.

Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$ ;  $T \cap M = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$  olacağından, bu durumlarda da sağ ve sol taraf birbirine eşit çıkar. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

2)  $(F,T) \cap_R [(G,Z) \cap_{\varepsilon} (H,M)] = [(F,T) \cap_R (G,Z)] \cap_{\varepsilon} [(F,T) \cap_R (H,M)]$  (Singh ve Onyeozili, 2012c).

3)  $(F,T) \cap_R [(G,Z) \setminus_\varepsilon (H,M)] = [(F,T) \cap_R (G,Z)] \setminus_\varepsilon [(F,T) \cap_R (H,M)]$  (Sezgin ve diğeri, 2019).

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım.  $(G,Z) \setminus_\varepsilon (H,M) = (R,Z \cup M)$  burada  $\forall \alpha \in Z \cup M$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus Z \\ G(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F,T) \cap_R (R,Z \cup M) = (N, (T \cap (Z \cup M)))$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap (Z \cup M)$  için,  $N(\alpha) = F(\alpha) \cap R(\alpha)$ . Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \cap [G(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım:  $[(F,T) \cap_R (G,Z)] \setminus_\varepsilon [(F,T) \cap_R (H,M)]$ .  $(F,T) \cap_R (G,Z) = (K, T \cap Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ .  $(F,T) \cap_R (H,M) = (S, T \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $S(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$ . Daha sonra,  $(K, T \cap Z) \setminus_\varepsilon (S, T \cap M) = (L, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cup (T \cap M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cap M) = T \cap (Z \setminus M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (T \cap Z) = T \cap (M \setminus Z) \\ K(\alpha) \setminus S(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \setminus [F(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece,  $(N, T \cap (Z \cup M)) = (L, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$  olduğu görülür.

Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$ ;  $T \cap M = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$  olacağından, bu durumlarda da sağ ve sol taraf birbirine eşit çıkar. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

4)  $(F,T) \cap_R [(G,Z) \gamma_\varepsilon (H,M)] = [(F,T) \cap_R (G,Z)] \gamma_\varepsilon [(F,T) \cap_R (H,M)]$ .

5)  $(F,T) \cap_R [(G,Z) \Delta_\varepsilon (H,M)] = [(F,T) \cap_R (G,Z)] \Delta_\varepsilon [(F,T) \cap_R (H,M)]$  (Sezgin ve Çağman, 2024a).

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım.  $(G,Z) \Delta_\varepsilon (H,M) = (R,Z \cup M)$  burada  $\forall \alpha \in Z \cup M$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus Z \\ G(\alpha) \Delta H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F,T) \cap_R (R,Z \cup M) = (N, (T \cap (Z \cup M)))$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap (Z \cup M)$  için,  $N(\alpha) = F(\alpha) \cap R(\alpha)$ . Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \cap [G(\alpha) \Delta H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım:  $[(F,T) \cap_R (G,Z)] \Delta_\varepsilon [(F,T) \cap_R (H,M)]$ .  $(F,T) \cap_R (G,Z) = (K, T \cap Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ .  $(F,T) \cap_R (H,M) = (S, T \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $S(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$ . Daha sonra,  $(K, T \cap Z) \Delta_\varepsilon (S, T \cap M) = (L, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cup (T \cap M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cap M) = T \cap (Z \setminus M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (T \cap Z) = T \cap (M \setminus Z) \\ K(\alpha) \Delta S(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \Delta [F(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece,  $(N, T \cap (Z \cup M)) = (L, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$  olduğu görülür. Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$ ;  $T \cap M = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$  olacağından, bu durumlarda da sağ ve sol taraf birbirine eşit çıkar. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

6)  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  ise  $(F,T) \cap_R [(G,Z) +_\varepsilon (H,M)] = [(F,T) \cap_R (G,Z)] +_\varepsilon [(F,T) \cap_R (H,M)]$ .

7)  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  ise  $(F,T) \cap_R [(G,Z) \lambda_\varepsilon (H,M)] = [(F,T) \cap_R (G,Z)] \lambda_\varepsilon [(F,T) \cap_R (H,M)]$ .

$$8) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } (F, T) \cap_R [(G, Z) *_{\varepsilon} (H, M)] = [(F, T) \cap_R (G, Z)] *_{\varepsilon} [(F, T) \cap_R (H, M)].$$

$$9) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } (F, T) \cap_R [(G, Z) \theta_{\varepsilon} (H, M)] = [(F, T) \cap_R (G, Z)] \theta_{\varepsilon} [(F, T) \cap_R (H, M)].$$

ii) Kısıtlanmış kesişim işleminin genişletilmiş işlemlere sağdan dağılması:

$$1) [(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z)] \cap_R (H, M) = [(F, T) \cap_R (H, M)] \cup_{\varepsilon} [(G, Z) \cap_R (H, M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım  $(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z) = (R, T \cup Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için,

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T \cup Z) \cap_R (H, M) = (N, (T \cup Z) \cap M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cap M$  için,  $N(\alpha) = R(\alpha) \cap H(\alpha)$ .

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F, T) \cap_R (H, M)] \cup_{\varepsilon} [(G, Z) \cap_R (H, M)]$  bakalım.

$(F, T) \cap_R (H, M) = (K, T \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$ .

$(G, Z) \cap_R (H, M) = (S, Z \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cap M$  için,  $S(\alpha) = G(\alpha) \cap H(\alpha)$ . O halde,

$(K, T \cap M) \cup_{\varepsilon} (S, Z \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in (T \cap M) \cup (Z \cap M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cap M) = (T \setminus Z) \cap M \\ S(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus (T \cap M) = (Z \setminus T) \cap M \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cap H(\alpha)] \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece  $(N, (T \cup Z) \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$  olduğu görülür.

Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  ve  $\alpha \in T \cap Z' \cap M$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$  ve  $T \cap Z = \emptyset$  ve  $\alpha \in T' \cap Z \cap M$  ise

$N(\alpha) = L(\alpha) = G(\alpha) \cap H(\alpha)$  olur.  $Z \cap M = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$  olacağından, bu

durumlarda da sağ ve sol taraf birbirine eşit çıkar. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$2) [(F,T) \cap_{\varepsilon}(G,Z)] \cap_R(H,M) = [(F,T) \cap_R(G,Z)] \cap_{\varepsilon} [(G,Z) \cap_R(H,M)].$$

$$3) [(F,T) \setminus_{\varepsilon}(G,Z)] \cap_R(H,M) = [(F,T) \cap_R(G,Z)] \setminus_{\varepsilon} [(G,Z) \cap_R(H,M)] \quad (\text{Sezgin ve diğerkleri, 2019}).$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım  $(F,T) \setminus_{\varepsilon}(G,Z) = (R, T \cup Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için,

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T \cup Z) \cap_R(H,M) = (N, (T \cup Z) \cap M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cap M$  için,  $N(\alpha) = R(\alpha) \cap H(\alpha)$ .

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F,T) \cap_R(H,M)] \setminus_{\varepsilon} [(G,Z) \cap_R(H,M)]$  bakalım.  $(F,T) \cap_R(H,M) = (K, T \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$ .  $(G,Z) \cap_R(H,M) = (S, Z \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cap M$  için,  $S(\alpha) = G(\alpha) \cap H(\alpha)$ . O halde,  $(K, T \cap M) \setminus_{\varepsilon}(S, Z \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in (T \cap M) \cup (Z \cap M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cap M) = (T \setminus Z) \cap M \\ S(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus (T \cap M) = (Z \setminus T) \cap M \\ K(\alpha) \setminus S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cap H(\alpha)] \setminus [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece  $(N, (T \cup Z) \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$  olduğu görülür.

Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  ve  $\alpha \in T \cap Z' \cap M$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$  ve  $T \cap Z = \emptyset$  ve  $\alpha \in T' \cap Z \cap M$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = G(\alpha) \cap H(\alpha)$  olur.  $Z \cap M = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$  olacağından, bu durumlarda da sağ ve sol taraf birbirine eşit çıkar. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$4) [(F,T) \gamma_{\varepsilon}(G,Z)] \cap_R(H,M) = [(F,T) \cap_R(G,Z)] \gamma_{\varepsilon} [(G,Z) \cap_R(H,M)].$$

5)  $[(F,T)\Delta_\varepsilon(G,Z)] \cap_R (H,M) = [(F,T) \cap_R (H,M)] \Delta_\varepsilon [(G,Z) \cap_R (H,M)]$  (Sezgin ve Çağman, 2024a).

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım  $(F,T) \Delta_\varepsilon (G,Z) = (R,T \cup Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için,

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \Delta G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R,T \cup Z) \cap_R (H,M) = (N,(T \cup Z) \cap M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cap M$  için,  $N(\alpha) = R(\alpha) \cap H(\alpha)$ .

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \Delta G(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F,T) \cap_R (H,M)] \Delta_\varepsilon [(G,Z) \cap_R (H,M)]$  bakalım.  $(F,T) \cap_R (H,M) = (K,T \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$ .  $(G,Z) \cap_R (H,M) = (S,Z \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cap M$  için,  $S(\alpha) = G(\alpha) \cap H(\alpha)$ . O halde,  $(K,T \cap M) \Delta_\varepsilon (S,Z \cap M) = (L,(T \cap M) \cup (Z \cap M))$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in (T \cap M) \cup (Z \cap M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cap M) = (T \setminus Z) \cap M \\ S(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus (T \cap M) = (Z \setminus T) \cap M \\ K(\alpha) \Delta S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cap H(\alpha)] \Delta [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece  $(N,(T \cup Z) \cap M) = (L,(T \cap M) \cup (Z \cap M))$  olduğu görülür.

Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  ve  $\alpha \in T \cap Z' \cap M$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$  ve  $T \cap Z = \emptyset$  ve  $\alpha \in T' \cap Z \cap M$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = G(\alpha) \cap H(\alpha)$  olur.  $Z \cap M = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$  olacağından, bu durumlarda da sağ ve sol taraf birbirine eşit çıkar. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

6)  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  ise  $[(F,T) +_\varepsilon (G,Z)] \cap_R (H,M) = [(F,T) \cap_R (H,M)] +_\varepsilon [(G,Z) \cap_R (H,M)]$ .

7)  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  ise  $[(F,T) \lambda_\varepsilon (G,Z)] \cap_R (H,M) = [(F,T) \cap_R (H,M)] \lambda_\varepsilon [(G,Z) \cap_R (H,M)]$ .

$$8) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \theta_\varepsilon (G, Z)] \cap_R (H, M) = [(F, T) \cap_R (H, M)] \theta_\varepsilon [(G, Z) \cap_R (H, M)].$$

$$9) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) *_\varepsilon (G, Z)] \cap_R (H, M) = [(F, T) \cap_R (H, M)] *_\varepsilon [(G, Z) \cap_R (H, M)].$$

Kısıtlanmış kesişim işleminin esnek ikili parçalı işlemlere dağılması:

Burada, kısıtlanmış kesişim işleminin, esnek ikili parçalı işlemlere dağılmasına bakılmıştır. İlk olarak sağdan dağılmalar, peşinden soldan dağılmalar incelenmiştir. Burada, kısıtlanmış işlemleri alınacak olan esnek kümelerin parametre kümelerinin her birinin kesişimi boş küme olsa dahi, bu dağılmaların sağlandığı hususunu özellikle belirtmekte fayda görüyoruz.

i) Kısıtlanmış kesişim işleminin esnek ikili parçalı işlemlere soldan dağılması:

$$1) (F, T) \cap_R [(G, Z) \tilde{\cup} (H, M)] = [(F, T) \cap_R (G, Z)] \tilde{\cup} [(F, T) \cap_R (H, M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım  $(G, Z) \tilde{\cup} (H, M) = (R, Z)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in Z$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha), & \alpha \in Z \setminus M \\ G(\alpha) \cup H(\alpha), & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) \cap_R (R, Z) = (N, T \cap Z)$  olsun. Buradan  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  $N(\alpha) = F(\alpha) \cap R(\alpha)$

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \setminus M) \\ F(\alpha) \cap [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F, T) \cap_R (G, Z)] \tilde{\cup} [(F, T) \cap_R (H, M)]$  bakalım.

$(F, T) \cap_R (G, Z) = (K, T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  $K(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ .  $(F, T) \cap_R (H, M) = (S, T \cap M)$

olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$ ;  $T(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$ .  $(K, T \cap Z) \tilde{\cup} (S, T \cap M) = (L, T \cap Z)$  olup,

$\forall \alpha \in T \cap Z$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cap M) \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cap M) = T \cap (Z \setminus M) \\ [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \cup [F(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Böylece  $(N, T \cap Z) = (L, T \cap Z)$  olduğu görülür.

Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  ise  $(N, T \cap Z) = (L, T \cap Z) = \emptyset$ ;  $T \cap M = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$  olacağından, sağ ve sol taraf yine birbirine eşit çıkar. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$2) (F, T) \cap_R [(G, Z) \tilde{\cap} (H, M)] = [(F, T) \cap_R (G, Z)] \tilde{\cap} [(F, T) \cap_R (H, M)].$$

$$3) (F, T) \cap_R [(G, Z) \tilde{\setminus} (H, M)] = [(F, T) \cap_R (G, Z)] \tilde{\setminus} [(F, T) \cap_R (H, M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım  $(G, Z) \tilde{\setminus} (H, M) = (R, Z)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in Z$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha), & \alpha \in Z \setminus M \\ G(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) \cap_R (R, Z) = (N, T \cap Z)$  olsun. Buradan  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  $N(\alpha) = F(\alpha) \cap R(\alpha)$

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \setminus M) \\ F(\alpha) \cap [G(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F, T) \cap_R (G, Z)] \tilde{\setminus} [(F, T) \cap_R (H, M)]$  bakalım.

$(F, T) \cap_R (G, Z) = (K, T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  $K(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ .  $(F, T) \cap_R (H, M) = (S, T \cap M)$

olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$ ;  $T(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$ .  $(K, T \cap Z) \tilde{\setminus} (S, T \cap M) = (L, T \cap Z)$  olup,  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cap M) \\ K(\alpha) \setminus S(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cap M) = T \cap (Z \setminus M) \\ [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \setminus [F(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Böylece  $(N, T \cap Z) = (L, T \cap Z)$  olduğu görülür.

Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  ise  $(N, T \cap Z) = (L, T \cap Z) = \emptyset_\emptyset$ ;  $T \cap M = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$  olacağından, sağ ve sol taraf birbirine yine eşit çıkar. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$4) (F, T) \cap_R [(G, Z) \tilde{\gamma} (H, M)] = [(F, T) \cap_R (G, Z)] \tilde{\gamma} [(F, T) \cap_R (H, M)].$$

$$5) (F, T) \cap_R [(G, Z) \tilde{\Delta} (H, M)] = [(F, T) \cap_R (G, Z)] \tilde{\Delta} [(F, T) \cap_R (H, M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım  $(G, Z) \tilde{\Delta} (H, M) = (R, Z)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in Z$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ G(\alpha) \Delta H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) \cap_R (R, Z) = (N, T \cap Z)$  olsun. Buradan  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  $N(\alpha) = F(\alpha) \cap R(\alpha)$

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \setminus M) \\ F(\alpha) \cap [G(\alpha) \Delta H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F, T) \cap_R (G, Z)] \tilde{\Delta} [(F, T) \cap_R (H, M)]$  bakalım.

$(F, T) \cap_R (G, Z) = (K, T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  $K(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ .  $(F, T) \cap_R (H, M) = (S, T \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$ ;  $T(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$ .  $(K, T \cap Z) \tilde{\Delta} (S, T \cap M) = (L, T \cap Z)$  olup,  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cap M) \\ K(\alpha) \Delta S(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cap M) = T \cap (Z \setminus M) \\ [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \Delta [F(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Böylece  $(N, T \cap Z) = (L, T \cap Z)$  olduğu görülür. Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  ise  $(N, T \cap Z) = (L, T \cap Z) = \emptyset_\emptyset$ ;  $T \cap M = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$  olacağından, sağ ve sol taraf birbirine yine eşit çıkar. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$6) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } (F, T) \cap_R [(G, Z) \overset{\sim}{+} (H, M)] = [(F, T) \cap_R (G, Z)] \overset{\sim}{+} [(F, T) \cap_R (H, M)].$$

$$7) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } (F, T) \cap_R [(G, Z) \overset{\sim}{\lambda} (H, M)] = [(F, T) \cap_R (G, Z)] \overset{\sim}{\lambda} [(F, T) \cap_R (H, M)].$$

$$8) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } (F, T) \cap_R [(G, Z) \overset{\sim}{\theta} (H, M)] = [(F, T) \cap_R (G, Z)] \overset{\sim}{\theta} [(F, T) \cap_R (H, M)].$$

$$9) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } (F, T) \cap_R [(G, Z) \overset{\sim}{*} (H, M)] = [(F, T) \cap_R (G, Z)] \overset{\sim}{*} [(F, T) \cap_R (H, M)].$$

ii) Kısıtlanmış kesişim işleminin esnek ikili parçalı işlemlere sağdan dağılması:

$$1) [(F, T) \overset{\sim}{\cup} (G, Z)] \cap_R (H, M) = [(F, T) \cap_R (H, M)] \overset{\sim}{\cup} [(G, Z) \cap_R (H, M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım  $(F, T) \overset{\sim}{\cup} (G, Z) = (R, T)$  olur. Burada  $\forall \alpha \in T$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T) \cap_R (H, M) = (N, T \cap M)$  olup,  $\forall \alpha \in T \cap M$ ;  $N(\alpha) = R(\alpha) \cap H(\alpha)$ .

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap M \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F, T) \cap_R (H, M)] \overset{\sim}{\cup} [(G, Z) \cap_R (H, M)]$  bakalım.

$(F, T) \cap_R (H, M) = (K, T \cap M)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap M$ ;  $K(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$ .  $(G, Z) \cap_R (H, M) = (S, Z \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cap M$ ;  $T(\alpha) = G(\alpha) \cap H(\alpha)$ .  $(K, T \cap M) \overset{\sim}{\cup} (S, Z \cap M) = (L, T \cap M)$  olup, buradan da  $\forall \alpha \in T \cap M$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cap M) \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Böylece,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cap M) = (T \setminus Z) \cap M \\ [F(\alpha) \cap H(\alpha)] \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Böylece  $(N, T \cap M) = (L, T \cap M)$  olduğu görülür.

Burada,  $T \cap M = \emptyset$  ise  $(N, T \cap M) = (L, T \cap M) = \emptyset_\emptyset$ ;  $Z \cap M = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$  olacağından, sağ ve sol taraf birbirine yine eşit çıkar. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$2) [(F, T) \widetilde{\cap} (G, Z)] \cap_R (H, M) = [(F, T) \cap_R (H, M)] \widetilde{\cap} [(G, Z) \cap_R (H, M)].$$

$$3) [(F, T) \widetilde{\setminus} (G, Z)] \cap_R (H, M) = [(F, T) \cap_R (H, M)] \widetilde{\setminus} [(G, Z) \cap_R (H, M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım  $(F, T) \widetilde{\setminus} (G, Z) = (R, T)$  olur. Burada  $\forall \alpha \in T$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$$(R, T) \cap_R (H, M) = (N, T \cap M) \text{ olup, } \forall \alpha \in T \cap M; N(\alpha) = R(\alpha) \cap H(\alpha).$$

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap M \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F, T) \cap_R (H, M)] \widetilde{\setminus} [(G, Z) \cap_R (H, M)]$  bakalım.

$(F, T) \cap_R (H, M) = (K, T \cap M)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap M$ ;  $K(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$ .  $(G, Z) \cap_R (H, M) = (S, Z \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cap M$ ;  $T(\alpha) = G(\alpha) \cap H(\alpha)$ .  $(K, T \cap M) \widetilde{\setminus} (S, Z \cap M) = (L, T \cap M)$  olup, buradan da  $\forall \alpha \in T \cap M$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cap M) \\ K(\alpha) \setminus S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Böylece,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cap M) = (T \setminus Z) \cap M \\ [F(\alpha) \cap H(\alpha)] \setminus [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Böylece  $(N, T \cap M) = (L, T \cap M)$  olduğu görülür. Burada,  $T \cap M = \emptyset$  ise  $(N, T \cap M) = (L, T \cap M) = \emptyset_\emptyset$ ;  $Z \cap M = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$  olacağından, sağ ve sol taraf

birbirine yine eşit çıkar. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$4) [(F,T) \tilde{\gamma} (G,Z)] \cap_R (H,M) = [(F,T) \cap_R (H,M)] \tilde{\gamma} [(G,Z) \cap_R (H,M)].$$

$$5) [(F,T) \tilde{\Delta} (G,Z)] \cap_R (H,M) = [(F,T) \cap_R (H,M)] \tilde{\Delta} [(G,Z) \cap_R (H,M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım  $(F,T) \tilde{\Delta} (G,Z) = (R,T)$  olur. Burada  $\forall \alpha \in T$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ F(\alpha) \Delta G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R,T) \cap_R (H,M) = (N, T \cap M)$  olup,  $\forall \alpha \in T \cap M$ ;  $N(\alpha) = R(\alpha) \cap H(\alpha)$ .

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap M \\ [F(\alpha) \Delta G(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F,T) \cap_R (H,M)] \tilde{\Delta} [(G,Z) \cap_R (H,M)]$  bakalım.

$(F,T) \cap_R (H,M) = (K, T \cap M)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap M$ ;  $K(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$ .  $(G,Z) \cap_R (H,M) = (S, Z \cap M)$

olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cap M$ ;  $T(\alpha) = G(\alpha) \cap H(\alpha)$ .  $(K, T \cap M) \tilde{\Delta} (S, Z \cap M) = (L, T \cap M)$  olup,

buradan da  $\forall \alpha \in T \cap M$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cap M) \\ K(\alpha) \Delta S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Böylece,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cap M) = (T \setminus Z) \cap M \\ [F(\alpha) \cap H(\alpha)] \Delta [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Böylece  $(N, T \cap M) = (L, T \cap M)$  olduğu görülür. Burada,  $T \cap M = \emptyset$  ise  $(N, T \cap M) = (L, T \cap M) = \emptyset$ ;  $Z \cap M = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$  olacağından, sağ ve sol taraf birbirine yine eşit çıkar. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$6) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \widetilde{+} (G, Z)] \cap_R (H, M) = [(F, T) \cap_R (H, M)] \widetilde{+} [(G, Z) \cap_R (H, M)].$$

$$7) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \widetilde{\lambda} (G, Z)] \cap_R (H, M) = [(F, T) \cap_R (H, M)] \widetilde{\lambda} [(G, Z) \cap_R (H, M)].$$

$$8) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \widetilde{\theta} (G, Z)] \cap_R (H, M) = [(F, T) \cap_R (H, M)] \widetilde{\theta} [(G, Z) \cap_R (H, M)].$$

$$9) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \widetilde{*} (G, Z)] \cap_R (H, M) = [(F, T) \cap_R (H, M)] \widetilde{*} [(G, Z) \cap_R (H, M)].$$

### 3.2. Genişletilmiş Kesişim İşlemi ve Özellikleri

Bu alt bölümde, Maji ve diğerleri (2003) çalışmasındaki esnek kümeler için genişletilmiş birleşim tanımından esinlenerek, Ali ve diğerleri (2009) tarafından benzer formda genişletilmiş kesişim olarak tanımlanan işlemin klasik kümelerdeki kesişim işlemine benzer özellikleri ve dağılma kurallarıyla diğer işlemler ile olan ilişkileri detaylı şekilde ele alınıp incelenmiştir.

Esnek kümeler için genişletilmiş kesişim işlemi yeni bir tanım olmadığı için, bazı özellikleri ve dağılma kuralları birtakım yazarlar (Ali ve diğerleri, 2009; Sezgin ve Atagün, 2011; Qin ve Hong, 2010; Ali ve diğerleri 2011) tarafından çalışılmıştır. Fakat, çalışmaların çoğunda, özellikler ispatsız şekilde verilmiştir. Bu açıdan, genişletilmiş kesişim işleminin tüm özelliklerinin ispatlarıyla birlikte bu çalışmada bulunuyor olması ve yeni pek çok özelliğin özellikle klasik kümelerdeki karşılıklarının bu çalışmada yine detaylı ispatlarıyla bulunuyor olması açısından, bu çalışmayı oldukça önemseyeceğimizi belirtmek istiyoruz.

3.2.1. Tanım (F, T) ve (G, Z), U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu iki esnek kümenin  $(F, T) \cap_\varepsilon (G, Z)$  ile gösterilen genişletilmiş kesişim işlemi  $C = T \cup Z$  ve  $\forall \alpha \in C$  için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

olmak üzere  $(F, T) \cap_\varepsilon (G, Z) = (H, C)$  ile tanımlanır (Ali ve diğerleri, 2011).

Tanımın orijinalinde, Ali ve diğerleri (2011) genişletilmiş kesişim için  $\cap_\varepsilon$  gösterimi kullanmışlardır. Buradaki, “ $\varepsilon$ ” İngilizcedeki genişletilmiş anlamında kullanılan “Extended” kelimesinin baş harfinden gelmekte olup; bu anlamıyla mantıksal bir bütünlük içindedir. Fakat gösterim olarak nasıl ki Maji ve diğerleri (2003) genişletilmiş birleşim için klasik kümelerdeki birleşim işlemi simgesini kullanmayı tercih ettiyse; bizler de bu çalışma boyunca genişletilmiş kesişim için klasik kümelerdeki kesişim işlemi simgesini kullanmayı tercih ediyoruz. Ayrıca tanımdan,  $T = \emptyset$  ise  $(F,T) \cap_\varepsilon (G,Z) = (G,Z)$ ;  $Z = \emptyset$  ise  $(F,T) \cap_\varepsilon (G,Z) = (F,T)$ ;  $T=Z=\emptyset$  ise  $(F,T) \cap_\varepsilon (G,Z) = \emptyset_\emptyset$  olacağı aşıkardır.

3.2.2. *Örnek*  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  parametre kümesi,  $T = \{e_1, e_3\}$ ,  $Z = \{e_2, e_3, e_4\}$   $E$ ’nin iki alt kümesi,  $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$  evrensel küme,  $U$  üzerinde  $(F,T) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$ ,  $(G,Z) = \{(e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4\}), (e_4, \{h_3, h_5\})\}$  olarak tanımlanan iki esnek küme olsun.  $(F,T) \cap_\varepsilon (G,Z) = (H, TUZ)$  olmak üzere,  $\forall \alpha \in TUZ$ ;

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Burada  $TUZ = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  ve  $T \setminus Z = \{e_1\}$ ,  $Z \setminus T = \{e_2, e_4\}$ ,  $T \cap Z = \{e_3\}$  olmak üzere,  $H(e_1) = F(e_1) = \{h_2, h_5\}$ ,  $H(e_2) = G(e_2) = \{h_1, h_4, h_5\}$ ,  $H(e_4) = G(e_4) = \{h_3, h_5\}$ ,  $H(e_3) = F(e_3) \cap G(e_3) = \{h_1, h_2, h_5\} \cap \{h_2, h_3, h_4\} = \{h_2\}$ .

Böylece,  $(F,T) \cap_\varepsilon (G,Z) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_2\}), (e_4, \{h_3, h_5\})\}$ .

3.2.3. Not  $S_A(U)$  kümesi üzerinde kısıtlanmış kesişim ve genişletilmiş kesişim işlemleri çakışıktır. Yani, parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler için,  $(F,A) \cap_\varepsilon (G,A) = (F,A) \cap_\varepsilon (G,A)$ .

#### 3.2.4. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1)  $\cap_\varepsilon$ ,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde kapalıdır.

*İspat:*  $\cap_\varepsilon$  işleminin,  $S_E(U)$  üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$\begin{aligned} \cap_\varepsilon: S_E(U) \times S_E(U) &\rightarrow S_E(U) \\ ((F,T), (G,Z)) &\rightarrow (F,T) \cap_\varepsilon (G,Z) = (H, TUZ) \end{aligned}$$

olup,  $(F,T)$  ve  $(G,Z)$ ,  $U$  üzerinde iki esnek küme olduğunda  $(F,T) \cap_{\varepsilon}(G,Z)$  de,  $U$  üzerinde bir esnek kümedir. Benzer şekilde,

$$\cap_{\varepsilon}: S_T(U) \times S_T(U) \rightarrow S_T(U)$$

$$((F,T), (G,T)) \rightarrow (F,T) \cap_{\varepsilon} (G,T) = (K, T \cup T) = (K, T)$$

olup,  $T$ ,  $E$  kümesinin sabit bir alt kümesi ve  $(F,T)$  ve  $(G,T)$ ,  $S_T(U)$  kümesinin elemanı olmak üzere,  $(F,T) \cap_{\varepsilon}(G,T)$  de  $S_T(U)$  kümesinin elemanıdır. Yani  $\cap_{\varepsilon}$  işlemi,  $S_T(U)$  kümesi üzerinde de kapalıdır.

$$2) [(F,T) \cap_{\varepsilon} (G,Z)] \cap_{\varepsilon} (H,M) = (F,T) \cap_{\varepsilon} [(G,Z) \cap_{\varepsilon} (H,M)] \text{ (Qin ve Hong, 2010).}$$

*İspat:* Qin ve Hong (2010) bu özelliği çalışmalarında ispatsız şekilde vermiş olup; bizler detaylı ispatıyla veriyoruz. İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım.  $(F,T) \cap_{\varepsilon}(G,Z) = (S, T \cup Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için,

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(S, T \cup Z) \cap_{\varepsilon} (H,M) = (N, (T \cup Z) \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup M$  için,

$$N(\alpha) = \begin{cases} S(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus (T \cup M) \\ S(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \setminus M = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \setminus M = T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus M = T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus (T \cup Z) = T' \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına bakalım.  $(G,Z) \cap_{\varepsilon}(H,M) = (R, Z \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cup M$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus Z \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F,T) \cap_{\varepsilon}(R, Z \cup M) = (L, T \cup (Z \cup M))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup Z \cup M$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus (Z \cup M) \\ R(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) \setminus T \\ F(\alpha) \cap R(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Böylece,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus M) \setminus T = T' \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus Z) \setminus T = T' \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus T = T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \cap [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada,  $(N, (TUZ) \cup M) = (L, TU(Z \cup M))$  olduğu görülür. Yani,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\cap_\varepsilon$  işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

$$3) [(F, T) \cap_\varepsilon (G, T)] \cap_\varepsilon (H, T) = (F, T) \cap_\varepsilon [(G, T) \cap_\varepsilon (H, T)].$$

*İspat:* İspat, Not 3.2.3 ve Teorem 3.1.3 (3)'den elde edilir. Yani,  $T, E$  nin sabit bir alt kümesi olmak üzere  $S_T(U)$  kümesi üzerinde de  $\cap_\varepsilon$  işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

$$4) (F, T) \cap_\varepsilon (G, Z) = (G, Z) \cap_\varepsilon (F, T) \text{ (Qin ve Hong, 2010).}$$

*İspat:* Qin ve Hong, (2010) bu özelliği çalışmalarında ispatsız şekilde vermiş olup; bizler detaylı ispatıyla veriyoruz.  $(F, T) \cap_\varepsilon (G, Z) = (H, TUZ)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in TUZ$  için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(G, Z) \cap_\varepsilon (F, T) = (S, Z \cup T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in Z \cup T$  için,

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) \cap F(\alpha) & \alpha \in Z \cap T \end{cases}$$

Böylece,  $(F, T) \cap_\varepsilon (G, Z) = (G, Z) \cap_\varepsilon (F, T)$ . Buradan,  $(F, T) \cap_\varepsilon (G, T) = (G, T) \cap_\varepsilon (F, T)$  olduğu açıktır. Yani,  $S_E(U)$  ve  $S_T(U)$  kümeleri üzerinde  $\cap_\varepsilon$  işleminin değişme özelliği vardır.

5)  $(F,T) \cap_{\varepsilon} (F,T) = (F,T)$  (Qin ve Hong, 2010).

*İspat:* Qin ve Hong (2010) bu özelliği çalışmalarında ispatsız şekilde vermiş olup; bizler ispatıyla veriyoruz. İspat, Not 3.2.3 ve Teorem 3.1.3 (5)'den elde edilir.

Yani  $S_E(U)$  kümesi üzerinde  $\cap_{\varepsilon}$  işlemi denk güçlülük (idempotent) özelliğine sahiptir.

6)  $(F,T) \cap_{\varepsilon} U_T = U_T \cap_{\varepsilon} (F,T) = (F,T)$ .

*İspat:* İspat, Not 3.2.3 ve Teorem 3.1.3 (6)'dan elde edilir.

$T, E$  parametre kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere,  $S_T(U)$  kümesi üzerinde  $\cap_{\varepsilon}$  işleminin birim elemanı  $U_T$  esnek kümesidir.

Burada  $(F,T) \cap_{\varepsilon} (G,T) = (G,T) \cap_{\varepsilon} (F,T) = U_T$  olacak şekilde  $(G,T) \in S_E(U)$  bulamayacağımız aşıkardır. Buradan,  $S_T(U)$  kümesi üzerinde,  $\cap_{\varepsilon}$  işleminin etkisiz elemanı olan  $U_T$  esnek kümesinden başka hiçbir elemanın tersi olmadığı sonucuna varabiliriz. Doğal olarak,  $U_T$  esnek kümesinin  $S_T(U)$  kümesi üzerinde,  $\cap_{\varepsilon}$  işlemine göre etkisiz elemanı da kendisi yani  $U_T$  esnek kümesidir.

7)  $(F,T) \cap_{\varepsilon} \emptyset = (F,T)$  (Ali ve diğerleri, 2011).

*İspat:*  $\emptyset = (S, \emptyset)$  ve  $(F,T) \cap_{\varepsilon} (S, \emptyset) = (H, T \cup \emptyset)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cup \emptyset = T$  için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus \emptyset = T \\ S(\alpha) & \alpha \in \emptyset \setminus T = \emptyset \\ F(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in T \cap \emptyset = \emptyset \end{cases}$$

Böylece,  $\forall \alpha \in T$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha)$  olup,  $(H,T) = (F,T)$ .

8)  $\emptyset \cap_{\varepsilon} (F,T) = (F,T)$ .

*İspat:*  $\emptyset = (S, \emptyset)$  ve  $(S, \emptyset) \cap_{\varepsilon} (F,T) = (H, \emptyset \cup T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in \emptyset \cup T = T$  için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} S(\alpha) & \alpha \in \emptyset \setminus T = \emptyset \\ F(\alpha) & \alpha \in T \setminus \emptyset = T \\ S(\alpha) \cap F(\alpha) & \alpha \in \emptyset \cap T = \emptyset \end{cases}$$

Böylece,  $\forall \alpha \in T$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha)$  olup,  $(H,T) = (F,T)$ .

Teorem 3.2.4 (7) ve (8) den,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\cap_\varepsilon$  işleminin birim elemanı  $\emptyset_\emptyset$  esnek kümesidir. Ali ve diğerleri (2011) bu özelliği ispatsız şekilde çalışmalarında sunmuş olup; biz detaylı ispatıyla verdik.

Klasik küme teorisinde,  $A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$  ve  $B = \emptyset$  olduğundan,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $(F, T)$  esnek kümesi için,  $(F, T) \cap_\varepsilon (G, K) = (G, K) \cap_\varepsilon (F, T) = \emptyset_\emptyset$  olacak şekilde  $(G, K) \in S_E(U)$  bulamayız; çünkü bu durum  $T \cup K = \emptyset$  olmasını ve dolayısıyla  $T = \emptyset$  ve  $K = \emptyset$  olmasını gerektirir.  $S_E(U)$  kümesi üzerinde  $\emptyset_\emptyset$  haricinde hiçbir esnek küme boş parametreye sahip olmadığından, buradan birim elemen olan  $\emptyset_\emptyset$  haricinde hiçbir elemanın,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde  $\cap_\varepsilon$  işlemine göre tersinin olmadığı sonucu çıkartırız.

3.2.5. *Sonuç* Teorem 3.2.4 (1), (2), (4), (5), (7) ve (8)'den,  $(F, T)$ ,  $(G, Z)$  ve  $(H, M)$ ,  $S_E(U)$  kümesinin elemanları olmak üzere,  $(S_E(U), \cap_\varepsilon)$  birimi  $\emptyset_\emptyset$  olan, idempotent, komutatif bir monoid yani sınırlı bir yarı latistir. Teorem 3.2.4 (1), (3), (4), (5) ve (6)'dan  $A \subseteq E$  sabit bir parametre kümesi olmak üzere,  $(S_A(U), \cap_\varepsilon)$  cebirsel yapısı da birimi  $U_A$  olan, idempotent, komutatif bir monoid yani sınırlı bir yarı latistir.

$$9) \emptyset_E \cap_\varepsilon (F, T) = (F, T) \cap_\varepsilon \emptyset_E = \emptyset_E.$$

*İspat:*  $\emptyset_E = (S, E)$  ve  $(S, E) \cap_\varepsilon (F, T) = (H, E \cup T = E)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in E \cup T = E$  için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} S(\alpha), & \alpha \in E \setminus T = T' \\ F(\alpha), & \alpha \in T \setminus E = \emptyset \\ S(\alpha) \cap F(\alpha), & \alpha \in E \cap T = T \end{cases}$$

Böylece,  $\forall \alpha \in E \cup T = E$  için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} \emptyset, & \alpha \in E \setminus T = T' \\ F(\alpha), & \alpha \in T \setminus E = \emptyset \\ \emptyset, & \alpha \in E \cap T = T \end{cases}$$

$\forall \alpha \in T$  için,  $H(\alpha) = \emptyset$  olup,  $(H, T) = \emptyset_E$ .

Yani,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\cap_\varepsilon$  işleminin yutan elemanı  $\emptyset_E$  esnek kümesidir.

$$10) (F, T) \cap_\varepsilon (F, T)^r = (F, T)^r \cap_\varepsilon (F, T) = \emptyset_T \text{ (Sezgin ve Atagün, 2011)}.$$

*İspat:* Sezgin ve Atagün (2011) çalışmasında bu özelliği ispatsız bir şekilde vermiş olup, biz burada ispatıyla veriyoruz. İspat, Not 3.2.3 ve Teorem 3.1.3 (11)'den elde edilir.

$$11) [(F,T) \cap_{\varepsilon} (G,Z)]^r = (F,T)^r \cup_{\varepsilon} (G,Z)^r \text{ (De Morgan Kuralı) (Qin ve Hong, 2010).}$$

*İspat:* Ali ve diğerleri (2009) genişletilmiş kesişim ve genişletilmiş birleşim için De Morgan kurallarındaki tümleyen işlemi için, Ali ve diğerleri (2009) çalışmasındaki göreceli tümleyen yerine Maji ve diğerleri (2003) çalışmasındaki negatif tümleyeni almışlardır. Qin ve Hong (2010) ise daha yaygın olarak kullanılan Ali ve diğerleri (2009) çalışmasındaki göreceli tümleyeni tümleyen işlemi olarak alarak, De Morgan kurallarını vermişlerdir. İspatları, elemana dayalı ispatlar olup, biz fonksiyon eşitliğinden daha sade bir ispatla sunuyoruz.

$(F,T) \cap_{\varepsilon} (G,Z) = (H, T \cup Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için;

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(H, T \cup Z)^r = (K, T \cup Z)$  olup,  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G'(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F'(\alpha) \cup G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Buradan,  $(K, T \cup Z) = (F,T)^r \cup_{\varepsilon} (G,Z)^r$ .

$$12) (F,T) \cap_{\varepsilon} (G,Z) = U_{T \cup Z} \Leftrightarrow (F,T) = U_T \text{ ve } (G,Z) = U_Z.$$

*İspat:*  $(F,T) \cap_{\varepsilon} (G,Z) = (H, T \cup Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha), & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cap G(\alpha), & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(H, T \cup Z) = U_{T \cup Z}$  olduğu için  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için  $H(\alpha) = U$  olur. Buradan,  $\alpha \in T \setminus Z$  ise  $F(\alpha) = U$ ,  $\alpha \in Z \setminus T$  ise  $G(\alpha) = U$  ve  $\alpha \in T \cap Z$  ise  $F(\alpha) \cap G(\alpha) = U$ , yani  $\alpha \in T \cap Z$  ise  $F(\alpha) = G(\alpha) = U$ . Böylece,  $\forall \alpha \in T$  için,  $F(\alpha) = U$ ,  $\forall \alpha \in Z$  için  $G(\alpha) = U$ . Buradan,  $(F,T) = U_T$  ve  $(G,Z) = U_Z$ .

Sezgin ve Atagün (2011) çalışmasında, genişletilmiş kesişim ve esnek alt küme ile ilgili özellikleri, Maji ve diğerleri (2003) çalışmasında yer alan esnek alt küme tanımına göre incelemiş olup, bizler bu çalışmada aşağıda yer alan esnek alt küme ile ilgili özellikleri, Pei ve Miao (2005) çalışmasında yer alan esnek alt küme tanımına göre inceleyeceğiz. Bu sebeple, esnek alt küme ile ilgili bu özellikler daha önceki çalışmalarda yer almamıştır.

$$13) \emptyset_T \subseteq (F,T) \cap_\varepsilon (G,Z), \emptyset_Z \subseteq (F,T) \cap_\varepsilon (G,Z). \text{ Ayrıca, } (F,T) \cap_\varepsilon (G,Z) \subseteq U_{T \cup Z}.$$

*İspat:* Boş kümenin her kümenin alt kümesi olmasından ve evrensel kümenin her kümeyi kapsamasından ispat açıktır.

$$14) (F,T) \cap_\varepsilon (G,T) \subseteq (F,T) \text{ ve } (F,T) \cap_\varepsilon (G,T) \subseteq (G,T).$$

*İspat:* İspat, Not 3.2.3 ve Teorem 3.1.3 (15)'den elde edilir.

$$15) (F,T) \subseteq (G,Z) \text{ ancak ve ancak } (F,T) \cap_\varepsilon (G,Z) = (F,T).$$

*İspat:* İspat, Not 3.2.3 ve Teorem 3.1.3 (16)'dan elde edilir.

$$16) (F,T) \subseteq (G,T) \text{ ise } (F,T) \cap_\varepsilon (K,V) \subseteq (G,T) \cap_\varepsilon (K,V). \text{ Tersisi doğru değildir.}$$

*İspat:*  $(F,T) \subseteq (G,T)$  olsun. Buradan,  $\forall \alpha \in T$  için  $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ .  $(F,T) \cap_\varepsilon (K,V) = (H,TUV)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in TUV$ ,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus V \\ K(\alpha) & \alpha \in V \setminus T \\ F(\alpha) \cap K(\alpha) & \alpha \in T \cap V \end{cases}$$

$(G,T) \cap_\varepsilon (K,V) = (S,TUV)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in TUV$ ,

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in T \setminus V \\ K(\alpha) & \alpha \in V \setminus T \\ G(\alpha) \cap K(\alpha) & \alpha \in T \cap V \end{cases}$$

$\forall \alpha \in T \setminus V$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \subseteq G(\alpha) = S(\alpha)$ ,  $\forall \alpha \in V \setminus T$  için,  $H(\alpha) = K(\alpha) \subseteq L(\alpha) = S(\alpha)$ ,  $\forall \alpha \in T \cap V$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \cap K(\alpha) \subseteq G(\alpha) \cap K(\alpha) = S(\alpha)$ . Böylece,  $(F,T) \cap_\varepsilon (K,V) \subseteq (G,T) \cap_\varepsilon (K,V)$ .

Tersinin doğru olmadığına örnek verelim.  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  parametre kümesi,  $T = \{e_1, e_3\}$ ,  $V = \{e_1, e_3, e_5\}$ ,  $E$ 'nin iki alt kümesi,  $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$  evrensel küme olsun.  $(F, T) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$ ,  $(G, T) = \{(e_1, \{h_2\}), (e_3, \{h_1, h_2\})\}$ ,  $(K, V) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset), (e_5, \{h_1, h_5\})\}$  olarak tanımlanan esnek kümeler olsun.  $(F, T) \cap_\varepsilon (K, V) = (L, T \cup V)$  olmak üzere  $(F, T) \cap_\varepsilon (K, V) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset), (e_5, \{h_1, h_5\})\}$ .  $(G, T) \cap_\varepsilon (K, V) = (K, T \cup V)$  olmak üzere  $(G, T) \cap_\varepsilon (K, V) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset), (e_5, \{h_1, h_5\})\}$ . Buradan,  $(F, T) \cap_\varepsilon (K, V) \not\subseteq (G, T) \cap_\varepsilon (K, V)$ ; fakat  $(F, T) \subseteq (G, T)$  olmadığı açıktır.

17)  $(F, T) \subseteq (G, T)$  ve  $(K, V) \subseteq (L, V)$  ise  $(F, T) \cap_\varepsilon (K, V) \subseteq (G, T) \cap_\varepsilon (L, V)$ .

*İspat:*  $(F, T) \subseteq (G, T)$  ve  $(K, V) \subseteq (L, V)$  olsun. Buradan,  $\forall \alpha \in T$  için  $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$  ve  $\forall \alpha \in V$  için  $K(\alpha) \subseteq L(\alpha)$ .  $(F, T) \cap_\varepsilon (K, V) = (H, T \cup V)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup V$ ,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus V \\ K(\alpha) & \alpha \in V \setminus T \\ F(\alpha) \cap K(\alpha) & \alpha \in T \cap V \end{cases}$$

$(G, T) \cap_\varepsilon (L, V) = (S, T \cup V)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup V$ ,

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in T \setminus V \\ L(\alpha) & \alpha \in V \setminus T \\ G(\alpha) \cap L(\alpha) & \alpha \in T \cap V \end{cases}$$

$\forall \alpha \in T \setminus V$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \subseteq G(\alpha) = S(\alpha)$ ,  $\forall \alpha \in V \setminus T$  için,  $H(\alpha) = K(\alpha) \subseteq L(\alpha) = S(\alpha)$ ,  $\forall \alpha \in T \cap V$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \cap K(\alpha) \subseteq G(\alpha) \cap L(\alpha) = S(\alpha)$ . Böylece,  $(F, T) \cap_\varepsilon (K, V) \subseteq (G, T) \cap_\varepsilon (L, V)$ .

18)  $(F, T) \subseteq (G, T)^r \Leftrightarrow (F, T) \cap_\varepsilon (G, T) = \emptyset_T$ .

*İspat:* İspat, Not 3.2.3 ve Teorem 3.1.3 (21)'den elde edilir.

### 3.2.1. Genişletilmiş kesişim işleminin diğer esnek küme işlemlerine dağılması:

Bu alt bölümde genişletilmiş kesişim işleminin; kısıtlanmış işlemlere, genişletilmiş işlemlere ve esnek ikili parçalı işlemlere dağılmasına bakılmıştır.

Genişletilmiş kesişim işleminin kısıtlanmış işlemlere dağılması:

Burada, genişletilmiş kesişim işleminin, kısıtlanmış işlemlere dağılmasına bakılmıştır. İlk olarak sağdan dağılmalar, peşinden soldan dağılmalar incelenmiştir. Burada önemli bir hususu belirtmekte fayda görüyoruz. Ali ve diğerleri (2011) çalışmasında, genişletilmiş kesişim işleminin kısıtlanmış birleşime soldan dağılmasını ispatsız şekilde incelemiş olup, genişletilmiş kesişim işleminin kısıtlanmış kesişime soldan dağılma özelliğini sağlamadığını örnek ile göstermiştir. Singh ve Onyeozili (2012c) ise genişletilmiş kesişim işleminin kısıtlanmış farka soldan dağılma özelliğini sağlamadığını göstermiştir. Sezgin ve Atagün (2011) ise, her ne kadar genişletilmiş kesişim işleminin, kısıtlanmış birleşime sağdan ve soldan dağıldığını göstermiş olsa da, ispatında bir takım noktalar göz ardı edildiğinden, bu çalışmada, dağılmalar kısıtlanmış işlemleri alınacak ensek kümelerin parametre kümelerinin kesişiminin boş kümeye eşit olması durumunu da değerlendirerek detaylı ispatlarıyla sunulmuştur. Ayrıca, koşulsuz dağılma özelliğini sağlamayanların, hangi şartlar altında dağılma özelliğini sağladığı da detaylı şekilde ispatlarıyla sunulmuştur.

#### i) Genişletilmiş kesişim işleminin kısıtlanmış işlemlere soldan dağılması

1)  $(F,T) \cap_{\varepsilon} [(G,Z) \cup_R (H,M)] = [(F,T) \cap_{\varepsilon} (G,Z)] \cup_R [(F,T) \cap_{\varepsilon} (H,M)]$  (Sezgin ve Atagün, 2011).

*İspat:* Sezgin ve Atagün (2011) ispatında, sağ tarafın parametre parçalamasında bir durumu göz ardı etmiştir. Üstelik, ispatta kısıtlanmış işlemleri alınacak olan esnek kümelerin parametre kümelerinin kesişiminin boştan farklı olmasına vurgu yapılmıştır. Oysaki kısıtlanmış işlemleri alınacak olan esnek kümelerin parametre kümelerinin her birinin kesişimi boş küme olsa dahi, bu dağılma sağlanmaktadır. Dolayısıyla, buradaki ispatta bu durumlar özellikle göz önüne alınarak ispat yapılacaktır.

İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım.  $(G,Z) \cup_R (H,M) = (M, Z \cap M)$  olsun. Buradan,  $\forall \alpha \in Z \cap M; M(\alpha) = G(\alpha) \cup H(\alpha)$ .

$(F,T) \cap_{\varepsilon} (M, Z \cap M) = (N, T \cup (Z \cap M))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup (Z \cap M)$ ;

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus (Z \cap M) \\ M(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus T \\ F(\alpha) \cap M(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus (Z \cap M) \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus T = T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) \cap [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z)] \cup_R [(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M)]$  bakalım.  
 $(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z) = (M, T \cup Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cup Z$ ;

$$M(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M) = (K, T \cup M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(M, T \cup Z) \cup_R (K, T \cup M) = (W, (T \cup Z) \cap (T \cup M))$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cap (T \cup M)$ ;

$W(\alpha) = T(\alpha) \cup K(\alpha)$ ,

$$W(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \setminus M) = T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (M \setminus T) = \emptyset \\ F(\alpha) \cup [F(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup F(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \setminus M) = \emptyset \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (M \setminus T) = T' \cap Z \cap M \\ G(\alpha) \cup [F(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \cap M) = \emptyset \\ [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \cup F(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (M \setminus T) = \emptyset \\ [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \cup [F(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$W(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki  $T \setminus (Z \cap M)$  yi ele alırsak,  $T \setminus (Z \cap M) = T \setminus (Z \cap M)'$  olup, bir eleman  $(Z \cap M)$  nin tümleyeninde ise o elemanın ya  $Z \setminus M$  de, ya  $M \setminus Z$  de, ya da  $Z \cup M$  nin

tümleyenindedir. Buradan,  $\alpha \in T \setminus (Z \cap M)$  ise  $\alpha \in T \cap Z \cap M'$  veya  $\alpha \in T \cap Z' \cap M$  veya  $\alpha \in T \cap Z' \cap M'$  olduğuna dikkat edecek olursak, N ve W fonksiyonları birbirine eşit olur.

Burada  $Z \cap M = \emptyset$  olduğunda,  $N(\alpha) = W(\alpha) = F(\alpha)$  olup, eşitlik yine sağlanacaktır. Benzer şekilde,  $(T \cup Z) \cap (T \cup M) = T \cup (Z \cap M) = \emptyset$  olduğunda da yani  $T = \emptyset$  ve  $Z \cap M = \emptyset$  olduğundan da  $(N, T \cup (Z \cap M)) = (W, (T \cup Z) \cap (T \cup M)) = \emptyset_\emptyset$  olur. Yani, teoremden kısıtlanmış keşimi alınacak esnek kümelerin parametre kümelerinin boştan farklı olması gerektiği şartı bulunmamaktadır.

2)  $(F, T) \cap_\epsilon [(G, Z) \cap_R (H, M)] \neq [(F, T) \cap_\epsilon (G, Z)] \cap_R [(F, T) \cap_\epsilon (H, M)]$  (Ali ve diğerleri, 2011).  
 $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$  ise  $(F, T) \cap_\epsilon [(G, Z) \cap_R (H, M)] = [(F, T) \cap_\epsilon (G, Z)] \cap_R [(F, T) \cap_\epsilon (H, M)]$ .

*İspat:* İspat, genişletilmiş kesişimin, kısıtlanmış birleşime soldan dağılmasına çok benzer olduğundan burada tekrar verilmemiştir. Burada şu hususu belirtmekte fayda görüyoruz. Klasik kümelerde, kesişim işlemi kesişim işlemine soldan dağılır. Fakat genişletilmiş kesişim ve kısıtlanmış birleşim işlemler için bu durumun mevcut olmadığını, Ali ve diğerleri (2011) çalışmasında örnekle göstermiştir. Biz ise bu çalışmada,  $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$  şartı ile dağılmanın sağlanabileceğini ifade ediyoruz.

Klasik kümelerde, kesişim işlemi fark ve simetrik fark işlemine soldan dağılır. Fakat genişletilmiş kesişim ve kısıtlanmış işlemler için bu durumun mevcut olmadığı aşağıda verilmiştir.

3)  $(F, T) \cap_\epsilon [(G, Z) \setminus_R (H, M)] \neq [(F, T) \cap_\epsilon (G, Z)] \setminus_R [(F, T) \cap_\epsilon (H, M)]$  (Singh ve Onyeozili, 2012c).

4)  $(F, T) \cap_\epsilon [(G, Z) \Delta_R (H, M)] \neq [(F, T) \cap_\epsilon (G, Z)] \Delta_R [(F, T) \cap_\epsilon (H, M)]$ .

## ii) Genişletilmiş kesişim işleminin kısıtlanmış işlemlere sağdan dağılması

1)  $[(F, T) \cup_R (G, Z)] \cap_\epsilon (H, M) = [(F, T) \cap_\epsilon (H, M)] \cup_R [(G, Z) \cap_\epsilon (H, M)]$  (Sezgin ve Atagün, 2011).

*İspat:* Sezgin ve Atagün (2011) teoremi ispatsız şekilde vermişlerdir. Biz burada detaylı ispatıyla veriyoruz. İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım.  $(F,T) \cup_R (G,Z) = (R, T \cap Z)$  olsun. Buradan,  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  $R(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$ .  $(R, T \cap Z) \cap_\varepsilon (H,M) = (L, (T \cap Z) \cup M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cup M$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus (T \cap Z) \\ R(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus M = T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus (T \cap Z) \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F,T) \cap_\varepsilon (H,M)] \cup_R [(G,Z) \cap_\varepsilon (H,M)]$  bakalım.  $(F,T) \cap_\varepsilon (H,M) = (S, T \cup M)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(G,Z) \cap_\varepsilon (H,M) = (K, Z \cup M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in Z \cup M$ ;

$$K(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus Z \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(S, T \cup M) \cup_R (K, Z \cup M) = (W, (T \cup M) \cap (Z \cup M))$  olsun. Buradan,  $\forall \alpha \in (T \cup M) \cap (Z \cup M)$ ;  
 $W(\alpha) = S(\alpha) \cup K(\alpha)$  olup

$$W(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \setminus M) \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus M) \cap (M \setminus Z) = \emptyset \\ F(\alpha) \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T \setminus M) \cap (Z \cap M) = \emptyset \\ H(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (M \setminus T) \cap (Z \setminus M) = \emptyset \\ H(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus T) \cap (M \setminus Z) = T' \cap Z' \cap M \\ H(\alpha) \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (M \setminus T) \cap (Z \cap M) = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cap H(\alpha)] \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \setminus M) = \emptyset \\ [F(\alpha) \cap H(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \cap H(\alpha)] \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$W(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z' \cap M \\ H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \cap H(\alpha)] \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada;  $L$  fonksiyonundaki,  $M \setminus (T \cap Z)$ 'yi ele alırsak,  $M \setminus (T \cap Z) = M \cap (T \cap Z)'$  olup, bir eleman  $(T \cap Z)$  nin tümleyeninde ise o elemanın ya  $T \setminus Z$  de, ya  $Z \setminus T$  de, ya da  $T \cup Z$  nin tümleyenindedir. Burdan,  $\alpha \in M \setminus (T \cap Z)$  ise  $\alpha \in M \cap T \cap Z'$  veya  $\alpha \in M \cap Z \cap T'$  veya  $\alpha \in M \cap T' \cap Z'$  olduğuna dikkat edecek olursak  $L=W$  sağlanır.

Burada  $T \cap Z = \emptyset$  olduğunda,  $L(\alpha) = W(\alpha) = H(\alpha)$  olacağından, eşitlik yine sağlanacaktır.

Benzer şekilde,  $(T \cup M) \cap (Z \cup M) = (T \cap Z) \cup M = \emptyset$  olduğunda da yani  $T \cap Z = \emptyset$  ve  $M = \emptyset$  olduğundan da  $(L, (T \cap Z) \cup M) = (W, (T \cup M) \cap (Z \cup M)) = \emptyset_\emptyset$  olur. Yani, teoremden kısıtlanmış keşimi alınacak esnek kümelerin parametre kümelerinin boştan farklı olması gerektiği şartı bulunmamaktadır.

$$2) (T \Delta Z) \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \cap_R (G, Z)] \cap_\varepsilon (H, M) = [(F, T) \cap_\varepsilon (H, M)] \cap_R [(G, Z) \cap_\varepsilon (H, M)].$$

*İspat:* İspat, genişletilmiş kesişimin, kısıtlanmış birleşime sağdan dağılmasına çok benzer olduğundan burada tekrar verilmemiştir. Burada şu hususu belirtmekte fayda görüyoruz. Klasik kümelerde, kesişim işlemi kesişim işlemine sağdan dağılır. Fakat genişletilmiş ve kısıtlanmış işlemler için bu durumun mevcut olmadığını; ancak  $(T \Delta Z) \cap M = \emptyset$  şartı ile dağılmanın sağlanabileceğini ifade ediyoruz.

Benzer şekilde klasik kümelerde, kesişim işlemi fark ve simetrik fark işlemlerine sağdan dağılır. Fakat genişletilmiş ve kısıtlanmış işlemler için bu durumun mevcut olmadığını, aşağıda belirtmek istiyoruz.

$$3) [(F, T) \setminus_R (G, Z)] \cap_\varepsilon (H, M) \neq [(F, T) \cap_\varepsilon (H, M)] \setminus_R [(G, Z) \cap_\varepsilon (H, M)].$$

$$4) [(F, T) \Delta_R (G, Z)] \cap_\varepsilon (H, M) \neq [(F, T) \cap_\varepsilon (H, M)] \Delta_R [(G, Z) \cap_\varepsilon (H, M)].$$

Genişletilmiş kesişim işleminin genişletilmiş işlemlere dağılması

Burada, genişletilmiş kesişim işleminin, genişletilmiş işlemlere dağılmasına bakılmıştır. İlk olarak sağdan dağılmalar, peşinden soldan dağılmalar incelenmiştir. Burada önemli bir hususu belirtmekte fayda görüyoruz. Ali ve diğerleri (2011) çalışmasında, genişletilmiş kesişim işleminin genişletilmiş kesişime soldan dağılmasına ispatsız şekilde bakmış olup; genişletilmiş kesişimin genişletilmiş birleşime sağdan dağılma özelliğini sağlamadığını örnek ile göstermiştir. Bu çalışmada ise dağılmalar detaylı ispatlarıyla sunulmuştur. Koşulsuz şekilde dağılma özelliğini sağlamayanlar ise hangi şartlar altında dağılmayı sağlanacağı ispatlarla gösterilmiştir.

i) Genişletilmiş kesişim işleminin genişletilmiş işlemlere soldan dağılması

1)  $(F,T) \cap_{\varepsilon} [(G,Z) \cap_{\varepsilon} (H,M)] = [(F,T) \cap_{\varepsilon} (G,Z)] \cap_{\varepsilon} [(F,T) \cap_{\varepsilon} (H,M)]$  (Ali ve diğerleri, 2011).

*İspat:* Ali ve diğerleri (2011) çalışmasında bu teoremi ispatsız şekilde vermişlerdir. Biz burada detaylı ispatıyla veriyoruz. İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım.  $(G,Z) \cap_{\varepsilon} (H,M) = (R,Z \cup M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in Z \cup M$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus Z \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F,T) \cap_{\varepsilon} (R,Z \cup M) = (N, (T \cup (Z \cup M)))$  bakalım.  $\forall \alpha \in T \cup (Z \cup M)$ ;

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus (Z \cup M) \\ R(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) \setminus T \\ F(\alpha) \cap R(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus M) \setminus T = T' \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus Z) \setminus T = T' \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus T = T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \cap [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F,T) \cap_{\varepsilon} (G,Z)] \cap_{\varepsilon} [(F,T) \cap_{\varepsilon} (H,M)]$  bakalım.  $(F,T) \cap_{\varepsilon} (G,Z) = (K, T \cup Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup Z$ ;

$$M(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M) = (S, T \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup Z) \cap_{\varepsilon} (S, T \cup M) = (L, (T \cup Z) \cup (T \cup M))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup (T \cup M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \setminus (T \cup M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \setminus (T \cup Z) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap (T \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \setminus (T \cup M) = \emptyset \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \setminus (T \cup M) = T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cup M) = \emptyset \\ F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus M) \setminus (T \cup Z) = \emptyset \\ H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus T) \setminus (T \cup Z) = T' \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (T \cup Z) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \setminus M) = T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (M \setminus T) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap [F(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap F(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \setminus M) = \emptyset \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (M \setminus T) = T' \cap Z \cap M \\ G(\alpha) \cap [F(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \cap M) = \emptyset \\ [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \cap F(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (M \setminus T) = \emptyset \\ [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \cap [F(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

$N=L$  olduğu görülür.

2)  $(F,T) \cap_{\varepsilon} [(G,Z) \cup_{\varepsilon} (H,M)] \neq [(F,T) \cap_{\varepsilon} (G,Z)] \cup_{\varepsilon} [(F,T) \cap_{\varepsilon} (H,M)]$  (Ali ve diğerleri, 2011).

$T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$  ise  $(F,T) \cap_{\varepsilon} [(G,Z) \cup_{\varepsilon} (H,M)] = [(F,T) \cap_{\varepsilon} (G,Z)] \cup_{\varepsilon} [(F,T) \cap_{\varepsilon} (H,M)]$ .

*İspat:* İspat, genişletilmiş kesişimin, genişletilmiş kesişime soldan dağılmasına çok benzer olduğundan burada tekrar verilmemiştir. Burada şu hususu belirtmekte fayda görüyoruz. Klasik kümelerde, kesişim işlemi birleşim işlemine soldan dağılır. Fakat genişletilmiş ve kısıtlanmış işlemler için bu durumun mevcut olmadığını, Ali ve diğerleri (2011) çalışmasında örnekle göstermiştir. Biz ise bu çalışmada,  $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$  şartı ile dağılmanın sağlanabileceğini ifade ediyoruz.

3)  $T \cap Z' \cap M' = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$  ise  $(F,T) \cap_{\varepsilon} [(G,Z) \setminus_{\varepsilon} (H,M)] = [(F,T) \cap_{\varepsilon} (G,Z)] \setminus_{\varepsilon} [(F,T) \cap_{\varepsilon} (H,M)]$ .

*İspat:* Öncelikle şu hususu belirtmekte fayda görüyoruz. Klasik kümelerde, kesişim işlemi fark işlemine soldan dağılır. Fakat genişletilmiş ve kısıtlanmış işlemler için bu durumun mevcut olmadığını  $T \cap Z' \cap M' = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$  şartı ile dağılmanın sağlanabileceğini ifade ediyoruz. İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım.  $(G,Z) \setminus_{\varepsilon} (H,M) = (R, Z \cup M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in Z \cup M$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus Z \\ G(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F,T) \cap_{\varepsilon} (R, Z \cup M) = (N, (T \cup (Z \cup M)))$  bakalım.  $\forall \alpha \in T \cup (Z \cup M)$ ;

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus (Z \cup M) \\ R(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) \setminus T \\ F(\alpha) \cap R(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus M) \setminus T = T' \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus Z) \setminus T = T' \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus T = T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \cap [G(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z)] \setminus_{\varepsilon} [(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M)]$  bakalım.  $(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z) = (K, T \cup Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup Z$ ;

$$M(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M) = (S, T \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup Z) \setminus_{\varepsilon} (S, T \cup M) = (L, (T \cup Z) \cup (T \cup M))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup (T \cup M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \setminus (T \cup M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \setminus (T \cup Z) \\ K(\alpha) \setminus S(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap (T \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

|                                                                   |                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $F(\alpha)$                                                       | $\alpha \in (T \setminus Z) \setminus (T \cup M) = \emptyset$         |
| $G(\alpha)$                                                       | $\alpha \in (Z \setminus T) \setminus (T \cup M) = T' \cap Z \cap M'$ |
| $F(\alpha) \cap G(\alpha)$                                        | $\alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cup M) = \emptyset$              |
| $F(\alpha)$                                                       | $\alpha \in (T \setminus M) \setminus (T \cup Z) = \emptyset$         |
| $H(\alpha)$                                                       | $\alpha \in (M \setminus T) \setminus (T \cup Z) = T' \cap Z' \cap M$ |
| $F(\alpha) \cap H(\alpha)$                                        | $\alpha \in (T \cap M) \setminus (T \cup Z) = \emptyset$              |
| $F(\alpha) \setminus F(\alpha)$                                   | $\alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \setminus M) = T \cap Z' \cap M'$ |
| $L(\alpha) = F(\alpha) \setminus H(\alpha)$                       | $\alpha \in (T \setminus Z) \cap (M \setminus T) = \emptyset$         |
| $F(\alpha) \setminus [F(\alpha) \cap H(\alpha)]$                  | $\alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z' \cap M$       |
| $G(\alpha) \setminus F(\alpha)$                                   | $\alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \setminus M) = \emptyset$         |
| $G(\alpha) \setminus H(\alpha)$                                   | $\alpha \in (Z \setminus T) \cap (M \setminus T) = T' \cap Z \cap M$  |
| $G(\alpha) \setminus [F(\alpha) \cap H(\alpha)]$                  | $\alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \cap M) = \emptyset$              |
| $[F(\alpha) \cap G(\alpha)] \setminus F(\alpha)$                  | $\alpha \in (T \cap Z) \cap (T \setminus M) = T \cap Z \cap M'$       |
| $[F(\alpha) \cap G(\alpha)] \setminus H(\alpha)$                  | $\alpha \in (T \cap Z) \cap (M \setminus T) = \emptyset$              |
| $[F(\alpha) \cap G(\alpha)] \setminus [F(\alpha) \cap H(\alpha)]$ | $\alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z \cap M$             |

Buradan,

|                                             |                                |
|---------------------------------------------|--------------------------------|
| $G(\alpha)$                                 | $\alpha \in T' \cap Z \cap M'$ |
| $H(\alpha)$                                 | $\alpha \in T' \cap Z' \cap M$ |
| $\emptyset$                                 | $\alpha \in T \cap Z' \cap M'$ |
| $L(\alpha) = F(\alpha) \setminus H(\alpha)$ | $\alpha \in T \cap Z' \cap M$  |
| $G(\alpha) \setminus H(\alpha)$             | $\alpha \in T' \cap Z \cap M$  |
| $\emptyset$                                 | $\alpha \in T \cap Z \cap M'$  |
| $F(\alpha) \cap [G(\alpha) \cup H(\alpha)]$ | $\alpha \in T \cap Z \cap M$   |

$T \cap Z' \cap M' = T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M' = \emptyset$  için  $N = L$  olur.  $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M' = \emptyset$  şartının da  $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$  şartına denk olduğu aşıkardır.

4)  $T \cap Z' \cap M' = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$  ise  $(F, T) \cap_{\varepsilon} [(G, Z) \Delta_{\varepsilon} (H, M)] = [(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z)] \Delta_{\varepsilon} [(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M)]$ .

*İspat:* İspat, genişletilmiş kesişimin, genişletilmiş kesişime soldan dağılmasına çok benzer olduğundan burada tekrar verilmemiştir. Burada şu hususu belirtmekte fayda görüyoruz. Klasik kümelerde, kesişim işlemi simetrik fark işlemine soldan dağılır. Fakat genişletilmiş

ve kısıtlanmış işlemler için bu durumun mevcut olmadığını  $T \cap Z' \cap M' = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$  şartı ile dağılmanın sağlanabileceğini ifade ediyoruz.

$$5) T \cap Z' \cap M' = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset \text{ ise } (F, T) \cap_{\varepsilon} [(G, Z) \gamma_{\varepsilon} (H, M)] = [(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z)] \gamma_{\varepsilon} [(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M)].$$

*İspat:* İlk olarak şu hususu belirtmekte fayda görüyoruz. Klasik kümelerde, kesişim işlemi gamma işlemine soldan dağılır. Fakat genişletilmiş ve kısıtlanmış işlemler için bu durumun mevcut olmadığını  $T \cap Z' \cap M' = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$  şartı ile dağılmanın sağlanabileceğini ifade ediyoruz. İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım.  $(G, Z) \gamma_{\varepsilon} (H, M) = (R, Z \cup M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in Z \cup M$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus Z \\ G(\alpha) \gamma H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) \cap_{\varepsilon} (R, Z \cup M) = (N, (T \cup (Z \cup M)))$  bakalım.  $\forall \alpha \in T \cup (Z \cup M)$ ;

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus (Z \cup M) \\ R(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) \setminus T \\ F(\alpha) \cap R(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus M) \setminus T = T' \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus Z) \setminus T = T' \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \gamma H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus T = T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \cap [G(\alpha) \gamma H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z)] \gamma [(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M)]$  bakalım.  $(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z) = (K, T \cup Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup Z$ ;

$$M(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M) = (S, T \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup Z) \gamma_{\varepsilon}(S, T \cup M) = (L, (T \cup Z) \cup (T \cup M))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup (T \cup M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \setminus (T \cup M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \setminus (T \cup Z) \\ K(\alpha) \gamma S(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap (T \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \setminus (T \cup M) = \emptyset \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \setminus (T \cup M) = T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cup M) = \emptyset \\ F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus M) \setminus (T \cup Z) = \emptyset \\ H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus T) \setminus (T \cup Z) = T' \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (T \cup Z) = \emptyset \\ F(\alpha) \gamma F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \setminus M) = T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \gamma H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (M \setminus T) = \emptyset \\ F(\alpha) \gamma [F(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \gamma F(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \setminus M) = \emptyset \\ G(\alpha) \gamma H(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (M \setminus T) = T' \cap Z \cap M \\ G(\alpha) \gamma [F(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \cap M) = \emptyset \\ [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \gamma F(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \gamma H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (M \setminus T) = \emptyset \\ [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \gamma [F(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z' \cap M \\ \emptyset & \alpha \in T \cap Z' \cap M' \\ \emptyset & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \gamma H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) \gamma G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap [G(\alpha) \gamma H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

$T \cap Z' \cap M' = T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M' = \emptyset$  için  $N=L$  olur.  $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M' = \emptyset$  şartının da  $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$  şartına denk olduğu aşıkardır.

ii) Genişletilmiş kesişim işleminin genişletilmiş işlemlere sağdan dağılması:

$$1) [(F,T) \cap_{\varepsilon} (G,Z)] \cap_{\varepsilon} (H,M) = [(F,T) \cap_{\varepsilon} (H,M)] \cap_{\varepsilon} [(G,Z) \cap_{\varepsilon} (H,M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım.  $(F,T) \cap_{\varepsilon} (G,Z) = (R, T \cup Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup Z$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T \cup Z) \cap_{\varepsilon} (H,M) = (N, (T \cup Z) \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup M$ ;

$$N(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus (T \cup Z) \\ R(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \setminus M = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \setminus M = T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus M = T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus (T \cup Z) = T' \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F,T) \cap_{\varepsilon} (H,M)] \cap_{\varepsilon} [(G,Z) \cap_{\varepsilon} (H,M)]$  bakalım.

$(F,T) \cap_{\varepsilon} (H,M) = (K, T \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(G,Z) \cap_{\varepsilon} (H,M) = (S, T \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cup M$ ;

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus Z \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup M) \cap_{\varepsilon} (S, Z \cup M) = (L, (T \cup M) \cup (Z \cup M))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cup M) \cup (Z \cup M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \setminus (Z \cup M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) \setminus (T \cup M) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus M) \setminus (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus T) \setminus (Z \cup M) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cup M) = \emptyset \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus M) \setminus (T \cup M) = T' \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus Z) \setminus (T \cup M) = \emptyset \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus (T \cup M) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \setminus M) \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus M) \cap (M \setminus Z) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T \setminus M) \cap (Z \cap M) = \emptyset \\ H(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (M \setminus T) \cap (Z \setminus M) = \emptyset \\ H(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus T) \cap (M \setminus Z) = T' \cap Z' \cap M \\ H(\alpha) \cap [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (M \setminus T) \cap (Z \cap M) = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cap H(\alpha)] \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \setminus M) = \emptyset \\ [F(\alpha) \cap H(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \cap H(\alpha)] \cap [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z' \cap M \\ H(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \cap H(\alpha)] \cap [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

$N = L$  sağlanmış olur.

2)  $(T \Delta Z) \cap M = \emptyset$  ise  $[(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z)] \cap_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M)] \cup_{\varepsilon} [(G, Z) \cap_{\varepsilon} (H, M)]$ .

*İspat:* İspat, genişletilmiş kesişimin, genişletilmiş kesişime sağdan dağılmasına çok benzer olduğundan burada tekrar verilmemiştir. Burada şu hususu belirtmekte fayda görüyoruz. Klasik kümelerde, kesişim işlemi birleşim işlemine sağdan dağılır. Fakat genişletilmiş işlemler için bu durumun mevcut olmadığını,  $(T \Delta Z) \cap M = \emptyset$  şartı ile dağılmanın sağlanabileceğini ifade ediyoruz.

$$3)(T \Delta Z) \cap M = T \cap Z' \cap M' = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, Z)] \cap_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M)] \setminus_{\varepsilon} [(G, Z) \cap_{\varepsilon} (H, M)].$$

*İspat:* Öncelikle şu hususu belirtmekte fayda görüyoruz. Klasik kümelerde, kesişim işlemi fark işlemine sağdan dağılır. Fakat genişletilmiş işlemler için bu durumun mevcut olmadığını,  $(T \Delta Z) \cap M = T \cap Z' \cap M' = \emptyset$  şartı ile dağılmanın sağlanabileceğini ifade ediyoruz. İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım.  $(F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, Z) = (R, T \cup Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup Z$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T \cup Z) \cap_{\varepsilon} (H, M) = (N, (T \cup Z) \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup M$ ;

$$N(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus (T \cup Z) \\ R(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \setminus M = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \setminus M = T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus M = T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus (T \cup Z) = T' \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M)] \setminus_{\varepsilon} [(G, Z) \cap_{\varepsilon} (H, M)]$  bakalım.

$(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M) = (K, T \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(G, Z) \cap_{\varepsilon} (H, M) = (S, T \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cup M$ ;

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus Z \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup M) \setminus_{\varepsilon} (S, Z \cup M) = (L, (T \cup M) \cup (Z \cup M))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cup M) \cup (Z \cup M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \setminus (Z \cup M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) \setminus (T \cup M) \\ K(\alpha) \setminus S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus M) \setminus (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus T) \setminus (Z \cup M) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cup M) = \emptyset \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus M) \setminus (T \cup M) = T' \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus Z) \setminus (T \cup M) = \emptyset \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus (T \cup M) = \emptyset \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in (T \setminus M) \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus M) \cap (M \setminus Z) = \emptyset \\ F(\alpha) \setminus [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T \setminus M) \cap (Z \cap M) = \emptyset \\ H(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in (M \setminus T) \cap (Z \setminus M) = \emptyset \\ H(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus T) \cap (M \setminus Z) = T' \cap Z' \cap M \\ H(\alpha) \setminus [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (M \setminus T) \cap (Z \cap M) = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cap H(\alpha)] \setminus G(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \setminus M) = \emptyset \\ [F(\alpha) \cap H(\alpha)] \setminus H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \cap H(\alpha)] \setminus [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ \emptyset & \alpha \in T' \cap Z' \cap M \\ H(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ \emptyset & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) \setminus [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

$T' \cap Z' \cap M = T' \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$  için  $N=L$  olur.  $T' \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$  şartının  $(T \Delta Z) \cap M = \emptyset$  şartına denk olduğu aşıkardır.

$$4) (T \Delta Z) \cap M = T \cap Z' \cap M' = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \Delta_{\varepsilon} (G, Z)] \cap_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M)] \Delta_{\varepsilon} [(G, Z) \cap_{\varepsilon} (H, M)].$$

*İspat:* İspat, genişletilmiş kesişimin, genişletilmiş kesişime sağdan dağılmasına çok benzer olduğundan burada tekrar verilmemiştir. Burada şu hususu belirtmekte fayda görüyoruz. Klasik kümelerde, kesişim işlemi fark işlemine sağdan dağılır. Fakat genişletilmiş işlemler için bu durumun mevcut olmadığını,  $(T \Delta Z) \cap M = T \cap Z' \cap M' = \emptyset$  şartı ile dağılmanın sağlanabileceğini ifade ediyoruz.

$$5) (T \Delta Z) \cap M = T \cap Z' \cap M' = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \gamma_{\varepsilon} (G, Z)] \cap_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M)] \gamma_{\varepsilon} [(G, Z) \cap_{\varepsilon} (H, M)].$$

*İspat:* Öncelikle şu hususu belirtmekte fayda görüyoruz. Klasik kümelerde, kesişim işlemi gamma işlemine sağdan dağılır. Fakat genişletilmiş işlemler için bu durumun mevcut olmadığını,  $(T \Delta Z) \cap M = T \cap Z' \cap M' = \emptyset$  şartı ile dağılmanın sağlanabileceğini ifade ediyoruz. İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım.  $(F, T) \gamma_{\varepsilon} (G, Z) = (R, T \cup Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup Z$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \gamma G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T \cup Z) \cap_{\varepsilon} (H, M) = (N, (T \cup Z) \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup M$ ;

$$N(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus (T \cup Z) \\ R(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$\begin{array}{lcl}
 N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \\ G(\alpha) \\ F(\alpha) \gamma G(\alpha) \\ H(\alpha) \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) \\ [F(\alpha) \gamma G(\alpha)] \cap H(\alpha) \end{cases} & \begin{array}{l} \alpha \in (T \setminus Z) \setminus M = T \cap Z' \cap M' \\ \alpha \in (Z \setminus T) \setminus M = T' \cap Z \cap M' \\ \alpha \in (T \cap Z) \setminus M = T \cap Z \cap M' \\ \alpha \in M \setminus (T \cup Z) = T' \cap Z' \cap M \\ \alpha \in (T \setminus Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ \alpha \in (Z \setminus T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{array}
 \end{array}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M)] \gamma_{\varepsilon} [(G, Z) \cap_{\varepsilon} (H, M)]$  bakalım.

$(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M) = (K, T \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(G, Z) \cap_{\varepsilon} (H, M) = (S, T \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cup M$ ;

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus Z \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup M) \gamma_{\varepsilon} (S, Z \cup M) = (L, (T \cup M) \cup (Z \cup M))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cup M) \cup (Z \cup M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \setminus (Z \cup M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) \setminus (T \cup M) \\ K(\alpha) \gamma S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

|                                                              |                                                                       |
|--------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $F(\alpha)$                                                  | $\alpha \in (T \setminus M) \setminus (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M'$ |
| $H(\alpha)$                                                  | $\alpha \in (M \setminus T) \setminus (Z \cup M) = \emptyset$         |
| $F(\alpha) \cap H(\alpha)$                                   | $\alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cup M) = \emptyset$              |
| $G(\alpha)$                                                  | $\alpha \in (Z \setminus M) \setminus (T \cup M) = T' \cap Z \cap M'$ |
| $H(\alpha)$                                                  | $\alpha \in (M \setminus Z) \setminus (T \cup M) = \emptyset$         |
| $G(\alpha) \cap H(\alpha)$                                   | $\alpha \in (Z \cap M) \setminus (T \cup M) = \emptyset$              |
| $F(\alpha) \cup G(\alpha)$                                   | $\alpha \in (T \setminus M) \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M'$  |
| $L(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha)$                       | $\alpha \in (T \setminus M) \cap (M \setminus Z) = \emptyset$         |
| $F(\alpha) \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)]$                  | $\alpha \in (T \setminus M) \cap (Z \cap M) = \emptyset$              |
| $H(\alpha) \cup G(\alpha)$                                   | $\alpha \in (M \setminus T) \cap (Z \setminus M) = \emptyset$         |
| $H(\alpha) \cup H(\alpha)$                                   | $\alpha \in (M \setminus T) \cap (M \setminus Z) = T' \cap Z' \cap M$ |
| $H(\alpha) \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)]$                  | $\alpha \in (M \setminus T) \cap (Z \cap M) = T' \cap Z \cap M$       |
| $[F(\alpha) \cap H(\alpha)] \cup G(\alpha)$                  | $\alpha \in (T \cap M) \cap (Z \setminus M) = \emptyset$              |
| $[F(\alpha) \cap H(\alpha)] \cup H(\alpha)$                  | $\alpha \in (T \cap M) \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M$       |
| $[F(\alpha) \cap H(\alpha)] \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)]$ | $\alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M$             |

Böylece,

|                                                              |                                |
|--------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| $F(\alpha)$                                                  | $\alpha \in T \cap Z' \cap M'$ |
| $G(\alpha)$                                                  | $\alpha \in T' \cap Z \cap M'$ |
| $F(\alpha) \cup G(\alpha)$                                   | $\alpha \in T \cap Z \cap M'$  |
| $L(\alpha) = \emptyset$                                      | $\alpha \in T' \cap Z' \cap M$ |
| $\emptyset$                                                  | $\alpha \in T' \cap Z \cap M$  |
| $H(\alpha) \setminus F(\alpha)$                              | $\alpha \in T \cap Z' \cap M$  |
| $[F(\alpha) \cap H(\alpha)] \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)]$ | $\alpha \in T \cap Z \cap M$   |

$T' \cap Z' \cap M = T' \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$  için  $N=L$  olur.  $T' \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$  şartının  $(T \Delta Z) \cap M = \emptyset$  şartına denk olduğu aşikardır.

Genişletilmiş kesişim işleminin esnek ikili parçalı işlemlere dağılması:

Burada, genişletilmiş kesişim işleminin, esnek ikili parçalı işlemlere dağılmasına bakılmıştır. İlk olarak sağdan dağılmalar, peşinden soldan dağılmalar incelenmiştir.

i) Genişletilmiş kesişim işleminin esnek ikili parçalı işlemlere soldan dağılması:

$$1) T \cap Z \cap M' = \emptyset \text{ ise } (F, T) \cap_{\varepsilon} [(G, Z) \widetilde{\cup} (H, M)] = [(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z)] \widetilde{\cup} [(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım.  $(G, Z) \widetilde{\cup} (H, M) = (R, Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) \cap_{\varepsilon} (R, Z) = (N, T \cup Z)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cup Z$ ;

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ R(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cap R(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus M) \setminus T = T' \cap Z \cap M' \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus T = T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z)] \widetilde{\cup} [(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M)]$  bakalım.  $(F, T) \cap_{\varepsilon}$

$(G, Z) = (K, T \cup Z)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cup Z$ ;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M) = (S, T \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup Z) \widetilde{\cup} (S, T \cup M) = (L, (T \cup Z) \cup (T \cup M))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup (T \cup M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \setminus (T \cup M) \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap (T \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

|               |                                                              |                                                                       |
|---------------|--------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $L(\alpha) =$ | $F(\alpha)$                                                  | $\alpha \in (T \setminus Z) \setminus (T \cup M) = \emptyset$         |
|               | $G(\alpha)$                                                  | $\alpha \in (Z \setminus T) \setminus (T \cup M) = T' \cap Z \cap M'$ |
|               | $F(\alpha) \cap G(\alpha)$                                   | $\alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cup M) = \emptyset$              |
|               | $F(\alpha) \cup F(\alpha)$                                   | $\alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \setminus M) = T \cap Z' \cap M'$ |
|               | $F(\alpha) \cup H(\alpha)$                                   | $\alpha \in (T \setminus Z) \cap (M \setminus T) = \emptyset$         |
|               | $F(\alpha) \cup [F(\alpha) \cap H(\alpha)]$                  | $\alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z' \cap M$       |
|               | $G(\alpha) \cup F(\alpha)$                                   | $\alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \setminus M) = \emptyset$         |
|               | $G(\alpha) \cup H(\alpha)$                                   | $\alpha \in (Z \setminus T) \cap (M \setminus T) = T' \cap Z \cap M$  |
|               | $G(\alpha) \cup [F(\alpha) \cap H(\alpha)]$                  | $\alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \cap M) = \emptyset$              |
|               | $[F(\alpha) \cap G(\alpha)] \cup F(\alpha)$                  | $\alpha \in (T \cap Z) \cap (T \setminus M) = T \cap Z \cap M'$       |
|               | $[F(\alpha) \cap G(\alpha)] \cup H(\alpha)$                  | $\alpha \in (T \cap Z) \cap (M \setminus T) = \emptyset$              |
|               | $[F(\alpha) \cap G(\alpha)] \cup [F(\alpha) \cap H(\alpha)]$ | $\alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z \cap M$             |

Buradan,

|               |                                             |                                |
|---------------|---------------------------------------------|--------------------------------|
| $L(\alpha) =$ | $G(\alpha)$                                 | $\alpha \in T' \cap Z \cap M'$ |
|               | $F(\alpha)$                                 | $\alpha \in T \cap Z' \cap M'$ |
|               | $F(\alpha)$                                 | $\alpha \in T \cap Z' \cap M$  |
|               | $G(\alpha) \cup H(\alpha)$                  | $\alpha \in T' \cap Z \cap M$  |
|               | $F(\alpha)$                                 | $\alpha \in T \cap Z \cap M'$  |
|               | $F(\alpha) \cap [G(\alpha) \cup H(\alpha)]$ | $\alpha \in T \cap Z \cap M$   |

Burada;  $N$  fonksiyonundaki,  $T \setminus Z$  yi ele alırsak,  $T \setminus Z = T \cap Z'$  olup, bir eleman  $Z$  nin tümleyeninde ise o eleman ya  $M \setminus Z$  de, ya da  $M \cup Z$  nin tümleyenindedir. Burdan,  $\alpha \in T \setminus Z$  ise  $\alpha \in T \cap M \cap Z'$  veya  $\alpha \in T \cap M' \cap Z'$  olduğuna dikkat edecek olursak,  $T \cap Z \cap M' = \emptyset$  şartı ile  $N = L$  sağlanır.

$$2) T \cap Z' \cap M = \emptyset \text{ ise } (F, T) \cap_{\varepsilon} [(G, Z) \widetilde{\cap} (H, M)] = [(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z)] \widetilde{\cap} [(F, M) \cap_{\varepsilon} (G, Z)].$$

$$3) T \cap Z' \cap M' = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset \text{ ise } (F, T) \cap_{\varepsilon} [(G, Z) \widetilde{\cap} (H, M)] [(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z)] \widetilde{\cap} [(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım.  $(G, Z) \widetilde{\cap} (H, M) = (R, Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ G(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F,T) \cap_{\varepsilon} (R,Z) = (N,T \cup Z)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cup Z$ ;

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ R(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cap R(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus M) \setminus T = T' \cap Z \cap M' \\ G(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus T = T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap [G(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F,T) \cap_{\varepsilon} (G,Z)] \sim [(F,T) \cap_{\varepsilon} (H,M)]$  bakalım.  $(F,T) \cap_{\varepsilon}$

$(G,Z) = (K,T \cup Z)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cup Z$ ;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F,T) \cap_{\varepsilon} (H,M) = (S,T \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(K,T \cup Z) \sim (S,T \cup M) = (L,(T \cup Z) \cup (T \cup M))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup (T \cup M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \setminus (T \cup M) \\ K(\alpha) \setminus S(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap (T \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

|                                                                   |                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $F(\alpha)$                                                       | $\alpha \in (T \setminus Z) \setminus (T \cup M) = \emptyset$         |
| $G(\alpha)$                                                       | $\alpha \in (Z \setminus T) \setminus (T \cup M) = T' \cap Z \cap M'$ |
| $F(\alpha) \cap G(\alpha)$                                        | $\alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cup M) = \emptyset$              |
| $F(\alpha) \setminus F(\alpha)$                                   | $\alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \setminus M) = T \cap Z' \cap M'$ |
| $F(\alpha) \setminus H(\alpha)$                                   | $\alpha \in (T \setminus Z) \cap (M \setminus T) = \emptyset$         |
| $F(\alpha) \setminus [F(\alpha) \cap H(\alpha)]$                  | $\alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z' \cap M$       |
| $L(\alpha) = G(\alpha) \setminus F(\alpha)$                       | $\alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \setminus M) = \emptyset$         |
| $G(\alpha) \setminus H(\alpha)$                                   | $\alpha \in (Z \setminus T) \cap (M \setminus T) = T' \cap Z \cap M$  |
| $G(\alpha) \setminus [F(\alpha) \cap H(\alpha)]$                  | $\alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \cap M) = \emptyset$              |
| $[F(\alpha) \cap G(\alpha)] \setminus F(\alpha)$                  | $\alpha \in (T \cap Z) \cap (T \setminus M) = T \cap Z \cap M'$       |
| $[F(\alpha) \cap G(\alpha)] \setminus H(\alpha)$                  | $\alpha \in (T \cap Z) \cap (M \setminus T) = \emptyset$              |
| $[F(\alpha) \cap G(\alpha)] \setminus [F(\alpha) \cap H(\alpha)]$ | $\alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z \cap M$             |

Buradan,

|                                                  |                                |
|--------------------------------------------------|--------------------------------|
| $G(\alpha)$                                      | $\alpha \in T' \cap Z \cap M'$ |
| $\emptyset$                                      | $\alpha \in T \cap Z' \cap M'$ |
| $L(\alpha) = F(\alpha) \setminus H(\alpha)$      | $\alpha \in T \cap Z' \cap M$  |
| $G(\alpha) \setminus H(\alpha)$                  | $\alpha \in T' \cap Z \cap M$  |
| $\emptyset$                                      | $\alpha \in T \cap Z \cap M'$  |
| $F(\alpha) \cap [G(\alpha) \setminus H(\alpha)]$ | $\alpha \in T \cap Z \cap M$   |

$T \cap Z' \cap M' = T \cap Z \cap M' = T \cap Z' \cap M = \emptyset$  şartı ile  $N=L$  sağlanır.  $T \cap Z \cap M' = T \cap Z' \cap M = \emptyset$  şartının da  $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$  şartına denk olduğu aşikardır.

$$4) T \cap Z' \cap M' = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset \text{ ise } (F, T) \cap_{\varepsilon} [(G, Z) \overset{\sim}{\gamma} (H, M)] = [(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z)] \overset{\sim}{\gamma} [(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M)].$$

$$5) T \cap Z' \cap M' = T \cap (Z \Delta M) = \emptyset \text{ ise } (F, T) \cap_{\varepsilon} [(G, Z) \overset{\sim}{\Delta} (H, M)] = [(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z)] \overset{\sim}{\Delta} [(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım.  $(G, Z) \overset{\sim}{\Delta} (H, M) = (R, Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ G(\alpha) \Delta H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) \cap_{\varepsilon} (R, Z) = (N, T \cup Z)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cup Z$ ;

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ R(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cap R(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus M) \setminus T = T' \cap Z \cap M' \\ G(\alpha) \Delta H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus T = T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap [G(\alpha) \Delta H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z)] \overset{\sim}{\Delta} [(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M)]$  bakalım.  $(F, T) \cap_{\varepsilon}$

$(G, Z) = (K, T \cup Z)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cup Z$ ;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M) = (S, T \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup Z) \overset{\sim}{\Delta} (S, T \cup M) = (L, (T \cup Z) \cup (T \cup M))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup (T \cup M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \setminus (T \cup M) \\ K(\alpha) \Delta S(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap (T \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

|               |                                                                |                                                                       |
|---------------|----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $L(\alpha) =$ | $F(\alpha)$                                                    | $\alpha \in (T \setminus Z) \setminus (T \cup M) = \emptyset$         |
|               | $G(\alpha)$                                                    | $\alpha \in (Z \setminus T) \setminus (T \cup M) = T' \cap Z \cap M'$ |
|               | $F(\alpha) \cap G(\alpha)$                                     | $\alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cup M) = \emptyset$              |
|               | $F(\alpha) \Delta F(\alpha)$                                   | $\alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \setminus M) = T \cap Z' \cap M'$ |
|               | $F(\alpha) \Delta H(\alpha)$                                   | $\alpha \in (T \setminus Z) \cap (M \setminus T) = \emptyset$         |
|               | $F(\alpha) \Delta [F(\alpha) \cap H(\alpha)]$                  | $\alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z' \cap M$       |
|               | $G(\alpha) \Delta F(\alpha)$                                   | $\alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \setminus M) = \emptyset$         |
|               | $G(\alpha) \Delta H(\alpha)$                                   | $\alpha \in (Z \setminus T) \cap (M \setminus T) = T' \cap Z \cap M$  |
|               | $G(\alpha) \Delta [F(\alpha) \cap H(\alpha)]$                  | $\alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \cap M) = \emptyset$              |
|               | $[F(\alpha) \cap G(\alpha)] \Delta F(\alpha)$                  | $\alpha \in (T \cap Z) \cap (T \setminus M) = T \cap Z \cap M'$       |
|               | $[F(\alpha) \cap G(\alpha)] \Delta H(\alpha)$                  | $\alpha \in (T \cap Z) \cap (M \setminus T) = \emptyset$              |
|               | $[F(\alpha) \cap G(\alpha)] \Delta [F(\alpha) \cap H(\alpha)]$ | $\alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z \cap M$             |

Buradan,

|               |                                               |                                |
|---------------|-----------------------------------------------|--------------------------------|
| $L(\alpha) =$ | $G(\alpha)$                                   | $\alpha \in T' \cap Z \cap M'$ |
|               | $\emptyset$                                   | $\alpha \in T \cap Z' \cap M'$ |
|               | $F(\alpha) \setminus H(\alpha)$               | $\alpha \in T \cap Z' \cap M$  |
|               | $G(\alpha) \Delta H(\alpha)$                  | $\alpha \in T' \cap Z \cap M$  |
|               | $F(\alpha) \setminus G(\alpha)$               | $\alpha \in T \cap Z \cap M'$  |
|               | $F(\alpha) \cap [G(\alpha) \Delta H(\alpha)]$ | $\alpha \in T \cap Z \cap M$   |

$T \cap Z' \cap M' = T \cap Z \cap M' = T \cap Z' \cap M = \emptyset$  şartı ile  $N=L$  sağlanır.  $T \cap Z \cap M' = T \cap Z' \cap M = \emptyset$  şartının da  $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$  şartına denk olduğu aşikardır.

ii) Genişletilmiş kesişim işleminin esnek ikili parçalı işlemlere sağdan dağılması:

$$1) T \cap Z' \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \overset{\sim}{\cup} (G, Z)] \cap_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M)] \overset{\sim}{\cup} [(G, Z) \cap_{\varepsilon} (H, M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım.  $(F, T) \overset{\sim}{\cup} (G, Z) = (R, T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T) \cap_{\varepsilon} (H, M) = (N, T \cup M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$N(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ R(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \setminus M = T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus M = T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M)] \overset{\sim}{\cup} [(G, Z) \cap_{\varepsilon} (H, M)]$  bakalım.  $(F, T) \cap_{\varepsilon}$

$(H, M) = (K, T \cup M) \forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(G, Z) \cap_{\varepsilon} (H, M) = (S, T \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cup M$ ;

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus Z \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup M) \overset{\sim}{\cup} (S, Z \cup M) = (L, (T \cup M) \cup (Z \cup M))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cup M) \cup (Z \cup M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \setminus (Z \cup M) \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

|                                                              |                                                                       |
|--------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $\overline{F}(\alpha)$                                       | $\alpha \in (T \setminus M) \setminus (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M'$ |
| $H(\alpha)$                                                  | $\alpha \in (M \setminus T) \setminus (Z \cup M) = \emptyset$         |
| $F(\alpha) \cap H(\alpha)$                                   | $\alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cup M) = \emptyset$              |
| $F(\alpha) \cup G(\alpha)$                                   | $\alpha \in (T \setminus M) \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M'$  |
| $L(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha)$                       | $\alpha \in (T \setminus M) \cap (M \setminus Z) = \emptyset$         |
| $F(\alpha) \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)]$                  | $\alpha \in (T \setminus M) \cap (Z \cap M) = \emptyset$              |
| $H(\alpha) \cup G(\alpha)$                                   | $\alpha \in (M \setminus T) \cap (Z \setminus M) = \emptyset$         |
| $H(\alpha) \cup H(\alpha)$                                   | $\alpha \in (M \setminus T) \cap (M \setminus Z) = T' \cap Z' \cap M$ |
| $H(\alpha) \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)]$                  | $\alpha \in (M \setminus T) \cap (Z \cap M) = T' \cap Z \cap M$       |
| $[F(\alpha) \cap H(\alpha)] \cup G(\alpha)$                  | $\alpha \in (T \cap M) \cap (Z \setminus M) = \emptyset$              |
| $[F(\alpha) \cap H(\alpha)] \cup H(\alpha)$                  | $\alpha \in (T \cap M) \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M$       |
| $[F(\alpha) \cap H(\alpha)] \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)]$ | $\alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M$             |

Buradan,

|                                             |                                |
|---------------------------------------------|--------------------------------|
| $\overline{F}(\alpha)$                      | $\alpha \in T \cap Z' \cap M'$ |
| $F(\alpha) \cup G(\alpha)$                  | $\alpha \in T \cap Z \cap M'$  |
| $L(\alpha) = H(\alpha)$                     | $\alpha \in T' \cap Z' \cap M$ |
| $H(\alpha)$                                 | $\alpha \in T' \cap Z \cap M$  |
| $H(\alpha)$                                 | $\alpha \in T \cap Z' \cap M$  |
| $[F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap H(\alpha)$ | $\alpha \in T \cap Z \cap M$   |

Burada; N fonksiyonundaki,  $M \setminus T$  yi ele alırsak,  $M \setminus T = M \cap T'$  olup, bir eleman T nin tümleyeninde ise o eleman ya  $Z \setminus T$  de, ya da  $Z \cup T$  nin tümleyenindedir. Burdan,  $\alpha \in M \setminus T$  ise  $\alpha \in M \cap Z \cap T'$  veya  $\alpha \in M \cap Z' \cap T'$  olduğuna dikkat edecek olursak,  $T \cap Z' \cap M = \emptyset$  şartı ile  $N=L$  sağlanır.

$$2) T' \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \widetilde{\cap} (G, Z)] \cap_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M)] \widetilde{\cap} [(G, Z) \cap_{\varepsilon} (H, M)].$$

$$3) T' \cap Z' \cap M = (T \Delta Z) \cap M = \emptyset \text{ ise}$$

$$[(F, T) \widetilde{\setminus} (G, Z)] \cap_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M)] \widetilde{\setminus} [(G, Z) \cap_{\varepsilon} (H, M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım.  $(F, T) \widetilde{\setminus} (G, Z) = (R, T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T) \cap_{\varepsilon} (H, M) = (N, T \cup M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$N(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ R(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \setminus M = T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus M = T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M)] \sim [(G, Z) \cap_{\varepsilon} (H, M)]$  bakalım.  $(F, T) \cap_{\varepsilon}$

$(H, M) = (K, T \cup M) \forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(G, Z) \cap_{\varepsilon} (H, M) = (S, T \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cup M$ ;

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus Z \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup M) \sim (S, Z \cup M) = (L, (T \cup M) \cup (Z \cup M))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cup M) \cup (Z \cup M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \setminus (Z \cup M) \\ K(\alpha) \setminus S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

|               |                                                                   |                                                                       |
|---------------|-------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $L(\alpha) =$ | $F(\alpha)$                                                       | $\alpha \in (T \setminus M) \setminus (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M'$ |
|               | $H(\alpha)$                                                       | $\alpha \in (M \setminus T) \setminus (Z \cup M) = \emptyset$         |
|               | $F(\alpha) \cap H(\alpha)$                                        | $\alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cup M) = \emptyset$              |
|               | $F(\alpha) \setminus G(\alpha)$                                   | $\alpha \in (T \setminus M) \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M'$  |
|               | $F(\alpha) \setminus H(\alpha)$                                   | $\alpha \in (T \setminus M) \cap (M \setminus Z) = \emptyset$         |
|               | $F(\alpha) \setminus [G(\alpha) \cap H(\alpha)]$                  | $\alpha \in (T \setminus M) \cap (Z \cap M) = \emptyset$              |
|               | $H(\alpha) \setminus G(\alpha)$                                   | $\alpha \in (M \setminus T) \cap (Z \setminus M) = \emptyset$         |
|               | $H(\alpha) \setminus H(\alpha)$                                   | $\alpha \in (M \setminus T) \cap (M \setminus Z) = T' \cap Z' \cap M$ |
|               | $H(\alpha) \setminus [G(\alpha) \cap H(\alpha)]$                  | $\alpha \in (M \setminus T) \cap (Z \cap M) = T' \cap Z \cap M$       |
|               | $[F(\alpha) \cap H(\alpha)] \setminus G(\alpha)$                  | $\alpha \in (T \cap M) \cap (Z \setminus M) = \emptyset$              |
|               | $[F(\alpha) \cap H(\alpha)] \setminus H(\alpha)$                  | $\alpha \in (T \cap M) \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M$       |
|               | $[F(\alpha) \cap H(\alpha)] \setminus [G(\alpha) \cap H(\alpha)]$ | $\alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M$             |

Buradan,

|               |                                                  |                                |
|---------------|--------------------------------------------------|--------------------------------|
| $L(\alpha) =$ | $F(\alpha)$                                      | $\alpha \in T \cap Z' \cap M'$ |
|               | $F(\alpha) \setminus G(\alpha)$                  | $\alpha \in T \cap Z \cap M'$  |
|               | $\emptyset$                                      | $\alpha \in T' \cap Z' \cap M$ |
|               | $H(\alpha) \setminus G(\alpha)$                  | $\alpha \in T' \cap Z \cap M$  |
|               | $\emptyset$                                      | $\alpha \in T \cap Z' \cap M$  |
|               | $[F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cap H(\alpha)$ | $\alpha \in T \cap Z \cap M$   |

Burada;  $N$  fonksiyonundaki,  $M \setminus T$  yi ele alırsak,  $M \setminus T = M \cap T'$  olup, bir eleman  $T$  nin tümleyeninde ise o eleman ya  $Z \setminus T$  de, ya da  $Z \cup T$  nin tümleyenindedir. Burdan,  $\alpha \in M \setminus T$  ise  $\alpha \in M \cap Z \cap T'$  veya  $\alpha \in M \cap Z' \cap T'$  olduğuna dikkat edecek olursak,  $T' \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = T' \cap Z' \cap M = \emptyset$  şartı ile  $N=L$  sağlanır.  $T' \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$  şartının  $(T \Delta Z) \cap M = \emptyset$  şartına denk olduğu aşıkardır.

$$4) [(F, T) \tilde{\gamma} (G, Z)] \cap_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M)] \tilde{\gamma} [(G, Z) \cap_{\varepsilon} (H, M)]$$

(eğer  $T' \cap Z' \cap M = (T \Delta Z) \cap M = \emptyset$  ise).

$$5) [(F, T) \tilde{\Delta} (G, Z)] \cap_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M)] \tilde{\Delta} [(G, Z) \cap_{\varepsilon} (H, M)]$$

(eğer  $T' \cap Z' \cap M = (T \Delta Z) \cap M = \emptyset$  ise).

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım.  $(F, T) \tilde{\Delta} (G, Z) = (R, T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ F(\alpha) \Delta G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T) \cap_{\varepsilon} (H, M) = (N, T \cup M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$N(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ R(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \setminus M = T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \Delta G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus M = T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \Delta G(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F, T) \cap_{\varepsilon} (H, M)] \tilde{\Delta} [(G, Z) \cap_{\varepsilon} (H, M)]$  bakalım.  $(F, T) \cap_{\varepsilon}$

$(H, M) = (K, T \cup M) \forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(G, Z) \cap_{\varepsilon} (H, M) = (S, T \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cup M$ ;

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus Z \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup M) \tilde{\Delta} (S, Z \cup M) = (L, (T \cup M) \cup (Z \cup M))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cup M) \cup (Z \cup M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \setminus (Z \cup M) \\ K(\alpha) \Delta S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

|               |                                                                |                                                                       |
|---------------|----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $L(\alpha) =$ | $F(\alpha)$                                                    | $\alpha \in (T \setminus M) \setminus (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M'$ |
|               | $H(\alpha)$                                                    | $\alpha \in (M \setminus T) \setminus (Z \cup M) = \emptyset$         |
|               | $F(\alpha) \cap H(\alpha)$                                     | $\alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cup M) = \emptyset$              |
|               | $F(\alpha) \Delta G(\alpha)$                                   | $\alpha \in (T \setminus M) \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M'$  |
|               | $F(\alpha) \Delta H(\alpha)$                                   | $\alpha \in (T \setminus M) \cap (M \setminus Z) = \emptyset$         |
|               | $F(\alpha) \Delta [G(\alpha) \cap H(\alpha)]$                  | $\alpha \in (T \setminus M) \cap (Z \cap M) = \emptyset$              |
|               | $H(\alpha) \Delta G(\alpha)$                                   | $\alpha \in (M \setminus T) \cap (Z \setminus M) = \emptyset$         |
|               | $H(\alpha) \Delta H(\alpha)$                                   | $\alpha \in (M \setminus T) \cap (M \setminus Z) = T' \cap Z' \cap M$ |
|               | $H(\alpha) \Delta [G(\alpha) \cap H(\alpha)]$                  | $\alpha \in (M \setminus T) \cap (Z \cap M) = T' \cap Z \cap M$       |
|               | $[F(\alpha) \cap H(\alpha)] \Delta G(\alpha)$                  | $\alpha \in (T \cap M) \cap (Z \setminus M) = \emptyset$              |
|               | $[F(\alpha) \cap H(\alpha)] \Delta H(\alpha)$                  | $\alpha \in (T \cap M) \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M$       |
|               | $[F(\alpha) \cap H(\alpha)] \Delta [G(\alpha) \cap H(\alpha)]$ | $\alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M$             |

Buradan,

|               |                                               |                                |
|---------------|-----------------------------------------------|--------------------------------|
| $L(\alpha) =$ | $F(\alpha)$                                   | $\alpha \in T \cap Z' \cap M'$ |
|               | $F(\alpha) \Delta G(\alpha)$                  | $\alpha \in T \cap Z \cap M'$  |
|               | $\emptyset$                                   | $\alpha \in T' \cap Z' \cap M$ |
|               | $H(\alpha) \Delta G(\alpha)$                  | $\alpha \in T' \cap Z \cap M$  |
|               | $H(\alpha) \Delta F(\alpha)$                  | $\alpha \in T \cap Z' \cap M$  |
|               | $[F(\alpha) \Delta G(\alpha)] \cap H(\alpha)$ | $\alpha \in T \cap Z \cap M$   |

$T' \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = T' \cap Z' \cap M = \emptyset$  şartı ile  $N=L$  sağlanır.  $T' \cap Z \cap M = T \cap Z' \cap M = \emptyset$  şartının  $(T \Delta Z) \cap M = \emptyset$  şartına denk olduğu aşıkardır.

#### 4. KISITLANMIŞ VE GENİŞLETİLMİŞ BİRLEŞİM İŞLEMLERİ

Bu bölümde, öncelikle Ali ve diğerleri (2009) tarafından literatüre kazandırılmış olan kısıtlanmış birleşim işlemi; sonrasında ise Maji ve diğerleri (2003) tarafından literatüre kazandırılmış olan genişletilmiş birleşim adı verilen esnek küme işleminin cebirsel özellikleri klasik kümelerdeki birleşim işleminin özellikleri ile karşılaştırmalı olarak incelenmiş; sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde ve  $S_E(U)$  kümesi üzerinde bu işlemlerin hangi cebirsel yapıları oluşturduğu görmek için dağılma kurallarına bakılarak, diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkisi incelenmiştir.

Burada önemli bir hususu belirtmekte fayda görüyoruz. Kısıtlanmış birleşim işlemine ilk olarak, Ali ve diğerleri (2009) çalışmasında yer verilmesine rağmen, o çalışmada iki esnek kümenin kısıtlanmış birleşim işleminin tanımlı olması için kısıtlanmış birleşimi alınacak esnek kümelerin parametre kümelerinin kesişiminin boştan farklı olması, gerek şart olarak tanıma eklenmiş, kesişimin boş olması durumunda, işlem sonucunun ne olacağı ile ilgili bilgi verilmemiştir. Ali ve diğerleri (2011) çalışmasında ise kısıtlanmış birleşimi alınacak esnek kümelerin parametre kümelerinin kesişiminin boş olması durumunda işlem sonucunun ne olacağı ile ilgili bilgi notu vermiş olmasına rağmen, yine de tanımda esnek birleşimi alınacak olan esnek kümelerin parametre kümelerinin boştan farklı olması şartıyla tanımları yazmaları matematiksel olarak rahatsız edicidir. Bu açıdan, bu bölümde tüm bu durumlar göz altına alınarak güncellenmiş kısıtlanmış birleşim tanımı verilmiştir.

Ayrıca kısıtlanmış birleşim işleminin literatürdeki tanımı, her ne kadar bu bölümde detaylı olarak belirttiğimiz önemli hususlar göz önünde bulundurulmadan verilmiş olsa da, kısıtlanmış ve genişletilmiş birleşim işlemleri, daha önceden tanımlanmış işlemler olduğu için, bu bölümde yer alan bazı özellikler daha önceki çalışmalarda (Ali ve diğerleri 2009; Qin ve Hong, 2010; Ali ve diğerleri, 2011; Sezgin ve Atagün, 2011) verilmiştir. Fakat, çalışmaların çoğunda bu özelliklerin pek çoğu, ispatsız ve/veya detaysız ispatlı verilmiştir. Bu çalışmada ise fonksiyon eşitliğine dayalı ispatlar düzenli bir şekilde verilmiş olup; daha önceki çalışmalarda yer verilmemiş olan özellikle Pei ve Miao (2005) esnek alt küme tanımı ve kısıtlanmış/genişletilmiş birleşim işlemleri arasındaki ilişkiler, klasik kümelerdeki karşılıkları ile ilk defa bu çalışmada verilmiş ve yine detaylı ispatları ile sunulmuştur. Üstelik temel esnek küme işlemlerinden olan kısıtlanmış ve genişletilmiş

birleşim işlemlerine ait tüm özelliklerin, ispatlarıyla birlikte bir arada olması ve esnek kümelerin kısıtlanmış birleşimi için daha önceki çalışmalarda göz ardı edilen, esnek kümelerin parametre kümelerinin kesişiminin boş küme olması durumu da bu çalışmada, her bir özellik için göz ardı edilmeden değerlendirilmiş olduğundan, çalışma diğer tüm çalışmaları kapsayıcı nitelikte olup, bu açıdan, çalışmanın esnek küme teorisine yeni başlayanlar için, bir el kitabı niteliğinde olması ümidiyle çalışmamızı oldukça önemsemişimizi belirtmek istiyoruz.

#### 4.1. Kısıtlanmış Birleşim İşlemi ve Özellikleri

4.1.1. Tanım  $(F, T)$  ve  $(G, Z)$ ,  $U$  üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin  $(F, T) \cup_R (G, Z)$  ile gösterilen kısıtlanmış birleşim işlemi  $C = T \cap Z$  olmak üzere,  $C = T \cap Z \neq \emptyset$  ise  $\forall \alpha \in C$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$ ;  $C = T \cap Z = \emptyset$  ise  $(F, T) \cup_R (G, Z) = (H, C) = \emptyset_\emptyset$  olacak şekilde  $(F, T) \cup_R (G, Z) = (H, C)$  ile tanımlanır.

Parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme  $\emptyset_\emptyset$  olduğundan, tanımda  $C = T \cap Z = \emptyset$  ise,  $(F, T) \cup_R (G, Z) = \emptyset_\emptyset$  olduğu açıktır. Buradan, kısıtlanmış birleşim işleminin tanımlı olması için,  $(F, T)$  ve  $(G, Z)$ ,  $U$  üzerinde iki esnek küme olmak üzere,  $T \cap Z \neq \emptyset$  şartının bulunmadığı görülmektedir.

Bu tanıma ne Ali ve diğerleri (2009) ne de Ali ve diğerleri (2011) çalışmalarını referans olarak vermemiş olmamızın nedeni, 4. Bölümün giriş kısmında yaptığımız detaylı açıklamalar sebebiyle tanımın, parametre kümelerinin kesişiminin boş olması durumunun da değerlendirilerek, güncellenmiş olarak bu çalışmaya eklenmiş olmasından kaynaklıdır. Çalışmaların pek çoğunda (Ali ve diğerleri, 2009; Atagün ve Sezgin, 2011, Ali ve diğerleri, 2011; Singh ve Onyeozili, 2012c) kısıtlanmış birleşim işleminin geçtiği yerlerdeki özellikler bu şart ile yazılmış olup; esasen bu şartın bir gerek şart olmadığı bu çalışma boyunca ilgili yerlerde gösterilmiştir.

Kısıtlanmış birleşim işleminin gösterimi olan “ $\cup_R$ ” simgesinin altına yazı olan “R” harfi, İngilizcede “kısıtlanmış” anlamına gelen “restricted” kelimesi ile de uyumlu ve anlamlı bir bütün oluşturmaktadır. Zira, diğer esnek küme işlemleri çalışmalarında da kısıtlanmış esnek küme işlemleri için, bu gösterim formu tercih edilmiştir.

4.1.2. *Örnek*  $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$  parametre kümesi,  $T=\{e_1,e_3\}$ ,  $Z=\{e_2,e_3,e_4\}$   $E$ 'nin iki alt kümesi,  $U=\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$  evrensel küme,  $(F,T)$  ve  $(G,Z)$ ,  $U$  üzerinde  $(F,T)=\{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$ ,  $(G,Z)=\{(e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4\}), (e_4, \{h_3, h_5\})\}$  olarak tanımlanan iki esnek küme olsun.  $(F,T) \cup_R (G,Z) = (H, T \cap Z)$  olmak üzere  $\forall \alpha \in T \cap Z = \{e_3\}$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$ ,  $H(e_3) = F(e_3) \cup G(e_3) = \{h_1, h_2, h_5\} \cup \{h_2, h_3, h_4\} = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ . Böylece,  $(F,T) \cup_R (G,Z) = \{(e_3, \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\})\}$ .

#### 4.1.3. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1)  $\cup_R$ ,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde kapalıdır.

*İspat:*  $\cup_R$  işleminin,  $S_E(U)$  üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$\cup_R: S_E(U) \times S_E(U) \rightarrow S_E(U)$$

$$((F,T), (G,Z)) \rightarrow (F,T) \cup_R (G,Z) = (H, T \cap Z)$$

olup,  $(F,T)$  ve  $(G,Z)$ ,  $U$  üzerinde iki esnek küme olduğunda  $(F,T) \cup_R (G,Z)$  de,  $U$  üzerinde bir esnek kümedir. Benzer şekilde,

$$\cup_R: S_T(U) \times S_T(U) \rightarrow S_T(U)$$

$$((F,T), (G,T)) \rightarrow (F,T) \cup_R (G,T) = (K, T \cap T) = (K, T)$$

olup,  $T$ ,  $E$  kümesinin sabit bir alt kümesi ve  $(F,T)$  ve  $(G,T)$ ,  $S_T(U)$  kümesinin elemanı olmak üzere,  $(F,T) \cup_R (G,T)$  de  $S_T(U)$  kümesinin elemanıdır. Yani  $\cup_R$  işlemi,  $S_T(U)$  kümesi üzerinde de kapalıdır.

2)  $[(F,T) \cup_R (G,Z)] \cup_R (H,M) = (F,T) \cup_R [(G,Z) \cup_R (H,M)]$  (Sezgin ve Atagün, 2011).

*İspat:* Sezgin ve Atagün (2011) çalışmalarında, bu özellik için, kısıtlanmış birleşim işlemleri alınacak esnek kümelerin parametre kümelerinin kesişiminin boştan farklı olması şartıyla ispatı yapmış olup; ispat için bu şart gerekli değildir.  $(F,T) \cup_R (G,Z) = (S, T \cap Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $T(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$ .  $(S, T \cap Z) \cup_R (H,M) = (R, (T \cap Z) \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cap M$  için,  $R(\alpha) = T(\alpha) \cup H(\alpha)$ . Böylece,

$$R(\alpha) = [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cup H(\alpha)$$

$(G,Z) \cup_R (H,M)=(K,Z \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cap M$  için,  $K(\alpha)=G(\alpha) \cup H(\alpha)$ .  
 $(F,T) \cup_R (K,Z \cap M) =(S,T \cap (Z \cap M))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap (Z \cap M)$  için,  $S(\alpha)=F(\alpha) \cup K(\alpha)$ .  
 Böylece,

$$S(\alpha)=F(\alpha) \cup [G(\alpha) \cup H(\alpha)]$$

Burada  $(R,(T \cap Z) \cap M)=(S, T \cap (Z \cap M))$  olduğu görülür. Yani  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\cup_R$  işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

$$3) [(F,T) \cup_R (G,T)] \cup_R (H,T)=(F,T) \cup_R [(G,T) \cup_R (H,T)].$$

*İspat:*  $(F,T) \cup_R (G,T)=(K,T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cap T=T$  için,  $K(\alpha)=F(\alpha) \cup G(\alpha)$ .  
 $(K,T) \cup_R (H,T)=(R,T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap T=T$  için,  $R(\alpha)=K(\alpha) \cup H(\alpha)$  olur. Böylece,

$$R(\alpha)=[F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cup H(\alpha)$$

$(G,T) \cup_R (H,T)=(L,T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cap T$  için,  $L(\alpha)=G(\alpha) \cup H(\alpha)$ .  $(F,T) \cup_R (L,T)=(N,T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cap T$  için,  $N(\alpha)=F(\alpha) \cup L(\alpha)$ . Böylece,

$$N(\alpha)=F(\alpha) \cup [G(\alpha) \cup H(\alpha)]$$

Buradan,  $(R,T)=(N,T)$  olduğu görülür. Yani, parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler kümesi üzerinde  $\cup_R$  işleminin birleşme özelliği vardır.

$$4) (F,T) \cup_R (G,Z)=(G,Z) \cup_R (F,T) \text{ (Qin ve Hong, 2010).}$$

*İspat:* Qin ve Hong (2010) çalışmasında bu özelliği ispatsız olarak vermiş olup; biz detaylı ispatıyla burada sunuyoruz.  $(F,T) \cup_R (G,Z)=(H,T \cap Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $H(\alpha)=F(\alpha) \cup G(\alpha)$ .  $(G,Z) \cup_R (F,T)=(S,Z \cap T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cap T$  için,  $S(\alpha)=G(\alpha) \cup F(\alpha)$ .  
 Böylece,  $(F,T) \cup_R (G,Z)=(G,Z) \cap \cup_R (F,T)$ .  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\cup_R$  işleminin değişme özelliği vardır.  $(F,T) \cup_R (G,T)=(G,T) \cup_R (F,T)$  olduğu, yani  $\cup_R$  işleminin parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler kümesi üzerinde de değişme özelliğine sahip olduğu açıktır.

5)  $(F,T) \cup_R (F,T) = (F,T)$  (Qin ve Hong, 2010).

*İspat:* Qin ve Hong (2010) çalışmasında bu özelliği ispatsız olarak vermiş olup; biz detaylı ispatıyla burada sunuyoruz.  $(F,T) \cup_R (F,T) = (H,T \cap T)$  olsun. Buradan,  $\forall \alpha \in T$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \cup F(\alpha) = F(\alpha)$  olur ve böylece  $(H,T) = (F,T)$  elde edilir. Yani  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\cup_R$  işlemi denk güçlülük (idempotent) özelliğine sahiptir.

6)  $(F,T) \cup_R \emptyset_T = \emptyset_T \cup_R (F,T) = (F,T)$ .

*İspat:* Ali ve diğerleri (2011) çalışmasında bu özelliği  $T$  ye göre boş küme sadece sağda yer alacak şekilde ve ispatsız bir biçimde vermiş olup, biz  $T$  ye göre boş kümenin hem sağ hem de solda yer aldığı özelliği detaylı şekilde ispatıyla veriyoruz.  $\emptyset_T = (K,T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T$  için,  $K(\alpha) = \emptyset$ .  $(F,T) \cup_R (K,T) = (H,T \cap T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \cup T(\alpha) = F(\alpha) \cup \emptyset = F(\alpha)$ . Böylece,  $(H,T) = (F,T)$ .  $T, E$  parametre kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere,  $S_T(U)$  kümesi üzerinde  $\cup_R$  işleminin birim elemanı  $\emptyset_T$  esnek kümesidir.

Burada  $(F,T) \cup_R (G,T) = (G,T) \cup_R (F,T) = \emptyset_T$  olacak şekilde  $(G,T) \in S_E(U)$  bulamayacağımızı aşıkardır. Buradan,  $S_T(U)$  kümesi üzerinde,  $\cup_R$  işleminin eskisiz elemanı olan  $\emptyset_T$  esnek kümesinden başka hiçbir elemanın tersi olmadığı sonucuna varabiliriz. Doğal olarak,  $\emptyset_T$  esnek kümesinin  $S_T(U)$  kümesi üzerinde,  $\cup_R$  işlemine göre etkisiz elemanı da kendisi yani  $\emptyset_T$  esnek kümesidir.

7)  $(F,T) \cup_R \emptyset_E = \emptyset_E \cup_R (F,T) = (F,T)$ .

*İspat:*  $\emptyset_E = (K,E)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in E$  için,  $K(\alpha) = \emptyset$ .  $(F,T) \cup_R (K,E) = (H, T \cap E)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap E = T$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \cup K(\alpha) = F(\alpha) \cup \emptyset = F(\alpha)$ . Böylece  $(H,T) = (F,T)$ .

Burada  $(F,T) \cup_R (G,Z) = (G,Z) \cup_R (F,T) = \emptyset_E$  olacak şekilde  $(G,Z) \in S_E(U)$  bulamayacağımızı hemen not edelim; çünkü bu  $T \cap Z = E$  olmasını, dolayısıyla  $T = E$  ve  $Z = E$  olmasını gerektirir. Buradan,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\cup_R$  işleminin eskisiz elemanı olan  $\emptyset_E$  esnek kümesinden başka hiçbir elemanın tersi olmadığı sonucuna varabiliriz. Doğal olarak,  $\emptyset_E$

esnek kümesinin  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\cup_R$  işlemine göre etkisiz elemanı da kendisi yani  $\emptyset_E$  esnek kümesidir.

4.1.3.1. *Sonuç* Teorem 4.1.3 (1), (2), (4), (5) ve (7)'den,  $(F,T)$ ,  $(G,Z)$  ve  $(H,M)$ ,  $S_E(U)$  kümesinin elemanları olmak üzere,  $(S_E(U), \cup_R)$  cebirsel yapısı birimi  $\emptyset_E$  olan, komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafestir.

$A \subseteq E$  sabit bir parametre kümesi olmak üzere, Teorem 4.1.3 (1), (3), (4), (5) ve (6) dan  $(S_A(U), \cup_R)$  cebirsel yapısı da birimi  $\emptyset_A$  olan komutatif, idempotent bir monoid yani sınırlı bir yarı-kafestir.

8)  $(F,T) \cup_R U_T = U_T \cup_R (F,T) = U_T$  (Ali ve diğerleri, 2011).

*İspat:* Ali ve diğerleri (2011) çalışmasında bu özelliği  $T$  ye göre evrensel esnek küme sadece sağda yer alacak şekilde ve ispatsız bir biçimde vermiş olup, biz  $T$  ye göre evrensel esnek kümenin hem sağ hem de solda yer aldığı özelliği detaylı şekilde ispatıyla veriyoruz.  $U_T = (S,T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T$  için,  $S(\alpha) = U$ .  $(F,T) \cup_R (S,T) = (H, T \cap T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \cup S(\alpha) = F(\alpha) \cup U = U$ . Böylece,  $(H,T) = U_T$ .  $S_T(U)$  kümesi üzerinde  $\cup_R$  işleminin yutan elemanı  $U_T$  esnek kümesidir.

9)  $(F,T) \cup_R U_E = U_E \cup_R (F,T) = U_T$ .

*İspat:*  $U_E = (S,E)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in E$  için,  $S(\alpha) = U$ .  $(F,T) \cup_R (S,E) = (H, T \cap E)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cap E = T$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \cup S(\alpha) = F(\alpha) \cup U = U$ . Böylece,  $(H,T) = U_T$ .

10)  $(F,T) \cup_R \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \cup_R (F,T) = \emptyset_\emptyset$ .

*İspat:*  $\emptyset_\emptyset = (S, \emptyset)$  olsun.  $(F,T) \cup_R (S, \emptyset) = (H, T \cap \emptyset) = (H, \emptyset)$  olup,  $\emptyset_\emptyset$  parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme olduğu için,  $(H, \emptyset) = \emptyset_\emptyset$ .

Yani,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\cap_R$  işleminin yutan elemanı  $\emptyset_\emptyset$  esnek kümesidir.

11)  $(F,T) \cup_R (F,T)^r = (F,T)^r \cup_R (F,T) = U_T$  (Sezgin ve Atagün, 2011).

*İspat:* Sezgin ve Atagün (2011) ve Ali ve diğerleri (2011) çalışmalarında, bu özelliği  $(F, T)$  esnek kümesinin tümleyeni sadece sağda yer alacak şekilde ve ispatsız bir biçimde vermiş olup, biz  $(F, T)$  esnek kümesinin tümleyeninin hem sağ hem de solda yer aldığı özelliği detaylı şekilde ispatıyla veriyoruz.  $(F, T)^r = (H, T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T$  için,  $H(\alpha) = F'(\alpha)$ .  $(F, T) \cup_R (H, T) = (L, T \cap T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T$  için,  $L(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha) = F(\alpha) \cup F'(\alpha) = U$ . Böylece,  $(L, T) = U_T$ .

12)  $[(F, T) \cup_R (G, Z)]^r = (F, T)^r \cap_R (G, Z)^r$  (De Morgan Kuralı) (Ali ve diğerleri, 2009).

*İspat:* Ali ve diğerleri, (2009) çalışmasında De Morgan özelliği için  $T \cap Z \neq \emptyset$  şartı ile üstelik ispatı nispeten uzun şekilde vermiştir. Biz bu çalışmada teorem için  $T \cap Z \neq \emptyset$  şartının gerek şart olmadığını belirterek ve ispatı daha sade bir sunumla veriyoruz.  $(F, T) \cup_R (G, Z) = (H, T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$ .  $(H, T \cap Z)^r = (K, T \cap Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $K(\alpha) = F'(\alpha) \cap G'(\alpha)$  olur. Böylece,  $(K, T \cap Z) = (F, T)^r \cap_R (G, Z)^r$ . Burada,  $T \cap Z \neq \emptyset$  ise sağ ve sol taraf  $\emptyset_\emptyset$  olacağından, eşitlik yine sağlanır. Yani, teorem için  $T \cap Z \neq \emptyset$  şartı gerek şart değildir.

13)  $(F, T) \cup_R (G, T) = U_T \Leftrightarrow (F, T) = \emptyset_T$  ve  $(G, T) = \emptyset_T$  (Sezgin ve Atagün, 2011).

*İspat:*  $(F, T) \cup_R (G, T) = (K, T \cap T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$ .  $(K, T) = \emptyset_T$  olduğundan,  $\forall \alpha \in T$  için,  $K(\alpha) = \emptyset$ . Böylece,  $\forall \alpha \in T$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha) = \emptyset \Leftrightarrow \forall \alpha \in T$  için,  $F(\alpha) = \emptyset$  ve  $G(\alpha) = \emptyset \Leftrightarrow (F, T) = \emptyset_T$  ve  $(G, T) = \emptyset_T$ .

Sezgin ve Atagün (2011) çalışmasında, kısıtlanmış birleşim ve esnek alt küme ile ilgili özellikleri, Maji ve diğerleri (2003) çalışmasında yer alan esnek alt küme tanımına göre incelemiş olup, bizler bu çalışmada aşağıda yer alan esnek alt küme ile ilgili özellikleri, Pei ve Miao (2005) çalışmasında yer alan esnek alt küme tanımına göre inceleyeceğiz. Bu sebepten, esnek alt küme ile ilgili bu özellikler daha önceki çalışmalarda yer almamıştır.

14)  $\emptyset_\emptyset \subseteq (F, T) \cup_R (G, Z)$  ve  $(F, T) \cup_R (G, Z) \subseteq U_T$  ve  $(F, T) \cup_R (G, Z) \subseteq U_Z$ .

*İspat:* Boş kümenin her kümenin alt kümesi olmasından ve evrensel kümenin her kümeyi kapsamamasından ispat açıktır.

15)  $(F,T) \cong (F,T) \cup_R (G,Z)$  ve  $(G,Z) \cong (F,T) \cup_R (G,Z)$ .

*İspat:*  $(F,T) \cup_R (G,Z) = (H, T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$  olur. Böylece,  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $F(\alpha) \subseteq F(\alpha) \cup G(\alpha) = H(\alpha)$ . Böylece,  $(F,T) \cong (F,T) \cup_R (G,Z)$ .  $G(\alpha) \subseteq F(\alpha) \cup G(\alpha)$  olduğundan,  $(G,Z) \cong (F,T) \cup_R (G,Z)$ . Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  ise bu özellikler sağlanmayacak olup;  $(F,T) \cong (F,T) \cup_R (G,Z)$  ancak  $T = \emptyset$  şartı ile;  $(G,Z) \cong (F,T) \cup_R (G,Z)$  ancak  $Z = \emptyset$  şartı ile sağlanır.

16)  $(F,T) \cong (G,Z)$  ancak ve ancak  $(F,T) \cup_R (G,Z) = (G,T)$ .

*İspat:*  $(F,T) \cong (G,Z)$  olsun. Buradan,  $T \subseteq Z$  ve  $\forall \alpha \in T$  için,  $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ .  $(F,T) \cup_R (G,Z) = (K, T \cap Z = T)$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in T$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha) = G(\alpha)$ . Böylece,  $(K,T) = (F,T) \cup_R (G,Z) = (G,T)$ . Tersine,  $(F,T) \cup_R (G,Z) = (G,T)$  olsun. Buradan,  $T \cap Z = T$  olup,  $T \subseteq Z$ . Ayrıca,  $\forall \alpha \in T$  için,  $F(\alpha) \cup G(\alpha) = G(\alpha)$  olup,  $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ . Böylece,  $(F,T) \cong (G,Z)$ .

17)  $(F,T) \cong (G,Z)$  ise  $(F,T) \cup_R (H,M) \cong (G,Z) \cup_R (H,M)$ .

*İspat:*  $(F,T) \cong (G,Z)$  olsun. Buradan,  $T \subseteq Z$ ,  $\forall \alpha \in T$  için,  $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ .  $(F,T) \cup_R (H,M) = (K, T \cap M)$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha)$ .  $(G,Z) \cup_R (H,M) = (L, Z \cap M)$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in Z \cap M$  için,  $L(\alpha) = G(\alpha) \cup H(\alpha)$ . Buradan,  $T \cap M \subseteq Z \cap M$  olup,  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha) \subseteq G(\alpha) \cup H(\alpha) = L(\alpha)$  olup,  $(F,T) \cup_R (H,M) \cong (G,Z) \cup_R (H,M)$ .

Burada,  $T \cap M = \emptyset$  ise ispat yine açıktır;  $Z \cap M = \emptyset$  ise  $T \cap M \subseteq Z \cap M$  olduğundan, bu durum  $Z \cap M = \emptyset$  olmasını gerektireceğinden ispat yine açıktır. Yani kısıtlanmış birleşimleri alınacak esnek kümelerin parametre kümelerinin kesişimin boş kümeden farklı küme olması şartı yoktur.

18)  $(F,T) \cup_R (H,M) \cong (G,Z) \cup_R (H,M)$  ise  $(F,T) \cong (G,Z)$  olmak zorunda değildir. Yani Teorem 4.1.3 (17) nin tersi doğru değildir.

*İspat:* Teorem 4.1.3 (17) nın tersi doğru olmadığını göstermek için bir örnek verelim.  $E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  parametre kümesi,  $T=\{e_1, e_3\}$ ,  $Z=\{e_1, e_3, e_5\}$ ,  $M=\{e_1, e_3, e_5, e_6\}$  E'nin üç alt kümesi,  $U=\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$  evrensel küme olsun. U üzerinde  $(F, T)=\{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$ ,  $(G, Z)=\{(e_1, \{h_2\}), (e_3, \{h_1, h_2\}), (e_5, \{h_3\})\}$ ,  $(H, M)=\{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, U), (e_6, \{h_1, h_5\})\}$  olarak tanımlanan esnek kümeler olsun.  $(F, T) \cup_R (H, M) = (L, T \cap M)$  olmak üzere  $\forall \alpha \in T \cap M = \{e_1, e_3\}$  için,  $L(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$  olup,  $L(e_1) = F(e_1) \cup H(e_1) = U$ ,  $L(e_3) = F(e_3) \cup H(e_3) = U$ . Buradan,  $(F, T) \cup_R (H, M) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset)\}$ .

Şimdi  $(G, Z) \cup_R (H, M) = (K, Z \cap M)$  olmak üzere  $\forall \alpha \in Z \cap M = \{e_1, e_3, e_5\}$  için,  $K(\alpha) = G(\alpha) \cup H(\alpha)$  olup,  $K(e_1) = G(e_1) \cup H(e_1) = U$ ,  $K(e_3) = G(e_3) \cup H(e_3) = U$  ve  $K(e_5) = G(e_5) \cup H(e_5) = U$ . Böylece,  $(G, Z) \cup_R (H, M) = \{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, U)\}$ . Buradan,  $(F, T) \cup_R (H, M) \not\subseteq (G, Z) \cup_R (H, M)$ ; fakat  $(F, T) \subseteq (G, Z)$  olmadığı açıktır.

19)  $(F, T) \subseteq (G, Z)$  ve  $(K, V) \subseteq (L, W)$  ise  $(F, T) \cup_R (K, V) \subseteq (G, Z) \cup_R (L, W)$ .

*İspat:*  $(F, T) \subseteq (G, Z)$  ve  $(K, V) \subseteq (L, W)$  olsun. Buradan,  $\forall \alpha \in T$ ,  $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$  ve  $\forall \alpha \in V$  için  $K(\alpha) \subseteq L(\alpha)$ .  $(F, T) \cup_R (K, V) = (M, T \cap V)$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in T \cap V$  için,  $M(\alpha) = F(\alpha) \cup K(\alpha)$ .  $(G, Z) \cup_R (L, W) = (N, Z \cap W)$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in Z \cap W$  için,  $N(\alpha) = G(\alpha) \cup L(\alpha)$ . Buradan,  $\forall \alpha \in T \cap V$  için,  $M(\alpha) = F(\alpha) \cup K(\alpha) \subseteq F(\alpha) \cup L(\alpha) = N(\alpha)$  olur. Buradan,  $(F, T) \cup_R (K, V) \subseteq (G, Z) \cup_R (L, W)$ .

20)  $(F, T) \cap_R (G, Z) \subseteq (F, T) \cup_R (G, Z)$ .

*İspat:*  $(F, T) \cap_R (G, Z) = (M, T \cap Z)$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $M(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ .  $(F, T) \cup_R (G, Z) = (N, T \cap Z)$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $N(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$ .  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $M(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha) \subseteq F(\alpha) \cup G(\alpha) = N(\alpha)$  olup,  $(F, T) \cap_R (G, Z) \subseteq (F, T) \cup_R (G, Z)$ .

21)  $(F, T) \cap_R (G, Z) = (F, T) \cup_R (G, Z) \Leftrightarrow (F, T \cap Z) = (G, T \cap Z)$  ve  $(F, T) \cap_R (G, T) = (F, T) \cup_R (G, T) \Leftrightarrow (F, T) = (G, T)$ .

*İspat:*  $(F, T) \cap_R (G, Z) = (M, T \cap Z)$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $M(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ .  $(F, T) \cup_R (G, Z) = (N, T \cap Z)$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $N(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$ .  $(M, T \cap Z) = (N, T \cap Z) \Leftrightarrow M(\alpha) = N(\alpha)$  için  $F(\alpha) \cap G(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$  yani  $F(\alpha) = G(\alpha)$  için  $(F, T) = (G, T)$ .

$Z)=(N, T \cap Z)$  olduğunda,  $M(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha) = N(\alpha)$ . Buradan,  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için;  $F(\alpha) = G(\alpha)$ . Böylece,  $(F, T \cap Z) = (G, T \cap Z)$ . Tersine,  $(F, T \cap Z) = (G, T \cap Z)$  olsun. Buradan,  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için;  $F(\alpha) = G(\alpha)$ . Böylece,  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için;  $F(\alpha) \cup G(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ . Dolayısıyla,  $(F, T) \cap_R (G, Z) = (F, T) \cup_R (G, Z)$ .

#### 4.1.1. Kısıtlanmış birleşim işleminin diğer esnek küme işlemlere dağılması:

Bu alt bölümde kısıtlanmış birleşim işleminin; kısıtlanmış işlemlere, genişletilmiş işlemlere ve esnek ikili parçalı işlemlere dağılmasına bakılmıştır.

##### Kısıtlanmış birleşim işleminin kısıtlanmış işlemlere dağılması:

Burada, kısıtlanmış birleşim işleminin, kısıtlanmış işlemlere dağılmasına bakılmıştır. İlk olarak sağdan dağılmalar, peşinden soldan dağılmalar incelenmiştir. Burada önemli bir hususu belirtmekte fayda görüyoruz. Sezgin ve Atagün (2011) çalışmasında, her ne kadar kısıtlanmış birleşim işleminin, kısıtlanmış kesişime sağdan ve soldan dağıldığını göstermiş olsa da, ispatlarda her seferinde, kısıtlanmış işlemleri alınacak olan esnek kümelerin parametre kümelerinin kesişiminin boştan farklı olmasına vurgu yapılmıştır. Oysaki kısıtlanmış işlemleri alınacak olan esnek kümelerin parametre kümelerinin her birinin kesişimi boş küme olsa dahi, bu dağılmalar sağlanmaktadır. Ali ve diğerleri (2011) çalışmasında ise sadece soldan dağılmalar ispatsız şekilde bir tablo ile verilmiştir. Dolayısıyla, bu başlık altındaki dağılmalarda bu durumlar göz önüne alınıp, ispatlar detayları ile verilmiştir.

##### i) Kısıtlanmış birleşim işleminin kısıtlanmış işlemlere soldan dağılması:

1)  $(F, T) \cup_R [(G, Z) \cap_R (H, M)] = [(F, T) \cup_R (G, Z)] \cap_R [(F, T) \cup_R (H, M)]$  (Sezgin ve Atagün, 2011).

*İspat:* Sezgin ve Atagün (2011), çalışmasında bu özelliğin ispatı için kısıtlanmış işlemleri alınacak olan esnek kümelerin parametre kümelerinin her birinin kesişiminin boş kümeden farklı olması şartıyla ispatı yapmış olup, kısıtlanmış işlemleri alınacak olan esnek kümelerin parametre kümelerinin her birinin kesişimi boş küme olsa dahi bu özelliğin

sağlanacağı bu ispatta özellikle belirtilecektir. İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım.  $(G,Z) \cap_R (H,M)=(R,Z \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cap M$  için,  $R(\alpha)=G(\alpha) \cap H(\alpha)$ .  $(F,T) \cup_R (R,Z \cap M)=(N,T \cap (Z \cap M))$  olsun,  $\forall \alpha \in T \cap (Z \cap M)$  için,  $N(\alpha)=F(\alpha) \cup R(\alpha)$ . Buradan,  $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$  için,

$$N(\alpha)=F(\alpha) \cup [(G(\alpha) \cap H(\alpha))]$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafını yani  $[(F,T) \cup_R (G,Z) \cap_R [(F,T) \cup_R (H,M)]]$  ele alalım:  $(F,T) \cup_R (G,Z)=(V,T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $V(\alpha)=F(\alpha) \cup G(\alpha)$ . Şimdi  $(F,T) \cup_R (H,M)=(W,T \cap M)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $W(\alpha)=F(\alpha) \cup H(\alpha)$ .  $(V,T \cap Z) \cap_R (W,T \cap M)=(S,(T \cap Z) \cap (T \cap M))$  olsun. Buradan  $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$  için,  $S(\alpha)=V(\alpha) \cap W(\alpha)$ ,

$$T(\alpha)= [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap [F(\alpha) \cup H(\alpha)]$$

Böylece,  $(N,T \cap Z \cap M)=(S,T \cap Z \cap M)$  olduğu görülür.

Burada,  $Z \cap M=\emptyset$  veya  $T \cap Z=\emptyset$  veya  $T \cap M=\emptyset$  ise her durumda da sol taraf ve sağ taraf  $\emptyset_\emptyset$  esnek kümesi olacağından, eşitlik bu durumda da sağlanır. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$2) (F,T) \cup_R [(G,Z) \cup_R (H,M)] = [(F,T) \cup_R (G,Z)] \cup_R [(F,T) \cup_R (H,M)].$$

$$3) (F,T) \cup_R [(G,Z) \setminus_R (H,M)] \neq [(F,T) \cup_R (G,Z)] \setminus_R [(F,T) \cup_R (H,M)] \text{ (Singh ve Onyeozili, 2012c).}$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım.  $(G,Z) \setminus_R (H,M)=(R,Z \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cap M$  için,  $R(\alpha)=G(\alpha) \setminus H(\alpha)$ .  $(F,T) \cup_R (R,Z \cap M)=(N,T \cap (Z \cap M))$  olsun,  $\forall \alpha \in T \cap (Z \cap M)$  için,  $N(\alpha)=F(\alpha) \cup R(\alpha)$ . Buradan,  $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$  için,

$$N(\alpha)=F(\alpha) \cup [(G(\alpha) \setminus H(\alpha))]$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafını yani  $[(F,T) \cup_R (G,Z)] \setminus_R [(F,T) \cup_R (H,M)]$  ele alalım:  $(F,T) \cup_R (G,Z)=(V,T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $V(\alpha)=F(\alpha) \cup G(\alpha)$ . Şimdi  $(F,T) \cup_R (H,M)=(W,T \cap M)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $W(\alpha)=F(\alpha) \cup H(\alpha)$ .

$(V, T \cap Z) \setminus_R (W, T \cap M) = (S, (T \cap Z) \cap (T \cap M))$  olsun. Buradan  $\forall \alpha \in T \cap Z \cap M$  için,  $S(\alpha) = V(\alpha) \setminus W(\alpha)$ ,

$$S(\alpha) = [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \setminus [F(\alpha) \cup H(\alpha)]$$

Böylece,  $(N, T \cap Z \cap M) \neq (S, T \cap Z \cap M)$  olduğu görülür.

$$4) (F, T) \cup_R [(G, Z) \Delta_R (H, M)] \neq [(F, T) \cup_R (G, Z)] \Delta_R [(F, T) \cup_R (H, M)].$$

ii) Kısıtlanmış birleşim işleminin kısıtlanmış işlemlere sağdan dağılması:

1)  $[(F, T) \cap_R (G, Z)] \cup_R (H, M) = [(F, T) \cup_R (H, M)] \cap_R [(G, Z) \cup_R (H, M)]$  (Sezgin ve Atagün, 2011).

*İspat:* Sezgin ve Atagün (2011), çalışmasında bu özelliği ispatsız şekilde vermiş olup, biz burada detaylı ispatıyla vereceğiz. İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım:  $(F, T) \cap_R (G, Z) = (R, T \cap Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $R(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ .  $(R, T \cap Z) \cup_R (H, M) = (N, (T \cap Z) \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cap M$  için,  $N(\alpha) = R(\alpha) \cup H(\alpha)$ . Buradan,

$$N(\alpha) = [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \cup H(\alpha)$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F, T) \cup_R (H, M)] \cap_R [(G, Z) \cup_R (H, M)]$  bakalım:  $(F, T) \cup_R (H, M) = (S, T \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $S(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha)$ .  $(G, Z) \cup_R (H, M) = (K, Z \cap M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in Z \cap M$  için,  $K(\alpha) = G(\alpha) \cup H(\alpha)$ .  $(S, T \cap M) \cap_R (K, Z \cap M) = (L, (T \cap M) \cap (Z \cap M))$  olup,  $\forall \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M)$  için,  $L(\alpha) = S(\alpha) \cap K(\alpha)$ . Buradan,

$$L(\alpha) = ([F(\alpha) \cup H(\alpha)] \cap [G(\alpha) \cup H(\alpha)])$$

Buradan,  $(N, T \cap Z \cap M) = (L, T \cap Z \cap M)$  olduğu görülür. Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  veya  $T \cap M = \emptyset$  veya  $Z \cap M = \emptyset$  ise her durumda da sol taraf ve sağ taraf  $\emptyset_\emptyset$  esnek kümesi olacağından, eşitlik bu

durumda da sağlanır. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$2) [(F,T) \cup_R (G,Z)] \cup_R (H,M) = [(F,T) \cup_R (H,M)] \cup_R [(G,Z) \cup_R (H,M)].$$

$$3) [(F,T) \setminus_R (G,Z)] \cup_R (H,M) \neq [(F,T) \cup_R (H,M)] \setminus_R [(G,Z) \cup_R (H,M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım:  $(F,T) \setminus_R (G,Z) = (R, T \cap Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $R(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ .  $(R, T \cap Z) \cup_R (H,M) = (N, (T \cap Z) \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cap M$  için,  $N(\alpha) = R(\alpha) \cup H(\alpha)$ . Buradan,

$$N(\alpha) = [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cup H(\alpha)$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F,T) \cup_R (H,M)] \cap_R [(G,Z) \cup_R (H,M)]$  bakalım:  $(F,T) \cup_R (H,M) = (S, T \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $S(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha)$ .  $(G,Z) \cup_R (H,M) = (K, Z \cap M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in Z \cap M$  için,  $K(\alpha) = G(\alpha) \cup H(\alpha)$ .  $(S, T \cap M) \setminus_R (K, Z \cap M) = (L, (T \cap Z) \cap M)$  olup,  $\forall \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M)$  için,  $L(\alpha) = S(\alpha) \setminus K(\alpha)$ . Buradan,

$$L(\alpha) = ([F(\alpha) \cup H(\alpha)] \setminus [G(\alpha) \cup H(\alpha)])$$

Buradan,  $(N, T \cap Z \cap M) \neq (L, T \cap Z \cap M)$  olduğu görülür.

$$4) [(F,T) \Delta_R (G,Z)] \cup_R (H,M) \neq [(F,T) \cup_R (H,M)] \Delta_R [(G,Z) \cup_R (H,M)].$$

#### Kısıtlanmış birleşim işleminin genişletilmiş işlemlere dağılması

Burada, kısıtlanmış birleşim işleminin, genişletilmiş işlemlere dağılmasına bakılmıştır. İlk olarak sağdan dağılmalar, peşinden soldan dağılmalar incelenmiştir. Burada önemli bir hususu belirtmekte fayda görüyoruz. Sezgin ve Atagün (2011), her ne kadar kısıtlanmış birleşim işleminin genişletilmiş birleşim işlemine sağdan ve soldan dağıldığı göstermiş olsa da, sağdan dağılmasını ispatsız şekilde vermiş olup; soldan dağılmada ise ispatta kısıtlanmış işlemleri alınacak olan esnek kümelerin parametre kümelerinin kesişiminin

boştan farklı olmasına vurgu yapılmıştır. Oysaki kısıtlanmış işlemleri alınacak olan esnek kümelerin parametre kümelerinin her birinin kesişimi boş küme olsa dahi, bu dağılmalar sağlanmaktadır. Ali ve diğerleri (2011) ise sadece soldan dağılmaları ispatsız şekilde bir tablo ile vermiştir. Bu başlık altındaki dağılmalarda bu durumlar özellikle göz önüne alınarak, detaylı ispatlar verilmiştir.

i) Kısıtlanmış birleşim işleminin genişletilmiş işlemlere soldan dağılması:

1)  $(F,T) \cup_R [(G,Z) \cap_\epsilon (H,M)] = [(F,T) \cup_R (G,Z)] \cap_\epsilon [(F,T) \cup_R (H,M)]$  (Sezgin ve Atagün, 2011).

*İspat:* Sezgin ve Atagün (2011) çalışmasında, kısıtlanmış işlemleri alınacak esnek kümelerin parametre kümelerinin kesişiminin boştan farklı olması şartıyla ispatı vermiş olup, biz bu çalışmada boş küme olması durumunda da özelliğin sağlandığı hususunu belirterek ispatı vereceğiz.

İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım.  $(G,Z) \cap_\epsilon (H,M) = (R,Z \cup M)$  burada  $\forall \alpha \in Z \cup M$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus Z \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F,T) \cup_R (R,Z \cup M) = (N, (T \cap (Z \cup M)))$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap (Z \cup M)$  için,  $N(\alpha) = F(\alpha) \cup R(\alpha)$ . Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım:  $[(F,T) \cup_R (G,Z)] \cap_\epsilon [(F,T) \cup_R (H,M)]$ .

$(F,T) \cup_R (G,Z) = (K, T \cap Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$ .

$(F,T) \cup_R (H,M) = (S, T \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $S(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha)$ . Daha sonra,

$(K, T \cap Z) \cap_\epsilon (S, T \cap M) = (L, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cup (T \cap M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cap M) = T \cap (Z \setminus M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (T \cap Z) = T \cap (M \setminus Z) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap [F(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece,  $(N, T \cap (Z \cup M)) = (L, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$  olduğu görülür.

Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha)$ ;  $T \cap M = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$  olacağından, bu durumlarda da sağ ve sol taraf birbirine eşit çıkar. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$2) (F, T) \cup_R [(G, Z) \cup_\varepsilon (H, M)] = [(F, T) \cup_R (G, Z)] \cup_\varepsilon [(F, T) \cup_R (H, M)].$$

$$3) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } (F, T) \cup_R [(G, Z) \setminus_\varepsilon (H, M)] = [(F, T) \cup_R (G, Z)] \setminus_\varepsilon [(F, T) \cup_R (H, M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım.  $(G, Z) \setminus_\varepsilon (H, M) = (R, Z \cup M)$  burada  $\forall \alpha \in Z \cup M$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus Z \\ G(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) \cup_R (R, Z \cup M) = (N, T \cap (Z \cup M))$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap (Z \cup M)$  için,  $N(\alpha) = F(\alpha) \cup R(\alpha)$ .

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \cup [G(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım:  $[(F, T) \cup (G, Z)] \setminus_\varepsilon [(F, T) \cup_R (H, M)]$ .

$(F, T) \cup_R (G, Z) = (K, T \cap Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$ .

$(F, T) \cup_R (H, M) = (S, T \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $S(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$ . Daha sonra,

$(K, T \cap Z) \setminus_\varepsilon (S, T \cap M) = (L, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cup (T \cap M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cap M) = T \cap (Z \setminus M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (T \cap Z) = T \cap (M \setminus Z) \\ K(\alpha) \setminus S(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} M F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \setminus [F(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece,  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  ise  $(N, T \cap (Z \cup M)) = (L, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$  olduğu görülür. Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha)$ ;  $T \cap M = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$  olacağından, bu durumlarda da sağ ve sol taraf birbirine eşit çıkar. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$4) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } (F, T) \cup_R [(G, Z) \Delta_\varepsilon (H, M)] = [(F, T) \cup_R (G, Z)] \Delta_\varepsilon [(F, T) \cup_R (H, M)].$$

$$5) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } (F, T) \cup_R [(G, Z) \gamma_\varepsilon (H, M)] = [(F, T) \cup_R (G, Z)] \gamma_\varepsilon [(F, T) \cup_R (H, M)].$$

$$6) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } (F, T) \cup_R [(G, Z) +_\varepsilon (H, M)] = [(F, T) \cup_R (G, Z)] +_\varepsilon [(F, T) \cup_R (H, M)].$$

$$7) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } (F, T) \cup_R [(G, Z) \lambda_\varepsilon (H, M)] = [(F, T) \cup_R (G, Z)] \lambda_\varepsilon [(F, T) \cup_R (H, M)].$$

$$8) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } (F, T) \cup_R [(G, Z) *_\varepsilon (H, M)] = [(F, T) \cup_R (G, Z)] *_\varepsilon [(F, T) \cup_R (H, M)].$$

$$9) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } (F, T) \cup_R [(G, Z) \theta_\varepsilon (H, M)] = [(F, T) \cup_R (G, Z)] \theta_\varepsilon [(F, T) \cup_R (H, M)].$$

ii) Kısıtlanmış birleşim işleminin genişletilmiş işlemlere sağdan dağılması:

$$1) [(F, T) \cap_\varepsilon (G, Z)] \cup_R (H, M) = [(F, T) \cap_R (H, M)] \cup_\varepsilon [(G, Z) \cap_R (H, M)] \text{ (Sezgin ve Atagün, 2011).}$$

*İspat:* Sezgin ve Atagün (2011) çalışmasında, bu özelliği ispatsız şekilde vermiştir. Bizler bu çalışmada ispatlı şekilde verecek olup, kısıtlanmış işlemleri alınacak esnek kümelerin parametre kümelerinin kesişiminin boş küme olması durumunda da özelliğin sağlandığı hususunu ispatımızda özellikle belirteceğiz. İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım  $(F, T) \cap_\varepsilon (G, Z) = (R, T \cup Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için,

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T \cup Z) \cup_R (H, M) = (N, (T \cup Z) \cap M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cap M$  için,  $N(\alpha) = R(\alpha) \cup H(\alpha)$ .

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F, T) \cup_R (H, M)] \cap_\varepsilon [(G, Z) \cup_R (H, M)]$  bakalım.  $(F, T) \cup_R (H, M) = (K, T \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha)$ .  $(G, Z) \cup_R (H, M) = (S, Z \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cap M$  için,  $S(\alpha) = G(\alpha) \cup H(\alpha)$ . O halde,  $(K, T \cap M) \cap_\varepsilon (S, Z \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in (T \cap M) \cup (Z \cap M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cap M) = (T \setminus Z) \cap M \\ S(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus (T \cap M) = (Z \setminus T) \cap M \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cup H(\alpha)] \cap [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece  $(N, (T \cup Z) \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$  olduğu görülür.

Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  ve  $\alpha \in T \cap Z' \cap M$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha)$  ve  $T \cap Z = \emptyset$  ve  $\alpha \in T' \cap Z \cap M$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = G(\alpha) \cup H(\alpha)$  olur.  $Z \cap M = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha)$  olacağından, bu durumlarda da sağ ve sol taraf birbirine eşit çıkar. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$2) [(F, T) \cup_\varepsilon (G, Z)] \cup_R (H, M) = [(F, T) \cup_R (G, Z)] \cup_\varepsilon [(G, Z) \cup_R (H, M)].$$

$$3) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \setminus_\varepsilon (G, Z)] \cup_R (H, M) = [(F, T) \cup_R (G, Z)] \setminus_\varepsilon [(G, Z) \cup_R (H, M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım  $(F, T) \setminus_\varepsilon (G, Z) = (R, T \cup Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için,

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T \cup Z) \cup_R (H, M) = (N, (T \cup Z) \cap M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cap M$  için,  $N(\alpha) = R(\alpha) \cup H(\alpha)$ .

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F,T) \cup_R (H,M)] \setminus_\varepsilon [(G,Z) \cup_R (H,M)]$  bakalım.  $(F,T) \cup_R (H,M) = (K, T \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha)$ .  $(G,Z) \cap_R (H,M) = (S, Z \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cap M$  için,  $S(\alpha) = G(\alpha) \cup H(\alpha)$ . O halde,  $(K, T \cap M) \setminus_\varepsilon (S, Z \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in (T \cap M) \cup (Z \cap M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cap M) = (T \setminus Z) \cap M \\ S(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus (T \cap M) = (Z \setminus T) \cap M \\ K(\alpha) \setminus S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cup H(\alpha)] \setminus [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  ise  $(N, (T \cup Z) \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$  olduğu görülür.

Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  ve  $\alpha \in T \cap Z' \cap M$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha)$  ve  $T \cap Z = \emptyset$  ve  $\alpha \in T' \cap Z \cap M$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = G(\alpha) \cup H(\alpha)$  olur.  $Z \cap M = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha)$  olacağından, bu durumlarda da sağ ve sol taraf birbirine eşit çıkar. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$4) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F,T) \Delta_\varepsilon (G,Z)] \cup_R (H,M) = [(F,T) \cup_R (H,M)] \Delta_\varepsilon [(G,Z) \cup_R (H,M)].$$

$$5) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F,T) \gamma_\varepsilon (G,Z)] \cup_R (H,M) = [(F,T) \cup_R (H,M)] \gamma_\varepsilon [(G,Z) \cup_R (H,M)].$$

$$6) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F,T) +_\varepsilon (G,Z)] \cup_R (H,M) = [(F,T) \cup_R (H,M)] +_\varepsilon [(G,Z) \cup_R (H,M)].$$

$$7) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F,T) \lambda_\varepsilon (G,Z)] \cup_R (H,M) = [(F,T) \cup_R (H,M)] \lambda_\varepsilon [(G,Z) \cup_R (H,M)].$$

$$8) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F,T) \theta_\varepsilon (G,Z)] \cup_R (H,M) = [(F,T) \cup_R (H,M)] \theta_\varepsilon [(G,Z) \cup_R (H,M)].$$

$$9) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F,T) *_\varepsilon (G,Z)] \cup_R (H,M) = [(F,T) \cup_R (H,M)] *_\varepsilon [(G,Z) \cup_R (H,M)].$$

Kısıtlanmış birleşim işleminin esnek ikili parçalanış işlemlere dağılması:

Burada kısıtlanmış birleşim işleminin, esnek ikili parçalı işlemlere dağılmasına bakılmıştır. İlk olarak sağdan dağılmalar, peşinden soldan dağılmalar incelenmiştir. Burada, kısıtlanmış

işlemleri alınacak olan esnek kümelerin parametre kümelerinin her birinin kesişimi boş küme olsa dahi, bu dağılmaların sağlandığı hususunu özellikle belirtmekte fayda görüyoruz.

i) Kısıtlanmış birleşim işleminin esnek ikili parçalı işlemlere soldan dağılması:

$$1) (F,T) \cup_R [(G,Z) \underset{\sim}{\cap} (H,M)] = [(F,T) \cup_R (G,Z)] \underset{\sim}{\cap} [(F,T) \cup_R (H,M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım  $(G,Z) \underset{\sim}{\cap} (H,M) = (R,Z)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in Z$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha), & \alpha \in Z \setminus M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha), & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F,T) \cup_R (R,Z) = (N,T \cap Z)$  olsun. Buradan  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  $N(\alpha) = F(\alpha) \cup R(\alpha)$

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \setminus M) \\ F(\alpha) \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F,T) \cup_R (G,Z)] \underset{\sim}{\cap} [(F,T) \cup_R (H,M)]$  bakalım.

$(F,T) \cup_R (G,Z) = (K,T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  $K(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$ .  $(F,T) \cup_R (H,M) = (S,T \cap M)$

olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$ ;  $T(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha)$ .  $(K,T \cap Z) \underset{\sim}{\cap} (S,T \cap M) = (L,T \cap Z)$  olup,  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cap M) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cap M) = T \cap (Z \setminus M) \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap [F(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Böylece  $(N,T \cap Z) = (L,T \cap Z)$  olduğu görülür.

Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  ise  $(N,T \cap Z) = (L,T \cap Z) = \emptyset_\emptyset$ ;  $T \cap M = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$  olacağından, sağ ve sol taraf yine birbirine eşit çıkar. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$2) (F,T) \cup_R [(G,Z) \widetilde{\cup} (H,M)] = [(F,T) \cup_R (G,Z)] \widetilde{\cup} [(F,T) \cup_R (H,M)].$$

$$3) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } (F,T) \cup_R [(G,Z) \widetilde{\setminus} (H,M)] = [(F,T) \cup_R (G,Z)] \widetilde{\setminus} [(F,T) \cup_R (H,M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım  $(G,Z) \widetilde{\setminus} (H,M) = (R,Z)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in Z$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha), & \alpha \in Z \setminus M \\ G(\alpha) \setminus H(\alpha), & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F,T) \cup_R (R,Z) = (N,T \cap Z)$  olsun. Buradan  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  $N(\alpha) = F(\alpha) \cup R(\alpha)$

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \setminus M) \\ F(\alpha) \cup [G(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F,T) \cup_R (G,Z)] \widetilde{\setminus} [(F,T) \cup_R (H,M)]$  bakalım.

$(F,T) \cup_R (G,Z) = (K,T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  $K(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$ .  $(F,T) \cup_R (H,M) = (S,T \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$ ;  $T(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha)$ .  $(K,T \cap Z) \widetilde{\setminus} (S,T \cap M) = (L,T \cap Z)$  olup,  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cap M) \\ K(\alpha) \setminus S(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cap M) = T \cap (Z \setminus M) \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \setminus [F(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Böylece  $(N,T \cap Z) = (L,T \cap Z)$  olduğu görülür.

Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  ise  $(N,T \cap Z) = (L,T \cap Z) = \emptyset$ ;  $T \cap M = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$  olacağından, sağ ve sol taraf yine birbirine eşit çıkar. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$4) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } (F,T) \cup_R [(G,Z) \widetilde{\Delta} (H,M)] = [(F,T) \cup_R (G,Z)] \widetilde{\Delta} [(F,T) \cup_R (H,M)].$$

$$5) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } (F, T) \cup_R [(G, Z) \sim_Y (H, M)] = [(F, T) \cup_R (G, Z)] \sim_Y [(F, T) \cup_R (H, M)].$$

$$6) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } (F, T) \cup_R [(G, Z) \sim_+ (H, M)] = [(F, T) \cup_R (G, Z)] \sim_+ [(F, T) \cup_R (H, M)].$$

$$7) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } (F, T) \cup_R [(G, Z) \sim_\lambda (H, M)] = [(F, T) \cup_R (G, Z)] \sim_\lambda [(F, T) \cup_R (H, M)].$$

$$8) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } (F, T) \cup_R [(G, Z) \sim_\emptyset (H, M)] = [(F, T) \cup_R (G, Z)] \sim_\emptyset [(F, T) \cup_R (H, M)].$$

$$9) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } (F, T) \cup_R [(G, Z) \sim_* (H, M)] = [(F, T) \cup_R (G, Z)] \sim_* [(F, T) \cup_R (H, M)].$$

ii) Kısıtlanmış birleşim işleminin esnek ikili parçalı işlemlere sağdan dağılması:

$$1) [(F, T) \sim_\cap (G, Z)] \cup_R (H, M) = [(F, T) \cup_R (H, M)] \sim_\cap [(G, Z) \cup_R (H, M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım  $(F, T) \sim_\cap (G, Z) = (R, T)$  olur. Burada  $\forall \alpha \in T$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T) \cup_R (H, M) = (N, T \cap M)$  olup,  $\forall \alpha \in T \cap M$ ;  $N(\alpha) = R(\alpha) \cup H(\alpha)$ .

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap M \\ [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F, T) \cup_R (H, M)] \sim_\cap [(G, Z) \cup_R (H, M)]$  bakalım.

$(F, T) \cup_R (H, M) = (K, T \cap M)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap M$ ;  $K(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha)$ .  $(G, Z) \cup_R (H, M) = (S, Z \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cap M$ ;  $T(\alpha) = G(\alpha) \cup H(\alpha)$ .  $(K, T \cap M) \sim_\cap (S, Z \cap M) = (L, T \cap M)$  olup, buradan da  $\forall \alpha \in T \cap M$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cap M) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Böylece,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cap M) = (T \setminus Z) \cap M \\ [F(\alpha) \cup H(\alpha)] \cap [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Böylece  $(N, T \cap M) = (L, T \cap M)$  olduğu görülür. Burada,  $T \cap M = \emptyset$  ise  $(N, T \cap M) = (L, T \cap M) = \emptyset_\emptyset$ ;  $Z \cap M = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha)$  olacağından, sağ ve sol taraf birbirine yine eşit çıkar. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$2) [(F, T) \widetilde{\cup} (G, Z)] \cup_R (H, M) = [(F, T) \cup_R (H, M)] \widetilde{\cup} [(G, Z) \cup_R (H, M)].$$

$$3) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \widetilde{\setminus} (G, Z)] \cup_R (H, M) = [(F, T) \cup_R (H, M)] \widetilde{\setminus} [(G, Z) \cup_R (H, M)]$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım  $(F, T) \widetilde{\setminus} (G, Z) = (R, T)$  olur. Burada  $\forall \alpha \in T$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T) \cup_R (H, M) = (N, T \cap M)$  olup,  $\forall \alpha \in T \cap M$ ;  $N(\alpha) = R(\alpha) \cup H(\alpha)$ .

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap M \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F, T) \cup_R (H, M)] \widetilde{\setminus} [(G, Z) \cup_R (H, M)]$  bakalım.

$(F, T) \cup_R (H, M) = (K, T \cap M)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap M$ ;  $K(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha)$ .  $(G, Z) \cup_R (H, M) = (S, Z \cap M)$

olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cap M$ ;  $T(\alpha) = G(\alpha) \cup H(\alpha)$ .  $(K, T \cap M) \widetilde{\setminus} (S, Z \cap M) = (L, T \cap M)$  olup,

buradan da  $\forall \alpha \in T \cap M$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cap M) \\ K(\alpha) \setminus S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Böylece,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cap M) = (T \setminus Z) \cap M \\ [F(\alpha) \cup H(\alpha)] \setminus [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Böylece  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  ise  $(N, T \cap M) = (L, T \cap M)$  olduğu görülür.

Burada,  $T \cap M = \emptyset$  ise  $(N, T \cap M) = (L, T \cap M) = \emptyset$ ;  $Z \cap M = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cup H(\alpha)$  olacağından, sağ ve sol taraf birbirine yine eşit çıkar. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$4) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \tilde{\Delta} (G, Z)] \cup_R (H, M) = [(F, T) \cup_R (H, M)] \tilde{\Delta} [(G, Z) \cup_R (H, M)].$$

$$5) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \tilde{\gamma} (G, Z)] \cup_R (H, M) = [(F, T) \cup_R (H, M)] \tilde{\gamma} [(G, Z) \cup_R (H, M)].$$

$$6) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \tilde{+} (G, Z)] \cup_R (H, M) = [(F, T) \cup_R (H, M)] \tilde{+} [(G, Z) \cup_R (H, M)].$$

$$7) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \tilde{\lambda} (G, Z)] \cup_R (H, M) = [(F, T) \cup_R (H, M)] \tilde{\lambda} [(G, Z) \cup_R (H, M)].$$

$$8) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \tilde{\theta} (G, Z)] \cup_R (H, M) = [(F, T) \cup_R (H, M)] \tilde{\theta} [(G, Z) \cup_R (H, M)].$$

$$9) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \tilde{*} (G, Z)] \cup_R (H, M) = [(F, T) \cup_R (H, M)] \tilde{*} [(G, Z) \cup_R (H, M)].$$

#### 4.2. Genişletilmiş Birleşim İşlemi ve Özellikleri

Bu alt bölümde, Maji ve diğerleri (2003) çalışmasında tanımlanan esnek kümelerde birleşim işlemi olarak adlandırılan işlemin klasik kümelerdeki birleşim işlemine benzer özellikleri ve dağılma kurallarıyla diğer işlemler ile olan ilişkileri detaylı şekilde ele alınıp incelenmiştir.

Burada bazı önemli hususları belirtmekte fayda görüyoruz. Maji ve diğerleri (2003) tanımın orijinalini esnek kümelerin “birleşimi” olarak vermiş olsa da Ali ve diğerleri (2011) çalışmasında bu tanımlı literatürde var olan diğer bir esnek birleşim işlemi olan kısıtlanmış birleşim işlemi ile karışmaması için “genişletilmiş birleşim” olarak güncelleştirilmiştir. Gösterim olarak da tanımın öncüsü olan Maji ve diğerleri (2003) “ $\tilde{\cup}$ ” gösterimini kullanmış olup; Ali ve diğerleri (2009); Qin ve Hong (2010); Sezgin ve Atagün (2011) bu gösterimi kullanmıştır. Ali ve diğerleri (2011) ise genişletilmiş işlemlerin

gösteriminde birlik olması açısından, genişletilmiş birleşim işlemi için “ $U_\varepsilon$ ” gösterimini kullanmayı tercih etmiş olup, sonrasında yapılan çalışmalarda ise bu gösterim yaygın olarak kullanıldığından, bizler de bu çalışmada bu gösterimi kullanacağız.

Ayrıca, esnek kümeler için genişletilmiş birleşim işlemi yeni bir tanım olmadığı için, bazı özellikleri ve dağılma kuralları birtakım yazarlar (Ali ve diğerleri, 2009; Sezgin ve Atagün, 2011; Qin ve Hong, 2010; Ali ve diğerleri 2011) tarafından çalışılmıştır. Fakat, çalışmaların çoğunda, özellikler ispatsız şekilde verilmiştir. Bu açıdan, genişletilmiş birleşim işleminin tüm özelliklerinin ispatlarıyla birlikte bu çalışmada bulunuyor olması ve yeni pek çok özelliğin özellikle klasik kümelerdeki karşılıklarının bu çalışmada yine detaylı ispatlarıyla bulunuyor olması açısından, bu çalışmayı oldukça önemediğimizi belirtmek istiyoruz.

4.2.1. Tanım (F,T) ve (G,Z), U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu iki esnek kümenin  $(F,T) U_\varepsilon (G,Z)$  ile gösterilen genişletilmiş birleşim işlemi  $C=T \cup Z$  ve  $\forall \alpha \in C$  için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

olmak üzere  $(F,T) U_\varepsilon (G,Z) = (H,C)$  ile tanımlanır (Maji ve diğerleri, 2003).

Ali ve diğerleri (2011) genişletilmiş birleşim için  $U_\varepsilon$  gösterimi kullanmışlardır. Buradaki, “ $\varepsilon$ ” İngilizcedeki genişletilmiş anlamında kullanılan “Extended” kelimesinin baş harfinden gelmekte olup; bu anlamıyla mantıksal bir bütünlük içindedir. Tanımdan,  $T = \emptyset$  ise  $(F,T) U_\varepsilon (G,Z) = (G,Z)$ ;  $Z = \emptyset$  ise  $(F,T) U_\varepsilon (G,Z) = (F,T)$ ;  $T = Z = \emptyset$  ise  $(F,T) U_\varepsilon (G,Z) = \emptyset_\emptyset$  olacağı aşikardır.

4.2.2. Örnek  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  parametre kümesi,  $T = \{e_1, e_3\}$ ,  $Z = \{e_2, e_3, e_4\}$  E’nin iki alt kümesi,  $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$  evrensel küme, U üzerinde  $(F,T) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$ ,  $(G,Z) = \{(e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4\}), (e_4, \{h_3, h_5\})\}$  olarak tanımlanan iki esnek küme olsun.  $(F,T) U_\varepsilon (G,Z) = (H, T \cup Z)$  olmak üzere,  $\forall \alpha \in T \cup Z$ ;

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Burada  $T \cup Z = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  ve  $T \setminus Z = \{e_1\}$ ,  $Z \setminus T = \{e_2, e_4\}$ ,  $T \cap Z = \{e_3\}$  olmak üzere,  $H(e_1) = F(e_1) = \{h_2, h_5\}$ ,  $H(e_2) = G(e_2) = \{h_1, h_4, h_5\}$ ,  $H(e_4) = G(e_4) = \{h_3, h_5\}$ ,  $H(e_3) = F(e_3) \cup G(e_3) = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$   $\cup \{h_2, h_3, h_4\} = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ .  
 $(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}), (e_4, \{h_3, h_5\})\}$ .

4.2.3. Not  $S_A(U)$  kümesi üzerinde kısıtlanmış birleşim ve genişletilmiş birleşim işlemleri çakışıkır. Yani, parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler için,  $(F, A) \cup_{\varepsilon} (G, A) = (F, A) \cup_{\varepsilon} (G, A)$ .

#### 4.2.4. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1)  $\cup_{\varepsilon}$ ,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde kapalıdır.

*İspat:*  $\cup_{\varepsilon}$  işleminin,  $S_E(U)$  üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$\cup_{\varepsilon}: S_E(U) \times S_E(U) \rightarrow S_E(U)$$

$$((F, T), (G, Z)) \rightarrow (F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z) = (H, T \cup Z)$$

olup,  $(F, T)$  ve  $(G, Z)$ ,  $U$  üzerinde iki esnek küme olduğunda  $(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z)$  de,  $U$  üzerinde bir esnek kümedir.  $\cup_{\varepsilon}$ ,  $S_A(U)$  kümesi üzerinde kapalı olduğu da aşıkardır. Benzer şekilde,

$$\cup_{\varepsilon}: S_T(U) \times S_T(U) \rightarrow S_T(U)$$

$$((F, T), (G, T)) \rightarrow (F, T) \cup_{\varepsilon} (G, T) = (K, T \cup T) = (K, T)$$

olup,  $T$ ,  $E$  kümesinin sabit bir alt kümesi ve  $(F, T)$  ve  $(G, T)$ ,  $S_T(U)$  kümesinin elemanı olmak üzere,  $(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, T)$  de  $S_T(U)$  kümesinin elemanıdır. Yani  $\cup_{\varepsilon}$  işlemi,  $S_T(U)$  kümesi üzerinde de kapalıdır.

2)  $[(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z)] \cup_{\varepsilon} (H, M) = (F, T) \cup_{\varepsilon} [(G, Z) \cup_{\varepsilon} (H, M)]$  (Maji ve diğerleri, 2003; Pei ve Miao, Qin ve Hong, 2003).

*İspat:* Maji ve diğerleri (2003) ve Pei ve Mia (2005) bu özelliği çalışmalarında ispatsız şekilde vermiş olup; Qin ve Hong (2010) bu özelliği ispatıyla vermiştir. Fakat ispat tüm durumlar göz önünde bulundurularak yapılmadığı için, biz burada ispatı detaylı şekliyle veriyoruz. İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım.  $(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z) = (S, T \cup Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için,

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(S, T \cup Z) \cup_{\varepsilon} (H, M) = (N, (T \cup Z) \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup M$  için,

$$N(\alpha) = \begin{cases} S(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus (T \cup M) \\ S(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \setminus M = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \setminus M = T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus M = T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus (T \cup Z) = T' \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına bakalım.  $(G, Z) \cup_{\varepsilon} (H, M) = (R, Z \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cup M$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus Z \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) \cup_{\varepsilon} (R, Z \cup M) = (L, T \cup (Z \cup M))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup Z \cup M$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus (Z \cup M) \\ R(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) \setminus T \\ F(\alpha) \cup R(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Böylece,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus M) \setminus T = T' \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus Z) \setminus T = T' \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus T = T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \cup [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  için  $(N, (T \cup Z) \cup M) = (L, T \cup (Z \cup M))$  olduğu görülür. Yani,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\cup_{\varepsilon}$  işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

$$3) [(F,T) \cup_{\varepsilon} (G,T)] \cup_{\varepsilon} (H,T) = (F,T) \cup_{\varepsilon} [(G,T) \cup_{\varepsilon} (H,T)].$$

*İspat:* İspat, Not 4.2.3 ve Teorem 4.1.3 (3)'den elde edilir. Yani  $T, E$  nin sabit bir alt kümesi olmak üzere  $S_T(U)$  kümesi üzerinde,  $\cup_{\varepsilon}$  işleminin birleşme özelliği yoktur.

$$4) (F,T) \cup_{\varepsilon} (G,Z) = (G,Z) \cup_{\varepsilon} (F,T) \text{ (Qin ve Hong, 2010).}$$

*İspat:* Qin ve Hong, (2010) bu özelliği çalışmalarında ispatsız şekilde vermiş olup; bizler detaylı ispatıyla veriyoruz.  $(F,T) \cup_{\varepsilon} (G,Z) = (H,T \cup Z)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(G,Z) \cap_{\varepsilon} (F,T) = (S,Z \cup T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in Z \cup T$  için,

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) \cup F(\alpha) & \alpha \in Z \cap T \end{cases}$$

Böylece,  $(F,T) \cup_{\varepsilon} (G,Z) = (G,Z) \cap_{\varepsilon} (F,T)$ . Buradan,  $(F,T) \cup_{\varepsilon} (G,T) = (G,T) \cup_{\varepsilon} (F,T)$  olduğu açıktır. Yani,  $S_E(U)$  ve  $S_T(U)$  kümeleri üzerinde  $\cup_{\varepsilon}$  işleminin değişme özelliği vardır.

$$5) (F,T) \cup_{\varepsilon} (F,T) = (F,T) \text{ (Maji ve diğerleri, 2003; Pei ve Miao, 2003; Qin ve Hong, 2010)}$$

*İspat:* Maji ve diğerleri (2003), Pei ve Miao (2005) ve Qin ve Hong (2010) bu özelliği çalışmalarında ispatsız şekilde vermiş olup; bizler detaylı ispatıyla veriyoruz.

İspat, Not 4.2.3 ve Teorem 4.1.3 (5)'den elde edilir. Yani  $S_E(U)$  kümesi üzerinde  $\cup_{\varepsilon}$  işlemi denk güçlülük (idempotent) özelliğine sahiptir.

$$6) (F,T) \cup_{\varepsilon} \emptyset_T = \emptyset_T \cup_{\varepsilon} (F,T) = (F,T).$$

*İspat:* İspat, Not 4.2.3 ve Teorem 4.1.3 (6)'dan elde edilir.

$T, E$  parametre kümesinin sabit bir alt kümesi olmak üzere,  $S_T(U)$  kümesi üzerinde  $\cup_{\varepsilon}$  işleminin birim elemanı  $\emptyset_T$  esnek kümesidir.

Burada  $(F,T) \cup_{\varepsilon} (G,T) = (G,T) \cup_{\varepsilon} (F,T) = \emptyset_T$  olacak şekilde  $(G,T) \in S_E(U)$  bulamayacağımız aşıkardır. Buradan,  $S_T(U)$  kümesi üzerinde,  $\cup_{\varepsilon}$  işleminin eskisiz elemanı olan  $\emptyset_T$  esnek

kümesinden başka hiçbir elemanın tersi olmadığı sonucuna varabiliriz. Doğal olarak,  $\emptyset_T$  esnek kümesinin  $S_T(U)$  kümesi üzerinde,  $\cup_\varepsilon$  işlemine göre etkisiz elemanı da kendisi yani  $\emptyset_T$  esnek kümesidir.

$$7) (F, T) \cup_\varepsilon \emptyset_\emptyset = (F, T).$$

*İspat:*  $\emptyset_\emptyset = (S, \emptyset)$  ve  $(F, T) \cap_\varepsilon (S, \emptyset) = (H, T \cup \emptyset)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cup \emptyset = T$  için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus \emptyset = T \\ S(\alpha) & \alpha \in \emptyset \setminus T = \emptyset \\ F(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in T \cap \emptyset = \emptyset \end{cases}$$

Böylece,  $\forall \alpha \in T$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha)$  olup,  $(H, T) = (F, T)$ .

$$8) \emptyset_\emptyset \cup_\varepsilon (F, T) = (F, T).$$

*İspat:*  $\emptyset_\emptyset = (S, \emptyset)$  ve  $(S, \emptyset) \cap_\varepsilon (F, T) = (H, \emptyset \cup T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in \emptyset \cup T = T$  için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} S(\alpha) & \alpha \in \emptyset \setminus T = \emptyset \\ F(\alpha) & \alpha \in T \setminus \emptyset = T \\ S(\alpha) \cup F(\alpha) & \alpha \in \emptyset \cap T = \emptyset \end{cases}$$

Böylece,  $\forall \alpha \in T$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha)$  olup,  $(H, T) = (F, T)$ .

Teorem 4.2.4 (7) ve (8) den,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\cup_\varepsilon$  işleminin birim elemanı  $\emptyset_\emptyset$  esnek kümesidir. Ali ve diğerleri (2011) bu özelliği ispatsız şekilde çalışmalarında sunmuş olup; biz detaylı ispatıyla verdik.

Klasik küme teorisinde,  $A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$  ve  $B = \emptyset$  olduğundan,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $(F, T)$  esnek kümesi için,

$$(F, T) \cup_\varepsilon (G, K) = (G, K) \cup_\varepsilon (F, T) = \emptyset_\emptyset$$

olacak şekilde  $(G, K) \in S_E(U)$  bulamayız; çünkü bu durum  $T \cup K = \emptyset$  olmasını ve dolayısıyla  $T = \emptyset$  ve  $K = \emptyset$  olmasını gerektirir. Kabulümüz gereği,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde  $\emptyset_\emptyset$  haricinde hiçbir esnek küme boş parametreye sahip olmadığından, buradan birim eleman olan  $\emptyset_\emptyset$  haricinde hiçbir elemanın,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde  $\cup_\varepsilon$  işlemine göre tersinin olmadığı sonucu çıkartırız.

4.2.4.1. *Sonuç* Teorem 4.2.4 (1), (2), (4), (5), (7) ve (8)'den,  $(F,T)$ ,  $(G,Z)$  ve  $(H,M)$ ,  $S_E(U)$  kümesinin elemanları olmak üzere,  $(S_E(U), \cup_\varepsilon)$  birimi  $\emptyset_\emptyset$  olan, idempotent, komutatif bir monoid yani sınırlı bir yarı-latistir. Teorem 4.2.4 (1), (3), (4), (5) ve (6)'dan  $A \subseteq E$  sabit bir parametre kümesi olmak üzere,  $(S_A(U), \cup_\varepsilon)$  cebirsel yapısı da birimi  $\emptyset_T$  olan, idempotent, komutatif bir monoid yani sınırlı bir yarı latistir.

$$9) U_E \cup_\varepsilon (F,T) = (F,T) \cup_\varepsilon U_E = U_E.$$

*İspat:*  $U_E = (S,E)$  ve  $(S,E) \cap_\varepsilon (F,T) = (H, E \cup T = E)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in E \cup T = E$  için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} S(\alpha), & \alpha \in E \setminus T = T' \\ F(\alpha), & \alpha \in T \setminus E = \emptyset \\ S(\alpha) \cup F(\alpha), & \alpha \in E \cap T = T \end{cases}$$

Böylece,  $\forall \alpha \in E \cup T = E$  için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} U, & \alpha \in E \setminus T = T' \\ F(\alpha), & \alpha \in T \setminus E = \emptyset \\ U, & \alpha \in E \cap T = T \end{cases}$$

$\forall \alpha \in T$  için,  $H(\alpha) = U$  olup,  $(H,T) = U_E$ . Yani,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\cup_\varepsilon$  işleminin yutan elemanı  $U_E$  esnek kümesidir.

$$10) (F,T) \cup_\varepsilon (F,T)^r = (F,T)^r \cup_\varepsilon (F,T) = U_T \text{ (Sezgin ve Atagün, 2011).}$$

*İspat:* Sezgin ve Atagün (2011) çalışmasında bu özelliği ispatsız bir şekilde vermiş olup, biz burada ispatıyla veriyoruz. İspat, Not 4.2.3 ve Teorem 4.1.3 (11)'den elde edilir.

$$11) [(F,T) \cup_\varepsilon (G,Z)]^r = (F,T)^r \cap_\varepsilon (G,Z)^r \text{ (De Morgan Kuralı) (Qin ve Hong, 2010).}$$

*İspat:* Ali ve diğerleri (2009) genişletilmiş kesişim ve genişletilmiş birleşim için De Morgan kurallarındaki tümleyen işlemi için, Ali ve diğerleri (2009) çalışmasındaki göreceli tümleyen yerine Maji ve diğerleri (2003) çalışmasındaki negatif tümleyeni almışlardır. Qin ve Hong (2010) ise daha yaygın olarak kullanılan Ali ve diğerleri (2009) çalışmasındaki göreceli tümleyeni tümleyen işlemi olarak alarak, De Morgan kurallarını vermişlerdir. İspatları, elemana dayalı ispatlar olup, biz fonksiyon eşitliğinden daha sade bir ispatla sunuyoruz.  $(F,T) \cup_\varepsilon (G,Z) = (H, T \cup Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için;

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(H, T \cup Z)^r = (K, T \cup Z)$  olup,  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G'(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F'(\alpha) \cap G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Buradan,  $(K, T \cup Z) = (F, T)^r \cap_{\varepsilon} (G, Z)^r$ .

$$12) (F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z) = \emptyset_{T \cup Z} \Leftrightarrow (F, T) = \emptyset_T \text{ ve } (G, Z) = \emptyset_Z.$$

*İspat:*  $(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z) = (H, T \cup Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha), & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cup G(\alpha), & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(H, T \cup Z) = \emptyset_{T \cup Z}$  olduğu için  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için  $H(\alpha) = \emptyset$  olur. Buradan,  $\alpha \in T \setminus Z$  ise  $F(\alpha) = \emptyset$ ,  $\alpha \in Z \setminus T$  ise  $G(\alpha) = \emptyset$  ve  $\alpha \in T \cap Z$  ise  $F(\alpha) \cup G(\alpha) = \emptyset$ , yani  $\alpha \in T \cap Z$  ise  $F(\alpha) = G(\alpha) = \emptyset$ . Böylece,  $\forall \alpha \in T$  için,  $F(\alpha) = \emptyset$ ,  $\forall \alpha \in Z$  için  $G(\alpha) = \emptyset$ . Buradan,  $(F, T) = \emptyset_T$  ve  $(G, Z) = \emptyset_Z$ .

Sezgin ve Atagün (2011) çalışmasında, genişletilmiş birleşim ve esnek alt küme ile ilgili özellikleri, Maji ve diğerleri (2003) çalışmasında yer alan esnek alt küme tanımına göre incelemiş olup, bizler bu çalışmada aşağıda yer alan esnek alt küme ile ilgili özellikleri, Pei ve Miao (2005) çalışmasında yer alan esnek alt küme tanımına göre inceleyeceğiz. Bu sebeple, esnek alt küme ile ilgili bu özellikler daha önceki çalışmalarda yer almamıştır.

$$13) \emptyset_T \subseteq (F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z), \emptyset_Z \subseteq (F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z). \text{ Ayrıca, } (F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z) \subseteq U_{T \cup Z}.$$

*İspat:* Boş kümenin her kümenin alt kümesi olmasından ve evrensel kümenin her kümeyi kapsamasından ispat açıktır.

$$14) (F, T) \subseteq (F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z), (G, Z) \subseteq (F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z).$$

*İspat:* İspat, Not 4.2.3 ve Teorem 4.1.3 (15)'den elde edilir.

15)  $(F, T) \cong (G, Z)$  ancak ve ancak  $(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z) = (G, Z)$  (Qin ve Hong, 2010).

*İspat:*  $(F, T) \cong (G, Z)$  olsun. Buradan,  $T \subseteq Z$  olup,  $\forall \alpha \in T, F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ .  
 $(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z) = (H, TUZ)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in TUZ = Z$ ,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z = \emptyset \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z = T \end{cases}$$

Buradan  $\forall \alpha \in T$  için,  $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$  olduğundan  $F(\alpha) \cup G(\alpha) = G(\alpha)$  olup

$$H(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z = T \end{cases}$$

Böylece,  $(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z) = (G, Z)$ . Tersine  $(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z) = (G, Z)$  olsun. Buradan,  $T \cup Z = Z$  olup,  $T \subseteq Z$  olur.  $(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z) = (K, TUZ = Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in TUZ = Z$ ,

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z = \emptyset \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z = T \end{cases}$$

$(K, Z) = (G, Z)$  olduğundan,  $\forall \alpha \in T$  için  $F(\alpha) \cup G(\alpha) = G(\alpha)$  ve böylece,  $\forall \alpha \in T$  için  $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ .  
 Böylece,  $(F, T) \cong (G, Z)$ .

16)  $(F, T) \cong (G, T)$  ise  $(F, T) \cup_{\varepsilon} (K, V) \cong (G, T) \cup_{\varepsilon} (K, V)$ . Tersini doğru değildir.

*İspat:*  $(F, T) \cong (G, T)$  olsun. Buradan,  $\forall \alpha \in T$  için  $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ .  $(F, T) \cup_{\varepsilon} (K, V) = (H, TUV)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in TUV$ ,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus V \\ K(\alpha) & \alpha \in V \setminus T \\ F(\alpha) \cup K(\alpha) & \alpha \in T \cap V \end{cases}$$

$(G, T) \cup_{\varepsilon} (K, V) = (S, TUV)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in TUV$ ,

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in T \setminus V \\ K(\alpha) & \alpha \in V \setminus T \\ G(\alpha) \cup K(\alpha) & \alpha \in T \cap V \end{cases}$$

$\forall \alpha \in T \setminus V$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \subseteq G(\alpha) = S(\alpha)$ ,  $\forall \alpha \in V \setminus T$  için,  $H(\alpha) = K(\alpha) \subseteq L(\alpha) = S(\alpha)$ ,  $\forall \alpha \in T \cap V$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \cup K(\alpha) \subseteq G(\alpha) \cup K(\alpha) = S(\alpha)$ . Böylece,  $(F, T) \cup_{\varepsilon} (K, V) \cong (G, T) \cup_{\varepsilon} (K, V)$ .

Tersinin doğru olmadığına örnek verelim.  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  parametre kümesi,  $T = \{e_1, e_3\}$ ,  $V = \{e_1, e_3, e_5\}$ ,  $E$ 'nin iki alt kümesi,  $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$  evrensel küme olsun.  $(F, T) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$ ,  $(G, T) = \{(e_1, \{h_2\}), (e_3, \{h_1, h_2\})\}$ ,  $(K, V) = \{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, \{h_1, h_5\})\}$  olarak tanımlanan esnek kümeler olsun.  $(F, T) \cup_\varepsilon (K, V) = (L, T \cup V)$  olmak üzere  $(F, T) \cup_\varepsilon (K, V) = \{(e_1, U), (e_3, \emptyset), (e_5, \{h_1, h_5\})\}$ .  $(G, T) \cup_R (K, V) = (K, T \cap V)$  olmak üzere  $(G, T) \cup_\varepsilon (K, V) = \{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, \{h_1, h_5\})\}$ . Buradan,  $(F, T) \cup_\varepsilon (K, V) \not\subseteq (G, T) \cup_\varepsilon (K, V)$ ; fakat  $(F, T) \not\subseteq (G, T)$  olmadığı açıktır.

17)  $(F, T) \subseteq (G, T)$  ve  $(K, V) \subseteq (L, V)$  ise  $(F, T) \cup_\varepsilon (K, V) \subseteq (G, T) \cap_\varepsilon (L, V)$ .

*İspat:*  $(F, T) \subseteq (G, T)$  ve  $(K, V) \subseteq (L, V)$  olsun. Buradan,  $\forall \alpha \in T$  için  $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$  ve  $\forall \alpha \in V$  için  $K(\alpha) \subseteq L(\alpha)$ .  $(F, T) \cup_\varepsilon (K, V) = (H, T \cup V)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup V$ ,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus V \\ K(\alpha) & \alpha \in V \setminus T \\ F(\alpha) \cup K(\alpha) & \alpha \in T \cap V \end{cases}$$

$(G, T) \cap_\varepsilon (L, V) = (S, T \cap V)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap V$ ,

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in T \setminus V \\ L(\alpha) & \alpha \in V \setminus T \\ G(\alpha) \cup L(\alpha) & \alpha \in T \cap V \end{cases}$$

$\forall \alpha \in T \setminus V$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \subseteq G(\alpha) = S(\alpha)$ ,  $\forall \alpha \in V \setminus T$  için,  $H(\alpha) = K(\alpha) \subseteq L(\alpha) = S(\alpha)$ ,  $\forall \alpha \in T \cap V$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \cup K(\alpha) \subseteq G(\alpha) \cup L(\alpha) = S(\alpha)$ . Böylece,  $(F, T) \cup_\varepsilon (K, V) \subseteq (G, T) \cap_\varepsilon (L, V)$ .

18)  $(F, T) \cap_\varepsilon (G, Z) \subseteq (F, T) \cup_\varepsilon (G, Z)$ .

*İspat:*  $(F, T) \cap_\varepsilon (G, Z) = (H, T \cup Z)$  olsun. Burada  $\alpha \in T \cup Z$ ,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F, T) \cup_\varepsilon (G, Z) = (K, T \cup Z)$  olsun. Burada  $\alpha \in T \cup Z$ ,

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$\forall \alpha \in T \setminus Z; H(\alpha) = F(\alpha) \subseteq F(\alpha) = K(\alpha), \forall \alpha \in Z \setminus T; H(\alpha) = G(\alpha) \subseteq G(\alpha) = K(\alpha), \forall \alpha \in T \cap Z;$   
 $H(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha) \subseteq F(\alpha) \cup G(\alpha) = K(\alpha)$ . Böylece,  $(F, A) \cap_{\varepsilon} (G, B) \subseteq (F, A) \cup_{\varepsilon} (G, B)$ .

19)  $(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z) = (F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z) \Leftrightarrow (F, T \cap Z) = (G, T \cap Z)$  ve  $(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, T) = (F, T) \cap_{\varepsilon} (G, T) \Leftrightarrow (F, T) = (G, T)$ .

*İspat:* İspat, Teorem 4.1.3 (23)'e benzer şekilde elde edilir.

#### 4.2.1. Genişletilmiş birleşim işleminin diğer esnek küme işlemlerine dağılması:

Bu alt bölümde genişletilmiş birleşim işleminin; kısıtlanmış işlemlere, genişletilmiş işlemlere ve esnek ikili parçalı işlemlere dağılmasına bakılmıştır.

##### Genişletilmiş birleşim işleminin kısıtlanmış işlemlere dağılması:

Burada genişletilmiş birleşim işleminin, kısıtlanmış işlemlere dağılmasına bakılmıştır. İlk olarak sağdan dağılmalar, peşinden soldan dağılmalar incelenmiştir. Burada önemli bir hususu belirtmekte fayda görüyoruz. Pei ve Miao (2005) ve Ali ve diğerleri (2011) çalışmasında, genişletilmiş birleşim işleminin kısıtlanmış kesişim işlemine soldan dağıldığını ispatsız şekilde, Qin ve Hang (2010) ise elemana dayalı ispatla göstermiş olup; Ali ve diğerleri (2011) genişletilmiş birleşim işleminin, kısıtlanmış birleşime soldan dağılmadığını örnek ile; Singh ve Onyeozili (2012c) ise ispatla göstermiştir. Bu çalışmamızda, dağılmalar ispatlarıyla ve kısıtlanmış işlemleri alınacak esnek kümelerin parametre kümelerinin kesişiminin boş kümeyle eşit olması durumunu da değerlendirerek sunulmuştur. Ayrıca, koşulsuz dağılma özelliğini sağlamayanların, hangi şartlar altında dağılma özelliğini sağladığı da detaylı şekilde ispatlarıyla sunulmuştur.

##### i) Genişletilmiş birleşim işleminin kısıtlanmış işlemlere soldan dağılması

1)  $(F, T) \cup_{\varepsilon} [(G, Z) \cap_R (H, M)] = [(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z)] \cap_R [(F, T) \cup_{\varepsilon} (H, M)]$  (Pei ve Miao, 2005).

*İspat:* Bu özellik Pei ve Miao (2005) çalışmasında ispatsız şekilde verilmiş olup, Qin ve Hang (2010) çalışmasında ise elemena dayalı uzun yöntem ispatla gösterilmiş olup; biz ispatı fonksiyon eşitliğine dayalı olarak sunuyoruz.

İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım.  $(G, Z) \cap_R (H, M) = (M, Z \cap M)$  olsun. Buradan,  $\forall \alpha \in Z \cap M; M(\alpha) = G(\alpha) \cap H(\alpha), (F, T) \cup_\varepsilon (M, Z \cap M) = (N, T \cup (Z \cap M))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup (Z \cap M);$

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus (Z \cap M) \\ M(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus T \\ F(\alpha) \cup M(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus (Z \cap M) \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus T = T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F, T) \cup_\varepsilon (G, Z)] \cap_R [(F, T) \cup_\varepsilon (H, M)]$  bakalım.

$(F, T) \cup_\varepsilon (G, Z) = (M, T \cup Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cup Z;$

$$M(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F, T) \cup_\varepsilon (H, M) = (K, T \cup M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cup M;$

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(M, T \cup Z) \cap_R (K, T \cup M) = (W, (T \cup Z) \cap (T \cup M))$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cap (T \cup M);$

$W(\alpha) = T(\alpha) \cap K(\alpha),$

$$W(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \setminus M) = T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (M \setminus T) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap [F(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap F(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \setminus M) = \emptyset \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (M \setminus T) = T' \cap Z \cap M \\ G(\alpha) \cap [F(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \cap M) = \emptyset \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap F(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (M \setminus T) = \emptyset \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap [F(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$W(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada;  $N$  fonksiyonundaki  $T \setminus (Z \cap M)$  yi ele alırsak,  $T \setminus (Z \cap M) = T \setminus (Z \cap M)'$  olup, bir eleman  $(Z \cap M)$  nin tümleyeninde ise o elemanın ya  $Z \setminus M$  de, ya  $M \setminus Z$  de, ya da  $Z \cup M$  nin tümleyenindedir. Buradan,  $\alpha \in T \setminus (Z \cap M)$  ise  $\alpha \in T \cap Z \cap M'$  veya  $\alpha \in T \cap Z' \cap M$  veya  $\alpha \in T \cap Z' \cap M'$  olduğuna dikkat edecek olursak,  $N$  ve  $W$  fonksiyonları birbirine eşit olur.

Burada  $Z \cap M = \emptyset$  olduğunda,  $N(\alpha) = W(\alpha) = F(\alpha)$  olup, eşitlik yine sağlanacaktır. Benzer şekilde,  $(T \cup Z) \cap (T \cup M) = T \cup (Z \cap M) = \emptyset$  olduğunda da yani  $T = \emptyset$  ve  $Z \cap M = \emptyset$  olduğundan da  $(N, T \cup (Z \cap M)) = (W, (T \cup Z) \cap (T \cup M)) = \emptyset_\emptyset$  olur. Yani, teoremden kısıtlanmış keşimi alınacak esnek kümelerin parametre kümelerinin boştan farklı olması gerektiği şartı bulunmamaktadır.

2)  $(F, T) \cup_\varepsilon [(G, Z) \cup_R (H, M)] \neq [(F, T) \cup_\varepsilon (G, Z)] \cup_R [(F, T) \cup_\varepsilon (H, M)]$  (Ali ve diğerleri, 2011; Singh ve Onyeozili, 2012c),  $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$  ise  $(F, T) \cup_\varepsilon [(G, Z) \cup_R (H, M)] = [(F, T) \cup_\varepsilon (G, Z)] \cup_R [(F, T) \cup_\varepsilon (H, M)]$ .

*İspat:* İspat, genişletilmiş birleşimin, kısıtlanmış kesişime soldan dağılmasına çok benzer olduğundan burada tekrar verilmemiştir. Burada şu hususu belirtmekte fayda görüyoruz. Klasik kümelerde, birleşim işlemi birleşim işlemine soldan dağılır. Fakat genişletilmiş ve kısıtlanmış işlemler için bu durumun mevcut olmadığını, Ali ve diğerleri (2011) çalışmasında örnekle göstermiştir. Biz ise bu çalışmada,  $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$  şartı ile dağılmanın sağlanabileceğini ifade ediyoruz.

## ii) Genişletilmiş birleşim işleminin kısıtlanmış işlemlere sağdan dağılması

$$1) [(F, T) \cap_R (G, Z)] \cup_\varepsilon (H, M) = [(F, T) \cup_\varepsilon (H, M)] \cap_R [(G, Z) \cup_\varepsilon (H, M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım.  $(F, T) \cap_R (G, Z) = (R, T \cap Z)$  olsun. Buradan,  $\forall$

$\alpha \in T \cap Z$ ;  $R(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ .  $(R, T \cap Z) \cup_{\varepsilon} (H, M) = (L, (T \cap Z) \cup M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cup M$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus (T \cap Z) \\ R \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus M = T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus (T \cap Z) \\ [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F, T) \cup_{\varepsilon} (H, M)] \cap_R [(G, Z) \cup_{\varepsilon} (H, M)]$  bakalım.

$(F, T) \cup_{\varepsilon} (H, M) = (S, T \cup M)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(G, Z) \cup_{\varepsilon} (H, M) = (K, Z \cup M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in Z \cup M$ ;

$$K(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus Z \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(S, T \cup Z) \cap_R (K, Z \cup M) = (W, (T \cup Z) \cap (Z \cup M))$  olsun. Buradan,  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cap (Z \cup M)$ ;

$W(\alpha) = S(\alpha) \cap K(\alpha)$  olup

$$W(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \setminus M) \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus M) \cap (M \setminus Z) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (T \setminus M) \cap (Z \cap M) = \emptyset \\ H(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (M \setminus T) \cap (Z \setminus M) = \emptyset \\ H(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus T) \cap (M \setminus Z) = T' \cap Z' \cap M \\ H(\alpha) \cap [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (M \setminus T) \cap (Z \cap M) = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cup H(\alpha)] \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \setminus M) = \emptyset \\ [F(\alpha) \cup H(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \cup H(\alpha)] \cap [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$W(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z' \cap M \\ H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \cup H(\alpha)] \cap [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada;  $L$  fonksiyonundaki,  $M \setminus (T \cap Z)$ 'yi ele alırsak,  $M \setminus (T \cap Z) = M \cap (T \cap Z)'$  olup, bir eleman  $(T \cap Z)$  nin tümleyeninde ise o elemanın ya  $T \setminus Z$  de, ya  $Z \setminus T$  de, ya da  $T \cup Z$  nin tümleyenindedir. Burdan,  $\alpha \in M \setminus (T \cap Z)$  ise  $\alpha \in M \cap T \cap Z'$  veya  $\alpha \in M \cap Z \cap T'$  veya  $\alpha \in M \cap T' \cap Z'$  olduğuna dikkat edecek olursak  $L=W$  sağlanır. Burada  $T \cap Z = \emptyset$  olduğunda,  $L(\alpha) = W(\alpha) = H(\alpha)$  olacağından, eşitlik yine sağlanacaktır. Benzer şekilde,  $(T \cup M) \cap (Z \cup M) = (T \cap Z) \cup M = \emptyset$  olduğunda da yani  $T \cap Z = \emptyset$  ve  $M = \emptyset$  olduğundan da  $(L, (T \cap Z) \cup M) = (W, (T \cup M) \cap (Z \cup M)) = \emptyset$  olur. Yani, teoremden kısıtlanmış keşimi alınacak esnek kümelerin parametre kümelerinin boştan farklı olması gerektiği şartı bulunmamaktadır.

$$2) (T \Delta Z) \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \cup_R (G, Z)] \cup_\varepsilon (H, M) = [(F, T) \cup_\varepsilon (H, M)] \cup_R [(G, Z) \cup_\varepsilon (H, M)].$$

*İspat:* İspat, genişletilmiş birleşimin, kısıtlanmış kesişime sağdan dağılmasına çok benzer olduğundan burada tekrar verilmemiştir. Burada şu hususu belirtmekte fayda görüyoruz. Klasik kümelerde, birleşim işlemi birleşim işlemine sağdan dağılır. Fakat genişletilmiş ve kısıtlanmış işlemler için bu durumun mevcut olmadığını; ancak  $(T \Delta Z) \cap M = \emptyset$  şartı ile dağılmanın sağlanabileceğini ifade ediyoruz.

#### Genişletilmiş birleşim işleminin genişletilmiş işlemlere dağılması

Burada, genişletilmiş birleşim işleminin, genişletilmiş işlemlere dağılmasına bakılmıştır. İlk olarak sağdan dağılmalar, peşinden soldan dağılmalar incelenmiştir. Burada önemli bir hususu belirtmekte fayda görüyoruz. Ali ve diğerleri (2011) çalışmasında, genişletilmiş birleşim işleminin genişletilmiş birleşime soldan dağılmasına ispatsız şekilde bakmış olup; genişletilmiş birleşimin genişletilmiş kesişime sağdan dağılma özelliğini sağlamadığını örnek ile göstermiştir. Bu çalışmada ise dağılmalar detaylı ispatlarıyla sunulmuştur. Koşulsuz şekilde dağılma özelliğini sağlamayanlar ise hangi şartlar altında dağılmayı sağlayacağı ispatlarla gösterilmiştir.

i) Genişletilmiş birleşim işleminin genişletilmiş işlemlere soldan dağılması

1)  $(F,T) \cup_{\varepsilon} [(G,Z) \cup_{\varepsilon} (H,M)] = [(F,T) \cup_{\varepsilon} (G,Z)] \cup_{\varepsilon} [(F,T) \cup_{\varepsilon} (H,M)]$  (Ali ve diğerleri, 2011).

*İspat:* Ali ve diğerleri (2011) çalışmasında bu teoremi ispatsız şekilde vermişlerdir. Biz burada detaylı ispatıyla veriyoruz. İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım.

$(G,Z) \cup_{\varepsilon} (H,M) = (R,Z \cup M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in Z \cup M$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus Z \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F,T) \cup_{\varepsilon} (R,Z \cup M) = (N, (T \cup (Z \cup M)))$  bakalım.  $\forall \alpha \in T \cup (Z \cup M)$ ;

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus (Z \cup M) \\ R(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) \setminus T \\ F(\alpha) \cup R(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus M) \setminus T = T' \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus Z) \setminus T = T' \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus T = T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \cup [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F,T) \cup_{\varepsilon} (G,Z)] \cup_{\varepsilon} [(F,T) \cup_{\varepsilon} (H,M)]$  bakalım.  $(F,T) \cup_{\varepsilon} (G,Z) = (K, T \cup Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup Z$ ;

$$M(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F,T) \cap_{\varepsilon} (H,M) = (S, T \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup Z) \cup_{\varepsilon} (S, T \cup M) = (L, (T \cup Z) \cup (T \cup M))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup (T \cup M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \setminus (T \cup M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \setminus (T \cup Z) \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap (T \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \setminus (T \cup M) = \emptyset \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \setminus (T \cup M) = T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cup M) = \emptyset \\ F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus M) \setminus (T \cup Z) = \emptyset \\ H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus T) \setminus (T \cup Z) = T' \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (T \cup Z) = \emptyset \\ F(\alpha) \cup F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \setminus M) = T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (M \setminus T) = \emptyset \\ F(\alpha) \cup [F(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup F(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \setminus M) = \emptyset \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (M \setminus T) = T' \cap Z \cap M \\ G(\alpha) \cup [F(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \cap M) = \emptyset \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cup F(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (M \setminus T) = \emptyset \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cup [F(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

$N=L$  olduğu görülür.

2)  $(F, T) \cup_{\varepsilon} [(G, Z) \cap_{\varepsilon} (H, M)] \neq [(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z)] \cap_{\varepsilon} [(F, T) \cup_{\varepsilon} (H, M)]$  (Ali ve diğerleri, 2011),

$T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$  ise  $(F, T) \cup_{\varepsilon} [(G, Z) \cap_{\varepsilon} (H, M)] = [(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z)] \cap_{\varepsilon} [(F, T) \cup_{\varepsilon} (H, M)]$ .

*İspat:* İspat, genişletilmiş birleşimin, genişletilmiş birleşime soldan dağılmasına çok benzer olduğundan burada tekrar verilmemiştir. Burada şu hususu belirtmekte fayda görüyoruz. Klasik kümelerde, birleşim işlemi kesişim işlemine soldan dağılır. Fakat genişletilmiş işlemler için bu durumun mevcut olmadığını, Ali ve diğerleri (2011) çalışmasında örnekle göstermiştir. Biz ise bu çalışmada,  $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$  şartı ile dağılmanın sağlanabileceğini ifade ediyoruz.

ii) Genişletilmiş birleşim işleminin genişletilmiş işlemlere sağdan dağılması:

$$1) [(F,T) \cup_{\varepsilon} (G,Z)] \cup_{\varepsilon} (H,M) = [(F,T) \cup_{\varepsilon} (H,M)] \cup_{\varepsilon} [(G,Z) \cup_{\varepsilon} (H,M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım.  $(F,T) \cup_{\varepsilon} (G,Z) = (R, T \cup Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup Z$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T \cup Z) \cup_{\varepsilon} (H,M) = (N, (T \cup Z) \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup M$ ;

$$N(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus (T \cup Z) \\ R(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \setminus M = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \setminus M = T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus M = T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus (T \cup Z) = T' \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F,T) \cup_{\varepsilon} (H,M)] \cup_{\varepsilon} [(G,Z) \cup_{\varepsilon} (H,M)]$  bakalım.

$(F,T) \cup_{\varepsilon} (H,M) = (K, T \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(G, Z) \cup_{\varepsilon} (H, M) = (S, T \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cup M$ ;

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus Z \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup M) \cup_{\varepsilon} (S, Z \cup M) = (L, (T \cup M) \cup (Z \cup M))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cup M) \cup (Z \cup M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \setminus (Z \cup M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) \setminus (T \cup M) \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus M) \setminus (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus T) \setminus (Z \cup M) = \emptyset \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cup M) = \emptyset \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus M) \setminus (T \cup M) = T' \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus Z) \setminus (T \cup M) = \emptyset \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus (T \cup M) = \emptyset \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \setminus M) \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus M) \cap (M \setminus Z) = \emptyset \\ F(\alpha) \cup [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (T \setminus M) \cap (Z \cap M) = \emptyset \\ H(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (M \setminus T) \cap (Z \setminus M) = \emptyset \\ H(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus T) \cap (M \setminus Z) = T' \cap Z' \cap M \\ H(\alpha) \cup [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (M \setminus T) \cap (Z \cap M) = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cup H(\alpha)] \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \setminus M) = \emptyset \\ [F(\alpha) \cup H(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha \cup H(\alpha))] \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z' \cap M \\ H(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \cup H(\alpha)] \cap [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

$N=L$  sağlanmış olur.

$$2) (T \Delta Z) \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z)] \cup_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) \cup_{\varepsilon} (H, M)] \cap_{\varepsilon} [(G, Z) \cup_{\varepsilon} (H, M)].$$

*İspat:* İspat, genişletilmiş birleşimin, genişletilmiş birleşime sağdan dağılmasına çok benzer olduğundan burada tekrar verilmemiştir. Burada şu hususu belirtmekte fayda görüyoruz. Klasik kümelerde, birleşim işlemi kesişim işlemine sağdan dağılır. Fakat genişletilmiş işlemler için bu durumun mevcut olmadığını ancak  $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$  şartı ile dağılmanın sağlanabileceğini ifade ediyoruz.

#### Genişletilmiş birleşim işleminin esnek ikili parçalı işlemlere dağılması:

Burada, genişletilmiş birleşim işleminin, esnek ikili parçalı işlemlere dağılmasına bakılmıştır. İlk olarak sağdan dağılmalar, peşinden soldan dağılmalar incelenmiştir.

##### i) Genişletilmiş birleşim işleminin esnek ikili parçalı işlemlere soldan dağılması:

$$1) T \cap Z \cap M' = \emptyset \text{ ise } (F, T) \cup_{\varepsilon} [(G, Z) \underset{\cap}{\sim} (H, M)] = [(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z)] \underset{\cap}{\sim} [(F, T) \cup_{\varepsilon} (H, M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım.  $(G, Z) \underset{\cap}{\sim} (H, M) = (R, Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) \cup_{\varepsilon} (R, Z) = (N, T \cup Z)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cup Z$ ;

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ R(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cup R(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus M) \setminus T = T' \cap Z \cap M' \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus T = T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F,T) \cup_{\varepsilon} (G,Z)] \sim_{\cap} [(F,T) \cup_{\varepsilon} (H,M)]$  bakalım.  $(F,T) \cup_{\varepsilon} (G,Z) = (K, T \cup Z)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cup Z$ ;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F,T) \cup_{\varepsilon} (H,M) = (S, T \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup Z) \sim_{\cap} (S, T \cup M) = (L, (T \cup Z) \cup (T \cup M))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup (T \cup M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \setminus (T \cup M) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap (T \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \setminus (T \cup M) = \emptyset \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \setminus (T \cup M) = T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cup M) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \setminus M) = T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (M \setminus T) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap [F(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap F(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \setminus M) = \emptyset \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (M \setminus T) = T' \cap Z \cap M \\ G(\alpha) \cap [F(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \cap M) = \emptyset \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap F(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (M \setminus T) = \emptyset \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \cap [F(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki,  $T \setminus Z$  yi ele alırsak,  $T \setminus Z = T \cap Z'$  olup, bir eleman  $Z$  nin tümleyeninde ise o eleman ya  $M \setminus Z$  de, ya da  $M \cup Z$  nin tümleyenindedir. Burdan,  $\alpha \in T \setminus Z$  ise  $\alpha \in T \cap M \cap Z'$  veya  $\alpha \in T \cap M' \cap Z'$  olduğuna dikkat edecek olursak,  $T \cap Z \cap M' = \emptyset$  şartı ile  $N = L$  sağlanır.

$$2) T \cap Z' \cap M = \emptyset \text{ ise } (F, T) \cup_{\varepsilon} [(G, Z) \widetilde{\cup} H, M] = [(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z)] \widetilde{\cup} [(F, M) \cup_{\varepsilon} (G, Z)].$$

## ii) Genişletilmiş Birleşim İşleminin Esnek İkili Parçalı İşlemlere Sağdan Dağılması:

$$1) T \cap Z' \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \widetilde{\cap} (G, Z)] \cup_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) \cup_{\varepsilon} (H, M)] \widetilde{\cap} [(G, Z) \cup_{\varepsilon} (H, M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım.  $(F, T) \widetilde{\cap} (G, Z) = (R, T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T) \cup_{\varepsilon} (H, M) = (N, T \cup M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$N(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ R(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \setminus M = T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus M = T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F,T) \cup_{\varepsilon} (H,M)] \sim_{\cap} [(G,Z) \cup_{\varepsilon} (H,M)]$  bakalım.  $(F,T) \cup_{\varepsilon}$

$(H,M) = (K, T \cup M) \forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(G,Z) \cup_{\varepsilon} (H,M) = (S, T \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cup M$ ;

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus Z \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup M) \sim_{\cap} (S, Z \cup M) = (L, (T \cup M) \cup (Z \cup M))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cup M) \cup (Z \cup M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \setminus (Z \cup M) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus M) \setminus (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus T) \setminus (Z \cup M) = \emptyset \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cup M) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \setminus M) \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus M) \cap (M \setminus Z) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (T \setminus M) \cap (Z \cap M) = \emptyset \\ H(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (M \setminus T) \cap (Z \cap M) = \emptyset \\ H(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus T) \cap (M \setminus Z) = T' \cap Z' \cap M \\ H(\alpha) \cap [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (M \setminus T) \cap (Z \cap M) = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cup H(\alpha)] \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = \emptyset \\ [F(\alpha) \cup H(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \cup H(\alpha)] \cap [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z' \cap M \\ H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada;  $N$  fonksiyonundaki,  $M \setminus T$  yi ele alırsak,  $M \setminus T = M \cap T'$  olup, bir eleman  $T$  nin tümleyeninde ise o eleman ya  $Z \setminus T$  de, ya da  $Z \cup T$  nin tümleyenindedir. Burdan,  $\alpha \in M \setminus T$  ise  $\alpha \in M \cap Z \cap T'$  veya  $\alpha \in M \cap Z' \cap T'$  olduğuna dikkat edecek olursak,  $T \cap Z' \cap M = \emptyset$  şartı ile  $N = L$  sağlanır.

$$2) T' \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \tilde{\cup} (G, Z)] \cup_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) \cup_{\varepsilon} (H, M)] \tilde{\cup} [(G, Z) \cup_{\varepsilon} (H, M)].$$

## 5. KISITLANMIŞ VE GENİŞLETİLMİŞ FARK İŞLEMİ

Bu bölümde, öncelikle Ali ve diğerleri (2009) tarafından literatüre kazandırılmış olan kısıtlanmış fark işlemi; sonrasında ise Sezgin ve diğerleri (2019) tarafından literatüre kazandırılmış olan genişletilmiş fark adı verilen esnek küme işleminin cebirsel özellikleri klasik kümelerdeki fark işleminin özellikleri ile karşılaştırmalı olarak incelenmiş; sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde ve  $S_E(U)$  kümesi üzerinde bu işlemlerin hangi cebirsel yapıları oluşturduğu görmek için dağılma kurallarına bakılarak, diğer esnek küme işlemleri ile olan ilişkisi incelenmiştir.

Burada önemli bir hususu belirtmekte fayda görüyoruz. Kısıtlanmış fark işlemine ilk olarak, Ali ve diğerleri (2009) çalışmasında yer verilmesine rağmen, o çalışmada iki esnek kümenin kısıtlanmış fark işleminin tanımlı olması için kısıtlanmış fark alınacak esnek kümelerin parametre kümelerinin kesişiminin boştan farklı olması, gerek şart olarak tanıma eklenmiş, kesişimin boş olması durumunda, işlem sonucunun ne olacağı ile ilgili bilgi verilmemiştir. Ali ve diğerleri (2011) çalışmasında ise kısıtlanmış farkı alınacak esnek kümelerin parametre kümelerinin kesişiminin boş olması durumunda işlem sonucunun ne olacağı ile ilgili bilgi notu vermiş olmasına rağmen, yine de tanımda esnek farkı alınacak olan esnek kümelerin parametre kümelerinin boştan farklı olması şartıyla tanımları yazmaları matematiksel olarak rahatsız edicidir. Bu açıdan, bu bölümde tüm bu durumlar göz altına alınarak güncellenmiş kısıtlanmış fark tanımı verilmiştir.

Ayrıca kısıtlanmış fark işleminin literatürdeki tanımı, her ne kadar bu bölümde detaylı olarak belirttiğimiz önemli hususlar göz önünde bulundurulmadan verilmiş olsa da, kısıtlanmış ve genişletilmiş fark işlemleri, daha önceden tanımlanmış işlemler olduğu için, bu bölümde yer alan bazı özellikler daha önceki çalışmalarda (Ali ve diğerleri 2009; Ali ve diğerleri, 2011; Sezgin ve Atagün, 2011; Sezgin ve diğerleri, 2019) verilmiştir. Fakat, çalışmaların çoğunda bu özelliklerin pek çoğu, ispatsız ve/veya detaysız ispatlı verilmiştir. Bu çalışmada ise fonksiyon eşitliğine dayalı ispatlar düzenli bir şekilde verilmiş olup; daha önceki çalışmalarda yer verilmemiş olan pek çok özellikle birlikte, Pei ve Miao (2005) esnek alt küme tanımı ve kısıtlanmış/genişletilmiş fark işlemleri arasındaki ilişkiler, klasik kümelerdeki karşılıkları ile ilk defa bu çalışmada verilmiş ve yine detaylı ispatları ile sunulmuştur. Üstelik temel esnek küme işlemlerinden olan kısıtlanmış ve genişletilmiş

fark işlemlerine ait tüm özelliklerin, ispatlarıyla birlikte bir arada olması ve esnek kümelerin kısıtlanmış fark için daha önceki çalışmalarda göz ardı edilen, esnek kümelerin parametre kümelerinin kesişiminin boş küme olması durumu da bu çalışmada, her bir özellik için göz ardı edilmeden değerlendirilmiş olduğundan, çalışma diğer tüm çalışmaları kapsayıcı nitelikte olup, bu açıdan, çalışmanın esnek küme teorisine yeni başlayanlar için, bir el kitabı niteliğinde olması ümidiyle çalışmamızı oldukça önemseyeceğimizi belirtmek istiyoruz.

## 5.1. Kısıtlanmış Fark İşlemi ve Özellikleri

5.1.1. Tanım  $(F, T)$  ve  $(G, Z)$ ,  $U$  üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin  $(F, T) \setminus_R (G, Z)$  ile gösterilen kısıtlanmış fark işlemi  $C = T \cap Z$  olmak üzere,  $C = T \cap Z \neq \emptyset$  ise  $\forall \alpha \in C$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ ;  $C = T \cap Z = \emptyset$  ise  $(F, T) \setminus_R (G, Z) = (H, C) = \emptyset_\emptyset$  olacak şekilde  $(F, T) \setminus_R (G, Z) = (H, C)$  ile tanımlanır.

Parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme  $\emptyset_\emptyset$  olduğundan, tanımda  $C = T \cap Z = \emptyset$  ise,  $(F, T) \cap_R (G, Z) = \emptyset_\emptyset$  olduğu açıktır. Buradan, kısıtlanmış fark işleminin tanımlı olması için,  $(F, T)$  ve  $(G, Z)$ ,  $U$  üzerinde iki esnek küme olmak üzere,  $T \cap Z \neq \emptyset$  şartının bulunmadığı görülmektedir.

Bu tanıma ne Ali ve diğerleri (2009) ne de Ali ve diğerleri (2011) çalışmalarını referans olarak vermemiş olmamızın nedeni, 5. Bölümün giriş kısmında yaptığımız detaylı açıklamalar sebebiyle, parametre kümelerinin kesişiminin boş olması durumunun da değerlendirilerek, tanımın güncellenmiş olarak bu çalışmaya eklenmiş olmasından kaynaklıdır. Çalışmaların pek çoğunda (Ali ve diğerleri, 2009; Atagün ve Sezgin, 2011, Ali ve diğerleri, 2011; Singh ve Onyeozili, 2012c) kısıtlanmış fark işleminin geçtiği yerlerdeki özellikler bu şart ile yazılmış olup; esasen bu şartın bir gerek şart olmadığı bu çalışma boyunca ilgili yerlerde gösterilmiştir.

Kısıtlanmış fark işleminin gösterimi olan “ $\setminus_R$ ” simgesinin altına yazı olan “R” harfi, İngilizcede “kısıtlanmış” anlamına gelen “restricted” kelimesi ile de uyumlu ve anlamlı bir bütün oluşturmaktadır. Zira, diğer esnek küme işlemleri çalışmalarında da kısıtlanmış esnek küme işlemleri için, bu gösterim formu tercih edilmiştir.

5.1.2. *Örnek*  $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$  parametre kümesi,  $T=\{e_1,e_3\}$ ,  $Z=\{e_2,e_3,e_4\}$   $E$ 'nin iki alt kümesi,  $U=\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$  evrensel küme,  $(F,T)$  ve  $(G,Z)$ ,  $U$  üzerinde  $(F,T)=\{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$ ,  $(G,Z)=\{(e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4\}), (e_4, \{h_3, h_5\})\}$  olarak tanımlanan iki esnek küme olsun.  $(F,T) \setminus_R (G,Z) = (H, T \cap Z)$  olmak üzere  $\forall \alpha \in T \cap Z = \{e_3\}$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$  olup,  $H(e_3) = F(e_3) \setminus G(e_3) = F(e_3) \cap G'(e_3) = \{h_1, h_2, h_5\} \cap \{h_1, h_5\} = \{h_1, h_5\}$ . Böylece,  $(F,T) \setminus_R (G,Z) = \{(e_3, \{h_1, h_5\})\}$ .

### 5.1.3. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1)  $\setminus_R$ ,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde kapalıdır.

*İspat:*  $\setminus_R$  işleminin  $S_E(U)$  üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$\setminus_R: S_E(U) \times S_E(U) \rightarrow S_E(U)$$

$$((F,T), (G,Z)) \rightarrow (F,T) \setminus_R (G,Z) = (H, T \cap Z)$$

olup,  $(F,T)$  ve  $(G,Z)$ ,  $U$  üzerinde iki esnek küme olduğunda  $(F,T) \setminus_R (G,Z)$  de,  $U$  üzerinde bir esnek kümedir. Benzer şekilde,

$$\setminus_R: S_T(U) \times S_T(U) \rightarrow S_T(U)$$

$$((F,T), (G,T)) \rightarrow (F,T) \setminus_R (G,T) = (K, T \cap T) = (K, T)$$

olup,  $T$ ,  $E$  kümesinin sabit bir alt kümesi ve  $(F,T)$  ve  $(G,T)$ ,  $S_T(U)$  kümesinin elemanı olmak üzere,  $(F,T) \setminus_R (G,T)$  de  $S_T(U)$  kümesinin elemanıdır. Yani  $\setminus_R$  işlemi,  $S_T(U)$  kümesi üzerinde de kapalıdır.

2)  $[(F,T) \setminus_R (G,Z)] \setminus_R (H,M) \neq (F,T) \setminus_R [(G,Z) \setminus_R (H,M)]$ .

*İspat:*  $(F,T) \setminus_R (G,Z) = (S, T \cap Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $S(\alpha) = F(\alpha) \cap G'(\alpha)$ .  $(S, T \cap Z) \setminus_R (H,M) = (R, (T \cap Z) \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cap M$  için,  $R(\alpha) = S(\alpha) \cap H'(\alpha)$ . Böylece,

$$R(\alpha) = [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \setminus H(\alpha)$$

$(G,Z) \setminus_R (H,M) = (K, Z \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cap M$  için,  $K(\alpha) = G(\alpha) \setminus H(\alpha)$ .  $(F,T) \setminus_R (K, Z \cap M) = (S, T \cap (Z \cap M))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap (Z \cap M)$  için,  $S(\alpha) = F(\alpha) \setminus K(\alpha)$ . Böylece,

$$S(\alpha) = F(\alpha) \setminus [G(\alpha) \setminus H(\alpha)]$$

Burada  $(R, (T \cap Z) \cap M) \neq (S, T \cap (Z \cap M))$  olduğu görülür.

Yani  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\setminus_R$  işleminin birleşme özelliği yoktur.

$$3) [(F, T) \setminus_R (G, T)] \setminus_R (H, T) \neq (F, T) \setminus_R [(G, T) \setminus (H, T)].$$

*İspat:*  $(F, T) \setminus_R (G, T) = (S, T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap T = T$  için,  $S(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ .  $(S, T) \setminus_R (H, T) = (R, T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap T = T$  için,  $R(\alpha) = S(\alpha) \setminus H(\alpha)$ . Böylece,

$$R(\alpha) = [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \setminus H(\alpha)$$

$(G, T) \setminus_R (H, T) = (L, T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap T$  için,  $L(\alpha) = G(\alpha) \setminus H(\alpha)$ .  $(F, T) \setminus_R (L, T) = (N, T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap T$  için,  $N(\alpha) = F(\alpha) \setminus L(\alpha)$ . Böylece,

$$N(\alpha) = F(\alpha) \setminus [G(\alpha) \setminus H(\alpha)]$$

Buradan,  $(R, T) \neq (N, T)$  olduğu görülür.

Yani, parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler kümesi üzerinde  $\setminus_R$  işleminin birleşme özelliği yoktur.

$$4) (F, T) \setminus_R (G, Z) \neq (G, Z) \setminus_R (F, T).$$

*İspat:*  $(F, T) \setminus_R (G, Z) = (H, T \cap Z)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ .  $(G, Z) \setminus_R (F, T) = (S, Z \cap T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cap T$  için,  $T(\alpha) = G(\alpha) \setminus F(\alpha)$ . Böylece,

$$(F, T) \setminus_R (G, Z) \neq (G, Z) \setminus_R (F, T).$$

$S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\setminus_R$  işleminin değişme özelliği yoktur.  $(F, T) \setminus_R (G, T) \neq (G, T) \setminus_R (F, T)$  olduğu, yani  $\setminus_R$  işleminin parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler kümesi üzerinde de değişme özelliğine sahip olmadığı açıktır.

$$5) (F, T) \setminus_R (F, T) = \emptyset_T \text{ (Sezgin ve Atagün, 2011).}$$

*İspat:* Sezgin ve Atagün (2011) çalışmasında, bu özellik ispatsız şekilde verilmiş olup, burada ispatıyla verilmiştir.  $(F,T) \setminus_R (F,T)=(H,T \cap T)$  olsun. Buradan,  $\forall \alpha \in T$  için,  $H(\alpha)=F(\alpha) \cap F'(\alpha)=\emptyset$  olur ve böylece  $(H,T)=\emptyset_T$  elde edilir.

Yani  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\setminus_R$  işlemi, denk güçlülük özelliğine sahip değildir.

6)  $(F,T) \setminus_R \emptyset_T=(F,T)$  (Sezgin ve Atagün, 2011).

*İspat:*  $\emptyset_T=(S,T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T$  için,  $S(\alpha)=\emptyset$ .  $(F,T) \setminus_R (S,T)=(H,T \cap T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T$  için,  $H(\alpha)=F(\alpha) \cap S'(\alpha)=F(\alpha) \cap U=F(\alpha)$ . Böylece,  $(H,T)=(F,T)$ .

Yani,  $S_T(U)$  kümesi üzerinde  $\setminus_R$  işleminin sağ birim elemanı  $\emptyset_T$  esnek kümesidir.

7)  $\emptyset_T \setminus_R (F,T)=\emptyset_T$ .

*İspat:*  $\emptyset_T=(S,T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T$  için,  $S(\alpha)=\emptyset$ .  $(S,T) \setminus_R (F,T)=(H,T \cap T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T$  için,  $H(\alpha)=S(\alpha) \cap F'(\alpha)=\emptyset \cap F'(\alpha)=\emptyset$ . Böylece,  $(H,T)=\emptyset_T$ .

Yani,  $S_T(U)$  kümesi üzerinde  $\setminus_R$  işleminin sol yutan elemanı  $\emptyset_T$  esnek kümesidir.

8)  $(F,T) \setminus \emptyset_M=(F,T \cap M)$ .

*İspat:*  $\emptyset_M=(S,M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in M$  için,  $S(\alpha)=\emptyset$ .  $(F,T) \setminus_R (S,M)=(H,T \cap M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $H(\alpha)=F(\alpha) \cap S'(\alpha)=F(\alpha) \cap U=F(\alpha)$ . Böylece,  $(H,T \cap M)=(F,T \cap M)$ .

9)  $\emptyset_M \setminus_R (F,T)=\emptyset_{M \cap T}$ .

*İspat:*  $\emptyset_M=(S,M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in M$  için,  $S(\alpha)=\emptyset$ .  $(S,M) \setminus_R (F,T)=(H,M \cap T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in M \cap T$  için,  $H(\alpha)=S(\alpha) \cap F'(\alpha)=\emptyset \cap F'(\alpha)=\emptyset$ . Böylece,  $(H,M \cap T)=(F, M \cap T)$ .

10)  $(F,T) \setminus_R \emptyset_E=(F,T)$  (Sezgin ve Atagün, 2011).

*İspat:*  $\emptyset_E=(S,E)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in E$  için,  $S(\alpha)=\emptyset$ .  $(F,T) \setminus_R (S,E)=(H, T \cap E)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cap E=T$  için,  $H(\alpha)=F(\alpha) \cap S'(\alpha)=F(\alpha) \cap U=F(\alpha)$ . Böylece,  $(H,T)=(F,T)$ .

Yani,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde  $\setminus_R$  işleminin sağ birim elemanı  $\emptyset_E$  esnek kümesidir.

$$11) \emptyset_E \setminus_R (F, T) = \emptyset_T.$$

*İspat:*  $\emptyset_E = (S, E)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in E$  için,  $S(\alpha) = \emptyset$ .  $(S, E) \setminus_R (F, T) = (H, E \cap T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in E \cap T = T$ ,  $H(\alpha) = S(\alpha) \cap F'(\alpha) = \emptyset \cap F'(\alpha) = \emptyset$ . Böylece,  $(H, T) = \emptyset_T$ .

$$12) (F, T) \setminus_R \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \setminus_R (F, T) = \emptyset_\emptyset.$$

*İspat:*  $\emptyset_\emptyset = (S, \emptyset)$  olsun.  $(F, T) \setminus_R (S, \emptyset) = (H, T \cap \emptyset) = (H, \emptyset)$  olup,  $\emptyset_\emptyset$  parametre kümesi boş küme olan tek esnek küme olduğu için,  $(H, \emptyset) = \emptyset_\emptyset$ .

Yani,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\setminus_R$  işleminin yutan elemanı  $\emptyset_\emptyset$  esnek kümesidir.

$$13) (F, T) \setminus_R U_T = \emptyset_T.$$

*İspat:*  $U_T = (K, T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T$  için,  $K(\alpha) = U$ .  $(F, T) \setminus_R (K, T) = (H, T \cap T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \cap T'(\alpha) = F(\alpha) \cap \emptyset = \emptyset$ . Böylece,  $(H, T) = \emptyset_T$ .

$$14) U_T \setminus_R (F, T) = (F, T)^f.$$

*İspat:*  $U_T = (K, T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T$  için,  $K(\alpha) = U$ .  $(K, T) \setminus_R (F, T) = (H, T \cap T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T$  için,  $H(\alpha) = T(\alpha) \cap F'(\alpha) = U \cap F'(\alpha) = F'(\alpha)$ . Böylece,  $(H, T) = (F, T)^f$ .

$$15) (F, T) \setminus_R U_M = \emptyset_{T \cap M}.$$

*İspat:*  $U_M = (K, M)$  olsun. Buradan,  $\forall \alpha \in M$  için,  $K(\alpha) = U$ .  $(F, T) \setminus_R (K, M) = (H, T \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \cap T'(\alpha) = F(\alpha) \cap \emptyset = \emptyset$ . Böylece,  $(H, T \cap M) = \emptyset_{T \cap M}$ .

$$16) U_M \setminus_R (F, T) = (F, T \cap M)^f.$$

*İspat:*  $U_M = (K, M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in M$  için,  $K(\alpha) = U$ .  $(K, M) \setminus_R (F, T) = (H, M \cap T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in M \cap T$  için,  $H(\alpha) = T(\alpha) \cap F'(\alpha) = U \cap F'(\alpha) = F'(\alpha)$ . Böylece,  $(H, M \cap T) = (F, T \cap M)^f$ .

$$17) (F, T) \setminus_R U_E = \emptyset_T.$$

*İspat:*  $U_E = (K, E)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in E$  için,  $K(\alpha) = U$ .  $(F, T) \setminus_R (K, E) = (H, T \cap E)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap E = T$ ;  $H(\alpha) = F(\alpha) \cap K'(\alpha) = F'(\alpha) \cap \emptyset = \emptyset$ ,  $(H, T) = \emptyset_T$ .

18)  $U_E \setminus_R (F, T) = (F, T)^f$  (Ali ve diğerleri, 2009).

*İspat:*  $U_E = (K, E)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in E$  için,  $K(\alpha) = U$ .  $(K, E) \setminus_R (F, T) = (H, E \cap T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in E \cap T = T$  için,  $H(\alpha) = T(\alpha) \cap F'(\alpha) = U \cap F'(\alpha) = F'(\alpha)$ . Buradan  $(H, T) = (F, T)^f$ .

19)  $(F, T) \setminus_R (F, T)^f = (F, T)$ .

*İspat:*  $(F, T)^f = (H, T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T$  için,  $H(\alpha) = F'(\alpha)$ .  $(F, T) \setminus_R (H, T) = (L, T \cap T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T$  için,  $L(\alpha) = F(\alpha) \cap H'(\alpha) = F(\alpha) \cap F(\alpha) = F(\alpha)$ . Böylece,  $(L, T) = (F, T)$ . Yani,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\setminus_R$  işlemi için her esnek kümenin tümleyeni, kendisinin sağ birim elemanıdır.

20)  $(F, T)^f \setminus_R (F, T) = (F, T)^f$ .

*İspat:*  $(F, T)^f = (H, T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T$  için,  $H(\alpha) = F'(\alpha)$ .  $(H, T) \setminus_R (F, T) = (L, T \cap T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T$  için,  $L(\alpha) = H(\alpha) \cap F'(\alpha) = F'(\alpha) \cap F'(\alpha) = F'(\alpha)$ . Buradan  $(L, T) = (F, T)^f$ . Yani,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\setminus_R$  işlemi için, her esnek kümenin tümleyeni, kendisinin sol yutan elemanıdır.

21)  $[(F, T) \setminus_R (G, Z)]^f = (F, T) +_R (G, Z)$ .

*İspat:*  $(F, T) \setminus (G, Z) = (H, T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \cap G'(\alpha)$ .  $(H, T \cap Z)^f = (K, T \cap Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $K(\alpha) = F'(\alpha) \cup G(\alpha)$  olur. Böylece,  $(K, T \cap Z) = (F, T) +_R (G, Z)$ .

22)  $(F, T) \setminus_R (G, T) = U_T \Leftrightarrow (F, T) = U_T$  ve  $(G, T) = \emptyset_T$ .

*İspat:*  $(F, T) \setminus_R (G, T) = (K, T \cap T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \cap G'(\alpha)$ .  $(K, T) = U_T$  olduğundan,  $\forall \alpha \in T$  için,  $K(\alpha) = U$ . Böylece,  $\forall \alpha \in T$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \cap G'(\alpha) = U \Leftrightarrow \forall \alpha \in T$  için,  $F(\alpha) = U$  ve  $G'(\alpha) = U \Leftrightarrow \forall \alpha \in T$  için,  $F(\alpha) = U$  ve  $G(\alpha) = \emptyset \Leftrightarrow (F, T) = U_T$  ve  $(G, T) = \emptyset_T$ .

23)  $\emptyset \cong (F,T) \setminus_R (G,Z)$  ve  $(F,T) \setminus_R (G,Z) \cong U_T$  ve  $(F,T) \setminus_R (G,Z) \cong U_Z$ .

*İspat:* Boş kümenin her kümenin alt kümesi olmasından ve evrensel kümenin her kümeyi kapsamasından ispat açıktır.

24)  $(F,T) \setminus_R (G,Z) \cong (G,Z)^r$  ve  $(F,T) \setminus_R (G,Z) \cong (F,T)$ .

*İspat:*  $(F,T) \setminus_R (G,Z) = (H,T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \cap G'(\alpha)$  olur. Böylece,  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha) \cap G'(\alpha) \subseteq F(\alpha)$  ve  $H(\alpha) = F(\alpha) \cap G'(\alpha) \subseteq G'(\alpha)$ . Böylece,  $(F,T) \setminus_R (G,Z) \cong (F,T)$  ve  $(F,T) \setminus_R (G,Z) \cong (G,Z)^r$ .

25)  $(F,T) \cong (G,T)$  ise  $(F,T) \setminus_R (H,Z) \cong (G,T) \setminus_R (H,Z)$  ve  $(H,Z) \setminus_R (G,T) \cong (H,Z) \setminus_R (F,T)$ .

*İspat:*  $(F,T) \cong (G,T)$  olsun. Buradan,  $\forall \alpha \in T$  için,  $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$  ve böylece  $\forall \alpha \in T$  için,  $G'(\alpha) \subseteq F'(\alpha)$  olur.  $(F,T) \setminus_R (H,Z) = (K,T \cap Z)$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \cap H'(\alpha)$ .  $(G,T) \setminus_R (H,Z) = (L,T \cap Z)$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $L(\alpha) = F(\alpha) \cap H'(\alpha)$ . Buradan,  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \cap H'(\alpha) \subseteq G(\alpha) \cap H'(\alpha) = L(\alpha)$  olup,  $(F,T) \setminus_R (H,Z) \cong (G,T) \setminus_R (H,Z)$ . Ayrıca,  $\forall \alpha \in Z \cap T$  için,  $H(\alpha) \cap G'(\alpha) \subseteq H(\alpha) \cap F'(\alpha)$  olup,  $(H,Z) \setminus_R (G,T) \cong (H,Z) \setminus_R (F,T)$ .

26)  $(F,T) \setminus_R (H,Z) \cong (G,T) \setminus_R (H,Z)$  ise  $(F,T) \cong (G,T)$  olmak zorunda değildir. Ayrıca,  $(H,Z) \setminus_R (G,T) \cong (H,Z) \setminus_R (F,T)$  ise  $(F,T) \cong (G,T)$  olmak zorunda değildir. Yani Teorem 5.1.3 (25) nin tersi doğru değildir.

*İspat:* Teroem 5.1.3 (25) nin tersi doğru olmadığını göstermek için bir örnek verelim.  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  parametre kümesi,  $T = \{e_1, e_3\}$ ,  $Z = \{e_1, e_3, e_5\}$  E'nin iki alt kümesi,  $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$  evrensel küme,  $(F,T)$ ,  $(G,T)$  ve  $(H,Z)$ ,  $U$  üzerinde  $(F,T) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$ ,  $(G,T) = \{(e_1, \{h_2\}), (e_3, \{h_1, h_2\})\}$ ,  $(H,Z) = \{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, \{h_2\})\}$  olarak tanımlanan esnek kümeler olsun.

$(F,T) \setminus_R (H,Z) = (L, T \cap Z)$  olmak üzere  $\forall \alpha \in T \cap Z = \{e_1, e_3\}$  için,  $L(\alpha) = F(\alpha) \cap H'(\alpha)$  olup,  $L(e_1) = F(e_1) \cap H'(e_1) = \emptyset$ ,  $L(e_3) = F(e_3) \cap H'(e_3) = \emptyset$ . Buradan,  $(F,T) \setminus_R (H,Z) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset)\}$ . Şimdi de,  $(G,T) \setminus_R (H,Z) = (K, T \cap Z)$  olmak üzere  $\forall \alpha \in T \cap Z = \{e_1, e_3\}$  için,

$K(\alpha)=G(\alpha \cap H'(\alpha))$  olup,  $K(e_1)=G(e_1) \cap H'(e_1)=\emptyset$ ,  $K(e_3)=G(e_3) \cap H'(e_3)=\emptyset$ . Böylece,  $(G,T) \setminus_R (H,Z)=\{(e_1,\emptyset), (e_3,\emptyset)\}$ . Buradan,  $(F,T) \setminus_R (H,Z) \subseteq (G,T) \setminus_R (H,Z)$ ; fakat  $(F,T) \not\subseteq (G,T)$  olmadığı açıktır. Aynı örnek üzerinde,  $(H,Z)=\{(e_1,\emptyset), (e_3,\emptyset), (e_5,\{h_2\})\}$  seçilerek,  $(H,Z) \setminus_R (G,T) \subseteq (H,Z) \setminus_R (F,T)$  iken  $(F,T) \not\subseteq (G,T)$  olmak zorunda olmadığı gösterilebilir.

27)  $(F,T) \subseteq (G,T)$  ve  $(K,V) \subseteq (L,V)$  ise  $(F,T) \setminus_R (L,V) \subseteq (G,T) \setminus_R (K,V)$  ve  $(K,V) \setminus_R (G,T) \subseteq (L,V) \setminus_R (F,T)$ .

*İspat:*  $(F,T) \subseteq (G,T)$  ve  $(K,V) \subseteq (L,V)$  olsun. Buradan,  $\forall \alpha \in T$  ve  $\forall \alpha \in Z$  için  $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$  ve  $K(\alpha) \subseteq L(\alpha)$ . Böylece  $\forall \alpha \in T$  için,  $G'(\alpha) \subseteq F'(\alpha)$  ve  $\forall \alpha \in Z$  için,  $L'(\alpha) \subseteq K'(\alpha)$ .  $(F,T) \setminus_R (L,Z)=(M,T \cap V)$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in T \cap V$  için,  $M(\alpha)=F(\alpha) \cap L'(\alpha)$ .  $(G,T) \setminus_R (K,Z)=(N,T \cap V)$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in T \cap V$  için,  $N(\alpha)=G(\alpha) \cap K'(\alpha)$ .  $\forall \alpha \in T \cap V$  için,  $G'(\alpha) \subseteq F'(\alpha)$  ve  $K(\alpha) \subseteq L(\alpha)$  olduğundan,  $M(\alpha)=F(\alpha) \cap L'(\alpha) \subseteq G(\alpha) \cap K'(\alpha)=N(\alpha)$  olur. Böylece  $(F,T) \setminus_R (L,V) \subseteq (G,T) \setminus_R (K,V)$ . Aynı şartlar altında,  $\forall \alpha \in T \cap T$ ;  $K(\alpha) \cap G'(\alpha) \subseteq L(\alpha) \cap F'(\alpha)$  olduğundan,  $(K,V) \setminus_R (G,T) \subseteq (L,V) \setminus_R (F,T)$  sağlandığı benzer şekilde gösterilir.

Klasik kümelerde,  $T \setminus Z = T \cap Z'$  olup, kısıtlanmış esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

28)  $(F,T) \setminus_R (G,Z) = (F,T) \cap_R (G,Z)^f$ .

*İspat:*  $(F,T) \cap_R (G,Z)^f = (H,T \cap Z)$  olsun. Buradan,  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $H(\alpha)=F(\alpha) \cap G'(\alpha)=F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ . Böylece,  $(H,T \cap Z) = (F,T) \setminus_R (G,Z)$ .

Klasik kümelerde  $T \subseteq Z \Leftrightarrow T \setminus Z = \emptyset$  olup, kısıtlanmış esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

29)  $(F,T) \subseteq (G,Z) \Leftrightarrow (F,T) \setminus_R (G,Z) = \emptyset_T$ .

*İspat:*  $(F,T) \subseteq (G,Z)$  olsun. Buradan,  $T \subseteq Z$  ve  $\forall \alpha \in T$ ;  $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$  olur. İlk olarak  $T \cap Z = T$  olacağı açıktır.  $(F,T) \setminus_R (G,Z) = (H,T \cap Z = T)$  olsun. Bu durumda,  $\forall \alpha \in T$  için  $H(\alpha)=F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ .  $\forall \alpha \in T$  için,  $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$  olduğundan  $H(\alpha)=F(\alpha) \setminus G(\alpha)=\emptyset$ . Böylece,  $(H,T)=\emptyset_T$ .

Tersine,  $(F,T) \setminus_R (G,Z) = \emptyset_T$  olduğundan,  $T \cap Z = T$  ve  $\forall \alpha \in T$  için,  $F(\alpha) \setminus G(\alpha) = \emptyset$ . Buradan,  $T \subseteq Z$  ve  $\forall \alpha \in T$  için  $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ . Böylece,  $(F,T) \subseteq (G,Z)$ .

Klasik kümelerde,  $T \setminus (T \setminus Z) = T \cap Z$  olup, kısıtlanmış esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

$$30) (F, T) \setminus_R [(F, T) \setminus_R (G, Z)] = (F, T) \cap_R (G, Z).$$

*İspat:*  $(F, T) \setminus_R (G, Z) = (K, T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  $K(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ .  $(F, T) \setminus_R (K, T \cap Z) = (L, T \cap (T \cap Z))$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için  $L(\alpha) = F(\alpha) \setminus K(\alpha) = F(\alpha) \setminus [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ . Böylece,  $(L, T \cap Z) = (F, T) \cap_R (G, Z)$ .

Klasik kümelerde,  $T \setminus (T \cap Z) = T \setminus Z$  olup, kısıtlanmış esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

$$31) (F, T) \setminus_R [(F, T) \cap_R (G, Z)] = (F, T) \setminus_R (G, Z).$$

*İspat:*  $(F, T) \cap_R (G, Z) = (K, T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  $K(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ .  $(F, T) \setminus_R (K, T \cap Z) = (L, T \cap (T \cap Z))$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için  $L(\alpha) = F(\alpha) \setminus K(\alpha) = F(\alpha) \setminus [F(\alpha) \cap G(\alpha)] = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ . Böylece,  $(L, T \cap Z) = (F, T) \setminus_R (G, Z)$ .

Klasik kümelerde,  $T \cap Z = \emptyset$  ise  $T \setminus Z = T$  olup, kısıtlanmış esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

$$32) (F, T) \cap_R (G, T) = \emptyset_T \text{ ise } (F, T) \setminus_R (G, T) = (F, T).$$

*İspat:*  $(F, T) \cap_R (G, T) = (K, T)$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in T$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ .  $(K, T) = \emptyset_T$  olduğundan,  $\forall \alpha \in T$ ;  $K(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha) = \emptyset$ .  $(F, T) \setminus_R (G, T) = (L, T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T$  için  $L(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ .  $\forall \alpha \in T$ ;  $F(\alpha) \cap G(\alpha) = \emptyset$  olduğundan,  $L(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha) = F(\alpha)$ . Böylece,  $(L, T) = (F, T)$ .

Klasik kümelerde,  $(T \setminus Z) \cap Z = \emptyset$  olup, kısıtlanmış esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

$$33) [(F, T) \setminus_R (G, T)] \cap_R (G, T) = \emptyset_T.$$

*İspat:*  $(F, T) \setminus_R (G, T) = (K, T)$  olsun.  $\forall \alpha \in T$ ;  $K(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ .  $(K, T) \cap_R (G, T) = (L, T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T$  için;  $L(\alpha) = K(\alpha) \cap G(\alpha) = [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cap G(\alpha) = \emptyset$ . Böylece,  $(L, T) = \emptyset_T$ .

Klasik kümelerde,  $(T \setminus Z) \cap Z = \emptyset$  olduğundan,  $(T \setminus Z) \setminus Z = T \setminus Z$  olup, kısıtlanmış esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

$$34) [(F, T) \setminus_R (G, Z)] \setminus_R (G, Z) = (F, T) \setminus_R (G, Z).$$

*İspat:*  $(F, T) \setminus_R (G, Z) = (K, T \cap Z)$  olsun.

$\forall \alpha \in T \cap Z; K(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ .  $(K, T \cap Z) \setminus_R (G, Z) = (L, (T \cap Z) \cap Z)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  
 $L(\alpha) = K(\alpha) \setminus G(\alpha) = [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \setminus G(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ . Böylece,  
 $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $(L, T \cap Z) = (F, T) \setminus_R (G, Z)$ .

Klasik kümelerde,  $(T \setminus Z) \cap (Z \setminus T) = \emptyset$  olup, kısıtlanmış esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

$$35) [(F, T) \setminus_R (G, T)] \cap_R [(G, T) \setminus_R (F, T)] = \emptyset_T.$$

*İspat:*  $(F, T) \setminus_R (G, T) = (K, T)$  olsun.  $\forall \alpha \in T; K(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ .  $(G, T) \setminus_R (F, T) = (L, T)$  olsun.  
 $\forall \alpha \in T; L(\alpha) = G(\alpha) \setminus F(\alpha)$ .  $(K, T) \cap_R (L, T) = (S, T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T$  için;  
 $S(\alpha) = K(\alpha) \cap L(\alpha) = [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cap [G(\alpha) \setminus F(\alpha)] = \emptyset$ . Böylece,  $(S, T) = \emptyset_T$ .

Klasik kümelerde,  $(T \setminus Z) \cap (Z \setminus T) = \emptyset$  olduğundan,  $(T \setminus Z) \setminus (Z \setminus T) = T \setminus Z$  olduğundan kısıtlanmış esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

$$36) [(F, T) \setminus_R (G, Z)] \setminus_R [(G, Z) \setminus_R (F, T)] = (F, T) \setminus_R (G, Z).$$

*İspat:*  $(F, T) \setminus_R (G, Z) = (K, T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap Z; K(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ .  $(G, Z) \setminus_R (F, T) = (L, Z \cap T)$  olsun.  
 $\forall \alpha \in Z \cap T; L(\alpha) = G(\alpha) \setminus F(\alpha)$ .  $(K, T \cap Z) \cap_R (L, Z \cap T) = (S, T \cap Z)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için;  
 $S(\alpha) = K(\alpha) \setminus L(\alpha) = [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \setminus [G(\alpha) \setminus F(\alpha)] = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ . Böylece,  $(S, T \cap Z) = (F, T) \setminus_R (G, Z)$ .

Klasik kümelerde,  $(T \setminus Z) \cap (T \cap Z) = \emptyset$  olup, kısıtlanmış esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

$$37) [(F, T) \setminus_R (G, T)] \cap_R [(F, T) \cap_R (G, T)] = \emptyset_T.$$

*İspat:*  $(F, T) \setminus_R (G, T) = (K, T)$  olsun.  $\forall \alpha \in T; K(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ .  $(F, T) \cap_R (G, T) = (L, T)$  olsun.  
 $\forall \alpha \in T; L(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ .  $(K, T) \cap_R (L, T) = (S, T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T$  için;  
 $S(\alpha) = K(\alpha) \cap L(\alpha) = [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cap [F(\alpha) \cap G(\alpha)] = \emptyset$ . Böylece,  $(S, T) = \emptyset_T$ .

Klasik kümelerde,  $(T \setminus Z) \cap (T \cap Z) = \emptyset$  olduğundan  $(T \setminus Z) \setminus (T \cap Z) = T \setminus Z$  olup, kısıtlanmış esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

$$38) [(F, T) \setminus_R (G, Z)] \setminus_R [(F, T) \cap_R (G, Z)] = (F, T) \setminus_R (G, Z).$$

*İspat:*  $(F,T) \setminus_R (G,Z) = (K,T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  $K(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ .  $(F,T) \cap_R (G,Z) = (L,T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T$ ;  $L(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ .  $(K,T) \setminus_R (L,T \cap Z) = (S,T \cap Z)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için;  $S(\alpha) = K(\alpha) \setminus L(\alpha) = [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \setminus [F(\alpha) \cap G(\alpha)] = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ . Böylece,  $(S,T \cap Z) = (F,T) \setminus_R (G,Z)$ .

Klasik kümelerde,  $T \cap (Z \setminus T) = \emptyset$  olup, kısıtlanmış esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

$$39) (F,T) \cap_R [(G,T) \setminus_R (F,T)] = \emptyset_T.$$

*İspat:*  $(G,T) \setminus_R (F,T) = (K,T)$  olsun.  $\forall \alpha \in T$ ;  $K(\alpha) = G(\alpha) \setminus F(\alpha)$ .  $(F,T) \cap_R (K,T) = (L,T)$  olsun.  $\forall \alpha \in T$ ;  $L(\alpha) = F(\alpha) \cap K(\alpha) = F(\alpha) \cap [G(\alpha) \setminus F(\alpha)] = \emptyset$ . Böylece,  $(L,T) = \emptyset_T$ .

Klasik kümelerde,  $T \cap (Z \setminus T) = \emptyset$  olduğundan,  $T \setminus (Z \setminus T) = T$  olup, kısıtlanmış esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

$$40) (F,T) \setminus_R [(G,T) \setminus_R (F,T)] = (F,T).$$

*İspat:*  $(G,T) \setminus_R (F,T) = (K,T)$  olsun.  $\forall \alpha \in T$ ;  $K(\alpha) = G(\alpha) \setminus F(\alpha)$ .  $(F,T) \setminus_R (K,T) = (L,T)$  olsun.  $\forall \alpha \in T$ ;  $L(\alpha) = F(\alpha) \setminus K(\alpha) = F(\alpha) \setminus [G(\alpha) \setminus F(\alpha)] = F(\alpha)$ . Böylece,  $(L,T) = (F,T)$ .

Klasik kümelerde,  $T = (T \setminus Z) \cup (T \cap Z)$  olup, kısıtlanmış esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

$$41) (F,T) = (F,T) \setminus_R (G,T) \cup_R [(F,T) \cap_R (G,T)].$$

*İspat:*  $(F,T) \setminus_R (G,T) = (K,T)$  olsun.  $\forall \alpha \in T$ ;  $K(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ .  $(F,T) \cap_R (G,T) = (L,T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T$  için;  $L(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ .  $(K,T) \cup_R (L,T) = (S,T)$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in T$  için;  $S(\alpha) = K(\alpha) \cup L(\alpha) = [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cup [F(\alpha) \cap G(\alpha)] = F(\alpha)$ . Böylece,  $(S,T) = (F,T)$ .

Klasik kümelerde,  $T \cup Z = (T \setminus Z) \cup Z$  olup, kısıtlanmış esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

$$42) (F,T) \cup_R (G,Z) = [(F,T) \setminus_R (G,Z)] \cup_R (G,Z).$$

*İspat:*  $(F,T) \setminus_R (G,Z) = (K,T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  $K(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ .  $(K,T \cap Z) \cap_R (G,Z) = (L,T \cap Z)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için;  $L(\alpha) = K(\alpha) \cap G(\alpha) = [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cap G(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ . Böylece,  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için;  $(L,T \cap Z) = (F,T) \cap_R (G,Z)$ .

Klasik kümelerde,  $T \cup Z = (T \setminus Z) \cup (Z \setminus T) \cup (T \cap Z)$  olup, kısıtlanmış esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

$$43) (F, T) \cup_R (G, Z) = [(F, T) \setminus_R (G, Z)] \cup_R [(G, Z) \setminus_R (F, T)] \cup_R [(F, T) \cap_R (G, Z)].$$

*İspat:*  $(F, T) \setminus_R (G, Z) = (K, T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  $K(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ .  $(G, T) \setminus_R (F, Z) = (L, T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  $L(\alpha) = G(\alpha) \setminus F(\alpha)$ .  $(F, T) \cap_R (G, Z) = (M, T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  $M(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ .  $(K, T \cap Z) \cup_R (L, T \cap Z) \cup_R (M, T \cap Z) = (S, T \cap Z)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için;  $S(\alpha) = K(\alpha) \cup L(\alpha) \cup M(\alpha) = [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cup [G(\alpha) \setminus F(\alpha)] \cup [F(\alpha) \cap G(\alpha)] = F(\alpha) \cup G(\alpha)$ . Böylece,  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için;  $(S, T \cap Z) = (F, T) \cup_R (G, Z)$ .

5.1.4. Teorem  $(S_T(U), \setminus_R, \emptyset_T)$  her bir elemanı involusyon olan sınırlı bir BCK-cebiridir.

*İspat:*  $(F, T), (G, T), (H, T) \in S_T(U)$ . Bu durumda,  
 $\{[(F, T) \setminus_R (G, T)] \setminus_R [(F, T) \setminus_R (H, T)]\} \setminus_R [(H, T) \setminus_R (G, T)] = \emptyset_T$ . Gerçekten,  $(F, T) \setminus_R (G, T) = (W, T)$  olsun.  $\forall \alpha \in T$ ;  $W(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ .  $(F, T) \setminus_R (H, T) = (M, T)$  olsun.  $\forall \alpha \in T$ ;  $M(\alpha) = F(\alpha) \setminus H(\alpha)$ .  $(W, T) \setminus_R (M, T) = (L, T)$  olsun.  $\forall \alpha \in T$ ;  $L(\alpha) = W(\alpha) \setminus M(\alpha)$ . Böylece,  $\forall \alpha \in T$ ;  $L(\alpha) = [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \setminus [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] = [F(\alpha) \cap H(\alpha)] \setminus G(\alpha)$ .  $(H, T) \setminus_R (G, T) = (S, T)$  olsun.  $\forall \alpha \in T$ ;  $S(\alpha) = H(\alpha) \setminus G(\alpha)$ .  $(L, T) \setminus_R (S, T) = (X, T)$ .  $\forall \alpha \in T$ ;  $X(\alpha) = L(\alpha) \setminus S(\alpha)$ . Böylece,  $\forall \alpha \in T$ ;  $X(\alpha) = \{[F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \setminus [F(\alpha) \cap H(\alpha)]\} \setminus [H(\alpha) \setminus G(\alpha)] = \emptyset$ . Böylece,  $(X, T) = \emptyset_T$ .

$[(F, T) \setminus_R [(F, T) \setminus_R (G, T)]] \setminus_R (G, T) = \emptyset_T$ . Gerçekten,  $(F, T) \setminus_R (G, T) = (K, T)$  olsun.  $\forall \alpha \in T$ ;  $K(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ .  $(F, T) \setminus_R (K, T) = (M, T)$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in T$ ;  $M(\alpha) = F(\alpha) \setminus K(\alpha) = F(\alpha) \setminus [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ . Böylece,  $\forall \alpha \in T$ ;  $M(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ .  $(M, T) \setminus_R (G, T) = (L, T)$  olsun. Böylece,  $\forall \alpha \in T$ ;  $L(\alpha) = M(\alpha) \setminus G(\alpha) = [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \setminus G(\alpha) = \emptyset$ . Böylece,  $(L, T) = \emptyset_T$ .

Teorem 5.1.3 (5),  $(F, T) \setminus_R (F, T) = \emptyset_T$ .

Teorem 5.1.3 (29),  $(F, T) \setminus_R (G, T) = \emptyset_T \Rightarrow (F, T) \cong (G, T)$  ve  $(G, T) \setminus_R (F, T) = \emptyset_T \Rightarrow (G, T) \cong (F, T)$  ve böylece,  $(F, T) = (G, T)$ .

Teorem 5.1.3 (7),  $\emptyset_T \setminus_R (F, T) = \emptyset_T$ .

Böylece,  $(S_T(U), \setminus_R, \emptyset_T)$  bir BCK-cebiridir. Teorem 5.1.3 (13) den her  $(F, T) \in S_T(U)$  için,  $(F, T) \setminus_R U_T = \emptyset_T$ . Böylece,  $(S_T(U), \setminus_R, \emptyset_T)$  sınırlı bir BCK-cebiridir. Ayrıca, her  $(F, T) \in S_T(U)$  için,  $U_T \setminus_R [U_T \setminus_R (F, T)] = (F, T)$  olduğundan, (Çünkü Teorem 5.1.3 (14) den,  $U_T \setminus_R (F, T) = (F, T)^r$  ve böylece  $U_T \setminus_R (F, T)^r = [(F, T)^r]^r = (F, T)$ ),  $S_T(U)$  kümesinin her elemanı bir involusyondur.

### 5.1.1. Kısıtlanmış fark işleminin diğer esnek küme işlemlere dağılımı:

Bu alt bölümde kısıtlanmış fark işleminin; kısıtlanmış işlemlere, genişletilmiş işlemlere ve esnek ikili parçalı işlemlere dağılmasına bakılmıştır. Kısıtlanmış işlemleri alınacak olan esnek kümelerin parametre kümelerinin kesişiminin boş küme olduğu durum da her ispatta göz önüne alınıp, ispatlar detayları ile verilmiştir.

#### Kısıtlanmış fark işleminin kısıtlanmış işlemlere sağdan dağılımı:

Burada, kısıtlanmış fark işleminin; kısıtlanmış kesişim, birleşim ve fark işlemlerine sağdan dağılmasına bakılmıştır.

$$1) [(F,T) \cup_R (G,Z)] \setminus_R (H,M) = [(F,T) \setminus_R (H,M)] \cup_R [(G,Z) \setminus_R (H,M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım:  $(F,T) \cup_R (G,Z) = (R, T \cap Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $R(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$ .  $(R, T \cap Z) \setminus_R (H,M) = (N, (T \cap Z) \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cap M$  için,  $N(\alpha) = R(\alpha) \setminus H(\alpha)$ . Buradan,

$$N(\alpha) = [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \setminus H(\alpha)$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F,T) \setminus_R (H,M)] \cup_R [(G,Z) \setminus_R (H,M)]$  bakalım:  $(F,T) \setminus_R (H,M) = (S, T \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $S(\alpha) = F(\alpha) \setminus H(\alpha)$ .  $(G,Z) \setminus_R (H,M) = (K, Z \cap M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in Z \cap M$  için,  $K(\alpha) = G(\alpha) \setminus H(\alpha)$ .  $(S, T \cap M) \cup_R (K, Z \cap M) = (L, (T \cap M) \cap (Z \cap M))$  olup,  $\forall \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M)$  için,  $L(\alpha) = S(\alpha) \cup K(\alpha)$ . Buradan,

$$L(\alpha) = [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] \cup [G(\alpha) \setminus H(\alpha)]$$

Buradan,  $(N, T \cap Z \cap M) = (L, T \cap Z \cap M)$  olduğu görülür.

Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  veya  $T \cap M = \emptyset$  veya  $Z \cap M = \emptyset$  ise her durumda da sol taraf ve sağ taraf  $\emptyset_\emptyset$  esnek kümesi olacağından, eşitlik bu durumda da sağlanır. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$2) [(F,T) \cap_R (G,Z)] \setminus_R (H,M) = [(F,T) \setminus_R (H,M)] \cap_R [(G,Z) \setminus (H,M)].$$

$$3) [(F,T) \setminus_R (G,Z)] \setminus_R (H,M) = [(F,T) \setminus_R (H,M)] \cap_R [(G,Z) \setminus (H,M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım:  $(F,T) \setminus_R (G,Z) = (R, T \cap Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $R(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ .  $(R, T \cap Z) \setminus_R (H,M) = (N, (T \cap Z) \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cap M$  için,  $N(\alpha) = R(\alpha) \setminus H(\alpha)$ . Buradan,

$$N(\alpha) = [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \setminus H(\alpha)$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F,T) \setminus_R (H,M)] \setminus_R [(G,Z) \setminus_R (H,M)]$  bakalım:  $(F,T) \setminus_R (H,M) = (S, T \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $S(\alpha) = F(\alpha) \setminus H(\alpha)$ .  $(G,Z) \setminus_R (H,M) = (K, Z \cap M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in Z \cap M$  için,  $K(\alpha) = G(\alpha) \setminus H(\alpha)$ .  $(S, T \cap M) \setminus_R (K, Z \cap M) = (L, (T \cap M) \cap (Z \cap M))$  olup,  $\forall \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M)$  için,  $L(\alpha) = S(\alpha) \setminus K(\alpha)$ . Buradan,

$$L(\alpha) = [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] \setminus [G(\alpha) \setminus H(\alpha)]$$

Buradan,  $(N, T \cap Z \cap M) = (L, T \cap Z \cap M)$  olduğu görülür.

Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  veya  $T \cap M = \emptyset$  veya  $Z \cap M = \emptyset$  ise her durumda da sol taraf ve sağ taraf  $\emptyset_\emptyset$  esnek kümesi olacağından, eşitlik bu durumda da sağlanır. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

5.1.5.1. Not Burada, kısıtlanmış fark işleminin kısıtlanmış kesişim, birleşim ve fark işlemlerine soldan dağılmadığını hemen belirtelim. Yani;

$$(F,T) \setminus_R [(G,Z) \cap_R (H,M)] \neq [(F,T) \setminus_R (G,Z)] \cap_R [(F,T) \setminus_R (H,M)] \text{ (Sezgin ve Atagün, 2011).}$$

$$(F,T) \setminus_R [(G,Z) \cup_R (H,M)] \neq [(F,T) \setminus_R (G,Z)] \cup_R [(F,T) \setminus_R (H,M)] \text{ (Sezgin ve Atagün, 2011).}$$

Benzer şekilde,  $(F,T) \setminus_R [(G,Z) \setminus_R (H,M)] \neq [(F,T) \setminus_R (G,Z)] \setminus_R [(F,T) \setminus_R (H,M)]$  gösterilebilir.

Kısıtlanmış fark işleminin genişletilmiş işlemlere dağılması

Burada, kısıtlanmış fark işleminin; genişletilmiş işlemlere dağılmasına bakılmıştır. Kısıtlanmış işlemleri alınacak olan esnek kümelerin parametre kümelerinin her birinin kesişimi boş küme olduğu durumda da ispatlar değerlendirilmiştir.

i) Kısıtlanmış fark işleminin genişletilmiş işlemlere soldan dağılması:

Buradaki dağılmalar,  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  şartı ile sağlanmaktadır.

$$1) (F, T) \setminus_R [(G, Z) \cap_\varepsilon (H, M)] = [(F, T) \setminus_R (G, Z)] \cap_\varepsilon [(F, T) \setminus_R (H, M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım.  $(G, Z) \cap_\varepsilon (H, M) = (R, Z \cup M)$  olup,  $\forall \alpha \in Z \cup M$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus Z \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) \setminus_R (R, Z \cup M) = (N, (T \cap (Z \cup M)))$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap (Z \cup M)$  için,  $N(\alpha) = F(\alpha) \setminus R(\alpha)$ . Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in T \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \setminus [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım:  $[(F, T) \setminus_R (G, Z)] \cap_\varepsilon [(F, T) \setminus_R (H, M)]$ .  $(F, T) \setminus_R (G, Z) = (K, T \cap Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ .  $(F, T) \setminus_R (H, M) = (S, T \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $S(\alpha) = F(\alpha) \setminus H(\alpha)$ . Daha sonra,  $(K, T \cap Z) \cap_\varepsilon (S, T \cap M) = (L, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$  olsun. Buradan,  $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cup (T \cap M)$  için,

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cap M) = T \cap (Z \setminus M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (T \cap Z) = T \cap (M \setminus Z) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cap [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece,  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  ise  $(N, T \cap (Z \cup M)) = (L, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$  olduğu görülür.

Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \setminus H(\alpha)$ ;  $T \cap M = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$  olacağından, bu durumlarda da sağ ve sol taraf birbirine eşit çıkar. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$2) (F,T) \setminus_R [(G,Z) \cup_\varepsilon (H,M)] = [(F,T) \setminus_R (G,Z)] \cup_\varepsilon [(F,T) \setminus_R (H,M)].$$

$$3) (F,T) \setminus_R [(G,Z) \setminus_\varepsilon (H,M)] = [(F,T) \setminus_R (G,Z)] \setminus_\varepsilon [(F,T) \setminus_R (H,M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım.  $(G,Z) \setminus_\varepsilon (H,M) = (R,Z \cup M)$  olup,  $\forall \alpha \in Z \cup M$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus Z \\ G(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F,T) \setminus_R (R,Z \cup M) = (N, (T \cap (Z \cup M)))$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap (Z \cup M)$  için,  $N(\alpha) = F(\alpha) \setminus R(\alpha)$ . Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in T \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \setminus [G(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına bakalım:  $[(F,T) \setminus_R (G,Z)] \setminus_\varepsilon [(F,T) \setminus_R (H,M)]$ .  $(F,T) \setminus_R (G,Z) = (K, T \cap Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ .  $(F,T) \setminus_R (H,M) = (S, T \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $S(\alpha) = F(\alpha) \setminus H(\alpha)$ . Daha sonra,  $(K, T \cap Z) \setminus_\varepsilon (S, T \cap M) = (L, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$  olsun. Buradan,  $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cup (T \cap M)$  için,

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cap M) = T \cap Z \cap M' \\ S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (T \cap Z) = T \cap M \setminus Z \\ K(\alpha) \setminus S(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \setminus [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece,  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  ise  $(N, T \cap (Z \cup M)) = (L, (T \cap Z) \cup (T \cap M))$  olduğu görülür.

Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \setminus H(\alpha)$ ;  $T \cap M = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$  olacağından, bu durumlarda da sağ ve sol taraf birbirine eşit çıkar. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$4) (F,T) \setminus_R [(G,Z) \Delta_\varepsilon (H,M)] = [(F,T) \setminus_R (G,Z)] \Delta_\varepsilon [(F,T) \setminus_R (H,M)].$$

$$5) (F,T) \setminus_R [(G,Z) \gamma_\varepsilon (H,M)] = [(F,T) \setminus_R (G,Z)] \gamma_\varepsilon [(F,T) \setminus_R (H,M)].$$

$$6) (F,T) \setminus_R [(G,Z) +_\varepsilon (H,M)] = [(F,T) \setminus_R (G,Z)] +_\varepsilon [(F,T) \setminus_R (H,M)].$$

$$7) (F,T) \setminus_R [(G,Z) \lambda_\varepsilon (H,M)] = [(F,T) \setminus_R (G,Z)] \lambda_\varepsilon [(F,T) \setminus_R (H,M)].$$

$$8) (F,T) \setminus_R [(G,Z) *_\varepsilon (H,M)] = [(F,T) \setminus_R (G,Z)] *_\varepsilon [(F,T) \setminus_R (H,M)].$$

$$9) (F,T) \setminus_R [(G,Z) \theta_\varepsilon (H,M)] = [(F,T) \setminus_R (G,Z)] \theta_\varepsilon [(F,T) \setminus_R (H,M)].$$

ii) Kısıtlanmış fark işleminin genişletilmiş işlemlere sağdan dağılması:

$$1) [(F,T) \cup_\varepsilon (G,Z)] \setminus_R (H,M) = [(F,T) \setminus_R (H,M)] \cup_\varepsilon [(G,Z) \setminus_R (H,M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım  $(F,T) \cup_\varepsilon (G,Z) = (R, TUZ)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in TUZ$  için,

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, TUZ) \setminus_R (H,M) = (N, (TUZ) \cap M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in (TUZ) \cap M$  için,  $N(\alpha) = R(\alpha) \setminus H(\alpha)$ .

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \setminus H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F,T) \setminus_R (H,M)] \cup_\varepsilon [(G,Z) \setminus_R (H,M)]$  bakalım.  $(F,T) \setminus_R (H,M) = (K, T \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \setminus H(\alpha)$ .  $(G,Z) \setminus_R (H,M) = (S, Z \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cap M$  için,  $S(\alpha) = G(\alpha) \setminus H(\alpha)$ . O halde,  $(K, T \cap M) \cup_\varepsilon (S, Z \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$  olsun. Böylece,

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cap M) = (T \setminus Z) \cap M \\ S(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus (T \cap M) = (Z \setminus T) \cap M \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] \cup [G(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece,  $(N, (TUZ) \cap M) = (L, (T \cap M) \cup (Z \cap M))$  olduğu görülür.

Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  ve  $\alpha \in T \cap Z' \cap M$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \setminus H(\alpha)$  ve  $T \cap Z = \emptyset$  ve  $\alpha \in T' \cap Z \cap M$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = G(\alpha) \setminus H(\alpha)$  olur.  $Z \cap M = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \setminus H(\alpha)$  olacağından, bu

durumlarda da sağ ve sol taraf birbirine eşit çıkar. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$2) [(F,T) \cap_{\varepsilon}(G,Z)] \setminus_R (H,M) = [(F,T) \setminus_R (H,M)] \cap_{\varepsilon} [(G,Z) \setminus_R (H,M)].$$

$$3) [(F,T) \setminus_{\varepsilon}(G,Z)] \setminus_R (H,M) = [(F,T) \setminus_R (H,M)] \setminus_{\varepsilon} [(G,Z) \setminus_R (H,M)] \text{ (Sezgin ve diğerleri, 2019).}$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım  $(F,T) \setminus_{\varepsilon}(G,Z) = (R,T \cup Z)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R,T \cup Z) \setminus_R (H,M) = (N,(T \cup Z) \cap M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cap M$  için,  $N(\alpha) = R(\alpha) \setminus H(\alpha)$ .

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \setminus H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F,T) \setminus_R (H,M)] \setminus_{\varepsilon} [(G,Z) \setminus_R (H,M)]$  bakalım.  $(F,T) \setminus_R (H,M) = (K,T \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$  için,  $K(\alpha) = F(\alpha) \setminus H(\alpha)$ .  $(G,Z) \setminus_R (H,M) = (S,Z \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cap M$  için,  $S(\alpha) = G(\alpha) \setminus H(\alpha)$ . O halde,  $(K,T \cap M) \setminus_{\varepsilon} (S,Z \cap M) = (L,(T \cap M) \cup (Z \cap M))$  olsun. Böylece,

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cap M) = (T \setminus Z) \cap M \\ S(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus (T \cap M) = (Z \setminus T) \cap M \\ K(\alpha) \setminus S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] \setminus [G(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece,  $(N,(T \cup Z) \cap M) = (L,(T \cap M) \cup (Z \cap M))$  olduğu görülür.

Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  ve  $\alpha \in T \cap Z' \cap M$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \setminus H(\alpha)$  ve  $T \cap Z = \emptyset$  ve  $\alpha \in T' \cap Z \cap M$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = G(\alpha) \setminus H(\alpha)$  olur.  $Z \cap M = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \setminus H(\alpha)$  olacağından, bu durumlarda da sağ ve sol taraf birbirine eşit çıkar. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$4) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \Delta_{\varepsilon}(G, Z)] \setminus_R (H, M) = [(F, T) \setminus_R (H, M)] \Delta_{\varepsilon} [(G, Z) \setminus_R (H, M)].$$

$$5) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \gamma_{\varepsilon}(G, Z)] \setminus_R (H, M) = [(F, T) \setminus_R (H, M)] \gamma_{\varepsilon} [(G, Z) \setminus_R (H, M)].$$

$$6) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) +_{\varepsilon}(G, Z)] \setminus_R (H, M) = [(F, T) \setminus_R (H, M)] +_{\varepsilon} [(G, Z) \setminus_R (H, M)].$$

$$7) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \lambda_{\varepsilon}(G, Z)] \setminus_R (H, M) = [(F, T) \setminus_R (H, M)] \lambda_{\varepsilon} [(G, Z) \setminus_R (H, M)].$$

$$8) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \theta_{\varepsilon}(G, Z)] \setminus_R (H, M) = [(F, T) \setminus_R (H, M)] \theta_{\varepsilon} [(G, Z) \setminus_R (H, M)].$$

$$9) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) *_{\varepsilon}(G, Z)] \setminus_R (H, M) = [(F, T) \setminus_R (H, M)] *_{\varepsilon} [(G, Z) \setminus_R (H, M)].$$

Kısıtlanmış fark işleminin esnek ikili parçalı işlemlere dağılması:

Burada, kısıtlanmış fark işleminin, esnek ikili parçalı işlemlere dağılmasına bakılmıştır. İlk olarak sağdan dağılmalar, peşinden soldan dağılmalar incelenmiştir. Burada, kısıtlanmış işlemleri alınacak olan esnek kümelerin parametre kümelerinin her birinin kesişimi boş küme olsa dahi, bu dağılmaların sağlandığı hususunu özellikle belirtmekte fayda görüyoruz.

i) Kısıtlanmış fark işleminin esnek ikili parçalı işlemlere soldan dağılması:

Buradaki dağılmalar  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  iken sağlanır.

$$1) (F, T) \setminus_R [(G, Z) \widetilde{\cap} (H, M)] = [(F, T) \setminus_R (G, Z)] \widetilde{\cap} [(F, T) \setminus_R (H, M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım  $(G, Z) \widetilde{\cap} (H, M) = (R, Z)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in Z$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha), & \alpha \in Z \setminus M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha), & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) \setminus_R (R, Z) = (N, T \cap Z)$  olsun. Buradan  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  $N(\alpha) = F(\alpha) \setminus R(\alpha)$

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \setminus M) \\ F(\alpha) \setminus [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F, T) \setminus_R (G, Z)] \sim_{\cap} [(F, T) \setminus_R (H, M)]$  bakalım.  $(F, T) \setminus_R (G, Z) = (K, T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  $K(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ .  $(F, T) \setminus_R (H, M) = (S, T \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$ ;  $T(\alpha) = F(\alpha) \setminus H(\alpha)$ .  $(K, T \cap Z) \sim_{\cap} (S, T \cap M) = (L, T \cap Z)$  olup,  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cap M) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cap M) = T \cap (Z \setminus M) \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cap [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Böylece  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  is  $(N, T \cap Z) = (L, T \cap Z)$  olduğu görülür.

Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  ise  $(N, T \cap Z) = (L, T \cap Z) = \emptyset$ ;  $T \cap M = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$  olacağından, sağ ve sol taraf yine birbirine eşit çıkar. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$2) (F, T) \setminus_R [(G, Z) \cup (H, M)] = [(F, T) \setminus_R (G, Z)] \cup [(F, T) \setminus_R (H, M)].$$

$$3) (F, T) \setminus_R [(G, Z) \cap (H, M)] = [(F, T) \setminus_R (G, Z)] \cap [(F, T) \setminus_R (H, M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım  $(G, Z) \cap (H, M) = (R, Z)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in Z$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha), & \alpha \in Z \setminus M \\ G(\alpha) \setminus H(\alpha), & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) \setminus_R (R, Z) = (N, T \cap Z)$  olsun. Buradan  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  $N(\alpha) = F(\alpha) \setminus R(\alpha)$

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \setminus M) \\ F(\alpha) \setminus [G(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F,T) \setminus_R (G,Z)] \widetilde{\setminus} [(F,T) \setminus_R (H,M)]$  bakalım.  $(F,T) \setminus_R (G,Z) = (K, T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  $K(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ .  $(F,T) \setminus_R (H,M) = (S, T \cap M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap M$ ;  $T(\alpha) = F(\alpha) \setminus H(\alpha)$ .  $(K, T \cap Z) \widetilde{\setminus} (S, T \cap M) = (L, T \cap Z)$  olup,  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cap M) \\ K(\alpha) \setminus S(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cap M) = T \cap (Z \setminus M) \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \setminus [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Böylece  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  ise  $(N, T \cap Z) = (L, T \cap Z)$  olduğu görülür.

Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  ise  $(N, T \cap Z) = (L, T \cap Z) = \emptyset$ ;  $T \cap M = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$  olacağından, sağ ve sol taraf yine birbirine eşit çıkar. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$4) (F,T) \setminus_R [(G,Z) \widetilde{\Delta} (H,M)] = [(F,T) \setminus_R (G,Z)] \widetilde{\Delta} [(F,T) \setminus_R (H,M)].$$

$$5) (F,T) \setminus_R [(G,Z) \widetilde{\gamma} (H,M)] = [(F,T) \setminus_R (G,Z)] \widetilde{\gamma} [(F,T) \setminus_R (H,M)].$$

$$6) (F,T) \setminus_R [(G,Z) \widetilde{+} (H,M)] = [(F,T) \setminus_R (G,Z)] \widetilde{+} [(F,T) \setminus_R (H,M)].$$

$$7) (F,T) \setminus_R [(G,Z) \widetilde{\lambda} (H,M)] = [(F,T) \setminus_R (G,Z)] \widetilde{\lambda} [(F,T) \setminus_R (H,M)].$$

$$8) (F,T) \setminus_R [(G,Z) \widetilde{\theta} (H,M)] = [(F,T) \setminus_R (G,Z)] \widetilde{\theta} [(F,T) \setminus_R (H,M)].$$

$$9) (F,T) \setminus_R [(G,Z) \widetilde{*} (H,M)] = [(F,T) \setminus_R (G,Z)] \widetilde{*} [(F,T) \setminus_R (H,M)].$$

ii) Kısıtlanmış fark işleminin esnek ikili parçalı işlemlere sağdan dağılması:

$$1) [(F,T) \widetilde{\cup} (G,Z)] \setminus_R (H,M) = [(F,T) \setminus_R (H,M)] \widetilde{\cup} [(G,Z) \setminus_R (H,M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım  $(F,T) \widetilde{\cup} (G,Z)=(R,T)$  olur. Burada  $\forall \alpha \in T$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R,T) \setminus_R (H,M) = (N, T \cap M)$  olup,  $\forall \alpha \in T \cap M$ ;  $N(\alpha) = R(\alpha) \setminus H(\alpha)$ .

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \setminus H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F,T) \setminus_R (H,M)] \widetilde{\cup} [(G,Z) \setminus_R (H,M)]$  bakalım.

$(F,T) \setminus_R (H,M) = (K, T \cap M)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap M$ ;  $K(\alpha) = F(\alpha) \setminus H(\alpha)$ .  $(G,Z) \setminus_R (H,M) = (S, Z \cap M)$

olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cap M$ ;  $S(\alpha) = G(\alpha) \setminus H(\alpha)$ .  $(K, T \cap M) \widetilde{\cup} (S, Z \cap M) = (L, T \cap M)$  olup, buradan da  $\forall \alpha \in T \cap M$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cap M) \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Böylece,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cap M) = (T \setminus Z) \cap M \\ [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] \cup [G(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Böylece  $(N, T \cap M) = (L, T \cap M)$ .

Burada,  $T \cap M = \emptyset$  ise  $(N, T \cap M) = (L, T \cap M) = \emptyset$ ;  $Z \cap M = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \setminus H(\alpha)$  olacağından, sağ ve sol taraf birbirine yine eşit çıkar. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$2) [(F,T) \widetilde{\cap} (G,Z)] \setminus_R (H,M) = [(F,T) \setminus_R (H,M)] \widetilde{\cap} [(G,Z) \setminus_R (H,M)].$$

$$3) [(F,T) \widetilde{\setminus} (G,Z)] \setminus_R (H,M) = [(F,T) \setminus_R (H,M)] \widetilde{\setminus} [(G,Z) \setminus_R (H,M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım  $(F,T) \widetilde{\setminus} (G,Z)=(R,T)$  olur. Burada  $\forall \alpha \in T$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T) \setminus_R (H, M) = (N, T \cap M)$  olup,  $\forall \alpha \in T \cap M$ ;  $N(\alpha) = R(\alpha) \setminus H(\alpha)$ .

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \setminus H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F, T) \setminus_R (H, M)] \tilde{\setminus} [(G, Z) \setminus_R (H, M)]$  bakalım.

$(F, T) \setminus_R (H, M) = (K, T \cap M)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap M$ ;  $K(\alpha) = F(\alpha) \setminus H(\alpha)$ .  $(G, Z) \setminus_R (H, M) = (S, Z \cap M)$

olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cap M$ ;  $S(\alpha) = G(\alpha) \setminus H(\alpha)$ .  $(K, T \cap M) \tilde{\setminus} (S, Z \cap M) = (L, T \cap M)$  olup, buradan

da  $\forall \alpha \in T \cap M$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cap M) \\ K(\alpha) \setminus S(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Böylece,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cap M) = (T \setminus Z) \cap M \\ [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] \setminus [G(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Böylece  $(N, T \cap M) = (L, T \cap M)$ .

Burada,  $T \cap M = \emptyset$  ise  $(N, T \cap M) = (L, T \cap M) = \emptyset$ ;  $Z \cap M = \emptyset$  ise  $N(\alpha) = L(\alpha) = F(\alpha) \setminus H(\alpha)$  olacağından, sağ ve sol taraf birbirine yine eşit çıkar. Dolayısıyla bu kümelerin boştan farklı olması şartını koymaya gerek yoktur.

$$4) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \tilde{\Delta} (G, Z)] \setminus_R (H, M) = [(F, T) \setminus_R (H, M)] \tilde{\Delta} [(G, Z) \setminus_R (H, M)].$$

$$5) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \tilde{\gamma} (G, Z)] \setminus_R (H, M) = [(F, T) \setminus_R (H, M)] \tilde{\gamma} [(G, Z) \setminus_R (H, M)].$$

$$6) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \tilde{+} (G, Z)] \setminus_R (H, M) = [(F, T) \setminus_R (H, M)] \tilde{+} [(G, Z) \setminus_R (H, M)].$$

$$7) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \tilde{\lambda} (G, Z)] \setminus_R (H, M) = [(F, T) \setminus_R (H, M)] \tilde{\lambda} [(G, Z) \setminus_R (H, M)].$$

$$8) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \widetilde{\theta} (G, Z)] \setminus_R (H, M) = [(F, T) \setminus_R (H, M)] \widetilde{\theta} [(G, Z) \setminus_R (H, M)].$$

$$9) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \widetilde{*} (G, Z)] \setminus_R (H, M) = [(F, T) \setminus_R (H, M)] \widetilde{*} [(G, Z) \setminus_R (H, M)].$$

## 5.2. Genişletilmiş Fark İşlemi ve Özellikleri

Bu alt bölümde, Sezgin ve diğerleri (2019) çalışmasında tanımlanan esnek kümelerde genişletilmiş birleşim işlemi olarak adlandırılan işlemin klasik kümelerdeki birleşim işlemine benzer özellikleri ve dağılma kurallarıyla diğer işlemler ile olan ilişkileri detaylı şekilde ele alınıp incelenmiştir.

Genişletilmiş işlemlerin gösteriminde birlik olması açısından, Sezgin ve diğerleri (2019) genişletilmiş fark işlemi için “ $\sim_\epsilon$ ” gösterimini kullanmayı tercih etmiş olup, bizler ise bu çalışmada  $\setminus_\epsilon$  gösterimini kullanacağız. Genişletilmiş birleşim için klasik kümelerdeki birleşim; genişletilmiş kesişim için klasik kümelerdeki kesişim simgesi kullanıldığı için bu yönde bir kullanım bir tercih edilmiştir.

Ayrıca, esnek kümeler için genişletilmiş fark işlemi yeni bir tanım olmadığı için, bazı özellikleri ve dağılma kuralları Sezgin ve diğerleri (2019) tarafından çalışılmıştır. Fakat, genişletilmiş fark işleminin tüm özelliklerinin ispatlarıyla birlikte bu çalışmada bulunuyor olması ve yeni pek çok özelliğin özellikle klasik kümelerdeki karşılıklarının bu çalışmada yine detaylı ispatlarıyla bulunuyor olması açısından, bu çalışmayı oldukça önemediğimizi belirtmek istiyoruz.

5.2.1. Tanım (F, T) ve (G, Z), U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu iki esnek kümenin (F, T)  $\setminus_\epsilon$  (G, Z) ile gösterilen genişletilmiş fark işlemi  $C = T \cup Z$  ve  $\forall \alpha \in C$  için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

olmak üzere (F, T)  $\setminus_\epsilon$  (G, Z) = (H, C) ile tanımlanır.

Sezgin ve diğerleri (2019) genişletilmiş fark için  $\sim_\epsilon$  gösterimi kullanmışlardır. Buradaki, “ $\epsilon$ ” İngilizcedeki genişletilmiş anlamında kullanılan “Extended” kelimesinin baş harfinden

gelmekte olup; bu anlamıyla mantıksal bir bütünlük içindedir. Biz bu çalışma boyunca  $\setminus_\varepsilon$  gösterimini tercih ediyoruz. Tanımdan,  $T = \emptyset$  ise  $(F,T) \setminus_\varepsilon (G,Z) = (G,Z)$ ;  $Z = \emptyset$  ise  $(F,T) \setminus_\varepsilon (G,Z) = (F,T)$ ;  $T=Z=\emptyset$  ise  $(F,T) \setminus_\varepsilon (G,Z) = \emptyset_\emptyset$  olacağı aşıkardır.

5.2.2. *Örnek*  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  parametre kümesi,  $T = \{e_1, e_3\}$ ,  $Z = \{e_2, e_3, e_4\}$   $E$ 'nin iki alt kümesi,  $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$  evrensel küme,  $U$  üzerinde  $(F,T) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$ ,  $(G,Z) = \{(e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4\}), (e_4, \{h_3, h_5\})\}$  olarak tanımlanan iki esnek küme olsun.  $(F,T) \setminus_\varepsilon (G,Z) = (H, T \cup Z)$  olmak üzere,  $\forall \alpha \in T \cup Z$ ;

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Burada  $T \cup Z = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  ve  $T \setminus Z = \{e_1\}$ ,  $Z \setminus T = \{e_2, e_4\}$ ,  $T \cap Z = \{e_3\}$  olmak üzere,  $H(e_1) = F(e_1) = \{h_2, h_5\}$ ,  $H(e_2) = G(e_2) = \{h_1, h_4, h_5\}$ ,  $H(e_4) = G(e_4) = \{h_3, h_5\}$ ,  $H(e_3) = F(e_3) \setminus G(e_3) = \{h_1, h_5\}$ . Böylece,  $(F,T) \setminus_\varepsilon (G,Z) = \{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_2, \{h_1, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_5\}), (e_4, \{h_3, h_5\})\}$ .

5.2.3. Not  $S_A(U)$  kümesi üzerinde kısıtlanmış fark ve genişletilmiş fark işlemleri çakışıktır. Yani, parametre kümeleri aynı olan esnek kümeler için,  $(F,A) \setminus_\varepsilon (G,A) = (F,A) \setminus_R (G,A)$ .

#### 5.2.4. Teorem (İşlemin Cebirsel Özellikleri)

1)  $\setminus_\varepsilon, S_E(U)$  kümesi üzerinde kapalıdır.

*İspat:*  $\setminus_\varepsilon$  işleminin  $S_E(U)$  üzerinde ikili işlem olduğu açıktır. Yani,

$$\begin{aligned} \setminus_\varepsilon: S_E(U) \times S_E(U) &\rightarrow S_E(U) \\ ((F,T), (G,Z)) &\rightarrow (F,T) \setminus_\varepsilon (G,Z) = (H, T \cup Z) \end{aligned}$$

olup,  $(F,T)$  ve  $(G,Z)$ ,  $U$  üzerinde iki esnek küme olduğunda  $(F,T) \setminus_\varepsilon (G,Z)$  de,  $U$  üzerinde bir esnek kümedir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \setminus_\varepsilon: S_T(U) \times S_T(U) &\rightarrow S_T(U) \\ ((F,T), (G,T)) &\rightarrow (F,T) \setminus_\varepsilon (G,T) = (K, T \cup T) = (K,T) \end{aligned}$$

olup,  $T$ ,  $E$  kümesinin sabit bir alt kümesi ve  $(F,T)$  ve  $(G,T)$ ,  $S_T(U)$  kümesinin elemanı olmak üzere,  $(F,T) \setminus_\varepsilon (G,T)$  de  $S_T(U)$  kümesinin elemanıdır. Yani  $\setminus_\varepsilon$  işlemi,  $S_T(U)$  kümesi üzerinde de kapalıdır.

2)  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  için,  $[(F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, Z)] \setminus_{\varepsilon} (H, M) = (F, T) \setminus_{\varepsilon} [(G, Z) \setminus_{\varepsilon} (H, M)]$ .

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım.  $(F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, Z) = (S, T \cup Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için,

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(S, T \cup Z) \setminus_{\varepsilon} (H, M) = (R, (T \cup Z) \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup M$  için,

$$R(\alpha) = \begin{cases} S(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus (T \cup M) \\ S(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$M(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \setminus M = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \setminus M = T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus M = T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus (T \cup Z) = T' \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \setminus H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına bakalım.  $(G, Z) \setminus_{\varepsilon} (H, M) = (R, Z \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cup M$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus Z \\ G(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) \setminus_{\varepsilon} (R, Z \cup M) = (N, (T \cup (Z \cup M)))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup Z \cup M$ ;

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus (Z \cup M) \\ R(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) \setminus T \\ F(\alpha) \setminus R(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Böylece,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus M) \setminus T = T' \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus Z) \setminus T = T' \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus T = T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in T \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \setminus [G(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  için  $(N, (T \cup Z) \cup M) = (L, T \cup (Z \cup M))$  olduğu görülür. Yani, uygun koşullar altında,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\setminus_\varepsilon$  işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

$$3) [(F, T) \setminus_\varepsilon (G, T)] \setminus_\varepsilon (H, T) \neq (F, T) \setminus_\varepsilon [(G, T) \setminus_\varepsilon (H, T)].$$

*İspat:* İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (3)'den elde edilir. Yani,  $T, E$  nin sabit bir alt kümesi olmak üzere  $S_T(U)$  kümesi üzerinde  $\setminus_\varepsilon$  işleminin birleşme özelliği yoktur.

$$4) (F, T) \setminus_\varepsilon (G, Z) \neq (G, Z) \setminus_\varepsilon (F, T).$$

*İspat:*  $(F, T) \setminus_\varepsilon (G, Z) = (H, T \cup Z)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(G, Z) \setminus_\varepsilon (F, T) = (S, Z \cup T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in Z \cup T$  için,

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) \setminus F(\alpha) & \alpha \in Z \cap T \end{cases}$$

Böylece,  $(F, T) \setminus_\varepsilon (G, Z) \neq (G, Z) \setminus_\varepsilon (F, T)$ . Eğer,  $Z \cap T = \emptyset$  ise  $(F, T) \setminus_\varepsilon (G, Z) = (G, Z) \setminus_\varepsilon (F, T)$ . Buradan,  $(F, T) \setminus_\varepsilon (G, T) \neq (G, T) \setminus_\varepsilon (F, T)$  olduğu açıktır. Yani,  $S_E(U)$  ve  $S_T(U)$  kümeleri üzerinde  $\setminus_\varepsilon$  işleminin değişme özelliği yoktur.

$$5) (F, T) \setminus_\varepsilon (F, T) = \emptyset_T \text{ (Sezgin ve diğerleri, 2019).}$$

*İspat:* İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (5)'den elde edilir.

Yani  $S_E(U)$  kümesi üzerinde  $\setminus_\varepsilon$  işlemi denk güçlülük özelliğine sahip değildir.

6)  $(F, T) \setminus_{\varepsilon} \emptyset_T = (F, T)$  (Sezgin ve diğçerleri, 2019).

*İspat:* İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (6)'den elde edilir.

Yani,  $S_T(U)$  kümesi üzerinde  $\setminus_{\varepsilon}$  işleminin sağ birim elemanı  $\emptyset_T$  esnek kümesidir.

7)  $\emptyset_T \setminus_{\varepsilon} (F, T) = \emptyset_T$ .

*İspat:* İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (7)'den elde edilir.

Yani,  $S_T(U)$  kümesi üzerinde  $\setminus_{\varepsilon}$  işleminin sol yutan elemanı  $\emptyset_T$  esnek kümesidir.

8)  $(F, T) \setminus_{\varepsilon} \emptyset_{\emptyset} = (F, T)$ .

*İspat:*  $\emptyset_{\emptyset} = (S, \emptyset)$  ve  $(F, T) \setminus_{\varepsilon} (S, \emptyset) = (H, T \cup \emptyset)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cup \emptyset = T$  için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus \emptyset = T \\ S(\alpha) & \alpha \in \emptyset \setminus T = \emptyset \\ F(\alpha) \cap S'(\alpha) & \alpha \in T \cap \emptyset = \emptyset \end{cases}$$

Böylece,  $\forall \alpha \in T$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha)$  olup,  $(H, T) = (F, T)$ .

9)  $\emptyset_{\emptyset} \setminus_{\varepsilon} (F, T) = (F, T)$ .

*İspat:*  $\emptyset_{\emptyset} = (S, \emptyset)$  ve  $(S, \emptyset) \setminus_{\varepsilon} (F, T) = (H, \emptyset \cup T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in \emptyset \cup T = T$  için,

$$H(\alpha) = \begin{cases} S(\alpha) & \alpha \in \emptyset \setminus T = \emptyset \\ F(\alpha) & \alpha \in T \setminus \emptyset = T \\ S(\alpha) \cap F'(\alpha) & \alpha \in \emptyset \cap T = \emptyset \end{cases}$$

Böylece,  $\forall \alpha \in T$  için,  $H(\alpha) = F(\alpha)$  olup,  $(H, T) = (F, T)$ .

Teorem 5.2.4 (8) ve (9) dan,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\setminus_{\varepsilon}$  işleminin birim elemanı  $\emptyset_{\emptyset}$  esnek kümesidir. Klasik küme teorisinde,  $A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$  ve  $B = \emptyset$  olduğundan,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $(F, T)$  esnek kümesi için,

$$(F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, K) = (G, K) \setminus_{\varepsilon} (F, T) = \emptyset_{\emptyset}$$

olacak şekilde  $(G, K) \in S_E(U)$  bulamayız; çünkü bu durum  $T \cup K = \emptyset$  olmasını ve dolayısıyla  $T = \emptyset$  ve  $K = \emptyset$  olmasını gerektirir. Kabulümüz gereğı,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde  $\emptyset_{\emptyset}$  haricinde hiçbir esnek küme boş parametreye sahip olmadığından, buradan birim elemen olan  $\emptyset_{\emptyset}$

haricinde hiçbir elemanın,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde  $\setminus_\varepsilon$  işlemine göre tersinin olmadığı sonucu çıkartırız.

5.2.5. *Sonuç* Teorem 5.2.4 (1), (2), (4), (8) ve (9)'dan,  $(F,T)$ ,  $(G,Z)$  ve  $(H,M)$ ,  $S_E(U)$  kümesinin elemanları olmak üzere,  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  şartı altında,  $(S_E(U), \setminus_\varepsilon)$  birimi  $\emptyset_\emptyset$  olan, komutatif ve idempotent olmayan bir monoiddir.  $A \subseteq E$  sabit bir parametre kümesi olmak üzere,  $(S_A(U), \setminus_\varepsilon)$  cebirsel yapısı birleşme özelliğine sahip olmadığı için yarıgrup olamaz.

$$10) \emptyset_E \setminus_\varepsilon (F,T) = \emptyset_E.$$

*İspat:*  $\emptyset_E = (T,E)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in E$  için,  $T(\alpha) = \emptyset$ .  $(T,E) \setminus_\varepsilon (F,T) = (K, T \cup E)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cup E = E$  için,

$$K(\alpha) = \begin{cases} T(\alpha) & \alpha \in E \setminus T = T' \\ F(\alpha) & \alpha \in T \setminus E = \emptyset \\ T(\alpha) \cap F'(\alpha) & \alpha \in E \cap T = T \end{cases}$$

Buradan,

$$K(\alpha) = \begin{cases} \emptyset & \alpha \in E \setminus T = T' \\ F(\alpha) & \alpha \in T \setminus E = \emptyset \\ \emptyset & \alpha \in T \cap E = T \end{cases}$$

Böylece,  $\forall \alpha \in E$  için,  $K(\alpha) = \emptyset$  olup,  $(K,E) = \emptyset_E$ . Yani,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde  $\setminus_\varepsilon$  işleminin sol yutan elemanı  $\emptyset_E$  esnek kümesidir.

$(F,T) \setminus_\varepsilon \emptyset_E \neq \emptyset_E$  açıktır. Gerçekten,  $\emptyset_E = (T,E)$  olmak üzere,  $(F,T) \setminus_\varepsilon (T,E) = (H, T \cup E)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cup E = E$  için

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus E = \emptyset \\ T(\alpha) & \alpha \in E \setminus T = T' \\ F(\alpha) \cap T'(\alpha) & \alpha \in T \cap E = T \end{cases}$$

Buradan,

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus E = \emptyset \\ \emptyset & \alpha \in E \setminus T = T' \\ F(\alpha) & \alpha \in T \cap E = T \end{cases}$$

Böylece,  $(H,E) \neq \emptyset_E$ . Yani,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde  $\setminus_\varepsilon$  işleminin sağ yutan elemanı  $\emptyset_E$  esnek kümesi değildir.

$$11) (F, T) \setminus_{\varepsilon} U_T = \emptyset_T.$$

*İspat:* İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (13)'den elde edilir.

$$12) U_T \setminus_{\varepsilon} (F, T) = (F, T)^r \text{ (Sezgin ve diğerleri, 2019).}$$

*İspat:* İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (14)'den elde edilir.

$$13) (F, T) \setminus_{\varepsilon} (F, T)^r = (F, T).$$

*İspat:* İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (19)'den elde edilir.

Yani, her esnek kümenin tümleyeni,  $\setminus_{\varepsilon}$  işlemi için, kendisinin sağ birim elemanıdır.

$$14) (F, T)^r \setminus_{\varepsilon} (F, T) = (F, T)^r.$$

*İspat:* İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (20)'den elde edilir.

Yani, her esnek kümenin tümleyeni,  $\setminus_{\varepsilon}$  işlemi için, kendisinin sol yutan elemanıdır.

$$15) [(F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, Z)]^r = (F, T) \underset{+}{\overset{*}{\sim}} (G, Z).$$

*İspat:*  $(F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, Z) = (H, T \cup Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için;

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cap G'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(H, T \cup Z)^r = (K, T \cup Z)$  olup,  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F'(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G'(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F'(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$$\text{Buradan, } (K, T \cup Z) = (F, T) \underset{+}{\overset{*}{\sim}} (G, Z).$$

$$16) (F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, T) = U_T \Leftrightarrow (F, T) = U_T \text{ ve } (G, T) = \emptyset_T.$$

*İspat:* İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (22)'den elde edilir.

$$17) \emptyset_T \subseteq (F,T) \setminus_\varepsilon (G,Z), \emptyset_Z \subseteq (F,T) \setminus_\varepsilon (G,Z), \emptyset_Z \subseteq (G,Z) \setminus_\varepsilon (F,T), \emptyset_T \subseteq (G,Z) \setminus_\varepsilon (F,T).$$

$$\text{Ayrıca, } (F,T) \setminus_\varepsilon (G,Z) \subseteq U_{T \cup Z} \text{ ve } (G,Z) \setminus_\varepsilon (F,T) \subseteq U_{Z \cup T}.$$

*İspat:* Boş kümenin her kümenin alt kümesi olmasından ve evrensel kümenin her kümeyi kapsamasından ispat açıktır.

$$18) (F,T) \setminus_\varepsilon (G,T) \subseteq (G,T)' \text{ ve } (F,T) \setminus_\varepsilon (G,T) \subseteq (F,T).$$

*İspat:* İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (24)'den elde edilir.

$$19) (F,T) \subseteq (G,T) \text{ ise } (F,T) \setminus_\varepsilon (H,Z) \subseteq (G,T) \setminus_\varepsilon (H,Z) \text{ ve } (H,T) \setminus_R (G,T) \subseteq (H,T) \setminus_R (F,T).$$

*İspat:*  $(F,T) \subseteq (G,T)$  olsun. Buradan,  $\forall \alpha \in T$  için,  $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ .  $(F,T) \setminus_\varepsilon (H,Z) = (Y, T \cup Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için;

$$Y(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ H(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(G,T) \setminus_\varepsilon (H,Z) = (W, T \cup Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için;

$$W(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ H(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ G(\alpha) \cap H'(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$\alpha \in T \setminus Z$  ise,  $Y(\alpha) = F(\alpha)$  ve  $W(\alpha) = G(\alpha)$  olup,  $Y(\alpha) = F(\alpha) \subseteq G(\alpha) = W(\alpha)$ ;  $\alpha \in Z \setminus T$  ise,  $Y(\alpha) = H(\alpha)$  ve  $W(\alpha) = H(\alpha)$  olup,  $Y(\alpha) = H(\alpha) \subseteq H(\alpha) = W(\alpha)$ ;  $\alpha \in T \cap Z$  ise,  $Y(\alpha) = F(\alpha) \cap H'(\alpha)$  ve  $W(\alpha) = G(\alpha) \cap H'(\alpha)$  olup,  $Y(\alpha) = F(\alpha) \cap H'(\alpha) \subseteq G(\alpha) \cap H'(\alpha) = W(\alpha)$  olup,  $\forall \alpha \in Z \cup T$  için  $Y(\alpha) \subseteq W(\alpha)$ . Böylece,  $(F,T) \setminus_\varepsilon (H,Z) \subseteq (G,T) \setminus_\varepsilon (H,Z)$ .  $(H,T) \setminus_\varepsilon (G,T) \subseteq (H,T) \setminus_\varepsilon (F,T)$  olduğu, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (25)'den elde edilir.

20)  $(F,T) \setminus_\varepsilon (H,Z) \subseteq (G,T) \setminus_\varepsilon (H,Z)$  ise  $(F,T) \subseteq (G,T)$  olmak zorunda değildir. Benzer şekilde,  $(H,T) \setminus_R (G,T) \subseteq (H,T) \setminus_R (F,T)$  ise  $(F,T) \subseteq (G,T)$  olmak zorunda değildir.

*İspat:*  $E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$  parametre kümesi,  $T=\{e_1, e_3\}$ ,  $Z=\{e_1, e_3, e_5\}$  E'nin alt kümeleri,  $U=\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$  evrensel küme,  $(F, T)$ ,  $(G, T)$  ve  $(H, Z)$ ,  $U$  üzerinde  $(F, T)=\{(e_1, \{h_2, h_5\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_5\})\}$ ,  $(G, T)=\{(e_1, \{h_2\}), (e_3, \{h_1, h_2\})\}$ ,  $(H, Z)=\{(e_1, U), (e_3, U), (e_5, \{h_2\})\}$  olarak tanımlanan esnek kümeler olsun.

$(F, T) \setminus_{\varepsilon} (H, Z) = (L, T \cup Z)$  olmak üzere  $\forall \alpha \in T \cup Z = \{e_1, e_3, e_5\}$  için,  $L(e_1)=F(e_1) \cap H'(e_1)=\emptyset$ ,  $L(e_3)=F(e_3) \cap H'(e_3)=\emptyset$ ,  $L(e_5)=H(e_5)=\{h_2\}$ . Buradan,  $(F, T) \setminus_{\varepsilon} (H, Z) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset), (e_5, \{h_2\})\}$ . Şimdi de  $(G, T) \setminus_{\varepsilon} (H, Z) = (W, Z \cup T)$  olmak üzere  $\forall \alpha \in T \cup Z = \{e_1, e_3, e_5\}$  için,  $W(e_1)=G(e_1) \cap H'(e_1)=\emptyset$ ,  $W(e_3)=G(e_3) \cap H'(e_3)=\emptyset$ ,  $W(e_5)=H(e_5)=\{h_2\}$ . Böylece  $(G, T) \setminus_{\varepsilon} (H, Z) = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset), (e_5, \{h_2\})\}$ . Buradan,  $(F, T) \setminus_{\varepsilon} (H, Z) \subseteq (G, T) \setminus_{\varepsilon} (H, Z)$  fakat  $(F, T) \subseteq (G, T)$  olmadığı açıktır.  $(H, T) \setminus_R (G, T) \subseteq (H, T) \setminus_R (F, T)$ . ise  $(F, T) \subseteq (G, T)$  olmak zorunda olmadığını, aynı örnek üzerinde  $(H, T)=\{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset)\}$  seçilerek gösterilebilir.

21)  $(F, T) \subseteq (G, T)$  ve  $(K, T) \subseteq (L, T)$  ise  $(F, T) \setminus_{\varepsilon} (L, T) \subseteq (G, T) \setminus_{\varepsilon} (K, T)$  ve  $(K, T) \setminus_{\varepsilon} (G, T) \subseteq (L, T) \setminus_{\varepsilon} (F, T)$ .

*İspat:* İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (27)'den elde edilir.

22)  $(F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, T) = (F, T) \cap_{\varepsilon} (G, T)^r$ .

*İspat:* İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (28)'den elde edilir.

Klasik kümelerde  $T \subseteq Z \Leftrightarrow T \setminus Z = \emptyset$  olup, genişletilmiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

23)  $(F, T) \subseteq (G, T) \Leftrightarrow (F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, T) = \emptyset_T$ .

*İspat:* İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (29)'dan elde edilir.

Klasik kümelerde,  $T \setminus (T \setminus Z) = T \cap Z$  olup, genişletilmiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

24)  $(F, T) \setminus_{\varepsilon} [(F, T) \setminus_R (G, Z)] = (F, T) \underset{\cap}{\sim} (G, Z)$ .

*İspat:* İlk kısım ispatı, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (30)'dan elde edilir.  $(F, T) \setminus_R (G, T) = (K, T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  $K(\alpha) = F(\alpha) \setminus G(\alpha)$ .  $(F, T) \setminus_\varepsilon (K, T \cap Z) = (S, T \cup (T \cap Z)) = (S, T)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cup (T \cap Z)$  için,

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus (T \cap Z) = T \setminus Z \\ K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus T = \emptyset \\ F(\alpha) \setminus K(\alpha) & \alpha \in T \cap (T \cap Z) = T \cap Z \end{cases}$$

Böylece,

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus (T \cap Z) = T \setminus Z \\ F(\alpha) \setminus [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Buradan,

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus (T \cap Z) = T \setminus Z \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Böylece,  $(S, T) = (F, T) \tilde{\cap} (G, Z)$ .

Klasik kümelerde,  $T \setminus (T \cap Z) = T \setminus Z$  olup, kısıtlanmış esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

$$25) (F, T) \setminus_\varepsilon [(F, T) \cap_R (G, Z)] = (F, T) \tilde{\cap} (G, Z).$$

*İspat:* İlk kısım ispatı, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (31)'dan elde edilir.  $(F, T) \cap_R (G, Z) = (K, T \cap Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  $K(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ .  $(F, T) \setminus_\varepsilon (K, T \cap Z) = (S, T \cup (T \cap Z)) = (S, T)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cup (T \cap Z)$  için,

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus (T \cap Z) = T \setminus Z \\ K(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus T = \emptyset \\ F(\alpha) \setminus K(\alpha) & \alpha \in T \cap (T \cap Z) = T \cap Z \end{cases}$$

Böylece,

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus (T \cap Z) = T \setminus Z \\ F(\alpha) \setminus [F(\alpha) \cap G(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Buradan,

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus (T \cap Z) = T \setminus Z \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Böylece,  $(S, T) = (F, T) \setminus (G, Z)$ .

Klasik kümelerde,  $T \cap Z = \emptyset$  ise  $T \setminus Z = T$  olup, genişletilmiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

$$26) (F, T) \cap_{\varepsilon} (G, T) = \emptyset_T \text{ ise } (F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, T) = (F, T).$$

*İspat:* İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (32)'den elde edilir.

Klasik kümelerde,  $(T \setminus Z) \cap Z = \emptyset$  olup, genişletilmiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

$$27) [(F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, T)] \cap_{\varepsilon} (G, T) = \emptyset_T.$$

*İspat:* İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (33)'den elde edilir.

Klasik kümelerde,  $(T \setminus Z) \cap Z = \emptyset$  olduğundan,  $(T \setminus Z) \setminus Z = T \setminus Z$  olup, genişletilmiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

$$28) [(F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, T)] \setminus_{\varepsilon} (G, T) = (F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, T).$$

*İspat:* İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (34)'den elde edilir.

Klasik kümelerde,  $(T \setminus Z) \cap (Z \setminus T) = \emptyset$  olup, genişletilmiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

$$29) [(F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, T)] \cap_{\varepsilon} [(G, T) \setminus_{\varepsilon} (F, T)] = \emptyset_T.$$

*İspat:* İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (35)'den elde edilir.

Klasik kümelerde,  $(T \setminus Z) \cap (Z \setminus T) = \emptyset$  olduğundan,  $(T \setminus Z) \setminus (Z \setminus T) = T \setminus Z$  olup, genişletilmiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

$$30) [(F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, T)] \setminus_{\varepsilon} [(G, T) \setminus_{\varepsilon} (F, T)] = (F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, T).$$

*İspat:* İspat Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (36)'den elde edilir.

Klasik kümelerde,  $(T \setminus Z) \cap (T \cap Z) = \emptyset$  olup, genişletilmiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

$$31) [(F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, T)] \cap_{\varepsilon} [(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, T)] = \emptyset_T.$$

*İspat:* İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (37)'den elde edilir.

Klasik kümelerde,  $(T \setminus Z) \cap (T \cap Z) = \emptyset$  olduğundan  $(T \setminus Z) \setminus (T \cap Z) = T \setminus Z$  olup, genişletilmiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

$$32) [(F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, T)] \setminus_{\varepsilon} [(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, T)] = (F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, T).$$

*İspat:* İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (38)'den elde edilir.

Klasik kümelerde,  $T \cap (Z \setminus T) = \emptyset$  olup, genişletilmiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

$$33) (F, T) \cap_{\varepsilon} [(G, T) \setminus_{\varepsilon} (F, T)] = \emptyset_T.$$

*İspat:* İspat, Not 5.2.3. ve Teorem 5.1.3. (39)'dan elde edilir.

Klasik kümelerde,  $T \cap (Z \setminus T) = \emptyset$  olduğundan,  $T \setminus (Z \setminus T) = T$  olup, genişletilmiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

$$34) (F, T) \setminus_{\varepsilon} [(G, T) \setminus_{\varepsilon} (F, T)] = (F, T).$$

*İspat:* İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (40)'dan elde edilir.

Klasik kümelerde,  $T = (T \setminus Z) \cup (T \cap Z)$  olup, genişletilmiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

$$35) (F, T) = [(F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, T)] \cup_{\varepsilon} [(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, T)].$$

*İspat:* İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.3 (41)'den elde edilir.

Klasik kümelerde,  $T \cup Z = (T \setminus Z) \cup Z$  ve  $T \cup Z = (Z \setminus T) \cup T$  olup, genişletilmiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

36)

$$(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z) = [(F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, Z)] \cup_{\varepsilon} (G, Z) \text{ ve } (F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z) = [(G, Z) \setminus_{\varepsilon} (F, T)] \cup_{\varepsilon} (F, T).$$

*İspat:*  $(F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, Z) = (H, T \cup Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha), & \alpha \in Z - T \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha), & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(H, T \cup Z) \cup_{\varepsilon} (G, Z) = (K, T \cup Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için,

$$K(\alpha) = \begin{cases} H(\alpha), & \alpha \in (T \cup Z) - Z = T - Z \\ G(\alpha), & \alpha \in Z - (T \cup Z) = \emptyset \\ H(\alpha) \cup G(\alpha), & \alpha \in (T \cup Z) \cap Z = Z \end{cases}$$

Böylece,

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \alpha \in (T - Z) - Z = T - Z \\ G(\alpha), & \alpha \in (Z - T) - Z = \emptyset \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha), & \alpha \in (T \cap Z) - Z = \emptyset \\ F(\alpha) \cup G(\alpha), & \alpha \in (T - Z) \cap Z = \emptyset \\ G(\alpha) \cup G(\alpha), & \alpha \in (Z - T) \cap Z = Z - T \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cup G(\alpha), & \alpha \in (T \cap Z) \cap Z = T \cap Z \end{cases}$$

Buradan,

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha), & \alpha \in Z - T \\ F(\alpha) \cup G(\alpha), & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Böylece,  $(K, T \cup Z) = (F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z)$  olur.  $(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z) = [(G, Z) \setminus_{\varepsilon} (F, T)] \cup_{\varepsilon} (F, T)$  benzer şekilde gösterilebilir.

Klasik kümelerde,  $T \cup Z = (T \setminus Z) \cup (Z \setminus T) \cup (T \cap Z)$  olup, genişletilmiş esnek fark için aşağıdaki mevcuttur:

$$37) (F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z) = [(F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, Z)] \cup_{\varepsilon} [(G, Z) \setminus_{\varepsilon} (F, T)] \cup_{\varepsilon} [(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z)].$$

*İspat:*  $(F, V) \setminus_{\varepsilon} (G, Z) = (H, T \cup Z)$ ,  $(G, Z) \setminus_{\varepsilon} (F, T) = (K, T \cup Z)$  ve  $(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z) = (S, T \cup Z)$  olsun.

Böylece,  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \alpha \in T - Z \\ G(\alpha), & \alpha \in Z - T \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha), & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

ve

$$K(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha), & \alpha \in Z-T \\ F(\alpha), & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha) \setminus F(\alpha), & \alpha \in Z \cap T \end{cases}$$

ve

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \alpha \in T-Z \\ G(\alpha), & \alpha \in Z-T \\ F(\alpha) \cap G(\alpha), & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(H, T \cup Z) \cup_{\varepsilon} (K, Z \cup T) = (M, T \cup Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için;

$$M(\alpha) = \begin{cases} H(\alpha), & \alpha \in (T \cup Z) - (Z \cup T) = \emptyset \\ K(\alpha), & \alpha \in (Z \cup T) - (T \cup Z) = \emptyset \\ H(\alpha) \cup K(\alpha), & \alpha \in (T \cup Z) \cap (Z \cup T) = T \cup Z \end{cases}$$

Böylece,

$$M(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup G(\alpha), & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (Z \setminus T) = \emptyset \\ F(\alpha) \cup F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \setminus Z) = T \setminus Z \\ F(\alpha) \cup [G(\alpha) \setminus F(\alpha)], & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (Z \cap T) = \emptyset \\ G(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (Z \setminus T) = Z \setminus T \\ G(\alpha) \cup F(\alpha), & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \setminus Z) = \emptyset \\ G(\alpha) \cup [G(\alpha) \setminus F(\alpha)], & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (Z \cap T) = \emptyset \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cup G(\alpha), & \alpha \in (T \cap Z) \cap (Z \setminus T) = \emptyset \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cup F(\alpha), & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \setminus Z) = \emptyset \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cup [G(\alpha) \setminus F(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (Z \cap T) = T \cap Z \end{cases}$$

Buradan,

$$M(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cup [G(\alpha) \setminus F(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(M, T \cup Z) \cup_{\varepsilon} (S, T \cup Z) = (W, T \cup Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için

$$W(\alpha) = \begin{cases} M(\alpha), & \alpha \in (T \cup Z) - (T \cup Z) = \emptyset \\ S(\alpha), & \alpha \in (T \cup Z) - (T \cup Z) = \emptyset \\ M(\alpha) \cup S(\alpha), & \alpha \in (T \cup Z) \cap (T \cup Z) = T \cup Z \end{cases}$$

Buradan,

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| $\overline{F}(\alpha) \cup F(\alpha)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | $\alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \setminus Z) = T \setminus Z$ |
| $F(\alpha) \cup G(\alpha),$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | $\alpha \in (T \setminus Z) \cap (Z \setminus T) = \emptyset$     |
| $F(\alpha) \cup [F(\alpha) \cap G(\alpha)],$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | $\alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \cap Z) = \emptyset$          |
| $G(\alpha) \cup F(\alpha),$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | $\alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \setminus Z) = \emptyset$     |
| $W(\alpha) \left\{ \begin{array}{l} G(\alpha) \cup G(\alpha) \\ G(\alpha) \cup [F(\alpha) \cap G(\alpha)], \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cup [G(\alpha) \setminus F(\alpha)] \cup F(\alpha), \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cup [G(\alpha) \setminus F(\alpha)] \cup G(\alpha), \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cup [G(\alpha) \setminus F(\alpha)] \cup [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \end{array} \right.$ | $\alpha \in (Z \setminus T) \cap (Z \setminus T) = Z \setminus T$ |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | $\alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \cap Z) = \emptyset$          |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | $\alpha \in (T \cap Z) \cap (T \setminus Z) = \emptyset$          |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | $\alpha \in (T \cap Z) \cap (Z \setminus T) = \emptyset$          |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | $\alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap Z) = T \cap Z$                |

Böylece,

$$W(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha), & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cup G(\alpha), & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Buradan  $(W, T \cup Z) = (F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z)$  olur.

5.1.4. Teorem  $(S_T(U), \setminus_{\varepsilon}, \emptyset_T)$  her bir elemanı involusyon olan sınırlı bir BCK-cebiridir.

*İspat:* İspat, Not 5.2.3 ve Teorem 5.1.4 'den elde edilir.

### 5.2.1. Genişletilmiş fark işleminin diğer esnek küme işlemlerine dağılması:

Bu alt bölümde genişletilmiş fark işleminin; kısıtlanmış işlemlere, genişletilmiş işlemlere, esnek ikili parçalı işlemlere dağılmasına bakılmıştır.

#### Genişletilmiş fark işleminin kısıtlanmış işlemlere dağılması:

Burada, genişletilmiş fark işleminin, kısıtlanmış işlemlere dağılmasına bakılmıştır. İlk olarak sağdan dağılmalar, peşinden soldan dağılmalar incelenmiştir. Kısıtlanmış işlemleri alınacak esnek kümelerin parametre kümelerinin kesişiminin boş kümeye eşit olması durumunda da dağılmaların sağlandığını ispatlarıyla sunulmuştur.

#### i) Genişletilmiş fark işleminin kısıtlanmış işlemlere soldan dağılması:

1) Eğer  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  ise  $(F, T) \setminus_{\varepsilon} [(G, Z) \cup_R (H, M)] = [(F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, Z)] \cup_R [(F, T) \setminus_{\varepsilon} (H, M)]$ .

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım.  $(G, Z) \cup_R (H, M) = (M, Z \cap M)$  olsun. Buradan,  $\forall \alpha \in Z \cap M; M(\alpha) = G(\alpha) \cup H(\alpha)$ .  $(F, T) \setminus_{\varepsilon} (M, Z \cap M) = (N, T \cup (Z \cap M))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup (Z \cap M)$ ;

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus (Z \cap M) \\ M(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus T \\ F(\alpha) \setminus M(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus (Z \cap M) \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus T \\ F(\alpha) \setminus [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, Z)] \cup_R [(F, T) \setminus_{\varepsilon} (H, M)]$  bakalım.  $(F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, Z) = (M, T \cup Z)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cup Z$ ;

$$M(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F, T) \setminus_{\varepsilon} (H, M) = (K, T \cup M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(M, T \cup Z) \cup_R (K, T \cup M) = (W, (T \cup Z) \cap (T \cup M))$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cap (T \cup M)$ ;

$W(\alpha) = T(\alpha) \cup K(\alpha)$

$$W(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \setminus M) = T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (M \setminus T) = \emptyset \\ F(\alpha) \cup [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup F(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \setminus M) = \emptyset \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (M \setminus T) = T' \cap Z \cap M \\ G(\alpha) \cup [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \cap M) = \emptyset \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cup F(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (M \setminus T) = \emptyset \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cup [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$W(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cup [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada;  $N$  fonksiyonundaki  $T \setminus (Z \cap M)$  yi ele alırsak,  $T \setminus (Z \cap M) = T \setminus (Z \cap M)'$  olup, bir eleman  $(Z \cap M)$  nin tümleyeninde ise o elemanın ya  $Z \setminus M$  de, ya  $M \setminus Z$  de, ya da  $Z \cup M$  nin tümleyenindedir. Buradan,  $\alpha \in T \setminus (Z \cap M)$  ise  $\alpha \in T \cap Z \cap M'$  veya  $\alpha \in T \cap Z' \cap M$  veya  $\alpha \in T \cap Z' \cap M'$  olduğuna dikkat edecek olursak,  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  için  $N$  ve  $W$  fonksiyonları birbirine eşit olur. Burada  $Z \cap M = \emptyset$  olduğunda,  $N(\alpha) = W(\alpha) = F(\alpha)$  olup, eşitlik yine sağlanacaktır. Benzer şekilde,  $(T \cup Z) \cap (T \cup M) = T \cup (Z \cap M) = \emptyset$  olduğunda da yani  $T = \emptyset$  ve  $Z \cap M = \emptyset$  olduğundan da  $(N, T \cup (Z \cap M)) = (W, (T \cup Z) \cap (T \cup M)) = \emptyset$  olur. Yani, teoremden kısıtlanmış keşimi alınacak esnek kümelerin parametre kümelerinin boştan farklı olması gerektiği şartı bulunmamaktadır.

$$2) \quad T \cap (Z \Delta M) = T \cap Z \cap M = \emptyset \quad \text{ise} \quad (F, T) \setminus_{\varepsilon} [(G, Z) \cap_R (H, M)] = [(F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, Z)] \cap_R [(F, T) \setminus_{\varepsilon} (H, M)].$$

ii) Genişletilmiş fark işleminin kısıtlanmış işlemlere sağdan dağılması:

$$1) \quad [(F, T) \cup_R (G, Z)] \setminus_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) \setminus_{\varepsilon} (H, M)] \cup_R [(G, Z) \setminus_{\varepsilon} (H, M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafını ele alalım.  $(F, T) \cup_R (G, Z) = (R, T \cap Z)$  olsun. Buradan,  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  $R(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$ .  $(R, T \cap Z) \setminus_{\varepsilon} (H, M) = (L, (T \cap Z) \cup M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in (T \cap Z) \cup M$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus (T \cap Z) \\ R(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus (T \cap Z) \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \setminus H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M \end{cases}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F,T) \setminus_{\varepsilon} (H,M)] \cup_R [(G,Z) \setminus_{\varepsilon} (H,M)]$  bakalım.  
 $(F,T) \setminus_{\varepsilon} (H,M) = (S, T \cup M)$  olsun.  $\forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(G,Z) \setminus_{\varepsilon} (H,M) = (K, Z \cup M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in Z \cup M$ ;

$$K(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus Z \\ G(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(S, T \cup Z) \cup_R (K, Z \cup M) = (W, (T \cup Z) \cap (Z \cup M))$  olsun. Buradan,  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cap (Z \cup M)$ ;  
 $W(\alpha) = S(\alpha) \cup K(\alpha)$  olup;

$$W(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \setminus M) \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus M) \cap (M \setminus Z) = \emptyset \\ F(\alpha) \cup [G(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in (T \setminus M) \cap (Z \cap M) = \emptyset \\ H(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (M \setminus T) \cap (Z \setminus M) = \emptyset \\ H(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus T) \cap (M \setminus Z) = T' \cap Z' \cap M \\ H(\alpha) \cup [G(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in (M \setminus T) \cap (Z \cap M) = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \setminus M) = \emptyset \\ [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] \cup [G(\alpha) \cup H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$W(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z' \cap M \\ H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] \cup [G(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada; L fonksiyonundaki,  $M \setminus (T \cap Z)$ 'yi ele alırsak,  $M \setminus (T \cap Z) = M \cap (T \cap Z)'$  olup, bir eleman  $(T \cap Z)$  nin tümleyeninde ise o elemanın ya  $T \setminus Z$  de, ya  $Z \setminus T$  de, ya da  $T \cup Z$  nin tümleyenindedir. Burdan,  $\alpha \in M \setminus (T \cap Z)$  ise  $\alpha \in M \cap T \cap Z'$  veya  $\alpha \in M \cap Z \cap T'$  veya  $\alpha \in M \cap T' \cap Z'$  olduğuna dikkat edecek olursak,  $L = W$  sağlanır. Burada  $T \cap Z = \emptyset$  olduğunda,  $L(\alpha) = W(\alpha) = H(\alpha)$  olacağından, eşitlik yine sağlanacaktır. Benzer şekilde,  $(T \cup M) \cap (Z \cup M) = (T \cap Z) \cup M = \emptyset$  olduğunda da yani  $T \cap Z = \emptyset$  ve  $M = \emptyset$  olduğundan da  $(L, (T \cap Z) \cup M) = (W, (T \cup M) \cap (Z \cup M)) = \emptyset_{\emptyset}$  olur. Yani, teoremden kısıtlanmış keşimi alınacak

esnek kümelerin parametre kümelerinin boştan farklı olması gerektiği şartı bulunmamaktadır.

$$2) (T \Delta Z) \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \cap_R (G, Z)] \setminus_\varepsilon (H, M) = [(F, T) \setminus_\varepsilon (H, M)] \cap_R [(G, Z) \setminus_\varepsilon (H, M)].$$

### Genişletilmiş fark işleminin genişletilmiş işlemlere dağılması

Burada, genişletilmiş fark işleminin, genişletilmiş işlemlere dağılmasına bakılmıştır. İlk olarak sağdan dağılmalar, peşinden soldan dağılmalar incelenmiştir.

#### i) Genişletilmiş fark işleminin genişletilmiş işlemlere soldan dağılması:

$$1) T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } (F, T) \setminus_\varepsilon [(G, Z) \cap_\varepsilon (H, M)] = [(F, T) \setminus_\varepsilon (G, Z)] \cap_\varepsilon [(F, T) \setminus_\varepsilon (H, M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım.  $(G, Z) \cap_\varepsilon (H, M) = (R, Z \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cup M$ ;

$$M(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus Z \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(F, T) \setminus_\varepsilon (R, Z \cup M) = (N, (T \cup (Z \cup M)))$  bakalım.  $\forall \alpha \in T \cup (Z \cup M)$ ;

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus (Z \cup M) \\ M(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) \setminus T \\ F(\alpha) \setminus M(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus M) \setminus T = T' \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus Z) \setminus T = T' \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus T = T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in T \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \setminus [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F, T) \setminus_\varepsilon (G, Z)] \cap_\varepsilon [(F, T) \setminus_\varepsilon (H, M)]$  bakalım.  $(F, T) \setminus_\varepsilon (G, Z) = (K, T \cup Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup Z$ ;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F, T) \setminus_{\varepsilon} (H, M) = (S, T \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup Z) \cap_{\varepsilon} (S, T \cup M) = (L, (T \cup Z) \cup (T \cup M))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup (T \cup M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \setminus (T \cup M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \setminus (T \cup Z) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap (T \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \setminus (T \cup M) = \emptyset \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \setminus (T \cup M) = T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cup M) = \emptyset \\ F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus M) \setminus (T \cup Z) = \emptyset \\ H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus T) \setminus (T \cup Z) = T' \cap Z' \cap M \\ F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (T \cup Z) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \setminus M) = T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (M \setminus T) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap F(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \setminus M) = \emptyset \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (M \setminus T) = T' \cap Z \cap M \\ G(\alpha) \cap [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \cap M) = \emptyset \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cap F(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (M \setminus T) = \emptyset \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cap [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$\begin{array}{ll}
 L(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M' \\
 H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z' \cap M \\
 F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M' \\
 F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\
 G(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\
 F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\
 [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cap [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}
 \end{array}$$

$T \cap Z \cap M' = T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$  için  $N = L$  olduğu görülür.  $T \cap Z \cap M' = T \cap Z' \cap M = \emptyset$  şartının  $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$  şartına denk olduğu aşıkardır.

$$2) T \cap (Z \Delta M) = T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } (F, T) \setminus_{\varepsilon} [(G, Z) \cup_{\varepsilon} (H, M)] = [(F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, Z)] \cup_{\varepsilon} [(F, T) \setminus_{\varepsilon} (H, M)].$$

ii) Genişletilmiş fark işleminin genişletilmiş işlemlere sağdan dağılması:

$$1) [(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z)] \setminus_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) \setminus_{\varepsilon} (H, M)] \cap_{\varepsilon} [(G, Z) \setminus_{\varepsilon} (H, M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım.  $(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z) = (R, T \cup Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup Z$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\
 G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\
 F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T \cup Z) \setminus_{\varepsilon} (H, M) = (N, (T \cup Z) \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup M$ ;

$$N(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \setminus M \\
 H(\alpha) & \alpha \in M \setminus (T \cup Z) \\
 R(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$\begin{array}{ll}
 N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \setminus M = T \cap Z' \cap M' \\
 G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \setminus M = T' \cap Z \cap M' \\
 F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus M = T \cap Z \cap M' \\
 H(\alpha) & \alpha \in M \setminus (T \cup Z) = T' \cap Z' \cap M \\
 F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\
 G(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap M = T' \cap Z \cap M \\
 [F(\alpha) \cap G(\alpha)] \setminus H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}
 \end{array}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F,T) \setminus_{\varepsilon} (H,M)] \cap_{\varepsilon} [(G,Z) \setminus_{\varepsilon} (H,M)]$  bakalım.

$(F,T) \setminus_{\varepsilon} (H,M) = (K, T \cup Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(G,Z) \setminus_{\varepsilon} (H,M) = (S, T \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cup M$ ;

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus Z \\ G(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup M) \cap_{\varepsilon} (S, Z \cup M) = (L, (T \cup M) \cup (Z \cup M))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cup M) \cup (Z \cup M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \setminus (Z \cup M) \\ S(\alpha) & \alpha \in (Z \cup M) \setminus (T \cup M) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus M) \setminus (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus T) \setminus (Z \cup M) = \emptyset \\ F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cup M) = \emptyset \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus M) \setminus (T \cup M) = T' \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus Z) \setminus (T \cup M) = \emptyset \\ G(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus (T \cup M) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \setminus M) \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus M) \cap (M \setminus Z) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap [G(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in (T \setminus M) \cap (Z \cap M) = \emptyset \\ H(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in (M \setminus T) \cap (Z \setminus M) = \emptyset \\ H(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus T) \cap (M \setminus Z) = T' \cap Z' \cap M \\ H(\alpha) \cap [G(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in (M \setminus T) \cap (Z \cap M) = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] \cap G(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \setminus M) = \emptyset \\ [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] \cap [G(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M' \\ G(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cap G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] \cap [G(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

$N=L$  olduğu görülür.

$$2) (T \Delta Z) \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z)] \setminus_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) \setminus_{\varepsilon} (H, M)] \cup_{\varepsilon} [(G, Z) \setminus_{\varepsilon} (H, M)].$$

Genişletilmiş fark işleminin esnek ikili parçalı işlemlere dağılması:

Burada, genişletilmiş fark işleminin, esnek ikili parçalı işlemlere dağılmasına bakılmıştır.

İlk olarak sağdan dağılmalar, peşinden soldan dağılmalar incelenmiştir.

i) Genişletilmiş fark işleminin esnek ikili parçalı işlemlere soldan dağılması:

$$1) T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise}$$

$$(F, T) \setminus_{\varepsilon} [(G, Z) \tilde{\cap} (H, M)] = [(F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, Z)] \tilde{\cap} [(F, T) \setminus_{\varepsilon} (H, M)].$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım.  $(G, Z) \tilde{\cap} (H, M) = (R, Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$$(F, T) \setminus_{\varepsilon} (R, Z) = (N, T \cup Z) \text{ olsun. Burada, } \forall \alpha \in T \cup Z;$$

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ R(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \setminus R(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus M) \setminus T = T' \cap Z \cap M' \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z \cap M) \setminus T = T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \setminus [G(\alpha) \cap H(\alpha)] & \alpha \in T \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, Z)] \sim_{\cap} [(F, T) \setminus_{\varepsilon} (H, M)]$  bakalım.  $(F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, Z) = (K, T \cup Z)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cup Z$ ;

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F, T) \setminus_{\varepsilon} (H, M) = (S, T \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup Z) \sim_{\cap} (S, T \cup M) = (L, (T \cup Z) \cup (T \cup M))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cup Z) \cup (T \cup M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \setminus (T \cup M) \\ K(\alpha) \cap S(\alpha) & \alpha \in (T \cup Z) \cap (T \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \setminus (T \cup M) = \emptyset \\ G(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \setminus (T \cup M) = T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus (T \cup M) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \setminus M) = T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (M \setminus T) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in (T \setminus Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap F(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \setminus M) = \emptyset \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (M \setminus T) = T' \cap Z \cap M \\ G(\alpha) \cap [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in (Z \setminus T) \cap (T \cap M) = \emptyset \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cap F(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cap H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap (M \setminus T) = \emptyset \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cap [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap Z) \cap (T \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ G(\alpha) \cap H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ F(\alpha) \setminus G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ [F(\alpha) \setminus G(\alpha)] \cap [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada; N fonksiyonundaki,  $T \setminus Z$  yi ele alırsak,  $T \setminus Z = T \cap Z'$  olup, bir eleman Z nin tümleyeninde ise o eleman ya  $M \setminus Z$  de, ya da  $M \cup Z$  nin tümleyenindedir. Burdan,  $\alpha \in T \setminus Z$  ise  $\alpha \in T \cap M \cap Z'$  veya  $\alpha \in T \cap M' \cap Z'$  olduğuna dikkat edecek olursak,  $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$  şartına ile  $N=L$  sağlanır.

2)  $T \cap Z \cap M' = T \cap Z \cap M = \emptyset$  ise

$$(F, T) \setminus_{\varepsilon} [(G, Z) \widetilde{\cup} (H, M)] = [(F, T) \setminus_{\varepsilon} (G, Z)] \widetilde{\cup} [(F, M) \setminus_{\varepsilon} (G, Z)].$$

ii) Genişletilmiş fark işleminin esnek ikili parçalı işlemlere sağdan dağılması:

$$1) T \cap Z' \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \widetilde{\cup} (G, Z)] \setminus_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) \setminus_{\varepsilon} (H, M)] \widetilde{\cup} [(G, Z) \setminus_{\varepsilon} (H, M)]$$

*İspat:* İlk olarak eşitliğin sol tarafına bakalım.  $(F, T) \widetilde{\cup} (G, Z) = (R, T)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T$ ;

$$R(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \setminus Z \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(R, T) \setminus_{\varepsilon} (H, M) = (N, T \cup M)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$N(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ R(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

Buradan,

$$N(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \setminus M = T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \setminus M = T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus Z) \cap M = T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \cup G(\alpha)] \setminus H(\alpha) & \alpha \in (T \cap Z) \cap M = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafına yani  $[(F,T) \setminus_{\varepsilon} (H,M)] \widetilde{\cup} [(G,Z) \setminus_{\varepsilon} (H,M)]$  bakalım.  $(F,T) \setminus_{\varepsilon}$

$(H,M) = (K, T \cup M) \forall \alpha \in T \cup M$ ;

$$K(\alpha) = \begin{cases} \bar{F}(\alpha) & \alpha \in T \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus T \\ F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in T \cap M \end{cases}$$

$(G,Z) \setminus_{\varepsilon} (H,M) = (S, T \cup M)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in Z \cup M$ ;

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) & \alpha \in Z \setminus M \\ H(\alpha) & \alpha \in M \setminus Z \\ G(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in Z \cap M \end{cases}$$

$(K, T \cup M) \widetilde{\cup} (S, Z \cup M) = (L, (T \cup M) \cup (Z \cup M))$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in (T \cup M) \cup (Z \cup M)$ ;

$$L(\alpha) = \begin{cases} K(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \setminus (Z \cup M) \\ K(\alpha) \cup S(\alpha) & \alpha \in (T \cup M) \cap (Z \cup M) \end{cases}$$

Buradan,

$$L(\alpha) = \begin{cases} \bar{F}(\alpha) & \alpha \in (T \setminus M) \setminus (Z \cup M) = T \cap Z' \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus T) \setminus (Z \cup M) = \emptyset \\ F(\alpha) \setminus H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \setminus (Z \cup M) = \emptyset \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \setminus M) \cap (Z \setminus M) = T \cap Z \cap M' \\ F(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \setminus M) \cap (M \setminus Z) = \emptyset \\ F(\alpha) \cup [G(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in (T \setminus M) \cap (Z \cap M) = \emptyset \\ H(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in (M \setminus T) \cap (Z \setminus M) = \emptyset \\ H(\alpha) \cup H(\alpha) & \alpha \in (M \setminus T) \cap (M \setminus Z) = T' \cap Z' \cap M \\ H(\alpha) \cup [G(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in (M \setminus T) \cap (Z \cap M) = T' \cap Z \cap M \\ [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] \cup G(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \setminus M) = \emptyset \\ [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] \cup H(\alpha) & \alpha \in (T \cap M) \cap (M \setminus Z) = T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] \cup [G(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in (T \cap M) \cap (Z \cap M) = T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Böylece,

$$L(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M' \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \alpha \in T \cap Z \cap M' \\ H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z' \cap M \\ H(\alpha) & \alpha \in T' \cap Z \cap M \\ H(\alpha) & \alpha \in T \cap Z' \cap M \\ [F(\alpha) \setminus H(\alpha)] \cup [G(\alpha) \setminus H(\alpha)] & \alpha \in T \cap Z \cap M \end{cases}$$

Burada;  $N$  fonksiyonundaki,  $M \setminus T$  yi ele alırsak,  $M \setminus T = M \cap T'$  olup, bir eleman  $T$  nin tümleyeninde ise o eleman ya  $Z \setminus T$  de, ya da  $Z \cup T$  nin tümleyenindedir. Burdan,  $\alpha \in M \setminus T$  ise  $\alpha \in M \cap Z \cap T'$  veya  $\alpha \in M \cap Z' \cap T'$  olduğuna dikkat edecek olursak,  $T \cap Z' \cap M = T \cap Z \cap M = \emptyset$  şartı ile  $N=L$  sağlanır.

$$2) T' \cap Z \cap M = \emptyset \text{ ise } [(F, T) \tilde{\cap} (G, Z)] \setminus_{\varepsilon} (H, M) = [(F, T) \setminus_{\varepsilon} (H, M)] \tilde{\cap} [(G, Z) \setminus_{\varepsilon} (H, M)].$$

## 6. YUTMA KURALLARI VE ESNEK KÜMELERİN CEBİRSEL YAPILARI

Bu bölümde, esnek kümelerin ve esnek küme işlemlerinden olan kısıtlanmış ve genişletilmiş kesişim, kısıtlanmış ve genişletilmiş birleşim, kısıtlanmış ve genişletilmiş fark ve simetrik fark işlemlerinin,  $S_E(U)$  ve  $S_A(U)$  kümeleri üzerinde kafes yapıları oluşturup oluşturmadığını ortaya koymak için, öncelikle yutma kuralları adı verilen kurallara detaylı ispatları ile bakılmıştır.  $S_E(U)$  kümesi üzerindeki yutma kuralları daha önceki çalışmalarda (Qin ve Hong, 2010; Ali ve diğerleri, 2011; Singh ve Onyeozili, 2012c) verilmiş olsa da, Ali ve diğerleri (2011) sonuçları ispatsız sadece bir tablo ile sunmuş olup, diğer çalışmalarda ise ispatlar elemana dayalı ve nispeten uzun ispatlar olduğundan, burada daha sade ispatlar ile sunulmuştur. Ayrıca, yeni işlemleri de içeren yutma kuralları  $S_A(U)$  kümeleri üzerinde detaylı şekilde verilmiştir. Ayrıca,  $S_E(U)$  ve  $S_A(U)$  kümeleri üzerinde, 3. Bölüm, 4. Bölüm ve 5. Bölümden elde edilen dağılma kuralları, tablo halinde toplu olarak verilmiştir. Son olarak, esnek kümelerin ve esnek küme işlemlerinden olan kısıtlanmış ve genişletilmiş kesişim, birleşim ve fark işlemlerinin  $S_E(U)$  ve  $S_A(U)$  kümeleri üzerinde hangi birli ve ikili cebirsel yapılar oluşturduğu sistematik, detaylı ve toplu olarak sunulmuştur. Bu nitelikte kapsayıcı bir çalışmanın alanyazında olmayışının, bu boşluğu dolduracağını düşünüyoruz.

### 6.1. Yutma Kuralları:

#### 6.1.1. $S_E(U)$ kümesi üzerinde yutma kuralları:

1)  $(F, T) \cap_R [(F, T) \cup_\epsilon (G, Z)] = (F, T)$  ve  $(F, T) \cup_\epsilon [(F, T) \cap_R (G, Z)] = (F, T)$  (Qin ve Hong, 2010; Singh ve Onyeozili, 2012c).

*İspat:* Qin ve Hong (2010) ve Singh ve Onyeozili (2012c) çalışmalarında verilen ispatlardan daha sade bir ispatla bu özellikler ispatlanacaktır.  $(F, T) \cap_R [(F, T) \cup_\epsilon (G, Z)]$  ele alalım.  $(F, T) \cup_\epsilon (G, Z) = (Q, T \cup Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için;

$$Q(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha), & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cup G(\alpha), & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F, T) \cap_R (Q, T \cup Z) = (M, T \cap (T \cup Z)) = (M, T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T$  için;  $M(\alpha) = F(\alpha) \cap Q(\alpha)$ . Buradan,

$$M(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cap F(\alpha), & \alpha \in T \cap (T \setminus Z) = T \setminus Z \\ F(\alpha) \cap G(\alpha), & \alpha \in T \cap (Z \setminus T) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap [F(\alpha) \cup G(\alpha)], & \alpha \in T \cap (T \cap Z) = T \cap Z \end{cases}$$

Böylece,

$$M(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \alpha \in T \setminus Z \\ F(\alpha), & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Buradan,  $(F, T) \cap_R [(F, T) \cup_\varepsilon (G, T)] = (F, T)$ .

Benzer şekilde,  $(F, T) \cup_\varepsilon [(F, T) \cap_R (G, Z)] = (F, T)$ .

Gerçekten,  $(F, T) \cap_R (G, Z) = (L, T \cap Z)$  olsun. Buradan,  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $L(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ .

$(F, T) \cup_\varepsilon (L, T \cap Z) = (W, T \cup (T \cap Z)) = (W, T)$  olup,  $\forall \alpha \in T$  için;

$$W(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \alpha \in T \setminus (T \cap Z) = T \setminus Z \\ L(\alpha), & \alpha \in (T \cap Z) \setminus T = \emptyset \\ F(\alpha) \cup L(\alpha), & \alpha \in T \cap (T \cap Z) = T \cap Z \end{cases}$$

Böylece,  $\forall \alpha \in T$  için;

$$W(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \alpha \in T \setminus Z \\ [F(\alpha) \cup [F(\alpha) \cap G(\alpha)]], & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Buradan,  $\forall \alpha \in T$  için;

$$W(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \alpha \in T \setminus Z \\ F(\alpha), & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Yani,  $(F, T) \cup_\varepsilon [(F, T) \cap_R (G, Z)] = (F, T)$ . Böylece,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde  $\cup_\varepsilon$  ve  $\cap_R$  işlemleri için yutma kuralı geçerlidir. Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  olsa dahi,  $\forall \alpha \in T$  için  $W(\alpha) = F(\alpha)$  olacağından, her durumda eşitlik sağlanır.

2)  $(F, T) \cup_R [(F, T) \cap_\varepsilon (G, Z)] = (F, T)$  ve  $(F, T) \cap_\varepsilon [(F, T) \cup_R (G, Z)] = (F, T)$  (Qin ve Hong, 2010; Singh ve Onyeozili, 2012c).

*İspat:* Qin ve Hong (2010) ve Singh ve Onyeozili (2012c) çalışmalarında verilen ispatlardan daha sade bir ispatla bu özellikler ispatlanacaktır.

İlk olarak,  $(F, T) \cup_R [(F, T) \cap_\varepsilon (G, Z)] = (F, T)$  olduğunu gösterelim.  $(F, T) \cap_\varepsilon (G, Z) = (Q, T \cup Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için;

$$Q(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha), & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cap G(\alpha), & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F, T) \cup_R (Q, T \cup Z) = (M, T \cap (T \cup Z)) = (M, T)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T$  için;  $M(\alpha) = F(\alpha) \cup Q(\alpha)$ . Buradan,

$$M(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) \cup F(\alpha), & \alpha \in T \cap (T \setminus Z) = T \setminus Z \\ F(\alpha) \cup G(\alpha), & \alpha \in T \cap (Z \setminus T) = \emptyset \\ F(\alpha) \cup [F(\alpha) \cap G(\alpha)], & \alpha \in T \cap (T \cap Z) = T \cap Z \end{cases}$$

Böylece,

$$M(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \alpha \in T \setminus Z \\ F(\alpha), & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Buradan,  $(F, T) \cup_R [(F, T) \cap_\varepsilon (G, Z)] = (F, T)$ .

Benzer şekilde,  $(F, T) \cap_\varepsilon [(F, T) \cup_R (G, Z)] = (F, T)$ . Gerçekten,  $(F, T) \cup_R (G, Z) = (L, T \cap Z)$  olsun. Buradan,  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için,  $L(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$ .  $(F, T) \cap_\varepsilon (L, T \cap Z) = (W, T \cup (T \cap Z)) = (W, T)$  olup,  $\forall \alpha \in T$  için;

$$W(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \alpha \in T \setminus (T \cap Z) = T \setminus Z \\ L(\alpha), & \alpha \in (T \cap Z) \setminus T = \emptyset \\ F(\alpha) \cap L(\alpha), & \alpha \in T \cap (T \cap Z) = T \cap Z \end{cases}$$

Böylece,  $\forall \alpha \in T$  için;

$$W(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \alpha \in T \setminus Z \\ F(\alpha) \cap [F(\alpha) \cup G(\alpha)], & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Buradan,  $\forall \alpha \in T$  için;

$$W(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \alpha \in T \setminus Z \\ [F(\alpha), & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Yani,  $(F, T) \cap_{\varepsilon} [(F, T) \cup_R (G, Z)] = (F, T)$ . Böylece,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde  $\cap_{\varepsilon}$  ve  $\cup_R$  işlemleri için yutma kuralı geçerlidir. Burada,  $T \cap Z = \emptyset$  olsa dahi,  $\forall \alpha \in T$  için  $W(\alpha) = F(\alpha)$  olacağından, her durumda eşitlik sağlanır.

Aşağıdakiler için yutma kuralları geçerli değildir:

Bu durumlar ve ispatları, Singh ve Onyeozili (2012c) çalışmasında verilmiş olup, ispatlarda bazı matematikse yazım hataları olduğu için burada tekrar sunulmuştur.

1)  $(F, T) \cap_R [(F, T) \cup_R (G, Z)] \cong (F, T)$  ve  $(F, T) \cup_R [(F, T) \cap_R (G, Z)] \cong (F, T)$  (Singh ve Onyeozili, 2012c).

*İspat:*  $(F, T) \cap_R [(F, T) \cup_R (G, Z)]$  ele alalım.  $(F, T) \cup_R (G, Z) = (Q, T \cup Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için;  $Q(\alpha) = F(\alpha) \cup G(\alpha)$ .  $(F, T) \cap_R (Q, T \cup Z) = (M, T \cap (T \cup Z)) = (M, T \cap Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için;  $M(\alpha) = F(\alpha) \cap Q(\alpha)$ . Buradan  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  $M(\alpha) = F(\alpha) \cap [F(\alpha) \cup G(\alpha)] = F(\alpha)$ . Böylece,  $(M, T \cap Z) \cong (F, T)$ . Yani,

$$(F, T) \cap_R [(F, T) \cup_R (G, Z)] \cong (F, T).$$

Benzer şekilde,  $(F, T) \cup_R [(F, T) \cap_R (G, Z)] = (F, T)$ . Gerçekten,  $(F, T) \cap_R (G, Z) = (P, T \cap Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için;  $P(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ .  $(F, T) \cup_R (P, T \cap Z) = (S, T \cup (T \cap Z)) = (S, T \cap Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için;  $S(\alpha) = F(\alpha) \cup P(\alpha)$ . Buradan  $\forall \alpha \in T \cap Z$ ;  $S(\alpha) = F(\alpha) \cup [F(\alpha) \cap G(\alpha)] = F(\alpha)$ . Böylece,  $(S, T \cap Z) \cong (F, T)$ . Yani;

$$(F, T) \cup_R [(F, T) \cap_R (G, Z)] \cong (F, T).$$

Buradan,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde  $\cup_R$  ve  $\cap_R$  işlemleri için yutma kuralı geçerli değildir.

2)  $(F, T) \cong (F, T) \cap_{\varepsilon} [(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z)]$  ve  $(F, T) \cong (F, T) \cup_{\varepsilon} [(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z)]$  (Singh ve Onyeozili, 2012c).

*İspat:*  $(F, T) \cong (F, T) \cap_{\varepsilon} [(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z)]$  olduğunu gösterelim.  $(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z) = (Q, T \cup Z)$  olsun. Burada  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için;

$$Q(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha), & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cup G(\alpha), & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F, T) \cap_{\varepsilon} (Q, T \cup Z) = (M, T \cap (T \cup Z)) = (M, T \cap Z)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cap Z$  için;

$$M(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \alpha \in T \setminus (T \cup Z) = \emptyset \\ Q(\alpha), & \alpha \in (T \cup Z) \setminus T = Z \\ F(\alpha) \cap Q(\alpha), & \alpha \in T \cap (T \cup Z) = T \end{cases}$$

Böylece,

$$M(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \alpha \in (T \setminus Z) \setminus T = \emptyset \\ G(\alpha), & \alpha \in (Z \setminus T) \setminus T = Z \setminus T \\ F(\alpha) \cup G(\alpha), & \alpha \in (T \cap Z) \setminus T = \emptyset \\ F(\alpha) \cap F(\alpha), & \alpha \in T \cap (T \setminus Z) = T \setminus Z \\ F(\alpha) \cap G(\alpha), & \alpha \in T \cap (Z \setminus T) = \emptyset \\ F(\alpha) \cap [F(\alpha) \cup G(\alpha)], & \alpha \in T \cap (T \cap Z) = T \cap Z \end{cases}$$

Buradan,  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için;

$$M(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha), & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha), & \alpha \in T \setminus Z \\ F(\alpha), & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Buradan,  $(F, T) \cap_{\varepsilon} [(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z)] \neq (F, T)$  olup;  $\forall \alpha \in T$  için,  $F(\alpha) \subseteq M(\alpha)$  olacağından,  $(F, T) \subseteq (F, T) \cap_{\varepsilon} [(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, Z)]$ .

$(F, T) \subseteq (F, T) \cup_{\varepsilon} [(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z)]$  olduğunu gösterelim.  $(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z) = (Q, T \cup Z)$  olsun.

Burada  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için;

$$P(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \alpha \in T \setminus Z \\ G(\alpha), & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha) \cap G(\alpha), & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

$(F, T) \cup_{\varepsilon} (P, T \cup Z) = (S, T \cup (T \cup Z)) = (S, T \cup Z)$  olsun. Burada,  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için;

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \alpha \in T \setminus (T \cup Z) = \emptyset \\ P(\alpha), & \alpha \in (T \cup Z) \setminus T = Z \\ F(\alpha) \cup P(\alpha), & \alpha \in T \cap (T \cup Z) = T \end{cases}$$

Böylece,

$$S(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \alpha \in (T \setminus Z) \setminus T = \emptyset \\ G(\alpha), & \alpha \in (Z \setminus T) \setminus T = Z \setminus T \\ F(\alpha) \cap G(\alpha), & \alpha \in (T \cap Z) \setminus T = \emptyset \\ F(\alpha) \cup F(\alpha), & \alpha \in T \cap (T \setminus Z) = T \setminus Z \\ F(\alpha) \cup G(\alpha), & \alpha \in T \cap (Z \setminus T) = \emptyset \\ F(\alpha) \cup [F(\alpha) \cap G(\alpha)], & \alpha \in T \cap (T \cap Z) = T \cap Z \end{cases}$$

Buradan,  $\forall \alpha \in T \cup Z$  için;

$$S(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha), & \alpha \in Z \setminus T \\ F(\alpha), & \alpha \in T \setminus Z \\ F(\alpha), & \alpha \in T \cap Z \end{cases}$$

Buradan,  $(F, T) \cup_{\varepsilon} [(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z)] \neq (F, T)$  olup;  $\forall \alpha \in T$  için,  $F(\alpha) \subseteq S(\alpha)$  olacağından,  $(F, T) \cong (F, T) \cup_{\varepsilon} [(F, T) \cap_{\varepsilon} (G, Z)]$ .

Buradan,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde  $\cup_{\varepsilon}$  ve  $\cap_{\varepsilon}$  işlemleri için yutma kuralı geçerli değildir.

6.1.1. alt bölümündeki yutma kuralları dikkate alınır,  $S_E(U)$  kümesi üzerinde aşağıdaki yutma kuralları mevcuttur. Burada tabloda, yutma kuralı sağlanıyorsa 1; sağlanmıyorsa 0 yazılarak tablo oluşturulmuştur.

Tablo 6.1.  $S_E(U)$  Kümesi Üzerinde Yutma Kuralları (Ali ve diğerleri, 2011)

|                      | $\cap_R$ | $\cup_R$ | $\cap_{\varepsilon}$ | $\cup_{\varepsilon}$ |
|----------------------|----------|----------|----------------------|----------------------|
| $\cap_R$             | 0        | 0        | 0                    | 1                    |
| $\cup_R$             | 0        | 0        | 1                    | 0                    |
| $\cap_{\varepsilon}$ | 0        | 1        | 0                    | 0                    |
| $\cup_{\varepsilon}$ | 1        | 0        | 0                    | 0                    |

Ali ve diğerleri (2011) çalışmasında, bu tabloyu yutma kurallarının hiçbirinin ispatını yapmadan vermiştir. Biz bu çalışmada, tabloyu vermeden önce özellikleri detaylı ispatlarıyla sunduk.

### 6.1.2. $S_T(U)$ Kümesi üzerinde yutma kuralları:

1)  $S_T(U)$  kümesi üzerinde  $\cap_R$  işlemi için aşağıdaki yutma kuralları geçerlidir:

- $(F, T) \cap_R [(F, T) \cup_R (G, T)] = (F, T)$  ve  $(F, T) \cup_R [(F, T) \cap_R (G, T)] = (F, T)$ .
- $(F, T) \cap_R [(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, T)] = (F, T)$  ve  $(F, T) \cup_{\varepsilon} [(F, T) \cap_R (G, T)] = (F, T)$ .
- $(F, T) \cap_R [(F, T) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} (G, T)] = (F, T)$  ve  $(F, T) \overset{*}{\cup}_{\varepsilon} [(F, T) \cap_R (G, T)] = (F, T)$ .
- $(F, T) \cap_R [(F, T) \widetilde{\cup} (G, T)] = (F, T)$  ve  $(F, T) \widetilde{\cup} [(F, T) \cap_R (G, T)] = (F, T)$ .

*İspat:*  $S_T(U)$  kümesi üzerinde kısıtlanmış birleşim, genişletilmiş birleşim, tümleyenli genişletilmiş birleşim, esnek ikili parçalı birleşim işlemleri çakışık olduğundan ve  $S_T(U)$  kümesi üzerinde bu işlemler değişmeli olduğundan 6.1.1 (1) den ispat tamamdır.

2)  $S_T(U)$  kümesi üzerinde  $\cap_\varepsilon$  işlemi için aşağıdaki yutma kuralları geçerlidir:

- $(F, T) \cap_\varepsilon [(F, T) \cup_R (G, T)] = (F, T)$  ve  $(F, T) \cup_R [(F, T) \cap_\varepsilon (G, T)] = (F, T)$  .
- $(F, T) \cap_\varepsilon [(F, T) \cup_\varepsilon (G, T)] = (F, T)$  ve  $(F, T) \cup_\varepsilon [(F, T) \cap_\varepsilon (G, T)] = (F, T)$  .
- $(F, T) \cap_\varepsilon [(F, T) \overset{*}{\cup}_\varepsilon (G, T)] = (F, T)$  ve  $(F, T) \overset{*}{\cup}_\varepsilon [(F, T) \cap_\varepsilon (G, T)] = (F, T)$ .
- $(F, T) \cap_\varepsilon [(F, T) \widetilde{\cup}_\varepsilon (G, T)] = (F, T)$  ve  $(F, T) \widetilde{\cup}_\varepsilon [(F, T) \cap_\varepsilon (G, T)] = (F, T)$ .

*İspat:*  $S_T(U)$  kümesi üzerinde kısıtlanmış birleşim, genişletilmiş birleşim, tümleyenli genişletilmiş birleşim, esnek ikili parçalı birleşim işlemleri çakışık olduğundan ve  $S_T(U)$  kümesi üzerinde bu işlemler değişmeli olduğundan 6.1.1 (1) den ispat tamamdır.

3)  $S_T(U)$  kümesi üzerinde  $\cup_R$  işlemi için aşağıdaki yutma kuralları geçerlidir:

- $(F, T) \cup_R [(F, T) \cap_R (G, T)] = (F, T)$  ve  $(F, T) \cap_R [(F, T) \cup_R (G, T)] = (F, T)$  .
- $(F, T) \cup_R [(F, T) \cap_\varepsilon (G, T)] = (F, T)$  ve  $(F, T) \cap_\varepsilon [(F, T) \cup_R (G, T)] = (F, T)$  .
- $(F, T) \cup_R [(F, T) \overset{*}{\cap}_\varepsilon (G, T)] = (F, T)$  ve  $(F, T) \overset{*}{\cap}_\varepsilon [(F, T) \cup_R (G, T)] = (F, T)$ .
- $(F, T) \cup_R [(F, T) \widetilde{\cap}_\varepsilon (G, T)] = (F, T)$  ve  $(F, T) \widetilde{\cap}_\varepsilon [(F, T) \cup_R (G, T)] = (F, T)$ .

*İspat:*  $S_T(U)$  kümesi üzerinde kısıtlanmış kesişim, genişletilmiş kesişim, tümleyenli genişletilmiş kesişim, esnek ikili parçalı kesişim işlemleri çakışık olduğundan ve  $S_T(U)$  kümesi üzerinde bu işlemler değişmeli olduğundan 6.1.1 (2) den ispat tamamdır.

4)  $S_T(U)$  kümesi üzerinde  $\cup_\varepsilon$  işlemi için aşağıdaki yutma kuralları geçerlidir:

- $(F, T) \cup_\varepsilon [(F, T) \cap_R (G, T)] = (F, T)$  ve  $(F, T) \cap_R [(F, T) \cup_\varepsilon (G, T)] = (F, T)$  .
- $(F, T) \cup_\varepsilon [(F, T) \cap_\varepsilon (G, T)] = (F, T)$  ve  $(F, T) \cap_\varepsilon [(F, T) \cup_\varepsilon (G, T)] = (F, T)$  .
- $(F, T) \cup_\varepsilon [(F, T) \overset{*}{\cap}_\varepsilon (G, T)] = (F, T)$  ve  $(F, T) \overset{*}{\cap}_\varepsilon [(F, T) \cup_\varepsilon (G, T)] = (F, T)$ .

- $(F, T) \cup_{\varepsilon} [(F, T) \tilde{\cap} (G, T)] = (F, T)$  ve  $(F, T) \tilde{\cap} [(F, T) \cup_{\varepsilon} (G, T)] = (F, T)$ .

*İspat:*  $S_T(U)$  kümesi üzerinde kısıtlanmış birleşim, genişletilmiş birleşim, tümleyenli birleşim, esnek ikili parçalı birleşim, tümleyenli esnek ikili parçalı birleşim işlemleri çakışık olduğundan ve  $S_T(U)$  kümesi üzerinde bu işlemler değişmeli olduğundan 6.1.1 (2) den ispat tamamdır.

6.1.2. alt bölümündeki yutma kuralları dikkate alınırsa,  $S_A(U)$  kümesi üzerinde aşağıdaki yutma kuralları mevcuttur. Burada tabloda, yutma kuralı sağlanıyorsa 1; sağlanmıyorsa 0 yazılarak tablo oluşturulmuştur.

Tablo 6.2.  $S_A(U)$  Kümesi Üzerinde Yutma Kuralları

|                        | $\cap_R$ | $\cup_R$ | $\cap_{\varepsilon}$ | $\cup_{\varepsilon}$ | $\sim \cap$ | $\sim \cup$ | $* \cap_{\varepsilon}$ | $* \cup_{\varepsilon}$ |
|------------------------|----------|----------|----------------------|----------------------|-------------|-------------|------------------------|------------------------|
| $\cap_R$               | 0        | 1        | 0                    | 1                    | 0           | 1           | 0                      | 1                      |
| $\cup_R$               | 1        | 0        | 1                    | 0                    | 1           | 0           | 1                      | 0                      |
| $\cap_{\varepsilon}$   | 1        | 0        | 0                    | 1                    | 0           | 1           | 0                      | 1                      |
| $\cup_{\varepsilon}$   | 1        | 0        | 1                    | 0                    | 1           | 0           | 1                      | 0                      |
| $\sim \cap$            | 0        | 1        | 0                    | 1                    | 0           | 1           | 0                      | 1                      |
| $\sim \cup$            | 1        | 0        | 1                    | 0                    | 1           | 0           | 1                      | 0                      |
| $* \cap_{\varepsilon}$ | 0        | 1        | 0                    | 1                    | 0           | 1           | 0                      | 1                      |
| $* \cup_{\varepsilon}$ | 1        | 0        | 1                    | 0                    | 1           | 0           | 1                      | 0                      |

Bu tabloda ayrıca literatüre 2023 ve 2024 yıllarında kazandırılan güncel esnek küme işlemlerinden olan tümleyenli genişletilmiş işlemler, esnek ikili parçalı işlemler, tümleyenli esnek ikili parçalı işlemler de eklenmiştir.

Şimdi de 3. Bölüm, 4. Bölüm ve 5. Bölümdeki tüm dağılmalar dikkate alınarak,  $S_E(U)$  ve  $S_A(U)$  kümeleri üzerindeki dağılma kuralları için aşağıdaki tabloyu veriyoruz. Burada tabloda, dağılma kuralı sağlanıyorsa 1; sağlanmıyorsa 0 yazılarak tablo oluşturulmuştur. Burada şu önemli hususu belirtmekte fayda görüyoruz. Tabloda 1 yazan yerler, tam

dağılmanın yani hem sağ, hem de sol dağılmanın sağlandığını; 1\* yazan yerler ise sadece sağ dağılmanın sağlandığını, 0 yazan yerler ise ne sağ, ne de sol dağılmanın sağlandığını gösterir.

Tablo 6.3.  $S_E(U)$  Kümesi Üzerinde Dağılma Kuralları

|                         | $\cap_R$ | $\cup_R$ | $\setminus_R$ | $\Delta_R$ | $\gamma_R$ | $\cap_\varepsilon$ | $\cup_\varepsilon$ | $\setminus_\varepsilon$ | $\Delta_\varepsilon$ | $\gamma_\varepsilon$ | $\tilde{\cap}$ | $\tilde{\cup}$ | $\tilde{\setminus}$ | $\tilde{\Delta}$ | $\tilde{\gamma}$ |
|-------------------------|----------|----------|---------------|------------|------------|--------------------|--------------------|-------------------------|----------------------|----------------------|----------------|----------------|---------------------|------------------|------------------|
| $\cap_R$                | 1        | 1        | 1             | 1          | 1          | 1                  | 1                  | 1                       | 1                    | 1                    | 1              | 1              | 1                   | 1                | 1                |
| $\cup_R$                | 1        | 1        | 0             | 0          | 0          | 1                  | 1                  | 0                       | 0                    | 0                    | 1              | 1              | 0                   | 0                | 0                |
| $\setminus_R$           | 1*       | 1*       | 0             | 0          | 0          | 1*                 | 1*                 | 0                       | 0                    | 0                    | 1*             | 1*             | 0                   | 0                | 0                |
| $\cap_\varepsilon$      | 0        | 1        | 0             | 0          | 0          | 1                  | 0                  | 0                       | 0                    | 0                    | 0              | 0              | 0                   | 0                | 0                |
| $\cup_\varepsilon$      | 1        | 0        | 0             | 0          | 0          | 0                  | 1                  | 0                       | 0                    | 0                    | 0              | 0              | 0                   | 0                | 0                |
| $\setminus_\varepsilon$ | 0        | 1*       | 0             | 0          | 0          | 1*                 | 0                  | 0                       | 0                    | 0                    | 0              | 0              | 0                   | 0                | 0                |

(\*: Sadece sağdan dağılır.)

Ali ve diğerleri (2011) çalışmasında, bu tabloyu dağılma kurallarının hiçbirinin ispatını yapmadan vermiş olup; sadece dağılma sağlamayanları örneklerle göstermiştir. Biz bu çalışmada, tabloyu vermeden önce 3. Bölüm, 4. Bölüm ve 5. Bölümde detaylı ispatlarıyla sunduk. Ayrıca bu tablonun ilk satırına, literatüre 2023 ve 2024 yıllarında kazandırılan güncel esnek küme işlemlerinden olan esnek ikili parçalı işlemler de eklenmiştir.

Tablo 6.4.  $S_A(U)$  Kümesi Üzerinde Dağılma Kuralları

|                         | $\cap_R$ | $\cup_R$ | $\setminus_R$ | $\Delta_R$ | $\gamma_R$ | $\cap_\varepsilon$ | $\cup_\varepsilon$ | $\setminus_\varepsilon$ | $\Delta_\varepsilon$ | $\gamma_\varepsilon$ | $\tilde{\cap}$ | $\tilde{\cup}$ | $\tilde{\setminus}$ | $\tilde{\Delta}$ | $\tilde{\gamma}$ |
|-------------------------|----------|----------|---------------|------------|------------|--------------------|--------------------|-------------------------|----------------------|----------------------|----------------|----------------|---------------------|------------------|------------------|
| $\cap_R$                | 1        | 1        | 1             | 1          | 1          | 1                  | 1                  | 1                       | 1                    | 1                    | 1              | 1              | 1                   | 1                | 1                |
| $\cup_R$                | 1        | 1        | 0             | 0          | 0          | 1                  | 1                  | 0                       | 0                    | 0                    | 1              | 1              | 0                   | 0                | 0                |
| $\setminus_R$           | 1*       | 1*       | 0             | 0          | 0          | 1*                 | 1*                 | 0                       | 0                    | 0                    | 1*             | 1*             | 0                   | 0                | 0                |
| $\cap_\varepsilon$      | 1        | 1        | 1             | 1          | 1          | 1                  | 1                  | 1                       | 1                    | 1                    | 1              | 1              | 1                   | 1                | 1                |
| $\cup_\varepsilon$      | 1        | 1        | 0             | 0          | 0          | 1                  | 1                  | 0                       | 0                    | 0                    | 1              | 1              | 0                   | 0                | 0                |
| $\setminus_\varepsilon$ | 1*       | 1*       | 0             | 0          | 0          | 1*                 | 1*                 | 0                       | 0                    | 0                    | 1*             | 1*             | 0                   | 0                | 0                |

(\*: Sadece sağdan dağılır.)

## 6.2. Esnek Kümeler Kümesi Üzerinde Cebirsel Yapıları

Bu alt bölümde, esnek kümelerin ve esnek küme işlemlerinden olan kısıtlanmış ve genişletilmiş kesişim, kısıtlanmış ve genişletilmiş birleşim, kısıtlanmış ve genişletilmiş fark ve simetrik fark işlemlerinin  $S_E(U)$  ve  $S_A(U)$  kümeleri üzerinde sırasıyla, hangi birli ve ikili cebirsel yapılar ile kafes yapılarını oluşturduğuna detaylı şekilde bakılmıştır.

Birli cebirsel yapılar için, cebirsel yapının birim elemanı, varsa ters elemanı, yutan elemanı, idempotent ve komutatif özelliği gibi tüm özellikleri atlamadan detaylı şekilde sunulmuş olup; ikili cebirsel yapılar için ise cebirsel yapının varsa birim elemanı, birinci ve ikinci işleme göre komutatif ve idempotent özelliği, varsa sıfır elemanı gibi tüm özellikleri yine atlamadan detaylı şekilde sunulmuştur. Yine kafes yapısı oluşturanlarda ise kafesin sınırlı olup olmadığı, sınırlı ise alt sınırı üst sınırı, dağılmalı olup olmadığı, De Morgan özelliğini sağlayıp sağlamadığı gibi detaylarıyla birlikte verilmiştir.

Bu açıdan, bu çalışmanın Qin ve Hong (2010), Ali ve diğerleri (2011), Sen (2013) çalışmalarının hepsini kapsayıcı nitelikte olması açısından ve esnek küme ile yeni ilgilenmeye başlayanlar için bu çalışmanın bir el kitabı niteliğinde olması açısından, çalışmamızı oldukça önemseyeceğimizi belirtmek istiyoruz.

### 6.2.1. Esnek kümeler kümesi üzerinde birli cebirsel yapılar

Bu alt bölümde, esnek kümelerin ve esnek küme işlemlerinden olan kısıtlanmış ve genişletilmiş kesişim, kısıtlanmış ve genişletilmiş birleşim, kısıtlanmış ve genişletilmiş fark ve simetrik fark işlemlerinin  $S_E(U)$  ve  $S_A(U)$  kümeleri üzerinde, hangi birli cebirsel yapılar oluşturduğuna bakılmıştır.

$S_E(U)$  kümesi üzerinde birli cebirsel yapılar:

Burada, esnek işlemlerin ve işlemlerin  $S_E(U)$  kümesi üzerinde hangi birli cebirsel yapılar oluşturduğuna bakılmıştır.

(F,T), (G,Z) ve (H,M),  $S_E(U)$  kümesinin elemanları olmak üzere,

- 1)  $(S_E(U), \cup_R)$  cebirsel yapısı birimi  $\emptyset_E$ , yutan elemanı  $\emptyset_\emptyset$  olan komutatif idempotent bir monoiddir, yani sınırlı bir yarı-kafestir.
- 2)  $(S_E(U), \cap_R)$  cebirsel yapısı birimi  $U_E$ , yutan elemanı  $\emptyset_\emptyset$  olan komutatif idempotent bir monoiddir, yani sınırlı bir yarı-kafestir.
- 3)  $(S_E(U), \setminus_R)$  cebirsel yapısı sağ birimi  $\emptyset_E$ , yutan elemanı  $\emptyset_\emptyset$  olan komutatif ve idempotent olmayan bir magmadır.
- 4)  $(S_E(U), \Delta_R)$  cebirsel yapısı birimi  $\emptyset_E$  olan idempotent olmayan, komutatif bir monoiddir (Sezgin ve Çağman, 2024a).
- 5)  $(S_E(U), \cup_\varepsilon)$  cebirsel yapısı birimi  $\emptyset_\emptyset$ , yutan elemanı  $U_E$  olan komutatif idempotent bir monoiddir, yani sınırlı bir yarı-kafestir.
- 6)  $(S_E(U), \cap_\varepsilon)$  cebirsel yapısı birimi  $\emptyset_\emptyset$ , yutan elemanı  $\emptyset_E$  olan komutatif idempotent bir monoiddir, yani sınırlı bir yarı-kafestir.
- 7)  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  şartı altında  $(S_E(U), \setminus_\varepsilon)$  cebirsel yapısı birimi  $\emptyset_\emptyset$ , sol yutan elemanı  $\emptyset_E$  olan, komutatif ve idempotent olmayan bir monoiddir.
- 8)  $(S_E(U), \Delta_\varepsilon)$  cebirsel yapısı birimi  $\emptyset_\emptyset$  olan, idempotent olmayan, komutatif bir monoiddir (Sezgin ve Çağman, 2024a).

#### $S_A(U)$ kümesi üzerinde birli cebirsel yapılar:

Burada, esnek kümelerin ve esnek küme işlemlerinden olan kısıtlanmış ve genişletilmiş kesişim, kısıtlanmış ve genişletilmiş birleşim, kısıtlanmış ve genişletilmiş fark ve simetrik fark işlemlerinin  $S_A(U)$  kümesi üzerinde, hangi birli cebirsel yapılar oluşturduğuna bakılmıştır.

- 1) Çakışık olan  $(S_A(U), \cup_R)$ ,  $(S_A(U), \cup_\varepsilon)$  cebirsel yapısı birimi  $\emptyset_A$ , yutan elemanı  $U_A$  olan komutatif idempotent bir monoid, yani sınırlı bir yarı-kafestir.

2) Çakışık olan  $(S_A(U), \cap_R), (S_A(U), \cap_\varepsilon)$  cebirsel yapısı birimi  $U_A$ , yutan elemanı  $\emptyset_A$  olan komutatif idempotent bir monoid, yani sınırlı bir yarı-kafestir.

3) Çakışık olan  $(S_A(U), \setminus_R), (S_A(U), \setminus_\varepsilon)$  cebirsel yapısı sağ birimi  $\emptyset_A$ , sol yutan elemanı  $\emptyset_A$  olan komutatif ve idempotent olmayan bir magmadır.

4) Çakışık olan  $(S_A(U), \setminus_R), (S_A(U), \setminus_R)$  cebirsel yapısı  $\emptyset_A$  sabitiyle her bir elemanı involusyon olan sınırlı bir BCK-cebiridir.

5) Çakışık olan  $(S_A(U), \Delta_R), (S_A(U), \Delta_\varepsilon)$  cebirsel yapısı birimi  $\emptyset_A$  ve her elemanın tersi kendisi olan, idempotent olmayan, değişmeli bir gruptur (Sezgin ve Çağman, 2024a).

### 6.2.2. Esnek kümeler kümesi üzerinde ikili cebirsel yapılar

Bu alt bölümde, esnek kümelerin ve esnek küme işlemlerinden olan kısıtlanmış ve genişletilmiş kesişim, kısıtlanmış ve genişletilmiş birleşim, kısıtlanmış ve genişletilmiş fark ve simetrik fark işlemlerinin  $S_E(U)$  ve  $S_A(U)$  kümeleri üzerinde hangi ikili cebirsel yapılar oluşturduğuna bakılmıştır.

#### $S_E(U)$ kümesi üzerinde ikili cebirsel yapılar:

Burada, esnek kümelerin ve esnek küme işlemlerinden olan kısıtlanmış ve genişletilmiş kesişim, kısıtlanmış ve genişletilmiş birleşim, kısıtlanmış ve genişletilmiş fark ve simetrik fark işlemlerinin  $S_E(U)$  kümesi üzerinde hangi ikili cebirsel yapılar oluşturduğuna bakılmıştır. İkinci işlem sırasıyla literatürde var olan esnek küme işlemleri alınarak bu şekilde sistematik bir sırayla, tek tek bütün ikili cebirsel yapılar tek tek taranmıştır. Ayrıca, Ali ve diğerleri (2011) çalışmasında yer alan 4 tane matematiksel olarak hatalı cebirsel yapılar da düzeltilmiştir.

#### i) $S_E(U)$ kümesi üzerinde ikinci işlemi kısıtlanmış kesişim yani $\cap_R$ olan ikili cebirsel yapılar:

$(F,T), (G,Z)$  ve  $(H,M)$ ,  $S_E(U)$  kümesinin elemanları olmak üzere,

1)  $(S_E(U), \cap_R, \cap_R)$  cebirsel yapısı birimi  $U_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent, sıfırsız bir yarı-halkadır.

2)  $(S_E(U), \cup_R, \cap_R)$  cebirsel yapısı birimi  $U_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent, sıfırsız bir yarı-halkadır.

3)  $(S_E(U), \Delta_R, \cap_R)$  cebirsel yapısı birimi  $U_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif, çarpımsal idempotent, sıfırsız bir yarı-halkadır.

4)  $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \cap_R)$  cebirsel yapısı birimi  $U_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent bir yarı-halkadır. Üstelik,  $(F, A) \cap_\varepsilon \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \cap_\varepsilon (F, A) = (F, A)$  ve  $(F, A) \cap_R \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \cap_R (F, A) = \emptyset_\emptyset$  olduğundan,  $\emptyset_\emptyset$  cebirsel yapının sıfırı olup,  $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \cap_R)$  cebirsel yapısı bir hemihalkadır.

5)  $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \cap_R)$  cebirsel yapısı birimi  $U_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif, idempotent bir yarı-halkadır. Üstelik,  $(F, A) \cup_\varepsilon \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \cup_\varepsilon (F, A) = (F, A)$  ve  $(F, A) \cap_R \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \cap_R (F, A) = \emptyset_\emptyset$  olduğundan,  $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \cap_R)$  cebirsel yapısı bir hemihalkadır (Ali ve diğerleri, 2011).

6)  $(S_E(U), \Delta_\varepsilon, \cap_R)$  cebirsel yapısı, birimi  $U_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif, çarpımsal idempotent bir yarı-halkadır. Üstelik,  $(F, A) \Delta_\varepsilon \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \Delta_\varepsilon (F, A) = (F, A)$  ve  $(F, A) \cap_R \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \cap_R (F, A) = \emptyset_\emptyset$  olduğundan,  $(S_E(U), \Delta_\varepsilon, \cap_R)$  cebirsel yapısı bir hemihalkadır (Sezgin ve Çağman, 2024a).

7)  $(S_E(U), \setminus_\varepsilon, \cap_R)$  cebirsel yapısı,  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  şartı altında, birimi  $U_E$  olan, çarpımsal komutatif ve çarpımsal idempotent bir yarı-halkadır.  $(F, A) \setminus_\varepsilon \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \setminus_\varepsilon (F, A) = (F, A)$  ve  $(F, A) \cap_R \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \cap_R (F, A) = \emptyset_\emptyset$  olmasına rağmen cebirsel yapısı toplamsal komutatif olmadığı için  $(S_E(U), \setminus_\varepsilon, \cap_R)$  bir hemihalka olamaz.

8)  $(S_E(U), \gamma_\varepsilon, \cap_R)$  cebirsel yapısı,  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  şartı altında, birimi  $U_E$  olan, çarpımsal komutatif ve çarpımsal idempotent bir yarı-halkadır.  $(F, A) \gamma_\varepsilon \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \gamma_\varepsilon (F, A) = (F, A)$  ve  $(F, A) \cap_R \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \cap_R (F, A) = \emptyset_\emptyset$  olmasına rağmen cebirsel yapısı toplamsal komutatif olmadığı için,  $(S_E(U), \gamma_\varepsilon, \cap_R)$  hemihalka olamaz.

9)  $(S_E(U), +_\varepsilon, \cap_R)$  cebirsel yapısı,  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  şartı altında, birimi  $U_E$  olan, çarpımsal komutatif ve çarpımsal idempotent bir yarı-halkadır.  $(F, A) +_\varepsilon \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset +_\varepsilon (F, A) = (F, A)$  ve  $(F, A) \cap_R \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \cap_R (F, A) = \emptyset_\emptyset$  olmasına rağmen cebirsel yapısı toplamsal komutatif olmadığı için  $(S_E(U), +_\varepsilon, \cap_R)$  hemihalka olamaz.

10)  $(S_E(U), \lambda_\varepsilon, \cap_R)$  cebirsel yapısı,  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  şartı altında, birimi  $U_E$  olan, çarpımsal komutatif ve çarpımsal idempotent bir yarı-halkadır.  $(F, A) \lambda_\varepsilon \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \lambda_\varepsilon (F, A) = (F, A)$  ve  $(F, A) \cap_R \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \cap_R (F, A) = \emptyset_\emptyset$  olmasına rağmen cebirsel yapısı toplamsal komutatif olmadığı için,  $(S_E(U), \lambda_\varepsilon, \cap_R)$  hemihalka olamaz.

11)  $(S_E(U), \theta_\varepsilon, \cap_R)$  cebirsel yapısı,  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  şartı altında, birimi  $U_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve çarpımsal idempotent bir yarı-halkadır. Üstelik,  $(F, A) \theta_\varepsilon \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \theta_\varepsilon (F, A) = (F, A)$  ve  $(F, A) \cap_R \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \cap_R (F, A) = \emptyset_\emptyset$  olduğundan,  $(S_E(U), \theta_\varepsilon, \cap_R)$  cebirsel yapısı,  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  şartı altında bir hemihalkadır.

12)  $(S_E(U), *_\varepsilon, \cap_R)$  cebirsel yapısı,  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  şartında, birimi  $U_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve çarpımsal idempotent bir yarı-halkadır. Üstelik,  $(F, A) *_\varepsilon \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset *_\varepsilon (F, A) = (F, A)$  ve  $(F, A) \cap_R \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \cap_R (F, A) = \emptyset_\emptyset$  olduğundan,  $(S_E(U), *_\varepsilon, \cap_R)$  cebirsel yapısı,  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  şartı altında bir hemihalkadır.

13)  $(S_E(U), \widetilde{\cap}, \cap_R)$  cebirsel yapısı,  $T \cap Z' \cap M = \emptyset$  şartı altında, birimi  $U_E$  olan, çarpımsal komutatif, toplamsal ve çarpımsal idempotent bir yarı-halkadır.

14)  $(S_E(U), \widetilde{\cup}, \cap_R)$  cebirsel yapısı,  $T \cap Z' \cap M = \emptyset$  şartı altında, birimi  $U_E$  olan çarpımsal komutatif, toplamsal ve çarpımsal idempotent bir yarı-halkadır.

15)  $(S_E(U), \widetilde{\Delta}, \cap_R)$  cebirsel yapısı,  $T \cap Z' \cap M = \emptyset$  şartı altında, birimi  $U_E$  olan, çarpımsal komutatif, çarpımsal idempotent bir yarı-halkadır (Sezgin ve Yavuz, 2023a).

16)  $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \cap_R)$  cebirsel yapısı, alt sınırı  $\emptyset_\emptyset$ , üst sınırı  $U_E$  olan sınırlı dağılmalı bir kafestir. Gerçekten, 3. Ve 4. Bölümde  $(S_E(U), \cup_\varepsilon)$  ve  $(S_E(U), \cap_R)$  cebirsel yapılarının komutatif idempotent monoid olduğu ve  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\cup_\varepsilon$  ve  $\cap_R$  işlemlerinin

yutan kuralını ve kısıtlanmış kesişim işleminin, genişletilmiş birleşim işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliklerini sağladığı sırasıyla Tablo 1 ve Tablo 3 de gösterilmiştir.  $(F,A) \cup_{\varepsilon} (F,A)^r \neq U_E$  ve  $(F,A) \cap_R (F,A)^r \neq \emptyset$  olduğundan,  $(S_E(U), \cup_{\varepsilon}, \cap_R)$  cebirsel yapısı, tümlemeli olmayan, sınırlı ve dağılmalı bir kafestir; dolayısıyla bir Bool cebiri değildir (Qin ve Hong, 2010; Ali ve diğerleri, 2011).

Bu alt bölümde, daha önceki bir çalışmada yapılan bir hatayı da düzeltmek istiyoruz. Ali ve diğerleri (2011),  $(S_E(U), \cup_R, \cap_R)$  cebirsel yapısının birimi  $U_E$  olan bir hemihalka olduğunu ifade etmişlerdir. Fakat  $(F,A) \cup_R \emptyset_E = \emptyset_E \cup_R (F,A) = (F,A)$  ve  $(F,A) \cap_R \emptyset_E = \emptyset_E \cap_R (F,A) \neq \emptyset_E$  olduğundan (Çünkü  $(F,A) \cap_R \emptyset_E = \emptyset_E \cap_R (F,A) = \emptyset_A$ )  $(S_E(U), \cup_R, \cap_R)$  cebirsel yapısı bir hemihalka olmaz.

ii)  $S_E(U)$  kümesi üzerinde ikinci işlemi genişletilmiş kesişim yani  $\cap_{\varepsilon}$  olan  $S_E(U)$  kümesi üzerinde ikili cebirsel yapılar:

$(F,T)$ ,  $(G,Z)$  ve  $(H,M)$ ,  $S_E(U)$  kümesinin elemanları olmak üzere,

1)  $(S_E(U), \cup_R, \cap_{\varepsilon})$  cebirsel yapısı birimi  $U_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent, bir yarı-halkadır. Üstelik,  $(F,A) \cup_R \emptyset_E = \emptyset_E \cup_R (F,A) = (F,A)$  ve  $(F,A) \cap_{\varepsilon} \emptyset_E = \emptyset_E \cap_{\varepsilon} (F,A) = \emptyset_E$  olduğundan,  $(S_E(U), \cup_R, \cap_{\varepsilon})$  cebirsel yapısı bir hemihalkadır (Ali ve diğerleri, 2011).

2)  $(S_E(U), \cap_{\varepsilon}, \cap_{\varepsilon})$  cebirsel yapısı birimi  $U_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent, sıfırsız bir yarı-halkadır.

3)  $(S_E(U), \tilde{\cup}, \cap_{\varepsilon})$  cebirsel yapısı,  $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$  şartı altında birimi  $U_E$  olan, çarpımsal komutatif, toplamsal ve çarpımsal idempotent, sıfırsız bir yarı-halkadır.

4)  $(S_E(U), \tilde{\cap}, \cap_{\varepsilon})$  cebirsel yapısı,  $(T \Delta Z) \cap M = \emptyset$  şartı altında birimi  $U_E$  olan, çarpımsal komutatif, toplamsal ve çarpımsal idempotent, sıfırsız bir yarı-halkadır.

5)  $(S_E(U), \cup_R, \cap_\varepsilon)$  cebirsel yapısı, alt sınırı  $\emptyset_E$ , üst sınırı  $\emptyset_\emptyset$  olan sınırlı dağılmalı bir kafestir. Gerçekten, 3. Ve 4. Bölümde  $(S_E(U), \cup_R)$  ve  $(S_E(U), \cap_\varepsilon)$  cebirsel yapılarının komutatif idempotent monoid olduğu ve  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\cup_R$  ve  $\cap_\varepsilon$  işlemlerinin yutan kuralını sağladığı ve genişletilmiş kesişim işleminin kısıtlanmış birleşim işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliğini sağladığı Tablo 1 ve Tablo 3 de gösterilmiştir.  $(F,A) \cup_R (F,A)^r \neq \emptyset_\emptyset$  ve  $(F,A) \cap_\varepsilon (F,A)^r \neq U_E$  olduğundan,  $(S_E(U), \cup_R, \cap_\varepsilon)$  cebirsel yapısı, tümlemeli olmayan, sınırlı ve dağılmalı bir kafestir; dolayısıyla bir Bool cebiri değildir (Qin ve Hong, 2010; Ali ve diğerleri, 2011). (Not: Ali ve diğerleri (2011), son kısmı yazım hatası ile çalışmasında,  $(F,A) \cup_R (F,A)^r \neq U_E$  ve  $(F,A) \cap_\varepsilon (F,A)^r \neq \emptyset_\emptyset$  yazmıştır.)

Bu alt bölümde, daha önceki bir çalışmada yapılan bir hatayı da düzeltmek istiyoruz. Ali ve diğerleri (2011),  $(S_E(U), \cap_R, \cap_\varepsilon)$  cebirsel yapısının birimi  $\emptyset_\emptyset$  olan bir hemihalka olduğunu ifade etmişlerdir. Fakat  $(F,A) \cap_R U_E = U_E \cap_R (F,A) = (F,A)$  ve  $(F,A) \cap_\varepsilon U_E = U_E \cap_\varepsilon (F,A) \neq U_E$  olduğundan,  $(S_E(U), \cap_R, \cap_\varepsilon)$  cebirsel yapısı bir hemihalka olmaz.

iii)  $S_E(U)$  kümesi üzerinde ikinci işlemi kısıtlanmış birleşim yani  $\cup_R$  olan ikili cebirsel yapılar:

$(F,T)$ ,  $(G,Z)$  ve  $(H,M)$ ,  $S_E(U)$  kümesinin elemanları olmak üzere,

1)  $(S_E(U), \cup_R, \cup_R)$  cebirsel yapısı birimi  $\emptyset_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent, sıfırsız bir yarı-halkadır.

2)  $(S_E(U), \cap_R, \cup_R)$  cebirsel yapısı birimi  $\emptyset_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent bir yarı-halkadır.

3)  $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \cup_R)$  cebirsel yapısı birimi  $\emptyset_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent bir yarı-halkadır. Üstelik,  $(F,A) \cap_\varepsilon \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \cap_\varepsilon (F,A) = (F,A)$  ve  $(F,A) \cup_R \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \cup_R (F,A) = \emptyset_\emptyset$  olduğundan,  $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \cup_R)$  cebirsel yapısı bir hemihalkadır (Ali ve diğerleri, 2011).

4)  $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \cup_R)$  cebirsel yapısı birimi  $\emptyset_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent bir yarı-halkadır. Üstelik,  $(F,A) \cup_\varepsilon \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \cup_\varepsilon (F,A) = (F,A)$  ve  $(F,A) \cup_R \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \cup_R (F,A) = \emptyset_\emptyset$  olduğundan,  $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \cup_R)$  cebirsel yapısı bir hemihalkadır.

5)  $(S_E(U), \Delta_\varepsilon, \cup_R)$  cebirsel yapısı, birimi  $\emptyset_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif, çarpımsal idempotent bir yarı-halkadır. Üstelik,  $(F,A) \Delta_\varepsilon \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \Delta_\varepsilon (F,A) = (F,A)$  ve  $(F,A) \cup_R \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \cup_R (F,A) = \emptyset_\emptyset$  olduğundan,  $(S_E(U), \Delta_\varepsilon, \cup_R)$  bir hemihalkadır.

6)  $(S_E(U), \setminus_\varepsilon, \cup_R)$  cebirsel yapısı,  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  şartı altında, birimi  $\emptyset_E$  olan, çarpımsal komutatif ve çarpımsal idempotent bir yarı-halkadır.  $(F,A) \setminus_\varepsilon \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \setminus_\varepsilon (F,A) = (F,A)$  ve  $(F,A) \cup_R \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \cup_R (F,A) = \emptyset_\emptyset$  olmasına rağmen cebirsel yapısı toplamsal komutatif olmadığı için,  $(S_E(U), \setminus_\varepsilon, \cup_R)$  hemihalka olamaz.

7)  $(S_E(U), \gamma_\varepsilon, \cup_R)$  cebirsel yapısı,  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  şartı altında, birimi  $\emptyset_E$  olan, çarpımsal komutatif ve çarpımsal idempotent bir yarı-halkadır.  $(F,A) \gamma_\varepsilon \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \gamma_\varepsilon (F,A) = (F,A)$  ve  $(F,A) \cup_R \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \cup_R (F,A) = \emptyset_\emptyset$  olmasına rağmen cebirsel yapısı toplamsal komutatif olmadığı için,  $(S_E(U), \gamma_\varepsilon, \cup_R)$  hemihalka olamaz.

8)  $(S_E(U), +_\varepsilon, \cup_R)$  cebirsel yapısı,  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  şartı altında, birimi  $\emptyset_E$  olan, çarpımsal komutatif ve çarpımsal idempotent bir yarı-halkadır.  $(F,A) +_\varepsilon \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset +_\varepsilon (F,A) = (F,A)$  ve  $(F,A) \cup_R \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \cup_R (F,A) = \emptyset_\emptyset$  olmasına rağmen cebirsel yapısı toplamsal komutatif olmadığı için,  $(S_E(U), +_\varepsilon, \cup_R)$  bir hemihalka olamaz.

9)  $(S_E(U), \lambda_\varepsilon, \cup_R)$  cebirsel yapısı,  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  şartı altında, birimi  $U_E$  olan, çarpımsal komutatif ve çarpımsal idempotent bir yarı-halkadır.  $(F,A) \lambda_\varepsilon \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \lambda_\varepsilon (F,A) = (F,A)$  ve  $(F,A) \cup_R \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \cup_R (F,A) = \emptyset_\emptyset$  olmasına rağmen cebirsel yapısı toplamsal komutatif olmadığı için  $(S_E(U), \lambda_\varepsilon, \cup_R)$  bir hemihalka olamaz.

10)  $(S_E(U), \theta_\varepsilon, \cup_R)$  cebirsel yapısı,  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  şartı altında, birimi  $U_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve çarpımsal idempotent bir yarı-halkadır. Üstelik,  $(F,A) \theta_\varepsilon \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \theta_\varepsilon (F,A) = (F,A)$  ve  $(F,A) \cup_R \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \cup_R (F,A) = \emptyset_\emptyset$  olduğundan,  $(S_E(U), \theta_\varepsilon, \cup_R)$  cebirsel yapısı,  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  şartı altında bir hemihalkadır.

11)  $(S_E(U), *_\varepsilon, \cup_R)$  cebirsel yapısı,  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  şartı altında, birimi  $U_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve çarpımsal idempotent bir yarı-halkadır. Üstelik,  $(F,A) *_\varepsilon \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset *_\varepsilon (F,A) = (F,A)$  ve  $(F,A) \cup_R \emptyset_\emptyset = \emptyset_\emptyset \cup_R (F,A) = \emptyset_\emptyset$  olduğundan,  $(S_E(U), *_\varepsilon, \cup_R)$  cebirsel yapısı,  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  şartı altında bir hemihalkadır.

12)  $(S_E(U), \tilde{\cup}, \cup_R)$  cebirsel yapısı,  $T \cap Z' \cap M = \emptyset$  şartı altında, birimi  $\emptyset_E$  olan, çarpımsal komutatif, idempotent, sıfırsız bir yarı-halkadır.

13)  $(S_E(U), \tilde{\cap}, \cup_R)$  cebirsel yapısı,  $T \cap Z' \cap M = \emptyset$  şartı altında, birimi  $\emptyset_E$  olan çarpımsal komutatif, idempotent, sıfırsız bir yarı-halkadır.

14)  $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \cup_R)$  cebirsel yapısı, alt sınırı  $\emptyset_\emptyset$ , üst sınırı  $\emptyset_E$  olan sınırlı dağılmalı bir kafestir. Gerçekten, 3. Ve 4. Bölümde  $(S_E(U), \cap_\varepsilon)$  ve  $(S_E(U), \cup_R)$  cebirsel yapılarının komutatif idempotent monoid olduğu ve  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\cap_\varepsilon$  ve  $\cup_R$  işlemlerinin yutan kuralını ve kısıtlanmış birleşimin genişletilmiş kesişime sağdan ve soldan dağıldığı sırasıyla Tablo 1 ve Tablo 3 de gösterilmiştir.  $(F,A) \cap_\varepsilon (F,A)^r \neq \emptyset_E$  ve  $(F,A) \cup_R (F,A)^r \neq \emptyset_\emptyset$  olduğundan,  $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \cup_R)$  cebirsel yapısı, tümlemeli olmayan, sınırlı ve dağılmalı bir kafestir; dolayısıyla. bir Bool cebiri değildir.

Bu alt bölümde, daha önceki bir çalışmada yapılan bir hatayı da düzeltmek istiyoruz. Ali ve diğerleri (2011),  $(S_E(U), \cap_R, \cup_R)$  cebirsel yapısının birimi  $U_E$  olan bir hemihalka olduğunu ifade etmişlerdir. Fakat  $(F,A) \cap_R U_E = U_E \cap_R (F,A) = (F,A)$  ve  $(F,A) \cup_R U_E = U_E \cup_R (F,A) \neq U_E$  olduğundan (Çünkü  $(F,A) \cup_R U_E = U_E \cup_R (F,A) = U_A$ )  $(S_E(U), \cap_R, \cup_R)$  cebirsel yapısı bir hemihalka olmaz.

iv)  $S_E(U)$  kümesi üzerinde ikinci işlemi genişletilmiş birleşim yani  $\cup_\varepsilon$  olan ikili cebirsel yapılar:

$(F,T)$ ,  $(G,Z)$  ve  $(H,M)$ ,  $S_E(U)$  kümesinin elemanları olmak üzere,

1)  $(S_E(U), \cap_R, \cup_\varepsilon)$  cebirsel yapısı birimi  $\emptyset_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif idempotent, bir yarı-halkadır. Üstelik,  $(F,A) \cap_R U_E = U_E \cap_R (F,A) = (F,A)$  ve

$(F,A) \cup_{\varepsilon} U_E = U_E \cup_{\varepsilon} (F,A) = U_E$  olduğundan,  $(S_E(U), \cap_R, \cup_{\varepsilon})$  cebirsel yapısı bir hemihalkadır (Ali ve diğerleri, 2011).

2)  $(S_E(U), \cup_{\varepsilon}, \cup_{\varepsilon})$  cebirsel yapısı birimi  $\emptyset_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent, sıfırsız bir yarı-halkadır.

3)  $(S_E(U), \widetilde{\cap}, \cup_{\varepsilon})$  cebirsel yapısı,  $T \cap (Z \Delta M) = \emptyset$  şartı altında birimi  $\emptyset_E$  olan, çarpımsal komutatif, toplamsal ve çarpımsal idempotent, sıfırsız bir yarı-halkadır.

4)  $(S_E(U), \widetilde{\cup}, \cup_{\varepsilon})$  cebirsel yapısı,  $(T \Delta Z) \cap M = \emptyset$  şartı altında birimi  $\emptyset_E$  olan, çarpımsal komutatif, toplamsal ve çarpımsal idempotent, sıfırsız bir yarı-halkadır.

5)  $(S_E(U), \cap_R, \cup_{\varepsilon})$  cebirsel yapısı, alt sınırı  $U_E$ , üst sınırı  $\emptyset_{\emptyset}$  olan sınırlı dağılmalı bir kafestir. Gerçekten, 3. Ve 4. Bölümde  $(S_E(U), \cap_R)$  ve  $(S_E(U), \cup_{\varepsilon})$  cebirsel yapılarının komutatif idempotent monoid olduğu ve  $S_E(U)$  kümesi üzerinde,  $\cap_R$  ve  $\cup_{\varepsilon}$  işlemlerinin yutan kuralını sağladığı, genişletilmiş birleşim işleminin kısıtlanmış kesişime sağdan ve soldan dağıldığı sağladığı sırasıyla Tablo 1 ve Tablo 3 de gösterilmiştir.  $(F,A) \cap_R (F,A)^r \neq \emptyset_{\emptyset}$  ve  $(F,A) \cup_{\varepsilon} (F,A)^r \neq U_E$  olduğundan,  $(S_E(U), \cap_R, \cup_{\varepsilon})$  cebirsel yapısı, tümlemeli olmayan, sınırlı ve dağılmalı bir kafestir; dolayısıyla bir Bool cebiri değildir (Qin ve Hong, 2010; Ali ve diğerleri, 2011).

Bu alt bölümde, daha önceki bir çalışmada yapılan bir hatayı da düzeltmek istiyoruz. Ali ve diğerleri (2011),  $(S_E(U), \cup_R, \cup_{\varepsilon})$  cebirsel yapısının birimi  $\emptyset_{\emptyset}$  olan bir hemihalka olduğunu ifade etmişlerdir. Fakat  $(F,A) \cup_R \emptyset_E = \emptyset_E \cup_R (F,A) = (F,A)$  ve  $(F,A) \cup_{\varepsilon} \emptyset_E = \emptyset_E \cup_{\varepsilon} (F,A) \neq \emptyset_E$  olduğundan  $(S_E(U), \cup_R, \cup_{\varepsilon})$  cebirsel yapısı bir hemihalka olmaz.

v)  $S_E(U)$  kümesi üzerinde ikinci işlemi genişletilmiş fark yani  $\setminus_{\varepsilon}$  olan ikili cebirsel yapılar:

$(F,T)$ ,  $(G,Z)$  ve  $(H,M)$ ,  $S_E(U)$  kümesinin elemanları olmak üzere,

1)  $(S_E(U), \cup_R, \setminus_{\varepsilon})$  cebirsel yapısı,  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  şartı altında, birimi  $\emptyset_{\emptyset}$  olan, toplamsal komutatif ve toplamsal idempotent bir sağ yarı yakın-halkadır. Üstelik,

$(F,A) \cup_R \emptyset_E = \emptyset_E \cup_R (F,A) = (F,A)$  ve  $\emptyset_E \setminus_\varepsilon (F,A) = \emptyset_E$  olduğundan, cebirsel yapımız sıfırlıdır. Fakat;  $(F,A) \setminus_\varepsilon \emptyset_E \neq \emptyset_E$  olduğundan, sağ yarı yakın-halka sıfırlıdır fakat sıfır simetrik değildir.

$(S_E(U), \cup_R, \setminus_\varepsilon)$  cebirsel yapısının,  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  şartı altında, birimi  $\emptyset_\emptyset$  olan, toplamsal komutatif ve toplamsal idempotent, sıfırsız bir yarı-halka olduğu da söylenebilir.

2)  $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \setminus_\varepsilon)$  cebirsel yapısı,  $T \cap Z \cap M = \emptyset$  şartı altında, birimi birimi  $\emptyset_\emptyset$  olan, toplamsal komutatif ve toplamsal idempotent, sıfırsız bir yarı-halkadır.

$S_A(U)$  kümesi üzerinde ikili cebirsel yapılar:

Burada, esnek kümelerin esnek küme işlemlerinden olan kısıtlanmış ve genişletilmiş kesişim, kısıtlanmış ve genişletilmiş birleşim, kısıtlanmış ve genişletilmiş fark ve simetrik fark işlemlerinin,  $S_A(U)$  kümesi üzerinde hangi ikili cebirsel yapılar oluşturduğuna bakılmıştır.

i) İkinci işlemi kısıtlanmış kesişim yani  $\cap_R$  olan  $S_A(U)$  kümesi üzerindeki ikili cebirsel yapılar:

1) Çakışık olan  $(S_A(U), \cap_R, \cap_R)$ ,  $(S_A(U), \cap_\varepsilon, \cap_R)$ ,  $(S_A(U), \tilde{\cap}, \cap_R)$  cebirsel yapısı birimi  $U_A$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent, sıfırsız bir yarı-halkadır.

2)  $(S_A(U), \cup_R, \cap_R)$  cebirsel yapısı birimi  $U_A$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent bir yarı-halkadır.

Üstelik,  $(F,A) \cup_R \emptyset_A = \emptyset_A \cup_R (F,A) = (F,A)$  ve  $(F,A) \cap_R \emptyset_A = \emptyset_A \cap_R (F,A) = \emptyset_A$  olduğundan,  $(S_A(U), \cup_R, \cap_R)$  cebirsel yapısı bir hemihalkadır (Ali ve diğerleri, 2011).

3)  $(S_A(U), \Delta_R, \cap_R)$  cebirsel yapısı birimi  $U_A$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif, çarpımsal idempotent bir yarı-halkadır.

Üstelik,  $(F,A) \Delta_R \emptyset_A = \emptyset_A \Delta_R (F,A) = (F,A)$  ve  $(F,A) \cap_R \emptyset_A = \emptyset_A \cap_R (F,A) = \emptyset_A$  olduğundan,  $(S_A(U), \Delta_R, \cap_R)$  cebirsel yapısı bir hemihalkadır.

Ayrıca,  $(S_A(U), \Delta_R, \cap_R)$  cebirsel yapısı, birimli bir halka olup,  $(F,A)^2 = (F,A) \cap_R (F,A)$  olduğundan  $(S_A(U), \Delta_R, \cap_R)$  bir Bool Halkasıdır.  $(F,A) \Delta_R (F,A) = \emptyset_A$  ve  $(F,A) \cap_R (G,A) = (G,A) \cap_R (F,A)$  olması,  $(S_A(U), \Delta_R, \cap_R)$  cebirsel yapısının bir Bool halkası olmasının doğal sonucudur (Eren, 2019).

4)  $(S_A(U), \cup_\varepsilon, \cap_R)$  cebirsel yapısı birimi  $U_A$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent bir yarı-halkadır. Üstelik,  $(F,A) \cup_\varepsilon \emptyset_A = \emptyset_A \cup_\varepsilon (F,A) = (F,A)$  ve  $(F,A) \cap_R \emptyset_A = \emptyset_A \cap_R (F,A) = \emptyset_A$  olduğundan,  $(S_A(U), \cup_\varepsilon, \cap_R)$  cebirsel yapısı bir hemihalkadır.

5)  $(S_A(U), \Delta_\varepsilon, \cap_R)$  cebirsel yapısı, birimi  $U_A$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif, çarpımsal idempotent bir yarı-halkadır. Üstelik,  $(F,A) \Delta_\varepsilon \emptyset_A = \emptyset_A \Delta_\varepsilon (F,A) = (F,A)$  ve  $(F,A) \cap_R \emptyset_A = \emptyset_A \cap_R (F,A) = \emptyset_A$  olduğundan,  $(S_A(U), \Delta_\varepsilon, \cap_R)$  cebirsel yapısı bir hemihalkadır (Sezgin ve Çağman, 2024a).

6)  $(S_A(U), \tilde{\cup}, \cap_R)$  cebirsel yapısı, birimi  $U_A$  olan toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent bir yarı-halkadır. Üstelik,  $(F,A) \tilde{\cup} \emptyset_A = \emptyset_A \tilde{\cup} (F,A) = (F,A)$  ve  $(F,A) \cap_R \emptyset_A = \emptyset_A \cap_R (F,A) = \emptyset_A$  olduğundan,  $(S_A(U), \tilde{\cup}, \cap_R)$  cebirsel yapısı bir hemihalkadır.

7)  $(S_A(U), \tilde{\Delta}, \cap_R)$  cebirsel yapısı, birimi  $U_A$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif, çarpımsal idempotent bir yarı-halkadır. Üstelik,  $(F,A) \tilde{\Delta} \emptyset_A = \emptyset_A \tilde{\Delta} (F,A) = (F,A)$  ve  $(F,A) \cap_R \emptyset_A = \emptyset_A \cap_R (F,A) = \emptyset_A$  olduğundan,  $(S_A(U), \tilde{\Delta}, \cap_R)$  cebirsel yapısı bir hemihalkadır (Sezgin ve Yavuz, 2023a).

8)  $(S_A(U), \cup_\varepsilon, \cap_R)$  cebirsel yapısı, alt sınırı  $\emptyset_A$ , üst sınırı  $U_A$  olan tümleyenli, sınırlı dağılmalı bir kafestir. Gerçekten, 3. Ve 4. Bölümde  $(S_A(U), \cup_\varepsilon)$  ve  $(S_A(U), \cap_R)$  cebirsel yapılarının komutatif idempotent monoid olduğu ve  $S_A(U)$  kümesi üzerinde,  $\cup_\varepsilon$  ve  $\cap_R$  işlemlerinin yutan kuralını sağladığı ve kısıtlanmış kesişim işleminin, genişletilmiş birleşim işlemine sağdan ve soldan dağılma özelliklerini sağladığı sırasıyla Tablo 2 ve Tablo 4 de gösterilmiştir.  $(F,A) \cup_\varepsilon (F,A)^r = U_A$  ve  $(F,A) \cap_R (F,A)^r = \emptyset_A$  olduğundan,  $(S_A(U), \cup_\varepsilon, \cap_R, {}^r)$  cebirsel yapısı, tümlemeli, sınırlı ve dağılmalı bir kafestir; dolayısıyla bir

Bool cebiridir. Üstelik, De Morgan kuralı da sağladığından yani,  $[(F,A) \cap_R (G,A)]^r = (F,A)^r \cup_\varepsilon (G,A)^r$  ve  $[(F,A) \cup_\varepsilon (G,A)]^r = (F,A)^r \cap_R (G,A)^r$  ;  $(S_A(U), \cup_\varepsilon, \cap_R, {}^r)$  cebirsel yapısı De Morgan Cebiridir.

Ayrıca,  $\forall (F,A), (G,A) \in S_A(U)$  için,  $(F,A) \cap_R (F,A)^r = \emptyset_A \cong (G,A) \cup_\varepsilon (G,A)^r = U_A$  olduğundan;  $(S_A(U), \cup_\varepsilon, \cap_R, {}^r)$  cebirsel yapısı bir Kleene Cebiridir.

Ayrıca,  $(F,A) \cap_R (F,A)^r = \emptyset_A$  olduğu bilinmektedir ve  $(F,A) \cap_R (G,A) = \emptyset_A$  iken  $(G,A) \cong (F,A)^r$  olduğu gösterilmiştir. Bu,  $(F,A)^r$  nin  $(F,A)$  nin sözde tümleyeni olduğunu gösterir. Ayrıca,  $(F,A)^r \cup_\varepsilon ((F,A)^r)^r = U_A$  olduğundan,  $(S_A(U), \cup_\varepsilon, \cap_R, {}^r)$  cebirsel yapısı, Stone'nun birimi özelliğini sağlar ve  $(S_A(U), \cup_\varepsilon, \cap_R, {}^r)$  cebirsel yapısı bir Stone cebiridir (Ali ve diğerleri, 2011).

9) Çakışık olan  $(S_A(U), \cup_R, \cap_R, {}^r)$  ve  $(S_A(U), \tilde{\cup}, \cap_R, {}^r)$  cebirsel yapısı, alt sınırı  $\emptyset_A$ , üst sınırı  $U_A$  olan tümleyenli, sınırlı dağılmalı bir kafes, dolayısıyla bir Bool cebiri, De Morgan Cebiri, Kleene Cebiri ve Stone cebiridir.

Ayrıca  $(S_A(U), {}^r, \cap_R)$ ,  $U_A$  sabitiyle bir MV-cebiridir. (Ali ve diğerleri, 2011)

$(S_A(U), {}^r, \cap_R, U_A)$  bir MV-cebiri olduğunu göstermek için, MV-cebiri şartları sağladığını gösterelim.

- (MV1)  $(S_A(U), \cap_R, U_A)$  değişmeli bir monoiddir.
- (MV2)  $((F,A)^r)^r = (F,A)$ .
- (MV3)  $(U_A)^r \cap_R (F,A) = \emptyset_A \cap_R (F,A) = \emptyset_A = (U_A)^r$ .
- (MV4)  $[(F,A)^r \cap_R (G,A)]^r \cap_R (G,A) = ((G,A)^r \cap_R (F,A)^r)^r \cap_R (F,A)$ . Gerçekten,
 
$$\begin{aligned}
 [(F,A)^r \cap_R (G,A)]^r \cap_R (G,A) &= [((F,A)^r)^r \cup_R (G,A)^r] \cap_R (G,A) \\
 &= [(F,A) \cup_R (G,A)^r] \cap_R (G,A) \\
 &= [(F,A) \cap_R (G,A)] \cup_R [(G,A)^r \cap_R (G,A)] \\
 &= [(F,A) \cap_R (G,A)] \cup_R [(F,A) \cap_R (F,A)^r] \\
 &= (F,A) \cap_R [(G,A) \cup_R (F,A)^r] \\
 &= (F,A) \cap_R [(G,A)^r \cap_R (F,A)]^r \\
 &= [(G,A)^r \cap_R (F,A)]^r \cap_R (F,A)
 \end{aligned}$$

Böylelikle  $(S_A(U), {}^r, \cap_R)$ ,  $U_A$  sabitiyle bir MV-cebiridir.

ii) İkinci işlemi genişletilmiş kesişim yani  $\cap_\varepsilon$  olan  $S_A(U)$  kümesi üzerindeki ikili cebirsel yapılar:

1) Çakışık olan  $(S_A(U), \cap_\varepsilon, \cap_\varepsilon), (S_A(U), \tilde{\cap}, \cap_\varepsilon), (S_A(U), \cap_R, \cap_\varepsilon)$  cebirsel yapısı birimi  $U_A$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent, sıfırsız bir yarı-halkadır.

2)  $(S_A(U), \cup_R, \cap_\varepsilon)$  cebirsel yapısı birimi  $U_A$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent bir yarı-halkadır. Üstelik,  $(F, A) \cup_R \emptyset_A = \emptyset_A \cup_R (F, A) = (F, A)$  ve  $(F, A) \cap_\varepsilon \emptyset_A = \emptyset_A \cap_\varepsilon (F, A) = \emptyset_A$  olduğundan,  $(S_A(U), \cup_R, \cap_\varepsilon)$  cebirsel yapısı bir hemihalkadır.

3)  $(S_A(U), \cup_\varepsilon, \cap_\varepsilon)$  cebirsel yapısı birimi  $U_A$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent bir yarı-halkadır. Üstelik,  $(F, A) \cup_\varepsilon \emptyset_A = \emptyset_A \cup_\varepsilon (F, A) = (F, A)$  ve  $(F, A) \cap_\varepsilon \emptyset_A = \emptyset_A \cap_\varepsilon (F, A) = \emptyset_A$  olduğundan,  $(S_A(U), \cup_\varepsilon, \cap_\varepsilon)$  cebirsel yapısı bir hemihalkadır.

4)  $(S_A(U), \tilde{\cup}, \cap_\varepsilon)$  cebirsel yapısı, birimi  $U_A$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent bir yarı-halkadır. Üstelik,  $(F, A) \tilde{\cup} \emptyset_A = \emptyset_A \tilde{\cup} (F, A) = (F, A)$  ve  $(F, A) \cap_\varepsilon \emptyset_A = \emptyset_A \cap_\varepsilon (F, A) = \emptyset_A$  olduğundan,  $(S_A(U), \tilde{\cup}, \cap_\varepsilon)$  cebirsel yapısı bir hemihalkadır.

5)  $(S_A(U), \cup_\varepsilon, \cap_\varepsilon)$  cebirsel yapısı, alt sınırı  $\emptyset_A$ , üst sınırı  $U_A$  olan tümleyenli, sınırlı dağılmalı bir kafestir. Gerçekten, 3. Ve 4. Bölümde  $(S_A(U), \cup_\varepsilon)$  ve  $(S_A(U), \cap_\varepsilon)$  cebirsel yapılarının komutatif idempotent monoid olduğu ve  $S_A(U)$  kümesi üzerinde,  $\cup_\varepsilon$  ve  $\cap_\varepsilon$  işlemlerinin yutan kuralını ve genişletilmiş kesişim işleminin genişletilmiş birleşim işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliklerini sağladığı sırasıyla Tablo 2 ve Tablo 4 de gösterilmiştir.  $(F, A) \cup_\varepsilon (F, A)^r = U_A$  ve  $(F, A) \cap_\varepsilon (F, A)^r = \emptyset_A$  olduğundan,  $(S_A(U), \cup_\varepsilon, \cap_\varepsilon, {}^r)$  cebirsel yapısı, tümlemeli, sınırlı ve dağılmalı bir kafestir; dolayısıyla bir Bool cebiridir.

Üstelik, De Morgan kuralı da sağladığından yani,  $[(F, A) \cap_\varepsilon (G, A)]^r = (F, A)^r \cup_\varepsilon (G, A)^r$  ve  $[(F, A) \cup_\varepsilon (G, A)]^r = (F, A)^r \cap_\varepsilon (G, A)^r$ ;  $(S_A(U), \cup_\varepsilon, \cap_\varepsilon, {}^r)$  cebirsel yapısı De Morgan Cebiridir.

Ayrıca,  $\forall (F, A), (G, A) \in S_A(U)$  için,  $(F, A) \cap_\varepsilon (F, A)^r = \emptyset_A \cong (G, A) \cup_\varepsilon (G, A)^r = U_A$  olduğundan,  $(S_A(U), \cup_\varepsilon, \cap_\varepsilon, {}^r)$  cebirsel yapısı bir Kleene Cebiridir.

Ayrıca,  $(F,A) \cap_{\varepsilon} (F,A)^r = \emptyset_A$  olduğu bilinmektedir ve  $(F,A) \cap_{\varepsilon} (G,A) = \emptyset_A$  iken  $(G,A) \tilde{\subseteq} (F,A)^r$  olduğu gösterilmişti. Bu,  $(F,A)^r$  nin  $(F,A)$  nın sözde tümleyeni olduğunu gösterir. Ayrıca,  $(F,A)^r \cup_{\varepsilon} ((F,A)^r)^r = U_A$  olduğundan,  $(S_A(U), \cup_{\varepsilon}, \cap_{\varepsilon}, {}^r)$  cebirsel yapısı, Stone'nun birimi özelliğini sağlar ve  $(S_A(U), \cup_{\varepsilon}, \cap_{\varepsilon}, {}^r)$  cebirsel yapısı bir Stone cebiridir.

6) Çakışık olan  $(S_A(U), \cup_R, \cap_{\varepsilon}, {}^r)$ ,  $(S_A(U), \tilde{\cup}, \cap_{\varepsilon}, {}^r)$  cebirsel yapısı, alt sınırı  $\emptyset_A$ , üst sınırı  $U_A$  olan tümleyenli, sınırlı dağılmalı bir kafes, dolayısıyla bir Bool cebiri, De Morgan Cebiri, Kleene Cebiri ve Stone cebiridir.

Ayrıca  $(S_A(U), {}^r, \cap_{\varepsilon})$ ,  $U_A$  sabitiyle bir MV-cebiridir.

$(S_A(U), {}^r, \cap_{\varepsilon}, U_A)$  bir MV-cebiri olduğunu örnek için, MV-cebiri şartları sağladığını gösterelim.

- (MV1)  $(S_A(U), \cap_{\varepsilon}, U_A)$  değişmeli bir monoiddir.
- (MV2)  $((F,A)^r)^r = (F,A)$ .
- (MV3)  $(U_A)^r \cap_{\varepsilon} (F,A) = \emptyset_A \cap_{\varepsilon} (F,A) = \emptyset_A = (U_A)^r$ .
- (MV4)  $[(F,A)^r \cap_{\varepsilon} (G,A)]^r \cap_{\varepsilon} (G,A) = ((G,A)^r \cap_{\varepsilon} (F,A)^r)^r \cap_{\varepsilon} (F,A)$ . Gerçekten,
 
$$\begin{aligned}
 & [(F,A)^r \cap_{\varepsilon} (G,A)]^r \cap_{\varepsilon} (G,A) = [((F,A)^r)^r \cup_{\varepsilon} (G,A)^r]^r \cap_{\varepsilon} (G,A) \\
 & = [(F,A) \cup_{\varepsilon} (G,A)^r]^r \cap_{\varepsilon} (G,A) \\
 & = [(F,A) \cap_{\varepsilon} (G,A)] \cup_{\varepsilon} [(G,A)^r \cap_{\varepsilon} (G,A)] \\
 & = [(F,A) \cap_{\varepsilon} (G,A)] \cup_{\varepsilon} [(F,A) \cap_{\varepsilon} (F,A)^r] \\
 & = (F,A) \cap_{\varepsilon} [(G,A) \cup_{\varepsilon} (F,A)^r] \\
 & = (F,A) \cap_{\varepsilon} [(G,A)^r \cap_{\varepsilon} (F,A)]^r \\
 & = [(G,A)^r \cap_{\varepsilon} (F,A)]^r \cap_{\varepsilon} (F,A)
 \end{aligned}$$

Böylelikle  $(S_A(U), {}^r, \cap_{\varepsilon})$ ,  $U_A$  sabitiyle bir MV-cebiridir.

iii) İkinci işlemi kısıtlanmış birleşim yani  $\cup_R$  olan  $S_A(U)$  kümesi üzerindeki ikili cebirsel yapılar:

1) Çakışık olan  $(S_A(U), \cup_R, \cup_R)$ ,  $(S_A(U), \cup_{\varepsilon}, \cup_R)$ ,  $(S_A(U), \tilde{\cup}, \cup_R)$  cebirsel yapısı birimi  $\emptyset_A$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent, sıfırsız bir yarı-halkadır.

2)  $(S_A(U), \cap_R, \cup_R)$  cebirsel yapısı birimi  $\emptyset_A$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif, idempotent bir yarı-halkadır. Üstelik,  $(F,A) \cap_R U_A = U_A \cap_R (F,A) = (F,A)$  ve  $(F,A) \cup_R U_A = U_A \cup_R (F,A) = U_A$  olduğundan,  $(S_A(U), \cap_R, \cup_R)$  cebirsel yapısı bir hemihalkadır.

3)  $(S_A(U), \cap_\varepsilon, \cup_R)$  cebirsel yapısı birimi  $\emptyset_A$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent bir yarı-halkadır. Üstelik,  $(F,A) \cap_\varepsilon U_A = U_A \cap_\varepsilon (F,A) = (F,A)$  ve  $(F,A) \cup_R U_A = U_A \cup_R (F,A) = U_A$  olduğundan,  $(S_A(U), \cap_\varepsilon, \cup_R)$  cebirsel yapısı bir hemihalkadır.

4)  $(S_A(U), \Delta_\varepsilon, \cup_R)$  cebirsel yapısı, birimi  $\emptyset_A$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif, çarpımsal idempotent sıfırsız bir yarı-halkadır.

5)  $(S_A(U), \tilde{\cap}, \cup_R)$  cebirsel yapısı, birimi  $\emptyset_A$  olan toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent bir yarı-halkadır. Üstelik,  $(F,A) \tilde{\cap} U_A = U_A \tilde{\cap} (F,A) = (F,A)$  ve  $(F,A) \cup_R U_A = U_A \cup_R (F,A) = U_A$  olduğundan,  $(S_A(U), \tilde{\cap}, \cup_R)$  cebirsel yapısı bir hemihalkadır.

6)  $(S_A(U), \cap_\varepsilon, \cup_R)$  cebirsel yapısı, alt sınırı  $U_A$ , üst sınırı  $\emptyset_A$  olan tümleyenli, sınırlı dağılmalı bir kafestir. Gerçekten, 3. Ve 4. Bölümde  $(S_A(U), \cap_\varepsilon)$  ve  $(S_A(U), \cup_R)$  cebirsel yapılarının komutatif idempotent monoid olduğu ve  $S_A(U)$  kümesi üzerinde,  $\cap_\varepsilon$  ve  $\cup_R$  işlemlerinin yutan kuralını sağladığı ve kısıtlanmış birleşim işleminin genişletilmiş kesişim işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliklerini sağladığı sırasıyla Tablo 2 ve Tablo 4 de gösterilmiştir.

$(F,A) \cap_\varepsilon (F,A)^r = \emptyset_A$  ve  $(F,A) \cup_R (F,A)^r = U_A$  olduğundan,  $(S_A(U), \cap_\varepsilon, \cup_R, {}^r)$  cebirsel yapısı, tümleyenli, sınırlı ve dağılmalı bir kafestir; dolayısıyla bir Bool cebiridir. Üstelik, De Morgan kuralı da sağladığından yani,  $[(F,A) \cup_R (G,A)]^r = (F,A)^r \cap_\varepsilon (G,A)^r$  ve  $[(F,A) \cap_\varepsilon (G,A)]^r = (F,A)^r \cup_R (G,A)^r$ ;  $(S_A(U), \cap_\varepsilon, \cup_R, {}^r)$  cebirsel yapısı De Morgan Cebiridir.

7) Çakışık olan  $(S_A(U), \cap_R, \cup_R, {}^r)$ ,  $(S_A(U), \tilde{\cap}, \cup_R, {}^r)$  cebirsel yapısı, alt sınırı  $U_A$ , üst sınırı  $\emptyset_A$  olan tümleyenli, sınırlı dağılmalı bir kafestir, dolayısıyla bir Bool cebiri ve De Morgan Cebiridir.

Ayrıca  $(S_A(U), \cdot^r, \cup_R)$ ,  $\emptyset_A$  sabitiyle bir MV-cebiridir.

$(S_A(U), \cdot^r, \cup_R, \emptyset_A)$  bir MV-cebiri olduğunu görnk için, MV-cebiri şartları sağladığını gösterelim.

- (MV1)  $(S_A(U), \cup_R, \emptyset_A)$  değişmeli bir monoiddir.
- (MV2)  $((F,A)^r)^r = (F,A)$ .
- (MV3)  $(\emptyset_A)^r \cup_R (F,A) = U_A \cup_R (F,A) = U_A = (\emptyset_A)^r$ .
- (MV4)  $[(F,A)^r \cup_R (G,A)]^r \cup_R (G,A) = ((G,A)^r \cup_R (F,A)^r)^r \cup_R (F,A)$ . Gerçekten,  

$$\begin{aligned} [(F,A)^r \cup_R (G,A)]^r \cup_R (G,A) &= [((F,A)^r)^r \cap_R (G,A)^r]^r \cup_R (G,A) \\ &= [(F,A) \cap_R (G,A)]^r \cup_R (G,A) \\ &= [(F,A) \cup_R (G,A)] \cap_R (G,A)^r \cup_R (G,A) \\ &= [(F,A) \cup_R (G,A)] \cap_R [(F,A) \cup_R (F,A)^r] \\ &= (F,A) \cup_R [(G,A) \cap_R (F,A)^r] \\ &= (F,A) \cup_R [(G,A)^r \cup_R (F,A)]^r \\ &= [(G,A)^r \cup_R (F,A)]^r \cup_R (F,A) \end{aligned}$$

Böylelikle  $(S_A(U), \cdot^r, \cup_R)$ ,  $\emptyset_A$  sabitiyle bir MV-cebiridir

iv) İkinci işlemi genişletilmiş birleşim yani  $\cup_\varepsilon$  olan  $S_A(U)$  kümesi üzerindeki ikili cebirsel yapılar:

1)  $(S_A(U), \cap_R, \cup_\varepsilon)$  cebirsel yapısı birimi  $\emptyset_A$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent bir yarı-halkadır. Üstelik,  $(F,A) \cap_R U_A = U_A \cap_R (F,A) = (F,A)$  ve  $(F,A) \cup_\varepsilon U_A = U_A \cup_\varepsilon (F,A) = U_A$  olduğundan,  $(S_A(U), \cap_R, \cup_\varepsilon)$  cebirsel yapısı bir hemihalkadır.

2) Çakışık olan  $(S_A(U), \cup_\varepsilon, \cup_\varepsilon)$ ,  $(S_A(U), \tilde{\cup}, \cup_\varepsilon)$ ,  $(S_A(U), \cup_R, \cup_\varepsilon)$ , cebirsel yapısı birimi  $\emptyset_A$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent, sıfırsız bir yarı-halkadır.

3)  $(S_A(U), \tilde{\cap}, \cup_\varepsilon)$  cebirsel yapısı, birimi  $\emptyset_A$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif, idempotent bir yarı-halkadır. Üstelik,  $(F,A) \tilde{\cap} U_A = U_A \tilde{\cap} (F,A) = (F,A)$  ve  $(F,A) \cup_\varepsilon U_A = U_A \cup_\varepsilon (F,A) = U_A$  olduğundan,  $(S_A(U), \tilde{\cap}, \cup_\varepsilon)$  cebirsel yapısı bir hemihalkadır.

4)  $(S_A(U), \cap_\varepsilon, \cup_\varepsilon)$  cebirsel yapısı, alt sınırı  $U_A$ , üst sınırı  $\emptyset_A$  olan tümleyenli, sınırlı dağılmalı bir kafestir. Gerçekten, 3. Ve 4. Bölümde  $(S_A(U), \cap_\varepsilon)$  ve  $(S_A(U), \cup_\varepsilon)$  cebirsel yapılarının komutatif idempotent monoid olduğu ve  $S_A(U)$  kümesi üzerinde,  $\cap_\varepsilon$  ve  $\cup_\varepsilon$  işlemlerinin yutan kuralını sağladığı ve genişletilmiş birleşim işleminin genişletilmiş kesişim işlemi üzerine sağdan ve soldan dağıldığı sırasıyla Tablo 2 ve Tablo 4 de gösterilmiştir.

$(F, A) \cap_\varepsilon (F, A)^r = \emptyset_A$  ve  $(F, A) \cup_\varepsilon (F, A)^r = U_A$  olduğundan,  $(S_A(U), \cap_\varepsilon, \cup_\varepsilon, {}^c)$  cebirsel yapısı, tümleyenli, sınırlı ve dağılmalı bir kafestir; dolayısıyla bir Bool cebiridir.

Üstelik, De Morgan kuralı da sağladığından yani,  $[(F, A) \cup_\varepsilon (G, A)]^r = (F, A)^r \cap_\varepsilon (G, A)^r$  ve  $[(F, A) \cap_\varepsilon (G, A)]^r = (F, A)^r \cup_\varepsilon (G, A)^r$ ;  $(S_A(U), \cap_\varepsilon, \cup_\varepsilon, {}^c)$  cebirsel yapısı De Morgan Cebiridir.

5) Çakışık olan  $(S_A(U), \cap_R, \cup_\varepsilon)$ ,  $(S_A(U), \tilde{\cap}, \cup_\varepsilon)$ , cebirsel yapısı, alt sınırı  $U_A$ , üst sınırı  $\emptyset_A$  olan tümleyenli, sınırlı dağılmalı bir kafes, dolayısıyla bir Bool cebiri ve De Morgan Cebiridir.

Ayrıca  $(S_A(U), {}^r, \cup_\varepsilon)$ ,  $\emptyset_A$  sabitiyle bir MV-cebiridir.

$(S_A(U), {}^r, \cup_\varepsilon, \emptyset_A)$  bir MV-cebiri olduğunu görmek için, MV-cebiri şartları sağladığını gösterelim.

- (MV1)  $(S_A(U), \cup_\varepsilon, \emptyset_A)$  değişmeli bir monoiddir.
- (MV2)  $((F, A)^r)^r = (F, A)$ .
- (MV3)  $(\emptyset_A)^r \cup_\varepsilon (F, A) = U_A \cup_\varepsilon (F, A) = U_A = (\emptyset_A)^r$ .
- (MV4)  $[(F, A)^r \cup_\varepsilon (G, A)]^r \cup_\varepsilon (G, A) = ((G, A)^r \cup_\varepsilon (F, A)^r)^r \cup_\varepsilon (F, A)$ . Gerçekten,
 
$$\begin{aligned}
 [(F, A)^r \cup_\varepsilon (G, A)]^r \cup_\varepsilon (G, A) &= [((F, A)^r)^r \cap_\varepsilon (G, A)^r] \cup_\varepsilon (G, A) \\
 &= [(F, A) \cap_\varepsilon (G, A)^r] \cup_\varepsilon (G, A) \\
 &= [(F, A) \cup_\varepsilon (G, A)] \cap_\varepsilon (G, A)^r \cup_\varepsilon (G, A) \\
 &= [(F, A) \cup_\varepsilon (G, A)] \cap_\varepsilon [(F, A) \cup_\varepsilon (F, A)^r] \\
 &= (F, A) \cup_\varepsilon [(G, A) \cap_\varepsilon (F, A)^r] \\
 &= (F, A) \cup_\varepsilon [(G, A)^r \cup_\varepsilon (F, A)]^r \\
 &= [(G, A)^r \cup_\varepsilon (F, A)]^r \cup_\varepsilon (F, A)
 \end{aligned}$$

Böylelikle  $(S_A(U), {}^r, \cup_\varepsilon)$ ,  $\emptyset_A$  sabitiyle bir MV-cebiridir.

## 7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez, temel esnek küme işlemlerinden olan kısıtlanmış ve genişletilmiş kesişim, kısıtlanmış ve genişletilmiş birleşim, kısıtlanmış ve genişletilmiş fark işlemlerinin literatürde var olan özelliklerine yeni pek özelliğin de eklenerek detaylı bir şekilde incelendiği ve bu işlemlerin hem  $S_E(U)$  hem de sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde, hangi birli ve ikili cebirsel yapılar ile kafes yapılar oluşturduğunun tüm detaylarıyla birlikte sunulduğu, literatürde var olan bazı çalışmalarda bir birtakım matematiksel hataların düzeltilerek verildiği ve bu açıdan, bu alanda yapılmış olan diğer tüm çalışmaları kapsayıcı nitelikte olan bir çalışmadır.

Tezin ilk bölümünde, esnek kümeler, esnek işlemler ve cebirsel yapılar ile ilgili detaylı bir literatür taraması yapılmış; ikinci bölümünde tez boyunca kullanılacak olan klasik küme işlemleri, esnek kümeler ve cebirsel yapılar ile ilgili temel kavramlar sunulmuştur. Üçüncü bölümde, temel esnek küme işlemlerinden olan ve daha önce literatüre kazandırılmış olan kısıtlanmış ve genişletilmiş kesişim işleminin; dördüncü bölümde kısıtlanmış ve genişletilmiş birleşim işleminin; beşinci bölümde kısıtlanmış ve genişletilmiş fark işleminin tüm özellikleri detaylı şekilde incelenmiş ve detaylı ispatlarıyla sunulmuştur. Kısıtlanmış işlemlerinin tümü için özellikler ve dağılma kuralları araştırılırken, kısıtlanmış işlemleri alınacak esnek kümelerin parametre kümelerinin boş olması durumu da değerlendirilmiştir. Daha önceki bu alanda yapılmış olan çalışmalarda sunulmuş olan özelliklere yeni pek çok özellik eklenmiştir. Burada, klasik kümelerde de bu işlemler olduğundan, klasik kümelerde bu işlemlerinin özelliklerinin esnek küme işlemlerinde yansıması nasıl olur sorusu özellikle göz önünde bulundurularak yeni pek çok özellik verilmiş ve önceki çalışmalarda ispatsız ve/veya hatalı/uzun ispatlı olarak sunulan özellikler tekrar detaylı ama sade ispatlarıyla sunulmuştur. Ayrıca, bu işlemlerin sadece hangi birli cebirsel yapılar oluşturduğunu değil, hangi ikili cebirsel yapılar da oluşturduğunu da görebilmek için her bir işlemin diğer esnek küme işlemlerine dağılmasına da tek tek bakılmış ve tezin altıncı bölümünde sistematik olarak verilen aşağıdaki çok ilginç sonuçlar elde edilmiştir.

$S_E(U)$  kümesi üzerinde, esnek işlemlerin hangi birli cebirsel yapılar oluşturduğuna bakılmış ve  $(S_E(U), \cup_R)$  cebirsel yapısının birimi  $\emptyset_E$ , yutan elemanı  $\emptyset_\emptyset$  olan sınırlı bir yarı-

kafes;  $(S_E(U), \cap_R)$  cebirsel yapısının birimi  $U_E$ , yutan elemanı  $\emptyset_\emptyset$  olan sınırlı bir yarı-kafes,  $(S_E(U), \setminus_R)$  cebirsel yapısının sağ birimi  $\emptyset_E$ , yutan elemanı  $\emptyset_\emptyset$  olan komutatif ve idempotent olmayan bir magma;  $(S_E(U), \cup_\varepsilon)$  cebirsel yapısının birimi  $\emptyset_\emptyset$ , yutan elemanı  $U_E$  olan sınırlı bir yarı-kafes;  $(S_E(U), \cap_\varepsilon)$  cebirsel yapısının birimi  $\emptyset_\emptyset$ , yutan elemanı  $\emptyset_E$  olan sınırlı bir yarı-kafes, belirli şart altında  $(S_E(U), \setminus_\varepsilon)$  cebirsel yapısının birimi  $\emptyset_\emptyset$ , sol yutan elemanı  $\emptyset_E$  olan, komutatif ve idempotent olmayan bir monoid olduğu görülmüştür.

$S_A(U)$  kümesi üzerinde, esnek işlemlerin hangi birli cebirsel yapılar oluşturduğuna bakılmış ve çakışık olan  $(S_A(U), \cup_R)$  ve  $(S_A(U), \cup_\varepsilon)$  cebirsel yapısının birimi  $\emptyset_A$ , yutan elemanı  $U_A$  olan sınırlı bir yarı-kafes olduğu; çakışık olan  $(S_A(U), \cap_R)$  ve  $(S_A(U), \cap_\varepsilon)$  cebirsel yapısının ise birimi  $U_A$ , yutan elemanı  $\emptyset_A$  olan sınırlı bir yarı-kafes olduğu; çakışık olan  $(S_A(U), \setminus_R)$  ve  $(S_A(U), \setminus_\varepsilon)$  cebirsel yapısının sağ birimi  $\emptyset_A$ , sol yutan elemanı  $\emptyset_A$  olan komutatif ve idempotent olmayan bir magma olduğu ve çakışık olan  $(S_A(U), \setminus_R)$  ve  $(S_A(U), \setminus_\varepsilon)$  cebirsel yapısının  $\emptyset_A$  sabitiyle, her bir elemanı involusyon olan sınırlı bir BCK-cebiri olduğu gösterilmiştir.

$S_E(U)$  kümesi üzerinde, esnek işlemlerin hangi ikili cebirsel yapılar oluşturduğuna bakılmış ve ayrıca, Ali ve diğerleri (2011) çalışmasında yer alan dört tane matematiksel olarak hatalı cebirsel yapılar da düzeltilmiştir.  $(F, T)$ ,  $(G, Z)$  ve  $(H, M)$ ,  $S_E(U)$  kümesinin elemanları olmak üzere,  $(S_E(U), \cap_R, \cap_R)$ ,  $(S_E(U), \cup_R, \cap_R)$  cebirsel yapıları birimi  $U_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent, sıfırsız bir yarı-halka;  $(S_E(U), \Delta_R, \cap_R)$  cebirsel yapısı birimi  $U_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif, çarpımsal idempotent, sıfırsız bir yarı-halka;  $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \cap_R)$ ,  $(S_E(U), \cup_\varepsilon, \cap_R)$  cebirsel yapıları birimi  $U_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent bir yarı-halka ve bir hemihalka;  $(S_E(U), \Delta_\varepsilon, \cap_R)$  cebirsel yapısının, birimi  $U_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif, çarpımsal idempotent bir yarı-halka ve hemihalka;  $(S_E(U), \setminus_\varepsilon, \cap_R)$ ,  $(S_E(U), \gamma_\varepsilon, \cap_R)$ ,  $(S_E(U), +_\varepsilon, \cap_R)$ ,  $(S_E(U), \lambda_\varepsilon, \cap_R)$  cebirsel yapılarının belli şart altında, birimi  $U_E$  olan, çarpımsal komutatif ve çarpımsal idempotent bir yarı-halka,  $(S_E(U), \theta_\varepsilon, \cap_R)$  ve  $(S_E(U), *_\varepsilon, \cap_R)$  cebirsel yapılarının, belli şart altında, birimi  $U_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve çarpımsal idempotent bir yarı-halka ve hemihalka;  $(S_E(U), \tilde{\cap}, \cap_R)$  ve  $(S_E(U), \tilde{\cup}, \cap_R)$  cebirsel yapılarının, belli şart altında birimi  $U_E$  olan, çarpımsal komutatif, toplamsal ve çarpımsal idempotent bir yarı-halka;  $(S_E(U), \tilde{\Delta}, \cap_R)$  cebirsel yapısının belli şart altında, birimi  $U_E$  olan, çarpımsal komutatif, çarpımsal

idempotent bir yarı-halka;  $(S_E(U), U_\varepsilon, \cap_R)$  cebirsel yapısı, alt sınırı  $\emptyset_\emptyset$ , üst sınırı  $U_E$  olan sınırlı dağılmalı bir kafes olduğu görülmüştür.

$(S_E(U), U_R, \cap_\varepsilon)$  cebirsel yapısının birimi  $U_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent, bir yarı-halka ve hemihalka;  $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \cap_\varepsilon)$  cebirsel yapısının birimi  $U_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent, sıfırsız bir yarı-halka;  $(S_E(U), \widetilde{\cup}, \cap_\varepsilon)$  ve  $(S_E(U), \widetilde{\cap}, \cap_\varepsilon)$  cebirsel yapılarının, belli şart altında birimi  $U_E$  olan, çarpımsal komutatif, toplamsal ve çarpımsal idempotent, sıfırsız bir yarı-halka;  $(S_E(U), U_R, \cap_\varepsilon)$  cebirsel yapısı, alt sınırı  $\emptyset_E$ , üst sınırı  $\emptyset_\emptyset$  olan sınırlı dağılmalı bir kafes olduğu gösterilmiştir.

$(S_E(U), U_R, U_R)$ ,  $(S_E(U), \cap_R, U_R)$  cebirsel yapılarının birimi  $\emptyset_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent, sıfırsız bir yarı-halka;  $(S_E(U), \cap_\varepsilon, U_R)$ ,  $(S_E(U), U_\varepsilon, U_R)$  cebirsel yapılarının birimi  $\emptyset_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent bir yarı-halka ve hemihalka;  $(S_E(U), \Delta_\varepsilon, U_R)$  cebirsel yapısının, birimi  $\emptyset_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif, çarpımsal idempotent bir yarı-halka ve hemihalka;  $(S_E(U), \setminus_\varepsilon, U_R)$ ,  $(S_E(U), \gamma_\varepsilon, U_R)$ ,  $S_E(U), +_\varepsilon, U_R$  ve  $(S_E(U), \lambda_\varepsilon, U_R)$  cebirsel yapılarının belli şart altında birimi  $\emptyset_E$  olan, çarpımsal komutatif ve çarpımsal idempotent bir yarı-halka;  $(S_E(U), \theta_\varepsilon, U_R)$  ve  $(S_E(U), *_\varepsilon, U_R)$  cebirsel yapılarının, belli şart altında birimi  $U_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve çarpımsal idempotent bir yarı-halka ve bir hemihalka;  $(S_E(U), \widetilde{\cup}, U_R)$  ve  $(S_E(U), \widetilde{\cap}, U_R)$  cebirsel yapılarının, belli şart altında birimi  $\emptyset_E$  olan, çarpımsal komutatif, toplamsal ve çarpımsal idempotent, sıfırsız bir yarı-halka;  $(S_E(U), \cap_\varepsilon, U_R)$  cebirsel yapısı, alt sınırı  $\emptyset_\emptyset$ , üst sınırı  $\emptyset_E$  olan sınırlı dağılmalı bir kafes olduğu verilmiştir.

$(S_E(U), \cap_R, U_\varepsilon)$  cebirsel yapısının birimi  $\emptyset_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent, bir yarı-halka ve hemihalka;  $(S_E(U), U_\varepsilon, U_\varepsilon)$  cebirsel yapısının birimi  $\emptyset_E$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent, sıfırsız bir yarı-halka;  $(S_E(U), \widetilde{\cap}, U_\varepsilon)$ ,  $(S_E(U), \widetilde{\cup}, U_\varepsilon)$  cebirsel yapılarının belli şart altında birimi  $\emptyset_E$  olan, çarpımsal komutatif, toplamsal ve çarpımsal idempotent, sıfırsız bir yarı-halka;  $(S_E(U), \cap_R, U_\varepsilon)$  cebirsel yapısı, alt sınırı  $U_E$ , üst sınırı  $\emptyset_\emptyset$  olan sınırlı dağılmalı bir kafes olduğu verilmiştir.

$(S_E(U), \cup_R, \setminus_\varepsilon)$  cebirsel yapısının, belirli şart altında birimi  $\emptyset_\emptyset$  olan, toplamsal komutatif ve toplamsal idempotent, sıfırlı fakat sıfır simetrik olmayan bir sağ yarı yakın-halka ve sıfırsız bir yarı-halka;  $(S_E(U), \cap_\varepsilon, \setminus_\varepsilon)$  cebirsel yapısının belirli şart altında birimi birimi  $\emptyset_\emptyset$  olan, toplamsal komutatif ve toplamsal idempotent, sıfırsız bir yarı-halka olduğu gösterilmiştir.

Ayrıca,  $S_A(U)$  kümesi üzerinde, esnek işlemlerin hangi ikili cebirsel yapılar oluşturduğuna bakılmıştır. Çakışık olan  $(S_A(U), \cap_R, \cap_R)$ ,  $(S_A(U), \cap_\varepsilon, \cap_R)$ ,  $(S_A(U), \tilde{\cap}, \cap_R)$  cebirsel yapısının birimi  $U_A$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent, sıfırsız bir yarı-halka; çakışık olan  $(S_A(U), \cup_R, \cap_R)$ ,  $(S_A(U), \cup_\varepsilon, \cap_R)$ ,  $(S_A(U), \tilde{\cup}, \cap_R)$  cebirsel yapısının birimi  $U_A$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent bir yarı-halka ve hemihalka; çakışık olan  $(S_A(U), \Delta_R, \cap_R)$  ve  $(S_A(U), \Delta_\varepsilon, \cap_R)$  cebirsel yapısının birimi  $U_A$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif, çarpımsal idempotent bir yarı-halka ve hemihalka ve Bool Halkası;  $(S_A(U), \tilde{\Delta}, \cap_R)$  cebirsel yapısının, birimi  $U_A$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif, çarpımsal idempotent bir yarı-halka ve hemihalka; çakışık olan  $(S_A(U), \cup_\varepsilon, \cap_R)$ ,  $(S_A(U), \cup_R, \cap_R, {}^r)$  ve  $(S_A(U), \tilde{\cup}, \cap_R, {}^r)$  cebirsel yapısının, alt sınırı  $\emptyset_A$ , üst sınırı  $U_A$  olan tümleyenli, sınırlı dağılmalı bir kafes; dolayısıyla bir Bool cebiri, De Morgan Cebiri, Kleene Cebiri ve Stone cebiri ve  $(S_A(U), {}^r, \cap_R)$ ,  $U_A$  sabitiyle bir MV-cebiri olduğu gösterilmiştir.

Çakışık olan  $(S_A(U), \cup_R, \cap_\varepsilon)$ ,  $(S_A(U), \tilde{\cup}, \cap_\varepsilon)$ ,  $(S_A(U), \cup_\varepsilon, \cap_\varepsilon)$  cebirsel yapısının birimi  $U_A$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent bir yarı-halka ve hemihalka; çakışık olan  $(S_A(U), \cap_\varepsilon, \cap_\varepsilon)$ ,  $(S_A(U), \tilde{\cap}, \cap_\varepsilon)$  cebirsel yapısının birimi  $U_A$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent, sıfırsız bir yarı-halka; çakışık olan  $(S_A(U), \cup_R, \cap_\varepsilon, {}^r)$ ,  $(S_A(U), \cup_R, \cap_\varepsilon, {}^r)$ ,  $(S_A(U), \tilde{\cup}, \cap_\varepsilon, {}^r)$  cebirsel yapısının, alt sınırı  $\emptyset_A$ , üst sınırı  $U_A$  olan tümlemeli, sınırlı ve dağılmalı bir kafes; dolayısıyla bir Bool cebiri, De Morgan Cebiri, Kleene Cebiri ve Stone cebiri; ve  $(S_A(U), {}^r, \cap_\varepsilon)$ ,  $U_A$  sabitiyle bir MV-cebiri olduğu verilmiştir.

Çakışık olan  $(S_A(U), \cup_R, \cup_R)$ ,  $(S_A(U), \cup_\varepsilon, \cup_R)$ ,  $(S_A(U), \tilde{\cup}, \cup_R)$  cebirsel yapısının birimi  $\emptyset_A$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent, sıfırsız bir yarı-halka; çakışık olan

$(S_A(U), \cap_R, \cup_R)$ ,  $(S_A(U), \cap_\varepsilon, \cup_R)$ ,  $(S_A(U), \tilde{\cap}, \cup_R)$  cebirsel yapısı birimi  $\emptyset_A$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif, idempotent bir yarı-halka ve hemihalka;  $(S_A(U), \Delta_\varepsilon, \cup_R)$  cebirsel yapısını, birimi  $\emptyset_A$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif, çarpımsal idempotent sıfırsız bir yarı-halka; çakışık olan  $(S_A(U), \cap_\varepsilon, \cup_R, {}^r)$ ,  $(S_A(U), \cap_R, \cup_R, {}^r)$ ,  $(S_A(U), \tilde{\cap}, \cup_R, {}^r)$  cebirsel yapısı, alt sınırı  $U_A$ , üst sınırı  $\emptyset_A$  olan tümleyenli, sınırlı dağılmalı bir kafes, dolayısıyla bir Bool cebiri, De Morgan Cebiri ve  $(S_A(U), {}^r, \cup_R)$ ,  $\emptyset_A$  sabitiyle bir MV-cebiri olduğu verilmiştir.

Çakışık olan  $(S_A(U), \cap_R, \cup_\varepsilon)$ ,  $(S_A(U), \tilde{\cap}, \cup_\varepsilon)$ ,  $(S_A(U), \cap_\varepsilon, \cup_\varepsilon)$  cebirsel yapısının birimi  $\emptyset_A$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent bir yarı-halka ve hemihalka; çakışık olan  $(S_A(U), \cup_\varepsilon, \cup_\varepsilon)$ ,  $(S_A(U), \tilde{\cup}, \cup_\varepsilon)$ ,  $(S_A(U), \cup_R, \cup_\varepsilon)$  cebirsel yapısının birimi  $\emptyset_A$  olan, toplamsal ve çarpımsal komutatif ve idempotent, sıfırsız bir yarı-halka; çakışık olan  $(S_A(U), \cap_\varepsilon, \cup_\varepsilon)$ ,  $(S_A(U), \cap_R, \cup_\varepsilon)$ ,  $(S_A(U), \tilde{\cap}, \cup_\varepsilon)$  cebirsel yapısının, alt sınırı  $U_A$ , üst sınırı  $\emptyset_A$  olan tümleyenli, sınırlı dağılmalı bir kafes, dolayısıyla bir Bool cebiri ve De Morgan Cebiri ve  $(S_A(U), {}^r, \cup_\varepsilon)$ ,  $\emptyset_A$  sabitiyle bir MV-cebiri olduğu gösterilmiştir.

Cebirsel yapıların incelenmesi soyut cebirde, matematikçilerin bu yapıların özelliklerini anlayarak karmaşık problemleri çözebilmesi, yeni teoriler geliştirip, kavramları matematiğin, bilimin ve mühendisliğin çeşitli alanlarına uygulayabilmesi açısından çok önemlidir. Belirli bir  $S$  kümesinin iyi bilinen bir cebirsel yapının bir örneği olarak bilinmesiyle, bu cebirsel yapı hakkında bilinen her sonucun otomatik olarak  $S$  için de geçerli olduğu bilinir. Bu fayda, büyük ölçüde soyutlamanın arkasındaki ana motivasyondur. Bu nedenlerle, cebirsel yapıların soyut matematik ve soyut cebirdeki önemi oldukça büyüktür. Bu tez, esnek küme teorisinde var olan temel esnek küme işlemlerinden olan kısıtlanmış ve genişletilmiş kesişim, kısıtlanmış ve genişletilmiş birleşim ve kısıtlanmış ve genişletilmiş fark işlemlerinin tüm özelliklerinin detaylı ispatlarıyla bir arada bulunduğu; yine bu işlemlerin  $S_E(U)$  ve sabit parametrelili esnek kümeler kümesi üzerinde hangi birli ve ikili cebirsel yapılar ile kafes yapılar oluşturduğunun tek tek sistematik şekilde detaylı ve toplu olarak incelenip sunulduğu, daha önce bu alanda yapılmış olan bir takım çalışmalarda hatalı yerlerin de düzeltilerek doğrularının verildiği çalışma olması açısından, bu alanda yapılmış diğer tüm çalışmaları da içine alan kapsayıcı bir çalışmadır ve esnek küme teorisine yeni başlayanlar için bir el

kitabı niteliğindendir. Bu açıdan, bu nitelikte kapsayıcı bir çalışmanın alanyazında olmayışının, bu büyük boşluğu dolduracağını ümit ediyoruz.



## KAYNAKLAR

- Abbas, M., Ali, B. and Romaguera, S. (2014). On Generalized Soft Equality and Soft Lattice Structure. *Filomat*, 28(6), 1191-1203.
- Abbas, M., Ali, M. I. and Romaguera, S. (2017). Generalized Operations in Soft Set Theory Via Relaxed Conditions on Parameters. *Filomat*, 31(19), 5955-5964.
- Acar, U., Koyuncu, F. and Tanay, B. (2010). Soft Sets and Soft Rings. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(11), 3458-3463.
- Akbulut, E. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended Difference and Lambda Operations*. Unpublished Master Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Aktas, H. and Çağman, N. (2007). Soft Sets and Soft Groups. *Information Science*, 177(13), 2726-2735.
- Ali, B., Saleem, N., Sundus, N., Khaleeq, S., Saeed, M. and George, R. (2022). A Contribution to the Theory of Soft Sets Via Generalized Relaxed Operations. *Mathematics*, 10(15), 26-36.
- Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K. and Shabir, M. (2009). On Some New Operations in Soft Set Theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 57(9), 1547-1553.
- Ali, M. I., Shabir, M. and Naz, M. (2011). Algebraic Structures of Soft Sets Associated with New Operations. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(9), 2647-2654.
- Alshami, T. and El-Shafei, M. (2020). T-Soft Equality Relation. *Turkish Journal of Mathematics*, 44(4), 1427-1441.
- Al-Shami, T. M. (2019). Investigation and Corrigendum to Some Results Related to g-Soft Equality and g f -Soft Equality Relations. *Filomat*, 33(11), 3375-3383.
- Atagün, A. O., Kamacı, H. and Oktay, O. (2018). Reduced Soft Matrices and Generalized Products with Applications in Decision Making. *Neural Computing and Applications*, 29, 445-456.
- Aybek, F. (2024). *New Restricted and Extended Soft Set Operations*. Unpublished Master Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Aydın, N. ve Kandamar, H. (2013). *Soyut Cebir* (Birinci Baskı). İstanbul: Kriter Yayınevi, 231.
- Bayraktar, M. (2006). *Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi* (Birinci Baskı). Türkiye: Gazi Kitabevi, 87-185.

- Cantor, G. (1874). Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik (in German)*, 1874 (77): 258–262.
- Chang, C. C. (1959). A New Proof of The Completeness of the Łukasiewicz Axioms. *Transactions of the American Mathematical Society*, 93(1), 74-80.
- Chen, D. G., Tsang, E. C. and Yeung, D. S. (2003). Some Notes on The Parameterization Reduction of Soft Sets. *International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, 3, 1442-1445.
- Chen, D., Tsang, E. C. C., Yeung, D. S and Wang, X. (2005). The Parametrization Reduction of Soft Sets and Its Applications. *Computers and Mathematics with Applications*, 49(5-6), 757–763.
- Clifford, A. H. (1954). Bands of Semigroups, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 5(3): 499–504.
- Çağman, N. (2021). Conditional Complements of Sets and Their Application to Group Theory. *Journal of New Results in Science*, 10(3), 67-74.
- Çağman, N. and Enginoğlu, S. (2010). Soft Matrix Theory and Its Decision Making. *Computers and Mathematics with Applications*, 59, 3308-3314.
- Çağman, N. and Enginoğlu, S. (2010). Soft Set Theory and Uni-int Decision Making. *European Journal of Operational Research*, 207(2), 848-855.
- Çallıalp, F. (1994). *Örneklerle Soyut Matematik* (Altıncı Baskı). Türkiye: Birsen Yayınevi, 1-7.
- Dauda, M. K., Mamat, M. and Waziri, M. Y. (2015). An Application of Soft Set in Decision Making. *Jurnal Teknologi (Sciences and Engineering)*, 77(13), 119-122.
- Demirci, A. M. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended Union, Plus and Theta Operations*. Unpublished Master Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Dickson, L. E. (1905). Definitions of a Group and a Field by Independent Postulates. *Transactions American Mathematical Society*, 6(2), 198-204.
- Enginoğlu, S. (2008). *Esnek Karar Verme Metodları* (Yüksek Lisans Tezi, Gaziosmanpaşa Üniversitesi, 2008).
- Eren, Ö. F. and Çalışıcı, H. (2019). On Some Operations of Soft Sets. *The Fourth International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences*.
- Feng, F. and Li, Y. (2013). Soft Subsets and Soft Product Operations. *Information Sciences*, 44-57.

- Feng, F., Jun, Y. B. and Zhao, X. (2008). Soft Semirings. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(10), 2621-2628.
- Feng, F., Li, Y. and Çağman, N. (2012). Generalized Uni-int Decision Making Schemes Based on Choice Value Soft Sets. *European Journal of Operational Research*, 220(1), 162-170.
- Feng, F., Li, Y. M., Davvaz, B. and Ali, M. I. (2010). Soft Sets Combined with Fuzzy Sets and Rough Sets: A Tentative Approach. *Soft Computing*, 14, 899-911.
- Feng, Q. and Zhou, Y. (2014). Soft Discernibility Matrix and Its Applications in Decision Making. *Applied Soft Computing*, 24, 749-756.
- Fu, L. (2011). Notes on Soft Set Operations. *ARNP Journal of Systems and Software*, 1(6), 205-208.
- Ge, X. and Yang, S. (2011). Investigations on Some Operations of Soft Sets. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 75, 1113-1116.
- Gong, K., Xiao, Z. and, Zhang, X. (2010). The Bijective Soft Set with Its Operations. *Computers and Mathematics with Applications*, 60(8), 2270-2278.
- Goodearl, K. R. (1979). *Von Neumann Regular Rings*. Pitman, Londra.
- Hacısalıhoğlu, H. (2007). *Soyut Matematik (İkinci Baskı)*. Türkiye: Üniversite Yayınevi, 43-62.
- Herawan, T. (2010). Soft Set-Based Decision Making for Patients Suspected Influenza-Like Illness. *International Journal of Modern Physics Conference Series*, 9, 259-270.
- Herawan, T. and Deris, M. M. (2009). A Direct Proof of Every Rough Set is a Soft Set. *Third Asia International Conference on Modelling and Simulation*, 119-124.
- Herawan, T. and Deris, M. M. (2010). Soft Decision Making for Patients Suspected Influenza. *Lecture Notes in Computer Science Springer*, 601, 405-418.
- Hoorn, W. G. V. and Rootselaar, V. B. (1967). Fundamental Notions in the Theory of Seminearrings. *Compositio Mathematica*, 18(1-2), 65-78.
- Husain, H. and Shivani, K. (2018). A Study of Properties of Soft Set and Its Applications. *International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)*, 5(1), 363-372.
- Inthumathi, V., Chitra, V. and Jayasree, S. (2017). The Role of Operators on Soft Sets in Decision Making Problems. *International Journal of Computational and Applied Mathematics*, 12(3), 899-910.
- Jiang, Y., Tang, Y., Chen, Q., Wang, J. and Tang, S. (2010). Extending Soft Sets with Description Logics. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(6), 2087-2096.

- Jun, Y. B. (2008). Soft BCK/BCI-algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(5), 1408-1413.
- Jun, Y. B. and Park, C. H. (2008). Applications of Soft Sets in Ideal Theory of BCK/BCI-algebras. *Information Sciences*, 178(11), 2466-2475.
- Jun, Y. B. and Yang, X. (2011). A Note on The Paper Combination of Interval-Valued Fuzzy Set and Soft Set. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(5), 1468-1470.
- Jun, Y. B., Lee, K. J. and Khan, A. (2010). Soft Ordered Semigroups. *Mathematical Logic Quarterly*, 56(1), 42-50.
- Jun, Y. B., Lee, K. J. and Zhan, J. (2009). Soft p-Ideals of Soft BCI-algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, 58(10), 2060-2068.
- Jun, Y. B., Song, S. Z. and So, K. S. (2011). Soft Set Theory Applied to p-ideals of BCI-algebras Related to Fuzzy Points. *Neural Computing and Applications*, 20(8), 1313-1320.
- Kamacı, H., Saltık, K., Akız, H. F. and Atagün, A. O. (2018). Cardinality Inverse Soft Matrix Theory and Its Applications in Multicriteria Group Decision Making. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 34(3), 2031-2049.
- Karaaslan, F. (2019). Some properties of AG\*-groupoids and AG-bands under SI-product Operation. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 36(1), 231-239.
- Karaaslan, F., Ullah, A. and Ahmad, I. (2021). Normal Bipolar Soft Subgroups. *Fuzzy Information and Engineering*, 13(1), 79-98.
- Karaçay, T., Eş, H. ve İbrahimoğlu, İ. (2017). *Calculus* (Birinci Baskı). Ankara:Seçkin Yayıncılık, 61-71.
- Karvellas, P. H. (1974). Inversive Semirings. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 18(3), 277-288.
- Kazancı, O., Yilmaz, S. and Yamak, S. (2010). Soft Sets and Soft BCH-algebras. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 39(2), 205-217.
- Kharal, A. (2014). Soft Approximations and Uni-Int Decision Making. *The Scientific World Journal*, Article ID 327408.
- Kilp, M., Knauer, U., and Mikhalev, A. (2001). Monoids, Acts and Categories. *De Gruyter Expositions in Mathematics*, (29), <https://doi.org/10.1515/9783110812909>.
- Kong, Z., Gao, L., Wang, L. and Li, S. (2008). The Normal Parameter Reduction of Soft Sets and Its Algorithm. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(12), 3029-3037.

- Liu, X., Feng, F. and Jun, Y. B. (2012). A Note on Generalized Soft Equal Relations. *Computers and Mathematics with Applications*, 64(4), 572-578.
- Maji, P. K., Biswas, R. and Roy, A. R. (2003). Soft Set Theory. *Computers and Mathematics with Application*, 45(1), 555-562.
- Maji, P. K., Roy, A. R. and Biswas, R. (2002). An Application of Soft Sets in a Decision Making Problem. *Computers and Mathematics with Applications*, 44(8-9), 1077-1083.
- Molodtsov, D. (1999). Soft Set Theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 37 (1), 19-31.
- Mushrif, M. M., Sengupta, S. and Ray, A. K. (2006). Texture Classification Using a Novel, Soft Set Theory Based Classification, Algorithm. *Lecture Notes in Computer Science*, 3851, 246-254.
- Neog, I. J. and Sut, D. K. (2011). A New Approach to the Theory of Soft Set. *International Journal of Computer Applications*, 32(2), 0975-8887.
- Neog, T. J. and Sut, D. K. (2011). A New Approach to the Theory of Soft Set. *International Journal of Computer Applications*, 32(2), 0975-8887.
- Nesin, A. (2019). *Sezgisel Kümeler Kuramı* (Altıncı Baskı). Türkiye: Nesin Yayıncılık, 7-59.
- Onyeozili, I. A. and Gwary, T. M. (2014). A Study Of The Fundamentals Of Soft Set Theory. *International Journal of Scientific and Technology Research*, 3(4), 132-143.
- Özer, O., Çoker, D. ve Taş, D. (1999). *Soyut Matematik* (Üçüncü Bakı). Türkiye: İzgi Yayınevi, 36-50.
- Park, C. H., Jun, Y. B. and Ozturk, M. A. (2008). Soft WS-algebras. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 23(3), 313-324.
- Pawlak, Z. (1982). Rough Sets. *International Journal of Computer Information Sciences*, 11, 341-356.
- Pei, D. and Miao, D. (2005). From Soft Sets to Information Systems, In: Proceedings of Granular Computing (Eds: X. Hu, Q. Liu, A. skowron, T. Y. Lin, R. R. Yager, B. Zhang) IEEE, 2, 617-621.
- Petchimuthu, S., Garg, H., Kamacı, H. and Atagün, A. O. (2020). The Mean Operators and Generalized Products of Fuzzy Soft Matrices and Their Applications in MCGDM. *Computational and Applied Mathematics*, 39, 1-32.
- Petrich, M. (1973). Introduction to Semigroups. Charles E Merrill Publishing Company, Ohio, 198.
- Pilz, G., Near-rings, 2nd ed., Amsterdam, Newyork, Oxford, North-Holland, 1983.

- Qin, K. and Hong, Z. (2010). On Soft Equality. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(5), 1347-1355.
- Reutenauer, C. and Straubing, H. (1984). Inversion of Matrices over a Commutative Semiring. *Journal of Algebra*, 88(2), 350-360.
- Roy, A. R. and Maji, P. K. (2007). A Fuzzy Soft Set Theoretic Approach to Decision Making Problems. *Journal of computational and Applied Mathematics*, 203(2), 412-418.
- Sarıalioğlu, M. (2024). *New Type of Extended Operations of Soft Sets: Complementary Extended Intersection, Gamma and Star Operations*. Unpublished Master Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.
- Sen, J. (2014). On Algebraic Structure of Soft Sets. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 7(6), 1013-1020.
- Sezer, A. S., Atagün, A. O. and Cagman, N. (2013). A New View to N-Group Theory: Soft N-Groups. *Fasciculi Mathematici*, 51, 123-140.
- Sezer, A. S., Çağman, N. and Atagün, A. O. (2014). Soft Intersection Interior Ideals, Quasi-ideals and Generalized Bi-Ideals; A New Approach to Semigroup Theory II. *J. Multiple Valued Logic and Soft Computing*, 23(1-2), 161-207.
- Sezer, A. S., Çağman, N., Atagün, A. O., Ali, M. I. and Türkmen, E. (2015). Soft Intersection Semigroups, Ideals and Bi-Ideals; A New Application on Semigroup Theory I. *Filomat*, 29(5), 917-946.
- Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2011). Soft Groups and Normalistic Soft Groups. *Computers and Mathematics with Applications*, 62(2), 685-698.
- Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2011). On Operations of Soft Sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(5), 1457-1467.
- Sezgin, A. and Atagün, A. O. (2023). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Plus Operation. *Matrix Science Mathematic*, 7(2), 110-127.
- Sezgin, A. and Aybek, F. (2023). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Gamma Operation. *Matrix Science Mathematic*, 7(1), 27-45.
- Sezgin, A., Atagün, A. O. and Aygün, E. (2011). A Note on Soft Near-rings and Idealistic Soft Near-rings. *Filomat*, 25(1), 53-68.
- Sezgin, A., Aybek, F. and Atagün, A. O. (2023a). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Intersection Operation. *Black Sea Journal of Engineering and Science*, 6(4), 330-346.
- Sezgin, A., Aybek, F. and Güngör, N. B. (2023b). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Union Operation. *Acta Informatica Malaysia*, 7(1), 38-53.

- Sezgin, A. and Çağman, N. (2024a), An Extensive Study on Restricted and Extended Symmetric Difference Operations of Soft Sets, *Collectanea Mathematica*.
- Sezgin, A. and Çağman, N. (2024b). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Difference Operation. *Osmaniye Korkut Ata University Journal of the Institute of Science and Technology*. 7(1), 1-37.
- Sezgin, A., Çağman, N., Atagün, A. O. and Aybek, F. (2023c). Complemental Binary Operations of Sets and Their Application to Group Theory. *Matrix Science Mathematic*, 7(2), 99-106.
- Sezgin A. and Çalışıcı, H. (2024). Comprehensive Study on Soft Binary Piecewise Difference Operation, *Eskişehir Teknik Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B-Teorik Bilimler*, 12(1), 1-23.
- Sezgin, A. and Demirci, A. M. (2023). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Star Operation. *Ikonion Journal of Mathematics*, 5(2), 24-52.
- Sezgin, A. and Sarıalioğlu, M. (2024). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Theta Operation. *Journal of Kadirli Faculty of Applied Sciences*, 4(1), 1-33.
- Sezgin, A., Shahzad, A. and Mehmood, A. (2019). New Operation on Soft Sets: Extended Difference of Soft Sets. *Journal of New Theory*, 27, 33-42.
- Sezgin, A. and Yavuz, E. (2023a). A New Soft Set Operation: Soft Binary Piecewise Symmetric Difference Operation. *Necmettin Erbakan University Journal of Science and Engineering*, 5(2), 150-168.
- Sezgin, A. and Yavuz, E. (2023b). New Soft Set Operation: Complementary Soft Binary Piecewise Lambda Operation. *Sinop University Journal of Natural Sciences*, 8(2), 101-133.
- Singh, D. and Onyeozili, I. A. (2012a). Notes on Soft Matrices Operations. *ARPN Journal of Science and Technology*, 2(9), 861-869.
- Singh, D. and Onyeozili, I. A. (2012b). On Some New Properties on Soft Set Operations. *International Journal of Computer Applications*, 59(4), 39-44.
- Singh, D. and Onyeozili, I. A. (2012c). Some Results on Distributive and Absorption Properties on Soft Operations. *IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM)*, 4(2), 18-30.
- Singh, D. and Onyeozili, I. A. (2012d). Some conceptual Misunderstanding of The Fundamentals of Soft Set Theory. *ARPN Journal of Systems and Softwares*, 2(9), 251-254.
- Stojanovic, N. S. (2021). A New Operation on Soft Sets: Extended Symmetric Sifference of Soft Sets. *Military Technical Courier*, 69(4), 779-791.

- Sun, Q. M., Zhang, Z. L., and Liu, J. (2008). Soft Sets and Soft Modules. In *Rough Sets and Knowledge Technology: Third International Conference, RSKT 2008, Chengdu, China, May 17-19, 2008. Proceedings 3* (pp. 403-409). Springer Berlin Heidelberg.
- Taşcı, D. (2007). *Soyut Cebir*. Ankara: Alp Yayınevi, 108-118.
- Ullah, A., Ahmad, I., Hayat, F., Karaaslan, F. and Rashad, M. (2018). Soft Intersection Abel-Grassmann's Groups. *Journal of Hyperstructures*, 7(2), 149-173.
- Ullah, A., Karaaslan, F. and Ahmad, I. (2018). Soft Uni-Abel-Grassmann's Groups. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 11(2), 517-536.
- Vandiver, H. S. (1934). Note On A Simple Type Of Algebra in Which The Cancellation Law of Addition Does not Hold. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 40, (12) 914-920.
- Xiao, Z., Chen, L., Zhong, B. and Ye, S. (2005). Recognition for Soft Information Based on the Theory of Soft Sets. *Proceedings of ICSSSM'05. 2005 International Conference on Services Systems and Services Management*, 2, 1104-1106.
- Xiao, Z., Gong, K., Xia, S. and Zou, Y. (2010). Exclusive Disjunctive Soft Sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(6), 2128-2137.
- Xiao, Z., Li, Y., Zhong, B. and Yang, X. (2003). Research on Synthetically Evaluating Method for Business Competitive Capacity Based on Soft Set. *Statistical Research*, 10, 52-54.
- Yang, C. F. (2003). A note on: Soft Set Theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 45(4-5), 555-562.
- Yang, C. F. (2008). A note on: Soft Set Theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(7), 1899-1900.
- Yang, H., Qu, C. and Li, N. C. (2004). The Induction and Decision Analysis of Clinical Diagnosis Based on Rough Sets and Soft Sets. *September*, (2007), 17(3), 208-212.
- Yang, J. and Yao, Y. (2020). Semantics of Soft Sets and Three-way Decision with Soft Sets. *Knowledge-Based Systems*, 194, 105538.
- Yang, X., Li, T. Y., Yang, J. and Yu, D. (2009). Combination of Interval-Valued Fuzzy Set and Soft Set. *Computers and Mathematics with Applications*, 58(3), 521-527.
- Yang, X., Yu, D., Yang, J. and Wu, C. (2007). Generalization of Soft Set Theory: From Crisp to Fuzzy Case. In *Fuzzy Information and Engineering: Proceedings of the Second International Conference of Fuzzy Information and Engineering (ICFIE)* (pp. 345-354). Springer Berlin Heidelberg.
- Yavuz, E. (2024). *Soft Binary Piecewise Operations and Their Properties*. Unpublished Master Thesis, Amasya University The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Amasya.

- Yücesan, C. (2011). *Bilgisayar Destekli Öğretimin 6. Sınıf Kümeler Konusunda Öğrenci Başarısına Etkisi* (Yüksek Lisans Tezi, Rize Üniversitesi, 2011).
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(1), 338-353.
- Zassenhaus, H. (1935). Über Endliche Fastkörper. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 11, 187-220.
- Zhan, J. and Jun, Y. B. (2010). Soft BL-algebras Based on Fuzzy Sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(6), 2037-2046.
- Zhu, P. and Wen, Q. (2013). Operations on Soft Sets Revisited. *Journal of Applied Mathematics*, 2013, 1-7.
- Zorlutuna, İ. (2021). Soft Set-Valued Mappings and Their Application in Decision Making Problems. *Filomat*, 35(5), 1725-1733.

## ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Hakan KÖKÇÜ

| Eğitim Derecesi | Okul/Program | Mezuniyet Yılı |
|-----------------|--------------|----------------|
|-----------------|--------------|----------------|

|        |                      |      |
|--------|----------------------|------|
| Lisans | Atatürk Üniversitesi | 2010 |
|--------|----------------------|------|

|               |                     |  |
|---------------|---------------------|--|
| Yüksek Lisans | Amasya Üniversitesi |  |
|---------------|---------------------|--|

### Yabancı Dili

İngilizce

### Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1-) Sezgin, A. and Kökçü, H. (2023). From a Different Aspect to Complementary Soft Binary Piecewise Difference and Lambda Operations. *Gaziosmanpasa Journal of Scientific Research*, 12(2), 114-137.