

**T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Doktora Tezi

**ESNEK MATRİSLER KULLANILARAK ELDE EDİLEN
BAZI KARAR VERME METOTLARI VE
UYGULAMALARI**

Hüseyin KAMACI

**Tez Danışmanı
Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU**

Yozgat 2018

**T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Doktora Tezi

**ESNEK MATRİSLER KULLANILARAK ELDE EDİLEN
BAZI KARAR VERME METOTLARI VE
UYGULAMALARI**

Hüseyin KAMACI

**Tez Danışmanı
Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU**

Yozgat 2018

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Doktora Programı 70111415001 numaralı öğrencisi Hüseyin KAMACI'nın hazırladığı “**Esnek Matrisler Kullanılarak Elde Edilen Bazı Karar Verme Metotları ve Uygulamaları**” başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 09/05/2018 Çarşamba günü saat 14:00'da yapılmış, tezin onayına oy birliği ile karar verilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Muammer KULA

Jüri Üyesi (Danışman) : Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

Jüri Üyesi : Dr. Öğr. Üyesi Emin AYGÜN

Jüri Üyesi : Dr. Öğr. Üyesi Funda TAŞDEMİR

Jüri Üyesi : Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKİZ

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 18.05.18 tarih ve 20-1 sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

18.05.2018
Prof. Dr. Fuat KÖKSAL
Müdür

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
KISALTMALAR VE SEMBOLLER LİSTESİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL BİLGİLER	4
2.1. Esnek Cümle.....	4
2.2. Esnek Cümle İşlemleri	6
3. ESNEK MATRİSLER VE İŞLEMLERİ.....	8
3.1. Esnek Matris.....	8
3.2. Esnek Matris İşlemleri.....	10
3.3. Esnek Max-Min Karar Verme Metodu	11
4. ESNEK MATRİSLERİN A-KOMPLEMENTİ VE FARK İŞLEMLERİ	14
4.1. Esnek Matrisin A-Komplementi	14
4.2. Esnek Matrislerin Fark İşlemleri	17
4.3. Esnek Fark Max-Satır Karar Verme Metodu	25
5. İNDİRGENMİŞ ESNEK MATRİS VE ESNEK DAĞILMALI MAX-MİN KARAR VERME METODU	30
5.1. İndirgenmiş Esnek Matris	30
5.2. İndirgenmiş Esnek Matrislerin Genelleştirilmiş Çarpımları	31
5.3. Esnek Dağılmalı Max-Min Karar Verme Metodu	36

6. İNDİRGENMİŞ ESNEK MATRİSLERİN SATIR ÇARPIMLARI VE KARAR VERMEDE UYGULAMALARI.....	40
6.1. İndirgenmiş Esnek Matrislerin Satır-Çarpımları	40
6.2. Çoklu-Esnek Dağılmalı Max-Min Karar Verme Metodu	45
6.3. Esnek Max-Satır Karar Verme Metodu.....	54
SONUÇ.....	61
KAYNAKLAR	62
ÖZGEÇMİŞ.....	65

ESNEK MATRİSLER KULLANILARAK ELDE EDİLEN BAZI KARAR VERME METOTLARI VE UYGULAMALARI

Hüseyin KAMACI

**Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi**

2018; Sayfa: 65

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

ÖZET

Bu çalışmada esnek fark, esnek kısıtlanmış fark, esnek genişletilmiş fark ve esnek zayıf- genişletilmiş fark gibi bazı yeni esnek matris işlemleri tanıtılmıştır. Bu işlemlerle ilgili birçok özellik ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Esnek fark max-satır karar verme olarak isimlendirilen yeni bir karar verme metodu oluşturulmuş ve daha sonra bu metodun bir uygulaması sunulmuştur. Ayrıca, esnek matrislerin genelleştirilmiş çarpımları tanımlanmıştır. Bu çarpımlar yardımıyla mevcut esnek max-min karar verme algoritması geliştirilerek esnek dağılmalı max-min karar verme algoritması inşa edilmiştir. Daha sonra, esnek matrislerin satır-çarpımları ve özellikleri verilmiştir. Bu satır-çarpımlar ve genelleştirilmiş çarpımlar kullanılarak esnek max-satır karar verme ve çoklu-esnek dağılmalı max-min karar verme olarak isimlendirilen iki yeni karar verme metodu önerilmiştir. Son olarak, bu metotların hangi karar verme problemlerinin çözümünde elverişli olduğunu göstermek için çeşitli örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Esnek cümle, Esnek matris, Esnek matris işlemleri, Esnek matris çarpımları, Karar verme.

SOME DECISION MAKING METHODS OBTAINED BY USING SOFT MATRICES AND THEIR APPLICATIONS

Hüseyin KAMACI

**Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
PhD Thesis**

2018; Page: 65

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

ABSTRACT

In this study, some new soft matrix operations such as the soft difference, soft restricted difference, soft extended difference and soft weak-extended difference are introduced. Several properties concerning these operations are taken up in detail. A novel decision making method called soft difference max-row decision making is created, and then its application is presented. Also, the generalized products of soft matrices are defined. By using these products, it is constructed a soft distributive max-min decision algorithm improving the max-min decision algorithm which is available in the literature. Later on, it is given the row-products of soft matrices and their related properties. By employing these row-products and generalized products, two new decision making methods called soft max-row decision making and multi-soft distributive max-min decision making are proposed. Finally, various examples are given to show how these methods are suitable for solving the decision making problems.

Keywords: Soft set, Soft matrix, Operations of soft matrices, Products of soft matrices, Decision making.

TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlamamda desteğini esirgemeyen danışmanım sayın Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU'na ve ayrıca tezin her aşamasında değerli bilgilerini bizlerle paylaşan sayın Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN'e,

Başta Tez İzleme Komitesi üyeleri Dr. Öğr. Üyesi Funda TAŞDEMİR ve Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKIZ olmak üzere maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen bölümümüzün değerli öğretim üyelerine,

Tez savunmama katılarak yorum, öneri ve geri bildirimleri ile tezime katkı sağlayan Doç. Dr. Muammer KULA ve Dr. Öğr. Üyesi Emin AYGÜN'e saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman arkamda duran değerli aileme ve tüm bu çalışma esnasında çekilen maddi manevi sıkıntılarımı paylaşan, her durumda desteğini esirgemeyen eşime ve oğluma sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

KISALTMALAR VE SEMBOLLER LİSTESİ

U	: Evrensel cümle
$P(U)$	: U cümlesinin kuvvet cümlesi
E	: Parametre cümlesi
F_A	: Esnek cümle
F_Φ	: Boş esnek cümle
$F_{\tilde{E}}$	: Evrensel esnek cümle
$[a_{ij}]$	: F_A esnek cümlesinin esnek matrisi
$S(U)$	: U üzerinde tanımlı esnek cümlelerin cümlesi
$SM(U)$	: U üzerinde tanımlı esnek matrislerin cümlesi
$\cong$	: Esnek alt cümle
c	: Esnek komplement
c_A	: Esnek A -komplement
$\tilde{\cup}$	: Esnek birleşim
$\tilde{\cap}$	: Esnek kesişim
$\tilde{\setminus}$	: Esnek fark
$\tilde{\setminus}_r$	: Esnek kısıtlanmış fark
$\tilde{\setminus}_\varepsilon$	: Esnek genişletilmiş fark
$\tilde{\setminus}_w$	: Esnek zayıf-genişletilmiş fark
$\vee$	: Esnek Veya çarpımı
$\wedge$	: Esnek Ve çarpımı
$\underline{\vee}$	: Esnek Veya-Değil çarpımı
$\overline{\wedge}$	: Esnek Ve-Değil çarpımı
γ	: Esnek genelleştirilmiş Veya çarpımı
λ	: Esnek genelleştirilmiş Ve çarpımı
$\underline{\gamma}$	: Esnek genelleştirilmiş Veya-Değil çarpımı

$\bar{\lambda}$	: Esnek genelleştirilmiş Ve-Değil çarpımı
$\vee_r$	: Esnek Veya satır-çarpımı
$\wedge_r$	: Esnek Ve satır-çarpımı
$\underline{\vee}_r$	: Esnek Veya-Değil satır-çarpımı
$\bar{\wedge}_r$	: Esnek Ve-Değil satır-çarpımı
M_m	: Esnek max-min karar fonksiyonu
M_r	: Esnek max-satır karar fonksiyonu
M'_r	: Esnek indirgenmiş max-satır karar fonksiyonu
$D_l f$	: Esnek sol-dağılmalı max-min karar fonksiyonu
$D_r f$	: Esnek sağ-dağılmalı max-min karar fonksiyonu
Df	: Esnek dağılmalı max-min karar fonksiyonu
$opt(U)$	: U nun optimum cümlesi

1. GİRİŞ

Modelleme, hesaplama ve mantık oluşturma için mevcut matematiksel modellerin çoğu genellikle kesin verilere dayanır. Ancak, ekonomi, mühendislik, doğa bilimi, tıp bilimi, sosyal bilimler gibi alanlardaki problemlerin neredeyse tamamı belirsizlikler veya bilinmeyen veriler içermektedir. Bu problemlerde var olan çeşitli belirsizlikler nedeniyle bu matematiksel modeller çözüm için yetersiz kalmaktadır. Son yıllarda, bu tür problemlerin çözümü için bulanık küme teorisi [1], kaba küme teorisi [2], belirsiz küme teorisi [3] ve aralık matematiği [4] gibi özel matematiksel modeller geliştirilmiştir. Ayrıca, bu matematiksel modellerle ilgili çok sayıda araştırma ve uygulama sunulmuştur. 1999 yılında, Molodtsov [5] belirsizliklere dayalı zorlukları ortadan kaldırmak için yeni bir matematiksel model olarak esnek cümle kavramını tanıtmıştır. İlerleyen yıllarda, esnek cümle kuramı ve işlemleri belirsizlik içeren problemlerle uğraşan birçok araştırmacının ilgisini çekmiştir. Riemann integrasyonu, Perron integrasyonu, oyun teorisi, ölçüm teorisi, olasılık teorisi gibi çeşitli alanlarda esnek cümlelerin çeşitli uygulamaları geliştirilmiştir. Maji ve ark. [6] tarafından bazı esnek cümle işlemlerinin ortaya atılması ve özelliklerinin incelenmesinin akabinde esnek cümle işlemleri üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Ali ve ark. [7] kısıtlanmış birleşim, kısıtlanmış kesişim, genişletilmiş kesişim, kısıtlanmış fark gibi esnek cümlelerin yeni işlemlerini sunmuştur. [8] de kısıtlanmış esnek fark işlemi tanımlanmış ve özellikleri araştırılmıştır. Pei and Miao [9] iki esnek cümle için esnek kesişimine yeni bir alternatif tanım sunmuştur. Zhu and Wen [10], [6] da tanımlanan esnek alt cümle kavramını tekrar yorumlamıştır. Çağman ve Enginoğlu [11] esnek cümle kavramını yaklaşım fonksiyonun tanım cümlesini orijinal parametre cümlesi olarak tekrar tanımlamıştır. Daha sonra bu tanım için esnek cümle işlemlerini yeniden tanıtmıştır. Ayrıca, [8, 12, 13] de iki esnek cümle için tanımlanan bazı esnek işlemler esnek cümlelerin bir ailesi için genelleştirilmiştir.

Esnek işlemler sayesinde cebir, topoloji, bilgi sistemleri, karar verme problemleri, oyun teori, olasılık teorisi gibi pek çok farklı alanda esnek cümle teorisinin uygulamaları yapılmıştır. Aktaş ve Çağman [14] esnek cebirsel yapılara ilk adım olarak esnek grup kavramını vermiştir. Daha sonraki yıllarda esnek yarı-halka [13], esnek halka [15], esnek modül [16], esnek halka, cisim ve modüllerin alt yapıları [17] gibi kavramlar türetilmiştir. Aynı zamanda, Shabir ve Naz [18] ilk kez esnek

topolojik uzayları ve bu uzaylarla ilgili teorik sonuçlar içeren bir çalışma sunmuştur. Aynı yıllarda, Çağman ve ark. [19] da esnek yapılardan yararlanarak bir esnek topoloji kavramını tanımlamıştır. [20-23] de esnek kompaktlık, esnek açık cümle, esnek kapalı cümle, esnek iç nokta, esnek süreklilik, esnek homeomorfizm, esnek ayırma aksiyomları gibi esnek topolojik kavramlar üzerine çalışılmıştır. Diğer taraftan, birçok araştırmacı esnek yapıları kullanarak karar verme problemlerin çözümü için çeşitli metotlar oluşturmuştur. Maji ve ark. [24] esnek cümlelerin ikili bilgi tablosu formundaki gösterimlerini sunmuş ve ayrıca bu gösterimleri kullanarak belirlenen kriterler altında en uygun alternatifi seçilebileceğini göstermiştir. Böylece, onlar karar verme üzerine temellenmiş esnek cümle teorisine öncülük etmiştir. Daha sonra, Çağman ve Enginoğlu [11] $uni - int$ karar verme metodu olarak isimlendirilen yeni bir esnek karar verme metodu oluşturmuştur. Feng ve ark. [25] bu metodu geliştirerek $uni - int^k$, $uni - int_s^t$ ve $int^m - int^n$ karar verme şemalarını sunmuştur. [26] da $int^m - int^n$ karar şemasını daha verimli hale getiren bir budama karar metodu geliştirilmiştir. Kharal [27] esnek yaklaşımları tanımlamış ve bu yaklaşımları kullanarak yeni bir karar verme konjonktörü önermiştir. [28, 29] da sırasıyla birebir-örten esnek cümle ve bu cümlelerin özel bir hali olan özel ayrıştırıcı esnek cümle kavramları tanıtılmıştır. Ayrıca, bu kavramlar üzerine kurulmuş karar verme metotları verilmiştir.

Esnek cümlelerin pratik bir gösterimi olan esnek matris kavramı ilk kez 2010 yılında Çağman ve Enginoğlu [30] tarafından ortaya atılmıştır. Onlar bu kavramın işlemlerini tanıtarak bu işlemlerin esnek cümle işlemlerinden daha pratik olduğunu ileri sürmüştür. Bu pratikliği göstermek için de esnek matris işlemleri üzerine inşa edilmiş bir karar verme algoritması ve bu algoritmanın bir uygulamasını sunmuştur. [31,32] de, bu esnek matris işlemleri kullanılarak yeni karar verme metotları geliştirilmiştir.

Bu tezde, ilk olarak esnek matris ve işlemleri detaylı olarak incelenmiştir. Daha sonra, esnek matrislerin yeni işlemleri araştırılmış ve bu işlemler kullanılarak yeni karar verme metotları inşa edilmiştir. Ayrıca, bu metotların esnek matrisler kullanılarak oluşturulmuş mevcut karar verme metotlarından farkları ve yenilikleri üzerine kapsamlı bir araştırma yapılmıştır.

Bu tezin diğ er bölümleri řu şekilde düzenlenmiştir. İkinci bölümde, esnek cümle ve esnek işlemler ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.     nc  bölümde, bir esnek cümleye karşılık gelen esnek matris ve işlemleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde, esnek matrisler için yeni işlemler tanımlanmış ve bu işlemler yardımıyla esnek fark max-satır karar verme algoritması inşa edilmiştir. Beşinci bölümde, indirgenmiş esnek matrisler tanıtılmış ve bazı esnek matris çarpımları indirgenmiş esnek matrisler için genelleştirilmiştir. Ayrıca, bu çarpımlar kullanılarak esnek dağılmalı max-min karar verme metodu oluşturulmuştur. Altıncı bölüm, indirgenmiş esnek matrislerin satır-çarpımları üzerine kurulmuştur. Bu bölümde, çoklu alternatif cümlesi içeren karar problemlerinin çözümü için iki yeni karar verme metodu sunulmuştur.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, temel bilgi niteliğinde olan ve tezin diğer bölümlerine katkı sağlayan bazı kavramlar verilecektir.

2.1. Esnek Cümle

Esnek cümle kavramı ilk olarak 1999 yılında Molodtsov tarafından ortaya atılmıştır. Daha sonra, bu cümle yapısı üzerinde birçok işlem geliştirilmiştir. 2010 yılında Çağman ve Enginoğlu [11] esnek cümle işlemlerini yeni sonuçlar üretmede daha fonksiyonel hale getirmek için yeniden tanımlamıştır. Bu kısımda, esnek cümle kavramı ve [11] de tanımlanan esnek cümle işlemleri hatırlatılacaktır.

Bir nesneler cümlesi üzerinde bir esnek cümle tanımlamak için bu nesneleri karakterize eden özellikleri detaylı olarak ifade etmemiz gerekir. Bu nesneleri karakterize etmek için kullanacağımız kriterlerin cümlesine parametre cümlesi denir. Birinci bileşende parametre, ikinci bileşende özelliği sağlayan objelerin cümlesi olacak şekildeki sıralı ikililerin cümlesine bir esnek cümle denir.

U bir evrensel cümle, E parametrelerin cümlesi, $P(U)$ evrensel cümlelerin kuvvet cümlesi ve $A \subseteq E$ olsun.

Tanım 2.1.1. ([5,11]) U üzerinde bir F_A esnek cümlesi, $f_A: E \rightarrow P(U)$ öyle ki $e_j \notin A \Rightarrow f_A(e_j) = \emptyset$ şeklinde tanımlanmış bir fonksiyon olmak üzere,

$$F_A = \{(e_j, f_A(e_j)): e_j \in E, f_A(e_j) \in P(U)\}$$

sıralı ikililerinin cümlesidir. Burada, f_A fonksiyonuna F_A esnek cümlesinin yaklaşım fonksiyonu denir.

Notasyon: U üzerinde tüm esnek cümlelerin cümlesi $S(U)$ ile gösterilecektir.

Örnek 2.1.2. Kabul edelim ki bir şirketin mali ve idari işlerinden sorumlu iki yardımcısı boş bir pozisyon için başvuran 5 adayı değerlendiriyor. Bu boş pozisyon için başvuran adayların cümlesi $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ olmak üzere bu adayların değerlendirileceği kriterlerin (parametrelerin) cümlesi de $E = \{e_1 = \text{en az lisans mezunu}, e_2 = \text{genç}, e_3 = \text{diksiyonu düzgün}, e_4 = \text{ingilizce bilen}, e_5 = \text{deneyimli}, e_6 = \text{bekar}\}$ olsun.

Şirketin mali işlerinden sorumlu müdür yardımcısı kriterler (parametreler) cümlesinden $A = \{e_1, e_3, e_4, e_5\} \subset E$ cümlesini seçerek kendine göre bu kriterleri sağlayan adayları $f_A(e_1) = \{u_1, u_2, u_5\}$, $f_A(e_3) = \{u_2, u_3, u_4\}$, $f_A(e_4) = \emptyset$, $f_A(e_5) = \{u_2\}$ şeklinde belirliyor. O halde, mali işlerden sorumlu müdür yardımcısının F_A esnek cümlesi

$$F_A = \{(e_1, \{u_1, u_2, u_5\}), (e_3, \{u_2, u_3, u_4\}), (e_4, \emptyset), (e_5, \{u_2\})\}$$

dir.

Şirketin idari işlerinden sorumlu müdür yardımcısı kriterler (parametreler) cümlesinden $B = E$ cümlesini seçerek kendine göre bu kriterleri sağlayan adayları $f_B(e_1) = \{u_1, u_2, u_5\}$, $f_B(e_2) = U$, $f_B(e_3) = \{u_1, u_3\}$, $f_B(e_4) = \emptyset$, $f_B(e_5) = \{u_2, u_5\}$, $f_B(e_6) = \{u_2, u_5\}$ şeklinde belirliyor. O halde, idari işlerden sorumlu müdür yardımcısının F_B esnek cümlesi

$$F_B = \{(e_1, \{u_1, u_2, u_5\}), (e_2, U), (e_3, \{u_1, u_3\}), (e_4, \emptyset), (e_5, \{u_2, u_5\}), (e_6, \{u_2, u_5\})\}$$

dir.

Tanım 2.1.3. ([11]) $F_A \in S(U)$ olsun. Eğer $\forall e_j \in E$ için $f_A(e_j) = \emptyset$ ise F_A esnek cümlesi *boş (empty) esnek cümle* olarak isimlendirilir ve $F_\emptyset$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4. ([11]) $F_A \in S(U)$ olsun. Eğer $\forall e_j \in A$ için $f_A(e_j) = U$ ise F_A esnek cümlesi *A-evrensel esnek cümle* olarak isimlendirilir ve $F_{\tilde{A}}$ ile gösterilir. Eğer $A = E$ ise bu takdirde F_A esnek cümlesi *evrensel esnek cümle* olarak isimlendirilir ve $F_{\tilde{E}}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5. ([11]) $F_A, F_B \in S(U)$ olsun. Eğer $\forall e_j \in E$ için $f_A(e_j) \subseteq f_B(e_j)$ ise F_A esnek cümlesine F_B esnek cümlesinin *esnek alt cümlesi* denir ve $F_A \subseteq F_B$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.6. ([11]) $F_A, F_B \in S(U)$ olsun. Eğer $\forall e_j \in E$ için $f_A(e_j) = f_B(e_j)$ ise F_A ve F_B esnek cümlelerine *esnek eşittir* denir ve $F_A = F_B$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.7. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ alternatiflerin cümlesi, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ parametrelerin cümlesi ve $A = \{e_1, e_3\}$, $B = \{e_1, e_2\}$ olsun. Bu parametre cümleleri için, $F_A = \{(e_1, U), (e_3, U)\}$ ve $F_B = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \emptyset)\}$ esnek cümlelerini alalım. Bu durumda F_A bir A-evrensel esnek cümle ve F_B boş esnek cümledir. Ayrıca, kolaylıkla görülür ki $F_B \subseteq F_A$ dır.

2.2. Esnek Cümle İşlemleri

Klasik cümle teorisindeki işlemlerin birçoğu esnek cümle teorisinde de mevcuttur. Bu kısımda, sıkça kullanılan bazı esnek cümle işlemleri verilecektir.

Tanım 2.2.1. ([11]) F_A , U üzerinde bir esnek cümle olsun. Bu durumda

$$f_A^c: E \rightarrow P(U) \text{ öyle ki } \forall e_j \in E \text{ için } f_A^c(e_j) = U \setminus f_A(e_j)$$

yaklaşım fonksiyonu ile tanımlanan esnek cümleye F_A esnek cümlesinin *komplementi* (*tümleyeni*) denir ve F_A^c şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.2. ([11]) F_A ve F_B , U üzerinde iki esnek cümle olsun. Bu durumda

$$f_{A \tilde{\cap} B}: E \rightarrow P(U) \text{ öyle ki } \forall e_j \in E \text{ için } f_{A \tilde{\cap} B}(e_j) = f_A(e_j) \cap f_B(e_j)$$

yaklaşım fonksiyonu ile tanımlanan esnek cümleye F_A ve F_B esnek cümlelerinin *kesişimi* denir ve $F_A \tilde{\cap} F_B$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.3. ([11]) F_A ve F_B , U üzerinde iki esnek cümle olsun. Bu durumda

$$f_{A \cup B}: E \rightarrow P(U) \text{ öyle ki } \forall e_j \in E \text{ için } f_{A \cup B}(e_j) = f_A(e_j) \cup f_B(e_j)$$

yaklaşım fonksiyonu ile tanımlanan esnek cümleye F_A ve F_B esnek cümlelerinin *birleşimi* denir ve $F_A \tilde{\cup} F_B$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.4. ([11]) F_A ve F_B , U üzerinde iki esnek cümle olsun. Bu durumda

$$f_{A \tilde{\setminus} B}: E \rightarrow P(U) \text{ öyle ki } \forall e_j \in E \text{ için } f_{A \tilde{\setminus} B}(e_j) = f_A(e_j) \setminus f_B(e_j)$$

yaklaşım fonksiyonu ile tanımlanan esnek cümleye F_A ve F_B esnek cümlelerinin *farkı* denir ve $F_A \tilde{\setminus} F_B$ şeklinde gösterilir.

Önerme 2.2.5. ([11]) F_A ve F_B , U üzerinde iki esnek cümle olsun. Bu durumda

$$F_A \tilde{\setminus} F_B = F_A \tilde{\cap} F_B^c$$

dir.

Tanım 2.2.6. ([11]) F_A ve F_B , U üzerinde iki esnek cümle olsun. Bu durumda

a) $f_{A \wedge B}: E \times E \rightarrow P(U)$ öyle ki $\forall (e_j, e_k) \in E \times E$ için $f_{A \wedge B}(e_j, e_k) = f_A(e_j) \cap f_B(e_k)$ yaklaşım fonksiyonu ile tanımlanan esnek cümleye F_A ve F_B esnek cümlelerinin *Ve çarpımı* denir ve $F_A \wedge F_B$ şeklinde gösterilir.

b) $f_{A \vee B}: E \times E \rightarrow P(U)$ öyle ki $\forall (e_j, e_k) \in E \times E$ için $f_{A \vee B}(e_j, e_k) = f_A(e_j) \cup f_B(e_k)$ yaklaşım fonksiyonu ile tanımlanan esnek cümleye F_A ve F_B esnek cümlelerinin *Veya çarpımı* denir ve $F_A \vee F_B$ şeklinde gösterilir.

c) $f_{A\bar{\wedge}B}: E \times E \rightarrow P(U)$ öyle ki $\forall(e_j, e_k) \in E \times E$ için $f_{A\bar{\wedge}B}(e_j, e_k) = f_A(e_j) \cap f_B^c(e_k)$ yaklaşım fonksiyonu ile tanımlanan esnek cümleye F_A ve F_B esnek cümlelerinin *Ve-Değil çarpımı* denir ve $F_A \bar{\wedge} F_B$ şeklinde gösterilir.

d) $f_{A\vee B}: E \times E \rightarrow P(U)$ öyle ki $\forall(e_j, e_k) \in E \times E$ için $f_{A\vee B}(e_j, e_k) = f_A(e_j) \cup f_B^c(e_k)$ yaklaşım fonksiyonu ile tanımlanan esnek cümleye F_A ve F_B esnek cümlelerinin *Veya-Değil çarpımı* denir ve $F_A \vee F_B$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.2.7. Kabul edelim ki $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ alternatiflerin cümlesi ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametrelerin cümlesi, $A = \{e_1, e_3, e_4\}$ ve $B = \{e_1, e_4\}$ olsun. Ayrıca, bu parametre cümleleri için, esnek cümleler $F_A = \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_3, U), (e_4, \{u_1, u_4\})\}$, $F_B = \{(e_1, \{u_1, u_2, u_3\}), (e_4, \{u_1, u_3\})\}$ olsun. Bu durumda,

$$F_A^c = \{(e_1, \{u_3, u_4\}), (e_2, U), (e_3, \emptyset), (e_4, \{u_2, u_3\})\},$$

$$F_A \tilde{\cap} F_B = \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, \emptyset), (e_3, \emptyset), (e_4, \{u_1\})\},$$

$$F_A \tilde{\cup} F_B = \{(e_1, \{u_1, u_2, u_3\}), (e_2, \emptyset), (e_3, U), (e_4, \{u_1, u_3, u_4\})\},$$

$$F_A \tilde{\setminus} F_B = \{(e_1, \emptyset), (e_2, \emptyset), (e_3, U), (e_4, \{u_4\})\},$$

$$F_A \wedge F_B = \{((e_1, e_1), \{u_1, u_2\}), ((e_1, e_4), \{u_1\}), ((e_3, e_1), \{u_1, u_2, u_3\}), ((e_3, e_4), \{u_1, u_3\}), ((e_4, e_1), \{u_1\}), ((e_4, e_4), \{u_1\})\}$$

şeklinde elde edilir.

3. ESNEK MATRİSLER VE İŞLEMLERİ

Esnek cümlelerin bir matris temsili olan esnek matrisler ilk olarak 2010 yılında Çağman ve Enginoğlu [30] tarafından tanımlanmıştır. Ayrıca, onlar bazı esnek matris işlemlerini tanıtmış ve bu işlemlerin özelliklerini incelemişlerdir. Bu bölümde, esnek matris kavramı ve işlemleri tanıtılacak ve çeşitli alanlardaki belirsizlik içeren bazı karar verme problemlerini çözmede esnek matrislerin esnek cümlelerden daha pratik ve verimli olduğunu gösteren örnekler verilecektir.

3.1. Esnek Matris

Bu kısımda, bir esnek cümleye karşılık gelen esnek matris kavramı tanımlanacaktır.

Tanım 3.1.1. ([30]) $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ seçeneklerin cümlesi, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ parametrelerin cümlesi, $A \subseteq E$ ve F_A , U üzerinde bir esnek cümle olsun.

$\forall i, j$ için

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & u_i \in f_A(e_j) \\ 0, & u_i \notin f_A(e_j) \end{cases}$$

olmak üzere

$$[a_{ij}]_{n \times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

matrisine U üzerinde F_A esnek cümlesinin bir *esnek matrisi* denir.

$n \times m$ esnek matris tanımına göre, bir F_A esnek cümlesi $[a_{ij}]$ matrisi tarafından tek bir şekilde karakterize edilebilir. Dolayısıyla bir F_A esnek cümlesi, onun esnek matrisi olan $[a_{ij}]$ matrisine biçimsel olarak eşittir.

Notasyon: $S(U)$ cümlesindeki esnek cümlelere karşılık gelen bütün esnek matrislerin cümlesi $SM(U)$ ile gösterilecektir. Ayrıca, $n \times m$ tipindeki bütün esnek matrislerin cümlesi $SM_{n \times m}$ şeklinde ifade edilecektir.

Örnek 3.1.2. Örnek 2.1.2 deki F_A esnek cümlesini düşünelim. Bu durumda, bu esnek cümleye karşılık gelen $[a_{ij}] \in SM_{5 \times 6}$ esnek matrisi

$$[a_{ij}]_{5 \times 6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 3.1.3. ([30]) $[a_{ij}], [b_{ij}] \in SM_{n \times m}$ olsun. Bu durumda $\forall i, j$ için $a_{ij} = 0$ ise $[a_{ij}]$ esnek matrisine *sıfır esnek matris* denir ve $[0]$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.4. ([30]) $[a_{ij}], [b_{ij}] \in SM_{n \times m}$ olsun.

a) Eğer $\forall i$ ve $j \in I_A = \{j: e_j \in A\}$ için $a_{ij} = 1$ ise bu durumda $[a_{ij}]$ esnek matrisi *A-evrensel esnek matris* olarak isimlendirilir ve $[1_A]$ ile gösterilir.

b) Eğer $\forall i, j$ için $a_{ij} = 1$ ise bu durumda $[a_{ij}]$ esnek matrisi *evrensel esnek matris* olarak isimlendirilir ve $[1]$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.5. ([30]) $[a_{ij}], [b_{ij}] \in SM_{n \times m}$ olsun. Eğer $\forall i, j$ için $a_{ij} \leq b_{ij}$ ise bu durumda $[a_{ij}]$ esnek matrisi $[b_{ij}]$ matrisinin *esnek alt matrisi* olarak isimlendirilir ve $[a_{ij}] \subseteq [b_{ij}]$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.6. ([30]) $[a_{ij}], [b_{ij}] \in SM_{n \times m}$ olsun. Eğer $\forall i, j$ için $a_{ij} = b_{ij}$ ise bu durumda $[a_{ij}]$ ve $[b_{ij}]$ matrisleri *esnek eşit matrisler* olarak isimlendirilir ve $[a_{ij}] = [b_{ij}]$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.7. Örnek 2.1.7 de verilen $A = \{e_1, e_3\}$ ve $B = \{e_1, e_2\}$ parametre cümleleri için sırasıyla $F_A = \{(e_1, U), (e_3, U)\}$ ve $F_B = \{(e_1, \emptyset), (e_2, \emptyset)\}$ esnek cümlelerini göz önüne alalım. Bu esnek cümlelerin esnek matrisleri sırasıyla

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır. Bu durumda $[a_{ij}]$ bir A-evrensel esnek matris ve $[b_{ij}]$ sıfır esnek matristir. Ayrıca $\forall i, j$ için $b_{ij} \leq a_{ij}$ olduğundan $[b_{ij}]$ esnek matrisi $[a_{ij}]$ matrisinin esnek alt matrisidir.

3.2. Esnek Matris İşlemleri

Esnek cümlelerdeki işlemler esnek matrislere aktarılmıştır. Bu kısımda, bu işlemlerden bazıları tanıtılacaktır.

Tanım 3.2.1. ([30]) $[a_{ij}], [b_{ij}] \in SM_{n \times m}$ olsun. Eğer $\forall i, j$ için $c_{ij} = \min\{a_{ij}, b_{ij}\}$ ise bu durumda $[c_{ij}] \in SM_{n \times m}$ esnek matrisi $[a_{ij}]$ ve $[b_{ij}]$ matrislerinin *esnek kesişimi* olarak isimlendirilir ve $[c_{ij}] = [a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}]$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.2. ([30]) $[a_{ij}], [b_{ij}] \in SM_{n \times m}$ olsun. Eğer $\forall i, j$ için $c_{ij} = \max\{a_{ij}, b_{ij}\}$ ise bu durumda $[c_{ij}] \in SM_{n \times m}$ esnek matrisi $[a_{ij}]$ ve $[b_{ij}]$ matrislerinin *esnek birleşimi* denir ve $[c_{ij}] = [a_{ij}] \tilde{\cup} [b_{ij}]$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.3. ([30]) $[F_A] = [a_{ij}] \in SM_{n \times m}$ olsun. Eğer $\forall i, j$ için $c_{ij} = 1 - a_{ij}$ ise bu durumda $[c_{ij}]$ esnek matrisi $[a_{ij}]$ esnek matrisinin *komplementi (tümleyeni)* olarak isimlendirilir ve $[c_{ij}] = [a_{ij}]^c$ ile gösterilir.

Önerme 3.2.4. ([30]) $[a_{ij}], [b_{ij}] \in SM_{n \times m}$ olsun.

- i) $([a_{ij}]^c)^c = [a_{ij}]$
- ii) $[0]^c = [1]$
- iii) $[a_{ij}] \tilde{\cap} [a_{ij}]^c = [0]$
- iv) $[a_{ij}] \tilde{\cup} [a_{ij}]^c = [1]$
- v) $([a_{ij}] \tilde{\cup} [b_{ij}])^c = [a_{ij}]^c \tilde{\cap} [b_{ij}]^c$
- vi) $([a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}])^c = [a_{ij}]^c \tilde{\cup} [b_{ij}]^c$

Tanım 3.2.5. ([30]) $[a_{ij}], [b_{ik}] \in SM_{n \times m}$ olsun.

a) $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ esnek matrislerinin *Ve çarpımı* ($\wedge$)

$$\wedge: SM_{n \times m} \times SM_{n \times m} \rightarrow SM_{n \times m^2}$$

$$[a_{ij}], [b_{ik}] \rightarrow [a_{ij}] \wedge [b_{ik}] = [c_{il}]$$

şeklinde tanımlanır. Burada $l = m(j - 1) + k$ ve $c_{il} = \min\{a_{ij}, b_{ik}\}$ dır.

b) $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ esnek matrislerinin *Veya çarpımı* ($\vee$)

$$\vee: SM_{n \times m} \times SM_{n \times m} \rightarrow SM_{n \times m^2}$$

$$[a_{ij}], [b_{ik}] \rightarrow [a_{ij}] \vee [b_{ik}] = [c_{il}]$$

şeklinde tanımlanır. Burada $l = m(j - 1) + k$ ve $c_{il} = \max\{a_{ij}, b_{ik}\}$ dır.

c) $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ esnek matrislerinin *Ve-Değil* çarpımı ($\bar{\wedge}$)

$$\bar{\wedge}: SM_{n \times m} \times SM_{n \times m} \rightarrow SM_{n \times m^2}$$

$$[a_{ij}], [b_{ik}] \rightarrow [a_{ij}] \bar{\wedge} [b_{ik}] = [c_{il}]$$

şeklinde tanımlanır. Burada $l = m(j - 1) + k$ ve $c_{il} = \min\{a_{ij}, 1 - b_{ik}\}$ dır.

d) $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ esnek matrislerinin *Veya-Değil* çarpımı ($\underline{\vee}$)

$$\underline{\vee}: SM_{n \times m} \times SM_{n \times m} \rightarrow SM_{n \times m^2}$$

$$[a_{ij}], [b_{ik}] \rightarrow [a_{ij}] \underline{\vee} [b_{ik}] = [c_{il}]$$

şeklinde tanımlanır. Burada $l = m(j - 1) + k$ ve $c_{il} = \max\{a_{ij}, 1 - b_{ik}\}$ dır.

Örnek 3.2.6. Örnek 2.2.7 de verilen F_A ve F_B esnek cümlelerini göz önüne alalım.

Bu esnek cümlelerinin esnek matrisleri sırasıyla

$$[a_{ij}]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } [b_{ij}]_{4 \times 4} = [b_{ik}]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır. Bu durumda,

$$[a_{ij}]^c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [a_{ij}] \tilde{\cup} [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Ayrıca, $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ esnek matrislerinin *Ve* çarpımı

$$[c_{il}] = [a_{ij}] \wedge [b_{ik}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla $[c_{il}]$ esnek matrisinin tipi 4×16 dır.

3.3. Esnek Max-Min Karar Verme Metodu

Bu kısımda, esnek matrisler ve işlemlerini kullanarak oluşturulmuş esnek max-min karar verme metodu ve onun bir uygulaması verilecektir.

Tanım 3.3.1. ([30]) $[a_{ij}], [b_{ik}] \in SM_{n \times m}$ iki esnek matris olsun. $[c_{il}] \in SM_{n \times m^2}$ ve $k \in I = \{1, 2, \dots, m\}$ için

$$I_k = \{l : \exists i, c_{il} \neq 0, (k - 1)m < l \leq km\}$$

olsun. Bu durumda *esnek max-min karar verme fonksiyonu* M_m ,

$$M_m: SM_{n \times m^2} \rightarrow SM_{n \times 1}, M_m([c_{il}]) = [\max_{k \in I} \{t_k\}]$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$$t_k = \begin{cases} \min_{l \in I_k} \{c_{il}\}, & I_k \neq \emptyset \\ 0, & I_k = \emptyset \end{cases}$$

dır. Bu durumda, $M_m([c_{il}])$ sütun esnek matrisine *max-min karar esnek matrisi* denir.

Tanım 3.3.2. ([30]) $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ seçeneklerin cümlesi ve $M_m([c_{il}]) = [d_{i1}]$ olsun. Bu durumda,

$$opt_{[d_{i1}]}(U) = \{u_i : u_i \in U, d_{i1} = 1\}$$

cümlesine U nun *optimum cümlesi* denir.

Bu durumda esnek max-min karar fonksiyonu kullanılarak, aşağıdaki algoritmayla *esnek max-min karar verme metodu* verilebilir:

Adım 1: Parametrelerin uygun alt cümleleri seçilir ve esnek cümleler oluşturulur.

Adım 2: Her bir esnek cümleye karşılık gelen esnek matrisler oluşturulur.

Adım 3: Bu esnek matrislerin verilen probleme göre en uygun çarpımı alınır.

Adım 4: Esnek max-min karar fonksiyonu kullanılarak max-min karar esnek matrisi bulunur.

Adım 5: U nun optimum cümlesi elde edilir.

Örnek 3.3.3. Bir doktora öğrencisi ile danışmanı, öğrencinin ders dönemini tamamlaması için alması gereken bir seçmeli dersi 5 ders arasından belirlemek istiyor. Seçmeli derslerin cümlesi $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ olsun. Bu dersi belirlemek için kullanacakları parametrelerin cümlesi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olmak üzere, bu parametreler sırasıyla ‘içeriği uygun’, ‘devam zorunluluğu aranmayan’, ‘bilgisayar uygulaması olan’, ve ‘programı (saati) uygun’ şeklinde belirlensin.

Danışman ve öğrenci, esnek max-min karar verme metodunu kullanarak öğrencinin ders döneminde alması gereken en uygun dersi aşağıdaki şekilde bulabilir:

Adım 1: İlk olarak danışman ve öğrenci parametre cümlesinden kendi parametrelerini sırasıyla $A = \{e_1, e_3, e_4\}$ ve $B = \{e_2, e_3, e_4\}$ şeklinde belirleyerek bu parametre cümlelerine göre $F_A = \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_3, \{u_1, u_3, u_4\}), (e_4, U)\}$ ve $F_B =$

$\{(e_2, \{u_2, u_3, u_4, u_5\}), (e_3, \{u_1, u_2, u_3\}), (e_4, \{u_1, u_2, u_4\})\}$ esnek cümlelerini oluştururlar.

Adım 2: Bu esnek cümlelere karşılık gelen esnek matrisleri sırasıyla

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } [b_{ik}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Adım 3: Ve çarpımı kullanılarak esnek matrislerin çarpımı

$$[c_{il}] = [a_{ij}] \wedge [b_{ik}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Adım 4: Bu çarpım esnek matrisi için max-min karar fonksiyonu kullanılarak,

$$M_m([c_{il}]) = [d_{i1}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

max-min karar esnek matrisi elde edilir.

Adım 5: Son olarak, $[d_{i1}]$ max-min karar esnek matrisinden U nun optimum cümlesi

$$\text{opt}_{[d_{i1}]}(U) = \{u_2\}$$

elde edilir. Buradan da anlaşılır ki öğrenci için en uygun seçmeli ders u_2 dir.

4. ESNEK MATRİSLERİN A-KOMPLEMENTİ VE FARK İŞLEMLERİ

Bu bölümde, esnek yapıların çeşitli alanlardaki uygulamalarına katkı sağlayan esnek matrislerin A -komplementi ve çeşitli fark işlemleri tanıtılacaktır. Ayrıca, bu esnek fark işlemleriyle ilgili bazı teorik sonuçlar sunulacaktır.

Notasyon: F_A , U üzerinde bir esnek cümle olmak üzere F_A ya karşılık gelen esnek matris $[F_A]$ ile gösterilecektir.

4.1. Esnek Matrisin A-Komplementi

Esnek cümleler üzerinde tanımlanmış olan komplement kavramı [30] da esnek matrislere aktarılmıştır. Bu kısımda, esnek matrisler için A -komplement kavramı tanımlanacaktır.

Tanım 4.1.1. F_A , U üzerinde bir esnek cümle olsun. Bu durumda

$$f_A^{cA}: E \rightarrow P(U) \text{ öyle ki } \forall e_j \in E \text{ için } f_A^{cA}(e_j) = \begin{cases} U \setminus f_A(e_j), & e_j \in A \\ \emptyset, & e_j \notin A \end{cases}$$

yaklaşım fonksiyonu ile tanımlanan esnek cümleye F_A esnek cümlesinin A -komplementi denir ve F_A^{cA} şeklinde gösterilir.

Örnek 4.1.2. Farz edelim ki $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ parametrelerin cümlesi, $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ alternatiflerin cümlesi, $A = \{e_1, e_3, e_4, e_5\} \subset E$ ve $F_A = \{(e_1, \{u_2, u_3, u_4\}), (e_3, \emptyset), (e_4, U), (e_5, \{u_1\})\}$ olsun. Bu durumda F_A esnek cümlesinin komplementi ve A -komplementi sırasıyla

$$F_A^c = \{(e_1, \{u_1\}), (e_2, U), (e_3, U), (e_4, \emptyset), (e_5, \{u_2, u_3, u_4\}), (e_6, U)\}$$

ve

$$F_A^{cA} = \{(e_1, \{u_1\}), (e_3, U), (e_4, \emptyset), (e_5, \{u_2, u_3, u_4\})\}$$

şeklinde elde edilir.

Bir F_A esnek cümlesinin A -komplementine karşılık gelen esnek matris, $[F_A]$ esnek matrisinin komplementine eşit değildir. Şimdi F_A nın A -komplementine karşılık gelen $[F_A]$ esnek matrisi için A -komplement kavramını verelim.

Tanım 4.1.3. $A \subseteq E = \{e_j: 1 \leq j \leq m\}$, $I_A = \{j: e_j \in A\}$ ve $[F_A] = [a_{ij}] \in SM_{n \times m}$ olsun. Eğer $c_{ij} = \begin{cases} 1 - a_{ij}, & j \in I_A \\ 0, & j \notin I_A \end{cases}$ ise bu durumda $[c_{ij}]$ esnek matrisi $[a_{ij}]$ esnek matrisinin A -komplementi olarak isimlendirilir ve $[c_{ij}] = [a_{ij}]^{c_A}$ şeklinde gösterilir.

Örnek 4.1.4. Örnek 4.1.2 deki F_A esnek cümlesini düşünelim. F_A ya karşılık gelen esnek matris

$$[F_A] = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır. Bu durumda $[F_A]$ esnek matrisinin komplementi ve A -komplementi sırasıyla

$$[F_A]^c = [a_{ij}]^c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$[F_A]^{c_A} = [a_{ij}]^{c_A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Önerme 4.1.5. $[F_A], [F_B] \in SM_{n \times m}$ olsun.

- i) $([F_A]^{c_A})^{c_A} = [F_A]$
- ii) $[0]^{c_A} = [1_A]$
- iii) $[F_A] \tilde{\cap} [F_A]^{c_A} = [0]$
- iv) $[F_A] \tilde{\cup} [F_A]^{c_A} = [1_A]$
- v) $[F_A]^{c_A} \tilde{\cap} [F_B]^{c_B} = ([F_A] \tilde{\cup} [F_B])^{c_{A \cap B}}$
- vi) $[F_A]^{c_A} \cong [F_A]^c$

İspat: $[F_A] = [a_{ij}] \in SM_{n \times m}$ ve $[F_B] = [b_{ij}] \in SM_{n \times m}$ esnek matrislerini alalım.

- i) $([F_A]^{c_A})^{c_A} = [c_{ij}]$ olsun. Tanım 4.1.3 ten, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \begin{cases} 1 - (1 - a_{ij}), & j \in I_A \\ 0, & j \notin I_A \end{cases} \\ &= \begin{cases} a_{ij}, & j \in I_A \\ 0, & j \notin I_A \end{cases} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla $[c_{ij}] = [F_A]$ elde edilir.

ii) $[0]^{c_A} = [c_{ij}]$ olsun. Tanım 4.1.3 ten, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 - 0, & j \in I_A \\ 0, & j \notin I_A \end{cases}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla Tanım 3.1.4 den $[c_{ij}] = [1_A]$ elde edilir.

iii) $[F_A] \tilde{\cap} [F_A]^{c_A} = [c_{ij}]$ olsun. Tanım 3.2.3 ve Tanım 4.1.3 den, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \begin{cases} \min\{a_{ij}, 1 - a_{ij}\}, & j \in I_A \\ \min\{a_{ij}, 0\}, & j \notin I_A \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & j \in I_A \\ 0, & j \notin I_A \end{cases} \\ &= 0 \end{aligned}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla $[c_{ij}] = [0]$ elde edilir.

iv) $[F_A] \tilde{\cup} [F_A]^{c_A} = [c_{ij}]$ olsun. Tanım 3.2.4 ve Tanım 4.1.3 ten, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \begin{cases} \max\{a_{ij}, 1 - a_{ij}\}, & j \in I_A \\ \max\{0, 0\}, & j \notin I_A \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & j \in I_A \\ 0, & j \notin I_A \end{cases} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla Tanım 3.1.4 den $[c_{ij}] = [1_A]$ elde edilir.

v) $[F_A]^{c_A} \tilde{\cap} [F_B]^{c_B} = [c_{ij}]$ ve $([F_A] \tilde{\cup} [F_B])^{c_{A \cap B}} = [d_{ij}]$ olsun. Tanım 3.2.3, Tanım 3.2.4 ve Tanım 4.1.3 ten, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \begin{cases} \min\{1 - a_{ij}, 1 - b_{ij}\}, & j \in I_{A \cap B} \\ \min\{1 - a_{ij}, 0\}, & j \in I_{A \setminus B} \\ \min\{0, 1 - b_{ij}\}, & j \in I_{B \setminus A} \\ 0, & j \notin I_{A \cup B} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \min\{1 - a_{ij}, 1 - b_{ij}\}, & j \in I_{A \cap B} \\ 0, & j \notin I_{A \cap B} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1)$$

ve

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \begin{cases} 1 - \max\{a_{ij}, b_{ij}\}, & j \in I_{A \cap B} \\ 0, & j \notin I_{A \cap B} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \min\{1 - a_{ij}, 1 - b_{ij}\}, & j \in I_{A \cap B} \\ 0, & j \notin I_{A \cap B} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2)$$

yazabiliriz. Dolayısıyla (4.1) ve (4.2) den $[c_{ij}] = [d_{ij}]$ elde edilir.

vi) $[F_A]^{c_A} = [c_{ij}]$ ve $[F_A]^c = [d_{ij}]$ olsun. Tanım 3.2.1 ve Tanım 4.1.3 ten, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 - a_{ij}, & j \in I_A \\ 0, & j \notin I_A \end{cases}$$

ve $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$ için $d_{ij} = 1 - a_{ij}$ dir. Burada $j \notin I_A$ ise bu takdirde $c_{ij} = 0$ ve aynı zamanda $a_{ij} = 0$ olduğundan $d_{ij} = 1$ dir. Dolayısıyla Tanım 3.1.5 den $[c_{ij}] \cong [d_{ij}]$ elde edilir.

4.2. Esnek Matrislerin Fark İşlemleri

Bu kısımda, ilk olarak esnek matrisler için esnek fark kavramı tanımlanacaktır. Daha sonra esnek cümleler ve esnek matrisler için kısıtlanmış fark, genişletilmiş fark ve zayıf-genişletilmiş fark işlemleri türetilecektir.

Tanım 4.2.1. ([30]) $[F_A] = [a_{ij}], [F_B] = [b_{ij}] \in SM_{n \times m}$ olsun. Bu durumda $\forall i, j$ için $c_{ij} = \min\{a_{ij}, 1 - b_{ij}\}$ olmak üzere $[c_{ij}] \in SM_{n \times m}$ esnek matrisine $[F_A]$ ve $[F_B]$ matrislerinin *esnek farkı* denir ve $[c_{ij}] = [F_A] \tilde{\setminus} [F_B]$ şeklinde gösterilir.

Örnek 4.2.2. Örnek 2.2.7 de verilen F_A ve F_B esnek cümlelerini göz önüne alalım. Bu esnek cümlelerinin esnek matrisleri sırasıyla

$$[F_A] = [a_{ij}]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } [F_B] = [b_{ij}]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır. Bu durumda,

$$[a_{ij}] \tilde{\setminus} [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Önerme 4.2.3. ([30]) $[F_A], [F_B] \in SM_{n \times m}$ olsun. Bu durumda

$$[F_A] \tilde{\setminus} [F_B] = [F_A] \tilde{\cap} [F_B]^c$$

dir.

Teorem 4.2.4. F_A ve F_B , U üzerinde iki esnek cümle olsun. Bu durumda

$$[F_A] \tilde{\setminus} [F_B] = [F_C] \Leftrightarrow F_C = F_A \tilde{\setminus} F_B$$

dir.

İspat: $[F_A] = [a_{ij}], [F_B] = [b_{ij}] \in SM_{n \times m}$ olsun. Tanım 4.2.1 den, $c_{ij} = \min\{a_{ij}, 1 - b_{ij}\}$ olmak üzere $[a_{ij}] \tilde{\setminus} [b_{ij}] = [c_{ij}]$ yazabiliriz. Bu durumda Önerme 4.2.3 den $[a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}]^c = [c_{ij}] = [F_C]$ dir. Dolayısıyla Önerme 2.2.5 den

$$[c_{ij}] = [F_C] \Leftrightarrow F_C = F_A \tilde{\cap} F_B^c = F_A \tilde{\setminus} F_B$$

elde edilir.

Teorem 4.2.5. F_A, F_B ve F_C, U üzerinde esnek cümleler olsun.

- i) $[F_A] \tilde{\setminus} [F_A] = [0]$
- ii) $[F_A] \tilde{\setminus} [0] = [F_A]$
- iii) $[F_A] \tilde{\setminus} [1] = [0]$
- iv) $[1] \tilde{\setminus} [F_A] = [F_A]^c$
- v) $[0] \tilde{\setminus} [F_A] = [0]$
- vi) $[F_A] \tilde{\setminus} [F_A]^c = [F_A]$
- vii) $[F_A] \tilde{\setminus} [F_B] = [F_B] \tilde{\setminus} [F_A] \Leftrightarrow [F_A] = [F_B]$
- viii) $([F_A] \tilde{\setminus} [F_B]) \tilde{\cap} [F_C] = ([F_A] \tilde{\cap} [F_C]) \tilde{\setminus} ([F_B] \tilde{\cap} [F_C])$
- ix) $[F_A] \tilde{\cap} ([F_B] \tilde{\setminus} [F_C]) = ([F_A] \tilde{\cap} [F_B]) \tilde{\setminus} ([F_A] \tilde{\cap} [F_C])$
- x) $([F_A] \tilde{\setminus} [F_B]) \tilde{\setminus} [F_C] = ([F_A] \tilde{\setminus} [F_C]) \tilde{\setminus} ([F_B] \tilde{\setminus} [F_C])$

İspat: $[F_A] = [a_{ij}], [F_B] = [b_{ij}], [F_C] = [c_{ij}] \in SM_{n \times m}$ olsun. Bu durumda,

- i) $[F_A] \tilde{\setminus} [F_A] = [d_{ij}]$ olsun. Bu durumda $\forall i, j$ için $d_{ij} = \min\{a_{ij}, 1 - a_{ij}\} = 0$ dir. Dolayısıyla $[d_{ij}] = [0]$ elde edilir.
- ii) $[F_A] \tilde{\setminus} [0] = [d_{ij}]$ olsun. Bu durumda $\forall i, j$ için $d_{ij} = \min\{a_{ij}, 1\} = a_{ij}$ dir. Dolayısıyla $[d_{ij}] = [F_A]$ elde edilir.
- iii) $[F_A] \tilde{\setminus} [1] = [d_{ij}]$ olsun. Bu durumda $\forall i, j$ için $d_{ij} = \min\{a_{ij}, 0\} = 0$ dir. Dolayısıyla $[d_{ij}] = [0]$ elde edilir.
- iv) $[1] \tilde{\setminus} [F_A] = [d_{ij}]$ olsun. Bu durumda $\forall i, j$ için $d_{ij} = \min\{1, 1 - a_{ij}\} = 1 - a_{ij}$ dir. Dolayısıyla $[d_{ij}] = [F_A]^c$ elde edilir.
- v) $[0] \tilde{\setminus} [F_A] = [d_{ij}]$ olsun. Bu durumda $\forall i, j$ için $d_{ij} = \min\{0, 1 - a_{ij}\} = 0$ dir. Dolayısıyla $[d_{ij}] = [0]$ elde edilir.
- vi) $[F_A] \tilde{\setminus} [F_A]^c = [d_{ij}]$ olsun. Bu durumda $\forall i, j$ için $d_{ij} = \min\{a_{ij}, a_{ij}\} = a_{ij}$ dir. Dolayısıyla $[d_{ij}] = [F_A]$ elde edilir.

vii) $\Rightarrow$: $[d_{ij}] = [F_A] \tilde{\setminus} [F_B]$ ve $[e_{ij}] = [F_B] \tilde{\setminus} [F_A]$ olsun. $[d_{ij}] = [e_{ij}]$ ise bu durumda $\forall i, j$ için

$$d_{ij} = \min\{a_{ij}, 1 - b_{ij}\} = \min\{b_{ij}, 1 - a_{ij}\} = e_{ij}$$

dır. Bu ise $\forall i, j$ için $a_{ij} = b_{ij}$ olması ile mümkündür, yani $[F_A] = [F_B]$ dir.

$\Leftarrow$: Aşıkardır.

viii) $([F_A] \tilde{\setminus} [F_B]) \tilde{\cap} [F_C] = [d_{ij}]$ ve $([F_A] \tilde{\cap} [F_C]) \tilde{\setminus} ([F_B] \tilde{\cap} [F_C]) = [e_{ij}]$ olsun. $\forall i, j$ için

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \min\{\min\{a_{ij}, 1 - b_{ij}\}, c_{ij}\} \\ &= \min\{\min\{a_{ij}, c_{ij}\}, 1 - \min\{b_{ij}, c_{ij}\}\} \\ &= e_{ij} \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $[d_{ij}] = [e_{ij}]$ dir.

ix) (viii) in ispatına benzer şekilde ispatlanır.

x) $([F_A] \tilde{\setminus} [F_B]) \tilde{\setminus} [F_C] = [d_{ij}]$ ve $([F_A] \tilde{\setminus} [F_C]) \tilde{\setminus} ([F_B] \tilde{\setminus} [F_C]) = [e_{ij}]$ olsun. $\forall i, j$ için

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \min\{\min\{a_{ij}, 1 - b_{ij}\}, 1 - c_{ij}\} \\ &= \min\{\min\{a_{ij}, 1 - c_{ij}\}, 1 - \min\{b_{ij}, 1 - c_{ij}\}\} \\ &= e_{ij} \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $[d_{ij}] = [e_{ij}]$ dir.

Tanım 4.2.6. F_A ve F_B , U üzerinde iki esnek cümle olsun. Bu durumda

$$f_{A \tilde{\setminus} B}: E \rightarrow P(U) \text{ öyle ki } f_{A \tilde{\setminus} B}(e_j) = \begin{cases} f_A(e_j) \cap (U \setminus f_B(e_j)), & e_j \in B \\ \emptyset, & e_j \notin B \end{cases}$$

yaklaşım fonksiyonu ile tanımlanan esnek cümleye F_A ve F_B esnek cümlelerinin *kısıtlanmış farkı* denir ve $F_A \tilde{\setminus} F_B$ şeklinde gösterilir.

Önerme 4.2.7. F_A ve F_B , U üzerinde iki esnek cümle olsun. Bu durumda

$$F_A \tilde{\setminus} F_B = F_A \tilde{\cap} F_B^{c_B}$$

dir.

İspat: $F_A \tilde{\setminus} F_B = F_C$ olsun. Bu durumda

$$f_C(e_j) = \begin{cases} f_A(e_j) \cap (U \setminus f_B(e_j)), & e_j \in B \\ \emptyset, & e_j \notin B \end{cases}$$

yazabiliriz. Ayrıca, $F_A \tilde{\cap} F_B^{c_B} = F_D$ olsun. Tanım 4.1.1 den

$$f_D(e_j) = \begin{cases} f_A(e_j) \cap (U \setminus f_B(e_j)), & e_j \in B \\ \emptyset, & e_j \notin B \end{cases}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla $\forall e_j \in E$ için $f_C(e_j) = f_D(e_j)$ elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanır.

Tanım 4.2.8. $[F_A] = [a_{ij}], [F_B] = [b_{ij}] \in SM_{n \times m}$ ve $I_B = \{j: e_j \in B\}$ olsun. Bu durumda $\forall i$ için,

$$c_{ij} = \begin{cases} \min\{a_{ij}, 1 - b_{ij}\}, & j \in I_B \\ 0, & j \notin I_B \end{cases}$$

olmak üzere $[c_{ij}] \in SM_{n \times m}$ esnek matrisine $[F_A]$ ve $[F_B]$ matrislerinin *esnek kısıtlanmış farkı* denir ve $[c_{ij}] = [F_A] \tilde{\setminus}_r [F_B]$ şeklinde gösterilir.

Teorem 4.2.9. F_A ve F_B , U üzerinde iki esnek cümle olsun. Bu durumda

$$[F_A] \tilde{\setminus}_r [F_B] = [F_C] \Leftrightarrow F_C = F_A \tilde{\setminus}_r F_B$$

dir.

İspat: Tanım 4.2.6, Önerme 4.2.7 ve Tanım 4.2.8 kullanılarak, Teorem 4.2.4 ün ispatına benzer şekilde ispatlanabilir.

Teorem 4.2.10. F_A, F_B ve F_C , U üzerinde esnek cümleler olsun.

- i) $[F_A] \tilde{\setminus}_r [F_A] = [0]$
- ii) $[F_A] \tilde{\setminus}_r [1_A] = [0]$
- iii) $[1] \tilde{\setminus}_r [F_A] = [F_A]^{c_A}$
- iv) $[0] \tilde{\setminus}_r [F_A] = [0]$
- v) $[F_A] \tilde{\setminus}_r [F_A]^{c_A} = [F_A]$
- vi) $[F_A] \tilde{\setminus}_r [F_B] = [F_B] \tilde{\setminus}_r [F_A] \Leftrightarrow [F_A] = [F_B]$
- vii) $([F_A] \tilde{\setminus}_r [F_B]) \tilde{\cap} [F_C] = ([F_A] \tilde{\cap} [F_C]) \tilde{\setminus}_r ([F_B] \tilde{\cap} [F_C])$
- viii) $[F_A] \tilde{\cap} ([F_B] \tilde{\setminus}_r [F_C]) = ([F_A] \tilde{\cap} [F_B]) \tilde{\setminus}_r ([F_A] \tilde{\cap} [F_C])$
- ix) $[F_A] \tilde{\setminus}_r [F_B] \cong [F_A] \tilde{\setminus} [F_B]$

İspat: $[F_A] = [a_{ij}], [F_B] = [b_{ij}], [F_C] = [c_{ij}] \in SM_{n \times m}$ olsun.

- i) $[F_A] \tilde{\setminus}_r [F_A] = [d_{ij}]$ olsun. Bu durumda Tanım 4.2.8 den, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$d_{ij} = \begin{cases} \min\{a_{ij}, 1 - a_{ij}\}, & j \in I_A \\ 0, & j \notin I_A \end{cases}$$

$$= 0$$

yazabiliriz. Dolayısıyla $[d_{ij}] = [0]$ elde edilir.

ii) $[F_A] \tilde{\setminus}_r [1_A] = [d_{ij}]$ olsun. Bu durumda Tanım 4.2.8 den, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \begin{cases} \min\{a_{ij}, 1 - 1\}, & j \in I_A \\ 0, & j \notin I_A \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & j \in I_A \\ 0, & j \notin I_A \end{cases} \\ &= 0 \end{aligned}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla $[d_{ij}] = [0]$ elde edilir.

iii) $[1] \tilde{\setminus}_r [F_A] = [d_{ij}]$ olsun. Bu durumda Tanım 4.2.8 den, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \begin{cases} \min\{1, 1 - a_{ij}\}, & j \in I_A \\ 0, & j \notin I_A \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - a_{ij}, & j \in I_A \\ 0, & j \notin I_A \end{cases} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla $[d_{ij}] = [F_A]^{c_A}$ elde edilir.

iv) $[0] \tilde{\setminus}_r [F_A] = [d_{ij}]$ olsun. Bu durumda Tanım 4.2.8 den, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \begin{cases} \min\{0, 1 - a_{ij}\}, & j \in I_A \\ 0, & j \notin I_A \end{cases} \\ &= 0 \end{aligned}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla $[d_{ij}] = [0]$ elde edilir.

v) $[F_A] \tilde{\setminus}_r [F_A]^{c_A} = [d_{ij}]$ olsun. Bu durumda Tanım 4.2.8 den, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \begin{cases} \min\{a_{ij}, a_{ij}\}, & j \in I_A \\ 0, & j \notin I_A \end{cases} \\ &= \begin{cases} a_{ij}, & j \in I_A \\ 0, & j \notin I_A \end{cases} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla $[d_{ij}] = [F_A]$ elde edilir.

vi) $\Rightarrow: [d_{ij}] = [F_A] \tilde{\setminus}_r [F_B] = [F_B] \tilde{\setminus}_r [F_A] = [h_{ij}]$ olsun. Bu durumda $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$d_{ij} = \begin{cases} \min\{a_{ij}, 1 - b_{ij}\}, & j \in I_A \\ 0, & j \notin I_A \end{cases} = \begin{cases} \min\{1 - a_{ij}, b_{ij}\}, & j \in I_B \\ 0, & j \notin I_B \end{cases} = h_{ij}$$

dır. Bu ise $\forall i, j$ için $a_{ij} = b_{ij}$ ve $I_A = I_B$ olması ile mümkündür, yani $[F_A] = [F_B]$ dir.

$\Leftarrow$: Aşıkardır.

vii) $([F_A] \tilde{\setminus}_r [F_B]) \tilde{\cap} [F_C] = [d_{ij}]$ ve $([F_A] \tilde{\cap} [F_C]) \tilde{\setminus}_r ([F_B] \tilde{\cap} [F_C]) = [h_{ij}]$ olsun.

Bu durumda $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \begin{cases} \min\{\min\{a_{ij}, 1 - b_{ij}\}, c_{ij}\}, & j \in I_{B \cap C} \\ \min\{\min\{a_{ij}, 1 - b_{ij}\}, 0\}, & j \in I_{B \setminus C} \\ \min\{0, c_{ij}\}, & j \in I_{C \setminus B} \\ 0, & j \notin I_{B \cup C} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \min\{\min\{a_{ij}, 1 - b_{ij}\}, c_{ij}\}, & j \in I_{B \cap C} \\ 0, & j \notin I_{B \cap C} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \min\{\min\{a_{ij}, c_{ij}\}, 1 - \min\{b_{ij}, c_{ij}\}\}, & j \in I_{B \cap C} \\ 0, & j \notin I_{B \cap C} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3)$$

ve

$$h_{ij} = \begin{cases} \min\{\min\{a_{ij}, c_{ij}\}, 1 - \min\{b_{ij}, c_{ij}\}\}, & j \in I_{B \cap C} \\ 0, & j \notin I_{B \cap C} \end{cases} \quad (4.4)$$

dir. Dolayısıyla (4.3) ve (4.4) den $[d_{ij}] = [h_{ij}]$ elde edilir.

viii) $[F_A] \tilde{\cap} ([F_B] \tilde{\setminus}_r [F_C]) = [d_{ij}]$ ve $([F_A] \tilde{\cap} [F_B]) \tilde{\setminus}_r ([F_A] \tilde{\cap} [F_C]) = [h_{ij}]$ olsun.

Bu durumda $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \begin{cases} \min\{a_{ij}, \min\{b_{ij}, 1 - c_{ij}\}\}, & j \in I_C \\ 0, & j \notin I_C \end{cases} \\ &= \begin{cases} \min\{\min\{a_{ij}, b_{ij}\}, \min\{a_{ij}, 1 - c_{ij}\}\}, & j \in I_C \\ 0, & j \notin I_C \end{cases} \\ &= \begin{cases} \min\{\min\{a_{ij}, b_{ij}\}, 1 - \min\{a_{ij}, c_{ij}\}\}, & j \in I_C \\ 0, & j \notin I_C \end{cases} \end{aligned} \quad (4.5)$$

ve

$$h_{ij} = \begin{cases} \min\{\min\{a_{ij}, b_{ij}\}, 1 - \min\{a_{ij}, c_{ij}\}\}, & j \in I_C \\ 0, & j \notin I_C \end{cases} \quad (4.6)$$

dir. Dolayısıyla (4.5) ve (4.6) dan $[d_{ij}] = [h_{ij}]$ elde edilir.

ix) $[F_A] \tilde{\setminus}_r [F_B] = [d_{ij}]$ ve $[F_A] \tilde{\setminus} [F_B] = [h_{ij}]$ olsun. $\forall i \in 1, 2, \dots, n$ için,

$$d_{ij} = \begin{cases} \min\{a_{ij}, 1 - b_{ij}\}, & j \in I_B \\ 0, & j \notin I_B \end{cases}$$

ve $\forall i, j$ için $h_{ij} = \min\{a_{ij}, 1 - b_{ij}\}$ dir. Eğer $j \in I_B$ ise bu takdirde $d_{ij} = h_{ij}$ dir.

Eğer $j \notin I_B$ ise bu takdirde $d_{ij} = 0$ fakat $a_{ij} = 1$ olması durumunda $h_{ij} = 1$ dir, yani

$d_{ij} < h_{ij}$ dir. Dolayısıyla Tanım 3.1.5 den $[d_{ij}] \cong [h_{ij}]$ elde edilir.

Tanım 4.2.11. F_A ve F_B , U üzerinde iki esnek cümle olsun. Bu durumda

$$f_{A \tilde{\setminus}_B}: E \rightarrow P(U) \text{ öyle ki } \forall e_j \in E \text{ için } f_{A \tilde{\setminus}_B}(e_j) = f_A(e_j) \cup (U \setminus f_B(e_j))$$

yaklaşım fonksiyonu ile tanımlanan esnek cümleye F_A ve F_B esnek cümlelerinin *genişletilmiş farkı* denir ve $F_A \tilde{\setminus}_\varepsilon F_B$ şeklinde gösterilir.

Önerme 4.2.12. F_A ve F_B , U üzerinde iki esnek cümle olsun. Bu durumda

$$F_A \tilde{\setminus}_\varepsilon F_B = F_A \tilde{\cup} F_B^c$$

dir.

İspat: $F_A \tilde{\setminus}_\varepsilon F_B = F_C$ olsun. Bu durumda $\forall e_j \in E$ için

$$f_C(e_j) = f_A(e_j) \cup (U \setminus f_B(e_j))$$

yazabiliriz. Ayrıca, $F_A \tilde{\cup} F_B^c = F_D$ olsun. Tanım 4.1.1 den

$$f_D(e_j) = f_A(e_j) \cup (U \setminus f_B(e_j))$$

yazabiliriz. Dolayısıyla $\forall e_j \in E$ için $f_C(e_j) = f_D(e_j)$ elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanır.

Tanım 4.2.13. $[F_A] = [a_{ij}]$ ve $[F_B] = [b_{ij}] \in SM_{n \times m}$ olsun. Bu durumda $\forall i, j$ için

$$c_{ij} = \max\{a_{ij}, 1 - b_{ij}\}$$

olmak üzere $[c_{ij}] \in SM_{n \times m}$ esnek matrisine $[F_A]$ ve $[F_B]$ matrislerinin *esnek genişletilmiş farkı* denir ve $[c_{ij}] = [F_A] \tilde{\setminus}_\varepsilon [F_B]$ şeklinde gösterilir.

Teorem 4.2.14. F_A ve G_B , U üzerinde iki esnek cümle olsun. Bu durumda

$$[F_A] \tilde{\setminus}_\varepsilon [F_B] = [F_C] \Leftrightarrow F_C = F_A \tilde{\setminus}_\varepsilon F_B$$

dir.

İspat: Tanım 4.2.11, Önerme 4.2.12 ve Tanım 4.2.13 kullanılarak Teorem 4.2.4 ün ispatına benzer şekilde ispatlanabilir.

Teorem 4.2.15. F_A , F_B ve F_C , U üzerinde esnek cümleler olsun.

- i) $[F_A] \tilde{\setminus}_\varepsilon [F_A] = [1]$
- ii) $[F_A] \tilde{\setminus}_\varepsilon [0] = [1]$
- iii) $[F_A] \tilde{\setminus}_\varepsilon [1] = [F_A]$
- iv) $[1] \tilde{\setminus}_\varepsilon [F_A] = [1]$
- v) $[0] \tilde{\setminus}_\varepsilon [F_A] = [F_A]^c$
- vi) $[F_A] \tilde{\setminus}_\varepsilon [F_A]^c = [F_A]$
- vii) $([F_A] \tilde{\setminus}_\varepsilon [F_B])^c = [F_B] \tilde{\setminus}_\varepsilon [F_A]$
- viii) $[F_A] \tilde{\setminus}_\varepsilon [F_B] = [F_B] \tilde{\setminus}_\varepsilon [F_A] \Leftrightarrow [F_A] = [F_B]$

- ix) $([F_A] \tilde{\wedge}_\varepsilon [F_B]) \tilde{\cup} [F_C] = ([F_A] \tilde{\cup} [F_C]) \tilde{\wedge}_\varepsilon ([F_B] \tilde{\cup} [F_C])$
- x) $[F_A] \tilde{\cup} ([F_B] \tilde{\wedge}_\varepsilon [F_C]) = ([F_A] \tilde{\cup} [F_B]) \tilde{\wedge}_\varepsilon ([F_A] \tilde{\cup} [F_C])$
- xi) $([F_A] \tilde{\wedge}_\varepsilon [F_B]) \tilde{\wedge}_\varepsilon [F_C] = ([F_A] \tilde{\wedge}_\varepsilon [F_C]) \tilde{\wedge}_\varepsilon ([F_B] \tilde{\wedge}_\varepsilon [F_C])$

İspat: Teorem 4.2.5 in ispatına benzer şekilde gösterilebilir.

Tanım 4.2.16. F_A ve F_B , U üzerinde iki esnek cümle olsun. Bu durumda

$$f_{A \tilde{\wedge}_w B}: E \rightarrow P(U) \text{ öyle ki } f_{A \tilde{\wedge}_w B}(e_j) = \begin{cases} f_A(e_j) \cup (U \setminus f_B(e_j)), & e_j \in B \\ f_A(e_j), & e_j \notin B \end{cases}$$

yaklaşım fonksiyonu ile tanımlanan esnek cümleye F_A ve F_B esnek cümlelerinin *zayıf-genişletilmiş farkı* denir ve $F_A \tilde{\wedge}_w F_B$ şeklinde gösterilir.

Önerme 4.2.17. F_A ve F_B , U üzerinde iki esnek cümle olsun. Bu durumda

$$F_A \tilde{\wedge}_w F_B = F_A \tilde{\cup} F_B^{cB}$$

dir.

İspat: $F_A \tilde{\wedge}_w F_B = F_C$ olsun. Bu durumda

$$f_C(e_j) = \begin{cases} f_A(e_j) \cup (U \setminus f_B(e_j)), & e_j \in B \\ f_A(e_j), & e_j \notin B \end{cases}$$

yazabiliriz. Ayrıca, $F_A \tilde{\cup} F_B^{cB} = F_D$ olsun. Tanım 4.1.1 den

$$f_D(e_j) = \begin{cases} f_A(e_j) \cup (U \setminus f_B(e_j)), & e_j \in B \\ f_A(e_j), & e_j \notin B \end{cases}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla $\forall e \in E$ için $f_C(e_j) = f_D(e_j)$ elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanır.

Tanım 4.2.18. $[F_A] = [a_{ij}]$, $[F_B] = [b_{ij}] \in SM_{n \times m}$ ve $I_B = \{j: e_j \in B\}$ olsun. Bu durumda, $\forall i$ için

$$c_{ij} = \begin{cases} \max\{a_{ij}, 1 - b_{ij}\}, & j \in I_B \\ a_{ij}, & j \notin I_B \end{cases}$$

olmak üzere $[c_{ij}] \in SM_{n \times m}$ esnek matrisine $[F_A]$ ve $[F_B]$ matrislerinin *esnek zayıf-genişletilmiş farkı* denir ve $[c_{ij}] = [F_A] \tilde{\wedge}_w [F_B]$ şeklinde gösterilir.

Teorem 4.2.19. F_A ve F_B , U üzerinde iki esnek cümle olsun. Bu durumda

$$[F_A] \tilde{\wedge}_w [F_B] = [F_C] \Leftrightarrow F_C = F_A \tilde{\wedge}_w F_B$$

dir.

İspat: Tanım 4.2.16, Önerme 4.2.17 ve Tanım 4.2.18 kullanılarak, Teorem 4.2.4 nin ispatına benzer şekilde ispatlanabilir.

Teorem 4.2.20. F_A, F_B ve F_C, U üzerinde esnek cümleler olsun.

- i) $[F_A] \tilde{\setminus}_w [F_A] = [1_A]$
- ii) $[F_A] \tilde{\setminus}_w [1_A] = [F_A]$
- iii) $[1] \tilde{\setminus}_w [F_A] = [1]$
- iv) $[0] \tilde{\setminus}_w [F_A] = [F_A]^{c_A}$
- v) $[F_A] \tilde{\setminus}_w [F_A]^{c_A} = [F_A]$
- vi) $[F_A] \tilde{\setminus}_w [F_B] = [F_B] \tilde{\setminus}_w [F_A] \Leftrightarrow [F_A] = [F_B]$
- vii) $([F_A] \tilde{\setminus}_w [F_B]) \tilde{\cup} [F_C] = ([F_A] \tilde{\cup} [F_C]) \tilde{\setminus}_w ([F_B] \tilde{\cup} [F_C])$
- viii) $[F_A] \tilde{\cup} ([F_B] \tilde{\setminus}_w [F_C]) = ([F_A] \tilde{\cup} [F_B]) \tilde{\setminus}_w ([F_A] \tilde{\cup} [F_C])$
- ix) $[F_A] \tilde{\setminus}_w [F_B] \cong [F_A] \tilde{\setminus}_\varepsilon [F_B]$

İspat: Teorem 4.2.5 ve Teorem 4.2.10 un ispatına benzer şekilde gösterilebilir.

4.3. Esnek Fark Max-Satır Karar Verme Metodu

Bu kısımda, ilk olarak esnek max-satır karar fonksiyonu tanımlanacaktır. Daha sonra, pozitif fark max-satır esnek matrisi ve negatif fark max-satır esnek matrisi kavramları tanıtılacak ve bu kavramlardan yararlanılarak pozitif karar esnek matrisi ve negatif karar esnek matrisi tanımları verilecektir. Ayrıca, parametrelere göre biri olumlu alternatifleri diğeri olumsuz alternatifleri belirleyen iki karar vericinin optimum alternatifini seçmesini sağlayan esnek fark max-satır karar verme metodu (EFMSKM) oluşturulacaktır.

Tanım 4.3.1. $[a_{ij}] \in SM_{n \times m}$ bir esnek matris olsun. Bu durumda M_r ile gösterilen *esnek max-satır karar fonksiyonu* aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$M_r : SM_{n \times m} \rightarrow SM_{n \times 1}, M_r([a_{ij}]) = [c_{i1}]$$

öyle ki $c_{i1} = \max_{j \in \{1,2,\dots,m\}} \{a_{ij}\}$ dir.

Burada, $[c_{i1}]$ matrisine $[a_{ij}]$ matrisinin *max-satır esnek matrisi* denir.

Örnek 4.3.2. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ alternatiflerin cümlesi, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametrelerin cümlesi ve $A = \{e_2, e_3, e_4, e_5\} \subset E$ olsun.

Kabul edelim ki $F_A = \{(e_2, \{u_1, u_5\}), (e_3, \{u_1, u_3, u_4, u_5\}), (e_4, \{u_1\}), (e_5, \{u_2, u_5\})\}$ şeklinde bir esnek cümle olsun. Bu durumda, F_A esnek cümlesinin esnek matrisi

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. O halde, $[a_{ij}]$ matrisinin max-satır esnek matrisi

$$[c_{i1}] = M_r([a_{ij}]) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dir.

Tanım 4.3.3. $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ evrensel cümle, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ parametrelerin cümlesi ve $[a_{ij}] \in SM_{n \times m}$ bir esnek matris olsun. Bu durumda,

a) $a_{ij} = 1$ olması u_i alternatifinin e_j parametresini sağladığı anlamına geliyorsa $[a_{ij}]$ esnek matrisi olumlu (lehte) esnek matris olarak isimlendirilir.

b) $a_{ij} = 1$ olması u_i alternatifinin e_j parametresini sağlamadığı veya e_j parametresinin değilini sağladığı anlamına geliyorsa $[a_{ij}]$ esnek matrisi olumsuz (aleyhte) esnek matris olarak isimlendirilir.

Tanım 4.3.4. $[c_{ij}] \in SM_{n \times m}$ esnek matrisi olumlu esnek matrislerin kesişimi (veya birleşimi) ve $[d_{ij}] \in SM_{n \times m}$ esnek matrisi de olumsuz esnek matrislerin kesişimi (veya birleşimi) olsun. Bu durumda,

a) $[e_{i1}] = M_r([c_{ij}] \tilde{\setminus} [d_{ij}])$ esnek matrisi pozitif fark max-satır esnek matrisi, $[f_{i1}] = M_r([d_{ij}] \tilde{\setminus} [c_{ij}])$ esnek matrisi de negatif fark max-satır esnek matrisi olarak isimlendirilir. Burada, $\tilde{\setminus}$ işleminin yerine $\tilde{\setminus}_r$, $\tilde{\setminus}_\varepsilon$ ve $\tilde{\setminus}_w$ işlemleri de alınabilir.

b) $[g_{i1}] = [e_{i1}] \tilde{\setminus} [f_{i1}]$ esnek matrisi pozitif karar esnek matrisi, $[h_{i1}] = [f_{i1}] \tilde{\setminus} [e_{i1}]$ esnek matrisi de negatif karar esnek matrisi olarak isimlendirilir.

Tanım 4.3.5. $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ evrensel cümle, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ parametrelerin cümlesi olmak üzere $[g_{i1}] \in SM_{n \times 1}$ pozitif karar esnek matrisini ve $[h_{i1}] \in SM_{n \times 1}$ negatif karar esnek matrisini göz önüne alalım. Bu durumda,

a) $opt(U) = \{u_i : u_i \in U, g_{i1} = 1\}$ cümlesine U cümlesinin bir optimum cümlesi denir.

b) $sub-opt(U) = \{u_i : u_i \in U, g_{i1} = h_{i1} = 0\}$ cümlesine U cümlesinin bir alt-optimum cümlesi denir.

c) $non-opt(U) = \{u_i : u_i \in U, h_{i1} = 1\}$ cümlesine U cümlesinin bir non-optimum cümlesi denir.

Bu tanımlardan yararlanılarak, bir evrensel cümleden parametrelere göre hem en uygun nesneyi hem de uygun olmayan nesneyi belirlemek için kullanılabilecek *esnek fark max-satır karar verme metodunun (EFMSKM)* algoritması aşağıdaki gibi verilebilir:

Adım 1: Karar vericiler parametre cümlesinden kendi parametrelerini seçerek esnek cümlelerini oluşturur.

Adım 2: Esnek cümlelere karşılık gelen esnek matrisler oluşturulur.

Adım 3: Karar verme problemine göre $\tilde{N}$ veya $\tilde{U}$ işlemlerinden herhangi biri kullanılarak olumlu (lehte) esnek matrisler ve olumsuz (aleyhte) esnek matrisler elde edilir.

Adım 4: Karar verme problemine göre $\tilde{\cdot}, \tilde{\cdot}_r, \tilde{\cdot}_\varepsilon$ veya $\tilde{\cdot}_w$ işlemlerinden herhangi biri kullanılarak pozitif fark max-satır esnek matrisi ve negatif fark max-satır esnek matrisi elde edilir.

Adım 5: Pozitif karar esnek matrisi $[g_{i1}]$ ve negatif karar esnek matrisi $[h_{i1}]$ bulunur.

Adım 6: U nun bir optimum cümlesi (eğer optimum cümlesi boş ise alt-optimum cümlesi) ve bir non-optimum cümlesi bulunur.

Şimdi esnek zayıf-genişletilmiş fark $\tilde{\cdot}_w$ işlemini kullanarak esnek fark max-satır karar verme metodunun bir uygulamasını sunalım.

Örnek 4.3.6. Kabul edelim ki bir şirket boş bir pozisyon için başvuran 6 adaydan birini işe almak istiyor. Başvuran adayların cümlesi $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ ve bu

adaylarda aranan kriterlerin cümlesi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ olsun. Burada, e_i parametresi $i = 1, 2, 3, 4, 5$ için sırasıyla ‘genç’, ‘deneyimli’, ‘iyi bir referansa sahip’, ‘iyi derecede bilgisayar kullanabilme’ ve ‘en az iki yabancı dil konuşabilme’ anlamına gelir. Şirket bu adaylardan belirlenen kriterler altında boş pozisyon için en uygun adayın ve uygun olmayan adayın belirlenmesi için üç karar verici görevlendiriyor. Karar vericilerden birinci ve ikincisi bu kriterleri sağlayan adayları, üçüncüsü ise kriterleri sağlamayan adayları belirliyor.

Karar vericiler şirketin belirlediği kriterlerden kendi kriterlerini seçtiğinde esnek fark max-satır karar verme algoritmasının adımları izlenerek boş pozisyon için en uygun aday ve aynı zamanda uygun olmayan aday aşağıdaki gibi bulunabilir:

Adım 1: Karar vericiler kriterlerini sırasıyla $A = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $B = E$ ve $C = \{e_2, e_3, e_4\}$ şeklinde belirleyerek, aşağıdaki esnek cümleleri oluştururlar.

$$F_A = \{(e_1, \{u_1, u_2, u_5, u_6\}), (e_2, \{u_1, u_4, u_5, u_6\}), (e_3, \{u_2, u_3, u_6\}), (e_4, \{u_2, u_4, u_6\})\},$$

$$F_B = \{(e_1, \{u_2, u_5, u_6\}), (e_2, \{u_1, u_3, u_4, u_6\}), (e_3, \{u_2, u_3, u_6\}), (e_4, U), (e_5, \{u_2\})\},$$

$$F_C = \{(e_2, \{u_2, u_3, u_4, u_5\}), (e_3, \{u_1, u_5\}), (e_5, \{u_1, u_3, u_5\})\}.$$

Adım 2: Bu esnek cümlelere karşılık gelen esnek matrisler sırasıyla

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } [c_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Adım 3: Birinci ve ikinci karar vericiler kriterleri sağlayan adayları belirlediğinden bu karar vericilerin matrislerinin kesişiminden oluşan

$$[d_{ij}] = [a_{ij}] \tilde{\cap} [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi olumlu (lehte) esnek matris, üçüncü karar verici kriterleri sağlamayan adayları belirlediğinden bu karar vericinin matrisi $[c_{ij}]$ olumsuz (aleyhte) esnek matristir.

Adım 4: Esnek zayıf-genişletilmiş fark $\tilde{\wedge}_w$ işlemini kullanılarak pozitif fark max-satır esnek matrisi $[e_{i1}]$ ve negatif fark max-satır esnek matrisi $[f_{i1}]$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$[e_{i1}] = M_r([a_{ij}] \tilde{\wedge}_w [b_{ij}]) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ve } [f_{i1}] = M_r([b_{ij}] \tilde{\wedge}_w [a_{ij}]) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Adım 5: Bu durumda, esnek pozitif karar esnek matrisi ve negatif karar esnek matrisi

$$[g_{i1}] = [e_{i1}] \tilde{\wedge} [f_{i1}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ve } [h_{i1}] = [f_{i1}] \tilde{\wedge} [e_{i1}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dir.

Adım 6: Son olarak, $[g_{i1}]$ pozitif karar esnek matrisinden U nun optimum cümlesi

$$opt(U) = \{u_6\}$$

ve $[h_{i1}]$ negatif karar esnek matrisinden U nun non-optimum cümlesi

$$non-opt(U) = \{u_5\}$$

elde edilir. Buradan da anlaşılır ki şirketin boş pozisyonu için en uygun aday u_6 ve uygun olmayan veya en son seçilebilecek aday ise u_5 tir. Yani, eğer şirket beş kişi işe almak isterse bu kişiler u_1, u_2, u_3, u_4, u_6 olmalıdır.

Bu örnekte, esnek zayıf-genişletilmiş fark $\tilde{\wedge}_w$ işlemi yerine esnek kısıtlanmış fark $\tilde{\wedge}_r$ işlemi kullanılsaydı $opt(U) = \{u_3, u_6\}$ şeklinde elde edilirdi. Eğer iki kişi seçilmek istenseydi bu fark işlemi kullanmak daha uygun olurdu. Fakat yukarıdaki karar probleminde boş pozisyon için bir kişinin seçilmesi istendiğinden esnek zayıf-genişletilmiş fark işlemi daha kullanışlıdır. Sonuç olarak söyleyebiliriz ki karar problemine ve istenen sonuca göre sunulan fark işlemlerinden herhangi biri diğerlerinden daha kullanışlı olabilir.

5. İNDİRGENMİŞ ESNEK MATRİS VE ESNEK DAĞILMALI MAX-MİN KARAR VERME METODU

Bu bölümde, esnek matrislerin bir indirgemesi olan indirgenmiş esnek matris kavramı tanımlanacaktır. Ayrıca, indirgenmiş esnek matrislerin işlemleri ve onların cebirsel yapıları araştırılacaktır. Bu işlemlerden yararlanarak esnek max-min karar verme metodundaki bazı eksik yönleri tamamlayan yeni bir karar verme metodu sunulacaktır.

5.1. İndirgenmiş Esnek Matris

Bu kısımda, bir esnek cümleyi oluşturan parametre cümlesi göz önüne alınarak tanımlanan indirgenmiş esnek matris kavramı verilecektir.

Tanım 5.1.1. $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ seçeneklerin (alternatiflerin) cümlesi, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ parametrelerin cümlesi, $A \subseteq E$ ve F_A , U üzerinde bir esnek cümle olsun. $\forall i, p$ için

$$a_{ip} = \begin{cases} 1, & e_p \in A \text{ ve } u_i \in f_A(e_p) \\ 0, & e_p \in A \text{ ve } u_i \notin f_A(e_p) \end{cases}$$

olmak üzere

$$[a_{ip}]_{n \times m_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm_1} \end{bmatrix}$$

matrisine U üzerinde F_A esnek cümlesinin bir *indirgenmiş esnek matrisi* denir. Burada m_1 , A cümlesinin eleman sayısı ve $1 \leq m_1 \leq m$ dir.

U , E , A cümlelerinin eleman sayıları sırasıyla n , m , m_1 ve ayrıca F_A , U üzerinde bir esnek cümle olsun. $e_p \notin A$ iken $f_A(e_p) = \emptyset$ olduğundan, $E \setminus A$ cümlesindeki parametreleri eleyerek F_A esnek cümlesine karşılık gelen $n \times m_1$ tipinde esnek matrisi oluşturabiliriz.

Eğer $A = E$ ise bu durumda F_A esnek cümlesine karşılık gelen esnek matris, F_A esnek cümlesinin indirgenmiş esnek matrisi ile aynıdır.

Örnek 5.1.2. Örnek 2.1.2 de verilen F_A esnek cümlesini göz önüne alalım. Bu durumda, F_A esnek cümlesinin indirgenmiş esnek matrisi

$$[a_{ip}]_{5 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

5.2. İndirgenmiş Esnek Matrislerin Genelleştirilmiş Çarpımları

Esnek matrisler için tanımlanmış *Ve*, *Veya*, *Ve-Değil* ve *Veya-Değil* çarpımları, indirgenmiş esnek matrisler farklı tipte olabileceğinden bu matrisler için kullanılamaz. Bu kısımda, hem esnek matrisler hem de indirgenmiş esnek matrisler için kullanılabilecek *genelleştirilmiş Ve*, *Veya*, *Ve-Değil* ve *Veya-Değil* çarpımları tanımlanacaktır. Ayrıca, üç veya daha fazla esnek matris için *Ve*, *Veya*, *Ve-Değil* ve *Veya-Değil* çarpımları kullanılamazken genelleştirilmiş çarpım işlemleriyle bu eksiklik giderilmiş olacaktır.

$F_A, F_B \in S(U)$ ve F_A ve F_B esnek cümlelerine karşılık gelen indirgenmiş esnek matrisler sırasıyla $[a_{ip}]$ ve $[b_{ir}]$ olsun.

Tanım 5.2.1. $[a_{ip}] \in SM_{n \times m_1}$ ve $[b_{ir}] \in SM_{n \times m_2}$ olsun.

a) $[a_{ip}]$ ve $[b_{ir}]$ esnek matrislerinin *genelleştirilmiş Ve* çarpımı ($\wedge$)

$$\begin{aligned} \wedge: SM_{n \times m_1} \times SM_{n \times m_2} &\rightarrow SM_{n \times m_1 m_2} \\ [a_{ip}], [b_{ir}] &\rightarrow [a_{ip}] \wedge [b_{ir}] = [c_{is}] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $c_{is} = \min\{a_{ip}, b_{ir}\}$ öyle ki $\alpha, s \leq \alpha m_2$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $p = \alpha, s = (\alpha - 1)m_2 + r$ dir.

b) $[a_{ip}]$ ve $[b_{ir}]$ esnek matrislerinin *genelleştirilmiş Veya* çarpımı ($\vee$)

$$\begin{aligned} \vee: SM_{n \times m_1} \times SM_{n \times m_2} &\rightarrow SM_{n \times m_1 m_2} \\ [a_{ip}], [b_{ir}] &\rightarrow [a_{ip}] \vee [b_{ir}] = [c_{is}] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $c_{is} = \max\{a_{ip}, b_{ir}\}$ öyle ki $\alpha, s \leq \alpha m_2$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $p = \alpha, s = (\alpha - 1)m_2 + r$ dir.

c) $[a_{ip}]$ ve $[b_{ir}]$ esnek matrislerinin *genelleştirilmiş Ve-Değil* çarpımı ($\bar{\wedge}$)

$$\begin{aligned} \bar{\wedge}: SM_{n \times m_1} \times SM_{n \times m_2} &\rightarrow SM_{n \times m_1 m_2} \\ [a_{ip}], [b_{ir}] &\rightarrow [a_{ip}] \bar{\wedge} [b_{ir}] = [c_{is}] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $c_{is} = \min\{a_{ip}, 1 - b_{ir}\}$ öyle ki $\alpha, s \leq \alpha m_2$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $p = \alpha, s = (\alpha - 1)m_2 + r$ dir.

d) $[a_{ip}]$ ve $[b_{ir}]$ esnek matrislerinin *genelleştirilmiş Veya-Değil* çarpımı ($\underline{\vee}$)

$$\underline{\vee}: SM_{n \times m_1} \times SM_{n \times m_2} \rightarrow SM_{n \times m_1 m_2}$$

$$[a_{ip}], [b_{ir}] \rightarrow [a_{ip}] \underline{\vee} [b_{ir}] = [c_{is}]$$

şeklinde tanımlanır. Burada $c_{is} = \max\{a_{ip}, 1 - b_{ir}\}$ öyle ki $\alpha, s \leq \alpha m_2$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $p = \alpha, s = (\alpha - 1)m_2 + r$ dir.

Örnek 5.2.2. Örnek 2.2.7 de verilen F_A ve F_B esnek cümlelerini göz önüne alalım. F_A ve F_B esnek cümlelerinin indirgenmiş esnek matrisleri sırasıyla

$$[a_{ip}]_{4 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } [b_{ir}]_{4 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu durumda, bu indirgenmiş esnek matrislerin *genelleştirilmiş Ve* çarpımları

$$[c_{is}] = [a_{ip}] \wedge [b_{ir}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Buradan, açıktır ki $[c_{is}]$ esnek matrisinin tipi 4×6 dır.

Not: Genelde, indirgenmiş esnek matrislerin genelleştirilmiş çarpımları değişmeli (komütatif) değildir.

Örnek 5.2.3. Örnek 5.2.2 deki $[a_{ip}]$, $[b_{ir}]$ ve $[c_{is}]$ esnek matrislerini göz önüne alalım. Bu durumda,

$$[d_{it}] = [b_{ir}] \wedge [a_{ip}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan görülür ki $[c_{is}] \neq [d_{it}]$ dir.

Önerme 5.2.4. $[a_{ip}] \in SM_{n \times m_1}$ ve $[b_{ir}] \in SM_{n \times m_2}$ iki indirgenmiş esnek matris olsun. Bu durumda genelleştirilmiş çarpımlar için aşağıdaki De-Morgan kuralları sağlanır:

i)
$$([a_{ip}] \wedge [b_{ir}])^c = ([a_{ip}])^c \vee ([b_{ir}])^c$$

- ii) $([a_{ip}] \vee [b_{ir}])^c = ([a_{ip}])^c \wedge ([b_{ir}])^c$
- iii) $([a_{ip}] \bar{\wedge} [b_{ir}])^c = ([a_{ip}])^c \underline{\vee} ([b_{ir}])^c$
- iv) $([a_{ip}] \underline{\vee} [b_{ir}])^c = ([a_{ip}])^c \bar{\wedge} ([b_{ir}])^c$

İspat: i) $[a_{ip}] \in SM_{n \times m_1}$ ve $[b_{ir}] \in SM_{n \times m_2}$ iki indirgenmiş esnek matris olmak üzere $[c_{is}] = ([a_{ip}] \wedge [b_{ir}])^c$ ve $[d_{is}] = ([a_{ip}])^c \vee ([b_{ir}])^c$ olsun. $[c_{is}]$ ve $[d_{is}]$ matrislerinin tipi $n \times m_1 m_2$ ve $\forall i, p, r$ için

$$c_{is} = 1 - \min\{a_{ip}, b_{ir}\} = \max\{1 - a_{ip}, 1 - b_{ir}\} = d_{is}$$

olduğundan, $[c_{is}] = [d_{is}]$ dir.

ii), iii) ve iv) ün ispatı benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 5.2.5. Tanım 5.2.1 a), b), c), d) de verilen çarpımlar sırasıyla Tanım 3.2.5 a), b), c), d) de verilen çarpımların genelleştirmeleridir.

İspat: $[a_{ip}] \in SM_{n \times m_1}$ ve $[b_{ir}] \in SM_{n \times m_2}$ iki indirgenmiş esnek matris olsun. Eğer $m_1 = m_2 = m$, yani $[a_{ip}], [b_{ir}] \in SM_{n \times m}$ şeklinde iki esnek matris ise bu takdirde Tanım 5.2.1 a) dan $[c_{is}] = [a_{ip}] \wedge [b_{ir}] \in SM_{n \times m^2}$ öyle ki $p = \alpha$ ve $s = (\alpha - 1)m + r$ yazabiliriz. Ayrıca, Tanım 3.2.5 a) dan da $[c_{is}] = [a_{ip}] \wedge [b_{ir}]$ öyle ki $s = (p - 1)m + r$ yazabiliriz. Dolayısıyla Tanım 5.2.1 a) da tanımlanan çarpım Tanım 3.2.5 a) tanımlanan çarpımın bir genelleştirmesidir. Benzer şekilde esnek matrislerin diğer çarpımları için de genelleştirmeler gösterilebilir.

Teorem 5.2.6. Genelleştirilmiş Ve çarpım işlemi birleşmelidir, yani $[a_{ip}] \in SM_{n \times m_1}$, $[b_{ir}] \in SM_{n \times m_2}$ ve $[c_{iq}] \in SM_{n \times m_3}$ indirgenmiş esnek matrisler olmak üzere,

$$([a_{ip}] \wedge [b_{ir}]) \wedge [c_{iq}] = [a_{ip}] \wedge ([b_{ir}] \wedge [c_{iq}])$$

dir.

İspat: Kabul edelim ki $[a_{ip}] \in SM_{n \times m_1}$, $[b_{ir}] \in SM_{n \times m_2}$ ve $[c_{iq}] \in SM_{n \times m_3}$ indirgenmiş esnek matrisler olsun. Bu durumda Tanım 5.2.1 a) dan $[a_{ip}] \wedge [b_{ir}] = [d_{is}] \in SM_{n \times m_1 m_2}$ yazılabilir, öyle ki $d_{is} = \min\{a_{ip}, b_{ir}\}$ ve α_1 , $s \leq \alpha_1 m_2$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $p = \alpha_1$, $s = (\alpha_1 - 1)m_2 + r$ dir. Benzer şekilde $[d_{is}] \wedge [c_{iq}] = [e_{it}] \in SM_{n \times m_1 m_2 m_3}$

yazılabilir, öyle ki $e_{it} = \min\{d_{is}, c_{iq}\}$ ve $\alpha_2, t \leq \alpha_2 m_3$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $s = \alpha_2, t = (\alpha_2 - 1)m_3 + q$ dur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} t &= (\alpha_2 - 1)m_3 + q \\ &= (s - 1)m_3 + q \\ &= ((\alpha_1 - 1)m_2 + r - 1)m_3 + q \\ &= ((\alpha_1 - 1)m_2 m_3 + (r - 1)m_3 + q \\ &= ((p - 1)m_2 m_3 + (r - 1)m_3 + q \end{aligned} \quad (5.1)$$

elde edilir.

Aynı şekilde, Tanım 5.2.1 a) dan $[b_{ir}] \wedge [c_{iq}] = [f_{iv}] \in SM_{n \times m_2 m_3}$ yazılabilir, öyle ki $f_{iv} = \min\{b_{ir}, c_{iq}\}$ ve $\alpha_3, v \leq \alpha_3 m_3$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $r = \alpha_3, v = (\alpha_3 - 1)m_3 + q$ dur. Benzer şekilde $[a_{ip}] \wedge [f_{iv}] = [g_{iw}] \in SM_{n \times m_1 m_2 m_3}$ yazılabilir, öyle ki $g_{iw} = \min\{a_{ip}, f_{iv}\}$ ve $\alpha_4, w \leq \alpha_4 m_2 m_3$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $p = \alpha_4, w = (\alpha_4 - 1)m_2 m_3 + v$ dir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} w &= (\alpha_4 - 1)m_2 m_3 + v \\ &= (\alpha_4 - 1)m_2 m_3 + (\alpha_3 - 1)m_3 + q \\ &= ((p - 1)m_2 m_3 + (r - 1)m_3 + q \end{aligned} \quad (5.2)$$

elde edilir. $\min\{\min\{a_{ip}, b_{ir}\} c_{iq}\} = \min\{a_{ip}, \min\{b_{ir}, c_{iq}\}\}$ olup (5.1) ve (5.2) den $[e_{it}] = [g_{iw}]$ elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanır.

Teorem 5.2.7. Genelleştirilmiş Veya çarpım işlemi birleşmelidir, yani $[a_{ip}] \in SM_{n \times m_1}, [b_{ir}] \in SM_{n \times m_2}$ ve $[c_{iq}] \in SM_{n \times m_3}$ indirgenmiş esnek matrisler olmak üzere,

$$([a_{ip}] \vee [b_{ir}]) \vee [c_{iq}] = [a_{ip}] \vee ([b_{ir}] \vee [c_{iq}])$$

dir.

İspat: Teorem 5.2.6 nın ispatına benzer şekilde ispatlanabilir.

Genelleştirilmiş Ve-Değil çarpımı ve genelleştirilmiş Veya-Değil çarpımı birleşmeli değildir. Şimdi bu durumu göstermek için bir örnek verelim:

Örnek 5.2.8. Kabul edelim ki $[a_{ip}] \in SM_{3 \times 3}, [b_{ir}] \in SM_{3 \times 2}$ ve $[c_{iq}] \in SM_{3 \times 1}$ indirgenmiş esnek matrisleri

$$[a_{ip}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [b_{ir}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } [c_{iq}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilsin. Bu durumda,

$$([a_{ip}] \bar{\wedge} [b_{ir}]) \bar{\wedge} [c_{iq}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$[a_{ip}] \bar{\wedge} ([b_{ir}] \bar{\wedge} [c_{iq}]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan $([a_{ip}] \bar{\wedge} [b_{ir}]) \bar{\wedge} [c_{iq}] \neq [a_{ip}] \bar{\wedge} ([b_{ir}] \bar{\wedge} [c_{iq}])$ elde edilir.

Benzer şekilde,

$$([a_{ip}] \underline{\vee} [b_{ir}]) \underline{\vee} [c_{iq}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$[a_{ip}] \underline{\vee} ([b_{ir}] \underline{\vee} [c_{iq}]) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan $([a_{ip}] \underline{\vee} [b_{ir}]) \underline{\vee} [c_{iq}] \neq [a_{ip}] \underline{\vee} ([b_{ir}] \underline{\vee} [c_{iq}])$ elde edilir.

Önerme 5.2.9. i) Genelleştirilmiş Ve çarpım işlemine göre $[1]_{n \times 1}$ esnek matrisi $SM(U)$ nun bir birim elemanıdır.

ii) Genelleştirilmiş Veya çarpım işlemine göre $[0]_{n \times 1}$ esnek matrisi $SM(U)$ nun bir birim elemanıdır.

İspat: i) $[a_{ip}] \in SM_{n \times m_1}$ indirgenmiş bir esnek matris ve $[c_{ip}] = [a_{ip}] \wedge [1]_{n \times 1}$ olsun. $[c_{ip}]$ indirgenmiş esnek matrisinin tipi $n \times m_1$ ve $c_{ip} = \min\{a_{ip}, 1\} = a_{ip}$ olduğundan $[c_{ip}] = [a_{ip}]$ elde edilir.

ii) Benzer şekilde ispatlanabilir.

Teorem 5.2.10. i) Genelleştirilmiş Ve çarpım işlemine göre $SM(U)$ bir monoiddir.

ii) Genelleştirilmiş Veya çarpım işlemine göre $SM(U)$ bir monoiddir.

İspat: Teorem 5.2.6, Teorem 5.2.7 ve Önerme 5.2.9 dan ispat açıktır.

5.3. Esnek Dağılmalı Max-Min Karar Verme Metodu

Bu kısımda, indirgenmiş esnek matrisler, matris işlemleri ve esnek dağılmalı max-min karar fonksiyonu kullanılarak esnek dağılmalı max-min karar verme metodu (EDMmKM) olarak isimlendirilen yeni bir karar verme metodu oluşturulacaktır. Bu metot ile verilen alternatiflerden parametrelere göre en uygun (optimum) alternatif veya alternatiflerin seçilebileceği bir örneklerle gösterilecektir.

Genelleştirilmiş çarpımlar değişmeli olmadığından parametreler soldan ve sağdan birbirini üzerine dağıldığında farklı esnek matrisler elde edilir. Şimdi bu matrisler kullanılarak elde edilen esnek sol-dağılmalı max-min ve esnek sağ-dağılmalı max-min karar fonksiyonlarını tanımlayalım.

Tanım 5.3.1. a) $[c_{is}] \in SM_{n \times m_1 m_2}$ ve $k \in I = \{1, 2, \dots, m_1\}$ için,

$$I_k = \{s : \exists i \text{ için } c_{is} \neq 0, (k-1)m_2 < s \leq km_2\}$$

olsun. Bu durumda *esnek sol-dağılmalı max-min karar verme fonksiyonu* $D_l f$,

$$D_l f : SM_{n \times m_1 m_2} \rightarrow SM_{n \times 1}, D_l f([c_{is}]) = [\max_{k \in I} \{l_k\}]$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$$l_k = \begin{cases} \min_{s \in I_k} \{c_{is}\}, & I_k \neq \emptyset \\ 0, & I_k = \emptyset \end{cases}$$

dır. $[f_{i1}] = D_l f([c_{is}])$ tek sütunlu esnek matrise *sol-dağılmalı max-min karar esnek matrisi* denir.

b) $[d_{it}] \in SM_{n \times m_2 m_1}$ ve $l \in J = \{1, 2, \dots, m_2\}$ için,

$$J_l = \{t : \exists i \text{ için } d_{it} \neq 0, (l-1)m_1 < t \leq lm_1\}$$

olsun. Bu durumda *esnek sağ-dağılmalı max-min karar verme fonksiyonu* $D_r f$,

$$D_r f : SM_{n \times m_2 m_1} \rightarrow SM_{n \times 1}, D_r f([d_{it}]) = [\max_{l \in J} \{r_l\}]$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$$r_l = \begin{cases} \min_{t \in J_l} \{d_{it}\}, & J_l \neq \emptyset \\ 0, & J_l = \emptyset \end{cases}$$

dır. $[g_{i1}] = D_r f([d_{it}])$ tek sütunlu esnek matrise *sağ-dağılmalı max-min karar esnek matrisi* denir.

c) $Df : SM_{n \times 1} \times SM_{n \times 1} \rightarrow SM_{n \times 1}, \quad Df([f_{i1}], [g_{i1}]) = [f_{i1}] \tilde{\cup} [g_{i1}] = [h_{i1}]$

fonksiyonuna *esnek dağılmalı max-min karar fonksiyonu* denir. Burada

$[f_{i1}] = D_{lf}([c_{is}])$, $[g_{i1}] = D_{rf}([d_{it}])$ ve $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $h_{i1} = \max\{f_{i1}, g_{i1}\}$ dir. Ayrıca, $[h_{i1}]$ esnek matrisine *dağılmalı max-min karar esnek matrisi* denir.

Bu tanımlardaki $[c_{is}]$ ve $[d_{it}]$ matrisleri aşağıdaki gibi seçilmelidir:

Eğer $[c_{is}] = [a_{ip}] \wedge [b_{ir}]$ ise bu durumda $[d_{it}] = [b_{ir}] \wedge [a_{ip}]$ dir.

Eğer $[c_{is}] = [a_{ip}] \vee [b_{ir}]$ ise bu durumda $[d_{it}] = [b_{ir}] \vee [a_{ip}]$ dir.

Eğer $[c_{is}] = [a_{ip}] \bar{\wedge} [b_{ir}]$ ise bu durumda $[d_{it}] = [b_{ir}]^c \bar{\wedge} [a_{ip}]^c$ dir.

Eğer $[c_{is}] = [a_{ip}] \underline{\vee} [b_{ir}]$ ise bu durumda $[d_{it}] = [b_{ir}]^c \underline{\vee} [a_{ip}]^c$ dir.

Tanım 5.3.2. $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ seçeneklerin cümlesi ve $[f_{i1}] = D_{lf}([c_{is}])$, $[g_{i1}] = D_{rf}([d_{it}])$ olmak üzere $Df([f_{i1}], [g_{i1}]) = [h_{i1}]$ olsun. Bu durumda,

$$opt_{[h_{i1}]}(U) = \{u_i : u_i \in U, h_{i1} = 1\}$$

cümlesine U nun *optimum cümlesi* denir.

Esnek dağılmalı max-min karar fonksiyonu kullanılarak, aşağıdaki algoritmayla *esnek dağılmalı max-min karar verme metodu (EDMmKM)* verilebilir:

Adım 1: Parametrelerin uygun alt cümleleri seçilir ve esnek cümleler oluşturulur.

Adım 2: Her bir esnek cümleye karşılık gelen indirgenmiş esnek matrisler oluşturulur.

Adım 3: Bu indirgenmiş esnek matrislerin verilen probleme göre en uygun genelleştirilmiş çarpımı alınarak $[c_{is}]$ ve $[d_{it}]$ matrisleri elde edilir.

Adım 4: Esnek dağılmalı max-min karar fonksiyonu kullanılarak dağılmalı max-min karar esnek matrisi bulunur.

Adım 5: U nun optimum cümlesi elde edilir.

Tanım 5.3.1 de ‘min’ ve ‘max’ ifadelerinin yerlerini değiştirirsek esnek dağılmalı min-max karar verme metodunu (EDmMKM), ‘max’ ifadesinin yerine ‘min’ ifadesini alırsak esnek dağılmalı min-min karar verme metodunu (EDmmKM), ‘min’ ifadesinin yerine ‘max’ ifadesini alırsak esnek dağılmalı max-max karar verme metodunu (EDMMKM) elde ederiz.

Şimdi genelleştirilmiş Ve çarpım işlemini kullanarak esnek dağılmalı max-min karar verme metodunun bir uygulamasını verelim:

Örnek 5.3.3. Kabul edelim ki Bay ve Bayan X yaz tatili için herhangi bir ülkeye gitmek istiyorlar ve bunun için bu tarz tatilleri organize eden bir tatil acentesine

başvuruyorlar. Tatil acentesi kataloglarında yaz dönemi için tatil organize edebileceği 5 ülkenin olduğunu söylüyor. Çift bu ülkelerden herhangi birini seçebilmek için kriterlerini ‘elverişli hava şartları’, ‘uygun güvenlik koşulları’, ‘güzel plajlara sahip’, ‘çeşitli alışveriş fırsatları’, ‘ülke içinde kolay ulaşım’ ve ‘çeşitli tarihi mekanlara sahip’ şeklinde belirliyor. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ tatil için tercih edilebilecek ülkelerin cümlesi ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ sırasıyla yukarıda belirtilen kriterlerin cümlesi olsun.

Bay ve Bayan X, esnek dağılmalı max-min karar verme metodunu kullanarak tatil için en uygun ülkeyi aşağıdaki gibi bulabilir:

Adım 1: Bay ve Bayan X kendi kriterlerini sırasıyla $A = \{e_1, e_2, e_3, e_5\}$ ve $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ şeklinde belirleyerek, aşağıdaki esnek cümleleri oluştururlar:

$$F_A = \{(e_1, \{u_1, u_5\}), (e_2, \{u_2, u_3\}), (e_3, \{u_1, u_5\}), (e_5, \{u_3, u_4\})\},$$

$$F_B = \{(e_1, \{u_1, u_4\}), (e_2, \{u_3\}), (e_3, \{u_1, u_2, u_5\}), (e_4, \{u_1, u_3\}), (e_5, \{u_3, u_4\}), (e_6, \{u_3, u_4\})\}.$$

Adım 2: Bu esnek cümlelere karşılık gelen indirgenmiş esnek matrisleri sırasıyla

$$[a_{ip}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } [b_{ir}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Adım 3: Genelleştirilmiş Ve çarpımı kullanılarak indirgenmiş esnek matrisler için

$$[c_{is}] = [a_{ip}] \wedge [b_{ir}]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[d_{it}] = [b_{ir}] \wedge [a_{ip}]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Burada çift ortak seçim yapmak istediği için genelleştirilmiş Ve çarpım kullanılmıştır.

Adım 4: Sol-dağılmalı max-min ve sağ-dağılmalı max-min karar fonksiyonları kullanılarak

$$D_l f([c_{is}]) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } D_r f([d_{it}]) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sol-dağılmalı ve sağ-dağılmalı karar esnek matrisleri elde edilir. Bu matrislerden yararlanarak

$$Df(D_l f[c_{is}], D_r f[d_{it}]) = [h_{i1}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dağılmalı max-min karar esnek matrisi elde edilir.

Adım 5: Son olarak, $[h_{i1}]$ dağılmalı max-min karar esnek matrisinden U nun optimum cümlesi

$$opt_{[h_{i1}]}(U) = \{u_1, u_3\}$$

şeklinde elde edilir. Buradan da anlaşılır ki yaz tatili için çiftin gidebileceği ve kriterlerine en uygun ülkeler u_1 ve u_3 tür.

6. İNDİRGENMİŞ ESNEK MATRİSLERİN SATIR-ÇARPIMLARI VE KARAR VERMEDE UYGULAMALARI

Bu bölümde, indirgenmiş esnek matrislerin satır-çarpımları tanıtılacak ve onların cebirsel yapıları detaylı olarak irdelenecektir. Daha sonra bu satır-çarpımlar ve bir önceki bölümde tanımlanan genelleştirilmiş çarpımlar kullanılarak çoklu-esnek dağılmalı max-min karar verme metodu ve esnek max-satır karar verme metodu olarak isimlendirilen iki yeni karar verme metodu oluşturulacaktır. Ayrıca, bu metotların birden fazla ayrık evrensel cümle içeren karar vermede uygulamaları verilecektir.

6.1. İndirgenmiş Esnek Matrislerin Satır-Çarpımları

Bu kısımda, indirgenmiş esnek matrislerin *Ve*, *Veya*, *Ve-Değil* ve *Veya-Değil* satır-çarpımları tanımlanacak ve bu işlemlerin özellikleri ve cebirsel yapıları incelenecektir.

U_1 ve U_2 iki ayrık evrensel cümle ve E parametrelerin cümlesi olsun. $|U_1| = n_1$, $|U_2| = n_2$, $|E| = m$ ve $A \subseteq E$ öyle ki $|A| = m' \leq m$ olsun. $F_A \in S(U_1)$ ve $G_A \in S(U_2)$ iki esnek cümle olmak üzere $[a_{ip}]$ ve $[b_{jp}]$ sırasıyla bu esnek cümlelerin indirgenmiş esnek matrisleri olsun.

Tanım 6.1.1. $[a_{ip}] \in SM_{n_1 \times m'}$ ve $[b_{jp}] \in SM_{n_2 \times m'}$ iki indirgenmiş esnek matris olsun. Bu durumda

a) $[a_{ip}]$ ve $[b_{jp}]$ indirgenmiş esnek matrislerinin *Ve* satır-çarpımı ($\wedge_r$)

$$\begin{aligned} \wedge_r : SM_{n_1 \times m'} \times SM_{n_2 \times m'} &\rightarrow SM_{n_1 n_2 \times m'} \\ [a_{ip}], [b_{jp}] &\rightarrow [a_{ip}] \wedge_r [b_{jp}] = [c_{vp}] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $c_{vp} = \min\{a_{ip}, b_{jp}\}$ öyle ki $\beta, v \leq \beta n_2$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $i = \beta, v = (\beta - 1)n_2 + j$ dir.

b) $[a_{ip}]$ ve $[b_{jp}]$ indirgenmiş esnek matrislerinin *Veya* satır-çarpımı ($\vee_r$)

$$\begin{aligned} \vee_r : SM_{n_1 \times m'} \times SM_{n_2 \times m'} &\rightarrow SM_{n_1 n_2 \times m'} \\ [a_{ip}], [b_{jp}] &\rightarrow [a_{ip}] \vee_r [b_{jp}] = [c_{vp}] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $c_{vp} = \max\{a_{ip}, b_{jp}\}$ öyle ki $\beta, v \leq \beta n_2$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $i = \beta, v = (\beta - 1)n_2 + j$ dir.

c) $[a_{ip}]$ ve $[b_{jp}]$ indirgenmiş esnek matrislerinin *Ve-Değil* satır-çarpımı ($\bar{\lambda}_r$)

$$\bar{\lambda}_r: SM_{n_1 \times m'} \times SM_{n_2 \times m'} \rightarrow SM_{n_1 n_2 \times m'}$$

$$[a_{ip}], [b_{jp}] \rightarrow [a_{ip}] \bar{\lambda}_r [b_{jp}] = [c_{vp}]$$

şeklinde tanımlanır. Burada $c_{vp} = \min\{a_{ip}, 1 - b_{jp}\}$ öyle ki $\beta, v \leq \beta n_2$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $i = \beta, v = (\beta - 1)n_2 + j$ dir.

d) $[a_{ip}]$ ve $[b_{jp}]$ indirgenmiş esnek matrislerinin *Veya-Değil* satır-çarpımı ($\underline{\lambda}_r$)

$$\underline{\lambda}_r: SM_{n \times m_1} \times SM_{n \times m_2} \rightarrow SM_{n \times m_1 m_2}$$

$$[a_{ip}], [b_{jp}] \rightarrow [a_{ip}] \underline{\lambda}_r [b_{jp}] = [c_{vp}]$$

şeklinde tanımlanır. Burada $c_{vp} = \max\{a_{ip}, 1 - b_{jp}\}$ öyle ki $\beta, v \leq \beta n_2$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $i = \beta, v = (\beta - 1)n_2 + j$ dir.

Ayrıca, bu satır-çarpımlar esnek cümlelere karşılık gelen esnek matrisler için de geçerlidir.

Örnek 6.1.2. $U_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $U_2 = \{y_1, y_2, y_3\}$ iki evrensel cümle, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ parametrelerin cümlesi ve $A = \{e_1, e_2, e_3, e_5\} \subset E$ olsun. Eğer

$$F_A = \{(e_1, \{x_2, x_4\}), (e_2, \{x_1, x_3, x_4\}), (e_3, \emptyset), (e_5, U_1)\}$$

ve

$$G_A = \{(e_1, \{y_1, y_3\}), (e_2, \{y_1\}), (e_3, \{y_2\}), (e_5, \{y_1, y_2\})\}$$

ise bu takdirde bu esnek cümlelere karşılık gelen indirgenmiş esnek matrisler

$$[a_{ip}]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } [b_{jp}]_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde dir. Bu durumda, bu indirgenmiş esnek matrislerin *Ve* satır-çarpımları

$$[c_{vp}] = [a_{ip}] \wedge_r [b_{jp}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Burada görülür ki $[c_{vp}]$ matrisinin tipi 12×4 tür. Ayrıca, $[c_{vp}]$ indirgenmiş esnek matrisine karşılık gelen esnek cümle aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$H_A = \{(e_1, \{(x_2, y_1), (x_2, y_3), (x_4, y_1), (x_4, y_3)\}), (e_2, \{(x_1, y_1), (x_3, y_1), (x_4, y_1)\}), (e_3, \emptyset), (e_5, \{(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_3, y_1), (x_4, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_2), (x_3, y_2), (x_4, y_2)\})\}.$$

Not: Genel olarak indirgenmiş esnek matrislerin satır-çarpımları değişmeli (komütatif) değildir.

Örnek 6.1.3. Örnek 6.1.2 deki $[a_{ip}]$, $[b_{jp}]$ ve $[c_{vp}]$ indirgenmiş esnek matrisleri göz önüne alalım. Bu durumda,

$$[d_{wp}] = [b_{jp}] \wedge_r [a_{ip}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan görülür ki $[c_{vp}] \neq [d_{wp}]$ dir.

Önerme 6.1.4. $[a_{ip}] \in SM_{n_1 \times m'}$ ve $[b_{jp}] \in SM_{n_2 \times m'}$ iki indirgenmiş esnek matris olsun. Bu durumda satır-çarpımlar için aşağıdaki De-Morgan kuralları geçerlidir:

- i) $([a_{ip}] \vee_r [b_{jp}])^c = ([a_{ip}])^c \wedge_r ([b_{jp}])^c$
- ii) $([a_{ip}] \wedge_r [b_{jp}])^c = ([a_{ip}])^c \vee_r ([b_{jp}])^c$
- iii) $([a_{ip}] \underline{\vee}_r [b_{jp}])^c = ([a_{ip}])^c \overline{\wedge}_r ([b_{jp}])^c$
- iv) $([a_{ip}] \overline{\wedge}_r [b_{jp}])^c = ([a_{ip}])^c \underline{\vee}_r ([b_{jp}])^c$

İspat: i) $[a_{ip}] \in SM_{n_1 \times m'}$ ve $[b_{jp}] \in SM_{n_2 \times m'}$ iki indirgenmiş esnek matris olsun.

Ayrıca $[c_{vp}] = ([a_{ip}] \vee_r [b_{jp}])^c$ ve $[d_{vp}] = ([a_{ip}])^c \wedge_r ([b_{jp}])^c$ şeklinde alalım. Bu durumda $[c_{vp}]$ ve $[d_{vp}]$ matrislerinin tipi $n_1 n_2 \times m'$ ve $\forall i, j, p$ için

$$c_{vp} = 1 - \max\{a_{ip}, b_{jp}\} = \min\{1 - a_{ip}, 1 - b_{jp}\} = d_{vp}$$

olduğundan, $[c_{vp}] = [d_{vp}]$ dir.

ii), iii) ve iv) ün ispatı benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 6.1.5. Veya satır-çarpım işlemi birleşmelidir, yani $[a_{ip}] \in SM_{n_1 \times m'}$, $[b_{jp}] \in SM_{n_2 \times m'}$ ve $[c_{kp}] \in SM_{n_3 \times m'}$ indirgenmiş esnek matrisler olmak üzere

$$([a_{ip}] \vee_r [b_{jp}]) \vee_r [c_{kp}] = [a_{ip}] \vee_r ([b_{jp}] \vee_r [c_{kp}])$$

dir.

İspat: Kabul edelim ki $[a_{ip}] \in SM_{n_1 \times m'}$, $[b_{jp}] \in SM_{n_2 \times m'}$ ve $[c_{kp}] \in SM_{n_3 \times m'}$ indirgenmiş esnek matrisler olsun. Bu durumda Tanım 6.1.1 b) den $[a_{ip}] \vee_r [b_{jp}] = [d_{vp}] \in SM_{n_1 n_2 \times m'}$ yazılabilir, öyle ki $d_{vp} = \max\{a_{ip}, b_{jp}\}$ ve β_1 , $v \leq \beta_1 n_2$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $i = \beta_1$, $v = (\beta_1 - 1)n_2 + j$ dir. Benzer şekilde, $[d_{vp}] \vee_r [c_{kp}] = [e_{wp}] \in SM_{n_1 n_2 n_3 \times m'}$ yazılabilir, öyle ki $e_{wp} = \max\{d_{vp}, c_{kp}\}$ ve β_2 , $w \leq \beta_2 n_3$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $v = \beta_2$, $w = (\beta_2 - 1)n_3 + k$ dir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} w &= (\beta_2 - 1)n_3 + k \\ &= (v - 1)n_3 + k \\ &= ((\beta_1 - 1)n_2 + j - 1)n_3 + k \\ &= ((\beta_1 - 1)n_2 n_3 + (j - 1)n_3 + k \\ &= ((i - 1)n_2 n_3 + (j - 1)n_3 + k \end{aligned} \quad (6.1)$$

elde edilir.

Aynı şekilde, Tanım 6.1.1 b) den $[b_{jp}] \vee_r [c_{kp}] = [f_{up}] \in SM_{n_2 n_3 \times m'}$ yazılabilir, öyle ki $f_{up} = \max\{b_{jp}, c_{kp}\}$ ve β_3 , $u \leq \beta_3 n_3$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $j = \beta_3$, $u = (\beta_3 - 1)n_3 + k$ dir. Benzer şekilde $[a_{ip}] \vee_r [f_{up}] = [g_{zp}] \in SM_{n_1 n_2 n_3 \times m'}$ yazılabilir, öyle ki $g_{zp} = \max\{a_{ip}, f_{up}\}$ ve β_4 , $z \leq \beta_4 n_2 n_3$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $i = \beta_4$, $z = (\beta_4 - 1)n_2 n_3 + u$ dur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} z &= (\beta_4 - 1)n_2 n_3 + u \\ &= (\beta_4 - 1)n_2 n_3 + (\beta_3 - 1)n_3 + k \\ &= ((i - 1)n_2 n_3 + (j - 1)n_3 + k \end{aligned} \quad (6.2)$$

elde edilir. $\max\{\max\{a_{ip}, b_{jp}\} c_{kp}\} = \max\{a_{ip}, \max\{b_{jp}, c_{kp}\}\}$ olup (6.1) ve (6.2) ten $[e_{wp}] = [g_{zp}]$ elde edilir ki bu ispatı tamamlar.

Teorem 6.1.6. Ve satır-çarpım işlemi birleşmelidir, yani $[a_{ip}] \in SM_{n_1 \times m'}$, $[b_{jp}] \in SM_{n_2 \times m'}$ ve $[c_{kp}] \in SM_{n_3 \times m'}$ indirgenmiş esnek matrisler olmak üzere

$$([a_{ip}] \wedge_r [b_{jp}]) \wedge_r [c_{kp}] = [a_{ip}] \wedge_r ([b_{jp}] \wedge_r [c_{kp}])$$

dir.

İspat: Teorem 6.1.5 in ispatına benzer şekilde ispatlanabilir.

Ve-Değil satır-çarpım ve Veya-Değil satır-çarpım işlemleri birleşmeli değildir. Şimdi bu durumu göstermek için bir örnek verelim:

Örnek 6.1.7. Kabul edelim ki $[a_{ip}] \in SM_{3 \times 4}$, $[b_{jp}] \in SM_{2 \times 4}$ ve $[c_{kp}] \in SM_{1 \times 4}$ indirgenmiş esnek matrisleri

$$[a_{ip}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, [b_{jp}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } [c_{kp}] = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 0]$$

şeklinde olsun. Bu durumda,

$$([a_{ip}] \bar{\wedge}_r [b_{jp}]) \bar{\wedge}_r [c_{kp}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$[a_{ip}] \bar{\wedge}_r ([b_{jp}] \bar{\wedge}_r [c_{kp}]) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. O halde $([a_{ip}] \bar{\wedge}_r [b_{jp}]) \bar{\wedge}_r [c_{kp}] \neq [a_{ip}] \bar{\wedge}_r ([b_{jp}] \bar{\wedge}_r [c_{kp}])$ dir.

Benzer şekilde

$$([a_{ip}] \underline{\wedge}_r [b_{jp}]) \underline{\wedge}_r [c_{kp}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$[a_{ip}] \underline{\wedge}_r ([b_{jp}] \underline{\wedge}_r [c_{kp}]) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. O halde $([a_{ip}] \underline{\wedge}_r [b_{jp}]) \underline{\wedge}_r [c_{kp}] \neq [a_{ip}] \underline{\wedge}_r ([b_{jp}] \underline{\wedge}_r [c_{kp}])$ dir.

Önerme 6.1.8. i) Veya satır-çarpım işlemine göre her bir $k \leq m$ için $[0]_{1 \times k}$ indirgenmiş esnek matrisi $SM_{n \times k}$ nın bir birim elemanıdır.

ii) Ve satır-çarpım işlemine göre her bir $k \leq m$ için $[1]_{1 \times k}$ indirgenmiş esnek matrisi $SM_{n \times k}$ nın bir birim elemanıdır.

İspat: i) $[a_{ip}] \in SM_{n \times k}$ indirgenmiş bir esnek matris ve $[c_{ip}] = [a_{ip}] \vee_r [0]_{1 \times k}$ olsun. $[c_{ip}]$ matrisinin tipi $n \times k$ ve $c_{ip} = \max\{a_{ip}, 0\} = a_{ip}$ olduğundan $[c_{ip}] = [a_{ip}]$ elde edilir.

ii) Benzer şekilde ispatlanabilir.

Teorem 6.1.9. i) Veya satır-çarpım işlemine göre her bir $k \leq m$ için $SM_{n \times k}$ bir monoiddir.

ii) Ve satır-çarpım işlemine göre her bir $k \leq m$ için $SM_{n \times k}$ bir monoiddir.

İspat: Teorem 6.1.5, Teorem 6.1.6 ve Önerme 6.1.8 den ispat açıktır.

6.2. Çoklu-Esnek Dağılmalı Max-Min Karar Verme Metodu

Bu kısımda, indirgenmiş esnek matrislerin genelleştirilmiş çarpımları, satır-çarpımları ve esnek dağılmalı max-min karar fonksiyonu kullanılarak çoklu-esnek dağılmalı max-min karar verme metodu (Çoklu-EDMmKM) olarak isimlendirilen yeni bir karar verme metodu oluşturulacaktır. Bu metot ile verilen ayırık alternatif cümlelerin her birinden parametrelere göre en uygun (optimum) nesnelerin seçilebileceği iki örnekle gösterilecektir.

Şimdi önceki bölümde tanımladığımız esnek sol-dağılmalı max-min ve esnek sağ-dağılmalı max-min karar fonksiyonlarını göz önüne alarak aşağıdaki tanıımı verelim.

Tanım 6.2.1. a) $U_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_1}\}$ ve $U_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_{n_2}\}$ iki ayırık evrensel cümle, $[a_{vp}] \in SM_{n_1 n_2 \times m_1}$, $[b_{vr}] \in SM_{n_1 n_2 \times m_2}$ iki indirgenmiş esnek matris ve bu matrislerin genelleştirilmiş çarpımları da $[c_{vs}] \in SM_{n_1 n_2 \times m_1 m_2}$ ve $[d_{vt}] \in SM_{n_1 n_2 \times m_2 m_1}$ olsun. Ayrıca, $D_l f([c_{vs}]) = [f_{v1}] \in SM_{n_1 n_2 \times 1}$ ve $D_r f([d_{vt}]) = [g_{v1}] \in SM_{n_1 n_2 \times 1}$ olmak üzere $Df([f_{v1}], [g_{v1}]) = [h_{v1}]$ olsun. Bu durumda

$$\text{opt}_{[h_{v1}]}(U_1 \times U_2) = \{u_v : u_v = (x_i, y_j) \in U_1 \times U_2, h_{v1} = 1\}$$

cümlesine $U_1 \times U_2$ nin *optimum cümlesi* denir.

Burada β , $v \leq \beta n_2$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $i = \beta$, $j = v - (\beta - 1)n_2$ dir.

b) $U_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_1}\}$, $U_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_{n_2}\}$ ve $U_3 = \{z_1, z_2, \dots, z_{n_3}\}$ üç ayrık evrensel cümle, $[a_{vp}] \in SM_{n_1 n_2 \times m_1}$, $[b_{vr}] \in SM_{n_1 n_2 \times m_2}$ iki indirgenmiş esnek matris ve bu matrislerin genelleştirilmiş çarpımları da $[c_{vs}] \in SM_{n_1 n_2 n_3 \times m_1 m_2}$ ve $[d_{vt}] \in SM_{n_1 n_2 n_3 \times m_1 m_2}$ olsun. Ayrıca, $D_l f([c_{vs}]) = [f_{v1}] \in SM_{n_1 n_2 n_3 \times 1}$ ve $D_r f([d_{vt}]) = [g_{v1}] \in SM_{n_1 n_2 n_3 \times 1}$ olmak üzere $Df([f_{v1}], [g_{v1}]) = [h_{v1}]$ olsun. Bu durumda

$$opt_{[h_{v1}]}(U_1 \times U_2 \times U_3) = \{u_v : u_v = (x_i, y_j, z_k) \in U_1 \times U_2 \times U_3, h_{v1} = 1\}$$

cümlesine $U_1 \times U_2 \times U_3$ ün *optimum cümlesi* denir.

Burada β , $v \leq \beta n_2 n_3$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $i = \beta$ dir. γ , $v \leq \gamma n_3$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı ve λ , $\gamma \leq \lambda n_2$ şartlarını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $j = \gamma - (\lambda - 1)n_2$ dir. $w = v - (\beta - 1)n_2 n_3$ ve δ , $w \leq \delta n_3$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $k = w - (\delta - 1)n_3$ dür.

Bu durumda esnek dağılmalı max-min karar fonksiyonu kullanılarak, *çoklu-esnek dağılmalı max-min karar verme metodunun (Çoklu-EDMmKM)* algoritması aşağıdaki gibi verilebilir:

Adım 1: Karar vericiler parametre cümlesinden kendi parametrelerini seçer ve ayrık evrensel cümlelerin her biri için esnek cümlelerini oluşturur.

Adım 2: Her bir esnek cümleye karşılık gelen indirgenmiş esnek matrisler oluşturulur.

Adım 3: Karar verme problemi için uygun satır-çarpımlardan herhangi biri kullanılarak birinci karar vericinin indirgenmiş esnek matrislerinin satır-çarpımı olan $[a_{vp}]$ ve ikinci karar vericinin indirgenmiş esnek matrislerinin satır-çarpımı olan $[b_{vr}]$ matrisleri elde edilir.

Adım 4: Genelleştirilmiş çarpımlardan herhangi biri kullanılarak $[a_{vp}]$ ve $[b_{vr}]$ esnek matrislerinin çarpımları olan $[c_{vs}]$ ve $[d_{vt}]$ matrisleri elde edilir.

Adım 5: Esnek dağılmalı max-min karar fonksiyonu kullanılarak dağılmalı max-min karar esnek matrisi bulunur.

Adım 6: Ayrık evrensel cümlelerin sayısına göre bir optimum cümle elde edilir.

Tanım 5.3.1 de ‘min’ ve ‘max’ ifadelerinin yerleri değiştirilirse çoklu-esnek dağılmalı min-max karar verme metodu (Çoklu-EDmMKM), ‘max’ ifadesinin yerine ‘min’ ifadesi alınırsa çoklu-esnek dağılmalı min-min karar verme metodu (Çoklu-EDmmKM), ‘min’ ifadesinin yerine ‘max’ ifadesi alınırsa çoklu-esnek dağılmalı max-max karar verme metodu (Çoklu-EDMMKM) elde edilir.

Şimdi Ve satır-çarpım ve genelleştirilmiş Ve çarpım işlemlerini kullanarak çoklu-esnek dağılmalı max-min karar verme metodunun farklı alanlarda iki uygulamasını verelim:

Örnek 6.2.2. Kabul edelim ki bir havayolu şirketi, aynı uçakta kabin memuru olarak görev yapacak bir bay ve bir bayan personel almak istiyor. Bu iş için şirkete 4 bay ve 5 bayan aday başvuruda bulunmuştur. Bay ve bayan adayların cümleleri sırasıyla $U_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $U_2 = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ dir. Bu adaylarda aranacak kriterlerin cümlesi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ olmak üzere bu kriterler sırasıyla ‘deneyimli’, ‘iletişim becerisi yüksek’, ‘iyi seviyede yabancı dil’, ‘ekip çalışmasına yatkın’ ve ‘dinamik ve güler yüzlü’ şeklindedir. Şirket yöneticisi bu kriterler altında iş için en uygun bay-bayan adayın belirlenmesinde iki asistanını görevlendirir. Asistanlar şirketin belirlemiş olduğu kriterlerden kendi kriterlerini seçtikten sonra, çoklu-esnek dağılmalı max-min karar algoritmasının adımlarını izleyerek bu iş için en uygun bay ve bayanı aşağıdaki gibi bulabilir:

Adım 1: Asistanlar kendi kriterlerini sırasıyla $A = \{e_1, e_2, e_3, e_5\}$ ve $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ şeklinde belirleyerek, aşağıdaki esnek cümleleri oluştururlar.

Birinci asistan adayların cümlelerinin her biri için esnek cümlelerini sırasıyla

$$(F_1, A) = \{(e_1, \{x_1, x_3, x_4\}), (e_2, U_1), (e_3, \{x_1, x_2, x_4\}), (e_5, \{x_2, x_4\})\},$$

$$(G_1, A) = \{(e_1, \{y_2, y_3\}), (e_2, \{y_2, y_3, y_5\}), (e_3, \{y_2, y_3, y_4, y_5\}), (e_5, \{y_1, y_2\})\}$$

şeklinde oluşturur.

İkinci asistan adayların cümlelerinin her biri için esnek cümlelerini sırasıyla

$$(F_2, B) = \{(e_1, \{x_1, x_3, x_4\}), (e_2, U_1), (e_3, \{x_1, x_2, x_4\}), (e_4, \{x_1, x_3\}), (e_5, \{x_1, x_2, x_4\})\},$$

$$(G_2, B) = \{(e_1, \{y_2, y_3, y_4\}), (e_2, \{y_1, y_2, y_3, y_5\}), (e_3, \{y_2, y_3, y_4, y_5\}), (e_4, \{y_3, y_4\}),$$

$$(e_5, \{y_1, y_5\})\}$$
 şeklinde oluşturur.

Adım 2: Bu esnek cümlelere karşılık gelen indirgenmiş esnek matrisler aşağıdaki gibidir:

Birinci asistanın her bir esnek cümlesine karşılık gelen indirgenmiş esnek matrisler sırasıyla

$$[F_1, A] = [a_{ip}^1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } [G_1, A] = [a_{jp}^2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dir.

İkinci asistanın her bir esnek cümlesine karşılık gelen indirgenmiş esnek matrisler sırasıyla

$$[F_2, B] = [b_{ir}^1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } [G_2, B] = [b_{jr}^2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

Adım 3: Ve satır-çarpımı kullanılarak

$$[a_{vp}] = [a_{ip}^1] \wedge_r [a_{jp}^2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } [b_{vr}] = [b_{ir}^1] \wedge_r [b_{jr}^2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri elde edilir.

Adım 4: Genelleştirilmiş Ve çarpımı kullanılarak

[illegible]

[illegible]

Adım 5: Sol-dağılımalı max-min ve sağ-dağılımalı max-min karar fonksiyonları kullanılarak

$$D_l f([c_{vs}]) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } D_r f([d_{vt}]) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sol-dağılmalı ve sağ-dağılmalı karar esnek matrisleri elde edilir.

Bu matrislerden yararlanılarak

$$Df(D_l f([c_{vs}]), D_r f([d_{vt}])) = [h_{v1}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dağılmalı max-min karar esnek matrisi elde edilir.

Adım 6: Son olarak, $[h_{v1}]$ dağılmalı max-min karar esnek matrisinden $U_1 \times U_2$ nin optimum cümlesi

$$opt_{[h_{v1}]}(U_1 \times U_2) = \{u_3 = (x_1, y_3), u_{17} = (x_4, y_2)\}$$

elde edilir. Buradan da anlaşılır ki havayolu şirketinin kabin memuru olarak seçebileceği ve kriterlerine en uygun bay-bayan adaylar (x_1, y_3) ve (x_4, y_2) dir.

Yorum 1: $U_1 \times U_2$ cümlesi U_1 ve U_2 olarak ayrıldığında bu karar problemi bir önceki bölümde sunulan esnek dağılmalı max-min karar verme metodu ile de çözülebilir. Fakat bu metot kullanılırsa U_1 evrensel cümlesi için $\{x_1, x_4\}$ ve U_2 evrensel cümlesi için $\{y_2, y_3\}$ şeklinde ayrı ayrı çözümler elde edilir. Bu durumda, şirket bu iş için (x_1, y_2) bay-bayan çiftini seçebilir. Oysa biz iddia ediyoruz ki x_1 ve y_3 adayları daha fazla ortak özelliğe (kriter) sahip olduğundan, (x_1, y_3) bay-bayan çifti (x_1, y_2) çiftinden bu iş için daha uygundur.

Örnek 6.2.3. Kabul edelim ki bir yatırım şirketi farklı türdeki şirketlerden en iyi seçenekleri belirleyerek bu şirketlere yatırım yapmak istiyor. Şirketin yatırım yapabileceği olası seçenekleri içeren üç ayrık evrensel cümle aşağıdaki gibidir: $A_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ otomotiv şirketlerinin cümlesi, $A_2 = \{y_1, y_2\}$ gıda şirketlerinin cümlesi ve $A_3 = \{z_1, z_2\}$ bilgisayar şirketlerinin cümlesidir. Şirketin iki ortağının yatırım için en uygun şirketleri belirlemede yardımcı olacak dört kriteri e_1 =düşük risk, e_2 =yüksek büyüme oranı, e_3 =düşük sosyal-politikal etki, e_4 =düşük çevresel etki şeklinde belirleyerek bu kriterler altında bir karara ulaşmak istiyor. Ortaklar bu dört kriteri göre ayrık evrensel cümlelerdeki olası şirketleri değerlendirdiğinde çoklu-esnek dağılmalı max-min karar verme metodu uygulanarak en uygun araba-gıda-bilgisayar şirketleri aşağıdaki gibi bulunabilir:

Adım 1: Ortaklar tarafından evrensel cümlelerin her biri için esnek cümleler aşağıdaki gibi oluşturulur:

Birinci ortağın esnek cümleleri

$$(F_1, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_1, x_3\}), (e_3, \emptyset), (e_4, \{x_1, x_2\})\},$$

$$(G_1, E) = \{(e_1, A_2), (e_2, \{y_1\}), (e_3, \{y_1\}), (e_4, A_2)\},$$

$$(H_1, E) = \{(e_1, \{z_1\}), (e_2, A_3), (e_3, \emptyset), (e_4, A_3)\}$$

şeklindedir.

İkinci ortağın esnek cümleleri

$$(F_2, E) = \{(e_1, \{x_1, x_3\}), (e_2, \{x_2, x_3\}), (e_3, \{x_1\}), (e_4, \{x_1, x_2\})\},$$

$$(G_2, E) = \{(e_1, A_2), (e_2, \{y_1\}), (e_3, \emptyset), (e_4, A_2)\},$$

$$(H_2, E) = \{(e_1, A_3), (e_2, \{z_1\}), (e_3, \emptyset), (e_4, A_3)\}$$

şeklindedir.

Adım 2: Bu esnek cümlelere karşılık gelen indirgenmiş esnek matrisler aşağıdaki gibidir:

Birinci ortağın her bir esnek cümlesine karşılık gelen indirgenmiş esnek matrisler sırasıyla

$$[a_{ip}^1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [a_{jp}^2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } [a_{kp}^3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

İkinci ortağın her bir esnek cümlesine karşılık gelen indirgenmiş esnek matrisler sırasıyla

$$[b_{ir}^1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [b_{jr}^2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } [b_{kr}^3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

Adım 3: Ve satır-çarpımı kullanılarak $[a_{vp}] = [a_{ip}^1] \wedge_r [a_{jp}^2] \wedge_r [a_{kp}^3]$ ve $[b_{vr}] = [b_{ir}^1] \wedge_r [b_{jr}^2] \wedge_r [b_{kr}^3]$ esnek matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$[a_{vp}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } [b_{vr}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Adım 4: Genelleştirilmiş Ve çarpımı kullanılarak $[c_{vs}] = [a_{vp}] \wedge [b_{vr}]$ ve $[d_{vt}] = [b_{vr}] \wedge [a_{vp}]$ esnek matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$[c_{vs}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[d_{vt}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Adım 5: Sol-dağılımlı max-min ve sağ-dağılımlı max-min karar fonksiyonları kullanılarak

$$D_l f([c_{vs}]) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } D_r f([d_{vt}]) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sol-dağılımlı ve sağ-dağılımlı karar esnek matrisleri elde edilir. Bu durumda

$$Df(D_l f[c_{vs}], D_r f[d_{vt}]) = [h_{v1}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dağılmalı max-min karar esnek matrisi elde edilir.

Adım 6: Dolayısıyla $[h_{v1}]$ dağılmalı max-min karar esnek matrisinden $A_1 \times A_2 \times A_3$ ün bir optimum cümlesi

$$opt_{[h_{v1}]}(A_1 \times A_2 \times A_3) = \{(x_1, y_1, z_1)\}$$

şeklinde elde edilir. Buradan da anlaşılır ki yatırım şirketinin parasını yatırılabileceği ve kriterlerine en uygun otomotiv-gıda-bilgisayar şirketleri (x_1, y_1, z_1) dir.

Yorum 2: Bu karar problemi esnek dağılmalı max-min karar verme metodu kullanılarak da çözülebilir. Fakat bu metot kullanılırsa her bir evrensel cümle için ayrı ayrı çözümler elde edilir. Yani, A_1 evrensel cümlesi için $\{x_1\}$, A_2 evrensel cümlesi için $\{y_1\}$ ve A_3 evrensel cümlesi için de $\{z_1\}$ şeklinde ayrı ayrı çözümler elde edilir. Bu durum bizim için hem zaman kaybına hem de işlem kalabalığına yol açmaktadır. Oysaki yukarıdaki örnekte çoklu-esnek dağılmalı max-min karar verme metodu kullanılarak ayırık evrensel cümlelerin her birinden aynı anda en uygun nesneler seçilmiştir.

Bu durumda söyleyebiliriz ki çoklu-esnek dağılmalı max-min karar verme metodu hem işlemleri kısaltır hem de daha etkili sonuçlar verir. Aynı zamanda, bu metot ayırık evrensel cümlelerden oluşan karar vermede esnek dağılmalı max-min karar verme metodunun bir genelleştirilmiş hali olarak görülebilir.

6.3. Esnek Max-Satır Karar Verme Metodu

Bu kısımda, ilk olarak indirgenmiş esnek matris için esnek max-satır karar fonksiyonu tanımlanacaktır. Daha sonra bu fonksiyonu kullanarak seçim parametreleri altında çoklu-ayırık evrensel cümlelerden optimum nesneleri seçmemizi sağlayan esnek max-satır karar verme algoritması (EMSKM) olarak isimlendirilen

yeni bir algoritma inşa edilecektir. Son olarak, algoritmanın adımlarının daha iyi anlaşılması için bir örnek verilecektir.

Tanım 6.3.1. $[a_{ip}] \in SM_{n \times m'}$ bir indirgenmiş esnek matris olsun. Bu durumda M'_r ile gösterilen *esnek indirgenmiş max-satır karar fonksiyonu* aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$M'_r : SM_{n \times m'} \rightarrow SM_{n \times 1}, M'_r([a_{ip}]) = [c_{i1}]$$

öyle ki $c_{i1} = \max_{p \in \{1,2,\dots,m'\}} \{a_{ip}\}$ dir.

Burada, $[c_{i1}]$ matrisine $[a_{ip}]$ matrisinin *indirgenmiş max-satır esnek matrisi* denir.

Örnek 6.3.2. Kabul edelim ki alternatiflerin cümlesi $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, parametrelerin cümlesi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ ve $A = \{e_2, e_3, e_5, e_6\} \subseteq E$ olmak üzere $F_A = \{(e_2, \{u_1, u_4, u_5\}), (e_3, \{u_2, u_5\}), (e_5, \{u_1, u_2, u_5\}), (e_6, \{u_2, u_5\})\}$ olsun. Bu durumda, F_A esnek cümlesinin indirgenmiş esnek matrisi

$$[a_{ip}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. O halde, $[a_{ip}]$ matrisinin indirgenmiş max-satır esnek matrisi

$$[c_{i1}] = M'_r([a_{ip}]) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir.

Tanım 6.3.3. a) $[a_{ip}] \in SM_{n \times m'}$ bir indirgenmiş esnek matris olsun. Bu durumda, $\kappa_i = \sum_{p=1}^{m'} a_{ip}$ değeri $[a_{ip}]$ indirgenmiş esnek matrisinin *i. toplam-satır değeri* olarak isimlendirilir.

b) $[c_{i1}]$, $[a_{ip}]$ matrisinin bir indirgenmiş max-satır esnek matrisi olsun. Bu durumda, her bir $c_{i1} = 1$ için $\tau_i = \frac{\kappa_i}{m'}$ değerine *i. max-satır karar değeri* denir. Burada, $0 \leq \tau_i \leq 1$ dir.

Tanım 6.3.4. a) $U_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_1}\}$ ve $U_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_{n_2}\}$ iki ayrık evrensel cümle, $[f_{vt}] \in SM_{n_1 n_2 \times m_1 m_2}$ ve $M'_r([f_{vt}]) = [g_{v1}]$ olsun. Bu durumda,

$$opt_{[g_{v1}]}(U_1 \times U_2) = \{u_v : u_v = (x_i, y_j) \in U_1 \times U_2, \max\{\tau_v\}\}$$

cümlesine $U_1 \times U_2$ nin *optimum cümlesi* denir.

Burada β , $v \leq \beta n_2$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $i = \beta$, $j = v - (\beta - 1)n_2$ dir.

b) $U_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_1}\}$, $U_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_{n_2}\}$ ve $U_3 = \{z_1, z_2, \dots, z_{n_3}\}$ üç ayrık evrensel cümle, $[f_{vt}] \in SM_{n_1 n_2 n_3 \times m_1 m_2 m_3}$ ve $M'_r([f_{vt}]) = [g_{v1}]$ olsun. Bu durumda,

$$opt_{[g_{v1}]}(U_1 \times U_2 \times U_3) = \{u_v : u_v = (x_i, y_j, z_k) \in U_1 \times U_2 \times U_3, \max\{\tau_v\}\}$$

cümlesine $U_1 \times U_2 \times U_3$ ün *optimum cümlesi* denir.

Burada β , $v \leq \beta n_2 n_3$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $i = \beta$ dir. γ , $v \leq \gamma n_3$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı ve λ , $\gamma \leq \lambda n_2$ şartlarını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $j = \gamma - (\lambda - 1)n_2$ dir. $w = v - (\beta - 1)n_2 n_3$ ve δ , $w \leq \delta n_3$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $k = w - (\delta - 1)n_3$ dür.

Bu durumda indirgenmiş esnek max-satır karar fonksiyonu kullanılarak, *esnek max-satır karar verme metodunun (EMSKM) algoritması* aşağıdaki gibi verilebilir:

Adım 1: Karar vericiler ayrık evrensel cümlelerin her biri için esnek matrislerini oluşturur.

Adım 2: Karar verme problemi için en uygun satır-çarpımlardan herhangi biri kullanılarak her bir karar vericinin indirgenmiş esnek matrislerinin satır-çarpımı elde edilir.

Adım 3: Genelleştirilmiş çarpımlardan herhangi biri kullanılarak karar vericilerin satır-çarpım matrislerinin genelleştirilmiş çarpımı olan $[f_{vt}]$ matrisi elde edilir.

Adım 4: $[f_{vt}]$ esnek matrisinin indirgenmiş max-satır esnek matrisi olan $[g_{v1}]$ bulunur ve her bir $g_{v1} = 1$ için τ_v max-satır karar değeri elde edilir.

Adım 5: Ayrık evrensel cümlelerin sayısına göre bir optimum cümle elde edilir.

Şimdi V_e satır-çarpım ve genelleştirilmiş V_e -çarpım işlemlerini kullanarak esnek max-satır karar verme metodunun bir uygulamasını verelim:

Örnek 6.3.5. Kabul edelim ki bir düğün organizasyonu yapmayı planlayan Bay X, balayı için bir otel, ulaşım için bir araba ve düğün için bir salon kiralamak istiyor. Bay X in konaklama, ulaşım ve düğün için düşünebileceği otel, araba ve salonların

cümlesi sırasıyla $U_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$, $U_2 = \{y_1, y_2\}$ ve $U_3 = \{z_1, z_2, z_3\}$ olsun. Otel, araba ve salonların değerlendirilmesinde kullanılacak parametrelerin cümleleri

$$E_{U_1} = \{e_1^{U_1} = \text{pahallı}, e_2^{U_1} = \text{ucuz}, e_3^{U_1} = \text{lüks}, e_4^{U_1} = \text{havuzlu}\},$$

$$E_{U_2} = \{e_1^{U_2} = \text{pahallı}, e_2^{U_2} = \text{ucuz}, e_3^{U_2} = \text{spor}\},$$

$$E_{U_3} = \{e_1^{U_3} = \text{pahallı}, e_2^{U_3} = \text{ucuz}, e_3^{U_3} = \text{şehir merkezinde}, e_4^{U_3} = \text{görmekli}\}$$

olmak üzere Bay X

$$A = \{a_1 = (a_{11} = e_2^{U_1}, a_{12} = e_2^{U_2}, a_{13} = e_2^{U_3}), a_2 = (a_{21} = e_4^{U_1}, a_{22} = e_3^{U_2}, a_{23} = e_1^{U_3})\},$$

$$B = \{b_1 = (b_{11} = e_1^{U_1}, b_{12} = e_2^{U_2}, b_{13} = e_2^{U_3}), b_2 = (b_{21} = e_2^{U_1}, b_{22} = e_3^{U_2}, b_{23} = e_3^{U_3}),$$

$$b_3 = (b_{31} = e_4^{U_1}, b_{32} = e_1^{U_2}, b_{33} = e_4^{U_3})\},$$

$$C = \{c_1 = (c_{11} = e_2^{U_1}, c_{12} = e_2^{U_2}, c_{13} = e_1^{U_3}), c_2 = (c_{21} = e_3^{U_1}, c_{22} = e_3^{U_2}, c_{23} = e_2^{U_3})\}$$

seçim parametreleri altında düğün organizasyonu için anlaştığı şirketin üç uzmanının alternatifleri analiz etmesini ve daha sonra bu analizler doğrultusunda optimum otel-araba-salon seçimini gerçekleştirmesini istiyor. Uzmanların seçim parametreleri altında analizleri aşağıdaki gibi olsun.

A parametre cümlesi altında birinci uzmanın analizi

$(F, E_{U_1})_A$	a_{11}	a_{21}	$(G, E_{U_2})_A$	a_{12}	a_{22}	$(H, E_{U_3})_A$	a_{13}	a_{23}
x_1	0	0	y_1	1	0	z_1	0	1
x_2	1	1	y_2	1	1	z_2	1	0
x_3	1	0				z_3	1	0

B parametre cümlesi altında ikinci uzmanın analizi

$(F, E_{U_1})_B$	b_{11}	b_{21}	b_{31}	$(G, E_{U_2})_B$	b_{12}	b_{22}	b_{32}	$(H, E_{U_3})_B$	b_{13}	b_{23}	b_{33}
x_1	1	0	0	y_1	1	1	0	z_1	1	1	0
x_2	1	0	1	y_2	0	0	1	z_2	0	0	1
x_3	1	1	1					z_3	1	0	0

C parametre cümlesi altında üçüncü uzmanın analizi

$(F, E_{U_1})_C$	c_{11}	c_{21}	$(G, E_{U_2})_C$	c_{12}	c_{22}	$(H, E_{U_3})_C$	c_{13}	c_{23}
x_1	0	1	y_1	1	1	z_1	1	0
x_2	0	1	y_2	0	1	z_2	0	1
x_3	1	0				z_3	1	1

olsun. Bu durumda, Bay X en uygun otel-araba-salon seçimini gerçekleştirmek için esnek max-satır karar algoritmasını aşağıdaki gibi uygulayabilir:

Adım 1: Uzmanların esnek cümlelerine karşılık gelen esnek matrisler aşağıdaki gibidir.

Birinci uzmanın esnek matrisleri sırasıyla

$$[a_{ip}^1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, [a_{jp}^2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } [a_{kp}^3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dir.

İkinci uzmanın esnek matrisleri sırasıyla

$$[b_{ir}^1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, [b_{jr}^2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } [b_{kr}^3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir.

Üçüncü uzmanın esnek matrisleri sırasıyla

$$[c_{is}^1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, [c_{js}^2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } [c_{ks}^3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

Adım 2: Ve satır-çarpımı kullanılarak birinci, ikinci ve üçüncü uzmanların esnek matrislerinin satır-çarpımları olan $[a_{vp}] = [a_{ip}^1] \wedge_r [a_{jp}^2] \wedge_r [a_{kp}^3]$, $[b_{vr}] = [b_{ir}^1] \wedge_r [b_{jr}^2] \wedge_r [b_{kr}^3]$ ve $[c_{vs}] = [c_{is}^1] \wedge_r [c_{js}^2] \wedge_r [c_{ks}^3]$ matrisleri sırasıyla

$$[a_{vp}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, [b_{vr}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } [c_{vs}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Adım 3: Genelleştirilmiş Ve çarpımı kullanılarak $[a_{vp}]$, $[b_{vr}]$ ve $[c_{vs}]$ esnek matrislerinin çarpımı

$$[f_{vt}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Adım 4: $[f_{vt}]$ matrisinin indirgenmiş max-satır esnek matrisi

$$[g_{v1}] = M'_r([f_{vt}]) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Bu durumda, $g_{(9)1} = g_{(11)1} = 1$ için max-satır karar değerleri

$\tau_9 = \tau_{11} = \frac{1}{12}$ olduğundan $\max\{\tau_v\} = \{\tau_9, \tau_{11}\}$ elde edilir.

Adım 5: O halde $[g_{v1}]$ indirgenmiş max-satır esnek matrisinin karar değerlerine göre $U_1 \times U_2 \times U_3$ ün optimum cümlesi

$$opt_{[g_{v1}]}(U_1 \times U_2 \times U_3) = \{u_9 = (x_2, y_1, z_3), u_{11} = (x_2, y_2, z_2)\}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda Bay X, uzmanların analizleri doğrultusunda kendisi için en uygun otel-araba-salon üçlüsünü (x_2, y_1, z_3) veya (x_2, y_2, z_2) şeklinde seçebilir. Buradan anlaşılabilir ki eğer Bay X y_1 arabasını seçmek isterse bu takdirde x_2 otelini ve z_3 düğün salonunu seçebilir, ancak z_2 düğün salonunu seçemez.



SONUÇ

Bu tezde, ilk olarak esnek matrisler için yeni işlemler tanımlanmıştır. Bu işlemlerin özellikleri ve birbiriyle olan ilişkileri detaylı olarak incelenmiştir. Daha sonra, esnek matrisler için çeşitli çarpımlar geliştirilmiş ve bu çarpımların cebirsel yapıları araştırılmıştır. Ayrıca, bu işlem ve çarpımlardan yararlanılarak birçok karar probleminin çözümü için oldukça elverişli yeni esnek karar verme metotları oluşturulmuştur. Aynı zamanda, bu metotların çeşitli alanlardaki karar problemleri için uygulamaları verilmiştir. Sonuç olarak, bu çalışma ile literatüre birçok esnek cümle ve esnek matris işlemi kazandırılmış ve ayrıca bu işlemler yardımıyla çeşitli karar verme problemlerinin çözümüne katkı sağlanmıştır.

KAYNAKLAR

1. Zadeh, L.A, Fuzzy sets, Inform. Control., 8, 338-353, 1965.
2. Pawlak, Z., Rough sets, Int. J. Inform. Comput. Sci., 11, 341-356, 1982.
3. Gau, W.L., Buehrer, D.J., Vague sets, IEEE Tran. Syst. Man Cybern., 23, 610-614, 1993.
4. Gorzalezany, M.B., A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets, Fuzzy Set Syst., 21, 1-17, 1987.
5. Molodtsov, D., Soft set theory-first results, Comput. Math. Appl., 37, 19-31, 1999.
6. Maji, P.K., Biswas, R., Roy, A.R., Soft set theory, Comput. Math. Appl., 45, 555-562, 2003.
7. Ali, M.I., Feng, F., Liu, X., Min, W.K., Shabir, M., On some new operations in soft set theory, Comput. Math. Appl., 57, 1547-1553, 2009.
8. Sezgin, A., Atagün, A.O., On operations of soft sets, Comput. Math. Appl., 61, 1457-1467, 2011.
9. Pei, D., Miao, D., From sets to information systems, in: Hu, X., Liu, Q., Skowron, A., Lin, T.Y., Yager, R.R., Zhang B. (Eds.), Proceedings of Granular Computing IEEE, 2, 617-621, 2005.
10. Zhu, P., Wen, Q., Operations of soft set revisited, J. Appl. Math., 2013, 7 sayfa, 2013.
11. Çağman, N., Enginoğlu, S., Soft set theory and uni-int decision making, Eur. J. Oper. Res., 207, 848-855, 2010.
12. Alshehri, N.O., Akram, M., Al-ghami, R.S., Applications of soft sets in K-algebras, Adv. Fuzzy Syst., 2013, 8 sayfa, 2013.
13. Feng, F., Jun, Y.B., Zhao, X., Soft semirings, Comput. Math. Appl., 56, 2621-2628, 2008.
14. Aktaş, H., Çağman, N., Soft sets and soft groups, Inform. Sci., 177, 2726-2735, 2007.
15. Acar, U., Koyuncu, F., Tanay, B., Soft sets and soft rings, Comput. Math. Appl., 59, 3458-3463, 2010.

16. Sun, Q.M., Zhang, Z.L., Liu, J., Soft sets and soft modules, Lecture Notes in Comput. Sci., 5009, 403-409, 2008.
17. Atagün, A.O., Sezgin, A., Soft substructures of rings, fields and modules, Comput. Math. Appl., 61,592-601, 2011.
18. Shabir, M., Naz, M., On soft topological spaces, Comput. Math. Appl., 61, 1786-1799, 2011.
19. Çağman, N., Karataş, S., Enginoğlu, S., Soft topology, Comput. Math. Appl., 62, 351-358, 2011.
20. Georgiou, D.N., Megaritis, A.C., Soft set theory and topology, Appl. Gen. Topol., 15, 93-109, 2014.
21. Hazra, H., Majumdar, P., Samanta, S.K., Soft topology, Fuzzy Inf. Eng., 1, 105-115, 2012.
22. Shi, F.G., Pang, B., A note on soft topological spaces, Iran. J. Fuzzy Syst., 12, 149-155, 2015.
23. Varol, B.P., Shostak, A., Aygün, H., A new approach to soft topology, Hacet. J. Math. Stat., 41, 731-741, 2012.
24. Maji, P.K., Roy, A.R., Biswas, R., An application of soft sets in a decision making problem, Comput. Math. Appl., 44, 1077-1083, 2002.
25. Feng, F., Li, Y., Çağman, N., Generalized uni-int decision making schemes based on choice value soft sets, Eur. J. Oper. Res., 220, 162-170, 2012.
26. Han, B.-H., Geng, S.-L., Pruning method for optimal solutions of $int^m - int^n$ decision making scheme, Eur. J. Oper. Res., 231, 779-783, 2013.
27. Kharal, A., Soft approximations and uni-int decision making, The Scientific World J., 2014, 7 sayfa, 2014.
28. Gong, K., Xiao, Z., Zhang, X., The bijective soft set with its operations, Comput. Math. Appl., 60, 2270-2278, 2010.
29. Xiao, Z., Gong, K., Xia, S., Zou, Y., Exclusive disjunctive soft sets, Comput. Math. Appl., 59, 2128-2137, 2010.
30. Çağman, N., Enginoğlu, S., Soft matrix theory and its decision making, Comput. Math. Appl., 59, 3308-3314, 2010.

31. Basu, T.M., Mahapatra, N.M., Mondal, S.K., Matrices in soft set theory and their applications in decision making problems, South Asian J. Math., 2, 126–143, 2012.
32. Vijayabalaji, S, Ramesh, A., A new decision making theory in soft matrices, Int. J. Pure Appl. Math., 86, 927-939, 2013.



ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Aydın ilinin Söke ilçesinde dünyaya gelen Hüseyin KAMACI, ilköğretim ve lise öğrenimini sırasıyla Kısır İlköğretim Okulu ve Söke Yavuz Selim Lisesinde tamamlamıştır. 2007 yılında kazandığı Niğde Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2011 yılında bitirmiştir. 2014 yılında Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimini tamamlamıştır.

2012 yılından beri Bozok Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmakta olan Hüseyin KAMACI, evli ve 1 çocuk babasıdır.

İletişim Bilgileri

Adres: Bozok Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

66100 YOZGAT

Telefon: (354) 242 10 21

Faks: (354) 242 10 22

E-posta: huseyin.kamaci@hotmail.com