

**T.C.  
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
TOPOLOJİ BİLİM DALI**

# **ESNEK METRİK UZAYLARDA ÖZEL BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ**

**İnci KARA**

**Danışman  
Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ**



**MANİSA-2023**

## TEZ ONAYI

İnci KARA tarafından hazırlanan “**Esnek Metrik Uzaylarda Özel Büzölme Dönüşümleri**” adlı tez çalışması 05 /01/2023 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

**Danışman**

**Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ**  
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

**Jüri Üyesi**

**Prof. Dr. Ali MUTLU**  
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

**Jüri Üyesi**

**Dr. Öğr. Üyesi Utku GÜRDAL**  
Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi

## **TAAHHÜTNAME**

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

**İnci KARA**



## İÇİNDEKİLER

|                                                                                                                  | Sayfa |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| İÇİNDEKİLER .....                                                                                                | I     |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....                                                                             | II    |
| TEŞEKKÜR.....                                                                                                    | III   |
| ÖZET.....                                                                                                        | IV    |
| ABSTRACT.....                                                                                                    | V     |
| 1. GİRİŞ .....                                                                                                   | 1     |
| 2. GENEL BİLGİLER .....                                                                                          | 4     |
| 2.1. Esnek Küme Teorisi.....                                                                                     | 4     |
| 2.2. Metrik Uzaylar ve Esnek Metrik Uzaylar .....                                                                | 7     |
| 3. MATERYAL VE YÖNTEMLER.....                                                                                    | 13    |
| 3.1. Esnek Metrik Uzaylarda Esnek Devirli Büzülme Dönüşümleri .....                                              | 13    |
| 4. ARAŞTIRMA BULGULARI .....                                                                                     | 16    |
| 4.1. Esnek Metrik Uzaylarda Esnek Devirli Büzülme Dönüşümleri için Çeşitli<br>Esnek Sabit Nokta Teoremleri ..... | 16    |
| 5. SONUÇ VE ÖNERİLER .....                                                                                       | 32    |
| KAYNAKLAR .....                                                                                                  | 33    |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                                                                   | 37    |

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

|                                  |                                     |
|----------------------------------|-------------------------------------|
| $\Phi$                           | Boş Esnek Küme                      |
| $\mathbb{N}$                     | Doğal Sayılar Kümesi                |
| $\prec$                          | Esnek Anlamda Önce Gelme            |
| $\tilde{\mathbb{S}}$             | Esnek Metrik                        |
| $((F_s, A), \tilde{\mathbb{S}})$ | Esnek Metrik Uzay                   |
| $\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty}$    | Esnek Dizi                          |
| $(F_s, A)$                       | Esnek Küme                          |
| $\tilde{\subseteq}$              | Esnek Alt Küme                      |
| $\tilde{\cup}$                   | Esnek Kümelerde Birleşim            |
| $\tilde{\cap}$                   | Esnek Kümelerde Kesişim             |
| $(x, F_s(x))$                    | Esnek Nokta                         |
| $(\alpha, \beta)$                | Esnek Parametrik Skaler             |
| $(\mathbb{U}, \varpi, E)$        | Esnek Topolojik Uzay                |
| $\tilde{\pi}_s$                  | Skaler Değerli Parametrik Fonksiyon |
| $\mathbb{R}$                     | Reel Sayılar Kümesi                 |

## TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında değerli bilgi ve birikimini benimle paylaşan, desteklerini esirgemeyen ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olmak için ellerinden gelenin fazlasını sunan kendilerini tanımaktan ve öğrencisi olmaktan büyük onur duyduğum sayın hocalarım Prof. Dr. Ali MUTLU ve Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ’a teşekkürü borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum. Ayrıca çalışmam boyunca her anlamda bana destek olan ve bu günlere gelmemde büyük emeği olan aileme, tüm dostlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İnci KARA  
Manisa, 2023



## ÖZET

### Yüksek Lisans Tezi

### Esnek Metrik Uzaylarda Özel Büzülme Dönüşümleri

İnci KARA

Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ

Bu tez çalışmasında bir parametre kümesi ile birlikte esnek metrik göz önüne alınarak esnek devirli dönüşüm tanımlanmıştır. Esnek devirli dönüşüm kullanılarak Banach büzülme prensibi ifade edilmiş ve daha sonra Kannan ve Chatterjee tipi esnek devirli büzülme dönüşümleri, esnek asimptotik regüler ve esnek asimptotik regüler devirli dönüşümler gibi bazı özel esnek büzülme dönüşümleri tanımlanmıştır. Bu özel tip esnek devirli büzülme dönüşümleri kullanılarak çeşitli esnek sabit nokta teoremleri ispat edilmiştir. Teoremleri destekleyen kullandığımız özel tip büzülme dönüşümleri için esnek sabit noktanın varlığını gösteren örnekler sunulmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** Esnek Küme, Esnek Metrik, Esnek Devirli Dönüşüm, Esnek Asimptotik Regüler Devirli Dönüşüm.

2023, 45 sayfa

## **ABSTRACT**

**M. Sc. Thesis**

### **Special Contraction Mappings in Soft Metric Spaces**

**İnci KARA**

**Manisa Celal Bayar University  
Graduate School of Applied and Natural Sciences  
Department of Mathematics**

**Supervisor: Assist. Prof. Dr. Simge ÖZTUNÇ**

In this thesis study soft cyclic mapping is defined by considering soft metrics with a parameter set. Banach Contraction Principle is stated by using a soft cyclic map and then some special soft contraction mappings are defined such as Kannan and Chatterjee type soft cyclic contraction map, soft asymptotic regular and soft asymptotic regular cyclic map. Various soft fixed point theorems are proved by using these kinds of special soft cyclic contraction mappings. Some examples are presented which support the theorems and show the existence of the soft fixed point.

**Keywords:** Soft Set, Soft Metric, Soft Cyclic Mapping, Soft Asymptotic Regular Cyclic Mapping.

**2023, 45 pages**



## 1. GİRİŞ

Günlük hayatta karşılaşılabileceğimiz problemlerin çoğu belirsiz özellikler taşımaktadır. Özellikle tıp, doğa bilimleri, ekonomi, mühendislik, sosyal bilimler ve uygulamalı bilimler gibi bir çok alanda bilim insanları kesin olmayan verilerin modellenmesinin karmaşıklığı ile ilgilenmişlerdir.

Doğruluk değeri değişken olan kavramların matematiksel olarak modelleyebilme isteği, belirsiz problemlere olan ilginin artmasına neden olmuştur. Bu problemleri klasik matematiksel yaklaşımla modellemek ve çözebilmek kolay değildir. Diğer bir ifadeyle, Aristo mantığını kullanarak, yani klasik matematik ile belirsizlik içeren problemleri modellemek birtakım zorluklar içerebilir. İşte bu noktada belirsizlik içeren problemleri incelemek için çeşitli bilim dallarında bir çok bilim insanı tarafından çalışmalar ortaya atılmış ve yeni teoriler geliştirilmiştir.

1965 yılında İranlı Matematikçi Zadeh [1] bu teorilerin en dikkat çekici olanlarından birisini ortaya atarak bulanık küme teorisinin yeni bir dal olarak çalışılmasını ve gelişimini sağlamıştır. Böylece belirsizliği modellemek için kullanılan bulanık küme teorisi günümüzde kullanılan en yaygın teorilerden biri haline gelmiştir. Bir bulanık küme, kendisine ait üyelik fonksiyonu yoluyla tanımlanabilir. Fakat üyelik fonksiyonunu belirleme konusunda bir takım zorluklar söz konusu olduğundan bilim insanları üyelik fonksiyonu kullanmadan belirsizliği modelleyebilecek küme teorilerini geliştirme yoluna gitmiştir. Bu zorluktan yola çıkarak, Molodtsov [2] 1999 yılında üyelik fonksiyonu kullanmadan modelleme yapabilmeye imkan veren esnek (soft) küme teorisini ortaya atmıştır. Esnek kümelerde reel değerli üyelik fonksiyonlarının yerini küme değerli seçim fonksiyonları almış, böylece belirsizliğin ortadan kaldırılması amaçlanmıştır.

Esnek (soft) küme teorisinin Molodtsov tarafından ortaya atılmasının ardından 2003 yılında Maji ve çalışma arkadaşları Molodtsov'un teorisini ilerleterek iki esnek (soft) kümenin kesişimi, iki esnek (soft) kümenin birleşimi, esnek (soft) alt küme, esnek (soft) eşit küme, bir esnek (soft) kümenin tümleyeni, boş esnek (soft) küme, mutlak esnek (soft) küme gibi esnek (soft) kümeler üzerinde elementer küme işlemlerini tanımlamıştır. Temel özellikleri barındıran çalışmalardan sonra esnek

kümeler ile ilgili çalışmalar büyük ölçüde hız kazanmıştır. Günümüzde esnek küme teorisi ile ilgili çalışmalar pek çok alana uygulanabilir olarak gelişme göstermektedir. Esnek küme teorisi ile ilgili bazı detaylar [4-7] da bulunabilir. Bununla birlikte esnek küme teorisinin özellikleri topoloji alanında da kullanılarak matematikçiler için son yıllarda yeni bir araç olarak kullanılan esnek topoloji alanının gelişmesini sağlamıştır. Esnek (soft) topolojik uzaylar Shabir ve Naz [8] tarafından tanımlanmış Aygün, Aygünoğlu [9], Varol [10], Zorlutuna, Akdağ, Min, Atmaca [11] gibi matematikçiler esnek (soft) topoloji alanında çalışmalarda bulunmuşlardır. Ayrıca esnek fonksiyonlar ve esnek sürekli fonksiyonlar Aras, Sönmez Çakallı [12] ve Zorlutana, Çakır [13] tarafından çalışılarak esnek küme teorisinin pek çok alanda gelişimini sağlamıştır.

Diğer taraftan sabit nokta teorisi matematiğin hızla gelişen alanlarından biri olup fen, mühendislik, tıp, ekonomi gibi pek çok alanda uygulamaya sahiptir. Sabit nokta teorisi ile ilgili bilimsel incelemeler 1912 senesinde Hollandalı Matematikçi Luitzen Egbertus Jan Brouwer [14] tarafından başlatılmıştır. L.E. Brouwer bu çalışmasında  $\mathbb{R}^n$  de birim kapalı yuvardan yine kendi üzerine tanımlanan sürekli bir dönüşümün sabit noktasının varlığını kanıtlamıştır. Bu teorem literatürde “Brouwer sabit nokta teoremi” olarak yerini almıştır. Metrik uzaylarda sabit nokta teorisi ise ilk defa 1922 de Banach’ın büzülme prensibi olarak da adı geçen Banach sabit nokta teoremi [15] ile başlamıştır. Banach’ın bu çalışmasının ardından Kannan [16-17], Caristi [18], Chatterjea [19], Reich [20], Hardy ve Rogers [21], Ćirić [22] ve Jungck [23-24], Karapınar [25], Gornicki [26], Mutlu [27-28], Bruck [29], Baillon [30] gibi matematikçiler çeşitli farklı tip büzülme ve sabit nokta teoremleri üzerine incelemelerde bulunarak bu alanının gelişimine katkıda bulunmuşlardır. Son yıllarda çalışılan özel büzülme dönüşümlerinden biri de Kirk [31] tarafından 2003 yılında ortaya atılan devirli büzülme dönüşümleridir. Petric [32], Chandok [33] gibi matematikçiler de çeşitli tip devirli büzülme dönüşümleri üzerine çalışmalarda bulunmuştur.

2013 yılında Das ve Samanta [34-35] esnek kümeleri ve esnek kümeler üzerindeki temel cebirsel işlemleri kullanarak “esnek metrik” kavramını ortaya atmıştır. 2017 yılında Hosseinzadeh [36] esnek (soft) metrik kavramını yeniden tanımlamıştır, Hosseinzadeh esnek noktaları, Das ve Samanta’dan farklı bir biçimde kullanarak bu konuda farklı bir bakış açısı geliştirmiştir. Bu çalışmada esnek metrik

uzayların temel özellikleri incelenmiş bununla birlikte, esnek büzülme, esnek sabit nokta kavramlarının ortaya atılmış ve Banach sabit nokta teoremi, Caristi sabit nokta teoremi gibi bazı sabit nokta teoremlerinin esnek (soft) metrik uzaylarda ifade ve ispat edilmiştir. Günümüzde esnek sabit nokta teorisi ilgi çekici bir alan olarak gelişmekte olup matematikçiler açısından yeni bir araç oluşturmuştur. Günümüzde Majumdar [37], Wardowski [38], Altıntaş [39-40], Güler, Yıldırım, zbakır [41], Yazar, Aras, Bayramov [42], Abbas, Murtaza, Romaguera [43] gibi matematikçiler esnek (soft) metrik uzaylarda çeşitli sabit nokta teoremleri üzerine çalışmalarda bulunmuşlardır.

Bu tez çalışmasında bir parametre kümesi ile birlikte esnek metrik kullanılarak Chatterjee tipi devirli bzlmeler, Kannan tipi devirli bzlmeler, Asimptotik regüler devirli bzlmeler ele alınmıştır. Bu zel tip büzülmelerin kullanılmasıyla bazı esnek sabit nokta teoremleri ispatlanmış ve esnek metrik uzaylarda konuyu anlaşılır hale getiren örnekler verilmiştir. Bununla birlikte bu tez çalışmasının esnek metrik uzaylar üzerine çalışan matematikçiler için yeni sonuçlar içeren bir kaynak olması hedeflenmektedir.

## 2. GENEL BİLGİLER

### 2.1. Esnek (Soft) Küme Teorisi

Bu alt bölümde esnek (soft) kümeler ve esnek (soft) topolojilerle ilgili temel tanımlar ve özellikler hatırlatılır.

$\mathbb{U}$  nesnelerin evrensel kümesi ve  $E$ ,  $\mathbb{U}$ ’daki nesnelerle ilişkili parametrelerin kümesi olsun.  $\mathfrak{P}(\mathbb{U})$ ,  $\mathbb{U}$ ’in kuvvet kümesini göstere ve  $A_1, A_2 \subseteq E$  olsun.

**Tanım 2.1.1.[2]**  $\mathbb{U}$  evrensel bir küme ve  $E$  parametrelerin bir kümesi olsun.  $\mathfrak{P}(\mathbb{U})$ ,  $\mathbb{U}$ ’in kuvvet kümesi ve  $A \subseteq E$  olmak üzere;

$$F_s : A \rightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{U})$$

ise  $(F_s, A)$  çifti  $\mathbb{U}$  üzerinde bir esnek (soft) küme olarak isimlendirilir.

Herhangi bir  $(F_s, A)$  esnek kümesi, her  $e \in A$  için  $F_s(e) \neq \emptyset$  ve her  $e \in E \setminus A$  için  $F_s(e) = \emptyset$  olmak üzere  $(F_s, E)$  biçiminde bir esnek (soft) kümeye genişletilebilir.

**Tanım 2.1.2.[3]**  $(F_s, A_1)$  ve  $(G_s, A_2)$ ,  $\mathbb{U}$  üzerinde iki esnek küme olsun.

i)  $A_1 \subseteq A_2$  ve

ii) Her  $a \in A_1$  için  $F_s(a) \subseteq G_s(a)$  ise

$(F_s, A_1)$ ’ya  $(G_s, A_2)$ ’nin esnek alt kümesidir denir ve  $(F_s, A_1) \subseteq (G_s, A_2)$  ile gösterilir.

$(F_s, A_1)$ ,  $(G_s, A_2)$ ’nin esnek alt kümesi ise  $(F_s, A_1)$ ’ya  $(G_s, A_2)$ ’nin esnek (soft) üst kümesi denir ve  $(F_s, A_1) \supseteq (G_s, A_2)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.3.[3]**  $\mathbb{U}$  üzerinde iki  $(F_s, A_1)$  ve  $(G_s, A_2)$  esnek kümesinin esnek (soft) kesişimi  $(H_s, A_3)$  esnek kümesidir. Burada  $A_3 = A_1 \cap A_2$  ve  $\forall c \in A_3$  olmak üzere  $H_s(c) = F_s(c) \cap G_s(c)$  dir. Bu esnek kesişim  $(F_s, A_1) \tilde{\cap} (G_s, A_2) = (H_s, A_3)$  şeklinde ifade edilir.

**Tanım 2.1.4.[3]**  $\mathbb{U}$  üzerinde  $(F_s, A_1)$  ve  $(G_s, A_2)$  gibi iki esnek kümenin esnek (soft) birleşimi  $A_3 = A_1 \cup A_2$  ve  $\forall v \in A_3$  için,

$$H(\nu) = \begin{cases} F(\nu), & \nu \in A_1 - A_2 \\ G(\nu), & \nu \in A_2 - A_1 \\ F(\nu) \cup G(\nu), & \nu \in A_1 \cap A_2. \end{cases}$$

olacak şekilde bir esnek kümedir.

Bu esnek birleşim bağıntısı  $(F_s, A_1) \tilde{\cup} (G_s, A_2) = (H_s, A_3)$  biçiminde ifade edilir.

**Tanım 2.1.5.[3]**  $\mathbb{U}$  üzerindeki bir  $(F, A)$  esnek kümesi  $\forall a \in A$  için  $F(a) = \emptyset$  ise bir boş (null) esnek küme olarak adlandırılır ve  $\Phi$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.6.[3]**  $\mathbb{U}$  üzerindeki  $\tilde{\mathbb{U}}$  mutlak esnek kümesi  $\forall a \in A_1$  için  $F_s(a) = \mathbb{U}$  olacak şekilde tanımlı bir  $(F_s, \mathbb{U})$  esnek kümesidir.

**Tanım 2.1.7.[3]**  $(F_s, A)$ ,  $\mathbb{U}$  üzerinde bir esnek küme olsun.  $(F_s, A)$ 'nın relatif tümleyeni  $(F_s, A)^c$  olarak gösterilir ve  $F_s^c : A \rightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{U})$ , her  $a \in A$  için  $F_s^c(a) = \mathbb{U} - F_s(a)$  ile verilen bir dönüşüm olmak üzere  $(F_s, A)^c = (F_s^c, A)$  ile tanımlıdır.

**Tanım 2.1.8.[3]**  $(F_s, A_1)$  ve  $(G_s, A_2)$ ,  $\mathbb{U}$  üzerinde iki esnek küme olsun. Bu takdirde  $(F_s, A_1) - (G_s, A_2) = \{(x, F_s(x)) : F_s(x) \notin G_s(A_2), x \in A_2\}$  şeklinde bir esnek kümedir.

**Tanım 2.1.9.[8]**  $\mathcal{W}$ ,  $\mathbb{U}$  üzerinde esnek kümelerin bir sınıfı ve  $E$  parametre kümesi olsun. Bu takdirde aşağıdaki aksiyomları sağlayan  $\mathcal{W}$  sınıfına  $\mathbb{U}$  üzerinde bir esnek (soft) topoloji adı verilir.

i)  $\Phi, \tilde{\mathbb{U}} = (F_s, \mathbb{U}) \in \mathcal{W}$ ,

ii)  $\mathcal{W}$ 'daki herhangi (keyfi) sayıda esnek kümelerin birleşimi  $\mathcal{W}$  nın elemanıdır.

iii)  $\mathcal{W}$ 'daki sonlu sayıda esnek kümenin kesişimi yine  $\mathcal{W}$  sınıfının elemanıdır.

Bu durumda  $(\mathbb{U}, \mathcal{W}, E)$  üçlüsüne  $\mathbb{U}$  üzerinde bir esnek topolojik uzay denir.

**Tanım 2.1.10.[8]**  $(\mathbb{U}, \mathcal{W}, E)$ ,  $\mathbb{U}$  üzerinde bir esnek topolojik uzay olsun. Bu takdirde  $\mathcal{W}$ ' nın elemanlarına  $\mathbb{U}$ 'de esnek (soft) açık kümeler denir.

**Tanım 2.1.11.[8]**  $(\mathbb{U}, \varpi, E)$ ,  $\mathbb{U}$  üzerinde bir esnek topolojik uzay olsun.  $(F_s, E)$ ,  $\mathbb{U}$  üzerinde bir esnek küme,  $(F, E)^c$  esnek tümleyen kümesi  $\varpi$  ya ait ise  $\mathbb{U}$  üzerindeki  $(F_s, E)$  esnek kümesi esnek kapalı olarak adlandırılır.

**Tanım 2.1.12.[12]**  $(\mathbb{U}, \varpi, E)$  ve  $(\mathbb{U}', \varpi', E)$  iki esnek (soft) topolojik uzay olsun.  $s: (\mathbb{U}, \varpi, E) \rightarrow (\mathbb{U}', \varpi', E)$  bir dönüşüm olsun.  $(s(x_e), E)$  'nin her bir  $(H_s, E)$  esnek komşuluğu için  $s((F_s, E)) \subset (H_s, E)$  olacak şekilde  $(x_e, E)$  'nin bir  $(F, E)$  esnek komşuluğu mevcutsa bu takdirde  $s$  'e  $(x_e, E)$  'de esnek (soft) sürekli dönüşüm denir.

**Lemma 2.1.13.[12]**  $(\mathbb{U}, \varpi, E)$  esnek (soft) topolojik uzay olsun.  $I_{\mathbb{U}}: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$  birim dönüşümü esnek sürekli olmak zorunda değildir.

**İspat:**  $\mathbb{U} = \{m_1, m_2, m_3\}$ ,  $E = \{e_1, e_2\}$  ve

$\varpi = \{\Phi, \tilde{\mathbb{U}}, (F_{s1}, E), (F_{s2}, E), (F_{s3}, E), (F_{s4}, E)\}$  ve

$\varpi' = \{\Phi, \tilde{\mathbb{U}}, (G_{s1}, E), (G_{s2}, E), (G_{s3}, E), (G_{s4}, E)\}$ ,  $\mathbb{U}$  üzerinde iki esnek topolojik uzay ve

$(F_{s1}, E), (F_{s2}, E), (F_{s3}, E), (F_{s4}, E), (G_{s1}, E), (G_{s2}, E), (G_{s3}, E), (G_{s4}, E)$ ,  $\mathbb{U}$  üzerinde esnek açık kümeler olmak üzere

$F_{s1}(e_1) = \{m_2\}, F_{s1}(e_2) = \{m_1\}, F_{s2}(e_1) = \{m_2, m_3\}, F_{s1}(e_1) = \{m_1\}, F_{s2}(e_2) = \{h_1, h_2\}, F_{s3}(e_1) = \{m_3\}, F_{s3}(e_2) = \{m_1, m_2\}, F_{s4}(e_1) = \emptyset, F_{s2}(e_2) = \{m_1\}$

ve

$G_{s1}(e_1) = \{m_2\}, G_{s1}(e_2) = \{m_1\}, G_{s2}(e_1) = \{m_2, m_3\}, G_{s2}(e_2) = \{m_1, m_2\}, G_{s3}(e_1) = \{m_1, m_2\}, G_{s3}(m_2) = \mathbb{U}, G_{s4}(e_1) = \{m_2\}, G_{s4}(e_2) = \{m_1, m_2\}$

olarak tanımlansın.  $s^{-1}((G_{s3}, E)) = \{(e_1, \{m_1, m_2\}), (e_2, \mathbb{U})\} \notin (\mathbb{U}, \varpi, E)$  ve benzer şekilde

$s^{-1}((G_{s4}, E)) = \{(e_1, \{m_2\}), (e_2, \{m_1, m_2\})\} \notin (\mathbb{U}, \varpi, E)$  dir. Bundan dolayı

$s = I_{\mathbb{U}}: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$  dönüşümü esnek (soft) sürekli değildir.

**Tanım 2.1.14.[36]**  $A \subseteq E$  parametrelerin bir kümesi olsun.  $(x, t)$  ve  $(y, t')$  iki esnek parametrik skaler olsun. Bu takdirde esnek parametrik skalerler arasındaki toplama ve esnek parametrik skalerler üzerindeki skalerler çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$(x, t) \dot{+} (y, t') = (\{x, y\}, t + t') \text{ ve}$$

Her  $\rho \in \mathbb{R}$  için  $\rho(x, t) = (x, \rho t)$ .

**Tanım 2.1.15. [36]**  $(F_s, A)$ ,  $\mathbb{U}$  üzerinde bir esnek küme olsun.

$$s(A, F_s(A)) = (s_1, s_2)(A, F_s(A)) \text{ olacak şekilde } s_1 : A \rightarrow A \text{ ve } s_2 : F(A) \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonları varsa  $(F_s, A)$  üzerindeki bir  $s$  fonksiyonu parametrik skaler değerli bir fonksiyon olarak adlandırılır. Benzer şekilde yukarıdaki tanımları  $s_1 : A \times A \rightarrow A$  ve  $s_2 : F_s(A) \times F_s(A) \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere  $s(A \times A, F_s(A) \times F_s(A)) = (s_1, s_2)(A \times A, F_s(A) \times F_s(A))$  ile  $s : (F_s, A) \times (F_s, A) \rightarrow (A, \mathbb{R})$  şeklinde genişletilebilir.

## 2.2. Metrik Uzaylar ve Esnek Metrik Uzaylar

Bu bölümde esnek kümeler (uzaylar) üzerinde tanımlı esnek (soft) metriklerle ilgili temel kavramlardan bahsedilecektir.

**Tanım 2.2.1.[44]**  $\mathbb{U}$  boştan farklı bir küme olmak üzere  $\rho : \mathbb{U} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^+$  fonksiyonu

$$M(1) \quad \forall u, v \in \mathbb{U}, \rho(u, v) \geq 0$$

$$M(2) \quad \forall u, v \in \mathbb{U}, \rho(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$$

$$M(3) \quad \forall u, v \in \mathbb{U}, \rho(u, v) = \rho(v, u)$$

$$M(4) \quad \forall u, v, w \in \mathbb{U}, \rho(u, w) \leq \rho(u, v) + \rho(v, w)$$

özelliklerini sağlıyorsa  $\rho$ 'ya  $\mathbb{U}$  üzerinde bir metrik ve  $(\mathbb{U}, \rho)$  ikilisine de metrik uzay denir.

**Tanım 2.2.3.[45]**  $\mathbb{U} \neq \emptyset$  ve  $u \in \mathbb{U}$  olsun.  $n : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$  fonksiyonu için  $n(u) = u$  ise  $u \in \mathbb{U}$ 'ya  $n$ 'nin sabit noktası denir.

**Tanım 2.2.4.[45]**  $(\mathbb{U}, \rho)$  metrik uzay ve  $M : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$  herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer her  $m, n \in \mathbb{U}$  için

$$\rho(M(m), M(n)) \leq \kappa \rho(m, n)$$

şartını sağlayan bir  $\kappa \geq 0$  sabiti varsa  $M$  'ye Lipschitz şartını sağlayan dönüşümü (Lipschitz mapping) denir. Burada  $0 \leq \kappa < 1$  ise  $M$  'ye büzülme veya daralma (contraction) dönüşümü ve  $\lambda = 1$  ise  $M$  'ye genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir. Eğer her  $x, y \in \mathbb{U}$  için  $(x \neq y)$

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)$$

şartı sağlanıyorsa  $M$  'ye büzülebilir (contractive) dönüşüm denir. Yukarıdaki açıklamalara göre bu dönüşümler arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilebilir.

Büzülme dönüşümü  $\Rightarrow$  Büzülebilir dönüşüm  $\Rightarrow$  Genişlemeyen dönüşüm  $\Rightarrow$  Lipschitz şartını sağlayan dönüşüm.

**Teorem 2.2.5.[15]**  $(\mathbb{U}, \rho)$  bir tam metrik uzay ve  $M : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$  bir dönüşüm olmak üzere her  $m, n \in \mathbb{U}$  için

$$\rho(M(m), M(n)) \leq \kappa \rho(m, n)$$

olacak şekilde bir  $\kappa \in (0, 1)$  sabiti bulunabiliyorsa  $M$  'nin  $\mathbb{U}$  'da bir tek sabit noktası vardır.

**Tanım 2.2.6.[36]**  $(F_s, A)$ ,  $\mathbb{U}$  üzerinde bir esnek (soft) küme olsun.  $\tilde{\pi}_s : A \times A \rightarrow A$  bir parametrik skaler değerli bir fonksiyon olsun.  $\tilde{S}$  aşağıdaki şartları sağlıyorsa

$\tilde{S} : (F_s, A) \times (F_s, A) \rightarrow (A, \mathbb{R}^+ \cup \{0\})$  parametrik skaler değerli fonksiyonunun  $(F_s, A)$  üzerinde bir esnek (soft) metrik olduğu söylenir.

1. Her  $u, v \in A$  için  $\tilde{S}((u, F_s(u)), (v, F_s(v))) \succeq (\tilde{\pi}_s(u, v), 0)$ ,  $u = v$  iken eşitlik sağlanır.

2. Her  $u, v \in A$  için  $\tilde{S}((u, F_s(u)), (v, F_s(v))) = \tilde{S}((v, F_s(v)), (u, F_s(u)))$

3. Her  $u, v, w \in A$  için

$$\tilde{S}((u, F_s(u)), (w, F_s(w))) \preceq \tilde{S}((u, F_s(u)), (v, F_s(v))) \dot{+} \tilde{S}((v, F_s(v)), (w, F_s(w)))$$

$((F_s, A), \tilde{S})$  ikilisine  $\mathbb{U}$  üzerinde bir esnek metrik uzay denir.



**Tanım 2.2.7.[36]**  $(F_s, A)$  ve  $(F'_s, A')$  sırasıyla  $\mathbb{U}$  ve  $\mathbb{V}$  üzerinde iki esnek küme olsun.

$s_1 : A \rightarrow A'$  ve  $s_2 : F_s(A) \rightarrow F'_s(A'), F_s(A) = \{F_s(a) : a \in A\}$  ve  $F'_s(A') = \{F'_s(a') : a' \in A'\}$  olmak üzere dönüşümler olsun. Bu takdirde  $s = (s_1, s_2) : (F_s, A) \rightarrow (F'_s, A')$  ikilisi

$$s(V, B)(e') = \begin{cases} \bigcup_{e \in s_1^{-1}(e') \cap B} s_2(V(e)) & s_1^{-1}(e') \cap B \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlıdır.

Bu durumda  $s$  esnek dönüşüm olarak adlandırılır ve  $(s(V, A), C), (V, B)$  esnek kümesinin esnek görüntüsü olarak adlandırılır.  $(W, C) \in (F'_s, A')$  olsun. Bu takdirde  $(W, C)$  'nin yukarıda tanımlanan  $s$  esnek dönüşümü altındaki ters görüntüsü

$$s^{-1}(W, C)(e) = \begin{cases} s_2^{-1}(W(s_1(e))) & s_1(e) \in C \\ \emptyset & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere,  $s^{-1}(W, C)$  ile gösterilen  $\mathbb{U}$  üzerinde esnek kümedir.

**Tanım 2.2.8.[36]**  $A \subseteq E$  parametrelerin kümesi olsun. Esnek parametrik skalerlerin bir dizisi  $\{(\alpha_n, \beta_n)\}$  'dir. ( $i \neq j$  için  $\alpha_i = \alpha_j$  olabilir)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta$  olacak şekilde bir  $\beta \in \mathbb{R}$  mevcutsa  $\{(\alpha_n, \beta_n)\}$  bir esnek parametrik skalere yakınsaktır denir ve  $\forall \alpha \in A$  için  $(\alpha_n, \beta_n) \rightarrow (\alpha, \beta)$  olarak yazılır.

**Lemma 2.2.9.[36]**  $A \subseteq E$  bir parametre kümesi olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için  $(\alpha, \beta)$  ve  $(\alpha', \beta')$  iki esnek parametrik skaler olsun, eğer  $(\alpha, \beta) \prec (\alpha', \beta' + \varepsilon)$  ise o halde  $(\alpha, \beta) \preceq (\alpha', \beta')$  'dir.

**Tanım 2.2.10.[36]**  $A \subseteq E$  parametrelerin bir kümesi olsun.  $\{(\alpha_n, \beta_n)\}$  ( $i \neq j$  için  $\alpha_i = \beta_j$  olabilir) esnek parametrik skalerlerin bir dizisi olsun.  $(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}) \preceq (\alpha_n, \beta_n)$  ise  $\{(\alpha_n, \beta_n)\}$  azalan  $(\alpha_n, \beta_n) \preceq (\alpha_{n+1}, \beta_{n+1})$  ise  $\{(\alpha_n, \beta_n)\}$  artan olarak adlandırılır.

**Tanım 2.2.11.[36]**  $(F_s, A), \mathbb{U}$  üzerinde bir esnek küme olsun.  $s(F_s, A) = (s_1, s_2)(A, F_s(A))$  olacak şekilde  $s_1 : A \rightarrow A$  ve  $s_2 : F(A) \rightarrow \mathbb{R}$

fonksiyonları varsa  $(F_s, A)$  üzerindeki parametrik skaler değerli  $s$  fonksiyonu monoton azalan (monoton artan) olarak adlandırılır.

**Tanım 2.2.12.[36]**  $(F_s, A)$ ,  $\mathbb{U}$  üzerinde bir esnek ve  $\tilde{S}$ ,  $(F_s, A)$  üzerinde bir esnek metrik olsun. Her  $(c, x) \in (F_s, A)$  esnek noktası için  $(c, x)$  ve  $(a, F_s(a))$  arasındaki uzaklık  $\tilde{S}((c, x), (a, F_s(a)))$  ile gösterilir.

$\mathbb{U}$ ,  $d$  metriği ile birlikte bir metrik uzay ise  $(c, x)$  ve  $(a, F_s(a))$  arasındaki uzaklık

$$\tilde{S}((c, x), (a, F_s(a))) = (\tilde{\pi}(c, a), \inf_{y \in F_s(a)} d(x, y)) \text{ olarak tanımlanır.}$$

**Tanım 2.2.13.[8]**  $(X, \tau)$  bir esnek (soft) topolojik uzay ve  $x \neq y$  olacak şekilde  $x, y \in X$  olsun.  $x \in F_A$ ,  $y \in G_B$  ve  $F_A \tilde{\cap} G_B = \Phi$  olacak şekilde  $F_A$  ve  $G_B$  esnek açık kümeleri mevcutsa  $(X, \tau)$  esnek topolojik uzayı esnek (soft) Hausdorff uzayı veya esnek (soft)  $T_2$  uzayı olarak adlandırılır.

**Önerme 2.2.14. [36]** Her esnek (soft) metrik uzay esnek (soft) Hausdorff uzayıdır.

**İspat:**  $(\tilde{X}, d)$  en az iki esnek elemana sahip bir esnek metrik olsun.  $a, \tilde{b} \in \tilde{X}$   $d(a, \tilde{b}) > 0$  yani  $\forall \lambda \in A$  için  $d(a, \tilde{b})(\lambda) > 0$  olacak şekilde  $X$  de iki esnek eleman olsun.  $\forall \lambda \in A$  için  $0 < r_\lambda < \frac{1}{2} d(a, \tilde{b})(\lambda)$  koşulunu sağlayan herhangi bir  $\tilde{r}(\lambda)$  reel sayısını göze alalım.  $\forall \lambda \in A$  için  $\tilde{r}(\lambda) = r_\lambda$  olsun. Bu taktirde  $\tilde{r} \in R$  ve  $a, \tilde{b}$  merkezli  $\tilde{r}$  yarıçaplı esnek açık yuvarlar  $B(a, \tilde{r}) = \{x \in X ; d(x, a) < \tilde{r}\}$  ve  $B(\tilde{b}, \tilde{r}) = \{x \in X ; d(x, \tilde{b}) < \tilde{r}\}$  dir. Açık olarak,  $B(a, \tilde{r}) \cap B(\tilde{b}, \tilde{r}) = \Phi$  ve sonuç olarak  $S(B(a, \tilde{r}) \cap B(\tilde{b}, \tilde{r})) = \Phi$ .

**Önerme 2.2.15.[38]**  $(F, \tilde{\tau})$  esnek tam topolojik uzay olsun ve  $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ ,  $F$  in aşağıdaki şartları sağlayan esnek alt kümelerinin bir ailesi olsun.

1. Her bir  $n \in \mathbb{N}$  için  $C_n \neq \tilde{\emptyset}$ ,
2. Her bir  $n \in \mathbb{N}$  için  $C_n$  esnek kapalıdır,
3. Her bir  $n \in \mathbb{N}$  için  $C_{n+1} \subseteq C_n$ .

O halde  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$ .

**Önerme 2.2.16.[38]**  $F, G \in S(U)$ ,  $X, X_1, X_2 \subseteq F$ ,  $Y, Y_1, Y_2 \subseteq G$  olsun ve  $T : F \xrightarrow{\sim} G$  bir esnek dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdakiler kabul edilir:

1.  $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow T(X_1) \subseteq T(X_2)$ .
2.  $Y_1 \subseteq Y_2 \Rightarrow T^{-1}(Y_1) \subseteq T^{-1}(Y_2)$ .
3.  $X \subseteq T^{-1}(T(X))$ .
4.  $T(T^{-1}(Y)) \subseteq Y$ .
5.  $T(X_1 \cup X_2) = T(X_1) \cup T(X_2)$ .
6.  $T(X_1 \cap X_2) \subseteq T(X_1) \cap T(X_2)$ .
7.  $T^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = T^{-1}(Y_1) \cup T^{-1}(Y_2)$ .
8.  $T^{-1}(Y_1 \cap Y_2) \subseteq T^{-1}(Y_1) \cap T^{-1}(Y_2)$ .

(5)-(8) formülleri genelleştirilmiş esnek  $\cup$  ve  $\cap$  işlemleri için de doğrudur.

**Tanım 2.2.17[25]**  $A$  ve  $B$ ,  $(X, d)$  metrik uzayının boş olmayan alt kümeleri ve  $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$  olsun. Eğer  $T(A) \subset B$  ve  $T(B) \subset A$  ise  $T$  'ye devirli dönüşüm denir.

**Tanım 2.2.18.[25]**  $A$  ve  $B$ ,  $(X, d)$  metrik uzayının boş olmayan alt kümeleri ve  $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$  bir devirli dönüşüm olmak üzere  $\forall x \in A, \forall y \in B$  için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde  $k \in (0, 1)$  varsa  $T$  'ye devirli (cyclic) büzülme dönüşümü denir.

**Tanım 2.2.19[25]**  $A$  ve  $B$ ,  $(X, d)$  metrik uzayının boş olmayan alt kümeleri ve  $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$  bir devirli dönüşüm olmak üzere  $\forall x \in A, \forall y \in B$  için

$$d(Tx, Ty) \leq k[d(Tx, x) + d(Ty, y)]$$

olacak şekilde  $k \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$  varsa  $T$  'ye Kannan tip devirli büzülme dönüşümü denir.

**Tanım 2.2.20.[25]**  $A$  ve  $B$ ,  $(X, d)$  metrik uzayının boş olmayan alt kümeleri ve  $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$  bir devirli dönüşüm olmak üzere  $\forall x \in A, \forall y \in B$  için

$$d(Tx, Ty) \leq k[d(Tx, y) + d(Ty, x)]$$

olacak şekilde  $k \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$  varsa  $T$  'ye Chatterjee tip devirli büzülme dönüşümü denir.

**Önerme 2.2.21.[10]**  $(X, \tau)$  bir esnek Hausdorff uzayı olsun.  $F_A$ ,  $X$  de esnek kompakt ise, o halde  $F_A$  esnek kapalıdır.

**İspat:**  $F_A^c$  nin esnek açık olduğunu göstereceğiz.  $x \notin F_A^c$  olsun. Dolayısıyla her bir  $e \in E$  için  $x \in F_A^c = X \setminus F_A(e)$  ve  $x \notin F_A(e)$  dir. O halde tüm  $y \in F_A(e)$  için  $x \neq y$ .  $(X, \tau)$  esnek Hausdorff uzayı olduğundan,  $x \notin (G_B)_y, y \notin (H_C)_y$  ve  $(G_B)_y \cap (H_C)_y = \Phi$  olacak şekilde  $(G_B)_y, (H_C)_y \in \tau$  vardır. Bu, tüm  $e \in E$  için  $x \in (G_B)_y(e), y \in (H_C)_y(e)$  ve  $(G_B)_y(e) \cap (H_C)_y(e) = \emptyset$  olduğu anlamına gelir. O halde,  $F_A(e) \subset (H_C)_y(e)$  ve dolayısıyla  $F_A \subseteq (H_C)_y$  dir.  $C = \{(H_C)_y : y \notin F_A\}$  ailesi  $F_A$  nın esnek açık örtüsüdür.  $F_A$  esnek kompakt olduğundan,  $F_A$  nın sonlu bir alt örtüsü vardır. Böylece,  $F_A \subseteq \bigcup_{i=1}^n (H_C)_{y_i}$  dir. O halde  $\bigcup_{i=1}^n (H_C)_{y_i}$  ve  $\bigcup_{i=1}^n (G_B)_{y_i} \in \tau$  ve  $(\bigcup_{i=1}^n (H_C)_{y_i}) \cap (\bigcap_{i=1}^n (G_B)_{y_i}) = \Phi$  dir.  $x \notin (G_B)_y$  olduğundan, böylece  $x \notin (G_B)_{y_i} \subseteq (\bigcup_{i=1}^n (H_C)_{y_i})^c \subseteq F_A^c$  dir. Dolayısıyla,  $F_A^c$  esnek açıktır.

**Tanım 2.2.22.[46]**  $(X, d)$  bir metrik uzay olsun. Bir  $T : X \rightarrow X$  dönüşümü tüm  $x \in X$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(T^{n+1}x, T^n x) = 0$  şartını sağlıyorsa  $T$  'ye asimptotik regüler dönüşüm denir.

### 3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

#### 3.1. Esnek Metrik Uzaylarda Esnek Devirli Büzülme Dönüşümleri

**Tanım 3.1.1.**  $E$  bir parametre kümesi ve  $((F_s, E), \tilde{S})$  bir esnek metrik uzay olsun.

$A, B, E$  parametre kümesinin alt kümeleri,  $(G_s, A)$  ve  $(H_s, B)$ ,  $((F_s, E), \tilde{S})$  esnek metrik uzayın alt kümeleri olsun.

$T : (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B) \rightarrow (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B)$  dönüşümünü göz önüne alalım. Bu takdirde

$$\text{i. } T((G_s, A)) \tilde{\subset} (H_s, B)$$

$$\text{ii. } T((H_s, B)) \tilde{\subset} (G_s, A)$$

ise  $T$  esnek devirli dönüşüm olarak adlandırılır.

**Tanım 3.1.2.**  $E$  bir parametre kümesi ve  $A, B, E$  parametre kümesinin alt kümeleri olsun.  $(G_s, A)$  ve  $(H_s, B)$ ,  $((F_s, E), \tilde{S})$  esnek metrik uzayın alt kümeleri olsun. Bir

$T : (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B) \rightarrow (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B)$  esnek dönüşümü ile tanımlı

$$G'_s(\omega) = \begin{cases} F_s(\omega), & \omega \in A - B \\ G_s(\omega), & \omega \in B - A \\ F_s(\omega) \cup G_s(\omega), & \omega \in A \cap B \end{cases}$$

$G'_s : A \cup B \rightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{U})$  olmak üzere tüm  $(m, G'_s(m)) \in (G_s, A)$  ve  $(n, G'_s(n)) \in (H_s, B)$  için

$$\tilde{S}(T((m, G'_s(m))), T((n, G'_s(n)))) \preceq k \tilde{S}((m, G'_s(m)), (n, G'_s(n)))$$

olacak şekilde  $k \in (0, 1)$  varsa  $T$  'ye esnek devirli büzülme dönüşümü denir.

**Tanım 3.1.3.**  $E$  bir parametre kümesi ve  $A, B, E$  parametre kümesinin alt kümeleri olsun.  $(G_s, A)$  ve  $(H_s, B)$ ,  $((F_s, E), \tilde{S})$  esnek metrik uzayın alt kümeleri olsun. Bir

$T : (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B) \rightarrow (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B)$  esnek dönüşümü için

$$G'_s : A \cup B \rightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{U});$$

$$G'_s(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in A - B \\ G(\omega), & \omega \in B - A \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in A \cap B \end{cases}$$

olmak üzere tüm  $(x, G'_s(x)) \in (G_s, A)$  ve  $(y, G'_s(y)) \in (H_s, B)$  için

$$\tilde{S}(T((m, G'_s(m))), T((n, G'_s(n)))) \preceq k \left[ \tilde{S}(T((m, G'_s(m))), (m, G'_s(m))) \dot{+} \tilde{D}(T((n, G'_s(n))), (n, G'_s(n))) \right]$$

olacak şekilde  $k \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$  varsa  $T$  'ye Kannan tip esnek devirli büzülme dönüşümü

denir.

**Tanım 3.1.4.**  $E$  bir parametre kümesi ve  $A, B, E$  parametre kümesinin alt kümeleri olsun.  $(G_s, A)$  ve  $(H_s, B)$ ,  $((F_s, E), \tilde{S})$  esnek metrik uzayın alt kümeleri olsun. Bir  $T : (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B) \rightarrow (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B)$  esnek dönüşümü için

$$G'_s : A \cup B \rightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{U});$$

$$G'_s(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega \in A - B \\ G(\omega), & \omega \in B - A \\ F(\omega) \cup G(\omega), & \omega \in A \cap B \end{cases}$$

olmak üzere tüm  $(m, G'_s(m)) \in (G_s, A)$  ve  $(n, G'_s(n)) \in (H_s, B)$  için

$$\tilde{S}(T((m, G'_s(m))), T((n, G'_s(n)))) \preceq k \left[ \tilde{S}(T((m, G'_s(m))), (n, G'_s(n))) \dot{+} \tilde{S}(T((n, G'_s(n))), (m, G'_s(m))) \right]$$

olacak şekilde  $k \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$  varsa  $T$  'ye Chatterjee tip esnek devirli büzülme dönüşümü

denir.

**Tanım 3.1.5.**  $E$  bir parametre kümesi ve  $A, B, E$  parametre kümesinin alt kümeleri olsun.  $(G_s, A)$  ve  $(F_s, B)$ ,  $((F_s, E), \tilde{D})$  esnek metrik uzayın alt kümeleri olsun. Bir  $T : (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B) \rightarrow (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B)$  esnek dönüşümü tüm  $(m, G(m)) \in (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B)$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \tilde{S}(T^{(n+1)}(m, G_s(m)), T^n(m, G_s(m))) \right] = (\tilde{\pi}_s(m, m), 0) \text{ şartını sağlıyorsa } T \text{ 'ye esnek}$$

asimptotik regüler dönüşüm denir.

**Tanım 3.1.6.**  $A$  ve  $B$ ,  $(X, d)$  metrik uzayının boş olmayan alt kümeleri olsun.

$T : A \cup B \rightarrow A \cup B$  dönüşümü aşağıdaki şartları sağlayan bir dönüşüm

- i)  $T(A) \subset B$  ve  $T(B) \subset A$
- ii) Tüm  $x \in A \cup B$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(T^{n+1}x, T^n x) = 0$ .

İse  $T$  'ye asimptotik regüler devirli dönüşüm denir.

**Tanım 3.1.7.**  $E$  bir parametre kümesi ve  $A, B, E$  parametre kümesinin alt kümeleri olsun.  $(G_s, A)$  ve  $(H_s, B), ((F_s, E), \tilde{S})$  esnek metrik uzayın alt kümeleri olsun. Bir  $T : (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B) \rightarrow (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B)$  esnek dönüşümü aşağıdaki şartları sağlayan bir dönüşüm

- i)  $T((G_s, A)) \tilde{\subset} (H_s, B)$  ve  $T((H_s, B)) \tilde{\subset} (G_s, A)$
- ii) Tüm  $(x, G_s(x)) \in (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B)$  için
$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\tilde{S}(T^{(n+1)}(m, G_s(m)), T^n(m, G_s(m)))] = (\tilde{\pi}_s(m, m), 0)$$

ise  $T$  'ye esnek asimptotik regüler devirli dönüşüm denir.

#### 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

##### 4.1. Esnek Metrik Uzaylarda Esnek Devirli Büzülme Dönüşümleri için Çeşitli Esnek Sabit Nokta Teoremleri

**Teorem 4.1.1.**  $(G_s, A)$  ve  $(H_s, B)$ ,  $\mathbb{U}$  üzerinde  $(F_s, E)$  tam esnek metrik uzayının boş olmayan kapalı alt kümeleri olsun ve

$$T : (G_s, A) \dot{\cup} (H_s, B) \rightarrow (G_s, A) \dot{\cup} (H_s, B)$$

bir Kannan tip esnek devirli büzülme dönüşümü olsun. Bu takdirde  $T, (G_s, A) \dot{\cup} (H_s, B)$  de bir tek esnek sabit noktaya sahiptir.

**İspat:**  $(m, G(m)) \in (G_s, A)$  esnek elemanını alarak ispata başlayalım. Kannan tip esnek devirli büzülme dönüşümü şartlarını göz önüne alarak,  $\rho \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$  olmak üzere aşağıdaki eşitsizliğe sahip oluruz

$$\begin{aligned} \tilde{S}(T((m, G_s(m))), T((n, G_s(n)))) &\preceq \left[ \tilde{S}(T^2((m, G_s(m))), T((m, G_s(m)))) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{S}(T((n, G_s(n))), ((m, G_s(m)))) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\tilde{S}(T^2((m, G_s(m))), T((n, G_s(n)))) \preceq t \cdot \tilde{S}(T((m, G_s(m))), ((m, G_s(m)))) ,$$

burada  $t = \frac{\rho}{1-\rho}$  ve  $0 < \rho < \frac{1}{2}$  olduğundan,  $0 < \frac{\rho}{1-\rho} < 1$  ( $0 < t < 1$ ) olduğu açıktır.

Tümevarımla,

$$\tilde{S}(T^{n+1}((m, G_s(m))), T^n((n, G_s(n)))) \preceq t^n \cdot \tilde{S}(T((m, G_s(m))), ((m, G_s(m))))$$

elde edilir. Buradan  $T^n((m, G_s(m)))$  esnek Cauchy dizisidir ve böylece

$$T^n((m, G_s(m))) \rightarrow (k, G'_s(k))$$

olacak şekilde  $(k, G'_s(k)) \in (G_s, A) \dot{\cup} (H_s, B)$  vardır.



$(T^{2n}((m, G_s(m))))$  nin,  $(G_s, A)$  da bir esnek dizi ve  $(T^{2n-1}((m, G_s(m))))$  nin,  $(H_s, B)$  de esnek bir dizi olduğunu varsayalım. Bu her iki esnek alt dizi aynı  $(k, G'_s(k))$  limitine sahiptir.  $(G_s, A)$  ve  $(H_s, B)$  nin kapalılığından dolayı  $(k, G'_s(k)) \in (G_s, A) \tilde{\cap} (H_s, B)$  elde edilir.

O halde  $(G_s, A) \tilde{\cap} (H_s, B) \neq \Phi$ .

Şimdi  $(k, G'_s(k))$  nin  $T$  nin bir esnek sabit noktası olduğunu gösterelim yani

$T((k, G'_s(k))) = (k, G'_s(k))$  olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \tilde{S}(T((k, G'_s(k))), (k, G'_s(k))) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}(T((k, G'_s(k))), T^{2n}(m, G_s(m))) \\ &\preceq \rho \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \tilde{S}(T^{2n}((m, G_s(m))), T^{2n-1}((m, G_s(m)))) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{S}(T((k, G'_s(k))), (k, G'_s(k))) \right] \\ &\preceq \rho \cdot \tilde{S}(T((k, G'_s(k))), (k, G'_s(k))), \end{aligned}$$

$(1 - \rho) \tilde{S}(T((k, G'_s(k))), (k, G'_s(k))) = (\tilde{\pi}_s(T(k), k), 0)$  dır.

$\rho \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$  olduğundan, o halde  $\tilde{S}(T((k, G'_s(k))), (k, G'_s(k))) = (\tilde{\pi}_s(T(k), k), 0)$

buradan

$T((k, G'_s(k))) = (k, G'_s(k))$  olduğu anlamına gelir.

Şimdi  $(k, G'_s(k))$  nin tekliğini ispatlayacağız.

Varsayalım ki  $(k, G'_s(k)) \neq (w, G'_s(w))$  ve  $T(w, G'_s(w)) = (w, G'_s(w))$  olacak şekilde bir  $(w, G'_s(w)) \in (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B)$  olsun.

$(w, G'_s(w))$  de  $T$  nin bir esnek sabit noktası olduğundan  $(w, G'_s(w)) \in (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B)$ .

$T$  için Kannan esnek büzülme dönüşümü eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz.

$$\begin{aligned}
\tilde{S}((k, G'_s(k)), (w, G'_s(w))) &= \tilde{S}(T((k, G'_s(k))), T((w, G'_s(w)))) \\
&= \rho \cdot \left[ \tilde{S}(T((k, G'_s(k))), (k, G'_s(k))) \right. \\
&\quad \left. + \tilde{S}(T((w, G'_s(w))), (w, G'_s(w))) \right] \\
&= (\tilde{\pi}_s(k, w), 0).
\end{aligned}$$

O halde  $(k, G'_s(k)) = (w, G'_s(w))$  ve böylece  $(k, G'_s(k))$ ,  $T$  nin bir tek esnek sabit noktasıdır. ■

**Teorem 4.1.2.**  $(G_s, A)$  ve  $(H_s, B)$ ,  $\mathbb{U}$  üzerinde  $(F_s, E)$  tam esnek metrik uzayının boş olmayan kapalı alt kümeleri olsun ve

$$T : (G_s, A) \tilde{\hookrightarrow} (H_s, B) \rightarrow (G_s, A) \tilde{\hookrightarrow} (H_s, B)$$

bir Chatterjee tip esnek devirli büzülme dönüşümü olsun. Bu takdirde

$T, (G_s, A) \tilde{\hookrightarrow} (H_s, B)$  de bir tek esnek sabit noktaya sahiptir.

**İspat:**  $(x, G_s(x)) \in (G_s, A)$  esnek elemanı olarak ispata başlayalım. Chatterjee tip esnek devirli büzülme dönüşümü şartlarını göz önüne alarak,  $k \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$  olmak üzere aşağıdaki eşitsizliğe sahip oluruz.

$$\tilde{S}(T((u, G(u))), T((v, G(v)))) \preceq k \left[ \tilde{S}(T((u, G(u))), (v, G(v))) + \tilde{S}(T((v, G(v))), (u, G(u))) \right]$$

Yukarıdaki eşitsizlikten dolayı

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(T^2((u, G_s(u))), T((u, G_s(u)))) &\preceq k \left[ \tilde{S}(T^2((u, G_s(u))), (u, G_s(u))) + \tilde{S}(T((u, G_s(u))), (u, G_s(u))) \right] \\
&= k \tilde{S}(T^2((u, G_s(u))), (u, G_s(u))) \\
&\preceq k \left[ \tilde{S}(T^2((u, G_s(u))), T((u, G_s(u)))) + \tilde{S}(T((u, G_s(u))), (u, G_s(u))) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\tilde{S}(T^2((u, G_s(u))), T((u, G_s(u)))) \preceq \frac{k}{1-k} \tilde{S}(T((u, G_s(u))), (u, G_s(u)))$$

$0 < k < \frac{1}{2}$  olduğundan,  $0 < \frac{k}{1-k} < 1$  olduğu açıktır. Tümevarımla

$$\tilde{S}(T^{n+1}((u, G_s(u))), T^n((u, G_s(u)))) \preceq \left( \frac{k}{1-k} \right)^n \tilde{S}(T((u, G_s(u))), (u, G_s(u)))$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{S}(T^{n+1}((u, G_s(u))), T^n((u, G_s(u)))) \preceq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{k}{1-k} \right)^n \tilde{S}(T((u, G_s(u))), (u, G_s(u)))$$

$$\prec \infty$$

elde edilir. Buradan  $T^n((u, G_s(u)))$  esnek Cauchy dizisidir ve böylece

$$T^n((u, G_s(u))) \rightarrow (z, G'_s(z))$$

olacak şekilde  $(G_s, A) \tilde{\cap} (H_s, B)$  de bir  $(z, G'_s(z))$  vardır.  $(T^{2n}((u, G_s(u))))$  nin  $(G_s, A)$  da bir esnek dizi ve  $(T^{2n-1}((u, G_s(u))))$  nin,  $(H_s, B)$  de esnek bir dizi olduğunu varsayalım.  $(T^{2n}((u, G_s(u))))$  ve  $(T^{2n-1}((u, G_s(u))))$  her ikisi de  $T^n((u, G_s(u)))$  in esnek alt dizileridir. Bu her iki esnek alt dizi aynı  $(z, G'_s(z))$  limitine sahiptir.  $(G, A)$  ve  $(H, B)$  nin kapalılığından dolayı,  $(z, G'_s(z)) \in (G_s, A)$  ve  $(z, G'_s(z)) \in (H_s, B)$  elde edilir. Böylece  $(z, G'_s(z)) \in (G, A) \tilde{\cap} (H, B)$ . Şu halde  $(G, A) \tilde{\cap} (H, B) \neq \Phi$ .

Şimdi  $(z, G'_s(z))$  nin  $T$  nin bir esnek sabit noktası olduğunu gösterelim yani

$T((z, G'_s(z))) = (z, G'_s(z))$  olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \tilde{S}(T((z, G'_s(z))), (z, G'_s(z))) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}(T((z, G'_s(z))), T^{2n}(u, G'_s(u))) \\ &\preceq k \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \tilde{S}(T((z, G'_s(z))), T^{(2n-1)}(u, G'_s(u))) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{S}(T^{2n}((u, G'_s(u))), (z, G'_s(z))) \right] \\ &\preceq k \tilde{S}(T((z, G'_s(z))), (z, G'_s(z))). \end{aligned}$$

Dolayısıyla  $0 < k < \frac{1}{2}(1-k)$  negatif olmayan bir skaler olduğundan

$$(1-k) \tilde{S}(T((z, G'_s(z))), (z, G'_s(z))) \preceq (\tilde{\pi}_s(T(z), z), 0)$$

elde ederiz. Dolayısıyla esnek metrik tanımının ilk şartından dolayı

$\tilde{S}(T((z, G'_s(z))), (z, G'_s(z))) = (\tilde{\pi}_s(T(z), z), 0)$  elde edilir. Yani buradan

$$T((z, G'_s(z))) = (z, G'_s(z))$$

olduğu sonucuna varılır.

İspatın bir sonraki kısmı  $(z, G'_s(z))$  nin tekliğini göstermektir.  $(z, G'_s(z)) \neq (w, G'_s(w))$  ve  $T(w, G'_s(w)) = (w, G'_s(w))$  olacak şekilde başka bir  $(w, G'_s(w))$  esnek sabit noktasının var olduğunu varsayalım.  $(w, G'_s(w))$  de  $T$  nin bir esnek sabit noktası olduğundan  $(w, G'_s(w)) \in (G_s, A) \tilde{\cap} (H_s, B)$ .

$T$  için Chatterjee esnek büzülme dönüşümü eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz.

$$\begin{aligned} (1-k)\tilde{S}(T((z, G'_s(z))), (z, G'_s(z))) &\preceq (\tilde{\pi}_s(T(z), z), 0) \\ &\preceq k \left[ \tilde{S}(T((z, G'_s(z))), (w, G'_s(w))) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{S}(T((w, G'_s(w))), (z, G'_s(z))) \right] \\ &= k \cdot 2\tilde{S}((z, G'_s(z)), (w, G'_s(w))) \\ (1-2k)\tilde{S}((z, G'_s(z)), (w, G'_s(w))) &\preceq (\tilde{\pi}_s(z, w), 0). \end{aligned}$$

Şu halde  $z = w$  ve  $G'_s(z) = G'_s(w)$  olduğundan  $(z, G'_s(z)) = (w, G'_s(w))$ .

Sonuç olarak  $T$  nin bir tek esnek sabit noktası vardır. ■

**Örnek 4.1.3.**  $\mathbb{U} = [0, \infty]$  üzerinde alışılmış metriği göz önüne alalım ve  $A_1 = [0, 1]$  ve  $A_2 = [0, 1/2]$   $X$  in alt kümeleri olsun.  $(F_s, A_1)$  ve  $(G_s, A_2)$ ,  $\mathbb{U}$  üzerinde iki esnek küme olsun.

$$T : (F_s, A_1) \tilde{\cap} (G_s, A_2) \rightarrow (F_s, A_1) \tilde{\cap} (G_s, A_2)$$

dönüşümü,  $G'_s : A_1 \cup A_2 \rightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{U})$  olmak üzere tüm  $(u, G'_s(u)), (v, G'_s(v)) \in (F_s, A_1) \tilde{\cap} (G_s, A_2)$  için

$$T((u, G'_s(u)), (v, G'_s(v))) = \left( \frac{1}{5}u, G' \left( \frac{1}{5}u \right) \right) = \left[ 0, \frac{1}{5}u \right]$$

olacak şekilde tanımlansın.

Diğer taraftan  $E = A_1 \cup A_2$  olmak üzere  $\tilde{S} : (F_s, E) \times (F_s, E) \rightarrow (E, R^+ \cup \{0\})$  esnek metriği, tüm  $u, v \in E$  için aşağıdaki gibi tanımlansın

$$\tilde{S}((u, G'_s(u)), (v, G'_s(v))) = (\max\{u, v\}, |u - v|).$$

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(T((u, G'_s(u))), T((v, G'_s(v)))) &= \tilde{S}\left(\left(\frac{1}{5}u, G'_s\left(\frac{1}{5}u\right)\right), \left(\frac{1}{5}v, G'_s\left(\frac{1}{5}v\right)\right)\right) \\
&= \left(\max\left\{\frac{1}{5}u, \frac{1}{5}v\right\}, \left|\frac{1}{5}u, \frac{1}{5}v\right|\right) \\
&\preceq \frac{1}{5}(\max\{u, v\}, |u, v|)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\preceq \frac{1}{5}\left(\max\left\{u, \frac{1}{5}u\right\}, \left|u - \frac{1}{5}u\right|\right) + \frac{1}{5}\left(\max\left\{\frac{1}{5}u, v\right\}, \left|\frac{1}{5}u - v\right|\right) \\
&\preceq \frac{1}{5}\left(\max\left\{u, \frac{1}{5}v\right\}, \left|u - \frac{1}{5}v\right|\right) + \frac{1}{5}\left(\max\left\{\frac{1}{5}v, \frac{1}{5}u\right\}, \left|\frac{1}{5}v - \frac{1}{5}u\right|\right) + \frac{1}{5}\left(\max\left\{\frac{1}{5}u, v\right\}, \left|\frac{1}{5}u - v\right|\right) \\
&\left(\max\left\{\frac{1}{5}u, \frac{1}{5}v\right\}, \left|\frac{1}{5}u, \frac{1}{5}v\right|\right) - \frac{1}{5}\left(\max\left\{\frac{1}{5}v, \frac{1}{5}u\right\}, \left|\frac{1}{5}v - \frac{1}{5}u\right|\right) \\
&\preceq \frac{1}{5}\left(\max\left\{u, \frac{1}{5}v\right\}, \left|u - \frac{1}{5}v\right|\right) + \frac{1}{5}\left(\max\left\{\frac{1}{5}u, v\right\}, \left|\frac{1}{5}u - v\right|\right) \\
&\frac{4}{5}\tilde{S}(T((u, G'_s(u))), T((v, G'_s(v)))) \preceq \frac{1}{5}(\tilde{S}((u, G'_s(u)), (v, G'_s(v))) \dot{+} \tilde{S}(T((u, G'_s(u))), T((v, G'_s(v))))
\end{aligned}$$

$$\tilde{S}(T((u, G'_s(u))), T((v, G'_s(v)))) \preceq \frac{1}{4}[\tilde{S}((u, G'_s(u)), (v, G'_s(v))) \dot{+} \tilde{S}(T((u, G'_s(u))), T((v, G'_s(v))))]$$

Böylece  $\frac{1}{4} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$  olduğundan  $T$  bir Chatterjee tip devirli büzülme dönüşümüdür.

O halde  $T$  bir tek esnek sabit noktaya sahiptir.

**Teorem 4.1.4.**  $E$  bir parametre kümesi  $((F_s, E), \tilde{S})$   $\mathbb{U}$  üzerinde bir esnek tam metrik uzay olsun.  $A$  ve  $B$ ,  $E$  parametre kümesinin alt kümeleri,  $(G_s, A)$  ve  $(H_s, B)$ ,  $((F_s, E), \tilde{S})$  esnek metrik uzayının alt kümeleri olsun.

$$T = (T_1, T_2) : (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B) \rightarrow (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B)$$

esnek devirli dönüşümü

$$T((G_s, A)) \tilde{\subset} (H_s, B)$$

$$T((H_s, B)) \tilde{\subset} (G_s, A)$$

ve  $\forall (a, F(a)) \in (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B)$  için

$$T(a, F(a)) = (T_1(a), T_2(F(a))) = (T_1(a), F(T_1(a)))$$

olacak şekilde esnek sürekli bir dönüşüm olsun. Parametrik skaler değerli bir  $\varphi: (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B) \rightarrow (A \cup B, \mathbb{R})$  fonksiyonu için aşağıdaki eşitsizliğin sağlandığını kabul edelim:

$$\tilde{\mathbb{S}}\left(T\left((a, F_s(a)), (a, F_s(a))\right)\right) < \varphi\left((a, F_s(a)) - \varphi\left(T\left((a, F_s(a))\right)\right)\right) \quad (*)$$

Bu takdirde  $\{T^n((a, F_s(a)))\}, \forall (a, F_s(a)) \in (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B)$  için bir tek esnek sabit kümeye yakınsar.

**İspat:**

$$\begin{aligned} T((G_s, A)) &= (T_1, T_2)(G_s, A) \\ &= (T_1(G_s(A)), T_2(A)) \subset (H_s, B) \end{aligned}$$

Her  $a_1 \in A$  için

$$T_1(G_s(A)) \subset H_s(a_1), \quad T_2(A) \subset B \text{ ve}$$

$$\begin{aligned} T((H_s, B)) &= (T_1, T_2)(H_s, B) \\ &= (T_1(H_s(B)), T_2(B)) \subset (G_s, A) \end{aligned}$$

Her  $a_2 \in B$  için

$$T_1(H_s(B)) \subset G(a_2), \quad T_2(B) \subset A \text{ olsun.}$$

$$T = (T_1, T_2) \text{ ve } \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \text{ olsun.}$$

$$T((a, F_s(a))) = (T_1(a), T_2(F_s(A))) \text{ ise,}$$

$$T((a, F_s(a))) = (a_1, F_s(a_1)) \text{ alalım, bu takdirde}$$

$$\varphi(T((a, F_s(a)))) = (\varphi_1(a_1), \varphi_2(F_s(a_1))) = (\alpha_1, \beta_1)$$

Benzer biçimde,  $n = 1, 2, \dots$  için  $T^n((a, F_s(a))) = (a_n, F_s(a_n))$  yazarız.

Böylece,

$$\varphi\left(T^n\left((a, F_s(a))\right)\right) = \left(\varphi_1(a_n), \varphi_2(F_s(a_n))\right) = (\alpha_n, \beta_n)$$

Teoremin hipotezindeki şart aşağıdaki eşitsizliği gerektirir

$$\tilde{S}\left(T\left((a, F_s(a)), (a, F_s(a))\right)\right) + \varphi\left(T(a, F_s(a))\right) < \varphi\left((a, F_s(a))\right).$$

Bu eşitsizlik

$$\varphi\left(T\left((a, F_s(a))\right)\right) \preceq \varphi\left((a, F_s(a))\right). \quad \text{Bu} \quad \varphi\left(T^2\left((a, F_s(a))\right)\right) \preceq \varphi\left(T\left((a, F_s(a))\right)\right)$$

olmasını gerektirir. Bu yöntem devam ettirilirse

$$\varphi\left(T^{n+1}\left((a, F_s(a))\right)\right) \preceq \varphi\left(T^n\left((a, F_s(a))\right)\right) \text{ elde edilir.}$$

Bu  $\left\{\varphi\left(T^n\left((a, F_s(a))\right)\right)\right\}$  dizisinin azalan olması anlamına gelir ve dolayısıyla reel sayıların  $\{\beta_n\}$  dizisi azalandır.

Böylece tüm  $b \in A \cup B$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi\left(T^n\left((a, F_s(a))\right)\right) = (\alpha, \beta) \text{ olacak şekilde bir } r \in \mathbb{R} \text{ vardır.}$$

Açık bir biçimde  $(\alpha, \beta)$  negatif değildir. O halde  $m \geq n$  olmak üzere tüm  $n, m \in \mathbb{N}$  için

$$\begin{aligned} \tilde{S}\left(T^n\left((a, F_s(a))\right), T^m\left((a, F_s(a))\right)\right) &\preceq \tilde{S}\left(T^n\left((a, F_s(a))\right), T^{n+1}\left((a, F_s(a))\right)\right) \\ &\quad + \tilde{S}\left(T^{n+1}\left((a, F_s(a))\right), T^{n+2}\left((a, F_s(a))\right)\right) \\ &\quad + \tilde{S}\left(T^{n+2}\left((a, F_s(a))\right), T^{n+3}\left((a, F_s(a))\right)\right) \\ &\quad + \dots + \tilde{S}\left(T^{m-1}\left((a, F_s(a))\right), T^m\left((a, F_s(a))\right)\right) \\ &\preceq \sum_{i=n}^{m-1} \tilde{S}\left(T^i\left((a, F_s(a))\right), T^{i+1}\left((a, F_s(a))\right)\right) \\ &\preceq \varphi\left(T^n\left((a, F_s(a))\right)\right) - \varphi\left(T^{n+1}\left((a, F_s(a))\right)\right) \\ &\quad + \varphi\left(T^{n+1}\left((a, F_s(a))\right)\right) - \varphi\left(T^{n+2}\left((a, F_s(a))\right)\right) \\ &\quad + \dots + \varphi\left(T^{m-1}\left((a, F_s(a))\right)\right) - \varphi\left(T^m\left((a, F_s(a))\right)\right) \\ &= \varphi\left(T^n\left((a, F_s(a))\right)\right) - \varphi\left(T^m\left((a, F_s(a))\right)\right). \end{aligned}$$

$$\text{Şu halde, } \lim_{m, n \rightarrow \infty} \tilde{S}\left(T^n\left((a, F_s(a))\right), T^m\left((a, F_s(a))\right)\right) = (\alpha, 0).$$

Dolayısıyla,  $T^n((a, F_s(a)))$  esnek bir Cauchy dizisidir.

Böylece,  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n((a, F_s(a))) = (x, F_s(x))$  olacak şekilde  $(x, F_s(x)) \in (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B)$  vardır. ■

**Teorem 4.1.5.**  $E$  bir parametre kümesi  $((F_s, E), \tilde{\mathbb{S}})$ ,  $\mathbb{U}$  üzerinde bir esnek tam metrik uzay olsun.  $A$  ve  $B, E$  parametre kümesinin alt kümeleri,  $(G_s, A)$  ve  $(H_s, B)$   $((F_s, E), \tilde{\mathbb{S}})$  esnek metrik uzayının alt kümeleri olsun.

$$T = (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B) \rightarrow (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B)$$

esnek devirli dönüşümü

$$T((G_s, A)) \tilde{\subset} (H_s, B)$$

$$T((H_s, B)) \tilde{\subset} (G_s, A)$$

ve  $\forall (a, F_s(a)) \in (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B)$  için

$$T = (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B) \rightarrow (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B)$$

$$\tilde{\mathbb{S}}(T((a, F_s(a))), T((b, F_s(b)))) \leq \tilde{\mathbb{S}}((a, F_s(a)), (b, F_s(b)))$$

ile kapalı bir esnek devirli dönüşüm olsun.

Boş olmayan her bir  $(a, F_s(a))$  esnek kümesi için  $T(a, F_s(a))$  boş olmayan bir esnek küme ise o zaman  $T, (F_s, E)$  'de bir tek sabit esnek kümeye sahiptir.

**İspat:**  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $A \cup B$  de alt kümelerin bir ailesi ve  $T((F_s, A)) = (F_s, A_1)$  olsun.

Benzer şekilde,  $T^2((F_s, A)) = T((F_s, A_1)) = (F_s, A_2)$  alalım.

Bu metodu aşağıdaki gibi devam ettirirsek  $\forall n \in \mathbb{N}$  için

$$T^3((F_s, A)) = T((F_s, A_2)) = (F_s, A_3), \dots, T^n((F_s, A)) = T((F_s, A_{n-1})) = (F_s, A_n) \text{ dir.}$$

Açık bir biçimde her  $n \in \mathbb{N}$  için  $(F_s, A_{n+1}) \tilde{\subset} (F_s, A_n)$  dir.

Bu takdirde



$T((F_s, A_{n+1})) = (F_s, A_{n+2})$  olup

$$\begin{aligned} T((F_s, A_n)) &= (F_s, A_{n+1}) \\ (F_s, A_{n+1}) &\tilde{\subset} (F_s, A_n) \\ &\tilde{\subset} T((F_s, A_{n-1})) \end{aligned}$$

Böylece

$$(F_s, A_{n+1}) \tilde{\subset} T((F_s, A_{n-1})) \quad (1)$$

Diğer taraftan

$(F_s, A_n) \tilde{\subset} (F_s, A_{n-1})$  olup

$$T((F_s, A_{n-1})) \tilde{\subset} (F_s, A_{n-1}) \quad (2)$$

elde edilir.

Her esnek (soft) metrik uzay esnek (soft) Hausdorff uzayıdır ve esnek Hausdorff uzayının esnek kompakt alt kümelerinin kapalı olmasından dolayı,  $(F_s, A)$  esnek kapalı kümedir ve dolayısıyla  $(F_s, A_1)$  bir esnek kapalı kümedir.[10]

O halde her  $n \in \mathbb{N}$  için  $(F_s, A_n)$  bir kapalı esnek kümedir. Böylece

$$\begin{aligned} &T\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (F_s, A_n)\right) \neq \Phi \\ &\underbrace{T\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (F_s, A_n)\right)}_{\Downarrow} \\ &\quad \tilde{\bigcap} (F_s, A_n) \tilde{\subset} (F_s, A_n) \\ &\quad \tilde{\subset} T((F_s, A_{n-1})) \\ &\left(\left(\tilde{\bigcap} (F_s, A_n)\right)\right) \tilde{\subset} T^2((F_s, A_{n-1})) \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^2(F_s, A_{n-1}) &= T(T((F_s, A_{n-1}))) \\ &= T((F_s, A_n)) \end{aligned}$$

$$T\left(\tilde{\bigcap} (F_s, A_n)\right) \tilde{\subset} T^2((F_s, A_n)) \quad (4)$$

olup

$$\begin{aligned}
T\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (F_s, A_n)\right) &= T\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T^n((F_s, A_n))\right) \tilde{\subset} T(T^n((F_s, A))) \\
&\tilde{\subset} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T^{n+1}((F_s, A_n)) \tilde{\subset} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T^n((F_s, A_n)) \\
&\tilde{\subset} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (F_s, A_n)
\end{aligned}$$

olur.

Şimdi  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (F_s, A_n) \tilde{\subset} T\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (F_s, A_n)\right)$  olduğunu gösterelim.

Kabul edelim ki  $T\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (F_s, A_n)\right)$  in esnek noktası olmayacak şekilde bir  $(b, F_s(b)) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (F_s, A_n)$  esnek noktası olsun.  $(F_s, B_n) = T^{-1}(b, F_s(b)) \tilde{\cap} (F_s, A_n)$  olduğu anlamına gelir. O halde her  $n \in \mathbb{N}$  için  $(F_s, B_n) \tilde{\subseteq} (F_s, B_{n-1})$  vardır. Bu takdirde  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (F_s, B_n) \neq \tilde{\emptyset}$  dir. O halde  $T\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (F_s, B_n)\right) \tilde{\subset} (b, F_s(b)) \tilde{\cap} T\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (F_s, A_n)\right)$  dir.

Diğer taraftan  $(b, F_s(b))$  esnek bir nokta olduğundan  $(b, F_s(b)) = T\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (F_s, B_n)\right)$  dir.

Böylece  $(b, F_s(b)) \in T\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (F_s, A_n)\right)$  dir. Bu da ispatı tamamlar.

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (F_s, A_n) = (c, F(c))$  kümesini göz önüne alalım.  $(c, F_s(c))$  nin teklik özelliğini ispatlamak için,  $T(d, F_s(d)) = (d, F_s(d))$  ve  $(c, F_s(c)) \neq (d, F_s(d))$  olacak şekilde başka bir  $(d, F_s(d))$  olduğunu varsayalım.

O halde

$\tilde{S}((c, F_s(c)), (d, F_s(d))) = \tilde{S}(T(c, F_s(c)), T(d, F_s(d))) \prec \tilde{S}((c, F_s(c)), (d, F_s(d)))$  dir.

Böylece  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (F_s, A_n)$  bir tek esnek sabit kümedir. ■

**Teorem 4.1.6.**  $(G_s, A)$  ve  $(H_s, B)$ ,  $((F_s, E), \tilde{S})$  tam esnek metrik uzayının boş olmayan alt kümeleri olsun.

$$T : (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B) \rightarrow (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B)$$

Tüm  $(u, G_s(u)) \in (G_s, A)$ ,  $(v, G_s(v)) \in (H_s, B)$  için  $K < 1$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \tilde{S}(T((u, G_s(u))), T((v, G_s(v)))) &\preceq K. [\tilde{S}((u, G_s(u)), T((u, G_s(u)))) \\ &\dot{+} \tilde{S}((v, G_s(v)), T((v, G_s(v))))] \end{aligned}$$

olacak şekilde bir esnek asimptotik regüler devirli dönüşüm olsun.

Bu takdirde  $T$ ,  $(x, G(x)) \in (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B)$  olacak şekilde bir tek esnek sabit noktaya sahiptir.

**İspat:**  $(u, G_s(u)) \in (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B)$  ve  $(u, G_s(u)) = T^n((u, G_s(u)))$  bir esnek dizi olsun. Esnek asimptotik regüler devirli dönüşüme göre,  $m > n$  için  $n \rightarrow \infty$  iken

$$\begin{aligned} \tilde{S}(T^{n+1}((u, G_s(u))), T^{m+1}((u, G_s(u)))) &\preceq K. [\tilde{S}(T^n((u, G_s(u))), T^{n+1}((u, G_s(u)))) \\ &\dot{+} \tilde{S}(T^m((u, G_s(u))), T^{m+1}((u, G_s(u))))] \\ &\rightarrow (\tilde{\pi}_s(u, u), 0). \end{aligned}$$

Yani  $\{T^n((u, G_s(u)))\}$ ,  $((F_s, E), \tilde{S})$  de bir Cauchy dizisidir.  $(G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B)$  tam

olduğundan  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n((u, G_s(u))) = ((x, G(x)))$  olacak şekilde

$(x, G(x)) \in (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B)$  vardır. Böylece

$$\begin{aligned} \tilde{S}((x, G_s(x)), T((x, G_s(x)))) &\preceq \tilde{S}((x, G_s(x)), T^{n+1}((u, G_s(u)))) \\ &\dot{+} \tilde{S}(T^{n+1}((u, G_s(u))), T((x, G_s(x)))) \\ &\preceq \tilde{S}((u, G_s(u)), T^{n+1}((u, G_s(u)))) \\ &\dot{+} K. [\tilde{S}(T^n((u, G_s(u))), T^{n+1}((u, G_s(u)))) \\ &\dot{+} \tilde{S}((x, G_s(x)), T((x, G_s(x))))] \end{aligned}$$

ve buradan  $n \rightarrow \infty$  iken

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}\left((x, G_s(x)), T((x, G_s(x)))\right) &\preceq \frac{K}{1-K} \cdot \tilde{\mathcal{S}}\left(T^{n+1}((x, G(x))), T^n((u, G(u)))\right) \\ &\quad + \frac{K}{1-K} \cdot \tilde{\mathcal{S}}\left((x, G(x)), T^{n+1}((u, G(u)))\right) \rightarrow (\tilde{\pi}_s(x, u), 0) \end{aligned}$$

olur, yani  $T((x, G_s(x))) = ((x, G_s(x)))$  dir.

$(m, G_s(m)), (n, G_s(n))$  iki farklı esnek sabit nokta olsun. O halde

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}((m, G_s(m)), (n, G_s(n))) &= \tilde{\mathcal{S}}(T(m, G_s(m)), T(n, G_s(n))) \\ &\preceq K \cdot [\tilde{\mathcal{S}}((m, G_s(m)), T(m, G_s(m))) \\ &\quad + \tilde{\mathcal{S}}(n, G_s(n)), T((n, G_s(n)))] \\ &= K \cdot [\tilde{\mathcal{S}}((m, G_s(m)), (m, G_s(m))) \\ &\quad + \tilde{\mathcal{S}}((n, G_s(n)), (n, G_s(n)))] \\ &= K \cdot [(\tilde{\pi}_s(m, m), 0) + (\tilde{\pi}_s(n, n), 0)] \\ &= \tilde{\pi}_s(\tilde{\pi}_s(m, n), 0). \end{aligned}$$

Buradan esnek metriğin M2 şartı gereğince  $(m, G_s(m)) = (n, G_s(n))$  elde edilir. ■

**Örnek 4.1.7.**  $\mathbb{U} = [0, 1]$  üzerinde alışılmış metriği göz önüne alalım ve  $A_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$  ve

$A_2 = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ,  $\mathbb{U}$  nun alt kümeleri olsun.  $(F_s, A_1)$  ve  $(G_s, A_2)$ ,  $\mathbb{U}$  üzerinde iki esnek küme olsun.

$$T = (T_1, T_2) : (F_s, A_1) \tilde{\cup} (G_s, A_2) \rightarrow (F_s, A_1) \tilde{\cup} (G_s, A_2)$$

$$\begin{aligned} T((F_s, A_1)) &= (T_1, T_2)(F_s, A_1) \\ &= (T_1(F_s(A_1)), T_2(A_1)) \subset (G_s, A_2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} T((G_s, A_2)) &= (T_1, T_2)(G_s, A_2) \\ &= (T_1(G_s(A_2)), T_2(A_2)) \subset (F_s, A_1) \end{aligned}$$

olacak şekilde

$0 < u \leq 1$  için  $T(\alpha, 0) = \frac{1}{2}$  ve  $T(u, G(u)) = \left(\frac{1}{2}u, G\left(\frac{1}{2}u\right)\right)$  ile tanımlanan bir

dönüşüm olsun. Bu takdirde

Her  $a_1 \in A_1$  için

$$T_1(F_s(A_1)) \subset G_s(a_1), T_2(A_1) \subset A_2$$

ve her  $a_2 \in A_2$  için

$$T_1(G_s(A_2)) \subset F_s(a_2), T_2(A_2) \subset A_1.$$

O halde  $0 < u < v \leq 1$  için

$$\begin{aligned} |T(u, G_s(u)) - T(v, G_s(v))| &= \frac{1}{2} \left( |(v, G_s(v)) - (u, G_s(u))| \right) < \frac{1}{2} \left( |(u, G_s(u)) - (v, G_s(v))| \right) \\ &= |(u, G_s(u)) - T(u, G_s(u))| + |(v, G_s(v)) - T(v, G_s(v))| \end{aligned}$$

dir.

Diğer taraftan,  $0 < x \leq 1$  için

$$\begin{aligned} |T(\alpha, 0) - T(u, G_s(u))| &= \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2}u, G_s\left(\frac{1}{2}u\right) \right) < \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2}u, G_s\left(\frac{1}{2}u\right) \right) \\ &= |(\alpha, 0) - T(\alpha, 0)| + |(u, G_s(u)) - T(u, G_s(u))| \end{aligned}$$

dir. Böylece tüm  $(x, G(x)), (y, G(y)) \in (F, A_1) \dot{\cup} (G, A_2)$ ,  $(x, G(x)) \neq (y, G(y))$

için

$$|T(x, G(x)) - T(y, G(y))| < |(x, G(x)) - T(x, G(x))| + |(y, G(y)) - T(y, G(y))| \text{ dir.}$$

Açık bir biçimde  $T$  bir esnek asimptotik regüler devirli dönüşümdür ve bir tek esnek sabit noktası vardır.

**Teorem 4.1.8.**  $(G_s, A)$  ve  $(H_s, B)$ ,  $((F_s, E), \tilde{S})$  tam metrik uzayının boş olmayan alt kümeleri olsun.

$$T : (G_s, A) \dot{\cup} (H_s, B) \rightarrow (G_s, A) \dot{\cup} (H_s, B)$$

Tüm  $(u, G_s(u)) \in (G_s, A), (v, G_s(v)) \in (G_s, B)$  için

$T((G_s, A)) \tilde{\subset} (H_s, B), T((H_s, B)) \tilde{\subset} (G_s, A)$  ve  $M < 1$

$$\begin{aligned} \tilde{S}(T((u, G_s(u))), T((v, G_s(v)))) &\preceq M \left[ \tilde{S}((u, G(u)), T((u, G_s(u)))) \right. \\ &\quad \dot{+} \tilde{S}((v, G(v)), T((v, G_s(v)))) \\ &\quad \left. \dot{+} \tilde{S}((u, G_s(u)), (v, G_s(v))) \right] \end{aligned}$$

olacak şekilde bir esnek asimptotik regüler devirli dönüşüm olsun.

Bu takdirde,  $T, (x, G_s(x)) \in (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B)$  olacak şekilde bir tek esnek sabit noktaya sahiptir.

**İspat:**  $(u, G_s(u)) \in (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B)$  ve  $(u, G_s(u)) = T^n((u, G_s(u)))$  bir esnek dizi olsun.

Esnek asimptotik regüler devirli dönüşüme göre,  $m > n$  için

$$\begin{aligned} \tilde{S}(T^{n+1}((u, G_s(u))), T^{m+1}((u, G_s(u)))) &\preceq M \left[ \tilde{S}(T^n((u, G_s(u))), T^{n+1}((u, G_s(u)))) \right. \\ &\quad \dot{+} \tilde{S}(T^m((u, G_s(u))), T^{m+1}((v, G_s(v)))) \\ &\quad \left. \dot{+} \tilde{S}(T^n((u, G_s(u))), T^m(u, G_s(u))) \right] \\ &\preceq 2M \left[ \tilde{S}(T^n((u, G_s(u))), T^{n+1}((u, G_s(u)))) \right. \\ &\quad \dot{+} \tilde{S}(T^m((u, G_s(u))), T^{m+1}((u, G_s(u)))) \\ &\quad \left. \dot{+} M \cdot \tilde{S}(T^{n+1}((u, G_s(u))), T^{m+1}(u, G_s(u))) \right] \end{aligned}$$

Böylece  $n \rightarrow \infty$  iken

$$\begin{aligned} \tilde{S}(T((u, G_s(u))), T^2((u, G_s(u)))) &\preceq \frac{2M}{1-M} \left[ \tilde{S}((u, G_s(u)), T((u, G_s(u)))) \right. \\ &\quad \left. \dot{+} \tilde{S}(T((u, G_s(u))), T^2((u, G_s(u)))) \right] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

bulunur. Yani  $\{T^n((u, G_s(u)))\}$  bir Cauchy dizisidir.

$(G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B)$  tam olduğundan  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n((u, G_s(u))) = ((x, G_s(x)))$  olacak biçimde

bir  $((x, G_s(x))) \in (G_s, A) \tilde{\cup} (H_s, B)$  vardır.

Böylece

$$\begin{aligned}
\tilde{S}((x, G_s(x)), T(x, G_s(x))) &\preceq \tilde{S}((x, G_s(x)), T(u, G_s(u))) \\
&\dot{+} \tilde{S}(T(u, G_s(u)), T(x, G_s(x))) \\
&\preceq \tilde{S}((x, G_s(x)), T(u, G_s(u))) \\
&\dot{+} M \left[ \tilde{S}((u, G_s(u)), T(u, G_s(u))) \right. \\
&\quad \dot{+} \tilde{S}((x, G_s(x)), T(x, G_s(x))) \\
&\quad \left. \dot{+} \tilde{S}((u, G_s(u)), T(x, G_s(x))) \right]
\end{aligned}$$

Ve buradan  $n \rightarrow \infty$  iken

$$\begin{aligned}
\tilde{S}((x, G_s(x)), T(x, G_s(x))) &\preceq \frac{M}{1-M} \left[ \tilde{S}(T(u, G_s(u)), (u, G_s(u))) \right. \\
&\quad \left. \dot{+} \tilde{S}((u, G_s(u)), (x, G_s(x))) \right] \\
&\quad \dot{+} \frac{1}{1-M} \cdot \tilde{S}((x, G_s(x)), T(u, G_s(u))) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

olur yani  $T((x, G_s(x))) = (x, G_s(x))$  dir.  $T$  nin sabit noktasının tek olduğu ve  $\{T^n((u, G_s(u)))\}$  dizisinin bu sabit noktaya yakınsadığı açıktır.

Sonuç olarak sadece tek bir esnek sabit noktasının var olduğu açıktır.

$(m, G_s(m)), (n, G_s(n))$  iki farklı esnek sabit nokta olsun. O halde

$$\begin{aligned}
\tilde{D}((m, G_s(m)), (n, G_s(n))) &= \tilde{S}(T(m, G_s(m)), T(n, G_s(n))) \\
&\preceq M \cdot \left[ \tilde{S}((m, G_s(m)), T(n, G_s(n))) \right. \\
&\quad \dot{+} \tilde{S}((n, G_s(n)), T(m, G_s(m))) \\
&\quad \left. \dot{+} \tilde{S}((m, G_s(m)), (n, G_s(n))) \right] \\
&= M \cdot \tilde{S}((m, G_s(m)), (n, G_s(n)))
\end{aligned}$$

ve  $1 \leq M$  olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla  $T$  'nin bir tek sabit noktası vardır. Her bir  $(x, G(x)) \in (G, A) \tilde{\cup} (H, B)$  için  $\{T^n(u, G_s(u))\}$  dizisi  $(x, G_s(x))$  ye yakınsar.

■

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında bir parametre kümesi ile birlikte esnek küme yapısı ve esnek metrik kullanılarak esnek devirli dönüşüm tanımlanmıştır. Esnek devirli dönüşümün kullanılmasıyla esnek devirli büzülme dönüşümü tanımlanmıştır. Bunun ardından Kannan tipi esnek devirli büzülme dönüşümü ve Chatterjee tipi esnek devirli büzülme dönüşümü esnek metrik uzaylarda ifade edilmiştir. Tanımlanan bu özel tip esnek devirli büzülme dönüşümlerinin tanımlanması ile esnek sabit noktanın varlığı ve tekliğini gösteren bazı esnek sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır. Ayrıca esnek asimptotik regüler devirli dönüşüm tanımlanarak özel bir büzülme şartını sağlayan esnek asimptotik regüler devirli dönüşüm için bir esnek sabit nokta teoremi ifade ve ispat edilmiştir. Bu teoremleri destekleyen ve tez çalışmasını daha anlaşılır hale getiren çeşitli örnekler sunulmuştur.

Bu tez çalışmasının devamı olarak literatürde yer alan Suzuki sabit nokta teoremi, Meir Keeler sabit nokta teoremi, Ćirić sabit nokta teoremi gibi sabit nokta teoremleri tanımlanan bu özel tip devirli büzülme dönüşümlerinin kullanılması ile esnek metrik uzaylarda esnek sabit nokta teoremleri ifade ve ispat edilebilir. Bununla birlikte çalışmış olduğumuz esnek metrik uzaya esnek kompaktlık şartı eklenerek yeni sonuçlar elde edilebilir. Ayrıca bu tez çalışmasında göz önüne aldığımız özel tip büzülme dönüşümleri esnek dikdörtgensel metrik uzaylar, esnek yakın metrik uzaylar, esnek Steinhaus transform metrik uzaylar gibi bazı özel metrik uzaylarda ve esnek normlu uzaylarda ifade edilerek yeni esnek sabit nokta teoremleri ispat edilebilir.



## KAYNAKLAR

- [1] Zadeh, L.A., Fuzzy sets, Information and Control, 1965, 8(3):338–353.
- [2] Molodtsov, D., Soft set theory-first result, Computers & Mathematics with Applications. 1999, 37, 19-31.
- [3] Maji, P. K., Biswas, R., Roy, A. R., Soft set theory, Computers & Mathematics with Applications. 2003, 45, 555-562.
- [4] Maji, P. K., Roy, A. R. and Biswas, R., An application of soft sets in a decision making problem, Comput. Math. Appl. 2002, 44, 1077-1083.
- [5] Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K., & Shabir, M., On some new operations in soft set theory. Computers & Mathematics with Applications. 2009, 57(9), 1547-1553.
- [6] Kharal, A., Ahmad, A., Mappings on soft classes, New Math. Nat. Comput. 2011, 7(3), 471–481.
- [7] Aras, Ç.G., Poşul, H., On some new operations in probabilistic soft set theory, European Journal of Pure and Applied Mathematics. 2016, 9(3), 333-339.
- [8] Shabir, M., Naz, M., On soft topological spaces, Computers & Mathematics with Applications. 2011, 61(7), 1786-1799.
- [9] Aygünoğlu, A., Aygün, H., Some notes on soft topological spaces, Neural Computing and Applications. 2012, 21, 113-119.
- [10] Varol, B.P., Aygün, H., On soft Hausdorff spaces, Ann. Fuzzy Math. Inform. 2013, 5(1), 15-24.
- [11] Zorlutuna, İ., Akdağ, M., Min, W.K., Atmaca, S., Remarks on soft topological spaces, Ann. Fuzzy Math. Inform. 2012, 3, 171-185.
- [12] Aras, Ç.G., Sönmez, A., Çakallı, H., On soft mappings, ArXiv, Computers & Mathematics with Applications. 2013, 1-12.
- [13] Zorlutuna, İ., Çakır, H., On continuity of soft mappings, Applied Mathematics and Information Science. 2015, 9(1), 403-409.
- [14] Brouwer, L.E.J., Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Mathematische Annalen. 1910, 71, 97-115.
- [15] Banach, S., Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrals, Fund Math. 1922, 3, 133-181.
- [16] Kannan, R., Some results on fixed point, Bull. Cal. Math. Soc. 1968, 60, 71-76.

- [17] Kannan, R., Some results on fixed point II, Amer. Math. Monthly. 1969, 76, 405-408.
- [18] Caristi, J., Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, Transactions of the American Mathematical Society. 1976, 215, 241-251.
- [19] Chatterjea, S.K., Fixed point theorems, Comptesrendus de l'Academie Bulgare des Sciences. 1972, 25, 727-730.
- [20] Reich, S., Fixed point of contractive functions, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. 1972, 5, 26-42.
- [21] Hardy, G.E., Rogers, T.D., A generalization of a fixed point theorem of Reich, Canadian Mathematical Bulletin. 1973, 16, 201-206.
- [22] Ćirić, L.B., Fixed points for generalized multivalued contractions, Mathematicki Vesnik. 1972, 9(24), 265-272.
- [23] Jungck, G., Commuting mappings and fixed points, Amer. Math. Monthly. 1976, 83, 261-263.
- [24] Jungck, G., Compatible mappings and fixed points, Internat. J. Math. Math. Sci. 1986, 9(4), 771-779.
- [25] Karapinar, E, Erhan I.M.: Best proximity point on different type contractions, Appl. Math. Inf. Sci. 2011, 3(3), 558-569.
- [26] J. Gornicki, Fixed point theorems for Kannan type mappings, J. Fixed Point Theory Appl. 2017, 19, 2145-2152.
- [27] Mutlu, A., Yolcu, N., Mutlu, B., Fixed point theorems in partially ordered rectangular metric spaces, British Journal of Mathematics and Computer Science. 2016, 15(2), 1-9.
- [28] Mutlu, A., Yolcu, N., Mutlu, B., A survey on Kannan mappings in universalized metric space, British Journal of Mathematics and Computer Science. 2016, 15(6), 1-6.
- [29] Bruck, R.E., Reich, S., Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces, Houston J. Math. 1977, 3, 459-470.
- [30] Baillon, J.B., Bruck, R.E., Reich, S., On the asymptotic behavior of nonexpansive mappings and semigroups in Banach space, Houston J. Math. 1978, 4, 1-9.
- [31] Kirk, W.A., Srinivasan, P.S., Veeramani, P., Fixed Points for mapping satisfying cyclical contractive conditions, Fixed Point Theory. 2003, 4, 79-89.
- [32] Petric, M.A., Some remarks concerning cyclical contractive mappings, Gen. Math. 2010, 18, 213-226.

- [33] Chandok, S., Postolache, M., Fixed Point Theorem for weakly Chatterjea-type cyclic contractions, *Fixed Point Theory Appl.* 2013, 2013:28, 1-9
- [34] Das, S., Samanta, S.K., Soft real sets, soft real numbers and their properties, *J. Fuzzy Math.* 2012, 20, 551-576.
- [35] Das, S., Samanta, S.K., Soft metric, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics.* 2013, 6(1), 77-94.
- [36] Hosseinzadeh, H., Fixed point theorems on soft metric spaces, *Journal of Fixed Point Theory and Applications.* 2017, 19(2), 1625-1647.
- [37] Majumdar, P., Samanta, S. K., On soft mappings, *Comput. Math. Appl.* 2010, 60, 2666–2672.
- [38] Wardowski, D., On a soft mapping and its fixed points, *Fixed Point Theory Appl.* 2013, 182, 1-11.
- [39] Altıntaş, İ., Şimşek, D., Taşköprü, K., Topology of Soft Cone Metric Spaces, *AIP Conference Proceeding.* 2017, 1880(1), 030006. <https://doi.org/10.1063/1.50006056>
- [40] Şimşek, D., Altıntaş, İ., Ersoy, S., Abdullayev, F., İmaşkıızı, M., Taşköprü, K., Kesik, D., Ablayeva, E., Oğul, B., Cemşitov, N., An introduction to soft cone metric spaces and some fixed point theorems, *Manas Journal of Engineering(MJEN).* 2018, 6(1), 59-89.
- [41] Güler, A.C., Yıldırım, E.D., Ozbakır, O.B., A fixed point theorem on soft G-metric spaces, *J. Nonlinear Sci. Appl.* 2016, 9, 885–894.
- [42] Yazar, M. I., Aras, Ç.G., Bayramov, S., Fixed point theorems of soft contractive mappings, *Filomat.* 2016, 30(2), 269-279.
- [43] Abbas, M., Murtaza, G., Romaguera S., On the fixed point theory of soft metric spaces, *Fixed Point Theory Appl.* 2016, 17.
- [44] Kurepa, D., Tableaux ramifiés d'ensembles, *Espaces pseudo-distancias, Comptes Rendus Mathematique.* 1934, 198, 1563-1565.
- [45] Granas, A., Dugundji, J., *Fixed Point Theory*, Springer. 2002, 690.

**[46]** Browder, F.E., Peryshyn, W.V., The solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces, Bull. Am. Math. Soc. 1966, 72, 571–575.



## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : İnci KARA

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

### Eğitim Durumu

Lise : Akhisar Anadolu Lisesi, 2010

Lisans : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2018

