**T.C.**

**BATMAN ÜNİVERSİTESİ**

**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

# ESNEK NORMLU QUASİLİNEER UZAYLAR TEORİSİNE İLİŞKİN BAZI YENİ SONUÇLAR

**FATMA BULAK**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Haziran-2023**

**BATMAN**

## TEZ KABUL VE ONAYI

Fatma BULAK tarafından hazırlanan "Esnek Normlu Quasilineer Uzaylar Teorisine İlişkin Bazı Yeni Sonuçlar" adlı tez çalışması 21/06/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

| **Jüri Üyeleri** | **İmza** |
|---|---|
| **Başkan** | |
| Prof. Dr. Bilal ŞEKER | ………………….. |
| **Danışman** | |
| Dr. Öğr. Üyesi Hacer BOZKURT | ………………….. |
| **Üye** | |
| Doç. Dr. F. Müge SAKAR | ………………….. |

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Osman PAKMA
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

## TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Fatma BULAK

Tarih: …/06/2023

# ÖZET

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

## ESNEK NORMLU QUASİLİNEER UZAYLAR TEORİSİNE İLİŞKİN BAZI YENİ SONUÇLAR

**Fatma BULAK**

**Batman Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Hacer BOZKURT**

**2023, 71 Sayfa**

**Jüri**
**Dr. Öğr. Üyesi Hacer BOZKURT**
**Prof. Dr. Bilal ŞEKER**
**Doç. Dr. F. Müge SAKAR**

"Esnek Normlu Quasilineer Uzaylar Teorisine İlişkin Bazı Yeni Sonuçlar" adlı bu yüksek lisans tez çalışması esas itibariyle beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez çalışmasının içeriği hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde bu çalışmanın ilerleyen bölümlerinde kullanılacak lineer fonksiyonel analizin bazı temel kavramları, teoremleri ve sonuçları ile Hausdorff ayrımı, uzaklığı ve metriği ana hatlarıyla verilmiştir. Tezin üçüncü bölümü quasilineer ve normlu quasilineer uzaylardaki temel tanım ve sonuçlardan oluşmaktadır. Dördüncü bölümde öncelikle esnek kümeler ve bazı özellikleri tanıtılmış daha sonra tezin beşinci bölümünde kullanılacak esnek lineer uzay ve esnek quasilineer uzaylarla ilgili birtakım temel kavram ve teoremler verilmiştir.

Tezin özgün bölümü olan beşinci bölüm kendi içerisinde dört alt bölüme ayrılmıştır. Birinci alt bölümde bir esnek normlu quasilineer uzayda tanımlı bir esnek quasi dizinin yakınsaklığı ile ilgili bazı sonuçlar verilmiş ve bir esnek normlu quasilineer uzayın tamlığı incelenmiştir. İkinci alt bölümde tıpkı normlu quasilineer uzaylarda olduğu gibi esnek normlu quasilineer uzaylarda esnek quasilineer bağımsızlık ve bağımlılık kavramları tanımlanmış ve bunların quasilineer uzaylarda tutarlı karşılıkları elde edilmiştir. Üçüncü alt bölümde proper quasilineer uzayların bir genelleştirmesi olan esnek proper quasilineer uzaylar incelenmiştir. Dördüncü alt bölümde ise, bir esnek normlu quasilineer uzayda esnek normlu quasilineer fonksiyonel tanımlanmış ve bu yeni fonksiyonel ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. Esnek quasilineer operatör ve fonksiyonellerin sürekliliği ve sınırlılığı ile ilgili bazı teoremler ispatlanmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Esnek Normlu Quasilineer Uzay, Esnek Küme, Esnek Quasi Vektör, Yakınsaklık, Esnek Normlu Quasilineer Bağımlılık- Bağımsızlık, regüler ve singüler boyut

# ABSTRACT

## MS THESIS

## SOME NEW RESULTS RELATED TO THE THEORY OF SOFT NORMED QUASİLİNEAR SPACES



**Fatma BULAK**

**The Graduate School of Natural and Applıed Scıence of Batman Unıversıty**

**The Degree of Master of Scıence in Mathematics**

**Advisor: Asst. Prof. Dr. Hacer BOZKURT**



**2023, 71 Pages**

**Jury**
**Asst. Prof. Hacer BOZKURT**
**Prof. Dr. Bilal ŞEKER**
**Assoc. Prof. F. Müge SAKAR**



This master's thesis, named "Some New Results Related to the Theory of Soft Normed Quasilinear Spaces", mainly consists of five chapters. In the first chapter, information about the content of the thesis is given. In the second part, some basic concepts, theorems and results of linear functional analysis, which will be used in the following parts of this study, and Hausdorff distinction, distance and metric are outlined. The third chapter of the thesis consists of basic definitions and results in quasilinear and normed quasilinear spaces. In the fourth chapter, first of all, soft sets and some of their properties are introduced, then some basic concepts and theorems about soft linear spaces and soft quasilnear spaces to be used in the fifth part of the thesis are given.

The fifth chapter, which is the original part of the thesis, is divided into four subsections. In the first subsection, some results about the convergence of a soft quasi sequence defined in a quasilinear space with a soft norm are given and the completeness of a quasilinear space with a soft norm is examined. In the second subsection, the concepts of soft quasilinear independence and dependence in soft normed quasilinear spaces, just like in normed quasilinear spaces, are defined and their consistent equivalents in quasilinear spaces are obtained. In the third subsection, soft proper quasilinear spaces, which are a generalization of proper quasilinear spaces, are examined. In the fourth subsection, a quasilinear functional with a soft norm is defined in a quasilinear space with a soft norm and some results are obtained about this new functional. Some theorems about the continuity and limitation of soft quasilinear operators and functionals have been proved.



**Keywords:** Soft Normed Quasilinear Spaces, Soft Set, Soft Quasi Vector, Convergence, Soft Normed Depence-Indepence, Regular-Singular Dimension.

# İÇİNDEKİLER

# ÖNSÖZ

“Esnek Normlu Quasilineer Uzaylar Teorisine İlişkin Bazı Yeni Sonuçlar” adlı bu yüksek lisans tez çalışmasında öncelikle bir esnek normlu quasilineer uzayda tanımlı bir esnek quasi dizinin yakınsaklığı ile ilgili bazı sonuçlar verilmiş ve bir esnek normlu quasilineer uzayın tamlığı incelenmiştir. Daha sonra tıpkı normlu quasilineer uzaylarda olduğu gibi esnek normlu quasilineer uzaylarda esnek quasilineer bağımsızlık ve bağımlılık kavramları tanımlanmış ve bunların quasilineer uzaylarda tutarlı karşılıkları elde edilmiştir. Ayrıca proper quasilineer uzayların bir genelleştirmesi olan esnek proper quasilineer uzaylar incelenmiştir. Daha sonra bir esnek normlu quasilineer uzayda esnek normlu quasilineer fonksiyonel tanımlanmış ve bu yeni fonksiyonel ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Uzun süren bu çalışma boyunca kendilerine vakit ayıramadığım için beni anlayışla karşılayan sevgili eşim Şahap ile oğullarım Ali Selim ve Ömer Kerem’e; tezimin yazımı sırasında karşılaştığım teknik sorunların çözümünde bana yardımcı olan Dr. Öğr. Üyesi Abdulkadir KARAKAŞ’a; tez çalışmam boyunca ilgi, bilgi ve tecrübesiyle bana yol gösterip benden yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Hacer BOZKURT’a çok teşekkür ederim.

Fatma BULAK

Batman, 2023

## SİMGELER

| **Simgeler** | **Açıklamaları** |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ | :Reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}^+$ | :Pozitif reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{C}$ | :Kompleks sayılar kümesi |
| $c_0$ | :Sıfıra yakınsak olan diziler uzayı |
| $l_\infty$ | :Tüm sınırlı diziler uzay |
| $\Omega(E)$ | :Bir $E$ normlu uzayının tüm boştan farklı kapalı ve sınırlı alt kümelerinin ailesi |
| $\Omega_C(E)$ | :Bir $E$ normlu uzayının tüm boştan farklı kapalı, sınırlı ve konveks alt kümelerinin ailesi |
| $C[a,b]$ | : $[a,b]$ aralığında tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyonların uzayı |
| $C\big([a,b],\Omega_C(E)\big)$ | : $[a,b]$ aralığından $\Omega(E)$'ye tanımlanan tüm sürekli fonksiyonların uzayı |
| $B(\theta,r)$ | :$\theta$ merkezli, $r$ yarıçaplı açık yuvar |
| $S(\theta,r)$ | : $\theta$ merkezli, $r$ yarıçaplı kapalı yuvar |
| inf(sup) | :İnfimum(Supremum) |
| $\sup\limits_{\preceq}$ | : " $\preceq$ " kısmi sıralama bağıntısı üzerinden supremum |
| $Q_r(Q_s)$ | : $Q$ quasilineer uzayının regüler (singüler) alt uzayı |
| $Q_d$ | : $Q$ quasilineer uzayının simetrik alt uzayı |
| $r-boyQ(s-boyQ):Q$ | : $Q$ quasilineer uzayının regüler (singüler) boyutu |
| $F_q^M$ | : $q$ elemanının $M$'deki zemini |
| $F_M^Q$ | : $M$ kümesinin $Q$'daki zemini |
| $SpanA$ | : $A$'nın gereni |
| $\tilde{Q}$ | :Mutlak esnek küme |
| $\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}$ | :Esnek elemanlar |
| $\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma}$ | :Esnek reel elemanlar |
| $(Q,G,E)$ | :Esnek sıralı küme |
| $SQV\big(\tilde{Q}\big)$ | : $Q$ esnek quasi vektörü |
| $SP(Q)$ | : $Q$ üzerindeki tüm esnek noktalarının ailesi |
| ß($\mathbb{R}$) | : $\mathbb{R}$'nin boştan farklı tüm sınırlı alt kümelerinin ailesi |
| $\big(Q,\Vert\cdot\Vert_Q\big)$ | :Normlu quasilineer uzay |
| $\big(\tilde{Q},\Vert.\Vert\big)$ | :Esnek normlu quasilineer uzay |
| $h_Q(q,w)$ | :Norm metriği (Hausdorff metrik), |
| T(Q,W) | : $Q$'dan $W$'ya tüm sınırlı quasilineer operatörlerin ailesi |

## 1. GİRİŞ

Klasik analizde önemli bir yer tutan "quasilineer uzay" kavramı, literatürde hem Aseev (Aseev, 1986) hem de Markow (Markow, 2000, 2004) tarafından tanımlanmıştır. Ancak Aseev'in yaptığı tanım, bazı özel durumlarda klasik teorideki analiz ile uyum sağlaması bakımından içinde barındırdığı kısmi sıralama bağıntısının avantajlarından dolayı Markow'un yaklaşımına göre daha elverişlidir. Aseev, söz konusu çalışmasında Markow (Markow, 2000, 2004)'den farklı olarak kısmi sıralama bağıntısını kullanıp lineer uzayların daha genel şekli olan quasilineer uzay kavramını tanımlamıştır. Aseev, kısmi sıralama bağıntısını kullanarak yaptığı quasilineer uzaylarda norm tanımı sayesinde quasilineer uzaylarda da klasik fonksiyonel analizin birtakım teoremlerinin tutarlı karşılıklarını verebilmiştir. Bu sebeple yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışmada Aseev'in 1986 yılında yayımlanan çalışması esas alınmıştır. Ayrıca (Yılmaz, Çakan & Aytekin, 2012)'de incelenen quasilineer uzayların topolojisinden; (Çakan & Yılmaz, 2015)'de tanımlanan normlu quasilineer uzaylardan ve (Çakan, 2016)'da verilen normlu quasilineer uzaylar teorisine ilişkin bazı yeni sonuçlardan yararlanılmıştır. Aseev'in (Aseev, 1986) çalışmasında tanımladığı quasilineer operatör kavramı üzerine (Banazılı, 2014)'de de bu kavram ile ilgili bazı yeni bulgular elde edilmiş quasilineer operatörler teorisinin geliştirilmesi amaçlanmış ve lineer operatörlere ilişkin bazı önemli teoremlerin quasilineer karşılıklarına yer verilmiştir.

Bugüne kadar matematik alanında esnek küme teorisi ile ilgili birçok araştırma yapılmıştır. (Maji & diğ., 2003)'de esnek kümeler teorisi, karar verme problemlerine uygulanarak esnek kümelerde birtakım işlemler tanımlanmıştır. (Pei & Miao, 2005)'de esnek kümelere ilişkin bilgi sistemleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. (Aygünoğlu & Aygün, 2012)'de esnek kompaktlık gibi yeni kavramlar üzerinde durulmuştur. (Das & Samanta, 2012)'de esnek reel sayılar tanımlanarak özellikleri verilmiştir. (Bozkurt, 2020)'de ise, quasilineer uzay kavramının bir esnek küme üzerinde tanımlanabileceği ortaya konarak esnek quasilineer uzaylar ile esnek normlu quasilineeer uzayların tanımı yapılmıştır. Yine aynı çalışmada esnek lineer uzaylarda elde edilen birçok teoremin tutarlı karşılıkları esnek quasilineer uzaylarda da elde edilebilmiştir.

"Esnek Normlu Quasilineer Uzaylar Teorisine İlişkin Bazı Yeni Sonuçlar" adlı bu yüksek lisans tez çalışmasında ise (Bozkurt, 2020)'de verilen esnek normlu quasilineer uzayı üzerinde bazı yeni sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlar elde edilirken (Çakan, 2016)'de incelenen normlu quasilineer uzayların bazı özellikleri (Bozkurt, 2020)'da verilen esnek normlu quasilineer uzaylarda incelenmiştir. Esnek normlu quasilineer uzaylarda dizilerin yakınsaklığı ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. Bundan başka bir esnek quasi vektörün esnek quasilineer bağımlılığı-bağımsızlığı araştırılmış bununla ilgili bazı örneklere yer verilmiştir. Bir esnek normlu quasilineer uzayın boyutunun quasilineer uzaylarda olduğu gibi o uzayın regüler ve singüler alt uzaylarının boyutuna bakılarak bulunması gerektiği söylenmiştir. Son olarak bir esnek quasilineer uzayında bir esnek quasilineer fonksiyonel tanımlanmış ve (Bozkurt, 2022)'den yararlanılarak esnek quasilineer fonksiyonellerin bir takım özellikleri incelenmiştir.

"Esnek Normlu Quasilineer Uzaylar Teorisine İlişkin Bazı Yeni Sonuçlar" adlı bu yüksek lisans tez çalışması esas itibariyle beş bölümden oluşmaktadır. Söz konusu tezin "Giriş" adlı işbu birinci bölümünde tez çalışmasının muhtevası hakkında ayrıntılı bilgi verilmiştir.

"Temel Kavramlar" adlı ikinci bölümde bu çalışmanın ilerleyen bölümlerinde kullanılacak lineer fonksiyonel analizin bazı temel kavramları, teoremleri ve sonuçları ile Hausdorff ayrımı, uzaklığı ve metriği ana hatlarıyla verilmiştir.

"Quasilineer Uzaylar ve Normlu Quasilineer Uzaylar" adlı üçüncü bölüm Aseev (1986)'in çalışmasıyla elde edilen bilimsel veriler esas alınarak oluşturulan quasilineer ve normlu quasilineer uzaylardaki temel tanım ve sonuçlardan oluşmaktadır. Quasilineer uzay tanımını verirken bir kısmi sıralama bağıntısı kullanan Aseev, söz konusu bağıntıyı kullanıp norm kavramını da quasilineer uzay üzerinde tanımlamış ve bu bağıntının "$=$" bağıntısı olması halinde quasilineer uzayın lineer bir uzay olduğunu ortaya koymuştur. Aseev(1986)'in söz konusu çalışmasından yola çıkılırsa quasilineer uzay ile lineer uzay arasındaki esas farkın quasilineer uzayda her elemanın tersinin mevcut olmaması olduğu; bu farktan her lineer uzayın bir quasilineer uzay oluşturduğu ancak tersinin doğru olmayabileceği neticesi çıktığı gösterilmiştir. Burada $\mathbb{R}^n$'nin boştan farklı bütün kapalı ve sınırlı alt kümelerinin ailesi, $\Omega(\mathbb{R}^n)$; boştan farklı bütün kapalı, sınırlı ve konveks alt kümelerinin ailesi ise, $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilmiştir.

“Esnek Lineer Uzaylar ve Esnek Quasilineer Uzaylar” adlı dördüncü bölümde öncelikle esnek kümeler ve bazı özellikleri tanıtılmış daha sonra tezin beşinci bölümünde kullanılacak esnek lineer uzay ve esnek quasilineer uzaylarla ilgili birtakım temel kavram ve teoremler verilmiştir.

“Esnek Normlu Quasilineer Uzaylar Teorisine İlişkin Bazı Yeni Sonuçlar” adlı beşinci bölüm, tezin özgün bölümü olup kendi içerisinde dört alt bölüme ayrılmıştır. Bu bölümün “Esnek Normlu Quasilineer Uzaylar” adlı birinci alt bölümünde bir esnek normlu quasilineer uzayda tanımlı bir esnek quasi dizinin yakınsaklığı ile ilgili bazı sonuçlar verilmiş ve bir esnek normlu quasilineer uzayın tamlığı incelenmiştir. Ayrıca bir esnek normlu quasilineer uzayın regüler ve singüler alt uzayları tanımlanmış ve bu alt uzaylarla ilgili bazı örnekler ve sonuçlar elde edilmiştir.

Beşinci bölümün “Esnek Normlu Quasilineer Uzaylarda Esnek Quasilineer Bağımlılık ve Esnek Quasilineer Bağımsızlık” adlı ikinci alt bölümünde tıpkı normlu quasilineer uzaylarda olduğu gibi esnek normlu quasilineer uzaylarda esnek quasilineer bağımsızlık ve bağımlılık kavramları tanımlanmıştır. Bu tanımların tıpkı quasilineer uzaylarda olduğu gibi $"\leq"$ bağıntısına bağlı olarak verilmesi gerektiği görülmüş ve bunların quasilineer uzaylarda tutarlı karşılıkları elde edilmiştir. Ayrıca bu bölümde esnek normlu quasilineer uzayların boyutuyla ilgili önemli tanım, teorem ve sonuçlar elde edilmiştir. Bazı popüler esnek normlu quasilineer uzayların boyutlarına ilişkin örnekler sunulmuştur.

Beşinci bölümün “Esnek Proper Quasilineer Uzaylar” adlı üçüncü alt bölümünde proper quasilineer uzayların bir genelleştirmesi olan esnek proper quasilineer uzaylar incelenmiştir. (Çakan, 2016)’da verilen bazı sonuçların esnek proper quasilineer uzaylardaki karşılıkları incelenmiştir.

Beşinci bölümün “Esnek Quasilineer Fonksiyoneller” adlı dördüncü alt bölümünde ise, bir esnek normlu quasilineer uzayda esnek normlu quasilineer fonksiyonel tanımlanmış ve bu yeni fonksiyonel ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. (Bozkurt & Yılmaz, 2016)’da verilen esnek quasilineer operatör kavramından da faydalanılarak esnek quasilineer operatör ve fonksiyonellerin sürekliliği ve sınırlılığı ile ilgili bazı teoremler ispatlanmıştır. Ayrıca bazı esnek quasilineer fonksiyonel örnekleri sunulmuştur.

## 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde genel olarak çalışmamızın ilerleyen kısımlarında kullanacağımız lineer fonksiyonel analizin bazı temel kavramlarını, teoremlerini ve sonuçlarını vereceğiz. Ayrıca Hausdorff ayrımı, uzaklığı ve metriği de bu kısımda verilecektir.

### 2.1. Temel Fonksiyonel Analiz Kavramları

**Tanım 2.1.1.** $X$ boştan farklı bir küme ve $d$, $X$ üzerinde bir uzaklık fonksiyonu olmak üzere $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $d$ fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ için

$M_1)$ $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

$M_2)$ $d(x,y) = d(y,x)$,

$M_3)$ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

koşullarını sağlıyorsa $d$ fonskiyonuna $X$ üzerinde bir metrik, $(X,d)$ çiftine ise bir metrik uzay denir.

Eğer $(M_1)$ aksiyomu yerine $d(x,x) = 0$ aksiyomu yazılırsa, $d$'ye bir yarımetrik $(X,d)$ ikilisine de yarımetrik uzay denir (Kreyszing, 1989).

**Örnek 2.1.1.** $\mathbb{R}^2$üzerinde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)}$$

fonksiyonu bir metrik tanımlar. Bu metriğe $\mathbb{R}$'nin Öklit metriği denir (Kreyszing, 1989).

**Tanım 2.1.2.** $(X,d)$ bir metrik uzay ve $K \subseteq X$ olsun. Eğer $K$ kümesi her bir noktasının etrafında bir yuvar içeriyorsa $K$'ya açık küme denir. Eğer $K$ kümesinin $X$'e göre tümleyeni açık ise $K$'ya kapalı küme denir (Kreyszing, 1989).

**Tanım 2.1.3.** $X$ boştan farklı bir küme ve $\tau$'da $X$'in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer;

$i)$ $\emptyset \in \tau$ ve $X \in \tau$,

$ii)$ $\tau$'nin herhangi sayıda elemanlarının birlesimi $\tau$'nun elemanıdır,

$iii)$ $\tau$'nin sonlu sayıda elemanlarının kesişimi $\tau$'nun elemanıdır

şartları sağlanıyorsa $\tau$'ya $X$ üzerinde bir topoloji, $(X,\tau)$ ikilisine de topolojik uzay denir (Maddox, 1973).

**Tanım 2.1.4.** $(X, \tau)$ bir topolojik uzay olsun. $x \neq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için $x$ ve $y$'yi içeren $\tau$'nun iki ayrık açık alt kümesi bulunabiliyorsa $(X, \tau)$'ya Hausdorff uzayı denir (Maddox, 1973; Wilansky, 1978).

**Tanım 2.1.5.** $(X, \tau)$ bir topolojik uzay, $K \subseteq X$ olsun. Eğer $K$'nın her açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahipse $K$'ya kompakt küme denir (Kreyszing, 1989).

**Teorem 2.1.1.** $\mathbb{R}^n$'nin bir $X$ alt kümesi verilsin. $X$'in kompaktlığı ancak ve ancak $X$ kapalı ve sınırlı ise sağlanır (Kreyszing, 1989).

**Tanım 2.1.6.** $X$ bir küme olmak üzere ve "$\leq$", $X$ üzerinde bir bağıntı olsun, eğer bu bağıntı $\forall x, y, z \in X$ için;

$i)$ $x \leq x,$

$ii)$ $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z,$

$iii)$ $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$

sağlanıyorsa bu bağıntıya $X$ üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı denir (Kreyszing, 1989).

**Tanım 2.1.7.** $X \neq \emptyset$ bir küme ve $K$ bir cisim olsun. $X$ üzerinde "$+$" ve "$\cdot$" skalerle çarpma işlemleri,

$$+: X \times X \to X; (x, y) \to x + y$$

$$\cdot: K \times X \to X; (\alpha, x) \to \alpha \cdot x$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in K$ için

1. $(x + y) + z = x + (y + z),$

2. $x + y = y + x,$

3. $x + \theta = x$ oluyorsa $\theta$'ya $X$'in sıfır elemanı denir,

4. $\forall x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ oluyorsa $-x$'e, $x$'in tersi denir,

5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$

6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$

7. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x,$

8. $1x = x$ olacak şekilde $1 \in X$ vardır

şartları sağlanıyorsa $X$'e $K$ üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir (Debnath & Mikusinski, 2005).

**Tanım 2.1.8.** $K$ cismi üzerinde verilen $X$, toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle birlikte bir lineer uzay olsun. $Y \subseteq X$ alt kümeside $(+)$ ve $(\cdot)$ işlemleriyle $K$ üzerinde bir lineer uzay yapısına sahipse $Y$ uzayına $X$'in bir alt vektör uzayı denir (Debnath & Mikusinski, 2005).

**Teorem 2.1.2.** $K$ cismi üzerinde verilen bir $X$ lineer uzayında $Y \subseteq X$ alt kümesi verilsin. $Y$ kümesi $X$'in bir alt vektör uzayı olabilmesi için ancak ve ancak $\forall\alpha, \beta \in K$ ve $\forall y_1, y_2 \in Y$ için $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$ olmalıdır (Debnath & Mikusinski, 2005).

**Tanım 2.1.9.** $X$, $K$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $A \subseteq X$ verilsin. Eğer, $\forall x, y \in A$ ve $\forall\lambda \in [0,1]$ için $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$ oluyorsa $A$'ya konveks küme denir (Debnath & Mikusinski, 2005).

**Örnek 2.1.2.** $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ birim küresi $\mathbb{R}^2$'nin konveks bir alt kümesidir. Ayrıca her alt vektör uzayı da konveks bir kümedir (Debnath & Mikusinski, 2005).

**Tanım 2.1.10.** $K$ cismi üzerinde verilen $X$ bir lineer uzay ve $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\|.\|$ fonksiyonu $\forall x, y \in X$ ve $\forall\alpha \in K$ için

1. $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

2. $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$,

3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

koşullarını gerçekleştiriyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna $X$ üzerinde bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine ise normlu uzay denir. Eğer $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ şartı yerine sadece $\| x \| \geq 0$ şartı alınırsa $\| \cdot \|$ fonksiyonuna $X$ üzerinde bir yarı norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine ise yarı normlu uzay denir (Wilansky, 1978).

**Örnek 2.1.3.** $C[a, b] = \{f : f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli$\}$ kümesi, fonksiyonların "$+$" ve "." işlemleriyle bir reel lineer uzaydır. $f \in C[a, b]$ olmak üzere,

$$\parallel f \parallel = \max|f(t)|$$

şeklinde tanımlı $\|.\|$ fonksiyonu $C[a,b]$ üzerinde bir norm ifade eder. Yani $(C[a,b],\|.\|)$ bir normlu uzaydır (Wilansky, 1978).

**Teorem 2.1.3.** $(X,\|.\|)$ bir normlu uzay olsun.

$$d: X \times X \to \mathbb{R}$$

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

olarak tanımlı $d$ fonksiyonu, $X$ üzerinde bir metrik fonksiyonudur. Bu teoremde tanımlanan $d$ metriğine normun ürettiği metrik ya da norm metriği denir (Wilansky, 1978).

**Sonuç 2.1.1.** Her normlu uzay norm metriğiyle bir metrik uzaydır (Wilansky, 1978).

**Tanım 2.1.11.** $(X,\|.\|)$ bir normlu lineer uzay olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için bir $N$ doğal sayısı vardır öyle ki her $n > N$ için $\|x_n - x\| < \epsilon$ oluyorsa $(x_n)$ dizisi $x \in X$'e yakınsaktır denir. $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ile gösterilir (Debnath & Mikusinski, 2005).

**Tanım 2.1.12.** $(X,\|.\|)$ bir normlu lineer uzay olsun. $\forall \epsilon > 0$ için bir $M$ doğal sayısı vardır öyle ki her $m,n > M$ için $\|x_m - x_n\| < \epsilon$ oluyorsa $(x_n)$ dizisine Cauchy dizisi denir (Debnath & Mikusinski, 2005).

**Tanım 2.1.13.** Bir normlu lineer uzayda seçilen rastgele bir Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya tam normlu uzay denir. Tam normlu uzaylara ise Banach uzayı adı verilir (Debnath & Mikusinski, 2005).

**Örnek 2.1.4.** $C[a,b]$ uzayı $\parallel x \parallel = \max_{t\in[a,b]}|x(t)|$ normuyla beraber bir Banach uzayıdır (Maddox, 1973).

**Örnek 2.1.5**. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi, mutlak değer normuna göre Banach uzayı değildir. Örneğin; $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $\mathbb{Q}$'da bir Cauchy dizisidir fakat, $\mathbb{Q}$'nun hiç bir noktasına yakınsamaz (Maddox, 1973).

## 2.2. Hausdorff Metrik

Birinci bölümde adı geçen lineer uzay olmayan küme ailelerinin en önemlilerinden ikisi $\mathbb{R}^n$'in kompakt ve kompakt-konveks alt kümelerinin sınıfları olan $\Omega(\mathbb{R}^n)$ ve $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$'dir. Bundan dolayı bu kümelerdeki quasilineer yapıyı anlayabilmek için bu kısımda

(Bhaskar, Lakshmikantham & Vasundhara, 2006) referansından yararlanarak $\mathbb{R}^n$ kompakt ve kompakt-konveks alt kümelerinin ailesine değineceğiz.

**Tanım 2.2.1.** $x \in \mathbb{R}^n$ ve $A$ kümesi $\mathbb{R}^n$'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $x$ noktasının $A$'ya olan $d(x, A)$ uzaklığı,

$$d(x, A) = \inf\{\| x - a \| : a \in A\}$$

olarak verilir.

$$S_\varepsilon(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) < \varepsilon\}$$

kümesine $A$'nın $\varepsilon$ −komşuluğu denir. $S_\epsilon(A)$'nın kapanış kümesi ise,

$$\overline{S_\varepsilon}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) \leq \varepsilon\}$$

alt kümesidir. $\mathbb{R}^n$'nin $\theta$ merkezli 1 yarıçaplı birim küresini $\overline{S_1}^n = \overline{S_1}(\theta)$ ile gösterilir. Ayrıca $\forall \varepsilon > 0$ ve boştan farklı herhangi bir $A \subset \mathbb{R}^n$ için $\overline{S_\varepsilon}(A) = A + \varepsilon \cdot \overline{S_1}^n$ olur (Bhaskar, Lakshmikantham & Vasundhara, 2006).

**Tanım 2.2.2.** $A$ ve $B$ kümeleri $\mathbb{R}^n$'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun.

$$d_H(B, A) = \sup\{d(b, A) : b \in B\}$$

ya da

$$d_H(B, A) = \inf\{\epsilon > 0 : B \subseteq A + \varepsilon \cdot \overline{\bar{S}_1}^n\}$$

değerine $B$'nin $A$'dan Hausdorff ayrımı denir. Genellikle, $d_H(A, B) \neq d_H(B, A)$ eşitsizliği doğru olduğundan Hausdorff ayrımı bir metrik fonksiyonu değildir (Bhaskar, Lakshmikantham & Vasundhara, 2006).

**Tanım 2.2.3.** $\mathbb{R}^n$'nin boştan farklı $A$ ve $B$ alt kümeleri arasında

$$D(A, B) = \max\{d_H(A, B), d_H(B, A)\}$$

uzaklığına Hausdorff uzaklığı denir. Bu $D$ fonksiyonu,

1. $D(A, B) \geq 0$,
2. $D(A, B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$,
3. $D(A, B) = D(B, A)$,

4. $D(A,B) \leq D(A,C) + D(C,B)$

bağıntılarını sağladığından $\mathbb{R}^n$'nin boştan farklı alt kümelerinin ailesinde bir metrik tanımlar. Buna Hausdorff metrik denir.

Eğer $\mathbb{R}^n$'nin boştan farklı kapalı ve sınırlı ailelerinin kümesi olan $\Omega(\mathbb{R}^n)$'yi alırsak Hausdorff uzaklığıyla tanımlı $D$ fonksiyonu üzerinde bir metrik tanımlar. Yani $(\Omega(\mathbb{R}^n), D)$ bir metrik uzaydır (Bhaskar, Lakshmikantham & Vasundhara, 2006).

**Örnek 2.2.1**. $[0,\frac{5}{4}] \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$'nin $[0,1] \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$'ye olan Hausdorff uzaklığını bulalım.

$$D([0,\tfrac{5}{4}],[0,1]) = \max\{d_H([0,\tfrac{5}{4}],[0,1]), d_H([0,1],[0,\tfrac{5}{4}]\}$$

dır. Burada

$$d_H([0,\tfrac{5}{4}],[0,1]) = \sup\{d(b,[0,1]) : b \in [0,\tfrac{5}{4}]\}$$

ve

$$d_H([0,1],[0,\tfrac{5}{4}]) = \sup\{d(b,[0,\tfrac{5}{4}]) : b \in [0,1]]\}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$d_H\left(\left[0,\tfrac{5}{4}\right],[0,1]\right) = 0.25 \quad \text{ve} \quad d_H([0,1],[0,\tfrac{5}{4}]) = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$D([0,\tfrac{5}{4}],[0,1]) = \max\{0.25,0\} = 0.25$$

olduğu görülür.

**Teorem 2.2.1.** $A$, $A'$, $B$ ve $B' \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ve her $\lambda \geq 0$ için

$$D(A + A', B + A') = D(A,B)$$

$$D(A + A', B + B') \leq D(A,B) + D(A',B')$$

$$D(\lambda \cdot A, \lambda \cdot B) = \lambda \cdot D(A,B)$$

eşitlikleri sağlanır (Bhaskar, Lakshmikantham & Vasundhara, 2006).

## 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölüm (Aseev, 1986) çalışması temel alınarak quasilineer uzaylar ve normlu quasilineer uzaylardaki temel tanım ve sonuçlardan oluşacaktır. Burada Aseev'in quasilineer uzay tanımını verirken bir kısmi sıralama bağıntısı kullandığını göreceğiz. Yine burada Aseev kısmi sıralama bağıntısı vasıtasıyla quasilineer uzay üzerinde norm kavramını da tanımlayabilmiş ve özel olarak bu bağıntının "$=$" bağıntısı olması durumunda quasilineer uzayın bir lineer uzay olduğunu belirtmiştir. Aseev'in (Aseev, 1986) çalışmasından yola çıkarak bir quasilineer uzay ile lineer uzay arasındaki en temel farkın bir quasilineer uzayda her elemanın tersinin mevcut olmadığını görüyoruz. Buradan da her lineer uzayın bir quasilineer uzay teşkil ettiğini fakat tersinin doğru olmayabileceğini sonucunu çıkarıyoruz.

Ayrıca bu bölümde (Çakan, 2016)'dan yararlanarak quasilineer bağımlılık, quasilineer bağımsızlık, ve bir quasilineer uzayın boyutu kavramları verilecektir. Ayrıca burada Aseev'in tanımladığı quasilineer operatör ve quasilineer fonksiyonel tanımlarına da yer verilmiştir.

Burada $\mathbb{R}^n$'nin tüm boştan farklı kapalı ve sınırlı alt kümelerinin ailesini $\Omega(\mathbb{R}^n)$, tüm boştan farklı kapalı, sınırlı ve konveks alt kümelerinin ailesini $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ile göstereceğiz.

### 3.1. Quasilineer Uzaylar

**Tanım 3.1.1.** Bir $Q$ kümesi üzerinde her $q, w, z, v \in Q$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki şartları sağlayan bir "$\preccurlyeq$" kısmi sıralama bağıntısı, bir cebirsel toplama işlemi ve reel sayılarla çarpma işlemi tanımlıysa bir quasilineer uzay denir (Aseev, 1986).

1. $q \preccurlyeq q$ (3.1.1)

2. $q \preccurlyeq w, w \preccurlyeq z \Longrightarrow q \preccurlyeq z$ (3.1.2)

3. $q \preccurlyeq w, w \preccurlyeq q \Longrightarrow q = w$ (3.1.3)

4. $q + w = w + q$ (3.1.4)

5. $q + (w + z) = (q + w) + z$ (3.1.5)

6. $q + \theta = q$ olacak şekilde bir $\theta \in Q$ vardır. (3.1.6)

7. $\alpha(\beta q) = (\alpha\beta)q$ (3.1.7)

8. $\alpha(q+w)=\alpha q+\alpha w$ (3.1.8)

9. $1q=q$ (3.1.9)

10. $0q=\theta$ (3.1.10)

11. $(\alpha+\beta)q\preccurlyeq \alpha q+\beta q$ (3.1.11)

12. $q\preccurlyeq w, z\preccurlyeq v \Longrightarrow q+z\preccurlyeq w+v$ (3.1.12)

13. $q\preccurlyeq w \Longrightarrow \alpha q\preccurlyeq \alpha w.$ (3.1.13)

Quasilineer uzaylarını kısaca $QLS$ olarak gösterebiliriz. Bir lineer uzay $q\preccurlyeq w \Leftrightarrow q=w$ kısmi sıralama bağıntısıyla bir quasilineer uzaydır. Ancak tersi her zaman doğru değildir (Aseev, 1986).

$\Omega_C(\mathbb{R})$ ve $\Omega(\mathbb{R})$ kümeleri bir "⊆" kapsama bağıntısı

$$M+N=\{m+n: m\in M, n\in N\}$$

cebirsel toplama işlemi ve

$$\lambda\cdot M=\{\lambda m: m\in M\}$$

skalerle çarpma işlemleri ile beraber birer quasilineer uzaydır.

$$\Omega(E)=\{M\in\Omega(E): M\text{konveks}\}$$

’dir. Eğer $E$ sonlu boyutlu ise, toplama işlemi

$$M+N=\{m+n: m\in M, n\in N\}$$

ile tanımlıdır.

**Lemma 3.1.1.** $Q$ quasilineer uzayının $\theta$ elemanı minimaldir. Yani $q\preccurlyeq\theta \Longrightarrow q=\theta$ olur (Çakan & Yılmaz, 2015).

**Tanım 3.1.2.** Bir $Q$ quasilineer uzayında $q'+q=\theta$ olacak şekilde bir $q'\in Q$ var ise $q'$ elemanına $q$’nun tersi denir. Eğer bir $q$ elemanının tersi mevcut ise tektir. Bir $q$ elemanının tersi mevcut ise $q$ elemanı regüler aksi takdirde singülerdir denir (Aseev, 1986).

**Lemma 3.1.2.** Bir $Q$ quasilineer uzayının her $q\in Q$ için $q'\in Q$ olacak şekilde tersi mevcut ise $Q$’deki kısmi sıralama bağıntısı eşitlik bağıntısı halini alır. Bu durumda (3.1.11) şartı dağılma özelliği şartına dönüşür. Dolayısıyla $Q$ bir lineer uzay olur (Aseev, 1986).

**Sonuç 3.1.1.** Her reel lineer uzay aynı zamanda bir quasilineer uzaydır. Ancak her lineer uzay bir quasilineer uzay olmayabilir (Aseev, 1986).

**Sonuç 3.1.2.** Bir reel lineer uzayda (3.1.1)-(3.1.13) şartlarını sağlayacak şekilde bir kısmi sıralama bağıntısı sadece eşitlik ile elde edilir (Aseev, 1986).

Tezin devamında $-q = (-1).q$ eşitliğini kabul edeceğiz. Bir $Q$ quasilineer uzayındaki $q \in Q$'nun regüler olması için ancak ve ancak $q - q = 0$ yani $q' = -q$ olmasıdır.

**Tanım 3.1.3.** $Q$ bir quasilineer uzayında $M \subseteq Q$ verilsin. Eğer $M$ kümeside $Q$'deki aynı işlemlerle ve kısmi sıralama bağıntısıyla beraber bir quasilineer uzay teşkil ediyorsa $M$'ye $Q$'nun bir alt uzayı denir (Aseev, 1986).

**Teorem 3.1.1.** $Q$ bir quasilineer uzay ve $W \subseteq Q$ olsun. $W$ alt uzaydır $\Leftrightarrow \forall q, w \in W, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ icin $\alpha q + \beta w \in W$ olur (Aseev, 1986).

**Tanım 3.1.4.** $Q$ bir quasilineer uzay olmak üzere bir $q \in Q$ için $-q = q$ ise $q$ elemanına simetriktir denir. $Q$'nun tüm simetrik elemanlarının kümesi $Q_d$ ile gösterilir. Ayrıca $Q_r$ ve $Q_s$ kümeleri sırasıyla $Q$'nun regüler ve singüler elemanlarının kümelerini göstermektedir (Aseev, 1986).

**Teorem 3.1.2.** $Q_r, Q_d$ ve $Q_s \cup \{0\}$ kümeleri $Q$'in alt uzaylarıdır (Aseev, 1986).

**Örnek 3.1.1.** $Q = \Omega_C(\mathbb{R})$ ve $Z = \{0\} \cup \{[a,b]: a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq b\}$ olsun. $Z$ kümesi $Q$'nun singüler bir alt uzayıdır. Fakat $\{\{a\}: a \in \mathbb{R}\}$ tüm tek noktalardan oluşan küme $Q_r$'nin elemanıdır ve $Q$'nun bir alt uzayıdır. Aslında her $E$ normlu lineer uzayı için, her $\{a\}$ tek noktası, yani $\{a\} \in E$, $a$ ile belirlenir ve böylece $E$ kümesi hem $\Omega(E)$'nin hem de $\Omega_C(E)$'nin regüler alt uzayı olur.

### 3.2. Normlu Quasilineer Uzaylar

**Tanım 3.2.1.** $Q$ bir quasilineer uzay olmak üzere bir $\|.\|_Q: Q \longrightarrow \mathbb{R}$ reel fonksiyonu;

1. $q \neq \theta \Rightarrow \| q \|_Q > 0$ (3.2.1)
2. $\|q + w\|_Q \leq \| q \|_Q + \| w \|_Q$ (3.2.2)
3. $\| \alpha . q \|_Q = |\alpha| \; \| q \|_Q$ (3.2.3)

4. $q \preccurlyeq w \Rightarrow \parallel q \parallel_Q \leq \parallel w \parallel_Q$ (3.2.4)

5. $\forall \epsilon > 0$ için $\exists q_\epsilon \in Q$ vardır öyle ki $q \preccurlyeq w + q_\epsilon$ ve $\parallel q_\epsilon \parallel \leq \epsilon \Rightarrow q \preccurlyeq w$ olur. (3.2.5)

şartlarını sağlıyorsa $\|.\|_Q$ fonksiyonuna $Q$ üzerinde bir norm denir. $Q$ quasilineer uzayında bir norm fonksiyonu tanımlıysa $Q$ quasilineer uzayına bir normlu quasilineer uzay denir. Normlu quasilineer uzayda her elemanın toplamsal tersi varsa bu normlu quasilineer uzay, reel normlu lineer uzay olur (Aseev, 1986).

**Tanım 3.2.2.** $Q$ bir normlu quasilineer uzay olsun. $Q$ üzerinde Hausdorff metrik tanımı her $q, w \in Q$ için

$$h_Q(q, w) = \inf\{r \geq 0 \colon q \preccurlyeq w + a_1^r, w \preccurlyeq q + a_2^r, \parallel a_i^r \parallel_Q \leq r\} \tag{3.2.1}$$

dir. $q, w \in Q$ için $q \preccurlyeq w + (q - w)$ ve $w \preccurlyeq q + (w - q)$ bağıntıları doğru olduğundan $h_Q(q, w)$ iyi tanımlıdır. Ayrıca tanımdan dolayı $\forall q, w \in Q$ için $h_Q(q, w) \leq \|q - w\|_Q$ eşitsizliği doğrudur. $h_Q(q, w)$ metrik aksiyomlarını sağlar (Aseev, 1986).

**Lemma 3.2.1.** $Q$ normlu bir quasilineer uzay olmak üzere cebirsel toplama ve reel sayılarla çarpma işlemleri, Hausdorff metriğe göre süreklidir. Ayrıca $Q$'deki norm fonksiyonu da Hausdorff metriğe göre süreklidir Hausdorff metriğe göre $\forall \alpha \in R$ için

$i)$ $h_Q(\alpha \cdot q, \alpha \cdot w) = |\alpha| \cdot h_Q(q, w),$

$ii)$ $h_Q(q + w, z + v) \leq h_Q(q, z) + h_Q(w, v),$

$iii)$ $\parallel q \parallel_Q = h_Q(q, \theta)$

şartları sağlanır (Aseev, 1986).

**Lemma 3.2.2.** $Q$ bir normlu quasilineer uzay olmak üzere;

$a)$ $q_n \to q_0$, $w_n \to w_0$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $q_n \preccurlyeq w_n$ olsun. Bu durumda $q_0 \preccurlyeq w_0$ olur.

$b)$ $q_n \to q_0$ ve $z_n \to q_0$ olsun. Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için $q_n \preccurlyeq w_n \preccurlyeq z_n$ ise $w_n \to q_0$ olur.

$c)$ $q_n + w_n \to q_0$ ve $w_n \to \theta$ olsun. Bu durumda $q_n \to q_0$ olur (Aseev, 1986).

**Örnek 3.2.1.** $E$ bir Banach uzayı ise

$$\| M \|_{\Omega(E)} = \sup_{m \in M} \| m \|_E$$

normu $\Omega(E)$ üzerinde bir norm tanımlar. Bu durumda $\Omega(E)$ bir normlu quasilineer uzaydır. $\forall M, N \in \Omega(E)$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $M \neq \theta$ olsun. Bu durumda $\exists\ m \in M$ vardır öyle ki $m \neq 0_E$'dir. Öyleyse $\|.\|_E$ normunun pozitiflik özelliği gereği $\| m \|_E > 0$ olur. Bu ise

$$\| M \|_{\Omega(E)} = \sup_{m \in M} \| m \|_E > 0$$

demektir (Aseev, 1986).

**Tanım 3.2.3.** $Q$ bir quasilineer uzay, $\{q_k\}_{k=1}^n \subset Q$ ve $\{\alpha_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k . q_k = q$$

olacak şekilde $q$ elemanına $\{q_k\}_{k=1}^n$ kümesinin bir lineer kombinasyonu,

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k . q_k \preceq q$$

olacak şekildeki $q$ elemanına ise $\{q_k\}_{k=1}^n$ kümesinin bir quasilineer kombinasyonu **(**kısaca ql-kombinasyonu) denir (Çakan, 2016).

Tanımdan $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ skalerlerine karşılık gelen $\{q_k\}_{k=1}^n$ elemanlarının lineer kombinasyonu bir tek iken, ql-kombinasyonları tek değildir.

**Tanım 3.2.4.** $(Q, \preceq)$ bir quasilineer uzay ve $A \subset Q$ olmak üzere, $A$'nın gereni

$$SpA = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k . q_k, q_1, q_2, \ldots, q_n \in A \ \text{ ve } \ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$A$'nın quasi gereni ise

$$QspA = \left\{ q \in Q : \sum_{k=1}^{n} \alpha_k . q_k \preceq q, q_1, q_2, \ldots, q_n \in A \ \text{ ve } \ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \right\}$$

olarak tanımlanır. $SpA \subset QspA$ olur. (Çakan, 2016).

**Tanım 3.2.5.** $(Q, \preceq)$ bir quasilineer uzay,$\{q_k\}_{k=1}^n \subset Q$ ve $\{\alpha_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\theta_Q \preceq \lambda_1 . q_1 + \lambda_2 . q_2 + \ldots + \lambda_n . q_n$$

eşitsizliği ancak ve ancak $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ halinde gerçekleniyorsa $\{q_k\}_{k=1}^{n}$ kümesine quasilineer bağımsız (ql-bağımsız), aksi halde quasilineer bağımlı (ql-bağımlı) denir (Çakan, 2016).

Sonsuz bir $A \subset Q$ kümesinin sonlu her alt kümesi quasilineer bağımsız ise $A$ kümesine quasilineer bağımsızdır denir (Çakan, 2016).

**Tanım 3.2.6.** $Q$ bir quasilineer uzay ve $A \subset Q$ olmak üzere, $A$ kümesi ql-bağımsız ve $QspA = Q$ ise $A$'ya $Q$'nun bir bazı denir (Çakan, 2016).

**Tanım 3.2.7**. $(Q, \preccurlyeq)$ bir quasilineer uzay, $M \subseteq Q$ ve $q \in M$ olsun. "$\preccurlyeq$" kısmi sıralama bağıntısına göre $q$ elemanından önce gelen $M$ kümesindeki tüm regüler elemanların kümesine $q$ elemanının $M$'deki zemini, $q$ elemanından önce gelen $M$ kümesindeki tüm regüler elemanların kümesine ise $q$ elemanının $M$'deki zemini denir ve sırasıyla $F_q^M$ ve $F_q^Q$ ile gösterilir. Buna göre

$$F_q^M = \{w \in M_r : w \preccurlyeq q\}$$

ve

$$F_q^Q = \{w \in Q_r : w \preccurlyeq q\}$$

dir (Yılmaz & Bozkurt, 2016).

**Tanım 3.2.8**. Bir $Q$ quasilineer uzayında her $w \in Q$ için $\sup F_w$ mevcut ve

$$w = \sup\{q \in Q_r : q \preccurlyeq w\}$$

oluyorsa $Q$ quasilineer uzayına sağlam zeminli (solid-floored) denir. Eğer yukarıdaki şart sağlanmıyorsa bu durumda $Q$'ya sağlam zeminli olmayan (non-solid floored) quasilineer uzay denir.

Yukarıda verilen tanımda anlatılmak istenen $Q$ quasilineer uzayının "$\preccurlyeq$" bağıntısına göre supremumudur. Dolayısıyla bir $Q$ quasilineer uzayının sağlam zeminli olabilmesi için gerekli ve yeter şart her $w \in Q$ için $\sup F_w$ mevcut ve $w \in \sup F_w$ olmasıdır (Yılmaz & Bozkurt, 2016).

**Tanım 3.2.9**. $Q$ bir quasilineer uzay ve $M \subseteq Q$ ve $q, w \in M$ olmak üzere,

$i)$ $\forall q \in M$ için $F_q^M \neq \emptyset$,

$ii)$ $q \neq w$ iken $F_q^M \neq F_w^Q$

özellikleri sağlanıyor ise $M$ kümesine $Q$ quasilineer uzayında bir proper küme denir (Çakan, 2016).

**Örnek 3.2.2**. $E$ normlu lineer uzay bir uzay olmak üzere, $\Omega(E)$ ve $\Omega_C(E)$ birer proper quasilineer uzaylardır (Çakan, 2016).

**Tanım 3.2.10**. $Q$ ve $W$ birer quasilineer uzay olsunlar. $T: Q \to W$ bir dönüşüm olmak üzere,$\forall q, q_1, q_2 \in Q$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki

$$T(\alpha \cdot q) = \alpha \cdot T(q) \tag{3.2.10}$$

$$T(q_1 + q_2) \leq T(q_1) + T(q_2) \tag{3.2.11}$$

$$q_1 \leq q_2 \Rightarrow T(q_1) \leq T(q_2) \tag{3.2.12}$$

şartları sağlanıyorsa $T$'ye bir quasilineer operatör denir(Aseev, 1986).

$Q$ ve $W$ birer lineer uzay ise quasilineer operatör tanımı klasik lineer operatör tanımıyla çakışır ve (3.2.12) şartı kendiliğinden sağlanır.

**Tanım 3.2.11**. $Q$ ve $W$ birer normlu quasilineer uzay olsunlar. $T: Q \to W$ quasilineer dönüşümü verilsin. Eğer $\forall q \in Q$ için

$$\|T(q)\|_W \leq k\|q\|_Q$$

olacak şekilde $\exists k > 0$ reel sayısı varsa $T$'ye sınırlı quasilineer operatör denir (Aseev, 1986).

**Lemma 3.2.3**. $Q$ ve $W$ birer normlu quasilineer uzay olsunlar. $T: Q \to W$ quasilineer operatörü verilsin.

$$T \text{ sınırldır} \Leftrightarrow T, \theta \in Q \text{ noktasında sürekldir.}$$

Ayrıca $T$'nın $\theta$'daki sürekliliği, $T$'nın $Q$ üzerinde düzgün sürekliliğini gerektirir (Aseev, 1986).

$Q$ ve $W$ birer normlu quasilineer uzay olmak üzere, $Q$'dan $W$'ya tüm sınırlı quasilineer operatörlerin ailesi $T(Q, W)$ sınırlı quasilineer operatörler ailesi

$$T_1 \precsim T_2 \Leftrightarrow \forall q \in Q \text{ için } T_1(q) \leq T_2(q)$$

şeklinde tanımlı kısmi sıralama bağıntısı ve

$$+: T(Q,W) \times T(Q,W) \to T(Q,W)$$

$$(T_1 + T_2)(q) = \left(T_1(q) + T_2(q)\right)$$

$$\cdot: \mathbb{R} \times T(Q,W) \to T(Q,W)$$

$$(\alpha \cdot T)(q) = \alpha \cdot (T)(q)$$

işlemleri ile bir quasilineer uzaydır. Burada "$\leq$" sembolü $W$’daki kısmi sıralamadır. "$+$" ve "$\cdot$" işlemleri $W$’nun işlemleri olup aynı semboller $T(Q,W)$ içinde kullanılmıştır. Ayrıca

$$\|T\|_T = \sup_{\|q\|_Q = 1} \|Tq\|_W$$

normuyla $T(Q,W)$ bir normlu quasilineer uzaydır (Aseev, 1986).

**Tanım 3.2.12**. $Q$’dan $\Omega(\mathbb{R})$’ye tanımlı bir quasilineer operatöre quasilineer fonksiyonel denir (Aseev, 1986).

# 4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

## 4.1. Esnek Lineer Uzaylar

Bu bölümde ilk olarak (Molodtsov, 1999), (Maji ve diğ., 2003), (Pei & Miano, 2005) ve (Ali ve diğ., 2009)'dan yararlanılarak esnek kümeler ve bazı özellikleri tanıtılacaktır. Daha sonra esnek lineer uzay ve esnek quasilineer uzaylar ile ilgili bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

**Tanım 4.1.1**. $Q$ bir evrensel küme, $P$, $Q$ için uygun parametrelerin bir kümesi ve $P(Q)$, $Q$'nun bir kuvvet kümesi olsun. $F: P \to P(Q)$ bir dönüşüm olmak üzere $(F, P)$ ikilisine $Q$ üzerinde esnek küme denir (Molodtsov, 1999).

Yani, esnek küme $Q$'nun alt kümelerinin parametrelerle ifade edilen bir ailesidir. Her $\lambda \in P$ için $F(\lambda)$ değer kümesine esnek kümenin bir $\lambda-$elemanı denir. Burada, $F(\lambda)$ kümesi boş küme veya $Q$'nun boş olmayan bir alt kümesidir. Bir $(F, P)$ esnek kümesi

$$(F, P) = \{(\lambda, F(\lambda)): \lambda \in P, F(\lambda) \in P(Q)\}$$

şeklinde ikililer yardımıyla gösterilir (Molodtsov, 1999).

$Q$ üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi $S(Q, P)$ ile gösterilir.

**Örnek 4.1.1.** $Q = [0,50]$bir evrensel küme ve $P = \{\text{pembe, turuncu, mavi, sarı, yeşil}\}$ parametrelerin bir kümesi olsun. Bu durumda,

$F(\text{pembe}) = \{\alpha \in Q: \alpha \leq 10\} = \lambda_1,$

$F(\text{turuncu}) = \{\alpha \in Q: 10 < \alpha \leq 20\} = \lambda_2,$

$F(\text{mavi}) = \{\alpha \in Q: 20 < \alpha \leq 30\} = \lambda_3,$

$F(\text{sarı}) = \{\alpha \in Q: 30 < \alpha \leq 40\} = \lambda_4,$

$F(\text{yeşil}) = \{\alpha \in Q: 40 < \alpha \leq 50\} = \lambda_5$

olmak üzere $F = \{(\text{pembe}, \lambda_1), (\text{turuncu}, \lambda_2), (\text{mavi}, \lambda_3), (\text{sarı}, \lambda_4), (\text{yeşil}, \lambda_5)\}$ kümesi $Q$ üzerinde bir esnek kümedir.

**Tanım 4.1.2**. $F, G \in S(Q, P)$ olsun. Bu durumda, her $\lambda \in P$ için $F(\lambda) = \emptyset$ ise bu esnek kümeye boş esnek küme denir ve $\tilde{\emptyset}$ gösterilir. Her $\lambda \in P$ için $F(\lambda) = Q$ ise bu esnek kümeye mutlak esnek küme denir ve $\tilde{Q}$ ile gösterilir. $H(\lambda) = F(\lambda) \cup G(\lambda)$ şeklinde tanımlanan $H$ esnek kümesine $F$ ve $G$ esnek kümelerin birleşimi denir ve bu durum $H = F \cup G$ ile gösterilir (Maji ve diğ. 2003).

**Tanım 4.1.3.** $F, G \in S(Q, P)$ olsun. Bu durumda, her $\lambda \in P$ için $F(\lambda) \subseteq G(\lambda)$ise $F$ esnek kümesine $G$'nin bir esnek alt kümesi denir ve bu durum $F \subseteq G$ ile gösterilir. Ayrıca, $F \subseteq G$ ve $G \subseteq F$ ise $F$ ve $G$ eşittir denir. $H(\lambda) = F(\lambda) \cap G(\lambda)$ şeklinde tanımlanan $H$ esnek kümesine $F$ ve $G$ esnek kümelerin kesişimi denir ve bu durum $H = F \cap G$ ile gösterilir (Pei & Miano 2005).

**Tanım 4.1.4**. $F \in S(Q, P)$ olsun. Bu durumda, her $\lambda \in P$ için $F^C(\lambda) = Q - F(\lambda)$ şeklinde tanımlanan $F^C(P) \to P(Q)$ dönüşümüne $F$ esnek kümesinin tümleyeni denir. $(F^C)^C = F$ olduğu açıktır (Ali ve diğ., 2009).

**Önerme 4.1.1**. Esnek noktaların herhangi bir sayıda birleşimi de esnek bir küme oluşturur. Ayrıca, her esnek küme kendisine ait olan tüm esnek noktaların bir birleşimidir (Das & Samanta 2013a).

**Tanım 4.1.5.** $Q$ boştan farklı bir küme ve $P$ uygun parametrelerin bir kümesi olsun. $\varepsilon: P \to Q$ fonksiyonuna $Q$ üzerinde bir esnek eleman denir. $F \in S(Q, P)$ olmak üzere her $\lambda \in P$ için $\varepsilon(\lambda) \in F(\lambda)$ ise $\varepsilon$ esnek elemanı $F$ esnek kümesine aittir denir ve bu durum $\lambda \mathrel{\tilde{\in}} F$ ile gösterilir. Buradan bir $F$ esnek kümesi, her $\lambda \in P$ için

$$F(\lambda) = \{\varepsilon(\lambda) : \varepsilon \quad \tilde{\in}\, F\}$$

olarak ifade edilebilir (Das & Samanta 2012).

**Tanım 4.1.6**. $F, G$ esnek reel sayılar olsun. Bu takdirde her $\lambda \in P$ için

$$(F + G)(\lambda) = F(\lambda) + G(\lambda),$$

$$(F - G)(\lambda) = F(\lambda) - G(\lambda),$$

$$(F \cdot G)(\lambda) = F(\lambda) \cdot G(\lambda),$$

$$F|(\lambda) = |F(\lambda)|$$

ile tanımlanır.

$F + G$, $F - G$, $F \cdot G$ ve $|F|$ nin bir esnek reel sayı olduğu esnek reel sayıların tanımından görülür (Das & Samanta, 2012).

**Tanım 4.1.7.** $F_1, F_2, \dots, F_n$, $S(Q,P)$'nin n tane esnek kümesi olsun. $S(Q,P)$ üzerinde $F = F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ cebirsel toplama işlemi $\forall\lambda \in P$ için,

$$F(\lambda) = \{q_1 + q_2 + \cdots + q_n : q_i \in F_i(\lambda), i = 1,2,\dots,n\}$$

ile tanımlıdır. $S(Q,P)$ üzerinde $\alpha$ skaler sayısı ve $\lambda \in P$ parametresi için $\alpha F$ skaler ile çarpma işlemi,

$$\alpha F = G, G(\lambda) = \{\alpha q : q \in F(\lambda)\}$$

ile tanımlıdır (Das, Majumdar & Samanta, 2013).

**Tanım 4.1.8**. $Q$ bir K cismi üzerinde vektör uzayı, P parametrelerin kümesi olsun ve $G$'de $(Q,P)$'de esnek bir küme olsun. Eğer $\forall\lambda \in P$ parametresi için $G(\lambda)$, $Q$'nun bir lineer alt uzayı oluyorsa $G$'ye $Q$'nun esnek lineer uzayı veya esnek vektör uzayı denir (Das, Majumdar & Samanta, 2013).

**Örnek 4.1.2**. $\mathbb{R}^n$, $n$ -boyutlu Öklid uzayını göz önüne alalım. $P = \{1,2,3,\dots,n\}$ parametrelerin kümesi olmak üzere $G: E \to P(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu;

$$G(i) = \{t \in \mathbb{R}^n : t'\text{nin } \ i'\text{inci eleman} \quad 0\}, i = 1,2,\dots,n$$

ile tanımlanırsa $G$, $\mathbb{R}^n$'in bir esnek lineer uzayı olur (Das, Majumdar & Samanta, 2013).

**Tanım 4.1.9.** $F$, $Q$'nun esnek vektör uzayı ve $G: E \to P(Q)$'da bir esnek küme olsun. Eğer; her $\lambda \in P$ için $G(\lambda)$, $Q$'nun lineer alt uzayıdır ve $F(\lambda) \supseteq G(\lambda)$ şartları sağlanıyorsa $G$'ye $F$'nin esnek lineer alt uzayıdır denir (Das, Majumdar & Samanta, 2013).

**Teorem 4.1.1.** Bir $F$ esnek vektör uzayının $G$ esnek alt kümesi $F$'nin esnek lineer alt uzayıdır ancak ve ancak her $\alpha, \beta \in K$ için $\alpha G + \beta G \subset G$'dir (Das, Majumdar & Samanta, 2013).

**Tanım 4.1.10**. $G$, $Q$'nun esnek lineer uzayı olsun. $Q$'nun bir esnek elemanına $G$'nin esnek vektörü denir. Benzer olarak $(K,P)$ esnek kümesinin bir esnek elemanına esnek skaler denir (Das, Majumdar & Samanta, 2013).

**Örnek 4.1.3**. Örnek 4.1.2.'de verilen esnek vektör uzayını göz önüne alalım. Burada $G$'nin $\tilde{q}$ esnek elemanı,

$$\tilde{q}(i) = (1,1,\dots,0_{i-th},\dots,1) \in \mathbb{R}^n, i = 1,2,\dots,n$$

ile tanımlıdır. $\tilde{q}$ , $G$'nin bir esnek vektörüdür (Das, Majumdar & Samanta, 2013).

**Tanım 4.1.11**. $\forall\lambda \in P$ için $\theta$, $Q$'nun etkisiz elemanı olmak üzere $\tilde{q}(\lambda) = \theta$ ise $\tilde{q}$ esnek vektörüne $G$'nin null esnek vektörü denir. Tüm null esnek vektörlerinin kümesi $\Theta$ ile gösterilir (Das, Majumdar & Samanta, 2013).

**Tanım 4.1.12**. $\tilde{q}, \tilde{w}, G$'nin esnek vektörleri ve $\tilde{\alpha}$'da esnek skaler olsun. Her $\lambda \in P$ için $\tilde{q}$ ve $\tilde{w}$ esnek vektörlerinin toplamı

$$(\tilde{q} + \tilde{w})(\lambda) = \tilde{q}(\lambda) + \tilde{w}(\lambda)$$

ile ve $\tilde{q}$'nın skaler ile çarpımı

$$(\tilde{\alpha}.\tilde{q})(\lambda) = \tilde{\alpha}(\lambda) \cdot \tilde{q}(\lambda)$$

şeklinde tanımlıdır. Açıkça $\tilde{q} + \tilde{w}, \tilde{\alpha} \cdot \tilde{w}$, $G$'nin esnek vektörleri olur (Das, Majumdar & Samanta, 2013).

**Teorem 4.1.2**. $(W, P)$, $G$ esnek vektör uzayının non-null esnek altkümesi olsun. Her $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \tilde{\in} (W, P)$ ve $\tilde{k}, \tilde{s}$ esnek skalerleri için

$$\tilde{k} \cdot \tilde{\alpha} + \tilde{s} \cdot \tilde{\beta} \tilde{\in} (W, P)$$

ise $(W, P)$'ye $G$'nin esnek alt uzayı denir.

$Q$, $K$ cismi üzerinde bir lineer uzay ve $E$ de parametrelerin kümesi olsun. $\forall\lambda \in P$ için $\tilde{Q}(\lambda) = Q$ ise $\tilde{Q}$'ya mutlak esnek lineer uzay diyeceğiz. Burada $\tilde{q}, \tilde{w}, \tilde{z}$ esnek vektör uzayın esnek vektörlerini $\alpha, \beta$ ise $\forall\lambda \in P$ için $\tilde{\alpha}(\lambda) = \alpha$, $\tilde{\beta}(\lambda) = \beta$ biçimindeki esnek reel sayıları ifade edecektir (Das, Majumdar & Samanta, 2013).

**Tanım 4.1.13**. $\tilde{Q}$ mutlak esnek vektör uzayı olsun. Bir $\|.\|: SE(\tilde{Q}) \to \mathbb{R}(E)$ fonksiyonu $\forall\lambda \in P$ için

1. Her $\tilde{q} \tilde{\in} \tilde{Q}$ için $\|\tilde{q}\| \geq \tilde{0}$,
2. $\|\tilde{q}\| = \tilde{0}$ ancak ve ancak $\tilde{q} = \Theta$,
3. Her $\tilde{q} \tilde{\in} \tilde{Q}$ ve $\tilde{\alpha}$ esnek skaleri için $\|\tilde{\alpha} \cdot \tilde{q}\| = |\tilde{\alpha}|\|\tilde{q}\|$,
4. Her $\tilde{q}, w \tilde{\in} \tilde{Q}, \|\tilde{q} + \tilde{w}\| \leq \|\tilde{q}\| + \|\tilde{w}\|$

şartlarını sağlıyorsa $\tilde{Q}$ üzerinde bir esnek norm denir. $\|.\|$ esnek normuyla birlikte esnek normlu lineer uzay denir. $(\tilde{Q}, \|.\|, P)$ veya $(\tilde{Q}, \|.\|)$ ile gösterilir (Das, Majumdar & Samanta, 2013).

**Örnek 4.1.4**. $\mathbb{R}(E)$ tüm esnek reel sayıların bir kümesi olsun. Her $\tilde{q} \tilde{\in} \mathbb{R}(E)$ için

$$\|.\|: \mathbb{R}(E) \to \mathbb{R}(E)$$

$$\|\tilde{q}\| = |\tilde{q}|$$

ile tanımlı $\|.\|$ fonksiyonu $\mathbb{R}(E)$ üzerinde bir esnek normdur (Das, Majumdar & Samanta, 2013).

**Tanım 4.1.14** $Q$ vektör uzayı üzerindeki her norm $\tilde{Q}$ esnek vektör uzayı üzerinde esnek norma genişletilebilir (Das, Majumdar & Samanta, 2013).

**Lemma 4.1.1.** $(\tilde{Q}, \|.\|, P)$ bir esnek normlu uzay ve $\|.\|$ esnek bir normu

"$\forall q \in Q$ ve $\lambda \in P$ icin $\{\|\tilde{q}\|(\lambda): \tilde{q}(\lambda) = \xi\}$ tek nokta kümesidir"

koşulunu sağlasın. Bu durumda Her $\lambda \in P$ ve $\xi \in Q$ için $\tilde{q}(\lambda) = \xi$ olmak üzere

$$\|.\|_{\lambda}: Q \to \mathbb{R}^{+}$$

$$\|\xi\|_{\lambda} = \|\tilde{q}\|(\lambda)$$

ile tanımlı $\|.\|_{\lambda}$ fonksiyonu da $Q$ üzerinde bir normdur **(**Das & Samanta, 2013).

**Tanım 4.1.15**. $(\tilde{Q}, \|.\|, P)$ bir esnek normlu lineer uzay olsun. Her $\tilde{q}, \tilde{w} \tilde{\in} \tilde{Q}$ için

$$d: \tilde{Q} \times \tilde{Q} \to \mathbb{R}(A)$$

$$d(\tilde{q}, \tilde{w}) = \|\tilde{q} - \tilde{w}\|$$

ile tanımlı $d$ fonksiyonu $\tilde{Q}$ üzerinde bir esnek metriktir (Das, Majumdar & Samanta, 2013).

## 4.2. Esnek Quasilineer Uzaylar

Bu bölümde esnek quasilineer uzay (Bozkurt, 2020)'den yararlanılarak verilecektir. Yine bu kavram ile ilgili aynı çalışmada sunulan bazı örnek ve sonuçlar da burada yer alacaktır.

**Tanım 4.2.1.** $(G, P)$, $Q$ quasilineer uzayı üzerinde boş olmayan bir esnek küme olsun. Her $b \in Supp(G, P)$ için $G(b)$, $Q$'nun bir alt quasilineer uzayı ise $(G, P)$'ye $Q$ üzerinde bir esnek quasilineer uzay denir (Bozkurt, 2020).

**Örnek 4.2.1.** $Q = \Omega_C(\mathbb{R})$ bir quasilineer uzay ve $(G, (\Omega_C(\mathbb{R}))_r)$, $Q$ üzerinde bir esnek küme olsun $G: (\Omega_C(\mathbb{R}))_r \to P(Q)$ fonksiyonunu

$$G(q) = \{[-q, q]: q \in (\Omega_C(\mathbb{R}))_r\}$$

ile tanımlayalım.

Her $q \in Supp(G, (\Omega_C(\mathbb{R}))_r)$ için $G(Q)$, $\Omega_C(\mathbb{R})$'nin bir alt quasilineer uzayı olduğundan, $(G, (\Omega_C(\mathbb{R}))_r$, $\Omega_C(\mathbb{R})$'de bir esnek quasilineer uzaydır (Bozkurt, 2020).

**Teorem 4.2.1.** Bir $(G, P)$ esnek quasilineer uzayının $(F, P)$ esnek alt kümesinin esnek bir alt quasilineer uzay olabilmesi için gerek ve yeter şart her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\alpha \cdot F + \beta \cdot F \subset F$$

olmasıdır (Bozkurt, 2020).

**Tanım 4.2.2.** $(G, P), Q$'nun esnek bir quasilineer uzayı olsun. $Q$'nun esnek bir elemanına $(G, P)$'nin bir esnek quasi vektörü denir. $(\mathbb{R}, P)$ esnek kümesinin esnek elemanına ise esnek skaler denir (Bozkurt, 2020).

$Q$ quasilineer uzayı tarafından üretilen esnek quasilineer uzayı $\tilde{Q}$ ile göstereceğiz. $SQV(\tilde{Q})$, $\tilde{Q}$ 'nın tüm esnek quasi vektörlerinin kümesini ifade edecektir.

**Teorem 4.2.2.** Her $\tilde{q}_{e1}, \tilde{w}_{e2} \in SQV(\tilde{Q})$ ve her $\tilde{\alpha}$ esnek skaleri için $\tilde{Q}$

$$\tilde{q}_{e1} \mathrel{\tilde{\preccurlyeq}} \tilde{w}_{e2} \Leftrightarrow \tilde{q} \preccurlyeq \widetilde{w} \text{ ve } \ e_1 \mathrel{\tilde{\preccurlyeq}} e_2,$$

"$\tilde{\preceq}$" bağıntısı

$$\tilde{q}_{e1} + \tilde{w}_{e2} = (\widetilde{q + w})_{e1+e2}$$

cebirsel toplama işlemi ve

$$\tilde{\alpha} \cdot \tilde{q}_{e1} = (\widetilde{\alpha \cdot q})_{\alpha e1}$$

esnek skalerle çarpma işlemleri ile birlikte bir quasilineer uzaydır (Bozkurt, 2020).

**Tanım 4.2.3.** $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay olsun. Bir $\|.\|: SQV(\tilde{Q}) \to \mathbb{R}^+(\mathbb{R})$ fonksiyonu aşağıda verilen şartları sağlıyorsa, $\tilde{Q}$ üzerinde bir esnek norm denir. Her $\tilde{q}_e, \tilde{q}_{e1}, \tilde{w}_{e2} \in SQV(\tilde{Q})$ ve $\tilde{\alpha}$ esnek skaleri için;

$i)$ $\tilde{q}_e \neq \tilde{\theta}_0$ ise $\|\tilde{q}_e\| \gtrsim \tilde{0}$ ,

$ii)$ $\|\tilde{q}_{e1} + \widetilde{w}_{e2}\| \leq \|\tilde{q}_{e1}\| + \|\widetilde{w}_{e2}\|$,

$iii)$ $\|\tilde{\alpha} \cdot \tilde{q}_{e1}\| = |\tilde{\alpha}| \parallel \tilde{q}_{e1} \parallel$,

$iv)$ $\tilde{q}_{e1} \lesseqgtr \widetilde{w}_{e2}$ ise$\|\tilde{q}_{e1}\| \leq \|\widetilde{w}_{e2}\|$

$v)$ Her $\tilde{\epsilon} > \tilde{0}$ için en az bir $\tilde{z}_\epsilon \in SQV(\tilde{Q})$ vardır öyle ki $\tilde{q}_{e1} \lesseqgtr \widetilde{w}_{e2} + \tilde{z}_\epsilon$ ve $\|\tilde{z}_\epsilon\| \lesseqqgtr \tilde{\epsilon}$ ise $\tilde{q}_{e1} \lesseqgtr \widetilde{w}_{e2}$

şartlarını sağlanıyorsa $\tilde{Q}$ esnek quasilineer uzayına $\|.\|$ esnek normuyla birlikte bir esnek normlu quasilineer uzay denir ve $(\tilde{Q}, \|.\|)$ ile gösterilir (Bozkurt, 2020).

**Örnek 4.2.2.** $Q$ bir normlu quasilineer uzay olsun. $\tilde{Q}, \|\tilde{q}_e\| = |e| + \|q\|_Q$normu ile bir esnek normlu quasilineer uzaydır (Bozkurt, 2020).

**Teorem 4.2.3**. Bir esnek normlu quasilineer uzayında bir $\|.\|$ esnek normu

$$\text{"}\xi \in Q \ \text{ ve } \ \alpha \in P \ \text{ icin } \ \{\|\tilde{q}\|(\lambda) = \xi\}\text{tek nokta kümesidir"}$$

(4.2.1)

şartını sağlasın. Bu durumda her $\lambda \in P$ için $\|\tilde{q}\|(\lambda) = \xi$ olmak üzere $\forall \xi \in Q$ ve $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ için

$$\|.\|_\lambda : Q \to \mathbb{R}^+$$

$$\xi \to \|\xi\|_\lambda = \|\tilde{q}\|(\lambda)$$

ile tanımlı $\|.\|_\lambda$ fonksiyonu $Q$'da bir normdur **(**Gönci & Bozkurt, - **).**

**Tanım 4.2.4.** $\tilde{Q}$ bir esnek normlu quasilineer uzay olsun. $\tilde{Q}$ üzerinde esnek Housdorff metrik şu şekilde tanımlanır. Her $\tilde{q}_{e1}, \widetilde{w}_{e2} \in SQV(\tilde{Q})$ için

$$h_{\tilde{Q}}(\tilde{q}_{e1}, \widetilde{w}_{e2}) = \inf\{\tilde{r} \geq \tilde{0} \colon \tilde{q}_{e1} \lesseqgtr \widetilde{w}_{e2} + \tilde{a}_1^r, \widetilde{w}_{e2} \lesseqgtr \tilde{q}_{e1} + \tilde{a}_2^r, \parallel \tilde{a}_i^r \parallel \leq \tilde{r}\}$$

'dir (Bozkurt, 2020).

**Tanım 4.2.5.** $(\tilde{Q}, \|.\|)$ bir esnek normlu quasilineer uzay olsun. Her $\tilde{q}_{e1}, \widetilde{w}_{e2} \in SQV(\tilde{Q})$ için $h_{\tilde{Q}}(\tilde{q}_{e1}, \widetilde{w}_{e2})$ tüm esnek metrik aksiyomlarını sağlar (Bozkurt, 2020).

**Tanım 4.2.6.** $(\tilde{Q}, \|.\|)$ bir esnek normlu quasilineer uzay olsun. Eğer $n \to \infty$ iken

$h_{\tilde{Q}}\left(\tilde{q}_{e_n}^n, \tilde{q}_{e_0}^0\right) \to \tilde{0}$ ise $\{\tilde{q}_{e_n}^n\}$ esnek vektörlerinin dizisi $\tilde{q}_{e_0}^0$esnek vektörüne yakınsar denir (Bozkurt, 2020).

**Tanım 4.2.7.** $(\tilde{Q}, \|.\|)$ bir esnek normlu quasilineer uzay olsun. Her $\epsilon \succcurlyeq 0$ ,$\exists m \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $i, j > m$ için $h_{\tilde{Q}}\left(\tilde{q}_{e_i}^i, \tilde{q}_{e_j}^j\right) \leq \epsilon$ ise$\{\tilde{q}_{e_n}^n\}$'e Cauchy dizisidir denir (Bozkurt, 2020).

**Teorem 4.2.4.** $(\tilde{Q}, \|.\|)$ bir esnek normlu quasilineer uzay olsun. Cebirsel toplama ve esnek reel sayılarlar çarpma işlemleri esnek Hausdorff metriğe göre süreklidir (Bozkurt, 2020).

**Tanım 4.2.8**. $\tilde{Q}$ ve $\widetilde{W}$ birer esnek normlu quasilineer uzay olsun. $T: SQV(\tilde{Q}) \to SQV(\widetilde{W})$'ya bir operatör olsun. $\forall \tilde{q}, \widetilde{w} \in SQV(\tilde{Q})$ için

1) $T(\tilde{q} + \widetilde{w}) \,\tilde{\preceq}\, T(\tilde{q}) + T(\widetilde{w})$,
2) $T(\tilde{c} \cdot \tilde{q}) = \tilde{c} \cdot T(\tilde{q})$ her esnek $\tilde{c}$ için,
3) $\tilde{q} \,\tilde{\preceq}\, \widetilde{w} \Rightarrow T(\tilde{q}) \,\tilde{\preceq}\, T(\widetilde{w})$

şartları sağlanıyorsa $T$'ye bir esnek quasilineer operatör denir **(**Bozkurt, 2022**)**.

**Teorem 4.2.5.** $\tilde{Q}$ ve $\widetilde{W}$ birer esnek quasilineer uzay olsun. $T: SE(\tilde{Q}) \to SE(\widetilde{W})$'ya tanımlı

"Bir $q \in Q$ ve $\lambda \in P$ için $\{T(\tilde{q})(\lambda) : \tilde{q} \in \widetilde{Q}$ öyleki $\tilde{q}(\lambda) = q\}$ kümesi tek nokta kümesidir"

(4.2.2)

şartını sağlayan bir esnek quasilineer operatör olsun. Bu durumda her $\lambda \in P$ için $T_\lambda: Q \to W$'ya $T_\lambda(q) = T(\tilde{q})(\lambda)$ ile tanımlı $T_\lambda$ operatörü de quasilineer operatördür (Bozkurt, 2020)

# 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

## 5.1. Esnek Normlu Quasilineer Uzaylar

Bu bölümde bir esnek normlu quasilineer uzayda tanımlı bir esnek quasi dizinin yakınsaklığı ile ilgili bazı sonuçlar verilmiş ve bir esnek normlu quasilineer uzayın tamlığı incelenmiştir. Ayrıca bir esnek normlu quasilineer uzayın regüler ve singüler alt uzayları tanımlanmış ve bu alt uzaylarla ilgili bazı örnekler ve sonuçlar elde edilmiştir. Bu bölümde $P$ parametre kümesi olmak üzere $(\tilde{Q}, \|.\|, P)$ esnek normlu quasilineer uzayı kısaca $(\tilde{Q}, \|.\|)$ ile gösterilecektir.

**Tanım 5.1.1.** $(\tilde{Q}, \|.\|)$ bir esnek normlu quasilineer uzay ve $\{\tilde{q}_n\}$'da $\tilde{Q}$'nın esnek quasi vektörlerinin bir dizisi olsun. Eğer $h(\tilde{q}_n, \tilde{q}) \to \tilde{0}$ $(n \to \infty)$ ise $\{\tilde{q}_n\}$ dizisi $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ esnek quasi vektörüne yakınsaktır denir. Yani $h(\tilde{q}_n, \tilde{q}) \to \tilde{0}$ $(n \to \infty)$'dan anladığımız her $\tilde{\epsilon} > \tilde{0}$ için en az bir $N \in \mathbb{N}$ vardır öyleki her $n > N$ için

$$\tilde{q}_n \cong \tilde{q} + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon}, \tilde{q} \cong \tilde{q}_n + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon}, \ \|\tilde{q}_{in}^{\epsilon}\| \leq \tilde{\epsilon}$$

dir.

**Örnek 5.1.1.** $Q$ bir esnek normlu uzay olsun. Bu durumda $\tilde{Q}$ bir esnek normlu quasilineer uzay olur. $\tilde{Q}$'yı esnek normlu quasilineer uzay yapısına kavuşturan kısmi sıralama bağıntısı eşitlik bağıntısıdır. Eğer bir $\tilde{Q}$ esnek normlu quasilineer uzayının her $\tilde{q}$ esnek quasi vektörünün tersi varsa $\tilde{Q}$ bir esnek normlu uzay olur. $\tilde{Q}$ üzerindeki kısmi sıralama bağıntısı eşitlik bağıntısına dönüşür. Ayrıca $h_{\tilde{Q}}(\tilde{q}, \tilde{w}) = \|\tilde{q} - \tilde{w}\|_{\tilde{Q}}$ olur.

**Teorem 5.1.1.** Bir esnek normlu quasilineer uzayında bir esnek quasi vektörün limiti varsa, tektir.

**İspat.** Kabul edelim ki $(\tilde{Q}, \|.\|)$ bir esnek normlu quasilineer uzay ve $\tilde{Q}$'nın bir esnek quasilineer vektörlerinin diziside $\{\tilde{q}_n\}$ olsun öyle ki $n \to \infty$ iken $\tilde{q} \neq \tilde{w}$ olmak üzere $h(\tilde{q}_n, \tilde{q}) \to \tilde{0}$ ve $h(\tilde{q}_n, \tilde{w}) \to \tilde{0}$ olsun. Bu durumda eğer $h(\tilde{q}_n, \tilde{q}) \to \tilde{0}$ $(n \to \infty)$ ise her $\tilde{\epsilon} > \tilde{0}$ için en az bir $N \in \mathbb{N}$ vardır öyleki her $n > N$ için

$$\tilde{q}_n \cong \tilde{q} + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon}, \ \tilde{q} \cong \tilde{q}_n + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon}, \ \| \tilde{q}_{in}^{\epsilon} \| \leq \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$$

ve her $\tilde{\epsilon} > \tilde{0}$ için en az bir $M \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n > M$ için

$$\tilde{q}_n \lesseqqgtr \tilde{w} + \tilde{w}_{1n}^{\epsilon},\ \tilde{w} \lesseqqgtr \tilde{q}_n + \tilde{w}_{2n}^{\epsilon},\ \| \tilde{w}_{in}^{\epsilon} \| \leq \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$$

olur. Eğer $K = \max\{N, M\}$ seçilirse her $n > K$ için yukarıdaki iki denklemden

$$\tilde{q}_n \lesseqqgtr \tilde{q} + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon},\ \tilde{q} \lesseqqgtr \tilde{q}_n + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon},\ \| \tilde{q}_{in}^{\epsilon} \| \leq \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$$

ve

$$\tilde{q}_n \lesseqqgtr \tilde{w} + \tilde{w}_{1n}^{\epsilon},\ \tilde{w} \lesseqqgtr \tilde{q}_n + \tilde{w}_{2n}^{\epsilon},\ \| \tilde{w}_{in}^{\epsilon} \| \leq \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$$

elde edilir. $\tilde{Q}$ bir esnek normlu quasilineer uzay olduğundan her $n > K$ için

$$\tilde{q} \lesseqqgtr \tilde{q}_n + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon} \lesseqqgtr \tilde{w} + \tilde{w}_{1n}^{\epsilon} + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon}$$

ve

$$\tilde{w} \lesseqqgtr \tilde{q}_n + \tilde{w}_{2n}^{\epsilon} \lesseqqgtr \tilde{q} + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon} + \tilde{w}_{2n}^{\epsilon}$$

elde edilir. Diğer yandan $1 \leq i \leq 2$ için

$$\|\tilde{q}_{in}^{\epsilon} + \tilde{w}_{in}^{\epsilon}\| \leq \tilde{\epsilon}$$

olur. Bu da bize her $\tilde{\epsilon} > \tilde{0}$ için

$$\tilde{q} \lesseqqgtr \tilde{w} + \tilde{w}_{1n}^{\epsilon} + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon},\ \tilde{w} \lesseqqgtr \tilde{q} + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon} + \tilde{w}_{2n}^{\epsilon} \quad \text{ve} \quad \|\tilde{q}_{in}^{\epsilon} + \tilde{w}_{in}^{\epsilon}\| \leq \tilde{\epsilon}$$

olduğunu söyler. Buradan $\tilde{Q}$ bir esnek normlu quasilineer uzay olduğundan Tanım 4.2.3'den $\tilde{q} \lesseqqgtr \tilde{w}$ ve $\tilde{w} \lesseqqgtr \tilde{q}$ bulunur. Buradan da $\tilde{q} = \tilde{w}$ olur. Bu da bizim kabülümüzle çelişir.

Dolayısıyla bir esnek normlu quasilineer uzayında bir esnek quasi vektörün limiti varsa tek olur.

**Tanım 5.1.2.** $(\tilde{Q}, \|.\|)$ bir esnek normlu quasilineer uzay ve $\{\tilde{q}_n\}$'de $\tilde{Q}$'nın esnek quasi vektörlerinin bir dizisi olsun. Eğer

$$\{h(\tilde{q}_n, \tilde{q}_m): m, n \in \mathbb{N}\}$$

sınırlı bir küme ise yani her $n, m \in \mathbb{N}$ için $h(\tilde{q}_n, \tilde{q}_m) \lesseqqgtr \tilde{N}$ olacak şekilde bir $\tilde{N} \gtreqqless \tilde{0}$ varsa $\{\tilde{q}_n\}$ dizisine $\tilde{Q}$'da sınırlıdır denir.

**Teorem 5.1.2.** Bir esnek normlu quasilineer uzayda her yakınsak dizi sınırlıdır.

**İspat.** Kabul edelim ki $\{\tilde{q}_n\}$ esnek quasi dizisi bir $\tilde{q} \in \tilde{Q}$'ya yakınsak olsun. Bu durumda her $\tilde{\epsilon} > \tilde{0}$ için en az bir $N \in \mathbb{N}$ vardır öyleki her $n > N$ için

$$\tilde{q}_n \precsim \tilde{q} + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon},\ \tilde{q} \precsim \tilde{q}_n + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon},\ \|\tilde{q}_{in}^{\epsilon}\| \leq \tilde{\epsilon}$$

olacak şekilde $\tilde{q}_{1n}^{\epsilon}, \tilde{q}_{2n}^{\epsilon} \in \tilde{Q}$ vardır. Yani $h(\tilde{q}_n, \tilde{q}) \to \tilde{0}$ $(n \to \infty)$. Buradan keyfi bir $\widetilde{q_0} \in \tilde{Q}$ için

$$h(\tilde{q}_n, \tilde{q}_0) \precsim h(\tilde{q}_n, \tilde{q}) + h(\tilde{q}, \tilde{q}_0)$$

yazılabilir.

$$\widetilde{M} = \max\{h(\tilde{q}_1, \tilde{q}), h(\tilde{q}_2, \tilde{q}), \ldots, \tilde{1} + h(\tilde{q}, \tilde{q}_0)\}$$

olsun. Bu durumda her $\tilde{\epsilon} > \tilde{0}$ için $h(\tilde{q}_n, \tilde{q}) \precsim \tilde{1}$ alırsak $h(\tilde{q}_n, \tilde{q}_0) \precsim \widetilde{M}$ elde edilir. Buda bize $\tilde{q}_n \tilde{\in} \tilde{S}_{\widetilde{M}}(\tilde{q}_0)$ olduğunu söyler.

Her sınırlı esnek quasi dizi yakınsak olmayabilir. Örneğin; $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ esnek normlu uzayının her $\lambda \in P$ için

$$\tilde{q}_n(\lambda) = \{(-1)^n\} \in \widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$$

sınırlı esnek quasi dizisini ele alalım. Açıkça bu dizi $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$'da sınırlıdır fakat yakınsak değildir.

**Tanım 5.1.3.** $(\tilde{Q}, \|.\|)$ bir esnek normlu quasilineer uzay ve $\{\tilde{q}_n\}$'da $\tilde{Q}$'nın esnek quasi vektörlerinin bir dizisi olsun. Eğer $\forall \epsilon \succsim \bar{0}$ için en az bir $M \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m, n > M$ için $h(\tilde{q}_n, \tilde{q}_m) \leq \tilde{\epsilon}$ oluyorsa $\{\tilde{q}_n\}$ dizisine $\tilde{Q}$'da bir Cauchy dizisidir denir.

**Teorem 5.1.3.** Bir esnek normlu quasilineer uzayda her yakınsak dizi Cauchy dizisidir.

**İspat.** Kabul edelim ki $\{\tilde{q}_n\}$ esnek quasi dizisi bir $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ yakınsak olsun. Bu durumda her $\tilde{\epsilon} > \tilde{0}$ için en az bir $N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n > N$ için

$$\tilde{q}_n \precsim \tilde{q} + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon},\ \tilde{q} \precsim \tilde{q}_n + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon},\ \|\tilde{q}_{in}^{\epsilon}\| \leq \tilde{\epsilon}$$

olacak şekilde $\tilde{q}_{1n}^{\epsilon}, \tilde{q}_{2n}^{\epsilon} \in \tilde{Q}$ vardır. Ayrıca her $m > N$ içinde

$$\tilde{q}_m \precsim \tilde{q} + \widetilde{w}_{1n}^{\epsilon},\ \tilde{q} \precsim \tilde{q}_m + \widetilde{w}_{2n}^{\epsilon},\ \|\widetilde{w}_{in}^{\epsilon}\| \leq \tilde{\epsilon}$$

olacak şekilde $\widetilde{w}_{1n}^{\epsilon}, \widetilde{w}_{2n}^{\epsilon} \in \tilde{Q}$ bulunur. Yukarıdaki teoremin ispatına benzer şekilde eğer

$K = \max\{N, M\}$ seçersek her $n, m > K$ için

$$\tilde{q}_n \lessapprox \tilde{q} + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon} \lessapprox \tilde{q}_m + \widetilde{w}_{2n}^{\epsilon} + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon}$$

ve

$$\tilde{q}_m \lessapprox \tilde{q} + \widetilde{w}_{1n}^{\epsilon} \lessapprox \tilde{q}_n + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon} + \widetilde{w}_{1n}^{\epsilon}$$

elde edilir. Diğer yandan eğer $\tilde{2}\tilde{\epsilon} = \widetilde{\epsilon'}$ alırsak $\| \tilde{q}_{in}^{\epsilon} \| \leq \tilde{\epsilon}$ ve $\| \widetilde{w}_{in}^{\epsilon} \| \leq \tilde{\epsilon}$ iken $\|\tilde{q}_{in}^{\epsilon} + \widetilde{w}_{in}^{\epsilon}\| \leq \widetilde{\epsilon'}$ olur. Bu da bize her $\tilde{\epsilon} > \tilde{0}$ için en az bir $K \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $n > K$ için $h(\tilde{q}_n, \tilde{q}_m) \leq \tilde{\epsilon}$ olduğunu söyler.

Yukarıdaki teoremin tersi genelde doğru değildir.

**Teorem 5.1.4.** Bir esnek normlu quasilineer uzayda bir esnek quasi Cauchy dizisinin esnek quasi alt dizisi yakınsak ise bu esnek quasi dizisi de esnek quasi alt dizisinin yakınsadığı noktaya yakınsar.

**İspat.** Kabul edelim ki $\{\tilde{q}_n\}$, $\tilde{Q}$'da bir esnek quasi Cauchy dizisi olsun. Bu durumda her $\tilde{\epsilon} > \tilde{0}$ için en az bir $N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n, m > N$ için

$$\tilde{q}_n \lessapprox \tilde{q}_m + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon}, \tilde{q}_m \lessapprox \tilde{q}_n + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon}, \|\tilde{q}_{in}^{\epsilon}\| \leq \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$$

dir. Şimdi $\{\tilde{q}_n\}$'nin yakınsak bir $\{\tilde{q}_{n_k}\}$ alt dizisini tanımlayalım ve $n \to \infty$ iken $\tilde{q}_{n_k} \to \tilde{q}$ olsun. Buradan

$$\tilde{q}_{n_m} \lessapprox \tilde{q}_n + \tilde{k}_{1n}^{\epsilon}, \tilde{q}_n \lessapprox \tilde{q}_{n_m} + \tilde{k}_{2n}^{\epsilon}, \left\|\tilde{k}_{in}^{\epsilon}\right\| \leq \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$$

ve her $n, m > N$ ve her $\tilde{\epsilon} > \tilde{0}$ için en az bir $N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n > N$ için

$$\tilde{q}_{n_m} \lessapprox \tilde{q} + \tilde{l}_{1n}^{\epsilon}, \tilde{q} \lessapprox \tilde{q}_{n_m} + \tilde{l}_{2n}^{\epsilon}, \left\|\tilde{l}_{in}^{\epsilon}\right\| \leq \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikten her $n > N$ için

$$\tilde{q} \lessapprox \tilde{q}_n + \tilde{l}_{2n}^{\epsilon} + \tilde{k}_{1n}^{\epsilon}, \tilde{q}_n \lessapprox \tilde{q} + \tilde{l}_{1n}^{\epsilon} + \tilde{k}_{2n}^{\epsilon}$$

bulunur. Ayrıca $\left\|\tilde{l}_{1n}^{\epsilon} + \tilde{k}_{2n}^{\epsilon}\right\| \lessapprox \tilde{\epsilon}$ olur. Bu da bize $n \to \infty$ iken $\tilde{q}_{n_k} \to \tilde{q}$ olduğunu gösterir.

**Teorem 5.1.5.** Bir esnek quasilineer uzayda her Cauchy dizisi sınırlıdır.

**İspat.** Kabul edelim ki $\{\tilde{q}_n\}$ bir esnek Cauchy dizisi olsun. Buradan en az bir $N \geq 0$ vardır öyle ki her $k, l > N$ için $h(\tilde{q}_k, \tilde{q}_l) \lneqq \tilde{1}$ olur. Eğer

$$\widetilde{K}(\lambda) = \max_{1 \leq k, l \leq m} \{h(\tilde{q}_k, \tilde{q}_l)(\lambda), \forall \lambda \in P\}$$

seçersek $1 \leq k \leq m$ ve $l \geq m$ için

$$\begin{aligned} h(\tilde{q}_k, \tilde{q}_l)(\lambda) &\leq h(\tilde{q}_k, \tilde{q}_m)(\lambda) + h(\tilde{q}_m, \tilde{q}_l)(\lambda) \\ &\leq \widetilde{K}(\lambda) + \tilde{1}(\lambda) \\ &= \left(\widetilde{K} + \tilde{1}\right)(\lambda) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $k, l \in \mathbb{N}$ için $h(\tilde{q}_k, \tilde{q}_l) \leq \left(\widetilde{K} + \tilde{1}\right)$ bulunur. Bu da bize $\{\tilde{q}_n\}$'nın $\tilde{Q}$'nın sınırlı esnek quasi vektörü olduğunu gösterir.

**Tanım 5.1.4.** $\left(\tilde{Q}, \|.\|\right)$ bir esnek normlu quasilineer uzay ve $(S, P)$'de her $\lambda \in P$ için $S(\lambda) \neq \emptyset$ olacak şekilde $\tilde{Q}$'nın bir esnek quasi alt kümesi olsun. Eğer her $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ için $\|\tilde{q}\| \leq \widetilde{m}$ olacak şekilde bir $\widetilde{m}$ bir esnek reel sayısı varsa $(S, P)$'ye $\tilde{Q}$'da sınırlıdır denir.

**Örnek 5.1.2.** $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ esnek quasilineer uzayının bir

$$B = \{\tilde{q} : \tilde{q}(\lambda) \subseteq [0,1], \lambda \in P\}$$

esnek quasi alt kümesini alalım. Biliyoruz ki

$$\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}, \|\tilde{q}\| = \sup \|\tilde{q}(\lambda)\|_{\Omega_C(\mathbb{R})}$$

normu ile bir esnek normlu quasilineer uzaydır. Ayrıca

$$\|\tilde{q}\| = \sup \|\tilde{q}(\lambda)\|_{\Omega_C(\mathbb{R})} \leq \sup \|[0,1]\|_{\Omega_C(\mathbb{R})} = 1$$

olduğundan $B$ kümesi, $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$'nın sınırlı quasi esnek alt kümesidir.

**Tanım 5.1.5.** $\left(\tilde{Q}, \|.\|\right)$ esnek normlu quasilineer uzay olsun. Eğer $\tilde{Q}$'daki her Cauchy dizisi $\tilde{Q}$'nın bir esnek quasi elemanına yakınsarsa $\tilde{Q}$'ya tamdır denir. Her tam esnek normlu quasilineer uzay esnek quasi Banach Uzayı olarak adlandırılır.

**Teorem 5.1.6.** $\left(\tilde{Q}, \|.\|\right)$ esnek normlu quasilineer uzay olsun. Bu durumda

$i)$ $\tilde{q}_n \longrightarrow \tilde{q}$ ve $\widetilde{w}_n \longrightarrow \widetilde{w}$ ise $\tilde{q}_n + \widetilde{w}_n \longrightarrow \tilde{q} + \widetilde{w}$,

$ii)$ $\alpha_n$ esnek skalerlerin bir dizisi olmak üzere $\tilde{q}_n \longrightarrow \tilde{q}$, $\tilde{\alpha}_n \longrightarrow \tilde{\alpha}$ ise $\tilde{\alpha}_n\tilde{q}_n \longrightarrow \tilde{\alpha}\tilde{q}$ şartları sağlanır.

**İspat.** Kabul edelim ki $\tilde{q}_n \longrightarrow \tilde{q}$ ve $\widetilde{w_n} \longrightarrow \tilde{w}$ olsun. Bu durumda $\forall\tilde{\epsilon} > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > n_0$ için

$$\tilde{q}_n \lesseqqgtr \tilde{q} + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon},\ \tilde{q} \lesseqqgtr \tilde{q}_n + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon}, \| \tilde{q}_{in}^{\epsilon} \| \lesseqqgtr \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$$

ve $\forall\tilde{\epsilon} > 0$ için $\exists n_0{}' \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > n_0{}'$ için

$$\widetilde{w}_n \lesseqqgtr \widetilde{w} + \widetilde{w}_{1n}^{\epsilon},\ \widetilde{w} \lesseqqgtr \widetilde{w}_n + \widetilde{w}_{2n}^{\epsilon},\ \|\widetilde{w}_{in}^{\epsilon}\| \leq \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$$

olur. Yukarıdaki iki eşitsizlikten $N = \max\{n_0, n_0{}'\}$ seçersek $\forall n > k$ için

$$\tilde{q}_n + \widetilde{w}_n \lesseqqgtr \tilde{q} + \widetilde{w} + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon} + \widetilde{w}_{1n}^{\epsilon},\ \tilde{q} + \widetilde{w} \lesseqqgtr \tilde{q}_n + \widetilde{w}_n + \tilde{q}_{2n2}^{\epsilon} + \widetilde{w}_{2n2}^{\epsilon}$$

ve

$$\| \tilde{q}_{in}^{\epsilon} + \widetilde{w}_{in}^{\epsilon} \| \lesseqqgtr \| \tilde{q}_{in}^{\epsilon} \| + \| \widetilde{w}_{in}^{\epsilon} \| \lesseqqgtr \frac{\tilde{\epsilon}}{2} + \frac{\tilde{\epsilon}}{2} \lesseqqgtr \tilde{\epsilon}$$

olur. Bu da bize $\tilde{q}_n + \widetilde{w}_n \longrightarrow \tilde{q} + \widetilde{w}$ olduğunu gösterir.

Kabul edelim ki $\tilde{q}_n \longrightarrow \tilde{q}$ olsun. Bu durumda $\forall\tilde{\epsilon} > 0$ için $\exists n_0 \in N$ vardır öyle ki $\forall n > n_0$ için

$$\tilde{q}_n \lesseqqgtr \tilde{q} + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon}, \tilde{q} \lesseqqgtr \tilde{q}_n + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon}, \| \tilde{q}_{in}^{\epsilon} \| \lesseqqgtr \frac{\tilde{\epsilon}}{\tilde{\alpha}}$$

olur.$\{\tilde{\alpha}_n\}$ skaleri için $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay olduğundan

$$\tilde{\alpha}\tilde{q}_n \lesseqqgtr \tilde{\alpha}\tilde{q} + \tilde{\alpha}\tilde{q}_{1n}^{\epsilon}, \tilde{\alpha}\tilde{q} \lesseqqgtr \tilde{\alpha}\tilde{q}_n + \tilde{\alpha}\tilde{q}_{2n}^{\epsilon}, \| \tilde{\alpha}\tilde{q}_{in}^{\epsilon} \| \lesseqqgtr \tilde{\epsilon}$$

bulunur. Dolayısıyla $\tilde{\alpha}\tilde{q}_n \longrightarrow \tilde{\alpha}\tilde{q}$ elde edilir.

**Teorem 5.1.7.** $(\tilde{Q}, \|.\|)$ esnek normlu quasilineer uzay olsun. $\tilde{Q}$ üzerinde tanımlı her esnek quasi norm Housdorff metriğe göre süreklidir.

**İspat .** Kabul edelim ki $\tilde{q}_n \longrightarrow \tilde{q}$ olsun. Bu durumda $\forall\tilde{\epsilon} > 0$ için $\exists n_0 \in N$ vardır öyleki $\forall n > n_0$ için,

$$\tilde{q}_n \lesseqqgtr \tilde{q} + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon}, \tilde{q} \lesseqqgtr \tilde{q}_n + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon}, \| \tilde{q}_{in}^{\epsilon} \| \lesseqqgtr \tilde{\epsilon}$$

olur. $\tilde{Q}$ bir esnek normlu quasilineer uzay olduğundan

$$\|\tilde{q}_n\| \leq \|\tilde{q}\| + \|\tilde{q}_{1n}^{\epsilon}\| \quad \text{ve} \quad \|\tilde{q}\| \mathrel{\widetilde{\leq}} \|\tilde{q}_n\| + \|\tilde{q}_{2n}^{\epsilon}\|$$

bulunur. Bu da bize $n \to \infty$ iken $\|\tilde{q}_{in}^{\epsilon}\| \leq \tilde{\epsilon}$ olduğundan $\|\tilde{q}_n\| \to \|\tilde{q}\|$ olduğunu söyler.

**Teorem 5.1.8.** $(\tilde{Q}, \|.\|)$ esnek normlu quasilineer uzay, $\{\tilde{q}_n\}$ ve $\{\widetilde{w}_n\}$ esnek quasi vektörleri de $\tilde{Q}$'da birer esnek quasi Cauchy dizileri olsun. Bu durumda $\{\tilde{q}_n + \widetilde{w}_n\}$'de $\tilde{Q}$'da bir esnek quasi Cauchy dizisidir.

**İspat.** Kabul edelim ki $\{\tilde{q}_n\}$ ve $\{\widetilde{w}_n\}$ $\tilde{Q}$'da birer esnek quasi Cauchy dizileri olsun. Bu durumda $\forall \tilde{\epsilon} > 0$ için $\exists n_0 \in N$ vardır öyle ki $\forall n, m > n_0$ ve $\forall n, m > n_0{}'$ için sırasıyla

$$\tilde{q}_n \mathrel{\widetilde{\leq}} \tilde{q}_m + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon}, \tilde{q}_m \mathrel{\widetilde{\leq}} \tilde{q}_n + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon}, \| \tilde{q}_{in}^{\epsilon} \| \mathrel{\widetilde{\leq}} \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$$

ve

$$\widetilde{w}_n \mathrel{\widetilde{\leq}} \widetilde{w}_m + \widetilde{w}_{1n}^{\epsilon}, \widetilde{w}_m \mathrel{\widetilde{\leq}} \widetilde{w}_n + \widetilde{w}_{2n}^{\epsilon}, \| \widetilde{w}_{in}^{\epsilon} \| \mathrel{\widetilde{\leq}} \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$$

olur. $N = \max\left\{n_0, n_0{}'\right\}$ seçersek $\forall \tilde{\epsilon} > 0$ için $\exists N \in N$ vardır öyle ki $\forall n, m > N$ için yukarıdaki eşitsizliklerden

$$\tilde{q}_n + \widetilde{w}_n \mathrel{\widetilde{\leq}} \tilde{q}_m + \widetilde{w}_m + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon} + \widetilde{w}_{1n}^{\epsilon}, \tilde{q}_m + \widetilde{w}_m \mathrel{\widetilde{\leq}} \tilde{q}_n + \widetilde{w}_n + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon} + \widetilde{w}_{2n}^{\epsilon}$$

bulunur. Ayrıca

$$\| \tilde{q}_{in}^{\epsilon} + \widetilde{w}_{in}^{\epsilon} \| \mathrel{\widetilde{\leq}} \| \tilde{q}_{in}^{\epsilon} \| + \| \widetilde{w}_{in}^{\epsilon} \| \mathrel{\widetilde{\leq}} \frac{\tilde{\epsilon}}{2} + \frac{\tilde{\epsilon}}{2} = \tilde{\epsilon}$$

olur. Bu da bize $\{\tilde{q}_n + \widetilde{w}_n\}$'nin esnek quasi Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

**Teorem 5.1.9.** $(\tilde{Q}, \|.\|, P)$ esnek normlu quasilineer uzay ise

$a)$ $\tilde{q}_n \to \tilde{q}$, $\widetilde{w}_n \to \widetilde{w}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\tilde{q}_n \mathrel{\widetilde{\leq}} \widetilde{w}_n$ ise $\tilde{q} \mathrel{\widetilde{\leq}} \widetilde{w}$,

$b)$ $\tilde{q}_n \to \tilde{q}$, $\widetilde{w}_n \to \tilde{q}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\tilde{q}_n \mathrel{\widetilde{\leq}} \widetilde{m}_n \mathrel{\widetilde{\leq}} \widetilde{w}_n$ ise $\widetilde{m}_n \to \tilde{q}$,

$c)$ $\tilde{q}_n + \widetilde{w}_n \to \tilde{q}$ ve $\widetilde{w}_n \to \tilde{\theta}$ ise $\tilde{q}_n \to \tilde{q}$

olur.

**İspat.** Kabul edelim ki her $n \in \mathbb{N}$ için $\tilde{q}_n \to \tilde{q}$ ve $\widetilde{w}_n \to \widetilde{w}$ olsun. Bu durumda $\forall \epsilon > 0$ için $\exists n_0 \in N$ vardır öyle ki $\forall n > n_0$ için

$$\tilde{q}_n \lesseqqgtr \tilde{q} + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon},\ \tilde{q} \lesseqqgtr \tilde{q}_n + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon},\ \|\tilde{q}_{in}^{\epsilon}\| \leq \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$$

ve

$$\widetilde{w}_n \lesseqqgtr \widetilde{w} + \widetilde{w}_{1n}^{\epsilon},\ \widetilde{w} \lesseqqgtr \widetilde{w}_n + \widetilde{w}_{2n}^{\epsilon},\ \|\widetilde{w}_{in}^{\epsilon}\| \leq \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$$

olur. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $\tilde{q}_n \lesseqqgtr \widetilde{w}_n$ olduğundan yukarıdaki denklemlerden

$$\tilde{q} \lesseqqgtr \widetilde{w}_n + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon} \lesseqqgtr \widetilde{w} + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon} + \widetilde{w}_{1n}^{\epsilon}$$

elde edilir. Bundan başka $\|\tilde{q}_{2n}^{\epsilon} + \widetilde{w}_{1n}^{\epsilon}\| \leq \tilde{\epsilon}$'dur. $\tilde{Q}$ bir esnek normlu quasilineer uzay olduğundan $\tilde{q} \lesseqqgtr \widetilde{w}$ elde edilir.

Kabul edelim ki her $n \in \mathbb{N}$ için $\tilde{q}_n \to \tilde{q}$ ve $\widetilde{w}_n \to \tilde{q}$ ve $\tilde{q}_n \lesseqqgtr \widetilde{m}_n \lesseqqgtr \widetilde{w}_n$ olsun. Bu durumda $\forall\tilde{\epsilon} > 0$ için $\exists n_0 \in N$ vardır öyle ki $\forall n > n_0$ için

$$\tilde{q}_n \lesseqqgtr \tilde{q} + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon},\ \tilde{q} \lesseqqgtr \tilde{q}_n + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon},\ \|\tilde{q}_{in}^{\epsilon}\| \leq \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$$

ve

$$\widetilde{w}_n \lesseqqgtr \tilde{q} + \widetilde{w}_{1n}^{\epsilon},\ \tilde{q} \lesseqqgtr \widetilde{w}_n + \widetilde{w}_{2n}^{\epsilon},\ \|\widetilde{w}_{in}^{\epsilon}\| \leq \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$$

olur. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $\tilde{q}_n \lesseqqgtr \widetilde{m}_n$ olduğundan $\tilde{q} \lesseqqgtr \widetilde{m}_n + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon}$ bulunur. Yine her $n \in \mathbb{N}$ için $\widetilde{m}_n \lesseqqgtr \widetilde{w}_n$ olduğundan $\widetilde{m}_n \lesseqqgtr \widetilde{w} + \widetilde{w}_{1n}^{\epsilon}$ elde edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\|\tilde{q}_{2n}^{\epsilon}\| \leq \tilde{\epsilon}$ ve $\|\widetilde{w}_{1n}^{\epsilon}\| \leq \tilde{\epsilon}$ olduğundan $n \to \infty$ iken $\widetilde{m}_n \to \tilde{q}$ bulunur.

Kabul edelim ki her $n \in \mathbb{N}$ için $\tilde{q}_n + \widetilde{w}_n \to \tilde{q}$ ve $\widetilde{w}_n \to \tilde{\theta}$ olsun. Bu durumda $\forall\tilde{\epsilon} > 0$ için $\exists n_0 \in N$ vardır öyle ki $\forall n > n_0$ için

$$\tilde{q}_n + \widetilde{w}_n \lesseqqgtr \tilde{q} + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon},\ \tilde{q} \lesseqqgtr \tilde{q}_n + \widetilde{w}_n + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon},\ \|\tilde{q}_{in}^{\epsilon}\| \leq \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$$

ve

$$\widetilde{w}_n \lesseqqgtr \tilde{\theta} + \widetilde{w}_{1n}^{\epsilon},\ \tilde{\theta} \lesseqqgtr \widetilde{w}_n + \widetilde{w}_{2n}^{\epsilon},\ \|\widetilde{w}_{in}^{\epsilon}\| \leq \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$$

olur. Bu iki eşitsizlikten

$$\tilde{q}_n + \tilde{\theta} \lesseqqgtr \tilde{q} + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon} + \widetilde{w}_{2n}^{\epsilon},\ \tilde{q} \lesseqqgtr \tilde{q}_n + \tilde{\theta}_n + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon} + \widetilde{w}_{1n}^{\epsilon}$$

ve

$$\|\tilde{q}_{in}^{\epsilon}\| \leq \frac{\tilde{\epsilon}}{2} \text{ve} \|\widetilde{w}_{in}^{\epsilon}\| \leq \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$$

olduğundan

$$\|\tilde{q}_{2n}^{\epsilon} + \widetilde{w}_{1n}^{\epsilon}\| \leq \tilde{\epsilon}$$

bulunur. Bu da bize $n \to \infty$ iken $\tilde{q}_n \to \tilde{q}$ olduğunu söyler.

**Lemma 5.1.1.** $\widetilde{W}$ ve $\tilde{Z}$, $\tilde{Q}$ esnek normlu quasilineer uzayının **(**4.2.1**)** şartını da sağlayan iki esnek kapalı alt uzayları ve $\widetilde{W}$'da $\tilde{Z}$'nın bir kapalı esnek alt kümesi olsun. Bu durumda her $\tilde{\epsilon} \gneqq \tilde{0}$ için $\|\tilde{z}\| \gneqq \tilde{1}$ olacak şekilde en az bir $\tilde{z} \in \tilde{Q} \backslash \widetilde{W}$ vardır öyle ki her $\widetilde{w} \in \widetilde{W}$ için $\|\tilde{z} - \widetilde{w}\| \gneqq \tilde{1} - \tilde{\epsilon}$ olur.

**İspat.** Kabul edelim ki $\tilde{\epsilon} \gneqq \tilde{0}$ ve her $\lambda \in P$ için $\tilde{\epsilon}(\lambda) = \epsilon_\lambda > 0$ olsun. $\tilde{Q}$ **(**4.2.1**)** şartını sağladığından $\tilde{Q}(\lambda) = Q$ için $\tilde{Z}(\lambda) = Z_\lambda$, $Q$ normlu quasilineer uzayının bir kapalı alt uzayıdır. (Çakan, 2016)'da normlu quasilineer uzaylarda verilen Reisz's Lemma'dan her $\widetilde{w}(\lambda) \in W_\lambda$ için $\|\tilde{z}(\lambda)\|_\lambda \geq 1$ olacak şekilde bir $\tilde{z}(\lambda) \in Q \backslash Z_\lambda$ vardır öyleki

$$\|\tilde{z}(\lambda) - \widetilde{w}(\lambda)\|_\lambda \geq 1 - \epsilon_\lambda$$

olur. Bu da bize her $\tilde{\epsilon} \gneqq \tilde{0}$ için $\|\tilde{z}\| \gneqq \tilde{1}$ olacak şekilde en az bir $\tilde{z} \in \tilde{Q} \backslash \widetilde{W}$ vardır öyle ki $\widetilde{w} \in \widetilde{W}$ için $\|\tilde{z} - \widetilde{w}\| \gneqq \tilde{1} - \tilde{\epsilon}$ olduğunu söyler.

**Lemma 5.1.2.** $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay olsun. $\tilde{Q}$ esnek quasilineer uzayının $\tilde{\theta}$ esnek quasi vektörü minimaldir. Yani $\tilde{q} \lneqq \tilde{\theta}$ ise $\tilde{q} = \tilde{\theta}$ 'dır.

**İspat.** $\tilde{q} \leq \tilde{\theta}$ olcak şekilde $\tilde{Q}$'nın bir $\tilde{q}$ esnek quasi vektörünü alalım. Buradan $(\widetilde{-1})$ esnek skaleri için $(\widetilde{-1})\tilde{q} \lneqq (\widetilde{-1})\tilde{q}$ ve $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay olduğundan

$$\tilde{q} + (\widetilde{-1})\tilde{q} \lneqq \tilde{\theta} + (\widetilde{-1})\tilde{q} = (\widetilde{-1})\tilde{q}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\tilde{\theta} = \left(\tilde{1} + (\widetilde{-1})\right)\tilde{q} = \tilde{q} + (\widetilde{-1})\tilde{q} \lneqq \tilde{\theta} + (\widetilde{-1})\tilde{q} = (\widetilde{-1})\tilde{q}$$

sağlanır. Buradan

$$(\widetilde{-1})\tilde{\theta} \lneqq (\widetilde{-1})\left((\widetilde{-1})\tilde{q}\right) = \tilde{q}$$

elde edilir. $(\widetilde{-1})\tilde{\theta} = \tilde{\theta}$ olduğundan $\tilde{\theta} \lneqq \tilde{q}$ bulunur. Bu da bize $\tilde{q} = \tilde{\theta}$ olduğunu gösterir.

Bu nedenle $\tilde{Q}$ esnek quasi uzayının $\tilde{\theta}$ esnek elemanı minimaldir deriz.

**Tanım 5.1.6.** $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay olsun. Bir $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ esnek quasi vektörünün ve $\tilde{q} + \tilde{q}\,' = \tilde{\theta}$ olacak şekilde $\tilde{q}' \in \tilde{Q}$ varsa $\tilde{q}'$ elemanına $\tilde{q}$ esnek quasi vektörünün tersi denir.

**Lemma 5.1.3.** Eğer bir esnek quasilineer uzayının her esnek quasi vektörünün tersi mevcut ise bu esnek quasilineer uzaydaki kısmi sıralama bağıntısı eşitlik bağıntısına dönüşür. Dolayısıyla $\tilde{Q}$ bir esnek lineer uzay olur.

**İspat.** Eğer her $\lambda$ parametresi için $\tilde{q}(\lambda) = q$ ve $\tilde{q}'(\lambda) = q\,'$ alırsak quasilineer uzaylara benzer şekilde ispatı kolay bir şekilde gösterebiliriz.

**Tanım 5.1.7.** Bir $\tilde{Q}$ esnek quasilineer uzayında bir esnek quasi vektörün tersi mevcut ise bu quasi vektöre regüler esnek quasi vektör denir. Eğer tersi mevcut değil ise bu vektöre singüler esnek quasi vektör denir. Bir $\tilde{Q}$ esnek quasilineer uzayının tüm regüler ve singüler esnek quasi vektörlerinin kümesini sırasıyla $\tilde{Q}_r$ ve $\tilde{Q}_s$ ile gösterilir.

**Tanım 5.1.8.** $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay ve $\widetilde{W} \subseteq \tilde{Q}$ olsun. Eğer $\widetilde{W}$ uzayı $\tilde{Q}$'da tanımlı işlemlerle ve kısmi sıralama bağıntısıyla bir esnek quasilineer uzay oluyor ise $\widetilde{W}$ uzayına $\tilde{Q}$'nın esnek alt quasilineer uzayı denir.

**Teorem 5.1.10.** $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay ve $\widetilde{W} \subseteq \tilde{Q}$ olsun. $\widetilde{W}$'da $\tilde{Q}$'nın esnek alt quasilineer uzayıdır ancak ve ancak her $\widetilde{w_1}, \widetilde{w_2} \in \widetilde{W}$ ve her $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ esnek skalerleri için $\tilde{\alpha}\widetilde{w_1} + \tilde{\beta}\widetilde{w_2} \in \widetilde{W}$ olur.

**İspat.** Teoremin ispatı esnek lineer uzaylardaki ispata benzer şekilde gösterilebilir.

**Örnek 5.1.3.** $\Omega_C(\mathbb{R})$ tarafından oluşturulan $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ mutlak esnek quasi kümesini gözönüne alalım. Yani burada her $\lambda \in P$ için $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}\ (\lambda) = \Omega_C(\mathbb{R})$'dir. Eğer

$$\widetilde{W} = \{\tilde{w} : \tilde{w}(\lambda) = [a,b], a,b \in \mathbb{R}, a < b \ \text{ ve } \ \lambda \in P\} \cup \{\tilde{0}\}$$

alırsak $\widetilde{W}$ kümesi $\Omega_C(\mathbb{R})$'nin bir $\lambda$ parametresi altında singüler elemanlardan oluştuğu görülmektedir. Her $\widetilde{w_1}, \widetilde{w_2} \in \widetilde{W}$ ve her $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ esnek skalerleri için

$$\left(\tilde{\alpha}\widetilde{w_1} + \tilde{\beta}\widetilde{w_2}\right)(\lambda) = \tilde{\alpha}(\lambda)\widetilde{w_1}(\lambda) + \tilde{\beta}(\lambda)\widetilde{w_2}(\lambda) = \alpha\widetilde{w_1}(\lambda) + \beta\widetilde{w_2}(\lambda) \in \Omega_C(\mathbb{R})$$

olduğundan $\widetilde{W}$ kümesi $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$'nın esnek quasi alt uzayıdır. Ayrıca $\widetilde{W}$'nın $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$'nın esnek singüler alt uzayı olduğunu görürüz. Eğer $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$'nın

$$\widetilde{M} = \{\widetilde{m} : \widetilde{m}(\lambda) = \{m\} \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in P\}$$

alt esnek kümesini alırsak her $\widetilde{m_1}, \widetilde{m_2} \in \widetilde{M}$ ve her $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ esnek skalerleri için

$$\left(\tilde{\alpha}\widetilde{m_1} + \tilde{\beta}\widetilde{m_2}\right)(\lambda) = \tilde{\alpha}(\lambda)\widetilde{m_1}(\lambda) + \tilde{\beta}(\lambda)\widetilde{m_2}(\lambda) = \alpha m_1 + \beta m_2 \in \mathbb{R}$$

olacağından $\widetilde{M}$ kümesi $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$'nın esnek alt uzayı olur. Bundan başka $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ mutlak esnek quasilineer uzay olduğundan her $\widetilde{m} \in \widetilde{M}$ esnek quasi vektörünün $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$'da tersi olur. Dolayısıyla, $\widetilde{M}$ kümesi $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$'nın regüler esnek alt uzayıdır.

**Teorem 5.1.11.** Bir $\tilde{Q}$ esnek quasilineer uzayının her regüler esnek quasi vektörü minimaldir.

**İspat.** Bir $\widetilde{w} \in \tilde{Q}$ için $\widetilde{w} \lneqq \tilde{q}$ olacak şekilde bir $\tilde{q} \in \widetilde{Q_r}$ keyfi esnek quasi vektörünü alalım. $\tilde{q}$'da $\tilde{Q}$'nın regüler esnek quasi vektörü olduğundan $\widetilde{w} + \widetilde{q}\,' \lneqq \tilde{q} + \widetilde{q}\,' = \tilde{\theta}$ olur. Lemma 3.1.1'den $\widetilde{w} + \widetilde{q}\,' = \tilde{\theta}$ elde edilir. Bir esnek quasi vektörün tersi mevcutsa tek olacağından $\widetilde{w} = \tilde{q}$ bulunur. Böylece $\tilde{Q}$'dan seçilen regüler esnek quasi vektörün minimal olduğu gösterilmiş olur.

**Teorem 5.1.12.** Eğer $\tilde{Q}$ bir esnek normlu quasilineer uzay ise $\widetilde{Q_r}$ kümesi $\tilde{Q}$ uzayının bir kapalı alt uzayıdır.

**İspat.** İlk olarak $\widetilde{Q_r}$'nın $\tilde{Q}$'nın bir alt uzayı olduğunu gösterelim. Yani $\tilde{q}, \widetilde{w} \in \widetilde{Q_r}$ ve $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathbb{R}(P)$ için $\tilde{\alpha}\tilde{q} + \tilde{\beta}\widetilde{w} \in \widetilde{Q_r}$ olduğunu gösterelim. $\tilde{q}, \widetilde{w} \in \widetilde{Q_r}$ olduğundan $\tilde{q} + \widetilde{q}\,' = \tilde{\theta}$ ve $\widetilde{w} + \widetilde{w}\,' = \tilde{\theta}$ olacak şekilde $\widetilde{q}\,', \widetilde{w}\,' \in \tilde{Q}$ vardır. $\tilde{Q}$ bir esnek normlu quasilineer uzay olduğundan

$$\tilde{\alpha}\tilde{q} + \tilde{\beta}\widetilde{w} + \tilde{\alpha}\widetilde{q}\,' + \tilde{\beta}\widetilde{w}\,' = \tilde{\alpha}\left(\tilde{q} + \widetilde{q}\,'\right) + \tilde{\beta}\left(\widetilde{w} + \widetilde{w}\,'\right) = \tilde{\theta}$$

elde edilir. Buradan da $\tilde{\alpha}\tilde{q} + \tilde{\beta}\widetilde{w} \in \widetilde{Q_r}$ olur.

Şimdi $\widetilde{Q_r}$'dan bir $\tilde{q}_n$ esnek quasi dizisini alalım öyle ki $n \to \infty$ iken $\tilde{q}_n \to -\tilde{q} \in \tilde{Q}$ olsun. $\tilde{Q}$ bir esnek normlu quasilineer uzay olduğundan $\tilde{q}_n - \tilde{q}_n \to \tilde{q} - \tilde{q}$ olur. $\tilde{q}_n \in \widetilde{Q_r}$ olduğundan $\tilde{q}_n - \tilde{q}_n = \tilde{\theta}$ ve buradan da $\tilde{q} - \tilde{q} = \tilde{\theta}$ olduğu görülür. Bu da bize $\tilde{q} \in \widetilde{Q_r}$

olduğunu gösterir. Böylece $\widetilde{Q_r}$'nın $\tilde{Q}$'nın esnek kapalı alt uzayı olduğu gösterilmiş olur.

**Teorem 5.1.13**. $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay ve $\tilde{q}, \tilde{w} \in \tilde{Q}$ olsun. Eğer $\tilde{q} + \tilde{w} \in \widetilde{Q_r}$ ise $\tilde{q} \in \widetilde{Q_r}$ ve $\tilde{w} \in \widetilde{Q_r}$'dir.

**İspat**. Kabul edelim ki $\tilde{q} + \tilde{w} \in \widetilde{Q_r}$ ve $\tilde{q}$'da $\tilde{Q}$'nın regüler esnek quasi vektörü olmasın. Bu durumda en az bir $\tilde{m} \in \widetilde{Q_r}$ vardır öyle ki $(\tilde{q} + \tilde{w}) + \tilde{m} = \tilde{\theta}$ olur. $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay olduğundan $\tilde{q} + (\tilde{w} + \tilde{m}) = \tilde{\theta}$ yazılabilir. Bu da bize $\tilde{q}$ esnek quasi vektörünün $\tilde{w} + \tilde{m}$ ters esnek quasi vektörüne sahip olduğunu söyler. Bu durum ise bizim $\tilde{q} \notin \widetilde{Q_r}$ kabulümüzle çelişir. Benzer yolla $\tilde{w}$'nın $\tilde{Q}$'nın regüler esnek quasi vektörü olduğu gösterilebilir.

**Teorem 5.1.14.** $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay olsun. Eğer $\tilde{q} \in \tilde{Q}_r$ ve $\tilde{w} \in \tilde{Q}_s$ ise $\tilde{q} + \tilde{w} \in \tilde{Q}_s$ olur.

**İspat**. Teoremin ispatı yukarıdaki ispata benzer yolla yapılabilir.

Şunu da hatırlatalım ki quasilineer uzaylarda olduğu gibi esnek quasilineer uzaylarda da her regüler esnek quasi vektörden sonra en az bir singüler esnek quasi vektör gelir.

## 5.2. Esnek Normlu Quasilineer Uzaylarda Esnek Quasilineer Bağımlılık ve Esnek Quasilineer Bağımsızlık

Bu bölümde tıpkı normlu quasilineer uzaylarda olduğu gibi esnek normlu quasilineer uzaylarda esnek quasilineer bağımsızlık ve bağımlılık kavramları tanımlanmıştır. Bu tanımların tıpkı quasilineer uzaylarda olduğu gibi "$\tilde{\lesseqgtr}$" bağıntısına bağlı olarak verilmesi gerektiği görülmüş ve bunların quasilineer uzaylarda tutarlı karşılıkları elde edilmiştir. Ayrıca bu bölümde esnek normlu quasilineer uzayların boyutuyla ilgili önemli tanım, teorem ve sonuçlar elde edilmiştir. Bazı popüler esnek normlu quasilineer uzayların boyutlarına ilişkin örnekler sunulmuştur.

**Tanım 5.2.1.** $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay ve $\{q_k\}_{k=1}^{n} \subseteq Q$ ve $\{\widetilde{\alpha_k}\}_{k=1}^{n}$ esnek skalerlerin kümesi olsun

$$\tilde{\alpha}_1 . \tilde{q}_1 + \tilde{\alpha}_2 . \tilde{q}_2 + \ldots + \tilde{\alpha}_n . \tilde{q}_n \mathrel{\tilde{\leqq}} \tilde{q}$$

olacak şekildeki $\tilde{q}$ esnek elemanına, $\{q_k\}_{k=1}^{n}$ kümesinin esnek "quasilineer kombinasyonu" denir.

Yukarıdaki tanımdan esnek lineer kombinasyonların kümesine karşılık gelen $\{\widetilde{\alpha_k}\}_{k=1}^{n}$ skalerlerin kümesi tek olur. Fakat esnek quasilineer kombinasyonlarına karşılık gelen skalerlerin kümesi ise tek olmayabilir. Ayrıca bir esnek quasilineer uzayda esnek quasi vektörün esnek quasilineer kombinasyonlarının kümesinin farklı parametreler için aynı olmayabilir. Yani $P$ kümesinden alacağımız iki farklı $\lambda_1, \lambda_2$ parametreleri için $\tilde{q}(\lambda_1) = \tilde{q}(\lambda_2)$ eşitliğinin her zaman sağlanmayabilir. Yine bir esnek quasilineer uzayda iki farklı esnek quasi vektörün aynı parametre altında görüntüsü de aynı olabilir.

**Tanım 5.2.2.** $\tilde{Q}$ bir mutlak esnek quasilineer uzay ve $\widetilde{M} \subseteq \tilde{Q}$ olsun. $\widetilde{M}$'nın esnek quasi geren kümesi

$$QSp\widetilde{M} = \left\{\tilde{q} \in \tilde{Q} \colon \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\alpha_k}\widetilde{m_k} \lesseqqgtr \tilde{q}, \widetilde{m_k} \in \widetilde{M}, \widetilde{\alpha_k} \text{ her } 1 \leq k \leq n\right\}$$

'dir. Eğer $QSp\widetilde{M} = \tilde{Q}$ ise $\widetilde{M}$ kümesi $\tilde{Q}$'yı quasi geriyor denir.

**Örnek 5.2.1.** $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ esnek quasilineer uzayında bir $\tilde{q}$ esnek quasi vektörü alalım öyle ki bir $\lambda \in P$ için $\tilde{q}(\lambda) = [-1,2]$ olsun. Ayrıca her $\lambda \in P$ için $\tilde{\alpha}(\lambda) = \alpha$ olsun. Buradan $\tilde{q}$ esnek quasi vektörünün esnek lineer kombinasyonlarının kümesi

$$(\tilde{\alpha}\tilde{q})(\lambda) = \left\{\widetilde{q}'(\lambda) = q \in \Omega_C(\mathbb{R}) \colon \tilde{\alpha}(\lambda)\tilde{q}(\lambda) = \alpha[-1,2] = q, \lambda \in P\right\}$$

iken esnek quasilineerler kombinasyonlarının kümesi ise

$$(\tilde{\alpha}\tilde{q})(\lambda) = \left\{\widetilde{q}'(\lambda) = q \in \Omega_C(\mathbb{R}) \colon \tilde{\alpha}(\lambda)\tilde{q}(\lambda) = \alpha[-1,2] \leq q, \lambda \in P\right\}$$

olur. Örneğin; $\tilde{1}(\lambda) = 1$ esnek skaleri için $\tilde{q} \in \widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ esnek quasi vektörünün esnek quasilineer kombinasyonları $\widetilde{q}'(\lambda) = q \in \Omega_C(\mathbb{R})$ olmak üzere $\lambda \in P$ için

$$\tilde{1}(\lambda)\tilde{q}(\lambda) = [-1,2] \leq q$$

, yani $[-1,2]$'yi içeren $\widetilde{q}' \in \widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ elemanlarından oluşur.

Ayrıca $\widetilde{q}'(\lambda) = q = [2,3]$ için

$$\tilde{\alpha}(\lambda)\tilde{q}(\lambda) = \alpha[-1,2] \leq 2,3]$$

eşitliğini sağlayan bir $\tilde{\alpha}(\lambda) = \alpha$ bulamayız. Bu nedenle $QSp\{\tilde{q}\} \neq \tilde{Q}$ olur.

**Örnek 5.2.2.** $\widetilde{M} = \{\widetilde{m} \colon \widetilde{m}(\lambda) = \{3\}, \lambda \in P \text{ için }\}$ olacak şekilde bir $\widetilde{M} \subset \widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ alalım.

Yine $\lambda \in P$ için $\tilde{\alpha}(\lambda) = \alpha$ alırsak

$$QSp\widetilde{M} = \left\{\widetilde{m}' \in \widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})} : (\tilde{\alpha}\widetilde{m})(\lambda) = \alpha\widetilde{m}(\lambda) = \alpha\{3\} \lesseqqgtr \widetilde{m}'(\lambda), \lambda \in P\right\}$$

olur. $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ bir mutlak esnek quasilineer uzay olduğundan bir $\lambda$ parametresi için $\alpha\{3\} \lesseqqgtr \widetilde{m}'(\lambda)$ olacak şekilde $\widetilde{m}' \in \widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ bulabiliriz. Bu nedenle

$$QSp\widetilde{M} = \left\{\widetilde{m}' \in \widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})} : (\tilde{\alpha}\widetilde{m})(\lambda) = \alpha\{3\} \lesseqqgtr \widetilde{m}'(\lambda), \lambda \in P\right\} = \widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$$

bulunur. (Çakan, 2016)'dan $\{\{a\}\}$ kümesinin $\Omega_C(\mathbb{R})$ 'yi gerdiğini biliyoruz. Esnek quasilineer uzaylarda ise $\tilde{\alpha}(\lambda) = \alpha$ ve $q \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\tilde{q}(\lambda) = \{q\} \subset \Omega_C(\mathbb{R})$ ile verilen $\tilde{q} \in \widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ esnek quasi vektörü $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ esnek quasilineer uzayını gerer.

**Teorem 5.2.1.** $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay ve

$$\widetilde{M} = \{\widetilde{q_1}, \widetilde{q_2}, \dots, \widetilde{q_n}\} \subset \tilde{Q}$$

olsun. Bu durumda $QSp\widetilde{M}$ kümesi $\tilde{Q}$'nın bir esnek quasilineer alt uzayıdır.

**İspat**. Kabul edelim ki $\tilde{q}, \widetilde{w} \in QSp\widetilde{M}$ ve $\tilde{\alpha}$ bir esnek skaler olsun. Buradan bir $\widetilde{\alpha_k}$ ve $\widetilde{b_k}$ skalerleri vardır öyle ki

$$\sum_{k=1}^{n} \widetilde{\alpha_k}\widetilde{q_k} \lesseqqgtr \tilde{q} \quad \text{ve} \sum_{k=1}^{n} \widetilde{b_k}\widetilde{q_k} \lesseqqgtr \widetilde{w}$$

olur. $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay olduğundan

$$\sum_{k=1}^{n} (\widetilde{\alpha_k} + \widetilde{b_k})\widetilde{q_k} = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\alpha_k}\widetilde{q_k} + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{b_k}\widetilde{q_k} \lesseqqgtr \tilde{q} + \widetilde{w}$$

ve

$$\tilde{\alpha}(\sum_{k=1}^{n} \widetilde{\alpha_k}\widetilde{q_k}) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\alpha}(\widetilde{\alpha_k}\widetilde{q_k}) \lesseqqgtr \tilde{\alpha}\tilde{q}$$

elde edilir. Bu da bize $\tilde{q} + \widetilde{w} \in QSp\widetilde{M}$ ve $\tilde{\alpha}\tilde{q} \in QSp\widetilde{M}$ olduğunu gösterir. Böylece $QSp\widetilde{M}$ kümesinin $\tilde{Q}$'nın alt uzayı olduğu gösterilmiş olur.

**Tanım 5.2.3.** $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay

$$\{\tilde{q}_k\}_{k=1}^{n} \subset \tilde{Q}, \{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$$

esnek skalerleri olsun. Eğer

$$\tilde{\theta} \lneqq \widetilde{\alpha_1}\widetilde{q_1} + \widetilde{\alpha_2}\widetilde{q_2} + \ldots + \widetilde{\alpha_n}\widetilde{q_n}$$

eşitsizliği ancak ve ancak $\widetilde{\alpha_1} = \widetilde{\alpha_2} = \ldots = \widetilde{\alpha_n} = \tilde{0}$ iken sağlanıyorsa $\{\widetilde{q_k}\}_{k=1}^{n}$esnek quasi vektörlerinin kümesine esnek quasilineer bağımsızdır denir. Aksi halde $\{\widetilde{q_k}\}_{k=1}^{n}$esnek quasi vektörlerinin kümesine "esnek quasilineer bağımlıdır" denir.

Her esnek lineer uzayın "$=$" bağıntısıyla bir esnek quasilineer uzay olduğu dikkate alınırsa esnek lineer uzaylarda bağımlılık ve bağımsızlık kavramları esnek lineer bağımlılık bağımsızlık kavramlarına dönüşür.

**Teorem 5.2.2.** $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ esnek quasilineer uzayında herhangi iki elemanlı küme esnek quasilineer bağımlıdır.

**İspat.** $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ esnek quasilineer uzayında her $\lambda \in P$ için $\tilde{q}(\lambda) = q \in \Omega_C(\mathbb{R})$ ve $\widetilde{w}(\lambda) = w \in \Omega_C(\mathbb{R})$ olacak şekilde $\{\tilde{q}, \widetilde{w}\} \subset \widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ bir esnek quasi kümesini alalım. Burada üç durum söz konusudur:

Eğer $q, w \in (\Omega_C(\mathbb{R}))_r$ ise

$$\tilde{\theta}(\lambda) \lneqq \widetilde{\alpha_1}(\lambda)\tilde{q}(\lambda) + \widetilde{\alpha_2}(\lambda)\widetilde{w}(\lambda) = \alpha_1 q + \alpha_2 w$$

eşitsizliği $\widetilde{\alpha_1}(\lambda) = \alpha_1, \widetilde{\alpha_2}(\lambda) = \alpha_2$ olmak üzere $\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}$ esnek skalerleri $\tilde{0}$ ’dan farklı olduğunda da sağlanır.

Eğer $\tilde{q} \in (\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})})_d$ veya $\widetilde{w} \in \widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}_d$ ise bu durumda $\tilde{q}(\lambda) = q$ olacak şekildeki esnek quasi vektörü $[-k, k]$ biçimindeki bir simetrik interval içerir veya $\widetilde{w}(\lambda) = w$ olacak şekildeki esnek quasi vektörü $[-k, k]$ biçimindeki bir simetrik interval içerir. Her iki durumda da

$$\tilde{\theta}(\lambda) \lneqq \widetilde{\alpha_1}(\lambda)\tilde{q}(\lambda) + \widetilde{\alpha_2}(\lambda)\widetilde{w}(\lambda) = \alpha_1 q + \alpha_2 w$$

eşitsizliği sadece $\widetilde{\alpha_1} = \widetilde{\alpha_2} = \tilde{0}$ olması durumunda sağlanmaz.

Eğer $\tilde{q}, \widetilde{w} \notin (\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})})_d$ ise

$$\tilde{\theta}(\lambda) \lneqq \widetilde{\alpha_1}(\lambda)\tilde{q}(\lambda) + \widetilde{\alpha_2}(\lambda)\widetilde{w}(\lambda) = \alpha_1 q + \alpha_2 w$$

eşitsizliği sadece $\widetilde{\alpha_1} = \widetilde{\alpha_2} = \tilde{0}$ olduğunda sağlanmaz. Yani

$$\tilde{\theta}(\lambda) \lneqq \widetilde{\alpha_1}(\lambda)\tilde{q}(\lambda) + \widetilde{\alpha_2}(\lambda)\widetilde{w}(\lambda) = \alpha_1 q + \alpha_2 w$$

eşitsizliği $\widetilde{\alpha_1}$ ve $\widetilde{\alpha_2}$, $\tilde{0}$'dan farklı olduğunda da sağlanır.

Bu nedenle $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ esnek quasi uzayında herhangi iki elemanlı küme quasilineer bağımlı olmak zorundadır.

**Örnek 5.2.3.** $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ esnek quasilineer uzayının $\tilde{q}$ esnek quasi vektörünü ele alalım. Yine $\tilde{\alpha}(\lambda) = \alpha$ olmak üzere $\{\bar{0}\} \lesseqqgtr \tilde{\alpha}\tilde{q}$ eşitsizliği esnek quasilineer bağımsızdır ancak ve ancak her $\lambda$ parametresi için $\{\tilde{0}\}(\lambda) \leq \tilde{\alpha}(\lambda)\tilde{q}(\lambda)$ eşitsizliği $\Omega_C(\mathbb{R})$'de quasilineer bağımsızdır. Ayrıca her $\lambda$ parametresi için $\tilde{q}(\lambda)$, $\{0\}$'ı içeriyorsa $\tilde{q}$ vektörü $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$'da esnek quasilineer bağımlıdır. Aksi halde $\tilde{q}$ esnek quasi vektörü $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$'da esnek quasilineer bağımsız olur.

**Örnek 5.2.4.** $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ mutlak esnek quasilineer uzayında $\tilde{q}$ ve $\tilde{w}$ iki esnek quasi vektörü ve her $\tilde{\alpha}$ ve $\tilde{\beta}$ esnek skalerleri için $\tilde{\alpha}(\lambda) = \alpha \in \mathbb{R}$, $\tilde{\beta}(\lambda) = \beta \in \mathbb{R}$ olsun. (Çakan, 2016)'dan $\Omega_C(\mathbb{R})$'de

$$\tilde{\theta}(\lambda) \lesseqqgtr \tilde{\alpha}(\lambda)\tilde{q}(\lambda) + \tilde{\beta}(\lambda)\tilde{w}(\lambda)$$

quasilineer bağımlı olduğundan $\tilde{\theta} \lesseqqgtr \tilde{\alpha}\tilde{q} + \tilde{\beta}\tilde{w}$ 'de $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$'da esnek quasilineer bağımlıdır.

**Sonuç 5.2.1.** $\tilde{Q}$ mutlak esnek quasilineer uzayında, bir $\tilde{q}$ esnek quasi vektörü esnek quasilineer bağımsızdır ancak ve ancak $\lambda \in P$ için $\tilde{q}(\lambda)$, $Q$'da quasilineer bağımsızdır.

**Sonuç 5.2.2.** Bir esnek quasilineer vektörün esnek quasilineer kombinasyonu, esnek quasilineer spanı, esnek quasilineer bağımsızlığı ve esnek quasilineer bağımlılığı bir $\lambda \in P$ parametresine bağlı olarak incelenir. Dolayısıyla bir esnek quasi vektörün bu özelliklerini araştırırken $\lambda$ parametresi altında quasilineer bağımlı veya bağımsız olması durumları incelenir. Yukarıdaki açıklamaya göre aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 5.2.3.** $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay ve $\tilde{Q}$'daki esnek quasilineer vektörlerin alt kümesi $M = \{\widetilde{q_1}, \widetilde{q_2}, \dots, \widetilde{q_n}\}$ olsun. O zaman $M$, $\tilde{Q}$'da esnek quasilineer bağımsızdır ancak ve ancak

$$M(\lambda) = \{\widetilde{q_1}(\lambda), \widetilde{q_2}(\lambda), \dots, \widetilde{q_n}(\lambda)\}$$

kümesi her $\lambda \in P$ için $Q$'da quasilineer bağımsızdır.

**İspat**. $M = \{\widetilde{q_1}, \widetilde{q_2}, \dots, \widetilde{q_n}\}$ kümesi $\tilde{Q}$ esnek quasilineer uzayında esnek quasilineer bağımsız olsun. Yani her esnek $\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, \dots, \widetilde{\alpha_n}$ skalerleri için

$$\tilde{\theta} \lesseqqgtr \widetilde{\alpha_1}\widetilde{q_1} + \widetilde{\alpha_2}\widetilde{q_2} + \dots + \widetilde{\alpha_n}\widetilde{q_n} \text{ ancak ve ancak } \widetilde{\alpha_1} = \widetilde{\alpha_2} = \dots = \widetilde{\alpha_n} = \tilde{0}$$

olur. Keyfi bir $\lambda_0 \in P$ için

$$M(\lambda_0) = \{\widetilde{q_1}(\lambda_0), \widetilde{q_2}(\lambda_0), \dots, \widetilde{q_n}(\lambda_0)\}$$

'dır. Ayrıca $\widetilde{\alpha_1}(\lambda_0) = \alpha_1, \widetilde{\alpha_2}(\lambda_0) = \alpha_2, \dots, \widetilde{\alpha_n}(\lambda_0) = \alpha_n$ olarak alırsak $\tilde{0}(\lambda_0) = 0$ için $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ buluruz. Böylece

$$\theta = \tilde{\theta}(\lambda_0) \lesseqqgtr \widetilde{\alpha_1}(\lambda_0)\widetilde{q_1}(\lambda_0) + \widetilde{\alpha_2}(\lambda_0)\widetilde{q_2}(\lambda_0) + \dots + \widetilde{\alpha_n}(\lambda_0)\widetilde{q_n}(\lambda_0)$$

$$= \alpha_1\widetilde{q_1}(\lambda_0) + \alpha_2\widetilde{q_2}(\lambda_0) + \dots + \alpha_n\widetilde{q_n}(\lambda_0)$$

'yı buluruz. Buradan, keyfi bir $\lambda_0 \in P$ için

$$M(\lambda_0) = \{\widetilde{q_1}(\lambda_0), \widetilde{q_2}(\lambda_0), \dots, \widetilde{q_n}(\lambda_0)\}$$

'nin quasilineer bağımsız olduğunu söyleyebiliriz. Bu da

$$M(\lambda) = \{\widetilde{q_1}(\lambda), \widetilde{q_2}(\lambda), \dots, \widetilde{q_n}(\lambda)\}$$

'nın $\lambda \in P$ için $Q$'da quasilineer bağımsız olduğunu gösterir.

Diğer taraftan, her $\lambda \in P$ için

$$M(\lambda) = \{\widetilde{q_1}(\lambda), \widetilde{q_2}(\lambda), \dots, \widetilde{q_n}(\lambda)\}$$

$Q$'da quasilineer bağımsız olsun. Yani, her $\widetilde{\alpha_1}(\lambda), \widetilde{\alpha_2}(\lambda), \dots, \widetilde{\alpha_n}(\lambda)$ skalerleri için

$$\tilde{\theta}(\lambda) \lesseqqgtr \alpha_1\widetilde{q_1}(\lambda) + \alpha_2\widetilde{q_2}(\lambda) + \cdots + \alpha_n\widetilde{q_n}(\lambda) \text{ ancak ve ancak}$$

$$\widetilde{\alpha}_1(\lambda) = \widetilde{\alpha_2}(\lambda) = \widetilde{\alpha_n}(\lambda) = 0$$

olur. Buradan her $\lambda \in P$ için

$$\widetilde{\alpha_1}(\lambda) = \widetilde{\alpha_2}(\lambda) = \dots = \widetilde{\alpha_n}(\lambda) = \tilde{\theta}(\lambda)$$

olduğu görülür. Bu da bize $M = \{\widetilde{q_1}, \widetilde{q_2}, \dots, \widetilde{q_n}\}$ kümesinin $\tilde{Q}$'da esnek quasilineer bağımsız olduğunu gösterir.

**Teorem 5.2.4.** $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay ve $\tilde{Q}$'daki esnek quasilineer vektörlerin kümesi $M = \{\widetilde{q_1}, \widetilde{q_2}, \dots, \widetilde{q_n}\}$ olsun. $M$ kümesi $\tilde{Q}$'da esnek quasilineer bağımlıdır ancak ve ancak her $\lambda \in P$ için

$$M(\lambda) = \{\widetilde{q_1}(\lambda), \widetilde{q_2}(\lambda), \dots, \widetilde{q_n}(\lambda)\}$$

kümesi $Q$'da quasilineer bağımlıdır.

**İspat.** Kabul edelim ki $M = \{\widetilde{q_1}, \widetilde{q_2}, \dots, \widetilde{q_n}\}$ kümesi $\tilde{Q}$'da esnek quasilineer bağımlı olsun. Yani hepsi birden $\tilde{\theta}$'ya eşit olmayabilen her esnek $\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, \dots, \widetilde{\alpha_n}$ skalerleri için

$$\tilde{\theta} \lesseqqgtr \widetilde{\alpha_1}\widetilde{q_1} + \widetilde{\alpha_2}\widetilde{q_2} + \dots + \widetilde{\alpha_n}\widetilde{q_n}$$

'dir. Eğer keyfi bir $\lambda_0 \in P$ alırsak

$$M(\lambda_0) = \{\widetilde{q_1}(\lambda_0), \widetilde{q_2}(\lambda_0), \dots, \widetilde{q_n}(\lambda_0)\}$$

olur. Ayrıca ,

$$\widetilde{\alpha_1}(\lambda_0) = \alpha_1, \widetilde{\alpha_2}(\lambda_0) = \alpha_2, \dots, \widetilde{\alpha_n}(\lambda_0) = \alpha_n$$

alırsak $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ skalerleri de 0'a eşit olmaz. Böylece

$$\theta = \tilde{\theta}(\lambda_0) \lesseqqgtr \widetilde{\alpha_1}(\lambda_0)\widetilde{q_1}(\lambda_0) + \widetilde{\alpha_2}(\lambda_0)\widetilde{q_2}(\lambda_0) + \dots + \widetilde{\alpha_n}(\lambda_0)\widetilde{q_n}(\lambda_0)$$

$$= \alpha_1\widetilde{q_1}(\lambda_0) + \alpha_2\widetilde{q_2}(\lambda_0) + \dots + \alpha_n\widetilde{q_n}(\lambda_0)$$

eşitsizliğide 0'dan farklı $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ için sağlanmış olur. Buradan keyfi bir her $\lambda_0 \in P$ için

$$M(\lambda_0) = \{\widetilde{q_1}(\lambda_0), \widetilde{q_2}(\lambda_0), \dots, \widetilde{q_n}(\lambda_0)\}$$

'nın $Q$'da quasilineer bağımlı olduğunu söyleriz. Buda bize her $\lambda \in P$ için

$$M(\lambda) = \{\widetilde{q_1}(\lambda), \widetilde{q_2}(\lambda), \dots, \widetilde{q_n}(\lambda)\}$$

kümesinin $Q$'da quasilineer bağımlı olduğunu gösterir.

Diğer taraftan, her $\lambda \in P$ için

$$M(\lambda) = \{\widetilde{q_1}(\lambda), \widetilde{q_2}(\lambda), \dots, \widetilde{q_n}(\lambda)\}$$

$Q$'da quasilineer bağımlı olsun. Yani hepsi birden 0'a eşit olmayabilen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ skalerleri vardır öyle ki

$$\tilde{\theta}(\lambda) \lesseqqgtr \alpha_1\widetilde{q_1}(\lambda) + \alpha_2\widetilde{q_2}(\lambda) + \dots + \alpha_n\widetilde{q_n}(\lambda)$$

olur. Her $\lambda \in P$ için

$$\widetilde{\alpha_1}(\lambda) = \alpha_1, \widetilde{\alpha_2}(\lambda) = \alpha_2, \dots, \widetilde{\alpha_n}(\lambda) = \alpha_n$$

alırsak $\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, \ldots, \widetilde{\alpha_n}$ esnek quasi vektörlerin hepsinin birden $\tilde{\theta}$'ya eşit olmayabileceğini gösterir. Buradan

$$\tilde{\theta} \lneqq \widetilde{\alpha_1}\widetilde{q_1} + \widetilde{\alpha_2}\widetilde{q_2} + \ldots + \widetilde{\alpha_n}\widetilde{q_n}$$

eşitsizliği $\tilde{0}$'dan farklı bazı $\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, \ldots, \widetilde{\alpha_n}$ için sağlanır. Yani, $M = \{\widetilde{q_1}, \widetilde{q_2}, \ldots, \widetilde{q_n}\}$ kümesi $\tilde{Q}$'da esnek quasilineer bağımlı olur.

**Tanım 5.2.4.** $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay ve $\widetilde{W} \subseteq \tilde{Q}$ olsun. Eğer $\widetilde{W}$ esnek quasilineer bağımsız ve $QSp\widetilde{W} = \tilde{Q}$ ise, $\widetilde{W}$'ya $\tilde{Q}$'nın "esnek quasilineer bazıdır" denir.

**Örnek 5.2.5.** $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ esnek quasilineer uzayının $\widetilde{W} = \{\{\tilde{q}\}\}$esnek quasi alt vektörünü alalım $\widetilde{W}$'nın $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$'nın esnek quasilineer bazı olması için gerekli ve yeter koşul her $\lambda \in P$ için $\tilde{q}(\lambda) \in \widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}_r$'nin olmasıdır.

**Sonuç 5.2.3.** $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ esnek quasilineer uzayının, $\tilde{q}(\lambda) \neq 0$ ve $\tilde{q}(\lambda) \in \widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}_r$ olacak şekildeki tüm $\{\tilde{q}\}$ esnek quasilineer vektörleri birer bazdır.

**Örnek 5.2.6.** $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$'nın

$$F = \{\tilde{q} : \tilde{q}(\lambda) = [a, b], a < b, a, b \in \mathbb{R}^{+} \text{ve } \ a, b \in \mathbb{R}^{-}\} U \left\{\{\tilde{0}\}\right\}$$

singüler alt uzayının bir alt kümesini düşünelim. $F$ esnek quasilineer bağımsız bir kümedir. Fakat $QSpF \neq \tilde{Q}$'dan dolayı $F$ $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$'nın esnek quasilineer bazı olamaz.

Şimdi de quasilineer uzayların bir genelleştirmesi olan esnek quasilineer uzayların boyutuyla ilgili bazı tanım, teorem ve örnekler verilecektir. Bir esnek quasilineer uzayın boyutunun tıpkı quasilineer uzaylarda olduğu gibi regüler ve singüler boyut şeklinde tanımlandığını da yine burada göreceğiz.

**Tanım 5.2.5.** Bir $\tilde{Q}$ esnek quasilineer uzayının regüler alt uzayının barındırabileceği maksimum lineer bağımsız eleman sayısına $\tilde{Q}$'nın "regüler boyutu"denir. $\tilde{Q}$'nın singüler alt uzayının barındırabileceği maksimum quasilineer bağımsız eleman sayısına ise $\tilde{Q}$'nın "singüler boyutu" denir. $\tilde{Q}$'nın regüler boyutu $r - boy\tilde{Q}$, $\tilde{Q}$'nın singüler boyutu $s - boy\tilde{Q}$ ile gösterilir. Eğer $r - boy\tilde{Q} = s - boy\tilde{Q}$ ise $\tilde{Q}$ esnek quasilineer uzayının boyutu $boy\tilde{Q}$ ile gösterilir.

**Uyarı 5.2.1.** Eğer $\tilde{Q}$ esnek lineer uzay ile singüler boyut 0 olacağından bu uzayın boyutu sadece regüler boyuttan ibarettir. Dolayısıyla esnek lineer uzaylarda regüler boyut yerine sadece boyut kavramı kullanılmıştır. Yani eğer $s - boy\tilde{Q} = 0$ ise bu uzay esnek lineer uzaydır. Quasilineer uzaylarda olduğu gibi eğer $s - boy\tilde{Q} > 0$ ise $\tilde{Q}$ esnek lineer olmayan bir esnek quasilineer uzaydır.

**Uyarı 5.2.2.** Eğer bir esnek quasilineer uzayda $s - boy\tilde{Q} = 0$ ise bu uzay esnek lineer uzay olmak zorunda değildir. Şimdi buna bir örnek verelim.

**Örnek 5.2.7.** $\tilde{Q} = \left(\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}\right)_d$ olsun.

$$\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}_d = \{\tilde{q}: \tilde{q}(\lambda) = [-a, a], a \in \mathbb{R}\}$$

olduğundan $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \ldots, \tilde{q}_n \in \widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}_d$ için

$$\tilde{0} \lneqq \tilde{\alpha}_1\tilde{q}_1 + \tilde{\alpha}_2\tilde{q}_2 + \ldots + \tilde{\alpha}_n\tilde{q}_n$$

eşitsizliği sadece $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \ldots \tilde{\alpha}_n = \tilde{0}$ için sağlamaz. Dolayısıyla $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}_d$ 'nin esnek quasilineer bağımsız vektörü yoktur. Yani $s - boy\left(\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}\right)_d = 0$'dır.

**Tanım 5.2.6.** Eğer $\tilde{Q}$ esnek quasilineer uzayının esnek quasilineer bağımsız vektörlerinin kümesi sonlu ise $\tilde{Q}$'ya sonlu boyutludur denir.

**Örnek 5.2.8.** $\widetilde{\mathbb{R}^n}$, $\left(\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R}^n)}\right)$, $\left(\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}\right)_s \cup \widetilde{[\{0\}]}$ ve $\left(\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}\right)_r$ esnek quasilineer uzaylarının boyutu aşağıdaki gibidir.

$$r - boy\widetilde{\mathbb{R}^n} = n, \qquad s - boy\widetilde{\mathbb{R}^n} = 0$$

$$r - boy\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R}^n)} = n, \qquad s - boy\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R}^n)} = n$$

$$r - boy\left(\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R}^n)}_s \cup \{\tilde{0}\}\right) = 0, \qquad s - boy\left(\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R}^n)}_s \cup \{\tilde{0}\}\right) = n$$

$$r - boy\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R}^n)}_r = n, \qquad s - boy\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R}^n)}_r = 0$$

**Örnek 5.2.9.** $\left(\widetilde{\Omega_C(co)}\right)$, $\left(\widetilde{\Omega_C(l_2)}\right)$ ve $\left(\widetilde{\Omega_C(l_\infty)}\right)$ esnek quasilineer uzaylarının boyutu aşağıdaki gibidir.

$$r - boy\widetilde{\Omega_C(c_0)} = \infty \qquad s - boy\widetilde{\Omega_C(c_0)} = \infty$$

$r - boy\widetilde{\Omega_C(l_2)} = \infty$ $s -$
$boy\widetilde{\Omega_C(l_2)} = \infty$

$r - boy\widetilde{\Omega_C(l_\infty)} = \infty$ $s -$
$boy\widetilde{\Omega_C(l_\infty)} = \infty$

**Örnek 5.2.10.** $\tilde{Q} = \left(\widetilde{\Omega_C(co)}\right)_s \cup \left\{\{0,0,\ldots,0,k,0,0,\ldots,\ldots\}k \in \mathbb{R}\right\}$ esnek quasilineer uzayı için

$$r - boy\tilde{Q} = 1 \text{ ve } s - boy\tilde{Q} = \infty$$

olur.

**Örnek 5.2.11.** $\widetilde{I\mathbb{R}^2}$ esnek quasilineer uzayının

$$M = \left(\widetilde{I\mathbb{R}^2}\right)_s \cup \{\tilde{t}: \tilde{t}(\lambda) = (t,0): t \in \mathbb{R}, \lambda \in P\}$$

esnek quasilineer alt uzayını alalım. Bir $\lambda \in P$ için $\widetilde{q_1}(\lambda) = \left((0),[1,2]\right)$ ve $\widetilde{q_2}(\lambda) = ([1,2],\{0\})$ olacak şekilde $M$'nin iki esnek quasi vektörünü alalım. Buradan

$$(0,0) = \tilde{0}(\lambda) \lesseqqgtr \tilde{\alpha}_1(\lambda)\tilde{q}_1(\lambda) + \tilde{\alpha}_2(\lambda)\tilde{q}_2(\lambda)$$

$$= \alpha_1 \cdot \left((0),[1,2]\right) + \alpha_2 \cdot (1,2],\{0\})$$

eşitsizliği ancak ve ancak $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \tilde{0}$ için sağlandığı görülür. Bu nedenle $\{\widetilde{q_1}, \widetilde{q_2}\}$ kümesi $\widetilde{I\mathbb{R}^2}$'da esnek quasilineer bağımsızdır. Ayrıca $M$ kümesi $\widetilde{I\mathbb{R}^2}$'nın esnek quasilineer alt uzayı olduğundan $s - boyM = 2$ 'dir.

Bundan başka

$$M_r = \{\tilde{t}: \tilde{t}(\lambda) = (t,0): t \in \mathbb{R}, \lambda \in P\}$$

kümesini göz önüne alalım. Bu durumda $\tilde{q} \in M_r$ için

$$(0,0) = \tilde{0}(\lambda) \lesseqqgtr \tilde{\alpha}(\lambda)\tilde{q}(\lambda)$$

$$= \alpha \cdot (t,0)$$

eşitsizliği ancak ve ancak $\tilde{\alpha} = \tilde{0}$ sağlanır. Böylece $r - boyM = 1$ olur.

**Örnek 5.2.12.** Kabul edelim ki $M = \left(\widetilde{Ic_0}\right)_s \cup \{\emptyset\}$ olsun. $M$'nin bir $\lambda \in P$ için

$$\widetilde{q_1}(\lambda) = \{([1,2], 0,0, \dots)\},\ \widetilde{q_2}(\lambda) = \{(0, [1,2], 0, \dots)\}, \dots,\ \widetilde{q_n}(\lambda) = \{(0,0, \dots [1,2], 0, \dots)\}$$

olacak şekilde $\{\widetilde{q_1}, \widetilde{q_2}, \dots, , \widetilde{q_n}\}$ keyfi sonlu singüler alt kümesini alalım. Bu durumda

$$(0,0, \dots ,0, \dots) = \tilde{0}(\lambda)$$
$$\tilde{\leq} \tilde{\alpha}_1(\lambda)\tilde{q}_1(\lambda) + \tilde{\alpha}_2(\lambda)\tilde{q}_2(\lambda) + \dots + \tilde{\alpha}_n(\lambda)\tilde{q}_n(\lambda)$$

eşitsizliği ancak $\tilde{\alpha}_1(\lambda) = \tilde{\alpha}_2(\lambda) = \dots = \tilde{\alpha}_n(\lambda) = 0$ olduğunda sağlanır. Bu nedenle $\{\widetilde{q_1}, \widetilde{q_2}, \dots, \widetilde{q_n}\}$ kümesi $M$ 'de esnek quasilineer bağımsızdır. Yani $s - boyM = \infty$ olur. Ayrıca, $M_r = \{\emptyset\}$ olduğundan $r - boyM = 0$'dır.

**5.3. Esnek Proper Quasilineer Uzaylar**

Bu bölümde proper quasilineer uzayların bir genelleştirmesi olan esnek proper quasilineer uzaylar incelenmiştir. **(**Çakan, 2016)'da verilen bazı sonuçların esnek proper quasilineer uzaylardaki karşılıkları incelenmiştir.

**Tanım 5.3.1.** $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay $\widetilde{W} \tilde{\subseteq} \tilde{Q}$ ve $\tilde{q}, \widetilde{w} \in \widetilde{W}$ olsun. Eğer

$i)$ $\forall \tilde{q} \in \widetilde{W}$ için $F_{\tilde{q}}^{\widetilde{W}} \neq \varnothing$,

$ii)$ $\tilde{q} \neq \widetilde{w}$ iken $F_{\tilde{q}}^{\widetilde{W}} \neq F_{\widetilde{w}}^{\widetilde{W}}$

şartları sağlanıyor ise $\widetilde{W}$ kümesine $\tilde{Q}$ esnek quasilineer uzayında proper'dır denir.

Eğer $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay ve proper ise $\tilde{Q}$'ya esnek proper quasilineer uzay denir.

**Uyarı 5.3.1.** Bir $\widetilde{W} \tilde{\subseteq} \tilde{Q}$ kümesinin Tanım 5.3.1.'deki şartları sağlaması durumunda aşağıdaki üç durumdan yalnızca birinin sağlanmış olması gerekir.

1) $\widetilde{w} \tilde{\leq} \tilde{q}$ ise (Gönci & Bozkurt, 2023)'den $F_{\widetilde{w}}^{\widetilde{W}} \tilde{\subseteq} F_{\tilde{q}}^{\widetilde{W}}$ olur. $\widetilde{w}$ ve $\tilde{q}$ 'nın zeminlerinin farklı olabilmesi için en az bir $\tilde{z} \in F_{\tilde{q}}^{\widetilde{W}} \backslash F_{\widetilde{w}}^{\widetilde{W}}$ regüler elemanının olması gerekir. Bu da bize $\tilde{z} \tilde{\leq} \tilde{q}$ ve $\tilde{z} \tilde{\nleq} \widetilde{w}$ olduğunu söyler. Ayrıca $\tilde{z} \in \widetilde{W}_r$'dir.

2) $\tilde{q} \tilde{\leq} \widetilde{w}$ ise (Gönci & Bozkurt, 2023)'den $F_{\tilde{q}}^{\widetilde{W}} \tilde{\subseteq} F_{\widetilde{w}}^{\widetilde{W}}$ olur. $\tilde{q}$ ve $\widetilde{w}$ 'nın zeminlerinin farklı olabilmesi için en az bir $\widetilde{m} \in F_{\widetilde{w}}^{\widetilde{W}} \backslash F_{\tilde{q}}^{\widetilde{W}}$ regüler elemanının olması gerekir.

Bu da bize $\widetilde{m} \lessapprox \widetilde{w}$ ve $\widetilde{m} \not\gtrapprox \tilde{q}$ olduğunu gösterir. Yine burada $\widetilde{m} \in \widetilde{W}_r$'dir.

3) $\tilde{q}$ ve $\widetilde{w}$ elemanları birbirleriyle kıyaslanamıyorsa zeminlerinin farklı olabilmesi için $F_{\tilde{q}}^{\widetilde{W}} \not\subseteq F_{\widetilde{w}}^{\widetilde{W}}$ veya $F_{\widetilde{w}}^{\widetilde{W}} \not\subseteq F_{\tilde{q}}^{\widetilde{W}}$ olması gerekir. Bu da bize $\tilde{z} \lessapprox \tilde{q}$ ve $\tilde{z} \not\lessapprox \widetilde{w}$ veya $\widetilde{m} \lessapprox \widetilde{w}$ ve $\widetilde{m} \not\lessapprox \tilde{q}$ olacak şekilde en az bir $\tilde{z}, \widetilde{m} \in \widetilde{W}_r$ olması gerektiğini söyler.

**Örnek 5.3.1.** Her esnek lineer uzay "=" bağıntısı ile bir esnek proper quasilineer uzaydır.

**Örnek 5.3.2.** $M$ normlu lineer uzay olmak üzere $\widetilde{\Omega(M)}$ ve $\widetilde{\Omega_C(M)}$ esnek quasilineer uzayları properdır. Her $\tilde{A} \in \widetilde{\Omega_C(M)}$ için $F_{\tilde{A}} \neq \varnothing$'dır. Her $\tilde{A}, \tilde{B} \in \widetilde{\Omega_C(M)}$ için $\tilde{A} \neq \tilde{B}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki üç durumdan biri vardır:

$a$) $\tilde{B} \subseteq \tilde{A}$ ise $\lambda$ parametresi için en az bir $a \in \tilde{A}(\lambda)$ vardır öyle ki $a \notin \tilde{B}(\lambda)$ olur. $\tilde{A}(\lambda) \in \Omega_C(M)$ olduğundan $\{a\} \in \left(\Omega_C(M)\right)_r$'dır. Dolayısıyla $\{a\} \subseteq \tilde{A}(\lambda)$ ve $\{a\} \not\subseteq \tilde{B}(\lambda)$ olur. Bu da bize $F_{\tilde{A}} \neq F_{\tilde{B}}$ olduğunu gösterir.

$b$) $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ ise $\lambda$ parametresi için en az $b \in \tilde{B}(\lambda)$ vardır öyle ki $b \notin \tilde{A}(\lambda)$ olur. $\tilde{B}(\lambda) \in \Omega_C(M)$ olduğundan $\{b\} \in \left(\Omega_C(M)\right)_r$'dır. Dolayısıyla $\{b\} \subseteq \tilde{B}(\lambda)$ ve $\{b\} \not\subseteq \tilde{A}(\lambda)$ olur. Bu da bize $F_{\tilde{A}} \neq F_{\tilde{B}}$ olduğunu gösterir.

$c$) $\tilde{A}$ ile $\tilde{B}$ karşılaştırılamaz ise $\lambda$ parametresi için $a \in \tilde{A}(\lambda)$, $a \notin \tilde{B}(\lambda)$ ve $b \in \tilde{B}(\lambda)$, $b \notin \tilde{A}(\lambda)$ olacak şekilde $a, b \in \left(\Omega_C(M)\right)_r$ vardır. $a \in \tilde{A}(\lambda)$ ve $a \notin \tilde{B}(\lambda)$ için $\{a\} \subseteq \tilde{A}(\lambda)$ ve $\{a\} \not\subseteq \tilde{B}(\lambda)$'dır. Ayrıca $b \in \tilde{B}(\lambda)$ ve $b \notin \tilde{B}(\lambda)$ için $\{b\} \subseteq \tilde{B}(\lambda)$ ve $b \not\subseteq \tilde{B}(\lambda)$ olur.

**Örnek 5.3.3**. $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$'nin esnek singüler quasilineer alt uzayı proper olmayan bir esnek quasilineer uzaydır. Bu uzayda birbirinden farklı iki tane esnek quasi vektör alalım. Bir $\lambda$ parametresi için $\tilde{q} \neq \widetilde{w}$ olmak üzere

$$\tilde{q}(\lambda) = [a, b] \in \widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}_s$$

ve

$$\widetilde{w}(\lambda) = [c, d] \in \left(\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}\right)_s$$

olsun. Eğer $a, b > 0,\ c, d > 0$ veya $a, b < 0,\ c, d < 0$ ise

$$F_{\tilde{q}}^{(\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})})_s} = F_{\widetilde{w}}^{(\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})})_s} = \emptyset$$

olur.

Dolayısıyla $\left(\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}\right)_s \cup [\tilde{0}]$ proper esnek quasilineer uzay olamaz. $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$'nin esnek simetrik quasilineer alt uzayının proper olmayan bir esnek quasilineer uzay olduğu da aynı yöntem ile gösterilebilir.

**Uyarı 5.3.2**. Proper bir esnek quasilineer uzayın proper olmayan bir esnek quasilineer alt uzayı mevcut olabileceği gibi, proper olmayan bir esnek quasilineer uzayın da proper bir quasilineer alt uzayı olabilir.

**Örnek 5.3.4.** $\tilde{Q} = I\widetilde{\mathbb{R}^2}$ olsun.

$$\widetilde{W} = \tilde{Q}_s \cup \{\tilde{q} : \tilde{q}(\lambda) = (q, 0) : q \in \mathbb{R}, \lambda \in P\}$$

olmak üzere $\widetilde{W}, \tilde{Q}$'nın bir quasilineer alt uzayıdır. Ayrıca $\widetilde{W}_s = \tilde{Q}_s$ ve

$$\widetilde{W}_r = \{\tilde{q} : \tilde{q}(\lambda) = (q, 0) : q \in \mathbb{R}, \lambda \in P\}$$

olur. $\widetilde{W}$'nın birbirinden farklı olacak şekilde

$$\widetilde{w}_1 = \{\tilde{q} : \tilde{q}(\lambda) = (0, m) : 2 \leq m \leq 3, m \in \mathbb{R}\}$$

ve

$$\widetilde{w}_2 = \{\tilde{q} : \tilde{q}(\lambda) = (0, m) : 4 \leq m \leq 5, m \in \mathbb{R}\}$$

seçelim. Bu durumda $F_{\widetilde{w}_1}^{\widetilde{W}} = \emptyset = F_{\widetilde{w}_2}^{\widetilde{W}}$ olur. Bu nedenle $\widetilde{W}$ proper olamaz. $\widetilde{W}$ esnek proper olmayan quasilineer uzayın

$$\widetilde{W}_r = \{\tilde{q} : \tilde{q}(\lambda) = (q, 0) : q \in \mathbb{R}, \lambda \in P\}$$

alt uzayı bir proper esnek quasilineer uzaydır.

**Teorem 5.3.1.** $\tilde{Q}$ esnek proper quasilineer uzayının regüler ve singüler boyutları birbirine eşittir.

**İspat.** $\tilde{Q}$ bir esnek proper quasilineer uzay, $r - boy\tilde{Q} = n$ ve $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n, \tilde{q}_{n+1}$ $\tilde{Q}_s$'nin quasilineer bağımsız vektörleri olsun. $\tilde{Q}_s \subset \tilde{Q}$ olduğundan $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n, \tilde{q}_{n+1} \in \tilde{Q}$ ve $\tilde{Q}$'da esnek proper olduğundan

$$\tilde{a}_1 \lesseqgtr \tilde{q}_1, \tilde{a}_2 \lesseqgtr \tilde{q}_2, \dots, \tilde{a}_n \lesseqgtr \tilde{q}_n, \tilde{a}_{n+1} \lesseqgtr \tilde{q}_{n+1} \quad (5.3.1)$$

olacak şekilde $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n, \tilde{a}_{n+1} \in \tilde{Q}_r$ elemanları vardır. $\tilde{Q}_r$'de $n-$boyutlu esnek lineer uzay olduğundan $n+1$ tane eleman $\tilde{Q}_r$'de lineer bağımlı olacaktır. Yani

$$\tilde{a}_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k . \tilde{a}_k$$

olacak şekilde $\lambda_k (1 \leq k \leq n)$ skalerleri bulunabilir. Ayrıca esnek quasilineer uzay aksiyonlarından (3.1.12) ve (3.1.13) kullanılarak **(**5.3.1)'den

$$\tilde{a}_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k . \tilde{a}_k \lesseqgtr \sum_{k=1}^{n} \lambda_k . \tilde{q}_k$$

yazılır. $\tilde{a}_{n+1} \in \tilde{Q}_r$ olduğundan

$$\widetilde{\theta} \lesseqgtr \sum_{k=1}^{n} \lambda_k . \tilde{q}_k - \tilde{a}_{n+1}$$

(5.3.2)

elde edilir. Esnek quasilineer uzay aksiyonlarından (3.1.1), (3.1.2) ve (3.1.13) göz önüne alınırsa

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k . \tilde{q}_k \lesseqgtr \sum_{k=1}^{n} \lambda_k . \tilde{q}_k \quad ve - \tilde{a}_{n+1} \lesseqgtr - \tilde{q}_{n+1}$$

olur. Buradan

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \tilde{q}_k - \tilde{a}_{n+1} \lesseqgtr \sum_{k=1}^{n} \lambda_k . \tilde{q}_k - \tilde{q}_{n+1}$$

(5.3.3)

yazılır. (5.3.2) ve (5.3.3) bağıntıları birlikte düşünüldüğünde

$$\widetilde{\theta} \lesseqgtr \sum_{k=1}^{n} \lambda_k . \tilde{q}_k - \tilde{q}_{n+1}$$

elde edilir. $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n, \tilde{q}_{n+1}$ $\widetilde{Q}_s$'nin quasilineer bağımsız elemanları seçildiğinden $1 \leq k \leq n+1$ olmak üzere $\forall k$ indisi için $\lambda_k = 0$ olması gerekirdi. Fakat yukarıdaki bağıntısının $\lambda_{n+1} = -1$ olması durumunda da sağlandığı görülmektedir ve $\{\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n, \tilde{q}_{n+1}\}$ kümesinin quasilineer bağımlı olduğu görülür. Bu da bize $s-boy\tilde{Q} < n+1$ yani

$$s - boy\tilde{Q} \lesseqgtr r - boy\tilde{Q}$$

olduğunu gösterir. Diğer taraftan (Çakan, 2016) gereğince, lineer olmayan herhangi bir $\tilde{Q}$ esnek quasilineer uzayı için

$$r - boy\tilde{Q} \lneqq s - boy\tilde{Q}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan da $\tilde{Q}$ esnek proper bir quasilineer uzay olduğundan

$$s - boy\tilde{Q} = r - boy\tilde{Q}$$

elde edilir.

**Uyarı 5.3.3.** Yukarıdaki teoremin tersi her zaman doğru olmayabilir. Yani bir esnek quasilineer uzayın regüler ve singüler boyutlarının birbirine eşit olması, o uzayın proper olmasını gerektirmez.

**Örnek 5.3.5.**

$$\left(\widetilde{I\mathbb{R}^2}\right)_d = \{\tilde{q}: \tilde{q}(\lambda) = ([-a,a],[-b,b]): a,b \in \mathbb{R}, \lambda \in P\}$$

kümesini göz önüne alalım. Buradan

$$r - boy\left(\widetilde{I\mathbb{R}^2}\right)_d = s - boy\left(\widetilde{I\mathbb{R}^2}\right) = 0$$

olur. Ancak $\left(\widetilde{I\mathbb{R}^2}\right)_d$ proper değildir. $\left(\widetilde{I\mathbb{R}^2}\right)_d$'nin birbirinden farklı iki vektörünü alalım. $\tilde{q}(\lambda) = ([-1,1],[-1,1])$ , $\widetilde{w}(\lambda) = ([-2,2],[-2,2]) \in \left(\widetilde{I\mathbb{R}^2}\right)_d$ olsun. Ayrıca $\tilde{q} \neq \widetilde{w}$ 'dır. Fakat $F_{\tilde{q}} = F_{\widetilde{w}}^{\left(\widetilde{I\mathbb{R}^2}\right)_d} = \{0\}$ olur. Bu nedenle $\left(\widetilde{I\mathbb{R}^2}\right)_d$ proper esnek quasilineer uzay değildir.

**Uyarı 5.3.4.** Bir $\tilde{Q}$ proper esnek quasilineer uzayda regüler boyut ile singüler boyut birbirine eşit olacağından uzayın boyutu $boy\tilde{Q}$ şeklinde gösterilir.

**Önerme 5.3.1.** $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$'nın aşikar olmayan proper alt esnek quasilineer uzayı 1-boyutludur.

**İspat**. $\widetilde{W}$, $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ 'nın aşikar olmayan proper alt esnek quasilineer uzayı olsun. $boy\left(\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}\right) = 1$ ve $\widetilde{W} \subset \left(\widetilde{\Omega(\mathbb{R})}\right)$olduğundan $boy\widetilde{W} \leq 1$'dir. Bundan başka $\widetilde{W}$ proper esnek quasilineer uzay olduğundan $\forall \tilde{q}, \widetilde{w} \in \widetilde{W}$ için $\tilde{q} \neq \widetilde{w}$ olmak üzere aşağıdaki üç durumdan biri vardır:

1) $\tilde{q} \lneqq \widetilde{w}$ ise $\tilde{z} \lneqq \widetilde{w}$ ve $\tilde{z} \nleqq \tilde{q}$ olacak şekilde en az bir $\tilde{z} \in \widetilde{W}_r$ vardır.

2) $\widetilde{w} \lneqq \tilde{q}$ ise $\widetilde{m} \lneqq \tilde{q}$ ve $\widetilde{m} \nleqq \widetilde{w}$ olacak şekilde en az bir $\widetilde{m} \in \widetilde{W}_r$ vardır.

3) $\tilde{q}$ ve $\tilde{w}$ karşılaştırılamayan esnek vektörler ise $\tilde{z} \lesseqqgtr \tilde{w}$ ve $\tilde{z} \nleqq \tilde{q}$ olacak şekilde en az bir $\tilde{z} \in \widetilde{W}_r$ vardır veya $\tilde{m} \lesseqqgtr \tilde{q}$ ve $\tilde{m} \nleqq \tilde{w}$ olacak şekilde en az bir $\tilde{m} \in \widetilde{W}_r$ vardır.

Böylece $\widetilde{W}_r$, $\tilde{m}$ veya $\tilde{z}$ esnek regüler vektörlerinden en az birini içerir. Kabul edelim ki $\tilde{m} \in \widetilde{W}_r$ olsun. Buradan $\tilde{\lambda}\tilde{m}$ elemanı regüler olacağından $\tilde{\theta} \subseteq \tilde{\lambda}\tilde{m}$ kapsaması sadece $\tilde{\lambda} = 0$ olduğunda sağlanır.

Eğer $\widetilde{W}_r$ hem $\tilde{m}$ hem $\tilde{z}$ esnek regüler vektörlerini veya bunlardan başka vektörleri içeriyorsa kabul gereği $\widetilde{W}_r$'nin ikiden fazla sayıdaki esnek vektörü quasilineer bağımlı olacağından $\widetilde{W}_r$'nin barındırdığı maksimum quasilineer bağımsız eleman sayısı 1 olur. Dolayısıyla $\widetilde{W}$ proper olduğundan ve $\widetilde{W}$'nın boyutu $\widetilde{W}_r$'nın barındırdığı maksimum quasilineer bağımsız eleman sayısına eşit olacağından

$$boy\widetilde{W} = s - boy\widetilde{W} = r - boy\widetilde{W} = boy\widetilde{W}_r = 1$$

olur.

**Uyarı 5.3.5.** $\left(\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}\right)$'nın esnek proper olmayan alt uzaylarının regüler ve singüler boyutlarının 1 olması gerekmez. Örneğin; $\Omega_C\widetilde{(\mathbb{R})}_s \cup \{\widetilde{[0]}\}$ singüler alt uzayı için boyut

$$r - boy\left(\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}\right)_s \cup \{\widetilde{[0]}\} = 0$$

ve

$$s - boy\left(\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}\right)_s \cup \{\widetilde{[0]}\} = 1, \left(\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}\right)_d$$

simetrik alt uzayının boyutu da $r - boy\left(\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}\right)_d = 0,\ s - boy\left(\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}\right)_d = 0$'dır.

**Önerme 5.3.2.** Sağlam zeminli bir esnek quasilineer uzay, esnek proper bir quasilineer uzaydır.

**İspat.** $\tilde{Q}$ sağlam zeminli bir esnek quasilineer uzay olsun. Bu durumda her $\tilde{w} \in \tilde{Q}$ için $\sup_{\widetilde{\leq}} F_{\tilde{w}} = \tilde{w}$'dır. $\sup_{\widetilde{\leq}} F_{\tilde{w}} = \tilde{w}$ değerinin mevcut olması $F_{\tilde{w}}$ kümesinin boş kümeden farklı olduğunu gösterdiğinden $\tilde{Q}$'daki her $\tilde{w}$ elemanından önce en az bir regüler eleman gelir. Aynı zamanda sağlam zeminli olan $\tilde{Q}$'nın $\tilde{w} \neq \tilde{z}$ olacak şekildeki herhangi iki elemanı için $\sup_{\widetilde{\leq}} F_{\tilde{w}} \neq \sup_{\widetilde{\leq}} F_{\tilde{z}}$ olacağından $F_{\tilde{w}} \neq F_{\tilde{z}}$ elde edilir. Eğer $F_{\tilde{w}} = F_{\tilde{z}}$ olsaydı bu durumda

$\sup_{\widetilde{\leq}} F_{\widetilde{w}} = \sup_{\widetilde{\leq}} F_{\tilde{z}}$ olurdu ki, $\tilde{Q}$ sağlam zeminli olduğundan, bu $\widetilde{w} = \tilde{z}$ anlamına gelirdi. Böylece sağlam zeminli esnek quasilineer uzay olan $\tilde{Q}$, aynı zamanda esnek proper bir quasilineer uzaydır.

### 5.4. Esnek Quasilineer Fonksiyoneller

Bu bölümde bir esnek normlu quasilineer uzayda esnek quasilineer fonksiyonel tanımlanmış ve bu yeni fonksiyonel ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. **(**Bozkurt, 2022)'de verilen esnek quasilineer operatör kavramından da faydalanılarak esnek quasilineer operatör ve fonksiyonellerin sürekliliği ve sınırlılığı ile ilgili bazı teoremler ispatlanmıştır. Ayrıca bazı esnek quasilineer fonksiyonel örnekleri sunulmuştur.

**Tanım 5.4.1.** $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay olsun. $P$ parametrelerin kümesi olmak üzere $f: SE(\tilde{Q}) \to \Omega_C(\mathbb{R})(P)$ bir esnek quasilineer operatör ise $f$'ye bir esnek quasilineer fonksiyoneldir denir.

**Örnek 5.4.1.** $\Omega_C(\mathbb{R})$'nin ürettiği $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$mutlak esnek quasi kümesini ele alalım. Yani her $\lambda \in P$ için $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}(\lambda) = \Omega_C(\mathbb{R})$ olsun. Bu durumda $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ bir mutlak esnek quasilineer uzaydır. Şimdi $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ esnek quasilineer uzayında bir $\tilde{q} \in \widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ ve $\forall\ \lambda \in P$ için

$$\|\tilde{q}\|(\lambda) = \|\tilde{q}(\lambda)\|_\lambda = \sup_{t \in \tilde{q}(\lambda)} \|t\|_{\mathbb{R}}$$

(5.4.1)

tanımlayalım. (5.4.1) normu ile $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ bir esnek normlu quasilineer uzaydır. $\forall \tilde{q} \in \widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ ve her $\tilde{\alpha}(\lambda) = \alpha$ olacak şekildeki esnek reel skalerleri için

$$[f(\tilde{q})](\lambda) = (\tilde{2} \cdot \tilde{q})(\lambda) = \tilde{2}(\lambda).\tilde{q}(\lambda) = 2.\tilde{q}(\lambda)$$

operatörünü tanımlayalım. Açıkça $[f(\tilde{q})] \quad (\lambda) \in \Omega_C(\mathbb{R})$'dir. $f: \widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})} \to \Omega_C(\mathbb{R})(P)$'ye tanımlı $f$ operatörünün bir esnek quasilineer fonksiyonel olduğunu gösterelim $\forall \tilde{q}, \widetilde{w} \in \widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ ve $\forall \lambda \in P$ parametresi için

$$i)\ [f(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2)](\lambda) = \left(\tilde{2} \cdot (\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2)\right)(\lambda)$$

$$= \tilde{2}(\lambda) \cdot (\tilde{q}_1(\lambda) + \tilde{q}_2(\lambda))$$

$$= \tilde{2}(\lambda) \cdot \tilde{q}_1(\lambda) + \tilde{2}(\lambda) \cdot \tilde{q}_2(\lambda)$$

$= (\tilde{2} \cdot \tilde{q}_1)(\lambda) + (\tilde{2} \cdot \tilde{q}_2)(\lambda)$

$= f(\tilde{q}_1)(\lambda) + f(\tilde{q}_2)(\lambda)$

$= (f(\tilde{q}_1) + f(\tilde{q}_2))(\lambda),$

$ii)$ $[f(\tilde{\alpha} \cdot \tilde{q})](\lambda) = (\tilde{2} \cdot \tilde{\alpha} \cdot \tilde{q})(\lambda)$

$= \tilde{2}(\lambda) \cdot \tilde{\alpha}(\lambda) \cdot \tilde{q}(\lambda)$

$= \tilde{\alpha}(\lambda) \cdot (\tilde{2} \cdot \tilde{q})(\lambda)$

$= [\tilde{\alpha} \cdot f(\tilde{q})](\lambda),$

$iii)$ $\tilde{q}_1 \leq \tilde{q}_2$

$\Rightarrow \tilde{q}_1(\lambda) \leq \tilde{q}_2(\lambda)$

$\Rightarrow (\tilde{2} \cdot \tilde{q}_1(\lambda)) \leq (\tilde{2} \cdot \tilde{q}_2(\lambda))$

$\Rightarrow (\tilde{2} \cdot \tilde{q}_1)(\lambda) \leq (\tilde{2} \cdot \tilde{q}_2)(\lambda)$

$\Rightarrow f(\tilde{q}_1)(\lambda) \leq f(\tilde{q}_2)(\lambda)$

sağlanır. Böylece $f$ operatörü $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$'da bir esnek quasilineer fonksiyoneldir.

**Örnek 5.4.2.** $I\mathbb{R}^2$'nin ürettiği $\widetilde{I\mathbb{R}^2}$ esnek kümesini göz önüne alalım. Yani $\forall\lambda \in P$ için $\widetilde{I\mathbb{R}^2}(\lambda) = I\mathbb{R}^2$'dir. Buradan $\widetilde{I\mathbb{R}^2}$ bir mutlak esnek quasilineer uzaydır deriz. Şimdi $\widetilde{I\mathbb{R}^2}$ esnek quasilineer uzayında bir $\tilde{q} \in \widetilde{I\mathbb{R}^2}$ için

$$\|\tilde{q}\|(\lambda) = \|\tilde{q}(\lambda)\|_\lambda = \|(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)(\lambda)\|_\lambda = \sup_{1 \leq i \leq 2} \|\tilde{q}_i(\lambda)\|_{I\mathbb{R}} \tag{5.4.2}$$

normunu tanımlayalım. Burada tanımlanan norm ile $\widetilde{I\mathbb{R}^2}$ bir esnek normlu quasilineer uzaydır.

$i)$ $\forall\tilde{q} \in \widetilde{I\mathbb{R}^2}$ için $\|\tilde{q}\| = 0 \Leftrightarrow \tilde{q} = \tilde{\theta}$'dır.

$$\|\tilde{q}\| = \tilde{0} \Rightarrow \|\tilde{q}(\lambda)\|_\lambda = \|(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)(\lambda)\|_\lambda = \sup_{1 \leq i \leq 2} \|\tilde{q}_i(\lambda)\|_{I\mathbb{R}} = 0$$

olur. Dolayısıyla $1 \leq i \leq 2$ için $\tilde{q}_i(\lambda) = 0$ olur. Buradan da $\tilde{q}(\lambda) = 0$ bulunur. Bu da bize $\tilde{q} = \tilde{\theta}$ olduğunu söyler. Kabul edelim ki $\tilde{q} = \tilde{\theta}$ olsun. Buradan $\forall\lambda \in P$ için $\tilde{q}(\lambda) = \tilde{\theta}(\lambda) = 0$ bulunur. Bu da bize $(\tilde{q}_1(\lambda), \tilde{q}_2(\lambda)) = 0$ olduğunu gösterir. Yani $\tilde{q}_1(\lambda) = 0$

ve $\tilde{q}_2(\lambda) = 0$'dır. (5.4.2)'den $\sup\|\tilde{q}_i(\lambda)\|_{I\mathbb{R}} = 0$ olur. Böylece $\|\tilde{q}\| = \tilde{0}$ elde edilir.

$ii)$ $\forall\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2),\ \tilde{w} = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) \in \widetilde{I\mathbb{R}^2}$ ve $\lambda \in P$ için

$$\|\tilde{q} + \tilde{w}\|(\lambda) = \|(\tilde{q} + \tilde{w})(\lambda)\|_\lambda = \|(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)(\lambda) + (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)(\lambda)\|_\lambda$$

$$= \|(\tilde{q}_1 + \tilde{w}_1)(\lambda), (\tilde{q}_2 + \tilde{w}_2)(\lambda)\|$$

$$= \sup_{1\leq i\leq 2} \|(\tilde{q}_i + \tilde{w}_i)(\lambda)\|_{I\mathbb{R}}$$

$$= \sup_{1\leq i\leq 2} (\|(\tilde{q}_i)(\lambda)\|_{I\mathbb{R}} + \|(\tilde{w}_i)(\lambda)\|_{I\mathbb{R}})$$

$$\leq \sup_{1\leq i\leq 2} \|(\tilde{q}_i)(\lambda)\|_{I\mathbb{R}} + \sup_{1\leq i\leq 2} \|(\tilde{w}_i)(\lambda)\|_{I\mathbb{R}}$$

$$= \|(\tilde{q})(\lambda)\| + \|(\tilde{w})(\lambda)\|,$$

$iii)$ $\|\tilde{\alpha} \cdot \tilde{q}\|(\lambda) = \|\tilde{\alpha}(\lambda) \cdot \tilde{q}(\lambda)\|_\lambda$

$$= |\tilde{\alpha}(\lambda)|\|(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)(\lambda)\|_\lambda$$

$$= |\tilde{\alpha}(\lambda)| \sup_{1\leq i\leq 2} \|(\tilde{q}_i)(\lambda)\|_\lambda$$

$$= |\tilde{\alpha}(\lambda)|\|\tilde{q}\|(\lambda),$$

$iv)$ $\tilde{q} \,\tilde{\leqq}\, \tilde{w} \Rightarrow \tilde{q}(\lambda) \,\tilde{\leqq}\, \tilde{w}(\lambda) \Rightarrow (\tilde{q}_1(\lambda), \tilde{q}_2(\lambda)) \,\tilde{\leqq}\, (\tilde{w}_1(\lambda), \tilde{w}_2(\lambda))$

olur. Buradan her $1 \leq i \leq 2$ için $\tilde{q}_i(\lambda) \,\tilde{\leqq}\, \tilde{w}_i(\lambda)$ elde edilir. $\tilde{q}_i(\lambda), \tilde{w}_i(\lambda) \in I\mathbb{R}$ olduğundan

$$\|\tilde{q}_i(\lambda)\|_{I\mathbb{R}} \,\tilde{\leqq}\, \|\tilde{w}_i(\lambda)\|_{I\mathbb{R}}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\sup\|\tilde{q}_i(\lambda)\|_{I\mathbb{R}} \,\tilde{\leqq}\, \sup\|\tilde{w}_i(\lambda)\|_{I\mathbb{R}}$$

elde edilir. Bu da bize

$$\|\tilde{q}\|(\lambda) \,\tilde{\leqq}\, \|\tilde{w}\|(\lambda)$$

olduğunu gösterir.

$v)$ $\tilde{q} \,\tilde{\leqq}\, \tilde{w} + \tilde{q}_\epsilon$ ve $\|\tilde{q}_\epsilon\| \,\tilde{\leqq}\, \tilde{\epsilon}$ olsun. $\tilde{q}, \tilde{w}, \tilde{q}_\epsilon \in \widetilde{I\mathbb{R}^2}$ olduğundan $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$, $\tilde{w} = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)$, $\tilde{q}_\epsilon = (\tilde{q}_{\epsilon 1}, \tilde{q}_{\epsilon 2})$ ve her $\lambda \in P$ parametresi için

$$(\tilde{q}_1(\lambda), \tilde{q}_2(\lambda)) \cong\!\!\!\!\leq (\tilde{w}_1(\lambda), \tilde{w}_2(\lambda)) + (\tilde{q}_{\epsilon 1}(\lambda), \tilde{q}_{\epsilon 2}(\lambda))$$

olur. Diğer yandan

$$\|\tilde{q}_\epsilon\| = \|\tilde{q}_\epsilon(\lambda)\|_\lambda = \|(\tilde{q}_{\epsilon 1}, \tilde{q}_{\epsilon 2})(\lambda)\|_\lambda = \sup_{1 \leq i \leq 2} \|\tilde{q}_{\epsilon i}(\lambda)\|_{I\mathbb{R}} \cong\!\!\!\!\leq \tilde{\epsilon}(\lambda)$$

iken her $1 \leq i \leq 2$ için

$$\|\tilde{q}_{\epsilon i}(\lambda)\|_{I\mathbb{R}} \cong\!\!\!\!\leq \tilde{\epsilon}(\lambda)$$

olur. (Yılmaz & Bozkurt, 2016)'dan

$$\tilde{q}_1(\lambda) \cong\!\!\!\!\leq \tilde{w}_1(\lambda) + \tilde{q}_{\epsilon 1}(\lambda) \ \text{ ve } \ \tilde{q}_2(\lambda) \cong\!\!\!\!\leq \tilde{w}_2(\lambda) + \tilde{q}_{\epsilon 2}(\lambda)$$

ve $I\mathbb{R}$ normlu quasilineer uzay olduğundan her $\lambda \in P$ parametresi için

$$\tilde{q}_1(\lambda) \cong\!\!\!\!\leq \tilde{w}_1(\lambda) \ \text{ ve } \ \tilde{q}_2(\lambda) \cong\!\!\!\!\leq \tilde{w}_2(\lambda)$$

elde edilir. Bu da bize $\tilde{q} \cong\!\!\!\!\leq \tilde{w}$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla yukarıda tanımlı norm ile $I\widetilde{\mathbb{R}^2}$ bir esnek normlu quasilineer uzaydır.

Şimdi $\forall \tilde{q} \in I\widetilde{\mathbb{R}^2}$ için

$$[\quad f(\tilde{q})](\lambda) = \{\tilde{q}_i(\lambda) : \tilde{q}(\lambda) = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)(\lambda) = (\tilde{q}_1(\lambda), \tilde{q}_2(\lambda))\} \tag{5.4.3}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $f: I\widetilde{\mathbb{R}^2} \to \Omega_C(\mathbb{R})(P)$'ye tanımlı $f$ fonksiyonunun bir esnek quasilineer fonksiyonel olduğunu gösterelim.

$i)$ $\forall \tilde{q}, \tilde{w} \in I\widetilde{\mathbb{R}^2}$ ve $\forall \lambda \in P$ parametresi için

$$f(\tilde{q} + \tilde{w})(\lambda) = \{(\tilde{q}_1 + \tilde{w}_1)(\lambda) : \tilde{q}(\lambda) = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)(\lambda), \tilde{w}(\lambda) = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)(\lambda)\}$$

$$= \{(\tilde{q}_1(\lambda) + \tilde{w}_1(\lambda) : \tilde{q}(\lambda) = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)(\lambda), \tilde{w}(\lambda) = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)(\lambda)\}$$

$$= \{(\tilde{q}_i(\lambda) : \tilde{q}(\lambda) = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)(\lambda)\} + \{\tilde{w}_i(\lambda) = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)(\lambda)\}$$

$$= f(\tilde{q})(\lambda) + f(\tilde{w})(\lambda)$$

olur.

$ii)$ $\forall \tilde{q} \in I\widetilde{\mathbb{R}^2}$ ve her $\tilde{\alpha}$ esnek skaleri için

$$f(\tilde{\alpha} \cdot \tilde{q})(\lambda) = \{(\tilde{\alpha} \cdot \tilde{q}_1)(\lambda) : \tilde{q}(\lambda) = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)(\lambda)\}$$

$$= \{\tilde{\alpha}(\lambda) \cdot \tilde{q}_1(\lambda) : \tilde{q}(\lambda) = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)(\lambda) = \tilde{q}_1(\lambda), \tilde{q}_2(\lambda)\}$$

$$= \tilde{\alpha}(\lambda) \cdot \{(\tilde{q}_1(\lambda): \tilde{q}(\lambda) = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)(\lambda)\}$$

$$= [\tilde{\alpha} \cdot f(\tilde{q})](\lambda)$$

elde edilir.

*iii*) $\tilde{q} \lesseqqgtr \tilde{w} \Rightarrow \forall\lambda \in P$ için $\tilde{q}(\lambda) \lesseqqgtr \tilde{w}(\lambda)$'dır. Buradan $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)(\lambda) \lesseqqgtr (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)(\lambda)$ olur. Böylece

$$\tilde{q}_1(\lambda) \lesseqqgtr \tilde{w}_1(\lambda) \text{ ve } \tilde{q}_2(\lambda) \lesseqqgtr \tilde{w}_2(\lambda)$$

elde edilir. (5.4.3)'dan $f(\tilde{q})(\lambda) \lesseqqgtr f(\tilde{w})(\lambda)$ elde edilir.

Dolayısıyla (5.4.3) ile tanımlı $f$ operatörü $\widetilde{I\mathbb{R}^2}$ 'de bir esnek quasilineer fonksiyoneldir deriz.

**Tanım 5.4.2.** $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay ve

$$f: SE(\tilde{Q}) \to \Omega_C(\mathbb{R})(P)$$

bir esnek quasilineer fonksiyonel olsun. Her $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ için

$$\|f(\tilde{q})\| \lesseqqgtr \tilde{N}\|\tilde{q}\|$$

(5.4.4)

olacak şekilde pozitif esnek reel $\tilde{N}$ sayısı varsa, $f$ 'ye sınırlıdır denir.

**Teorem 5.4.1.** $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay olsun. Eğer

$$f: SE(\tilde{Q}) \to \Omega_C(\mathbb{R})(P)$$

tanımlı $f$ fonksiyoneli sınırlıysa süreklidir.

**İspat.** Kabul edelim ki $f$ fonksiyoneli sınırlı olsun. O zaman bir pozitif esnek reel $\tilde{N}$ sayısı vardır öyle ki her $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ için $\|f(\tilde{q})\| \lesseqqgtr \tilde{N}\|\tilde{q}\|$ olur. Kabul edelim ki $(\tilde{q}_n) \in \tilde{Q}$ için $n \to \infty$ iken $\tilde{q}_n \to \tilde{q}$ olsun. Buradan her $\tilde{\epsilon} \gtreqqless \tilde{0}$ için en az bir $M \in N$ vardır öyle ki her $n > M$ için

$$\tilde{q} \lesseqqgtr \tilde{q} + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon}, \tilde{q} \lesseqqgtr \tilde{q}_n + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon}, \|\tilde{q}_{in}^{\epsilon}\| \lesseqqgtr \frac{\tilde{\epsilon}}{\tilde{N}}$$

elde edilir. $f$ esnek quasilineer fonksiyonel olduğundan

$$f(\tilde{q}_n) \lesseqqgtr f(\tilde{q}) + f(\tilde{q}_{1n}^{\epsilon}), f(\tilde{q}) \lesseqqgtr f(\tilde{q}_n) + f(\tilde{q}_{2n}^{\epsilon})$$

bulunur. Ayrıca $f$ sınırlı olduğundan her $1 \leq i \leq 2$ için $\|f(\tilde{q}_{in}^{\epsilon})\| \lesseqqgtr \tilde{\epsilon}$ olur. Böylece

$n \to \infty$ iken $f(\tilde{q}_n) \to f(\tilde{q})$ 'dir. $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ keyfi olduğundan $f$ fonksiyoneli $\tilde{Q}$ esnek quasilineer uzayında süreklidir deriz.

**Teorem 5.4.2.** $\tilde{Q},$ (4.2.1) şartını sağlayan bir esnek normlu quasilineer uzay ve

$$f: SE(\tilde{Q}) \to \Omega_C(\mathbb{R})(P)$$

'ye **(**4.2.2) şartını sağlayan bir esnek quasilineer fonksiyonel olsun. Eğer $f$ sürekli ise sınırlıdır.

**İspat**. Kabul edelim ki $f$ operatörü sınırlı olmasın. O zaman $\tilde{Q}$'nın esnek quasilineer elemanlarının bir $\{\tilde{q}_n\}$ dizisi vardır öyle ki her $n = 1,2, \ldots.$ ve $\lambda_n \in P$ için

$$\|f(\tilde{q}_n)\|(\lambda_n) > (\bar{n}\|\tilde{q}_n\|)(\lambda_n) \tag{5.4.5}$$

olur. Her $n$ elemanı için $\tilde{q}_n(\lambda_n) \neq \bar{\theta}$ 'dir. Çünkü, eğer bazı $\lambda_n \in P$'ler için $\tilde{q}_n(\lambda_n) = \bar{\theta}$ olsaydı $f$, (4.2.2) şartını sağladığından

$$f(\tilde{q}_n)(\lambda_n) = f_{\lambda_n}(\tilde{q}_n(\lambda_n)) = \bar{\theta}$$

olurdu. Ayrıca $\Omega_C(\mathbb{R})(P)$ (4.2.1) şartını sağladığından $\|f(\tilde{q}_n)(\lambda_n)\|_{\lambda_n} = 0$ olur. Bu da (5.4.5) ile çelişir.

Şimdi de $n = 1,2, \ldots.$ ve $\alpha_n \in P$ için $\widetilde{w}_n(\lambda) = \tilde{q}_n(\lambda_n)$ olacak şekilde $\tilde{Q}$'nın esnek quasi elemanlarının bir $\{\widetilde{w}_n\}$ dizisini ele alalım. Açıkca $\|\widetilde{w}_n\| \gtrsim \bar{0}$ 'dır. Kabul edelim ki

$$\widetilde{w}_n' = \frac{\widetilde{w}_n}{\bar{n}\|\widetilde{w}_n\|}$$

olsun. Buradan $\left\|\widetilde{w}_n{}'\right\| = \frac{1}{n} \to \bar{0}$ yani $\widetilde{w}_n \to \Theta$ 'dır. $f$ fonksiyoneli $\tilde{q} = \theta$'da sürekli olduğundan $f(\widetilde{w}_n{}') \to f(\Theta) = \Theta$ yani $n \to \infty$ iken $\left\|f\left(\widetilde{w}_n{}'\right)\right\| \to \bar{0}$ 'dır. Özellikle $n \to \infty$ iken

$$\left\|f(\widetilde{w}_n{}')\right\|(\lambda_n) = \left\|f(\widetilde{w}_n{}')(\lambda_n)\right\|_{\lambda_n} \to 0$$

(5.4.6)

olur. Diğer yandan

$$\left\|f(\widetilde{w}_n{}')\right\| = \left\|f\left(\frac{\widetilde{w}_n}{\bar{n}\|\widetilde{w}_n\|}\right)\right\| = \left\|\frac{1}{\bar{n}\|\widetilde{w}_n\|} f(\widetilde{w}_n)\right\| = \frac{1}{\bar{n}\|\widetilde{w}_n\|}\|f(\widetilde{w}_n)\|$$

'dır. Böylece

$$\left\|f\left(\widetilde{w}_n{}'\right)\right\|(\lambda_n) = \left(\frac{1}{\bar{n}\|\widetilde{w}_n\|}\right)(\lambda_n)\|f(\widetilde{w}_n)\|(\lambda_n)$$

$$= \left(\frac{1}{\bar{n}\|\widetilde{w}_n\|}\right)(\lambda_n)\|[f(\widetilde{w}_n)(\lambda_n)]\|_{(\lambda_n)}$$

$$= \left(\frac{1}{\bar{n}\|\widetilde{w}_n\|}\right)(\lambda_n)\|[f(\tilde{q}_n)(\lambda_n)]\|_{(\lambda_n)} = \left(\frac{1}{\bar{n}\|\widetilde{w}_n\|}\right)(\lambda_n)\|f(\tilde{q}_n)\|(\lambda_n)$$

$$> \left[\left(\frac{1}{\bar{n}\|\widetilde{w}_n\|}\right)(\lambda_n)\right][(\bar{n}\|\tilde{q}_n\|)(\lambda_n)] = \left[\left(\frac{1}{\bar{n}\|\widetilde{w}_n\|}\right)(\bar{n}\|\tilde{q}_n\|)\right](\lambda_n)$$

$$= \left(\frac{\|\tilde{q}_n\|}{\|\widetilde{w}_n\|}\right)(\lambda_n) = \frac{\|\tilde{q}_n\|(\lambda_n)}{\|\widetilde{w}_n\|(\lambda_n)} = \frac{\|\widetilde{w}_n(\lambda_n)\|_{\lambda_n}}{\|\widetilde{w}_n(\lambda_n)\|_{\lambda_n}} = 1$$

olur. Buradan $n = 1,2, \ldots$ için

$$\left\|f\left(\widetilde{w}_n{}'\right)\right\|(\lambda_n) > 1 \tag{5.4.7}$$

dır. (5.4.6) ile (5.4.7) bağıntıları ile çelişir. Bundan dolayı $f$ fonksiyonelinin sınırlı olduğu elde edilmiş olur.

**Tanım 5.4.3.** $T: (SE)(\tilde{Q}) \to SE(\widetilde{W})$ tanımlı esnek sınırlı quasilineer operatör olsun. Her $\lambda \in P$ parametresi için $T$ operatörünün normu

$$\|T\|(\lambda) = \inf\left\{t \in \mathbb{R}: \|T(\tilde{q})\|(\lambda) \le t \cdot \|\tilde{q}\|(\lambda), \forall \tilde{q} \in \tilde{Q}\right\}$$

ile tanımlanır. Eğer $SE(\widetilde{W}) = \Omega_C(\mathbb{R})(P)$ ise $T$ operatörü esnek sınırlı quasilineer fonksiyonel olacağından $T = f$ için $f$ esnek fonksiyonelinin normu

$$\|f\|(\lambda) = \inf\left\{t \in \mathbb{R}: \|f(\tilde{q})\|(\lambda) \le t \cdot \|\tilde{q}\|(\lambda), \forall \tilde{q} \in \tilde{Q}\right\}$$

ile gösterilir.

**Teorem 5.4.3.** $\tilde{Q}$ ve $\widetilde{W}$ birer esnek normlu quasilineer uzaylar ve $T$'de $T: (SE)(\tilde{Q}) \to SE(\widetilde{W})$ esnek quasilineer operatör olsun. Eğer $T$ operatörü $\tilde{\theta} \in \tilde{Q}$'da sürekli ise $\tilde{Q}$ düzgün süreklidir.

**İspat**. Kabul edelim ki $T$ operatörü $\tilde{\theta} \in \tilde{Q}$'da sürekli bir esnek quasilineer operatör olsun. Bu durumda her $\tilde{\epsilon} > \tilde{0}$ için en az bir $\tilde{\delta} > \tilde{0}$ sayısı vardır öyle ki

$$\|\tilde{q}\| \le \tilde{\delta} \quad \text{iken} \quad \|T(\tilde{q})\| \le \tilde{\epsilon}$$

olur. Şimdi keyfi bir $\widetilde{q_0} \in \tilde{Q}$ alalım. Eğer $h(\tilde{q}, \widetilde{q_0}) \lesseqqgtr \tilde{\delta}$ ise en az $\widetilde{q_1}, \widetilde{q_2} \in \tilde{Q}$ vardır öyle ki $1 \le i \le 2$ için $\|\widetilde{q_\iota}\| \le \tilde{\delta}$ ve

$$\tilde{q} \lesseqqgtr \widetilde{q_0} + \widetilde{q_1}, \widetilde{q_0} \lesseqqgtr \tilde{q} + \widetilde{q_2}$$

olur. Buradan $T$ bir esnek quasilineer operatör olduğundan

$$T(\tilde{q}) \lesseqqgtr T(\widetilde{q_0}) + T(\widetilde{q_1}), T(\widetilde{q_0}) \lesseqqgtr T(\tilde{q}) + T(\widetilde{q_2})$$

elde edilir. Ayrıca $1 \leq i \leq 2$ için $\|\widetilde{q_\iota}\| \leq \tilde{\delta}$ iken $\|T(\widetilde{q_\iota})\| \leq \tilde{\epsilon}$ olacağından $h(T(\tilde{q}), T(\widetilde{q_0})) \lesseqqgtr \tilde{\epsilon}$ olur. Bu da bize $T$'nin $\tilde{Q}$'da düzgün sürekli olduğunu gösterir.

**Teorem 5.4.4.** $\tilde{Q}$ ve $\widetilde{W}$ (4.2.1) şartını sağlayan birer esnek normlu quasilineer uzaylar ve $T: (SE)(\tilde{Q}) \to SE(\widetilde{W})$'de tanımlı (4.2.2) şartını sağlayan sınırlı bir esnek quasilineer operatör olsun. Her $\lambda \in P$ parametresi için $T_\lambda: Q \to W$'ye quasilineer operatörünün normu $\|T_\lambda\|_\lambda$ ise $\|T\|(\lambda) = \|T_\lambda\|_\lambda$'dır.

**İspat.** Tanım 5.4.3.'den normlu quasilineer uzayda tanımlı bir sınırlı quasilineer operatörün normu

$$\|T_\lambda\|_\lambda = \inf\{t \in I\mathbb{R}: \|T_\lambda(q)\|_\lambda \leq t \cdot \|q\|_\lambda, \forall q \in Q\}$$

olur. $\forall \lambda \in P$ için

$$\{t \in \mathbb{R}: \|T(\tilde{q})\|(\lambda) \leq t \cdot \|\tilde{q}\|(\lambda), \forall \lambda \in P\} = \{t \in I\mathbb{R}: \|T_\lambda(q)\|_\lambda \leq t \cdot \|q\|_\lambda, \forall \lambda \in P\}$$

eşitliğinin doğruluğunu gösterelim. Kabul edelim ki

$$r \in \left\{t \in I\mathbb{R}: \|T(\tilde{q})\|(\lambda) \leq t \cdot \|\tilde{q}\|(\lambda), \forall \tilde{q} \in \tilde{Q}\right\}$$

olsun. Bu durumda $\forall \tilde{q} \in \tilde{Q}$ için

$$\|T(\tilde{q})\|(\lambda) \leq r \cdot \|\tilde{q}\|(\lambda)$$

olur. Bir $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ için $\tilde{q}(\lambda) = y$ olacak şekilde bir $y \in Q$ seçelim. Buradan

$$\begin{aligned}
&\|T_\lambda(y)\|_\lambda = \|T_\lambda \tilde{q}(\lambda)\|_\lambda = \|T(\tilde{q})\|(\lambda) \\
&\leq r \cdot \|\tilde{q}\|(\lambda) \\
&= r \cdot \|\tilde{q}(\lambda)\|_\lambda \\
&= r \cdot \|y\|_\lambda
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $r \in \{t \in \mathbb{R}: \|T_\lambda(q)\|_\lambda \leq t \cdot \|q\|_\lambda, \forall q \in Q\}$ olur. Bu nedenle

$$\left\{t \in \mathbb{R}: \|T(\tilde{q})\|(\lambda) \leq t \cdot \|\tilde{q}\|(\lambda), \forall \tilde{q} \in \tilde{Q}\right\} \tag{5.4.8}$$

$$\subseteq \{t \in \mathbb{R}: \|T_\lambda(q)\|_\lambda \leq t \cdot \|q\|_\lambda, \forall q \in Q\}$$

elde edilir. Tersine ,

$$s \in \{t \in \mathbb{R}: \|T_\lambda(q)\|_\lambda \leq t \cdot \|q\|_\lambda, \forall q \in Q\}$$

olsun. Buradan $\forall q \in Q$ için

$$\|T_\lambda(q)\|_\lambda \leq s \cdot \|q\|_\lambda$$

olur. Buradan da $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ ve $\tilde{q}(\lambda) \in Q$ için

$$\|T(\tilde{q})\|(\lambda) = \|T_\lambda \tilde{q}(\lambda)\|_\lambda \leq s \cdot \|\tilde{q}(\lambda)\|_\lambda = s \cdot \|\tilde{q}\|(\lambda)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\forall \tilde{q} \in \tilde{Q}$ için

$$\|T(\tilde{q})\|(\lambda) \leq s \cdot \|\tilde{q}\|(\lambda)$$

bulunur. Bu da bize

$$s \in \left\{t \in I\mathbb{R}: \|T(\tilde{q})\|(\lambda) \leq t. \|\tilde{q}\|(\lambda), \forall \tilde{q} \in \tilde{Q}\right\}$$

olduğunu gösterir. Böylece

$$\begin{aligned} &\{t \in \mathbb{R}: \|T_\lambda(q)\|_\lambda \leq t \cdot \|q\|_\lambda, \forall q \in Q\} \\ &\subset \left\{t \in \mathbb{R}: \|T(\tilde{q})\|(\lambda) \leq t \cdot \|\tilde{q}\|(\lambda), \forall \tilde{q} \in \tilde{Q}\right\} \end{aligned} \tag{5.4.9}$$

eşitsizliği elde edilir. (5.4.8) ve (5.4.9)'dan $\forall \lambda \in P$ parametresi için

$$\begin{aligned} \|T\|(\lambda) &= \inf\left\{t \in \mathbb{R}: \|T(\tilde{q})\|(\lambda) \leq t \cdot \|\tilde{q}\|(\lambda), \forall \tilde{q} \in \tilde{Q}\right\} \\ &= \inf\{t \in \mathbb{R}: \|T_\lambda(\tilde{q})\|_\lambda \leq t \cdot \|\tilde{q}\|_\lambda, \forall q \in Q\} \\ &= \|T_\lambda\|_\lambda \end{aligned}$$

olduğu görülür.

**Teorem 5.4.5.** $\tilde{Q}$, (4.2.1) şartını sağlayan bir esnek normlu quasilineer uzay ve $f$ 'de $SE(\tilde{Q})$'dan $\Omega_C(\mathbb{R})(P)$'ye tanımlı (4.2.2) şartını sağlayan bir sınırlı esnek quasilineer fonksiyonel olsun. Bu durumda $\|f_\lambda\|_\lambda$ , $\tilde{Q}$ 'dan $\Omega_C(\mathbb{R})$ 'ye tanımlı $f_\lambda$ quasilineer fonksiyonelinin normu olmak üzere her $\lambda \in P$ için $\|f\|(\lambda) = \|f_\lambda\|_\lambda$ olur.

**İspat.** Eğer bir önceki teoremde $\widetilde{W} = \Omega_C(\mathbb{R})(P)$ alırsak ispatın doğruluğunu kolayca görebiliriz.

**Örnek 5.4.3.** $I\mathbb{R}^2$'nin ürettiği $\widetilde{I\mathbb{R}^2}$ esnek kümesini ele alalım. $\widetilde{I\mathbb{R}^2}$'nin bir mutlak esnek quasilineer uzay olduğunu biliyoruz. Örnek 5.4.2.'den $\tilde{q} \,\tilde{\in}\, \widetilde{I\mathbb{R}^2}$ için

$$\|\tilde{q}\|(\lambda) = \|\tilde{q}(\lambda)\|_\lambda = \sup_{1 \le i \le 2} \|\tilde{q}_i(\lambda)\|_{I\mathbb{R}}$$

'nin $\widetilde{I\mathbb{R}^2}$'de bir norm olduğunu biliyoruz. Ayrıca $\widetilde{I\mathbb{R}^2}$ (4.2.1) şartını sağlar. $\forall \lambda \in P$ ve $\tilde{q} \,\tilde{\in}\, \widetilde{I\mathbb{R}^2}$için

$$[f(\tilde{q})](\lambda) = \{\tilde{q}_1(\lambda) : \tilde{q}(\lambda) = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)(\lambda) = \tilde{q}_1(\lambda), \tilde{q}_2(\lambda)\}$$

olsun. Yine Örnek 5.4.2.'den, $f(\tilde{q})$'nın $\widetilde{I\mathbb{R}^2}$ üzerinde esnek bir quasilineer fonksiyonel olduğunu ve (4.2.2) şartını sağladığından $\forall \lambda \in P$ için

$$\begin{aligned}
&\|f(\tilde{q})\|(\lambda) = \{\|\tilde{q}_1(\lambda)\|_\lambda : \tilde{q}(\lambda) = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)(\lambda) = \tilde{q}_1(\lambda), \tilde{q}_2(\lambda)\} \\
&\le \sup_{1 \le i \le 2} \|\tilde{q}_i(\lambda)\|_\lambda \\
&= \|\tilde{q}(\lambda)\|_\lambda \\
&= \|\tilde{q}\|(\lambda)
\end{aligned}$$

olur. Böylece, $f$'nin sınırlı esnek quasilineer operatör olduğunu elde ederiz. (Bozkurt, 2022)'den $f$, $\widetilde{I\mathbb{R}^2}$'de sürekli esnek quasilineer operatördür. Ayrıca, $\widetilde{I\mathbb{R}^2}$ (4.2.1**)** şartını sağladığından ve $f$'de (4.2.2) şartını sağlayan bir esnek quasilineer fonksiyonel olduğundan Teorem 5.4.5. gereğince $\forall \lambda \in P$ için

$$\|f\|(\lambda) = \|f_\lambda\|_\lambda = 1$$

olur.

**Teorem 5.4.6.** $\tilde{Q}$ ve $\tilde{W}$ esnek normlu quasilineer uzaylar ve $T : (SE)(\tilde{Q}) \to SE(\tilde{W})$'ya tanımlı bir esnek quasilineer operatör olsun. Bu durumda $\forall \tilde{q} \in \tilde{Q}$ için

$$\|T(\tilde{q})\| \,\tilde{\leqq}\, \|T\| \|\tilde{q}\|$$

'dır.

**İspat.** Keyfi bir $\tilde{\epsilon} \,\tilde{>}\, \bar{0}$ için Tanım 5.4.3'den $\forall \lambda \in P$ ve $\forall \tilde{q} \in \tilde{Q}$ için

$$\|T(\tilde{q})\|(\lambda) \le (\|T\|(\lambda) + \tilde{\epsilon}(\lambda))\|\tilde{q}\|(\lambda) \tag{5.4.10}$$

yazılabilir. Bir $\tilde{q}_1 \in \tilde{Q}$ ve $\mu \in P$ parametresi için

$$\|T(\tilde{q}_1)\|(\mu') > \|T\|(\mu') \cdot \|\tilde{q}_1\|(\mu')$$

(5.4.11)

olduğunu kabul edelim. Bu durumda bazı $\epsilon_{\mu'} \tilde{>} \tilde{0}$ için $\tilde{\epsilon}(\mu') = \epsilon_{\mu'} > 0$ olmak üzere

$$\|T(\tilde{q}_1)\|(\mu') > \|T\|(\mu')\|\tilde{q}_1\|(\mu') + \epsilon_{\mu'}\|\tilde{q}_1\|(\mu')$$

$$= (\|T\|(\mu') + \epsilon_{\mu'})\|\tilde{q}_1\|(\mu') = (\|T\|(\mu') + \tilde{\epsilon}_{\mu'})\|\tilde{q}_1\|(\mu')$$

olur. Bu da (5.4.11) ile çelişir. Dolayısıyla $\forall\tilde{q} \in \tilde{Q}$ için

$$\|T(\tilde{q})\| \tilde{\leq} \|T\|\|\tilde{q}\|$$

'dır.

**Sonuç 5.4.1**. $f: SE(\tilde{Q}) \to \Omega_C(R)$'ye esnek quasilineer fonksiyonel olsun. Bu durumda $\forall\tilde{q} \in \tilde{Q}$ için

$$\|f(\tilde{q})\| \tilde{\leq} \|f\|\|\tilde{q}\|$$

'dır.

**İspat.** Yukarıdaki teoremde $\widetilde{W} = \Omega_C(\mathbb{R})(P)$ alırsak ispat benzer şekilde yapılabilir.

**Lemma 5.4.1**. $\tilde{Q}$ ve $\widetilde{W}$ birer esnek normlu quasilineer uzaylar olsun. $T: SE(\tilde{Q}) \to SE(\widetilde{W})$'ya tanımlı bir sınırlı esnek quasilineer operatör ise

$$\{\|T_\lambda(q)\|_\lambda : \|q\|_\lambda \leq 1, q \in Q\} = \left\{\|T(\tilde{q})\|(\lambda) : \|\tilde{q}\| \tilde{\leq} \bar{1}, \tilde{q} \in \tilde{Q}\right\}$$

'dir.

**İspat**. Kabul edelim ki

$$r \in \left\{\|T(\tilde{q})\|(\lambda) : \|\tilde{q}\| \tilde{\leq} \bar{1}, \tilde{q} \in \tilde{Q}\right\}$$

olsun. Buradan en az bir tane $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ vardır öyle ki $\|\tilde{q}\| \tilde{\leq} \bar{1}$ ve her $\lambda \in P$ için $r = \|T(\tilde{q})\|(\lambda)$'dır. Eğer her $\lambda \in P$ için $\tilde{q}(\lambda) = q$ ise

$$\|\tilde{q}\|(\lambda) = \|\tilde{q}(\lambda)\|_\lambda = \|q\|_\lambda \leq 1$$

ve

$$\|T(\tilde{q})\|(\lambda) = \|T_\lambda\tilde{q}(\lambda)\|_\lambda = \|T_\lambda(q)\|_\lambda$$

olur. Dolayısıyla

$$r \in \{\|T_\lambda(q)\|_\lambda : \|q\|_\lambda \leq 1, q \in Q\}$$

bulunur. Tersine

$$s \in \{\|T_\lambda(q)\|_\lambda : \|q\|_\lambda \leq 1, q \in Q\}$$

olsun. Buradan en az bir tane $y \in Q$ vardır öyle ki $\|y\|_\lambda \leq 1$ için $\|T_\lambda(y)\|_\lambda = s$'dir. $SE(\tilde{Q})$, $\tilde{Q}$'nın tüm esnek quasi vektörlerinin kümesi olduğundan $\tilde{q}(\lambda) = y$ olacak şekilde en az bir $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ vardır öyle ki her $\lambda \in P$ için $\tilde{q}(\lambda) = q$ böylece $\|q\| \leq 1$ ve

$$s = \|T_\lambda(y)\|_\lambda = \|T_\lambda \tilde{q}(\lambda)\|_\lambda = \|T(\tilde{q})\|(\lambda)$$

için $\|\tilde{q}\|_\lambda \leq \tilde{1}$ olur. Böylece

$$s \in \left\{\|T(\tilde{q})\|(\lambda) : \|\tilde{q}\| \cong \bar{1}, \tilde{q} \in \tilde{Q}\right\}$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

**Teorem 5.4.7.** $\tilde{Q}$ ve $\widetilde{W}$, (4.2.1) şartını sağlayan birer esnek normlu quasilineer uzaylar ve $T: SE(\tilde{Q}) \to SE(\widetilde{W})$'de tanımlı (4.2.2) şartını sağlayan bir esnek quasilineer operatör olsun. Bu durumda $\forall\ \lambda \in P$ için,

$i)$ $\|T\|(\lambda) = \sup\{\|T(\tilde{q})\|(\lambda) : \|\tilde{q}\| \cong \bar{1}\} = \|T_\lambda\|_\lambda$,

$ii)$ $\|T\|(\lambda) = \sup\{\|T(\tilde{q})\|(\lambda) : \|\tilde{q}\| = \bar{1}\} = \|T_\lambda\|_\lambda$,

$iii)$ $\|T\|(\lambda) = \sup\left\{\frac{\|T(\tilde{q})\|}{\|\tilde{q}\|}(\lambda) : \|\tilde{q}\|(\mu) \neq 0, \forall \mu \in P \text{ için}\right\} = \|T_\lambda\|_\lambda$

eşitlikleri sağlanır.

**İspat.** $T: SE(\tilde{Q}) \to SE(\widetilde{W})$, (4.2.2) şartını sağlayan bir sınırlı esnek quasilineer operatör olsun. Ayrıca $\tilde{Q}$ ve $\widetilde{W}$, (4.2.1) şartını sağladığından $\forall \lambda \in P$ parametresi için Lemma 5.4.1.'den

$$\begin{aligned} \|T\|(\lambda) &= \|T_\lambda\|_\lambda \\ &= \sup\{\|T_\lambda(q)\|_\lambda : \|q\|_\lambda \leq 1\} \\ &= \sup\{\|T(\tilde{q})\|(\lambda) : \|\tilde{q}\| \cong \bar{1}\} \end{aligned}$$

elde edilir. $ii)$ ve $iii)$ benzer yolla ispatlanabilir.

**Sonuç 5.4.2.** $\tilde{Q}$, (4.2.1) şartını sağlayan bir esnek normlu quasilineer uzay ve $f: SE(\tilde{Q}) \to \Omega_C(\mathbb{R})(P)$'ye (4.2.2) şartını sağlayan bir esnek quasilineer fonksiyonel olsun. Bu durumda $\forall\lambda \in P$ için

$i)$ $\|f\|(\lambda) = \sup\{\|f\|(\tilde{q})(\lambda): \|\tilde{q}\| \precsim \bar{1}\} = \|f_\lambda\|_\lambda,$

$ii)$ $\|f\|(\lambda) = \sup\{\|f\|(\tilde{q})(\lambda): \|\tilde{q}\| = \bar{1}\} = \|f_\lambda\|_\lambda,$

$iii)$ $\|f\|(\lambda) = \sup\left\{\frac{\|f(\tilde{q})\|}{\|\tilde{q}\|}(\lambda): \|\tilde{q}\|(\mu) \neq 0,\ \forall\mu \in P \text{ için}\right\} = \|f_\lambda\|_\lambda$

eşitlikleri sağlanır.

**İspat.** Eğer yukarıdaki teoremde $\widetilde{W} = \Omega_C(\mathbb{R})(P)$ alırsak ispatın doğruluğu görülür.

**Teorem 5.4.8.** $\tilde{Q}$ ve $\widetilde{W}$, (4.2.1) şartını sağlayan birer esnek normlu quasilineer uzaylar ve $T: SE(\tilde{Q}) \to SE(\widetilde{W})$'de tanımlı (4.2.2) şartını sağlayan sürekli bir esnek quasilineer operatör olsun. Bu durumda $\forall\lambda \in P$ için $\|T\|(\lambda) = \|T_\lambda\|_\lambda$ ile tanımlı $T_\lambda$ operatörü $Q$ quasilineer uzayında süreklidir.

**İspat.** Kabul edelim ki $T$ operatörü sürekli olsun. Bu durumda $T$, $\tilde{Q}$'nın her bir esnek quasi vektöründe süreklidir. Keyfi bir $\lambda \in P$ parametresi ve $q \in Q$ için $n \to \infty$ iken $q_n \to q$ olacak şekilde $Q$'da bir $\{q_n\}$ dizisini alalım. Ayrıca bir $\lambda$ parametresi için $\tilde{q}(\lambda) = q$ olacak şekilde $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ ve $n \to \infty$ iken $\tilde{q}_n \to \tilde{q}$ olacak şekilde $\tilde{Q}$'da bir esnek quasi vektörlerin dizisini ele alalım.

Şimdi

$$\widetilde{w}_n(\mu) = \begin{cases} \widetilde{w}_n(\mu) = q_n, \mu = \lambda \\ \widetilde{w}_n(\mu) = \tilde{q}_n(\mu), \mu \in P\backslash\lambda \end{cases}$$

olacak şekilde $\tilde{Q}$'nın bir $\{\widetilde{w}_n\}$ esnek quasi vektörlerinin bir dizisi olsun. Keyfi bir $\tilde{\epsilon} \gneqq \tilde{0}$ için, $n \to \infty$ iken $\tilde{q}_n \to \tilde{q}$ olduğundan en az bir $N_1$doğal sayısı vardır öyle ki $\forall n \geq N_1$ için

$$\tilde{q}_n \precsim \tilde{q} + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon},\ \tilde{q} \precsim \tilde{q}_n + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon}, \|\tilde{q}_{in}^{\epsilon}\| \precsim \tilde{\epsilon}$$

olur. Buradan $\forall\mu \in P$ için $n \geq N_1$ iken

$$\tilde{q}_n(\mu) \leq \tilde{q}(\mu) + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon}(\mu), \tilde{q}(\mu) \leq \tilde{q}_n(\mu) + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon}(\mu), \|\tilde{q}_{in}^{\epsilon}(\mu)\|_\mu \leq \tilde{\epsilon}(\mu)$$

olur. Buradan da $\mu \in P\backslash\lambda$ için $n \geq N_1$ iken

$$\widetilde{w}_n(\mu) \leq \widetilde{w}(\mu) + \widetilde{w}_{1n}^{\epsilon}(\mu), \widetilde{w}_n(\mu) \leq \widetilde{w}_n(\mu) + \widetilde{w}_{2n}^{\epsilon}(\mu),$$

(5.4.12)

$$\|\widetilde{w}_{in}^{\epsilon}(\mu)\|_{\mu} \leq \tilde{\epsilon}(\mu)$$

elde edilir. Yani $\forall \mu \in P \backslash \lambda$ ve $n \geq N_1$ için $\widetilde{w}_n \to \tilde{q}$ 'dır. Ayrıca $n \to \infty$ iken $q_n \to q$ olduğundan en az bir $N_2 \in N$ doğal sayısı vardır öyle ki $n \geq N_2$ için

$$q_n \leq q + q_{1n}^{\epsilon}, q \leq q_n + q_{2n}^{\epsilon}, \|q_{in}^{\epsilon}\|_{\lambda} \leq \epsilon$$

'dur. Böylece $\forall \lambda \in P$ parametresi icin

$$\widetilde{w}_n(\lambda) = \tilde{q}_n(\lambda) \leq \tilde{q}(\lambda) + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon}(\lambda), \tag{5.4.13}$$

$$\tilde{q}(\lambda) \leq \tilde{q}_n(\lambda) + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon}(\lambda) = \widetilde{w}_n(\lambda) + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon}(\lambda),$$

$$\|\tilde{q}_{in}^{\epsilon}(\lambda)\| \leq \tilde{\epsilon}(\lambda)$$

elde edilir.

Yani, bir $\lambda \in P$ parametresi için $\lambda = \mu$ dersek $\widetilde{w}_n(\mu) \to \tilde{q}(\mu)$ olur. $N = \max\{N_1, N_2\}$ seçersek $\forall \mu \in P$ ve ve $n \geq N$ iken (5.4.12) ve (5.4.13)'ten $\widetilde{w}_n \to \tilde{q}$ bulunur. $T$ sürekli olduğundan $T(\widetilde{w}_n) \to T(\tilde{q})$, $(n \to \infty)$ olur. Buradan $\tilde{\epsilon}(\lambda) = \epsilon$ olacak şekilde $\tilde{\epsilon} \gneqq \bar{0}$ için bir $M$ doğal sayısı vardır, öyle ki $n \geq M$ için

$$T(\widetilde{w}_n) \leqq T(\tilde{q}) + \tilde{k}_{1n}^{\epsilon}, T(\tilde{q}) \leqq T(\widetilde{w}_n) + \tilde{k}_{2n}^{\epsilon}, \left\|\tilde{k}_{in}^{\epsilon}\right\| \leqq \tilde{\epsilon}$$

bulunur.

$\forall n \geq M$ ve $\mu \in P$ parametresi için

$$T(\widetilde{w}_n)(\mu) \leq T(\tilde{q})(\mu) + \tilde{k}_{1n}^{\epsilon}(\mu),\ T(\tilde{q})(\mu) \leq T(\widetilde{w}_n)(\mu) + \tilde{k}_{2n}^{\epsilon}(\mu), \left\|\tilde{k}_{in}^{\epsilon}(\mu)\right\| \leq \tilde{\epsilon}(\mu)$$

olur. Yani

$$T(\widetilde{w}_n)(\mu) \leq T(\tilde{q})(\mu) + \tilde{k}_{1n}^{\epsilon}(\mu),\ T(\tilde{q})(\mu) \leq T(\widetilde{w}_n)(\mu) + \tilde{k}_{2n}^{\epsilon}(\mu), \left\|\tilde{k}_{in}^{\epsilon}(\mu)\right\|_{\mu} \leq \tilde{\epsilon}(\mu)$$

'dır. Özel olarak $\mu = \lambda$ için

$$T(\widetilde{w}_n)(\lambda) \leq T(\tilde{q})(\lambda) + \tilde{k}_{1n}^{\epsilon}(\lambda),\ T(\tilde{q})(\lambda) \leq T(\widetilde{w}_n)(\lambda) + \tilde{k}_{2n}^{\epsilon}(\lambda), \left\|\tilde{k}_{in}^{\epsilon}(\lambda)\right\|_{\lambda} \leq \tilde{\epsilon}(\lambda) = \epsilon$$

olur. Bu da bize $T_{\lambda}(q_n) \to T_{\lambda}(q)$, $(n \to \infty)$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\lambda \in P$

parametresi ve keyfi bir $q \in Q$ için $T_\lambda$ operatörü $q \in Q$'da sürekli olur.

**Sonuç 5.4.3.** $\tilde{Q}$, (4.2.1) şartını sağlayan bir esnek normlu quasilineer uzay ve $f: SE(\tilde{Q}) \to \Omega_C(\mathbb{R})(P)$ tanımlı (4.2.2) özelliğini sağlayan bir sürekli esnek quasilineer fonksiyonel olsun. Bu durumda $\forall\lambda \in P$ parametresi için $\|T\|(\lambda) = \|T_\lambda\|_\lambda$ ile tanımlı $f_\lambda$'da $Q$'da süreklidir.

**İspat.** Eğer bir önceki teoremde $\widetilde{W}$ yerine $\Omega_C(\mathbb{R})(P)$ alırsak ispat benzer yolla gösterilebilir.

**Teorem 5.4.9.** $\tilde{Q}$ ve $\widetilde{W}$, (4.2.1) şartını sağlayan sonlu $P$ parametre kümesi üzerinde birer esnek normlu quasilineer uzaylar olsun. $T_\lambda$: $Q \to W$'ye tanımlı sürekli quasilineer operatörlerinin bir ailesi $\{T_\lambda : \lambda \in P\}$ olsun. Bu durumda $\forall\lambda \in P$ için $T(\lambda) = T_\lambda$ olacak şekildeki $T: (SE)(\tilde{Q}) \to SE(\widetilde{W})$'ya tanımlı $T$ operatörü de sürekli esnek quasilineer operatördür ve (4.2.2) şartını sağlar.

**İspat**. Kabul edelim ki $\forall\lambda \in P$ parametresi için $T_\lambda$, $Q$ quasilineer uzayında sürekli olsun. $\forall\lambda \in P$, parametresi için $T(\lambda) = T_\lambda$ olacak şekilde $T: SE(\tilde{Q}) \to SE(\widetilde{W})$ operatörünü tanımlayalım. (Bozkurt, 2022)'den, $T$ operatörü esnek quasilineerdir ve (4.2.2) şartını sağlar. $\tilde{Q}$ esnek quasilineer uzayında $n \to \infty$ iken $\tilde{q}_n \to \tilde{q}$ olacak şekilde $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ esnek quasi vektörünü ele alalım. Bu durumda $\tilde{\epsilon} \gneqq \bar{0}$ için en az bir $n \in N$ vardır öyle ki $n \geq N$ için

$$\tilde{q}_n \mathrel{\tilde{\leqq}} \tilde{q} + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon}, \tilde{q} \mathrel{\tilde{\leqq}} \tilde{q}_n + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon}, \|\tilde{q}_{in}^{\epsilon}\| \mathrel{\tilde{\leqq}} \epsilon$$

yazılır. Buradan $\lambda \in P$ parametresi için

$$\tilde{q}_n(\lambda) \leq \tilde{q}(\lambda) + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon}(\lambda),\ \tilde{q}(\lambda) \leq \tilde{q}_n(\lambda) + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon}(\lambda),$$

$$\|\tilde{q}_{in}^{\epsilon}(\lambda)\| \leq \epsilon(\lambda)$$

bulunur. Yani keyfi bir $\lambda \in P$ parametresi için $n \to \infty$ iken $\tilde{q}_n(\lambda) \to \tilde{q}(\lambda)$'dır denir. Diğer yandan $\forall\lambda \in P$ parametresi için $T_\lambda$ operatörü sürekli olduğundan en az bir $N_\lambda \in N$ vardır öyle ki $\forall n > N_\lambda$ için

$$T(\tilde{q}_n(\lambda)) \leq T(\tilde{q}(\lambda)) + T\big((\tilde{q}_{1n}^{\epsilon})(\lambda)\big), T(\tilde{q}(\lambda)) \leq T((\tilde{q}_n)(\lambda)) + T\big((\tilde{q}_{2n}^{\epsilon})(\lambda)\big),$$

$$\|T(\tilde{q}_{in}^{\epsilon}(\lambda))\|_\lambda \leq \epsilon(\lambda)$$

bulunur. $P$ sonlu olduğundan $\forall\lambda \in P$ parametresi için $N = \max\{N_\lambda : \lambda \in P\}$ doğal sayısı vardır, $\forall n > N$ için

$$T(\tilde{q}_n)(\lambda) \leq T(\tilde{q})(\lambda) + T(\tilde{q}_{1n}^{\epsilon})(\lambda), T(\tilde{q})(\lambda) \leq T(\tilde{q}_n)(\lambda) + T(\tilde{q}_{2n}^{\epsilon})(\lambda), \|T(\tilde{q}_{in}^{\epsilon})(\lambda)\|_\lambda \leq \epsilon(\lambda)$$

olur. Buradan da $\forall n > N$ için

$$T(\tilde{q}_n) \mathrel{\tilde{\leqq}} T(\tilde{q}) + T(\tilde{q}_{1n}^{\epsilon}), T(\tilde{q}) \mathrel{\tilde{\leqq}} T(\tilde{q}_n) + T(\tilde{q}_{2n}^{\epsilon}), \| \quad T\tilde{q}_{in}^{\epsilon}\| \mathrel{\tilde{\leqq}} \epsilon$$

elde edilir. Bu da bize keyfi bir $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ için $T$'nin $\tilde{Q}$'da sürekli olduğunu gösterir.

**Sonuç 5.4.4.** $\tilde{Q}$, (4.2.1) şartını sağlayan bir esnek normlu quasilineer uzay olsun. $f_\lambda : Q \to \Omega_C(\mathbb{R})$'ye tanımlı sürekli quasilineer fonksiyonellerin bir ailesi $\{f_\lambda : \lambda \in P\}$ olsun. Bu durumda $f(\tilde{q})(\lambda) = f_\lambda((\tilde{q})(\lambda))$ ile tanımlı $f : SE(\tilde{Q}) \to \Omega_C(\mathbb{R})$'ye fonksiyoneli de süreklidir ve (4.2.2) şartını sağlar.

**İspat.** Eğer yukarıdaki teoremden $\widetilde{W}$ yerine $\Omega_C(\mathbb{R})(P)$ alırsak ispat benzer yolla gösterilebilir.

**KAYNAKÇA**


Ali ve diğ., 2009, On some new operations in soft set theory, *Comput. Math. Appl.* 57, 1547-1553.

Aseev, S.M., 1986, Quasilinear operators and their application in the theory of multivalued mappings, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Issue 2, 23-52.*

Aygünoğlu, A. & Aygün, H., 2012, Some notes on soft topological spaces,. *Neural Comput. Appl*.,21, 113-119.

Banazılı, H. K., 2014, Quasilineer uzaylar arasında tanımlı quasilineer operatörler üzerine,Y. L. Tezi, *İnönü Üniversitesi,* Malatya, 51-52.

Bhaskar, T., Lakshmikantham, V. & Vasundhara, D.J., 2006, Theory of set differential equations in metric spaces, *Cambridge:Cambridge Scientific Publishers.*

Bozkurt, H. & Yılmaz, Y., 2016a, New Inner Product Quasilinear spaces on ınterval numbers, *Journal of Function Spaces, Article,* ID 2619271, 9 pages.

Bozkurt, H. & Yılmaz, Y., 2016, Some new results on ınner product quasilinear spaces, *Cogent Mathematics,* 3:1194801, 10 pages.

Bozkurt, H., 2016, Inner Product Quasilinear spaces and some generalizations, PhD Thesis, *İnönü University, Turkey.*

Bozkurt, H., 2020, Soft quasilinear spaces and soft normed quasilinear spaces, *Adıyaman University Journel of Science,* 10(2), 506-523.

Bozkurt, H., 2022, Soft quasilineer operators, *Mathematical Sciences and applications E-Notes*, 10(2), 82-92.

Çakan, S. & Yılmaz, Y., 2015, Quasilineer uzaylarda alt ve üst yarı baz kavramları. *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi,* 31(2), 481-488.

Çakan, S. & Yılmaz, Y., 2015(a), Normed proper quasilinear spaces. *Journal of linear Science and Applications,* 8, 816-836.

Çakan, S., 2016, Normlu quasilineer uzaylar teorisine ilişkin bazı yeni sonuçlar, *Malatya: İnönü University.*

Das, S. & Samanta, S. 2012, Soft real sets, soft real numbers and their properties, *J. Fuzzy Math*., vol:20 no:3 551-576.

Das, S. & Samanta, S. 2013(a), On soft metric space, *Annals of Fuzzy Math. and Inform,* 77-94.

Das, S. & Samanta, S. 2013, On soft metric spaces, *J. Fuzzy Math*, 707-734.

Das, S., Majumdar, P. & Samanta, S.K., 2013, On soft linear spaces and soft normed linear spaces, *Annals of Fuzzy Math. and Inform,* 91-109.

Debnath, L. & Mikusinski, P., 2005, Introduction to Hilbert Spaces with applications, *USA: Elsevier Academic Press.*

Gönci, M. Ş. & Bozkurt, H., -, Soft ınner product quasilinear spaces, *Turkic Word Mathematical Society Journal of* Appliedand Engineering *Mathematics*, V. N. pp. (Accepted).

Gönci, M. Ş. & Bozkurt, H. 2023, Some new results on soft quasilinear spaces, *Open J. Math. Sci*, *s. Sci*, 7,118-126. Doi:10.30538/oms2023.0200.

Kreyszing, E. 1989, Introductory functional analysis with applications, *New York: John Wiley-Sons Inc.* .

Maddox, I. J., 1973, Elements of functional analysis with applications, *John Wiley , New York.*

Maji ve diğ., 2003, Soft set theory, *Comput. Math. Appl*. 45, 555-562.

Markow, S., 2000, On the algebraic properties of convex bodies and some applications, *J.Convex Anal.*, 7(1), 129-166.

Markow, S., 2004, On quasilinear spaces of convex bodies and intervals, *J.Comput. Appl. Math.*, 162(1), 93-112.

Molodtsov, D. 1999, Soft set theory-first results, *Comput. Math. Appl*, 37, 19-31.

Pei, D. & Miao, D., 2005, From sets to information systems, *Granular Computing, IEEE International Conference, Volume*-2, 617-622.

Wilansky, A., 1978, Modern methods in topological vector spaces, *McGraw-Hill Int. Book Comp. New York.*

Yılmaz, Y. & Bozkurt, H. 2016, New ınner product quasilineer spaces on ınterval numbers. *Journal of Function Spaces, Article ID 2619271, 9* pages.

Yılmaz, Y., Çakan S. & Aytekin, Ş. 2012, Topological quasilinear spaces, *Abstract and Applied Analysis, Article ID 951374,10* pages.

# ÖZGEÇMİŞ

## KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Fatma BULAK

**Uyruğu** : T.C.

## EĞİTİM

| **Derece** | | **Adı, İlçe, İl** | **Bitirme Yılı** |
|---|---|---|---|
| Üniversite | : | Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi | 2008 |
| Yüksek Lisans | : | Batman Üniversitesi | … |
| Doktora | : | | |

## İŞ DENEYİMLERİ

| **Yıl** | **Kurum** | **Görevi** |
|---|---|---|
| 2011-… | Milli Eğitim Bakanlığı | Öğretmen |

## UZMANLIK ALANI

## YABANCI DİLLER

İngilizce

## YAYINLAR*

BULAK, F. & BOZKURT, H. 2023, On Soft Normed Quasilineer Spaces, *Journal of New Theory*, Volume 43, 11-22.(Yüksek Lisans tezinden yapılmıştır).

BULAK, F. & BOZKURT, H. Soft Quasilinear Operators in Soft Normed Quasilinear Spaces, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems* (Kabul Edildi) (Yüksek Lisans tezinden yapılmıştır).