

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
TOPOLOJİ BİLİM DALI**

ESNEK NORMLU UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Ümmü Gülsün Nur KOPARAN

**Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ**



MANİSA-2023

TEZ ONAYI

Ümmü Gülsün Nur KOPARAN tarafından hazırlanan “**Esnek Normlu Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri**” adlı tez çalışması 05 /01/2023 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi

Prof. Dr. Ali MUTLU
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi

Dr. Öğr. Üyesi Utku GÜRDAL
Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Ümmü Gülsün Nur KOPARAN



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	II
TEŞEKKÜR.....	III
ÖZET.....	IV
ABSTRACT.....	V
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	3
2.1. Esnek Küme Teorisi	3
2.2. Esnek Metrik Uzaylar ve Normlu Uzaylar.....	6
3. MATERYAL VE YÖNTEMLER.....	11
3.1. Esnek Normlu Uzaylar	11
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	17
5. UYGULAMALAR	25
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	28
KAYNAKLAR	29
ÖZGEÇMİŞ	33

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Φ	Boş Esnek Küme
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\prec$	Esnek Anlamda Önce Gelme
$\tilde{\mathbb{D}}_s$	Esnek Metrik
$((S, E), \tilde{\mathbb{D}}_s)$	Esnek Metrik Uzay
$\{(S_n, E)\}_{n=1}^{\infty}$	Esnek Dizi
(S, E)	Esnek Küme
$\tilde{\subseteq}$	Esnek Alt Küme
$\tilde{\cup}$	Esnek Kümelerde Birleşim
$\tilde{\cap}$	Esnek Kümelerde Kesişim
$(e, S(e))$	Esnek Nokta
$\ , \ $	Esnek Norm
$((S, E), \ , \)$	Esnek Normlu Uzay
(b, t)	Esnek Parametrik Skaler
$(\mathbb{X}, \omega, A)$	Esnek Topolojik Uzay
$\tilde{\pi}$	Skaler Değerli Parametrik Fonksiyon
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan hem lisans öğrenim hayatım hem de lisansüstü öğrenim hayatımda desteğini her daim hissettiğim, kendi bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan her daim bilgisini deneyimini benden esirgemeyen ve yüksek lisans yolculuğuna beni teşvik eden danışmanım sayın Üyesi Simge ÖZTUNÇ' a , bu süreçte aynı alanda yardım aldığım tecrübelerinden ve bilgilerinden faydalandığım bizleri kızı gibi görüp manevi desteğini hep hissettiren Prof. Dr. Ali MUTLU' ya , çalışmalarım sırasında maddi ve manevi desteklerini hiç esirgemeyen bu günlere gelmem de büyük payı olan ve yanımda olan aileme ve dostlarıma yürekten teşekkür ederim

Ümmü Gülsün Nur KOPARAN
MANİSA,2023

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Esnek Normlu Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri Ümmü Gülsün Nur KOPARAN

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ

Bu tez çalışmasında bir parametre kümesi ile birlikte esnek noktalar göz önünde bulundurularak esnek normlu uzaylar farklı bir bakış açısı ile incelenmiştir. Esnek süreklilik, esnek dizi, esnek yakınsak dizi ve esnek Cauchy dizisi gibi kavramlar esnek normlu uzaylarda yeniden ifade edilmiştir. Esnek büzülme dönüşümünün esnek normlu uzaylarda verilmesinin ardından Banach büzülme teoremi ve çeşitli sabit nokta teoremleri esnek normlu uzaylarda ifade ve ispat edilmiştir. Bununla birlikte teoremleri destekleyen örnekler uygulama olarak verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Esnek Küme, Esnek Norm, Esnek Normlu Uzay, Esnek Sabit Nokta Teoremi.

2023, 41 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

Ümmü Gülsün Nur KOPARAN

**Fixed Point Theorems in Soft Normed Spaces
Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Simge ÖZTUNÇ

In this thesis study, soft normed spaces are investigated from different perspective by considering soft points with a parameter set. Some concepts such as soft continuity, soft sequence, soft convergent sequence and soft Cauchy Sequence are restated in soft normed spaces. After the soft contraction mapping is given in soft normed spaces, Banach contraction theorem and various fixed point theorems are expressed and proven in soft normed spaces. However, examples supporting the theorems are given as applications.

Keywords: Soft Set, Soft Norm, Soft Normed Space, Soft Fixed Point Theorem.

2023, 41 pages

1. GİRİŞ

Esnek (soft) küme kavramı 1999 yılında Molodtsov [1] tarafından çeşitli belirsizlikleri ortadan kaldırma amacıyla ortaya atılmıştır. Birçok matematikçi tarafından yeni bir araç olarak kullanılan esnek (soft) küme teorisi matematiğin ilgi çekici ve hızla gelişen bir konusu olarak pek çok alanda uygulama alanına sahiptir. Esnek küme tanımının Molodtsov tarafından 1999 yılında verilme sinin ardından Maji [2] 2003 de esnek kümelerin ilk pratik uygulamaları olarak elementer küme işlemlerini vermiştir. Bununla birlikte Pradip Kumar Maji, Ranjit Biswas ve A. Ranjan Roy [3] ise esnek kümeler üzerinde cebirsel işlemler üzerine çalışmalarda bulunmuştur.

Esnek (soft) topolojik uzay kavramı 2011 yılında Shabir ve Naz [4] tarafından ortaya atılmış olup esnek küme teorisi topoloji alanında da hızla gelişmeye başlamıştır. Aygünoğlu Aygün [5], Çağman ve Enginoğlu [6], Gergeus [7], Zorlutuna ve Akdağ [8] esnek topolojik uzaylar üzerinde çalışarak esnek küme teorisinin topolojik gelişimine katkı sağlamışlardır. Bununla birlikte esnek dönüşümler ve esnek sürekli dönüşümler Aras, Sönmez, Çakallı [9], Zorlutuna ve Çakır [10] esnek (dönüşümler ve esnek sürekli dönüşümlerle ilgili çalışmalar ortaya çıkararak esnek küme teorisinin farklı alanlarda da gelişimini sağlamışlardır. Ayrıca esnek küme teorisi ve esnek topolojik uzaylarla ilgili farklı özellikler Aras, Poşul [11] ve Varol, Aygün [12] ve tarafından yapılan çalışmalarda incelenmiştir.

Diğer taraftan 1992 yılında Polonyalı Matematikçi Stefan Banach [13] ile başlayan sabit nokta teorisi çalışmaları gerek matematik gerekse fen, mühendislik, tıp ve ekonomi gibi alanlarda uygulama alanına sahip bir konu olarak günümüze dek hızlı bir şekilde gelişim göstermiştir.

Normlu lineer uzaylardaki sabit nokta ile ilgili çalışmalar ise 1910 senesinde Hollandalı Matematikçi L.E. Brouwer [14] ile başlamıştır. S. Banach tam metrik uzaylarda dönüşümün sabit noktasının varlığını garanti ederken L.E. Brouwer ise $\mathbb{R}^n$ uzayının kapalı birim yuvarlarından kendi üzerine tanımlı her sürekli dönüşümün sabit noktasının varlığını ispatlamıştır. L.E. Brouwer çalışmasında sabit nokta teoremlerinden farklı bir şekilde olarak sabit noktanın tek olduğunu ve nasıl bulunabileceğini de ortaya koymuştur.

Literatürde yer alan önemli sabit nokta teoremleri için [15-25] çalışmalarına başvurulabilir.

Esnek (soft) küme teorisinin gelişme gösterdiği alanlardan biri de esnek metrik uzaylar olmuştur. Esnek metrik uzay tanımı 2013 yılında Das ve Samantha [26,27] tarafından ortaya atılmıştır.

2017 yılında İranlı Matematikçi Hasan Hosseinzadeh [28] esnek noktaları Das ve Samantha'nın çalışmasından farklı olarak göz önünde bulundurarak esnek metrik tanımını yeniden ifade etmiş ve farklı bir vizyon oluşturmuştur. Hosseinzadeh'in bu çalışmasında esnek metrik uzayların sahip olduğu temel özellikler incelenmiştir. Ayrıca esnek büzülme, esnek sabit nokta kavramlarının tanımlanıp incelenmesi ile Banach, Caristi gibi çeşitli sabit nokta teoremleri esnek metrik uzaylarda ifade ve ispat edilmiştir.

Esnek dönüşümler esnek metrik uzaylar ve çeşitli tipte esnek metrik uzaylar ve esnek metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremleri [29-35] de bulunabilir.

Esnek metrik uzayların esnek sabit nokta teorisi gibi alanlarda çalışılmasının yanı sıra esnek küme yapısı lineer uzaylar ve normlu uzaylarla birlikte çalışılarak esnek lineer uzay ve esnek normlu uzay kavramları Das, Majumdar ve Samanta [36, 37] tarafından literatüre kazandırılmıştır. Ayrıca esnek (soft) normlu uzayların birtakım özellikleri Yazar, Bilgin, Bayramov ve Aras [38] tarafından çalışılmıştır. Esnek normlu uzaylarla ilişkili olarak esnek iç çarpım uzayları ile ilgili çalışmalar Das ve Samanta [39-41] tarafından ortaya atılmıştır.

Bu tez çalışmasının amacı esnek normlu uzayları farklı bir bakış açısı ile incelemek ve esnek süreklilik, esnek dizi, esnek yakınsak dizi ve esnek Cauchy dizisi gibi kavramlar esnek normlu uzaylarda yeniden ifade etmektir. Bu tez çalışmasında belirgin olarak Banach büzülme teoremi ve çeşitli sabit nokta teoremlerinin esnek normlu uzaylarda ifade ve ispat edilmesi amaçlanmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu tez çalışmasının ilk bölümünde de esnek (soft) küme teorisi ve sabit nokta teorisi ile ilgili literatürde yer alan bazı temel kavramlardan söz edilmiştir.

2.1. Esnek (soft) küme teorisi

Bu alt bölümde esnek (soft) kümeler ve esnek (soft) topolojilerle ilgili tez çalışmasında kullanılacak olan tanımlar ve bazı özellikler verilir.

$\mathbb{X}$ nesnelerin evrensel kümesi olsun. A kümesi $\mathbb{X}$ 'deki nesnelerle ilişkili parametrelerin kümesini göstere. $\mathfrak{P}(\mathbb{X})$, $\mathbb{X}$ 'in kuvvet kümesini ifade etsin ve $E, E' \subseteq A$ olsun.

Tanım 2.1.1. [1] $\mathbb{X}$ evrensel bir küme ve E parametrelerin bir kümesi olsun. $\mathfrak{P}(\mathbb{X})$, $\mathbb{X}$ 'in kuvvet kümesi ve $E \subseteq A$ olmak üzere;

$$S : E \rightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{X})$$

ise (S, E) çiftine $\mathbb{X}$ kümesi üzerinde bir esnek (soft) küme adı verilir.

Herhangi bir (S, E) esnek (soft) kümesi, her $a \in E$ için $S(a) \neq \emptyset$ ve her $a \in A \setminus E$ için $S(a) = \emptyset$ olmak üzere (S, A) şeklinde bir esnek (soft) kümeye genişletilebilir.

Tanım 2.1.2. [2] (S, E) ve (S', E') , X üzerinde iki esnek (soft) küme olsun.

i) $E \subseteq E'$, ve

ii) Her $e \in E$ için $S(e) \subseteq S'(e)$ ise

(S, E) 'ye (S', E') 'nin esnek (soft) alt kümesidir denir ve $(S, E) \subseteq (S', E')$ ile gösterilir. (S, E) , (S', E') 'nin esnek (soft) alt kümesi ise (S, E) 'ya (S', E') 'nin esnek (soft) üst kümesi denir ve $(S, E) \supseteq (S', E')$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3. [2] $\mathbb{X}$ üzerindeki (S, E) ve (S', E') şeklinde iki esnek (soft) kümenin kesişimi $E'' = E \cap E'$ ve $\forall e'' \in E''$ için $S''(e'') = S(e) \cap S'(e)$ olmak üzere (S'', E'') şeklinde bir esnek (soft) kümedir. Bu kesişimi $(S, E) \tilde{\cap} (S', E') = (S'', E'')$ ile gösteririz.

Tanım 2.1.4. [2] $\mathbb{X}$ üzerinde iki (S, E) ve (S', E') esnek (soft) kümesinin birleşimi $E'' = E \cup E'$ ve $\forall e'' \in E''$ için,

$$S''(e'') = \begin{cases} S(e''), & e'' \in E - E' \\ S'(e''), & e'' \in E' - E \\ S(e'') \cup S'(e''), & e'' \in E \cap E' \end{cases}$$

olmak üzere (S'', E'') esnek (soft) kümesidir.

Bu bağıntı $(S, E) \tilde{\cup} (S', E') = (S'', E'')$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5. [2] $\mathbb{X}$ üzerindeki bir (S, E) esnek (soft) kümesi $\forall e \in E$ için $S(e) = \emptyset$ ise bir boş (null) esnek (soft) küme olarak adlandırılır ve Φ ile gösterilir.

Tanım 2.1.6. [2] $\mathbb{X}$ üzerindeki $\tilde{\mathbb{X}}$ mutlak esnek (soft) kümesi $\forall e \in E$ için $S(e) = \mathbb{X}$ olacak şekilde tanımlı bir $(S, \mathbb{X})$ esnek (soft) kümesidir.

Tanım 2.1.7. [2] (S, E) , $\mathbb{X}$ üzerinde bir esnek (soft) küme olsun. (S, E) 'nin relatif tümleyeni $(S, E)^c$ olarak gösterilir ve $S^c : E \rightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{X})$, her $e \in E$ için $S^c(a) = \mathbb{X} - S(e)$ ile verilen bir dönüşüm olmak üzere $(S, E)^c = (S^c, E)$ ile tanımlıdır.

Tanım 2.1.8. [2] (S, E) ve (S', E') , $\mathbb{X}$ üzerinde iki esnek (soft) küme olsun. Bu takdirde $(S, E) - (S', E') = \{(\alpha, S(\alpha)) : S(\alpha) \notin S'(B), \alpha \notin E'\}$ esnek (soft) kümesidir.

Tanım 2.1.9. [4] ω , $\mathbb{X}$ üzerinde esnek (soft) kümelerin bir koleksiyonu ve A parametre kümesi olsun. Bu takdirde ω aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa $\mathbb{X}$ üzerinde bir esnek (soft) topoloji olarak adlandırılır.

i) $\Phi, \tilde{\mathbb{X}} = (S, \mathbb{X}) \in \omega$,

ii) ω 'daki herhangi (keyfi) sayıda esnek (soft) kümelerin birleşimi ω 'ya aittir.

iii) ω 'daki sonlu sayıda esnek (soft) kümenin kesişimi yine ω 'ya aittir.

$(\mathbb{X}, \omega, A)$ üçlüsüne $\mathbb{X}$ üzerinde bir esnek (soft) topolojik uzay denir.

Tanım 2.1.10. [9, 10] $(\mathbb{X}, \omega, A)$ ve $(\mathbb{Y}, \omega', A)$ iki esnek (soft) topolojik uzay olsun.

$f : (\mathbb{X}, \omega, A) \rightarrow (\mathbb{Y}, \omega', A)$ bir dönüşüm olsun. $(f(x_e), A)$ 'nin her bir (S', A) esnek

(soft) komşuluğu için $f((S, A)) \subset (S', A)$ olacak şekilde (x_e, E) 'nin bir (F, E) esnek (soft) komşuluğu mevcutsa bu takdirde f 'e (x_e, A) ' da esnek (soft) sürekli dönüşüm denir.

Lemma 2.1.11. [9] $(\mathbb{X}, \omega, A)$ esnek (soft) topolojik uzay olsun. $I_{\mathbb{X}} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ birim dönüşümü esnek (soft) sürekli olmak zorunda değildir.

İspat: $\mathbb{X} = \{k_1, k_2, k_3\}$, $A = \{a_1, a_2\}$ ve $\omega = \{\Phi, \tilde{\mathbb{X}}, (S_1, A), (S_2, A), (S_3, A), (S_4, A)\}$ ve $\omega' = \{\Phi, \tilde{\mathbb{X}}, (S'_1, A), (S'_2, A), (S'_3, A), (S'_4, A)\}$, $\mathbb{X}$ üzerinde iki esnek (soft) topolojik uzay ve

$(S_1, A), (S_2, A), (S_3, A), (S_4, A), (S'_1, A), (S'_2, A), (S'_3, A), (S'_4, A)$, $\mathbb{X}$ üzerinde esnek (soft) açık kümeler olmak üzere

$$S_1(a_1) = \{k_2\}, S_1(a_2) = \{k_1\}, S_2(a_1) = \{k_2, k_3\}, S_1(a_1) = \{k_1\}, S_2(a_2) = \{k_1, k_2\}, S_3(a_1) = \{k_3\},$$

$$S_3(a_2) = \{k_1, k_2\}, S_4(a_1) = \emptyset, S_2(a_2) = \{k_1\};$$

ve

$$S'_1(a_1) = \{k_2\}, S'_1(a_2) = \{k_1\}, S'_2(a_1) = \{k_2, k_3\}, S'_2(a_2) = \{k_1, k_2\}, S'_3(a_1) = \{k_1, k_2\},$$

$$S'_3(a_2) = \mathbb{X}, G'_4(a_1) = \{k_2\}, G'_4(a_2) = \{k_1, k_2\}$$

olarak tanımlansın. $I_{\mathbb{X}}^{-1}((S'_3, A)) = \{(a_1, \{k_1, k_2\}), (a_2, \mathbb{X})\}$ ters görüntüsü $(\mathbb{X}, \omega, A)$ nın elemanı değildir ve benzer şekilde

$I_{\mathbb{X}}^{-1}((S'_4, A)) = \{(a_1, \{k_2\}), (a_2, \{k_1, k_2\})\}$ ters görüntüsü $(\mathbb{X}, \omega, A)$ nın elemanı değildir. Bundan dolayı $I_{\mathbb{X}} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ dönüşümü esnek (soft) sürekli değildir.

Tanım 2.1.12. [28] $E \subseteq A$ parametrelerin bir kümesi olsun. (e, r) ve (e', r') iki esnek (soft) parametrik skaler olsun. Bu takdirde esnek (soft) iki parametrik skalerin toplamını ve esnek (soft) parametrik skalerin bir skalerle çarpımını aşağıdaki şekilde ifade edriz.

$$(e, r) \dot{+} (e', r') = (\{e, e'\}, r + r') \text{ ve}$$

Her $\gamma \in \mathbb{R}$ için $\gamma(e, r) = (e, \gamma r)$.

Tanım 2.1.13. [28] (S, E) , $\mathbb{X}$ üzerinde bir esnek (soft) küme olsun.

$f(E, S(E)) = (f_1, f_2)(E, S(E))$ olacak şekilde $f_1 : E \rightarrow E$ ve $f_2 : S(E) \rightarrow \mathbb{R}$

fonksiyonları varsa (S, E) üzerindeki bir f fonksiyonu parametrik skaler değerli bir fonksiyon olarak adlandırılır. Benzer şekilde yukarıdaki tanım $f_1 : E \times E \rightarrow E$ ve $f_2 : S(E) \times S(E) \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$f(E \times E, S(E) \times S(E)) = (f_1, f_2)(E \times E, S(E) \times S(E))$ ile $f : (S, E) \times (S, E) \rightarrow (E, \mathbb{R})$ şeklinde genişletilebilir.

2.2. Esnek (soft) Metrik Uzaylar ve Normlu Uzaylar

Bu alt bölümde metrik uzaylar, normlu uzaylar ve esnek (soft) kümeler (uzaylar) üzerinde tanımlı esnek (soft) metriklerle ilgili temel kavramlar hatırlatılacaktır.

Tanım 2.2.1. [42] A boştan farklı bir küme olmak üzere $D : A \times A \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$M(1) \quad \forall a, b \in A, D(a, b) \geq 0$$

$$M(2) \quad \forall a, b \in A, D(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$$

$$M(3) \quad \forall a, b \in A, D(a, b) = D(b, a)$$

$$M(4) \quad \forall a, b, c \in A, D(a, c) \leq D(a, b) + D(b, c)$$

özelliklerini sağlıyorsa D 'ye A üzerinde bir metrik ve (A, D) ikilisine de metrik uzay denir.

Tanım 2.2.2. [43] A bir vektör uzayı olsun. $\|\cdot\| : A \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna A üzerinde bir norm, $(A, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir.

$$[N_1] \quad \text{Her } a \in A \text{ için } \|a\| \geq 0,$$

$$[N_2] \quad \text{Her } a \in A \text{ için } \|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0,$$

$$[N_3] \quad \text{Her } k \in \mathbb{R} \text{ ve her } a \in A \text{ için } \|ka\| = |k| \|a\|,$$

$$[N_4] \quad \text{Her } a, b \in A \text{ için } \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

Tanım 2.2.3. [44] $A \neq \emptyset$ ve $a \in A$ olsun. $\rho : A \rightarrow A$ dönüşümü için $\rho(a) = a$ ise $a \in A$, ρ 'nun sabit noktası olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.4. [44] (A, D) metrik uzay ve $K : A \rightarrow A$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer her $a, b \in A$ için

$$D(K(a), K(b)) \leq \sigma D(a, b)$$

şartını sağlayan bir $\sigma \geq 0$ sabiti bulunabiliyorsa K 'ya Lipschitz dönüşümü (Lipschitz mapping) denir. Eğer bu eşitsizlikte $0 \leq \sigma < 1$ ise K 'ya büzülme veya daralma (contraction) dönüşümü ve $\sigma = 1$ ise K 'ya genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm adı verilir. Burada $a \neq b$ olmak üzere her $a, b \in A$ için

$$D(K(a), K(b)) \leq \sigma D(a, b)$$

şartı sağlanıyorsa K 'ya büzülebilir (contractive) dönüşüm denir. Bu durumda yukarıda bahsettiğimiz dönüşümlerle ilgili ilişkiyi aşağıdaki şekilde verebiliriz:

Büzülme (contraction) dönüşümü $\Rightarrow$ Büzülebilir (contractive) dönüşüm $\Rightarrow$ Genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm $\Rightarrow$ Lipschitz şartını sağlayan dönüşüm.

Teorem 2.2.5. [13] (A, D) bir tam metrik uzay ve $K : A \rightarrow A$ bir dönüşüm olmak üzere her $a, b \in A$ için

$$D(K(a), K(b)) \leq \sigma D(a, b)$$

olacak şekilde bir $\sigma \in (0, 1)$ sabiti mevcut ise K 'nın A 'de bir tek sabit noktası vardır.

Tanım 2.2.6. [28] (S, E) , $\mathbb{X}$ üzerinde bir esnek (soft) küme olsun. $\tilde{\pi} : E \times E \rightarrow E$ bir parametrik skaler değerli bir fonksiyon olsun. $\tilde{\mathbb{D}}_s$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\tilde{\mathbb{D}}_s : (S, E) \times (S, E) \rightarrow (E, \mathbb{R}^+ \cup \{0\})$ parametrik skaler değerli fonksiyonu $\mathbb{X}$ üzerinde bir esnek (soft) metrik olarak adlandırılır.

$\forall (\mu, S(\mu)), (\eta, S(\eta)), (\kappa, S(\kappa)) \in (S, E)$ için

1. $\tilde{\mathbb{D}}_s((\mu, S(\mu)), (\eta, S(\eta))) \succeq (\tilde{\pi}_s(\mu, \eta), 0)$, $e = e'$ iken eşitlik sağlanır.
2. Her $\mu, \eta \in E$ için $\tilde{\mathbb{D}}_s((\mu, S(\mu)), (\eta, S(\eta))) = \tilde{\mathbb{D}}_s((\eta, S(\eta)), (\mu, S(\mu)))$
3. Her $\mu, \eta, \kappa \in E$ için

$\tilde{\mathbb{D}}_s((\mu, S(\mu)), (\kappa, S(\kappa))) \preceq \tilde{\mathbb{D}}_s((\mu, S(\mu)), (\eta, S(\eta))) \dot{+} \tilde{\mathbb{D}}_s((\eta, S(\eta)), (\kappa, S(\kappa)))$
 $((S, E), \tilde{\mathbb{D}}_s)$ ikilisine $\mathbb{X}$ üzerinde bir esnek (soft) metrik uzay denir.

Tanım 2.2.7. [28] (S, E) ve (S', E') sırasıyla $\mathbb{X}$ ve $\mathbb{Y}$ üzerinde iki esnek (soft) küme olsun.

$s_1 : E \rightarrow E'$ ve $s_2 : S(E) \rightarrow S'(E')$, $S(E) = \{S(p) : p \in E\}$ ve $S'(E') = \{S'(r) : r \in E'\}$ olmak üzere dönüşümler olsun. Bu takdirde $s = (s_1, s_2) : (S, E) \rightarrow (S', E')$ ikilisi

$$s(V, B)(r) = \begin{cases} \bigcup_{p \in s_1^{-1}(r) \cap B} s_2(V(p)) & s_1^{-1}(r) \cap B \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlıdır.

Bu durumda s esnek (soft) dönüşüm olarak adlandırılır ve $(s(V, E), C)$, (V, B) esnek (soft) kümesinin esnek (soft) görüntüsü olarak adlandırılır. $(W, C) \in (S', E')$ olsun. Bu takdirde (W, C) 'nin yukarıda tanımlanan s esnek (soft) dönüşümü altındaki ters görüntü kümesi

$$f^{-1}(W, C)(p) = \begin{cases} s_2^{-1}(W(s_1(p))) & s_1(p) \in C \\ \emptyset & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere, $s^{-1}(W, C)$ ile gösterilen $\mathbb{X}$ üzerinde esnek (soft) kümedir.

Tanım 2.2.8. [28] $E \subseteq A$ parametrelerin kümesi olsun. Esnek (soft) parametrik skalerlerin bir dizisi $\{(e_n, t_n)\}$ 'dir. ($i \neq j$ için $e_i = e_j$ olabilir) $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$ olacak şekilde bir $t \in \mathbb{R}$ mevcutsa $\{(e_n, t_n)\}$ bir esnek (soft) parametrik skalere yakınsaktır denir ve $\forall e \in E$ için $(e_n, t_n) \rightarrow (e, t)$ olarak yazılır.

Tanım 2.2.9. [28] (S, E) , $\mathbb{X}$ üzerinde bir esnek (soft) küme olsun. (S, E) 'daki bir esnek (soft) dizi $n \in \mathbb{N}$ için (S_n, E) , (S, E) 'nin bir esnek (soft) alt kümesi olacak şekilde $s(n) = (S_n, E)$ ile tanımlı bir $s : \mathbb{N} \rightarrow (S, E)$ fonksiyonudur ve $\{(S_n, E)\}_{n=1}^{\infty}$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.10. [28] (S, E) , $\mathbb{X}$ üzerinde bir esnek (soft) küme olsun. $\tilde{\mathbb{D}}_s$, (S, E) üzerinde bir esnek (soft) metrik $\{(S_n, E)\}_{n=1}^{\infty}$, (S, E) 'de bir esnek (soft) dizi ve

$(p, S(p)) \in (S, E)$ olsun. Bu takdirde her ϵ pozitif sayısı için $n \geq N$ olmak üzere her n doğal sayısı için $\tilde{\mathbb{D}}_s((p, S(p)), (r, S(r))) \preceq (\tilde{\pi}_s(p, r), \epsilon)$ olacak şekilde bir N doğal sayısı mevcut ise $\{(S_n, E)\}_{n=1}^\infty$ esnek (soft) dizisi $(r, S(r))$ 'e esnek (soft) yakınsaktır denir.

Tanım 2.2.11. [28] (S, E) , $\mathbb{X}$ üzerinde bir esnek (soft) küme olsun. $\tilde{\mathbb{D}}_s$, (S, E) üzerinde bir esnek (soft) metrik, $\{(S_n, E)\}_{n=1}^\infty$, (S, E) 'da bir esnek (soft) dizi olsun. Bu takdirde her ϵ pozitif sayısı için $n, m \geq N$ olmak üzere her n, m doğal sayısı için $\tilde{\mathbb{D}}_s((p, S_n(p)), (p, S_m(p))) \preceq (\tilde{\pi}_s(p, p), \epsilon)$ olacak şekilde bir N doğal sayısı mevcut ise $\{(S_n, E)\}_{n=1}^\infty$ dizisine bir esnek (soft) Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.2.12. [28] $E \subseteq A$ parametrelerin bir kümesi olsun. $\{(e_n, t_n)\}$ ($i \neq j$ için $e_i = e_j$ olabilir) esnek (soft) parametrik skalerlerin bir dizisi olsun. $(e_{n+1}, t_{n+1}) \preceq (e_n, t_n)$ ise $\{(e_n, t_n)\}$ azalan $(e_n, t_n) \preceq (e_{n+1}, t_{n+1})$ ise $\{(e_n, t_n)\}$ dizisi artan olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.13. [28] (S, E) , $\mathbb{X}$ üzerinde bir esnek (soft) küme olsun.

$s(S, E) = (s_1, s_2)(E, S(E))$ olacak şekilde $S_1 : E \rightarrow E$ ve $s_2 : S(E) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları varsa (S, E) üzerindeki parametrik skaler değerli s fonksiyonu azalan (artan) olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.14. [28] (S, E) , $\mathbb{X}$ üzerinde bir esnek (soft) ve $\tilde{\mathbb{D}}_s$, (S, E) üzerinde bir esnek (soft) metrik olsun. Her $(c, a) \in (S, E)$ esnek (soft) noktası için (c, a) ve $(e, S(e))$ arasındaki uzaklık $\tilde{\mathbb{D}}_s((c, a), (e, S(e)))$ ile gösterilir.

$\mathbb{X}$, d metriği ile birlikte bir metrik uzay ise (c, a) ve $(e, S(e))$ arasındaki uzaklık

$\tilde{\mathbb{D}}_s((c, a), (e, S(e))) = (\tilde{\pi}(c, e), \inf_{y \in F(e)} d(a, y))$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.15. [12] $(\mathbb{X}, \omega, A)$ bir esnek (soft) topolojik uzay ve $(x, S(x)) \neq (y, S(y))$ olacak şekilde $(x, S(x)), (y, S(y)) \in \mathbb{X}$ olsun. $(x, S(x)) \in F_A$, $(y, S(y)) \in G_B$ ve $F_A \tilde{\cap} G_B = \Phi$ olacak şekilde F_A ve G_B esnek (soft) açık kümeleri mevcutsa

$(\mathbb{X}, \omega, A)$ esnek (soft) topolojik uzayı esnek (soft) Hausdorff uzayı veya esnek (soft) T_2 uzayı olarak adlandırılır.

Lemma 2.2.16. [28] Her esnek (soft) metrik uzay esnek (soft) Hausdorff uzayıdır.



3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

3.1. Esnek (soft) Normlu Uzaylar

Bu bölümde esnek (soft) normlu uzay tanımı, esnek (soft) elemanlar ve Husseinzadeh tarafından verilen esnek (soft) metrik tanımı göz önüne alınarak yeniden verilmiştir. Esnek (soft) sabit nokta teoremlerinde kullanmaya yönelik esnek (soft) normlu metriğin kullanılmasıyla esnek (soft) dizi, esnek (soft) yakınsak dizi, esnek (soft) Cauchy dizisi tanımları ifade edilmiştir.

Tanım 3.1.1. [28] $E \subseteq A$ parametrelerin bir kümesini temsil etsin. Eğer $t \in \mathbb{R}$ ve $e \in E$ ise (e, t) sıralı ikilisi esnek (soft) parametrik skaler olarak adlandırılır. $t = 0$ ise (e, t) sıralı ikilisi esnek (soft) anlamda 0 (sıfır) olarak adlandırılır. $t \geq 0$ ise (e, t) esnek (soft) parametrik skaleri negatif olmayan (nonnegatif) olarak isimlendirilir. (e, t) ve (e', t') iki esnek (soft) parametrik skalerler olsun. $t \geq t'$ ise (e, t) 'nin (e', t') 'den küçük olmadığını söylenir ve $(e, t) \succeq (e', t')$ olarak ifade edilir.

Tanım 3.1.2. [36, 37] K cismi üzerinde bir vektör uzayı V olsun ve A parametreler kümesi olsun. G , V vektör uzayı üzerinde esnek (soft) küme olsun.

$\forall \lambda \in A$ ve $G(\lambda)$ V nin alt uzayı olmak üzere G ye K cismi üzerinde V vektör uzayının lineer uzayıdır denir.

Tanım 3.1.3. $(S, E); SV(\tilde{X})$ esnek (soft) kümesinin bir alt kümesi olmak üzere

$$\|, \|: (S, E) \rightarrow (E, \mathbb{R}^+ \cup \{0\})$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa (S, E) üzerinde esnek (soft) norm olarak adlandırılır:

N1) $\forall (\alpha, S(\alpha)) \in (S, E)$ için

$\|(\alpha, S(\alpha))\| \succeq (\tilde{\pi}_s(\alpha, \alpha), 0)$; $\|(\alpha, S(\alpha))\| = (\tilde{\pi}_s(\alpha, \alpha), 0) \Leftrightarrow (\alpha, S(\alpha)), (S, E)$ da esnek (soft) sıfır vektörüdür

N2) $\forall (\alpha, S(\alpha)) \in (S, E)$ ve $(\underline{m}, t)$ parametrik skaler olmak üzere

$$\|(\underline{m}, t)(\alpha, S(\alpha))\| = (\underline{m}, |t|) \|(\alpha, S(\alpha))\|$$

N3) $\forall (\alpha, S(\alpha)), (\beta, S(\beta)) \in (S, E)$ için

$$\|(\alpha, S(\alpha)) + (\beta, S(\beta))\| \preceq \|(\alpha, S(\alpha))\| + \|(\beta, S(\beta))\|.$$

$\mathbb{X}$ üzerindeki (S, E) esnek (soft) vektör uzayına esnek (soft) norm ile birlikte esnek (soft) normlu vektör uzayı denir ve $((S, E), \|\cdot\|)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.4. (S, E) , $\mathbb{X}$ üzerinde esnek (soft) küme ve $\|\cdot\|$ esnek (soft) norm ve p pozitif reel sayı olsun.

$(e^\bullet, p)$ esnek (soft) yuvarın yarıçapı olmak üzere $B_{\|\cdot\|}((e, S(e)), (e^\bullet, p))$ esnek (soft) yuvarı ;

$$\{(c, S(c)) \in (S, E) : \|(c, S(c)) - (e, S(e))\| \prec (\tilde{\pi}(c, e) = (e^\bullet, p))\}$$

olarak tanımlanır.

Esnek (soft) yuvar $B((e, S(e)), (e^\bullet, p))$ veya $B_{(e, p)}(e, S(e))$ olarak iki şekilde ifade edebiliriz.

Önerme 3.1.5. $((S, E), \|\cdot\|)$ uzayında her esnek (soft) normlu uzay esnek (soft) metrik uzaydır.

İspat: $((S, E), \|\cdot\|)$ esnek (soft) normlu uzay olsun. Esnek (soft) normu aşağıdaki gibi tanımlarsak

$$\forall (\mu, S(\mu)), (\eta, S(\eta)) \in (S, E) \text{ için}$$

$$\tilde{\mathbb{D}}_s((\mu, S(\mu)), (\eta, S(\eta))) = \|(\mu, S(\mu)) - (\eta, S(\eta))\|$$

ile tanımlı $\tilde{\mathbb{D}}_s$ esnek (soft) dönüşümünün esnek (soft) metrik aksiyomlarını sağladığını görmeliyiz:

$$\forall (\mu, S(\mu)), (\eta, S(\eta)) \in (S, E) \text{ için}$$

$$\mathbf{M1)} \text{ Esnek (soft) normun (N1) özelliğinden } \|(\mu, S(\mu)) - (\eta, S(\eta))\| \succeq (\tilde{\pi}_s(\mu, \eta), 0)$$

$$\text{olup,} \quad \tilde{\mathbb{D}}_s((\mu, S(\mu)), (\eta, S(\eta))) \succeq (\tilde{\pi}_s(\mu, \eta), 0) .$$

$$\tilde{\mathbb{D}}_s((\mu, S(\mu)), (\eta, S(\eta))) = \|(\mu, S(\mu)) - (\eta, S(\eta))\| = (\tilde{\pi}_s(\mu, \eta), 0)$$

$$\Leftrightarrow (\mu, S(\mu)) - (\eta, S(\eta)) = (\tilde{\pi}_s(\mu, \eta), 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mu, S(\mu)) = (\eta, S(\eta)) \Leftrightarrow \mu = \eta$$

M2) $\forall (\mu, S(\mu)), (\eta, S(\eta)) \in (S, E)$ için

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{D}}_s((\mu, S(\mu)), (\eta, S(\eta))) &= \|(\mu, S(\mu)) - (\eta, S(\eta))\| \\
&= \|(\tilde{\pi}_s(\mu, \eta), 1)(\eta, S(\eta)) - (\mu, S(\mu))\| \\
&= \|\tilde{\pi}_s(\mu, \eta), -1\| \|(\eta, S(\eta)) - (\mu, S(\mu))\| \\
&= \|(\eta, S(\eta)) - (\mu, S(\mu))\| \\
&= \tilde{\mathbb{D}}_s((\eta, S(\eta)), (\mu, S(\mu)))
\end{aligned}$$

M3) $(\mu, S(\mu)), (\eta, S(\eta)), (\kappa, S(\kappa)) \in (S, E)$ olsun. Esnek (soft) normun üçgen eşitsizliği özelliğinden

$$\|(\mu, S(\mu)) - (\kappa, S(\kappa))\| \leq \|(\mu, S(\mu)) - (\eta, S(\eta))\| + \|(\eta, S(\eta)) - (\kappa, S(\kappa))\|$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{D}}_s((\mu, S(\mu)), (\kappa, S(\kappa))) &\leq \tilde{\mathbb{D}}_s((\mu, S(\mu)), (\eta, S(\eta))) \\
&\quad + \tilde{\mathbb{D}}_s((\eta, S(\eta)), (\kappa, S(\kappa)))
\end{aligned}$$

Sonuç olarak esnek (soft) norm ile birlikte tanımlanan $\tilde{\mathbb{D}}_s$ dönüşümü bir esnek metrik olup, her esnek (soft) normlu uzay bir esnek (soft) metrik uzaydır. ■

Tanım 3.1.6. $\forall (e, S(e)) \in (S, E)$ ve $(e_0, S(e_0))$ keyfi bir esnek (soft) nokta olsun.

$(\tilde{\pi}(e, e_0), \varepsilon) \succeq (\tilde{\pi}(e, e_0), 0)$ parametrik skaleri için

$$\|(e, S(e)) - (e_0, S(e_0))\|_1 \prec (\tilde{\pi}(e, e_0), \delta) \quad \text{iken}$$

$$\|f((e, S(e))) - f((e_0, S(e_0)))\|_2 \preceq (\tilde{\pi}(e, e_0), \varepsilon)$$

olacak şekilde bir $(\tilde{\pi}(e, e_0), \delta) \succeq (\tilde{\pi}(e, e_0), 0)$ parametrik skaleri varsa f fonksiyonuna $(e_0, S(e_0))$ noktasında esnek (soft) süreklidir denir.

Eğer f her bir $(e_0, S(e_0)) \in (S, E)$ esnek noktasında esnek (soft) sürekli ise, f fonksiyonuna (S, E) da esnek (soft) süreklidir denir.

Teorem 3.1.7. $((S, E), \|\cdot\|, \|\cdot\|_1)$ ve $((S', E'), \|\cdot\|, \|\cdot\|_2)$ $\mathbb{X}$ ve $\mathbb{Y}$ uzayları üzerinde iki normlu metrik uzay olsun. Esnek (soft) sürekli s dönüşümü

$$s = (s_1, s_2) : ((S, E), \|\cdot\|_1) \rightarrow ((S', E'), \|\cdot\|_2)$$

olacak şekilde tanımlansın.

(S, E) üzerinde alınan her $(\tilde{\pi}_s(\mu, S(\mu)), \varepsilon) \succ (\tilde{\pi}_s(\mu, \eta), 0)$ sayısı için $\|((\mu, S(\mu)) - (\eta, S(\eta)))\|_1 \leq (\tilde{\pi}_s(\mu, \eta), \delta)$ olacak şekilde $(\tilde{\pi}_s(\mu, \eta), \delta) \succ (\tilde{\pi}_s(\mu, \eta), 0)$ sayısı vardır.

İspat: $s : ((S, E), \|\cdot\|_1) \rightarrow ((S', E'), \|\cdot\|_2)$ esnek (soft) sürekli dönüşüm $(\tilde{\pi}(\mu, \eta), \varepsilon) \succ (\tilde{\pi}_s(\mu, \eta), 0)$ ve $(\mu, S(\mu)) \in (S, E)$ olsun. $\forall \kappa \in E$ için $B_{\|\cdot\|_2}(s((\mu, S(\mu))), \tilde{\pi}_s(s_1(\tilde{\pi}(\mu, \kappa))), \varepsilon)$ esnek (soft) yuvarı $((S', E'), \|\cdot\|_2)$ de açıktır. s esnek (soft) sürekli dönüşüm olduğundan $s^{-1}(B_{\|\cdot\|_2}(s((\mu, S(\mu))), \tilde{\pi}_s'(s_1(\tilde{\pi}_s(\mu, \kappa))), \varepsilon)))$ ters görüntü kümesi de açıktır.

$$(\mu, S(\mu)) \in s^{-1}(B_{\|\cdot\|_2}(s((\mu, S(\mu))), \pi_s'(s_1(\tilde{\pi}_s(\mu, \kappa))), \varepsilon))).$$

Buradan $\forall \kappa \in E$ için $(\tilde{\pi}_s(\mu, \eta), \delta) \succ (\tilde{\pi}_s(\mu, \eta), 0)$ sayısı vardır öyle ki

$$\begin{aligned} (\mu, S(\mu)) &\in B_{\|\cdot\|_2}(s(((\mu, S(\mu))), \pi_s'(s_1(\tilde{\pi}_s(\mu, \kappa))), \delta))) \\ &\tilde{\subset} s^{-1}(B_{\|\cdot\|_2}(s((\mu, S(\mu))), \pi_s'(s_1(\tilde{\pi}_s(\mu, \kappa))), \varepsilon))) \end{aligned}$$

Eğer $k_{[s]} \in E$ için $\|(\mu, S(\mu)) - (\eta, S(\eta))\|_1 \leq (\tilde{\pi}_s(\mu, \eta), \delta)$, $(\eta, S(\eta)) \in B_{\|\cdot\|_1}(s(((\mu, S(\mu))), \pi_s'((\mu, \eta), \delta)))$ ise

$(\eta, S(\eta)) \in s^{-1}(B_{\|\cdot\|_2}(s((\eta, S(\eta))), \pi_s'(s_1(\tilde{\pi}_s(\mu, \kappa))), \varepsilon)))$ olduğundan

$s((\eta, S(\eta))) \in B_{\|\cdot\|_2}(s((\mu, S(\mu))), \tilde{\pi}_s(s_1(\tilde{\pi}_s(\mu, \kappa))), \varepsilon))$ yuvarına aittir.

Tersine olarak (W, C) kümesinin $((S', E'), \|\cdot\|_2)$ kümesinde esnek (soft) açık küme olduğunu varsayalım. $(\mu, S(\mu)) \in f^{-1}((W, C))$ olsun. (W, C) kümesi $((S', E'), \|\cdot\|_2)$ de açık küme olduğundan $B_{\|\cdot\|_2}(s((\mu, S(\mu))), \pi_s'(s_1(\tilde{\pi}_s(\mu, \kappa))), \varepsilon))$ esnek (soft) yuvarında $(\tilde{\pi}_s(\mu, \eta), \varepsilon) \succ (\tilde{\pi}_s(\mu, \eta), 0)$ sayısı vardır. ■

Teorem 3.1.8. $\mathbb{X}$ ve $\mathbb{Y}$ uzayları üzerinde $((S, E), \|\cdot\|_1)$ ve $((S, E), \|\cdot\|_2)$ iki esnek (soft) metrik uzay olsun.

$$s = (s_1, s_2) : ((S, E), \|\cdot\|_1) \rightarrow ((S, E), \|\cdot\|_2)$$

Esnek (soft) dönüşüm olsun. s esnek (soft) süreklidir ancak ve ancak (S, E) de her esnek yakınsak $\{(S_n, E)\}_{n=1}^{\infty}$ esnek (soft) dizisi için (S, E) de $(\mu, S(\mu))$ elemanına yakınsak ise $\{s(S_n, E)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi de $s((\mu, S(\mu)))$ elemanına yakınsar.

İspat: $f : ((S, E), \|\cdot\|_1) \rightarrow ((S, E), \|\cdot\|_2)$ esnek (soft) dönüşüm olsun ve $\{(S_n, E)\}_{n=1}^{\infty}$, (S, E) de esnek (soft) dizi olsun öyle ki $\{(S_n, E)\}_{n=1}^{\infty}$, (S, E) de $(\mu, S(\mu))$ elemanına yakınsaktır. s esnek (soft) sürekli olduğundan $\forall (\eta, S(\eta)) \in (S, E)$ için $(\tilde{\pi}_s(\mu, \eta), \varepsilon) \succ (\tilde{\pi}_s(\mu, \eta), 0)$ için en az bir $(\tilde{\pi}_s(\mu, \eta), \delta) \succ (\tilde{\pi}_s(\mu, \eta), 0)$ sayısı vardır.

$$s((\eta, S(\eta))) \in B_{\|\cdot\|_2}(s((\mu, S(\mu))), \pi'_1(s_1(\tilde{\pi}_s(\mu, \eta))), \varepsilon).$$

Öte yandan $(\eta, S(\eta)) \in B_{\|\cdot\|_1}(s((\mu, S(\mu))), \pi'_1(s_1(\tilde{\pi}_s(\mu, \eta))), \delta)$ dir.

$\forall N \in \mathbb{N}$ pozitif sayısı için $n \geq N$ olsun öyle ki $(S_n, E) \in B_{\|\cdot\|_1}(s((\mu, S(\mu))), (\tilde{\pi}_s(\mu, \eta), \delta))$.

Böylece $\forall n \geq N$ için $s((S_n, E)) \in B_{\|\cdot\|_2}(s((\mu, S(\mu))), \pi'_1(s_1(\tilde{\pi}_s(\mu, \eta))), \varepsilon)$ dir.

Öte yandan $s((S_n, E))$ dizisi $s((\mu, S(\mu)))$ elemanına yakınsaktır.

Şimdi (S, E) da $\{(S_n, E)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $(\mu, S(\mu))$ elemanına yakınsak ise $\{s(S_n, E)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin de $s((\mu, S(\mu)))$ elemanına yakınsadığını görmeliyiz.

(S', E') , (S, E) de esnek (soft) küme olsun. $(\eta, S(\eta)) \in (S', E')$ olsun. $\{(S'_n, E')\}_{n=1}^{\infty}$ esnek (soft) dizisi de $(\eta, S(\eta))$ elemanına yakınsaktır. Varsayımımızı devam ettirdiğimizde $\{(S'_n, E')\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin de $s((\eta, S(\eta)))$ elemanına yakınsadığını elde ederiz. Öte yandan $s((S'_n, E')) \in s(S', E')$ ve $s((\eta, S(\eta))) \in \overline{s(S', E')}$ dir. Her küme kendisinin alt kümesi olduğundan, yani $\overline{s(S', E')} \subset \overline{s(S', E')}$ olduğundan teorem ispatlanmış olup s esnek (soft) süreklidir. ■

Tanım 3.1.9. $((S, E), \|\cdot\|)$, $\mathbb{X}$ üzerinde esnek (soft) metrik uzay ve

$$s : ((S, E), \|\cdot\|) \rightarrow ((S, E), \|\cdot\|)$$

esnek (soft) fonksiyon olsun. Eğer

$\forall (\mu, S(\mu)), (\eta, S(\eta)) \in (S, E)$ için

$$\|s((\mu, S(\mu))) - s((\eta, S(\eta)))\| \prec c \cdot \|(\mu, S(\mu)) - (\eta, S(\eta))\|$$

olacak şekilde $0 < c < 1$ olacak şekilde pozitif bir c sayısı varsa s 'e esnek (soft) büzülme dönüşümü denir.

Teorem 3.1.10. $((S, E), \|\cdot\|)$, X üzerinde esnek (soft) normlu metrik uzayında esnek (soft) büzülme dönüşümü esnek (soft) süreklidir.

İspat: s 'in esnek (soft) sürekli olduğunu göstermek için keyfi bir $(\tilde{u}_0, S(\tilde{u}_0)) \in (S, E)$ noktasında esnek (soft) sürekli olduğunu gösterelim. $\delta = \frac{\epsilon}{c}$

alırsak; $\forall (\tilde{u}, S(\tilde{u})), (\tilde{u}_0, S(\tilde{u}_0)) \in (S, E)$ için $\|(\tilde{u}, S(\tilde{u})) - (\tilde{u}_0, S(\tilde{u}_0))\| \prec (\tilde{\pi}(\tilde{u}, \tilde{u}_0), \delta)$ iken

$$\begin{aligned} \|s((\tilde{u}, S(\tilde{u}))) - s((\tilde{u}_0, S(\tilde{u}_0)))\| &\preceq c \cdot \|(\tilde{u}, S(\tilde{u})) - (\tilde{u}_0, S(\tilde{u}_0))\| \\ &\preceq c \cdot (\tilde{\pi}(\tilde{u}, \tilde{u}_0), \delta) \\ &= (\tilde{\pi}(\tilde{u}, \tilde{u}_0), c \cdot \delta) \\ &= (\tilde{\pi}(\tilde{u}, \tilde{u}_0), \epsilon) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece s , $(\tilde{u}_0, S(\tilde{u}_0))$ noktasında esnek (soft) süreklidir.

$(\tilde{u}_0, S(\tilde{u}_0))$, (S, E) 'nin keyfi bir noktası olduğundan esnek (soft) süreklidir. ■

4.ARAŞTIRMA BULGULARI

Tanım 4.1.1. Esnek (soft) normlu uzayında bir esnek (soft) dizi ve eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| (u_{[s]}, S(u_{[s]})) - (v_{[s]}, S(v_{[s]})) \| = (\tilde{\pi}(u_{[s]}, v_{[s]}), 0)$$

ise (S_n, E) dizisi $(v_{[s]}, S(v_{[s]}))$ 'ye yakınsaktır denir ve $\{(S_n, E)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow (v_{[s]}, S(v_{[s]}))$ ile ifade edilir.

Teorem 4.1.2. (S, E) , $\mathbb{X}$ üzerinde bir esnek (soft) küme olsun. $\|, \|$, (S, E) üzerinde bir esnek (soft) normlu metrik, $\{(S_n, E)\}_{n=1}^{\infty}$, (S, E) 'da bir esnek (soft) Cauchy dizisi olsun. $\{(S_n, E)\}_{n=1}^{\infty}$, (S, E) 'da esnek (soft) yakınsak ise bu takdirde (S, E) 'nın bir tek elamanına yakınsar.

İspat: İspatı çelişki yöntemiyle yapmaya yönelik $(S_n, E) \rightarrow (t_{[s]}, S(t_{[s]}))$ ve $(S_n, E) \rightarrow (v_{[s]}, S(v_{[s]}))$ olacak şekilde $(v_{[s]}, S(v_{[s]})), (v'_{[s]}, S(v'_{[s]})) \in (S, E)$ elemanlarının olduğunu kabul edelim. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $v_{[s]}, u_{[s]}, v'_{[s]} \in E$ için

$$\begin{aligned} \| (v_{[s]}, S(v_{[s]})) - (v'_{[s]}, S(v'_{[s]})) \| &\preceq \| (v_{[s]}, S(v_{[s]})) - (u_{[s]}, S(u_{[s]})) \| \\ &\dot{+} \| (u_{[s]}, S(u_{[s]})) - (u_{[s]}, S_m(u_{[s]})) \| \\ &\dot{+} \| (u_{[s]}, S_m(u_{[s]})) - (v'_{[s]}, S(v'_{[s]})) \| \end{aligned}$$

eşitsizliğine sahibiz. Şimdi ϵ keyfi pozitif bir sayı olsun. $\{(S_n, E)\}_{n=1}^{\infty}$, $(v_{[s]}, S(v_{[s]}))$ ve $(v'_{[s]}, S(v'_{[s]}))$ 'ye yakınsadığında ve $\{(S_n, E)\}_{n=1}^{\infty}$ esnek (soft) Cauchy dizisi olduğundan $m > n > N_1$, $m > n > N_2$ ve $m > n > N_3$ için

$$\| (v_{[s]}, S(v_{[s]})) - (u_{[s]}, S(u_{[s]})) \| \preceq (\tilde{\pi}(v_{[s]}, u_{[s]}), \epsilon/3) \quad (3.1)$$

$$\| (u_{[s]}, S(u_{[s]})) - (v'_{[s]}, S(v'_{[s]})) \| \preceq (\tilde{\pi}(u_{[s]}, v'_{[s]}), \epsilon/3) \quad (3.2)$$

$$\| (u_{[s]}, S(u_{[s]})) - (u_{[s]}, S_m(u_{[s]})) \| \preceq (\tilde{\pi}_s(u_{[s]}, u_{[s]}), \epsilon/3) \quad (3.3)$$

olacak şekilde N_1 , N_2 ve N_3 doğal sayıları vardır. Şimdi $m > n \geq \max\{N_1, N_2, N_3\}$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \| (v_{[s]}, S(v_{[s]})) - (v'_{[s]}, S(v'_{[s]})) \| &\preceq (\tilde{\pi}_s(v_{[s]}, u_{[s]}), \epsilon/3) + (\tilde{\pi}_s(u_{[s]}, u_{[s]}), \epsilon/3) + (\tilde{\pi}_s(u_{[s]}, v'_{[s]}), \epsilon/3) \\ &= (\{\tilde{\pi}_s(v_{[s]}, u_{[s]}), \tilde{\pi}_s(u_{[s]}, u_{[s]}), \tilde{\pi}_s(u_{[s]}, v'_{[s]})\}, \epsilon) \end{aligned}$$

eşitsizliğine sahip oluruz. Bu her $\epsilon > 0$ ve $v_{[s]} \in E$ için

$$\| (v_{[s]}, S(v_{[s]})) - (v'_{[s]}, S(v'_{[s]})) \| \preceq (\{\tilde{\pi}_s(v_{[s]}, u_{[s]}), \tilde{\pi}_s(u_{[s]}, u_{[s]}), \tilde{\pi}_s(u_{[s]}, v'_{[s]})\}, \epsilon)$$

Elde edilir. Bundan dolayı

$$\| (v_{[s]}, S(v_{[s]})) - (v'_{[s]}, S(v'_{[s]})) \| = (\tilde{\pi}_s(v_{[s]}, v'_{[s]}), 0) \text{ dir.}$$

Bu ise $v_{[s]} = v'_{[s]}$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak $(v_{[s]}, S(v_{[s]})) = (v'_{[s]}, S(v'_{[s]}))$ dir.

Tanım 4.1.3. $((S, E), \|\cdot\|, \|\cdot\|)$ esnek (soft) normlu uzay olsun. $N \in \mathbb{N}$ ve $\forall n, m \geq N$ için eğer

$$\| (\alpha_{[s]}, S_n(\alpha_{[s]})) - (\alpha_{[s]}, S_m(\alpha_{[s]})) \| \prec (\tilde{\pi}_s(\alpha_{[s]}, \alpha_{[s]}), \epsilon)$$

oluyorsa $\{(S_n, E)\}_{n=1}^{\infty}$ esnek (soft) dizisine esnek (soft) Cauchy dizisi denir.

Önerme 4.1.4. $((S, E), \|\cdot\|, \|\cdot\|)$ üzerinde esnek (soft) yakınsak her dizi esnek (soft) Cauchy dizisidir.

İspat: $((S, E), \|\cdot\|, \|\cdot\|)$ esnek (soft) normlu uzayında $\{(S_n, E)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi esnek (soft) yakınsak bir dizi olsun.

Bu takdirde $(S_n, E) \rightarrow (\beta_{[s]}, S(\beta_{[s]}))$ dir. Böylece

$\forall (\tilde{\pi}(\alpha_{[s]}, \beta_{[s]}), \epsilon) \succeq (\tilde{\pi}_s(\alpha_{[s]}, \beta_{[s]}), 0)$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki $\forall n, m \geq N$ için

$$\| (\alpha_{[s]}, S_n(\alpha_{[s]})) - (\beta_{[s]}, S(\beta_{[s]})) \| \prec (\tilde{\pi}_s(\alpha_{[s]}, \beta_{[s]}), \epsilon/2)$$

$$\| (\alpha_{[s]}, S_m(\alpha_{[s]})) - (\beta_{[s]}, S(\beta_{[s]})) \| \prec (\tilde{\pi}_s(\alpha_{[s]}, \beta_{[s]}), \epsilon/2)$$

üçgen eşitsizliğinde $N' > N$ için $N = \max\{n, m\}$ seçilirse

$$\begin{aligned}
& \|(\alpha_{[s]}, S_n(\alpha_{[s]})) - (\alpha_{[s]}, S_m(\alpha_{[s]}))\| \preceq \|(\alpha_{[s]}, S_n(\alpha_{[s]})) - (\beta_{[s]}, S(\beta_{[s]}))\| \\
& \quad + \|(\beta_{[s]}, S(\beta_{[s]})) - (\alpha_{[s]}, S_m(\alpha_{[s]}))\| \\
& \|(\alpha_{[s]}, S_n(\alpha_{[s]})) - (\alpha_{[s]}, S_m(\alpha_{[s]}))\| \preceq (\tilde{\pi}_s(\alpha_{[s]}, \beta_{[s]}), \epsilon/2) + (\tilde{\pi}_s(\alpha_{[s]}, \beta_{[s]}), \epsilon/2) \\
& \preceq \tilde{\pi}_s((\alpha_{[s]}, \beta_{[s]}), \epsilon)
\end{aligned}$$

ve böylece $\{(S_n, E)\}_{n=1}^{\infty}$ $((S, E), \|\cdot\|)$ üzerinde esnek (soft) Cauchy dizisidir.

Teorem 4.1.4. $((S, E), \|\cdot\|)$ bir tam normlu uzay ve $K : (F, A) \rightarrow (F, A)$ bir dönüşüm olmak üzere her $(\beta_{[s]}, S(\beta_{[s]})), (\beta'_{[s]}, S(\beta'_{[s]})) \in (S, E)$ için

$$\|K(\beta_{[s]}, S(\beta_{[s]})) - K(\beta'_{[s]}, S(\beta'_{[s]}))\| \leq \sigma \|(\beta_{[s]}, S(\beta_{[s]})) - (\beta'_{[s]}, S(\beta'_{[s]}))\|$$

olacak şekilde bir $\sigma \in (0, 1)$ sabiti bulunabiliyorsa K 'nin (S, E) da bir tek sabit noktası vardır.

İspat: (S_0, E) , (S, E) da keyfi esnek (soft) nokta olsun. $\{(S_n, E)\}_{n=1}^{\infty}$ esnek (soft) dizisini aşağıdaki gibi oluşturalım:

$$(S_{n+1}, E) = K((S_n, E)) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Buradan K 'nın esnek (soft) büzülme dönüşümü olduğunu ispatlamak için $0 < \sigma < 1$ olacak şekilde σ sayısının varlığını göstermeliyiz: $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
\|(S_{n+1}, E) - (S_n, E)\| &= \|K((S_n, E)) - f((S_{n-1}, E))\| \\
&\leq \sigma \cdot \|(S_n, E) - (S_{n-1}, E)\|
\end{aligned}$$

İndüksiyonla birlikte $n=0, 1, 2, \dots$ için

$$\|(S_{n+1}, E) - (S_n, E)\| \leq \sigma^n \|(S_1, E) - (S_0, E)\|$$

elde edilir. Herhangi $m > n$ için

$$\begin{aligned}
\|(S_n, E) - (S_m, E)\| &\leq \|(S_n, E) - (S_{n+1}, E)\| + \dots + \|(S_{m-1}, E) - (S_m, E)\| \\
&\leq \sigma^n \|(S_1, E) - (S_0, E)\| + \dots + \sigma^{m-1} \|(S_1, E) - (S_0, E)\| \\
&= (\sigma^n + \sigma^{n+1} + \dots + \sigma^{m-1}) \|(S_1, E) - (S_0, E)\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n \right) \| (S_1, E) - (S_0, E) \| \\ &= \frac{1}{1-\sigma} \| (S_1, E) - (S_0, E) \| \end{aligned}$$

Böylece $\{(S_n, E)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi (S, E) da esnek (soft) Cauchy dizisidir. (S, E) tam esnek (soft) metrik uzay olduğundan (S, E) da $(\beta_{[s]}, S(\beta_{[s]}))$ elemanı vardır öyle ki $\{(S_n, E)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $(\beta_{[s]}, S(\beta_{[s]}))$ elemanına yakınsaktır. Böylece K esnek (soft) sürekli dönüşümdür ve öte yandan $K((S_n, E)) \rightarrow K((\beta_{[s]}, S(\beta_{[s]})))$ e yakınsaktır. Böylece

$$K((\beta_{[s]}, S(\beta_{[s]}))) = (\beta_{[s]}, S(\beta_{[s]})).$$

Şimdi $(\beta_{[s]}, S(\beta_{[s]}))$ elemanının tekliğini göstermeliyiz. İspat için aksini varsayalım yani $(\beta_{[s]}, S(\beta_{[s]}))$ den başka $K((\beta'_{[s]}, S(\beta'_{[s]}))) = (\beta'_{[s]}, S(\beta'_{[s]}))$ olacak şekilde bir diğer bir eleman $(\beta'_{[s]}, S(\beta'_{[s]})) \in (S, E)$ var olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \| (\beta_{[s]}, S(\beta_{[s]})) - (\beta'_{[s]}, S(\beta'_{[s]})) \| &= \| K((\beta_{[s]}, S(\beta_{[s]}))) - K((\beta'_{[s]}, S(\beta'_{[s]}))) \| \\ &\leq \sigma \cdot \| (\beta_{[s]}, S(\beta_{[s]})) - (\beta'_{[s]}, S(\beta'_{[s]})) \| \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizlikten $\sigma > 1$ elde edilir, bu ise bir çelişkidir. Şu halde $(\beta_{[s]}, S(\beta_{[s]})) \neq (\beta'_{[s]}, S(\beta'_{[s]}))$ olup esnek (soft) sabit nokta tektir.

Teorem 4.1.5. $((S, E), \|\cdot, \cdot\|, \mathbb{X})$ üzerinde tam esnek (soft) normlu uzay olsun.

$$K = (K_1, K_2) : ((S, E), \|\cdot, \cdot\|) \rightarrow ((S, E), \|\cdot, \cdot\|)$$

esnek (soft) sürekli fonksiyon olmak üzere

$$\forall (\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]})) \in (S, E) \text{ için}$$

$$K((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))) = (K_1(\alpha_{[s]}), K_2(S(\alpha_{[s]}))) = (K_1(\alpha_{[s]}), S(K_1(\alpha_{[s]})))$$

eşitliği sağlansın.

$$\forall (\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]})) \in (S, E) \text{ ve}$$

$$\varphi : (S, E) \rightarrow (E, \mathbb{R}^+)$$

parametrik skaler değerli fonksiyonu için

$$\| (K((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))) - (\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))) \| \prec \varphi((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))) - \varphi(K((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))))$$

eşitsizliği sağlanıyorsa

$\forall (\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]})), (u_{[s]}, S(u_{[s]})) \in (S, E)$ için $\{K^n((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]})))\}$ esnek (soft) sabit bir kümeye yakınsaktır.

İspat: $K = (K_1, K_2)$ ve $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ alalım.

$$K((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))) = (K_1(\alpha_{[s]}), K_2(\alpha_{[s]})), K((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))) = (\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]})) \text{ olsun.}$$

Benzer şekilde $n = 1, 2, 3, \dots$ için $K^n((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))) = (\alpha_{n[s]}, S(\alpha_{n[s]}))$ yazabiliriz.

$$\text{Böylece } \varphi(K^n((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]})))) = (\varphi_1(\alpha_{n[s]}), \varphi_2(S(\alpha_{n[s]}))) = (u_{n[s]}, t_n)$$

hipotezin teoremdeki eşitliklerde kastedilen şartları sağlaması gerekir. Bu takdirde

$$\| K((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))) - (\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]})) \| + \varphi(K(\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))) \prec \varphi((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]})))$$

$$\varphi(K((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]})))) \succeq \varphi((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]})))$$

$$\varphi(K^2((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]})))) \succeq \varphi(K(\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]})))$$

olup, bu yöntemi devam ettirirsek;

$$\varphi(K^{n+1}((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]})))) \succeq \varphi(K^n((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))))$$

Elde ederiz. Bu da $\{\varphi(K^n((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))))\}$ dizisinin azalan ve reel sayıların t_n dizisinin azalan dizi olduğu anlamına gelir. Buradan $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall u_{[s]} \in E$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(K^n((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]})))) = (u_{[s]}, t) \quad (\forall b \in E)$$

ve açık olarak $(u_{[s]}, t)$ negatiftir. $\forall n, m \in \mathbb{N}$ ve $m \geq n$ için

$$\| K^n((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))) - K^m((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))) \| \succeq K^n((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))) - K^{n+1}((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))) \|$$

$$\dot{+} \| K^{n+1}((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))) - K^{n+2}((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))) \|$$

$$+ \| K^{n+2}((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))) - K^{n+3}((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))) \|$$

$$+ \dots + \| K^{m-1}((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))) - K^m((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))) \|$$

$$\leq \sum_{m=1}^{i=n} \| K^i((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))) - K^{i+1}((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))) \|$$

$$\leq \varphi(K^n((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]})))) - \varphi(K^{n+1}((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))))$$

$$+ \varphi(K^{n+1}((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]})))) - \varphi(K^{n+2}((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))))$$

$$+ \dots + \varphi(K^{m-1}((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]})))) - \varphi(K^m((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))))$$

$$= \varphi(K^n((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]})))) - \varphi(K^m((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))))$$

Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} \| K^n((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))) - K^m((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))) \| = (u_{[s]}, 0)$.

Esnek (soft) normlu uzayda her esnek (soft) yakınsak dizi esnek (soft) Cauchy dizisi olduğundan $\{K^n((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]})))\}$ nin esnek (soft) Cauchy dizisi olduğunu elde edilir. Hipotezden $((S, E), \|, \|)$ esnek (soft) normlu uzayının tam olduğunu biliyoruz. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K^n((\alpha_{[s]}, S(\alpha_{[s]}))) = (x, S(x))$$

olacak şekilde $(x, S(x)) \in (S, E)$ vardır. ■

Teorem 4.1.6. $((S, E), \|, \|)$ esnek (soft) normlu uzayının X esnek (soft) metrik uzayında tam olduğunu kabul edelim.

$$T : B_{\|, \|}((a_{[s]}, S(a_{[s]})), (a'_{[s]}, t)) \rightarrow ((S, E), \|, \|)$$

esnek (soft) büzülme dönüşümü olsun. $0 < \gamma < 1$ için

$$\| K((\kappa_{[s]}, S(\kappa_{[s]}))) - (\kappa_{[s]}, S(\kappa_{[s]})) \| \prec (1 - \gamma)(\kappa'_{[s]}, t)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, bu takdirde $K, B_{\|, \|}((\kappa_{[s]}, S(\kappa_{[s]})), (\kappa'_{[s]}, t))$ yuvarında bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: $r_0 \geq 0$ olduğundan $(\kappa'_{[s]}, 0) \preceq (\kappa'_{[s]}, t_0) \preceq (\kappa'_{[s]}, t)$ olduğu açıktır. Bu takdirde

$$\|K((\kappa_{[s]}, S(\kappa_{[s]}))) - (\kappa_{[s]}, S(\kappa_{[s]}))\| \succeq (1-\gamma)(\kappa'_{[s]}, t_0)$$

yazılabilir. Şimdi K dönüşümünü

$$K : \overline{B_{\|\cdot\|}((\kappa_{[s]}, S(\kappa_{[s]})), (\kappa'_{[s]}, t_0))} \rightarrow B_{\|\cdot\|}((\kappa_{[s]}, S(\kappa_{[s]})), (\kappa'_{[s]}, t))$$

olarak tanımlayalım. Eğer $(u_{[s]}, S(u_{[s]})) \in \overline{B_{\|\cdot\|}((\kappa_{[s]}, S(\kappa_{[s]})), (\kappa'_{[s]}, t_0))}$ ise

$$\begin{aligned} \|K((u_{[s]}, S(u_{[s]}))) - (\kappa_{[s]}, S(\kappa_{[s]}))\| &\succeq \|K((u_{[s]}, S(u_{[s]}))) - K((\kappa_{[s]}, S(\kappa_{[s]})))\| \\ &\quad + \|K((\kappa_{[s]}, S(\kappa_{[s]}))) - (\kappa_{[s]}, S(\kappa_{[s]}))\| \\ &\succeq \gamma \cdot \|(u_{[s]}, S(u_{[s]})) - (\kappa_{[s]}, S(\kappa_{[s]}))\| + (1-\gamma)(\kappa'_{[s]}, t) \\ &\succeq \gamma \cdot (\kappa'_{[s]}, t_0) + (1-\gamma)(\kappa'_{[s]}, t_0) \\ &= (\kappa'_{[s]}, t_0) \end{aligned}$$

Buradan $\overline{B_{\|\cdot\|}((\kappa_{[s]}, S(\kappa_{[s]})), (\kappa'_{[s]}, t_0))} \subseteq B_{\|\cdot\|}((\kappa_{[s]}, S(\kappa_{[s]})), (\kappa'_{[s]}, t))$ dir. Bu takdirde $K, \overline{B_{\|\cdot\|}((\kappa_{[s]}, S(\kappa_{[s]})), (\kappa'_{[s]}, t_0))} \subseteq B_{\|\cdot\|}((\kappa_{[s]}, S(\kappa_{[s]})), (\kappa'_{[s]}, t))$ esnek (soft) kümesinde bir tek sabit noktaya sahiptir. ■

Tanım 4.1.7. $((S, E), \|\cdot\|)$ ve $((S', E'), \|\cdot\|)$ sırasıyla $\mathbb{X}$ ve $\mathbb{Y}$ üzerinde iki esnek (soft) normlu uzay olsun ve

$$T : ((S, E), \|\cdot\|) \rightarrow ((S', E'), \|\cdot\|)$$

bir esnek (soft) dönüşüm olsun. Eğer her esnek (soft) (S, A) kümesi (S, E) da kapalı (ya da açık) ise T dönüşümüne kapalı (ya da açık) dönüşüm denir.

Teorem 4.1.8. $((S, E), \|\cdot\|)$, $\mathbb{X}$ üzerinde tam esnek (soft) metrik uzay ve $T : (S, E) \rightarrow (S, E)$ her $(\lambda_{[s]}, S(\lambda_{[s]})), (\lambda'_{[s]}, S(\lambda'_{[s]})) \in (S, E)$ ve $0 < \psi < 1$ için T^m aşağıdaki şartı sağlayacak şekilde bir esnek (soft) dönüşüm olsun:

$$\|T^m((\lambda_{[s]}, S(\lambda_{[s]}))) - T^m((\lambda'_{[s]}, S(\lambda'_{[s]})))\| \succeq \psi \cdot \|(\lambda_{[s]}, S(\lambda_{[s]})) - (\lambda'_{[s]}, S(\lambda'_{[s]}))\|$$

Bu takdirde T bir tek esnek (soft) sabit noktaya sahiptir denir.

İspat: T^m (S, E) esnek (soft) kümesinde bir tek sabit noktaya sahiptir. Öte yandan

$$T^{m+1}((\lambda_{[s]}, S(\lambda_{[s]}))) = T(T^m((\lambda_{[s]}, S(\lambda_{[s]})))) = T((\lambda_{[s]}, S(\lambda_{[s]})))$$

olduğundan $T((\lambda_{[s]}, S(\lambda_{[s]})))$, T^m için sabit noktadır. T^m nin sabit noktası tek olduğundan $T((\lambda_{[s]}, S(\lambda_{[s]}))) = (\lambda_{[s]}, S(\lambda_{[s]}))$ dır.

Şimdi sabit noktanın tekliğini gösterelim. $(\lambda_{[s]}, S(\lambda_{[s]})) \neq (\lambda'_{[s]}, S(\lambda'_{[s]}))$ olmak üzere $(\lambda'_{[s]}, S(\lambda'_{[s]}))$ diğer esnek (soft) sabit nokta olsun. Bu takdirde $T((\lambda'_{[s]}, S(\lambda'_{[s]}))) = (\lambda'_{[s]}, S(\lambda'_{[s]}))$. Bu şekilde devam ederek $T^n((\lambda'_{[s]}, S(\lambda'_{[s]}))) = (\lambda'_{[s]}, S(\lambda'_{[s]}))$ elde ederiz. Şu halde $(\lambda'_{[s]}, S(\lambda'_{[s]})) = (\lambda_{[s]}, S(\lambda_{[s]}))$ dir. ■

4. UYGULAMALAR

Bu bölümde tez çalışmasında elde ettiğimiz sonuçları destekleyici nitelikte örnekler sunulmuştur.

Örnek 5.1. $X = [0, \infty]$ olsun. $d(x, y) = \|x - y\|$ metriği ile birlikte $E = Q^+ = \{x \in Q : x > 0\}$ ve $(S, E) \times$ üzerinde esnek (soft) küme olsun. Her $(\lambda_{[s]}, S(\lambda_{[s]})) \in (S, E)$ için $(\lambda_{[s]}, S(\lambda_{[s]})) = [0, e]$ olarak tanımlansın.

$$\|, \|_{\infty} : (S, E) \rightarrow (E, \mathbb{R}^+ \cup \{0\})$$

$$\|(\lambda_{[s]}, S(\lambda_{[s]})) - (\lambda'_{[s]}, S(\lambda'_{[s]}))\| = (\max\{\lambda_{[s]}, \lambda'_{[s]}\}, \|\lambda_{[s]} - \lambda'_{[s]}\|)$$

ile tanımlanan dönüşümü göz önüne alalım.

$T : ((F, A), \|, \|_{\infty}) \rightarrow ((F, A), \|, \|_{\infty})$ esnek (soft) dönüşüm olup

$$T((\lambda_{[s]}, S(\lambda_{[s]}))) = (\lambda_{[s]} / 4, S(\lambda_{[s]} / 4)) = [0, \frac{1}{4}]$$

şeklinde tanımlansın. T nin tanımından

$$\begin{aligned} T^2(((\lambda_{[s]}, S(\lambda_{[s]})))) &= T(T(\lambda_{[s]}, S(\lambda_{[s]}))) = T(T((\lambda_{[s]}, S(\lambda_{[s]})))) \\ &= T(\lambda_{[s]} / 4, S(\lambda_{[s]} / 4)) = (\lambda_{[s]} / 4^2, S(\lambda_{[s]} / 4^2)) \end{aligned}$$

dır. Tümevarım kullanılırsa;

$$T^m((\lambda_{[s]}, S(\lambda_{[s]}))) = (\lambda_{[s]} / 4^m, S(\lambda_{[s]} / 4^m)) \quad m \in \mathbb{N}$$

Böylece

$$\begin{aligned} \|T^m((\lambda_{[s]}, S(\lambda_{[s]}))) - T^m((\lambda'_{[s]}, S(\lambda'_{[s]})))\| &= \|(\lambda_{[s]} / 4^m, S(\lambda_{[s]} / 4^m)) - (\lambda'_{[s]} / 4^m, S(\lambda'_{[s]} / 4^m))\| \\ &= (\max\{\lambda_{[s]} / 4^m, \lambda'_{[s]} / 4^m\}, \|\lambda_{[s]} / 4^m - \lambda'_{[s]} / 4^m\|) \\ &= \frac{1}{4} (\max\{\lambda_{[s]} / 4^m, \lambda'_{[s]} / 4^m\}, \frac{1}{4^{m-1}} \|\lambda_{[s]} - \lambda'_{[s]}\|) \\ &\preceq \frac{1}{4} (\max\{\lambda_{[s]} / 4^m, \lambda'_{[s]} / 4^m\}, \|\lambda_{[s]} - \lambda'_{[s]}\|) \end{aligned}$$

$$\preceq \frac{1}{4} \| (\lambda_{[s]}, S(\lambda_{[s]})) - (\lambda'_{[s]}, S(\lambda'_{[s]})) \|.$$

Sonuç olarak $0 < \gamma < 1$ olacak şekilde $\gamma = \frac{1}{4}$ sayısı mevcut olduğundan T bir tek esnek (soft) sabit noktaya sahiptir.

Örnek 5.2. $\tilde{u}, \tilde{v} \in C[0, a]$ ve olmak üzere $s \in [0, a]$ için $A = C[0, a]$ olmak üzere

$$d_{\infty}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_0^x \tilde{u}(s) - \tilde{v}(s) ds$$

$$d_{\infty}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_0^x \tilde{u} ds$$

integral deklemlerini kullanarak aşağıdaki normu tanımlayalım :

$$G(\tilde{u})_{(s)} = \int_0^x \frac{1}{4} (\tilde{u}(s) ds + \tilde{h}(s))$$

$$G : C[0, a] \rightarrow C[0, a]$$

$$\tilde{\mathbb{D}}_s((\kappa_{[s]}, S(\kappa_{[s]})), (\mu_{[s]}, S(\mu_{[s]}))) = \frac{1}{16} \| G(u)_{(s)} - G(v)_{(s)} \|$$

$$\| T((\varpi_{[s]}, S(\varpi_{[s]}))) - T((\varpi'_{[s]}, S(\varpi'_{[s]}))) \| = \tilde{\mathbb{D}}_s(T((\varpi_{[s]}, S(\varpi_{[s]}))), T((\varpi'_{[s]}, S(\varpi'_{[s]}))))$$

$$= \tilde{\mathbb{D}}_s((\frac{1}{4} \varpi_{[s]}, S(\frac{1}{4} \varpi_{[s]})), (\frac{1}{4} \varpi'_{[s]}, S(\frac{1}{4} \varpi'_{[s]})))$$

$$= \max(\{\frac{1}{4} \varpi_{[s]}, \frac{1}{4} \varpi'_{[s]}\}, \frac{1}{4} \| G(\tilde{u})_{(s)} - G(\tilde{v})_{(s)} \|)$$

$$= \max(\{\frac{1}{4} \varpi_{[s]}, \frac{1}{4} \varpi'_{[s]}\}, \frac{1}{4} \| \int_0^x \tilde{u}(s) ds + \tilde{h}(s) - \int_0^x \tilde{v}(s) ds - \tilde{h}(s) \|)$$

$$= \max(\{\frac{1}{4} \varpi_{[s]}, \frac{1}{4} \varpi'_{[s]}\}, \frac{1}{4} \| \int_0^x \tilde{u}(s) ds - \tilde{v}(s) ds \|)$$

$$\preceq \max(\{\frac{1}{4} \varpi_{[s]}, \frac{1}{4} \varpi'_{[s]}\}, \frac{1}{4} \int_0^x |\tilde{u}(s) ds - \tilde{v}(s) ds|)$$

$$\preceq \frac{1}{4} \max(\{\varpi_{[s]}, \varpi'_{[s]}\}, \int_0^x |\tilde{u}(s)ds - \tilde{v}(s)ds|)$$

$$= \frac{1}{4} \tilde{\mathbb{D}}_s((\varpi_{[s]}, S(\varpi_{[s]})), (\varpi'_{[s]}, S(\varpi'_{[s]})))$$

böylece $0 < \frac{1}{4} < 1$ olup T bir büzülme dönüşümüdür. Bundan dolayı T nin bir tek sabit noktası vardır.



6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu yüksek lisans tez çalışmasında esnek (soft) kümelerin özellikleri kullanılarak Hosseinzadeh tarafından farklı bir bakış açısı ile tanımlanan esnek (soft) metrik uzay tanımı göz önünde bulundurularak esnek (soft) norm, esnek (soft) elemanların bu bakış açısıyla ifade edilmesiyle yeniden ifade edilmiştir. Esnek (soft) normun tanımının yeniden ifade edilmesiyle esnek (soft) noktalar ve esnek (soft) parametrik skalerler arasındaki esnek (soft) hesaplamalar dikkate alınarak esnek (soft) hesaplamalar ve esnek (soft) anlamda büyüklük küçüklük ilişkileri kullanılarak esnek (soft) normlu uzaylarda esnek (soft) sürekli fonksiyonlar ve özellikleri, esnek (soft) dizi , esnek (soft) yakınsak dizi , esnek (soft) Cauchy dizisi gibi kavramlar ifade edilmiş ve bu kavramların bazı özellikleri verilmiştir.

Literatürde yer alan Banach sabit nokta teoremi esnek (soft) normlu uzaylarda farklı bir bakış açısı ile yeniden incelenmiş ve ispat edilmiştir. Banach sabit nokta teoreminin esnek (soft) normlu uzaylarda ispat edilmesinin ardından esnek (soft) normlu uzaylarda çeşitli esnek (soft) sabit nokta sonuçları ispatlanmıştır. Ayrıca ispatladığımız teoremleri gerçekleyen bazı örnekler sunulmuştur.

Bu yüksek lisans tezinden elde edilen sonuçlardan farklı olarak literatürde yer alan Suzuki, Meir Keller ve Ciric tarzında farklı sabit nokta teoremleri ifade ve ispat edilebilir.

Ayrıca esnek (soft) devirli dönüşümler ve esnek (soft) devirli büzülme dönüşümleri esnek (soft) normlu uzaylarda verilerek esnek (soft) normlu uzaylarda çeşitli esnek (soft) sabit nokta sonuçları elde edilebilir.

Bununla birlikte esnek (soft) kompaktlığın esnek (soft) normlu uzaylarda incelenmesiyle bu tez çalışması farklı yönlerde gelişme gösterecektir.

KAYNAKLAR

- [1] Molodtsov, D. Soft set theory-first result. Computers & Mathematics with Applications. 1999, 37, 19-31.
- [2] Maji, P. K., Biswas R., Roy A. R. Soft set theory. Computers & Mathematics with Applications. 2003, 45, 555-562.
- [3] Maji, P. K., Roy, A. R. and Biswas, R. An application of soft sets in a decision making problem, Comput. Math. Appl. 2002, 44, 1077-1083.
- [4] Shabir, M., Naz, M. On soft topological spaces. Computers & Mathematics with Applications. 2011, 61(7), 1786-1799.
- [5] Aygünoğlu, A., Aygün, H. Some notes on soft topological spaces, Neural Computing and Applications. 2012, 21, 113-119.
- [6] Çagman, N., Karataş, S. and Enginoğlu, S. Soft topology. Computers and Mathematics with Applications, 2011, (62) 351-358.
- [7] Georgiou, D. N., Megaritis, A. C. and Petropoulos, V. I. On soft topological spaces. Appl. Math. Inf. Sci. 2013, 7(5), 1889-1901.
- [8] Zorlutuna, İ., Akdağ, M., Min, W. K., Atmaca, S. Remarks on soft topological spaces, Ann. Fuzzy Math. Inform. 2012, 3, 171-185.
- [9] Aras, Ç. G., Sönmez, A., Çakallı, H. An approach to soft functions. J. Math Anal . 2017, 8(2), 129-138.
- [10] Zorlutuna, İ., Çakır, H. On continuity of soft mappings. Applied Mathematic sand Information Science. 2015, 9(1), 403-409.
- [11] Aras, Ç. G., Poşul, H. On some new operations in probabilistic soft set theory. European Journal of Pure and Applied Mathematics. 2016, 9(3), 333-339.
- [12] Varol, B.P., Aygün, H. On soft Hausdorff spaces. Ann. Fuzzy Math. Inform. 2013, 5(1), 15-24.
- [13] Banach, S. Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrals. Fund Math. 1922, 3, 133-181.
- [14] Brouwer, L. E. J. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. Mathematische Annalen. 1910, 71, 97-115.
- [15] Kannan, R. Some results on fixed point. Bull. Cal. Math. Soc. 1968, 60, 71-76.

- [16] Kannan, R. Some results on fixed point II. Amer. Math. Monthly. 1969, 76, 405-408.
- [17] Caristi, J. Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions. Transactions of the American Mathematical Society. 1976, 215, 241-251.
- [18] Chatterjea, S.K. Fixed point theorems. Comptes rendus de l'Academie Bulgare des Sciences. 1972, 25, 727-730.
- [19] Reich, S. Fixed point of contractive functions. Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. 1972, 5, 26-42.
- [20] Hardy, G. E., Rogers, T.D. A generalization of a fixed point theorem of Reich. Canadian Mathematical Bulletin. 1973, 16, 201-206.
- [21] Ćirić, L. B. Fixed points for generalized multivalued contractions. Mathematicki Vesnik. 1972, 9(24), 265-272.
- [22] Jungck, G. Commuting mappings and fixed points. Amer. Math. Monthly. 1976, 83, 261-263.
- [23] Jungck, G. Compatible mappings and fixed points. Internat. J. Math. Math. Sci. 1986, 9(4), 771-779.
- [24] Mutlu, A., Yolcu, N., Mutlu, B. Fixed point theorems in partially ordered rectangular metric spaces. British Journal of Mathematics and Computer Science. 2016, 15(2), 1-9.
- [25] Mutlu, A., Yolcu, N., Mutlu, B. A survey on Kannan mappings in universalized metric space. British Journal of Mathematics and Computer Science. 2016, 15(6), 1-6.
- [26] Das, S., Samanta, S. K. Soft real sets, soft real numbers and their properties, J. Fuzzy Math. 2012, 20, 551-576.
- [27] Das, S., Samanta, S.K. Soft metric. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics. 2013, 6(1), 77-94.
- [28] Hosseinzadeh, H. Fixed point theorems on soft metric spaces. Journal of Fixed Point Theory and Applications. 2017, 19(2), 1625-1647
- [29] Majumdar, P., Samanta, S. K. On soft mappings, Comput. Math. Appl. 2010, 60, 2666–2672.
- [30] Wardowski, D. On a soft mapping and its fixed points, Fixed Point Theory Appl. 2013, 182, 1-11.
- [31] Güler, A.C., Yıldırım, E.D., Ozbakır, O.B. A fixed point theorem on soft G-metric spaces. J. Nonlinear Sci. Appl. 2016, 9, 885–894.

- [32] Yazar, M. I., Aras, Ç.G., Bayramov, S. Fixed point theorems of soft contractive mappings. *Filomat*. 2016, 30(2), 269-279.
- [33] Abbas, M., Murtaza, G., Romaguera S. On the fixed point theory of soft metric spaces, *Fixed Point Theory Appl.* 2016, 17, 1-11.
- [34] Altıntaş, İ., Şimşek, D., Taşköprü, K. Topology of soft cone metric spaces. *AIP Conference Proceeding*. 2017, 1880(1), 030006. <https://doi.org/10.1063/1.50006056>
- [35] Şimşek, D., Altıntaş, İ., Ersoy, S., Abdullayev, F., İmaşkızoğlu, M., Taşköprü, K., Kesik, D., Ablayeva, E., Oğul, B., Cemşitov, N. An introduction to soft cone metric spaces and some fixed point theorems. *Manas Journal of Engineering (MJEN)*. 2018, 6(1), 59-89.
- [36] Das, S and S. K. Samanta, Soft linear operators in soft normed linear spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*. 2013, 6(2), 295 - 314
- [37] Das, S, P. Majumdar, S.K. Samanta, On soft linear spaces and soft normed linear spaces, *arXiv:1308.1016 [math.GM]*.
- [38] Yazar, M.I, Bilgin,T., Bayramov, S. Aras, Ç. G. A New View On Soft Normed Spaces. *International Mathematical Forum*. 2014, 9(24), 1149-1159.
- [39] Das, S., Samanta, S. K. On soft inner product spaces. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*. 2013, 6(1), 151 - 170.
- [40] Das, S., Samanta K. Operators on soft inner product spaces. *Fuzzy Inf. Eng.*, 2013, 6, 435-450.
- [41] Das, S., Samanta K. Operators on soft inner product spaces II, *Ann. Fuzzy Math. Inform.* 2014, 13(3), 297-315.
- [42] Kurepa, D. Tableaux ramifiés d'ensembles, *Espaces pseudo-distances*. *Comptes Rendus Mathématique*. 1934, 198, 1563-1565.
- [43] Kreyszig, E., *Introductory functional analysis with applications*, Wiley Classics Library, 1978.

[44] Granas, A., Dugundji, J. Fixed Point Theory. Springer. 2002.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ümmü Gülsün Nur KOPARAN

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Manisa Kula Selim ve Sabahat Palanduz Anadolu Lisesi, 2015

Lisans : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2019

Yüksek Lisans : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü

Mesleki Deneyim

Manisa Şehzadeler Gençlik Eğitim Merkezi 2020-2021

Sancaktepe Şehit Ömer Halisdemir Anadolu Lisesi Halen