T.C.
BATMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

ESNEK QUASİLİNEER İÇ ÇARPIM UZAYLARI VE BAZI GENELLEŞTİRMELERİ

MEHMET ŞİRİN GÖNCİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalını

Haziran-2023
BATMAN

TEZ KABUL VE ONAYI

Mehmet Şirin GÖNCİ tarafından hazırlanan "Esnek Quasilineer İç Çarpım Uzayları ve Bazı Genelleştirmeleri" adlı tez çalışması 16/06/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. Aziz HARMAN	…………………..
Danışman Dr. Öğrt. Üyesi Hacer BOZKURT	…………………..
Üye Doç. Dr. F. Müge SAKAR	…………………..

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Osman PAKMA
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Mehmet Şirin Gönci

Tarih: 16/06/2023

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESNEK QUASİLİNEER İÇ ÇARPIM UZAYLARI

Mehmet Şirin GÖNCİ

Batman Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Hacer BOZKURT

2023, 62 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Aziz HARMAN
Doç. Dr. F. Müge SAKAR
Dr. Öğrt. Üyesi Hacer BOZKURT

"Esnek Quasilineer İç Çarpım Uzayları ve Bazı Genelleştirmeleri" isimli bu yüksek lisans tezi çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Tezin birinci bölümü olan giriş bölümünde esnek kümeler ve quasilineer uzaylar ile ilgili bazı bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde lineer uzaylardaki bazı temel kavram ve teoremler ile beraber Housdorf metrik kavramları verilmiştir. Üçüncü bölümde quasilineer, normlu quasilinner ve iç çarpım quasilineer uzaylar ile ilgili bazı tanım, kavram ve sonuçlar verilmiştir. Dördüncü bölümünde esnek kümeler ve esnek quasilineer kümeler ile ilgili bazı temel bilgiler ve tezin son bölümünde kullanılacak bazı teoremler verilmiştir. Beşinci bölümü ise çalışmamızın orjinal bölümüdür. Bu bölümde esnek iç çarpım quasilineer uzay kavramı tanımlanmış ve bu yeni kavram ile ilgili bazı teorem ve sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca esnek quasilineer uzaylarda zemin kavramıyla ilgili bazı sonuçlar da bu bölümde yer almaktadır.

Anahtar Kelimeler: Esnek İç Çarpım Quasilineer Uzaylar, Esnek Küme, Esnek Lineer Uzay, Esnek Quasilineer Uzay, İç Çarpım Quasilineer Uzayları, Normlu Quasilineer Uzaylar, Quasilineer Uzaylar, Zemin

ABSTRACT

MS THESIS

SOFT İNNER PRODUCT QUASİLİNEER SPACES

Mehmet Şirin GÖNCİ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF BATMAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATİCS

Advisor: Asst. Prof. Dr. Hacer BOZKURT

2023, 62 Pages

Jury
Prof. Dr. Aziz HARMAN
Assoc. Dr. F. Müge SAKAR
Asst. Prof. Dr Hacer BOZKURT

This master's thesis work named "Soft Inner Product Quasilinear Spaces and Some Generalizations" consists of five chapters. In the introduction, which is the first part of the thesis, some information about soft sets and quasilinear spaces is given. In the second chapter, some basic concepts and theorems in linear spaces and Housdorf metric concepts are given. In the third chapter, some definitions, concepts and results about quasilinear, normed quasilinner and inner product quasilinear spaces are given. In the fourth chapter, some basic information about soft sets and soft quasilinear sets and some theorems that will be used in the last part of the thesis are given. The fifth part is the original part of our study. In this section, the concept of soft inner product quasilinear space is defined and some theorems and results related to this new concept are obtained. In addition, some results about the concept of floor in soft quasilinear spaces are given.

Keywords: Floor, Inner Product Quasilinear Spaces, Normed Quasilinear Spaces, Quasilinear Spaces, Soft Inner Product Quasilinear Spaces, Soft Linear Space, Soft Quasilinear Space, Soft Set

ÖNSÖZ

Bu çalışmada esnek iç çarpım quasilineer uzay kavramı ortaya atılmıştır. Bu kavram ile ilgili yeni bazı tanım, teorem ve örnekler sunulmuştur. Ayrıca esnek quasilineer iç çarpım uzaylarının zemini incelenmiştir. Burada elde edilen bulgular, quasilineer fonksiyonel analizin gelişimine önemli ölçüde katkı sağlamaktadır.

Yüksek lisans tez jüri üyelerim olan ve bana bilgileri ile destek olan Prof. Dr. Aziz HARMAN ve Doç. Dr. F. Müge SAKAR'a destek ve teşviklerinden dolayı teşekkür ederim. Ayrıca bu çalışmanın hazırlanma sürecinde bana her konuda yardımda bulunan, hiçbir bilgisini esirgemeyen, bana gösterdiği desteği, sabrı ve hoş görüsü için değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Hacer BOZKURT'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez hazırlanma sürecinde bana her koşulda sabır gösteren sevgili eşim Nazan GÖNCİ ve bu süreçte ailemize katılan kızım Hazal GÖNCİ'ye manevi desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Mehmet Şirin GÖNCİ
BATMAN-2023

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

Simgeler	
$\mathbb{R}^+$	: Negatif olmayan reel sayılar kümesi
$\Omega(E)$	: Bir E normlu uzayının boştan farklı tüm kapalı ve sınırlı alt kümelerinin ailesi
$\Omega_C(E)$	: Bir E normlu uzayının boştan farklı tüm kapalı, sınırlı ve konveks alt kümelerinin ailesi
$C[a,b]$	: $[a,b]$ aralığında tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyonların uzayı
$C([a,b],\Omega_C(E))$	: $[a,b]$ aralığından $\Omega_C(E)$'ye tanımlanan tüm sürekli fonksiyonların uzayı
$B(\theta,r)$	: θ merkezli, r yarıçaplı açık yuvar
$S(\theta,r)$	: θ merkezli, r yarıçaplı kapalı yuvar
$inf\ (sup)$	: İnfimum (Supremum)
$\sup\limits_{\preccurlyeq}$	: "$\preccurlyeq$" kısmi sıralama bağıntısı üzerinden supremum
$X_r\ (X_s)$	: X quasilineer uzayının regüler (singüler) alt uzayı
X_d	: Simetrik alt uzay
(K,P)	: Esnek küme
$\tilde{X}$	: Mutlak esnek küme
$\tilde{q}, \tilde{w}, \tilde{z}$ ...	: Esnek elemanlar
$\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ ...	: Esnek reel sayılar
$(X$, G, P)	: Esnek sıralı küme
$SQV(\tilde{Q})$	: Q'nun esnek quasi vektörü
$S(Q,P)$	: Q üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi
$(\tilde{Q},\langle . \rangle,P)$	: Esnek quasilineer iç çarpım uzayı
$(\tilde{Q},\Vert . \Vert,P)$ $(\tilde{Q},\Vert . \Vert)$	: Esnek normlu uzay
SP(Q)	: Q üzerindeki tüm esnek noktalarının ailesi
Supp(G,P)	: (G,P) esnek kümesinin desteği
$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$	: $\mathbb{R}$'nin boştan farklı tüm sınırlı alt kümelerinin ailesi
$F_{\tilde{q}}^{\widetilde{W}}$	: $\tilde{q}$ vektörünün $\widetilde{W}'$deki zemini
$F_{\tilde{q}}$	: $\tilde{q}$'nun zemini

1. GİRİŞ

Günlük yaşamda kullandığımız kişilere veya durumlara göre sürekli değişebilen ve matematiksel olarak açıklamakta zorlandığımız çok fazla kavram bulunabilir. Bazı araştırmacılar bu zorluğun üstesinden gelebilmek için yeni bu belirsiz kavramları matematiksel olarak modelleyebilmek için çalışmalarda bulunmaktadırlar. Araştırmacıların yapmış olduğu bu çalışmalar sonucunda olasılık teorisi, bulanık kümeler teorisi ve sezgisel bulanık teorisi gibi teoremler ortaya çıkmıştır.

Bu teoriler arasında dikkat çeken teorilerden biri L.A. Zadeh tarafından (Zadeh, 1965)'de ortaya atılan bulanık kümeler teorisidir. Bir başka teori ise 1999 yılında Molodtsov'un ortaya atmış olduğu esnek küme teorisidir (Molodtsov, 1999).

Matematiğin birçok alanında esnek küme teorisi ile ilgili çok fazla araştırma yapılmıştır. (Maji & diğ. 2002, 2003)'de karar verme problemlerine esnek kümeler teorisini uygulamış daha sonra esnek kümelerde bazı işlemler tanımlanmıştır. (Pei & Miao, 2005)'de esnek kümeler ile bilgi sistemleri arasındaki ilişkileri araştırılmıştır. (Aktaş & Çağman, 2007)'de esnek grup kavramı tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmişlerdir. (Kharal & Ahmad, 2011)'de esnek küme teorisi üzerine çalışmalarda bulunmaktadır. (Shabir & Naz, 2011)'da esnek topolojik uzayları tanımlanmıştır. (Aygünoğlu & Aygün, 2012) esnek kompaktlık gibi bazı yeni kavramlar üzerinde çalışılmıştır. (Das & Samanta, 2012)'da esnek reel sayılar tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir. (Nazmul & Samanta, 2013)'da esnek kümelerle ilgili bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

Bununla beraber (Aseev, 1986)'den yararlanılarak (Yılmaz, Çakan & Aytekin, 2012)'de quasilineer uzayların topolojisi incelenmiştir. (Aseev, 1986)'de normlu quasilineer uzayları tanımlanmıştır. (Çakan, 2016)'da ise normlu quasilineer uzaylar teorisine ilişkin bazı yeni sonuçları verilmiştir. (Bozkurt & Yılmaz, 2016) 'da iç çarpım quasilineer uzay tanımlanmıştır. Yine bu tanım verilirken quasilineer uzaylarda olduğu gibi kısmi sıralama bağıntısı göz önünde bulundurulmuştur. Oluşturulan iç çarpım fonksiyonuyla birlikte quasilineer uzayda bir norm tanımlanmış ardından lineer uzaylara benzer şekilde iç çarpım quasilineer uzayların da özel bir normlu quasilineer uzay olduğu görülmüştür. Yine (Bozkurt & Yılmaz, 2016 (a))'da ise lineer iç çarpım uzaylarında verilen bazı sonuçların karşılıkları, iç çarpım quasilineer uzaylarında da verilebilmiştir.

Quasilineer uzay kavramının bir esnek küme üzerinde tanımlayabileceğini düşünen (Bozkurt, 2020)'de esnek quasilineer uzaylar ve esnek normlu quasilineer uzayların tanımını yapmıştır. Yine aynı çalışmada esnek quasilineer uzaylarda da esnek lineer uzaylarda elde edilen birçok teoremin tutarlı karşılıkları elde edilebilmiştir. (Aseev, 1986) çalışmasından normlu uzayların bir genelleştirmesi olarak normlu quasilineer uzayların verildiğini ve lineer fonksiyonel analizden her iç çarpım uzayın bir normlu uzay olduğunu biliyoruz. Bununla beraber her iç çarpım quasilineer uzayın bir normlu quasilineer uzay olduğundan yola çıkarak biz de bu tez çalışmamızda esnek normlu quasilineer uzayların genelleştirmesi olan esnek iç çarpım quasilineer uzay kavramını tanımladık. Bu yeni kavramı tanımlarken tıpkı iç çarpım quasilineer uzaylarda olduğu gibi görüntü kümemizin küme değerli olması gerektiğini gördük. Yine aynı şekilde esnek normlu quasilineer uzayda verilen kısmi sıralama bağıntısının esnek iç çarpım quasilineer uzaylarda da olması gerektiğini gördük. Ayrıca bu yeni kavram ile ilgili bazı tanım, teorem, örnek ve sonuçlar sunduk. Çalışmamızın son bölümünde ise quasilineer uzaylara özgü olan zemin kavramı ile ilgili esnek quasilineer uzaylarda bazı sonuçlar elde ettik yine burada bir esnek quasilineer uzayda esnek quasi vektörünün zeminini inceledik quasilineer uzaylarda verilen bazı teoremlerin esnek quasilineer uzaylarda karşılığı olup olmadığını araştırdık.

Beş bölümden oluşan bu tezin ilk bölümü olan giriş bölümünde esnek kümeler ve quasilineer uzaylar ile ilgili bazı bilgiler verilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde lineer uzaylardaki bazı temel kavram ve teoremler ile beraber Housdorf metrik kavramları verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde quasilineer, normlu quasilineer ve iç çarpım quasilineer uzaylar ile ilgili bazı tanım, kavram ve sonuçlar verilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde esnek kümeler ve esnek quasilineer kümeler ile ilgili bazı temel bilgiler ve tezin son bölümünde kullanılacak bazı teoremler verilmiştir.

Tezin beşinci bölümünde ise esnek iç çarpım quasilineer uzay kavramı tanımlanmış ve bu yeni kavram ile ilgili bazı teorem ve sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca esnek quasilineer uzaylarda zemin kavramıyla ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde genel olarak çalışmamızın ilerleyen kısımlarında kullanacağımız lineer fonksiyonel analizin bazı temel kavramlarını, teoremlerini ve sonuçlarını vereceğiz. Ayrıca Hausdorff ayrımı, uzaklığı ve metriğide bu kısımda verilecektir.

2.1. Temel Fonksiyonel Analiz Kavramları

Tanım 2.1.1. X boştan farklı bir küme ve d, X üzerinde bir uzaklık fonksiyonu olmak üzere $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. d fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ için

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (2.1.1)
- $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri) (2.1.2)
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği) (2.1.3)

koşulları sağlanıyorsa d fonskiyonuna X üzerinde bir **metrik,** (X, d) çiftine ise bir **metrik uzay** denir.

Eğer (2.1.1) aksiyomu yerine $d(x, x) = 0$ aksiyomu yazılırsa, d'ye bir **yarımetrik** (X, d) ikilisine de **yarımetrik uzay** denir (Kreyszing, 1989).

Tanım 2.1.2. (X, d) bir metrik uzay ve $K \subseteq X$ olsun. Eğer K kümesi herbir noktasının etrafında bir yuvar içeriyorsa K'ya **açık küme** denir. Eğer K kümesinin X'e göre tümleyeni açık ise K'ya **kapalı küme** denir (Kreyszing, 1989).

Tanım 2.1.3. X boştan farklı bir küme ve τ'da X'in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer;

- $\emptyset \in \tau$ ve $X \in \tau$,
- τ'nin her hangi sayıda elemanlarının birlesimi τ'nun da elemanıdır,
- τ'nin sonlu sayıda elemanlarının kesişimi τ'nun da elemanıdır

şartları sağlanıyorsa τ'ya X üzerinde bir **topoloji** ve (X, τ) ikilisine de **topolojik uzay** denir (Maddox, 1973).

Tanım 2.1.4. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere ve $x \neq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için x ve y'yi içeren τ'nun iki ayrık açık altkümesi bulunabiliyorsa (X, τ)'ya **Hausdorff uzayı** denir (Maddox, 1973) (Wilansky, 1978).

Tanım 2.1.5. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere ve $K \subseteq X$ olsun. Eğer K'nın her açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahipse K'ya **kompakt küme** denir (Kreyszing, 1989).

Teorem 2.1.1. $\mathbb{R}^n$'nin bir X alt kümesi verilsin. X'in kompaktlığı ancak ve ancak X kapalı ve sınırlı ise sağlanır (Kreyszing, 1989).

Tanım 2.1.6. X bir küme olmak üzere ve "$\leq$", X üzerinde bir bağıntı olsun, eğer bu bağıntı $\forall x, y, z \in X$ için;

- $x \leq x$ (2.1.4)
- $x \leq y, y \leq z$ ise $x \leq z$ (2.1.5)
- $x \leq y, y \leq x$ ise $x = y$ (2.1.6)

şartlarını sağlıyorsa bu bağıntıya X üzerinde bir **kısmi sıralama bağıntısı** denir (Kreyszing, 1989).

Tanım 2.1.7. X boş olmayan bir küme ve K bir cisim olmak üzere. X üzerinde " + " ve " $\cdot$ " skalerle çarpma işlemleri,

- $+ : X \times X \to X \,;\, (x, y) \to x + y$
- $\cdot : K \times X \to X \,;\, (\alpha, x) \to \alpha \cdot x$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in K$ için

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$,
2. $x + y = y + x$,
3. $x + \theta = x$ oluyorsa θ'ya X'in sıfır elemanı denir. ,
4. $\forall x \in X$ icin $x + (-x) = \theta$ oluyorsa $-x'$e, x'in tersi denir,
5. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$,
6. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$,
7. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$,
8. $1 \cdot x = x$ olacak şekilde $1 \in X$ vardır

şartları sağlanıyorsa X'e K üzerinde bir **lineer uzay (vektör uzayı)** denir (Debnath & Mikusinski, 2005).

Tanım 2.1.8. X lineer bir uzay olsun ve K cismi üzerinde toplama ve skaler çarpma işlemleri gerçekleştirsin. Bir $Y \subset X$ altkümesi, K üzerinde (+) ve ($\cdot$) işlemleri olan lineer bir uzay yapısına sahipse, Y uzayına X 'in alt vektör uzayı denir. (Debnath & Mikusinski, 2005).

Teorem 2.1.2. K cismi üzerinde verilen bir X lineer uzayında $Y \subseteq X$ alt kümesi verilsin. Y kümesi X'in bir alt vektör uzayı olabilmesi için ancak ve ancak $\forall \alpha, \beta \in K$ ve $\forall y_1, y_2 \in Y$ için $\alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2 \in Y$ olmalıdır (Debnath & Mikusinski, 2005).

Tanım 2.1.9. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $A \subseteq X$ verilsin. Eğer, $\forall x, y \in A$ ve $\forall \lambda \in [0,1]$ için $\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y \in A$ oluyorsa A'ya **konveks küme** denir (Debnath & Mikusinski, 2005).

Örnek 2.1.1. $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ birim küresi $\mathbb{R}^2$'nin konveks bir alt kümesidir. Ayrıca her alt vektör uzayıda konveks bir kümedir (Debnath & Mikusinski, 2005).

Tanım 2.1.10. K cismi üzerinde verilen X bir lineer uzay ve $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\|\cdot\|$ fonksiyonu $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için

1. $\|x\| = 0$ ancak ve ancak $x = 0$ (2.1.7)
2. $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \|x\|$ (2.1.8)
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (2.1.9)

koşullarını gerçekleştiriyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir **norm** ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine ise **normlu uzay** denir. Eğer $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ şartı yerine sadece $\|x\| \geq 0$ şartı alınırsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir **yarı norm** ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine ise **yarı normlu uzay** denir (Wilansky, 1978).

Teorem 2.1.3. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun.

$$d: X \times X \to \mathbb{R}$$
$$d(x,y) = \|x - y\|$$

olarak tanımlı d fonksiyonu, X üzerinde bir metrik fonksiyonudur. Bu teoremde tanımlanan d metriğine **normun ürettiği metrik** ya da **norm metriği** denir (Wilansky, 1978).

Sonuc 2.1.1. Her normlu uzay norm metriğiyle bir metrik uzaydır (Wilansky, 1978).

Tanım 2.1.11. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu lineer uzay olsun. $\forall \epsilon > 0$ için bir N doğal sayısı vardır öyle ki her $n > N$ için $\|x_n - x\| < \epsilon$ oluyorsa (x_n) dizisi $x \in X$'e yakınsaktır denir. $x_n \to x (n \to \infty)$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ile gösterilir (Debnath & Mikusinski, 2005).

Tanım 2.1.12. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu lineer uzay olsun. $\forall \epsilon > 0$ için bir M doğal sayısı vardır öyle ki her $m, n > M$ için $\|x_m - x_n\| < \epsilon$ oluyorsa (x_n) dizisine **Cauchy dizisi** denir (Debnath & Mikusinski, 2005).

Tanım 2.1.13. Bir normlu lineer uzayda seçilen rastgele bir Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya **tam normlu uzay** denir. Tam normlu uzaylara ise **Banach uzayı** adı verilir (Debnath & Mikusinski, 2005).

Tanım 2.1.14. X bir lineer uzay, $\langle .,. \rangle: X \times X \to \mathbb{C}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu fonksiyona X'de bir iç çarpım ve $(X, \langle .,. \rangle)$ ikilisine de bir **iç çarpım uzayı** denir. $\forall x, y, z \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ ve $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ (2.1.10)
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (2.1.11)

3. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ (2.1.12)

4. $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ (2.1.13)

(Kreyszing, 1989).

Teorem 2.1.4. (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği) X bir iç çarpım uzayı ise, $\forall x, y \in X$ için

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|.\|y\| \quad (2.1.14)$$

dir (Debnath & Mikusinski, 2005).

Sonuc 2.1.2. (Üçgen Eşitsizliği) X bir iç çarpım uzayı ise, $\forall x, y \in X$ için

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

’dir (Debnath & Mikusinski, 2005).

Teorem 2.1.5. Her iç çarpım uzayı;

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad (2.1.15)$$

ile bir normlu lineer uzaydır (Maddox, 1973).

Teorem 2.1.6. (Paralelkenar Özelliği) X bir iç çarpım uzayı ise $\forall x, y \in X$ için

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (2.1.16)$$

’dir. (2.1.16) eşitliğini sağlamayan bir normun, (2.1.15) kullanılmasıyla, bir iç çarpımdan elde edilemeyeceği söylenebilir. Dolayısıyla her normlu uzay bir iç çarpım uzayı değildir (Kreyszing, 1989).

Teorem 2.1.7. $(X, \|.\|)$ normlu uzayının bir iç çarpım uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall x, y \in X$ vektörleri için paralelkenar özelliğine sahip olmasıdır (Kreyszing, 1989).

Tanım 2.1.15. Bir H iç çarpım uzayı, iç çarpımla tanımlanan norm altında Banach uzayı ise H’ye bir **Hilbert uzayı** denir (Maddox, 1973).

Örnek 2.1.2. $\mathbb{C}^n$ uzayı

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

iç çarpımı ile birlikte n-boyutlu bir Hilbert uzayıdır (Maddox, 1973).

Örnek 2.1.3. $C[a, b]$ uzayı

$$\langle x, y\rangle = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$$

fonksiyonu ile birlikte bir iç çarpım uzayıdır. Fakat iç çarpımla tanımlanan

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

normuyla tam bir uzay değildir. Dolayısıyla Hilbert uzayı da değildir (Maddox, 1973).

Önerme 2.1.1. Bir iç çarpım uzayında

$x_n \to x$ ve $y_n \to y$ ise $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$'dir (Kreyszing, 1989).

Tanım 2.1.16. Bir X iç çarpım uzayı olsun. X'in x ve y gibi iki elemanı verildiğinde eğer

$$\langle x, y \rangle = 0$$

ise, x elemanı, y elemanına dik'dir denir ve $x \perp y$ şeklinde yazılır. $S \subseteq X$ olsun. $\forall x$, $y \in S$ için $x \perp y$ ise S'ye **ortogonaldir** denir. Ayrıca her $x \in S$ için $\|x\| = 1$ oluyorsa S'ye **ortonormal** küme denir.

x ve y ortogonal elemanları için $\langle x, y \rangle = 0$ yazılabileceğinden $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ bağıntısı kolayca elde edilebilir (Kreyszing, 1989).

Teorem 2.1.8. Eğer $\{x_1, \dots, x_n\}$ kümesi ortogonal ise $\|\sum x_k\|^2 = \sum \|x_k\|^2$'dir (Maddox, 1973).

Tanım 2.1.17. X bir iç çarpım uzayı ve K**'**da X'in boş olmayan bir alt kümesi olsun. $K^\perp = \{k \in K: \langle k, m \rangle = 0, m \in A\}$ kümesine K**'nın dikeyi** denir (Debnath & Mikusinski, 2005).

Teorem 2.1.9. X iç çarpım uzayı, A'da X'in boş olmayan bir alt kümesi olsun. $A^\perp$ kapalı bir alt uzaydır (Debnath & Mikusinski, 2005).

2.2. Hausdorff Metrik

Birinci bölümde adı geçen lineer uzay olmayan küme ailelerinin en önemlilerinden ikisi $\mathbb{R}^n$'in kompakt ve kompakt-konveks alt kümelerinin sınıfları olan $\Omega(\mathbb{R}^n)$ ve $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$'dir. Bundan dolayı bu kümelerdeki quasilineer yapıyı anlayabilmek için bu kısımda (Bhaskar, Lakshmikantham, & Vasundhara Devi, 2006) referansından yararlanarak $\mathbb{R}^n$ kompakt ve kompakt-konveks alt kümelerinin ailesini değineceğiz.

Tanım 2.2.1. $x \in \mathbb{R}^n$ ve K kümesi $\mathbb{R}^n$'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. x noktasının K'ya olan $d(x, K)$ uzaklığı, $d(x, K) = \inf\{\|x - k\|: k \in K\}$ olarak verilir. $S_\epsilon(K) = \{x \in \mathbb{R}^n: d(x, K) < \epsilon\}$ kümesine K'nın ϵ-**komşuluğu** denir. $S_\epsilon(K)$'nın kapanış kümesi ise, $\overline{S}_\epsilon(K) = \{x \in \mathbb{R}^n: d(x, K) \leq \epsilon\}$ altkümesidir. $\mathbb{R}^n$'nin θ merkezli 1 yarıçaplı birim küresini $\overline{S_1}^n = \overline{S_1}(\theta)$ ile gösterilir. Ayrıca $\forall \epsilon > 0$ ve boştan farklı herhangi bir $K \subset \mathbb{R}^n$ için $\overline{S}_\epsilon(K) = K + \epsilon \cdot \overline{S_1}^n$ olur (Bhaskar, Lakshmikantham, & Vasundhara Devi, 2006).

Tanım 2.2.2. K ve M kümeleri $\mathbb{R}^n$'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. $d_H(\mathrm{M}, K) = \sup\{d(m, K): m \in M\}$ ya da

$$d_H(M, K) = \inf\left\{\epsilon > 0: M \subseteq K + \epsilon \cdot \overline{S_1}^n\right\}$$

değerine M'nin K'dan **Hausdorff ayrımı** denir. Genellikle, $d_H(K, M) \neq d_H(M, K)$ eşitsizliği doğru olduğundan Hausdorff ayrımı bir metrik fonksiyonu değildir (Bhaskar, Lakshmikantham, & Vasundhara Devi, 2006).

Tanım 2.2.3. $\mathbb{R}^n$'nin boş olmayan K ve M alt kümeleri arasında

$$D(K, M) = \max\{d_H(K, M), d_H(K, M)\}$$

uzaklığına **Hausdorff uzaklığı** denir. Bu D fonksiyonu,

1. $D(K, M) \geq 0$
2. $D(K, M) = 0 \Leftrightarrow \overline{M} = \overline{K}$
3. $D(K, M) = D(M, K)$
4. $D(M, K) \leq D(M, N) + D(N, K)$

bağıntılarını sağladığından $\mathbb{R}^n$'nin boştan farklı alt kümelerinin ailesinde bir metrik tanımlar. Buna **Hausdorff metrik** denir.

Eğer $\mathbb{R}^n$'nin boştan farklı kapalı ve sınırlı ailelerinin kümesi olan $\Omega(\mathbb{R}^n)$'yi alırsak Hausdorff uzaklığıyla tanımlı D fonksiyonu üzerinde bir metrik tanımlar. Yani $(\Omega(\mathbb{R}^n), D)$ bir metrik uzaydır (Bhaskar, Lakshmikantham, & Vasundhara Devi, 2006).

Teorem 2.2.1 $\mathrm{M}, \mathrm{M}', \mathrm{K}$ ve $\mathrm{K}' \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ve her $\lambda \geq 0$ için

- $\mathrm{D}(\mathrm{M}+\mathrm{M}', \mathrm{K}+\mathrm{M}') = \mathrm{D}(\mathrm{M}, \mathrm{K})$
- $\mathrm{D}(\mathrm{M}+\mathrm{M}', \mathrm{K}+\mathrm{K}') \leq \mathrm{D}(\mathrm{M}, \mathrm{K}) + \mathrm{D}(\mathrm{M}', \mathrm{K}')$
- $\mathrm{D}(\lambda \cdot \mathrm{M}, \lambda \cdot \mathrm{K}) = \lambda \mathrm{D}(\mathrm{M}, \mathrm{K})$

durumları sağlanır (Bhaskar, Lakshmikantham, & Vasundhara Devi, 2006)

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölüm (Aseev, 1986) çalışması temel alınarak quasilineer uzaylar ve normlu quasilineer uzaylardaki temel tanım ve sonuçlardan oluşacaktır. Burada Aseev'in quasilineer uzay tanımını verirken bir kısmi sıralama bağıntısı kullandığını göreceğiz. Yine burada Aseev kısmi sıralama bağıntısı vasıtasıyla quasilineer uzay üzerinde norm kavramını da tanımlayabilmiş ve özel olarak bu bağıntının " $=$ " bağıntısı olması durumunda quasilineer uzayın bir lineer uzay olduğunu belirtmiştir. Aseev'in (Aseev, 1986) çalışmasından yola çıkarak bir quasilineer uzay ile lineer uzay arasındaki en temel farkın bir quasilineer uzayda her elemanın tersinin mevcut olmadığını görüyoruz. Buradan da her lineer uzayın bir quasilineer uzay teşkil ettiğini fakat tersinin doğru olmayabileceğini sonucunu çıkarıyoruz.

Ayrıca bu bölümde (Aseev, 1986) çalışmasından yola çıkılarak lineer iç çarpım uzaylarının bir genelleştirmesi olan iç çarpım quasilineer uzayı kavramı (Bozkurt, 2016) çalışmasından yararlanılarak verilecektir. Ayrıca iç çarpımın oluşturduğu norm altında uzayımız bir Banach uzayı ise bu uzaya Hilbert quasilineer uzay denileceğini ve klasik lineer iç çarpım uzaylarındaki bir takım özelliklerin iç çarpım quasilineer uzaylarında sağlanıp sağlanmadığı (Yılmaz, Bozkurt, & Çakan, 2016) çalışmasından yararlanılarak gösterilecektir.

Bu bölümün devamında ise iç çarpım quasilineer uzaylarında önemli bir yeri olan ortogonallik ve ortonormallik kavramları (H.Bozkurt & Y.Yılmaz, 2016)'dan yararlanılarak verilecek ve bu kavramlarla ilgili bazı örnek ve teoremler sunulacaktır.

Burada $\mathbb{R}^n$'nin tüm boştan farklı kapalı ve sınırlı alt kümelerinin ailesini $\Omega(\mathbb{R}^n)$, tüm boştan farklı kapalı, sınırlı ve konveks alt kümelerinin ailesini $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ile göstereceğiz.

3.1. Quasilineer Uzaylar

Tanm 3.1.1. Bir Q kümesi üzerinde her $q, w, z, v \in Q$ ve her α, β skaler sayıları için aşağıda verilen şartları sağlayan bir " $\preccurlyeq$ " kısmi sıralama bağıntısı, bir cebirsel toplama işlemi ve reel sayılarla çarpma işlemi tanımlıysa bir **quasilineer uzay** denir (Aseev, 1986).

1. $q \preccurlyeq q$ (3.1.1)
2. $q \preccurlyeq w, w \preccurlyeq z \Longrightarrow q \preccurlyeq z$ (3.1.2)
3. $q \preccurlyeq w, w \preccurlyeq q \Longrightarrow q = w$ (3.1.3)
4. $q + w = w + q$ (3.1.4)
5. $q + (w + z) = (q + w) + z$ (3.1.5)
6. $q + \theta = q$ olacak şekilde bir $\theta \in Q$ vardır. (3.1.6)
7. $\alpha.(\beta.q) = (\alpha.\beta).q$ (3.1.7)
8. $\alpha.(q + w) = \alpha.q + \alpha.w$ (3.1.8)
9. $1.q = q$ (3.1.9)
10. $0.q = \theta$ (3.1.10)
11. $(\alpha + \beta).q \preccurlyeq \alpha.q + \beta.q$ (3.1.11)
12. $q \preccurlyeq w, z \preccurlyeq v \Longrightarrow q + z \preccurlyeq w + v$ (3.1.12)
13. $q \preccurlyeq w \Longrightarrow \alpha.q \preccurlyeq \alpha.w$ (3.1.13)

Quasilineer uzaylarını kısaca QLS olarak gösterebiliriz. Bir lineer uzay $q \preccurlyeq w \Leftrightarrow q = w$ kısmi sıralama bağıntısıyla birlikte quasilineer uzaydır. Ancak tersi her zaman doğru değildir (Aseev, 1986).

$\Omega_C(\mathbb{R})$ ve $\Omega(\mathbb{R})$ kümeleri bir "$\subseteq$" kapsama bağıntısı

$$M + N = \{m + n : m \in M, n \in N\}$$

cebirsel toplama işlemi ve

$$\lambda.M = \{\lambda m : m \in M\}$$

skalerle çarpma işlemleri ile beraber birer quasilineer uzaydır. $\Omega(E) = \{M \in \Omega(E) : M \text{ konveks}\}'$dir. Eğer E sonlu boyutlu ise, toplama işlemi

$$M + N = \{m + n : m \in M, n \in N\}$$

ile tanımlıdır.

Lemma 3.1.1. Q quasilineer uzayının θ elemanı minimaldir. Yani $q \preccurlyeq \theta \Longrightarrow q = \theta$ olur (Çakan & Yılmaz, 2015).

Tanım 3.1.2. Bir Q quasilineer uzayında $q' + q = \theta$ olacak şekilde bir $q' \in Q$ var ise q' elemanına q'in **tersi** denir. Eğer bir q elemanının tersi mevcut ise tektir. Bir q elemanının tersi mevcut ise q elemanı **regüler** aksi takdirde **singülerdir** denir (Aseev, 1986).

İleride yalnız θ elemanının minimal olmadığı, regüler elemanlarında minimal olabileceğini (Yılmaz, Çakan, & Aytekin, 2012)'den yararlanarak söyleyebileceğiz.

Lemma 3.1.2. Bir Q quasilineer uzayının her $q \in Q$ için $q' \in Q$ olacak şekilde tersi mevcut ise Q'deki kısmi sıralama bağıntısı eşitlik bağıntısı halini alır. Bu durumda (3.1.11) şartı dağılma özelliği şartına dönüşür. Dolayısıyla Q bir lineer uzay olur (Aseev, 1986).

Sonuç 3.1.1. Her reel lineer uzay aynı zamanda bir quasilineer uzaydır. Ancak her lineer uzay bir quasilineer uzay olmayabilir.

Sonuç 3.1.2. Bir reel lineer uzayda (3.1.1)-(3.1.13) şartlarını sağlayacak şekilde bir kısmi sıralama bağıntısı sadece eşitlik ile elde edilir (Aseev, 1986).

Tezin devamında $-q = (-1).q$ eşitliğini kabul edeceğiz. Bir Q quasilineer uzayındaki $q \in Q$'nun regüler olması için ancak ve ancak $q - q = 0$ yani $q' = -q$ olmasıdır.

Tanım 3.1.3. Q bir quasilineer uzayında $M \subseteq Q$ verilsin. Eğer M kümeside Q'deki aynı işlemlerle ve kısmi sıralama bağıntısıyla beraber bir quasilineer uzay teşkil ediyorsa M'ye Q'nun **bir alt uzayı** denir (Aseev, 1986).

Teorem 3.1.1. Q bir quasilineer uzay ve $W \subseteq Q$ olsun. W alt uzaydır $\Leftrightarrow \forall q, w \in W, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ icin $\alpha q + \beta w \in W$ olur (Aseev, 1986).

Tanım 3.1.4. Q bir quasilineer uzay olmak üzere bir $q \in Q$ için $-q = q$ ise q elemanına **simetriktir** denir. Q'in tüm simetrik elemanlarının kümesi Q_d ile gösterilir. Ayrıca Q_r ve Q_s kümeleri sırasıyla Q'in regüler ve singüler elemanlarının kümelerini göstermektedir (Aseev, 1986).

Teorem 3.1.2. Q_r, Q_d ve $Q_s \cup \{0\}$ kümeleri Q'in alt uzaylarıdır (Aseev, 1986).

Önerme 3.1.1. Bir Q quasilineer uzayında her regüler eleman minimaldir (Yılmaz, Çakan, & Aytekin, 2012).

3.2. Normlu Quasilineer Uzaylar

Tanım 3.2.1. Q bir quasilineer uzay olmak üzere bir $\|.\|_Q: Q \longrightarrow \mathbb{R}$ reel fonksiyonu için aşağıda verilen şartlar sağlanıyorsa, Q üzerinde bir **norm** denir (Aseev, 1986).

1. $q \neq \theta \Rightarrow \|q\|_Q > 0$ (3.2.1)
2. $\|q + w\|_Q \leq \|q\|_Q + \|w\|_Q$ (3.2.2)
3. $\|\alpha . q\|_Q = |\alpha| \|q\|_Q$ (3.2.3)
4. $q \preccurlyeq w \Rightarrow \|q\|_Q \leq \|w\|_Q$ (3.2.4)
5. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists q_\epsilon \in Q$ vardır öyle ki

$q \preccurlyeq w + q_\epsilon$ ve $\|q_\epsilon\| \leq \epsilon \Rightarrow q \preccurlyeq w$ olur. (3.2.5)

Q quasilineer uzayında bir norm fonksiyonu tanımlıysa Q quasilineer uzayına bir **normlu quasilineer uzay** denir. Normlu quasilineer uzayda her elemanın toplamsal tersi varsa bu normlu quasilineer uzay, reel normlu lineer uzay olur.

Tanım 3.2.2. Q bir normlu quasilineer uzay olsun. Q üzerinde Hausdorff metrik tanımı aşağıdaki şekilde yapılır. Her $q, w \in Q$ için

$$h_Q(q, w) = \inf\{r \geq 0: q \preccurlyeq w + a_1^r, w \preccurlyeq q + a_2^r, \|a_i^r\|_Q \leq r\} \ (i = \{1,2\}) \quad (3.2.6)$$

$q, w \in Q$ için $q \preccurlyeq w + (q - w)$ ve $w \preccurlyeq q + (w - q)$ bağıntıları doğru olduğundan $h_Q(q, w)$ iyi tanımlıdır. Ayrıca tanımdan dolayı $\forall q, w \in Q$ için $h_Q(q, w) \leq \|q - w\|_Q$ eşitsizliği doğrudur. $H_Q(q, w)$ metrik aksiyomlarını sağlar (Aseev, 1986).

Lemma 3.2.1. Q normlu bir quasilineer uzay olmak üzere cebirsel toplama ve reel sayılarla çarpma işlemleri, Hausdorff metriğe göre süreklidir. Ayrıca Q'deki norm fonksiyonu da Hausdorff metriğe göre süreklidir (Aseev, 1986).

Hausdorff metriğe göre $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

- $h_Q(\alpha \cdot q, \alpha \cdot w) = |\alpha| \cdot h_Q(q, w)$
- $h_Q(q + w, z + v) \leq h_Q(q, z) + h_Q(w, v)$
- $\|q\|_Q = h_Q(q, \theta)$

şartları sağlanır.

Lemma 3.2.2. Q bir normlu quasilineer uzay olmak üzere;

a) $q_n \to q_0, w_n \to w_0$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $q_n \preccurlyeq w_n$ olsun. Bu durumda $q_0 \preccurlyeq w_0$ olur.

b) $q_n \to q_0$ ve $z_n \to q_0$ olsun. Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için $q_n \preccurlyeq w_n \preccurlyeq z_n$ ise $w_n \to q_0$ olur.

c) $q_n + w_n \to q_0$ ve $w_n \to \theta$ olsun. Bu durumda $q_n \to q_0$ olur (Aseev, 1986).

Örnek 3.2.1. E bir Banach uzayı ise $\|M\|_{\Omega(E)} = \sup\|m\|_E$, $\Omega(E)$ üzerinde bir norm tanımlar. Bu durumda $\Omega(E)$ bir normlu quasilineer uzaydır. $\forall M, N \in \Omega(E)$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $M \neq \theta$ olsun. Bu durumda $\exists m \in M$ vardır öyle ki $m \neq 0_E$'dir. Öyleyse $\|.\|_E$ normunun pozitiflik özelliği gereği $\|m\|_E > 0$ olur. Bu ise

$$\|M\|_{\Omega(E)} = \sup_{m \in M} \|m\|_E > 0$$

demektir (Aseev, 1986).

3.3. İç Çarpım Quasilineer Uzayları

Bu bölümde iç çarpım quasilineer uzay kavramını vermeden önce bu tanım için gerekli olan bazı kavramları (Çakan & Yılmaz, 2015) ve (Yılmaz & Bozkurt, 2016)’ dan yararlanarak verelim.

Tanım 3.3.1. $(Q, \preccurlyeq)$ bir quasilineer uzay, $M \subseteq Q$ ve $q \in M$ olsun. “$\preccurlyeq$” kısmi sıralama bağıntısına göre q elemanından önce gelen M kümesindeki tüm regüler elemanların kümesine q elemanının M’deki zemini, q elemanından önce gelen Q kümesindeki tüm regüler elemanların kümesine ise q elemanının Q’deki zemini denir ve sırasıyla F_q^M ve F_q^Q ile gösterilir. Buna göre

$$F_q^M = \{w \in M_r : w \preccurlyeq q\}$$

ve

$$F_q^Q = \{w \in Q_r : w \preccurlyeq q\}$$

dir (Yılmaz & Bozkurt, 2016).

Tanım 3.3.2. Bir Q quasilineer uzayında her $w \in Q$ için $supF_w$ mevcut ve

$$w = \sup\{q \in Q_r : q \preccurlyeq w\}$$

oluyorsa Q quasilineer uzayına **sağlam zeminli** (solid-floored) denir. Eğer yukarıdaki şart sağlanmıyorsa bu durumda Q’e **sağlam zeminli olmayan** (non-solid floored) quasilineer uzay denir.

Yukarıda verilen tanımda anlatılmak istenen Q quasilineer uzayının “$\preccurlyeq$” bağıntısına göre supremumudur. Doayısıyla bir Q quasilineer uzayının sağlam zeminli olabilmesi için gerekli ve yeterli şart her $w \in Q$ için $supF_w$ mevcut ve $w \in supF_w$ olmasıdır (Yılmaz & Bozkurt, 2016).

Tanım 3.3.3. Q bir quasilineer uzay olsun. Q’i kapsayan sağlam zeminli quasilineer uzayların en küçüğüne Q’in **sağlamlaştırılması** denir ve $\hat{Q}$ ile gösterilir. Yani, Q’i kapsayan başka bir sağlam zeminli W quasilineer uzayı varsa $\hat{Q} \subseteq W$’dir.

Sağlam zeminli bazı Q quasilineer uzaylarında $\hat{Q} = Q$’dur. Örneğin; $\Omega_C(\mathbb{R})$ sağlam zeminli bir quasilineer uzaydırve $\Omega_C(\mathbb{R})$’nin sağlamlaştırması kendisine eşittir. Yine aynı şekilde $(\widehat{\Omega_C(\mathbb{R})})_r$ = $(\Omega_C(\mathbb{R}))_r$’dir. Q bir quasilineer uzay ve $w \in Q$ ise w’nin $\hat{Q}$’deki zemini

$$F_w^{\hat{Q}} = \left\{z \in \left(\hat{Q}\right)_r : z \preccurlyeq w\right\}$$

ile gösterilir (Yılmaz & Bozkurt, 2016).

Lemma 3.3.1. $\Omega_C(\mathbb{R})$ singüler elemanlarının kümesi olan $\Omega_C(\mathbb{R})_s$ altuzayının sağlamlaştırması $\Omega_C(\mathbb{R})$'dir. Yani $(\widehat{\Omega_C(\mathbb{R})})_s = \Omega_C(\mathbb{R})$'dir (Yılmaz & Bozkurt, 2016).

Sonuç 3.3.1. Daha genel olarak $(\widehat{\Omega_C(\mathbb{R}^n)})_s = \Omega_C(\mathbb{R}^n)$'dır (Yılmaz & Bozkurt, 2016).

Tanım 3.3.4. Bir Q quasilineer uzayında bir iç çarpım, $Q \times Q$'den $\Omega(\mathbb{R})$ içine tanımlı aşağıdaki şartları sağlayan bir $\langle . , . \rangle$ fonksiyonudur. Her q, w, z, u, v $\in Q$ ve her $\alpha \in$ R için;

1. $q, w \in Q_r$ *ise* $\langle \mathrm{q}, \mathrm{w} \rangle \in \left(\Omega(\mathbb{R})\right)_{\mathrm{r}} \equiv \mathbb{R}$ (3.3.1)
2. $\langle \mathrm{q} + \mathrm{w}, \mathrm{z} \rangle \subseteq \langle \mathrm{q}, \mathrm{z} \rangle + \langle \mathrm{w}, \mathrm{z} \rangle$ (3.3.2)
3. $\langle \alpha . \mathrm{q}, \mathrm{w} \rangle = \alpha \cdot \langle \mathrm{q}, \mathrm{w} \rangle$ (3.3.3)
4. $\langle \mathrm{q}, \mathrm{w} \rangle = \langle \mathrm{w}, \mathrm{q} \rangle$ (3.3.4)
5. $q \in Q_r$ *için* $\langle q, q \rangle \succcurlyeq 0$ ve $\langle q, q \rangle = \{0\} \Leftrightarrow q = \{0\}$ (3.3.5)
6. $\|\langle q . w \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = sup\left\{\left\| \langle a, b \rangle : a \in F_q^{\hat{Q}}, b \in F_w^{\hat{Q}} \right\|\right\}$ (3.3.6)
7. $\mathrm{q} \preccurlyeq \mathrm{w}$ ve $\mathrm{u} \preccurlyeq \mathrm{v} \Rightarrow \langle \mathrm{q}, \mathrm{u} \rangle \subseteq \langle \mathrm{w}, \mathrm{v} \rangle$ (3.3.7)
8. $\forall \varepsilon > 0$ için bir $\mathrm{q}_\varepsilon \in \mathrm{Q}$ vardır öyle ki
   $\mathrm{q} \preccurlyeq \mathrm{w} + \mathrm{q}_\varepsilon$ ve $\langle \mathrm{q}_\varepsilon, \mathrm{q}_\varepsilon \rangle \subseteq \mathrm{S}_\varepsilon(\theta)$ ise $\mathrm{q} \preccurlyeq \mathrm{w}$ (3.3.8)

'dir. Burada $\mathrm{S}_\varepsilon(\theta)$ kümesi **Ω** (R)'de θ - merkezli ε – yarıçaplı küreyi göstermektedir.

Bu iç çarpımla birlikte Q quasilineer uzayına bir iç çarpım uzay denir. $q \in Q$ için

$$\|q\|_Q = \sqrt{\|\langle q, q \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})}}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir norm tanımlar ve bu norma iç çarpım normu denir (Yılmaz & Bozkurt, 2016).

Sonuç 3.3.2. Bir Q iç çarpım quasilineer uzayının regüler alt uzayı olan Q_r aynı iç çarpım ile bir (lineer) iç çarpım uzayıdır (Yılmaz & Bozkurt, 2016).

Lemma 3.3.2. (Schwarz Eşizsizliği) Q bir iç çarpım quasilineer uzayı olmak üzere, her $q, w \in Q$ için

$$\|\langle q, w \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \leq \|q\|_Q \|w\|_Q \tag{3.3.9}$$

olur (Yılmaz & Bozkurt, 2016).

Teorem 3.3.1. Q bir iç çarpım quasilineer uzayı olmak üzere

$$\|q\|_Q = \sqrt{\|\langle q, q \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})}} \tag{3.3.10}$$

eşitliği Q üzerinde bir norm tanımlar (Yılmaz & Bozkurt, 2016).

Teorem 3.3.2. n pozitif tamsayı olmak üzere $M, N \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ için

$$\langle M, N \rangle = \{\langle m, n \rangle_{\mathbb{R}^n} : m \in M, n \in N\} \tag{3.3.12}$$

fonksiyonu bir iç çarpımdır ve bu iç çarpım ile $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ bir iç çarpım quasilineer uzayıdır (Yılmaz & Bozkurt, 2016).

Uyarı 3.3.2. Bir iç çarpım uzayının normu paralelkenar kanununu sağlamak zorunda değildir (Yılmaz & Bozkurt, 2016).

Sonuç 3.3.3. Sonuç 3.3.2 den her iç çarpım quasilineer uzayının regüler alt uzayı üzerinde bu iç çarpım klasik iç çarpım olacağından paralelkenar kuralı sağlanır (Yılmaz & Bozkurt, 2016).

Teorem 3.3.3. Bir iç çarpım quasilineer uzayının regüler altuzayı üzerinde paralelkenar kanunu sağlanır (Yılmaz & Bozkurt, 2016).

Uyarı 3.3.3. Önerme 3.3.3'ün ispatı klasik lineer fonksiyonel analize benzerdir. Ancak quasilineer uzaylardaki dizinin yakınsaklığı, lineer uzaylardaki bir dizinin yakınsaklığından farklı olduğuna dikkat edilmelidir. Buradaki yakınsaklık quasilineer uzayın Hausdorff metriğine göre yakınsaklığıdır (Yılmaz & Bozkurt, 2016).

Önerme 3.3.1. Q bir iç çarpım quasilineer uzayı olmak üzere $q_n \to q$ ve $w_n \to w$ ise $\langle q_n, w_n\rangle \to \langle q, w\rangle$'dir (Yılmaz & Bozkurt, 2016).

Tanım 3.3.5. Bir Q iç çarpım quasilineer uzayına

$$\|q\| \leq \|N_Q\| \text{ iken } q \preccurlyeq N_Q$$

şartını sağlayan $N_Q \neq \theta$ bulunması durumunda **iç çarpım Ω −uzayı** denir. Burada $\|q\| = \sqrt[2]{\langle q, q\rangle}$ olduğunu hatırlatalım. Bu tanım (Aseev, 1986) de verilen normlu quasilineer uzaylarla ilgili olan Ω −uzayı tanımının doğal bir sonucudur.

Hatırlatalım ki bir normlu lineer uzay Ω −uzayı olamaz. Çünkü $\|q\| \leq \|N_Q\|$ olması durumunda $q = N_Q$ olacaksa $\left\|\frac{q}{2}\right\| \leq \|N_Q\|$ olacağından $\frac{q}{2} = N_Q$ olması gerekirdi. Bu ise doğru değildir. Öyleyse Ω −uzayı kavramı normlu lineer uzaylar için anlamsız bir kavramdır ve sadece nonlineer quasilineer uzaylar için anlamlı hale gelir (Yılmaz & Bozkurt, 2016).

3.4. Hilbert Quasilineer Uzaylar

$(Q, \|\cdot\|)$ bir quasilineer uzay ise

$$h(q,w) = \inf\left\{r \geq 0: q \preccurlyeq w + a_1^r, w \preccurlyeq q + a_2^r, \|a_i^r\|_Q \leq r\right\} \ (i = \{1,2\}) \tag{3.4.1}$$

eşitliğinin Q üzerinde bir metrik tanımladığını biliyoruz. Önemle belirtmek gerekir ki her $q, w \in Q$ için $h_Q(q,w) = \|q - w\|_Q$ eşitliği burada sağlanmayabilir. Fakat

$$h_Q(q,w) \leq \|q - w\|_Q \tag{3.4.2}$$

eşitsizliği daima doğrudur. Bu eşitsizlikten dolayı, normlu quasilineer uzayların topolojik özelliklerini norma göre incelemek yerine bu normdan türetilen metriğe göre incelemek daha doğru olacaktır. Zira,

$$d(q,w) = \|q - w\| \tag{3.4.3}$$

bir metrik belirtmez. Bu sebeple bu normun norm metriği (3.4.2) ile verilen metrikle verilmez. Onun yerine (3.4.1) ile verilen metrik norm metriğidir. Bu metriğe **Housdorff metrik** de denir. Eğer Q lineer uzaysa $h(q,w) = d(q,w)$ olduğunu biliyoruz (Aseev, 1986).

Tanım 3.3.5. Q bir iç çarpım quasilineer uzayı olsun. Eğer $q, w \in Q$ için $\|\langle q, w\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = 0$ ise q ve w'ye **ortogonaldir** denir. $q \perp w$ ile gösterilir (Bozkurt & Yılmaz, 2016 (a)).

Tanım 3.3.6. Q bir iç çarpım quasilineer uzayı ve $M \subset$ Q ortogonal alt kümesi olsun. Her $q \in M$ için $\|q\| = 1$ ise M ye **ortonormaldir** denir (Bozkurt & Yılmaz, 2016 (a)).

Örnek 3.3.6. $\Omega(\mathbb{R})$'nin $Q = [0,1]$ ve $W = \{0\}$ elemanlarını alalım.

$$\|\langle Q, W\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = \left\|\{m \cdot n : m \in [0,1], n \in \{0\}\}\right\|_{\Omega(\mathbb{R})} = \|\{0\}\|_{\Omega(\mathbb{R})} = 0$$

olduğundan Q ve $W, \Omega(\mathbb{R})$'nin ortogonal elemanlarıdır (Bozkurt & Yılmaz, 2016 (a)).

Örnek 3.4.3. $\Omega(\mathbb{R})$'nin $m = [0,1]$ ve $n = [-1,0]$ elemanlarını alalım.

$$\|\langle Q, W\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = \|\{m \cdot n : m \in [0,1], n \in [-1,0]\}\|_{\Omega(\mathbb{R})} = \|[-1,0]\|_{\Omega(\mathbb{R})} = 1$$

olduğundan Q ve W, $\Omega(\mathbb{R})$'nin ortogonal elemanları değildirler.

$M, N \in \Omega(\mathbb{R})$ için $\langle M, N\rangle = \{m \cdot n : m \in M, n \in N\} = \{0\}$ olması durumu M ya da N kümelerinden en az birinin $\{0\}$ tek noktası olması ile sağlanır. Kısacası $\Omega(\mathbb{R})$'nin her bir elemanına dik olan eleman sadece $\{0\}$ tek noktasıdır (Bozkurt & Yılmaz, 2016 (a)).

Örnek 3.4.4. $M_1, M_2, M_3, M_4 \subset \Omega(\mathbb{R}^2)$ olmak üzere

$M_1 = \{(0,m) : 0 \leq m \leq 1\}$,

$M_2 = \{(m,0) : 0 \leq m \leq 1\}$,

$M_3 = \{(0,-m) : 0 \leq m \leq 1\}$,

$M_4 = \{(-m, 0): 0 \leq m \leq 1\}$

olsun. M_1, M_2, M_3 ve M_4 kümeleri $\Omega(\mathbb{R}^2)$'nin birer elemanıdır. Ayrıca, Tanım 3.4.1'dan $\{M_1, M_2\}$ ve $\{M_3, M_4\}$ kümeleri $\Omega(\mathbb{R}^2)$'nin ortogonal alt kümeleridir (Bozkurt & Yılmaz, 2016 (a)).

Sonuç 3.3.5. Örnek 3.4.4.'deki M_1, M_2, M_3,M_4 için, $\{M_1, M_2\}$ ve $\{M_3, M_4\}$ kümeleri Tanım 3.4.2'den $\Omega(\mathbb{R}^2)$'nin birer ortonormal alt kümesidirler (Bozkurt & Yılmaz, 2016 (a)).

Teorem 3.3.5. Q bir iç çarpım quasilineer uzayı ve $q, w \in Q$ olsun. Eğer $q \perp w$ olması için gerek ve yeter şart $F_q^{\hat{Q}} \perp F_w^{\hat{Q}}$'dir (Bozkurt & Yılmaz, 2016 (a)).

Sonuç 3.3.6. Herhangi bir Q iç çarpım quasilineer uzayında $M, N \in Q$ ise (3.3.6)'dan

$$\|\langle M, N\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = \sup\left\{\|\langle m, n\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})}: m \in F_M^{\hat{Q}}, n \in F_N^{\hat{Q}}\right\}$$

olduğunu biliyoruz. Tanım 3.4.1 gereğince $\|\langle M, N\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = 0$ ise M ve N birbirlerine dik olur. Bu ise herhangi bir Q iç çarpım quasilineer uzayında iki elemanın dik olabilmesi için gerek ve yeter şartın elemanların $\hat{Q}$'daki zeminleri olan kümelerin, klasik iç çarpım uzayı olan Q_r regüler alt uzayında birbirine dik olmasıdır (Bozkurt & Yılmaz, 2016 (a)).

Örnek 3.4.5. Bir Q iç çarpım quasilineer uzayında $q \in Q_r$ ve $w \in Q_s$ ise

$$\begin{aligned}\|\langle q, w\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} &= \sup\left\{\|\langle m, n\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})}: m \in F_q^{\hat{Q}}, n \in F_w^{\hat{Q}}\right\} \\ &= \sup\left\{\|\langle q, n\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})}: n \in F_w^{\hat{Q}}\right\} \\ &= 0\end{aligned}$$

olması için her $n \in F_w^{\hat{Q}}$ için $\|\langle q, n\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = 0$ olması gerekir. Bu da her $n \in F_w^{\hat{Q}}$ için $\langle q, n\rangle = \theta$ olması demektir (Bozkurt & Yılmaz, 2016).

Sonuç 3.4.3. Q bir iç çarpım quasilineer uzayı $q, w \in Q$ ve $q \perp w$ olsun. Bu durumda,

$$\|q + w\|^2 \leq \|q\|^2 + \|w\|^2$$

'dir. Ayrıca $\{q_1, \ldots, q_n\}$, Q de ortogonal vektörler ise

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} q_k\right\|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \|q_k\|^2$$

eşitsizliği sağlanır (Bozkurt & Yılmaz, 2016 (a)).

Tanım 3.4.3. Q bir iç çarpım quasilineer uzayı, M'da Q'nun boştan farklı alt kümesi olsun.

$M^{\perp} = \left\{q \in Q: \|\langle q, w\rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = 0, w \in M\right\}$ kümesine M**'nın dikeyi** denir (Bozkurt & Yılmaz, 2016 (a)).

Teorem 3.3.6. Q bir iç çarpım quasilineer uzayı, M'da Q'nun boştan farklı alt kümesi olsun. M kapalı bir alt uzaydır (Bozkurt & Yılmaz, 2016 (a)).

Uyarı 3.3.5. Eğer, Q bir klasik iç çarpım uzayı olsaydı, $M^{\perp}$'nin kapalılığı $|\langle q_n - m, z\rangle| \leq \|q_n - m\|\|z\|$ eşitsizliğinden kolayca görülebilirdi (Bozkurt & Yılmaz, 2016 (a)).

3.5. Esnek Lineer Uzaylar

Bu bölümde ilk olarak esnek kümeler ve bazı özellikleri tanıtılacaktır. Daha sonra esnek lineer uzay ve esnek quasilineer uzaylar ile ilgili bazı temel kavramlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 3.4.1. Q bir evrensel küme, P, Q için uygun parametrelerin bir kümesi ve $P(Q)$ Q'in bir kuvvet kümesi olsun. $F : \mathrm{P} \to P(Q)$ bir dönüşüm olmak üzere (F, P) ikilisine Q üzerinde **esnek küme** denir (Molodtsov, 1999).

Yani, esnek küme Q'in alt kümelerinin parametrelerle ifade edilen bir ailesidir. Her $p \in P$ için $F(p)$ değer kümesine esnek kümenin bir p-elemanı denir. Burada, $F(\mathrm{p})$ kümesi boş küme veya Q'in boş olmayan bir alt kümesidir. Bir (F, P) esnek kümesi

$$(F, \mathrm{P}) = \{(\mathrm{p}, F(\mathrm{p})) \mid \mathrm{p} \in \mathrm{P}, F(\mathrm{p}) \in P(Q)\}$$

şeklinde ikililer yardımıyla gösterilir (Molodtsov 1999).

Q üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi S(Q,P) ile gösterilir (Aygünoğlu & Aygün 2012).

Örnek 3.4.1. Q = [0,50] bir evrensel küme ve P= {pembe, turuncu, mavi, sarı, yeşil} parametrelerin bir kümesi olsun. Bu durumda,

F (pembe) = $\{a \in Q \mid a \leq 10\} = p_1$,

F (turuncu) = $\{a \in Q \mid 10 < a \leq 20\} = p_2$,

F (mavi) = $\{a \in Q \mid 20 < a \leq 30\} = p_3$,

F (sarı) = $\{a \in Q \mid 30 < a \leq 40\} = p_4$

F (yeşil) = $\{a \in Q \mid 40 < a \leq 50\} = p_5$

olmak üzere

F = {(pembe, p_1), (turuncu, p_2), (mavi, p_3), (sarı, p_4), (yeşil, p_5)}

Q üzerinde bir esnek kümedir.

Tanım 3.4.2. $F, G \in S\,(Q, \mathrm{P})$ olsun. Bu durumda, her $p \in P$ için

- $F(\mathrm{p}) = \emptyset$ ise bu esnek kümeye boş esnek küme denir ve $\widetilde{\emptyset}$ gösterilir.
- $F(\mathrm{p}) = Q$ ise bu esnek kümeye mutlak esnek küme denir ve $\tilde{Q}$ ile gösterilir.
- $H(\mathrm{p}) = F(\mathrm{p}) \cup G(\mathrm{p})$ şeklinde tanımlanan H esnek kümesine F ve G esnek kümelerin birleşimi denir ve bu durum $H = F \cap G$ ile gösterilir (Maji & diğ. 2003).

Tanım 3.5.3. $F, G \in S\,(Q, \mathrm{P})$ olsun. Bu durumda, her $p \in P$ için

- F(p) ⊆ G(p) ise F esnek kümesine G'nin bir esnek alt kümesi denir ve bu durum $F \subseteq G$ ile gösterilir. Ayrıca $F \subseteq G$ ve $G \subseteq F$ ise F ve G eşittir denir.
- H(p) = F(p) ∩ G(p) şeklinde tanımlanan H esnek kümesine F ve G esnek kümelerin kesişimi denir ve bu durum $H = F \cap G$ ile gösterilir (Pei ve Miano 2005).

Tanım 3.5.4. $F \in S$ (Q, P) olsun. Bu durumda, her p ∈ P için F^c(p) = $Q - F$(p) şeklinde tanımlanan F^c : P → $P(Q)$ dönüşümüne F esnek kümesinin tümleyeni denir. $(F^c)^c = F$ olduğu açıktır (Ali ve diğ. 2009).

Q üzerindeki tüm esnek noktaların ailesini $SP(Q)$ ile göstereceğiz.

Önerme 3.4.1. Esnek noktaların herhangi bir sayıda birleşimi de esnek bir küme oluşturur. Ayrıca, her esnek küme kendisine ait olan tüm esnek noktaların bir birleşimidir (Das & Samanta 2013(a)).

Tanım 3.5.5. Q boştan farklı bir küme ve P uygun parametrelerin bir kümesi olsun. ε : P → Q fonksiyonuna Q üzerinde bir esnek eleman denir. $F \in S(Q$, P) olmak üzere her p ∈ P için ε(p) ∈ F(p) ise ε esnek elemanı F esnek kümesine aittir denir ve bu durum $p \tilde{\in} F$ ile gösterilir. Buradan bir F esnek kümesi, her p ∈ P için

$$F(\mathrm{p}) = \{\varepsilon(\mathrm{p}) \mid q^p \tilde{\in} F\}$$

olarak ifade edilebilir (Das & Samanta 2012).

Tanım 3.5.6. F, G esnek reel sayılar olsun. Bu takdirde her p ∈ P için

- $(F + G)$ (p) = F(p) + G(p)
- $(F - G)$ (p) = F(p) − G(p)
- $(F.G)$(p) = F(p). G(p)
- $F|$(p) = $|F$(p)$|$

ile tanımlanır.

$F + G$, $F - G$, $F.\ G$ ve $|F|$ nin bir esnek reel sayı olduğu esnek reel sayıların tanımından kolayca görülür (Das & Samanta 2012).

Tanım 3.5.7. $F_1, F_2, \dots, F_n$, $S(Q,P)$'nin n tane esnek kümesi olsun. $S(Q,P)$ üzerinde $F = F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ cebirsel toplama işlemi $\forall\lambda \in P$ için,

$$F(\lambda) = \{q_1 + q_2 + \cdots + q_n; q_i \in F_i(\lambda), i = 1,2, \dots, n\}$$

ile tanımlıdır. $S(Q,P)$ üzerinde α skaler sayısı ve $\lambda \in P$ parametresi için αF skaler ile çarpma işlemi,

$$\alpha F = G,\ G(\lambda) = \{\alpha q; q \in F(\lambda)\}$$

ile tanımlıdır (Das, Samanta, & Majumdar, 2013).

Tanım 3.5.8. Q bir K cismi üzerinde vektör uzayı, P parametrelerin kümesi olsun ve G'de (Q, P)'de esnek bir küme olsun. Eğer $\forall\lambda \in P$ parametresi için $G(\lambda)$, Q'in bir lineer alt uzayı oluyorsa $G'ye\ Q$'in esnek lineer uzayı veya esnek vektör uzayı denir (Das, Samanta, & Majumdar, 2013).

Örnek 3.4.2. $\mathcal{R}^n$ n boyutlu Öklid uzayını göz önüne alalım. $P = \{1,2,3, \dots, n\}$ parametrelerin kümesi olmak üzere $G: E \to \mathrm{P}(\mathcal{R}^n)$ fonksiyonu;

$$G(i) = \{t \in \mathcal{R}^n; t'nin\ i'inci\ elemanı\ 0\}, i = 1,2, \dots, n$$

ile tanımlanırsa G, $\mathcal{R}^n$'in bir esnek lineer uzayı olur (Das, Samanta, & Majumdar, 2013).

Tanım 3.5.9. F, Q'in esnek vektör uzayı ve $G: E \to \mathrm{P}(Q)$'e bir esnek küme olsun. Eğer; her $\lambda \in P$ için

- $G(\lambda)$ Q'in lineer alt uzayıdır,
- $F(\lambda) \supseteq G(\lambda)$'dir,

şartları sağlanıyorsa G'ye F'nin esnek lineer alt uzayıdır denir (Das, Samanta, & Majumdar, 2013).

Teorem 3.4.1. Bir F esnek vektör uzayının G esnek alt kümesi F'nin esnek lineer alt uzayıdır ancak ve ancak her $\alpha, \beta \in K$ için $\alpha G + \beta G \subset G$'dir (Das, Samanta, & Majumdar, 2013).

Tanım 3.5.10. G, Q'in esnek lineer uzayı olsun. Q'in bir esnek elemanına G'nin esnek vektörü denir. Benzer olarak (K, P) esnek kümesinin bir esnek elemanına esnek skaler denir (Das, Samanta, & Majumdar, 2013).

Örnek 3.5.3. Örnek 3.4.2.'de verilen esnek vektör uzayını göz önüne alalım. Burada G'nin $\tilde{x}$ esnek elemanı,

$$\tilde{q}(i) = (1,1, \dots, 0_{i-th}, \dots, 1) \in \mathcal{R}^n, i = 1,2, \dots, n$$

ile tanımlıdır. $\tilde{q}$, G'nin bir esnek vektörüdür (Das, Samanta, & Majumdar, 2013).

Tanım 3.5.11. $\forall\lambda \in P$ için θ, Q'in etkisiz elemanı olmak üzere $\tilde{q}(\lambda) = \theta$ ise $\tilde{q}$ esnek vektörüne G'nin null esnek vektörü denir. Tüm null esnek vektörlerinin kümesi Θ ile gösterilir (Das, Samanta, & Majumdar, 2013).

Tanım 3.5.12. $\tilde{q}, \tilde{w}$, G'nin esnek vektörleri ve $\tilde{\alpha}$'da esnek skaler olsun. Her $\lambda \in P$ için $\tilde{q}$ ve $\tilde{w}$ esnek vektörlerinin toplamı $(\tilde{q} + \tilde{w})(\lambda) = \tilde{q}(\lambda) + \tilde{w}(\lambda)$ ile ve $\tilde{q}$'in skaler ile çarpımı $(\tilde{\alpha}.\tilde{q})(\lambda) = \tilde{\alpha}(\lambda).\tilde{q}(\lambda)$ şeklinde tanımlıdır. Açıkça $\tilde{q} + \tilde{w}, \tilde{\alpha}.\tilde{w}$, G'nin esnek vektörleri olur (Das, Samanta, & Majumdar, 2013).

Teorem 3.4.2. (W, P), G esnek vektör uzayının non-null esnek altkümesi olsun. Her $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \tilde{\in} (W, P)$ ve $\tilde{k}, \tilde{s}$ esnek skalerleri için $\tilde{k} \cdot \tilde{\alpha} + \tilde{s} \cdot \tilde{\beta} \tilde{\in} (W, P)$ ise (W, P)'ye G'nin esnek alt uzayı denir.

Q, K cismi üzerinde bir lineer uzay ve E de parametrelerin kümesi olsun. $\forall\lambda \in P$ için $\tilde{Q}(\lambda) = Q$ ise $\tilde{Q}$'e mutlak esnek lineer uzay diyeceğiz. Burada $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ esnek vektör uzayın esnek vektörlerini $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ ise $\forall\lambda \in P$ için $\tilde{\alpha}(\lambda) = \alpha, \tilde{\beta}(\lambda) = \beta$ biçimindeki esnek reel sayıları ifade edecektir (Das, Samanta, & Majumdar, 2013).

Tanım 3.5.13. $\tilde{Q}$ mutlak esnek vektör uzayı olsun. Bir $\|.\|: SE(\tilde{Q}) \to R(E)$ fonksiyonu $\forall\lambda \in P$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\tilde{Q}$ üzerinde bir esnek norm denir.

1. Her $\tilde{q} \tilde{\in} \tilde{Q}$ için $\| \tilde{q} \| \geq \tilde{0}$,
2. $\| \tilde{q} \| = \tilde{0}$ ancak ve ancak $\tilde{q} = \Theta$,
3. Her $\tilde{q} \tilde{\in} \tilde{Q}$ ve $\tilde{\alpha}$ esnek skaleri için $\| \tilde{\alpha}.\tilde{q} \| = |\tilde{\alpha}| \, \| \tilde{q} \|$,
4. Her $\tilde{q}, \tilde{w} \tilde{\in} \tilde{Q}, \| \tilde{q} + \tilde{w} \| \leq \| \tilde{q} \| + \| \tilde{w} \|$.

$\tilde{Q}$ esnek vektör uzayına $\|.\|$ esnek normuyla birlikte esnek normlu lineer uzay denir. $(\tilde{Q}, \|\cdot\|, P)$ veya $(\tilde{Q}, \|.\|)$ ile gösterilir (Das, Samanta, & Majumdar, 2013).

Örnek 3.5.4. $\mathcal{R}(E)$ tüm esnek reel sayıların bir kümesi olsun. Her $\tilde{q} \tilde{\in} \mathcal{R}(E)$ için

$$\|.\|: \mathcal{R}(E) \to \mathcal{R}(E)$$

$$\| \tilde{q} \| = |\tilde{q}|$$

ile tanımlı $\|.\|$ fonksiyonu $\mathcal{R}(E)$ üzerinde bir esnek normdur (Das, Samanta, & Majumdar, 2013).

Tanım 3.5.14. Q vektör uzayı üzerindeki her norm $\tilde{Q}$ esnek vektör uzayı üzerinde esnek norma genişletilebilir (Das, Samanta, & Majumdar, 2013).

Teorem 3.5.3. $(\tilde{Q}, \|.\|, P)$ bir esnek normlu uzay ve $\|.\|$ esnek normu

"$\xi \in Q$ ve $\lambda \in P$ için $\{\| \tilde{q} \| (\lambda): \tilde{q}(\lambda) = \xi\}$ tek nokta kümesidir" (3.5.3)

koşulunu sağlasın. Bu durumda her $\lambda \in P$ ve $\xi \in Q$ için $\tilde{q}(\lambda) = \xi$ olmak üzere

$$\| . \|_\lambda : Q \to R^+$$

$$\| \xi \|_\lambda = \| \tilde{q} \| (\lambda)$$

ile tanımlı $\| . \|_\lambda$ fonksiyonu da Q üzerinde bir normdur (Das, Samanta, & Majumdar, 2013).

Tanım 3.5.15. $(\tilde{Q}, \|.\|, P)$ bir esnek normlu lineer uzay olsun. Her $\tilde{q}, \tilde{w} \tilde{\in} \tilde{Q}$ için

$$d: \tilde{Q} \times \tilde{Q} \to R(A)$$

$$d(\tilde{q}, \tilde{w}) = \| \tilde{q} - \tilde{w} \|$$

ile tanımlı d fonksiyonu $\tilde{Q}$ üzerinde bir esnek metriktir (Das, Samanta, & Majumdar, 2013).

3.6. Esnek Quasilineer Uzaylar

Tanım 3.6.1. (G,P), Q quasilineer uzayı üzerinde boş olmayan bir esnek küme olsun. Her $b \in Supp(G,$ P) için G(b), Q'nun bir alt quasilineer uzayıysa, (G,P)'ye Q üzerinde bir esnek quasilineer uzay denir (Bozkurt, 2020).

Örnek 3.6.1 Q $= \Omega_C(\mathbb{R})$ bir quasilineer uzay ve $(G, \left(\Omega_C(\mathbb{R})\right)_r$), Q üzerinde bir esnek küme olsun G: $\left(\Omega_C(\mathbb{R})\right)_r \rightarrow P(Q)$ fonksiyonunu

$$G(q) = \left\{[-q, q] : q \in \left(\Omega_C(\mathbb{R})\right)_r\right\}$$

ile tanımlayalım.

Her $q \in Supp(G, \left(\Omega_C(\mathbb{R})\right)_r)$ için G(Q), $\Omega_C(\mathbb{R})$'nin bir alt quasilineer uzayı olduğundan, $(G, \left(\Omega_C(\mathbb{R})\right)_r$, $\Omega_C(\mathbb{R})$'de bir esnek quasilineer uzaydır (Bozkurt, 2020).

Teorem 3.6.1. Bir (G,P) esnek quasilineer uzayının (F,P) esnek alt kümesinin esnek bir alt quasilineer uzay olabilmesi için gerek ve yeter şart her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $\alpha \cdot F + \beta \cdot F \subset F$ olmasıdır (Bozkurt, 2020).

Tanım 3.6.2. (G,P), Q'nun esnek bir quasilineer uzayı olsun. Q'nun esnek bir elemanına (G,P)'nin bir esnek quasi vektörü denir. $(\mathbb{R}, P)$ esnek kümesinin esnek elemanına ise esnek skaler denir (Bozkurt, 2020).

SQV$(\tilde{Q})$, $\tilde{Q}$'nun tüm esnek quasi vektörlerinin kümesini ifade edecektir.

Teorem 3.6.2. Her $\tilde{q}_{e_1}, \tilde{w}_{e_2} \in$ SQV$(\tilde{Q})$ve her $\tilde{\alpha}$ esnek skaleri için $SQV(\tilde{Q})$ kümesi

$$\tilde{q}_{e_1} \tilde{\lesseqgtr} \tilde{w}_{e_2} \Leftrightarrow \tilde{q} \lesseqgtr \tilde{w} \text{ ve } e_1 \lesseqgtr e_2,$$

" $\tilde{\lesseqgtr}$ " bağıntısı

$$\tilde{q}_{e_1} + \tilde{w}_{e_2} = (\widetilde{q + w})_{e_1 + e_2}$$

cebirsel toplama işlemi

$$\tilde{\alpha} \cdot \tilde{q}_{e_1} = (\widetilde{\alpha \cdot q})_{\alpha e_1}$$

esnek skalerle çarpma işlemleri ile birlikte bir quasilineer uzaydır (Bozkurt, 2020).

Tanım 3.6.3. $SQV(\tilde{Q})$ bir esnek quasilineer uzay ve $\|.\|: SQV(\tilde{Q}) \rightarrow \mathbb{R}^+(\mathbb{R})$'ye tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer $\|.\|$ fonksiyonu aşağıda verilen şartları sağlıyorsa, SQV$(\tilde{Q})$'de bir esnek norm denir. Her $\tilde{q}_e, \tilde{q}_{e_1}, \tilde{w}_{e_2} \in SQV(\tilde{Q})$ ve $\tilde{\alpha}$ esnek skaleri için;

- $\tilde{q}_e \neq \tilde{\theta}_0$ ise $\|\tilde{q}_e\| \tilde{>} \tilde{0}$,
- $\|\tilde{q}_{e_1} + \tilde{w}_{e_2}\| \leq \|\tilde{q}_{e_1}\| + \|\tilde{w}_{e_2}\|$,
- $\|\tilde{\alpha} \cdot \tilde{q}_{e_1}\| = |\tilde{\alpha}|\|\tilde{q}_{e_1}\|$,
- $\tilde{q}_{e_1} \tilde{\lesseqgtr} \tilde{w}_{e_2}$ise $\|\tilde{q}_{e_1}\| \leq \|\tilde{w}_{e_2}\|$
- Her $\tilde{\epsilon} > \tilde{0}$ için en az bir $\tilde{z}_\epsilon \in \mathrm{SQV}(\tilde{Q})$ vardır öyle ki $\tilde{q}_{e_1} \tilde{\lesseqgtr} \tilde{w}_{e_2} + \tilde{z}_\epsilon$ ve $\|\tilde{z}_\epsilon\| \tilde{\leq} \tilde{\epsilon}$ ise $\tilde{q}_{e_1} \tilde{\lesseqgtr} \tilde{w}_{e_2}$ olur (Bozkurt, 2020).

$SQV(\tilde{Q})$ esnek quasilineer uzayına $\|.\|$ esnek normuyla birlikte bir esnek normlu quasilineer uzay denir ve $(\tilde{Q}, \|.\|)$ ile gösterilir (Bozkurt, 2020).

Örnek 3.6.2. Q bir normlu quasilineer uzay olsun. $\mathrm{SQV}(\tilde{Q})$, $\|\tilde{q}_e\| = |e| + \| q \|_Q$ normu ile bir esnek normlu quasilineer uzaydır (Bozkurt, 2020).

Tanım 3.6.4. $\tilde{Q}$ bir esnek normlu quasilineer uzay olsun. $\tilde{Q}$ üzerinde esnek Housdorff metrik şu şekilde tanımlanır. Her $\tilde{q}_{e_1}, \tilde{w}_{e_2} \in \tilde{Q}$ için

$$h_{\tilde{Q}}(\tilde{q}_{e_1}, \tilde{w}_{e_2}) = \inf\{\tilde{r} \geq \tilde{0} : \tilde{q}_{e_1} \tilde{\lesseqgtr} w_{e_2} + \tilde{a}_1^r, \tilde{w}_{e_2} \tilde{\lesseqgtr} \tilde{q}_{e_1} + \tilde{a}_2^r, \|\tilde{a}_i^r\| \leq \tilde{r}\} \ (i = \{1,2\})$$

dir (Bozkurt, 2020).

Tanım 3.6.5. $(\tilde{Q}, \|.\|)$ bir esnek normlu quasilineer uzay olsun. Her $\tilde{q}_{e_1}, \tilde{w}_{e_2} \in \tilde{Q}$ için $h_{\tilde{Q}}(\tilde{q}_{e_1}, \tilde{w}_{e_2})$ tüm esnek metrik aksiyomlarını sağlar (Bozkurt, 2020).

Tanım 3.6.6. $(\tilde{Q}, \|.\|)$ bir esnek normlu quasilineer uzay olsun. Eğer $n \to \infty$ iken $h_{\tilde{Q}}(\tilde{q}_{e_n}^n, \tilde{q}_{e_0}^0) \to \tilde{0}$ ise $\{\tilde{q}_{e_n}^n\}$ esnek vektörlerinin dizisi $\tilde{q}_{e_0}^0$ esnek vektörüne yakınsar denir (Bozkurt, 2020).

Tanım 3.6.7. $(\tilde{Q}, \|.\|)$ bir esnek normlu quasilineer uzay olsun. Her $\tilde{\epsilon} \tilde{\geq} \tilde{0}, \exists m \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $i, j > m$ için $h_{\tilde{Q}}\left(\tilde{q}_{e_i}^i, \tilde{q}_{e_j}^j\right) \leq \tilde{\epsilon}$ ise $\{\tilde{q}_{e_n}^n\}$'e Cauchy dizisidir denir (Bozkurt, 2020).

Teorem 3.6.3. $(\tilde{Q}, \|.\|)$ bir esnek normlu quasilineer uzay ise cebirsel toplama ve esnek reel sayılarlar çarpma işlemleri esnek Hausdorff metriğe göre süreklidir (Bozkurt, 2020).

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde (Aseev, 1986), (Das & Samanta, 2013), (Bozkurt, 2020) çalışmalarından yararlanılarak fonksiyonel analizin gelişimine katkı sağlayacağı düşünülen esnek iç çarpım quasilineer uzayı kavramı tanıtılacaktır. Üçüncü bölümde görüldüğü gibi Aseev, (Aseev, 1986)'da lineer uzayların genelleştirmesi olan quasilineer iç çarpım uzayı kavramını ortaya atmış ve bu kavramla ilgili lineer fonksiyonel analiz ile tutarlı sonuçlar elde edebilmiştir. Yine Aseev aynı çalışmasında quasilineer uzay üzerinde bir norm tanımlamış, bu norm ile birlikte quasilineer uzaya normlu quasilineer uzay demiştir. Daha sonra (Bozkurt, 2016)'da Aseev'in çalışmasından yola çıkılarak iç çarpım quasilineer uzayı kavramı tanıtılıp bu kavram ile ilgili bazı temel teorem ve sonuçlar elde edilmiştir. Diğer yandan dördüncü bölümde görüyoruz ki (Molodtsov, 1999) ilk olarak esnek küme teorisini ortaya atmış ve daha sonra bir çok araştırmacı tarafından esnek küme teorisi ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalardan biri de Das'ın esnek lineer uzay kavramını tanıttığı (Das & Samanta, 2012) çalışmasıdır. Yine (Das & Samanta, 2013) esnek normlu uzayları ve esnek lineer operatör kavramlarını ortaya atmış ve bu kavramlar ile ilgili sonuçlar elde etmiştir. Daha sonra (Bozkurt, 2020) çalışmasında esnek quasilineer uzay ve esnek normlu quasilineer uzay kavramlarını tanımlayabilmiştir. Yine çalışmasında bu yeni kavramlar ile ilgili bazı tanım, teorem ve örnekler sunmuştur.

Biz de bu bölümde, üçüncü bölümden yararlanarak iç çarpım quasilineer uzayının bir genelleştirmesi olan esnek iç çarpım quasilineer uzay kavramını tanıtacağız. Tanımlayacağımız bu iç çarpım fonksiyonu esnek lineer iç çarpım uzayından farklı olarak (Bozkurt, 2016) çalışmasında kullandığı gibi bir kısmi sıralama bağıntısının da olması gerektiğini göreceğiz. Yine bu bölümde esnek iç çarpım quasilineer uzaylarında iki esnek vektörün ortogonalliği ve ortonormalliği ile ilgili bilgiler sunacağız. Ayrıca iki esnek vektörün dikliği ile ilgili bazı araştırmalara yer vereceğiz.

Çalışmamızın devamında ise quasilineer uzaylara özgü olan zemin kavramıyla ilgili bazı incelemeler esnek quasilineer uzaylarda verilecektir.

4.1. Esnek Quasilineer İç Çarpım Uzaylar

$\tilde{Q}$ bir mutlak esnek quasilineer uzay yani $\forall\lambda \in P$ için $\tilde{Q}(\lambda) = Q$ olsun. Bu bölümde bir mutlak esnek quasilineer uzayın esnek quasi vektörlerini $\tilde{q}, \tilde{w}, \tilde{z}$ ile esnek reel sayıları $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ ile göstereceğiz. Öncelikle esnek quasilineer iç çarpım uzayını tanımlamadan önce bu kavram için gerekli olan bazı yeni tanım ve örnekleri verelim.

Tanım 4.1.1. $\tilde{Q}$ bir esnek quasilinear uzay, $\tilde{W} \subseteq \tilde{Q}$ ve $\tilde{q} \in \tilde{W}$ olsun.

$$F_{\tilde{q}}^{\tilde{W}} = \{\tilde{m} \in \tilde{W}_r : \tilde{m} \lesseqqgtr \tilde{q}\}$$

kümesine $\tilde{q}$ vektörünün $\tilde{W}$'deki zemini denir. Eğer $\tilde{W} = \tilde{Q}$ ise sadece $\tilde{q}$'nun zemini dememiz yeterlidir ve $\tilde{q}$'nun zeminini kısaca $F_{\tilde{q}}$ ile gösterebiliriz.

Tanım 4.1.2. Bir $\tilde{Q}$ esnek quasilinear uzayında her $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ için $supF_{\tilde{q}}$ mevcut ve

$$\tilde{q} = \sup\{\tilde{m} \in \tilde{Q}_r : \tilde{m} \lesseqqgtr \tilde{q}\}$$

ise $\tilde{Q}$ esnek quasilineer uzayına sağlam zeminli denir. Eğer $\tilde{q} = \sup\{\tilde{m} \in \tilde{Q}_r : \tilde{m} \lesseqqgtr \tilde{q}\}$ eşitliği sağlanmıyorsa $\tilde{Q}$'ya sağlam zeminli olmayan esnek quasilineer uzay denir.

Örnek 4.1.1. (Alefeld & Mayer, 2000)'deki Örnek 12'yi dikkate alalım.

$\left(G, \left(\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}\right)_r\right)$, $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$'nin bir esnek kümesidir. Her $\lambda \in \left(\Omega_C(\mathbb{R})\right)_r$ için

$$\tilde{q}(\lambda) = [-\lambda, \lambda] \in \Omega_C(\mathbb{R})$$

olacak şekilde $\left(G, \left(\Omega_C(\mathbb{R})\right)_r\right)$'nin $\tilde{q}$ esnek quasi elemanını ele alalım.

$\tilde{q}$'nun zemini:

$$F_{\tilde{q}} = \left\{\tilde{w} \in \left(\Omega_C(\mathbb{R})\right)_r : \tilde{w} \lesseqqgtr \tilde{q}\right\}$$
$$= \left\{\tilde{w}(\lambda) \in \left(\Omega_C(\mathbb{R})\right)_r : \tilde{w}(\lambda) \subseteqq \tilde{q}(\lambda)\right\}$$

olur.

Örneğin, $\lambda = \{1\} \in \left(\Omega_C(\mathbb{R})\right)_r$ için $\tilde{q}(\{1\}) = [-1,1] \in \Omega_C(\mathbb{R})$ olur. Eğer $\tilde{w}(\{1\}) = \{0\}$, $\tilde{z}(\{1\}) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ ve $\tilde{v}\{1\} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ ise $\tilde{w}, \tilde{z} \in F_{\tilde{q}}$ olur fakat $\tilde{v} \notin F_{\tilde{q}}$ olur.

Teorem 4.1.1. $\left(\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}\right)$ mutlak esnek quasilineer uzayı sağlam zeminlidir.

İspat. $\Omega_C(\mathbb{R})$ sağlam zeminli quasilineer uzay olduğundan her $x \in \Omega_C(\mathbb{R})$ için $x = \sup F_x$'dir. $\tilde{q}$ ve $\tilde{w}$, $\Omega_C(\mathbb{R})$ mutlak esnek quasilineer uzayının iki esnek quasi vektörü olsun.

$\Omega_C(\mathbb{R})$ sağlam zeminli quasilineer uzay olduğundan her λ parametresi için

$$\tilde{q}(\lambda) = \sup F_{\tilde{q}(\lambda)} = \sup\left\{\tilde{w}(\lambda) \in \left(\Omega_C(\mathbb{R})\right)_r : \tilde{w}(\lambda) \subseteqq \tilde{q}(\lambda)\right\}$$

olur. Buradan $\left(\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}\right)$'nin esnek sağlam quasilineer uzay olduğu elde edilmiş olur.

Tanım 4.1.3. $\tilde{Q}$ bir esnek quasilinear uzay olsun. $\tilde{Q}$'yu içeren sağlam zeminli esnek quasilineer uzayların en küçüğüne $\tilde{Q}$'nun sağlamlaştırılması denir. Ve bu küme $\widehat{(\tilde{Q}\ )}$ ile gösterilir. Buradan $\tilde{Q}$'yu kapsayan başka bir sağlam zeminli $\widetilde{W}$ esnek quasilineer uzayı varsa $\widehat{(\tilde{Q})} \widetilde{\subseteq} \widetilde{W}$ olduğunu anlıyoruz.

Şimdi esnek iç çarpım quasilineer uzayının tanımını verelim.

Tanım 4.1.4. $\tilde{Q}$ bir mutlak esnek quasilinear uzay ve $\forall\lambda \in P$ için $\tilde{Q}(\lambda) = Q$ olsun.

$$\langle . \rangle : SE(\tilde{Q}) \times SE(\tilde{Q}) \to \Omega(\mathbb{R})(P)$$

fonksiyonu, her $\tilde{q}, \widetilde{w}, \tilde{z}, \tilde{v} \in \tilde{Q}$ ve $\tilde{\alpha}$ esnek skaleri için;

1. $\langle \tilde{q}, \widetilde{w} \rangle \in (\Omega(\mathbb{R}))_r \equiv \widetilde{\mathbb{R}}$,
2. $\langle \tilde{q} + \widetilde{w}, \tilde{z} \rangle \widetilde{\subseteq} \langle \tilde{q}, \tilde{z} \rangle + \langle \widetilde{w}, \tilde{z} \rangle$,
3. $\langle \tilde{\alpha} \cdot \tilde{q}, \widetilde{w} \rangle = \tilde{\alpha} \cdot \langle \tilde{q}, \widetilde{w} \rangle$,
4. $\langle \tilde{q}, \widetilde{w} \rangle = \langle \widetilde{w}, \tilde{q} \rangle$,
5. $\tilde{q} \in \tilde{Q}_r$ için $\langle \tilde{q}, \widetilde{w} \rangle \widetilde{\supseteq} \bar{0}$ ve $\langle \tilde{q}, \tilde{q} \rangle = \{\bar{0}\} \Leftrightarrow \tilde{q} = \{\theta\}$,
6. $\| \langle \tilde{q}, \widetilde{w} \rangle \|_{\Omega(\mathbb{R})} = \sup\left\{\| \langle q, w \rangle \| : q \in F_{\tilde{q}}^{(\tilde{Q})}, w \in F_{\widetilde{w}}^{(\tilde{Q})}\right\}$,
7. $\tilde{q} \widetilde{\preccurlyeq} \tilde{z}$ ve $\widetilde{w} \widetilde{\preccurlyeq} \tilde{v}$ ise $\langle \tilde{q}, \widetilde{w} \rangle \widetilde{\subseteq} \langle \tilde{z}, \tilde{v} \rangle$,
8. $\forall\tilde{\varepsilon} \widetilde{\geq} \bar{0}$ için $\exists\tilde{q}_{\tilde{\varepsilon}} \in \tilde{Q}$ vardır öyle ki $\tilde{q} \widetilde{\preccurlyeq} \widetilde{w} + \tilde{q}_{\tilde{\varepsilon}}$ ve $\langle \tilde{q}_{\tilde{\varepsilon}}, \tilde{q}_{\tilde{\varepsilon}} \rangle \widetilde{\subseteq} S_{\bar{\varepsilon}}(\theta)$'dır.

şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona $\tilde{Q}$ üzerinde bir iç çarpımdır denir. Burada $S_{\bar{\varepsilon}}(\theta)$ kümesi $\widetilde{\Omega(\mathbb{R})}$'de θ merkezli $\bar{\varepsilon}$ yarıçaplı kümeyi göstermektedir.

Bu iç çarpım ile birlikte $\tilde{Q}$ esnek quasilineer uzayına esnek quasilineer iç çarpım uzayı denir ve $(\tilde{Q}, \langle . \rangle, P)$ ile gösterilir.

Uyarı 4.1.1. Eğer $\tilde{Q}$ esnek lineer uzay ise Tanım 4.1.4' de verilen koşullar reel esnek iç çarpım uzayı şartları koşulları olur. Ayrıca $\tilde{Q}$ esnek iç çarpım quasilineer uzayının $\tilde{Q}_r$ regüler alt uzayı da aynı iç çarpım ile bir esnek iç çarpım uzayı olur.

Örnek 4.1.2. $Q = \Omega_C(\mathbb{R})$ olsun. (Bozkurt & Yılmaz, 2016 (a))'den her $A, B \in Q$ için Q'in $\langle A, B \rangle = \{ab : a \in A, b \in B\}$ ile bir quasilineer iç çarpım uzayı olduğunu biliyoruz. $\tilde{q}$ ve $\widetilde{w}$ sırasıyla

$$\begin{aligned} \tilde{q} &: P \to P(Q) \\ \lambda &\to \tilde{q}(\lambda) = q^\lambda \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \widetilde{w} &: P \to P(Q) \\ \lambda &\to \widetilde{w}(\lambda) = w^\lambda \end{aligned}$$

olacak şekilde $\tilde{Q} = \widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ mutlak esnek quasilineer uzayının iki esnek quasi elemanı olsun.

Buradan $\tilde{q}(\lambda), \tilde{w}(\lambda) \in Q$ olur. Her $\tilde{q}, \tilde{w} \in \tilde{Q}$ için

$$\begin{aligned} \langle . \rangle \quad &: SE(\tilde{Q}) \times SE(\tilde{Q}) \to \Omega(\mathbb{R})(P) \\ (\tilde{q}, \tilde{w}) \quad &= \langle \tilde{q}, \tilde{w} \rangle(\lambda) \\ &= \langle q^\lambda, w^\lambda \rangle \\ &= \{x^\lambda y^\lambda : x^\lambda \in q^\lambda, y^\lambda \in w^\lambda\} \\ &= \langle \tilde{q}(\lambda), \tilde{w}(\lambda) \rangle, (\lambda \in P) \end{aligned}$$

fonksiyonu $\tilde{Q}$ da esnek quasilineer iç çarpım uzayı olma şartlarını sağlar. Dolayısıyla bu iç çarpım ile $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer iç çarpım uzayıdır. Ayrıca $\widetilde{\Omega(\mathbb{R})}$'da aynı iç çarpım ile bir esnek quasilineer iç çarpım uzayıdır. Yine (Bozkurt & Yılmaz, 2016 (a))'den n pozitif tam sayı olmak üzere her $F, G \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ için $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$'in $\langle F, G \rangle = \{\langle f, g \rangle_{\mathbb{R}^n} : f \in F, g \in G\}$ ile bir quasilineer iç çarpım uzayı olduğunu biliyoruz.

Ayrıca

$$\begin{aligned} \langle . \rangle_1 \quad &: SE\left(\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R}^n)}\right) \times SE\left(\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R}^n)}\right) \to \Omega(\mathbb{R})(P) \\ (\tilde{q}, \tilde{w}) \quad &= \langle \tilde{q}, \tilde{w} \rangle_1(\lambda) \\ &= \langle q^\lambda, w^\lambda \rangle \\ &= \left\{\langle x^\lambda, y^\lambda \rangle_{\mathbb{R}^n} : x^\lambda \in q^\lambda, y^\lambda \in w^\lambda\right\} \\ &= \langle \tilde{q}(\lambda), \tilde{w}(\lambda) \rangle, (\lambda \in P) \end{aligned}$$

da $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R}^n)}$ üzerinde bir iç çarpım fonksiyonudur. Yani $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R}^n)}$ bu iç çarpım ile bir esnek quasilineer uzaydır.

Önerme 4.1.1. Her $\lambda \in P$ için $\langle . \rangle_\lambda$ fonksiyonu Q quasilineer uzayında bir iç çarpım olsun. Buradan $\forall \lambda \in P, \forall \tilde{q}, \tilde{w} \in \tilde{Q}$ için;

$$\begin{aligned} \langle . \rangle \quad &: SE(\tilde{Q}) \times SE(\tilde{Q}) \to \Omega(\mathbb{R})(P) \\ (\tilde{q}, \tilde{w}) \quad &\to \langle \tilde{q}, \tilde{w} \rangle(\lambda) = \langle \tilde{q}(\lambda), \tilde{w}(\lambda) \rangle_\lambda, \end{aligned}$$

fonksiyonu $\tilde{Q}$ esnek quasilineer uzayında bir esnek quasilineer iç çarpım fonksiyonudur.

İspat. Öncelikle bu iç çarpım iyi tanımlıdır. $\forall \tilde{q}, \tilde{w} \in \tilde{Q}_r$ ve $\lambda \in P$ için $\tilde{q}(\lambda) = q$ ve $\tilde{w}(\lambda) = w$ olsun $\langle \tilde{q}, \tilde{w} \rangle(\lambda) = \langle \tilde{q}(\lambda), \tilde{w}(\lambda) \rangle_\lambda = \langle q, w \rangle_\lambda \in (\Omega(\mathbb{R}))_r$ olur.

Her $\tilde{q}, \tilde{w}, \tilde{z} \in \tilde{Q}$ için

$$\begin{aligned} \langle \tilde{q} + \tilde{w}, \tilde{z} \rangle(\lambda) &= \langle \tilde{q}(\lambda) + \tilde{w}(\lambda), \tilde{z}(\lambda) \rangle_\lambda \\ &\mathrel{\tilde{\subseteq}} \langle \tilde{q}(\lambda), \tilde{w}(\lambda) \rangle_\lambda + \langle \tilde{w}(\lambda), \tilde{z}(\lambda) \rangle_\lambda \\ &= \langle \tilde{q}, \tilde{z} \rangle(\lambda) + \langle \tilde{w}, \tilde{z} \rangle(\lambda) \end{aligned}$$

bulunur.

Her $\tilde{q}, \tilde{w} \in \tilde{Q}$ ve her esnek $\tilde{\alpha}$ skaleri için,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\alpha} \cdot \tilde{q}, \tilde{w} \rangle(\lambda) &= \langle \tilde{\alpha}(\lambda) \cdot \tilde{q}(\lambda), \tilde{w}(\lambda) \rangle_{\lambda} \\ &= \tilde{\alpha}(\lambda) \cdot \langle \tilde{q}(\lambda), \tilde{w}(\lambda) \rangle_{\lambda} \\ &= \tilde{\alpha} \cdot \langle \tilde{q}, \tilde{w} \rangle(\lambda) \end{aligned}$$

olur.

Her $\tilde{q}, \tilde{w} \in \tilde{Q}$ için

$$\langle \tilde{q}, \tilde{w} \rangle(\lambda) = \langle \tilde{q}(\lambda), \tilde{w}(\lambda) \rangle_{\lambda} = \langle \tilde{w}(\lambda), \tilde{q}(\lambda) \rangle_{\lambda} = \langle \tilde{w}, \tilde{q} \rangle(\lambda)$$

elde edilir.

$\forall \lambda \in P, \forall \tilde{q} \in \tilde{Q}_r$ için $\langle \tilde{q}, \tilde{q} \rangle(\lambda) = \langle \tilde{q}(\lambda), \tilde{q}(\lambda) \rangle \lambda \geq \{0\}$ olduğundan $\langle \tilde{q}, \tilde{q} \rangle \geq \tilde{0}$ olur. Ayrıca $\langle \tilde{q}, \tilde{q} \rangle(\lambda) = \bar{0}$ ise $\langle \tilde{q}(\lambda), \tilde{q}(\lambda) \rangle_{\lambda} = \{\bar{0}\}$ olur. Böylece, $\forall \lambda \in P$ için $\tilde{q}(\lambda) = \bar{0}$ olacağından $\tilde{q} = \theta$ elde edilir. Tersi de açıkça sağlanır. Her $\tilde{q}, \tilde{w} \in \tilde{Q}$ için

$$\begin{aligned} \| \langle \tilde{q}, \tilde{w} \rangle \|_{\Omega(\mathbb{R})} &= \sup\{|\tilde{z}(\lambda)| : \tilde{z}(\lambda) \in \langle \tilde{q}(\lambda), \tilde{w}(\lambda) \rangle\} \\ &= \sup\{|qw| : q \in \tilde{q}(\lambda), w \in \tilde{w}(\lambda)\} \\ &= \sup\left\{\| \langle q, w \rangle \| : q \in F_{\tilde{q}(\lambda)}, w \in F_{\tilde{w}(\lambda)}\right\} \\ &= \sup\left\{\| \langle q, w \rangle \| : q \in F_{\tilde{q}}^{(\tilde{Q})}, w \in F_{\tilde{w}}^{(\tilde{Q})}\right\} \end{aligned}$$

olur.

Her $\tilde{q}, \tilde{w}, \tilde{z}, \tilde{v} \in \tilde{Q}$ için $\tilde{q} \mathrel{\widetilde{\leqslant}} \tilde{w}$ ve $\tilde{w} \mathrel{\widetilde{\leqslant}} \tilde{v}$ ise $\tilde{q}(\lambda) \mathrel{\widetilde{\leqslant}} \tilde{w}(\lambda)$ ve $\tilde{z}(\lambda) \mathrel{\widetilde{\leqslant}} \tilde{v}(\lambda)$ olur. (Bozkurt, 2020)'dan, $\langle \tilde{q}(\lambda), \tilde{z}(\lambda) \rangle_{\lambda} \mathrel{\widetilde{\subseteq}} \langle \tilde{w}(\lambda), \tilde{v}(\lambda) \rangle_{\lambda}$ elde edilir. Böylece, iç çarpımın tanımından $\langle \tilde{q}, \tilde{z} \rangle \mathrel{\widetilde{\subseteq}} \langle \tilde{w}, \tilde{v} \rangle$ bulunur.

$\forall \tilde{\epsilon} \mathrel{\widetilde{\geqslant}} \bar{0}$ için $\exists \tilde{q}_{\tilde{\epsilon}} \in \tilde{Q}$ bulunsun öyle ki her $\tilde{q}, \tilde{w} \in \tilde{Q}$ için $\tilde{q} \preccurlyeq \tilde{w} + \tilde{q}_{\tilde{\epsilon}}$ ve $\langle \tilde{q}_{\tilde{\epsilon}}, \tilde{q}_{\tilde{\epsilon}} \rangle \subseteq S_{\tilde{\epsilon}}(\bar{\theta})$ olsun. $\forall \lambda \in P$ için $\tilde{q}(\lambda) \leq \tilde{w}(\lambda) + \tilde{q}_{\tilde{\epsilon}}(\lambda)$ ve $\langle \tilde{q}_{\tilde{\epsilon}}(\lambda), \tilde{q}_{\tilde{\epsilon}}(\lambda) \rangle_{\lambda} \mathrel{\widetilde{\subseteq}} S_{\tilde{\epsilon}}(\bar{\theta})(\lambda)$ olur. Q $\{\langle \cdot \rangle_{\lambda} : \lambda \in P\}$ iç çarpımı ile bir quasilineer iç çarpım uzayı olduğundan $\tilde{q}(\lambda) \leq \tilde{w}(\lambda)$ elde edilir. Bu da bize $\tilde{q} \preccurlyeq \tilde{w}$ olduğunu gösterir.

Sonuç 4.1.1. Bir Q quasilineer uzayındaki her $\langle . \rangle_Q$ iç çarpımı, $\tilde{Q}$ esnek quasilineer uzayındaki esnek quasilineer iç çarpıma genişletilebilir.

İspat. Her $\lambda \in P$ ve her $\tilde{q}, \tilde{w} \in \tilde{Q}$ için

$$\langle . \rangle : SE(\tilde{Q}) \times SE(\tilde{Q}) \to \Omega(\mathbb{R})(P)$$

$$(\tilde{q}, \tilde{w}) \to \langle \tilde{q}, \tilde{w} \rangle(\lambda) = \langle \tilde{q}(\lambda), \tilde{w}(\lambda) \rangle_Q$$

fonksiyonu $\tilde{Q}$ esnek quasilineer uzayında bir esnek iç çarpım fonksiyonudur. İspatı yukarıdaki önermeye benzer olarak gösterilebilir.

Teorem 4.1.2. Eğer $(q, w) \in Q \times Q$ ve $\lambda \in P$ için $\langle . \rangle$ iç çarpımı $\tilde{Q}$ esnek quasilineer uzayında bir iç çarpım olmak üzere;

"$\{\langle \tilde{q}, \widetilde{w} \rangle(\lambda): \tilde{q}, \widetilde{w} \in \tilde{Q}$ vardır öyle ki $\tilde{q}(\lambda) = q, \widetilde{w}(\lambda) = w\}$ tek değerlidir." (4.1.1)

şartı sağlanıyorsa $\langle q, w \rangle_\lambda = \langle \tilde{q}, \widetilde{w} \rangle(\lambda)$ ile tanımlı $\langle . \rangle_\lambda: Q \times Q \to \Omega(\mathbb{R})$ fonksiyonu Q üzerinde bir iç çarpım fonksiyonudur.

İspat. Bu iç çarpım yukarıdaki koşul gereğince iyi tanımlıdır. Burada $\langle . \rangle$ esnek quasilineer iç çarpım aksiyomlarını sağladığından $\langle . \rangle_\lambda$ iç çarpımı da quasilineer iç çarpım aksiyomlarını sağlar.

Önerme 4.1.2. $(\tilde{Q}, \langle . \rangle, P)$ bir esnek quasilineer iç çarpım uzayı olsun. Her $\tilde{q}, \widetilde{w}, \tilde{z} \in \tilde{Q}$ ve $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ esnek skalerleri için;

a) $\left\langle \tilde{\alpha} \cdot \tilde{q} + \tilde{\beta} \cdot \widetilde{w}, \tilde{z} \right\rangle \widetilde{\subseteq} \tilde{\alpha} \cdot \langle \tilde{q}, \tilde{z} \rangle + \tilde{\beta} \cdot \langle \widetilde{w}, \tilde{z} \rangle$,

b) $\langle \tilde{q}, \tilde{\alpha} \cdot \widetilde{w} \rangle = \tilde{\alpha} \cdot \langle \tilde{q}, \widetilde{w} \rangle$,

c) $\left\langle \tilde{q}, \tilde{\alpha} \cdot \widetilde{w} + \tilde{\beta} \cdot \tilde{z} \right\rangle \widetilde{\subseteq} \langle \tilde{q}, \widetilde{w} \rangle + \tilde{\beta} \cdot \langle \tilde{q}, \tilde{z} \rangle$

sağlanır.

İspat. Her $\tilde{q}, \widetilde{w}, \tilde{z} \in \tilde{Q}$ ve $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ esnek skalerleri için

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{\alpha} \cdot \tilde{q} + \tilde{\beta} \cdot \tilde{w}, \tilde{z} \right\rangle &\subseteq \langle \tilde{\alpha} \cdot \tilde{q}, \tilde{z} \rangle + \left\langle \tilde{\beta} \cdot \widetilde{w}, \tilde{z} \right\rangle \\ &= \tilde{\alpha} \cdot \langle \tilde{q}, \tilde{z} \rangle + \tilde{\beta} \cdot \langle \widetilde{w}, \tilde{z} \rangle, \end{aligned}$$

$$\langle \tilde{q}, \tilde{\alpha} \cdot \widetilde{w} \rangle = \langle \tilde{\alpha} \cdot \widetilde{w}, \tilde{q} \rangle = \tilde{\alpha} \cdot \langle \widetilde{w}, \tilde{q} \rangle = \tilde{\alpha} \cdot \langle \tilde{q}, \widetilde{w} \rangle$$

ve

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{q}, \tilde{\alpha} \cdot \widetilde{w} + \tilde{\beta} \cdot \tilde{z} \right\rangle &\subseteq \langle \tilde{q}, \tilde{\alpha} \cdot \widetilde{w} \rangle + \left\langle \tilde{q} + \tilde{\beta} \cdot \tilde{z} \right\rangle \\ &= \tilde{\alpha} \cdot \langle \tilde{q}, \widetilde{w} \rangle + \tilde{\beta} \cdot \langle \tilde{q}, \tilde{z} \rangle. \end{aligned}$$

olur.

Teorem 4.1.3. $(\tilde{Q}, \langle . \rangle, P)$ bir esnek quasilineer iç çarpım uzayı olsun ve (4.1.1) şartını sağlasın. Her $\tilde{q}, \widetilde{w} \in \tilde{Q}$ için

$\| \langle \tilde{q}, \widetilde{w} \rangle \| \leq \| \tilde{q} \| \| \widetilde{w} \|$ (4.1.2)

olur.

İspat. $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer iç çarpım uzay olduğundan esnek iç çarpım tanımından ve (Bozkurt & Gönci, Kabul Edildi)'den her $\tilde{q}, \widetilde{w} \in \tilde{Q}$ için

$$\begin{aligned}\| \langle \tilde{q}, \tilde{w} \rangle \|_{\Omega(\mathbb{R})} &= sup\left\{\| \langle q, w \rangle \|_{\Omega(\mathbb{R})} : q \in F_{\tilde{q}}^{(\widehat{Q})}, w \in F_{\widetilde{w}}^{(\widehat{Q})}\right\} \\ &= \sup\left\{|\langle q, w \rangle| : q \in F_{\tilde{q}}^{(\widehat{Q})}, w \in F_{\widetilde{w}}^{(\hat{\hat{Q}})}\right\} \\ &\leq \sup\left\{\| q \|_{(\widehat{Q})} \| w \|_{(\widehat{Q})} : q \in F_{\tilde{q}}^{(\widehat{Q})}, w \in F_{\widetilde{w}}^{(\widehat{Q})}\right\} \\ &\leq \sup\left\{\| q \|_{(\widehat{Q})} : q \in F_{\tilde{q}}^{(\widehat{Q})}\right\} \sup\left\{\| w \|_{(\widehat{Q})} : w \in F_{\widetilde{w}}^{(\widehat{Q})}\right\} \\ &= \| \tilde{q} \|_{\tilde{Q}} \| \widetilde{w} \|_{\tilde{Q}}\end{aligned}$$

olur.

Teorem 4.1.4. $(\tilde{Q}, \langle . \rangle, P)$, (4.1.1)'i sağlayan esnek quasilineer iç çarpım uzay olsun. Her $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ için,

$$\| \tilde{q} \| = \sqrt{\| \langle \tilde{q}, \widetilde{w} \rangle \|_{\Omega(\mathbb{R})}} \tag{4.1.3}$$

eşitliği $\tilde{Q}$ üzerinde bir esnek quasi norm tanımlar.

İspat. Her $\tilde{q} \in \tilde{Q}$, $\| \tilde{q} \| = \sqrt{\| \langle \tilde{q}, \tilde{q} \rangle \|_{\Omega(\mathbb{R})}} \tilde{\geq} \tilde{0}$ ve $\| \tilde{q} \| = \tilde{0}$ ancak ve ancak $\sqrt{\| \langle \tilde{q}, \tilde{q} \rangle \|_{\Omega(\mathbb{R})}} = \tilde{0}$ ancak ve ancak $\tilde{q} = \theta$ şartları açıkça sağlanır.

Şimdi, (4.1.3) ile verilen esnek quasi normun $\tilde{Q}$ esnek quasilineer iç çarpım uzayında üçgen eşitsizliğini sağladığını gösterelim. Her $\tilde{q}, \widetilde{w} \in \tilde{Q}$ için (4.1.2) den,

$$\begin{aligned}\| \tilde{q} + \widetilde{w} \|^2 &= \| \langle \tilde{q} + \widetilde{w}, \tilde{q} + \widetilde{w} \rangle \|_{\Omega(\mathbb{R})} \\ &\tilde{\leq} \| \langle \tilde{q}, \tilde{q} \rangle + \langle \tilde{q}, \widetilde{w} \rangle + \langle \widetilde{w}, \tilde{q} \rangle + \langle \widetilde{w}, \widetilde{w} \rangle \| \\ &\tilde{\leq} (\| \tilde{q} \| + \| \widetilde{w} \|)^2\end{aligned}$$

olur. Her $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ ve $\tilde{\alpha}$ esnek skaleri için

$$\begin{aligned}\| \tilde{\alpha} \cdot \tilde{q} \| &= \sqrt{\| \langle \tilde{\alpha} \cdot \tilde{q}, \tilde{\alpha} \cdot \tilde{q} \rangle \|_{\Omega(\mathbb{R})}} \\ &= \sqrt{\| \tilde{\alpha}\tilde{\alpha} \cdot \langle \tilde{q}, \tilde{q} \rangle \|_{\Omega(\mathbb{R})}} \\ &= |\tilde{\alpha}| \sqrt{\| \langle \tilde{q}, \tilde{q} \rangle \|_{\Omega(\mathbb{R})}} \\ &= |\tilde{\alpha}| \, \| \tilde{q} \|\end{aligned}$$

'dir.

Her $\tilde{q}, \widetilde{w} \in \tilde{Q}$ için esnek quasiliner iç çarpım uayı tanımından $\tilde{q} \tilde{\preceq} \widetilde{w}$ iken $\langle \tilde{q}, \tilde{q} \rangle \tilde{\sqsubseteq} \langle \widetilde{w}, \widetilde{w} \rangle$ olacağından,

$$\| \tilde{q} \|^2 = \| \langle \tilde{q}, \tilde{q} \rangle \|_{\Omega(\mathbb{R})} \tilde{\leq} \| \langle \widetilde{w}, \widetilde{w} \rangle \|_{\Omega(\mathbb{R})} = \| \widetilde{w} \|^2$$

olur.

Her $\tilde{\epsilon} \gneqq \tilde{0}$ için bir $\tilde{q}_\epsilon \in \tilde{Q}$ vardır öyle ki $\tilde{q} \lessapprox \tilde{w} + \widetilde{q_{\tilde{\epsilon}}}$ ve $\|\tilde{q}_{\tilde{\epsilon}}\| \lessapprox \tilde{\epsilon}$ ise $\|\langle \tilde{q}_\epsilon, \tilde{q}_\epsilon \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} \lessapprox \tilde{\epsilon}^2$ olur.

Buradan da $\langle \tilde{q}_\epsilon, \tilde{q}_\epsilon \rangle_{\Omega(\mathbb{R})} \lessapprox S_{\tilde{\epsilon}^2}(\theta)$ olur. $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer iç çarpım uzayı olduğundan $\tilde{q} \lessapprox \tilde{w} + \widetilde{q_{\tilde{\epsilon}}}$ ve $\langle \tilde{q}_\epsilon, \tilde{q}_\epsilon \rangle_{\Omega(\mathbb{R})} \lessapprox S_{\tilde{\epsilon}^2}(\theta)$ ise $\tilde{q} \lessapprox \tilde{w}$ elde edilir.

Böylece $\|.\|$ normu tüm esnek quasilineer şartlarını sağlar.

Uyarı 4.1.2. Her $q, w \in Q$ ve $\lambda \in P$ için $\{\langle \tilde{q}, \tilde{w} \rangle(\lambda) : \tilde{q}, \tilde{w} \in \tilde{Q}\ öyle\ ki\ \tilde{q}(\lambda) = q, \tilde{w}(\lambda) = w\}$ kümesi tek değerli ise

$$\left\{\| \tilde{q} \| (\lambda) = \sqrt{\| \langle \tilde{q}, \tilde{q} \rangle \|_{\Omega(\mathbb{R})}}\, (\lambda) : \tilde{q}(\lambda) = q\right\} \tag{4.1.4}$$

kümesi de tek değerlidir.

Uyarı 4.1.3. Quasilineer iç çarpım uzaylarında olduğu gibi bir esnek quasilineer iç çarpım uzayının da normu paralel kenar kanunu sağlamayabilir.

Teorem 4.1.5. Bir esnek quasilineer iç çarpım uzayının regüler alt uzayında paralel kenar kanununun sağlanmasının nedeni bu iç çarpımın klasik esnek iç çarpım olmasıdır.

İspat. $\tilde{Q}$'yu bir esnek quasilineer iç çarpım uzayı olarak alırsak $\tilde{Q}$'nun regüler alt uzayı bir esnek lineer uzay olur. Bu esnek lineer alt uzayı üzerinde tanımlı olan iç çarpımın da klasik iç çarpım olacağını biliyoruz. Dolayısıyla bu alt uzayda paralel kenar kuralı sağlanır.

Örnek 4.1.3. $Q = \Omega_C(\mathbb{R})$ olsun. Örnek 4.1.2'de verilen esnek iç çarpım ile $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ bir esnek quasilineer iç çarpım uzayıdır. Bu esnek quasi iç çarpımdan türetilen esnek quasi norm ise

$$\begin{aligned} \| \tilde{q} \| (\lambda) &= \sqrt{\| \langle \tilde{q}(\lambda), \tilde{q}(\lambda) \rangle \|_{\Omega(\mathbb{R})}} \\ &= \sqrt{\|\{(a^\lambda)^2\} : a^\lambda \in \tilde{q}(\lambda)\|_{\Omega(\mathbb{R})}} \\ &= \sup_{\lambda \in \tilde{q}(\lambda)} \|a^\lambda\| \end{aligned}$$

dir.

Her $\lambda \in P$ için $\tilde{q}(\lambda) = \tilde{w}(\lambda) = [0,1] \in \Omega_C(\mathbb{R})$ olacak şekilde iki esnek $\tilde{q}, \tilde{w} \in \widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ quasi elemanlarını alalım. Buradan $\| \tilde{q} \| (\lambda) = \| \tilde{w} \| (\lambda) = \tilde{1}$, $\| \tilde{q} + \tilde{w} \| (\lambda) = \tilde{2}$ ve $\| \tilde{q} - \tilde{w} \| (\lambda) = \tilde{1}$ olur. Fakat $\| \tilde{q} + \tilde{w} \|^2 + \| \tilde{q} - \tilde{w} \|^2 \neq 2 \| \tilde{q} \|^2 + 2 \| \tilde{w} \|^2$'dir.

Örnek 4.1.4. $Q = I\mathbb{R}^2$ olsun. (Bozkurt & Yılmaz, 2016 (a))'den bir $q \in I\mathbb{R}^2$ için $I\mathbb{R}^2$ quasilineer uzayının $\| q \| = \|(q_1, q_2)\| = \left(\sum_{i=1}^{2} \|q_i\|_{I\mathbb{R}}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ile bir normlu quasilineer uzayı olduğunu biliyoruz. Ayrıca $I\mathbb{R}^2$ $q, w \in I\mathbb{R}^2$ için $\langle q, w \rangle = \sum_{i=1}^{2} \langle q_i, w_i \rangle_{I\mathbb{R}}$ ile bir quasilineer iç çarpım uzayıdır. Şimdi $\widetilde{I\mathbb{R}^2}$ mutlak esnek quasilineer uzayının $\tilde{q}$ ve $\tilde{w}$ iki esnek quasi elemanını alalım. Buradan $\lambda \in P$ için $\tilde{q}(\lambda) = (q_1^\lambda, q_2^\lambda), \tilde{w}\ (\lambda) = (w_1^\lambda, w_2^\lambda)$ $\in I\mathbb{R}^2$olur.

$$\begin{aligned} \langle . \rangle \quad & : SE(\widetilde{I\mathbb{R}^2}) \times SE(\widetilde{I\mathbb{R}^2}) \to \Omega(\mathbb{R})(P) \\ (\tilde{q}, \tilde{w}) \quad & = \langle \tilde{q}, \tilde{w} \rangle(\lambda) \\ & = \sum_{i=1}^{2} \langle q_i^\lambda, w_i^\lambda \rangle_{I\mathbb{R}} \end{aligned}$$

fonksiyonu $\widetilde{I\mathbb{R}^2}$ esnek quasilineer uzayında bir esnek quasilineer iç çarpımdır. Bu iç çarpım tüm esnek quasi iç çarpım şartlarını sağlar. Ayrıca bu esnek quasi iç çarpımdan

$$\| \tilde{q} \|_{I\mathbb{R}^2} = \| \tilde{q} \|_{\widetilde{\mathbb{R}^2}} (\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{2} \|q_i\|_{I\mathbb{R}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

esnek quasi normu elde edilir.

$(\tilde{Q}, \|\cdot\|, P)$ esnek normlu quasilineer uzay ise

$$h(\tilde{q}, \tilde{w}) = inf \left\{ \tilde{\varepsilon} \geqq \tilde{0}: \tilde{q} \precapprox \tilde{w} + \widetilde{q_1^\varepsilon}, \tilde{w} \precapprox \tilde{q} + \widetilde{q_2^\varepsilon}, \left\|\widetilde{q_i^\varepsilon}\right\|_{\tilde{Q}} \precapprox \tilde{\varepsilon} \right\} \ (i = \{1,2\})$$

eşitliği $\tilde{Q}$ üzerinde bir esnek Hausdorff metriktir. Her $\tilde{q}, \tilde{w} \in \tilde{Q}$ için $h(\tilde{q}, \tilde{w}) = \| \tilde{q} - \tilde{w} \|$ eşitliği burada sağlanmayabilir. Fakat $h(\tilde{q}, \tilde{w}) \precapprox \| \tilde{q} - \tilde{w} \|$ eşitsizliği daima sağlanır.

Tanım 4.1.5. (4.1.1) şartını sağlayan bir esnek quasilineer iç çarpım uzayı esnek quasi iç çarpım üzerinde tanımlanan esnek Hausdorff metriğe göre tam ise bu esnek iç çarpım quasilineer uzaya tamdır denir. Tam olan esnek quasilineer iç çarpım uzayına esnek quasilineer Hilbert uzayı denir.

Örnek 4.1.5. Örnek 4.1.2 de tanımlanan $(\widetilde{\Omega(\mathbb{R})}, \langle . \rangle, P)$ esnek quasilineer iç çarpım uzayı P parametre kümesi üzerinde bir esnek Hilbert quasilineer uzayıdır. Her $\lambda \in P$ için $(\widetilde{\Omega(\mathbb{R})}$'nin $\langle \tilde{q}, \tilde{w} \rangle(\lambda) = \langle \tilde{q}(\lambda), \tilde{w}(\lambda) \rangle_{\Omega(\mathbb{R})}$ iç çarpımı ile bir esnek iç çarpım quasilineer uzay olduğunu biliyoruz. Kabul edelim ki $\{\tilde{q}_n\}$, $((\widetilde{\Omega(\mathbb{R})}, h)$ esnek Hausdorff metrik uzayında bir Cauchy dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m, n \geq N$ için;

$$\tilde{q}_n \lesseqgtr \tilde{q}_m + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon},\ \tilde{q}_m \lesseqgtr \tilde{q}_n + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon},\ \|\tilde{q}_{in}^{\epsilon}\| \lesseqgtr \tilde{\epsilon} \quad (i = \{1,2\})$$

dir. Buradan $\forall\lambda \in P$ için

$$\tilde{q}_n(\lambda) \lesseqgtr \tilde{q}_m(\lambda) + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon}(\lambda), \tilde{q}_m(\lambda) \lesseqgtr \tilde{q}_n(\lambda) + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon}(\lambda), \|\tilde{q}_{in}^{\epsilon}(\lambda)\| \lesseqgtr \tilde{\epsilon}(\lambda) \quad (i = \{1,2\})$$

böylece λ parametresi için $\tilde{q}_n(\lambda)$'nin $\Omega(\mathbb{R})$'de bir Cauchy dizisi olduğu elde edilmiş olur. $\Omega(\mathbb{R})$ tam olduğundan en az bir $\tilde{q}(\lambda) \in \Omega(\mathbb{R})$ ve M_λ vardır öyle ki $\forall\lambda \in P$ ve $\forall n \geq M_\lambda$ için;

$$\tilde{q}_n(\lambda) \lesseqgtr \tilde{q}(\lambda) + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon}(\lambda), \tilde{q}(\lambda) \lesseqgtr \tilde{q}_n(\lambda) + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon}(\lambda), \|\tilde{q}_{in}^{\epsilon}(\lambda)\| \lesseqgtr \tilde{\epsilon}(\lambda)\ (i = \{1,2\})$$

bulunur. $\forall\lambda \in P$ ve $K \in \mathbb{N}^+$ için $K = \max\{M_\lambda : \lambda \in P\}$ seçilirse;

$\|\tilde{q}_{in}^{\epsilon}\| \lesseqgtr \tilde{\epsilon}$ ve $\widetilde{q_n} \lesseqgtr \tilde{q} + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon}, \tilde{q} \lesseqgtr \tilde{q}_n + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon}$ elde edilir.

Bu da bize $\tilde{q}_n \to \tilde{q} \in (\widetilde{\Omega(\mathbb{R})}$ olduğunu gösterir. Ayrıca $\forall\lambda \in P$ için $\tilde{q}(\lambda) \in \Omega(\mathbb{R})$ iken $\tilde{q} \in (\widetilde{\Omega(\mathbb{R})}$ olur. Böylece $(\widetilde{\Omega(\mathbb{R})}, \langle . \rangle, P)$ bir esnek Hilbert quasilineer olduğu elde edilmiş olur.

Önerme 4.1.3.. $(\tilde{Q}, \langle . \rangle, P)$, (4.1.1) şartını sağlayan bir esnek quasilineer iç çarpım uzayı olsun. $\forall\tilde{q}, \tilde{w} \in \tilde{Q}$ için $\tilde{q}_n \to \tilde{q}$ ve $\tilde{w}_n \to \tilde{w}$ ise ve $n \to \infty$ iken $\langle \tilde{q}_n, \tilde{w}_n \rangle \to \langle \tilde{q}, \tilde{w} \rangle$ olur.

İspat. $\tilde{q}_n \to \tilde{q}$ ise $\forall\tilde{\epsilon} \gneqq \tilde{0}$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > N$ iken

$$\widetilde{q_n} \lesseqgtr \tilde{q} + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon}, \tilde{q} \lesseqgtr \tilde{q}_n + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon}, \|\tilde{q}_{in}^{\epsilon}\| \lesseqgtr \tilde{\epsilon}\ (i = \{1,2\})$$

'dur. Benzer şekilde $\tilde{w}_n \to \tilde{w}$ ise $\forall\tilde{\epsilon} \geq \tilde{0}$ için $\exists M \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > M$ iken

$$\tilde{w}_n \lesseqgtr \tilde{w} + \tilde{w}_{1n}^{\epsilon}, \tilde{w} \lesseqgtr \tilde{w}_n + \tilde{w}_{2n}^{\epsilon}, \|\tilde{w}_{in}^{\epsilon}\| \lesseqgtr \tilde{\epsilon}\ (i = \{1,2\})$$

'dur.

$$\langle \widetilde{q_n}, \widetilde{w_n} \rangle \subseteqq \langle \tilde{q} + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon}, \tilde{w} + \tilde{w}_{1n}^{\epsilon} \rangle \subseteqq \langle \tilde{q}, \tilde{w} \rangle + \langle \tilde{q}, \tilde{w}_{1n}^{\epsilon} \rangle + \langle \tilde{q}_{1n}^{\epsilon}, \tilde{w} \rangle + \langle \tilde{q}_{1n}^{\epsilon}, \tilde{w}_{1n}^{\epsilon} \rangle$$

ve

$$\langle \tilde{q}, \tilde{w} \rangle \subseteqq \langle \tilde{q}_n + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon}, \tilde{w}_n + \tilde{w}_{2n}^{\epsilon} \rangle \subseteqq \langle \tilde{q}_n, \tilde{w}_n \rangle + \langle \tilde{q}_n, \tilde{w}_{2n}^{\epsilon} \rangle + \langle \tilde{q}_{2n}^{\epsilon}, \tilde{w}_n \rangle + \langle \tilde{q}_{2n}^{\epsilon}, \tilde{w}_{2n}^{\epsilon} \rangle$$

olur. Eğer

$$\tilde{z}_{1n}^{\epsilon} = \langle \tilde{q}, \widetilde{w}_{1n}^{\epsilon} \rangle + \langle \tilde{q}_{1n}^{\epsilon}, \widetilde{w} \rangle + \langle \tilde{q}_{1n}^{\epsilon}, \widetilde{w}_{1n}^{\epsilon} \rangle$$

ve

$$\tilde{z}_{2n}^{\epsilon} = \langle \tilde{q}_n, \widetilde{w}_{2n}^{\epsilon} \rangle + \langle \tilde{q}_{2n}^{\epsilon}, \widetilde{w}_n \rangle + \langle \tilde{q}_{2n}^{\epsilon}, \widetilde{w}_{2n}^{\epsilon} \rangle$$

dersek $\tilde{z}_{1n}^{\epsilon}, \tilde{z}_{2n}^{\epsilon} \in \Omega(\mathbb{R})$'dir. (4.1.2)'den

$$\|\tilde{z}_{1n}^{\epsilon}\| = \|\langle \tilde{q}, \widetilde{w}_{1n}^{\epsilon} \rangle + \langle \tilde{q}_{1n}^{\epsilon}, \widetilde{w} \rangle + \langle \tilde{q}_{1n}^{\epsilon}, \widetilde{w}_{1n}^{\epsilon} \rangle\|$$

$$\lesseqqgtr \|\tilde{q}\|\|\widetilde{w}_{1n}^{\epsilon}\| + \|\tilde{q}_{1n}^{\epsilon}\|\|\widetilde{w}\| + \|\tilde{q}_{1n}^{\epsilon}\|\|\widetilde{w}_{1n}^{\epsilon}\|$$

olacağından $n \to \infty$ iken $\|\tilde{z}_{1n}^{\epsilon}\| \to \bar{0}$'dır. Yine benzer şekilde (4.1.2)'den

$$\|\tilde{z}_{2n}^{\epsilon}\| = \|\langle \tilde{q}_n, \widetilde{w}_{2n}^{\epsilon} \rangle + \langle \tilde{q}_{2n}^{\epsilon}, \widetilde{w}_n \rangle + \langle \tilde{q}_{2n}^{\epsilon}, \widetilde{w}_{2n}^{\epsilon} \rangle\|$$

$$\lesseqqgtr \|\tilde{q}_n\|\|\widetilde{w}_{2n}^{\epsilon}\| + \|\tilde{q}_{2n}^{\epsilon}\|\|\widetilde{w}_n\| + \|\tilde{q}_{2n}^{\epsilon}\|\|\widetilde{w}_{2n}^{\epsilon}\|$$

olacağından $n \to \infty$ iken $\|\tilde{z}_{2n}^{\epsilon}\| \to \bar{0}$'dır. Böylece her $\tilde{\epsilon} \gtreqqless \tilde{0}$ için $K = \max\{N, M\}$ olacak şekilde $\exists K \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n > K$ için

$$\langle \tilde{q}_n, \widetilde{w}_n \rangle \subseteq \langle \tilde{q}, \widetilde{w} \rangle + \tilde{z}_{1n}^{\epsilon}, \langle \tilde{q}, \widetilde{w} \rangle \subseteq \langle \tilde{q}_n, \widetilde{w}_n \rangle + \tilde{z}_{2n}^{\epsilon} \text{ and } \|\tilde{z}_{in}^{\epsilon}\| \lesseqqgtr \tilde{\epsilon} \ (i = \{1,2\})$$

olur. Bu da bize $n \to \infty$ iken $\langle \tilde{q}_n, \widetilde{w}_n \rangle \to \langle \tilde{q}, \widetilde{w} \rangle$ olur.

Tanım 4.1.6. $\tilde{Q}$ bir esnek iç çarpım quasilineer uzay ve $\tilde{q}, \widetilde{w} \in \tilde{Q}$ olsun. Eğer

$$\| \langle \tilde{q}, \widetilde{w} \rangle \|_{\Omega(\mathbb{R})} = \bar{0}$$

oluyorsa $\tilde{q}$ ve $\widetilde{w}$'ye ortogonaldir denir ve $\tilde{q} \perp \widetilde{w}$ ile gösterilir. $\widetilde{M}$, $\tilde{Q}$ esnek iç çarpım quasilineer uzayının boş kümeden farklı esnek quasi alt kümesi olsun. Eğer $\tilde{Q}$'nun esnek quasi vektörü $\tilde{q}$, $\widetilde{M}$'nın tüm esnek quasi vektörlerine dik ise $\tilde{q}$ ile $\widetilde{M}$ ortogonaldir denir ve $\tilde{q} \perp \widetilde{M}$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.7. $\tilde{Q}$ esnek quasilineer iç çarpım uzayı ve $\widetilde{M}$'de boş kümeden farklı esnek quasi alt kümesi olsun. $\forall \lambda \in P$ için $\widetilde{M}(\lambda) \neq \emptyset$ kümesi $\tilde{Q}$'da ortogonal ise ve $\widetilde{M}$'nin tüm esnek quasi vektörlerinin normu $\bar{1}$'e eşit ise $\widetilde{M}$'ye ortonormaldir denir. Yani $\forall \tilde{q}, \widetilde{w} \in \widetilde{M}$ için

$$\| \langle \tilde{q}, \tilde{w} \rangle \|_{\Omega(\mathbb{R})} = \begin{cases} \bar{0}, & \tilde{q} = \tilde{w} \\ \bar{1}, & \tilde{q} \neq \tilde{w} \end{cases}$$

oluyorsa $\widetilde{M}$'ye $\tilde{Q}$'da ortonormaldir denir.

Örnek 4.1.6. Örnek 4.1.2'deki $\left(\widetilde{(\Omega(\mathbb{R})}, \langle . \rangle, P\right)$ esnek iç çarpım quasilineer uzayını dikkate alalım. $\tilde{q}$ ve $\tilde{w}$ her $\lambda \in P$ için $\tilde{q}(\lambda) = [0,1] \in \Omega_C(\mathbb{R})$ ve $\tilde{w}(\lambda) = \{0\} \in \Omega_C(\mathbb{R})$ olsun. Buradan

$$\| \langle \tilde{q}(\lambda), \tilde{w}(\lambda) \rangle \|_{\Omega(\mathbb{R})} = \| \langle [0,1], \{0\} \rangle \|_{\Omega(\mathbb{R})} = 0$$

olacağından $\tilde{q}$ ve $\tilde{w}$ esnek vektörleri birbirine dik yani $\| \langle \tilde{q}, \tilde{w} \rangle \|_{\Omega(\mathbb{R})} = \bar{0}$ olur. Şimdi $(\Omega_C(\mathbb{R})^2, \langle . \rangle, P)$ esnek quasilineer iç çarpım uzayını göz önüne alalım. $\widetilde{q_1}, \widetilde{q_2}, \widetilde{q_3}, \widetilde{q_4} \in \Omega_C(\mathbb{R})^2$ olmak üzere $\forall \lambda \in P$ için;

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1(\lambda) &= \{(0, h) : 0 \leq h \leq 1\} \\ \tilde{q}_2(\lambda) &= \{(h, 0) : 0 \leq h \leq 1\} \\ \tilde{q}_3(\lambda) &= \{(0, -h) : 0 \leq h \leq 1\} \\ \tilde{q}_4(\lambda) &= \{(-h, 0) : 0 \leq h \leq 1\} \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda

$$\|\langle \tilde{q}_1, \tilde{q}_2 \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = \|\langle \tilde{q}_3, \tilde{q}_4 \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = \|\langle \tilde{q}_1, \tilde{q}_4 \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = \|\langle \tilde{q}_2, \tilde{q}_3 \rangle\|_{\Omega(\mathbb{R})} = \bar{0}$$

olur. Yani $\tilde{q}_1$ esnek quasi vektörü $\tilde{q}_2$ esnek quasi vektörüne, $\tilde{q}_3$ esnek quasi vektörü $\tilde{q}_4$ esnek quasi vektörüne, $\tilde{q}_1$ esnek quasi vektörü $\tilde{q}_4$ esnek quasi vektörüne ve $\tilde{q}_2$ esnek quasi vektörü $\tilde{q}_3$ esnek quasi vektörüne dik olur. Eğer $\tilde{F} = \{\tilde{q}_1, \tilde{q}_2\}$, $\tilde{G} = \{\tilde{q}_3, \tilde{q}_4\}$, $\tilde{H} = \{\tilde{q}_1, \tilde{q}_4\}$ veya $\tilde{I} = \{\tilde{q}_2, \tilde{q}_3\}$ alırsak $\tilde{F}, \tilde{G}, \tilde{H}$ ve $\tilde{I}$ kümelerine $\widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$'nin ortonormal esnek quasi alt kümeleri denir.

Teorem 4.1.6. $\tilde{Q}$ esnek iç çarpım quasilineer uzayında eğer $\tilde{q} \perp \tilde{w}$ ise

$\| \tilde{q} + \tilde{w} \|^2 \lesseqqgtr \| \tilde{q} \|^2 + \| \tilde{w} \|^2$ ve $\| \tilde{q} - \tilde{w} \|^2 \lesseqqgtr \| \tilde{q} \|^2 + \| \tilde{w} \|^2$ olur.

İspat. $\tilde{q}, \tilde{w} \in \tilde{Q}$ ve $\tilde{q} \perp \tilde{w}$ ise;

$$\| \tilde{q} + \tilde{w} \|^2 = \| \langle \tilde{q} + \tilde{w}, \tilde{q} + \tilde{w} \rangle \|$$

$$\lesseqqgtr \| \langle \tilde{q}, \tilde{q} \rangle \| + \| \langle \tilde{q}, \tilde{w} \rangle \| + \| \langle \tilde{w}, \tilde{q} \rangle \| + \| \langle \tilde{w}, \tilde{w} \rangle \|$$

$$=\| \tilde{q} \|^2 + \| \tilde{w} \|^2$$

olur. Benzer şekilde

$$\| \tilde{q} - \tilde{w} \|^2 = \| \langle \tilde{q} - \tilde{w}, \tilde{q} - \tilde{w} \rangle \|$$

$$\widetilde{\leqq} \| \langle \tilde{q}, \tilde{q} \rangle \| + \| \langle \tilde{q}, \tilde{w} \rangle \| + \| \langle \tilde{w}, \tilde{q} \rangle \| + \| \langle \tilde{w}, \tilde{w} \rangle \|$$

$$=\| \tilde{q} \|^2 + \| \tilde{w} \|^2$$

elde edilir.

Tanım 4.1.8. $\forall \lambda \in P$ için $\widetilde{M}(\lambda) \neq \emptyset$ olacak şekilde $\widetilde{M}$, $\tilde{Q}$ esnek iç çarpım quasilineer uzayının esnek quasi alt kümesi olsun. $\tilde{Q}$'nun $\widetilde{M}$ ortogonal tüm esnek quasi vektörlerinin kümesine $\widetilde{M}$'nin ortogonal tümleyeni denir. $\widetilde{M}^{\perp}$ ile gösterilir.

Teorem 4.1.7. $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzayı ve $\widetilde{M}$'da $\tilde{Q}$'nun boş kümeden farklı esnek quasi alt kümesi olsun. Bu durumda $\widetilde{M}^{\perp}$, $\tilde{Q}$'nun kapalı bir alt uzayıdır.

İspat. $\tilde{q}$ ve $\tilde{w}$ esnek quasi vektörleri $\tilde{Q}$'nun $\widetilde{M}$'ye ortogonal olan esnek quasi vektörleri olsun. Yani $\tilde{q}, \tilde{w} \in \widetilde{M}^{\perp}$ olacak şekilde $\tilde{q}, \tilde{w} \in \tilde{Q}$ alalım. Her $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathbb{R}(\mathbb{R})$ esnek skaleri ve $\tilde{z} \in \widetilde{M}$ esnek quasi vektörü için;

$$\| \langle \tilde{\alpha} \cdot \tilde{q} + \tilde{\beta} \cdot \tilde{w}, \tilde{z} \rangle \| \widetilde{\leqq} \| \langle \tilde{\alpha} \cdot \tilde{q}, \tilde{z} \rangle \| + \| \langle \tilde{\beta} \cdot \tilde{w}, \tilde{z} \rangle \|$$

$$=|\tilde{\alpha}| \, \| \langle \tilde{q}, \tilde{z} \rangle \| + |\tilde{\beta}| \, \| \langle \tilde{w}, \tilde{z} \rangle \|$$

$$=\bar{0}$$

olur.

Buradan $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{q} + \tilde{\beta} \cdot \tilde{w} \in \widetilde{M}^{\perp}$ elde edilmiş olur. Böylece $\widetilde{M}^{\perp}$, $\tilde{Q}$ esnek quasilineer iç çarpım uzayının alt uzayıdır denir. Şimdi $\widetilde{M}^{\perp}$'nin kapalılığını gösterelim. $\{\tilde{q}_n\}$, $\widetilde{M}^{\perp}$'de bir esnek quasi vektör ve $\{\tilde{q}_n\} \to \tilde{q}$ olacak şekilde bir $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ olsun. $\forall \tilde{\epsilon} \geq \bar{0}$ için en az bir $N \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $\forall n \geq N$ için;

$$\widetilde{q_n} \,\widetilde{\lesssim}\, \tilde{q} + \tilde{q}_{1n}^{\epsilon}, \tilde{q} \,\widetilde{\lesssim}\, \tilde{q}_n + \tilde{q}_{2n}^{\epsilon}, \|\tilde{q}_{in}^{\epsilon}\| \,\widetilde{\lesssim}\, \tilde{\epsilon} \; (i = \{1,2\})$$

olur. Buradan ve her esnek iç çarpım quasilineer uzayı bir esnek normlu quasilineer uzayı olduğundan $\widetilde{q_n} \widetilde{\preccurlyeq} \tilde{q}$ ve $\tilde{q} \widetilde{\preccurlyeq} \tilde{q}_n$ elde edilir. Her $\tilde{z} \in \widetilde{M}$ için $\tilde{z} \widetilde{\preccurlyeq} \tilde{z}$ olduğundan $\bar{0} = \|\langle \tilde{q}_n, \tilde{z} \rangle\| \widetilde{\leq} \| \langle \tilde{q}, \tilde{z} \rangle \|$ ve $\| \langle \tilde{q}, \tilde{z} \rangle \| \widetilde{\leq} \|\langle \tilde{q}_n, \tilde{z} \rangle\| = \bar{0}$ elde edilir. Böylece $\| \langle \tilde{q}, \tilde{z} \rangle \| = \bar{0}$ olur. Buradan $\tilde{q} \in \widetilde{M}^{\perp}$ elde edilmiş olur. Yani $\widetilde{M}^{\perp}$ kümesi $\tilde{Q}$ kapalı bir alt uzayı olmuş olur.

4.2. Esnek Quasilineer Uzayların Zemini

Tanım 4.2.1. $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay ve $\tilde{\alpha}\cdot\tilde{\beta} \widetilde{\geqq} \tilde{0}$ olacak şekilde $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ esnek skalerleri olsun. Bu durumda her $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ için

$$(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})\cdot\tilde{q} = \tilde{\alpha}\cdot\tilde{q}+\tilde{\beta}\cdot\tilde{q}$$

oluyorsa $\tilde{Q}$'ya esnek homojenize quasilineer uzay denir.

Teorem 4.2.1. Bir $\tilde{Q}$ esnek quasilineer uzayı için $\widetilde{\Omega_C(Q)}$ esnek homojenize quasilineer uzay olmasına rağmen $\widetilde{\Omega(Q)}$ esnek homojenize olmayan bir quasilineer uzaydır.

İspat. İlk olarak $\widetilde{\Omega_C(Q)}$'nun esnek homojenize quasilineer uzay olduğunu gösterelim. Yani her $\tilde{q} \in \widetilde{\Omega_C(Q)}$ ve $\tilde{\alpha}\cdot\tilde{\beta} \widetilde{\succcurlyeq} \tilde{0}$ için $(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})\cdot\tilde{q} = \tilde{\alpha}\cdot\tilde{q}+\tilde{\beta}\cdot\tilde{q}$ eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim. $\widetilde{\Omega_C(Q)}$ bir esnek quasilineer uzay olduğundan $(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})\cdot\tilde{q} \widetilde{\preccurlyeq} \tilde{\alpha}\cdot\tilde{q}+\tilde{\beta}\cdot\tilde{q}$ daima doğrudur. Kabul edelim ki her $\lambda \in$ A parametresi için $c \in (\tilde{\alpha}\cdot\tilde{q}+\tilde{\beta}\cdot\tilde{q})(\lambda)$ olsun. Buradan bir $a, b \in \tilde{q}(\lambda)$ için,

$$c = \tilde{\alpha}(\lambda)a + \tilde{\beta}(\lambda)b$$

elde ederiz.

$$c = (\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})(\lambda)\cdot\left[\frac{\tilde{\alpha}(\lambda)}{\tilde{\alpha}(\lambda)+\tilde{\beta}(\lambda)}a + \frac{\tilde{\beta}(\lambda)}{\tilde{\alpha}(\lambda)+\tilde{\beta}(\lambda)}b\right] \tag{4.2.1}$$

yazılabilir. Eğer $\tilde{t} = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}}$ ve $\tilde{k} = \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}}$ olarak alırsak $\tilde{\alpha}\cdot\tilde{\beta} \widetilde{\succcurlyeq} \tilde{0}$ olduğundan iki durum ortaya çıkar.

Durum 1: Eğer $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \tilde{\mathbb{R}}^{+}$ ise $\tilde{\alpha} \widetilde{\preccurlyeq} \tilde{\alpha}+\tilde{\beta} \Rightarrow \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}} \widetilde{\preccurlyeq} \tilde{1}$ ve $\tilde{0} \widetilde{\preccurlyeq} \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}}$

Durum 2: Eğer $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \tilde{\mathbb{R}}^{-}$ ise $\tilde{\alpha} \widetilde{\preccurlyeq} \tilde{\alpha}+\tilde{\beta} \Rightarrow \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}} \widetilde{\preccurlyeq} \tilde{1}$ ve $\tilde{0} \widetilde{\preccurlyeq} \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}}$

bulunur.

Dolayısıyla bu iki durum gereğince $\tilde{0} \widetilde{\preccurlyeq} \tilde{t} \widetilde{\preccurlyeq} \tilde{1}$ elde edilir. Ayrıca $\tilde{t}+\tilde{k} = \tilde{1}$ olduğundan konvekslik tanımı gereğince $\tilde{k} = \frac{\tilde{\alpha}(\lambda)}{\tilde{\alpha}(\lambda)+\tilde{\beta}(\lambda)}a + \frac{\tilde{\beta}(\lambda)}{\tilde{\alpha}(\lambda)+\tilde{\beta}(\lambda)}b \in \tilde{q}(\lambda)$ olur. Yani (4.2.1) den $c = (\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})(\lambda)k \in \tilde{q}(\lambda)$ elde edilmiş olur.

Böylece keyfi bir $\lambda \in A$ parametresi için $c = (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})(\lambda)k \in \tilde{q}(\lambda)$'dır.

Örnek 4.2.1. $\widetilde{\Omega(\mathbb{R})}$ bir esnek homojenize quasilineer uzay değildir. Kabul edelim ki,

$$\tilde{F}: P \longrightarrow \Omega(\mathbb{R})$$
$$\lambda \longrightarrow \tilde{F}(\lambda) = \{3,4\}$$

olsun. Buradan $(\tilde{2} \cdot \tilde{F})(\lambda) = \{6,8\}$ olur. Fakat $(\tilde{F} + \tilde{F})(\lambda) = \tilde{F}(\lambda) + \tilde{F}(\lambda) = \{6,7,8\}$ olur. Dolayısıyla $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta} \gneqq \tilde{0}$ için $\tilde{2} \cdot \tilde{F} \neq \tilde{F} + \tilde{F}$ dır. Burada $\tilde{\alpha}(\lambda) = \alpha$ olacak şekilde alınmıştır.

Örnek 4.2.2. $\widetilde{\Omega(\mathbb{R}^2)}$ esnek quasilineer uzayını göz önüne alalım. Kabul edelim ki bir λ parametresi için;

$$F_1 = \{(0, u): 0 \leq u \leq 2\}$$

$$F_2 = \{(u, 0): 0 \leq u \leq 2\}$$

olmak üzere $\tilde{F}(\lambda) = \{F_1, F_2\}$ bir esnek quasi vektörü olsun. Örnek 4.2.1'e benzer olarak her λ parametresi için $\tilde{\alpha}(\lambda) = \alpha$ ise

$$(\tilde{2} \cdot \tilde{F})(\lambda) = \{2F_1, 2F_2\}$$

elde ederiz. Öte yandan;

$$\begin{aligned}(\tilde{F} + \tilde{F})(\lambda) &= \{F_1, F_2\} + \{F_1, F_2\} \\ &= \{(0,2u): 0 \leq u \leq 2\} \cup \{(u,u): 0 \leq u \leq 2\} \cup \{(2u, 0): 0 \leq u \leq 2\}\end{aligned}$$

olur. Bu da bize $\widetilde{\Omega(\mathbb{R}^2)}$'nin $\tilde{\alpha}(\lambda) = 1$, $\tilde{\beta}(\lambda) = 1$ esnek skalerleri için esnek homojenize olmayan bir quasilineer uzay olduğunu gösterir.

Teorem 4.2.2. $\tilde{Q}$ bir esnek homojenize uzay ve $\tilde{G} \in \widetilde{Q_d}$ ise en az bir $\tilde{F} \in \tilde{Q}$ vardır öyle ki $\tilde{G} = \tilde{F} - \tilde{F}$'dir.

İspat. $\tilde{G}$, $\tilde{Q}$ esnek homojenize quasilineer uzayının bir esnek simetrik quasi vektörü olsun. yani $\tilde{G} = -\tilde{G}$ olsun. Ayrıca $\tilde{G} = \tilde{G}$ olduğunda $\tilde{G} + \tilde{G} = \tilde{G} - \tilde{G}$ olur.

Ayrıca her λ parametresi için $(\tilde{G} + \tilde{G})(\lambda) = (\tilde{G} - \tilde{G})(\lambda)$'dır. $\tilde{Q}$ bir esnek homojenize quasilineer uzay olduğundan $\tilde{G}(\lambda) + \tilde{G}(\lambda) = (\tilde{2}\tilde{G})(\lambda)$.

$$\tilde{G}(\lambda) = \frac{\tilde{G}}{\tilde{2}}(\lambda) - \frac{\tilde{G}}{\tilde{2}}(\lambda)$$

olacağını gösterir. Yani $\tilde{G} = \frac{\tilde{G}}{\tilde{2}} - \frac{\tilde{G}}{\tilde{2}}$ elde edilmiş olur.

Şimdi bir esnek quasilineer uzayın zemini ile ilgili elde ettiğimiz bazı sonuçları verelim.

Teorem 4.2.3. $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay ve $\tilde{U} \subseteq \tilde{Q}$ ise

a) $\{\tilde{0}\} \in F_{\tilde{U}}^{\perp}$,
b) Eğer $\tilde{U} \subseteq \tilde{V}$ ise $F_{\tilde{U}} \subseteq F_{\tilde{V}}$'dir.
c) $\tilde{U}^{\perp} \subseteq \tilde{V}^{\perp}$ ise $F_{\tilde{U}}^{\perp} \subseteq F_{\tilde{V}}^{\perp}$'dir.
d) $F_{\{\tilde{0}\}} = \{\tilde{0}\}$

’dır.

İspat. $\tilde{q}, \tilde{U}$’nun keyfi bir esnek quasi vektörü olsun. Bir λ parametresi için,

$$\left\|\langle \tilde{q}, \{\tilde{0}\}\rangle_{\widetilde{\Omega(\mathbb{R})}}\right\| = \left\|\langle \tilde{q}(\lambda), \{\tilde{0}\}(\lambda)\rangle_{\Omega(\mathbb{R})}\right\| = \left\|\langle \tilde{q}(\lambda), 0\rangle_{\Omega(\mathbb{R})}\right\| = \{\tilde{0}\}$$

olduğundan $\{\tilde{0}\} \in F_{\tilde{U}}^{\perp}$’dir.

Kabul edelim ki $\tilde{U} \subseteq \tilde{V}$ olsun. $\forall \tilde{q} \in F_{\tilde{U}}$ için $\tilde{q} \in F_{\tilde{V}}$ olduğunu göstermeliyiz. Eğer $\tilde{q} \in F_{\tilde{U}}$ ise $\tilde{U}$’da en az bir $\tilde{u}$ elemanı vardır öyle ki $\tilde{q} \in F_{\tilde{u}}$’dur. Diğer yandan $\tilde{U} \subseteq \tilde{V}$ olduğundan $\tilde{u} \in \tilde{V}$ olur. Dolayısıyla $F_{\tilde{u}} \tilde{\subseteq} \cup_{\tilde{u} \in \tilde{U}} F_{\tilde{v}}$ olur. Böylece $\tilde{q} \in F_{\tilde{V}}$ elde edilmiş olur. $\tilde{U}^{\perp} \subseteq \tilde{V}^{\perp}$ iken $F_{\tilde{U}}^{\perp} \subseteq F_{\tilde{V}}^{\perp}$ benzer şekilde gösterilebilir. Ayrıca bir λ parametresi için

$$\begin{aligned} F_{\{\tilde{0}\}} &= \left\{\tilde{q} \in \widetilde{Q_r} : \tilde{q} \lesseqgtr \{\tilde{0}\}\right\} \\ &= \{\tilde{q}(\lambda) \in Q_r : \tilde{q}(\lambda) \lesseqgtr 0\} \\ &= \{\tilde{0}\} \end{aligned}$$

dir.

Tanım 4.2.2. $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay olsun. $\tilde{M} \subseteq \tilde{Q}$ konvekstir ancak ve ancak her $\tilde{q}, \tilde{w} \in \tilde{M}$ ve $\tilde{\alpha}$ esnek skaleri için $\tilde{\alpha}\tilde{q} + (1 - \tilde{\alpha})\tilde{w} \in \tilde{M}$’dir.

Teorem 4.2.4. $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay ve $\widetilde{M}$, $\tilde{Q}$'nun bir alt uzayı olsun. $F_{\widetilde{M}}$, $\tilde{Q}$'nun konveks alt uzayıdır ancak ve ancak F_M, Q'nun altuzayıdır.

İspat. $\forall \tilde{a}, \tilde{b} \in F_{\widetilde{M}}$ ve her λ parametresi için $\tilde{a}(\lambda) = a \in F_M, \tilde{b}(\lambda) = \mathrm{b} \in F_M, \tilde{x}(\lambda) = x \in M, \tilde{y}(\lambda) = \mathrm{y} \in M$ ve $\tilde{\alpha}(\lambda) = \alpha$ esnek skaleri olmak üzere $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{a} + (\tilde{1} - \tilde{\alpha}) \cdot \tilde{b} \in F_{\widetilde{M}}$ olsun. Tanım 4.1.1'den en az bir $\tilde{x}, \tilde{y} \in \widetilde{M}$ vardır öyle ki

$$(\tilde{\alpha} \cdot \tilde{a})(\lambda) + \left(\tilde{1} - \tilde{\alpha}\right) \cdot \tilde{b}(\lambda) \lesseqgtr (\tilde{\alpha} \cdot \tilde{x})(\lambda) + \left(\tilde{1} - \tilde{\alpha}\right) \cdot \tilde{y}(\lambda)$$

dır. Buradan her λ parametresi için,

$$\tilde{\alpha}(\lambda) \cdot \tilde{a}(\lambda) + \left(\tilde{1} - \tilde{\alpha}\right)(\lambda) \cdot \tilde{b}(\lambda) \lesseqgtr \tilde{\alpha}(\lambda) \cdot \tilde{x}(\lambda) + \left(\tilde{1} - \tilde{\alpha}\right)(\lambda) \cdot \tilde{y}(\lambda)$$

olur. Ayrıca,

$$\tilde{\alpha}(\lambda) \cdot \tilde{a}(\lambda) + \left(\tilde{1} - \tilde{\alpha}\right)(\lambda) \cdot \tilde{b}(\lambda) \lesseqgtr \tilde{\alpha}(\lambda) \cdot \tilde{x}(\lambda) + \left(\tilde{1} - \tilde{\alpha}\right)(\lambda) \cdot \tilde{y}(\lambda)$$

elde edilir. Böylece $\alpha \cdot a + (1 - \alpha) \cdot b \lesseqgtr \alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y \in M$ eşitsizliği elde edilmiş olur. Diğer yandan bir $\tilde{c} \in \widetilde{M}$ vardır öyle ki $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{a} + (\tilde{1} - \tilde{\alpha}) \cdot \tilde{b} \in \widetilde{M}_r$ için $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{a} + (\tilde{1} - \tilde{\alpha}) \cdot \tilde{b} + \tilde{c} = \bar{\theta}$ olur. Buradan her λ parametresi için, $(\tilde{\alpha} \cdot \tilde{a})(\lambda) + (\tilde{1} - \tilde{\alpha}) \cdot \tilde{b}(\lambda) + \tilde{c}(\lambda) = \theta$ elde edilir bu da bize $\alpha \cdot a + (1 - \alpha) \cdot b \in M_r$ olduğunu gösterir. Böylece $\alpha \cdot a + (1 - \alpha) \cdot b \in F_M$ olur.

Yine aynı şekilde her λ parametresi için $\tilde{a}(\lambda) = a \in F_M, \tilde{b}(\lambda) = \mathrm{b} \in F_M, \tilde{x}(\lambda) = x \in M, \tilde{y}(\lambda) = \mathrm{y} \in M$ ve her $a, b \in F_M$ için $\alpha \cdot a + (1 - \alpha) \cdot b \in F_M$ olsun. Tanım 4.1.1'den en az bir $x, y \in M$ vardır öyle ki

$$\alpha \cdot a + (1 - \alpha) \cdot b \lesseqgtr \alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y$$

olur. Her λ parametresi için

$$\begin{aligned}(\tilde{\alpha} \cdot \tilde{a})(\lambda) + \left(\tilde{1} - \tilde{\alpha}\right) \cdot \tilde{b}(\lambda) = \alpha \cdot a + (1 - \alpha) \cdot b &\lesseqgtr \alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y \\ &= (\tilde{\alpha} \cdot \tilde{x})(\lambda) + \left(\tilde{1} - \tilde{\alpha}\right) \cdot \tilde{y}(\lambda)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da bize $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{a} + (\tilde{1} - \tilde{\alpha}) \cdot \tilde{b} \lesseqgtr \tilde{\alpha} \cdot \tilde{x} + (\tilde{1} - \tilde{\alpha}) \cdot \tilde{y}$ olduğunu gösterir. Diğer yandan en az bir $d \in M$ vardır öyle ki $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{a} + (\tilde{1} - \tilde{\alpha}) \cdot \tilde{b} \in \widetilde{M}_r$ olduğundan $\alpha \cdot a + (1 - \alpha) \cdot b + d = \theta$ yazılabilir. Bu da her λ parametresi için

$$(\tilde{\alpha} \cdot \tilde{a})(\lambda) + (\tilde{1} - \tilde{\alpha}) \cdot \tilde{b}(\lambda) + \tilde{d}(\lambda) = \theta$$

olur. Bu da bize $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{a} + (\tilde{1} - \tilde{\alpha}) \cdot \tilde{b} \in \widetilde{M}_r$ olduğunu gösterir. Böylece $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{a} + (\tilde{1} - \tilde{\alpha}) \cdot \tilde{b} \in F_{\widetilde{M}}$ olduğunu göstermiş olur.

Teorem 4.2.5. $\tilde{Q}$ bir esnek homojenize quasilineer uzayında bir $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ için $F_{\tilde{q}}$ konvekstir.

İspat. $\tilde{Q}$ esnek homojenize quasilineer uzayında $\widetilde{w}, \widetilde{w'} \in F_{\tilde{q}}$ için $\tilde{\alpha} \cdot \widetilde{w} + (1 - \tilde{\alpha}) \cdot \widetilde{w'} \in F_{\tilde{q}}$ olduğunu göstermeliyiz. Bir $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ için

$$F_{\tilde{q}} = \left\{\widetilde{w} \in \tilde{Q}_r : \widetilde{w} \preceq \tilde{q}\right\}$$

dir. Buradan her $\widetilde{w}, \widetilde{w'} \in F_{\tilde{q}}$ için $\widetilde{w} \lesseqgtr \tilde{q}$ olur. $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay olduğundan her $\tilde{0} \lesseqgtr \tilde{\lambda} \lesseqgtr \tilde{1}$ için

$$\tilde{\alpha} \cdot \widetilde{w} \lesseqgtr \tilde{\alpha} \cdot \tilde{q} \text{ ve } (\tilde{1} - \tilde{\alpha}) \cdot \widetilde{w'} \lesseqgtr (\tilde{1} - \tilde{\alpha}) \cdot \tilde{q}$$

olur. Buradan da

$$\tilde{\alpha} \cdot \widetilde{w} + (\tilde{1} - \tilde{\alpha}) \cdot \widetilde{w'} \lesseqgtr \tilde{\alpha} \cdot \tilde{q} + (\tilde{1} - \tilde{\alpha}) \cdot \tilde{q}$$

elde edilir. $\tilde{Q}$ bir esnek homojenize quasilineer uzay olduğundan $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ için

$$\tilde{\alpha} \cdot \tilde{q} + (\tilde{1} - \tilde{\alpha}) \cdot \tilde{q} = (\tilde{\alpha} + \tilde{1} - \tilde{\alpha}) \cdot \tilde{q} = \tilde{q}$$

olur. Buda bize $\tilde{\alpha} \cdot \widetilde{w} + (1 - \tilde{\alpha}) \cdot \widetilde{w'} \in F_{\tilde{q}}$ olduğunu verir. Dolayısıyla $F_{\tilde{q}}$'nun konveks olduğu gösterilmiş olur.

Uyarı 4.2.1. Bir $\tilde{Q}$ esnek quasilineer uzayının esnek yüzey vektörünün zemini konvekstir. Ancak ve ancak $\tilde{Q}$ esnek quasilineer uzayı homojenizedir. Yukarıdaki teoremde $\tilde{Q}$ homojenize olmasaydı bir $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ için $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{q} + \tilde{\beta} \cdot \tilde{q} = (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) \cdot \tilde{q}$ eşitsizliği her $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ için sağlanmayacağından $F_{\tilde{q}}$ olmazdı.

Teorem 4.2.6. $\tilde{Q}$ bir esnek Hilbert quasilineer uzay ve $\widetilde{K}$'da $\tilde{Q}$'nun bir konveks altuzayı olsun. $\widetilde{K}$'nun zemin kümesi yani $F_{\widetilde{K}}$, $\tilde{Q}$'nun konveks tam olan bir alt uzayıdır.

İspat. İlk olarak $F_{\widetilde{K}}$'nın $\tilde{Q}$'nun bir konveks esnek alt uzayı olduğunu gösterelim. $\widetilde{K}$, $\tilde{Q}$'nun konveks alt kümesi olduğundan $\tilde{0} \preceq \tilde{\alpha} \preceq \tilde{1}$ ve her $\tilde{q}, \widetilde{w} \in \widetilde{K}$ için $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{q} + (\tilde{1} - \tilde{\alpha})\widetilde{w} \in \widetilde{K}$ olur. Kabul edelim ki $\tilde{a}, \tilde{b} \in F_{\widetilde{K}}$ olsun. Bu durumda en az bir $\tilde{q}, \widetilde{w} \in \widetilde{K}$ vardır öyle ki;

$$\tilde{a} \lesseqgtr \tilde{q} \text{ ve } \tilde{b} \lesseqgtr \widetilde{w}$$

olur. Diğer yandan $\tilde{Q}$ esnek quasilineer uzay olduğundan $\tilde{0} \lesseqgtr \tilde{\alpha} \lesseqgtr \tilde{1}$ için

$$\tilde{\alpha} \cdot \tilde{a} \lesseqgtr \tilde{\alpha} \cdot \tilde{q} \text{ ve } (\tilde{1} - \tilde{\alpha}) \cdot \tilde{b} \lesseqgtr (\tilde{1} - \tilde{\alpha}) \cdot \widetilde{w}$$

ve

$$\tilde{\alpha} \cdot \tilde{a} + (\tilde{1} - \tilde{\alpha}) \cdot \tilde{b} \lesseqgtr \tilde{\alpha} \cdot \tilde{q} + (\tilde{1} - \tilde{\alpha}) \cdot \widetilde{w}$$

elde edilir. Ayrıca $\widetilde{K}$, $\tilde{Q}$'nun esnek konveks altuzayı olduğundan $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{q} + (\tilde{1} - \tilde{\alpha}) \cdot \widetilde{w} \in \widetilde{K}$'dır. Bundan başka $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{a} + (\tilde{1} - \tilde{\alpha}) \cdot \tilde{b} \in \widetilde{K_r}$'dir. Bu da $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{a} + (\tilde{1} - \tilde{\alpha}) \cdot \tilde{b} \in F_{\widetilde{K}}$ olduğunu gösterir. Şimdi $F_{\widetilde{K}}$'nin tam olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\tilde{a}_n \in F_{\widetilde{K}}$ ve $\tilde{a}_n \to \tilde{a} \in \tilde{Q}$ $(n \to \infty)$ olsun. Eğer $\tilde{a}_n \in F_{\widetilde{K}}$ ise en az bir $\tilde{q}_n \in \widetilde{K}$ vardır öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\widetilde{a_n} \lesseqgtr \widetilde{q_n} \tag{4.2.2}$$

dir. Diğer taraftan $\tilde{a}_n \to \tilde{a} \in \tilde{Q}$ ise $\forall \tilde{\varepsilon} \gneqq \tilde{0}$ için $\exists n \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > n_0$ için

$$\tilde{a}_n \lesseqgtr \tilde{a} + \tilde{a}_{1n}^{\varepsilon},\ \tilde{a} \lesseqgtr \tilde{a}_n + \tilde{a}_{2n}^{\varepsilon} \text{ and } \|\tilde{a}_{in}^{\varepsilon}\| \leqq \tilde{\varepsilon}\ (i = \{1,2\}) \tag{4.2.3}$$

dir. (4.2.2) ve (4.2.3)'den her $n \in \mathbb{N}$ için $\tilde{a} \lesseqgtr \tilde{q}_n + \tilde{a}_{2n}^{\varepsilon}$ ve $\|\tilde{a}_{2n}^{\varepsilon}\| \leqq \tilde{\varepsilon}$ elde edilir. Ayrıca Tanım 3.5.14'ten her $n \in \mathbb{N}$ için $\tilde{a} \lesseqgtr \tilde{q}_n$ olur. Şimdi $\tilde{a} \in \widetilde{K_r}$ olduğunu gösterelim.

$\tilde{Q}$ bir esnek Hilbert quasilineer uzay olduğundan ve (Bozkurt, 2020)'den $n \to \infty$ iken $-\tilde{a}_n \to -\tilde{a}$ ve $\tilde{a}_n - \tilde{a}_n \to \tilde{a} - \tilde{a}$ elde edilir. Buradan $\forall \tilde{\varepsilon} \gneqq \tilde{0}$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > n_0$ için

$$\tilde{a}_n - \tilde{a}_n \lesseqgtr \tilde{a} - \tilde{a} + \tilde{a}_{1n}^{\varepsilon}, \tilde{a} - \tilde{a} \lesseqgtr \tilde{a}_n - \tilde{a}_n + \tilde{a}_{2n}^{\varepsilon} \text{ ve } \|\tilde{a}_{in}^{\varepsilon}\| \leqq \tilde{\varepsilon}\ (i = \{1,2\})$$

olur. Buradan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\tilde{a}_n \in F_{\widetilde{K}}$ ve $\tilde{Q}$ bir esnek Hilbert quasilineer uzay olduğundan

$$\tilde{0} \precsim \tilde{a} - \tilde{a} + \tilde{a}_{1n}^{\varepsilon}, \tilde{a} - \tilde{a} \precsim \tilde{0} + \tilde{a}_{2n}^{\varepsilon} \text{ ve } \|\tilde{a}_{in}^{\varepsilon}\| \leqq \tilde{\varepsilon} \ (i = \{1,2\})$$

ve

$$\tilde{0} \precsim \tilde{a} - \tilde{a}, \tilde{a} - \tilde{a} \precsim \tilde{0}$$

elde edilir. (Bozkurt, 2020)'deki Tanım 4.1.4'den $\tilde{0} = \tilde{a} - \tilde{a}$ bulunur. Bu da bize $\tilde{a} \in \widetilde{K_r}$ olduğunu söyler. Böylece $F_{\tilde{K}}$'nin tam olduğu gösterilmiş olur.

Uyarı 4.2.2. Bir esnek Hilbert quasilineer uzayın alt uzayının zemini bu alt uzay tam olsun veya olmasın daima tamdır.

Teorem 4.2.7. $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer iç çarpım uzayı olsun. Her $\tilde{c} \in \tilde{Q}$ esnek quasi vektörü için $F_{\tilde{c}}$ kümesi kapalı ve sınırlıdır.

İspat. $(\tilde{d}_n) \in F_{\tilde{c}}$ ve $n \to \infty$ iken $\tilde{d}_n \to \tilde{d} \in \tilde{Q}$ olsun. $\tilde{d}_n \to \tilde{d}$ ise $\forall \tilde{\varepsilon} \succsim \tilde{0}$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > n_0$ için

$$\tilde{d}_n \precsim \tilde{d} + \tilde{d}_{1n}^{\varepsilon}, \tilde{d} \precsim \tilde{d}_n + \tilde{d}_{2n}^{\varepsilon}, \left\|\tilde{d}_{in}^{\varepsilon}\right\| \precsim \tilde{\varepsilon}^{1/2} \ (i = \{1,2\})$$

olur. $\tilde{d}_n \in F_{\tilde{c}}$ olduğundan her $n \in N$ için $\tilde{d}_n \precsim \tilde{c}$ olur. $\tilde{Q}$ bir esnek iç çarpım quasilineer uzay olduğundan

$$\tilde{d} \precsim \tilde{d}_n + \tilde{d}_{2n}^{\varepsilon} \text{ ve } \left\|\tilde{d}_{2n}^{\varepsilon}\right\|^2 = \left\|\langle \tilde{d}_{2n}^{\varepsilon}, \tilde{d}_{2n}^{\varepsilon} \rangle\right\| \precsim \tilde{\varepsilon} \text{ için } \tilde{d} \precsim \tilde{d}_n \precsim \tilde{c}$$

bulunur. Şimdi $\tilde{d} \in \tilde{Q}_r$ olduğunu gösterelim. Eğer $n \to \infty$ iken $\tilde{d}_n \to \tilde{d}$ ise $-\tilde{d}_n \to -\tilde{d}$'dur. Bu nedenle $\forall \tilde{\varepsilon} \succsim \tilde{0}$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > n_0$ için

$$\tilde{d}_n \precsim \tilde{d} + \tilde{d}_{1n}^{\varepsilon}, \tilde{d} \precsim \tilde{d}_n + \tilde{d}_{2n}^{\varepsilon}, \left\|\tilde{d}_{in}^{\varepsilon}\right\| \leqq \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2} \ (i = \{1,2\})$$

$$-\tilde{d}_n \precsim - \tilde{d} + \mathrm{e}_{1n}^{\varepsilon}, -\tilde{d} \precsim - \tilde{d}_n + \tilde{e}_{2n}^{\varepsilon}, \|\tilde{e}_{in}^{\varepsilon}\| \leqq \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2} \ (i = \{1,2\})$$

olur. Her $n \in N$ için $\widetilde{d_n} \in \tilde{Q}_r$ olduğundan $\widetilde{d_n} - \widetilde{d_n} = \tilde{0}$'dır. $\tilde{Q}$ bir esnek iç çarpım quasilineer uzay olduğundan

$\tilde{d}_n - \tilde{d}_n \precsim \tilde{d} - \tilde{d} + \tilde{d}_{1n}^{\varepsilon} + \tilde{e}_{1n}^{\varepsilon}$ ve $\tilde{d} - \tilde{d} \precsim \tilde{d}_n - \tilde{d}_n + \tilde{d}_{2n}^{\varepsilon} + \tilde{e}_{2n}^{\varepsilon}, \left\|\tilde{d}_{in}^{\varepsilon} + \tilde{e}_{in}^{\varepsilon}\right\| \leqq \varepsilon^{\frac{1}{2}}$
$(i = \{1,2\})$

bulunur. Tanım 3.3.4'den

$\tilde{0} \lessapprox \tilde{d} - \tilde{d} + \tilde{d}_{1n}^{\varepsilon} + \tilde{e}_{1n}^{\varepsilon}$ ve $\left\|\tilde{d}_{in}^{\varepsilon} + \tilde{e}_{in}^{\varepsilon}\right\|^2 = \left\|\left\langle \tilde{d}_{1n}^{\varepsilon} + \tilde{e}_{1n}^{\varepsilon}, \tilde{d}_{1n}^{\varepsilon} + \tilde{e}_{1n}^{\varepsilon}\right\rangle\right\|_{\Omega(\mathbb{R})} \lesseqgtr \varepsilon \Rightarrow$
$\tilde{0} \lessapprox \tilde{d} - \tilde{d}$

ve

$\tilde{d} - \tilde{d} \lessapprox \tilde{0} + \tilde{d}_{2n}^{\varepsilon} + \tilde{e}_{2n}^{\varepsilon}$ ve $\left\|\tilde{d}_{2n}^{\varepsilon} + \tilde{e}_{2n}^{\varepsilon}\right\|^2 = \left\|\left\langle \tilde{d}_{2n}^{\varepsilon} + \tilde{e}_{2n}^{\varepsilon}, \tilde{d}_{2n}^{\varepsilon} + \tilde{e}_{2n}^{\varepsilon}\right\rangle\right\|_{\Omega(\mathbb{R})} \lesseqgtr \varepsilon \Rightarrow \tilde{d} -$
$\tilde{d} \lessapprox \tilde{0}$

elde edilir. Böylece $\tilde{d} - \tilde{d} = \tilde{0}$ olur. Bu da bize $\tilde{d} \in \tilde{Q}_r$ olduğunu gösterir. Ayrıca her $\tilde{d} \in F_{\tilde{c}}$ ve $\tilde{d} \in \tilde{Q}_r$ için $\tilde{d} \lessapprox \tilde{c}$ olduğunu biliyoruz. $\tilde{Q}$ bir esnek iç çarpım quasilineer uzay olduğundan $\| \tilde{d} \| \leq \| \tilde{c} \|$ bu da bize $F_{\tilde{c}}$'nun sınırlılığını verir.

Teorem 4.2.8. Bir esnek iç çarpım quasilineer uzayının herhangi bir esnek quasilineer vektörünün zemini o uzayın alt uzayı olmayabilir. Ama bir esnek quasilineer elemanının zemininin ortogonal tümleyeni uzayın daima bir alt uzayıdır.

İspat. $\tilde{Q}$ bir esnek iç çarpım quasilineer uzay olsun. Bir $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ için $F_{\tilde{q}} = \{\tilde{a} \in \tilde{Q}_r : \tilde{a} \lessapprox \tilde{q}\}$'dir. Eğer $\tilde{a}, \tilde{b} \in F_{\tilde{q}}$ ise $\tilde{a} \lesseqgtr \tilde{q}$ ve $\tilde{b} \lessapprox \tilde{q}$ olur. $\tilde{Q}$ bir quasilineer uzay olduğundan $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ esnek skaleri için

$$\tilde{\alpha} \cdot \tilde{a} \lessapprox \tilde{\alpha} \cdot \tilde{q} \text{ ve } \tilde{\beta} \cdot \tilde{b} \lessapprox \tilde{\beta} \cdot \tilde{q}$$

olur. $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay olduğundan $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{a} + \tilde{\beta} \cdot \tilde{b} \lessapprox \tilde{\alpha} \cdot \tilde{q} + \tilde{\beta} \cdot \tilde{q}$ elde edilir. Fakat her $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ esnek skaleri için $\tilde{Q}$ bir esnek quasilineer uzay olduğundan $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{a} + \tilde{\beta} \cdot \tilde{b} \lessapprox \tilde{q}$ sağlanmayacağından $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{a} + \tilde{\beta} \cdot \tilde{b} \not\lessapprox \tilde{q}$ olur. Dolayısıyla $\tilde{Q}$'nun her esnek quasilineer vektörünün zemin kümesi her zaman alt uzay olmayabilir.

Şimdi $F_{\tilde{q}}^{\perp}$'nun $\tilde{Q}$ daima alt uzayı olduğunu gösterelim. $\tilde{c}, \tilde{d} \in F_{\tilde{q}}^{\perp}$ ve $\tilde{z} \in F_{\tilde{q}}$ olsun $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ esnek skalerleri için,

$$\begin{aligned} \| \langle \tilde{z}, \tilde{\alpha} \cdot \tilde{c} + \tilde{\beta} \cdot \tilde{d} \rangle \| &\lessapprox \| \langle \tilde{z}, \tilde{\alpha} \cdot \tilde{c} \rangle \| + \| \langle \tilde{z}, \tilde{\beta} \cdot \tilde{d} \rangle \| \\ &= \tilde{\alpha} \| \langle \tilde{z}, \tilde{c} \rangle \| + \tilde{\beta} \| \langle \tilde{z}, \tilde{d} \rangle \| \\ &= \tilde{0} \end{aligned}$$

buluruz. Bu da bize $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{c} + \tilde{\beta} \cdot \tilde{d} \in F_{\tilde{q}}^{\perp}$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $F_{\tilde{q}}$, $\tilde{Q}$'nun daima alt uzayıdır deriz.

Örnek 4.2.3. $\tilde{Q} = \widetilde{\Omega_C(\mathbb{R})}$ ve bir λ parametresi için $\tilde{q}(\lambda) = [1,3]$ olacak şekilde $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ esnek quasi vektörünü göz önüne alalım. $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2 \in F_{\tilde{q}}$ ve λ parametresi için, $\tilde{q}_1(\lambda) = \{1\}$ ve $\tilde{q}_2(\lambda) = \{3\}$ ise $\tilde{q}_1(\lambda) + \tilde{q}_2(\lambda) = \{4\}$ buluruz. Fakat $\{4\} \notin F_{\tilde{q}(\lambda)}$'dır. Dolayısıyla $F_{\tilde{q}}$, $\tilde{Q}$'nun alt uzayı değildir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Tezin 4.bölümünün 1.kısmında esnek iç çarpım quasilineer uzay kavramı tanımlanmış ve bu yeni kavram ile ilgili bazı tanım, teorem ve sonuçlar elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar 4.bölümde ayrıntılı olarak verilmiştir. Ayrıca quasilineer kavramlara özgü zemin kavramının esnek quasilineer uzaylardaki teorem ve sonuçları 4.bölümün 2.kısmında verilmiştir.

5.2. Öneriler

Esnek quasilineer iç çarpım uzayları ve bazı genelleştirmeleri isimli bu yüksek lisans çalışmamıza dayanarak lineer fonksiyonel analizdeki bazı temel teorem ve sonuçların esnek quasilineer iç çarpım uzaylarındaki karşılıkları incelenebilir. Ayrıca fonksiyonel analizde önemli bir yer tutan bazı önemli cebirsel kavramların esnek quasilineer uzaylar üzerindeki durumları incelenebilir.

KAYNAKLAR

Alefeld, G., & Mayer, G. (2000). Interval Analysis: Theory and Applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol:121, s.421-464.

Aseev, S. M. (1986). Quasilineer Operators and Their Application in The Theory of Multivalued Mappings. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Issue 2*, Vol:162, s.23-52.

Aygünoğlu, A., & Aygün, H. (2012). Some Notes on Soft Topological Spaces. *Neural Comput. Appl. Vol:21*, s.113-119.

Bhaskar, T., Lakshmikantham, V., & Vasundhara Devi, J. (2006). *Theory of Set Differential Equations in Metric Spaces.* Cambridge: Cambridge Scientific Publishers.

Bozkurt, H. (2016). Inner Product Quasilinear Spaces and Some Generalizations. PhD Thesis: İnönü Üniversity,Turkey.

Bozkurt, H. (2020). Soft Quasilinear Spaces and Soft Normed Quasilinear Spaces. *Adıyaman University Journel of Science*, 10(2), s.506-523.

Bozkurt, H., & Gönci, M. Ş. (Kabul Edildi). Soft Quasilinear Inner Product Spaces. *TWMS J. App. and Eng. Math. V.xx, N.xx, 20xx, pp. ...*

Bozkurt, H., & Yılmaz, Y. (2016). New Inner Product Quasilineer Spaces on Interval Numbers. *Journal of Function Spaces*, Article ID 2619271, 9 pages.

Bozkurt, H., & Yılmaz, Y. (2016)(a). Some New Results On Inner Product Quasilineer Spaces. *Cogent Mathematics, 3:1194801*, 10 pages.

Çakan, S. (2016). *Normlu Quasilineer Uzaylar Teorisine İlişkin Bazı Yeni Sonuçlar.* Malatya İnönü University.

Çakan, S., & Yılmaz, Y. (2015). Normed Proper Quasilineer Spaces. *Journal of Linear Science and Applications, Vol:8*, s.816-836.

Çakan, S., & Yılmaz, Y. (2015). Quasilineer Uzaylarda Alt ve Üst Yarı Baz Kavramları. *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 31(2)*, s.481-488.

Das, S., & Samanta, S. (2012). Soft Real Sets, Soft Real Numbers and Their Properties. *J. Fuzzy Math.*, Vol:20 No:3, s.551-576.

Das, S., & Samanta, S. (2013). On Soft Metric Space. *The Journal of Fuzzy Mathematics.* Vol:21 No:3, s.707-734.

Das, S., Samanta, S., & Majumdar, P. (2013). On Soft Linear Spaces and Soft Normed Linear Spaces. *Annals of Fuzzy Math and Inform. s.*91-109.

Debnath, L., & Mikusinski, P. (2005). *Introduction to Hilbert Spaces with Applications,.* USA: Elsevier Academic Press.

Demir, İ. (2016). Esnek ve Bulanık Esnek Kümelerin Düzgün ve Yakınlık Uzaylarına Yakınsaması. PhD Thesis: Düzce Üniversitesi, Türkiye.

Gönci, M. Ş., & Bozkurt, H. (2023). Some New Results on Soft Quasilinear Spaces. *Open J. Math. Sci. Vol:7*, s.118-126. Doi:10.30538/oms2023.0200.

Kreyszing, E. (1989). *Introductory Functional Analysis with Applications.* New York: John Wiley-Sons Inc.

Maddox, I. J. (1973). *Elements of Functional Analysis with Applications, John Wiley.* New York.

Molodtsov, D. (1999). Soft Set Theory-First Results. *Comput. Math. Appl. Vol:37*, s.19-31.

Wilansky, A. (1978). *Modern Methods in Topological Vector Spaces, McGraw-Hill Int. Book Comp.* New York.

Yılmaz, Y., Bozkurt, H., & Çakan, S. (2016). An Orthonormal Sets in Inner Product Quasilinear Spaces. *Creative Mathematics and Informatics*, 25 (2), s.237-247.
Yılmaz, Y., Çakan, S., & Aytekin, Ş. (2012). Topological Quasilinear Spaces. *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 951374, 10 pages.
Zadeh, L. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, Vol:8, s.338-353.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Mehmet Şirin GÖNCİ
Uyruğu	**:**	TC

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Üniversite	:	**Dicle Üniversitesi, Sur, Diyarbakır**	**2013**
Yüksek Lisans	:		
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2013-	MEB	Öğretmen

YAYINLAR

1- H. BOZKURT, M. Ş. GÖNCİ, Soft Quasilinear Inner Product Spaces, TWMS J. App. and Eng. Math. (Kabul Edildi)
2- M. Ş. GÖNCİ, H. BOZKURT Some New Results on Soft Quasilinear Spaces, Open J. Math. Sci., 7, 118-126, 2023. Doi:10.30538/oms2023.0200