

**EULER BETA FONKSİYONLARINI İÇEREN İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLERİ VE ORTALAMA EŞİTSİZLİKLER****GİZEM KOZAN****YÜKSEK LİSANS
MATEMATİK ANABİLİM DALI****DANIŞMAN
PROF. DR. MEHMET ZEKİ SARIKAYA****DÜZCE, 2023**

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

EULER BETA FONKSİYONLARINI İÇEREN İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLERİ VE ORTALAMA EŞİTSİZLİKLER

Gizem KOZAN tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Hüseyin BUDAK

Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Mehmet GÜMÜŞ

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 06/07/2023

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

6 Temmuz 2023

Gizem Kozan

TEŐEKKÖR

Yüksek lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA'ya en içten dileklerle teşekkür ederim.

Tez çalışma sürecinde deneyimlerini aktaran ve akademik olarak yol gösteren değerli hocalarım Doç. Dr. Hüseyin BUDAK'a, Dr. Öğr. Üyesi Tuba TUNÇ'a ve Dr. Öğr. Üyesi İzzettin DEMİR'e en içten duygularıyla teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek Lisans eğitimim boyunca 2211-Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı kapsamında sağladığı destekten ötürü TÜBİTAK Bilim İnsani Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkür ederim.

6 Temmuz 2023

Gizem Kozan

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ŞEKİL LİSTESİ	VI
SİMGELER	VII
ÖZET	VIII
ABSTRACT	IX
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER	6
2.1. BAZI TEMEL KAVRAMLAR.....	6
2.2. GAMMA VE BETA FONKSİYONLARI VE ÖZELLİKLERİ	10
2.3. BAZI TEMEL EŞİTSİZLİKLER	32
3. AĞIRLIKLIL JENSEN EŞİTSİZLİĞİ YARDIMIYLA ORTALAMA EŞİTSİZLİKLER	35
3.1. ORTALAMA İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ	38
4. EULER BETA FONKSİYONLARINI İÇEREN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ VE ORTALAMA EŞİTSİZLİKLER	45
4.1. EULER BETA FONKSİYONLARI İÇEREN HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ	49
4.2. EULER BETA FONKSİYONLARI İÇEREN YAMUK EŞİTSİZLİKLERİ	52
4.3. EULER BETA FONKSİYONLARI İÇEREN ORTA NOKTA EŞİTSİZLİKLERİ	57
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	61
6. KAYNAKLAR.....	62
ÖZGEÇMİŞ.....	67

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1 Konveks Küme	1
Şekil 2 Konveks Olmayan Küme.....	2
Şekil 3 Aralık Üzerinde Konveks Fonksiyon	2
Şekil 4 Lebesgue İntegralinin Gösterimi	9



SİMGELER

f'	f' fonksiyonun 1.dereceden türevi
B	Beta fonksiyonu
Γ	Gamma fonksiyonu
I	Reel sayılarda herhangi bir aralık
I°	I° aralığının içi
L_p	Lebesgue uzayı
$J_{a^+}^\alpha$	Sol Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
$J_{b^-}^\alpha$	Sağ Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi



ÖZET

EULER BETA FONKSİYONLARINI İÇEREN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ VE ORTALAMA EŞİTSİZLİKLER

Gizem KOZAN

Düzce Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

Aralık 2022, 66 sayfa

Bu tez çalışması Euler beta fonksiyonlarını içeren integral eşitsizlikleri ve ortalama eşitsizlikler üzerine olacaktır. Bu tez beş bölüm olarak hazırlanmış olup bu çalışmanın birinci bölümü giriş niteliğinde olup ikinci bölümde tezin hazırlanmasında kullanılan bazı tanım, teoremler ve önemli eşitsizlikler verilmiştir. Üçüncü bölümde ağırlıklı Jensen eşitsizliği yardımıyla ortalama eşitsizlikler ve bunun bir takım uygulamaları incelenmiştir. Dördüncü bölümde Euler beta fonksiyonlarını içeren integral eşitsizlikleri ve ortalama eşitsizlikler incelenmiştir. Tezin son kısmı olan beşinci bölümde ise bazı sonuçlar ispatlanmış ve sonraki çalışmalar için öneriler verilmiştir.

Anahtar sözcükler: Hermite-Hadamard eşitsizliği, Jensen eşitsizliği, Konveks fonksiyonlar, Midpoint eşitsizliği, Trapezoid eşitsizliği.

ABSTRACT

INTEGRAL INEQUALITIES INVOLVING EULER BETA FUNCTIONS AND MEAN INEQUALITIES

Gizem KOZAN

Düzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Master's Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

December 2022, 66 pages

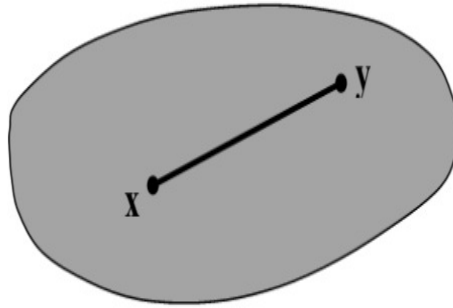
This thesis will be on integral inequalities and mean inequalities involving Euler beta functions. This thesis has been prepared in five parts, the first part of this study is introductory and in the second part some definitions, theorems and important inequalities used in the preparation of the thesis are given. In the third chapter, average inequalities and some applications of it are examined with the help of weighted Jensen inequality. In the fourth chapter, integral inequalities and mean inequalities including Euler beta functions are examined. In the fifth chapter, which is the last part of the thesis, some results are proved and suggestions for further studies are given.

Keywords: Convex functions, Hermite-Hadamard inequality, Jensen inequality, Midpoint inequality, Trapezoidal inequality.

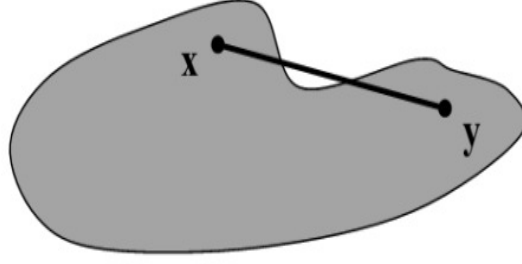
1. GİRİŞ

Konvekslik, bilinen bir kavram olmasına rağmen M.Ö. 250 yılında Archimedes'in ünlü π değerini hesaplamasına kadar uzanabilen tarihi bir öneme sahip olan bir kavramdır. Konveks fonksiyonların sistematik araştırmaları ise 19. yüzyılın sonlarında başlamış olsa da, 20. yüzyılın ortalarında matematiğin önemli bir alanı olarak kabul edilmeye başlanmıştır. Konvekslik, geometri, analiz, lineer cebir ve topoloji gibi farklı matematik alanlarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Ayrıca, sayı teorisi, klasik ekstremum problemleri, lineer programlama, oyun teorisi ve eşitsizlikler teorisi gibi çeşitli konularda da önemli bir rol oynamaktadır. Son yüzyılda yaşanan gelişmeler ve artan uygulamalarıyla birlikte, konvekslik matematiksel analizin merkezi alanlarından biri haline gelmiştir. Bu disiplin, matematiksel analizdeki temel konuları genişletmiş ve yeni uygulama alanları açmıştır. Konvekslik ve konveks fonksiyonlar, geometrik şekillerin ve matematiksel yapıların özelliklerini anlamak, en iyi yaklaşımı bulmak ve optimize etmek için kullanılan güçlü bir araçtır. Bu nedenle, konvekslik konusu, matematiğin çeşitli alanlarında temel bir rol oynamaktadır.

Tanım 1.1. (Konveks Küme) $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olsun. Eğer K kümesinin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası K kümesinin içinde kalıyorsa K ya konveks küme denir [1].



Şekil 1. Konveks Küme



Şekil 2. Konveks Olmayan Küme

x_1 ve x_2 noktalarını birleştiren doğru parçası

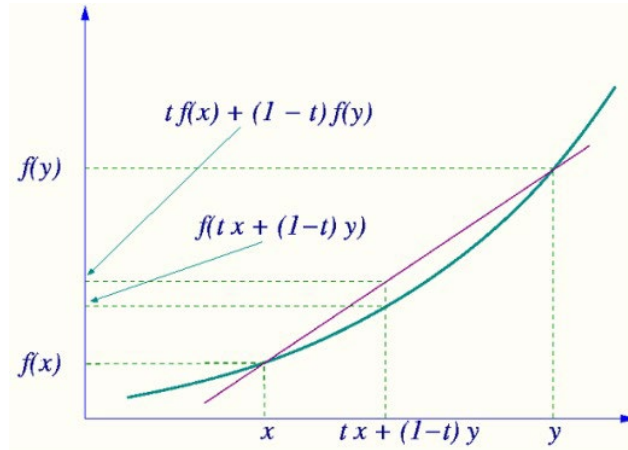
$$[x_1, x_2] = \{x: x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \quad \lambda \in [0,1]\}$$

şeklinde gösterilebileceğinden k cümlesinin konveksliği aşağıdaki şekilde de verilebilir.

Tanım 1.2. (Konveks Fonksiyon) Her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (1.1)$$

şartını sağlayan $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Geometrik olarak bu eşitsizlik, f fonksiyonunun grafiğinde kirişlerinin altından geçer anlamındadır (Bakınız Şekil 3) [2].



Şekil 3. Aralık Üzerinde Konveks Fonksiyon

Eşitsizlik teorisi, yaklaşım yöntemlerinin temellerini oluşturmada büyük öneme sahiptir. 19. yüzyılın sonlarından itibaren günümüze kadar matematik ve diğer bilim dallarında sayısız eşitsizlik keşfedilmiş, geliştirilmiş ve kullanılmıştır. Matematiksel eşitsizliklerin, matematiğin çeşitli dallarının yanı sıra diğer bilim dallarındaki yararlılığının daha da iyi anlaşılmasıyla, eşitsizlik teorisi, son yıllarda birçok araştırmacının dikkatini çekmiş ve yapılan yeni çalışmalarla bu teori sürekli gelişim göstermiştir. Birçok araştırmacıya göre

eşitsizlikleri formüller yığınından sistematik bir disipline dönüştürdüğü kabul edilen Hardy ve ark. tarafından 1934'te yayınlanan "Inequalities" kitabı bu alanda çalışan matematikçilere yararlı bir referans olmuştur [3]. Bu kitabın ardından, yayımlandıkları zamana kadar eşitsizlikler alanında yapılmış birçok çalışmayı derleyerek okuyucuya sunan Beckenbach ve Bellman'ın [4] de kaleme aldığı "Inequalities" kitabı ve Mitrovic'in [5] de belirttiği "Analytic Inequalities" kitabı araştırmacılar için önemli kaynak kitaplar arasında yerini almışlardır.

Eşitsizlik teorisi, matematiksel ekonomi, oyun teorisi, matematiksel programlama, olasılık ve istatistik gibi alanlarda da önemli bir çalışma konusu olmuş, böylece hızla büyüyen bir disiplin haline gelmiştir. Matematiksel analiz ve uygulamalarının çeşitli yönlerini etkileyen bu teori üzerine pek çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların birçoğu özellikle Jensen, Hermite-Hadamard, Cebyşev, Grüss, Ostrowski eşitsizlikleri üzerinde yoğunlaşmıştır. Bu eşitsizlikler ile ilgili günümüze kadar geçen sürede pek çok çalışma yapılmış, bu eşitsizliklerin birçok genelleştirmesi, iyileştirmeleri, uygulamaları araştırmacılar tarafından ispat edilmiştir.

Eşitsizlik teorisinde önemli bir yere sahip konulardan biri de konveks (dışbükey) fonksiyonlardır. Pecaric ve ark., [6]'te konveks fonksiyonlarla ilgili şöyle demiştir: "Ünlü Danimarkalı matematikçi Jensen tarafından 1905 ve 1906'da iki makalenin yayınlanmasından bu yana, konveks fonksiyonlar teorisi hızlı bir gelişme yaşadı. Bu, birkaç nedene bağlanabilir: İlk olarak, modern analizdeki birçok alan, doğrudan veya dolaylı olarak konveks fonksiyonların uygulamasını içerir; ikincisi, konveks fonksiyonlar eşitsizlik teorisi ile yakından ilişkilidir ve birçok önemli eşitsizlik konveks fonksiyonların uygulamalarının sonuçlarıdır." Bu çalışmada Pecaric ve ark. konveks fonksiyonlar teorisinde eşitsizliklerin oynadığı rolü vurgulamış ve konveks fonksiyonların tanımının da aslında bir eşitsizlik olduğuna dikkat çekmiştir [6].

Literatürde konveks fonksiyonlar için elde edilmiş olan yukarıda bahsedilen eşitsizlikler aşağıdaki şekilde verilebilir:

Teorem 1.1. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) $I, \mathbb{R}$ de bir aralık $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (1.2)$$

eşitsizlikleri sağlanır [7].

Teorem 1.2. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu, $[a, b]$ üzerinde konveks ise

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{b-a}{8} (|f'(a)| + |f'(b)|)$$

eşitsizliğine Midpoint Eşitsizliği denir [8].

Teorem 1.3. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu, $[a, b]$ üzerinde konveks ise

$$\left| \frac{f(b)-f(a)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right| \leq \frac{b-a}{8} (|f'(a)| + |f'(b)|)$$

eşitsizliğine Trapezoid Eşitsizliği denir [8].

Teorem 1.4. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (a, b) üzerinde dördüncü mertebeden türevi sürekli olan bir fonksiyon $\|f^{(4)}\|_\infty = \sup_{x \in (a,b)} |f^{(4)}(x)| < \infty$ olsun. Bu durumda

$$\left| \frac{1}{3} \left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{1}{2880} \|f^{(4)}\|_\infty (b-a)^4 \quad (1.3)$$

eşitsizliğine İntegraller için Simpson eşitsizliği denir [9].

Teorem 1.5. (İntegraller için Jensen Eşitsizliği) $f: I = [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$, I üzerinde konveks bir fonksiyon olsun. $h: I \rightarrow (0, \infty)$ ve $u: I \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ integrallenebilir fonksiyonlar ise bu durumda,

$$f\left(\frac{\int_{x_1}^{x_2} h(\xi)u(\xi)d\xi}{\int_{x_1}^{x_2} h(\xi)d\xi}\right) \leq \frac{\int_{x_1}^{x_2} h(\xi)f(u(\xi))d\xi}{\int_{x_1}^{x_2} h(\xi)d\xi} \quad (1.4)$$

eşitsizliğine integraller için Jensen eşitsizliği denir. f konkav fonksiyon olduğunda eşitsizlik yön değiştirir [10].

Analitik eşitsizlikler, matematik ve uygulamalı matematiğin çeşitli alanlarında önemli bir itici güç olarak kabul edilmektedir. Eşitsizliklerin incelenmesi, son yirmi yıldan fazla bir süredir matematiğin birçok farklı dalında önemli uygulamalara büyük katkılar sağladığını açıkça göstermektedir. Örneğin, Cebaysev, Grüss, Yamuk, Hadamard ve Jensen eşitsizlikleri gibi birçok önemli eşitsizlik, çeşitli uygulamalar için literatürde özel bir yer tutmaktadır. Bu eşitsizlikler, optimize edilen fonksiyonların sınırlarını belirlemede, veri analizinde, olasılık teorisi ve istatistikte, matematiksel fizikte ve ekonomide kullanılmaktadır. Eşitsizliklerin sağladığı analitik araçlar, problemlerin çözümünde ve sonuçların kanıtlanmasında önemli bir rol oynamaktadır. Bu nedenle, eşitsizliklerin matematiksel araştırmalarda ve gerçek dünya uygulamalarında önemli bir konu olduğunu söyleyebiliriz.

Tezimizin temel taşlarını oluşturan Hermite-Hadamard eşitsizliğinin birinci ve ikinci tarafı arasındaki ilişkiyi belirten sırasıyla Midpoint ve trapezoid eşitsizlikleri, Simpson eşitsizliği ve Jensen eşitsizliği ile ilgili olarak literatürde verilen ispat yönteminden farklı bir yöntem ile bu eşitsizliklerin yeni kestirimleri sunulacaktır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, tezde elde edilen sonuçlara ulaşmak için kullanılacak olan temel bilgiler verilecektir.

2.1. BAZI TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1. (Limit) $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve a da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, eğer $0 < |x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ kalacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x , a ya yaklaştığında f nin limiti L dir denir ve bu durum

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

ile gösterilir [1].

Tanım 2.2. (Süreklilik) $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. f fonksiyonu a üzerinde süreklidir ancak ve ancak $|x - a| < \delta$ olduğu zaman $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak biçimde her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Yani,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

ise f fonksiyonu a noktasında süreklidir. Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise bu fonksiyon A üzerinde süreklidir denir [1].

Teorem 2.1. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise sınırlıdır.

Tanım 2.3. (Mutlak Süreklilik) $i = 1, \dots, n$ olmak üzere $[a, b]$ aralığının ayrık açık alt aralıklarının birikimi $\{(a_i, b_i)\}_1^n$ için

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$$

olduğu zaman

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

olacak şekilde herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık gelen bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında mutlak süreklidir denir [2].

Tanım 2.4. (Türev) $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, x_0 , A nın bir yığılma noktası ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limiti veya $x = x_0 + h$ yazılmasıyla elde edilen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

limiti varsa f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilirdir denir ve bu limitin değeri f nin x_0 noktasındaki türevi adını alır. Bu türev $f'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$ veya $Df(x_0)$ sembollerinde biri ile gösterilir [1].

Tek değişkenli fonksiyonlarda türevlenebilme ve diferansiyellenebilme kavramları aynı anlama gelmektedir.

Şimdi, integral kavramını tanımlamadan önce bazı ön bilgiler verilecektir.

Tanım 2.5. $[a, b]$ kapalı aralığı, x – ekseninde

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Olacak şekilde $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ noktalarıyla n tane alt aralığa bölünsün. $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesine $[a, b]$ aralığının parçalanışı adı verilir. $k = 1, 2, 3, \dots, n$ olmak üzere $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ şeklinde tanımlansın. Δx_k değerlerinin en büyüğüne, P parçalanmasının normu denir ve $\|P\|$ ile gösterilir [2].

$f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı ve sınırlı olsun. $x \in [x_{k-1}, x_k]$ için $M_k = \sup f(x)$ ve $m_k = \inf f(x)$ olsun. Bu durumda, üst toplam

$$S = \bar{U}(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$$

şeklinde ve alt toplam

$$s = \bar{A}(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$$

şeklinde oluşturulsun. Bu durumda, $\Delta x_k > 0$ ve $M_k > m_k$ olduğundan

$$S = \ddot{U}(f, P) \geq A(f, P) = s$$

olur. Mümkmn olan bütün bölüntüler için

$$I = ebas(S) \text{ ve } J = eküs(s)$$

olsun. Bu şekilde her zaman var olan I ve J değerlerine, sırasıyla $[a, b]$ kapalı aralığında $f(x)$ fonksiyonunun üst ve alt integralleri denir.

Tanım 2.6. (Riemann İntegrali) $P, [a, b]$ aralığının bir parçalanması ve $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı ve sınırlı olsun. Eğer

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \ddot{U}(f, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(f, P) = J$$

oluyorsa f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında Riemann anlamında integrallenebilirdir denir. Bu durum

$$\int_a^b f(x) dx$$

şeklinde gösterilir [2].

Teorem 2.2. $[a, b]$ aralığında sürekli her fonksiyon bu aralıkta integrallenebilirdir.

Riemann integralinin yanı sıra Lebesgue integrali de matematik alanında önemli bir yere sahiptir.

$f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sınırlı ve ölçülebilir olsun. α ve β da $\alpha < f(x) < \beta$ şartını sağlayan iki gerçel sayı olarak verilsin. $[\alpha, \beta]$ aralığı, y –ekseni üzerinde

$$\alpha = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = \beta$$

olacak şekilde $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ noktalarıyla n tane alt aralığa bölünsün. Böylece, $[\alpha, \beta]$ aralığının bir parçalanışı elde edilir.

$k = 1, 2, \dots, n$ için $y_{k-1} \leq f(x) < y_k$ olacak şekilde E_k kümesi $[a, b]$ kapalı aralığındaki tüm x noktalarının kümesi olsun. Yani, E_k kümesi, $k = 1, 2, \dots, n$ sayıları için

$$E_k = \{x: y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda E_k kümelerinin her biri ölçülebilir ve ayrık kümelerdir. Üst ve alt toplamalar, sırasıyla

$$I = ebas(S) = \inf (S) \text{ ve } J = eküs(s) = \sup (s)$$

olarak tanımlansın. Bu şekilde verilen I ve J değerlerine, sırasıyla $[a, b]$ kapalı aralığında $f(x)$ fonksiyonunun üst ve alt integralleri denir. Tanımdan dolayı $I \leq J$ olur.

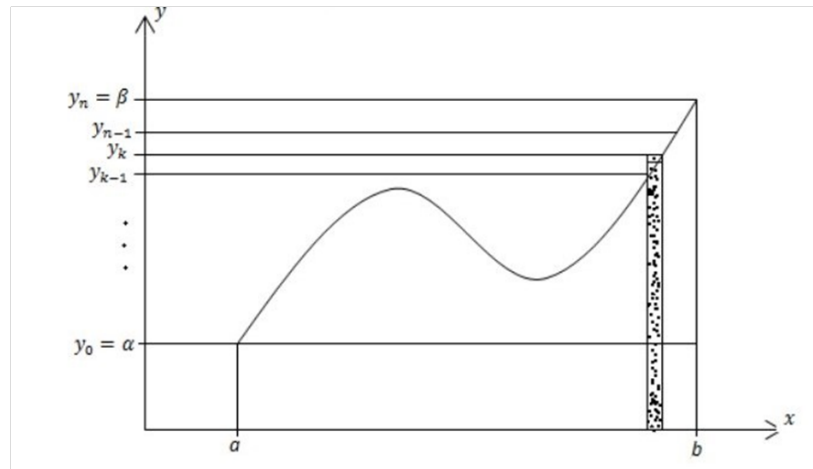
Tanım 2.7. (Lebesgue İntegrali) $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sınırlı ve ölçülebilir olsun. Eğer bütün parçalanmalar için $I = J$ veya

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n y_k m(E_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n y_{k-1} m(E_k) = J$$

oluyorsa $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilir denir. Bu durum, ortak bir işaret olarak

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{ve} \quad \int_a^b f(x) dx$$

şeklinde gösterilir (Bakınız Şekil 4) [2].



Şekil 4 Lebesgue İntegralinin Gösterimi

Teorem 2.3. Eğer $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında Riemann integrali varsa aynı fonksiyonun bu aralıkta Lebesgue integrali de vardır [2].

Teorem 2.3. ün tersi her zaman doğru değildir. Bu duruma en iyi örnek

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan Dirichlet fonksiyonudur.

Bu alt bölümde, son olarak konveks fonksiyon ile ilgili teoremlerden bahsedilecektir.

Teorem 2.4. K kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart her $x_1, x_2 \in K$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in K$$

olmasıdır [1].

Teorem 2.5. f diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere f nin konveks olması için gerek ve yeter şart f' fonksiyonunun artan olmasıdır [11].

Teorem 2.6. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun (a, b) üzerinde ikinci türevi mevcut olsun. Eğer her $x \in (a, b)$ için $f''(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konvektir [1].

Teorem 2.7. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise I° inde herhangi bir $[a, b]$ kapalı aralığında Lipschitz şartını sağlar. Bu nedenle f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında da mutlak sürekli ve I° nde süreklidir [11].

Teorem 2.8. $[a, b]$ kapalı aralığında konveks olan her fonksiyon bu aralıkta integrallenebilirdir[11].

2.2. GAMMA VE BETA FONKSİYONLARI VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde ilk olarak Gamma fonksiyonu tanımı ve ilgili temel bazı önemli özellikleri verilecektir.

Tanım 2.2.1. (Gamma Fonksiyonu) Gamma fonksiyonu sıfır ve negatif tam sayı olmayan her c kompleks sayısı için

$$\Gamma(c) = \int_0^{\infty} t^{c-1} e^{-t} dt \quad (2.1)$$

integrali ile tanımlanır [12]. Burada ifade edilen fonksiyon (integral):

- i) $0 < c < \infty$ için yakınsak
 - ii) $c = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$ için ıraksak olan bir fonksiyondur.
- k pozitif tam sayı olmak üzere, Gamma fonksiyonu için

$$G(c, k) = \int_0^k \left(1 - \frac{t}{k}\right)^k t^{c-1} dt, \quad R(c) > 0 \quad (2.2)$$

tanımlaması yapılır ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{k}\right)^k = e^{-t}$$

eşitliği kullanılırsa

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G(c, k) = G(c, \infty) = \int_0^{\infty} t^{c-1} e^{-t} dt$$

yazılır. (2.2) ifadesinde $\frac{t}{k} = u$ dönüşümü yapılırsa

$$G(c, k) = k^c \int_0^1 (1-u)^k u^{c-1} du$$

olur.

$$\frac{G(c, k)}{k^c} = \int_0^1 (1-u)^k u^{c-1} du$$

Bu integrale kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} \frac{G(c, k)}{k^c} &= (1-u)^k \frac{u^c}{c} \Big|_0^1 + \frac{k}{c} \int_0^1 (1-u)^{k-1} u^c du \\ &= \frac{k}{c} \int_0^1 (1-u)^{k-1} u^c du \end{aligned}$$

elde edilir. Bir kere daha kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\frac{G(c, k)}{k^c} = \frac{k(k-1)}{c(c+1)} \int_0^1 (1-u)^{k-2} u^{c+1} du$$

olur. Bulunan bu integrallere ardışık olarak kısmi integrasyon yeniden uygulanırsa

$$\begin{aligned} \frac{G(c, k)}{k^c} &= \frac{k(k-1)\dots 1}{c(c+1)\dots (c+k-1)} \int_0^1 u^{c+k-1} du \\ &= \frac{1.2.3\dots k}{c.(c+1)\dots (c+k)} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$G(c, k) = \frac{1.2.3\dots k}{c.(c+1)\dots (c+k)} k^c$$

eşitliği elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} G(c, k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1.2.3 \dots k}{c.(c+1) \dots (c+k)} k^c \\
&= \int_0^{\infty} t^{c-1} e^{-t} dt \\
&= \Gamma(c)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadede özel olarak $c = 1$ seçilirse,

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1.2 \dots k}{1.2 \dots (k+1)} k \\
&= 1
\end{aligned}$$

dır. Ayrıca, $c = 2$ seçilirse,

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1.2 \dots k}{2 \dots (k+2)} k^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

dır. $c = 3$ seçilirse,

$$\begin{aligned}
\Gamma(3) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1.2 \dots k}{3 \dots (k+3)} k^3 \\
&= 2
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde $c = c + 1$ yazarsak,

$$\Gamma(c+1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1.2 \dots k}{(c+1)(c+2) \dots (c+k+1)} k^{c+1}$$

olur. Bu ifadeyi c ile çarpıp bölersek,

$$\begin{aligned}
\Gamma(c+1) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \cdot c}{(c+k+1)} \cdot \frac{1.2 \dots k}{c(c+1) \dots (c+k)} k^c \\
&= c \cdot \Gamma(c)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece, bu ifadeler yardımıyla,

$$\Gamma(2) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2$$

⋮

$$\Gamma(c) = 1.2.3 \dots (c-1) = (c-1)!$$

eşitliği kolaylıkla elde edilir.

Lemma 2.2.1. (Gamma fonksiyonunun Weierstrass formu)

$$\frac{1}{\Gamma(c)} = c e^{ac} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{c}{k}\right) e^{-\frac{c}{k}}$$

dır [12]. Burada Euler sabiti

$$\alpha = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} - \log(p)\right) = 0.5772156649015328606\dots,$$

şeklindedir.

İspat.

$$\begin{aligned} \Gamma(c) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k! k^c}{c(c+1)\dots(c+k)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{c} \frac{k! k^c}{\prod_{m=1}^k (c+m)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{c} \frac{k! k^c}{\prod_{m=1}^k m \left(1 + \frac{c}{m}\right)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{c} \frac{k! k^c}{k! \prod_{m=1}^k \left(1 + \frac{c}{m}\right)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{c} \prod_{m=1}^k \left(1 + \frac{c}{m}\right)^{-1} k^c \end{aligned}$$

yazılır. Burada

$$k^{-c} = e^{(-\ln k)c}$$

şeklinde düzenlenirse

$$\frac{1}{\Gamma(c)} = c \lim_{k \rightarrow \infty} e^{(-\ln k)c} \prod_{m=1}^k \left(1 + \frac{c}{m}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi

$$e^{-\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{k}\right)c} = \prod_{m=1}^k e^{-\frac{c}{m}}$$

olup ifadenin sağ tarafı ile çarpılıp bölünürse

$$\frac{1}{\Gamma(c)} = c \lim_{k \rightarrow \infty} e^{\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} - \ln k\right)c} \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{m=1}^k \left(1 + \frac{c}{m}\right) e^{-\frac{c}{m}}$$

elde edilir. Burada

$$\alpha = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} - \log(p)\right)$$

olmasından dolayı,

$$\frac{1}{\Gamma(c)} = c e^{\alpha c} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{c}{m}\right) e^{-\frac{c}{m}}$$

bulunur.

Lemma 2.2.2. Gamma fonksiyonu yardımıyla

$$\Gamma(c)\Gamma(1-c) = \frac{\pi}{\sin(\pi c)}$$

özdeşliğini vardır [12].

İspat.

$$\frac{1}{\Gamma(c)} = c e^{\alpha c} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{c}{k}\right) e^{-\frac{c}{k}}$$

yazılır. Bu eşitlikte c yerine $-c$ yazılırsa

$$\frac{1}{\Gamma(-c)} = -c e^{-\alpha c} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{c}{k}\right) e^{\frac{c}{k}}$$

elde edilir. Bu iki ifade taraf tarafa çarpılırsa,

$$\frac{1}{\Gamma(c)\Gamma(-c)} = -c^2 \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{c^2}{k^2}\right)$$

bulunur. Bulunan bu ifadede $\Gamma(1-c) = -c\Gamma(-c)$ eşitliği kullanılacak olursa,

$$\frac{1}{\Gamma(c)\Gamma(-c)} = c \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{c^2}{k^2}\right)$$

ifadesi elde edilir. Şimdi

$$\frac{\sin(\pi c)}{\pi} = c \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{c^2}{k^2}\right)$$

eşitliğinden faydalanarak

$$\Gamma(c)\Gamma(1-c) = \frac{\pi}{\sin(\pi c)}$$

sonucuna ulaşılır.

Özellik Γ fonksiyonu $(0, +\infty)$ üzerinde her mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olup $\Gamma^{(k)}(c)$ türevi için

$$\begin{aligned} \Gamma^{(k)}(c) &= \frac{d^k \Gamma(c)}{dc^k} \\ &= \int_0^{\infty} t^{c-1} (\ln t)^k e^{-t} dt \end{aligned}$$

eşitliği vardır [12].

İspat. Γ fonksiyonunun bu özelliğini göstermek için (2.1) ile ifade edilen fonksiyonun c ye göre ardışık türevlerini almak yeterlidir.

$$\begin{aligned} \Gamma'(c) &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dc} (t^{c-1}) e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\infty} t^{c-1} \ln t e^{-t} dt \end{aligned}$$

benzer düşünceyle

$$\begin{aligned} \Gamma''(c) &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dc} (t^{c-1} \ln t) e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\infty} t^{c-1} \ln^2 t e^{-t} dt \\ &\vdots \\ \Gamma^{(n)}(c) &= \int_0^{\infty} t^{c-1} (\ln t)^n e^{-t} dt \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Daha önce elde edilen aşağıdaki özelliği Gamma fonksiyonunun integral gösteriminden faydalanarak tekrar elde edelim.

Özellik $c > 0$ için $\Gamma(c+1) = c\Gamma(c)$ dir [12].

İspat. Gamma fonksiyonu tanımından

$$\Gamma(c+1) = \int_0^{\infty} t^c e^{-t} dt$$

olup, bu integralde $u = t^c$ ve $dv = e^{-t} dt$ seçilerek kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$\begin{aligned}\Gamma(c+1) &= -t^c e^{-t} \Big|_0^{\infty} + c \int_0^{\infty} t^{c-1} e^{-t} dt \\ &= 0 + c \int_0^{\infty} t^{c-1} e^{-t} dt \\ &= c\Gamma(c)\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Özellik Her $c > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\Gamma(c+n) = (c+n-1)(c+n-2)\dots(c+1)c\Gamma(c)$$

dir [12].

İspat. Gamma fonksiyonuna ait bir önceki özellikten dolayı

$$\Gamma(c+1) = c\Gamma(c)$$

yazılır. Yine benzer şekilde aynı özellik dikkate alınırsa,

$$\Gamma(c+2) = (c+1)\Gamma(c+1) = (c+1)c\Gamma(c)$$

$$\Gamma(c+3) = (c+2)\Gamma(c+2) = (c+2)(c+1)c\Gamma(c)$$

$\vdots$

$$\begin{aligned}\Gamma(c+n) &= (c+n-1)\Gamma(c+n-1) \\ &= (c+n-1)(c+n-2)\dots(c+1)c\Gamma(c)\end{aligned}\tag{2.3}$$

eşitlikleri yazılır. Burada $c = 1$ seçildiğinde $\Gamma(c+1) = c!\Gamma(1)$ olduğu görülür. Burada $\Gamma(1)$ in eşitini elde edelim.

$$\Gamma(c) = \int_0^{\infty} t^{c-1} e^{-t} dt$$

Olup

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^{\infty} t^0 e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} dt \\ &= -e^{-t} \Big|_0^{\infty} \\ &= -e^{-\infty} + e^0 \\ &= 1\end{aligned}$$

yazılır. Dolayısıyla (2.3) eşitliğinden $c = 1$ için

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2)\dots 2.1 = n! \quad (2.4)$$

elde edilir. Şimdi ise (2.4) eşitliğinden oldukça önemli iki sonucu $n = 0$ ve $n = 1$ için yazalım.

$$\begin{aligned}n = 0 &\Rightarrow 0! = 1 = \Gamma(1) = 1 \\ n = 1 &\Rightarrow 1! = \Gamma(2) = (2-1)! = 1\end{aligned}$$

Buradan elde edilen eşitlikler yardımıyla aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned}(n-1)! &= \Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt, \quad n \in N \\ n! &= \Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt, \quad n \in N \cup \{0\}\end{aligned}$$

Özellik Gamma fonksiyonu yardımıyla

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}$$

dir [12].

İspat. Γ fonksiyonu yardımıyla (2.1) tanımında $c = \frac{1}{2}$ yazılırsa

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt$$

elde edilir. Bu son eşitlikte $t = y^2 \Rightarrow dt = 2y dy$ değişken değişimi uygulanırsa

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} (y^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-y^2} 2y dy \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy\end{aligned}$$

elde edilir. Buna denk olarak

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

yazarsak,

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$dx dy = r dr d\theta$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta$$

Burada $r^2 = u$ $2r dr = du$ dönüşümü yaparsak

$$\begin{aligned}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} d\theta \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \\ &= \pi\end{aligned}$$

olup,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

bulunur.

Tanım 2.2.2. (Beta Fonksiyonu)

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

integrali ile tanımlanan $\beta : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna Beta fonksiyonu veya birinci çeşit Euler İntegrali denir [12].

Yukarıda ifade edilen integral yani Beta fonksiyonu

- i. $m > 0$ ve $n > 0$ için yakınsak,
- ii. $m \leq 0$ ve $n \leq 0$ için ıraksaktır.

Lemma 2.2.3. Beta fonksiyonu için

$$\beta(m, n) = \beta(n, m)$$

dir. (Simetri özelliği) [12].

İspat. Beta fonksiyonu tanımından

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

yazılır, bu integralde $x = 1 - t$ $dx = -dt$ değişken değiştirmesi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \beta(m, n) &= - \int_1^0 t^{n-1} (1-t)^{m-1} dt \\ &= \beta(n, m) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Lemma 2.2.4. Beta fonksiyonu,

$$m > 1 \text{ için, } \beta(m, n) = \frac{m-1}{m+n-1} \beta(m-1, n)$$

ve

$$n > 1 \text{ için, } \beta(m, n) = \frac{n-1}{m+n-1} \beta(m, n-1)$$

dir [12].

İspat. Yine

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

integralinde $u = x^{m-1} \Rightarrow du = (m-1)u^{m-2} dx$ ve $dv = (1-x)^{n-1} dx \Rightarrow v = -\frac{(1-x)^n}{n}$ olmak üzere kısmi integrasyon metoduna geçilirse,

$$\begin{aligned} \beta(m, n) &= \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx \\ &= -x^{m-1} \frac{(1-x)^n}{n} \Big|_0^1 + \frac{m-1}{n} \int_0^1 x^{m-2} (1-x)^n dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{m-1}{n} \int_0^1 x^{m-2} (1-x)^{n-1} (1-x) dx \\
&= \frac{m-1}{n} \int_0^1 x^{m-2} ((1-x)^{n-1} - x(1-x)^{n-1}) dx \\
&= \frac{m-1}{n} \int_0^1 x^{m-2} (1-x)^{n-1} dx - \frac{m-1}{n} \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx
\end{aligned}$$

olur, buradan da

$$\begin{aligned}
\beta(m, n) &= \frac{m-1}{n} \beta(m-1, n) - \frac{m-1}{n} \beta(m, n) \\
\left(1 + \frac{m-1}{n}\right) \beta(m, n) &= \frac{m-1}{n} \beta(m-1, n) \\
\beta(m, n) &= \frac{m-1}{m+n-1} \beta(m-1, n)
\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlik ve $\beta(m, n) = \beta(n, m)$ şeklinde yer değiştirme özelliği göz önüne alındığında $n > 1$ için

$$\beta(m, n) = \frac{n-1}{m+n-1} \beta(m, n-1)$$

eşitliği vardır.

İspat. İlk olarak

$$\begin{aligned}
\beta(m, n) &= \beta(n, m) \\
\beta(m, n) &= \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{m-1} dx
\end{aligned}$$

yazılır. Burada, $u = x^{n-1} \Rightarrow du = (n-1)x^{n-2}dx$ ve $dv = (1-x)^{m-1}dx \Rightarrow v = -\frac{(1-x)^m}{m}$ olmak üzere kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\beta(n, m) &= \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{m-1} dx \\
&= -x^{n-1} \frac{(1-x)^m}{m} \Big|_0^1 + \frac{n-1}{m} \int_0^1 x^{n-2} (1-x)^m dx \\
&= \frac{n-1}{m} \int_0^1 x^{n-2} (1-x)^{m-1} (1-x) dx \\
&= \frac{n-1}{m} \int_0^1 x^{n-2} [(1-x)^{m-1} - x(1-x)^{m-1}] dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n-1}{m} \int_0^1 x^{n-2} (1-x)^{m-1} dx - \frac{n-1}{m} \int_0^1 x^{n-2} x (1-x)^{m-1} dx \\
&= \frac{n-1}{m} \int_0^1 x^{n-2} (1-x)^{m-1} dx - \frac{n-1}{m} \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{m-1} dx
\end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{aligned}
\beta(n, m) &= \frac{n-1}{m} \beta(n-1, m) - \frac{n-1}{m} \beta(n, m) \\
\beta(n, m) + \frac{n-1}{m} \beta(n, m) &= \frac{n-1}{m} \beta(n-1, m) \\
\frac{m+n-1}{m} \beta(n, m) &= \frac{n-1}{m} \beta(n-1, m) \\
\beta(n, m) &= \frac{n-1}{m+n-1} \beta(n-1, m)
\end{aligned}$$

dır. Elde edilen bu eşitlikte n yerine $k \in N$ doğal sayısı yazılırsa

$$\begin{aligned}
\beta(m, k) &= \frac{k-1}{m+k-1} \beta(m, k-1) \\
&= \frac{k-1}{m+k-1} \frac{k-2}{m+k-2} \beta(m, k-2) \\
&\dots \\
&= \frac{(k-1)(k-2)\dots(k-(k-1))}{(m+k-1)(m+k-2)\dots(m+2)(m+1)} \beta(m, 1)
\end{aligned}$$

olacağı açıktır. Burada

$$\beta(m, 1) = \int_0^1 x^{m-1} dx = \frac{1}{m}$$

olduğundan

$$\beta(m, k) = \frac{(n-1)(n-2)\dots 2.1}{(m+k-1)(m+k-2)\dots(m+2)(m+1)m}$$

yazılır. Burada m yerine $l \in N$ doğal sayısı yazılırsa

$$\beta(l, k) = \frac{(k-1)!}{l(l+1)\dots(l+k-1)}$$

Burada

$$l(l+1)\dots(l+k-1) = \frac{(l+k-1)!}{(l-1)!}$$

olduğunu düşünürsek,

$$\beta(l, k) = \frac{(k-1)!(l-1)!}{(l+k-1)!}$$

olacaktır.

Lemma 2.2.5. $\beta(m, n)$ fonksiyonu için

$$\beta(m, n) = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$$

eşitliği vardır [12].

İspat.

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$$

fonksiyonunda $x = \frac{t}{1+t}$ ve $dx = \frac{1}{(1+t)^2} dt$, $1-x = \frac{1}{1+t}$ dönüşümleri yardımı ile

$$\begin{aligned} \beta(m, n) &= \int_0^\infty \left(\frac{t}{1+t}\right)^{m-1} \left(\frac{1}{1+t}\right)^{n-1} \frac{dt}{(1+t)^2} \\ &= \int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{(1+t)^{m+n}} dt \end{aligned}$$

olacaktır. Elde edilen bu son eşitlikte $0 < m < 1$ olmak üzere n yerine $1-m$ yazılırsa,

$$\beta(m, 1-m) = \int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{1+t} dt$$

integral formülü elde edilir.

Lemma 2.2.6. $\forall m, n > 0$ için

$$\beta(m, n) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}(x) \cos^{2n-1}(x) dx$$

dir [12].

İspat.

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$$

olup, bu ifadede $x = \sin^2(t) \Rightarrow dx = 2 \sin(t) \cos(t) dt$ dönüşümü yapılırsa

$$x = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

olacağından

$$\begin{aligned}\beta(m, n) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-2}(t) \cos^{2n-2}(t) 2 \sin(t) \cos(t) dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}(t) \cos^{2n-1}(t) dt\end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 2.2.7. Gamma ve Beta fonksiyonlar arasında

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

eşitliği vardır [12].

İspat.

$$\Gamma(m) = \int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx$$

integralinde $x = zt$ dönüşümü yapıldığında $dx = t dz$ olup,

$$\begin{aligned}\Gamma(m) &= \int_0^{\infty} (zt)^{m-1} e^{-zt} t dz \\ &= \int_0^{\infty} z^{m-1} t^m e^{-zt} dz\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen bu son eşitlikte m yerine $m+n$ ve t yerine $t+1$ olarak seçilirse,

$$\Gamma(m+n) = \int_0^{\infty} z^{m+n-1} (t+1)^{m+n} e^{-z(t+1)} dz$$

olup

$$\frac{\Gamma(m+n)}{(t+1)^{m+n}} = \int_0^{\infty} z^{m+n-1} e^{-zt} e^{-z} dz$$

yazılır. Bu eşitliğin her iki yanı t^{m-1} ile çarpılıp $(0, \infty)$ aralığı üzerinden integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}\Gamma(m+n) \int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{(1+t)^{m+n}} dt &= \int_0^\infty t^{m-1} \left(\int_0^\infty z^{m+n-1} e^{-zt} e^{-z} dz \right) dt \\ \Gamma(m+n) \beta(m, n) &= \int_0^\infty z^{m+n-1} e^{-z} \left(\int_0^\infty t^{m-1} e^{-zt} dt \right) dz\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $\int_0^\infty t^{m-1} e^{-zt} dt$ integralinde $u = zt$ ve $du = zdt$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned}\Gamma(m+n) \beta(m, n) &= \int_0^\infty z^{m+n-1} e^{-z} \left(\int_0^\infty \left(\frac{u}{z} \right)^{m-1} e^u \frac{du}{z} \right) dz \\ &= \int_0^\infty z^{m+n-1} e^{-z} z^{-m} \left(\int_0^\infty u^{m-1} e^{-u} du \right) dz \\ &= \Gamma(m) \int_0^\infty z^{n-1} e^{-z} dz \\ &= \Gamma(m) \Gamma(n)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 2.2.1. (Legendre Katlama Bağıntısı) $\forall c \notin \left\{ -\frac{n}{2} : n \in N \right\}$ olmak üzere, Gamma fonksiyonu için Legendre formülü

$$\Gamma(2c) = \frac{2^{2c-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(c) \Gamma\left(c + \frac{1}{2}\right)$$

dir [12].

İspat. Beta fonksiyonunun,

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

eşitliğinde özel olarak $m = n = c$ seçilirse

$$\frac{\Gamma(c) \Gamma(c)}{\Gamma(2c)} = \int_0^1 x^{c-1} (1-x)^{c-1} dx$$

olur. Elde edilen bu integralde $x = \frac{1+u}{2}$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(c)\Gamma(c)}{\Gamma(2c)} &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1+u}{2}\right)^{c-1} \left(1 - \frac{1+u}{2}\right)^{c-1} \frac{1}{2} du \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+u}{2}\right)^{c-1} \left(\frac{1-u}{2}\right)^{c-1} du \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-u^2}{4}\right)^{c-1} du \\
&= \frac{1}{2^{2c-1}} \int_{-1}^1 (1-u^2)^{c-1} du \\
&= 2^{1-2c} \left(2 \int_0^1 (1-u^2)^{c-1} du \right) \tag{2.5}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan bu son eştlikteki integral için

$$\beta(m, n) = 2 \int_0^1 u^{2m-1} (1-u^2)^{n-1} du$$

eştliği yardımıyla

$$\beta(m, n) = 2 \int_0^1 u^{2m-1} (1-u^2)^{n-1} du = 2 \int_0^1 u^0 (1-u^2)^{c-1} du = \beta\left(\frac{1}{2}, c\right) \tag{2.6}$$

yazılır. (2.6) ifadesi (2.5) de yerine yazılırsa,

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(c)}{\Gamma(2c)} = 2^{1-2c} \beta\left(\frac{1}{2}, c\right)$$

elde edilir. Buradan da

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(c)}{\Gamma(2c)} = 2^{1-2c} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(c)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + c\right)}$$

yazılır. Burada $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\Gamma(2c) = \frac{2^{2c-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(c) \Gamma\left(\frac{1}{2} + c\right)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

Özellik Aşağıdaki eşitliğin doğru olduğunu gösteriniz.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \, d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$$

[12]

Çözüm. Beta fonksiyonunun trigonometrik fonksiyon cinsinden tanımı,

$$\beta(m, n) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta \, d\theta$$

olup,

$$2m - 1 = p \Rightarrow m = \frac{p+1}{2}$$

$$2n - 1 = 0 \Rightarrow n = \frac{1}{2}$$

dönüşümü yardımıyla,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta \, d\theta &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde,

$$2m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$2n - 1 = q \Rightarrow n = \frac{q+1}{2}$$

dönüşümü yapılırsa

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$$

yazılır.

Özellik Beta fonksiyonu yardımıyla

$$\int_a^b (b-x)^{m-1} (x-a)^{n-1} dx, m, n > 0, b > 0$$

integralinin eşitini bulunuz [12].

Çözüm.

$$\int_a^b (b-x)^{m-1} (x-a)^{n-1} dx$$

integralinde $x = a + (b-a)t$ ve $dx = (b-a)dt$ dönüşümü yardımıyla

$$x = a \Rightarrow t = 0$$

$$x = b \Rightarrow t = 1$$

sınır değişimleri altında

$$\begin{aligned} & \int_a^b (b-x)^{m-1} (x-a)^{n-1} dx \\ &= \int_0^1 (b-a-(b-a)t)^{m-1} (a+(b-a)t-a)^{n-1} (b-a) dt \\ &= \int_0^1 (b-a)^{m-1} (1-t)^{m-1} (b-a)^{n-1} t^{n-1} (b-a) dt \\ &= (b-a)^{m+n-1} \int_0^1 t^{n-1} (1-t)^{m-1} dt \\ &= (b-a)^{m+n-1} \beta(n, m) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Tanım 2.2.3. (Laplace dönüşümü ve özellikleri) $f(t), t \geq 0$ ın pozitif değerleri için tanımlı t reel değişkeninin bir fonksiyonu olsun. s reel veya kompleks bir parametre olmak üzere, t reel değişkeninin bir e^{-st} fonksiyonu yardımıyla,

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

integrali var olacak şekilde s parametresi için bir değer bulmak mümkün oluyorsa bu integrale $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir. Bu dönüşüm $\mathcal{L}\{f(t)\}$ veya $F(s)$ ifadeleri ile gösterilir. Bu da,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

şeklinde yazılabilir [12].

Laplace dönüşümü, matematik, fizik, mekanik, mühendislik, tıp ve diğer bilim alanlarında yaygın olarak kullanılan önemli bir integral dönüşüm yöntemidir. Bu yöntem, diferansiyel denklemlerin çözümünde büyük kolaylıklar sağlamasıyla beraber, fiziksel denklemlerin matematiksel çözümlerinde de kullanılabilen bir yöntemdir.

Laplace dönüşümü çeşitli özelliklere sahiptir ve matematikte bulunan farklı özellikleri içermektedir. Bu dönüşümün birleşme özelliği, farklı fonksiyonların Laplace dönüşümlerinin toplamının Laplace dönüşümüne eşit olmasıdır. Dağılma özelliği ise bir fonksiyonun zaman ölçeğine göre gerçekleşen genişlemesinin Laplace dönüşümünde sadece çarpan faktörü ile ifade edilmesidir. Ayrıca, Laplace dönüşümü ile toplama üzerine dağılma özelliği de geçerlidir, yani bir fonksiyonun toplamının Laplace dönüşümü, bu fonksiyonların Laplace dönüşümlerinin toplamına eşittir.

Laplace dönüşümü, bir fonksiyonu farklı bir düzleme dönüştürerek analiz etme yeteneği sağlar. Bu dönüşüm, diferansiyel denklemleri çözme sürecini basitleştirirken, zaman alanındaki problemleri frekans alanına taşıyarak daha kolay analiz imkanı sunar. Laplace dönüşümü, özellikle lineer sistemlerin çözümünde ve sinyallerin frekans analizinde sıklıkla kullanılır.

Laplace dönüşümü, geniş bir uygulama alanına sahip olan güçlü bir matematiksel araçtır ve farklı bilim dallarında önemli bir rol oynar. Bu dönüşüm, elektrik devrelerinin analizi, kontrol sistemleri, sinyal işleme, ısı transferi, akışkanlar mekaniği ve tıbbi görüntüleme gibi birçok alanda kullanılır.

$$f(t) * g(t) = \int_0^t F(\tau)G(\tau - t)dt$$

denklemini,

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s) * G(s)$$

denkleminin Laplace dönüşümü uygulanmış hali olarak verilmektedir.

Laplace dönüşümü $\mathcal{L}\{f(t)\}$, diferansiyel denklemleri çözmek için çok yararlı olan bir integral dönüşümüdür.

$f(t)$ fonksiyonunun n . mertebeden türevinin Laplace dönüşümü aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(t)|_{t=0} \quad (2.7)$$

burada n bir tamsayıdır.

Bu özellik, Laplace dönüşümünü belirli türdeki diferansiyel denklemlere uyguladığımızda, onlar, çoğu zaman çözmesi çok daha kolay olan cebirsel denklemlere etkili bir şekilde dönüştürdüğü anlamına gelir.

Örnek Başlangıç koşullar $y(0) = 0$ ve $y'(0) = 1$ olan $y'' - 2y' + 2y = e^{-t}$ diferansiyel denklemini çözelim. (2.7) denklemi kullanılarak Laplace dönüşümü alırsa,

$$(s^2 F(s) - sy(0) - y'(0)) - 2(sF(s) - y(0)) + 2(F(s)) = \frac{1}{s+1}$$

$$F(s)(s^2 - 2s + 2) + y(0)(-s - 3) - y'(0) = \frac{1}{s+1}$$

olur. Böylece

$$F(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s^2-2s+2)}$$

elde edilir. Buradan da

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+1)(s^2-2s+2)}\right\}$$

yazılır. Gerekli hesaplamalar yapılırsa;

$$y = \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{1}{5}e^t \cos t + \frac{7}{5}e^t \sin t$$

sonucu elde edilir.

Tanım 2.2.4.(Pochhammer Sembolü) c reel veya kompleks bir sayı, n sıfır ya da pozitif tamsayı olmak üzere $(c)_n$ ifadesi

$$(c)_n = c(c+1) \dots (c+n-1) \quad (2.8)$$

olarak tanımlanır. Bu ifade Pochhammer sembolü olarak bilinir [12].

Özellik (2.8) eşitliği için

$$(c)_0 = 1$$

ve

$$(1)_n = n!$$

özellikleri sağlanır. Bu ifadelerin ispatları aşağıdaki lemma da verilmiştir.

Binom katsayıları ile Pochhammer sembolü arasındaki ilişki,

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{(-1)^n (-\alpha)_n}{n!} = \frac{(-1)^{n-1} \alpha \Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha) \Gamma(n+1)}$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak $\alpha = m$, $m = 1, 2, \dots$ seçilirse, $m \geq n$ için

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n! (m-n)!}$$

olur. Ayrıca

$$(c)_n = (-1)^n (1-n-c)_n$$

olur. Şimdi Pochhammer sembolünün Gamma fonksiyonuyla ilişkisini veren bir Lemma verelim.

Lemma 2.2.8. $(c)_n$ Pochhammer sembolü için;

$$(c)_n = \frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)} \quad (2.9)$$

ve

$$(c)_{n+1} = c(c+1)_n \quad (2.10)$$

özellikleri vardır [12].

İspat. Γ fonksiyonunun

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

özellığı gereğince

$$\begin{aligned} \Gamma(c+n) &= \Gamma(c+n-1+1) \\ &= (c+n-1)\Gamma(c+n-1) \\ &= (c+n-1)(c+n-2)\Gamma(c+n-2) \\ &\quad \vdots \\ &= (c+n-1)(c+n-2)(c+n-3) \dots (c+1)c\Gamma(c) \end{aligned}$$

eşitlığı yazılır. Bu eşitlikte (2.8) eşitlığı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \Gamma(c+n) &= (c)_n \Gamma(c) \\ (c)_n &= \frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)} \end{aligned}$$

olarak yazılır. (2.9) eşitliğinde n yerine $n+1$ yazılırsa;

$$\begin{aligned} (c)_{n+1} &= \frac{\Gamma(c+n+1)}{\Gamma(c)} \\ &= \frac{c\Gamma((c+1)+n)}{c\Gamma(c)} \\ &= c \frac{\Gamma(c+1+n)}{\Gamma(c+1)} \\ &= c(c+1)_n \end{aligned}$$

olur. Bu da Lemmanın ispatıdır. Şayet buradaki (2.9) ve (2.10) eşitliklerinde özel olarak $n = 0$ seçilirse,

$$\begin{aligned} (c)_0 &= 1 \\ (c)_1 &= c(c+1)_0 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca (2.9) eşitliğinde özel olarak $c = 1$ seçilirse,

$$(1)_n = \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1)} = n!$$

elde edilir.

2.3. BAZI TEMEL EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde, çalışma boyunca kullanılacak olan bazı temel eşitsizliklerden bahsedilecektir.

Teorem 2.3.1 (Young Eşitsizliği) $a, b \geq 0$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olacak şekilde $1 < p, q < \infty$ olsun. Bu durumda,

$$ab < \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

eşitsizliğine Young Eşitsizliği denir [11].

Teorem 2.3.2 (Hölder Eşitsizliği) $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların n – lisi olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere,

(a) $p > 1$ ise

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

(b) $p < 0$ veya $q < 0$ ise

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \geq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri sağlanır [13]. Özel olarak $p = q = 2$ seçilirse Cauchy-Buniakowsky Schwartz Eşitsizliği elde edilir.

Young Eşitsizliği kullanılırsa Hölder Eşitsizliğini ispatlamak oldukça kolaydır.

Teorem 2.3.3 (İntegraller için Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Aynı

zamanda, f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar olsun. Eğer $|f|^p$ ve $|g|^q$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında integrallenebilir ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir [13].

Ayrıca, Hölder eşitsizliğinin özel bir sonucu olarak verilen Power Mean Eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

Teorem 2.3.4 (Power Mean Eşitsizliği) $q \geq 1$ olsun. Aynı zamanda, f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar olsun. Eğer $|f|^p$ ve $|g|^q$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında integrallenebilir ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır [13].

Teorem 2.3.5 (İntegraller için Üçgen Eşitsizliği) f , $[a, b]$ aralığında integrallenebilir olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

eşitsizliği sağlanır [1].

Teorem 2.3.6 $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde ikinci mertebeden türevlenebilir olsun. Eğer $f'' \in L[a, b]$ ve $|f''|$ fonksiyonu, $[a, b]$ üzerinde konveks ise

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{24} \left(\frac{|f''(a)| + |f''(b)|}{2} \right)$$

eşitsizliği geçerlidir [14].

Teorem 2.3.7 $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde n . mertebeden türevlenebilir olsun. Eğer $n \geq 1$ olmak üzere $f^{(n)} \in L[a, b]$ ve $|f^{(n)}|$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde konveks ise

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^{k+1} [1 + (-1)^k]}{2^{k+1} (k+1)!} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) - \int_a^b f(t) dt \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^n (n+1)!} \left[\frac{\|f^{(n)}(a)\| + \|f^{(n)}(b)\|}{2} \right]$$

eşitsizliği sağlanır [15].

Teorem 2.3.8 (Jensen Eşitsizliği) I , reel sayılarda bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks olsun. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n (n \geq 2)$, $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ pozitif sıralı n li (yani $p_i \geq 0$) ve $P_k = \sum_{i=1}^k p_i (k = 1, 2, \dots, n)$ ise

$$f \left(\frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^k p_i x_i \right) \leq \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^k p_i f(x_i) \quad (2.11)$$

Eşitsizliğine Jensen eşitsizliği denir. f kesin konveks ise (2.11) eşitsizliği $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ dışında kesin küçüktür [16]

3. AĞIRLIKLIL JENSEN EŞİTSİZLİĞİ YARDIMIYLA ORTALAMA EŞİTSİZLİKLER

Jensen eşitsizliklerinin [19], [22] optimizasyonda (bakınız, ör., [20]), olasılık teorisinde (bakınız, ör., [21]) ve matematiğin birçok alanında önemli bir rol oynadığı bilinmektedir. Ayrıca, Jensen eşitsizliği, yıllar içinde, ölçülebilir uzaylar ve özellikle olasılık uzayları gibi çeşitli bağlamlarda artan sayıda yeni versiyonlara sahiptir [18]. Jensen eşitsizliği; $f : (a, b) \rightarrow R$ konveks bir fonksiyon ve $n \in N$, $r_1 + r_2 + \dots + r_n = 1$ olacak şekilde $r_1, r_2, \dots, r_n \in (0,1)$ olsun. O halde $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ için

$$f(r_1x_1 + r_2x_2 + \dots + r_nx_n) \leq r_1f(x_1) + r_2f(x_2) + \dots + r_nf(x_n)$$

olarak bilinmektedir. Bu eşitsizliğin ağırlıklı versiyonu ise $f : I \rightarrow R$ konveks bir fonksiyon, $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ ve $m_1 + m_2 + \dots + m_n > 0$ olacak şekilde $m_1, m_2, \dots, m_n \geq 0$ reel sayılar olsun. O halde

$$f\left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}\right) \leq \frac{m_1f(x_1) + m_2f(x_2) + \dots + m_nf(x_n)}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

Jensen eşitsizlikleri literatürde önemli bir yere sahip olduğu bilinmektedir. Öyle ki bu eşitsizlikler yardımıyla Aritmetik-Geometrik Ortalama (AO-GO), Cauchy-Schwarz, Young, Hölder ve Minkowski gibi literatürde çokça kullanılan bu eşitsizliklerin bazılarını kolayca elde edilebildiğini aşağıdaki fonksiyon seçimleri ile kolayca görülmektedir.

a) $f(x) = -\ln x$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığı üzerinde konveks fonksiyon olduğunda $r_1 = r_2 = \dots = r_n = \frac{1}{n}$ ve $x_i \in (0, \infty)$, $i = 1, 2, \dots, n$ seçilmesi ile Jensen eşitsizliğini uygularsak

$$-\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq -\left(\frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n}{n}\right)$$

olup gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

yani

$$GO \leq AO$$

bulunur.

b) $f(x) = x^2$ fonksiyonu R konveks fonksiyon olduğunda ağırlıklı Jensen eşitsizliğini uygularsak

$$\left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \right)^2 \leq \frac{m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + \dots + m_n x_n^2}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

olup burada $m_i = b_i^2$ ve $x_i = \frac{a_i}{b_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ seçilmesi ile

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

şeklinde Cauchy-Schwarz eşitsizliği bulunur.

c) $f(x) = e^x$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında konveks fonksiyon olduğunda $r_1 + r_2 = 1$ olacak şekilde $r_1 = \frac{1}{p}$, $r_2 = \frac{1}{q}$ ve $x_1 = p \ln a$, $x_2 = q \ln b$ seçilmesi ile

$$e^{\frac{x}{p} + \frac{y}{q}} \leq \frac{e^x}{p} + \frac{e^y}{q}$$

eşitsizliğinde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

şeklinde Young eşitsizliği bulunur.

İntegraller için ağırlıklı Jensen eşitsizliği aşağıdaki şekilde verilir [21].

Teorem3.1. (Ağırlıklı Jensen Eşitsizliği) $F: [a, b] \rightarrow R$ konveks ve $g: (a, b) \rightarrow R$ sürekli ve $\int_a^b f(x)dx < \infty$

$$F\left(\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}\right) \leq \frac{1}{\int_a^b f(x)dx} \int_a^b f(x)F(g(x))dx$$

dır.

$a, b > 0$ olmak üzere bazı önemli ortalama eşitsizliklerini aşağıdaki şekilde hatırlatalım [17]:

1) Aritmetik Ortalama

$$AO = A(a, b) = \frac{a + b}{2},$$

2) Geometrik Ortalama

$$GO = G(a, b) = \sqrt{ab},$$

3) Harmonik Ortalama

$$HO = H(a, b) = \frac{2ab}{a + b},$$

4) Logaritmik Ortalama

$$LO = L(a, b) = \begin{cases} a & , a = b \text{ için} \\ \frac{b - a}{\ln b - \ln a} & , a \neq b \text{ için} \end{cases}$$

5) Özdeş Ortalama

$$IO = I(a, b) = \begin{cases} a & , a = b \text{ için} \\ \frac{1}{e} \left(\frac{b^b}{a^a} \right)^{\frac{1}{b-a}} & , a \neq b \text{ için} \end{cases}$$

6) p -Logaritmik Ortalama

$$L_p O = L_p(a, b) = \begin{cases} a & , a = b \text{ için} \\ \left[\frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)} \right]^{\frac{1}{p}} & , a \neq b \text{ için} \end{cases}.$$

Dolayısıyla bu ortalamalar arasında

$$HO \leq GO \leq LO \leq IO \leq AO$$

şeklinde bir ilişki vardır.

Bu çalışmada amacımız yukardaki özel eşitsizliklerin elde edilmesi düşüncesi ile ağırlıklı Jensen eşitsizliğinin uygulamasıyla yeni bir eşitsizlik tanımlamaktır. Böylece elde edilen bu eşitsizliğin uygulamaları yardımıyla da bazı ortalama eşitsizlikler elde edilecektir.

3.1. ORTALAMA İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde ortalama eşitsizlikleri elde etmek için kullanılacak önemli bir eşitsizlik olan aşağıdaki integral eşitsizliği ile başlayalım.

Teorem 3.1.1. Negatif olmayan $f, g \in L^\alpha([a, b])$, $0 < a < b$, $\alpha \geq 1$ için

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^\alpha \leq (b-a)^{(\alpha-2)} \left(\int_a^b f^\alpha(x)dx \right) \left(\int_a^b g^\alpha(x)dx \right) \quad (3.1)$$

dır.

İspat. $F(t) = t^{\alpha-1}$, $\alpha \geq 1$ konveks fonksiyonu için ağırlıklı Jensen eşitsizliğini uygulanırsa, bu durumda

$$\begin{aligned} \left(\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} \right)^{\alpha-1} &\leq \frac{1}{\int_a^b f(x)dx} \int_a^b f(x)g^{\alpha-1}(x)dx, \\ \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^{\alpha-1} &\leq \left(\int_a^b f(x)dx \right)^{\alpha-2} \int_a^b f(x)g^{\alpha-1}(x)dx \end{aligned}$$

yazılır. Buradan da $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olacak şekilde $p = \alpha$, $q = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ seçilmesi ile Hölder

eşitsizliğini sağ taraftaki integrallere uygulanırsa,

$$\begin{aligned} &\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^{\alpha-1} \\ &\leq \left[\left(\int_a^b f^\alpha(x)dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b dx \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right]^{(\alpha-2)} \left(\int_a^b f^\alpha(x)dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b g^\alpha(x)dx \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \end{aligned}$$

$$= (b-a)^{\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{\alpha}} \left(\int_a^b f^\alpha(x) dx \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left(\int_a^b g^\alpha(x) dx \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

olur. Böylece

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^\alpha \leq (b-a)^{(\alpha-2)} \left(\int_a^b f^\alpha(x) dx \right) \left(\int_a^b g^\alpha(x) dx \right)$$

istenilen eşitsizlik elde edilmiş olur.

Sonuç 3.1.1. $\alpha \geq 1$ ve $0 < a < b$ olmak üzere

$$L_\alpha(a, b) \leq L_{\alpha(\alpha-1)}(a, b) \quad (3.2)$$

ortalama eşitsizliği sağlanır. Burada $L_\alpha(a, b) = \left(\frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(b-a)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ dır.

İspat. (3.1) eşitsizliğinde $f(x) = x$ ve $g(x) = x^{\alpha-1}$, $\alpha \geq 1$ olacak şekilde seçilirse

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b x^\alpha dx \right)^{\alpha-1} &\leq (b-a)^{\alpha-2} \left(\int_a^b x^{\alpha(\alpha-1)} dx \right) \\ \left(\frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)^{\alpha-1} &\leq (b-a)^{\alpha-2} \frac{b^{\alpha(\alpha-1)+1} - a^{\alpha(\alpha-1)+1}}{\alpha(\alpha-1)+1} \\ \left(\frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(b-a)} \right)^{\alpha-1} &\leq \frac{b^{\alpha(\alpha-1)+1} - a^{\alpha(\alpha-1)+1}}{(\alpha(\alpha-1)+1)(b-a)} \\ \left(\frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(b-a)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} &\leq \left(\frac{b^{\alpha(\alpha-1)+1} - a^{\alpha(\alpha-1)+1}}{(\alpha(\alpha-1)+1)(b-a)} \right)^{\frac{1}{\alpha(\alpha-1)}} \\ L_\alpha(a, b) &\leq L_{\alpha(\alpha-1)}(a, b) \end{aligned}$$

elde edilir ve istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Hatırlatma 3.1.1. Özel olarak (3.2) eşitsizliğinde $\alpha = 2$ için $L_2(a, b) = L_2(a, b)$ olur.

Diğer yandan, (3.2) de $\alpha = 3$ alınırsa $L_3(a, b) < L_6(a, b)$ bulunur.

Sonuç 3.1.2. $\alpha \geq 1$ ve $0 < a < b$ olmak üzere

$$L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}^{\alpha+1}(a, b) \leq L_{\alpha}^{\alpha}(a, b)A(a, b) \quad (3.3)$$

ortalama eşitsizliği sağlanır. Burada $A(a, b) = \left(\frac{b+a}{2}\right)$ dır.

İspat. (3.1) eşitsizliğinde $f(x) = x$ ve $g(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$, $\alpha \geq 1$ olacak şekilde seçilirse

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b x^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} dx\right)^{\alpha} &\leq (b-a)^{\alpha-2} \left(\int_a^b x^{\alpha} dx\right) \left(\int_a^b x dx\right) \\ \left(\frac{b^{\frac{2\alpha+1}{\alpha}} - a^{\frac{2\alpha+1}{\alpha}}}{\frac{2\alpha+1}{\alpha}(b-a)}\right)^{\alpha} &\leq \left(\frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(b-a)}\right) \left(\frac{b^2 - a^2}{2(b-a)}\right) \\ \left(\frac{b^{\frac{2\alpha+1}{\alpha}} - a^{\frac{2\alpha+1}{\alpha}}}{\frac{2\alpha+1}{\alpha}(b-a)}\right)^{\alpha \frac{(\alpha+1)}{(\alpha+1)}} &\leq \left(\frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(b-a)}\right)^{\alpha \frac{1}{\alpha}} \left(\frac{b+a}{2}\right) \\ L_{\frac{\alpha+1}{\alpha}}^{\alpha+1}(a, b) &\leq L_{\alpha}^{\alpha}(a, b)A(a, b) \end{aligned}$$

elde edilir ve istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Hatırlatma 3.1.2. Özel olarak (3.3) eşitsizliğinde $\alpha = 2$ için $L_{\frac{3}{2}}^3(a, b) \leq L_2^2(a, b)A(a, b)$ yazılır.

Sonuç 3.1.3 $\alpha \geq 1$ ve $0 < a < b$ olmak üzere

$$L_{-\alpha}^{\alpha}(a, b)L_{\frac{1}{\alpha}}^1(\ln a, \ln b) \leq L^{\alpha}(a, b) \ln I(a, b) \quad (3.4)$$

ortalama eşitsizliği sağlanır.

İspat. (3.1) eşitsizliğinde $f(x) = \frac{1}{x}$ ve $g(x) = \ln^{\frac{1}{\alpha}} x$, $\alpha \geq 1$ olacak şekilde seçilirse

$$\begin{aligned}
\left(\int_a^b \ln^{\frac{1}{\alpha}} x \frac{dx}{x} \right)^\alpha &\leq (b-a)^{\alpha-2} \int_a^b x^{-\alpha} dx \int_a^b \ln x dx \\
(\ln b - \ln a)^\alpha &\left(\frac{(\ln b)^{\frac{1}{\alpha}+1} - (\ln a)^{\frac{1}{\alpha}+1}}{\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) (\ln b - \ln a)} \right)^\alpha \\
&\leq (b-a)^{\alpha-2} \left(\frac{b^{-\alpha+1} - a^{-\alpha+1}}{-\alpha + 1} \right) [b(\ln b - 1) - a(\ln a - 1)] \\
\left(\frac{\ln b - \ln a}{b-a} \right)^\alpha L_{\frac{1}{\alpha}}(\ln a, \ln b) &\leq \left(\frac{b^{-\alpha+1} - a^{-\alpha+1}}{(-\alpha + 1)(b-a)} \right)^{\frac{1}{-\alpha}(-\alpha)} \left(\frac{b \ln b - b - a \ln a + a}{b-a} \right) \\
L_0^\alpha(\ln a, \ln b) L_{-\alpha}^\alpha(a, b) L_{\frac{1}{\alpha}}(\ln a, \ln b) &\leq \frac{\ln b^b - \ln a^a - b + a}{b-a} \\
L_{-\alpha}^\alpha(a, b) L_{\frac{1}{\alpha}}(\ln a, \ln b) &\leq L^\alpha(a, b) \ln I(a, b)
\end{aligned}$$

elde edilir ve istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Hatırlatma 3.1.3. Özel olarak (3.4) eşitsizliğinde $\alpha = 2$ için

$$L_{-2}^2(a, b) L_{\frac{1}{2}}(\ln a, \ln b) \leq L^2(a, b) \ln I(a, b)$$

yazılır.

Sonuç 3.1.4. $\alpha \geq 1$ ve $0 < a < b$ olmak üzere

$$L_{-\alpha}(a, b) \leq G(a, b) \quad (3.5)$$

ortalama eşitsizliği sağlanılır. Burada $G(a, b) = \sqrt{a \cdot b}$ dir.

İspat. (3.1) eşitsizliğinde $f(x) = \frac{1}{x}$ ve $g(x) = \frac{1}{x}$, $\alpha \geq 1$ olacak şekilde seçilirse

$$\begin{aligned}
\left(\int_a^b \frac{1}{x^2} dx \right)^\alpha &\leq (b-a)^{\alpha-2} \left(\int_a^b x^{-\alpha} dx \right)^2 \\
\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^\alpha &\leq (b-a)^{\alpha-2} \left(\frac{b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^2
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}}{(1-\alpha)(b-a)} \right)^{\frac{-1}{\alpha}} \leq \sqrt[2]{a \cdot b}$$

$$L_{-\alpha}(a, b) \leq G(a, b)$$

istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Hatırlatma 3.1.4. Özel olarak (3.5) eşitsizliğinde $\alpha = 2$ için $L_{-2}(a, b) = G(a, b)$ olur. Diğer yandan, (3.5) de $\alpha = 3$ alınırsa $L_{-3}(a, b) \leq G(a, b)$ bulunur.

Sonuç 3.1.5. $\alpha \geq 1$ ve $0 < a < b$ olmak üzere

$$L(a, b) \leq A(a, b)$$

ortalama eşitsizliği sağlanılır. Burada $L(a, b) = \frac{b-a}{\ln b - \ln a}$ ve $A(a, b) = \frac{a+b}{2}$ dir.

İspat. (3.1) eşitsizliğinde $f(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$ ve $g(x) = x^{\frac{-1}{\alpha}}$, $\alpha \geq 1$ olacak şekilde seçilirse

$$\left(\int_a^b dx \right)^\alpha \leq (b-a)^{\alpha-2} \int_a^b x dx \int_a^b \frac{1}{x} dx$$

$$(b-a)^\alpha \leq (b-a)^\alpha (b-a)^{-2} \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right) (\ln b - \ln a)$$

$$1 \leq \left(\frac{a+b}{2} \right) \left(\frac{\ln b - \ln a}{b-a} \right)$$

$$\frac{b-a}{\ln b - \ln a} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$L(a, b) \leq A(a, b)$$

elde edilir ve istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Sonuç 3.1.6. $\alpha \geq 1$ ve $0 < a < b$ olmak üzere

$$L_{\frac{2}{\alpha}}(a, b) \leq A(a, b) \quad (3.6)$$

ortalama eşitsizliği sağlanılır.

İspat. (3.1) eşitsizliğinde $f(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$ ve $g(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$, $\alpha \geq 2$ olacak şekilde seçilirse

$$\left(\int_a^b x^{\frac{2}{\alpha}} dx \right)^{\alpha} \leq (b-a)^{\alpha-2} \left(\int_a^b x dx \right)^2$$

$$\left(\frac{b^{\frac{2}{\alpha}+1} - a^{\frac{2}{\alpha}+1}}{\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right)(b-a)} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$L_{\frac{2}{\alpha}}(a, b) \leq A(a, b)$$

elde edilir ve istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Hatırlatma 3.1.5. Özel olarak (3.6) eşitsizliğinde $\alpha = 2$ için $L_1(a, b) \leq A(a, b)$ yazılır.

Teorem 3.1.2 $f : [a, b] \subset (0, \infty) \rightarrow R$ negatif olmayan sürekli bir fonksiyon olmak üzere $\alpha \geq 1$ için

$$\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x) dx \right)^{\alpha} \leq \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f^{\alpha}(x) dx \right)^2 \quad (3.7)$$

dır.

İspat. Teorem 3.2 de özel olarak $f = g$ seçilirse istenilen eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 3.1.7. $\alpha \geq 1$ ve $0 < a < b$ olmak üzere

$$L_{-\alpha}(a, b) \leq G(a, b) \quad (3.8)$$

ortalama eşitsizliği sağlanır.

İspat. (3.7) eşitsizliğinde $f(x) = \frac{1}{x}$, $\alpha \geq 1$ olacak şekilde seçilirse

$$\left(\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\right)^\alpha \leq \left(\frac{1}{b-a}\frac{b^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^2$$

$$\frac{1}{\sqrt[2]{ab}} \leq \left(\frac{b^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}}{(b-a)(1-\alpha)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{L_{-\alpha}(a,b)}$$

$$L_{-\alpha}(a,b) \leq G(a,b)$$

elde edilir ve istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Sonuç 3.1.8. $\alpha \geq 1$ ve $0 < a < b$ olmak üzere

$$T_2(a,b) \leq T_\alpha(a,b)$$

ortalama eşitsizliği sağlanır. Burada $T_\alpha(a,b) = \left(\frac{s^\alpha - r^\alpha}{\alpha(\ln s - \ln r)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ dır.

İspat. (3.7) eşitsizliğinde $f(x) = e^x$, $\alpha \geq 1$ olacak şekilde seçilirse

$$\left(\frac{1}{b-a}\frac{e^{2b}-e^{2a}}{2}\right)^\alpha \leq \left(\frac{1}{b-a}\frac{e^{b\alpha}-e^{a\alpha}}{\alpha}\right)^2$$

$$\left(\frac{e^{2b}-e^{2a}}{2(b-a)}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{e^{b\alpha}-e^{a\alpha}}{\alpha(b-a)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

olur. Buradan da $e^b = s \rightarrow b = \ln s$ ve $e^a = r \rightarrow a = \ln r$ olarak alınırsa istenilen eşitsizlik elde edilmiş olur.

4. EULER BETA FONKSİYONLARINI İÇEREN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ VE ORTALAMA EŞİTSİZLİKLER

Konveks fonksiyonları içeren eşitsizliklerin kullanışlılığı en başından beri fark edildi ve şimdi matematiğin birkaç modern dalının gelişiminin arkasındaki ana itici güçlerden biri olarak kabul ediliyor ve büyük ilgi görüyor. Bu tür tahminler için bazı ünlü sonuçlar Hermite-Hadamard, trapezoid, midpoint, Simpson ve Jensen eşitsizlikleri vb den oluşmaktadır.

$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$ ve $a, b \in I$ üzerinde tanımlanmış bir konveks fonksiyon olsun.

Aşağıdaki eşitsizlik literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinmektedir [7]:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \left(\frac{1}{b-a}\right) \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (4.1)$$

Bir konveks fonksiyonun integral ortalamasına ilişkin en iyi bilinen eşitsizlik Hermite-Hadamard eşitsizliğidir. Bir konveks fonksiyonun ortalama değerinin her iki tarafından da bir tahmin verir ve ayrıca konveks fonksiyonun bütünleştirilebilirliğini sağlar. Bu aynı zamanda büyük bir merak konusudur. Bazı klasik eşitsizlikler konveks fonksiyonların faydası altında Hadamard'ın eşitsizliğinden elde edilebileceğine dikkat edilmedilir. Konveks fonksiyonlar için bu eşitsizlikler, analizde ve uygulamalı matematiğin diğer alanlarında önemli bir rol oynar. (4.1) eşitsizliklerinin ikinci kısmının farkının mutlak değeri literatürde yamuk eşitsizliği olarak bilinir ve 1998 yılında Dragomir ve Agarwal tarafından verilmiştir [27]. Daha sonra 2004 yılında Kirmancı tarafından orta nokta eşitsizliği olarak bilinen (4.1) eşitsizliklerinin birinci bölümünün farkının mutlak değeri verildi [8]. Böylece bu iki önemli eşitsizlik bugüne kadar pek çok okuyucunun ilgisini çekmiş ve farklı konveks fonksiyon türleri için birçok çalışma yapılmıştır.

[27]'de Dragomir ve Agarwal (4.1)'in sağ kısmıyla bağlantılı aşağıdaki sonuçları kanıtladılar.

Lemma 4.1. $a < b$ ve $a, b \in I^0$ için $f: I^0 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ reel sayılar aralığı olan I^0 üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_0^1 (1-2t) f'(ta + (1-t)b) dt. \quad (4.2)$$

Teorem 4.1. $a < b$ ve $a, b \in I^0$ için $f: I^0 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ reel sayılar aralığı olan I^0 üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde konveks ise,

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)}{8} (|f'(a)| + |f'(b)|) \quad (4.3)$$

[8]'de Kirmaci, (4.1)' in sol kısmıyla ilgili aşağıdaki sonuçları ispatladı.

[8]'de türevlenebilir konveks fonksiyonlar için bazı Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler aşağıdaki Lemma kullanılarak kanıtlanmıştır.

Lemma 4.2. $a < b$ ve $a, b \in I^0$ için $f: I^0 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ reel sayılar aralığı olan I^0 üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $f \in L[a, b]$ ise,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &= (b-a) \left[\int_0^{1/2} t f'(ta + (1-t)b) dt + \int_{1/2}^1 (t-1) f'(ta + (1-t)b) dt \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

eşitsizliği vardır.

Teorem 4.2. $a < b$ ve $a, b \in I^0$ için $f: I^0 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ reel sayılar aralığı olan I^0 üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde konveks ise,

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{(b-a)}{8} (|f'(a)| + |f'(b)|) \quad (4.5)$$

eşitsizliği vardır.

Kesirli analiz konusu (integraller ve türevler), geçtiğimiz on yıllar boyunca, temel olarak bilim ve mühendisliğin çok sayıda görünüşte farklı ve yaygın alanlarında kanıtlanmış

uygulamalarından dolayı önemli bir popülerlik ve önem kazanmıştır. Kesirli integral gerçekten de matematik biliminin özel fonksiyonlarını ve bunların bir ve daha fazla değişkendeki uzantılarını ve genellemelerini içeren çeşitli problemler için potansiyel olarak yararlı birkaç araç sağlar. Bu konu halen birçok yazar tarafından kapsamlı bir şekilde çalışılmaktadır, örneğin bkz. ([23], [24], [31], [35], [36]-[50]). Kesirli integrallerin önemli uygulamalarından biri Hermite Hadamard integral eşitsizliğidir, bkz [25], [17], [29], [38], [42]-[50]. Öncelikle, Riemann-Liouville kesirli integralinin yukarıdaki tanımının aşağıdaki [31], [35] ve [36] ile tanımlandığını hatırlayalım:

$$J_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a,$$

$$J_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x < b.$$

k -Riemann-Liouville kesirli integrali şu şekilde tanımlanır:

$$J_{a+}^{\alpha,k} f(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(t) dt, \quad x > a,$$

$$J_{b-}^{\alpha,k} f(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(t) dt, \quad x < b$$

$$\Gamma_k(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-\frac{t^k}{k}} dt, \quad R(\alpha) > 0$$

ve

$$\Gamma_k(\alpha) = k^{\frac{\alpha}{k}-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{k}\right), \quad R(\alpha) > 0; k > 0$$

iken

[48] da Mubeen ve Habibullah tarafından verilmektedir.

Şimdi kesirli integraller için Sarıkaya ve diğerleri tarafından ispatlanan Hermite Hadamard eşitsizliğinin temel ifadelerini hatırlayalım [42] de aşağıdaki gibi:

Teorem 4.3. $f : [a, b] \rightarrow R$, $a < b$ ve $f \in L_1([a, b])$ fonksiyon olsun. Eğer f , $[a, b]$ üzerinde konveks fonksiyon ise o zaman kesirli integraller için $\alpha > 0$ iken aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a+}^\alpha f(b) + J_{b-}^\alpha f(a)] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (4.6)$$

Bu sırada, [42]de, Sarikaya ve arkadaşları tarafından Riemann-Liouville integrali için aşağıdaki ilginç yamuk tanımını verildi:

Lemma 4.3. $f : [a, b] \rightarrow R$, $a < b$ (a, b) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise, kesirli integraller için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a+}^\alpha f(b) + J_{b-}^\alpha f(a)] \\ &= \frac{b-a}{2} \int_0^1 [(1-t)^\alpha - t^\alpha] f'(ta + (1-t)b) dt. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Teorem 4.4. $f : [a, b] \rightarrow R$, $a < b$ iken (a, b) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde konveks ise, kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a+}^\alpha f(b) + J_{b-}^\alpha f(a)] \right| \\ & \leq \frac{b-a}{2(\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) [f'(a) + f'(b)]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Öte yandan, [46] da Iqbal ve arkadaşları tarafından Hermite-Hadamard tipi (1.6) Riemann-Liouville integral eşitsizliklerinin sol tarafı ile bağlantılı olarak orta nokta eşitliği kullanılarak aşağıdaki sonuçlar verilmiştir.

Lemma 4.4. $f : [a, b] \rightarrow R$, (a, b) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L^1[a, b]$ ise, Riemann-Liouville kesirli integralleri için aşağıdaki tanım geçerlidir:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a+}^\alpha f(b) + J_{b-}^\alpha f(a)] = \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^4 I_k, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\frac{1}{2}} t^\alpha f'(tb + (1-t)a) dt & I_2 &= \int_0^{\frac{1}{2}} (-t^\alpha) f'(ta + (1-t)b) dt, \\
I_3 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 (t^\alpha - 1) f'(tb + (1-t)a) dt & I_4 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - t^\alpha) f'(ta + (1-t)b) dt.
\end{aligned}$$

iken.

Birçok makale, Riemann-Liouville kesirli integrallerini inceler ve bu tür integralleri kullanarak Hermite-Hadamard tipi eşitsizliklerin yeni ve ilginç genellemelerini verir, örneğin bkz. ([23]-[25], [37], [42]-[50]).

Bu makalenin amacı Euler beta fonksiyonlarını içeren yeni Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler oluşturmaktadır. İlk türevleri mutlak değerleri konveks olan fonksiyonlar kullanarak, daha önce yayınlanmış sonuçlar kapsayan ünlü Hermite-Hadamard tipiyle bağlantılı yeni yamuk ve orta nokta eşitsizlikleri elde ettik.

4.1. EULER BETA FONKSİYONLARI İÇEREN HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ

1997 de, Chaudhry ve arkadaşları [26] Euler beta fonksiyonunun aşağıdaki uzantısını sundu

$$\beta(m, n; \nu) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} e^{\frac{-\nu}{t(1-t)}} dt, \quad m, n, \nu > 0 \text{ için}$$

ve bu uzantının Macdonald, error ve Whittakers fonksiyonuyla bağlantılı olduğunu kanıtladılar. Açıkça görünüyor ki, $\beta(m, n)$ klasik Beta fonksiyonu iken $\beta(m, n; \nu) = \beta(m, n)$ dir.

Bu bölümde, Euler's beta fonksiyonunu kullanarak aşağıdaki teoremle başlıyoruz:

Teorem 4.5. $f : [a, b] \rightarrow R$, $a < b$ iken $[a, b]$ üzerinde konveks fonksiyon olsun, bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir:

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}\right) \beta(m, n; \nu) \\
& \leq \frac{1}{2(b-a)^{m+n-1}} \int_a^b \Omega(x) f(x) e^{\frac{-\nu(b-a)^2}{(b-x)(x-a)}} dx \\
& \leq \beta(m, n; \nu) \frac{f(a) + f(b)}{2}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Buradan $\beta(m, n; \nu)$ Euler beta fonksiyonu olmak üzere $m, n, \nu > 0$ için

$$\Omega(x) = (b-x)^{m-1}(x-a)^{n-1} + (b-x)^{n-1}(x-a)^{m-1}$$

biçiminde tanımlanır.

İspat. $t \in [0,1]$ için, $x = ta + (1-t)b$, $y = (1-t)a + tb$ olsun. f nin konveksliğinden

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad (4.11)$$

olur. Yani,

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb). \quad (4.12)$$

(4.12) nin her iki tarafı $t^{m-1}(1-t)^{n-1}e^{\frac{-\nu}{t(1-t)}}$ ile çarpılarak, daha sonra ortaya çıkan eşitsizliğin t ye göre $[0,1]$ üzerinde integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} & 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}e^{-\frac{\nu}{t(1-t)}} dt \\ & \leq \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}f(ta + (1-t)b)e^{-\frac{\nu}{t(1-t)}} dt \\ & + \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}f((1-t)a + tb)e^{-\frac{\nu}{t(1-t)}} dt \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a+b}{2}\right) \beta(m, n; \nu) \\ & \leq \frac{1}{2(b-a)^{m+n-1}} \int_a^b [(b-x)^{m-1}(x-a)^{n-1} \\ & + (b-x)^{n-1}(x-a)^{m-1}] f(x) e^{\frac{-\nu(b-a)^2}{(b-x)(x-a)}} dx \end{aligned}$$

bulunur ve ilk eşitsizlik kanıtlanmış olur.

(4.10) eşitsizliğinin diğer tarafını ispatlamak için, f konveks olduğundan, her $t \in [0,1]$ için,

$$f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb) \leq f(a) + f(b). \quad (4.13)$$

eşitsizliği sağlanır. (4.13)'ün her iki tarafı $t^{m-1}(1-t)^{n-1}e^{\frac{-v}{t(1-t)}}$ ile çarpılarak ve ortaya çıkan eşitsizliğin t ye göre $[0,1]$ üzerinde integrali alınarak,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2(b-a)^{m+n-1}} \int_a^b [(b-x)^{m-1}(x-a)^{n-1} \\ & \quad + (b-x)^{n-1}(x-a)^{m-1}] f(x) e^{\frac{-v(b-a)^2}{(b-x)(x-a)}} dx \\ & \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \beta(m, n; v) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1. Teorem 4.5. te, $n = m = 1$ seçilirse

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{(b-a)E(v)} \int_a^b f(x) e^{\frac{-v(b-a)^2}{(b-x)(x-a)}} dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (4.14)$$

elde edilir. Burada $v > 0$ için

$$E(v) = \int_0^1 e^{\frac{-v}{t(1-t)}} dt, v > 0 \text{ biçiminde tanımlanır.}$$

Açıklama 4.1. Eğer Sonuç 4.1.de, $v \rightarrow 0$ alınırsa, (4.14) eşitsizliği (4.1) eşitsizliği haline gelir.

Sonuç 4.2. Teorem 4.5 te $m = 1, n = \alpha$ (veya $m = \alpha, n = 1$) seçilirse

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ & \leq \frac{1}{2E(\alpha; v)(b-a)^\alpha} \int_a^b [(x-a)^{\alpha-1} + (b-x)^{\alpha-1}] f(x) e^{\frac{-v(b-a)^2}{(b-x)(x-a)}} dx \\ & \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

elde edilir. Burada $\alpha, v > 0$ için

$E(\alpha; \nu) = \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} e^{\frac{-\nu}{t(1-t)}} dt$, biçiminde tanımlanır.

Açıklama 4.2. Eğer Sonuç 4.2 de, $\nu \rightarrow 0$ alınırsa, (4.15) eşitsizliği Teorem 4.3 teki (4.6) eşitsizliği haline gelir.

Aslında, α mertebesindeki k -Riemann-Liouville kesirli integralleri, α mertebesindeki Riemann-Liouville kesirli integrallerinin genelleştirilmesidir. Eğer $k \rightarrow 1$ alırsak, α mertebesindeki k -Riemann-Liouville kesirli integrallerinin, α mertebesindeki Riemann-Liouville kesirli integralleri olduğu ortaya çıkar. Aşağıdaki sonuç bununla ilgili;

Sonuç 4.3. Teorem 4.5 te $m = 1$, $n = \frac{\alpha}{k}$, (veya $m = \frac{\alpha}{k}$, $n = 1$) seçilirse,

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ & \leq \frac{1}{2E_k(\alpha; \nu)(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}} \int_a^b \left[(x-a)^{\frac{\alpha}{k}-1} + (b-x)^{\frac{\alpha}{k}-1} \right] f(x) e^{\frac{-\nu(b-a)^2}{(b-x)(x-a)}} dx \\ & \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

elde edilir. Burada $\alpha, \nu, k > 0$ için

$$E_k(\alpha; \nu) = \int_0^1 (1-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} e^{\frac{-\nu}{t(1-t)}} dt \text{ olarak tanımlanır.}$$

Açıklama 4.3. Eğer Sonuç 4.3. de, $\nu \rightarrow 0$ alınırsa (4.16) eşitsizliği [49] da Hussain ve diğerleri tarafından kanıtlanan

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}} [J_{a^+,k}^{\alpha} f(b) + J_{b^-,k}^{\alpha} f(a)] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliğine dönüşür.

4.2. EULER BETA FONKSİYONLARI İÇEREN YAMUK EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde, sonuçlarımızı kanıtlamak için bize yardımcı olacak bir tanım veriyoruz:

Lemma 4.5. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$ iken (a, b) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} \beta(m, n; \nu) - \frac{1}{2(b-a)^{m+n-1}} \int_a^b \Omega(x) f(x) e^{\frac{-\nu(b-a)^2}{(b-x)(x-a)}} dx \quad (4.17)$$

$$= \frac{(b-a)}{2} \int_0^1 \beta_t(m, n; \nu) [f'(tb + (1-t)a) - f'(ta + (1-t)b)] dt$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\beta_t(m, n; \nu)$ tam olmayan Euler Beta fonksiyonu olup $m, n, \nu > 0$ için

$$\beta_t(m, n; \nu) = \int_0^t s^{m-1} (1-s)^{n-1} e^{\frac{-\nu}{s(1-s)}} ds, \quad 0 < t \leq 1$$

olarak tanımlanır.

İspat. Burada, (4.17) nin sağ kısmındaki integrallerde kısmi integrasyon uygulanır ve $x = tb + (1-t)a$ değişken değişimi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_0^1 \beta_t(m, n; \nu) f'(tb + (1-t)a) dt \\ &= \frac{f(b)}{b-a} \beta(m, n; \nu) - \frac{1}{b-a} \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} f(tb + (1-t)a) e^{\frac{-\nu}{t(1-t)}} dt \\ &= \frac{f(b)}{b-a} \beta(m, n; \nu) - \frac{1}{(b-a)^{m+n}} \int_a^b (x-a)^{m-1} (b-x)^{n-1} f(x) e^{\frac{-\nu(b-a)^2}{(b-x)(x-a)}} dx. \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} F_2 &= \int_0^1 \beta_t(m, n; \nu) f'(ta + (1-t)b) dt \\ &= -\frac{f(a)}{b-a} \beta(m, n; \nu) + \frac{1}{b-a} \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} f(ta + (1-t)b) e^{\frac{-\nu}{t(1-t)}} dt \\ &= -\frac{f(a)}{b-a} (m, n; \nu) + \frac{1}{(b-a)^{m+n}} \int_a^b (x-a)^{n-1} (b-x)^{m-1} f(x) e^{\frac{-\nu(b-a)^2}{(b-x)(x-a)}} dx. \end{aligned}$$

bulunur. Eğer F_2 den F_1 çıkarılırsa ve $\frac{(b-a)}{2}$ ile çarpılırsa, (4.17) nin kanıtı elde edilir.

Açıklama 4.4. Eğer Lemma 4.5 te, $m = n = 1$ ve $\nu \rightarrow 0$ alınırsa, o zaman eşitlik (4.17), Lemma 4.1 deki (4.2) eşitliğine dönüşür.

Açıklama 4.5. Eğer Lemma 4.5 te, $m = 1$, $n = \alpha$, $\nu \rightarrow 0$ (veya $m = \alpha$, $n = 1$, $\nu \rightarrow 0$) alınırsa, o zaman eşitlik (4.17), Lemma 4.3 deki eşitlik (4.7) olur.

Açıklama 4.6. Eğer Lemma 4.5 te, $m = 1$, $n = \frac{\alpha}{k}$, $\nu \rightarrow 0$ (veya $m = \frac{\alpha}{k}$, $n = 1$ $\nu \rightarrow 0$) alınırsa, (4.17) eşitliği, [49] da Hussain ve diğerleri tarafından kanıtlanan

$$\begin{aligned} & \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma_k(\alpha + k)}{2(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}} [J_{a^+,k}^\alpha f(b) + J_{b^-,k}^\alpha f(a)] \\ &= \frac{b-a}{2} \int_0^1 \left[(1-t)^{\frac{\alpha}{k}} - t^{\frac{\alpha}{k}} \right] f'(ta + (1-t)b) dt \end{aligned}$$

eşitliğine dönüşür.

Lemma 4.5 deki değişken değişikliği ile teoremleri kanıtlamak için aşağıdaki eşitlik kullanılacaktır.

Açıklama 4.7. Lemma 4.5 te değişken değişimi ile, (4.17) eşitliği

$$\beta(m, n; \nu) \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{2(b-a)^{m+n-1}} \int_a^b \Omega(x) f(x) e^{\frac{-\nu(b-a)^2}{(b-x)(x-a)}} dx \quad (4.18)$$

$$= \frac{(b-a)}{2} \int_0^1 [\beta_t(m, n; \nu) - \beta_{1-t}(m, n; \nu)] f'(tb + (1-t)a) dt.$$

eşitliğine dönüşür.

Hermite-Hadamard tipi bir eşitsizliğin sağ tarafının bazı tahminlerini birinci türevleri mutlak değerleri konveks olan fonksiyonlar şeklinde aşağıdaki gibi genişletilir:

Teorem 4.6. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de $a < b$ iken (a, b) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde konveks ise $m, n, \nu > 0$ için

$$\left| \beta(m, n; \nu) \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{2(b-a)^{m+n-1}} \int_a^b \Omega(x) f(x) e^{\frac{-\nu(b-a)^2}{(b-x)(x-a)}} dx \right| \quad (4.19)$$

$$\leq (b-a) \left(\frac{|f'(a)| + |f'(b)|}{2} \right) \int_0^{\frac{1}{2}} [\beta_{1-t}(m, n; \nu) - \beta_t(m, n; \nu)] dt$$

eşitsizliği vardır.

İspat. (4.18) eşitliği ve $|f'|$ nin konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| \beta(m, n; \nu) \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{2(b-a)^{m+n-1}} \int_a^b \Omega(x) f(x) e^{\frac{-\nu(b-a)^2}{(b-x)(x-a)}} dx \right| \\ & \leq \frac{(b-a)}{2} \int_0^1 |\beta_t(m, n; \nu) - \beta_{1-t}(m, n; \nu)| |f'((1-t)a + tb)| dt \\ & \leq \frac{(b-a)}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} [\beta_{1-t}(m, n; \nu) - \beta_t(m, n; \nu)] [(1-t)|f'(a)| + t|f'(b)|] dt \\ & + \frac{(b-a)}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 [\beta_t(m, n; \nu) - \beta_{1-t}(m, n; \nu)] [(1-t)|f'(a)| + t|f'(b)|] dt \\ & = \frac{(b-a)}{2} (|f'(a)| + |f'(b)|) \int_0^{\frac{1}{2}} [\beta_{1-t}(m, n; \nu) - \beta_t(m, n; \nu)] dt \end{aligned}$$

bulunur ki bu (4.19) un ispatını tamamlar.

Açıklama 4.8. Eğer Teorem 4.6 da, $n = m = 1$ ve $\nu \rightarrow 0$ alınırsa, eşitsizlik (4.19), Teorem 4.1deki (4.3) eşitsizliğini getirir.

Açıklama 4.9. Eğer Teorem 4.6 da, $m = 1$, $n = \alpha$, $\nu \rightarrow 0$ (veya $m = \alpha$, $n = 1$, $\nu \rightarrow 0$) alınırsa, eşitsizlik (4.19), Teorem 4.4 deki (4.8) eşitsizliğini getirir.

Açıklama 4.10. Eğer Teorem 4.6 da, $m = 1$, $n = \frac{\alpha}{k}$, $\nu \rightarrow 0$ (veya $m = \frac{\alpha}{k}$, $n = 1$, $\nu \rightarrow 0$) alınırsa, [49] da Hussain ve arkadaşları tarafından kanıtlanan

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma_k(\alpha + k)}{2(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}} [J_{a^+, k}^{\alpha} f(b) + J_{b^-, k}^{\alpha} f(a)] \right| \\ & \leq \frac{(b-a)}{\left(\frac{\alpha}{k} + 1\right)} \left(1 - \frac{1}{2^{\frac{\alpha}{k}}}\right) \left(\frac{|f'(a)| + |f'(b)|}{2} \right) \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.7. $f : [a, b] \rightarrow R$ de $a < b$ iken (a, b) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$ bazı $q > 1$ için $[a, b]$ üzerinde konveks ise, $m, n > 0$ için

$$\left| \beta(m, n; \nu) \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{2(b-a)^{m+n-1}} \int_a^b \Omega(x) f(x) e^{\frac{-\nu(b-a)^2}{(b-x)(x-a)}} dx \right| \quad (4.20)$$

$$\leq \frac{(b-a)}{2} \left(\int_0^1 |\beta_t(m, n; \nu) - \beta_{1-t}(m, n; \nu)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dır.

İspat. (4.18) eşitliğinde, Hölder eşitsizliği ve $|f'|^q$ nun konveksliği kullanılarak, şunu bulabiliriz

$$\begin{aligned} & \left| \beta(m, n; \nu) \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{2(b-a)^{m+n-1}} \int_a^b \Omega(x) f(x) e^{\frac{-\nu(b-a)^2}{(b-x)(x-a)}} dx \right| \\ & \leq \frac{(b-a)}{2} \left(\int_0^1 |\beta_t(m, n; \nu) - \beta_{1-t}(m, n; \nu)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'((1-t)a + tb)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \frac{(b-a)}{2} \left(\int_0^1 |\beta_t(m, n; \nu) - \beta_{1-t}(m, n; \nu)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 [(1-t)|f'(a)|^q \right. \\ & \quad \left. + t|f'(b)|^q] dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

ki bu (4.20) nin ispatını tamamlar.

Açıklama 4.11. Eğer Teorem 4.7 de, $m = n = 1$ ve $\nu \rightarrow 0$ alınırsa, (4.20) eşitsizliği [27] deki Teorem 2.3 te (4.4) eşitsizliğini getirir.

Açıklama 4.12. Eğer Teorem 4.7 de, $m = 1$, $n = \alpha$, $\nu \rightarrow 0$ (veya $m = \alpha$, $n = 1$, $\nu \rightarrow 0$) alınırsa, (4.20) eşitsizliği [45] deki Teorem 8 deki (4.7) eşitsizliğini getirir.

Açıklama 4.13. Eğer Teorem 4.7 de, $m = 1$, $n = \frac{\alpha}{k}$, $\nu \rightarrow 0$ (veya $m = \frac{\alpha}{k}$, $n = 1$, $\nu \rightarrow 0$) alınır, (4.20) eşitsizliği [49] da Hussain ve arkadaşları tarafından kanıtlanan

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma_k(\alpha + k)}{2(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}} [J_{a^+,k}^{\alpha} f(b) + J_{b^-,k}^{\alpha} f(a)] \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)}{2 \left(\frac{\alpha}{k} p + 1 \right)^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine dönüşür. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\frac{\alpha}{k} \in [0,1]$ dir.

4.3. EULER BETA FONKSİYONLARI İÇEREN ORTA NOKTA EŞİTSİZLİKLERİ

Başlamadan ve bir sonraki sonucumuzu ispatlamadan önce, aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız var.

Lemma 4.6. $f : [a, b] \rightarrow R$, $a < b$ iken (a, b) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise $m, n, \nu > 0$ için

$$\left(\frac{a+b}{2} \right) \beta(m, n; \nu) - \frac{1}{2(b-a)^{m+n-1}} \int_a^b \Omega(x) f(x) e^{\frac{-\nu(b-a)^2}{(b-x)(x-a)}} dx$$

$$= \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^4 T_k \quad (4.21)$$

$$T_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \beta_t(m, n; \nu) f'(tb + (1-t)a) dt, \quad T_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} (-\beta_t(m, n; \nu)) f'(ta + (1-t)b) dt,$$

$$T_3 = \int_{\frac{1}{2}}^1 (-\beta_{1-t}(m, n; \nu)) f'(tb + (1-t)a) dt, \quad T_4 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \beta_{1-t}(m, n; \nu) f'(ta + (1-t)b) dt.$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. (4.21) in kanıtında, kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$T_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \beta_t(m, n; \nu) f'(tb + (1-t)a) dt$$

$$= \frac{1}{b-a} \beta_{\frac{1}{2}}(m, n; \nu) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_0^{\frac{1}{2}} t^{m-1} (1-t)^{n-1} f(tb + (1-t)a) e^{\frac{-\nu}{t(1-t)}} dt,$$

$$T_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} (-\beta_t(m, n; \nu)) f'(ta + (1-t)b) dt$$

$$= \frac{1}{b-a} \beta_{\frac{1}{2}}(m, n; \nu) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_0^{\frac{1}{2}} t^{m-1} (1-t)^{n-1} f(ta + (1-t)b) e^{\frac{-\nu}{t(1-t)}} dt,$$

$$T_3 = \int_{\frac{1}{2}}^1 (-\beta_{1-t}(m, n; \nu)) f'(tb + (1-t)a) dt$$

$$= \frac{1}{b-a} \beta_{\frac{1}{2}}(n, m) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{m-1} t^{n-1} f(tb + (1-t)a) e^{\frac{-\nu}{t(1-t)}} dt,$$

$$T_4 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \beta_{1-t}(m, n; \nu) f'(ta + (1-t)b) dt$$

$$= \frac{1}{b-a} \beta_{\frac{1}{2}}(m, n; \nu) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{m-1} t^{n-1} f(ta + (1-t)b) e^{\frac{-\nu}{t(1-t)}} dt.$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece, istenilen eşitlik (4.21) elde edilir.

Açıklama 4.14. Eğer Lemma 4.6 da, $m = n = 1$ ve $\nu \rightarrow 0$ alınırsa, (4.21) eşitliği [8]de Kırmacı tarafından verilen Lemma 4.2 nin (4.4) eşitliğini getirir.

Açıklama 4.15. Eğer Lemma 4.6 da, $m = 1$, $n = \alpha$, $\nu \rightarrow 0$ (veya $m = \alpha$, $n = 1$, $\nu \rightarrow 0$) alınırsa, (4.21) eşitliği [46] da Iqbal ve diğerleri tarafından verilen Lemma 4.4 ün (4.9) una indirgenir.

Açıklama 4.16. Eğer Lemma 4.6 da, $m = 1$, $n = \frac{\alpha}{k}$, $\nu \rightarrow 0$ (veya $m = \frac{\alpha}{k}$, $n = 1$, $\nu \rightarrow 0$) alınırsa, (4.21) eşitliği [38] de Sarikaya ve Ertugral tarafından verilen Sonuç 6 eşitliğine indirgenir.

Açıklama 4.17. Lemma 4.6 da değişken değiştirme ile, (4.21) eşitliği

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\beta(m, n; \nu) - \frac{1}{2(b-a)^{m+n-1}} \int_a^b \Omega(x) f(x) e^{\frac{-\nu(b-a)^2}{(b-x)(x-a)}} dx \quad (4.22)$$

$$= \frac{(b-a)}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} [\beta_t(m, n; \nu) + \beta_t(m, n; \nu)] [f'(tb + (1-t)a) - f'(ta + (1-t)b)] dt.$$

eşitliğine dönüşür.

Son olarak, birinci türevleri mutlak değerleri konveks olan fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipi bir eşitsizliğin sol tarafının bazı tahminleri aşağıdaki gibi genişletilir:

Teorem 4.8. $f : [a, b] \rightarrow R$, $a < b$ iken, (a, b) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde konveks ise $m, n, \nu > 0$ için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right)\beta(m, n; \nu) - \frac{1}{2(b-a)^{m+n-1}} \int_a^b \Omega(x) f(x) e^{\frac{-\nu(b-a)^2}{(b-x)(x-a)}} dx \right| \quad (4.23)$$

$$\leq \frac{(b-a)}{2} [|f'(a)| + |f'(b)|] \left(\frac{1}{2} \beta(m, n; \nu) - \beta_{\frac{1}{2}}(m+1, n; \nu) - \beta_{\frac{1}{2}}(n+1, m; \nu) \right)$$

İspat. (4.22) den ve $|f'|$ nin konveksliğini kullanarak

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right)\beta(m, n; \nu) - \frac{1}{2(b-a)^{m+n-1}} \int_a^b \Omega(x) f(x) e^{\frac{-\nu(b-a)^2}{(b-x)(x-a)}} dx \right| \quad (4.24)$$

$$\leq \frac{(b-a)}{2} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} [\beta_t(m, n; \nu) + \beta_t(m, n; \nu)] dt \right) [|f'(a)| + |f'(b)|].$$

eşitsizliği elde edilir. İntegrallerin sırası değiştirilerek,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} [\beta_t(m, n; \nu) + \beta_t(n, m; \nu)] dt \quad (4.25)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^t s^{m-1} (1-s)^{n-1} e^{\frac{-\nu}{s(1-s)}} ds dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^t (1-s)^{m-1} s^{n-1} e^{\frac{-\nu}{s(1-s)}} ds dt$$

$$= \frac{1}{2} \beta(m, n; \nu) - \beta_{\frac{1}{2}}(m+1, n; \nu) - \beta_{\frac{1}{2}}(n+1, m; \nu).$$

(4.24) içine (4.25) yazılarak istenen eşitsizlik elde edilir. Bu ispatı tamamlar.

Açıklama 4.18. Eğer Teorem 4.8 de, $m = n = 1$ ve $\nu \rightarrow 0$ alınırsa, (4.23) eşitsizliği [8] de Teorem 4.3 de Kırmacı tarafından verilen (4.3) deki eşitsizliğini getirir.

Açıklama 4.19. Eğer Teorem 4.8 de, $m = 1$, $n = \alpha$, $\nu \rightarrow 0$ (veya $m = \alpha$, $n = 1$, $\nu \rightarrow 0$) alınırsa, (4.23) eşitsizliği [46] da Iqbal ve arkadaşları tarafından verilen teorem2 deki (3) eşitsizliğini getirir.

Açıklama 4.20. Eğer Teorem 4.8 de, $m = 1$, $n = \frac{\alpha}{k}$, $\nu \rightarrow 0$ (veya $m = \frac{\alpha}{k}$, $n = 1$, $\nu \rightarrow 0$) alınırsa, (4.23) eşitsizliği, [39] da Sarıkaya ve Ertuğral tarafından Sonuç 9daki eşitsizliği getirir.



5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde amacımız, Hermite-Hadamard, yamuk, orta nokta ve Jensen eşitsizlikleri gibi önemli bir çalışma alanına sahip olan eşitsizliklerin Euler Beta fonksiyonlarıyla olan ilişkilerini incelemektir. Tezimizin odak noktası, bu eşitsizliklerin Euler Beta fonksiyonlarıyla nasıl etkileşime girdiğini anlamaktır. Bunun yanı sıra, bu eşitsizliklerin farklı ispat yöntemlerini de ele alarak nasıl kanıtlanabileceğini açıklayan bir bölüm de sunulmuştur.

Bu çalışmada kullanılan yöntem, Euler Beta fonksiyonlarını içeren integral eşitsizlikleri ve ortalama eşitsizlikler için yeni sonuçlar elde edebilmektedir. Bu yöntem, eşitsizliklerin daha genel bir formunu ortaya koyarak, bu alandaki literatüre yeni katkılar sağlamayı hedeflemektedir.

Tezimizde, Hermite-Hadamard, yamuk, orta nokta ve Jensen eşitsizliklerinin Euler Beta fonksiyonlarıyla nasıl etkileşime girdiği detaylı bir şekilde incelenmiştir. Bu eşitsizliklerin özel durumlarına odaklanarak ve Euler Beta fonksiyonlarının bu eşitsizliklerin kanıtlarında nasıl kullanılabileceği gösterilmiştir. Böylece, bu önemli eşitsizliklerin daha genel bir bağlama oturtulmasına ve Euler Beta fonksiyonlarıyla olan ilişkilerinin anlaşılmasına katkıda bulunacaktır.

Sonuç olarak, bu tez Euler Beta fonksiyonlarıyla ilişkili eşitsizliklerin davranışlarını inceleyerek, yeni sonuçlar elde etmek ve bu alandaki çalışmalara katkıda bulunmak amacını taşımaktadır. Bu çalışma, integral eşitsizlikleri ve ortalama eşitsizlikler için Euler Beta fonksiyonlarını içeren yeni eşitsizliklerin ortaya çıkmasına yardımcı olacak olan kullanışlı bir yöntem sunmaktadır.

6. KAYNAKLAR

- [1] M. Balcı, *Matematik Analiz*, 7. Baskı, İstanbul, Türkiye: Sürat Üniversite Yayınları, 2012.
- [2] J. Pečarić, F. Proschan ve Y. L. Tong, “Konveks functions, partial orderings and statistical applications,” *Academic Press Inc.*, New York, USA c. 187, 4th ed., ss. 1-43, 1992.
- [3] G. H. Hardy, J. E. Littlewood ve G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge, England: Cambridge University Press, ss. 1-314, 1934.
- [4] E. F. Beckenbach ve R. Bellman, *Inequalities*, Berlin, Deutschland: Springer-Verlag, ss. 1-198, 1961.
- [5] D. S. Mitrinovic, *Analytic Inequalities*, Berlin, Deutschland: Springer Verlag, ss. 1-185, 1970.
- [6] J. Pecaric, F. Proschan, Y. L. Tong, *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications*, San Diago, USA: *Academic Press*, ss. 1-82, 1992.
- [7] J. Hadamard, “Etude sur les proprietes des fonctions entieres et en particulier d’une fonction considree par, Riemann,” *J. Math. Pures.et Appl.*, c. 58, ss. 171- 215, 1893.
- [8] U. S. Kırmacı, “Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula,” *Appl. Math. Comp.*, c. 147, ss. 137-146, 2004.
- [9] S. S. Dragomir, “On Simpson’s quadrature formula for mappings of bounded variation and applications,” *Tamkang J. of Mathematics*, (in press).
- [10] B. G. Pachpatte, *Mathematical Inequalities*, Amsterdam, Holland: *Elsevier Science*, c. 67, ss. 11-45, 2005.
- [11] W. H. Young, “On classes of summable functions and their Fourier series,” *Proc. Roy. Soc.*, c. 87, ss. 225-229, 1912.

- [12] W.W. Bell, *Special Functions for Scientists and Engineers*. Courier Corporation D., London, Van Nostrand Company, 1968.
- [13] D. S. Mitrinović, *Analytic Inequalities* 1th ed., Berlin, Germany: Springer Verlag, ss. 27-196, 1970.
- [14] M. Z. Sarikaya, A. Saglam, H. Yildirim. “New inequalities of Hermite–Hadamard type for functions whose second derivatives absolute values are convex and quasi-convex,” *Int. J. Open Problems Comput. Math.* c.5, sayı 3, 1–14, 2012.
- [15] M. E. Özdemir ve Ç. Yıldız, “A new generalization of the midpoint formula for n-time differentiable mappings which are convex,” *arXiv:1404.5128v1*, 2014.
- [16] L. Fejer, “Über die Fourierreihen,” *II. Math. Naturwiss. Anz Ungar. Akad. Wiss.*, c. 24, ss. 369-390, 1906.
- [17] S. S. Dragomir, C.E.M. Pearce, “Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications,” *RGMIA Monographs*, Victoria University, 2000.
- [18] P. Auscher, T. Coulhon, A. Grigoryan, *Heat Kernels and Analysis on Manifolds, Graphs, and Metric Spaces: Lecture Notes from a Quarter Program on Heat Kernels, Random Walks, and Analysis on Manifolds and Graphs*, April 16--July 13, 2002, Emile Borel Centre of the Henri Poincaré Institute, Paris, France: Contemporary Mathematics, American Mathematical Society, 2003.
- [19] J. L. W. V. Jensen, “Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes,” *Acta Math.*, 30 (1), ss. 175-193, 1905.
- [20] Y. Nesterov, *Introductory Lectures on Convex Optimization*, A Basic Course, Applied Optimization Springer US, 2013.
- [21] J. E. Pecaric, Y. L. Tong, *Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications*, Mathematics in Science and Engineering Elsevier Science, 1992.
- [22] W. Rudin, “Real and Complex Analysis,” *McGraw-Hill, Inc.*, New York, NY, USA 1987.
- [23] A. Akkurt, Z. Kacar, H. Yildirim. “Generalized fractional integral inequalities for continuous random variables,” *J. Probab. Stat.* 2015 (2015), Article ID 958980.

- [24] A. Akkurt, M. E. Yildirim, H. Yildirim. “On some integral inequalities for (k, h) -Riemann-Liouville fractional integral,” *New Trends in Math. Sci. (NTMSCI)* 4, sayı 1, 138–146, 2016.
- [25] H. Budak, F. Ertugral, M. Z. Sarikaya. “New generalization of Hermite-Hadamard type inequalities via η generalized fractional integrals,” *Ann. Univ. Craiova-Math.and Comput. Sci.* Ser. 47, sayı 2, 369–386, 2020.
- [26] M. A. Chaudhry, A. Qadir, M. Rafique, S. M. Zubair. “Extension of Euler’s beta function,” *J. Comput.and App. Math.* 78, 19–32, 1997.
- [27] S. S. Dragomir, R. P. Agarwal. “Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula,” *Appl. Math. Lett.* 11, sayı 5, 91–95, 1998.
- [28] G. Farid, A. Rehman, M. Zahra. “On Hadamard type inequalities for k -fractional integrals,” *Konuralp J. Math.* 4, sayı 2, 79–86, 2016.
- [29] G. Farid, A. Rehman, M. Zahra. “On Hadamard inequalities for k -fractional integrals,” *Nonlinear Funct. Anal.and App.* 21, sayı 3, 463–478, 2016.
- [30] H. Kavurmaci, M. Avci, M. E. Ozdemir, “New inequalities of Hermite-Hadamard type for convex functions with applications,” *J. Inequal. Appl.*, 2011:86, 2011.
- [31] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, NorthHolland, Amsterdam: Mathematics Studies. 204, Elsevier Sci. B. V., 2006.
- [32] P. O. Mohammed, M. Z. Sarikaya. “On generalized fractional integral inequalities for twice differentiable convex functions,” *J. Comput. Appl. Math.* 372, 112740, 2020.
- [33] P. O. Mohammed. “New integral inequalities for preinvex functions via generalized beta function,” *J. Interdisciplinary Math.* 22, sayı 4, 539-549, 2019.
- [34] P. O. Mohammed, M. Vivas-Cortez, T. Abdeljawad, Y. Rangel-Oliveros. “Integral inequalities of HermiteHadamard type for quasi-convex functions with applications,” *AIMS Math.* 5, 7316–7331, 2020.
- [35] R. Gorenflo, F. Mainardi. *Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order*, Springer Verlag, Wien, Springer Verlag, 223–276, 1997.

- [36] S. Miller, B. Ross. "An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations," *John Wiley & Sons, USA*, p.2, 1993.
- [37] R. K. Raina. "On generalized Wright's hypergeometric functions and fractional calculus operators," *East Asian Math. J.* 21, sayı 2, 191–203, 2005.
- [38] M. Z. Sarikaya, F. Ata. "On the generalized Hermite-Hadamard inequalities involving beta function," *Konuralp J. Math.* 9, sayı 1, 112-118, 2021.
- [39] M. Z. Sarikaya, F. Ertugral. "On the generalized Hermite-Hadamard inequalities," *Ann. Univ. Craiova-Math.and Comput. Sci.* Ser. 47, sayı 1, 193-213, 2020.
- [40] M. Z. Sarikaya, N. Aktan. "On the generalization some integral inequalities and their applications," *Math. Comput. Modelling* 54, sayı 9-10, 2175–2182, 2011.
- [41] M. Z. Sarikaya, M. E. Kiris. "Some new inequalities of Hermite–Hadamard type for s-convex functions," *Miskolc Math. Notes* 16, sayı 1, 491–501, 2015.
- [42] M. Z. Sarikaya, E. Set, H. Yaldiz, N. Basak. "Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities," *Math. Comput. Modelling*, 57, 2403–2407, 2013.
- [43] M. Z. Sarikaya, H. Yaldiz. "On generalization integral inequalities for fractional integrals," *Nihonkai Math. J.* 25, 93–104, 2014.
- [44] M. E. Ozdemir, S. S. Dragomir, C. Yildiz. "The Hadamard's inequality for convex function via fractional integrals," *Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.)* 33, sayı 5, 1293–1299, 2013.
- [45] T. Ali, M. A. Khan, Y. Khurshidi. "Hermite-Hadamard inequality for fractional integrals via eta-convex functions," *Acta Math. Univ. Comenian.* 86, sayı 1, 153–164, 2017.
- [46] M. Iqbal, M. I. Bhatti, K. Nazeer. "Generalization of inequalities analogous to Hermite–Hadamard inequality via fractional integrals," *Bull. Korean Math. Soc.* 52, sayı 3, 707–716, 2015.
- [47] G. Rahman, K. Nisar, T. Kim, S. Mubeen, M. Arshad. "Inequalities involving extended k-gamma and k-beta functions," *Proc. Jangjeon Math. Soc.* 21, sayı 1.,

143–153, 2018.

- [48] S. Mubeen, G. M. Habibullah. “k-Fractional integrals and application,” *Int. J. Contemp. Math. Sci.* 7, sayı 2, 89– 94, 2012.
- [49] R. Hussain, A. Ali, G. Gulshan, A. Latif, M. Muddassar. “Generalized co-ordinated integral inequalities for convex functions by way of k-fractional derivatives,” *Miskolc Math. Notes*, 2017.
- [50] R. Hussain, A. Ali, A. Latif, G Gulshan. “Some k-fractional associates of Hermite-Hadamard’s inequality for quasi-convex functions and applications to special means,” *Fract. Differ. Calc.*, 7, sayı 2, 301–309, 2017.
- [51] S. Wu, M. U. Awan, M. A. Noor, K. I. Noor, S. Iftikhar. “On a new class of convex functions and integral inequalities,” *J. Inequal. Appl.*, 131, 2019.

