

**T.C.
ADYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

f – BİHARMONİK NORMAL KESİT EĞRİLERİ

GÜLİSTAN POLAT

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADYAMAN, 2018

**T.C.
ADİYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

f - BİHARMONİK NORMAL KESİT EĞRİLERİ

Gülistan POLAT

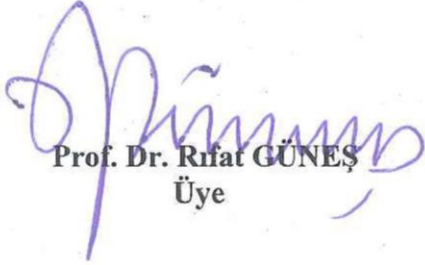
Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

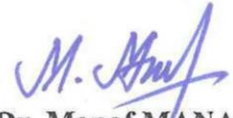
Bu tez 11/09/2018 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından
oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.



Dr. Öğr. Üyesi Feyza Esra ERDOĞAN
Danışman



Prof. Dr. Rifat GÜNEŞ
Üye



Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Üye

Prof. Dr. Refet KARADAĞ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu'ndaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

f - BİHARMONİK NORMAL KESİT EĞRİLERİ

Gülistan POLAT

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Feyza Esra ERDOĞAN
Yıl : 2018, Sayfa sayısı: 62
Jüri : Prof. Dr. Rıfat GÜNEŞ
Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Dr. Öğr. Üyesi Feyza Esra ERDOĞAN

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde diğer bölümlere faydalı olacak materyal ve yöntemleri; Normal kesit eğrisi, biharmonik dönüşüm, eğrilik, frenet denklemleri, tensiyon alanı, enerji integrali ele alındı.

İkinci bölümde Riemann manifoldların altmanifoldlarının düzlemsel normal kesitlere sahip olmaları için gerekli şartlar verildi ve düzlemsel normal kesitli yüzeylerin sınıflandırılması yapıldı. Ayrıca bu bölümde düzlemsel normal kesitli altmanifoldlar normal kesit eğrisinin eğrilikleri yardımıyla ele alındı.

Üçüncü bölümde bulgu ve tartışmalar başlığı altında f -bi-harmonik eğriler ele alındı. Verilen bir eğrinin f -bi harmonik olma şartları incelendi.

Anahtar Kelimeler: Normal Kesit Eğrisi; Bi- f - Harmonik Eğri; f - Biharmonik Eğri

ABSTRACT

MSc Thesis

f - BİHARMONİK NORMAL KESİT EĞRİLERİ

Gülistan POLAT

Adiyaman University
Graduate School of Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Supervisor : Dr. Lecturer Feyza Esra ERDOĞAN
Year : 2018, Number of pages: 62

Jury : Prof. Dr. Rıfat GÜNEŞ
: Prof. Dr. Manaf MANAFLI
: Dr. Lecturer Feyza Esra ERDOĞAN

This thesis consist of three chapters. In the first chapter, we give material and methods that will be useful for other chapters are given e.g. normal section curve, biharmonic map, frenet equations, tension fields, energy integral.

In the second chapter, we give sufficient and necessary conditions for having a planar normal section of submanifolds of a Riemannian manifold. Also, we make classification of surfaces with planar normal section. Furthermore, in this chapters, submanifolds with planar normal sections is investigated with the help of curvatures of normal section curve.

In the third chapter, we give f -biharmonic curves under title findings and discussions. It is investigated sufficient conditions for which be f - biharmonic of a curve.

Key Words: Normal Section Curve; Bi- f - Harmonic Curve; f -Biharmonic Curve

BEYAN

' f –Biharmonik Normal Kesit Eğrileri' başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ayrıca alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.

Gülistan POLAT

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince geniş bilgi birikimiyle desteğini esirgemeyen, her zaman yol gösterici olan ve karşılaştığım zorlukların üstesinden gelinmesinde bana yardımcı olan sayın danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Feyza Esra Erdoğan’a ve Doç. Dr. Selcen Yüksel Perktaş’a teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca her zaman yanımda olan Sevgili arkadaşım Ayla Yücekaya’ya ve bu süreçte manevi desteğini hiç bir zaman esirgemeyen Sevgili eşim Hidayet’e teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	I
ABSTRACT.....	II
BEYAN.....	III
TEŞEKKÜR.....	IV
İÇİNDEKİLER	V
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	VI
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	2
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	6
4. DÜZLEMSEL NORMAL KESİTLER.....	21
4.1. Düzlemsel Normal Kesitli Manifoldlar	21
4.2. Düzlemsel Normal Kesitli Yüzeylerin Sınıflandırılması	27
4.3. Düzlemsel Normal Kesit Eğrileri ve Eğrilikler	32
4.3.1. Riemann Manifoldlarının Düzlemsel Normal Kesitli Altmanifoldları... 32	
4.3.2. Normal Kesit Eğrileri ve Riemann Manifoldlar Üzerinde Eğriler	38
4.3.3. Bi-f-Harmonik Eğriler	39
5. BULGULAR ve TARTIŞMA.....	45
5.1. f-Biharmonik Eğriler	45
6. SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	59
KAYNAKLAR	60
KİŞİSEL BİLGİLER.....	62

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\{(U_a, \psi_a)\}_{a \in A}$	: Atlas (Koordinat Komşuluğu Sistemi)
$[,]$	: Lie Operatörü
$T_M^*(p)$	: Tanjant Vektörü
f_*	: Türev Dönüşümü
$\otimes$	: Tensörel Çarpım
$\wedge$	: Cross çarpımı
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar Kümesi
Υ	: Normal Kesit Eğrisi
H	: Ortalama Eğrilik Vektör Alanı
K	: Eğrilik
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
c	: Sabit
∇	: Levi Civita Konneksiyonu
τ	: Torsiyon (Burulma)

1.GİRİŞ

Altmanifoldların geometrisi incelenirken altmanifoldların sınıflandırılması uygulamada önemli bir yer teşkil etmektedir.

Bir çok yazar altmanifoldları sınıflandırma yoluna giderken; altmanifoldlar üzerindeki distribüsyonlardan faydalanmıştır. Daha sonra bu distribüsyonlara tamamen geodeziklik, tamamen umbiliklik, integrallenebilirlik şartlarını yükleyip yapılan işlemleri kolaylaştırmaya çalışmışlar ve buldukları sonuçlarla altmanifoldların özelliklerini araştırmışlardır. Bu işlevsel bir yöntem olmakla birlikte uygulamada zaman alıcıdır. Altmanifold geometrisini incelemeye en temel ve en basit yöntem eğri üzerinde çalışmaktır. Bu doğrultuda Chen [1-3] normal kesit eğrisini tanımladı ve bunu altmanifoldların geometrisini incelemeye kullandı. Chen [1 3], Young Ho Kim [4-6] , Shi-Jie Li [1] vs. normal kesit eğrisi kavramıyla altmanifoldları sınıflandırma yoluna gitmişlerdir.

Riemann manifoldları arasındaki harmonik dönüşümler ile ilgili ilk kapsamlı çalışma Eells ve Sampson [7] tarafından yapılmıştır. Daha sonra harmonik dönüşümler birçok yazara ışık olup, bu alanda birçok çalışma gerçekleştirilmiştir ve günümüze kadar yoğun ilgi alanlarından biri olmuştur. Harmonik dönüşümler varyasyonel hesaplama ile ilgilidir. Bu hesaplama en uygun seçilen objelerle çalışmayı gerektirir. Bu durum kabaca harmonik dönüşümler için seçilen uygun fonksiyonun, uygun noktadaki türevinin sıfıra eşit olmasıdır. Burdan yola çıkarak harmonik dönüşümlerin varyasyon fonksiyonlarının kritik noktalarının geodezik eğriler ve minimal yüzeyler tanımladığı bilinmektedir. Bu yüzden Riemann manifoldlarının harmonik dönüşümleri üzerine çalışmak için dönüşümün enerjisi ve tensiyonu, kotanjant uzay ve pull-back tanjant demetleri üzerinde konneksiyonlar tanımlayarak Riemann manifoldlarının harmonik dönüşümünün varyasyonları incelenmiştir.

Eells ve Lemaire [8], 1983 yılında yayınlanan çalışmalarında k - harmonik dönüşümler önerdiler. $k= 2$ için Jiang bu tür dönüşümlerin varyasyon formüllerini elde etti. Bu dönüşümlere günümüzde biharmonik dönüşümler diyoruz.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Düzlemsel normal kesitli altmanifoldlar ve onların sınıflandırılması ilk olarak 1965 lerde Bang Yen Chen [3] tarafından çalışıldı. Chen [3] ilk önce normal kesit eğrisini tanımladı. Şöyleki: M, E^m m – boyutlu öklidyen uzayın n – boyutlu bir altmanifoldu ve $t, p \in M$ noktasında $t \in T_p M$ tanjant vektörü olmak üzere

$$E(p, t) = \{t\} \cup T_p M^\perp$$

afin uzay tanımlanmıştır.

$$E(p, t) \cap M = \gamma$$

olup γ ya $p \in M$ noktasında t doğrultusunda M nin normal kesit eğrisi olduğunu söylemiştir [3]. Genelde $p \in M$ de

$$\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''' \neq 0$$

dır. Eğer

$$\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''' = 0$$

ise M ye pointwise 2-düzlemsel normal kesitlere sahiptir denir. Daha genel olarak $p \in M$

$$\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \dots \wedge \gamma^{(k+1)} = 0$$

ise M ye pointwise k -düzlemsel normal kesitlere sahiptir denir. Benzer çalışmaları birçok yazar yapmış ve bu çalışmalar Chen' in öğrencisi Kim [4-6], Semi-Riemann manifoldlara taşımıştır. Semi-Riemann manifoldlarda normal kesit eğrisi γ' nin timelike yada specelike olması durumunda bu normal kesit eğrisinin hangi altmanifoldlarda bulunabileceğini sınıflandırmıştır [4-6]. Eğrinin null olması durumunu incelememiştir. Feyza Esra Erdoğan [9] doktora tezinde buradan hareketle aynı çalışmayı Semi- Riemann manifoldların Lightlike altmanifoldlarına taşıyarak Minkowski 3- uzayda düzlemsel normal kesitleri incelemiştir. Minkowski 3- uzayında ve R_2^4 te düzlemsel normal kesitli half lightlike altmanifoldlarda bir çalışma yapmıştır. Lightlike geometride distribüsyon sayısı fazla ve dejenerelik söz konusu olduğundan uygulamada birçok sıkıntıyla karşılaşılırken; Riemann ve Semi Riemann da yapılan bu çalışmalar Lightlike manifoldlara taşıdığımızda uygulamada ki bazı sıkıntıların daha rahat çözüldüğü görüldü. Lightlike da dejenere ve non-dejenere normal kesit

eğrilerini tanımlarken M, R_1^3 minkowski 3- uzayında Lightlike altmanifold olmak üzere $p \in M$ noktasında $\xi \in RadTM$ alındı.

$$E(p, \xi) = \{\xi\} \cup trTM$$

uzayı tanımlanıp

$$\gamma = E(p, \xi) \cap M,$$

non-dejenere normal kesit eğrisi adı verildi ve her iki durumda

$$\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''' = 0$$

olma durumunun gerçekleşebilmesi için Lightlike altmanifoldun hangi durumlar sağlaması gerektiği şartları bulundu. Chen [3] , diğer yazarlar ve Erdoğan [9] gerek Riemann, Semi Riemann gerekse Lightlike' ta yapılan bu çalışmalarda $\gamma', \gamma'', \gamma'''$ ' yü hesaplarken Gauss ve Weingarten formüllerinden faydalanmışlardır. Bu çalışmada γ nın türevleri hesaplarken frenet denklemlerinden faydalanılırsa ve normal kesit eğrisinin eğrilikleri işin içine katılırsa ne gibi sonuçlar elde edilir diye düşünüldü ve normal kesit eğrisinin eğrilikleri yardımıyla

$$\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''' = 0 ,$$

şartının sağlaması için nasıl eğriler olması gerektiği bulunup örnek verildi. Ayrıca

$$\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''' \wedge \gamma'^V = 0$$

pointwise 3-düzlemsel normal kesite sahip olması tanımında kullandığımız γ'^V ifadesinden γ' ' nin biharmonik olabilmesi için nasıl eğri olması gerektiği yorumlandı.

Biharmonik dönüşümler, harmonik dönüşümlerin genelleştirilmiş olduğuundan hem matematiksel açıdan hem de uygulama anlamında daha genel sonuçlara ulaşmayı mümkün kılar.

Son zamanlarda R. Caddeo [10,11], L.Vanhecke [12] ve daha pek çok araştırmacı Riemann manifoldları üzerindeki biharmonik fonksiyonları inceleyerek konuyu diferansiyel geometri alanında geliştirdiler ve tartışmaya açtılar. Temel olarak iki farklı araştırma alanına ayrılabilen biharmonik dönüşümler teorisine olan ilgi son on yılda giderek arttı. Bir taraftan diferansiyel geometri bakış açısıyla örnekler ve sınıflandırmalar inşa edilmesi dikkat çekerken; diğer taraftan biharmonik dönüşümler dördüncü mertebeden güçlü bir eliptik semi-lineer kısmi diferansiyel denklemin,

çözümleri olduğundan kısmi diferansiyel denklemler açısından da analitik yönüyle incelenmektedir. Riemann manifoldları arasında tanımlanan diferensiyellenebilir bir

$$\varphi: M \rightarrow N$$

dönüşümü eğer $E(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M |d\varphi|^2 v_g$ ile verilen enerji fonksiyonelinin kritik noktası ise harmonik dönüşüm [7] olarak adlandırılır. Enerji için Euler-Lagrange denklemi $\tau(\varphi) = iz\nabla d\varphi$ ile tanımlanan tensiyon alanının sıfır olması ile karakterize edilir. Benzer bakış açısıyla bir (N, h) Riemann manifolduna tanımlanan Riemann immersiyonların uzayı $Imm(M, N)$ ile gösterilecek olursa, eğer bir $\varphi: (M, \varphi^*h) \rightarrow (N, h) \in Imm(M, N)$ Riemann immersiyonu $V(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M v_{\varphi^*h}$ hacim fonksiyonelinin bir kritik noktası ise φ' ye minimal dönüşüm denir. Hacim ile birleşen Euler-Lagrange denklemi H ortalama eğrilik vektör alanının sıfır olması ile karakterize edilir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Tanım 3.1. X bir cümle ve τ da X in kuvvet cümlesinin bir ailesi olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa τ ya X üzerinde bir topoloji [13]. denir

$$i) X, \emptyset \in \tau$$

$$ii) \{A_i\}_{i \in J} \text{ (} \hat{J} \text{ sonlu indis kümesi) için , } \cup_{i \in J} A_i \in \tau$$

$$iii) \{A_i\}_{i \in J} \text{ (} \hat{J} \text{ sonlu indis kümesi) için , } \cap_{i \in J} A_i \in \tau$$

Tanım 3.2. X boştan farklı bir cümle ve $d: X \times X \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y, z \in X$ için

$$(i) \quad x \neq y \text{ için } d(x, y) > 0$$

$$(ii) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(iii) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(iv) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

aksiyomları sağlanıyor ise d fonksiyonuna X üzerinde bir metriktir [13] denir.

Tanım 3.3. (X, τ) bir topolojik uzay ve $x \neq y \in X$ olsun. x ve y noktalarının açık komşulukları sırasıyla U ve V olmak üzere $U \cap V = \emptyset$ ise (X, τ) topolojik uzayına Hausdoff uzay [13] denir

Tanım 3.4. M bir Hausdoff uzay olsun. $\forall p \in M$ için M de E^n ($n \leq 0$) ye homeomorf olan bir U açık komşuluğu bulunabilirse M ye n -boyutlu topolojik manifold [13] denir.

Tanım 3.5. M n -boyutlu topolojik manifold ve U , M nin açık bir altcümlesi olsun. Eğer U bir ψ homeomorfizmi ile E^n nin bir W alt cümlesine eşlenebiliyorsa (U, ψ) ikilisine M de bir koordinat komşuluğu denir. $p \in U$ için

$\psi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$, $x_i(p) \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$ dir. Burada $x_i(p)$ reel sayısına $\psi(p)$ noktasının i . koordinatı [13] denir.

Tanım 3.6. M bir n boyutlu topolojik manifold ve M nin bir açık örtüsü $\{U_a\}$ olsun. U_a açık cümlelerinin α indislerinin cümlesi A olmak üzere $\{U_a\}$ örtüsü için $\{U_a\}$ $\alpha \in A$ yazalım. E^n de U_a ya homeomorf olan bir açık cümle E_a ve

$$\psi_a: U_a \rightarrow E_a$$

olsun. Koordinat komşuluklarının $\{(U_a, \psi_a)\}_{a \in A}$ koleksiyonuna bir atlas (veya koordinat komşuluğu sistemi) [13] denir.

Tanım 3.7. M bir n - boyutlu manifold ve $S = \{(U_a, \psi_a)\}_{a \in A}$ M nin bir atlası olsun. Eğer S atlası aşağıdaki özelliğe sahip ise S ye $C^r, r \geq 1$ sınıfındandır [13] denir.

$$\begin{aligned} U_a \cap U_b &\neq \emptyset \quad \text{olmak üzere } \forall \alpha, \beta \in A \\ \Phi_{\alpha\beta} &= \psi_a \circ \psi_\beta^{-1}: \psi_\beta(U_a \cap U_\beta) \rightarrow \psi_\alpha(U_a \cap U_\alpha) \\ \Phi_{\beta\alpha} &= \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}: \psi_\alpha(U_a \cap U_\beta) \rightarrow \psi_\beta(U_a \cap U_\alpha) \end{aligned}$$

fonksiyonlar C^r sınıfındandır. Eğer S atlası M üzerinde C^r sınıfından ise S ye C^r sınıfından bir diferensiyel yapı denir. Buna göre S atlasının C^r sınıfından olması $(\Phi_{\alpha\beta}), (\Phi_{\beta\alpha}), 1 \leq i \leq n$ fonksiyonlarının C^r sınıfından olması ile tanımlanır.

Tanım 3.8. M n -boyutlu bir topolojik manifold ve M nin C^r sınıfından atlası S olsun. Bu durumda M ye diferensiyellenebilir manifold [13] denir. Eğer S, C^r sınıfından ise M ye n -boyutlu analitik manifold denir.

Tanım 3.9. M bir manifold olsun.

$$C^\infty(M, \mathbb{R}) = \{f | f: U \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^\infty(U)\}$$

cümlesini ele alalım. Bir

$$V_p: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \rightarrow V_p[f] = \sum_{i=1}^n v_i \Big|_p \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (3.1)$$

dönüşümü için $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$i) \vec{V}_p(\lambda f + \mu g) = \lambda \vec{V}_p[f] + \mu \vec{V}_p[g]$$

$$ii) \vec{V}_p[(fg)] = \vec{V}_p[f]g(p) + f(p)\vec{V}_p[g]$$

aksiyomları sağlanıyorsa $\vec{V}_p$ fonksiyonuna M nin p noktasındaki tanjant vektörü [13] denir. M manifoldunun bir $p \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesini

$$T_M(p) = \{\vec{V}_p | \vec{V}_p: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}\}$$

ile gösterelim. Bu cümle

$$\oplus: T_M(p) \times T_M(p) \rightarrow T_M(p)$$

$$(V_p, W_p) \rightarrow \vec{V}_p + \vec{W}_p: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{V}_p \oplus \vec{W}_p)[f] = \vec{V}_p[f] + \vec{W}_p[f]$$

ve

$$\odot: \mathbb{R} \times T_M(p) \rightarrow T_M(p)$$

$$(\lambda \odot \vec{V}_p)[f] = \lambda \vec{V}_p[f], \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

işlemlerine göre $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzay olur. Bu uzaya M' nin p noktasındaki tanjant uzayı [13] denir.

Tanım 3.10. M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M manifoldu üzerinde diferensiyellenebilir bir eğri; R nin (a, b) aralığından M ye diferensiyellenebilir dönüşüm [13] olarak tanımlanır.

Tanım 3.11. M , n –boyutlu bir manifold ve M üzerinde diferensiyellenebilir bir eğri $\varphi: (a, b) \rightarrow M$ olsun.

$$V_p^\rightarrow = \sum \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(t_0)}$$

tanjant vektörüne diferensiyellenebilir φ eğrisinin $\varphi(t_0)$ noktasındaki tanjant vektörü [13] denir.

Tanım 3.12. M n –boyutlu bir manifold ve p noktasındaki tanjant uzay $T_M(p)$ olsun.

$$T_M^*(p) = \{f | f: T_M(p) \rightarrow \mathbb{R}\}$$

uzayına $T_M(p)$ nin dual uzayı veya kotanjant uzayı [13] denir.

Tanım 3.13. M bir manifold ve $X, Y \in \chi(M)$, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olsun.

$$[,]: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$\forall p \in M$ için

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

ile tanımlanan fonksiyona X ile Y nin Lie(bracket) operatörü [13] denir ve aşağıdaki özellikleri sağlar. $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere

1. $[X, Y] \in C^\infty(M, \mathbb{R})$
2. $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(X[g])Y - g(Y[f])X$
3. $[X, Y] = -[Y, X]$
4. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[X, Z], Y] = 0.$

Tanım 3.14. M, M' m ve n boyutlu C^∞ manifoldlar ve $f: M \rightarrow M'$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda

$$f_*: T_M(p) \rightarrow T_{M'}(p)$$

$$V_p \rightarrow f_*|_p(V_p) = (V_p^\rightarrow[f_1]|_{f(p)}, \dots, V_p^\rightarrow[f_m]|_{f(p)})$$

ile tanımlı f_* dönüşümüne f nin diferensiyeli (türev dönüşümü) [13] denir.

Tanım 3.15. M, M' m ve n boyutlu C^∞ manifoldlar ve $f: M \rightarrow M'$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall p \in M (f_*)_p$ birebir ise f ye immersiyon denir. Bu durumda M ye immersed altmanifold [13] denir.

Tanım 3.16. $f: M \rightarrow M'$ immersiyon olsun. Eğer f birebir ise f ye imbedding denir. Bu durumda M ye imbedded altmanifold [13] denir.

Tanım 3.17. $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$ den $\mathbb{R}$ ye bütün r – lineer fonksiyonların cümlesini

$$L(V_1 \dots V_r; \mathbb{R})$$

ile gösterelim. Bu cümlede toplama ve skalerle çarpma işlemleri sırasıyla

$\forall (u_1 \dots u_r) \in V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$ için

$$(f_1 + f_2)(u_1 \dots u_r) = f_1(u_1 \dots u_r) + f_2(u_1 \dots u_r)$$

ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$(\lambda f)(u_1 \dots u_r) = \lambda f(u_1 \dots u_r)$$

şeklinde tanımlanırsa bu iki işleme göre $L(V_1 \dots V_r; \mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzay olur. Bu vektör uzayına $V_1^*, V_2^*, \dots, V_r^*$ dual vektör uzaylarının tensörel çarpımı [13]. denir ve

$$L(V_1, \dots, V_r; \mathbb{R}) = V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_r^*$$

ile gösterilir. $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_r^*$ tensör uzayının her bir elemanına r . dereceden bir tensör [11]. denir.

$$V_1 = V_2 = \dots = V_r$$

ise $V^* \otimes V^* \otimes \dots \otimes V^*$ uzayına bir kovaryant tensör uzayı ve bu uzayın her bir elemanına da r . mertebeden bir kovaryant tensör [13] denir. $T^*(V)$ veya $\otimes^r V^*$ ile gösterilir.

Tanım 3.18. M bir manifold ve g, M üzerinde $(0,2)$ mertebeli tensör alanı olsun. Eğer g tensör alan $X, Y \in \chi(M)$ için

$$1. g(X, Y) = g(Y, X)$$

$$2. g(X, X) \geq 0 \text{ ve } g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$$

sağlanıyorsa g ye *Riemann* metriği [13] denir. g *Riemann* metriği ile tanımlı bir manifoldda *Riemann* manifoldu denir.

Tanım 3.19. M bir manifold ve M üzerinde vektör alanlarının uzayı χ olmak üzere

$$\begin{aligned}\nabla: \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla_X Y\end{aligned}$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa ∇ ya M manifoldu üzerinde bir lineer konneksiyon [13] denir. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

- 1) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
- 2) $\nabla_X(fY + gZ) = f\nabla_X Y + g\nabla_X Z + (Xf)Y + (Xg)Z.$

Tanım 3.20. M bir manifold ve ∇ , M üzerinde lineer konneksiyon olsun. Eğer ∇ konneksiyonu aşağıdaki iki özelliğe sahipse *Riemann konneksiyonu* [13] adını alır. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

1. $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$
2. $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

Tanım 3.21. M , n –boyutlu bir manifold ve M üzerindeki konneksiyon ∇ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}T: \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]\end{aligned}$$

olarak tanımlanan vektör değerli tensöre M üzerinde tanımlı ∇ konneksiyonun torsiyon tensörü [13] denir.

Tanım 3.22. M n -boyutlu bir manifold ve M üzerindeki ∇ konneksiyonunun torsiyon tensörü T olsun. Eğer $T = 0$ ise ∇ konneksiyonuna simetriktir veya sıfır torsiyonludur [13]. denir.

Tanım 3.23. $\bar{M}$, m –boyutlu bir *Riemann* manifoldu ve M , $\bar{M}$ ye immersed n – boyutlu bir başka *Riemann* manifoldu olsun. Bu durumda M ye $\bar{M}$ nin *Riemann* altmanifoldu [13] denir.

Tanım 3.24. W , M ve N , C^∞ manifoldlar olmak üzere

$$\varphi: M \rightarrow N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. Bir $W \rightarrow N$ vektör demetinin pull-back demeti

$$\varphi^{-1}: W \rightarrow M$$

ile gösterilir ve $x \in M$ için bu demet

$$(\varphi^{-1}W)_x = W_{\varphi(x)}$$

ile tanımlanan liflere sahiptir. $W \rightarrow N$ vektör demeti üzerindeki konneksiyon ∇^φ ile gösterilen ve

$$\nabla^\varphi: \Gamma(TM) \times \Gamma(\varphi^{-1}W) \rightarrow \Gamma(\varphi^{-1}W)$$

$$(X, \varphi^* \sigma) \rightarrow \nabla_X^\varphi(\varphi^* \sigma) = \nabla_{d\varphi(X)}^W \sigma$$

ile tanımlanan tek lineer konneksiyondur. ∇^φ konneksiyonuna pull-back konneksiyon [13] denir. Burada

$$(\varphi^* \sigma) = (\sigma \circ \varphi)$$

dir.

Tanım 3.25. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldlar ve

$$\varphi: M \rightarrow N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. Bu durumda φ dönüşümünün ikinci temel formu [13]

$d\varphi \in \Gamma(T^*M \otimes \varphi^{-1}TN)$ olmak üzere $\nabla d\varphi$ ile gösterilir ve $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla d\varphi: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(\varphi^{-1}TN)$$

$$(X, Y) \rightarrow \nabla d\varphi(X, Y)$$

$$\nabla d\varphi(X, Y) = \nabla_X^\varphi d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_X^M Y)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.26. M, N Riemann manifoldlar ve $\varphi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ bir C^∞ dönüşüm olsun. Bu durumda φ nin ikinci temel formu simetriktir [13].

Tanım 3.27. $(M, g), (N, h)$ Riemann manifoldlar ve

$$\varphi: M \rightarrow N$$

bir izometrik immersiyon olsun. $\varphi^{-1}TN$ pull-back demeti teğet ve normal demetinin direkt toplamı olarak

$$\varphi^{-1}TN = \tau M \oplus VM, X = X^\tau + X^\perp$$

biçiminde yazılabilir. $d\varphi$ türev dönüşümünün, TM ile TM nin $d\varphi$ altında $\varphi^{-1}TN$ pull-back demetindeki görüntüsü olan τM yi özdeşleştirildiği düşünülürse $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_X^\varphi(d\varphi(Y)) = \nabla_X^N Y$$

eşitliğine ulaşılır. Bu durumda $d\varphi(\nabla_X^M Y)$, $\nabla_X^N Y$ nin tanjant bileşeni ve $\nabla d\varphi(X, Y)$ ise $\nabla_X^N Y$ nin normal bileşenidir. Böylece $\nabla d\varphi(X, Y)$, N deki $\varphi(M)$ immersed altmanifoldunun $B(X, Y)$ ile gösterilen ikinci temel formu [13] olur.

Tanım 3.28. (M^m, g) , (N^n, h) Riemann manifoldlar ve

$$\varphi: M^m \rightarrow N^n$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. φ nin tensiyon alanı [14] $\tau(\varphi) \in \Gamma(\varphi^{-1}(TN))$ ile gösterilir ve

$$\tau(\varphi) = \text{div} d\varphi = -d^* d\varphi = \sum_{i=1}^m \nabla d\varphi(e_i, e_i)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{e_1, \dots, e_m\}$, M üzerinde bir ortonormal bazdır.

Tanım 3.29. M ve N sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldlar, $x \in M$ ve

$$\varphi: M \rightarrow N$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. φ nin enerji yoğunluğu [14] $e(\varphi)$ ile gösterilen ve

$$e(\varphi): M \rightarrow [0, \infty)$$

$$x \rightarrow e(\varphi)_x = \frac{1}{2} |d\varphi_x|^2$$

şeklinde tanımlanan bir C^∞ fonksiyondur. Burada $\{e_1, \dots, e_m\}$, $T_x M$ tanjant uzayı için bir ortonormal baz ve $|d\varphi_x|^2$

$$|d\varphi_x|^2 = \sum_{i=1}^m h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i))$$

ile tanımlanan Hilbert-Schmidt normudur [14].

Tanım 3.30. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldlar; D , M de bir kompakt bölge ve

$$\varphi: M \rightarrow N,$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. φ nin enerji integrali, φ nin enerji yoğunluğunun integrali [14] olarak tanımlanır ve $E(\varphi; D)$ ile gösterilir. Yani

$$E(\varphi; D) = \int_D e(\varphi) v_g = \frac{1}{2} \int_D |d\varphi|^2 v_g,$$

dir.

Tanım 3.31. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldlar ve

$$C^\infty(M, N) = \{\varphi: M \rightarrow N, \varphi \text{ bir } C^\infty \text{ dönüşüm}\}$$

kümesini göz önüne alalım. $\varphi \in C^\infty(M, N)$ kompakt bir D bölgesi üzerinde

$$E(\cdot; D): C^\infty(M, N) \rightarrow \mathbb{R}$$

ile tanımlanan enerji fonksiyonelinin kritik noktası ise φ ye harmoniktir [14] denir.

Tanım 3.32. $M \subset E^3$ eğrisi, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasında ki Frenet 3-ayaklısı [13] , $\{T(t), N(t), B(t)\}$ ise

$$T(t) = \alpha'(t),$$

$$N(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \alpha''(t),$$

$$B(t) = T(t) \times N(t),$$

dir.

Tanım 3.33. Eğrilikler, oskülatör hiperdüzlemlerin değişme oranlarını ölçerler. Buradan oskülatör hiperdüzlemlerini, $n=3$ özel halinde eğriliklerle daha yakından incelenebilir [13]. Bunun için, eğrinin koordinat fonksiyonlarını ele alınırsa;

$$M \subset E^3 \text{ eğrisi, } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\alpha_i \in C^\infty(I, \mathbb{R}), 1 \leq i \leq 3)$$

olmak üzere (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $(\alpha_i, 1 \leq i \leq 3)$ fonksiyonlarını $s_0 \in I$ nın bir komşuluğun da Taylor serisine [13] açılıp ve $s_0 = 0$ alınırsa

$$\alpha_i(s) \cong \alpha_i(0) + \frac{d\alpha_i}{ds} \Big|_0 \cdot s + \frac{d^2\alpha_i}{ds^2} \Big|_0 \cdot \frac{s^2}{2!} + \frac{d^3\alpha_i}{ds^3} \Big|_0 \cdot \frac{s^3}{3!} + \dots,$$

$$\alpha(s) \cong \alpha(0) + s \cdot \alpha'(0) + \frac{s^2}{2} \cdot \alpha''(0) + \frac{s^3}{6} \cdot \alpha'''(0) + \dots,$$

elde edilir. Diğer taraftan, $\alpha(0)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı [13] $\{T_0, N_0, B_0\}$ ve $s \in I$ yay parametresi olmak üzere,

$$\alpha'(0) = T_0,$$

$$\alpha''(0) = k_1(0)N_0,$$

$$\alpha'''(0) = -k_1^2(0)T_0 + \frac{dk_1}{ds} \Big|_0 \cdot N_0 + k_1(0) \cdot k_2(0) \cdot B_0,$$

dır. Buradan $\alpha'(0), \alpha''(0), \alpha'''(0)$ ifadelerini

$$\alpha(s) \cong \alpha(0) + s \cdot \alpha'(0) + \frac{s^2}{2} \cdot \alpha''(0) + \frac{s^3}{6} \cdot \alpha'''(0) + \dots,$$

denkleminde yerine yazarsak,

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \left[s - k_1(0) \frac{s^3}{6} + \dots \right] T_0 + \left[k_1(0) \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} k_1'(0) + \dots \right] N_0 + \left[k_1(0)k_2(0) \frac{s^3}{6} + \dots \right] B_0,$$

denklemini elde edilir.

Şimdi $s_0 = 0$ noktasının bir $\varepsilon \geq 0$ komşuluğunda $\alpha(s)$ eğrisini ele alalım. ε nun öyle küçük bir değeri seçilmeli ki $s \neq 0$ ve

$$s^2 = s^3 = \dots = s^n = \dots = 0$$

olsun. Elde edilen bu eğri bizim eğrimizin bir parçası olduğu için bu parçası $\alpha'(s)$ gösterelim. $\alpha'(s)$

$$\begin{aligned} \alpha(s) = \alpha(0) + \left[s - k_1(0) \frac{s^3}{6} + \dots \right] T_0 + \left[k_1(0) \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} k_1'(0) + \dots \right] N_0 \\ + \left[k_1(0) k_2(0) \frac{s^3}{6} + \dots \right] B_0, \end{aligned}$$

denkleminde

$$\alpha'(s) = \alpha(0) + sT_0$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu eğri ise $\alpha(s)$ eğrimizin $s_0 = 0$ noktasındaki teğet doğrusudur.

Şimdi $s_0 = 0$ ' in öyle bir ε komşuluğunu seçelim ki $s \neq 0$, $s^2 \neq 0$ ve

$$s^3 = s^4 = \dots = s^n = \dots = 0,$$

olsun. Buradan

$$\alpha(s) \cong \alpha(0) + s \cdot \alpha'(0) + \frac{s^2}{2} \cdot \alpha''(0) + \frac{s^3}{6} \cdot \alpha'''(0) + \dots$$

denkleminde elde edilen yeni eğri

$$\alpha'''(s) = \alpha(0) + sT_0 + k_1(0) \frac{s^2}{2} N_0,$$

olur. Bu elde edilen eğri ise parametrik ifadesi $\left(s, k_1(0) \frac{s^2}{2} \right)$ olan bir parabol olup $\alpha(0)$ noktasından geçer. Dolayısı ile buradan şu sonuca varabiliriz. $\alpha'''(s)$ eğrisine $\alpha(s)$ nin kuadratik yaklaşımı [13] denir. $k_1(0)$ eğriliği sayesinde bu parabol tek olarak belli olur. Ayrıca $k_1(0) = 0$ olması halinde de bu eğri bir doğru olur ve $k_1(0) \rightarrow 0$ olması için de bu eğri bir doğruya yaklaşmalıdır. Şuhalde k_1 eğriliği eğrimizin s_0 noktasında bir doğrudan (teğet doğrusundan) ne kadar ayrıldığını gösterir.

Şimdi de eğrinin daha geniş bir yaklaşımını ölçmek için $s_0 = 0$ ' in öyle bir komşuluğunu seçelim ki bu komşulukta $s \neq 0$, $s^2 \neq 0$ ve $s^3 \neq 0$ ve

$$s^4 = s^5 = \dots = s^n = \dots = 0,$$

olsun. Bu şartlar sonucunda elde edilen bu yeni eğrinin ifadesi

$$\alpha'''(s) = \alpha(0) + \left(s - k_1(0)\frac{s^3}{6}\right)T(0) + \left(k_1(0)\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6}k_1'(0)\right)N_0 + k_1(0)k_2(0)\frac{s^3}{6}B_0,$$

biçiminde olur. Bu eğriye $\alpha(s)$ eğrimizin Frenet yaklaşımı [13] denir. Bu eğri üç boyutlu uzayda $\alpha(0)$ dan geçer ve parametrik ifadesi

$$\begin{aligned}x &= s - k_1(0)\frac{s^3}{6}, \\y &= k_1(0)\frac{s^2}{2} + k_1'(0)\frac{s^3}{6}, \\z &= k_1(0)k_2(0)\frac{s^3}{6},\end{aligned}$$

dir. Yani $k_2(0) = 0$ için bu eğri $\alpha(s)$ ' in oskülatör düzleminde yatar, aksi halde bu düzlemden uzaklaşır. Sonuç olarak k_2 burulması eğrimizin bir düzlemden ne kadar saptığını gösterir.

Tanım 3.34. γ, E^n de , $\gamma: I \subseteq E \rightarrow E^n$ ile tanımlı birim hızlı bir eğri olsun. Bu γ eğrisi her $s \in I$ için d- salınım eğrisi, bir Frenet eğrisi [15] olarak adlandırılır. (Burada $\gamma'(s) = v$ dir) ve $k_1, k_2, \dots, k_{d-1}: I \rightarrow \mathbb{R}$, $d - 1$ fonksiyonlar Frenet eğriliği olarak isimlendirir. Öyle ki Frenet formülleri , $D E^n$ nin levi-civita konneksiyonu olduğu yerde

$$\begin{aligned}D_{v_1}\gamma'(s) &= k_1(s)v_2(s) \\D_{v_1}v_2(s) &= -k_1(s)\gamma(s) + k_2(s)v_3 \\&\dots\dots\dots \\D_{v_1}v_i(s) &= -k_{i-1}(s)v_{i-1}(s) + k_i(s)v_{i+1}(s) \\D_{v_1}v_{i+1}(s) &= -k_i(s)v_i(s)\end{aligned}$$

tanımlanır.

$$\gamma: I \subseteq E \rightarrow E^n$$

tanımlı bir regüler W eğrisi $rank W = d$ nin bir W eğrisi olarak adlanılır. Eğer γ , d salınım eğrisinin mertebesinin bir Frenet eğrisi ve Frenet eğrileri ($1 \leq i \leq d - 1$) sıfırdan farklı sabittir. Bir $rank W = 3$ ün W eğrisi bir sağ dairesel helistir [15].

Tanım 3.35. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldlar olsun. Bu durumda

$$\varphi: M \rightarrow N,$$

C^∞ dönüşümü M nin bütün kompakt bölgeleri ve D içinde desteklenen bütün $C^\infty \{\varphi_t\}$ varyasyonlar için

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t; D)|_{t=0} = 0,$$

şartını sağlıyorsa φ ye bir harmonik dönüşüm [14] denir.

Tanım 3.36. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldlar, $x \in M$ ve

$$\varphi: M \rightarrow N,$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. $\varphi^{-1}TN$ pull-back demeti üzerindeki pull-back metrik [14] $\langle, \rangle$ ile gösterilir ve $v, w \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ olmak üzere $x \in M$ noktasında

$$\langle v, w \rangle_x = h_{\varphi(x)}(v(x), w(x)),$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.37. $\varphi: M \rightarrow N$, Riemann manifoldları arasında tanımlanan bir C^∞ dönüşüm ve $\{\varphi_t\}$, φ nin $D \subset M$ kompakt bölgesi içinde desteklenen bir C^∞ varyasyonu olsun. Bu durumda $\langle, \rangle$, $\varphi^{-1}TN$ pull-back demeti üzerindeki pull-back metrik [14] olmak üzere

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t; D)|_{t=0} = -\int_D \langle v, \tau(\varphi) \rangle v_g,$$

dir. Burada $x \in D$ ve $v(x)$, $\{\varphi_t\}$ nin

$$v(x) = \frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} \Big|_{t=0},$$

ile tanımlanan varyasyon vektör alanıdır.

Tanım 3.38. M , N Riemann manifoldlar, $\varphi: M \rightarrow N$ bir C^∞ dönüşüm ve D , M nin bir kompakt altkümesi olsun. Bu durumda φ nin harmonik [14] olması için gerek ve yeter şart $\tau(\varphi) = 0$ olmasıdır.

Tanım 3.39. M , N Riemann manifoldlar ve $\varphi: M \rightarrow N$ bir harmonik dönüşüm olsun. Bu durumda $\tau(\varphi) = 0$ denklemi harmonik denklem veya tensiyon alan denklemi [14] olarak adlandırılır.

Tanım 3.40. M , N Riemann manifoldlar ve

$$\varphi: M \rightarrow N$$

bir izometrik immersiyon olsun. φ nin ortalama eğriliği [14] (veya N deki $\varphi(M)$ immersed altmanifoldunun ortalama eğriliği) μ^M ile gösterilir ve

$$\mu^M = \frac{1}{m} \text{iz}B = \sum_{i=1}^m B(e_i, e_i),$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.41. M, N Riemann manifoldlar ve

$$\varphi: M \rightarrow N$$

bir izometrik immersiyon olsun. Bu durumda

$$\tau(\varphi) = izB = (boyM)\mu^M$$

dir. Dolayısıyla bir izometrik immersiyonun harmonik olması için gerek ve yeter şart bu izometrik immersiyonun minimal [14] olmasıdır.

Tanım 3.42. $M, 1$ – boyutlu ve N, n - boyutlu Riemann manifoldlar olsun. Bu durumda

$$\varphi: M \rightarrow N^n$$

C^∞ dönüşümü, bir parametrik eğri olarak düşünülebilir. N üzerindeki $\{y^1, \dots, y^n\}$ koordinat dönüşümleri için $\gamma = 1, \dots, n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \tau(\varphi) &= \tau(\varphi)^\gamma \frac{\partial}{\partial y^\gamma}, \\ &= \left(\frac{d^2 \varphi^\gamma}{dt^2} + L_{\alpha\beta}^\gamma \frac{d\varphi^\alpha}{dt} \frac{d\varphi^\beta}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece R nin bir açık altkumesinden veya S^1 den keyfi bir Riemann manifolduna tanımlanan bir C^∞ dönüşümünün harmonik olması için gerek ve yeter şart bu dönüşümünün yay uzunluğunun bir katı ile parametrelendirilmiş bir geodezik [14] olmasıdır sonucuna ulaşılır.

Tanım 3.43. M, N Riemann manifoldlar ve

$$\varphi: M \rightarrow N$$

bir C^∞ dönüşümü olsun. φ nin tensiyon alanı

$$\tau(\varphi) = iz\nabla d\varphi,$$

olmak üzere $D \subseteq M$ kompakt bölgesi için φ nin bienerji integrali [14]

$$E_2(\varphi) = \frac{1}{2} \int_D |\tau(\varphi)|^2 v_g,$$

ile tanımlanır.

Tanım 3.44. M, N Riemann manifoldlar, $\varphi: (M, g) \rightarrow (N, h)$ bir C^∞ dönüşüm ve $\{\varphi_t\}$, φ nin $D \subset M$ kompakt altkumesi içinde desteklenen bir C^∞ varyasyonu olsun. Bu durumda $\langle, \rangle$, $\varphi^{-1}TN$ pull-back demeti üzerindeki pull-back metrik [14] ve

$$\Delta^\varphi = -iz(\nabla^\varphi \nabla^\varphi - \nabla_\nabla^\varphi),$$

$\varphi^{-1}TN$ pull-back demetinin kesitleri üzerindeki Laplasyan olmak üzere

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t; D)|_{t=0} = \int_D \langle \tau_2(\varphi), v \rangle v_g,$$

dir. Burada $x \in D$ için $v(x)$, $\{\varphi_t\}$ nin varyasyon vektör alanı; R^N , N manifoldu üzerinde $R^N(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}$ ile tanımlı eğrilik operatörü ve

$$\tau_2(\varphi) = -\Delta^\varphi(\tau(\varphi)) - izR^N(d\varphi(-), \tau(\varphi))d\varphi(-)$$

dir.

Tanım 3.45. M, N Riemann manifoldlar ve $\varphi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ bir C^∞ dönüşüm olsun. Bu durumda

$$\tau_2(\varphi) = -\Delta^\varphi(\tau(\varphi)) - izR^N(d\varphi(-), \tau(\varphi))d\varphi(-) = 0,$$

eşitliğine φ dönüşümünün biharmonik denklemi [14] ve $\tau_2(\varphi) = 0$ denklemini sağlayan φ dönüşümüne de biharmonik dönüşüm [14] denir

Tanım 3.46. M, N Riemann manifoldlar, $\varphi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ bir C^∞ dönüşüm olsun. φ nin bitensiyon alan $\tau_2(\varphi)$ ile gösterilir ve

$$\tau_2(\varphi) = -\Delta^\varphi(\tau(\varphi)) - izR^N(d\varphi(-), \tau(\varphi))d\varphi(-),$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.47. $I \subseteq R$ olmak üzere $\varphi : I \rightarrow (M, g)$ bir izometrik immersiyon olsun. $\gamma(I)$ görüntü kümesi M de bir eğrinin görüntüsüdür. γ eğrisi yay parametrisi ile verilsin. Bu durumda γ eğrisinin tensiyon alan $\gamma = \frac{d\gamma}{ds} = T$ olmak üzere

$$\tau(\gamma) = \nabla_\gamma \gamma$$

dır. Böylece bitensiyon alanı

$$\begin{aligned} \tau_2(\gamma) &= -\Delta\tau(\gamma) - izR^M(d\gamma, \tau(\gamma))d\varphi(-), \\ &= iz(\nabla^\gamma \nabla^\gamma - \nabla_\gamma^\gamma)\tau(\gamma) - izR^M(d\gamma, \tau(\gamma))d\gamma(-) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} \tau_2(\gamma) &= \nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma \nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma \tau(\gamma) + \nabla_{\nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma}^\gamma \tau(\gamma) - izR^M(d\gamma, \tau(\gamma))d\gamma, \\ &= \nabla_{d\gamma(\frac{d}{dt})}^M \nabla_{d\gamma(\frac{d}{dt})}^M \tau(\gamma) + \nabla_{d\gamma(\nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma)}^M \tau(\gamma) - izR^M(d\gamma, \tau(\gamma))d\gamma, \\ &= \nabla_{\frac{d}{dt}}^M \nabla_{\frac{d}{dt}}^M \tau(\gamma) - izR^M(d\gamma, \tau(\gamma))d\gamma, \\ &= \nabla_\gamma^2 \tau(\gamma) - izR^M(d\gamma, \tau(\gamma))d\gamma \end{aligned}$$

olur ve γ eğrisinin biharmonik denklemi [14]

$$\nabla_\gamma^2 \tau(\gamma) - \text{iz} R^M(d\gamma, \tau(\gamma))d\gamma = 0$$

şeklindedir. Bu denklemden her harmonik eğrinin biharmonik olacağı açıkça görülmektedir. Ancak bunun tersi her zaman doğru değildir. Ayrıca R' nin bir açık aralığından veya S^1 den tanımlanan bir dönüşüm harmonik olması için gerek ve yeter şart bu dönüşümün yay uzunluğunun bir katı ile parametrelendirilmiş bir geodezik olmasıdır. Böylece geodezikler biharmonik eğrilerin bir alt sınıfını oluşturur

Tanım 3.48. $f : (M^m, g) \rightarrow (0, +\infty)$ bir sürekli fonksiyon olsun.

$$\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$$

φ, f – bienerjisinin iki Riemann manifoldu arasında f – bienerjisinin önemli bir noktası olmak üzere

$$E_f(\varphi) = \frac{1}{2} \int_D |\tau(\varphi)|^2 v_g$$

dir. Herhangi bir D kompakt etki alan için, v_g hacim elemandır. φ nin f – tension alanı [14]

$$\tau_f(\varphi) = \text{trace}_g \nabla f d\varphi = f\tau(\varphi) + d\varphi(\text{grad}^M f),$$

tarafından verilir. $\tau_f(\varphi) = 0$ olursa f harmonik dönüşümdür [14].

Tanım 3.49. $f : (M^m, g) \rightarrow (0, +\infty)$ bir sürekli fonksiyon olsun.

$$\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$$

φ, f – bienerjisinin iki Riemann manifoldu arasında önemli bir noktası olmak üzere f – bienerjisi

$$E_{2,f}(\varphi) = \frac{1}{2} \int_\Omega f |\tau(\varphi)|^2 v_g,$$

şeklinde tanımlanır. f – biharmonik dönüşümü [14]

$$\tau_{2,f} = f\tau_2(\varphi) + (\Delta f)\tau(\varphi) + 2\nabla_{\text{grad}}^\varphi \tau(\varphi) = 0$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.50. M, N Riemann manifoldlar ve $\varphi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ bir C^∞ dönüşüm olsun. Bu durumda bi- f -enerjisinin önemli bir noktası olan

$$E_{f,2}(\varphi) = \frac{1}{2} \int_\Omega f |\tau(\varphi)|^2 v_g,$$

şeklinde tanımlanır. Bi- f -harmonik dönüşüm [16]

$$\tau_{f,2}(\varphi) = -\text{trace}(\nabla^\varphi f (\nabla^\varphi \tau_f(\varphi))) - f \nabla_{\nabla^\varphi M}^\varphi \tau_f(\varphi) + f R^N(\tau_f(\varphi), d\varphi) d\varphi = 0$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.51. $f: I \rightarrow R$, $\gamma: I \rightarrow N$

olup γ' nin f – bi-harmonik eğri [17]. olması

$$f(\nabla_T^3 T - R^N(T, \nabla_T T)T) + 2f' \nabla_T^2 T + f'' \nabla_T T = 0$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.52. $\gamma: I \rightarrow N$ olmak üzere γ nin bi- f -harmonik eğri [17]

$$([-f^2 R^N(\nabla_T^N T, T)T - (f' f'' + f f''')T - (2(f')^2 + 3f f''')\nabla_T^N T - (4f f')\nabla_T^N \nabla_T^N T - f^2 \nabla_T^N \nabla_T^N \nabla_T^N T]) = 0$$

şeklinde tanımlanır.

4. DÜZLEMSEL NORMAL KESİTLER

4.1. Düzlemsel Normal Kesitli Manifoldlar

E^m nin $n -$ boyutlu alt manifoldu M ve M nin herhangi bir p noktasındaki sıfırdan farklı tanjant vektörü t olsun.

$$T_p^\perp M \cup \{t\} = E(p, t)$$

diyelim. $\dim E(p, t) = (m - n + 1)$ dir. $E(p, t)$ ile M nin arakesiti $p \in M$ nin komşuluğunda bir γ eğrisi tanımlar. $s -$ yay parametresi olmak üzere $\gamma(s)$ eğrisine M nin normal kesit eğrisi [1] denir. Genel olarak p noktasında γ eğrisi için

$$\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''' \neq 0$$

dır. Burada $\wedge$ cross çarpımını göstermektedir. Eğer p noktası için

$$\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''' = 0,$$

ise M altmanifolduna düzlemsel normal kesitlere sahiptir [1] denir. Yani her normal kesit için

$$\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''' = 0$$

dır. Genel olarak γ , $E(p, t)$ de bükümlü bir uzay eğrisidir.

Teorem 4.1.1. M, E^m nin $n \geq 2$ boyutlu bir alt manifoldu olsun. M nin düzlemsel normal kesitlere sahip olması için gerek ve yeter şart h ve $\bar{\nabla}h$ için M de herhangi bir t tanjant vektörü verildiğinde.

$$(\bar{\nabla}_t h)(t, t) \wedge h(t, t) = 0$$

[1] sağlanmasıdır.

İspat. M, E^m nin $n -$ boyutlu bir alt manifoldu olsun. $\gamma(s)$ de $s -$ yay parametresiyle verilen $p \in M$ civarında normal kesit olsun. Biz T yi $T = \gamma'(s) = \frac{d\gamma}{ds}$ ile tanımlanan $\gamma(s)$ boyunca birim tanjant vektör alanı olarak alalım ve $\gamma(0) = p$ olduğunu farz edelim. $e_1, e_2, \dots, e_n$ M' ye tanjant vektörler, $e_{n+1}, e_{n+2}, \dots, e_m$ M' ye normal vektörler olmak üzere E^m nin $e_1, e_2, \dots, e_m$ ortonormal çatılarının bir lokal alanını seçelim. $\gamma(s)$ boyunca $T = \gamma'(s) = e_1$ alalım. $e_1, e_2, \dots, e_m$ karşılık gelen dual çatı $w_1^1 \dots w_m^m$ olsun. w_A^B 1 - formlar m^2 tanedir. $A, B = 1, \dots, m$ öyle ki E^m nin yapı

denklemleri

$$1. \bar{\nabla} e_A = \sum w_A^B, \quad w_B^A + w_A^B,$$

$$2. dw^A = -\sum w_B^A \wedge w^B,$$

$$3. dw_B^A = -\sum w_C^A \wedge w_B^C \quad A, B, C = 1, 2 \dots m$$

$r = n + 1, \dots, m$ için $w^r = 0$ olduğundan ve $h(T, T) \in T_P^\perp M$ olduğunda

$$h(T, T) = a_1 e^{n+1} + \dots + a_{m-n} e^m \quad (4.1)$$

$$\langle h(T, T), e^{n+1} \rangle = a_1 = h_{11}^r \Rightarrow h(T, T) = a_1 e^{n+1} + \dots + a_{m-n} e^m = h_{11}^{n+1} e^{n+1} + \sum_{i=2}^{m-n} h_{1i}^r e^r$$

$$h_{ij}^r = \langle h(e_i, e_j), e_r \rangle, i, j = 1, \dots, n \quad r = n + 1, \dots, m \quad (4.2)$$

olarak alınırsa $T = e_1$, $(\gamma(s)$ boyunca) ise

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= T = e_1, \\ \gamma''(s) &= \bar{\nabla}_T T + h(T, T) = \sum_{i=2}^n w_i^i(T) e_i + h(T, T), \\ \gamma'''(s) &= \bar{\nabla}_T (\bar{\nabla}_T T) = \sum_{i=2}^n T(w_i^i(T)) e_i + \sum_{i=2}^n w_i^i(T) \nabla_T e_i + \bar{\nabla}_T h(T, T), \\ &= \sum_{i=2}^n T(w_i^i(T)) e_i + \sum_{i,j=1}^n w_i^i(T) w_j^j(T) e_j + h_{11}^{n+1} \bar{\nabla} e^{n+1} + \sum_{i=2}^{m-n} T \langle h(T, e_i), e_r \rangle e_r, \\ &= \sum_{i=2}^n T(w_i^i(T)) e_i + \sum_{i,j=1}^n w_i^i(T) w_j^j(T) e_j + \sum_{i=2}^{m-n} \langle \bar{\nabla}_T h(T, e_i), e_r \rangle e_r, \\ &\quad + \sum_{i=2}^{m-n} \langle h(T, e_i), \bar{\nabla}_T e_r \rangle + \nabla_T h(T, T) \\ \gamma'''(s) &= \sum_{i=2}^n T(w_i^i(T)) e_i + \sum_{i,j=1}^n w_i^i(T) w_j^j(T) e_j + \nabla_T h(T, T) - \sum_{i=2}^n h_{11}^r h_{1i}^r e_i + \sum_{i=2}^n w_i^i(T) h(e_i, T) \end{aligned}$$

bulunur. $\gamma(s) = p$ olduğu yerde $\gamma''(0)$ ve $\gamma'''(0)$, $E(p, t)$ 'nin içinde bulunur.

$E(p, t)$ nin tanımından $w_A^B + w_B^A = 0$ den $w_i^i(t) = 0$ dır. Çünkü

$E(p, t) = T_P^\perp M \cup \{t\}$ idi. $w_i^i + w_i^i = 0 \Rightarrow w_i^i = -w_i^i \quad i = 2, 3, \dots, m - n + 1$ için

$w_i = 0$ dır. Ayrıca $w_i^i = 0$ olduğundan

$$\gamma''(0) = \sum_{i=2}^n w_i^i(t) e_i + h(t, t) = h(t, t)$$

$$\gamma'''(0) = - \sum_{i,r} h_{11}^r h_{1i}^r e_i + \nabla_T h(T, T),$$

$$= -\|h(t, t)\|^2 t + (D_T(h(T, T))),$$

$$\gamma'''(0) = -\|h(t, t)\|^2 t + (\bar{\nabla}_t h(t, t))$$

$K(0) = \|h(t, t)\|$, $p = \gamma(0)$ da $\gamma(s)$ nin eğriliği olduğundan eğer normal kesitli düzlemsel bir eğri ise o zaman $\gamma'''(0)$, $\gamma''(0)$ ve $\gamma'(0)$ ın bir lineer kombinasyonudur.

Dolayısıyla

$$(\bar{\nabla}_T h)(t, t) \wedge h(t, t) = 0$$

bulunur. Tersine $(\bar{\nabla}_T h)(t, t) \wedge h(t, t) = 0$ kabul edelim. O zaman M ye tanjant $p \in M$ noktasında herhangi bir vektör ele alındığında normal kesit $\gamma(s)$ boyunca $h(T, T)$ tarafından gerilen uzaya sıfırdır ya da normal konneksiyon D ile γ boyunca paraleldir ve

$$\{D_T(h(T, T)) = (\bar{\nabla}_T h)(T, T)\}$$

böylece $\gamma(s)$ düzlemsel bir eğri olup ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.2. E^m nin $n \geq 2$ boyutlu bir alt manifoldu M olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir [1].

a) İkinci temel form h için $(\bar{\nabla}_T h)(t, t) = 0$ sağlanır.

b) İkinci temel form h paraleldir. $\bar{\nabla} h = 0$ dır.

c) $p \in M$ noktasında M nin normal kesiti p de bir köşe noktasına sahip düzlemsel bir eğridir. $\gamma(s)$ nin eğriliği $K^2 = \langle \gamma'', \gamma'' \rangle$ olmak üzere

$$\frac{dK^2(p)}{ds} = 0$$

olmalıdır.

İspat. (a) $\Rightarrow$ (b)

E^m nin bir alt manifoldu M ve $X, Y, Z \in \chi(M)$ olsun. Coddazi denkleminde

$$(\bar{\nabla}_X h)(Y, Z) = (\bar{\nabla}_Y h)(X, Z)$$

olup $(\bar{\nabla}_t h)(t, t) = 0$ olduğunu kabul ettik. Böylece $t = x - y$ için

$$(\bar{\nabla}_t h)(t, t) = 0 \Rightarrow (\bar{\nabla}_{x-y} h)(x - y, x - y) = 0$$

$$\Rightarrow (\bar{\nabla}_{x-y} h)(x, x - y) - (\bar{\nabla}_{x-y} h)(y, x - y) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (\bar{\nabla}_{x-y}h)(x, x) - (\bar{\nabla}_{x-y}h)(x, y) - (\bar{\nabla}_{x-y}h)(y, x) + (\bar{\nabla}_{x-y}h)(y, y) = 0 \\
&\Rightarrow \left((\bar{\nabla}_xh)(x, x) - (\bar{\nabla}_y h)(x, x) - (\bar{\nabla}_xh)(x, y) + (\bar{\nabla}_y h)(x, y) \right. \\
&\quad \left. - (\bar{\nabla}_xh)(y, x) + (\bar{\nabla}_y h)(y, x) + (\bar{\nabla}_xh)(y, y) - (\bar{\nabla}_y h)(y, y) = 0 \right) \\
&\Rightarrow -3(\bar{\nabla}_xh)(y, x) + 3(\bar{\nabla}_y h)(y, y) = 0 \\
&\Rightarrow (\bar{\nabla}_y h)(x, y) - (\bar{\nabla}_xh)(x, y) = 0 \tag{4.3}
\end{aligned}$$

$t = x + y$ için

$$\begin{aligned}
&(\bar{\nabla}_{x+y}h)(x + y, x + y) = 0 \tag{4.3} \\
&(\bar{\nabla}_xh)(x + y, x + y) + (\bar{\nabla}_y h)(x + y, x + y) = 0 \\
&\Rightarrow (\bar{\nabla}_xh)(x, x + y) + (\bar{\nabla}_xh)(y, x + y) + (\bar{\nabla}_y h)(x, x + y) + (\bar{\nabla}_y h)(y, x + y) = 0 \\
&\Rightarrow \left((\bar{\nabla}_xh)(x, x) + (\bar{\nabla}_xh)(x, y) + (\bar{\nabla}_xh)(y, x) + (\bar{\nabla}_xh)(y, y) \right. \\
&\quad \left. + (\bar{\nabla}_y h)(x, x) + (\bar{\nabla}_y h)(x, y) + (\bar{\nabla}_y h)(y, x) + (\bar{\nabla}_y h)(y, y) \right) = 0 \\
&\Rightarrow 3(\bar{\nabla}_xh)(x, y) + 3(\bar{\nabla}_y h)(x, y) = 0 \\
&(\bar{\nabla}_xh)(x, y) + (\bar{\nabla}_y h)(x, y) = 0 \tag{4.4}
\end{aligned}$$

(4.3) ve (4.4) denklemleri taraf tarafa toplanırsa $(\bar{\nabla}_y h)(x, y) = 0$ ve $(\bar{\nabla}_xh)(x, y) = 0$ olur. $X = Z + T$ için

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (\bar{\nabla}_Xh)(X, Y) = 0 \Rightarrow (\bar{\nabla}_{Z+T}h)(Z + T, Y) = 0 \\
&\Rightarrow (\bar{\nabla}_Zh)(Z + T, Y) + (\bar{\nabla}_Th)(Z + T, Y) = 0 \\
&\Rightarrow (\bar{\nabla}_Zh)(Z, Y) + (\bar{\nabla}_Zh)(T, Y) + (\bar{\nabla}_Th)(Z, Y) + (\bar{\nabla}_Th)(T, Y) = 0 \\
&\Rightarrow (\bar{\nabla}_Zh)(T, Y) + (\bar{\nabla}_Th)(Z, Y) = 0 \text{ (coddizi denklemi)} \\
&\Rightarrow (\bar{\nabla}_Th)(Z, Y) + (\bar{\nabla}_Zh)(T, Y) = 0 \Rightarrow (\bar{\nabla}_Th)(Z, Y) = 0
\end{aligned}$$

olup $\bar{\nabla}h = 0$ bulunur.

(b) $\Rightarrow$ (a) açıktır. h paralel ise $\bar{\nabla}h = 0$ olup $(\bar{\nabla}_th)(t, t) = 0$ bulunur.

(b) $\Rightarrow$ (c) $\bar{\nabla}h = 0$ ise Teorem 4.1.1. den $(\bar{\nabla}_Th)(t, t) \wedge h(t, t) = 0$ olup M düzlemsel normal kesitlere [18] sahiptir. γ nın $p \in M$ noktasında bir köşe noktasına sahip olduğunu yani

$$\frac{dK^2(p)}{ds} = 0$$

olduğunu gösterelim. γ' nın eğriliği $K(s)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} K^2(s) &= \langle \gamma''(s), \gamma''(s) \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=2}^n w_i^i(T) e_i + h(T, T), \sum_{i=2}^n w_i^i(T) e_i + h(T, T) \right\rangle, \\ &= \sum_{i=2}^n (w_i^i(T))^2 \langle e_i, e_i \rangle + 2w_i^i(T) \sum_{i=2}^n \langle e_i, h(T, T) \rangle + \langle h(T, T), h(T, T) \rangle, \\ K^2(s) &= \sum_{i=2}^n (w_i^i(T))^2 + \langle h(T, T), h(T, T) \rangle, \end{aligned}$$

burada türev alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d^2 K(s)}{ds} &= 2 \sum_{i=2}^n T(w_i^i(T)) \cdot w_i^i(T) + 2 \langle \bar{\nabla}_T h(T, T), h(T, T) \rangle, \\ &= 2 \langle -A_T(T, T) + D_T h(T, T), h(T, T) \rangle, \\ &= 2 \langle D_T h(T, T), h(T, T) \rangle \end{aligned}$$

olup M düzlemsel normal kesitlere sahipse Teorem 4.1.1. den

$(\bar{\nabla}_T h)(T, T) = D_T h(T, T)$ olduğunu görmüştük. Dolayısıyla

$$\frac{dK^2(s)}{ds} = 2 \langle (\bar{\nabla}_T h)(T, T), h(T, T) \rangle,$$

olup (b) den dolayı $\frac{dK^2(s)}{ds} = 0$ olup $\gamma, p \in M$ de bir köşe noktasına sahiptir.

(c) $\Rightarrow$ (a) M nin düzlemsel normal kesitlere sahip olduğunu ve p de $\gamma(s)$ nin bir köşe noktasına sahip olduğunu kabul edelim. $M, p \in M$ de düzlemsel normal kesitlere sahipse

$$(\bar{\nabla}_t h)(t, t) \wedge h(t, t) = 0 \Rightarrow h(t, t) = \lambda (\bar{\nabla}_t h)(t, t)$$

dır. $p \in M, \gamma$ bir köşe noktasına sahipse

$$\langle (\bar{\nabla}_t h)(t, t), h(t, t) \rangle = 0$$

dır. O halde

$$\langle (\bar{\nabla}_t h)(t, t), \lambda (\bar{\nabla}_t h)(t, t) \rangle = 0 \Rightarrow (\bar{\nabla}_t h)(t, t) = 0$$

bulunur.

Teorem 4.1.3. E^m nin $n \geq 2$ boyutlu bir alt manifoldu M olsun. M düzlemsel geodeziklere sahiptir gerek ve yeter şart M aynı sabit eğriliğin düzlemsel normal

kesitlerine sahipse, yani onlar aynı çemberlerdir ya da düz çizgilerin parçasıdır [2].

İspat. M aynı sabit eğriliğin düzlemsel normal kesitlerine sahip olsun. Buna göre $p \in M$ de normal kesit $\gamma(s)$ nin birim tanjant vektörü t olsun. Burada

$$K^2(s) = \sum_{i=2}^n (w_i^i(T))^2 + \|h(T, T)\|^2,$$

olup $p = \gamma(0)$ de $w_i^i(T) = 0$ olduğundan

$$K^2(0) = \|h(T, T)\|^2.$$

M aynı sabit eğriliğin düzlemsel normal kesitlerine sahip olduğunda $w_i^i(T) = 0, i = 1, 2, \dots, n$ alınır. Bu da gösterir ki normal kesit $\gamma(s)$, birinci hız vektörü t ile p civarında, M de bir geodeziktir. Çünkü aynı sabit eğriliğin düzlemsel normal kesitlerine sahipse

$$K^2(s) = \|h(T, T)\|^2,$$

$$c = \langle h(T, T), h(T, T) \rangle \Rightarrow \langle (\bar{\nabla}_t h)(t, t), h(t, t) \rangle = 0,$$

dır. Burada $(\bar{\nabla}_t h)(t, t) \wedge h(t, t) = 0$ olduğundan

$$(\bar{\nabla}_t h)(t, t) = 0 \Rightarrow \bar{\nabla} h = 0$$

dır.

$$\gamma''(s) = \sum_{i=2}^n w_i^i(T) e_i + h(T, T) = h(T, T) \in T_P^\perp M$$

olup γ bir geodeziktir [12].

Tersine M düzlemsel geodeziklere sahipse M ye bir n - düzleminde içerilir ya da bütün geodezikler aynı yarı çaplı çemberlerdir. Eğer ilk durum doğruysa her normal kesit bir düz çizginin parçasıdır. Eğer ikinci durum doğruysa M nin her $\gamma(s)$ eğriliği sabittir. Burada $x = \gamma'(s)$ alınır $\nabla_x x = 0$ olduğunda

$$\gamma''(s) = \bar{\nabla}_x x = \nabla_x x + h(x, x) \in T_P^\perp M$$

olur. Bununla beraber biz $\gamma''(s) = \bar{\nabla}_x x = h(x, x) = K(s)N$, $K(s) = \|h(x, x)\|$ $\gamma(s)$ nin eğriliği ve γ düzlemsel olduğunda $\bar{\nabla}_x N = -KX$ ise

$$\bar{\nabla}_x N = -A_N X + D_X N = -KX \Rightarrow D_X N = 0$$

dır. K nın sabit eğriliğinde bunlar birleştirilirse

$$(\bar{\nabla}_x h)(x, x) = D_X(h(x, x)) = 0,$$

olup bu M nin her geodeziği için doğrudur. Böylece biz $(\bar{\nabla} h) = 0$ 'a sahip oluruz.

Teorem 4.1.1 den de M nin düzlemsel normal kesitlere sahip olduğu açıktır. Böylece $E(p, t)$ ile verilen düzlemsel normal kesit ve p de t hız vektörü düzlemsel geodezik gerçekte aynı eğriliklerdir [2]. Böylece M nin normal kesiti düzlemsel eğrilidir.

4.2. Düzlemsel Normal Kesitli Yüzeylerin Sınıflandırılması

Biz bu bölümde E^m deki yüzeyleri düzlemsel normal kesitler yardımıyla sınıflandıracğız.

Teorem 4.2.1. E^m nin içinde düzlemsel normal kesitli bir yüzey M olsun. Eğer M , E^m nin 3- boyutlu E^3 uzayının içinde kalmazsa bu taktirde M , E^m nin 5 boyutlu Veronese yüzeyinin bir açık alt kümesidir [1-3].

İspat. $X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere

$$(\bar{\nabla}_X h)(Y, Z) = (\bar{\nabla}_X h)(Y, Z) - h(\bar{\nabla}_X Y, Z) - h(Y, \bar{\nabla}_X Z),$$

ile h nin kovaryant türevini tanımlayalım: M nin düzlemsel normal kesitli bir yüzey olduğunu kabul edelim $p \in M$ noktasında M ye tanjant birim vektör t olsun. $\gamma(s)$, $\gamma(0) = p \in M$ noktasında ki M nin normal kesiti olsun.

$$T(s) = \gamma'(s),$$

olduğunu kabul edelim. O zaman

$$\gamma''(s) = \bar{\nabla}_T T = \nabla_T T + h(T, T), \quad (4.5)$$

$$\gamma'''(s) = \bar{\nabla}_T \nabla_T T + \bar{\nabla}_T h(T, T), \quad (4.6)$$

$$= \nabla_T \nabla_T T + h(\nabla_T T) - A_{h(T, T)} T + D_T h(T, T), \quad (4.7)$$

elde ederiz. $\gamma(s)$ ' nin kesit eğriliği $K(s)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} K^2(s) &= \langle \gamma'', \gamma'' \rangle = \langle \nabla_T T + h(T, T), \nabla_T T + h(T, T) \rangle, \\ &= \langle \nabla_T T, \nabla_T T \rangle + 2\langle \nabla_T T, h(T, T) \rangle + \langle h(T, T), h(T, T) \rangle, \\ &= \|\nabla_T T\|^2 + \|h(T, T)\|^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

bulunur. γ düzlemsel bir eğri olup $\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''' = 0$ da $\gamma''' = b\gamma' + a\gamma''$ olup

$$\nabla_T \nabla_T T - A_{h(T, T)} T + D_T h(T, T) = bT + a\nabla_T T + ah(T, T) \quad (4.9)$$

olur. Burada a ve b katsayıları bulunursa; ilk önce bu eşitliğin teğet ve normallerini eşitleyecek olursak

$$\langle \nabla_T \nabla_T T, \nabla_T T \rangle - \langle A_{h(T, T)} T, h(T, T) \rangle = bT + a\nabla_T T,$$

$$\begin{aligned}
h(T, T)\langle h(\nabla_T T, T) + D_T h(T, T) \rangle &= ah(T, T), \\
\langle \nabla_T \nabla_T T, \nabla_T T \rangle - \langle A_{h(T, T)} T, \nabla_T T \rangle &= b\langle T, \nabla_T T \rangle + a\langle \nabla_T T, \nabla_T T \rangle, \\
\langle h(\nabla_T T, T), h(T, T) \rangle + \langle D_T h(T, T), h(T, T) \rangle &= a\langle h(T, T), h(T, T) \rangle, \\
\langle \nabla_T \nabla_T T, \nabla_T T \rangle - \langle h(T, \nabla_T T), h(T, T) \rangle &= a\|\nabla_T T\|^2, \\
\langle h(\nabla_T T, T), h(T, T) \rangle + \langle D_T h(T, T), h(T, T) \rangle &= a\|h(T, T)\|^2, \\
\langle \nabla_T \nabla_T T, \nabla_T T \rangle + \langle D_T h(T, T), h(T, T) \rangle &= aK^2(s), \\
\langle \bar{\nabla}_T \nabla_T T, \nabla_T T \rangle - \langle h(\nabla_T T, \nabla_T T) \rangle + \langle A_{h(T, T)} T, h(T, T) \rangle &= aK^2(s), \\
2\langle \bar{\nabla}_T \nabla_T T, \nabla_T T \rangle + 2\langle \bar{\nabla}_T h(T, T), h(T, T) \rangle &= 2aK^2(s), \\
T(K^2) &= 2aK^2, \\
a &= \frac{T(K^2)}{2K^2},
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi b 'yi bulalım:

$$\begin{aligned}
T\langle \nabla_T \nabla_T T - A_{h(T, T)} T \rangle &= bT + a\nabla_T T, \\
\langle \nabla_T \nabla_T T, T \rangle - \langle A_{h(T, T)} T, T \rangle &= b\langle T, T \rangle + a\langle \nabla_T T, T \rangle, \\
\langle \nabla_T \nabla_T T, T \rangle - \langle A_{h(T, T)} T, T \rangle &= b, \\
-\langle \nabla_T T, \nabla_T T \rangle - \langle h(T, T), h(T, T) \rangle &= b, \\
-K^2 &= b,
\end{aligned}$$

bu bulunan a ve b değerleri (4.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$\nabla_T \nabla_T T + h(\nabla_T T, T) - A_{h(T, T)} T + D_T h(T, T) = -K^2 T + \frac{T(K^2)}{2K^2} \nabla_T T + h(T, T) \quad (4.10)$$

olup bu ifadenin teğet ve normalleri eşitlenirse

$$\nabla_T \nabla_T T - A_{h(T, T)} T = -K^2 T + \frac{T(K^2)}{2K^2} \nabla_T T, \quad (4.11)$$

$$h(\nabla_T T, T) + D_T h(T, T) = \frac{T(K^2)}{2K^2} h(T, T) \quad (4.12)$$

olup, h 'nin kovaryant türevinden

$$(\bar{\nabla}_T h)(T, T) = D_T h(T, T) - 2h(\nabla_T T, T)$$

olup bu ifade (4.8) te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
h(\nabla_T T, T) + D_T h(T, T) &= \frac{T(K^2)}{2K^2} h(T, T), \\
h(\nabla_T T, T) + (\bar{\nabla}_T h)(T, T) + 2h(\nabla_T T, T) &= \frac{T(K^2)}{2K^2} h(T, T), \\
3h(\nabla_T T, T) + (\bar{\nabla}_T h)(T, T) &= \frac{T(K^2)}{2K^2} h(T, T),
\end{aligned} \quad (4.13)$$

elde edilir. $\gamma'(0)$ ve $\gamma''(0)$ 'a bakılacak olursa $p = \gamma(0)$ noktasında $m - 1$ uzay $E(p, t)$ 'nin içinde yatar. $E(p, t)$, t ve $T_p^\perp M$ tarafından gerildiğinde (4.5) ve (4.6) den

$$\begin{aligned}\gamma''(0) &= \nabla_t t + h(t, t), \\ \gamma'''(0) &= \nabla_t \nabla_t t + h(\nabla_t t) - A_{h(t, t)} t + D_t h(t, t), \\ \gamma'''(0) &= -A_{h(T, T)} T + D_T h(T, T) = (\bar{\nabla}_t h)(t, t),\end{aligned}$$

olur. (4.9) denkleminde

$$\begin{aligned}-A_{h(t, t)} t + D_t h(t, t) &= -K^2 t + \frac{T(K^2)}{2K^2} h(t, t), \\ \gamma'''(0) &= -K^2 t + \frac{T(K^2)}{2K^2} h(t, t)\end{aligned}$$

Burada (4.13) göz önüne alınırsa

$$\gamma'''(0) = -K^2 t + 3h(\nabla_t t, t) + (\bar{\nabla}_t h)(t, t)$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}\gamma'(0) &= t, \\ \gamma''(0) &= h(t, t), \\ \gamma'''(0) &= -K^2 t + (\bar{\nabla}_t h)(t, t)\end{aligned}$$

bulunur. M düzlemsel normal kesitlere sahip olduğundan

$$\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''' = 0,$$

olup buradan

$$(\bar{\nabla}_t h)(t, t) \wedge h(t, t) = 0 \quad (4.14)$$

bulunur. Bu $p \in T_p M$ de herhangi bir birim vektör ve $p \in M$ de herhangi bir nokta için doğru olduğundan $u \in TM$ için

$$(\bar{\nabla}_u h)(u, u) \wedge h(u, u) = 0, \quad (4.15)$$

ifadesini elde ederiz. (4.13) ve (4.14) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}_t h)(t, t) \wedge h(t, t) &= 0, \\ \left\{ \frac{T(K^2)}{2K^2} h(T, T) - 3h(\nabla_T T, T) \right\} \wedge h(T, T) &= 0, \\ h(\nabla_T T, T) \wedge h(T, T) &= 0,\end{aligned} \quad (4.16)$$

olur. Eğer $\gamma(s)$, $p = \gamma(0)$ nın yeteri derecede küçük bir komşuluğunda geodezik yay [2] değilse $\langle T, T \rangle = 1$ den $\langle \nabla_T T, T \rangle = 0$ dir. Ancak $s \neq 0$ olduğu zaman

$\nabla_{T(s)} T(s) = 0$ dir. Dolayısıyla $\nabla_T T \perp T$ dir. Buradan aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 4.2.1. M, E^m 'nin düzlemsel normal kesitlere sahip bir yüzeyi olsun. Eğer p 'deki normal kesit $\gamma(s)$, p nin yeterince küçük bir komşuluğunda geodezik yay [2] değilse bu durumda $t = \gamma(0)$ olmak üzere

$$h(t^\perp, t) \wedge h(t, t) = 0 \quad (4.17)$$

dır. $T_p M$ nin bir bazı M yüzey olduğundan $\{e_1, e_2\}$ olsun. Böylece

$$\begin{cases} t(0) = e_1 \cos \emptyset + e_2 \sin \emptyset \\ t^\perp(0) = -e_1 \sin \emptyset + e_2 \cos \emptyset \end{cases} \quad (4.18)$$

şeklinde ifade edilebilir. Eğer

$$\langle h(t(\emptyset), t(\emptyset)), h(t(\emptyset), t^\perp(\emptyset)) \rangle \neq 0,$$

ise o zaman Lemma 4.2.1 den

$$h(t(\emptyset), t(\emptyset)) \wedge h(t(\emptyset), t^\perp(\emptyset)) = 0, \quad (4.19)$$

olacak şekilde $\emptyset \in (a, b)$ olmak üzere (a, b) açık aralığı vardır. (4.18) da (4.19) göz önünde bulundurulursa

$$h(e_1, e_2) \wedge h(e_2, e_2) = 0,$$

bulunur.

$$h(e_1, e_2) \wedge h(e_2, e_2) = h(e_2, e_2) \wedge h(e_2, e_1) = h(e_1, e_1) \wedge h(e_2, e_2) = 0 \quad (4.20)$$

bulunur. Dolayısıyla $boyImh \leq 1$ olur. Normal kesit γ geodezik yay değil ise o zaman $boyImh \leq 1$ bulunur. Şimdi geodezik yay olduğunu düşünelim. Eğer $t^\perp \in T_p M^\perp$ birim vektörü için γ geodezik yay ise $\langle h(t, t), h(t, t^\perp) \rangle = 0$ olur. $T_p M$ nin u ve v birim dik vektörleri için $t = u + v$, $t^\perp = u - v$ alınırsa

$$\begin{aligned} \langle h(u + v, u + v), h(u + v, u - v) \rangle &= 0, \\ \langle h(u, u) + 2h(u, v) + h(v, v), h(u, u) - h(v, v) \rangle &= 0, \\ -2\langle h(u, v), h(v, v) \rangle + \langle h(v, v), h(u, u) \rangle - \langle h(v, v), h(v, v) \rangle &= 0, \\ (\langle h(u, u), h(u, u) \rangle - \langle h(u, u), h(v, v) \rangle + 2\langle h(u, v), h(u, u) \rangle \\ -2\langle h(u, v), h(v, v) \rangle + \langle h(v, v), h(u, u) \rangle - \langle h(v, v), h(v, v) \rangle) &= 0 \\ \|h(u, u)\|^2 - \|h(u, v)\| &= 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

bulunur. $V = \frac{u+u^\perp}{\sqrt{2}}$ alınırsa

$$\langle u, v \rangle = \left\langle u, \frac{u+u^\perp}{\sqrt{2}} \right\rangle = \left\langle u, \frac{u}{\sqrt{2}} \right\rangle + \left\langle u, \frac{u^\perp}{\sqrt{2}} \right\rangle,$$

buradan $v = \frac{t-t^\perp}{2}$ ya da $u = \frac{t+t^\perp}{2}$ alınırsa (4.21) ifadesinden

$$\|h(u, u)\|^2 = \langle h(u^\perp, u^\perp), h(u, u) \rangle + 2\|h(u^\perp, u)\|^2 \quad (4.22)$$

bulunur. Burada p noktasında ya $h(u, u^\perp) = 0$ ve $boyImh \leq 1$ ya da $h(u, u^\perp) \neq 0$ ve $boyImh \geq 2$ dir. Şimdi

$$M_1 = \{p \in M / boyImh \geq 2, p \in M\}$$

de ele alalım.

Lemma 4.2.2. M, E^m nin pointwise düzlemsel normal kesitli bir yüzeyi olsun [3]. Şayet $boyImh \leq 1$ ise o zaman M lokal olarak, E^m nin 3 – boyutlu E^3 uzayında kalır [2]. Eğer $M \neq M_1$ ise o zaman $M - M_1$, M nin boştan farklı bir açık alt kümesidir. $M - M_1$ tümleyeni U olsun. U üzerinde $u \in T_u$ için

$$\langle h(u, u), h(u, u^\perp) \rangle = 0, \quad (4.23)$$

olur. Buradan $\|h(u, u)\| \neq 0, \|h(u, u^\perp)\| \neq 0$ olup

$$h(u, u) \wedge h(u, u^\perp) \neq 0$$

şartı sağlanır. Tersine U düzlemsel geodeziklere sahiptir. Böylece U da $boyImh \geq 2$ dir. Düzlemsel geodezik yüzeylerin sınıflandırma teoreminden görülür ki M, E^m nin E^s Veronese yüzeyinin bir açık alt kümesidir. Böylece $U = M$ olarak teoremi tamamlarız. $t^\perp = u - v$ alınırsa

$$\begin{aligned} \langle h(u + v, u + v), h(u + v, u - v) \rangle &= 0, \\ \langle h(u, u) + 2h(u, v) + h(v, v), h(u, u) - h(v, v) \rangle &= 0, \\ -2\langle h(u, v), h(v, v) \rangle + \langle h(v, v), h(u, u) \rangle - \langle h(v, v), h(v, v) \rangle &= 0, \\ (\langle h(u, u), h(u, u) \rangle - \langle h(u, u), h(v, v) \rangle + 2\langle h(u, v), h(u, u) \rangle, \\ -2\langle h(u, v), h(v, v) \rangle + \langle h(v, v), h(u, u) \rangle - \langle h(v, v), h(v, v) \rangle) &= 0 \\ \|h(u, u)\|^2 - \|h(u, v)\|^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

bulunur. $V = \frac{u+u^\perp}{\sqrt{2}}$ alınırsa

$$\langle u, v \rangle = \left\langle u, \frac{u + u^\perp}{\sqrt{2}} \right\rangle = \left\langle u, \frac{u}{\sqrt{2}} \right\rangle + \left\langle u, \frac{u^\perp}{\sqrt{2}} \right\rangle,$$

buradan $v = \frac{t-t^\perp}{2}$ ya da $u = \frac{t+t^\perp}{2}$ alınırsa (3.2.20) ifadesinden

$$\|h(u, u)\|^2 = \langle h(u^\perp, u^\perp), h(u, u) \rangle + 2\|h(u^\perp, u)\|^2 \quad (4.25)$$

bulunur.

4.3. Düzlemsel Normal Kesit Eğrileri ve Eğrilikler

Şuana kadar yapılan çalışmalarda düzlemsel normal kesitlerin alt manifoldlarında çalışırken, böyle alt manifoldlar karakterize edilirken Gauss ve Weingarten formülleri kullanılmıştı. Perктаş ve Erdoğan [19] bu çalışmalardan yola çıkarak, düzlemsel normal kesitli alt manifoldları karakterize ederken eğrilikleri kullanmışlardır. Ayrıca normal kesit eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şartlar elde etmişlerdir.

4.3.1. Riemann Manifoldlarının Düzlemsel Normal Kesitli Altmanifoldları

M, m boyutlu öklidyen uzayı R^m , ün $n -$ boyutlu alt manifold olsun. M nin herhangi bir p noktasındaki sıfırdan farklı tanjant vektörü t olsun. t tanjant vektörüyle p noktasındaki $T_p^\perp M$ uzayı $(m - n + 1)$ boyutlu $E(p, t)$ uzayını belirler. $E(p, t)$ ile M nin kesişimi p ' nin komşuluğunda tanımlı $\gamma(s)$ eğrisini verir. $s -$ yay parametresi olmak üzere γ, p noktasında t yönünde tanımlı M ' nin normal kesiti diye adlandırılır. Genelde normal kesit $\gamma, E(p, t)$ içinde bükümlü bir uzay eğrisidir. Yani derecesi 2' den büyüktür ve p noktasında

$$\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''' \neq 0$$

dır. Eğer M pointwise düzlemsel normal kesite sahipse bu ifade 0 olur. Şayet M ' nin herhangi bir p noktasında γ eğrisi için

$$\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''' = 0$$

ise M alt manifoldunun pointwise düzlemsel normal kesitlere [1] sahip olduğu söylenir ve onun normal kesitleri düzlemsel eğriler ise M alt manifoldu düzlemsel normal kesitlere sahip olacaktır. γ, p noktasında t yönünde normal kesit eğrisi ise

$$\begin{aligned}\gamma'(s) &= T, \\ \gamma''(s) &= \bar{\nabla}_T T, \\ \gamma'''(s) &= \bar{\nabla}_T \bar{\nabla}_T T,\end{aligned}$$

olup buradan Riemann manifoldlardaki bir eğrinin frenet denklemleri kullanılırsa

$$T' = k_1 N ,$$

$$N' = -k_1 T + k_2 B ,$$

$$B' = -k_2 N + k_4 ,$$

den

$$\gamma'(s) = T,$$

$$\gamma''(s) = \bar{\nabla}_T T = T' = k_1 N,$$

$$\gamma'''(s) = \bar{\nabla}_T \bar{\nabla}_T T = \bar{\nabla}_T (k_1 N),$$

$$= k_1' N + k_1 \bar{\nabla}_T N ,$$

$$= k_1' N + k_1 (-k_1 T + k_2 B),$$

$$= k_1' N - k_1^2 T + k_1 k_2 B,$$

elde edilir [22]. Eğer M pointwise 2- düzlemsel normal kesite sahip ise

$$\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''' = 0$$

olacağından

$$T \wedge (k_1 N) \wedge (k_1' N - k_1^2 T + k_1 k_2 B) = 0,$$

$$(k_1 T \wedge N) \wedge (k_1' N - k_1^2 T + k_1 k_2 B) = 0,$$

$$k_1 B \wedge (k_1' N - k_1^2 T + k_1 k_2 B) = 0,$$

$$k_1 k_1' (B \wedge N) - k_1^3 (B \wedge T) + (k_1 B \wedge k_1 k_2 B) = 0,$$

$$-k_1 k_1' T - k_1^3 N = 0,$$

olup buradan

$$k_1 k_1' = 0$$

ve

$$k_1^3 = 0,$$

ise

$$k_1 = 0$$

sonucuna ulaşılır. Yani Riemann alt manifoldlarının pointwise 2- düzlemsel normal kesitlere sahip ise normal kesit eğrisinin geodezik olması gerekir. Eğer $k_1 = 0$, ise bu taktirde

$$\gamma' = T ,$$

$$\gamma'' = -k_1 T + k_2 B = k_2 B ,$$

$$\gamma''' = k_2 N,$$

eşitlikleri

$$\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''' = 0,$$

de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''' &= T \wedge k_2 B \wedge k_2 N, \\ &= k_2 (T \wedge B) \wedge k_2 N, \\ &= -k_2 N \wedge k_2 N, \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup

$$\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''' = 0$$

bulunur. Yani Riemann alt manifoldlarının normal kesit eğrisi geodezik ise bu durumda bu alt manifold pointwise 2- düzlemsel normal kesite sahiptir. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.3.1.1. M , m boyutlu öklidyen uzay E^m ' nin $n -$ boyutlu bir Riemann alt manifoldu olsun. M ' nin pointwise 2-düzlemsel normal kesitlere [2] sahip olması için gerek ve yeter şart M ' nin normal kesit eğrisinin geodezik olmasıdır.

Şimdi γ , p noktasında t yönünde normal kesit eğrisi ise

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= T, \\ \gamma''(s) &= \bar{\nabla}_T T, \\ \gamma'''(s) &= \bar{\nabla}_T \bar{\nabla}_T T, \\ \gamma^{IV}(s) &= \bar{\nabla}_T \bar{\nabla}_T \bar{\nabla}_T T, \end{aligned}$$

olup burada yine frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= T, \\ \gamma''(s) &= \bar{\nabla}_T T = T' = k_1 N, \\ \gamma'''(s) &= \bar{\nabla}_T \bar{\nabla}_T T = -k_1^2 T + k_1' N + k_1 k_2 B, \\ \gamma^{IV}(s) &= \bar{\nabla}_T \bar{\nabla}_T \bar{\nabla}_T T = \bar{\nabla}_T (-k_1^2 T + k_1' N + k_1 k_2 B), \\ &= (-2k_1 k_1' T - k_1^2 T' + k_1'' N + k_1' N' + (k_1 k_2)' B), \\ &= (-2k_1 k_1' T - k_1^3 N + k_1'' N + k_1' (-k_1 T + k_2 B) + k_1' k_2 + k_2' B - k_1 k_2^2 N), \\ &= (-2k_1 k_1' T - k_1^3 N + k_1'' N - k_1 k_1' T + 2k_1' k_2 B + k_1 k_2' B - k_1 k_2^2 N), \\ &= (-3k_1 k_1' T + (-k_1^3 + k_1'' - k_1 k_2^2) N + (2k_1' k_2 + k_1 k_2') B) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi kabul edelim ki M alt manifoldu pointwise 3-düzlemsel normal kesitlere sahip olsun. Bu durumda

$$\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''' \wedge \gamma'''' = 0,$$

olup, yani

$$\begin{aligned} \Rightarrow T \wedge (k_1 N) \wedge (-k_1^2 T + k_1' N + k_1 k_2 B) \\ \wedge (-3k_1 k_1' T + (-k_1^3 + k_1'' - k_1 k_2^2) N + (2k_1' k_2 + k_1 k_2') B) \\ = 0, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (k_1 B \wedge (-k_1^2 T + k_1' N + k_1 k_2 B) \wedge (-3k_1 k_1' T + (-k_1^3 + k_1'' - k_1 k_2^2) N + (2k_1' k_2 + k_1 k_2') B)) = 0,$$

$$\Rightarrow ((-k_1^3 (B \wedge T) + k_1 k_1' B \wedge N) \wedge (-3k_1 k_1' T + (-k_1^3 + k_1'' - k_1 k_2^2) N + (2k_1' k_2 + k_1 k_2') B)) = 0,$$

$$\Rightarrow ((-k_1^3 N - k_1 k_1' T) \wedge (-3k_1 k_1' T + (-k_1^3 + k_1'' - k_1 k_2^2) N + (2k_1' k_2 + k_1 k_2') B)) = 0,$$

$$\Rightarrow (-3k_1^4 k_1' B - k_1^3 (2k_1' k_2 + k_1 k_2') T - k_1 k_1' (-k_1^3 + k_1'' - k_1 k_2^2) B + k_1 k_1' (2k_1' k_2 + k_1 k_2') N) = 0,$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \left(-k_1^3 (2k_1' k_2 + k_1 k_2') T + k_1 k_1' (2k_1' k_2 + k_1 k_2') N \right. \\ & \left. + (-k_1 k_1' ((-k_1^3 + k_1'' - k_1 k_2^2) - 3k_1^4 k_1')) B \right) = 0, \end{aligned}$$

buradan karşılıklı demetlerin eşitliğinden

$$-k_1^3 (2k_1' k_2 + k_1 k_2') = 0,$$

$$k_1 k_1' (2k_1' k_2 + k_1 k_2') = 0,$$

$$-k_1 k_1' ((-k_1^3 + k_1'' - k_1 k_2^2) - 3k_1^4 k_1') = 0,$$

bulunur. Bu denklem sistemini sağlayan k_1 ve k_2 ' leri bulup normal kesit eğrisi hakkında yorum yapabiliriz.

Durum 1. $k_1 = 0$ ise denklem sistemi sağlanır. Yani normal kesit eğrisi geodezik [19] olmalıdır. Buradan şu sonucu çıkarabiliriz:

Sonuç 1. M, m boyutlu E^m öklidyen uzayının $n -$ boyutlu Riemann alt manifoldu olsun. M nin pointwise 3 - düzlemsel normal kesite sahip olması için gerek ve yeter şart geodeizik eğri olmasıdır.

Durum 2. $k_1 = s b t \neq 0 \Rightarrow -k_1^3 (2k_1' k_2 + k_1 k_2') = 0$ denkleminde

$k'_2 = 0 \Rightarrow k_2 = sbt$ olur. Eğer $k_2 = sbt$ ise $k_2 = 0$ dır. (Bu durumda normal kesit eğrisi bir çemberdir) ya da $k_2 = sbt \neq 0$ dır. (Bu durumda da normal kesit eğrisi bir helistir). Yani buradan şu sonucu çıkarabiliriz:

Sonuç 2. M, m boyutlu E^m öklidyen uzayının $n -$ boyutlu Riemann alt manifoldu olsun. M nin pointwise 3- düzlemsel normal kesite [19] sahip olması için gerek ve yeter şart normal kesit eğrisinin ya bir çember ya da bir helis olmasıdır.

Durum 3. $k_1 \neq sbt \Rightarrow -k_1^3(2k'_1k_2 + k_1k'_2) = 0,$

$$k_1k'_1(2k'_1k_2 + k_1k'_2) = 0,$$

denklemlerinden

$$(2k'_1k_2 + k_1k'_2) = 0,$$

$$\frac{2k'_1}{k_1} + \frac{k'_2}{k_2} = 0,$$

$$2Ink_1 + Ink_2 = Inc,$$

$$k_1^2 \cdot k_2 = c,$$

olup

$$-k_1k'_1((-k_1^3 + k_1'' - k_1k_2^2) - 3k_1^4k'_1) = 0,$$

bu denklemde kullanılırsa $k_1 \neq sbt$ olduğundan $k'_1 \neq 0$ olacağından

$$(k_1'' - k_1k_2^2 + 2k_1^3) = 0,$$

$$k_2 = \frac{c}{k_1^2},$$

olup

$$\left(k_1'' - k_1 \frac{c^2}{k_1^4} + 2k_1^3\right) = 0,$$

bu denklemde yerine yazılırsa

$$(k_1''k_1^3 - c^2 + 2k_1^6) = 0,$$

$$(y^3y'' + 2y^6 - c^2) = 0,$$

diferensiyel denklemi bulunur. Bunun çözümünden k_1 ve k_2 ' ye ulaşılır.

Sonuç 3. M, m boyutlu E^m öklidyen uzayının $n -$ boyutlu Riemann alt manifoldu olsun. M nin pointwise 3 - düzlemsel normal kesite sahip olması için gerek ve yeter şart k_1 ' in

$$k_1'' k_1^3 - c^2 + 2k_1^6 = 0,$$

non-lineer diferansiyel denkleminin çözümünden elde edilen k_1 olmasıdır.

$$\gamma'^V(s) = -3k_1 k_1' T + (-k_1^3 + k_1'' - k_1 k_2^2) N + (2k_1' k_2 + k_1 k_2') B,$$

$$R(T, \nabla_T T) T = R(T, k_1 N) T,$$

$$= k_1 R(T, N) T,$$

$$= k_1 c \{g(N, T) T - g(T, T) N\},$$

$$= k_1 c \{-N\},$$

$$= -c k_1 N,$$

ifadelerini bulduktan sonra, olup α 'nın biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T) T = (-3k_1 k_1') T + (k_1'' - k_1 k_2^2 + c k_1) N + (2k_1' k_2 + k_1 k_2') B = 0$$

[20] denkleminin sağlanması olduğundan

$$k_1 k_1' = 0,$$

$$k_1'' - k_1^3 - k_1 k_2^2 + c k_1 = 0,$$

$$2k_1' k_2 + k_1 k_2' = 0,$$

elde edilir. Eğer non-geodezik çözüm arıyorsak $k_1 = s b t \neq 0$ olursa

$$k_1'' - k_1^3 - k_1 k_2^2 + c k_1 = 0,$$

denkleminde

$$-k_1(k_1^2 + k_2^2 - c) = 0,$$

elde ederiz. Buradan $k_1 \neq 0$ olduğundan

$$(k_1^2 + k_2^2 - c) = 0,$$

olmak üzere

$$2k_1' k_2 + k_1 k_2' = 0,$$

denkleminde $k_2' = 0$ olup buradan $k_2 = 0$ dır ve bunu $(k_1^2 + k_2^2 - c) = 0$ ile birleştirirsek

$$k_1 = \pm\sqrt{c},$$

$$k_2 = 0,$$

çember oluşur,

$$k_1 = s b t \neq 0,$$

$$k_2 = s b t \neq 0,$$

olursa

$$k_1^2 + k_2^2 = c$$

helis elde edilir.

4.3.2. Normal Kesit Eğrileri ve Riemann Manifoldlar Üzerinde Eğriler

$$\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^m$$

olarak tanımlanan γ eğrisi E^m de birim hızlı bir eğri olsun. Bu eğrinin yüksek mertebeden $\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s), \dots, \gamma^{(r)}(s)$ türevleri lineer bağımsız ve $\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s), \dots, \gamma^{(r+1)}(s)$ türevleride lineer bağımlı ise tüm $s \in I$, r mertebeden Frenet salınım eğrisi olarak adlandırılır. Her bir salınımlı r mertebeli Frenet eğrisi için Frenet çatısı olarak adlandırılan, γ boyunca ortonormal r - çatısı $v_1, v_2, \dots, v_r$ ve Frenet eğrilikleri olarak isimlendirilen $(r-1)$ tane fonksiyonlar $k_1, k_2, \dots, k_{(r-1)}: I \rightarrow \mathbb{R}$ olsun.

$$\begin{aligned} T'(s) &= v_1'(s) = k_1(s)v_2(s), \\ v_2'(s) &= -k_1(s)T(s) + k_2(s)v_3(s), \\ &\vdots \\ v_i'(s) &= -k_{i-1}(s)v_{i-1}(s) + k_i(s)v_{i+1}(s), \\ v_{i+1}'(s) &= -k_i(s)v_i(s), \end{aligned}$$

frenet formülleri olsun. M, E^{n+r} öklidyen uzayının diferensiyellenebilir, n -boyutlu alt manifoldu olsun. Eğer M' nin her bir γ normal kesiti r . mertebeden salınımlı bir Frenet eğrisi ise M 'nin r -düzlemsel normal kesitlere sahip olduğu söylenir [19].

Farzedelim ki γE^{n+2} de n -boyutlu diferensiyellenebilir alt manifold M 'nin bir düzlemsel kesit eğrisi olsun. O zaman

$$\begin{aligned} T'(s) &= v_1'(s) = k_1(s)v_2(s), \\ v_2'(s) &= -k_1(s)T(s) + k_2(s)v_3(s), \\ &\vdots \\ v_i'(s) &= -k_{i-1}(s)v_{i-1}(s) + k_i(s)v_{i+1}(s), \\ v_{i+1}'(s) &= -k_i(s)v_i(s), \end{aligned}$$

denklem sistemini kullanarak aşağıdaki formülleri yazabiliriz:

$$\begin{aligned}\gamma'(s) &= T(s) = v_1(s), \\ \gamma''(s) &= k_1(s)v_2(s), \\ \gamma'''(s) &= k_1^2(s)T(s) - k_1'(s)v_2(s).\end{aligned}$$

4.3.3. Bi-f-Harmonik Eğriler

Biz burada Riemannian space formda γ nın bi-f harmonik olması için gerek ve yeter şartları inceleyelim.

Riemannian space formda eğrilik tensörü $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$R(X, Y)Z = c. \{\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Y \rangle Z\},$$

$$R(\nabla_T T, T)T = c. k_1. F_2,$$

olup bi- f harmonik eğri [20] olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}\{(-f^2 R^N(\nabla_T^N T, T)T - (f' f'' + f f''')T - (2(f')^2 + 3f f''')\nabla_T^N T - \\ (4f f')\nabla_T^N \nabla_T^N T - f^2 \nabla_T^N \nabla_T^N \nabla_T^N T)\} = 0 \quad [20]\end{aligned}$$

olmasıdır. Şimdi sabit eğrilikli Riemann manifoldun da bi- f – harmonik eğri denklemini bulalım.

$$\nabla_T F_1 = k_1 F_2,$$

$$\nabla_T F_i = -k_{i-1} F_{i-1} + k_i F_{i+1}, \quad i = 2, \dots, n-1$$

$$\nabla_T F_n = -k_{n-1} F_{n-1},$$

olup

$$\nabla_T T = k_1 F_2,$$

$$\nabla_T^2 T = k_1' F_2 - k_1^2 F_1 + k_1 k_2 F_3,$$

$$\nabla_T^3 T = (-3k_1 k_1') F_1 + (k_1'' - k_1^3 - k_1 k_2^2) F_2 + (2k_1' k_2 + k_1 k_2') F_3 + (k_1 k_2 k_3) F_4,$$

denklemlerini

$$\begin{aligned}(-f^2 R^N(\nabla_T^N T, T)T - (f' f'' + f f''')T - (2(f')^2 + 3f f''')\nabla_T^N T - \\ (4f f')\nabla_T^N \nabla_T^N T - f^2 \nabla_T^N \nabla_T^N \nabla_T^N T) = 0 \quad [20]\end{aligned}$$

verilen bu bi-f harmonik eğrilik denkleminde yerine yazalım.

$$\begin{aligned}-f^2 c. k_1. F_2 - (f' f'' + f f''')F_1 - (2(f')^2 + 3f f''')k_1. F_2 - \\ 4f f'(-k_1^2 F_1 + k_1' F_2 + k_1 k_2 F_3) - f^2(-3k_1 k_1' F_1 + (-k_1^3 + k_1'' - k_1 k_2^2)F_2 +\end{aligned}$$

$$(2k_1'k_2 + k_1k_2')F_3 + (k_1k_2k_3)F_4 = 0,$$

elde edilir. Bu denklemden F_1, F_2, F_3, F_4 katsayılarının ayrı ayrı sıfıra eşitlersek

$$(f'f'' + ff''' - 4ff'k_1^2 - 3f^2k_1k_1') = 0, \quad (4.26)$$

$$-f^2ck_1 - 2(f')^2k_1 - 3ff''k_1 - 4ff'k_1' - f^2(-k_1^3 + k_1'' - k_1k_2^2) = 0, \quad (4.27)$$

$$(-4f'k_1k_2 - f(2k_1'k_2 + k_1k_2')) = 0 \quad (4.28)$$

$$(k_1k_2k_3) = 0 \quad (4.29)$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklemlerden yola çıkarak şu durumları inceleyebiliriz:

I. Durum. $k_1 = 0$ ise yani γ bir geodezik eğri ise (4.26) denkleminde

$$f'f'' + ff''' = 0 \Rightarrow (ff'')' = 0,$$

$$ff'' = sbt,$$

olur. Eğer $ff'' = sbt$ ise iki durum söz konusudur :

$$ff'' = 0,$$

ya da $ff'' = sbt \neq 0$ dır. $ff'' = 0$ ise şu sonucu elde ederiz :

$$f = 0 \text{ veya } f'' = 0,$$

dır. $ff'' = sbt \neq 0$ ise bunu sağlayacak f fonksiyonu $ff'' = \lambda, (\lambda \in \mathbb{R})$ diferansiyel denklemi çözülerek bulunur. Dolayısıyla buradan şu sonucu çıkarabiliriz :

$ff'' = 0$ iken $f'' = 0$ yani $f(t) = at + b, a, b \in \mathbb{R}$ şeklindedir. $k_1 = 0$ iken $M^3(c)$ deki bi- f harmonik eğriler için $f(t) = at + b$ şeklindedir. Bu da f harmonik [21] olmayan bi- f harmonik eğrilerin varlığını gösterir .

II. Durum. $k_1 = sbt \neq 0, k_2 = 0$ olsun. Bu durumda (4.26) denkleminde

$$f'f'' + ff''' - 4ff'k_1^2 = 0,$$

ve (4.27) denkleminde

$$-2(f')^2k_1 - 3ff''k_1 + f^2k_1^3 - f^2ck_1 = 0,$$

denklem sistemi k_1 parantezine alınırsa ($k_1 \neq 0$ olduğundan geriye kalan 0 olacağından)

$$((ff'')' - 4ff'k_1^2) = 0, \quad (4.28)$$

$$(-2(f')^2 - 3ff'' + f^2k_1^2 - f^2c) = 0,$$

olup, burada

$$(-2(f')^2 - 3ff'' + f^2k_1^2 - f^2c) = 0$$

denklemden elde edilen

$$3ff'' = f^2(k_1^2 - c) - 2(f')^2$$

eşitlik (4.3.3.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(\frac{1}{3}[f^2(k_1^2 - c)] - 2(f')^2\right)' - 4ff'k_1^2 = 0,$$

$$\frac{1}{3}[2ff'(k_1^2 - c) + f^2(2k_1k_1') - 4f'f''] - 4ff'k_1^2 = 0,$$

$$\frac{2}{3}ff'(k_1^2 - c) + \frac{2}{3}f^2k_1k_1' - \frac{4}{3}f'f'' - \frac{12}{3}ff'k_1^2 = 0,$$

$$\frac{2}{3}ff'k_1^2 - \frac{2}{3}cff' + \frac{2}{3}f^2k_1k_1' - \frac{4}{3}f'f'' - \frac{12}{3}ff'k_1^2 = 0,$$

$$2ff'k_1^2 - 2cff' + 2f^2k_1k_1' - 4f'f'' - 12ff'k_1^2 = 0,$$

$$ff'(k_1^2 - 6k_1^2 - c) + f^2k_1k_1' - 2f'f'' = 0,$$

$$f(f'(k_1^2 - 6k_1^2 - c) + fk_1k_1') - 2f'f'' = 0,$$

elde edilir. $k_1 = sbt$ olduğunda $k_1' = 0$ olur. Dolayısıyla buradan denklem

$$f(f'(-5k_1^2 - c)) - 2f'' = 0$$

olup eğer $f = sbt$ ise γ eğrisi f-harmoniktir. $f \neq sbt$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda γ eğrisinin bi-f harmonik olması için gerek ve yeter şart

$$f(f'(-5k_1^2 - c)) - 2f'' = 0$$

denkleminin çözümü yapılarak

$$(5k_1^2 + c) + 2m^2 = 0,$$

$$m^2 = -\frac{5k_1^2 + c}{2},$$

$$m_{1,2} = \sqrt{\frac{-(5k_1^2 + c)}{2}},$$

elde edilir. Buradan

$$f(t) = c_1 e^{t\sqrt{\frac{-(5k_1^2 + c)}{2}}} + c_2 e^{-t\sqrt{\frac{-(5k_1^2 + c)}{2}}}$$

diferensiyel denklemin çözümünden elde edilen f ler olmasıdır. Dolayısıyla buradan şu sonucu çıkarabiliriz :

$k_1 = sbt \neq 0, k_2 = 0$ iken γ nın bi- f -harmonik [21] olması için gerek ve yeter şart $y = f = c_1 + c_2 e^{\frac{k_1^2 - 6k_1 - c}{2}}$ şeklinde yazılabilmektedir.

III. Durum. $k_1 = sbt \neq 0, k_2 \neq 0 = sbt$ olsun. Bunlar dikkate alınarak (4.26) denkleminde

$$f' f'' + f f''' - 4f f' k_1^2 = 0 \Rightarrow (f f'')' - 4f f' k_1^2 = 0$$

(4.27) denkleminde

$$-2(f')^2 k_1 - 3f f'' k_1 + f^2 k_1^3 + k_1 k_2^2 - f^2 c k_1 = 0,$$

$$k_1(-2(f')^2 - 3f f'' + f^2 k_1^2 + f^2 k_2^2 - f^2 c) = 0,$$

$$(-2(f')^2 - 3f f'' + f^2(k_1^2 + k_2^2 - c)) = 0,$$

ve (4.28) denkleminde

$$4f f' k_1 k_2 = 0 \Rightarrow 4f f' = 0,$$

ve (4.29) denkleminde

$$f^2(k_1 k_2 k_3) = 0 \Rightarrow k_3 = 0$$

elde edilir. Buradan elde edilen

$$(f f'')' - 4f f' k_1^2 = 0, \quad (4.30)$$

$$(-2(f')^2 - 3f f'' + f^2(k_1^2 + k_2^2 - c)) = 0, \quad (4.31)$$

$$4f f' = 0, \quad (4.32)$$

denklemler ortak çözümlerse,

$$4f f' = 0 \Rightarrow f' = 0 \Rightarrow f = sbt$$

olup yukarıdaki denklemlerden (4.28) denklemini kendiliğinden sağlar. (4.33) denkleminde $f = sbt$ kullanılırsa

$$f^2(k_1^2 + k_2^2 - c) = 0,$$

$$k_1^2 + k_2^2 - c = 0,$$

elde edilir. Buradan şu sonucu çıkarabiliriz : $k_1 = sbt \neq 0, k_2 = sbt \neq 0$ ise γ nın bi- f harmonik eğri olması için gerek ve yeter şart $f = sbt$ ve $k_1^2 + k_2^2 = c$ olmasıdır. Dolayısıyla bu şartlar altında $M^3(c)$ de bi- f harmonik eğri yoktur [21].

IV. Durum. $k_1 = sbt \neq 0, k_2 \neq sbt$ olsun. Bu durumda (4.26), (4.27), (4.28) ve (4.29) denklemlerinden sırasıyla

$$f' f'' + f f''' - 4f f' k_1^2 = 0, \quad (4.34)$$

$$-f^2 k_1^2 - f^2 k_2^2 + 3ff'' + 2(f')^2 = 0, \quad (4.35)$$

$$k_2' f + 4k_2 f' = 0, \quad (4.36)$$

$$k_2 k_3 = 0, \quad (4.37)$$

elde edilir.

(4.36) denkleminde gerekli işlemler yapıldığında $f = ck_2^{(-\frac{1}{4})}$ olduğu elde edilir. Bu f nin diğer denklemleride sağlaması gerekir. $f = ck_2^{(-\frac{1}{4})}$ için

$$f' = -\frac{1}{2}ck_2^{(-\frac{3}{2})}k_2',$$

$$f'' = \frac{3}{4}ck_2^{(-\frac{5}{2})}(k_2')^2 - \frac{1}{2}c_2k_2^{(-\frac{3}{2})}k_2'',$$

$$(ff'') = \frac{3}{4}c^2k_2^{-3}(k_2')^2 - \frac{1}{2}c^2k_2^{-2}k_2'',$$

$$(ff'')' = -\frac{9}{4}c^2k_2^{-4}(k_2')^3 + \frac{3}{4}c^2k_2^{-3}2k_2'k_2'' - \frac{1}{2}ck_2^{-2}k_2''',$$

$$(ff'')' = -\frac{9}{4}c^2k_2^{-4}(k_2')^3 + \frac{6}{4}c^2k_2^{-3}k_2'k_2'' + \frac{4}{4}c^2k_2^{-3}k_2'k_2'' - \frac{1}{2}c^2k_2^{-2}k_2''',$$

elde edilir. Elde edilen bu denklemler denklemleri (4.34), (4.35) denklemlerinde yerine yazarsak sırasıyla

$$32k_1^2k_2^2k_2' - 25(k_2')^3 + 32k_2k_2'k_2'' - 8k_2^2k_2''' = 0, \quad (4.38)$$

$$16k_1^2k_2^2 + 16k_2^4 - 17(k_2')^2 + 12k_2k_2'' = 0, \quad (4.39)$$

denklemleri elde edilir. Sonuç olarak $k_1 \neq sbt, k_2 \neq 0 = sbt$ olmak üzere γ eğrisinin bi-f harmonik [21] olması için gerek ve yeter şart $f = ck_2^{(-\frac{1}{4})}, k_3 = 0$ ve k_1, k_2 bulabileceğimiz (4.38) ile (4.39) denklemleridir.

V.Durum. $k_1 \neq sbt, k_2 = 0$ olsun. Bu durumda (4.26) ve (4.27) denklemlerinden sırasıyla

$$(f'f'' + ff''' - 4ff'k_1^2 - 3f^2k_1k_1') = 0, \quad (4.40)$$

$$(-k_1^3f^2 + k_1''f^2 + 4ff'k_1' + 3ff''k_1 + 2(f')^2k_1) = 0, \quad (4.41)$$

elde edilir. Bulduğumuz bu denklemlerden yola çıkarak $k_1 \neq sbt, k_2 = 0$ olmak üzere, γ eğrisinin bi-f harmonik [21] olması için gerek ve yeter şart bu denklemlerde gerekli işlemler yapılarak buradan k_1, k_2 eğriliklerinin bulunabileceği (4.40) ve (4.41) denklemlerinin sağlanmasıdır.

VI.Durum. $k_1 \neq sbt, k_2 = sbt \neq 0$ olsun. Bu durumda (4.26), (4.27), (4.28) ve (4.29) denklemlerinden sırasıyla

$$\begin{aligned} f' f'' + f f''' - 4f f' k_1^2 - 3f^2 k_1 k_1' &= 0, \\ -k_1^3 f^2 + k_1'' f^2 + 4f f' k_1' + 3f f'' k_1 + 2(f')^2 k_1 &= 0, \\ k_1' f + 2k_1 f' &= 0, \\ k_1 k_3 &= 0, \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $k_3 = 0, f = c k_1^{(-\frac{1}{2})}$ dir. Dolayısıyla sonuç olarak

$k_1 \neq sbt, k_2 = sbt \neq 0$ olmak üzere γ eğrisinin bi-f harmonik olması için gerek ve yeter şart $k_3 = 0, f = c k_2^{(-\frac{1}{2})}$ olması ve bunları yukarıdaki denklemde yerine yazıp gerekli işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned} 9(k_1')^3 + 4k_1^4 k_1' - 10k_1 k_1' k_1'' + 2k_1^2 k_3''' &= 0, \\ 3(k_1')^2 - 4k_1^4 - 4k_1^2 k_2^2 - 2k_1 k_1'' &= 0 \end{aligned}$$

k_1 ve k_2 eğriliklerinin bulunabileceği bu denklemleri sağlamasıdır [21].

VII.Durum. $k_1 \neq sbt$ ve $k_2 \neq sbt$ olsun. Bu durumda (4.26), (4.27), (4.28) ve (4.29) denklemlerini dikkate alarak şu sonuca varabiliriz: γ eğrisinin bi-f harmonik [21,22] olması için gerek ve yeter şart, $f = c k_2^{(-\frac{1}{2})} k_2^{(-\frac{1}{4})}, k_3 = 0$ olması ve k_1, k_2 nin bulunabileceği

$$\begin{aligned} (f' f'' + f f''' - 4f f' k_1^2 - 3f^2 k_1 k_1') &= 0, \\ (-k_1^3 f^2 - k_1 k_2^2 f^2 + f^2 k_1'' + 4k_1' f f' + 3k_1 f f'' + 2k_1 (f')^2) &= 0, \end{aligned}$$

denklemleri sağlamasıdır.

5. BULGULAR ve TARTIŞMA

5.1. f-Biharmonik Eğriler

Şimdi biz Riemannian space formda normal kesit eğrisi γ nın f – biharmonik olması için gerek ve yeter şartlar inceleyelim: Riemannian space formda eğrilik tensörü $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$

$$R(X, Y)Z = k. \{ \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y \},$$

$$R(T, \nabla_T T)T = -c. k_1. v_2,$$

olup f – biharmonik eğri [17] olması için

$$f(\nabla_T^3 T - R^N(T, \nabla_T T)T) + 2f' \nabla_T^2 T + f'' \nabla_T T = 0$$

olmalıdır. Bu durumda

$$\nabla_T T = k_1 v_2,$$

$$\nabla_T^2 T = (k_1 v_2)' = k_1' v_2 + k_1 v_2',$$

$$= k_1' v_2 + k_1(-k_1 v_1 + k_2 v_3),$$

$$= k_1' v_2 - k_1^2 v_1 + k_1 k_2 v_3,$$

$$\nabla_T^3 T = \nabla_T(k_1' v_2 - k_1^2 v_1 + k_1 k_2 v_3),$$

$$= (k_1' v_2)' - (k_1^2 v_1)' + (k_1 k_2 v_3)',$$

$$= k_1'' v_2 + k_1' v_2' - 2k_1 k_1' v_1 - k_1^2 v_1' + (k_1 k_2)' v_3 + (k_1 k_2)(v_3)',$$

$$= k_1'' v_2 + k_1'(-k_1 v_1 + k_2 v_3) - 2k_1 k_1' v_1 - k_1^2 k_1 v_2 +$$

$$k_1' k_2 v_3 + k_1 k_2' v_3 + k_1 k_2(-k_2 v_2 + k_3 v_4),$$

$$= k_1'' v_2 - k_1' k_1 v_1 + k_1' k_2 v_3 - 2k_1 k_1' v_1 - k_1^2 k_1 v_2 +$$

$$k_1' k_2 v_3 + k_1 k_2' v_3 - k_1 k_2^2 v_2 + k_1 k_2 k_3 v_4,$$

$$= (-2k_1 k_1' - k_1' k_1) v_1 + (k_1'' - k_1^2 k_1 - k_1 k_2^2) v_2 +$$

$$(k_1' k_2 + k_1' k_2 + k_1 k_2') v_3 + (k_1 k_2 k_3) v_4,$$

$$= (-3k_1 k_1') v_1 + (k_1'' - k_1^3 - k_1 k_2^2) v_2 + (2k_1' k_2 + k_1 k_2') v_3$$

$$+ (k_1 k_2 k_3) v_4$$

elde edilir. Şimdi bu bulduğumuz $\nabla_T T$, $\nabla_T^2 T$ ve $\nabla_T^3 T$ ifadeleri

$$f(\nabla_T^3 T - R^N(T, \nabla_T T)T) + 2f' \nabla_T^2 T + f'' \nabla_T T = 0 \quad [76],$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & f[(-3k_1 k_1')v_1 + (k_1'' - k_1^3 - k_1 k_2^2)v_2 + (2k_1' k_2 + k_1 k_2')v_3 + (k_1 k_2 k_3)v_4 + \\ & \quad c.k_1 v_2] + 2f'(k_1' v_2 - k_1^2 v_1 + k_1 k_2 v_3) + f'' k_1 v_2 = 0, \\ & f k_1'' v_2 - f k_1 k_1' v_1 + f k_1' k_2 v_3 - 2f k_1 k_1' v_1 - f k_1^3 v_2 + f(k_1 k_2)' v_3 - f k_1 k_2^2 v_2 + \\ & f k_1 k_2 k_3 v_4 + f c k_1 v_2 + 2f' k_1' v_2 - 2f' k_1^2 v_1 + 2f' k_1 k_2 v_3 + f'' k_1 v_2 = 0, \\ & (-3k_1 k_1' f - 2f' k_1^2)v_1 + (f k_1'' - f k_1^3 - f k_1 k_2^2 + f c.k_1 + 2f' k_1' + f'' k_1)v_2 + \\ & [f k_1' k_2 + f(k_1 k_2)' + 2f' k_1 k_2]v_3 + f k_1 k_2 k_3 v_4 = 0, \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemin sıfır olması , v_1, v_2, v_3, v_4 ün katsayılarının 0 olmasıyla mümkündür. Yani

$$(-3k_1 k_1' f - 2f' k_1^2) = 0, \quad (5.1)$$

$$f k_1'' - f k_1^3 - f k_1 k_2^2 + f c.k_1 + 2f' k_1' + f'' k_1 = 0, \quad (5.2)$$

$$f k_1' k_2 + f(k_1 k_2)' + 2f' k_1 k_2 = 0, \quad (5.3)$$

$$f(k_1 k_2 k_3) = 0, \quad (5.4)$$

dir. (5.1) denkleminde

$$(3k_1 k_1' f + 2f' k_1^2) = 0,$$

$$k_1(3k_1' f + 2f' k_1) = 0,$$

$$3k_1' f + 2f' k_1 = 0,$$

$$3 \frac{k_1'}{k_1} + 2 \frac{f'}{f} = 0,$$

$$3(Inf k_1)' + 2(Inf)' = 0,$$

ve (5.2) denklemden

$$f(k_1'' - k_1^3 - k_1 k_2^2 + c.k_1) + 2f' k_1' + f'' k_1 = 0,$$

$$f(k_1'' - k_1^3 - k_1 k_2^2 + c.k_1) + f' k_1' + f' k_1' + f'' k_1 = 0,$$

$$f(k_1'' - k_1^3 - k_1 k_2^2 + c.k_1) + f' k_1' + (f' k_1)' + f' k_1' = 0,$$

ve (5.3) denkleminde

$$f k_1' k_2 + f(k_1 k_2)' + 2f'(k_1 k_2) = 0,$$

$$f k_1' k_2 + f(k_1 k_2)' + f'(k_1 k_2) + f'(k_1 k_2) = 0,$$

$$k_2(fk_1' + f'k_1) + (fk_1k_2)' = 0,$$

$$k_2(fk_1')' + (fk_1k_2)' = 0,$$

ve (5.4) denkleminde

$$f(k_1k_2k_3) = 0$$

elde edilir.

I. Durum. $k_1 = 0$ ise yani geodezik eğri ise tüm denklemler sağlanacağından eğri aşikar olarak f – biharmonik eğridir.

II. Durum. $k_1 = sbt \neq 0$, $k_2 = 0$ olsun. Bu durumda denklem sırasıyla

(5.1) denkleminde $2f'k_1^2 = 0$ ve (5.2) denkleminde

$$f(-k_1^3 + ck_1) + f''k_1 = 0,$$

$$k_1[f(-k_1^2 + c) + f''] = 0,$$

$$f(-k_1^2 + c) + f'' = 0,$$

(5.3) denkleminde direkt sıfırdır. O halde

$$2f'k_1^2 = 0 \Rightarrow f' = 0 \Rightarrow f = sbt,$$

$$f(-k_1^2 + c) + f'' = 0 \Rightarrow f(-k_1^2 + c) = 0,$$

$$k_1^2 = c \Rightarrow k_1 = \sqrt{c}$$

SONUÇ: $k_1 = sbt \neq 0$ ve $k_2 = 0$ olması durumunda eğrinin f – biharmonik [17] olması için gerek ve yeter şart f nin sabit fonksiyon ve eğrimizin küre yüzeyinde bir eğri olmasıdır.

III. Durum. $k_1 = sbt \neq 0$ ve $k_2 = sbt \neq 0$ olsun. Bu durumda

(5.1) denkleminde

$$2f'k_1^2 = 0 \Rightarrow f' = 0 \Rightarrow f = sbt,$$

ve (5.2) denkleminde

$$f(-k_1^3 - k_1k_2^2 + ck_1) + f''k_1 = 0,$$

$$\Rightarrow f = sbt \Rightarrow fk_1(-k_1^2 - k_2^2 + c) = 0,$$

$$\Rightarrow k_1^2 + k_2^2 = c,$$

ve (5.3) denkleminde $2f'k_1k_2 = 0$ dır, f sbt olduğundan bu denklem direkt sağlanır.

ve (5.4) denkleminde

$$f(k_1k_2k_3) = 0 \Rightarrow k_3 = 0.$$

Buradan

SONUC: $k_1 = sbt \neq 0$ ve $k_2 = sbt \neq 0$ olsun. Bu durumda eğrinin $f - biharmonik$ [17] olması için gerek ve yeter şart f nin sabit, $k_3 = 0$ ve eğrimizin bir helis olmasıdır.

IV. Durum. $k_1 \neq sbt, k_2 = sbt \neq 0$ alalım. Bu durumda (5.1) denkleminde

$$\begin{aligned} 3fk_1k_1' + 2f'k_1^2 &= 0 \Rightarrow k_1(3fk_1' + 2f'k_1) = 0, \\ &\Rightarrow 3fk_1' + 2f'k_1 = 0, \\ &\Rightarrow 3\frac{k_1'}{k_1} + 2\frac{f'}{f} = 0, \\ &\Rightarrow 3(Ink_1)' + 2(Inf)' = 0, \\ &\Rightarrow 3(Ink_1) + 2(Inf) - c_1 = 0, \\ &\Rightarrow Ink_1^3 \cdot f^2 - c_1 = 0, \\ &\Rightarrow k_1^3 \cdot f^2 = e^{c_1}, \end{aligned}$$

ve (5.2) denkleminde

$$f(k_1'' - k_1^3 - k_1k_2^2 + c.k_1) + 2f'k_1' + f''k_1 = 0,$$

ve (5.3) denkleminde

$$\begin{aligned} fk_1'k_2 + fk_1'k_2 + 2f'k_1k_2 &= 0, \\ 2fk_1'k_2 + 2f'k_1k_2 &= 0, \\ (fk_1' + f'k_1)k_2 &= 0, \\ \Rightarrow (fk_1)'k_2 &= 0 \\ \Rightarrow (fk_1)' &= 0 \Rightarrow fk_1' + f'k_1 = 0, \\ \Rightarrow \frac{k_1'}{k_1} + \frac{f'}{f} &= 0 \Rightarrow (Ink_1)' + (Inf)' = 0, \\ (Ink_1) + (Inf) &= c_2, \\ Infk_1 &= e^{c_2}, \\ fk_1 &= e^{c_2}, \\ f &= \frac{e^{c_2}}{k_1}, \end{aligned}$$

ve (5.4) denkleminde

$$f(k_1 k_2 k_3) = 0 \Rightarrow \frac{c_2}{k_1} k_1 k_2 k_3 = 0,$$

$$\Rightarrow c_2 k_1 k_2 k_3 = 0 \Rightarrow k_3 = 0$$

olur. Bu bulduklarımız

$$k_1^3 f^2 = e^{c_1},$$

$$f k_1 = e^{c_2},$$

$$k_3 = 0$$

dır. Bu denklemleri kullanarak

$$k_1^3 f^2 = e^{c_1 - c_2},$$

$$f = e^k k_1^{-2}$$

bulunur. $f = e^k k_1^{-2}$ denkleminin birinci ve ikinci türevlerini alırsak

$$f' = -2 k_1^{-3} e^k,$$

$$f'' = 6 e^k k_1^{-4},$$

elde edilir. Bu denklemleri (5.2) denkleminde yerine yazarsak

$$f(k_1'' - k_1^3 - k_1 k_2^2 + c. k_1) + 2 f' k_1' + f'' k_1 = 0,$$

$$e^k k_1^{-2} (k_1'' - k_1^3 - k_1 k_2^2 + c. k_1) + 2. (-2) k_1^{-3} e^k k_1' + 6 e^k k_1^{-4} k_1 = 0,$$

$$e^k k_1^{-2} [k_1'' - k_1^3 - k_1 k_2^2 + c. k_1 - 4 k_1^{-1} k_1' + 6 k_1^{-1}] = 0,$$

$$k_1'' - k_1^3 - k_1 k_2^2 + c. k_1 - 4 k_1^{-1} k_1' + 6 k_1^{-1} = 0,$$

$$k_1'' - k_1 (k_1^2 + k_2^2 - c) + k_1^{-1} (-4 k_1' + 6) = 0,$$

$$k_1'' k_1 - k_1^2 (k_1^2 + k_2^2 - c) - 4 k_1' + 6 = 0,$$

$$k_1'' k_1^2 - k_1^3 (k_1^2 + k_2^2 - c) - 4 k_1' k_1 + 6 k_1 = 0.$$

SONUÇ: $k_1 \neq sbt, k_2 = sbt \neq 0$ durumunda eğrimizin $f - biharmonik$

[17] olması için gerek ve yeter şart k_1 'in

$$k_1'' k_1^2 - k_1^3 (k_1^2 + k_2^2 - c) - 4 k_1' k_1 + 6 k_1 = 0,$$

diferensiyel denkelemin çözümünden elde edilecek k_1, f' inde

$$f = e^k k_1^{-2}, k_3 = 0,$$

olmasıdır.

V. Durum. $k_1 \neq sbt$ ve $k_2 \neq sbt$ olsun. Bu durumda

(5.1) denkleminden

$$3k_1 k_1' f + 2f' k_1^2 = 0,$$

(5.2) denklminden

$$f k_1'' - f k_1^3 - f k_1 k_2^2 + f c \cdot k_1 + 2f' k_1' + f'' k_1 = 0,$$

(5.3) denkleminde

$$f k_1' k_2 + f(k_1 k_2)' + 2f' k_1 k_2 = 0,$$

(5.4) denkleminde

$$f(k_1 k_2 k_3) = 0 \Rightarrow k_3 \neq 0$$

olmalıdır. Bu denklemlerden, (5.1) denkleminde

$$k_1(3k_1' f + 2f' k_1) = 0,$$

$$\Rightarrow 3k_1' f + 2f' k_1 = 0,$$

$$\Rightarrow 3 \frac{k_1'}{k_1} + 2 \frac{f'}{f} = 0,$$

$$\Rightarrow 3(\ln k_1)' + 2(\ln f)' = 0,$$

$$\Rightarrow 3(\ln k_1) + 2(\ln f) - c_1 = 0,$$

$$\Rightarrow \ln k_1^3 \cdot f^2 = c_1,$$

$$\Rightarrow k_1^3 \cdot f^2 = e^{c_1},$$

$$\Rightarrow k_1^3 \cdot f^2 = e^{c_1},$$

$$\Rightarrow f = k_1^{-3/2} e^{c_1/2},$$

(5.2) denklminden

$$f k_1'' - f k_1^3 - f k_1 k_2^2 + f c \cdot k_1 + f' k_1' + f' k_1' + f'' k_1 = 0,$$

(5.3) denkleminde

$$f k_1' k_2 + f(k_1 k_2)' + 2f' k_1 k_2 = 0,$$

denklemlerinden (5.3) denklemini ele alalım:

$$f k_1' k_2 + f(k_1 k_2)' + 2f' k_1 k_2 = 0,$$

$$k_1' k_2 + (k_1 k_2)' + 2 \frac{f'}{f} (k_1 k_2) = 0,$$

$$\frac{k_1' k_2}{k_1 k_2} + \frac{(k_1 k_2)'}{k_1 k_2} + 2 \frac{f'}{f} = 0,$$

$$(\ln k_1)' + (\ln k_1 k_2)' + 2(\ln f)' = 0,$$

$$\ln k_1 + \ln k_1 k_2 + 2 \ln f = c_2,$$

$$\ln k_1^2 \cdot k_2 \cdot f^2 = c_2 \Rightarrow k_1^2 \cdot k_2 \cdot f^2 = e^{c_2},$$

$$\left(f = k_1^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{c_1}{2}} \right) \text{ olduğundan } \Rightarrow k_1^2 \cdot k_2 \cdot f^2 k_1^{-3} e^{c_1} = e^{c_2},$$

$$\Rightarrow k_2 = k_1 \cdot e^{c_2 - c_1},$$

(5.2) denklemini kullanırsak

$$f k_1'' - f k_1^3 - f k_1 k_2^2 + f c \cdot k_1 + f' k_1' + f' k_1' + f'' k_1 = 0,$$

$$f k_1'' - f k_1^3 - f k_1 k_2^2 + f c \cdot k_1 + f' k_1' + (f' k_1)' = 0,$$

$$[k_1^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{c_1}{2}} k_1'' - k_1^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{c_1}{2}} k_1^3 - k_1^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{c_1}{2}} k_1 k_2^2 + k_1^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{c_1}{2}} c k_1 + k_1' \left(-\frac{3}{2} k_1^{-\frac{5}{2}} k_1' e^{\frac{c_1}{2}} \right) +$$

$$(-\frac{3}{2} k_1^{-\frac{5}{2}} k_1' e^{\frac{c_1}{2}} k_1)'] = 0,$$

$$[k_1^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{c_1}{2}} k_1'' - k_1^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{c_1}{2}} k_1^3 - k_1^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{c_1}{2}} k_1^3 e^{2(c_2 - c_1)} + k_1^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{c_1}{2}} c k_1 - \frac{3}{2} k_1^{-\frac{5}{2}} (k_1')^2 e^{\frac{c_1}{2}}$$

$$+ (-\frac{3}{2} k_1^{-\frac{5}{2}} k_1' e^{\frac{c_1}{2}} k_1)'] = 0,$$

$$[k_1^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{c_1}{2}} k_1'' - k_1^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{c_1}{2}} k_1^3 - k_1^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{c_1}{2}} k_1^3 e^{2(c_2 - c_1)} + k_1^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{c_1}{2}} c k_1 - \frac{3}{2} k_1^{-\frac{5}{2}} (k_1')^2 e^{\frac{c_1}{2}} +$$

$$\frac{9}{4} k_1^{-\frac{5}{2}} (k_1')^2 e^{\frac{c_1}{2}} - \frac{3}{2} k_1^{-\frac{3}{2}} k_1'' e^{\frac{c_1}{2}}] = 0,$$

$$k_1^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{c_1}{2}} [k_1'' - k_1^3 - k_1^3 e^{2(c_2 - c_1)} - c k_1 - \frac{3}{2} k_1^{-1} (k_1')^2 + \frac{9}{4} k_1^{-1} (k_1')^2 - \frac{3}{2} k_1''] = 0,$$

$$\Rightarrow k_1'' - k_1^3 - k_1^3 e^{2(c_2 - c_1)} - c k_1 + \frac{3}{4} k_1^{-1} (k_1')^2 + \frac{9}{4} k_1^{-1} (k_1')^2 - \frac{3}{2} k_1'' = 0,$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} k_1'' - k_1^3 (1 + e^{2(c_2 - c_1)}) - c k_1 + \frac{3}{4} \frac{(k_1')^2}{k_1} = 0,$$

SONUÇ: $k_1 \neq sbt$ ve $k_2 \neq sbt$ olsun. Bu durumda eğrimizin $f - biharmonik$ [17] olması için gerek ve yeter şart $k_3 = 0$ ve k_1 in

$$\frac{1}{2} k_1'' - k_1^3 (1 + e^{2(c_2 - c_1)}) - c k_1 \frac{3}{4} \frac{(k_1')^2}{k_1} = 0,$$

diferensiyel denkleminde elde edilen k_1 ve k_2 ile f ninde k_1 'e bağlı olarak

$$k_2 = k_1 e^{c_2 - c_1}$$

ve

$$f = k_1^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{c_1}{2}}$$

olmasıdır.

Son olarak γ düzlemsel normal kesit eğrisinin Riemann space formda $f - biharmonik$ [17] olma şartını inceleyelim. Riemann space formda Riemann eğrilik tensörü $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$R(X, Y)Z = c. \{ \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y \} \text{ olup}$$

$$R(T, \nabla_T T)T = -c. k_1. V_2,$$

bulunur. Eğrimizin $f - biharmonik$ [76] olma şartından

$$f(\nabla_T^3 T - R^N(T, \nabla_T T)T) + 2f' \nabla_T^2 T + f'' \nabla_T T = 0,$$

denkleminde gerekli türevler yerine yazılırsa ; $\gamma, f - biharmoniktir$ [17] gerek ve yeter şart

$$(-3k_1 k_1' f - 2f' k_1^2) = 0, \quad (5.1)$$

$$f k_1'' - f k_1^3 - f k_1 k_2^2 + f c. k_1 + 2f' k_1' + f'' k_1 = 0, \quad (5.2)$$

$$f k_1' k_2 + f(k_1 k_2)' + 2f' k_1 k_2 = 0, \quad (5.3)$$

$$f(k_1 k_2 k_3) = 0, \quad (5.4)$$

olmasıdır.

I. Durum. Eğer biz non-geodezik çözümleri araştırırsak $k_1 \neq s b t = 0, k_2 =$

0 ise (5.1) denkleminde

$$-2f' k_1^2 = 0 \Rightarrow f' = 0 \Rightarrow f = s b t,$$

(5.2) denkleminde

$$\begin{aligned} -f k_1^3 - f k_1 k_2^2 + f c. k_1 = 0 &\Rightarrow -f k_1 (k_1^2 + k_2^2 - c) = 0, \\ &\Rightarrow k_1^2 + k_2^2 = c \text{ (helis)}, \quad c \geq 0, \end{aligned}$$

(5.4) denkleminde

$$\begin{aligned} k_1 k_2 k_3 = 0 &\Rightarrow -k_1 k_1^2 e^{c_2} k_3 = 0, \\ &\Rightarrow k_3 = -k_1^3 e^{-c_2} \end{aligned}$$

olmalıdır.

II. Durum. $k_1 \neq s b t$

(5.1) denkleminde

$$(-3k_1 k_1' f - 2f' k_1^2) = 0,$$

denklemini $f' k_1$ ile bölelim:

$$k_1(3fk_1' + 2f'k_1) = 0,$$

$k_1 \neq sbt$ olduğu için

$$\Rightarrow 3 \frac{fk_1'}{k_1 f} + 2 \frac{f'k_1}{k_1 f} = 0,$$

$$\Rightarrow 3 \frac{k_1'}{k_1} + 2 \frac{f'}{f} = 0,$$

$$\Rightarrow 3(\ln k_1)' + 2(\ln f)' = 0,$$

$$\Rightarrow 3(\ln k_1) + 2(\ln f) - c_4 = 0,$$

$$\Rightarrow \ln k_1^3 \cdot f^2 = c_4,$$

$$\Rightarrow k_1^3 \cdot f^2 = e^{c_4},$$

$$\Rightarrow k_1^3 \cdot f^2 = e^{c_4},$$

$$\Rightarrow f = \pm \frac{e^{\frac{c_4}{2}}}{k_1^{\frac{3}{2}}},$$

$$\Rightarrow f = \pm k_1^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{c_4}{2}},$$

$$\Rightarrow f' = \pm \frac{3}{2} k_1^{-\frac{5}{2}} k_1' e^{\frac{c_4}{2}},$$

(5.2) denkleminde

$$fk_1'' - fk_1^3 - fk_1 k_2^2 + fc \cdot k_1 + 2f'k_1' + f''k_1 = 0,$$

$$fk_1'' + 2f'k_1' + f'k_1 - fk_1(k_1^2 + k_2^2 - c) = 0,$$

eğer $k_2 = 0$ ise

$$fk_1'' + 2f'k_1' + f'k_1 - fk_1^3 + cfk_1 = 0,$$

$$k_1^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{c_4}{2}} k_1'' + 2 \cdot \frac{3}{2} k_1^{-\frac{5}{2}} k_1' e^{\frac{c_4}{2}} + \frac{3}{2} k_1^{-\frac{5}{2}} k_1' e^{\frac{c_4}{2}} - k_1^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{c_4}{2}} k_1^3 + c k_1^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{c_4}{2}} k_1 = 0,$$

$$k_1^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{c_4}{2}} [k_1'' + 3k_1^{-1} k_1' - k_1^3 + c k_1] = 0,$$

$$k_1'' + 3k_1^{-1} k_1' - k_1^3 + c k_1 = 0,$$

lineer denklem sisteminin çözümünden elde edilen k_1 olmasıdır. Bütün bu durumlardan sonra şu iki teoremi verebiliriz:

Teorem 5.1.1 $N, M^n(c)$ nin bir alt manifoldu olsun. O zaman N 3- düzlemsel normal kesitlere sahiptir gerek ve yeter şart $k_1 = sbt \neq 0$ olması durumunda f sabit

$$k_1^2 + k_2^2 = c, c \geq 0$$

olmasıdır.

Teorem 5.1.2 $N, M^n(c)$ nin bir alt manifoldu [24] olsun O zaman N 3-
düzlemsel normal kesitlere sahiptir [23] gerek ve yeter şart $k_1 \neq sbt$ olması
durumunda eğer $k_2 = 0$ ise k_1 ,

$$k_1'' - \frac{9}{2} k_1^{-1} k_1' - k_1^3 + c k_1 = 0$$

diferensiyel denklem sisteminin çözümünden elde edilen k_1 olmalıdır ve f de

$$f = \pm \frac{3}{2} k_1^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{c_4}{2}}$$

olmalıdır. Şimdi

$$(-3k_1 k_1' f - 2f' k_1^2) = 0, \quad (5.1)$$

$$f k_1'' - f k_1^3 - f k_1 k_2^2 + f c k_1 + 2f' k_1' + f'' k_1 = 0, \quad (5.2)$$

$$f k_1' k_2 + f(k_1 k_2)' + 2f' k_1 k_2 = 0, \quad (5.3)$$

$$f(k_1 k_2 k_3) = 0, \quad (5.4)$$

denklem sistemini göz önüne alarak şu durumları inceleyebiliriz:

I. Durum. $k_1 = sbt \neq 0, k_2 = 0$ olsun. Bu durumda denklem sisteminden

(5.1) denkleminden $2f' k_1^2 = 0 \Rightarrow f' = 0 \Rightarrow f = sbt$ fonksiyon

(5.2) denkleminden $-f k_1^3 + f c k_1 = 0 \Rightarrow f k_1(-k_1^2 + c) = 0 \Rightarrow -k_1^2 + c = 0$

(5.3) ve (5.4) denkleminden direkt sıfır gelir.

Dolayısıyla $k_1 = sbt \neq 0, k_2 = 0$ iken γ' nın f - biharmonik [17] olması için gerek ve yeter şart $f = sbt$ ve $-k_1^2 + c = 0$ olmasıdır.

II. Durum. $k_1 = sbt \neq 0$ ve $k_2 = sbt \neq 0$ olsun. Bu durumda denklem sisteminde (5.1) denkleminden

$$-2f' k_1^2 = 0, \quad (5.5)$$

(5.2) denkleminden

$$f(-k_1^3 - k_1 k_2^2) + f c k_1 + f'' k_1 = 0, \quad (5.6)$$

(5.3) denkleminden

$$2f' k_1 k_2 = 0 \Rightarrow f' = 0 \Rightarrow f = sbt, \text{ olur}$$

(5.4) denkleminden

$$f(k_1 k_2 k_3) = 0 \Rightarrow k_3 = 0,$$

olur. Burada $k_3 = 0$ ve $f = sbt$ ifadeleri (5.5) ve (5.6) denklemlerinde kullanılırsa (5.5) denklemi direkt sağlanır. (5.6) denklemi ise

$$\begin{aligned} f(-k_1^3 - k_1 k_2^2) + f c \cdot k_1 &= 0, \\ -f k_1^3 - f k_1 k_2^2 + f c \cdot k_1 &= 0 \Rightarrow -f k_1 (k_1^2 + k_2^2 + c) = 0, \\ \Rightarrow k_1^2 + k_2^2 + c &= 0, \end{aligned}$$

olmalıdır. Buradan

$k_1 = sbt \neq 0, k_2 = sbt \neq 0$ iken γ nın f - biharmonik eğri [17] olması için gerek ve yeter şart $f = sbt, k_3 = 0$ ve $k_1^2 + k_2^2 + c = 0$ olmasıdır.

III. Durum. $k_1 \neq sbt, k_2 = sbt \neq 0$ olsun. Bu durumda denklem sisteminden (5.1) denklemden

$$(-3k_1 k_1' f - 2f' k_1^2) = 0,$$

(5.2) denklemden

$$f k_1'' - f k_1^3 - f k_1 k_2^2 + f c \cdot k_1 + 2f' k_1' + f'' k_1 = 0,$$

(5.3) denklemden

$$2f k_1' k_2 + 2f' k_1 k_2 = 0, \quad (5.7)$$

(5.4) denklemden

$$f(k_1 k_2 k_3) = 0 \Rightarrow f k_3 = 0,$$

elde edilir. (5.6) denklemden

$$\begin{aligned} 2f k_1' k_2 + 2f' k_1 k_2 &= 0 \Rightarrow f k_1' + f' k_1 = 0, \\ \Rightarrow (f k_1)' &= 0, \\ \Rightarrow f k_1 &= sbt \end{aligned}$$

bulunur. Bu bulduklarımız (5.1.1) ve (5.1.2) denkleminde göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} f k_1'' - f k_1^3 - f k_1 k_2^2 + f c \cdot k_1 &= 0, \\ 3k_1 k_1' f &= 0. \end{aligned}$$

bu iki denklem elde edilir. Bu iki denklemden $f = 0$ olması elde edilir. Buradan da (5.1.2) denklemden

$$\begin{aligned} \Rightarrow k_1'' - k_1^3 - k_1 k_2^2 + c \cdot k_1 &= 0, \\ \Rightarrow k_1'' - k_1((k_1^2 + k_2^2 - c)) &= 0, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k_1'' = k_1(k_1^2 + k_2^2 - c) = 0,$$

elde edilir. Buradan şu sonuca varabiliriz: $k_1 \neq sbt, k_2 = sbt \neq 0$ iken γ' nın $f - biharmonik$ eğri [17] olması için gerek ve yeter şart $f = 0$ olması k_1' in $k_1'' = k_1(k_1^2 + k_2^2 - c)$ non-lineer difrensiyel denkleminin çözümünden elde edilen k_1 olmasıdır. Dolayısıyla bu şartlar altında $f = 0$ olduğu için $M^3(c)$ ' de $f - biharmonik$ eğri yoktur.

IV. Durum. $k_1 \neq sbt$ ve $k_2 \neq sbt$ olsun. Bu durumda (5.1) denkleminde

$$(-3k_1k_1'f - 2f'k_1^2) = 0,$$

(5.2) denkleminde

$$fk_1'' - fk_1^3 - fk_1k_2^2 + fc.k_1 + 2f'k_1' + f''k_1 = 0,$$

(5.3) denkleminde

$$2fk_1'k_2 + 2f'k_1k_2 = 0,$$

(5.4) denkleminde $fk_3 = 0$ olmalıdır, $f \neq 0$ olması gerektiğinde $k_3 = 0$ olmalıdır.

Dolayısıyla bu denklemlerden (5.1.1) denkleminde

$$(-3k_1k_1'f - 2f'k_1^2) = 0 \Rightarrow -k_1(3k_1'f - 2f'k_1') = 0,$$

$$\Rightarrow 3k_1'f - 2f'k_1' = 0,$$

$$\Rightarrow 3\frac{k_1'}{k_1} - 2\frac{f'}{f} = 0,$$

$$\Rightarrow 3(Infk_1)' - 2(Inf)' = 0,$$

$$\Rightarrow 3(Infk_1)' = 2(Inf)',$$

$$\Rightarrow 3(Infk_1) + c_1 = 2(Inf) + c_2,$$

$$\Rightarrow Infk_1^3 + c_1 = Inf^2 + c_2,$$

$$\Rightarrow Inf\frac{k_1^3}{f^2} = c_2 - c_1,$$

$$\Rightarrow \frac{k_1^3}{f^2} = e^{c_2 - c_1},$$

$$\Rightarrow f^2 = k_1^3 e^{c_1 - c_2},$$

$$\Rightarrow f = \pm \sqrt{k_1^3 e^{c_1 - c_2}},$$

$$\Rightarrow f = \pm k_1^{\frac{3}{2}} e^{\frac{c_1 - c_2}{2}},$$

bulunur. Elde ettiğimiz bu f denkleminin birinci ve ikinci türevlerini alırsak

$$f' = \frac{3}{2} k_1^{\frac{1}{2}} e^{\frac{c_1 - c_2}{2}},$$

$$f'' = \frac{3}{4} k_1^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{c_1 - c_2}{2}},$$

şeklindedir. (5.2) denklemini dikkate alırsak

$$\begin{aligned} f k_1'' - f k_1^3 - f k_1 k_2^2 + f c \cdot k_1 + 2 f' k_1' + f'' k_1 &= 0, \\ f(k_1'' - k_1^3 - k_1 k_2^2 + c \cdot k_1) + f' k_1' + f' k_1' + f'' k_1 &= 0, \\ f[k_1'' - k_1(k_1^2 + k_2^2 - c)] + f' k_1' + (f' k_1)' &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

elde edilir. (5.3) denklemini dikkate alırsak

$$\begin{aligned} f k_1' k_2 + f(k_1 k_2)' + 2 f' k_1 k_2 &= 0, \\ f k_1' k_2 + f(k_1 k_2)' + f' k_1 k_2 + f' k_1 k_2 &= 0, \\ f k_1' k_2 + (f k_1 k_2)' + f' k_1 k_2 &= 0, \\ k_2(f k_1' + f' k_1) + (f k_1 k_2)' &= 0, \\ \Rightarrow k_2(f k_1)' + (f k_1 k_2)' &= 0, \\ \Rightarrow k_2(f k_1)' + (f' k_1)' k_2 + f k_1 k_2' &= 0, \\ \Rightarrow 2 k_2(f k_1)' + f k_1 k_2' &= 0, \\ \Rightarrow 2(f k_1)' + f k_1 \frac{k_2'}{k_2} &= 0, \\ \Rightarrow 2 \frac{(f k_1)'}{f k_1} + \frac{k_2'}{k_2} &= 0, \\ \Rightarrow 2[\ln(f k_1)]' + [\ln k_2]' &= 0, \\ \Rightarrow \ln(f k_1)^2 + \ln k_2 + c_3 &= 0, \\ \Rightarrow \ln(f k_1)^2 k_2 &= c_3, \\ \Rightarrow (f k_1)^2 k_2 &= e^{c_3}, \\ \Rightarrow k_1^3 e^{c_1 - c_2} k_1^2 k_2 &= e^{c_3}, \\ \Rightarrow k_1^5 k_2 &= e^{c_3 + c_2 - c_1}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

denklemini elde edilir. (5.8) denkleminde gidersek

$$\begin{aligned} f[k_1'' - k_1(k_1^2 + k_2^2 - c)] + f' k_1' + (f' k_1)' &= 0, \\ f k_1'' - f k_1(k_1^2 + k_2^2 - c) + f' k_1' + (f' k_1)' &= 0, \\ (f k_1')' + (f' k_1)' - f k_1(k_1^2 + k_2^2 - c) &= 0, \end{aligned}$$

$$[fk_1' + f'k_1]' - fk_1(k_1^2 + k_2^2 - c) = 0,$$

$$((fk_1)')' - fk_1(k_1^2 + k_2^2 - c) = 0,$$

denkleminde f yerine yazılırsa

$$((\pm k_1^{\frac{5}{2}} e^{\frac{c_1-c_2}{2}})')' \pm k_1^{\frac{5}{2}} e^{\frac{c_1-c_2}{2}} (k_1^2 + k_2^2 - c) = 0,$$

$$(\pm k_1^{\frac{5}{2}} e^{\frac{c_1-c_2}{2}})' \pm k_1^{\frac{5}{2}} e^{\frac{c_1-c_2}{2}} (k_1^2 + k_2^2 - c) = 0,$$

$$\pm \frac{15}{4} k_1^{\frac{1}{2}} e^{\frac{c_1-c_2}{2}} \pm k_1^{\frac{5}{2}} e^{\frac{c_1-c_2}{2}} (k_1^2 + k_2^2 - c) = 0,$$

$$\pm \frac{15}{4} k_1^{\frac{1}{2}} e^{\frac{c_1-c_2}{2}} = \pm k_1^{\frac{5}{2}} e^{\frac{c_1-c_2}{2}} (k_1^2 + k_2^2 - c),$$

$$\pm \frac{15}{4} = \pm k_1^2 (k_1^2 + k_2^2 - c),$$

$$\frac{15}{4} = k_1^2 (k_1^2 + k_2^2 - c),$$

elde edilir. Dolayısıyla buradan

$k_1 \neq sbt, k_2 \neq sbt$ iken γ nin f - biharmonik eğri [17] olması için

$k_3 = 0, k_1$ ve k_2 nin $k_1^2 k_2 = e^{c_3+c_2-c_1}$ ve $\frac{15}{4} = k_1^2 (k_1^2 + k_2^2 - c)$ ifadelerini sağlaması

ve $f = \pm k_1^{\frac{3}{2}} e^{\frac{c_1-c_2}{2}}$ olmasıdır.

6. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Tezde, Riemann manifoldların altmanifoldlarının düzlemsel normal kesitlere sahip olmaları için gerekli şartlar incelendi ve düzlemsel normal kesitli yüzeylerin sınıflandırılması yapıldı. Ayrıca düzlemsel normal kesitli altmanifoldlar normal kesit eğrisinin eğrilikleri yardımıyla ele alındı. Bi-f-harmonik eğriler ve f-bi-harmonik eğriler ele alındı. Verilen bir eğrinin bi-f harmonik ve f-bi harmonik olma şartları incelendi.

Bu tezde özgün sonuçlar olup elde edilen sonuçlar konuya derinlik kazandırmış olup bundan sonra yapılacak çalışmalara kaynak olabilecek niteliktedir.

KAYNAKLAR

- [1] B.Y. Chen ve S. J. Li, “Classification of surfaces with pointwise planar normal sections and its application to Fomenko’s conjecture”, *J.Geom.*,vol. 26, pp. 21-34, 1986.
- [2] B.Y. Chen ve P. Verheyen, “Submanifolds with geodesic normal sections”, *Math. Ann.*, vol. 269, pp. 417-429, 1984.
- [3] B.Y. Chen, “Classification of surfaces with planar normal sections”, *J. Of Geometry*, vol. 20, pp. 122-127, 1983.
- [4] Y.H. Kim, “Minimal surfaces of pseudo-euclidean spaces with geodesic normal sections”, *Differential geometry and its applications*, vol: 5,pp. 321-329, 1995
- [5] Y.H. Kim, “Pseudo-Riemannian submanifolds with pointwise planar normal Sections”, *Math J. Okayama Univ.*, vol:34, pp. 249-257, 1992.
- [6] Y.H. Kim, “Surfaces in a pseudo-euclidean space with planar normal sections”, *J. Geom.*, vol.35, pp. 120-131, 1989.
- [7] J. Eells ve J.H. Sampson, “Harmonic mappings of Riemannian manifolds”, *Amer. J. Math.*, vol. 86, No. 1, pp. 109-160, 1964.
- [8] G. Y. Jiang , “2- harmonic maps and their first and second variational formulas”, *Chinese Ann. Math. Ser. A*, vol. 7, pp. 109-117, 1989.
- [9] F.E. Erdoğan, “Dejenere manifoldlarda düzlemsel normal kesitler ”, Doktora tezi, İnönü Üniversitesi , 2012.
- [10] R. Caddeo, C. Oniciuc ve P. Piu, “Explicit formulas for non-geodesic biharmonic curves of the Heisenberg group” , *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* vol. 62, pp. 265-278, 2004.
- [11] A. Balmuş, S. Montaldo ve C. Oniciuc, “Classification results for biharmonic result in spheres” , *Israel J. Math.* , vol. 168, pp. 201-220, 2008.
- [12] R. Caddeo ve L. Vanhecke, “Does $\Delta^2 d^2 - n = 0$ on a Riemannian manifold” imply flatness”, *Period. Math. Hungar*, vol. 17, pp. 109-117. ,1986.
- [13] H.H. Hacısalihoğlu, *Diferensiyel Geometri cilt I.II.III*, Ankara, 1993.
- [14] S.Y. Perktas, “Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldların altmanifoldları ve biharmoniklikleri”, Doktora tezi, İnönü Üniversitesi, 2011.
- [15] K. Arslan, “Non-spherical submanifolds with pointwise 2-planar normal Sections”, *Bulletin of the London Math. Soc.*,vol. 28, no.1, pp. 88-92, 1996.
- [16] Y.L. Ou, “Biharmonic hypersurfaces in Riemannian manifolds”, *Pacific J. Math.* vol. 248, no. 1,pp. 217-232, 2010.
- [17] Y.L. Ou, “On f-biharmonic maps ve f-biharmonic submanifolds”, *Pacific J. Math.*,vol. 271, no. 2, pp. 461-477, 2014.
- [18] F.E. Erdoğan, “Düzlemsel normal kesitler”, Yüksek lisans tezi, İnönü Üniversitesi, 2003.
- [19] F.E. Erdoğan, ve S.Y. Perktas, “Normal section curves and curvatures”, *Honam Mathematical Journal*, vol 39, no 4, pp. 515-525, 2017
- [20] Y.L. Ou, “On conformal biharmonic immersions”, *Anal. Global Analysis and Geom.*, vol.2, no.2, , pp. 133-142, 2009.

- [21] S. Y.Perktaş, A. M. Blaga, F.E. Erdoğan and B.E. Acet, “Bi-f-harmonic curves and hypersurface”, *Math. D. G.* , vol. 1, no.22, 2018.
- [22] S.Y. Perktaş, “Harmonik morfizmlerin geometrisi”,Yüksek lisans tezi., İnönü Üniversitesi”, 2005.
- [23] K. Arslan, “Noktasal düzlemsel normal kesitlerle immersiyonlar”,Yüksek lisans tezi, Uludağ Üniversitesi, 1988.
- [24] B. Şahin, “CR- altmanifoldların geometrisi”, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, 1996.



KİŞİSEL BİLGİLER

Ad Soyad : Gülistan POLAT
Doğum Yeri : Battalgazi /MALATYA
Doğum Tarihi : 25.01.1992
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce
E posta : glstnyldrmm@gmail.com

Eğitim Durumu

Derece	Alan	Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Adıyaman Üniversitesi	2014
Lise	Fen Bilimleri	Malatya Cumhuriyet Anadolu Lisesi	2010