



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

F(G) KOZMOLOJİSİNDE EVRİM VE BAĞ DENKLEMLERİ

Nurşah KOÇER

Fizik Anabilim Dalı

Matematiksel Fizik Programı

DANIŞMAN

Doç. Dr. Ertan Güdekli

Ocak 2022

İSTANBUL

Bu çalışma 14.01.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı Matematiksel Fizik Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Doç. Dr. Ertan Güdekli (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Arzu Çilli
Yıldız Teknik Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Doç. Dr. Değer Sofuoğlu
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

- **İntihal Programı Beyanı**

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin aboneli olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

- **Proje Destekleri**

Bu çalışma İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliğinin numaralı projesi ile desteklenmiştir.

Bu tez numaralı proje ile tarafından desteklenmiştir.

- **Tezden Üretilmiş Yayınların Künye Bilgileri**

□

ÖNSÖZ

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca bilgisinden yararlanma fırsatı veren, tez konumun seçiminden, tez teslim aşamasına kadar yardımını esirgemeyen tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Ertan GÜDEKLİ hocama tezin hazırlanması aşamasında göstermiş olduğu sabır ve hoşgörüsünden dolayı teşekkür ederim.

Bizlere sağlamış olduğu huzurlu bir çalışma ortamından dolayı Matematiksel Fizik Anabilim Dalı öğretim üyelerine ve de aldığım her kararda beni destekleyen, her zaman yanımda olan sevgili eşim Oğuz KOÇER 'e teşekkür ederim.

Ocak 2022

Nurşah KOÇER

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
TABLO LİSTESİ	viii
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	x
ÖZET	xi
SUMMARY	xii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR	3
2.1. KOZMOLOJİK MODELLER	3
2.1.1. FLRW Modelleri	4
2.1.2. Brans - Dicke Kozmolojisi	7
2.1.3. Feza Gürsey Teorisi	8
2.1.4. F(G) Gravite	11
3. MALZEME VE YÖNTEM	14
3.1. 1+3 KOVARYANT AYRIŞIMI	14
3.2. RIEMANN GEOMETRİSİ	22
3.2.1. Bianchi ve Ricci Özdeşlikleri	22
3.2.2. Weyl Tensörü	24
3.2.3. Enerji Momentum Tensörü	25
3.2.4. Evrim ve Bağ Denklemlerinin Çıkarılışı	27
3.2.5. Evrim ve Bağ Denklemleri	32
4. BULGULAR	36
4.1. EFEKTİF ENERJİ - MOMENTUMUNUN F(G) GRAVİTEDEKİ YORUMU	36
4.2. EFEKTİF ENERJİ - MOMENTUM TANSÖRÜNÜN DİNAMİK DEĞİŞKENLERİNİN HESABI	41

4.3. F(G)-GRAVİTE TEORİSİNDE EVRİM VE BAĞ DENKLEMLERİNİN OLUŞTURULMASI	47
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	52
KAYNAKLAR	54
EKLER	56
EK 1. İşaret ve indis kabulleri, yazılışlar ve kısa bilgiler	56
EK 2. F (R,G,T) Gravitenin alan denklemlerinin metriğe göre varyasyonla çıkarılışı	59
ÖZGEÇMİŞ	66



ŞEKİL LİSTESİ

Page No



TABLO LİSTESİ

	Page No
Tablo 2.1: Fiziksel Büyüklükler	6
Tablo 3.1: İzdüşüm Tansörleri.....	15
Tablo 3.2: Weyl Tansörünün Elektrik ve Manyetik Tanımları	25
Tablo 3.3: Elektrik ve Manyetik Bölümlerin Simetrik Durumları	25
Tablo 3.4: Dinamik Büyüklükler	26

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
g_{ab}	: Uzay-zamanın metriği
R_{ab}	: Ricci tansörü
R_{abcd}	: Riemann eğrilik tansörü
R	: Ricci skaler eğriliği
C_{abcd}	: Weyl tansörü
H_{ab}	: Weyl tansörünün magnetik kısmı
E_{ab}	: Weyl tansörünün elektriksel kısmı
G_{ab}	: Einstein tansörü
T_{ab}	: Enerji-momentum tansörü
Λ	: Kozmolojik sabit
κ^2	: Kuplaj sabiti
c	: Işık hızı
G	: Newton gravitasyon sabiti
u	: 4-lü hız vektörü
n	: Uzaysal hiperyüzeylerin normalı
Σ	: Hiperyüzey
h_{ab}	: Projeksiyon tansörü
U_{ab}	: Paralel izdüşürme tansörü
$\dot{u}_a$	: İvme
p	: Eş yönlü basınç
μ	: Madde enerji yoğunluğu
q_a	: Enerji akısı veya momentum yoğunluğu
π_{ab}	: Eşyönsüz basınç tansörü
θ	: Genişleme skaleri
θ_{ab}	: Genişleme tansörü
σ	: Makaslama skaleri
σ_{ab}	: Makaslama (shear) tansörü
ω	: Dönme skaleri
ω_a	: Dönme vektörü

ω_{ab}	: Girdap tansörü
G	: Gauss-Bonnet terimi

Kısaltmalar	Açıklama
GRT	: Genel Rölativite Teorisi
$FLRW$	: Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker
RW	: Robertson-Walker
EAD	: Einstein Alan Denklemleri
EH	: Einstein-Hilbert Aksiyonu
ΛCDM	: Λ Soğuk karanlık madde
$COBE$	: Kozmik Mikrodalga Arkafon Işınımı
LNH	: Dirac 'ın Büyük Sayı Hipotezi

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

F(G) KOZMOLOJİSİNDE EVRİM VE BAĞ DENKLEMLERİ

Nurşah KOÇER

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ertan Güdekli

Amacımız, $F(G)$ ile değiştirilmiş gravitasyon teorilerinde kozmolojik evriminin Genel Rölativite teorisinin Standart Kozmolojisine göre, ne türlü değişiklikler ve farklılıklar getirdiğinin belirlenmesidir. R_{ab} ve R_{abcd} sırasıyla Ricci ve Riemann eğrilik tansörleri ve R 'de Ricci eğrilik skaleri cinsinden G , $G = R^2 - 4R_{ab} R^{ab} + R_{abcd} R^{abcd}$ biçiminde tanımlı Gauss-Bonnet terimi olmak üzere yüksek mertebeden gravitasyon teorileri sınıfına ait $F(G)$ -gravite teorisini göz önüne alacağız. Efektif akışkan tasvirini kullanarak bu $F(G)$ - kozmolojisine konvansiyonel Rölativist Kozmolojinin (1+3) Kovaryant ve Tetrad formalizmi kullanarak evrim ve bağ denklemlerine genelleştireceğiz. Bu uğraş için eşyönlü FLRW modellerini göz önüne alacağız.

Ocak 2022, 78 sayfa.

Anahtar kelimeler: $F(G)$ Gravite, Evrim ve bağ denklemleri, Değiştirilmiş Gravitasyon Teorileri.

SUMMARY

M.Sc. THESIS

EVOLUTION AND CONSTRAINT EQUATIONS IN F(G) COSMOLOGIES

Nurşah KOÇER

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Enstitue

Supervisor: Doç. Dr. Ertan Güdekli

Our aim is to determine what kind of changes and differences the cosmological evolution of the F(G) modified gravitational theories bring with respect to the Standard Cosmology of the General Relativity theory. We will consider the F(G)-gravity theory, which belongs to the class of higher order gravitational theories, with R_{ab} and R_{abcd} being the Ricci and Riemann curvature tensors, respectively and the Gauss-Bonnet term defined in the form of G , $G = R^2 - 4R_{ab} R^{ab} + R_{abcd} R^{abcd}$ in R in terms of the the Ricci curvature scalar. Using the effective fluid description, we will generalize this F(G) cosmology to the evolution and bond equations using the covariant and Tetrad Formalism of Conventional Relativist Cosmology (1+3). For this challenge, we will consider isotropic FLRW models.

January 2022, 78 pages.

Keywords: F(G) Gravity, Evolution and Constraint Equations, Modified Theories of Gravitation.

1. GİRİŞ

Kozmoloji, evreni bir bütün olarak konu alan bilim dalıdır. 1910 yılında Einstein Genel Rölativite Teorisi (GRT) ile gravitasyonu 4-boyutlu bir uzay - zaman geometrisinin eğriliğiyle tasvir etmiş ve teorisinin alan denklemlerinden hareketle evreni modelleyen bir çözümler ileri sürmüşlerdir. Bunlardan en temeli Statik Einstein Evreni olarak tanımlanan modelde, evren; etkileşimsiz madde ya da toz (basıncsız madde ya da toz) ile dolu ve sabit yarıçaplı kapalı 3-boyutlu uzay geometrisiyle statik bir yapı olarak tasarlanmaktadır. Bu bağlamda her ne kadar statik Einstein evren modeli, evreni gerçekçi bir biçimde tasvir etmesede, ilk evren modeli olması bakımından daha sonra geliştirilen kozmoloji çalışmalarına ilham kaynağı olması bakımından öncü ve önemli bir rol oynamıştır.

Karanlık enerji problemini ise, yüksek kızılakaymalı Tip-la süpernovalara ilişkin 1998 yılında elde edilen gözlem sonuçları yol açmıştır. Elde edilen gözlemler, evrenin oluşum ve evrenin evrimi konusunda güvenilir bir modeller konusunda güvenilir bir model olarak bilinen Standart Model yani evrenin başlangıcındaki Büyük Patlamanın hemen sonrasında bir anormal genişleme (enflasyon) evres geçirdiğini ve daha sonrasında günümüzde de devam eden bir yavaşlayan genişleme evresinde bulunduğunu ileri süren senaryo ile ters düşecek biçimde, evrenin günümüzde ivmeli bir genişleme evresinde bulunduğuna dair ilk kanıtları sunmuşlardır. Günümüzde farklı gözlem grupları tarafından da daha duyarlı bir biçimde gerçekleştirilen benzer gözlemsel veriler durumun böyle olduğunu emin bir şekilde ortaya koymuşlardır. Bu kozmik ivmelenmeye, doğrudan kanıt veren Tip-la süpernova gözlemleri dışında; kozmik mikrodalga arkafon eşyönsüzlükleri, evrenin geniş ölçek yapısı, baryon akustik osilasyonları, zayıf gravitasyonel mercekleme gibi bulgular da dolaylı olarak destek vermektedir.

Öte yandan, söz konusu problemin çözümü için kullanılmak istenen diğer bir alternatif ise Einstein Alan Denklemlerinin sol yanındaki geometrik kısmı değişikliğe uğratmak olmuştur. 4-boyutlu uzay zaman geometrisi çerçevesi ile GRT nin alan denklemlerine getirilebilecek değişiklik, Einstein - Hilbert aksiyonunda yapılacak seçimlerle, pek çok çeşitli yapılar elde edilmektedir. Einstein Alan Denklemlerinin yalnızca Ricci Skaler Eğriliği

R 'yi barındıran Einstein - Hilbert aksiyonundan bir varyasyonla elde edildiği bilinmektedir. Bununla birlikte R yerine R_{abcd} Riemann Eğrilik Tansörü, R_{ab} Ricci Eğriligi ve R Ricci Eğrilik Skalerinden hareketle oluşturulan ve Gauss-Bonnet terimi olarak tanımlanan $G = R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd}$ gibi özel bir kombinasyonda $F(G)$ biçiminde bir skaler fonksiyonu oluşturulmaktadır. Bu şekilde değiştirilmiş gravitasyon teorisi "F(G) Gravite" olarak adlandırılır.

Çalışmamızın planı: F(G) Gravite 'yi özel bir durum olarak kabul ederek Standart Kozmolojinin 1+3 Kovaryant Ayrışım Yöntemini bu Yüksek Mertebeden Eğrilikli Gravitasyon Teorisi çerçevesinde ele alacağız. Başka bir deyişle Standart Kozmolojinin evrim ve bağ denklemlerini F(G) kozmolojisine genelleştireceğiz. Literatüre bakıldığında, Alan denklemlerini çözmek için genellikle metrik yaklaşımı kullanılmıştır. 1+3 Kovaryant Ayrışım Yöntemi ise hem koordinat sisteminden bağımsızdır hem de evrenin madde - enerji içeriğinin bir akışkan gibi açıklanması durumunda buna bağlanan kinematik ve dinamik büyüklükler arasındaki ilişkiyi daha açık bir şekilde yansıtmaya bakımından metrik yaklaşıma oranla bir takım üstünlükleri olduğundan bu yöntemi kullanılmış bulunmaktayız. Bu yöntem, Einstein denklemlerine, aksiyondaki F(G) fonksiyonundan gelen ekstra geometrik kökenli terimleri "eğrilik akışkanı" gözüyle bakılabilecek bir efektif akışkanın enerji momentum tansörü olarak yorumlanmasına dayanmaktadır. Çalışmamızda, bu eğrilik akışkanına bağlanan efektif basınç, ısı akışı, madde - enerji ve eşyönsüz basınç tansörünün çıkarımlarını ayrıntılı sunacağız.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. KOZMOLOJİK MODELLER

Kozmoloji (evren bilimi), bir bütün olarak evreni konu alan bilim dalıdır. 1915 yılından günümüze kadar en çok rağbet gören evren modelleri, kütle çekimi on adet alan denklemi ile tarif ettiği Genel Rölativite Teorisinin (GRT)

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab} \quad (2.1)$$

ile verilen Einstein Alan Denklemlerine (EAD) dayanan kozmolojik modeller çerçevesinde yer almaktadır. Genel Rölativite teorisiyle, kütle çekim hakkında daha önce sahip olduğumuz bilgiler sadece için matematik zemininde değil, kütle çekimin doğada nasıl işlediği konusunda da büyük ölçüde değişmiştir. Genel rölativitenin denklemleri, Newtoncul mekanikteki mutlak zaman kavramını bir kenara bırakarak zamanın da diğer üç uzay boyutu gibi bir boyut olduğu düşüncesiyle, bize uzayın aslında dört boyutlu olduğunu ve kütle çekimin uzayın bükülüşü ile ortaya çıkan bir etki olduğunu söylemektedir.

(2.1) denkleminde;

g_{ab} : 4-boyutlu uzay-zaman geometrisinin metrik bileşenler

R_{ab} : 4-boyutlu uzay-zamanın Ricci eğrilik tansörü

R : Ricci Eğrilik Skalari

G_{ab} : Einstein Tansörü

Λ : Kozmolojik Sabit

T_{ab} : Enerji - Momentum Tansörü

$\kappa^2 = \frac{8\pi G}{c^4}$: G , Newton Gravitasyon sabiti ve c , Işık hızı olmak üzere κ^2 , Einstein Kuplaj sabiti olarak açıklanır.

(2.1) denklemi, g_{ab} ile bunların x^a koordinatlarına göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevlerini yerel olarak madde - enerji dağılımına bağlayan ikinci mertebeden kısmi türevli birbirlerine bağlantılı on adet diferansiyel denklemden oluşmuş nonlinear bir

diferansiyel denklemdir. Burada T_{ab} tansöründeki belirsizlik, Einstein alan denklemlerinin çözümlerini bulmayı güçleştirmektedir. Bununla birlikte; bir yandan uzay geometrisi için bir takım simetri özellikleri (küresellik, homojenlik, eşyönlülük vs) varsayıp, diğer yandan T_{ab} hakkında bazı varsayımlarda (boş uzay-zaman, mükemmel akışkan vs) bulunulursa çözüm bulmak mümkün olabilir. Bunun yanında Einstein alan denklemlerinin çözümlerini bulma yönteminin bazı olumsuzları ve yetersizlikleri ile birlikte literatürde en yaygın olarak kullanılagelen çözüm tekniklerinden biri olmuştur [1, 2].

2.1.1. FLRW Modelleri

FLRW (Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker) modelleri evrenin, herhangi bir noktasına göre homojen ve izotropik olduğu varsayımına dayanmaktadır. Yıldızları ve yıldız kümelerini içerisinde barındıran evren yerel ölçeklere göre açıkça homojen olmamasına rağmen yaklaşık 14 milyar ışık yılı gibi büyük bir ölçekte evrenin homojen olması öngörülmüştür. FLRW modellerine göre evren geçmişte sonlu bir zamanı kapsayan bir uzay-zaman tekiliğine sahiptir. Bu eğrilik tekiliğine büyük patlama denir. FLRW tekiliği bilinen tüm fizik ve matematik yasalarının büyük patlama sırasında ve öncesinde geçersiz olduğunu ifade etmektedir. FLRW modelleri, uzayın düz, pozitif, negatif sabit eğriliğe sahip olduğu ifade etmektedir [3].

Λ kozmolojik sabiti ile birlikte madde içeren statik ve kapalı yapıdaki ilk evren modelini, 1916 yılında Einstein yapmıştır. 1922 de Friedmann Λ kozmolojik sabitsiz fakat madde içeren EAD (Einstein Alan Denklemleri) için elde ettiği çözümlere göre; evrenin büyüklüğü dinamik olarak değişmek zorundaydı. Yani; homojen ve izotropik olduğu varsayılan evrenin kapalı, açık, düz, genişleyen, büzülen evrenler gibi çeşitlilikler sergilemektedir. 1926 yılında Hubble tarafından galaksiler ve bunların uzaklaşma hızlarının ortaya konulması ile Λ kozmolojik sabitinin Lemaitre tarafından öneminin vurgulanması, evrenin başlangıcının "büyük patlama" ile ilişkili olduğu düşüncesini ortaya çıkarmıştır. 1932 yılında Robertson ve Walker evrenin homojen ve izotropik varsayımını sürekli gruplar teorisi ile matematiksel olarak kesin bir dille ifade etmişlerdir. Bu ifadeye göre; uzaysal kısmın 6 parametrelili G_6 eş ölçüm grubu altında invariant kalması anlamına gelmektedir. Uzay-zaman metriğinin $k = -1, 0, +1$ parametresine bağlı (t, r, θ, ϕ) eşhareketli koordinat sistemi

$$ds^2 = -dt^2 + I^2(t) [dr^2 + f_k^2(r) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \quad (2.2)$$

şeklinde ifade edilir. Burada t koordinatı $u = \frac{\partial}{\partial t}$ teğet vektörlü evren çizgileri ile ölçülen öz-zaman ve $f_k(r)$:

$$f_k(r) = \begin{cases} \sin r & k=+1 \text{ için} \\ r & k=0 \text{ için} \\ \sin r & k=-1 \text{ için} \end{cases} \quad (2.3)$$

şekilinde skaler bir fonksiyon olarak tanımlanır:

$$d\Omega^2 = dr^2 + f_k^2(r) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.4)$$

metriği ile t =sabit hiperyüzeylerinin metriği olup sabit uzaysal eğrilige sahiptir. Bu durumda

$${}^3R = \frac{6k}{I^2(t)} \quad (2.5)$$

3 - geometriyi ifade eder. k parametresi -1, 0, +1 iken uzaysal 3-geometri sırasıyla açık, düz ve kapalı olarak ifade edilir. $I(t)$ ölçek çarpanı veya uzunluk ölçeği olarak tanımlanır. Denklem (1.1) metriği homojen ve izotropik uzay-zaman Robertson-Walker metriği olarak tanımlanır ve EAD nin bu metrik ile çözümleri genel olarak Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) evren modelleri olarak adlandırılır.

Metriğe göre, θ genişleme skaleri

$$\theta(t) = \theta_{11} + \theta_{22} + \theta_{33} = 3 \frac{\dot{I}}{I(t)} \quad (2.6)$$

olarak ifade edilir. θ genişleme skaleri Hubble parametresi için

$$H = \frac{1}{3} \theta \quad (2.7)$$

şeklinde ifade edilir. Buradan

$$H(t) = \frac{\dot{I}}{I(t)} \quad (2.8)$$

dır. $H > 0$ değeri genişleyen evreni, $H < 0$ ise büzülen bir evreni ifade etmektedir. Evrenin genişlemesinin hızlanması veya yavaşlaması;

$$q = \frac{\ddot{H}}{\dot{H}^2} = -\frac{1}{H^2} \frac{\ddot{H}}{\dot{H}} \quad (2.9)$$

şeklinde yavaşlama prensibi olarak adlandırılan boyutsuz bir q parametresi belirler. (1.7) ve (1.8) denklemlerinden

$$\dot{H} = -(1+q) H^2 \quad (2.10)$$

elde edilir. $n = \frac{\partial}{\partial t}$ birim normalleri doğrultusunda hareket eden bir akışkanın ($u = n$ için), t sabit uzaysal kesitlerin, metriğin simetrisinden dolayı bir mükemmel akışkan şemasına uyması gereklidir. Bu durumda, enerji-momentum tensörü

$$T_{ab} = \mu u_a u_b + p (g_{ab} + u_a u_b), \quad q_a = 0, \quad \pi_{ab} = 0 \quad (2.11)$$

olarak elde edilir. Buna göre μ ve p dinamik parametreleri uzaysal koordinatlardan bağımsız ve t sabit hiperyüzeyler üzerinde invaryanttır, bu durumda, $\mu = \mu(t)$ ve $p = p(t)$ olur. Bu bağıntılar μ ve p nin homojenliğini ifade etmekte olup $\tilde{\nabla}_a \mu = 0$ ve $\tilde{\nabla}_a p = 0$ bağıntılarına eşittir. Ayrıca, $u \equiv n$ (dik akış) olduğundan, $\dot{u}_a = 0 = \omega_a$ olur. Öte yandan metrikten hareketle $\sigma_{ab} = 0$ ve $E_{ab} = 0 = H_{ab}$ özellikleri gösterilebilir. O halde aşağıda verilen bağıntılar ile bir FLRW modeli ifade edilir.

Tablo 2.1: Fiziksel Büyüklükler

Dinamik	$\tilde{\nabla}_a \mu = 0 = \tilde{\nabla}_a p$	$(\mu = \mu(t) \text{ ve } p = p(t))$	$q_a = 0 = \pi_{ab}$
Kinematik	$\tilde{\nabla}_a \theta = 3, \tilde{\nabla}_a H = 0$	$((H = H(t)))$	$\dot{u}_a = 0, \omega_a, \sigma_{ab} = 0$
Gravito elektrik veya manyetik alan (Serbest Alanlar)	$E_{ab} = 0 = H_a$		

Homojenlik ve eşyönlülüğün sonucu ile oluşan bu bağıntılar evrim ve bağ denklemlerinin sadeleşmesini sağlar ve bu durumda;

$${}^3R = 2(\mu + \Lambda) - 6H^2 \quad (2.12)$$

$$\dot{H} = -H^2 - \frac{1}{6}(\mu + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.13)$$

$$\dot{\mu} = -3 H(\mu + p) \quad (2.14)$$

denklemleri elde edilir. Hal denklemi olarak

$$p = (\gamma - 1) \mu \quad (2.15)$$

alınırsa, FLRW modelleri aşağıda verilen sistemin çözümünü oluştururlar [4].

$$H(t) = \frac{\dot{I}}{I} \quad (2.16)$$

$$\dot{H} = -(1 + p) H^2 \quad (2.17)$$

$$\dot{H} = -H^2 - \frac{1}{6} (3\gamma - 2) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.18)$$

$$\dot{\mu} = -3H \gamma \mu \quad (2.19)$$

$${}^3R = 2(\mu + \Lambda) - 6H^2 \quad (2.20)$$

$${}^3R = \frac{6k}{I^2} \quad (2.21)$$

2.1.2. Brans - Dicke Kozmolojisi

Jordan-Brans-Dicke teorisi olarak da anılan Brans-Dicke Teorisi (BD), skaler tensör içeren bir yerçekimi teorisidir. Bu teori, ölçülebilir kütleçekim sabitini hesaplamak için tensör denklemlerine ekstra bir skaler alan ϕ ekler. Bu skaler alanın değeri, uzay zamandaki noktaya bağlıdır. Brans Dicke teorisi, Mach ilkesi ve Dirac'ın Büyük Sayı Hipotezi (LNH) olmak üzere iki ilkeye dayanmaktadır. İlk ilke " herhangi bir bireyin hareketinin tüm evrene göre tanımlanması gerektiğini " söyler, ancak bunun yanında farklı birçok yorum vardır. Büyük sayı Hipotezi (LNH) fizikteki büyük boyutsuz sayıların ilişkili olduğunu belirtir (örneğin; yerçekimi sabiti ile evrenin yarıçapı ve kütlesi birbiriyle ilişkilidir: $GM_{universe} \sim R_{universe}$). BD teorisinin temeli, yerçekimi sabiti G nin evrendeki madde dağılımına bağlı olarak $G \sim \phi^{-1}$ ile bir skaler alan ϕ ile değiştirilmesidir. Brans Dicke teorisinde bir eylemin Lagrange'ı (potansiyelsiz)

$$\mathcal{L}_{BD} = \phi R + 16 \pi \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_\phi(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (2.22)$$

dır.

Lagrangian'ın ikinci dereceden bir denkleme yol açmasını sağlamak için var olan son terim hariç, GR'den sadece normal Lagrangian'ın $G^{-1}=\phi$ ile çarpıldığına dikkat edelim. Aksiyon;

$$S_{BD} = \int d^4 \times \sqrt{-g} \mathcal{L}_{BD} \quad (2.23)$$

biçimindedir. Birim tutarlılığı (ve basitliği) temelinde seçilen $\mathcal{L}_\phi$

$$\mathcal{L}_\phi = -\omega \frac{\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi}{\phi} \quad (2.24)$$

dir. Yukarıdaki denklemlerin birleştirilmesi

$$\square \phi - \frac{\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi}{2 \phi} \frac{\phi}{2 \omega} R \quad (2.25)$$

ile sonuçlanır. ω kullanılarak Ricci eğrisi olan R ϕ ile ilişkilendirilir. w değeri teori tarafından verilmez ve sadece gözlemle belirlenebilir. ω skaler alanın neden olduğu yerçekimi kuvvetinin bir ölçüsünü temsil eder. Skaler alanın yerçekimi ile karşılaştırılması

$$a = \left(w + \frac{3}{2}\right)^{-1} \quad (2.26)$$

olarak yazılabilir. $\omega \rightarrow \infty$ sınırında skaler alan ihmal edilebilir hale gelir ve BD teorisi GR'ye düşer, ancak bu sınırı alırken, özellikle enerji-momentum tensörünün izi kaybolduğunda, bir takım problemlerin ortaya çıktığını belirtmek önemlidir [5, 6].

2.1.3. Feza Gürsey Teorisi

Feza Gürsey, $g_{\mu\nu}$ metrik tensörüne ek olarak alınan skaler bir alanın geometrik bir büyüklük olmaması nedeniyle, madde dağılımı ile uzay-zamanın eğriliği arasındaki ilişkinin uyumsuzluğunu görerek Genel Rölativite Teorisinin Einstein'ın açıkladığı şekliyle Mach ilkesini kapsadığını ileri sürmektedir. Feza Gürsey, evrenin kozmolojik formunun düz uzay-zamana uyumlu bir metrikle oluşturulduğu bir koordinat sisteminde $g_{\mu\nu}$ metrik tensörünü, ϕ ile kozmolojik yapıyı betimleyen ve $\phi = (-g)^{\frac{1}{8}}$ olarak tanımlanan 1/4 ağırlıklı bir skaler yoğunluğu; $\gamma_{\mu\nu}$ ile de yerel gravitasyon etkilerini betimleyen ve $\gamma_{\mu\nu} = (-g)^{\frac{1}{4}}$,

$\det \gamma_{\mu\nu} = -1$ olarak tanımlanan $-1/2$ ağırlıklı bir tensörel yoğunluğu göstermek üzere

$$g_{\mu\nu} = \varphi^2 \gamma_{\mu\nu} \quad (2.27)$$

şeklinde yazarak Mach ilkesine uygun çözümler için;

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g_{\mu\nu} = \lambda^2 \eta_{\mu\nu} \quad (2.28)$$

ya da buna denk olarak

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi = \lambda \quad (2.29)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad (2.30)$$

sınır koşullarını belirtmektedir. Kozmolojide düz uzay-zamana konform bir metrikle oluşturulduğu koordinat sistemi, metriğin

$$ds^2 = \lambda^2(t, r) (c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2) \quad (2.31)$$

şeklini aldığı sistem olup bu, kozmolojik ilke ve Weyl aksiyomundan hareketle elde edilen,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{R^2(t)}{1 + 1/4kr^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (2.32)$$

Robertson-Walker metriğinden elde edilmektedir. Eğer Mükemmel Kozmolojik İlke kullanılacak olursa (2.21) denkleminde,

$$\tau^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = c^2 t^2 - r^2 \quad (2.33)$$

ve

$$\Phi(\tau^2) = \frac{\Phi(0)}{1 - k^2 \tau^2} \quad (2.34)$$

olmak üzere;

$$ds^2 = \Phi^2(c^2) (c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2) = \Phi^2(c^2) \eta_{\mu\nu} \quad (2.35)$$

şeklini almaktadır, metriğin bu şekilde ifade edildiği koordinat sistemi bir eylemsizlik sistemi oluşturmaktadır. Bu eylemsizlik sisteminde de yukarıdaki sınır şartları

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi = \Phi(\tau) \quad (2.36)$$

ve

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad (2.37)$$

şeklindedir. Ayrıca bu eylemsizlik sisteminde belirtilen sınır şartları yanında GRT'nin alan denklemleri φ ve $\gamma_{\mu\nu}$ ler cinsinden $R_{\mu\nu}$ ve $\gamma_{\mu\nu}$ ile oluşturulmuş Ricci tensörü,

$$J_{\mu}^{\nu} = \varphi^3 g^{\nu\lambda} T_{\mu\nu} \quad (2.38)$$

ve

$$\gamma \eta_{\mu}^{\nu}(\varphi) = 4 \varphi^{-2} [\partial_{\mu} \varphi \partial^{\nu} \varphi - \frac{1}{4} \delta_{\mu}^{\nu} \partial_{\lambda} \varphi \partial^{\lambda} \varphi] - 2 \varphi^{-1} [\nabla^{\nu} \partial_{\mu} \varphi - \delta_{\mu}^{\nu} \partial_{\alpha} (\gamma^{\alpha\beta} \partial_{\beta} \varphi)] \quad (2.39)$$

olmak üzere

$$R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} R = -R \varphi^{-1} J_{\mu}^{\nu} + \eta_{\mu}^{\nu}(\varphi) \quad (2.40)$$

jeodezik denklemi de

$$\frac{d}{d\tau} (\varphi \gamma_{\sigma\nu} \frac{dx^{\nu}}{d\tau}) = \partial_{\sigma} \varphi + \frac{1}{2} \varphi (\partial_{\sigma} \gamma_{\lambda\nu}) \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \quad (2.41)$$

şeklinde yazılır. Feza Gürsey, Teorinin Genel Kovaryansını koruyacak şekilde, ayrıcalıklı bir referans sisteminde (eylemsizlik sistemi) yazılmış (2.26) ve (2.27) sınır koşullarını, eylemsizlik sistemi teşkil etmeyen herhangi bir koordinat sistemi için de genelleştirmektedir. Feza Gürsey eylemsizlik sisteminden, eylemsizlik sistemi teşkil etmeyen herhangi bir referans sistemine geçildiğinde kullanılan koordinat dönüşümünün kozmolojik fonon eşyönlü görünümünü değiştirip ona yeniden bir madde dağılımı yüklemek olarak belirtilen ek gravitasyon kuvvetlerinin oluştuğunu göstermektedir. Bununla birlikte, Einstein ortaya koyduğu fizik kanunlarının bütün referans sistemlerinde geçerli olması (Genel Kovaryans İlkesi) fizik kanunlarının herhangi bir kozmolojik fonda geçerliliklerini korumaya devam

edecekleri anlamına gelmektedir. Bir koordinat dönüşümünün evrendeki madde dağılımının yeniden dağıtılması olarak yorumlanması (2.31), hareket denkleminde bir eylemsizlik katsayısı rolü oynayan ϕ nin de gerçek bir skaler olmamasından dolayı, değişmemesine yol açacak ya da başka bir deyişle bir taneciğin eylemsizlik kütlesi değişmiş olacaktır. Bununla birlikte Feza Gürsey eylemsizlik kütlesini, evrenin kütlesine ve yarıçapına

$$m_{eyl} \propto \frac{M}{3 c^2 R} \quad ya da \quad M \propto G^{-1} \quad (2.42)$$

şeklinde bağlı olduğunu bulup, tamamen boş bir evrende ise belirtilen sınır koşullarından dolayı eylemsizlik kütlesinin sıfır olacağını göstermektedir. Feza Gürsey, ϕ den türetilen kuvvetlerin kozmolojik fonksiyon itici kuvvetler olarak bulup bunların Hubble yasasına uygun olarak evrenin genişlemesine yol açtığını belirtmektedir. Buna karşılık yerel çekici gravitasyon kuvvetleri ise $\gamma_{\mu\nu}$ lerin $\eta_{\mu\nu}$ lerden sapmalarından ileri gelmektedir. Bir başka konu da G gravitasyon sabitinin uzayın ve zamanın fonksiyonu olup evrenin kütlesi ve yarıçapı cinsinden

$$G = \frac{3 c^2 R}{m} \quad (2.43)$$

şeklinde ifade edilmesidir. G nin pozitif ve sonlu olmasında evrenin uzaysal olarak kapalı olmasının gerekliliğine yol açmaktadır. Feza Gürsey'in teorisi her şeyden önce evrenin ilk yaklaşıklıkta de Sitter geometrisine uygun olduğunu varsaymakta olup evrenin madde dağılımının kararlı ve homojen olduğunu kabul etmektedir. Kullandığı yaklaşımların evrenin güncel haliyle doğrulandığını ifade eden Feza Gürsey söz konusu çalışmasının evrenin, uzaysal olarak kapalı, homojen ve düz uzay zamana konform olmasını gerektirdiğini kaydetmektedir [5].

2.1.4. F(G) Gravite

Karanlık enerji problemini çözmek amacıyla iki yaklaşım ortaya atılmıştır. Bu yaklaşımlardan ilki G_{ab} Einstein tansörünü

$$G_{ab} = \kappa^2 (T_{ab}^{\text{sıradan madde}} + T_{ab}^{\text{karanlık enerji}}) \quad (2.44)$$

biçiminde yazmaktır. Eşitliğin sağındaki ikinci terim, sıradan madde dışında her türlü madde, Λ kozmolojik sabiti, tansör alanları vb. gibi etkene bağlanan enerji - momentum tansörünü belirtmektedir. Ortaya atılan bu yaklaşım Karanlık Enerji problemine bir takım çözümler sunduğunu fakat bununla birlikte önemli sorunlar oluşturduğu bilinmektedir. Bunlar arasında en önemli sorun, amaca yönelik tasarlanan egzotik maddenin hiçbir şekilde gözlenememiş olmasıdır. Karanlık enerji problemini çözmek amacıyla ortaya atılan ikinci yaklaşım ise, Einstein Alan Denklemlerinin (EAD) sol tarafında yani geometrik kısmında değişikliğe gitmektir. Bu matematiksel olarak

$$G_{ab} + G_{ab}^{\text{karanlık enerji}} = \kappa^2 T_{ab}^{\text{sıradan madde}} \quad (2.45)$$

biçiminde ifade edilir ve bu tür teoriler Değişikliğe Uğratılmış Gravitasyon Teorileri olarak adlandırılmaktadır. Bu tür bir değişikliğe Einstein Alan Denklemlerinin Lagrangeyen formülasyonu izin vermektedir. Bununla birlikte gerçektende (2.1) deki Einstein Alan Denklemini

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + S_m \quad (2.46)$$

biçimindeki bir bağıntıdan varyasyonla elde etmek mümkündür. (2.46) aksiyonu Einstein Hilbert Aksiyonu olarak tanımlanır. Burada S_m madde aksiyonu olarak adlandırılıp madde Langrange yoğunluğundan hareketle

$$S_m = \int d^4x \sqrt{-g} L_m(g_{ab} \psi) \quad (2.47)$$

biçimindeki aksiyonla tanımlanır. Bu maddeye

$$T_{ab} = -2 \frac{\partial L_m}{\partial g^{ab}} + g_{ab} L_m \quad (2.48)$$

biçiminde tanımlı bir enerji-momentum tansörü bağlanabilmektedir. S_{EH} bağıntısındaki integrantı R almak yerine, Riemann geometrisinde herhangi bir invaryant almak mümkündür. Eğer Riemann geometrisinin R_{abcd} Riemann eğrilik tansörü, R_{ab} Ricci eğrilik tansörü ve R Ricci eğrilik skalerinden hareketle

$$G = R^2 - 4R_{ab} R^{ab} + R_{abcd} R^{abcd} \quad (2.49)$$

biçiminde tanımlanan G invaryantının herhangi bir $F(G)$ fonksiyonu integrant olarak alınırsa bu Değiştirilmiş $F(G)$ gravite olarak tanımlanır. G eğrilik invaryantına Gauss - Bonnet terimi denir. Değiştirilmiş $F(G)$ Gravite teorisi alan denklemi

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [F(G) - 2\Lambda] + S_m \quad (2.50)$$

aksiyonun varyasyonu verilecektir. Bu aksiyondan, alan denklemlerinin elde edilmesi çok uzun işlemler gerektirdiğinden yalnızca alan denklemleri yazılacaktır. Dolayısıyla $F(G)$ - gravitenin alan denklemi:

$$F_G = \frac{\partial F(G)}{\partial G} \quad (2.51)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}g_{ab}F - (-2RR_{ab} + 4R_{ac}R_b^c - 2R_a^{cde}R_{bcde} - 4R_{acdb}R^{cd})F_G \\ & - 2(\nabla_a \nabla_b F_G)R + 2g_{ab}R\Box F_G - 4R_{ab}\Box F_G \\ & + 4(\nabla_c \nabla_a F_G)R_b^c + 4(\nabla_c \nabla_b F_G)R_a^c \\ & - 4g_{ab}(\nabla_c \nabla_d F_G)R^{cd} - 4(\nabla_c \nabla_d F_G)R_{ab}^{cd} + \Lambda g_{ab} = \kappa^2 T_{ab}^m \end{aligned} \quad (2.52)$$

ile verilir [7,8,9,10].

3. MALZEME VE YÖNTEM

3.1. 1+3 KOVARYANT AYRIŞIMI

Genel görelî astrofizik ve kozmolojinin geometrik işleyişinde modele kaynaklarının bir dağılımının varlığının matematiksel anlamı her zaman yerel olarak benzersiz olan uzay zaman manifoldu (μ, g) üzerinde (future pointing) bir tercih edilen zamana benzer vektör alanının tanımlanmasına izin verir. Madde içeriğinin standart fenomenolojik akışkan tanımında, bu zamana benzer vektör alanı, yerel olarak akışkan madde kaynağının tüm kurucu parçacıklarının ortalama 4-hızını temsil edecek şekilde veya alternatif olarak, zamana benzer normal uyumu temsil edecek şekilde seçilebilir [11]. Buna göre uzay-zaman manifoldu (μ, g) üzerindeki her bir olay için, zaman cinsinden tek bir vektör alanı tanımlanabilir. Genel olarak u ile gösterilir ve aşağıda belirtilen şartı sağlamaktadır.

$$u^a u_a = -1 \quad (3.1)$$

Şartını sağlayan bu vektör alanı, akışkanı oluşturan tüm kısımların ortalama 4'lü hız vektörü olarak tanımlanabileceği gibi gözlemcilerin 4'lü hız vektörü olarak da tanımlanabilir. Gözlemci uzaysal 3-yüzeyler üzerinde kalacak şekilde hareket ediyorsa 4'lü hız vektörü uzaysal 3-hiperyüzeylerin zaman cinsinden birim normalleri olur. Fakat gözlemci, örneğin akışkan bileşeniyle birlikte hareket ediyorsa ikisi de aynı 4'lü hıza sahiptir. Herhangi bir durumda, özel olarak ayrıcalıklı bir zaman cinsinden 4'lü vektör alanının varlığı, uzay zamanı bu vektör alanını teğet kabul eden 3-boyutlu zaman eğrileriyle doldurulmuş gibi oluşmasına neden olur. Bu eğriler akışkan elemanlarının veya gözlemcilerin evren çizgileri ve bunların topluluğu da zaman cinsinden eğri ailesi veya kongruansı olarak tanımlanır. (3.1) şartına uyan ayrıcalıklı bir 4-lü vektör alanının varlığı varsayımı, (μ, g) varyetesine ek bir yapı kazandıracaktır. Bu durum (μ, g, u) biçiminde gösterilir ve uzay-zaman "1+3 ipliklenmesi" olarak tanımlanır. u vektörü (μ, g, u) olmak üzere iki farklı tansör ile ifade edilir. Bunlar şu şekilde ifade edilir.

$$u_{ab} = -u_a u_b \quad (3.2)$$

$$h_{ab} = -g_{ab} + u_a u_b \quad (3.3)$$

İzdüşüm tansörleri olarak tanımlanan bu tansörlerden u_{ab}, u^a 4'lü vektörüne paralel izdüşümü; h_{ab} de u^a 4'lü vektörüne dik izdüşümü gerçekleştirir. Yani h_{ab}, u^a 4'lü vektörüyle hareket eden bir gözlemcinin anlık durgunluk uzaylarının metrik özelliklerini belirler. Buradan tansörlerin sağladığı bağıntılar şu şekilde gösterilir.

Tablo 3.1: İzdüşüm Tansörleri

$h_{ab} = h_{(ba)}$ (simetrik)	$u_{ab} = u_{ba}$ (simetrik)
$h_a^a = +3$	$u_a^a = +1$
$h_b^a u^b = h_b^a u_a = 0$	$u_b^a u^b = u^a u_b^a = u_b$
$h_b^a h_c^b = h_c^a$	$u_b^a u_c^b = u_c^a$
$h_c^a h_d^b = h_d^a h_c^b$	$u_c^a u_d^b = u_d^a u_c^b$

u doğrultusunun varlığı, fiziksel öneme sahip geometrik büyüklüklerin u_{ab} ve h_{ab} (veya $h_b^a, h^{ab}, u_b^a, u^{ab}$) tansörler ile kovaryant 1+3 tansör ayrışımının yapılmasına imkan sağlar. Bu yaklaşım ilk kez 1950 ler ve 1960 ların başında Raychaudhuri, Trumper, Sachs, Schuten ve Ehlers tarafından ortaya atılıp, geliştirilmiştir. Daha sonra 1971 ve 1973 yılları arasında Ellis, yöntemin kozmoloji uygulamalarına odaklanmıştır [4,7,12].

U_b^a ve h_b^a tansörleri kullanılarak, bir fiziksel alanı ya da herhangi bir geometrik büyüklüğü, 4-lü u vektörüyle hareket eden bir gözlemcinin, bunları ölçme yoluna bağlı olacak şekilde "uzay" ve "zaman" kısımlarına ayrılabilir.

Bir J_a uzay - zaman vektörü, B_a uzaysal bir vektör olmak üzere ($B_a u^a = 0$) şu şekilde yazılır.

$$J_a = A u_a + B_a \quad (3.4)$$

Eşitliğin her iki tarafı u^a ile çarpılıp (3.4) denklemini ve ($u^a u_a = -1$) bağıntısı kullanıldığında $A = -u^b J_b$ elde edilir ve bu da yerine koyulduğunda $B_a = h_a^b J_b$ bulunur ve

$$J^a = U_b^a J^b + h_b^a J^b \quad (3.5)$$

elde edilir. Eşitliğin sağındaki ilk terim J^a nın "zaman kısmı" ikinci terim ise "uzay kısmı" olarak tanımlanır. Bir J_{ab} uzay - zaman 2 tansörü B_a, C_a ve D_{ab} uzaysal tansörler ($B_a u^a = 0, C_a u^a = 0$ ve $D_{ab} u^b = D_{ab} u^a = 0$) için

$$J_{ab} = A u_a u_b + B_a u_b + u_a C_b + D_{ab} \quad (3.6)$$

şeklinde indirgenemez kısımlara ayrılabilir. Yukarıdaki işlemlere benzer işlemler uygulandığında

$$J_{ab} = -U_a^c U_b^d J_{cd} + U_a^c J_{cb} + U_b^c J_{ac} + h_a^c h_b^d J_{cd} \quad (3.7)$$

elde edilir. Eşitlikteki ilk terim c ile d indislerini birlikte, ikinci terim a indisini, üçüncü terim de b indisini u ya paralel izdüşürmektedir. Son terim de J_{ab} tansörünün her iki indisini u ya izdüşürmekte olup J_{ab} nın uzaysal kısmını oluşturur. Son terimi $\tilde{J}_{ab}$ ile gösterirsek

$$\tilde{J}_{ab} h_a^c h_b^d J_{cd}, (\tilde{J}_{ab} u^a = \tilde{J}_{ab} u^b = 0) \quad (3.8)$$

şeklinde uzaysal bir tansör elde ederiz ve bu uzaysal tansörü simetrik ve antisimetrik kısımları cinsinde

$$\tilde{J}_{ab} = \tilde{J}_{(ab)} + \tilde{J}_{[ab]} \quad (3.9)$$

şeklinde yazılabilir. Simetrik kısım; biri izsiz ve diğeri izli kısım olmak üzere iki kısım şeklinde düşünülebilir. İzsiz simetrik kısım için "açılı parantez" sembolü kullanıldığından

$$\tilde{J}_{<ab>} = \tilde{J}_{(ab)} - (iz. \tilde{J}_{(ab)}) h_{ab} \quad (3.10)$$

$$\tilde{J}_{<ab>} = \tilde{J}_{(ab)} - (iz. \tilde{J}_{(ab)}) h_{ab}, (iz. \tilde{J}_{[ab]} = 0 \text{ olduğundan}) \quad (3.11)$$

$$\tilde{J}_{<ab>} = \tilde{J}_{(ab)} - \frac{1}{3} \tilde{J}_{(cd)} h_{ab} \quad (3.12)$$

olduğunda (3.9) bağıntısı

$$\tilde{J}_{ab} = \tilde{J}_{<ab>} + \frac{1}{3} h^{cd} \tilde{J}_{(cd)} h_{ab} + \tilde{J}_{[ab]} \quad (3.13)$$

şeklinde ifade edilir. Verilen ifadelerden hareketle

$$\tilde{J}_{(ab)} = \frac{1}{2} (\tilde{J}_{ab} + \tilde{J}_{ba}) = h_{(a}^c h_{b)}^d J_{cd} = h_a^c h_b^d J_{cd} \quad (3.14)$$

$$\tilde{J}_{[ab]} = \frac{1}{2} (\tilde{J}_{ab} - \tilde{J}_{ba}) = h_{[a}^c h_{b]}^d J_{cd} = h_a^c h_b^d J_{[cd]} \quad (3.15)$$

biçimindeki özellikler kolaylıkla gösterilebilir. Dolayısıyla bir uzay - zaman tansörünün uzaysal izdüşümünün simetrik (antisimetrik) kısmı, uzay - zaman tansörünün simetrik (antisimetrik) kısmının izdüşümüdür. Yani, uzaysal izdüşüm ile simetrikleştirme (antisimetrikleştirme) işlemleri yer değiştiricidir. Benzer şekilde

$$iz \tilde{J}_{ab} = g^{ab} \tilde{J}_{ab} = h^{ab} \tilde{J}_{ab} = iz (\tilde{ab}) = h^{ab} J_{ab} \quad (3.16)$$

yazılabilir. Yani uzaysal kısmın izi, simetrik kısmının izidir. Uzaysal kısmın izsiz simetrik kısmı için

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{<ab>} &= \tilde{J}_{(ab)} - \frac{1}{3} (iz \tilde{J}_{(ab)}) h_{ab} \\ &= [h^c_a h^d_b - \frac{1}{3} h^{cd} h_{ab}] J_{cd} \\ &= [h^c_a h^d_b - \frac{1}{3} h^{cd} h_{ab}] J_{cd} \\ &= h^c_a h^d_b [J_{(cd)} - \frac{1}{3} h^{ef} J_{ef} h_{cd}] \end{aligned} \quad (3.17)$$

biçiminde eşdeğer ifadeler kullanılabilir. Şimdi J_a vektörü, özel bir f skaler fonksiyonun kovaryant türevi olarak düşünüldüğünde yani $J_a \equiv \nabla_a f$ olduğunda (3.5) denkleminde

$$\nabla_a f = -u_a u^b \nabla_b f + h^b_a \nabla_b f \quad (3.18)$$

olur. Eşitliğin sağındaki birinci terim için GRT de, üzerine yalnızca gravitasyon ve eylemsizlik kuvveti etki eden bir test taneciğinin hareket denklemi

$$u^e \nabla_e u^a = 0 \quad (3.19)$$

biçiminde geodezik denklemdir. Tanecik üzerine gravitasyonel olmayan kuvvetlerin etkisi göz önüne alındığında hareket denklemi

$$u^e \nabla_e u^a = F^a \quad (3.20)$$

olur. Buradan soldaki terimin Newtonsal benzerlikten dolayı bir ivmeyi gösterdiği açıktır. Bileşenler cinsinden yazılan bu ifade $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{U}$ olarak vektörel şekilde gösterilir ve 4 lü u vektörünün u teğet doğrultusunda evren çizgileri boyunca doğrultu türevi anlamına gelir. Yani, $\nabla_{\mathbf{u}}$ veya $u^e \nabla_e$ operatörü, zamana göre bir türevi gösterdiğinden, u doğrultusundaki

kovaryant zaman türevi olarak tanımlanır ve genellikle "." ile ifade edilir. Bu durumda;

$$\text{Skaler bir fonksiyon için : } \dot{f} = u^e \nabla_e f \quad (3.21)$$

$$\text{Bir } J_a \text{ vektörü için : } \dot{J}_a = u^e \nabla_e J_a \quad (3.22)$$

$$\text{Herhangi bir vektör için : } \dot{J}_{b,\dots}^{a,\dots} = u^e \nabla_e J_{b,\dots}^{a,\dots} \quad (3.23)$$

biçiminde yazılır. (3.22) deki ikinci terim $\nabla_b f$ kovaryant türevinin u^a ya dik hiperdüzleme izdüşümünü gösterir. Buna kovaryant uzaysal türev veya u ya dik kovaryant doğrutu türevi veya da tamamen dik izdüşürülmüş kovaryant türev denir. ve $\tilde{\nabla}_a \equiv {}^3\nabla_a \equiv D_a$ sembollerinden biriyle gösterilir ve:

$$\text{Skaler bir fonksiyon için : } \tilde{\nabla}_e f = h_e^d \nabla_d f \quad (3.24)$$

$$\text{Bir vektör için : } \tilde{\nabla}_e J_a = h_a^b h_e^f \nabla_f J_b \quad (3.25)$$

$$\text{Herhangi bir tansör için : } \tilde{\nabla}_e J_{b,\dots}^{a,\dots} = h_{c,\dots}^a h_b^d h_e^f \nabla_f J_{d,\dots}^{c,\dots} \quad (3.26)$$

olarak ifade edilir Buradan (3.21)

$$\nabla_a f = -u_a \dot{f} + \tilde{\nabla}_a f \quad (3.27)$$

biçiminde ifade edilir. Zaman türevlerinin de iz düşümlerini "açılı parantez" ile ifade ettiğimizde

$$J^{<a>} = h_b^a J^b \quad (3.28)$$

$$J^{<ab>} = [h_c^{(a} h_d^{b)} - \frac{1}{3} h^{ab} h_{cd}] J^{cd} \quad (3.29)$$

$$j^{<a>} = h_b^a j^b \quad (3.30)$$

$$j^{<ab>} = [h_c^{(a} h_d^{b)} - \frac{1}{3} h^{ab} h_{cd}] j^{cd} \quad (3.31)$$

biçiminde olur. Buradan tamamen izdüşürülmüş kovaryant $\tilde{\nabla}$ türevi de indirgenemez 1+3 kovaryant uzaysal diverjansa ve rotasyonele ayrışabilir. Buradan

$$\text{bir vektör için : } \text{div} J \equiv \tilde{\nabla}^a J_a, (\text{rot} J)_a = \eta_{abc} \tilde{\nabla}^b J^c \quad (3.32)$$

$$\text{bir 2 tansor için : } (div J)_a = \tilde{\nabla}^b J_{ab}, (rot J)_{ab} = \eta_{cdca} \tilde{\nabla}^c J_{b>}^d \quad (3.33)$$

biçiminde olur. Şimdi, J_{ab} 2-tansörü, özel olarak u_b nin u^a doğrultusundaki kovaryant türev olarak alındığında $J_{ab} \equiv \nabla_a u_b$ olsun ve (3.7) bağıntısından

$$\nabla_a u_b = -U_a^c U_b^d \nabla_c u_d + U_a^c \nabla_c u_b + U_b^c \nabla_a u_c + h_a^c h_b^d \nabla_c u_d \quad (3.34)$$

biçiminde olur. Buradan ($u^a u_a = -1$) bağıntısı ile

$$\nabla_a u_b = -u_a \dot{u}_b + \tilde{\nabla}_a u_b \quad (3.35)$$

biçiminde indirgenir. Simetrik ve antisimetrik kısımların toplamı olarak $\tilde{\nabla}_a u_b$ uzaysal kısım ifade edilir ve sırasıyla

$$\theta_{ab} = \tilde{\nabla}_{(a} u_{b)}, \theta_{ab} = \theta_{ba}, \theta_{ab} u^a = \theta_{ab} u^b = 0 \quad (3.36)$$

$$\omega_{ab} = \tilde{\nabla}_{[a} u_{b]}, \omega_{ab} = -\omega_{ba}, \omega_{ab} u^a = \omega_{ba} u^b = 0, \omega_a^a = 0 \quad (3.37)$$

biçiminde ifade edildiğinde

$$\nabla_a u_b = -u_a \dot{u}_b + \theta_{ab} + \omega_{ab} \quad (3.38)$$

olur. θ_{ab} simetrik kısım, iz $\theta_{ab} \equiv \theta$ ile gösterilmek üzere

$$\sigma_{ab} = \theta_{ab} - \frac{1}{3} \theta h_{ab} \quad (3.39)$$

şeklinde tanımlı izsiz simetrik kısmı ile

$$\theta_{ab} = \sigma_{ab} + \frac{1}{3} \theta h_{ab} \quad (3.40)$$

şeklinde ifade edilebilir. Dolayısıyla ω_{ab} antisimetrik bir tansör olduğundan

$$\omega_a = \frac{1}{2} \eta_{abcd} \omega^{bc} u^d \iff \omega_{ab} = \eta_{abcd} \omega^c u^d \quad (3.41)$$

ya da $\eta_{abcd} u^d = \eta_{abc}$ olarak yazıldığında

$$\omega_a = \frac{1}{2} \eta_{abc} \omega^{bc} \iff \omega_{ab} = \eta_{abc} \omega^c \quad (3.42)$$

şeklinde tanımlı bir vektör ile ifade edilebilir. Yukarıdaki tanımla alternatif ifadelerle birlikte topluca gösterildiğinde

$$\begin{aligned}
\nabla_a u_b &= -u_a \dot{u}_b + \tilde{\nabla}_a u_b \\
&= -u_a \dot{u}_b + \tilde{\nabla}_{(a} u_{b)} + \tilde{\nabla}_{[a} u_{b]} = -u_a \dot{u}_b + \theta_{ab} + \omega_{ab} \\
&= -u_a \dot{u}_b + \tilde{\nabla}_{<a} u_{b>} + \frac{1}{3} (h^{cd} \nabla_c u^d) h_{ab} + \tilde{\nabla}_{[a} u_{b]} \\
&= -u_a \dot{u}_b + \sigma_{ab} + \frac{1}{3} \theta h_{ab} + \omega_{ab} \\
&\quad - u_a \dot{u}_b + \sigma_{ab} + \frac{1}{3} \theta h_{ab} + \eta_{abc} \omega^c
\end{aligned} \tag{3.43}$$

biçiminde olur. Burada

$$\begin{aligned}
\theta_{ab} &= \theta_{ba}, \theta_{ab} u^a = \theta_{ab} u^b = 0, \theta_a^a = \theta_a^a = 0 \\
\omega_{ab} &= -\omega_{ba}, \omega_{ab} u^a = \omega_{ab} u^b = 0, \omega_a^a = \omega_a^a = 0 \\
\sigma_{ab} &= \sigma_{ba}, \sigma_{ab} u^a = \sigma_{ab} u^b = 0, \sigma_a^a = \sigma_a^a = 0
\end{aligned} \tag{3.44}$$

dır.

θ_{ab} Genişleme Tansörü ve bunun izi olun θ Genişleme Skaleri veya kısaca Genişleme olarak tanımlanır. Bu tansör, u^a ya yerel olarak dik 3-uzayın hacimce genişlemesi olarak ifade edilir.

ω_{ab} Girdap tansörü ve ω_a Girdap vektörü olarak tanımlanır. Bu ifade yerel durgunluk sisteminin bir eylemsizlik sistemine göre dönmesinin bir ölçüsünü ifade eder.

σ_{ab} Kayma (sinear) Tansörü olarak tanımlanır ve u^a dik uzay elemanlarının biçim değişikliğini ifade eder. [4]

Verilen tansörlere ek olarak

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma_{ab} \sigma^{ab} \tag{3.45}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \omega_{ab} \omega^{ab} = \omega_a \omega^a \tag{3.46}$$

bağıntılarıyla ifade edilen skaler büyüklükler bağlamaktadır. Bu büyüklükler

$$\sigma = 0 \iff \sigma_{ab} = 0 \tag{3.47}$$

$$\omega = 0 \iff \omega_{ab} = 0 \text{ veya } \omega_a = 0 \quad (3.48)$$

şeklindeki özelliklere sahiptir.

Bir 4-lü u alanı verildiğinde, akışkanın kinematik büyüklüklerinin hesaplanması için (3.41) ve (3.43) bağıntılarından

$$\begin{aligned} \theta_{ab} &= \tilde{\nabla}_{(a} u_{b)} \\ &= h_{(a}^c h_{b)}^d \nabla_c u_d \\ &= h_a^c h_b^d \nabla_{(c} u_{d)} \\ &= \nabla_{(a} u_{b)} + u_{(a} \dot{u}_{b)} \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \theta &= iz \theta_{ab} \\ &= h^{ab} \nabla_a u_b \\ &= \tilde{\nabla}_a u^a \\ &= \nabla_a u^a = \theta_a^a \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ab} &= \tilde{\nabla}_{<a} u_{b>} = \tilde{\nabla}_{(a} u_{b)} - \frac{1}{3} (h^{cd} \nabla_c u_d) h_{ab} \\ &= [h_{(a}^c h_{b)}^d - \frac{1}{3} h^{cd} h_{ab}] \nabla_c u_d \\ &= h_a^c h_b^d \nabla_{(c} u_{d)} - \frac{1}{3} \theta h_{ab} \\ &= \theta_{ab} - \frac{1}{3} \theta h_{ab} \\ &= \nabla_{(a} u_{b)} + u_{(a} \dot{u}_{b)} - \frac{1}{3} \theta h_{ab} \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \omega_{ab} &= \tilde{\nabla}_{[a} u_{b]} \\ &= h_{[a}^c h_{b]}^d \nabla_c u_d \\ &= h_a^c h_b^d \nabla_{[c} u_{d]} \\ &= \nabla_{[a} u_{b]} + u_{[a} \dot{u}_{b]} \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \omega_a &= \frac{1}{2} \eta_{abcd} \omega^{bc} u^d \\ &= \eta_{abcd} \omega^c u^d \end{aligned} \quad (3.53)$$

olur.

3.2. RIEMANN GEOMETRİSİ

Riemann geometrisi bir (0,2) tipi pozitif tanımlı simetrik tansör alanı olan bir Riemann metriğinin ek yapısına sahip manifoldları dikkate alır. Birinci dereceden bir yaklaşım için bu bir Riemann manifoldunun bir oklid uzayı olduğu anlamına gelir. Bu sayede vektörlerin uzunluklarını ve aralarındaki açıları ölçebiliriz. Böylelikle Riemann manifoldları topolojik anlamda metrik uzaylar haline gelir. Riemann yapısı ayrıca, manifoldların diğer özelliklerinin incelenmesi için bir araç olarak sıklıkla kullanılır. Örneğin, bize ikinci dereceden bir lineer eliptik kısmi diferansiyel operatör verilirse, o operatörün ikinci dereceden katsayıları bir Riemann metriği oluşturur ve bu metriğin genel özelliklerinin bize bunu içeren kısmi diferansiyel denklemler hakkında bilgi verir. Tersine, bir Riemann manifoldunda böyle bir operatör doğal olarak seçilir. Böylece örneğin bir Riemann manifoldu üzerinde ısı denklemini çözmekten bahsetmek uygun olur. Riemann metrikleri herhangi bir topolojik metrik tarafından açıklanamayan önemli özelliklere sahiptir. Bu nedenle topolojik çalışmalarda Riemann geometrisi çalışma manifoldları için kullanılabilir [13,14].

3.2.1. Bianchi ve Ricci Özdeşlikleri

1+3 uzay-zaman ayrışım yöntemi kullanımının esas amacı Riemann eğrilik tansöründen bilgi vermektedir. Bu yöntemi uygularken Einstein alan denklemleri dolaylı olarak kullanılır.

Riemann eğrilik tansörü, keyfi bir u vektörünün kovaryant türevlerinin yer değiştirici olmamalarının sonucu olarak ortaya çıkar. Riemann eğrilik tansörü şu şekilde cebirsel özdeşlikleri sağlar.

$$2\nabla_{[a} u_{b]} u_c = R_{abcd} u^d \quad (3.54)$$

$$R_{abcd} = R_{[ab][cd]} = R_{cdab} \quad (3.55)$$

$$R_{a[bcd]} = 0 \quad (3.56)$$

$$R^a_{bcd} + R^a_{cdb} + R^a_{dbc} = 0 \quad (3.57)$$

(3.7) denklemi "Birinci Bianchi Özdeşliği" olarak tanımlanır. Cebirsel özdeşliğin yanında difarensiyel özdeşlik şu şekilde ifade edilir.

$$\nabla_{[a} R_{bc]de} = 0 \iff \nabla_e R_{bcd}^a + \nabla_c R_{bdc}^a + \nabla_d R_{bec}^a = 0 \quad (3.58)$$

Bu özdeşlik "İkinci Bianchi Özdeşliği" olarak tanımlanır [7].

Riemann Eğrilik Tansörünün

$$R_{afb}^f = R_{ab} = R_{ba} \quad (3.59)$$

biçiminde iki izi bulunmaktadır ve

$$R_{ab}^{ab} = R_a^a = R \equiv {}^4R \quad (3.60)$$

eşitliği sağlanır. Bunlara sırayla R_{ab} Ricci Eğrilik Tansörü ve R Ricci Eğrilik skaleri denir. Riemann Eğrilik Tansörü R_{abcd} ye büzme işlemi uygulandığında R_{ab} Ricci Eğrilik Tansörü ve R Ricci Eğrilik Sakaleri bulunur. Dolayısıyla R_{abcd} bilinirse R_{ab} ve R bulunabilir. İkinci Bianchi özdeşliğinin bir kere büzülmesiyle

$$\nabla_a R_{bcd}^a = 2 \nabla_{b[c} R_{d]} \quad (3.61)$$

bununla birlikte ikinci kere büzülmesiyle

$$\nabla_a R_b^a = \frac{1}{2} \nabla_b R \quad (3.62)$$

özdeşlikleri elde edilmektedir. Bununla birlikte

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \quad (3.63)$$

şeklinde tanımlanan tansörün diverjansının sıfır olduğu;

$$\nabla^a G_{ab} = 0 \quad (3.64)$$

şeklinde gösterilir.

3.2.2. Weyl Tensörü

Yerçekimi teorisinin geometrik karakterine ilişkin daha temel bir anlayış, Rieman ve Weyl tensörlerinin büyük bir öneme sahip olduklarını vurgulamaktadır. Yerçekimi radyasyonu, tekillik teorisi deneysel testler için bir araç olarak jeodezik sapma, sadece birkaçından bahsetmek, yerçekimi alanında Riemann ve Weyl tensörlerinin önemine yeterince tanıklık eden konulardır. Buna karşılık, Riemann ve Weyl tensörleriyle ilgili geometrik yönler hakkında derin bir bilgi, fiziksel gerçekliğin modellenmesi ve yorumlanması konusunda güçlü ve yardımcı bir anlayış sağlar [15].

R_{abcd} Riemann Eğrilik Tansörünün büzülmesi ile oluşan R ve R_{ab} değerlerinin R_{abcd} nin bir izi olduğunu Ricci ve Bianchi özdeşliklerinde belirtmiştik. R_{abcd} nin bilinmesi ile R_{ab} ve R büyüklükleri büzme işlemiyle bulunabilir.

$$R_{abcd} = C_{abcd} + \frac{1}{2} (g_{ac} R_{bd} + g_{bd} R_{ac} - g_{ad} R_{bc} - g_{bc} R_{ad}) - \frac{R}{6} (g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc}) \quad (3.65)$$

Riemann tansörünün izsiz kısmı olan C_{abcd} değerine Konformal eğrilik tansörü veya Weyl tansörü denir. Weyl tansörü;

$$C_{abcd} = C_{[ab][cd]} = C_{[cdab]} \quad (3.66)$$

$$C_{a[bcd]} = 0 \quad (3.67)$$

$$C_{bad}^a = 0 \text{ ve } C_{ab}^{ab} = 0 \quad (3.68)$$

şeklinde simetri özellikleri gösterilebilir. (3.1) bağıntısı kullanılarak C_{abcd} Weyl tansörünü yalnız bırakacak şekilde tekrar düzenlendiğinde bu ifade elde edilir.

$$C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{1}{2} (g_{ac} R_{bd} + g_{bd} R_{ac} - g_{ad} R_{bc} - g_{bc} R_{ad}) + \frac{R}{6} (g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc}) \quad (3.69)$$

Elde edilen bu ifadenin diverjansı alındığında (3.61) ve (3.62) denklemleri kullanıldığında şu ifade elde edilir.

$$\nabla_a C_{bcd}^a = \nabla_{[c} R_{d] b} + \frac{1}{6} g_{b[c} \nabla_{d]} R \quad (3.70)$$

Einstein alan denklemleri sayesinde Weyl tansörünü enerji - momentum tansörü cinsinden şu şekilde ifade edilir.

$$\nabla_a C_{bcd}^a = \nabla_{[c} T_{\alpha] b} + \frac{1}{3} g_{b[c} \nabla_d] T \quad (3.71)$$

Bu ifadeye Weyl tansörünün hareket denklemi denir. 1+3 kovaryant formülasyon çerçevesinde Weyl tansörü elektrik ve manyetik olmak üzere iki bölüme ayrılır.

Tablo 3.2: Weyl Tansörünün Elektrik ve Manyetik Tanımları

Elektrik Bölümü	$E_{ab} = C_{aebf} u^e u^f$
Manyetik Bölümü	$H_{ab} = \frac{1}{2} \eta_{ab}{}^{gh} C_{cgdh} u^c u^d$

Elektrik ve manyetik bölümleri aşağıdaki tabloda belirtilen simetrik özelliklerini sağlarlar.

Tablo 3.3: Elektrik ve Manyetik Bölümlerin Simetrik Durumları

$E_{ab} = E_{(ab)}$	$H_{ab} = H_{ab}$
$E_a^a = 0$	$H_a^a = 0$
$E_{ab} u^b = E_{ab} u^a = 0$	$H_{ab} u^b = H_{ab} u^a = 0$

Buna göre iki bölüm Weyl tansörünü tamamen şu şekilde belirler [4].

$$\begin{aligned} C_{cd}^{ab} = & [4 \delta^{[a}{}_e \delta^{b]}{}_f \delta^g{}_{[c} \delta^{h]}{}_d] - \eta_{ef}^{ab} \eta_{cd}^{gh} u^e u_g E_h^f \\ & - 2 [\eta_{ef}^{ab} \delta^g{}_{[c} \delta^{h]}{}_d] + \delta^{[a}{}_e \delta^{b]}{}_f \eta_{cd}^{gh} u^e u_g H_h^f \end{aligned} \quad (3.72)$$

3.2.3. Enerji Momentum Tensörü

Enerji ve momentum kavramları korundukları için fizikte önemlidir. Korunum yasaları hareket denklemlerinden çıkar, ancak hareket denklemlerini çözmeden bile sistem hakkında önemli bilgi edilebilir. Dağıtılmış bir sistem veya bir alan için, enerji yoğunlukları, momentum ve momentum akışı bazı x^a koordinatlarıyla temsiledilen noktaların fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar, enerji-momentum tensörü $T^{\mu\nu}(x^a)$ içinde birleşir, yani x^a koordinatlarının keyfi dönüşümleri altında tensör kuralına göre $T^{\mu\nu}$ dönüşümünün bileşenleri x^a noktalarının uzayına bir veya başka bir metrik ile donatılmış olup olmadığından bağımsız olarak tansördür. Genellikle, $T^{\mu\nu}$ simetrik bir tansördür,

$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$. Açısal momentum korunumunun uygun bir formülasyonu için $T_{\mu\nu}$ simetrisi gereklidir. $T^{\mu\nu}(x^a)$ nın lokal dağılımları, yalnızca alanın enerji özelliklerine bazı sayısal değerler yükledikleri için değil, aynı zamanda alanla etkileşime giren parçacıkların ve cisimlerin yerel hareket durumundan sorumlu olarak görülebildikleri için de önemlidir. İkinci mertebeden diferansiyel denklemler tarafından yönetilen alan teorilerinde, enerji-momentum tensörünün alan değişkenlerinin birinci mertebeden türevlerinin karelerine bağlı olması beklenir, ancak ikinci türevlere bağlı değildir [16].

Gravitasyona kaynaklık eden enerji - madde içeriği: bir $V(\phi)$ skaler potansiyelinden türeyen bir ϕ skaler alanı, akışkanların karışımı, kinetik teoriyle açıklanabilen bireysel tanecikler topluluğu elektromanyetik alanlar gibi pek çok unsurlardan biri olabilir. Bu unsurların toplam etkisi, alan denklemlerinin sağında bulunan T_{ab} enerji - momentum tansörüyle ifade edilmektedir.

Enerji - momentum tansörü T_{ab} , ayrıcalıklı bir u^a 4'lü hız vektörü ile ilişkisi şu şekildedir.

$$T_{ab} = \mu u_a u_b + p h_{ab} + q_a u_b + q_b u_a + \pi_{ab} = T_{(ab)} \quad (3.73)$$

$$q_a u^a = 0, \pi_{ab} = \pi_{(ab)}, \pi_{ab} u^b = 0, \pi_a^a = 0 \quad (3.74)$$

Buradaki terimler şu şekilde ifade edilir.

Tablo 3.4: Dinamik Büyüklükler

$q_a :$	u^a ya göre rölativistik momentum yoğunluğu
$\pi_{ab} :$	izsiz eş yönsüz basınç
$p :$	u^a ya dik h_{ab} 3-uzayında eşyönlü basınç
$\mu :$	u^a ya göre toplam rölativistik enerji yoğunluğu

Bu terimler şu şekilde tanımlanır.

$$\mu = T_{ab} u^a u^b \quad (3.75)$$

$$q_a = -h_a^b u^c T_{bc} \quad (3.76)$$

$$p = \frac{1}{3} h^{ab} T_{ab} \quad (3.77)$$

$$\pi_{ab} = h^c_{<a} h^d_{>b} T_{cd} \quad (3.78)$$

(3.12) bağıntısındaki geometrik ayrışımın fizikini, akışkanın termodinamik tavsiri ile ilişkilendiren bağıntılar belirler. Bunlara hal denklemi denir. Rölativist kozmolojide, (3.12) bağıntısının sade hali yoğun şekilde kullanılmaktadır ve şu şekildedir.

$$q_a = \pi_{ab} = 0 \implies T_{ab} = \mu u_a u_b + p h_{ab} \quad (3.79)$$

Buna mükemmel akışkan denir ve hal denkleminde şu şekilde ifade edilir.

$$p = p(\mu) = (\gamma - 1) \mu \quad (3.80)$$

(3.19) denklemi lineer barotrop hal denklemi olarakta adlandırılır. Burada γ bir sabit olup tanım aralığını sesin hızı V_s belirler ve bağıntı şu şekilde ifade edilir [4].

$$V_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \mu} \right)_{\text{sabit entropi}} \quad (3.81)$$

$$|V_s^2| \leq 1 \iff 0 \leq \gamma \leq 2 \quad (3.82)$$

3.2.4. Evrim ve Bağ Denklemlerinin Çıkarılışı

Zamana göre türev içeren denklemler Evrim (Yayılm) Denklemleri olarak tanımlanmaktadır. Zaman türevi içermeyen denklemler ise Bağ Denklemleri olarak tanımlanırlar.

Evrin ve bağ denlemlerinin tesisi için gerekli olan bağıntılar

$$R = -T + 4\Lambda, \quad T = -\mu + 3p, \quad R = \mu - 3p + 4\Lambda \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} R_{ab} u^a u^b &= \frac{1}{2} (\mu + 3p) - \Lambda \\ h_c^a h_d^b R_{ab} &= \left[\Lambda - \frac{1}{2} (p - \mu) \right] h_{cd} + \pi_{cd} \\ R_{ab} u^b &= -q_a - \frac{1}{2} (\mu + 3p - 2\Lambda) u_a \\ R_{ab} u^b h_c^a &= -q_c \\ R_{abcd} u^a u^c &= E_{bd} - \frac{1}{2} \pi_{bd} + \frac{1}{6} (\mu + 3p - 2\Lambda) h_{bd} \end{aligned} \quad (3.84)$$

biçimindedir. Bununla birlikte Ricci Özdeşliğinden elde edilebilecek bağıntılar (3.54) denkleminde, c indisi ile a büzüldüğünde

$$2 \nabla_{[a} \nabla_{b]} u^a = u_c^b R_{ab} u^a \quad (3.85)$$

bulunur. Bu bağıntı bir kere kovaryant bir tansör tipinde denklemdir. (3.85) denkleminin zaman eksenine paralel izdüşüm için her iki tarafı $U_c^b = -u^b u_c$ ile çarpıldığında

$$U_c^b 2 \nabla_{[a} \nabla_{b]} u^a = U_c^b R_{ab} u^a \quad (3.86)$$

elde edilir ve gerekli hesaplar yapıldığında

$$\dot{\theta} - \nabla_a \dot{u}^a = -\frac{1}{3} \theta^2 - 2 \sigma^2 + 2 \omega^2 - \frac{1}{2} (\mu + 3p) + \Lambda \quad (3.87)$$

biçiminde elde edilen denklem Raychaudhuri denklemi olarak tanımlanır. (3.85) bağıntısının u^a ya dik izdüşümü için her iki yanını h_c^b ile çarpıldığında

$$h_c^b 2 \nabla_{[a} \nabla_{b]} u^a = h_c^b R_{ab} u^a \quad (3.88)$$

bulunur ve buradan

$$h_a^b h_b^d \nabla_d \sigma_c^b - \frac{2}{3} h_a^b \nabla_b \theta + \eta_{abcd} u^d \nabla^b \omega^c = -2 \eta_{abcd} u^d \dot{u}^b \omega^c - q_a \quad (3.89)$$

(3.85) denkleminin her iki yanını u^a ile çarpıldığında

$$u^a 2 \nabla_{[a} \nabla_{b]} u_c = R_{abcd} u^d u^a \quad (3.90)$$

biçiminde iki kere kovaryant tansör tipinde denklem elde edilir. Bunun $\tilde{V}_{ef} = h_e^b h_f^c V_{bc}$ uzaysal kısmı göz önüne alındığında

$$h_e^b h_f^c u^a 2 \nabla_{[a} \nabla_{b]} u_c = h_e^b h_f^c R_{abcd} u^d u^a \quad (3.91)$$

elde edilir. Bu bağıntının izi için e ile f üzerinden büzülme yapıldığında

$$h^{bc} u^a 2 \nabla_{[a} \nabla_{b]} u_c = h^{bc} R_{abcd} u^d u^a \quad (3.92)$$

elde edilir. Bu bağıntı ise tekrar (3.87) bağıntısını verir. (3.89) un izsiz simetrik kısmı

$$\left[h_{(e}^b h_{f)}^c - \frac{1}{3} h^{bc} h_{ef} \right] u^a 2 \nabla_{[a} \nabla_{b]} u_c = \left[h_{(e}^b h_{f)}^c - \frac{1}{3} h^{bc} h_{ef} \right] R_{abcd} u^d u^a \quad (3.93)$$

olup, bu bağıntıdan

$$\begin{aligned} h_a^c h_b^d \dot{\sigma}_{cd} - h_a^c h_b^d \nabla_{(c} \dot{u}_{d)} + \sigma_{ac} \sigma_b^c + \frac{2}{3} \theta \sigma_{ab} \\ - \dot{u}_a \dot{u}_b + \omega_a \omega_b + \left(\frac{1}{3} \nabla_c \dot{u}^c - \frac{2}{3} \sigma^2 - \frac{1}{3} \omega^2 \right) h_{ab} = -E_{ab} + \frac{1}{2} \pi_{ab} \end{aligned} \quad (3.94)$$

elde edilir. Bu kayma (shear) Yayılım Denklemi olarak adlandırılır. (3.91) bağıntısının antisimetrik kısmı

$$h_{[e}^b h_{f]}^c u^a 2 \nabla_{[a} \nabla_{b]} u_c = h_{[e}^b h_{f]}^c R_{abcd} u^d u^a \quad (3.95)$$

olup buradan

$$h_b^a \dot{\omega}^b \frac{1}{2} \eta^{abcd} \left(\nabla_b \dot{u}_c \right) u_d + \frac{2}{3} \theta \omega^a - \sigma_b^a \omega^b = 0 \quad (3.96)$$

bulunur ve Girdap Yayılım Denklemi olarak tanımlanır. (3.85) denklemi ile $\eta_{fg}^{ab} u^g$ çarpıldığında

$$n_{fg}^{ab} u^g 2 \nabla_{[a} \nabla_{b]} u_c = n_{fg}^{ab} u^g R_{abcd} u^d \quad (3.97)$$

ve R_{abcd} 'nin yerine iz kısımları olan R_{ab} ve R ile izsiz kısmını yansıtan C_{abcd} tansörü cinsinden

$$R_{abcd} = C_{abcd} + \frac{1}{2} \left(g_{ac} R_{bd} + g_{bd} R_{ac} - g_{ad} R_{bc} - g_{bc} R_{ad} \right) - \frac{R}{6} \left(g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc} \right) \quad (3.98)$$

biçimindeki ifade yazıldığında

$$\begin{aligned} -4 \omega_f \dot{u}_c + 2 h_f^n h_c^m \eta_{abg} u^g \nabla^a \sigma_m^b + 2 \left(h_m^n \nabla_n \omega^m \right) h_{fc} \\ - 2 h_f^n h_c^m \nabla_m \omega_n - \frac{2}{3} \eta_{fcag} u^g \nabla^a \theta = \eta_{fg}^{ab} C_{abcd} u^d u^g + \eta_{fgcb} R_d^b u^d u^g \end{aligned} \quad (3.99)$$

bulunur. Burada f ile c üzerinden simetrikleştirme alındığında ve indislerde yeniden adlandırıldığında

$$-2 \omega_{(a} \dot{u}_{b)} + h_{(a}^c h_{b)}^d \eta_{cefg} u^g \nabla^e \sigma_d^f + \left(h_d^c \nabla_c \omega^d \right) h_{ab} - h_{(a}^c h_{b)}^d \nabla_c \omega^d = H_{ab} \quad (3.100)$$

elde edilir. Bu bağıntı Ellis tarafından H_{ab} denklemi olarak adlandırılır. (3.99) bağıntısının izi

$$\nabla_a \omega^a = 2 \dot{u}_a \omega^a \quad (3.101)$$

denklemini verir. Bu Girdap için Diverjans özdeşliği olarak tanımlanır. Bununla birlikte Ricci özdeşliği ve Birinci Bianchi Özdeşliği nedeniyle

$$\nabla_{[a} \nabla_b u_{c]} = 0 \text{ veya} \quad (3.102)$$

$$\eta^{dabc} \nabla_a \nabla_b u_c = 0 \quad (3.103)$$

özdeşliğine denktir. Bunun U_d^e çarpımı ile zaman eksenine paralel izdüşümü ve h_d^e çarpımıyla u^a ya dik izdüşümü sırasıyla (3.101) ve (3.96) bağıntılarını yeniden verir. Yani yeni bir bağıntı elde edilemez. O halde Ricci özdeşliğinden üretebilecek tüm farklı denklem tipi (bileşenler hariç) üç yayılı, üç de bağ denklemi olup altı tanedir. İki kere büzülmüş ikinci Bianchi özdeşliği

$$\nabla_a T^{ab} = 0 \quad (3.104)$$

korunum denkleminde yol açıyordu. Bu bağıntıyı bir kere U_b^c ve bir kere de h_b^c ile çarparak ve (3.73) denklemi kullanarak

$$\dot{\mu} + \nabla_a q^a = -(\mu + p) \theta - q^a \dot{u}_a - \pi^{ab} \sigma_{ab} \quad (3.105)$$

ve

$$h_b^a \dot{q}^b + h_b^a \nabla^b p + h_b^a \nabla_c \pi^{bc} = -(\mu + p) \dot{u}^a - \sigma_b^a q^b - \frac{4}{3} \theta q^a + \eta^{abcd} q_b \omega_c u_d \quad (3.106)$$

bağıntıları elde edilir. (3.102) denklemi enerji korunum denklemi ve (3.101) denklemi ise momentum korunum denklemi olarak tanımlanır. Bununla birlikte, ikinci Bianchi özdeşliği aynı zamanda Weyl Tansörü için hareket denkleminde de yol açıyor. Weyl Tansörü (3.71)

denkleminin u^d ile çarpımı

$$u^d \nabla_a C_{bcd}^a = u^d \left[\nabla_{[c} T_{d]b} + \frac{1}{3} g_{b[c} \nabla_{d]} T \right] \quad (3.107)$$

bağıntısını verir. Bu bağıntının U_e^b ile çarpımı

$$\begin{aligned} \nabla_a E_c^a - E_{cb} \dot{u}^b - E_b^a \sigma_a^b u_c - 3 H_c^a \omega_a - \eta_{cefg} \sigma^{ea} H_a^f u^g \\ = \frac{1}{3} \left(\nabla_c \mu + \dot{\mu} u_c \right) + \frac{1}{3} \left(\nabla_c p + \dot{p} u_c \right) \\ + \frac{1}{2} (\mu + p) \dot{u}_c + \sigma_c^d q_d + \frac{1}{3} \theta q_c \\ - \eta_{cefg} \omega^e q^f u^g + \frac{1}{2} (\dot{q}_c - q_d \dot{u}^d u_c) + \frac{1}{2} \pi_{cb} \dot{u}^b \end{aligned} \quad (3.108)$$

verir. $\nabla_c p$ yi yok etmek için (3.106) ile verilen Momentum Korunum Denklemi kullanıldığında

$$\begin{aligned} \nabla_a E_c^a - E_{cb} \dot{u}^b - E_b^a \sigma_a^b u_c - 3 H_c^a \omega_a - \eta_{cefg} \sigma^{ea} H_a^f u^g \\ = \frac{1}{3} (\nabla_c \mu + \dot{\mu} u_c) - \frac{1}{2} (h_{es} \nabla_r \pi^{rs} - \pi_c^r \dot{u}_r) \\ + \frac{1}{2} \sigma_c^d q_d - \frac{1}{3} \theta q_c - \frac{3}{2} \eta_{cefg} \omega^e q^f u_g \end{aligned} \quad (3.109)$$

bulunur. (3.107) bağıntısının u^a ya dik iz düşümü uzaysal kısım olup,

$$h_r^b h_s^c u^d \nabla^a C_{abcd} = h_r^b h_s^c u^d \left[\nabla_{[c} T_{d]b} + \frac{1}{3} g_{b[c} \nabla_{d]} T \right] \quad (3.110)$$

$$\begin{aligned} h_r^b h_s^c \dot{E}_{bc} + E_{rs} \theta + h_{rs} E_{mn} \sigma^{mn} - 2 E_{ms} (\sigma_r^m + \omega_r^m) - E_{mr} (\sigma_s^m + \omega_s^m) \\ + 2 H_{(r}^m \eta_{s)mnp} u^p \dot{u}^n - h_s^c \eta_{rafe} u^e \nabla^a H_c^f = \frac{1}{2} \left[-(\mu + p) (\sigma_{rs} - \omega_{rs}) \right. \\ - h_r^b h_s^c \nabla_c q_b - \frac{1}{3} \mu h_{rs} \\ - \pi_{rd} (\sigma_s^d - \omega_s^d) - \frac{1}{3} \theta (\mu + p) h_{rs} \\ \left. - 2 q_{(r} \dot{u}_{s)} - \frac{1}{3} \theta \pi_{rs} - h_r^b h_s^c \dot{\pi}_{bc} \right] \end{aligned} \quad (3.111)$$

bulunur. (3.105) ile ifade edilen Enerji Korunum denklemi kullanılarak $\dot{\mu}$ nun elenmesiyle bulunan denklemin simetrik kısmı alındığında

$$\begin{aligned}
& h_{(r}^b h_{s)}^c \dot{E}_{bc} + E_{rs} \theta + h_{rs} E_{mn} \sigma^{mn} - 3 E_{m(r} \omega_{s)}^m + 2 H_{(r}^m \eta_{s)mnp} u^p \dot{u}^n \\
& - h_{(r}^c \eta_{s)mnp} u^p \nabla^m H_c^n = -\frac{1}{2} (\mu + p) \sigma_{rs} - q_{(r} \dot{u}_{s)} \\
& - \frac{1}{2} h_{(r}^b h_{s)}^c \nabla_c q_b - \frac{1}{2} \pi_{d(r} \sigma_{s)}^d \\
& - \frac{1}{6} \theta \pi_{rs} + \frac{1}{2} \pi_{d(r} \omega_{s)}^d - \frac{1}{2} h_{(r}^b h_{s)}^c \dot{\pi}_{bc} \\
& + \frac{1}{6} h_{rs} (\nabla_a q^a + q^a \dot{u}_a + \pi^{ad} \pi_{ad})
\end{aligned} \tag{3.112}$$

elde edilir. (3.71) denkleminin $\eta_{mn}^{cd} u^n$ ile çarpılıp düali alındığında

$$\eta_{mn}^{cd} u^n \nabla^a C_{abcd} = \eta_{mn}^{cd} u^n \left[\nabla_{[c} T_{d]b} + \frac{1}{3} g_{b[c} \nabla_{d]} T \right] \tag{3.113}$$

bulunur. Bunun U_r^b ile çarpımından

$$\begin{aligned}
\nabla_a H_m^a + \frac{1}{2} \eta_{mefg} u^g \nabla^e q^f = -(\mu + p) \omega_m - 3 (E_m^e - \frac{1}{6} \pi_m^e) \omega_e + H_{me} \dot{u}^e \\
- \eta_{mefg} \sigma_a^e (E^{fa} + \frac{1}{2} \pi^{fa}) u^g + H_{ef} \sigma^{ef} u_m
\end{aligned} \tag{3.114}$$

bulunur. (3.113) bağıntısının u^a ya dik izdüşümünün uzaysal kısmı

$$h_r^m h_s^b \eta_{mn}^{cd} u^n \nabla^a C_{abcd} = h_r^m h_s^b \eta_{mn}^{cd} u^n \left[\nabla_{[c} T_{d]b} + \frac{1}{3} g_{b[c} \nabla_{d]} T \right] \tag{3.115}$$

şeklinde olup bunun r ve s ye göre simetrikleştirilmesi ile

$$\begin{aligned}
& 2 h_{(r}^m h_{s)}^b \dot{H}_{mb} + H_{rs} \theta + h_{rs} H_{ef} \sigma^{ef} - 3 H_{e(r} \sigma_{s)}^e - H_{e(r} \omega_{s)}^e \\
& - 2 E_{(r}^e \eta_{s)efg} u^g \dot{u}^f - h_{(r}^m \eta_{s)efg} (\nabla^e E_m^f) u^g \\
& = \sigma_{(r}^e \eta_{s)efg} q^f u^g - h_{rs} q^e \omega_e + 3 \omega_{(r} q_{s)} + h_{(r}^m h_{s)}^b \eta_{mefg} \nabla^e \pi_b^f u^g
\end{aligned} \tag{3.116}$$

elde edilir [4].

3.2.5. Evrim ve Bağ Denklemleri

1+3 kovaryant ayrışımında, izdüşüm tansörleri kullanılarak çeşitli geometrik ve dinamik büyüklükler, hem zamansal hem de uzaysal kısımlarına ayrıştırılır. Burada amaç Ricci

ve Branchi özdeşliklerinden olabildiğince bilgi çıkarımlamaktır. Bu süreçte özdeşliklerin u ya paralel ve dik doğrultudaki izdüşümlerinden iki takım denklem elde edilir. Birinci takım, kovaryant zaman türevleri içerdiği için "Evrin (Yayılım) Denklemleri" olup $\theta, \sigma_{ab}, \omega_a, E_{ab} + \frac{1}{2}\pi_{ab}, H_{ab}, \mu$ ve q_a nın u kongruansı boyunca $u^a \nabla_a$ uzaysal türevlerini içermektedir. İkinci takım ise hiçbir zaman türevi içermeyip sadece $h_b^a \nabla_a$ uzaysal türevlerini içeren "Bağ denklemleri" dir. Hesaplar çok uzun olduğundan, bu tez kapsamında sadece sonuçları aşağıda topluca gösterilmektedir [4, 7, 17, 18, 19].

Evrin (Yayılım) Denklemleri

Raychaudhuri Denklemi

$$\dot{\theta} - D_a \dot{u}^a = -\frac{1}{3} \theta^2 + \dot{u}_a \dot{u}^a - 2 \sigma^2 + 2 \omega^2 - \frac{1}{2} (\mu + 3 p) + \Lambda \quad (3.117)$$

Girdap Yayılım Denklemi

$$\dot{\omega}^a - \frac{1}{2} \eta^{abc} D_b \dot{u}_c = -\frac{2}{3} \theta \omega^a + \sigma_b^a \omega^b + u^a \dot{u}_b \omega^b \quad (3.118)$$

Makaslama Yayılım Denklemi

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ab} - (u_a \sigma_{bc} + u_b \sigma_{ac}) \dot{u}^c - \frac{1}{2} (D_a \dot{u}_b + D_b \dot{u}_a) + \sigma_{ac} \sigma_b^c + \frac{2}{3} \theta \sigma_{ab} - \dot{u}_a \dot{u}_b \\ + \omega_a \omega_b + \frac{1}{3} (D_c \dot{u}^c + \dot{u}_c \dot{u}^c - 2 \sigma^2 - \omega^2) h_{ab} = -(E_{ab} - \frac{1}{2} \pi_{ab}) \end{aligned} \quad (3.119)$$

Gravitasyonel - Elektrik Yayılım Denklemi

$$\begin{aligned} (\dot{E}_{ab} + \frac{1}{2} \dot{\pi}_{ab}) - (E_{ae} + \frac{1}{2} \pi_{ae}) \dot{u}^e u_b - (E_{be} + \frac{1}{2} \pi_{be}) \dot{u}^e u_a \\ - \frac{1}{2} (\eta_{aef} D^e H_b^f + \eta_{bef} D^e H_a^f) + \frac{1}{4} (D_a q_b + D_b q_a) - \frac{1}{6} h_{ab} D^e q_e \\ = -\frac{1}{2} (\mu + p) \sigma_{ab} - \frac{1}{2} (q_a \dot{u}_b + q_b \dot{u}_a) + \frac{1}{3} h_{ab} q_e \dot{u}^e - \theta [E_{ab} + \frac{1}{6} \pi_{ab}] \\ + \frac{3}{2} \sigma_a^e \left[E_{be} - \frac{1}{6} \pi_{be} \right] + \frac{3}{2} \sigma_b^e (E_{ae} - \frac{1}{6} \pi_{ae}) - h_{ab} \sigma^{ef} (E_{fe} - \frac{1}{6} \pi_{fe}) \\ - \frac{1}{2} \eta_{aef} \left[(E_b^e + \frac{1}{2} \pi_b^e) \omega^f + 2 H_b^e \dot{u}^f \right] \\ - \frac{1}{2} \eta_{bef} \left[(E_a^e + \frac{1}{2} \pi_a^e) \omega^f + 2 H_a^e \dot{u}^f \right] \end{aligned} \quad (3.120)$$

Gravite - Magnetik Yayılım Denklemi

$$\begin{aligned}
& \dot{H}_{ab} - (u_a H_{bc} + u_b H_{ac}) \dot{u}^c \\
& + \frac{1}{2} \eta_{aef} D^e (E_b^f - \frac{1}{2} \pi_b^f) + \frac{1}{2} \eta_{bef} D^e (E_a^f - \frac{1}{2} \pi_a^f) = \\
& - \theta H_{ab} + \frac{3}{2} (H_{ac} \sigma_b^c + H_{bc} \sigma_a^c) - H_{ef} \sigma^{ef} h_{ab} + \frac{3}{4} (\omega_a q_b + \omega_b q_a) - \frac{1}{2} \omega^c q_c h_{ab} \\
& + (\eta_{aef} E_b^e + \eta_{bef} E_a^e) \dot{u}^f - \frac{1}{2} (\eta_{aef} H_b^e + \eta_{bef} H_a^e) \omega^f + \frac{1}{4} (\eta_{ae}^f \sigma_b^e + \eta_{be}^f \sigma_a^e) q_f
\end{aligned} \tag{3.121}$$

Madde Korunum Denklemi

$$\dot{\mu} + \nabla^a q_a = (\mu + p) \theta - 2 q_a \dot{u}^a - \pi_{ab} \sigma^{ab} \tag{3.122}$$

Momentum Korunum Denklemi

$$\begin{aligned}
\dot{q}_a + D_a p + D^b \pi_{ab} = & -(\mu + p) \dot{u}_a - \sigma_a^b q_b \\
& - \frac{4}{3} \theta q_a + u_a \dot{u}^b q_b - \pi_{ab} \dot{u}^b + \eta^{abc} q_b \omega_c
\end{aligned} \tag{3.123}$$

Bağ Denklemleri

Makaslama Bağ Denklemi

$$0 = (C_1)_a = D_b \sigma_a^b - \frac{2}{3} D_a \theta + \eta_a^{bc} D_b \omega_c + 2 \eta_a^{bc} \dot{u}_b \omega_c + q_a \tag{3.124}$$

Girdap Bağ Denklemi

$$0 = (C_2) = D_a \omega^a - \dot{u}_a \omega^a \tag{3.125}$$

Gravito-Magnetik Bağ Denklemleri

$$0 = (C_3)_{ab} = H_{ab} + (\omega_a \dot{u}_b + \omega_b \dot{u}_a) - \omega^e \dot{u}_e h_{ab} - \frac{1}{2} (\eta_{aef} D^e \sigma_b^f + \eta_{bef} D^e \sigma_a^f) + \frac{1}{2} (D_a \omega_b + D_b \omega_a) \quad (3.126)$$

Gravito-Elektrik Diverjans

$$0 = (C_4)_a = D_b (E_a^b + \frac{1}{2} \pi_a^b) - \frac{1}{3} D_a \mu - \frac{1}{2} \sigma_a^b q_b + \frac{1}{3} \theta q_a - \eta_{aef} (\sigma^{eb} H_b^f - \frac{3}{2} \omega^e q^f) - 3 H_a^b \omega_b \quad (3.127)$$

Gravito-Magnetik Diverjans

$$0 = (C_5)_a = D_b H_a^b + \frac{1}{2} \eta_{ae}^f D^e q_f + (\mu + p) \omega_a + 3 (E_{ab} - \frac{1}{6} \pi_{ab}) \omega^b + \eta_{ae}^f \sigma^{eb} (E_{fb} + \frac{1}{2} \pi_{fb}) \quad (3.128)$$

4. BULGULAR

Bu bölümde, önceki bölümde yazmış olduğumuz evrim ve bağ denklemlerinin F(G) gravite teorisi için alacağı şekilleri bulmak amaçlanmaktadır.

4.1. EFEKTİF ENERJİ - MOMENTUMUNUN F(G) GRAVİTEDEKİ YORUMU

2. Bölüm 'de belirtildiği gibi

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{F(R, G) - 2\Lambda}{2\kappa^2} \right] + S_m \quad (4.1)$$

bağıntısından, metriğe göre birinci varyasyon yapılarak elde edilen F(R,G)-gravite 'nin alan denklemleri

$$F_R \equiv \frac{\partial F(R, G)}{\partial R}, F_G \equiv \frac{\partial F(R, G)}{\partial G} \quad (4.2)$$

için

$$\begin{aligned} & F_R R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} F - \nabla_a \nabla_b F_R + g_{ab} \square F_R \\ & - (-2RR_{ab} + 4R_{ac}R_b^c - 2R_a^{cde} R_{bcde} - 4R_{acdb}R^{cd}) F_G \\ & - 2(\nabla_a \nabla_b F_G) R + 2g_{ab} R \square F_G - 4R_{ab} \square F_G \\ & + 4(\nabla_c \nabla_a F_G) R_b^c + 4(\nabla_c \nabla_b F_G) R_a^c \\ & - 4g_{ab} (\nabla_c \nabla_d F_G) R^{cd} - 4(\nabla_c \nabla_d F_G) R_{ab}^{cd} + \Lambda g_{ab} = \kappa^2 T_{ab}^m \end{aligned} \quad (4.3)$$

şeklinde bulunur. Bunun izi ise

$$R F_R - 2F + 3\square F_R + 2G F_G + 2R \square F_G + 4R^{ab} \nabla_a \nabla_b F_G = \kappa^2 T^m \quad (4.4)$$

biçimindeki ifadeyi verir. (4.1) ya da (4.3), genel keyfi bir F(G) fonksiyonu içindir ve şu özel durumları içerir.

f(R)-gravite :

$$F(R, G) \equiv f(R) - 2\Lambda \implies F_R = f_R, F_G = 0 \quad (4.5)$$

biçiminde olup aksiyon ve alan denklemleri

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_m \quad (4.6)$$

$$f_R R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} f(R) - \nabla_a \nabla_b f_R(R) + g_{ab} \square f_R(R) = \kappa^2 T_{ab}^m \quad (4.7)$$

biçimine indirgenir.

f(G)-gravite :

$$F(R, G) \equiv R + f(G) - 2\Lambda \implies F_R = 1, F_G = f_G \quad (4.8)$$

Bununla birlikte,

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [R + f(G)] + S_m \quad (4.9)$$

ve

$$\begin{aligned} & R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R - \frac{1}{2} g_{ab} f(G) \\ & - (-2RR_{ab} + 4R_{ac}R_b^c - 2R_a^{cde}R_{bcde} - 4R_{acdb}R^{cd})f_G \\ & - 2(\nabla_a \nabla_b f_G)R + 2g_{ab}R\square f_G - 4R_{ab}\square f_G \\ & + 4(\nabla_c \nabla_a f_G)R_b^c + 4(\nabla_c \nabla_b f_G)R_a^c \\ & - 4g_{ab}(\nabla_c \nabla_d f_G)R^{cd} - 4(\nabla_c \nabla_d f_G)R_{ab}^{cd} + \Lambda g_{ab} = \kappa^2 T_{ab}^m \end{aligned} \quad (4.10)$$

biçiminde olur. Buradan da özel hali olarak

$$f(G) \equiv \alpha G \quad (\alpha \text{ bir kupla j sabiti}) \quad (4.11)$$

alındığında bu takdirde $f_g(G) = 1$ olacağından, (4.10) bağıntısı

$$\begin{aligned} & R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R - \frac{1}{2} g_{ab} G \\ & - (-2RR_{ab} + 4R_{ac}R_b^c - 2R_a^{cde}R_{bcde} - 4R_{acdb}R^{cd}) + \Lambda g_{ab} = \kappa^2 T_{ab}^m \end{aligned} \quad (4.12)$$

denklemine indirgenir. Aslında, (4.9) aksiyonunda $f(G) \equiv G$ alındığı takdire bunun bir topolojik invaryant olduğu, yani diverjansının sıfır olduğu gösterilebilir; yani orjinal alan denklemlerine bu terimden dolayı bir katkı oluşmaz. Bu durumda (4.11) den orjinal Einstein

Alan Denklemlerinin düşünülmesi için

$$-2RR_{ab} + 4R_{ac}R_b^c - 2R_a^{cde}R_{bcde} - 4R_{acdb}R^{cd} = -\frac{1}{2}g_{ab}R \quad (4.13)$$

bağıntısı özdeş olarak sağlanmalıdır. Bunun (4.3) e taşınmasıyla, F(R,G)-gravitenin alan denklemleri

$$\begin{aligned} & F_R R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}F - \nabla_a \nabla_b F_R + g_{ab}\square F_R + \frac{1}{2}g_{ab}R F_G \\ & - 2(\nabla_a \nabla_b F_G)R + 2g_{ab}R\square F_G - 4R_{ab}\square F_G \\ & + 4(\nabla_c \nabla_a F_G)R_b^c + 4(\nabla_c \nabla_b F_G)R_a^c \\ & - 4g_{ab}(\nabla_c \nabla_d F_G)R^{cd} - 4(\nabla_c \nabla_d F_G)R_{ab}^{cd} + \Lambda g_{ab} = \kappa^2 T_{ab}^m \end{aligned} \quad (4.14)$$

biçiminde olur. Şimdi, bu denklemi, (1+3)-Kovaryant Ayrışım Yöntemine uyarlamak için orjinal Einstein Alan Denklemlerine benzetmek istediğimiz için sol tarafa $-\frac{1}{2}g_{ab}R F_R$ terimini ekleyip çıkaralım Yani,

$$\begin{aligned} & F_R(R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R) - \frac{1}{2}g_{ab}(F - R F_R) - \nabla_a \nabla_b F_R + g_{ab}\square F_R + \frac{1}{2}g_{ab}R F_G \\ & - 2(\nabla_a \nabla_b F_G)R + 2g_{ab}R\square F_G - 4R_{ab}\square F_G \\ & + 4(\nabla_c \nabla_a F_G)R_b^c + 4(\nabla_c \nabla_b F_G)R_a^c \\ & - 4g_{ab}(\nabla_c \nabla_d F_G)R^{cd} - 4(\nabla_c \nabla_d F_G)R_{ab}^{cd} + \Lambda g_{ab} = \kappa^2 T_{ab}^m \end{aligned} \quad (4.15)$$

veya yalnızca birinci terimi solda tutarak

$$\begin{aligned} F_R G_{ab} &= -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab}^m + \frac{1}{2}g_{ab}(F - R F_R) + \nabla_a \nabla_b F_R - g_{ab}\square F_R - \frac{1}{2}g_{ab}R F_G \\ &+ 2(\nabla_a \nabla_b F_G)R - 2g_{ab}R\square F_G + 4R_{ab}\square F_G \\ &- 4(\nabla_c \nabla_a F_G)R_b^c - 4(\nabla_c \nabla_b F_G)R_a^c \\ &+ 4g_{ab}(\nabla_c \nabla_d F_G)R^{cd} + 4(\nabla_c \nabla_d F_G)R_{ab}^{cd} \end{aligned} \quad (4.16)$$

bulunur. G_{ab} yi solda yalnız bırakmak için her iki tarafı F_R ye bölmektense, F(R,G) fonksiyonunu

$$F(R, G) \equiv \alpha \psi(G) \quad (4.17)$$

biçiminde seçelim. Burada α bir kuplaj sabitidir. Bu takdirde

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [R + \alpha \psi(R, G) - 2\Lambda] + S_m \quad (4.18)$$

bağıntısı, (4.16) seçimi altında

$$F_G = \alpha \Psi_G \quad (4.19)$$

olacağından (4.15) denklemi düzenlenirse

$$\begin{aligned} G_{ab} = & -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab}^m \\ & + \alpha \left(\frac{1}{2} g_{ab} \Psi - \frac{1}{2} g_{ab} G \Psi_G \right. \\ & + 2(\nabla_a \nabla_b \Psi_G) R - 2g_{ab} R \square \Psi_G + 4R_{ab} \square \Psi_G \\ & - 4(\nabla_c \nabla_a \Psi_G) R_b^c - 4(\nabla_c \nabla_b \Psi_G) R_a^c \\ & \left. + 4g_{ab} (\nabla_c \nabla_d \Psi_G) R^{cd} + 4(\nabla_c \nabla_d \Psi_G) R_{ab}^{cd} \right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

şeklini alır. F(G)-gravitenin alan denklemlerinin bu şekli; sıradan (normal) madde alanlarını gösteren T_{ab}^m enerji-momentum tansörüne ek olarak

$$\begin{aligned} T_{ab}^G = & \frac{\alpha}{\kappa^2} \left(\frac{1}{2} g_{ab} \Psi - \frac{1}{2} g_{ab} G \Psi_G \right. \\ & + 2(\nabla_a \nabla_b \Psi_G) R - 2g_{ab} R \square \Psi_G + 4R_{ab} \square \Psi_G \\ & - 4(\nabla_c \nabla_a \Psi_G) R_b^c - 4(\nabla_c \nabla_b \Psi_G) R_a^c \\ & \left. + 4g_{ab} (\nabla_c \nabla_d \Psi_G) R^{cd} + 4(\nabla_c \nabla_d \Psi_G) R_{ab}^{cd} \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

şeklinde gösterebilecek bir efektif enerji-momentum tansörü tanımlamaya olanak sağlamaktadır. Tamamen eğrilik terimlerinden oluşan bu tansör efektif eğrilik tansörü olarak tanımlanmaktadır. Bu tanımın anlamlı olduğunu görmek üzere, bunu kullanarak (4.19) u

$$G_{ab} = -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 (T_{ab}^m + T_{ab}^G) \quad (4.22)$$

şeklinde ve

$$T_{ab}^{et} = T_{ab}^m + T_{ab}^G \quad (4.23)$$

ile de bir efektif toplam (kısaca (et) ile gösterilecek) enerji-momentum tansörü tanımlayarak

$$G_{ab} = -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab}^{et} \quad (4.24)$$

şeklinde yazarız. Son denklem, şeklen Einstein Alan Denkleminde başka birşey değildir. Buradan, iki kere büzülmüş Bianchi Özdeşliklerinden

$$\nabla^a G_{ab} \equiv 0 \implies \nabla^a T_{ab}^{et} \equiv 0 \quad (4.25)$$

şeklinde olduğu gösterilebilir. Sıradan madde akışına bağlanan T_{ab}^m madde-enerji tansörünün, 4-lü bir u^a hız vektörüyle hareket edengözcüye göre akışkanın dinamik büyüklükleri cinsinden ifadesi

$$T_{ab}^m = \mu^m u_a u_b + p^m h_{ab} + 2q^m_{(a} u_{b)} + \pi_{ab}^m \quad (4.26)$$

biçiminde idi. Buradaki büyüklükler

$$\mu^m = T_{ab}^m u_a u_b \quad (4.27)$$

$$p^m = \frac{1}{3} h^{ab} T_{ab}^m \quad (4.28)$$

$$q_a^m = -h_a^b u^c T_{bc}^m \quad (4.29)$$

$$\pi_{ab}^m = h^c_{(a} h_{b)}^d T_{cd}^m - \frac{1}{3} h^{cd} T_{cd}^m h_{ab} \quad (4.30)$$

bağıntılarıyla tanımlanmıştır. Benzer şekilde efektif eğrilik akışkanına bağlanan enerji-momentum tansörü de

$$T_{ab}^G = \mu^G u_a u_b + p^G h_{ab} + 2q^G_{(a} u_{b)} + \pi_{ab}^G \quad (4.31)$$

olur ve söz konusu efektif dinamik değişkenler de

$$\mu^G = T_{ab}^G u_a u_b \quad (4.32)$$

$$p^G = \frac{1}{3} h^{ab} T_{ab}^G \quad (4.33)$$

$$q_a^G = -h_a^b u^c T_{bc}^G \quad (4.34)$$

$$\pi_{ab}^G = h^c{}_{(a} h_{b)}^d T_{cd}^G - \frac{1}{3} h^{cd} T_{cd}^G h_{ab} \quad (4.35)$$

biçiminde tanımlanır. Bununla birlikte, benzer bağıntıları bir de efektif $T_{ab}^{(et)}$ enerji-momentum tansörü için de yazarsak

$$T_{ab}^{(et)} = \mu^{(et)} u_a u_b + p^{(et)} h_{ab} + 2q_{(a}{}^{(et)} u_{b)} + \pi_{ab}^{(et)} \quad (4.36)$$

ve

$$\mu^{(et)} = T_{ab}^{(et)} u_a u_b \quad (4.37)$$

$$p^{(et)} = \frac{1}{3} h^{ab} T_{ab}^{(et)} \quad (4.38)$$

$$q_a^{(et)} = -h_a^b u^c T_{bc}^{(et)} \quad (4.39)$$

$$\pi_{ab}^{(et)} = h^c{}_{(a} h_{b)}^d T_{cd}^{(et)} - \frac{1}{3} h^{cd} T_{cd}^{(et)} h_{ab} \quad (4.40)$$

şeklinde olur. (4.22) bağıntısından dolayı, bu 3 tip dinamik değişkenlerinin birbirlerine

$$\mu^{(et)} = \mu^m + \mu^G \quad (4.41)$$

$$p^{(et)} = p^m + p^G \quad (4.42)$$

$$q_a^{(et)} = q_a^m + q_a^G \quad (4.43)$$

$$\pi_{ab}^{(et)} = \pi_{ab}^m + \pi_{ab}^G \quad (4.44)$$

bağıntılarıyla bağlı olduğu görülür [4, 7].

4.2. EFEKTİF ENERJİ - MOMENTUM TANSÖRÜNÜN DİNAMİK DEĞİŞKENLERİNİN HESABI

Şimdi, (4.20) 'yi kullanarak (4.32 - 4.35) bağıntılarıyla tanımlı efektif dinamik değişkenleri hesaplamak istiyoruz. Bunun için önce (4.20) yi daha sade bir biçimde yazalım.

$$M_{ab} \equiv \nabla_a \nabla_b \Psi_G \quad (4.45)$$

$$M \equiv \square \Psi_G \equiv \nabla^a \nabla_a \Psi_G \quad (4.46)$$

şeklinde olmak üzere

$$\begin{aligned}\Omega_{ab}\Psi_G &\equiv 2R\nabla_a\nabla_b\Psi_G - 2Rg_{ab}\square\Psi_G + 4R_{ab}\square\Psi_G \\ &\quad - 4R_b^c\nabla_c\nabla_a\Psi_G - 4R_a^c\nabla_c\nabla_b\Psi_G \\ &\quad + 4g_{ab}R^{cd}\nabla_c\nabla_d\Psi_G + 4R_a^{cd}\nabla_c\nabla_d\Psi_G\end{aligned}\quad (4.47)$$

$$\begin{aligned}&= 2RM_{ab} - 2RMg_{ab} + 4MR_{ab} - 4R_b^cM_{ca} - R_a^cM_{cb} \\ &\quad + 4g_{ab}R^{cd}M_{cd} + R_a^{cd}M_{cd}\end{aligned}\quad (4.48)$$

gibi iki kısaltma tanımlayalım. Bununla birlikte (4.20) bağıntısı

$$T_{ab}^G = \frac{\alpha}{\kappa^2} \left\{ \frac{1}{2}g_{ab}\Psi(G) - \frac{1}{2}g_{ab}G\Psi_G + \Omega_{ab}\Psi_G \right\} \quad (4.49)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi, (4.23) denklemini ele alalım ve bunu

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab}^{(et)} \quad (4.50)$$

biçiminde yazalım.

$$T^{(et)} = g^{ab} T_{ab}^{(et)} \quad (4.51)$$

biçiminde iz denklemi

$$-R = -4\Lambda + \kappa^2 T^{(et)} \quad (4.52)$$

olacağından, bu (4.49) a yerleştirilirse

$$R_{ab} = \Lambda g_{ab} + \kappa^2 \left(T_{ab}^{(et)} - \frac{1}{2}g_{ab} T^{(et)} \right) \quad (4.53)$$

bulunur. Eşitliğin sağ yanı için, $g_{ab} = h_{ab} - u_a u_b$ izdüşüm bağıntısı ve (4.36) ile (4.51) kullanırsa

$$\begin{aligned}R_{ab} &= \left[\frac{\kappa^2}{2}(\mu^{(et)} + 3p^{(et)}) - \Lambda \right] u_a u_b + \left[\frac{\kappa^2}{2}(\mu^{(et)} - p^{(et)}) + \Lambda \right] h_{ab} \\ &\quad + 2\kappa^2 q_{(a}^{(et)} u_{b)} + \kappa^2 \pi_{ab}^{(et)}\end{aligned}\quad (4.54)$$

biçiminde bulunur. Bu bağıntı, R_{ab} nin açılımının

$$\Delta = \frac{\kappa^2}{2} \left(\mu^{(et)} + 3p^{(et)} \right) - \Lambda \quad (4.55)$$

$$\Xi = \frac{\kappa^2}{2} \left(\mu^{(et)} - p^{(et)} \right) + \Lambda \quad (4.56)$$

$$\gamma_a = \kappa^2 q_a^{(et)} \quad (4.57)$$

$$\Sigma_{ab} = \kappa^2 \pi_{ab}^{(et)} \quad (4.58)$$

bağıntılarıyla tanımlı dört parametre cinsinden

$$R_{ab} = \Delta u_a u_b + \Xi h_{ab} + 2\gamma_{(a} u_{b)} + \Sigma_{ab} \quad (4.59)$$

biçiminde olacağını açıkça söylemektedir. Bunun izi ise

$$R = \Delta + 3\Xi = \kappa^2 \left(\mu^{(et)} - 3p^{(et)} \right) + 4\Lambda \quad (4.60)$$

biçiminde olur. Şimdi (4.32 - 4.35) bağıntılarıyla açıklanan efektif dinamik değişkenlerin hesabına dönebiliriz. Hesapların çok uzun olmasından dolayı, ayrıntıları göstermek yerine önemli olan bazı bağıntıları aşağıda liste olarak vereceğiz. (4.59) dan elde edilebilecek bağıntılar şunlardır:

$$R_{ab} u^a u^b = \Delta = \frac{1}{2} \kappa^2 \left(\mu^{(et)} + 3p^{(et)} \right) \quad (4.61)$$

$$R_{ab} h_c^a h_d^b = \Xi h_{cd} + \Sigma_{cd} \Delta = \frac{1}{2} \kappa^2 \left(\mu^{(et)} - p^{(et)} \right) h_{cd} + \kappa^2 \pi_{cd}^{(et)} \quad (4.62)$$

$$R_{ab} h_c^a u^b = -\gamma_c = \kappa^2 q_c^{(et)} \quad (4.63)$$

$$R_{ab} h^{ab} = 3\Xi = \frac{3}{2} \kappa^2 \left(\mu^{(et)} - p^{(et)} \right) \quad (4.64)$$

$$R_{ab} u^a = -\Delta u_b - \gamma_b \quad (4.65)$$

$$R_{ac} u^a R_b^c u^b = -\Delta^2 + \gamma_c \gamma^c \quad (4.66)$$

Bununla birlikte, Weyl Tansörünün

$$R_{acdb} = C_{acdb} + \frac{1}{2} \left(R_{ad} g_{cd} - R_{ab} g_{cb} \right) - \frac{1}{2} \left(R_{cd} g_{ab} - R_{cb} g_{ad} \right) - \frac{R}{6} \left(R_{ad} g_{cb} - R_{ab} g_{cd} \right) \quad (4.67)$$

tanım bağıntısı ise biçimindeki bağıntılara yol açar.

$$R_{acdb} u^a u^b = -E_{cd} - \frac{1}{3} \Delta h_{cd} + \frac{1}{2} \Sigma_{cd} \quad (4.68)$$

$$R_{acdb} u^a u^b = -E_{cd} \Sigma^{cd} - \Delta \Xi + \frac{1}{2} \Sigma_{cd} \Sigma^{cd} \quad (4.69)$$

Gauss-Bonnet teriminin ifadesi için ise, uzun hesaplardan sonra

$$\begin{aligned} G &= R^2 - 4R_{ab} R^{ab} + R_{abcd} R^{abcd} \\ &= -\frac{4}{3} \Delta^2 - 4\Delta \Xi + 4\gamma_a \gamma^a - 2\Sigma_{ab} \Sigma^{ab} + C^2 \end{aligned} \quad (4.70)$$

biçiminde bulunur. Burada C^2 , Weyl tansörünün karesi olup yine uzun bir hesaptan sonra

$$C^2 = C_{abcd} C^{abcd} = 8 \left(E_{ab} E^{ab} + H_{ab} H^{ab} \right) \quad (4.71)$$

ile verildiği gösterilebilir. Sonuç olarak, efektif eğrilik akışkanına bağlanan efektif dinamik değişkenlerin ifadeleri şunlardır:

$$\begin{aligned} \mu^G &= T_{ab}^G u_a u_b \\ &= \frac{\alpha}{\kappa^2} \left[-\frac{1}{2} \Psi G + \frac{1}{2} G \Psi_G \right. \\ &\quad + \Psi_{GG} \left[\frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) (D^c D_c G - \theta \dot{G}) - 4 \left(E^{cd} + \frac{1}{2} \Sigma^{cd} \right) (D_c D_d G - \sigma_{cd} \dot{G}) \right] \\ &\quad \left. + \Psi_{GGG} \left[\frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) D^c G D_c G - 4 \left(E^{cd} + \frac{1}{2} \Sigma^{cd} \right) D_c G D_d G \right] \right] \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned}
p^G &= \frac{1}{3} T_{ab}^G h^{ab} \\
&= \frac{\alpha}{\kappa^2} \left[\frac{1}{2} \Psi G - \frac{1}{2} G \Psi_G \right. \\
&\quad + \Psi_{GG} \left[\frac{8}{9} \Delta (D^a D_a G - \theta \dot{G}) \frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) (\ddot{G} - \dot{u}^a D_a G) \right. \\
&\quad \left. + \frac{8}{3} \gamma^c \left(D_c \dot{G} - v_c^f D_f G \right) - \frac{4}{3} \left(E^{cd} - \frac{1}{2} \Sigma^{cd} \right) (D_c D_d G - \sigma_{cd} \dot{G}) \right] \\
&\quad + \Psi_{GGG} \left[\frac{8}{9} \Delta D^a G D_a G + \frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) \dot{G}^2 + \frac{8}{3} \dot{G} \gamma^c D^c G \right. \\
&\quad \left. - \frac{4}{3} \left(E^{cd} - \frac{1}{2} \Sigma^{cd} \right) D_c G D^c G \right]
\end{aligned} \tag{4.73}$$

$$\begin{aligned}
q_a^G &= -T_{bc}^G h_a^b u^c \\
&= \frac{\alpha}{\kappa^2} \left[\Psi_{GG} \left[-\frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) D_a \dot{G} + 2(\Delta - \Xi) v_a^f D_f G \right. \right. \\
&\quad + 2\gamma_a \left(D^c D_c G - \theta \dot{G} \right) - 2\gamma^f \left(D_f D_a G - v_{fa} \dot{G} \right) \\
&\quad \left. + 4 \left(E_a^f + \frac{1}{2} \Sigma_a^f \right) \left(D_f \dot{G} - v_f^d D_d G \right) - 4\eta_a^{eg} H_g^f \left(D_e D_f G - v_e f \dot{G} \right) \right] \\
&\quad + \Psi_{GGG} \left[-\frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) \dot{G} D_a G + 2\gamma_a D^c G D_c G - 2\gamma^f D_f G D_a G \right. \\
&\quad \left. + 4 \left(E_a^f + \frac{1}{2} \Sigma_a^f \right) \dot{G} D_f G - 4\eta_a^{eg} H_g^f D_e G D_f G \right]
\end{aligned} \tag{4.74}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{ab}^G &= T_{(ab)} - \frac{1}{3} h_{cd} T^{cd} h_{ab} \\
&= \frac{\alpha}{\kappa^2} \left[\Psi_{GG} \left[-\frac{4}{3} \Delta(D_a D_b G - v_{ab} \dot{G}) - 2(\gamma_a D_b \dot{G} + \gamma_b D_a \dot{G}) + 2(\gamma_a v_b^c + \gamma_b v_a^c) D_c G \right. \right. \\
&\quad + 4(\dot{u}^c D_c G - \ddot{G}) \left(E_{ab} + \frac{1}{2} \Sigma_{ab} \right) - 4(D^c D_c G - \theta \dot{G}) \left(E_{ab} - \frac{1}{2} \Sigma_{ab} \right) \\
&\quad + 4 \left(E_a^c - \frac{1}{2} \Sigma_a^c \right) (D_b D_c G - v_{bc} \dot{G}) + 4 \left(E_b^c - \frac{1}{2} \Sigma_b^c \right) (D_c D_a G - v_{ca} \dot{G}) \\
&\quad + 4(\eta_a^{cd} H_{db} + \eta_b^{cd} H_{ad}) (D_c \dot{G} - v_c^f D_d G) \\
&\quad \left. + \left(\frac{4}{9} \Delta(D^c D_c G - \theta \dot{G}) + \frac{4}{3} \gamma^c (D_c \dot{G} + v_c^d D_d \dot{G}) - \frac{8}{3} \left(E^{cd} - \frac{1}{2} \Sigma^{cd} \right) (D_c D_d G - \sigma_{cd} \dot{G}) \right) h_{ab} \right] \\
&\quad + \Psi_{GGG} \left[-\frac{4}{3} \Delta D_a G D_b G - 2 \dot{G} (\gamma_a D_b G + \gamma_b D_a G) \right. \\
&\quad - 4 \left(E_{ab} - \frac{1}{2} \Sigma_{ab} \right) (D^c G D_c G - \dot{G}^2) + 4 \left(E_a^c - \frac{1}{2} \Sigma_a^c \right) D_b G D_c G \\
&\quad + 4 \left(E_b^c - \frac{1}{2} \Sigma_b^c \right) D_a G D_c G + 4 \dot{G} (\eta_a^{cd} H_{db} + \eta_b^{cd} H_{ad}) D_c G \\
&\quad \left. + \left(\frac{4}{9} \Delta D^c G D_c G + \frac{4}{3} \dot{G} \gamma^c D_c G - \frac{8}{3} \left(E^{cd} - \frac{1}{2} \Sigma^{cd} \right) D_c G D_d G \right) h_{ab} \right]
\end{aligned} \tag{4.75}$$

Yukarıdaki ifadelerde

$$\Psi_G = \frac{\nabla \Psi}{\nabla G}, \quad \Psi_{GG} = \frac{\nabla^2 \Psi}{\nabla G^2}, \quad \Psi_{GGG} = \frac{\nabla^3 \Psi}{\nabla G^3} \tag{4.76}$$

ile G değişkenine göre kısmi türevler gösterilmektedir. "Nokta" lar ise u^a doğrultusundaki kovaryant türevi göstermekte olup

$$\dot{G} = u^a \nabla_a G, \quad \ddot{G} = (\dot{G}) \tag{4.77}$$

dir [4,7].

4.3. F(G)-GRAVİTE TEORİSİNDE EVRİM VE BAĞ DENKLEMLERİNİN OLUŞTURULMASI

1+3 kovaryant ayrışım yöntemi, bir akışkanın u^a 4-lü hız vektörüne göre kinematik ve dinamik değişkenleri arasındaki ilişkiyi geometrik olarak ifade etmeye dayanır. Akışkanın kinematik büyüklükleri yalnızca geometri aracılığıyla tanımlanırken, dinamik değişkenlerin formalizme dahil edilmesi bir gravitasyon teorisi ile olur. GRT’de bu; T_{ab}^m , sıradan (normal) maddenin enerji-momentum tansörü olmak üzere

$$G_{ab} = -\lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab}^m \Leftrightarrow R_{ab} = \Lambda g_{ab} + \kappa^2 \left(T_{ab}^m - \frac{1}{2} g_{ab} T^m \right) \quad (4.78)$$

biçimindeki EAD ile ifade ediliyordu. Bu, R_{ab} yi, madde akışkanının dinamik büyüklüklerine bağlamak için bir cebirsel yerine yerleştirme rolü görüyordu.

F(G)-gravite ’de, (4.23) de yazıldığı gibi

$$G_{ab} = -\lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab}^{(et)} \Leftrightarrow R_{ab} = \Lambda g_{ab} + \kappa^2 \left(T_{ab}^{(et)} - \frac{1}{2} g_{ab} T^{(et)} \right) \quad (4.79)$$

için aynı benzer durum söz konusudur. Ancak, bu sefer sıradan madde değişkenleri yerine

$$T_{ab}^{(et)} = T_{ab}^m + T_{ab}^G \quad (4.80)$$

olmak üzere efektif toplam dinamik değişkenler bulunmaktadır. O halde, evrim ve bağ denklemlerini F(G)-graviteye genelleştirmek için Rölativist Kozmolojinin evrim ve bağ denklemlerinde μ, p, q_a ve π_{ab} yerine (4.41 - 4.44) ve (4.72-4.73) ile tanımlı $\mu^{(et)}, p^{(et)}, q_a^{(et)}$ ve $\pi_{ab}^{(et)}$ ifadelerini yazmak yeterli olur. Fakat, F(G)-gravite için

$$\nabla^a T_{ab}^{efektif toplam} = 0 \quad (4.81)$$

için kaynaklanan iki denkleme ek olarak

$$\nabla^a T_{ab}^m = 0 \text{ (veya } \nabla^a T_{ab}^G = 0) \quad (4.82)$$

dan kaynaklanan iki denklem daha yazmak gerekecektir.

Bu söylenenler ışığında F(G)-graviteye uyarlanmış evrim ve bağ denklemleri, uygun sıralama ve adlandırmayla şunlar olacaktır.

Evrin (Yayılım) Denklemleri

Raychaudhuri Denklemleri

$$\dot{\theta} - D_a \dot{u}^a = -\frac{1}{3} \theta^2 + \dot{u}_a \dot{u}^a - 2\sigma^2 + 2\omega^2 - \frac{1}{2}(\mu^{(et)} + 3p^{(et)}) + \Lambda \quad (4.83)$$

Girdap Yayılım Denklemleri

$$\dot{\omega}^a - \frac{1}{2} \eta^{abc} D_b \dot{u}_c = -\frac{2}{3} \theta \omega^a + \sigma_b^a \omega^b + u^a \dot{u}_b \omega^b \quad (4.84)$$

Makaslama Yayılım Denklemleri

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ab} - (u_a \sigma_{bc} + u_b \sigma_{ac}) \dot{u}^c - \frac{1}{2} (D_a \dot{u}_b + D_b \dot{u}_a) + \sigma_{ac} \sigma_b^c + \frac{2}{3} \theta \sigma_{ab} - \dot{u}_a \dot{u}_b \\ + \omega_a \omega_b + \frac{1}{3} (D_c \dot{u}^c + \dot{u}_c \dot{u}^c - 2\sigma^2 - \omega^2) h_{ab} = -(E_{ab} - \frac{1}{2} \pi_{ab}^{(et)}) \end{aligned} \quad (4.85)$$

Gravitasyonel - Elektrik Yayılım Denklemleri

$$\begin{aligned} (\dot{E}_{ab} + \frac{1}{2} \dot{\pi}_{ab}^{(et)}) - (E_{ae} + \frac{1}{2} \pi_{ae}^{(et)}) \dot{u}^e u_b - (E_{be} + \frac{1}{2} \pi_{be}^{(et)}) \dot{u}^e u_a \\ - \frac{1}{2} (\eta_{aef} D^e H_b^f + \eta_{bef} D^e H_a^f) + \frac{1}{4} (D_a q_b^{(et)} + D_b q_a^{(et)}) - \frac{1}{6} h_{ab} D^e q_e^{(et)} \\ = -\frac{1}{2} (\mu^{(et)} + p^{(et)}) \sigma_{ab} - \frac{1}{2} (q_a^{(et)} \dot{u}_b + q_b^{(et)} \dot{u}_a) + \frac{1}{3} h_{ab} q_e^{(et)} \dot{u}^e - \theta [E_{ab} + \frac{1}{6} \pi_{ab}^{(et)}] \\ + \frac{3}{2} \sigma_a^e [E_{be} - \frac{1}{6} \pi_{be}^{(et)}] + \frac{3}{2} \sigma_b^e (E_{ae} - \frac{1}{6} \pi_{ae}^{(et)}) - h_{ab} \sigma^{ef} (E_{fe} - \frac{1}{6} \pi_{fe}^{(et)}) \\ - \frac{1}{2} \eta_{aef} [(E_b^e + \frac{1}{2} \pi_b^{e(et)}) \omega^f + 2H_b^e \dot{u}^f] \\ - \frac{1}{2} \eta_{bef} [(E_a^e + \frac{1}{2} \pi_a^{e(et)}) \omega^f + 2H_a^e \dot{u}^f] \end{aligned} \quad (4.86)$$

Gravite - Magnetik Yayılım Denklemi

$$\begin{aligned}
\dot{H}_{ab} - (u_a H_{bc} + u_b H_{ac}) \dot{u}^c + \frac{1}{2} \eta_{aef} D^e (E_b^f - \frac{1}{2} \pi_b^{f(et)}) + \frac{1}{2} \eta_{bef} D^e (E_a^f - \frac{1}{2} \pi_a^{f(et)}) \\
= -\theta H_{ab} + \frac{3}{2} (H_{ac} \sigma_b^c + H_{bc} \sigma_a^c) \\
- H_{ef} \sigma^{ef} h_{ab} + \frac{3}{4} (\omega_a q_b^{(et)} + \omega_b q_a^{(et)}) - \frac{1}{2} \omega^c q_c^{(et)} h_{ab} \\
+ (\eta_{aef} E_b^e + \eta_{bef} E_a^e) \dot{u}^f \\
- \frac{1}{2} (\eta_{aef} H_b^e + \eta_{bef} H_a^e) \omega^f \\
+ \frac{1}{4} (\eta_{ae}{}^f \sigma_b^e + \eta_{be}{}^f \sigma_a^e) q_f^{(et)}
\end{aligned} \tag{4.87}$$

Efektif Toplam Madde Korunum Denklemi

$$\dot{\mu}^{(et)} + \nabla^a q_a^{(et)} = (\mu^{(et)} + p^{(et)}) \theta - 2 q_a^{(et)} \dot{u}^a - \pi_{ab}^{(et)} \sigma^{ab} \tag{4.88}$$

Efektif Toplam Momentum Korunum Denklemi

$$\begin{aligned}
\dot{q}_a^{(et)} + D_a p^{(et)} + D^b \pi_{ab}^{(et)} = \\
- (\mu^{(et)} + p^{(et)}) \dot{u}_a - \sigma_a^b q_b^{(et)} - \frac{4}{3} \theta q_a^{(et)} + u_a \dot{u}^b q_b^{(et)} \\
- \pi_{ab} \dot{u}^b + \eta^{abc} q_b^{(et)} \omega_c
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Bağ Denklemleri

Makaslama Bağ Denklemi

$$0 = (C_1)_a = D_b \sigma_a^b - \frac{2}{3} D_a \theta + \eta_a^{bc} D_b \omega_c + 2 \eta_a^{bc} \dot{u}_b \omega_c + q_a^{(et)} \tag{4.90}$$

Girdap Bağ Denklemi

$$0 = (C_2) = D_a \omega^a - \dot{u}_a \omega^a \tag{4.91}$$

Gravito-Magnetik Bağ Denklemleri

$$0 = (C_3)_{ab} = H_{ab} + (\omega_a \dot{u}_b + \omega_b \dot{u}_a) - \omega^e \dot{u}_e h_{ab} - \frac{1}{2} (\eta_{aef} D^e \sigma_b^f + \eta_{bef} D^e \sigma_a^f) + \frac{1}{2} (D_a \omega_b + D_b \omega_a) \quad (4.92)$$

Gravito-Elektrik Diverjans

$$0 = (C_4)_a = D_b (E_a^b + \frac{1}{2} \pi_a^{b(et)}) - \frac{1}{3} D_a \mu^{(et)} - \frac{1}{2} \sigma_a^b q_b^{(et)} + \frac{1}{3} \theta q_a^{(et)} - \eta_{ae}^f (\sigma^{eb} H_{fb} - \frac{3}{2} \omega^e q^{f(et)}) - 3 H_a^b \omega_b \quad (4.93)$$

Gravito-Magnetik Diverjans

$$0 = (C_5)_a = D_b H_a^b + \frac{1}{2} \eta_{ae}^f D^e q_f^{(et)} + (\mu^{(et)} + p^{(et)}) \omega_a + 3 (E_{ab} - \frac{1}{6} \pi_{ab}^{(et)}) \omega^b + \eta_{ae}^f \sigma^{eb} (E_{fb} + \frac{1}{2} \pi_{fb}^{(et)}) \quad (4.94)$$

Yukarıda yazılan evrim ve bağ denklemleri standart rölativist kozmolojideki denklemlerle aynı formda olmasına karşın; F(G)-Gravite teorisi, T_{ab}^m ve T_{ab}^G nin korunum denklemlerinden, iki takım denklem daha vermektedir. Bunlar, $\nabla^a T_{ab}^m = 0$ dan elde edilen:

Sıradan (normal) Madde Korunum Denklemleri

$$\dot{\mu}^m = -D_a q^{am} - (\mu^m + p^m) \theta - 2 q^{am} \dot{u}_a - \pi^{abm} \sigma_{ab} \quad (4.95)$$

ve

Sıradan (normal) Madde Momentum Korunum Denklemleri

$$\dot{q}_a^m = -D_a p^m - D^b \pi_{ab}^m - (\mu^m + p^m) \dot{u}_a - \sigma_a^b q_b^m - \frac{4}{3} \theta q_a^m + u_a \dot{u}^b q_b^m - \pi_{ab}^m \dot{u}^b + \eta_a^{bc} q_b^m \omega_c \quad (4.96)$$

dir. $\nabla^a T_{ab}^G = 0$ dan elde edilenler ise:

Efektif Eğrilik Madde Korunum Denklemleri

$$\dot{\mu}^G = -D_a q^{aG} - (\mu^G + p^G) \theta - 2 q^{aG} \dot{u}_a - \pi^{abG} \sigma_{ab} \quad (4.97)$$

ve **Efektif Eğrilik Momentum Korunum Denklemi**

$$\begin{aligned} \dot{q}_a^G = & -D_a p^G - D^b \pi_{ab}^G - (\mu^G + p^G) \dot{u}_a - \sigma_a^b q_b^G \\ & - \frac{4}{3} \theta q_a^G + u_a \dot{u}^b q_b^G - \pi_{ab}^G \dot{u}^b + \eta_a^{bc} q_b^G \omega_c \end{aligned} \quad (4.98)$$

dir. Burada, bu son iki denklemin (4.82) den dolayı diğer dört korunum denkleminin bağımsız olmadığına dikkat çekelim [4,7].

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

1+3 uzay-zaman ayrışımının GRT’de ilk uygulayan Hawking olmuş ve Ellis bu Formalizmi zarif ve anlaşılabilir toparlayıcı bir sunuşunu standart kozmoloji çerçevesinde evrim ve bağ denklemleri elde edilmesine ön ayak olmuştur. 1+3 ayrışım yöntemi gözlemciden bağımsız özellik taşıdığından gravitasyon dalgaları, metrik pertürbasyonları gibi pek çok alanda uygulama olanağı bulmuş güçlü bir yöntemdir ve günümüzde de yoğun bir biçimde kullanılmaktadır.

1+3 uzay-zaman ayrıştırması işlemi doğrudan doğruya Einstein’ın alan denklemlerine (EAD) uygulamak yeni bilgiye yol açmamaktadır. Fakat yöntem esas olarak, Riemann Eğrilik Tansöründen bilgi türetilmesini amaçlamaktadır. Alan denklemleri ise bu geometrik çerçeveye, yerel kaynakların dinamik katkısını oturtmak için kullanılmaktadır: Ricci Tansörü yerine, alan denklemlerinden , doğrudan doğruya sıradan maddeye ele almaktadır.. Buna karşılık, $f(G)$ gravite teorisinde böyle bir bağlanma ancak efektif bir akışkan tasavvur edildiğinde mümkün olabilmektedir. Bunun sonucunda, efektif akışkanın doğal olarak efektif dinamik büyüklükleri yalnızca sıradan maddenin dinamik büyüklüklerine değil, fakat aynı zamanda kinematik büyüklükler ile geometriye de bağlı olmaktadır. Bu durumun fiziksel bir yorumu tartışmış olmakla birlikte kullanılan yaklaşım amaca uygun sonuç vermektedir.

Biz bu tezimizle $f(G)$ -Gravite’yi Standart Kozmolojinin 1+3 Kovaryant Ayrışım Yöntemini bu Yüksek Mertebeden Eğrilikli Gravitasyon Teorisi çerçevesinde ele aldık. Başka bir deyişle, Standart Kozmolojinin evrim ve bağ denklemlerini $f(G)$ - kozmolojisine genelleştirdik. Literatürde, alan denklemlerini çözmek için genellikle metrik yaklaşım kullanılmaktadır. 1+3 Kovaryant Ayrışım Yöntemi ise, hem koordinat sisteminden (yani gözlemciden) bağımsız, hem de evrenin madde-enerji içeriğinin bir akışkan gibi tasvir edilmesi durumunda buna bağlanan kinematik ve dinamik büyüklükler arasındaki ilişkiyi daha berrak yansıtması bakımından metrik yaklaşıma göre üstünlükler göstermektedir. Bizim tezimizde, Standart Einstein denklemlerine, aksiyondaki $F(G)$ fonksiyonundan gelen ekstra geometrik kökenli terimleri “eğrilik akışkanı” gözüyle bakabilecek bir efektif

akışkanın enerji momentum tansörü olarak yorumlanmasına dayanmaktadır. Tezimizde, bu “eğrilik akışkanına” bağlanan efektif: madde-enerji, basınç, ısı akısı ve eşyönsüz basınç tansörünün ifadelerinin çıkarımlarını ayrıntılı olarak sunduk. Bir diğer amacımız da elde edilen bu kovaryant evrim ve bağ denklemlerinin kullanımına uyan uygulamaları ve tetrad formalizmlili olan bölümü daha sonraki çalışmamızda ele almaktır.



KAYNAKLAR

- [1] Sengü, H., 2011, *Genel Rölativitenin Kuruluşu*
- [2] Özemre, A.Y. 1982, *Gravitasyonun Rölativist Teorileri*, İstanbul Üniversitesi, İstanbul Üniversitesi Yayınları 2952, Cild: 7, Sayı: 168
- [3] Mohajan, H.K., 2013, *Friedmann Robertson-Walker (FRW) Models in Cosmology*, Journal of Environmental Treatment Techniques, Volume 1, Issue 3, Pages: 158-164
- [4] Güdekli, E., 2004, *Bianchi Tip Çözümlerde Ufuk - Eşyönlüleşme Meseleleri*, Doktora Tezi, İstanbul Üniversitesi
- [5] Mutuş, H., 1979, *Mach İlkesi ve Teorik Gelişmeleri*, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi
- [6] Rasouli, S.M.M., Farhoudi, M., Moniz, P.V., 2014, *Modified Brans - Dicke Theory in Arbitrary Dimensions*, Arxiv: 1405.0229v2[gr-gc]
- [7] Erman, M., 2013, *F(R,G) Kozmolojilerde Evrim ve Bağ Denklemleri*, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi
- [8] Sebastian, L., 2012, *General Aspects of Modified Theories of Gravity*, PHD Thesis, Universita Degli Studi di Trento
- [9] Bamba, K., Odintsov, S. , Sebastiani, L., Zerbini, S., 2012, *Finite Time Future Singularities in Modified Gauss-Bonnet and F(R,G) Gravity and Singularity Avoidance*, Arxiv: 0911.4390 v2[hep/th]
- [10] Ellis, G., 1971, *Relativistic Cosmology, General Relativity and Cosmology* , Proceedings of the International School of Physics, "Enrico Fermi", Course XLVII, Academic Press, 104
- [11] Van Elst, H., 1996, *Extensions and Applications of 1+3 Decomposition Methods in General Relativistic Cosmological Modelling*, Doktora Tezi, Londra Üniversitesi
- [12] Ellis, G., 1973, *Relativistic Cosmology* , Cargese Lectures in Physics, Gordon and Breach, Vol.6, Ed: E.Schatzman, New York, 6.
- [13] Bishop, R.L., 2013, *Riemann Geometry*, Arxiv: 1303.5290v2
- [14] Petersen, P., 2016, *Riemann Geometry*, Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London , ISBN: 978-3-319-26652-7
- [15] Sofuoğlu, D., 2014, *Yüksek Mertebeden Eğrilikli Gravitasyonda Makaslamasız Kozmik Akışkan İddiası*, Doktora Tezi, İstanbul Üniversitesi

- [16] Babak, S.V., Grishchuk, L.P., 1999, *The Energy - Momentum Tensor for the Gravitational Field*, Arxiv: gr-gc/9907027v2
- [17] Özemre, A.Y. 1984, *Kozmolojiye Giriş*, İstanbul Üniversitesi, İstanbul Üniversitesi Yayınları
- [18] Ellis, G.F.R., Van Elst, H. , 1998, *Cosmological Models*, Arxiv: 9812046-gr-gc
- [19] Açan Yıldız, D.G., 2021, *Dinamik Sistemler Teorisinin $F(R)$ Gravitasyondaki Uygulamaları*, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi
- [20] Cam, D., 2021, *Genel Rölativite Teorisine Karanlık Madde ve Karanlık Enerjiye Alternatif Olacak Şekilde Kızılötesi Düzeltmeler*, Doktora Tezi, İstanbul Üniversitesi



EKLER

EK 1. İşaret ve indis kabulleri, yazılışlar ve kısa bilgiler

c ışık hızı ve G gravitasyon sabiti olmak üzere $8\pi G = c = 1$ geometrileştirilmiş birim sistemi kullanılmıştır. Ayrıca, indisler için notasyon şu şekilde ifade edilmiştir: Latin alfabesinin ilk yarısı (a,b,c,= 0,1,2,3) genel bir tabanda uzay - zaman indisleri; ikinci yarısı ise (i,j,k,...= 0,1,2,3) koordinat tabanında uzay - zaman indisleri olarak gösterilmiştir. Öte yandan Grek alfabesinin ilk yarısı ($\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1,2,3$) genel tabanda uzay indisleri; diğer yarısı ise ($\mu, \nu, \rho, \dots = 1,2,3$) koordinat tabanında uzay indisleri olarak gösterilmiştir.

4-boyutlu uzay-zaman metriğinin ifadeleri, genel olarak indirgenebileceği Lorentzsel şekli belirler. Buna göre $e = \pm 1$ olmak üzere, metriğin ifadesi $(-e, e, e, e)$ veya işareti $= 2e$ şeklinde ifade edilir. Burada $e = +1$ olarak alınmıştır. Bu şekilde metrik $g_{ab} \equiv \eta_{ab} = (-1, 1, 1, 1)$ işareti $= +2$ olur ve dolayısıyla $\det g_{ab} \equiv g < 0$ olur. Buna göre bir V vektörü, normunun karesinin -1, +1 ve 0 olmasına göre şu şekilde adlandırılır:

$V^a V_a = -1$ zaman cinsinden birim vektör

$V^a V_a = 1$ uzay cinsinden birim vektör

$V^a V_a = 0$ ışık cinsinden vektör (sıfır vektör)

Γ_{bc}^a Bağlantı katsayıları ve R_{bcd}^a Riemann Eğrilik Tansörü metriğinin ifade şekline bağlı değildir.

Yuvarlak parantez simetrileştirme işlemini; köşeli parantez is antisimetrikleştirme anlamına gelmektedir. Simetri işlemlerine katılmayan indisler dikey çizgiler ile ayrılmıştır.

$$\begin{aligned}
 T_{<ab>} &= \frac{1}{2}(T_{ab} + T_{ba}) \\
 T_{[ab]} &= \frac{1}{2}(T_{ab} - T_{ba}) \\
 T_{[abc]} &= \frac{1}{3!}(T_{abc} + T_{bca} + T_{cab} - T_{bac} - T_{acb} - T_{cba}) \\
 T_{[a|bc|d]} &= \frac{1}{2}(T_{abcd} - T_{dbca})
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Eğer $T_{[ab]} = 0$ ise T_{ab} ye simetrik tansör denir: $T_{ab} = T_{ba}$

Eğer $T_{<ab>} = 0$ ise T_{ab} ye antisimetrik tansör denir: $T_{ab} = -T_{ba}$

Eğer $T_{[a|b|c]} = 0$ ise T_{abc} ye a ve c indislerine göre antisimetrik tansör denir: $T_{abc} = -T_{cba}$

Eğer $T_{[abc]} = 0$ ise T_{abc} ye tamamen antisimetrik tansör denir: $T_{abc} = -T_{bac} = -T_{cba} = -T_{acb}$

Permütasyon Tansörleri 4-boyutlu genelleştirilmiş Kronecker deltası

$$\delta_{efgh}^{abcd} = \begin{cases} +1 & \text{eğer üst indis dizilişi alt indis dizilişinin çift permütasyonu ise} \\ -1 & \text{eğer üst indis dizilişi alt indis dizilişinin tek permütasyonu ise} \\ 0 & \text{diğer tüm durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır ve sembolik olarak 1-boyutlu Kronecker deltaları cinsinden

$$\delta_{efgh}^{abcd} = \begin{vmatrix} \delta_e^a & \delta_f^a & \delta_g^a & \delta_h^a \\ \delta_e^b & \delta_f^b & \delta_g^b & \delta_h^b \\ \delta_e^c & \delta_f^c & \delta_g^c & \delta_h^c \\ \delta_e^d & \delta_f^d & \delta_g^d & \delta_h^d \end{vmatrix} = \frac{1}{4!} \delta_e^{[a} \delta_f^b \delta_g^c \delta_h^{d]} = \frac{1}{4!} \delta_{[e}^a \delta_f^b \delta_g^c \delta_h^{d]} \quad (1.2)$$

şeklinde gösterilir. Üst veya alt dizilimlerin sabit olması durumunda

$$\delta_{0123}^{abcd} \equiv \epsilon_{0123}^{abcd} \equiv \epsilon^{abcd}, \quad \delta_{0123}^{abcd} \equiv \epsilon_{0123}^{abcd} \equiv \epsilon_{abcd} \quad (1.3)$$

şeklinde ifade edilir ve buna 4-boyutlu Levi-Civita sembolü veya 4 boyutlu psödo - tansör denir. Bu yüzden

$$\epsilon^{abcd} = \frac{1}{4!} \delta_0^{[a} \delta_1^b \delta_2^c \delta_3^{d]} = \begin{vmatrix} \delta_0^a & \delta_1^a & \delta_2^a & \delta_3^a \\ \delta_0^b & \delta_1^b & \delta_2^b & \delta_3^b \\ \delta_0^c & \delta_1^c & \delta_2^c & \delta_3^c \\ \delta_0^d & \delta_1^d & \delta_2^d & \delta_3^d \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

şeklinde ifade edilir. Bu büyüklükten başlayarak, tansör özelliği gösteren ve

$$\eta^{abcd} = (-g)^{-\frac{1}{2}} \epsilon^{abcd}, \quad \eta^{0123} = (-g)^{-\frac{1}{2}} \quad (1.5)$$

ya da

$$\eta_{abcd} = (-g)^{-\frac{1}{2}} \epsilon_{abcd}, \quad \eta_{0123} = -(-g)^{-\frac{1}{2}} \quad (1.6)$$

ifadeleriyle tanımlanan büyüklüklere 4-boyutlu uzay - zamanın permütasyon tansörü veya hacim elemanı denir. Bunlar antisimetrik tansörlerdir.

$$\eta_{[abcd]} = \eta_{abcd}, \eta^{[abcd]} = \eta^{abcd} \quad (1.7)$$

Ayrıca aşağıda belirtilen ifadeleri de sağlarlar:

$$\begin{aligned} \eta^{abcd}\eta_{efgh} &= -4!\delta_e^{[a}\delta_f^b\delta_g^c\delta_h^{d]} = -\delta_{efgh}^{abcd} \\ \eta^{abcd}\eta_{efgd} &= -\delta_{efg}^{abc} = -6\delta_e^{[a}\delta_f^b\delta_g^{c]} \\ \eta^{abcd}\eta_{efcd} &= -\delta_{ef}^{ab} = -4\delta_e^{[a}\delta_f^{b]} \\ \eta^{abcd}\eta_{ebcd} &= -\delta_e^a = -6\delta_e^a \\ \eta^{abcd}\eta_{abcd} &= -4! = -24 \end{aligned} \quad (1.8)$$

η_{abcd} 'nin 4-lü u^a hızıyla hareket eden bir gözlemcinin anlık durgunluk uzaylarına izdüşümü η_{abc} ile belirtilir. ve

$$\begin{aligned} \eta_{abc} &= \eta_{efgd}u^d h_a^e h_b^f h_c^g = \eta_{abcd}u^d, \eta_{[abc]} = \eta_{abc}, \eta_{abc}u^c = 0 \\ \eta^{abc} &= \eta^{efgd}u_d h_e^a h_f^b h_g^c = \eta^{abcd}u_d, \eta^{[abc]} = \eta^{abc}, \eta^{abc}u_c = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

şeklinde ifade edilir. Buna durgun uzaylarının hacim elemanı ya da izdüşürülmüş permütasyon tansörü denir. Bunların

$$\begin{aligned} \eta_{abcd} &= 2u_{[}\eta_{b]cd} - 2\eta_{ab[e}u_{d]} \\ \eta_{abc}\eta^{def} &= -3!h_{[a}^d h_b^e h_c^f] \end{aligned} \quad (1.10)$$

ifadelerini sağladıkları gösterilmektedir.

Bir dik referans sistemi için $u^d = (1, 0, 0, 0) \iff u_d = (-1, 0, 0, 0)$ sıfırdan farklı büyüklükler indisli η lardır ve bu durumda η yerine ε sembolü kullanılır. Bu sebepten

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} &= \eta^{\alpha\beta\gamma} = \eta^{\alpha\beta\gamma d}u_d = \eta^{\alpha\beta\gamma 0}u_0 = -\eta^{\alpha\beta\gamma 0} \\ \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} &= \eta_{\alpha\beta\gamma} = \eta_{\alpha\beta\gamma d}u^d = \eta_{\alpha\beta\gamma 0}u^0 = +\eta_{\alpha\beta\gamma 0} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Bunlar

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\delta\varepsilon\theta} &= \delta_{\delta\varepsilon\theta}^{\alpha\beta\gamma} \\
\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\delta\varepsilon\gamma} &= \delta_{\delta\varepsilon}^{\alpha\beta} \\
\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\delta\beta\gamma} &= 2\delta_{\delta}^{\alpha} \\
\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\delta\beta\gamma} &= 3!
\end{aligned} \tag{1.12}$$

ifadelerini sağlarlar. Buradaki $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ sembolünün

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} &= \gamma_{\alpha\beta\gamma}^{123} = 3!\delta_{\alpha}^{[1}\delta_{\beta}^2\delta_{\gamma]}^3 = 3!\delta_{[\alpha}^1\delta_{\beta}^2\delta_{\gamma]}^3 \\
\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} &= \gamma_{123}^{\alpha\beta\gamma} = 3!\delta_{[1}^{\alpha}\delta_2^{\beta}\delta_{3]}^{\gamma} = 3!\delta_1^{[\alpha}\delta_2^{\beta}\delta_3^{\gamma]}
\end{aligned} \tag{1.13}$$

şeklinde ifade edilebilmektedir. Bununla birlikte

$$\nabla_e \eta^{abcd} = 0, \nabla_e \eta^{abc} = 0 \tag{1.14}$$

olduğu ifade edilir. Yani paralel öteleme altında bu tansörler korunur [4].

EK 2. F (R,G,T) Gravitenin alan denklemlerinin metriğe göre varyasyonla çıkarılışı
Bilindiği üzere

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R + \Lambda g_{ij} = k^2 T_{ij} \tag{2.1}$$

biçiminde EAD,

$$S_{EH} = \frac{1}{2k^2} \int_{\Gamma} d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + S_m \tag{2.2}$$

olarak belirtilen Einstein - Hilbert (EH) denkleminin $\Lambda - l\beta g_{ij}$ metriğine göre varyasyon olarak ve g_{ij} lerin hem kendilerinin ve hem de δg_{ij} (ya da δg^{ij} varyasyonlarının V bölgesini kuşatan ∂V sınır yüzeyi üzerinde sıfır olarak belirten

$$g_{ij} \Big|_{\partial V} = g_{ij} \Big|_{\partial V} = 0 \text{ ve } \delta g_{ij} \Big|_{\partial V} = \delta g^{ij} \Big|_{\partial V} = 0 \tag{2.3}$$

sınır koşulları altında, S_{EH} nın stasyoner, yani $\delta S_{EH} = 0$ olması koşulunda elde edilebilmektedir. d^4x , 4 boyutlu hacim elemanı; g determinanttır ($g = \det g_{ij}$). S_m ise madde

alanlarına bağlanan denklem olup L_m madde Lagrange yoğunluğundan hareketle

$$S_m = \int_V d^4x \sqrt{-g} L_m \quad (2.4)$$

olarak tanımlanmıştır. L_m nin metrik tansörün bileşenlerine bağlı olduğu durumu ele alacağız, yani

$$L_m = L_m(g^{ij}, g_{ij}) \quad (2.5)$$

olacaktır. Maddenin baryonik olması durumunda (2.5) e bağlanabilecek $T_{ij}^{(m)}$ enerji-momentum tansörü

$$T_{ij}^{(m)} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} L_m)}{\delta g^{ij}} \quad (2.6)$$

olarak belirlenir. Şimdi (2.2) deki aksiyonun

$$R = g^{ij} R_{ij} \equiv I_z(R_{ij}) \quad (2.7)$$

$$G = R^2 - 4R_{ij}R^{ij} + R_{ijkl}R^{ijkl} \quad (2.8)$$

$$T = g^{ij} T_{ij} \equiv I_z(T_{ij}) \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlı: R: Ricci eğrilik skaleri, G: Gauss-Bonnet eğrilik invariantı ve T: enerji momentum tansörünün izi olmak üzere, bu 3 skaleri argüman olarak berlirten keyfi bir $f(R,G,T)$ fonksiyonu ile

$$S = \frac{1}{2k^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R, G, T) + S_m \quad (2.10)$$

şeklinde değişime uğratılmasını ele alalım. $f(R,G,T)$ - gravite olarak belirtilecek bu alternatif teorinin alan denklemlerinin metriğe göre varyasyonla çıkartılmasından önce bazı önemli bağıntı ve özdeşliklerini aşağıda sıralayalım: Metrik tansör için varyasyon ifadeleri:

$$\delta g_{ij} = -g_{ik} \delta g^{kl} g_{lj}, \delta g^{ij} = -g^{ik} \delta g_{kl} g^{lj} \quad (2.11)$$

$$\delta g = -g g_{ij} \delta g^{ij}, \delta g = g g^{ij} \delta g_{ij} \quad (2.12)$$

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ij}\delta g^{ij}, \delta\sqrt{-g} = +\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{ij}\delta g_{ij} \quad (2.13)$$

Christoffel sembollerinin varyasyonu:

$$\delta T_{ij}^k = -\frac{1}{2}\left[g_{il}\nabla_j(\delta g^{kl}) + g_{jl}\nabla_i(\delta g^{kl}) - g_{im}g_{jn}\nabla^k(\delta g^{mn})\right] \quad (2.14)$$

$$\delta T_{ik}^k = -\frac{1}{2}g_{mn}\nabla_i(\delta g^{mn}) \quad (2.15)$$

Riemann ve Ricci tansörleri için varyasyonu:

$$\delta R_{jkl}^i = \nabla_k(\delta T_{lj}^i) - \nabla_l(\delta T_{kj}^i) \quad (2.16)$$

$$\delta R_{ij} = \nabla_k(\delta T_{ij}^k) - \nabla_i(\delta T_{kj}^k) \quad (2.17)$$

Şimdi (2.10) un varyasyonunu ele alalım.

$$f \equiv f(R, G, T); f_x \equiv \frac{\partial f(R, G, T)}{\partial X}; X = R, G, T \quad (2.18)$$

kısaltmaları kullanılarak ve

$$\delta f(R, G, T) \equiv \delta f = f_R\delta R + f_G\delta G + f_T\delta T \quad (2.19)$$

olduğuna da dikkat edilerek, (2.13) ifadesini kullanarak

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{2k^2} \int_V d^4x [(\delta\sqrt{-g})f + \sqrt{-g}\delta f] + \delta S_m \\ &= \frac{1}{2k^2} \int_V d^4x [(\delta\sqrt{-g})f + \sqrt{-g}(\delta f_R\delta R + \delta f_G\delta G + \delta f_T\delta T)] + \delta S_m \\ &= \frac{1}{2k^2} \int_V d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2}g_{ij}f\delta g^{ij} + \sqrt{-g}\delta + f_R\delta R + f_G\delta G + f_T\delta T \right] + \delta S_m \end{aligned} \quad (2.20)$$

elde edilir. R ve G nin varyasyonları, tanımlarından hareketle

$$\begin{aligned} \delta R &= \delta(g^{ij}R_{ij}) \\ &= R_{ij}\delta g^{ij} + g^{ij}\delta R_{ij} \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \delta G &= \delta(R^2 - 4R_{ij}R^{ij} + R_{ijkl}R^{ijkl}) \\ &= 2R\delta R - 4R_{ij}\delta R^{ij} - 4R^{ij}\delta R_{ij} + R_{ijkl}\delta R^{ijkl} + R^{ijkl}\delta R_{ijkl} \end{aligned} \quad (2.22)$$

olur. Bu son ifade de (2.21) ile birlikte, kolayca elde edilebilecek

$$R_{ij}\delta R^{ij} = 2R_i^k R_{jk}\delta g^{ij} + R^{ij}\delta R_{ij} \quad (2.23)$$

$$R_{ijkl}\delta R^{ijkl} = 3R_i^{klm} R_{jklm}\delta g^{ij} + R_i^{jkl}\delta R_{jkl} \quad (2.24)$$

özdeşlikleri yerlerine konulduğunda ve düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} \delta G = & (2RR_{ij} - 4R_i^k R_{jk} - 4R_j^k R_{ik} + 24R_i^{klm} R_{jklm})\delta g^{ij} + 2Rg^{ij}R_{ij} \\ & - 8R^{ij}\delta R_{ij} + 2R_i^{jkl}\delta R_{jkl} \end{aligned} \quad (2.25)$$

elde edilir. (2.21) ile (2.25) ifadeleri, (2.16) ve (2.17) bağıntılarından hareketle (2.15 in de kullanımıyla elde edilebilecek

$$g^{ij}\delta R_{ij} = -\nabla_i \nabla_j (\delta g^{ij}) + g_{ij}\square(\delta g^{ij}) \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} R^{ij}\delta R_{ij} = & -\frac{1}{2}R_i^k \nabla_j \nabla_k (\delta g^{ij}) - \frac{1}{2}R_j^k \nabla_i \nabla_k (\delta g^{ij}) + \frac{1}{2}R_{ij}\square(\delta g^{ij}) \\ & + \frac{1}{2}g_{ij}R^{mn}\nabla_m \nabla_n (\delta g^{ij}) \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$R_i^{jkl}R_{jkl} = -2R^{mn}{}_{ij}\nabla_n \nabla_m (\delta g^{ij}) \quad (2.28)$$

ifadeleri yardımıyla, sırasıyla,

$$\delta R = R_{ij}\delta g^{ij} - \nabla_i \nabla_j (\delta g^{ij}) + g_{ij}\square(\delta g^{ij}) \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \delta G = & (2RR_{ij} - 4R_i^k R_{jk} - 4R_j^k R_{ik} + 2R_i^{klm} R_{jklm})\delta g^{ij} - 2R\nabla_i \nabla_j (\delta g^{ij}) + 2Rg_{ij}\square(\delta g^{ij}) \\ & + 2Rg_{ij}\square(\delta g^{ij}) + 4R_i^k \nabla_j \nabla_k (\delta g^{ij}) + 4R_j^k \nabla_i \nabla_k (\delta g^{ij}) - 4R_{ij}\square(\delta g^{ij}) \\ & - 4g_{ij}R^{mn}\nabla_n \nabla_m (\delta g^{ij}) + 4R_i^{mn}{}_{j}\nabla_n \nabla_m (\delta g^{ij}) \end{aligned} \quad (2.30)$$

şeklinde ifade edilir. δT varyasyonu ise

$$\begin{aligned} \delta T = & \delta(g^{ij}T_{ij}) \\ & T_{ij}\delta g^{ij} + g^{ij}\delta T_{ij} \\ & T_{ij}\delta g^{ij} + g^{mn}\frac{\delta T_{mn}}{\delta g^{ij}}\delta g^{ij} \end{aligned} \quad (2.31)$$

veya

$$\Phi_{ij} \equiv g^{mn} \frac{\delta T_{mn}}{\delta g^{ij}} \quad (2.32)$$

tanımlanırsa

$$\delta T = (T_{ij} + \Phi_{ij}) \delta g^{ij} \quad (2.33)$$

elde edilir. (2.6) daki ifadenin varyasyon hesabı yapılması sonucu elde edilebilecek

$$T_{mn} = g_{mn} L_m - 2 \frac{\delta L_m}{\delta g^{mn}} \quad (2.34)$$

bağıntısı (2.32) ye konulursa, Φ_{ij} nin T_{ij} ve L_m ye bağılılığı için

$$\Phi_{ij} = g_{ij} L_m - 2 T_{ij} - 2 g^{ij} \frac{\delta}{\delta g^{ij}} \left(\frac{\delta L_m}{\delta g^{mn}} \right) \quad (2.35)$$

elde edilir. Şimdi, bir de S_m nin varyasyonunu hesabını yapalım. (2.4), (2.6) ve (2.13) ün de kullanımıyla δS_m nin

$$\delta S_m = -\frac{1}{2} \int_V d^4 x \sqrt{-g} T_{ij} \delta g^{ij} \quad (2.36)$$

elde edilir. Şimdi (2.29), (2.30), (2.33) ve (2.36) ifadeleri (2.20) ye konulduğunda ve uygun düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} \delta S = & \frac{1}{2k^2} \int_V d^4 x \sqrt{-g} \left[[f_R R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} f + f_G (2R R_{ij} - 4R_i^k R_{jk} - 4R_j^k R_{ik} + 2R_i^{klm} R_{jklm}) \right. \\ & + f_T (T_{ij} + \Phi_{ij}) - k^2 T_{ij}] \delta g^{ij} + f_R (g_{ij} \square \delta g^{ij} - \nabla_i \nabla_j (\delta g^{ij})) \\ & + f_G [-2R \nabla_i \nabla_j (\delta g^{ij}) - 4R_{ij} \square (\delta g^{ij}) + 4R_i^m \nabla_j \nabla_m (\delta g^{ij}) \\ & \left. + 4R_j^m \nabla_i \nabla_m (\delta g^{ij}) - 4g_{ij} R^{mn} \nabla_m \nabla_n (\delta g^{ij}) - 4R_i^{mn} \nabla_n \nabla_m (\delta g^{ij})] \right] \end{aligned} \quad (2.37)$$

elde edilir. Son dokuz terimde δg^{ij} varyasyonu türev içinde yer almaktadır. Bu terimler için kısmi integrasyon uygulanır ve V hacmi üzerinden integral işlemi Gauss teoremi yoluyla V yi kavrayan ∂V sınır yüzey üzerine dönüştürülüp (2.3) deki sınır koşulları uygulandığında

bu terimler sıfıra eşitlenir ve (2.37) denklemine

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{1}{2k^2} \int_V d^4x \sqrt{-g} [f_R R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} f + g_{ij} \square f_R + f_G (2R R_{ij} - 4R_i^k R_{jk} - 4R_j^k R_{ik} \\ + 2R_i^{klm} R_{jklm}) - 2R \nabla_i \nabla_j f_G - 4R_{ij} \square f_G - 4R_i^m \nabla_j \nabla_m f_G + 4R_j^m \nabla_i \nabla_m f_G \\ - 4g_{ij} R^{mn} \nabla_m \nabla_n f_G - 4R_i^{mn} \nabla_j \nabla_n f_G + f_T (T_{ij} + \Phi_{ij}) - k^2 T_{ij}] \delta g^{ij} \end{aligned} \quad (2.38)$$

ifadesine indirgenir ve $\delta S = 0$ stasyoner olma koşulundan da

$$\begin{aligned} f_R R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} f + g_{ij} \square f_R + f_G (2R R_{ij} - 4R_i^k R_{jk} - 4R_j^k R_{ik} \\ + 2R_i^{klm} R_{jklm}) - 2R \nabla_i \nabla_j f_G - 4R_{ij} \square f_G - 4R_i^m \nabla_j \nabla_m f_G + 4R_j^m \nabla_i \nabla_m f_G \\ - 4g_{ij} R^{mn} \nabla_m \nabla_n f_G - 4R_i^{mn} \nabla_j \nabla_n f_G + f_T (T_{ij} + \Phi_{ij}) - k^2 T_{ij} = 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

bulunur. 4-boyutta G Gauss-Bonnet invaryantı bir topolojik invaryanttır, G'nin aksiyona toplamsal olarak eklenmesi Einstein denklemlerini değiştirmemektedir. Dolayısıyla $f(R,G,T) = R + G$ olduğunda $f_R = 1, f_G = 1, f_T = 0$ olduğundan (2.39) un indirgeneceği

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R - \frac{1}{2} g_{ij} G + 2R R_{ij} - 4R_i^k R_{jk} - 4R_{ikl} R^{kl} + 2R_i^{klm} R_{jklm} - k^2 T_{ij} = 0 \quad (2.40)$$

denklemini Einstein denklemleri olmalıdır. Buradan

$$-\frac{1}{2} g_{ij} G + 2R R_{ij} - 4R_i^k R_{jk} - 4R_{ikl} R^{kl} + 2R_i^{klm} R_{jklm} = 0 \quad (2.41)$$

olması anlamına gelir. Bu özdeşlik (2.39) a konulduğunda sonuç olarak $f(R,G,T)$ - gravitenin alan denklemleri olarak

$$\begin{aligned} f_R R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} f - \nabla_i \nabla_j f_R + g_{ij} \square f_R + \frac{1}{2} g_{ij} G f_G - 2R \nabla_i \nabla_j f_G - 4G_{ij} \square f_G + 4R_i^m \nabla_j \nabla_m f_G \\ 4R_j^m \nabla_i \nabla_m f_G - 4g_{ij} R^{mn} \nabla_m \nabla_n f_G - 4R_i^{mn} \nabla_j \nabla_n f_G = k^2 T_{ij} - f_T (T_{ij} + \Phi_{ij}) \end{aligned} \quad (2.42)$$

elde edilir. Burada (2.35) ile verilen Φ_{ij} nin açık ifadesini, kozmik akışkanın

$$T_{ij} = (\mu + p) u_i u_j + p g_{ij} (u_i u^i = -1) \quad (2.43)$$

enerji - momentum tansörü ile gösterilen bir mükemmel akışkan olduğu varsayımı altında hesaplayalım. Ancak, (2.43) ifadesini veren L_m madde Lagrange yoğunluğu için tek değil

fakat $L_m = p$ ve $L_m = -\mu$ olmak üzere farklı iki ifade bulunmaktadır. Bunlar (2.35) ten:

$$L_m = p \text{ için : } \Phi_{ij} = pg_{ij} - 2T_{ij} \quad (2.44)$$

$$L_m = -\mu \text{ için : } \Phi_{ij} = -\mu g_{ij} - 2T_{ij} \quad (2.45)$$

elde edilir. (2.42) denklemi, (2.44) seçimi için

$$\begin{aligned} f_R R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} f - \nabla_i \nabla_j f_R + g_{ij} \square f_R + \frac{1}{2} g_{ij} G f_G - 4g_{ij} R^{mn} \nabla_m \nabla_n f_G - 4G_{ij} \square f_G - 2R \nabla_i \nabla_j f_G \\ + 4R_i^m \nabla_j \nabla_m f_G + 4R_j^m \nabla_i \nabla_m f_G - 4R_i^{mn} \nabla_n \nabla_m f_G = k^2 T_{ij} + f_T (T_{ij} + \mu g_{ij}) \end{aligned} \quad (2.46)$$

şeklinde olur. Bu $f(R, G, T)$ gravitenin alan denklemlerinin, aşağıdaki özel seçimler için , literatürdeki diğer f -gravite teorilerinininkilerine indirgeneceği kolayca görülür.

$f(R)$ - gravite ($f(R, G, T) \equiv f(R)$ alarak):

$$f_R R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} f - \nabla_i \nabla_j f_R + g_{ij} \square f_R = k^2 T_{ij} \quad (2.47)$$

$f(R, G)$ - gravite ($f(R, G, T) \equiv f(R, G)$ alarak):

$$\begin{aligned} f_R R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} f - \nabla_i \nabla_j f_R + g_{ij} \square f_R + \frac{1}{2} g_{ij} G f_G - 4g_{ij} R^{mn} \nabla_m \nabla_n f_G - 4G_{ij} \square f_G - 2R \nabla_i \nabla_j f_G \\ + 4R_i^m \nabla_j \nabla_m f_G + 4R_j^m \nabla_i \nabla_m f_G - 4R_i^{mn} \nabla_n \nabla_m f_G = k^2 T_{ij} \end{aligned} \quad (2.48)$$

$f(R, T)$ - gravite ($f(R, G, T) \equiv f(R, T)$ alarak):

$$L_m = p \text{ için } f_R R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} f - \nabla_i \nabla_j f_R + g_{ij} \square f_R = k^2 T_{ij} + f_T (T_{ij} - pg_{ij}) \quad (2.49)$$

ve

$$L_m = -\mu \text{ için } f_R R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} f - \nabla_i \nabla_j f_R + g_{ij} \square f_R = k^2 T_{ij} + f_T (T_{ij} - \mu g_{ij}) \quad (2.50)$$

olur [20].

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Nurşah KOÇER
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	☐ T.C. ☐ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	
Web Adresi	



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Fizik
Mezuniyet Yılı	2017

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Fizik Anabilim Dalı
Programı	Matematiksel Fizik Programı
Mezuniyet Tarihi	2022

Makale ve Bildiriler	
Makaleler	
Bildiriler	
Fractional Calculus of Cosmology, TFD35, 2019, Bodrum, Turkey	