



**T.C.  
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**DOKTORA TEZİ**

**$F(T)$  KÜTLE ÇEKİM TEORİSİNDE EKSENEL SİMETRİK  
KARADELİK ÇÖZÜMLERİ**

**Ali Nur NURBAKİ**

**Astronomi ve Uzay Bilimleri Anabilim Dalı**

**Astronomi ve Uzay Bilimleri Programı**

**DANIŞMAN**

**Prof. Dr. A. Talât SAYGAÇ**

**II. DANIŞMAN**

**Prof. Dr. Salvatore CAPOZZIELLO**

**Eylül, 2020**

**İSTANBUL**

Bu alışma 28.09.2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Astronomi ve Uzay Bilimleri Anabilim Dalı Astronomi ve Uzay Bilimleri Programında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

### **Tez Jürisi**

Prof. Dr. A. Talât SAYGAÇ (Danışman)  
İstanbul Üniversitesi  
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Cemsinan DELİDUMAN  
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi  
Fen-Edebiyat Fakültesi

Prof. Dr. Ekrem AYDINER  
İstanbul Üniversitesi  
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Göksel DAYLAN ESMER  
İstanbul Üniversitesi  
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Reyhan KAYA  
Yıldız Teknik Üniversitesi  
Fen-Edebiyat Fakültesi



- **İntihal Programı Beyanı**

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

- **Tezden Üretilmiş Yayınların Künye Bilgileri**

[Spherical and cylindrical solutions in  $f(T)$  gravity by Noether Symmetry Approach.  
Eur. Pyhs. J. C **80**, no. 2, 108 (2020)]

## ÖNSÖZ

Modifiye Edilmiş Kütle çekimi Kuramları (MEK)'nın son yıllardaki dikkat çekici yükselişi gözlemsel verilere uygun kuram oluşturma bağlamının dışındaki alanlara ilerlemiş durumdadır. Bu bağlamda teorik öngörüler de önem kazanmaktadır.

Sadece düşük eğrilik infrared durumu için gözlemsel verilerle sağlanan uyumun yanında yüksek eğrilik (Ultraviyole - UV) rejimindeki davranış kuramın başarısı için anahtar konumundadır. Bu tezde  $f(T)$  kuramının karadelik çözümleri çalışılmasındaki maksat  $f(T)$  kuramının UV rejimindeki davranışına ışık tutmaktır.

Tezin hazırlanmasında yol gösterip motivasyon sağlayan ve hiçbir zaman desteğini esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. A. Talât SAYGAÇ'a teşekkür ederim. Ayrıca, tez başlığının belirlenmesi aşamasında tanışarak tez kapsamındaki akademik çalışmalarını beraber yürütme imkânı bulduğum için memnuniyet duyduğum 2. danışmanım Prof. Dr. Salvatore CAPOZZIELLO'ya yoğun çalışma temposu içinde birikim ve tecrübelerini benimle paylaştığı için teşekkür ederim. Bunun yanında yönlendirme ve önerilerinden ötürü Prof. Dr. Cemsinan DELİDUMAN ve Doç. Dr. Göksel DAYLAN ESMER'e teşekkürlerimi sunmak isterim. Ayrıca destek ve hoşgörülerini esirgemeyen çalışma arkadaşlarıma da teşekkür ediyorum.

Bana bilimsel merakı aşılayarak fikir dünyamın gelişmesini sağlayan rahmetli babam Dr. Halûk NURBAKİ'ye, doktora çalışmam esnasında beni hep destekleyen, moral, motivasyon sağlayan ve anlayış gösteren sevgili eşim ve kızıma özel olarak minnet ve teşekkürlerimi sunmak isterim.

Eylül, 2020

Ali Nur NURBAKİ

# İÇİNDEKİLER

## Sayfa No

|                                                                                                           |      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| ÖNSÖZ .....                                                                                               | iv   |
| İÇİNDEKİLER .....                                                                                         | viii |
| SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ .....                                                                           | ix   |
| ÖZET .....                                                                                                | x    |
| SUMMARY .....                                                                                             | xi   |
| 1. GİRİŞ .....                                                                                            | 1    |
| 2. GENEL KISIMLAR .....                                                                                   | 4    |
| 2.1. GENEL GÖRELİLİĞE ALTERNATİF KURAMLAR .....                                                           | 4    |
| 2.1.1. Jordan - Brans - Dicke Kuramı .....                                                                | 5    |
| 2.1.2. Genel Göreliliğin Teleparalel Eşdeğeri .....                                                       | 8    |
| 2.1.2.1. Tetradlar .....                                                                                  | 9    |
| 2.1.2.2. Eylemsizlik Etkileri ve Spin Koneksiyonu .....                                                   | 10   |
| 2.1.2.3. Ötelemeler için Ayar Kuramı .....                                                                | 12   |
| 2.1.2.4. Lagrangian ve Alan Denklemleri .....                                                             | 16   |
| 2.1.2.5. Teleparalel Kuvvet Denklemi ve Genel Görelilik .....                                             | 18   |
| 2.1.2.6. Eşdeğerlik Prensibi .....                                                                        | 20   |
| 2.2. GENELLEŞTİRİLMİŞ KÜTLE ÇEKİMİ .....                                                                  | 21   |
| 2.2.1. Genel Göreliliğin Modifikasyonları .....                                                           | 21   |
| 2.2.1.1. Genel Göreliliğin Eksikleri ve MEK .....                                                         | 21   |
| 2.3. MODİFİYE EDİLMİŞ KÜTLE ÇEKİM KURAMLARI: SKALER-TENSÖR<br>KURAMLARI, $F(R)$ VE $F(T)$ KURAMLARI ..... | 24   |
| 2.3.1. MEK için Yaşayabilirlik Koşulları .....                                                            | 24   |
| 2.3.1.1. Zayıf Alan Limiti .....                                                                          | 24   |
| 2.3.1.2. Kozmolojik Dinamikler .....                                                                      | 25   |
| 2.3.1.3. Kararsızlıklar .....                                                                             | 25   |
| 2.3.1.4. Hayalet alanlar .....                                                                            | 26   |
| 2.3.1.5. Cauchy problemi .....                                                                            | 26   |

|                                                                                                                     |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.3.2. Skaler - Tensör Kuramları .....                                                                              | 27        |
| 2.3.3. $f(R)$ Kuramı .....                                                                                          | 28        |
| 2.3.3.1. Metrik $f(R)$ Kuramı .....                                                                                 | 29        |
| 2.3.3.2. Palatini $f(R)$ Kuramı .....                                                                               | 31        |
| 2.3.3.3. Metrik Afın $f(R)$ Kuramı .....                                                                            | 33        |
| 2.3.3.4. $f(R)$ İçin Yaşayabilirlik Durumu .....                                                                    | 34        |
| 2.3.4. Eğrilik için Farklı Genellemeler .....                                                                       | 34        |
| 2.3.4.1. Lovelock İnvaryantları, $f(\mathcal{G})$ , $f(R, \mathcal{G})$ , $f(R, \phi, \mathcal{G})$ Kuramları ..... | 35        |
| 2.3.4.2. $f(R, \square R, \square^2 R, \dots, \square^n R)$ Kuramları .....                                         | 37        |
| 2.3.4.3. Yerel Olmayan $f(R)$ Kuramları .....                                                                       | 38        |
| 2.3.4.4. $f(R, \mathcal{T})$ kuramları .....                                                                        | 39        |
| 2.3.4.5. Konformal Kütle Çekimi .....                                                                               | 40        |
| 2.3.5. $f(T)$ Kuramı .....                                                                                          | 41        |
| 2.3.5.1. $f(R)$ ile $f(T)$ Kuramlarının Eşdeğerliği .....                                                           | 42        |
| 2.3.5.2. İyi Tetradlar .....                                                                                        | 42        |
| 2.3.5.3. $f(T)$ ve Yerel Lorentz Kovaryansı .....                                                                   | 44        |
| 2.3.5.4. $f(T)$ Kozmolojisi .....                                                                                   | 46        |
| 2.3.6. $f(T)$ 'nin Astrofiziksel ve Kozmolojik Öngörülleri .....                                                    | 47        |
| 2.3.6.1. Erken Evren Enflasyonu .....                                                                               | 47        |
| 2.3.6.2. Kozmik İvmelenme .....                                                                                     | 49        |
| 2.3.6.3. Karanlık Madde .....                                                                                       | 51        |
| 2.3.7. Teleparalel Kütle Çekimi için Diğer Genellemeler .....                                                       | 53        |
| 2.3.7.1. $f(T, B)$ Kuramı .....                                                                                     | 53        |
| 2.3.7.2. $f(T, T_G)$ Kuramı .....                                                                                   | 54        |
| 2.3.7.3. Minimal Olmayan Madde-Burulma Çiftlenimi .....                                                             | 54        |
| 2.3.7.4. $f(T, \mathcal{T})$ Kuramı .....                                                                           | 55        |
| 2.3.7.5. $f(R, T)$ Kuramı .....                                                                                     | 56        |
| 2.3.7.6. $f(T_{vek}, T_{ten}, T_{aks})$ Kuramı .....                                                                | 56        |
| 2.3.7.7. Minimal Olmayan Skaler Alan-Burulma Çiftlenimi .....                                                       | 58        |
| <b>3. MALZEME VE YÖNTEM .....</b>                                                                                   | <b>60</b> |
| 3.1. $F(R)$ TEORİSİNİN SKALER-TENSÖR EŞDEĞERİ .....                                                                 | 60        |

|                                                                                                                             |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.1.1. $\omega = 0$ ve Metrik $f(R)$ Kuramı .....                                                                           | 61        |
| 3.1.2. $\omega = -3/2$ ve Palatini $f(R)$ Kuramı .....                                                                      | 61        |
| 3.2. KONFORMAL DÖNÜŞÜMLER VE EINSTEIN ÇERÇEVESİ .....                                                                       | 62        |
| 3.2.1. Metrik $f(R)$ Kuramı için Einstein Çerçevesi .....                                                                   | 63        |
| 3.2.2. Palatini $f(R)$ Kuramı için Einstein Çerçevesi .....                                                                 | 64        |
| 3.2.3. Jordan ve Einstein Çerçevelerinin Eşdeğerliği .....                                                                  | 64        |
| 3.3. ÇÖZÜM KOLAYLAŞTIRICI NSY .....                                                                                         | 65        |
| 3.3.1. Noether Simetrileri .....                                                                                            | 65        |
| 3.3.2. Noether Ayar Simetrileri .....                                                                                       | 66        |
| 3.3.3. $f(T)$ Kozmolojisi ve Noether Simetri Yaklaşımı (NSY) .....                                                          | 67        |
| 3.3.3.1. <i>Kozmolojik Çözümler</i> .....                                                                                   | 73        |
| <b>4. BULGULAR .....</b>                                                                                                    | <b>76</b> |
| 4.1. $F(T)$ TEORİSİNİN SKALER - TENSÖR EŞDEĞERİ .....                                                                       | 76        |
| 4.1.1. Konformal Dönüşümler ve Einstein Çerçevesi .....                                                                     | 77        |
| 4.2. KÜRESEL SİMETRİK ÇÖZÜMLER .....                                                                                        | 78        |
| 4.2.1. $\text{diag} (A, B, M, M \sin(\theta))$ Tipi Küresel Simetrik Çözümler .....                                         | 79        |
| 4.2.1.1. <i>Jordan Çerçevesi</i> .....                                                                                      | 80        |
| 4.2.1.2. <i>Einstein Çerçevesi</i> .....                                                                                    | 82        |
| 4.2.2. $\text{diag} (A, 1/A, M, M \sin(\theta))$ Tipi Küresel Simetrik Çözümler .....                                       | 85        |
| 4.2.2.1. <i>Jordan Çerçevesi</i> .....                                                                                      | 85        |
| 4.2.2.2. <i>Einstein Çerçevesi</i> .....                                                                                    | 88        |
| 4.3. EKSENEL SİMETRİK ÇÖZÜMLER .....                                                                                        | 90        |
| 4.3.1. $\text{diag} (A, C, M, C)$ Tipi Silindirik Simetrik Çözümler .....                                                   | 90        |
| 4.3.1.1. <i>Jordan Çerçevesi</i> .....                                                                                      | 90        |
| 4.3.1.2. <i>Einstein Çerçevesi</i> .....                                                                                    | 93        |
| 4.3.1.3. <i>Genel <math>f(T)</math> Lagrangianı için Çözüm</i> .....                                                        | 95        |
| 4.3.2. $\text{diag} (A, 1/A, M, \alpha_0 M)$ Tipi Silindirik Simetrik Çözümler .....                                        | 97        |
| 4.3.2.1. <i>Einstein Çerçevesi</i> .....                                                                                    | 97        |
| 4.3.3. Newman - Janis Prosedürü İle Elde Edilen Kerr - Newman Çözümü .....                                                  | 98        |
| 4.3.3.1. <i><math>\text{diag} (A^2, 1/A^2, M^2, M^2 \sin^2(\theta))</math> Formundaki Metrikten Elde Edilen Çözüm</i> ..... | 98        |
| 4.4. KARADELİK ÇÖZÜMLERİ .....                                                                                              | 99        |

|                                                                                              |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.4.1. Küresel Simetrik Karadelikler .....                                                   | 100        |
| 4.4.1.1. $\text{diag}(A, B, M, M \sin(\theta))$ Formundaki Küresel Simetrik Çözümler .....   | 100        |
| 4.4.1.2. $\text{diag}(A, 1/A, M, M \sin(\theta))$ Formundaki Küresel Simetrik Çözümler ..... | 100        |
| 4.4.2. Eksenel Simetrik Karadelikler .....                                                   | 102        |
| 4.4.2.1. $\text{diag}(A, C, M, C)$ Tipi Silindirik Simetrik Çözümler .....                   | 102        |
| 4.4.2.2. $\text{diag}(A, 1/A, M, \alpha_0 M)$ Tipi Silindirik Simetrik Çözümler .....        | 103        |
| 4.4.2.3. Kerr - Newman Çözümü .....                                                          | 104        |
| <b>5. TARTIŞMA VE SONUÇ .....</b>                                                            | <b>105</b> |
| <b>KAYNAKLAR .....</b>                                                                       | <b>107</b> |
| <b>EKLER .....</b>                                                                           | <b>116</b> |
| <b>EK 1.</b> Newman - Janis Algoritması ile Küresel Simetriden Eksenel Simetriye Geçiş       | 116        |
| <b>EK 1.1.</b> Eddington-Finkelstein Formunun yazılması.....                                 | 116        |
| <b>EK 1.2.</b> Kompleks Boş Tetradlar Üzerinde Dönüşüm ve Yeni Metrik .....                  | 117        |
| <b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>                                                                        | <b>121</b> |

## SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

| Simgeler                  | Açıklama                         |
|---------------------------|----------------------------------|
| $g_{\mu\nu}$              | : Metrik tensör                  |
| $g^{\mu\nu}$              | : Metrik tensörün tersi          |
| $\square$                 | : d'Alembert operatörü           |
| $g$                       | : Metrik tensörün determinantı   |
| $R^\alpha_{\delta\mu\nu}$ | : Riemann tensörü                |
| $R_{\mu\nu}$              | : Ricci tensörü                  |
| $R$                       | : Eğrilik skaleri                |
| $G_{\mu\nu}$              | : Einstein tensörü               |
| $T_{\mu\nu}$              | : Enerji-momentum tensörü        |
| $\mathcal{T}$             | : Enerji-momentum tensörünün izi |
| $\nabla_\mu$              | : Kovaryant türev                |
| $\mathcal{G}$             | : Gauss - Bonnet invariantı      |
| $\Lambda^a_b$             | : Lorentz dönüşümü               |
| $T^a_{\mu\nu}$            | : Burulma tensörü                |
| $T$                       | : Burulma skaleri                |
| $K^\rho_{\mu\nu}$         | : Kontorsiyon                    |

| Kısaltmalar        | Açıklama                                 |
|--------------------|------------------------------------------|
| <b><i>EH</i></b>   | : Einstein - Hilbert                     |
| <b><i>GB</i></b>   | : Gauss - Bonnet                         |
| <b><i>GG</i></b>   | : Genel Görelilik                        |
| <b><i>GGTE</i></b> | : Genel Göreliliğin Teleparalel Eşdeğeri |
| <b><i>JBD</i></b>  | : Jordan - Brans - Dicke                 |
| <b><i>KAPI</i></b> | : Kozmik Arka Plân Işınımı               |
| <b><i>MEK</i></b>  | : Modifiye Edilmiş Kütle Çekimi          |
| <b><i>NSY</i></b>  | : Noether Simetri Yaklaşımı              |
| <b><i>STK</i></b>  | : Skaler - Tensör Kuramı                 |
| <b><i>ZEP</i></b>  | : Zayıf Eşdeğerlik Prensibi              |

# ÖZET

## DOKTORA TEZİ

### $f(T)$ KÜTLE ÇEKİM TEORİSİNDE EKSENEL SİMETRİK KARADELİK ÇÖZÜMLERİ

Ali Nur NURBAKİ

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Astronomi ve Uzay Bilimleri Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. A. Talât SAYGAÇ

II. Danışman: Prof. Dr. Salvatore CAPOZZIELLO

$f(T)$  kütle çekimi kuramı erken evren enflasyonu, kozmik ivmelenme gibi kozmolojik olguları açıklayabilme kapasitesine sahip bir kuram görünümü vermektedir. Infrared ölçeğinde gösterdiği başarı değerlendirildiğinde ultraviyole ölçeğinde nasıl bir  $f(T)$  kuramı ortaya çıkacağını inceleyebilmek adına kuramın karadelik çözümlerini elde etmek önemlidir. Bu tezde  $f(T)$  kuramı için eksenel simetrinin yanında küresel simetrik karadelik çözümleri elde edilmiştir. Öncelikle kuramın en genel skaler - tensör eşdeğeri için konformal dönüşümler kullanılarak Einstein çerçevesi Lagrangianı elde edilmiştir. Daha sonra hem Jordan hem Einstein çerçeveleri için Noether Simetri Yaklaşımı (NSY) kullanılarak hem küresel hem de silindirik simetriye sahip tetradlar için korunan büyüklükler cinsinden tetrad potansiyelleri elde edilmiştir. Aynı zamanda hem küresel hem silindirik simetrik Jordan çerçevesi Lagrangianlarına tekabül eden Euler - Lagrange denklemlerinden yeni çözümlere ulaşılmıştır. Elde edilen çözümlerin hangi şartlarda karadelik çözümlerine karşılık geleceği yapılan tekilite analizleriyle belirlenmiştir.

Eylül, 2020, 122 sayfa.

**Anahtar kelimeler:**  $f(T)$  kütle çekimi, Noether simetri yaklaşımı, eksenel simetrik çözümler.

## SUMMARY

### Ph.D. THESIS

#### AXIALLY SYMMETRIC BLACK HOLE SOLUTIONS IN $F(T)$ GRAVITY

Ali Nur NURBAKİ

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Astronomy and Space Sciences

Supervisor: Prof. Dr. A. Talât SAYGAÇ

Co-Supervisor: Prof. Dr. Salvatore CAPOZZIELLO

The  $f(T)$  theory of gravity seems to have the capacity to explain cosmological phenomena such as the early inflation and the cosmic acceleration of the universe. When considering its success at the weak field limit (infrared scale), the black hole solutions of  $f(T)$  theory gain importance in order to understand the strong field or ultraviolet scale behaviour. Besides the axially symmetric ones, spherically symmetric solutions for  $f(T)$  theory are obtained in the scope of this thesis. Firstly, by using the most general scalar - tensor equivalent of the  $f(T)$  theory, Einstein frame Lagrangian is obtained via conformal transformations. After that, tetrad potentials are obtained in terms of conserved quantities in both the Jordan and the Einstein frames for spherical and cylindrical tetrads. New solutions are gathered for both spherical and cylindrical tetrads by solving the Euler - Lagrange equations corresponding to the Jordan frame Lagrangians. By computing and analyzing the singularities, the cases that these solutions correspond to black holes are determined.

Eylül, 2020, 122 pages.

**Keywords:**  $f(T)$  gravity, Noether symmetry approach, axially symmetric solutions.

## 1. GİRİŞ

Doğanın dört temel etkileşimi ele alındığında, kütle çekiminin diğerlerinden farklı olduğu görülmektedir. Bu farkın kaynağı sadece kütle çekiminin diğerlerinden çok daha zayıf olması değil, tabiri caizse diğerlerinden daha temel oluşundandır. Bu dört etkileşimin Büyük Patlamada tek bir kuvvet olduğu varsayımı altında Büyük Patlama sonrası ilk ayrışan etkileşimin kütle çekimi oluşu, onun diğerlerinden daha yüksek enerji ölçeklerinde (Planck ölçeği gibi) tekrar birleşebileceği anlamına gelmektedir. Bu durum "Herşeyin Kuramı" türü çalışmalar için kuramsal güçlüklerin yanında ilave deneysel güçlüklerle de neden olmaktadır.

Görelilik Kuramı, şüphesiz kuantum mekaniği ile birlikte modern fiziğin referans aldığı en temel iki kuramdır. Bu iki kuramın tam uyum içinde birleştirilebildiği bir kuantumlu kütle çekimi kuramı ise henüz keşfedilmiş değildir. Bunun, iki kuramın etkileşim tanımlarının kökten farklı oluşu gibi çok temel kuramsal gerekçeleri bulunmakla beraber, mevcut hızlandırıcıların sahip olduğu teknolojik imkânlar da ihtiyaç duyulan deneysel koşullar için henüz yeterli değildir.

Sol taraftaki geometriyi sağ taraftaki madde-enerji dağılımına

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

bağlayan Einstein denklemleri Güneş Sistemi ve Yer gözlemleriyle uyum içindedir. GG kuramının gözlemsel limitlerini belirlemek adına yapılması gereken; şüphesiz kuramın Güneş Sistemi dışına çıkıldığında - örneğin kozmolojik ve astrofiziksel ölçeklerde - nasıl davrandığını ve gözlemsel verilerle tutarlı olup olmadığını incelemektir.

Bu noktada kuramın bahsi geçen ölçeklerdeki öngörülleri ile gözlemsel veriler arasındaki tutarlılığı sağlamak adına denklemlerin

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{\text{Karanlık Madde}} + T_{\mu\nu}^{\text{Karanlık Enerji}} \quad (1.2)$$

şeklinde kaynak terimleri ile revize edildiği bir form kullanılmaktadır. Uzunca zamandır birçok araştırmacının ilgi odağı olmuş karanlık madde ve karanlık enerji olguları

denklemlerin sağ tarafıyla ilişkilendirilmiş olsalar da daha sonra karanlık enerjinin yerine *kozmozolojik sabit* kavramı benimsenerek denklemlerin sol tarafında asgari de olsa

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1.3)$$

şeklinde ifade edilen bir modifikasyon ortaya çıkmıştır. Erken Evren enflasyonu için ihtiyaç duyulan kaynak terimi de göz önüne alındığında Einstein denklemlerinin kozmik ölçekte sol tarafının tekrar gözden geçirilebileceği fikri taraftar toplamaya başlamıştır. Bu kapsamda ortaya atılan MEK Kuramları özellikle son yirmi yılda birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. MEK kuramlarının genel felsefesi Einstein - Hilbert Lagrangianı'nın yerine daha genel Lagrangianlar yazarak farklı alan denklemleri elde etme esasına dayalıdır. Böylece ortaya çıkan fazladan terimler karanlık enerji, karanlık madde gibi kaynak terimlerinin yerine kullanılabilmektedir.

MEK kuramları kozmozolojik ve astrofiziksel motivasyonlarla modellendiğinden elde edilen çözümler çoğunlukla çalışılan kuramın infrared rejimindeki davranışını ifade etmektedir. MEK kuramlarının karadelik çözümleri, üzerinde çalışılan modelin ultraviyole davranışına ışık tutacağından hayati önem taşımaktadır. Bundan dolayı bu tez çalışmasında son yıllarda önem kazanmış olan  $f(T)$  kuramının eksenel simetrik karadelik çözümleri üzerine çalışılmıştır. Eksenel simetrinin seçilmesinin nedeni uygulamada daha gerçekçi olmasıdır. Öte yandan eksenel simetrik çözümlerin elde edilmesi küresel simetrik çözümlere nazaran daha zordur. Bunun için eksenel simetrik metrikler arasında nispeten çözümü mümkün görünen genel silindirik simetrik metrikler kullanılmıştır [1, 2].

Tez kapsamında gerçekleştirilen akademik çalışmalar şu şekildedir:

- Spherical and cylindrical solutions in  $f(T)$  gravity by Noether Symmetry Approach,  
A. N. NURBAKİ, S. CAPOZZIELLO, C. DELİDUMAN, European Pyhsical Journal C, 80 108N, 2020
- Black hole solutions in  $f(T)$  gravity,  
A. N. NURBAKİ, S. CAPOZZIELLO, C. DELİDUMAN - *Annals of Physics*'e gönderildi.
- $f(T)$  Teorisinde Küresel Simetrik Karadelik Çözümleri,  
A. N. NURBAKİ, S. CAPOZZIELLO, C. DELİDUMAN, A. T. SAYGAÇ, UAK 2018, Kayseri

- Genel Göreliliğin Modifikasyonları: Karanlık Madde ve Karanlık Enerji,

A. N. NURBAKİ, S. CAPOZZIELLO, C. DELİDUMAN, A. T. SAYGAÇ, UAK 2016, Erzurum

İkinci bölümde GG'e alternatif kuramlardan bahsedilmiş, öncelikle bu tez kapsamında çalışılan  $f(T)$  kuramı ve STK'na zemin oluşturan Brans - Dicke (BD) ve GGTE kuramlarına yer verilmiştir. Bunların üzerine, MEK türü kuramların motivasyonlarından bahisle STK,  $f(R)$ ,  $f(T)$  kuramları bina edilmiştir.

Üçüncü bölüm tez kapsamında gerçekleştirilen akademik çalışmalarda yararlanılan bilimsel literatür ve kullanılan tekniklerle ilgili alt bölümlerden oluşmaktadır.  $f(R)$  kuramının Skaler - Tensör eşdeğeri, bu eşdeğer Lagrangian için konformal dönüşümle elde edilen Einstein çerçevesi ve Jordan çerçevesinin eşdeğerliği ve "Noether Simetri Yaklaşımı" (NSY) bu bölümde üzerinde durulan konulardır.

Dördüncü bölümde, bu tez kapsamında gerçekleştirilen yayınların detayları paylaşılmıştır. Öncelikle genel bir  $f(T)$  Lagrangianı için skaler tensör eşdeğer Lagrangian yazılarak bunun bir konformal dönüşümle Einstein çerçevesi Lagrangianı elde edilmiştir. Böylece elde edilmiş olan her iki çerçeve Lagrangianı kullanılarak önce küresel simetrik ve köşegen tetrad takımları için daha sonra da silindirik simetrik ve köşegen bir tetrad takımları için nokta-gibi Lagrangianlar (point - like Lagrangian) yazılmıştır. Nokta - gibi Lagrangianlar kullanılarak literatürde sıkça kullanılan standart bir yöntem haline gelen "Noether Simetri Yaklaşımı" işletilmiş ve her iki çerçeve ve her iki tetrad takımı için tam çözümler elde edilmiştir. Bu tam çözümlerin karadelik ifade eden özel durumları elde edilerek olay ufukları belirlenmiş, asimptotik davranışları incelenmiştir. Metrik için  $(-, +, +, +)$  notasyonu kullanılmış olup yapılan bütün hesaplamalar  $G = c = 1$  olacak şekilde doğal birimlerde gerçekleştirilmiştir.

## 2. GENEL KISIMLAR

### 2.1. GENEL GÖRELİLİĞE ALTERNATİF KURAMLAR

Einstein'ın GG'i ortaya atmasını takip eden yıllarda GG'e alternatif kütle çekim kuramları meydana çıkmaya başlamıştır. Bu kuramlar temel olarak GG'in kuşattığı teorik rejimin dışına çıkıldığında da kütle çekimin nasıl işlediğini doğru bir şekilde açıklayabilmek ve öngöründe bulunabilmek maksadıyla ortaya atılmışlardır. Örneğin; JBD kuramı eylemsizlik kuvvetlerinin tüm Evren'deki kütle dağılımı ile ilgili olduğunu ileri süren Ernst Mach'ın görüşlerini tam manasıyla kapsayan bir kuramdır. Bu kuram aşağıda da açıklanacağı üzere tam *Mach*'çılığı sağlayabilmek için yardımcı bir skaler alan kullanır.

Başta Einstein olmak üzere Weyl [3] ve Kaluza [4] GG'te kullanılan madde-enerji dağılımı ile uzay-zaman geometrisi arasındaki ilişkinin kütle çekimde elde ettiği başarıyı elektromanyetizmaya taşıyabilmeyi ummuşlardır.

Klasik yaklaşımlarla ortaya atılan Weyl, Kaluza - Klein, JBD gibi kuramlar o zaman için önemlerini yitirmiş de olsalar daha sonra çok daha genel ve yaygın kuramların fikri temelini teşkil ettikleri söylenebilir. Örneğin Weyl Kuramı Ayar Kuramlarının atası pozisyonunda iken Kaluza - Klein kuramı, başta Sicim kuramları olmak üzere tüm yüksek boyutlu kuramların temelini teşkil etmektedir. JBD Kuramı ise bugün Skaler - Tensör Kuramlarının ilk örneği kabul edilmektedir.

Bu bağlamda GG dışındaki kuramları; alternatif kütle çekimi kuramları ve MEK olarak ayrı değerlendirmek daha sağlıklı olacaktır. Buradaki temel fark şu şekilde ifade edilebilir: MEK'nın motivasyonu daha ziyade astrofiziksel ve kozmolojik gözlemlere dayalıdır. Bu kuramlar GG üzerinde gözlemlerle örtüşecek modifikasyonlar gerçekleştirilerek kurgulanırlar ve belli bir limitte GG'e indirgenirler. Alternatif kütle çekimi kuramları esasen teorik motivasyonludurlar ve GG' indirgendikleri bir limit olmak durumunda değildir. Her ne kadar kesin bir sınıflamadan bahsetmek güç de olsa bu tez çalışmasının kapsam sınırlarının çizilmesi açısından anlamlı olacaktır. Alternatif kütle çekimi kuramları geniş bir yelpaze olduğundan takip eden bölümlerde bu sınıf içerisindeki kuramlardan, bu çalışmaya temel

teşkil eden  $f(T)$  kuramı ve onun Skaler - Tensör eşdeğerinin daha iyi algılanabilmesi maksadı ile JBD ve GGTE kuramları üzerinde durulacaktır.

### 2.1.1. Jordan - Brans - Dicke Kuramı

JBD Kuramının ve bu kuramın olgunlaşmasına kadar geçen zaman içinde kütle çekim çalışan camiada yer edinmiş fikirlerin temel motivasyonu eylemsizliğin kökeni ile ilgilidir.

Ernst Mach'ın, eylemsizliğin tüm Evren'in madde dağılımı ile ilgili olduğu yönündeki fikirleri Einstein'ı da etkilemiş, GG kuramının oluşumunda önemli bir felsefi ilham kaynağı olmuştur. Ancak GG kuramı tam *Mach*çı bir kuram değildir. Zira GG eylemsizlik kuvvetlerinin kütle çekim ile yerel olarak ayırt edilemez olduğunu ifade eder. Tam *Mach*'cılığın nasıl sağlanabileceği üzerine çalışan Einstein, eylemsizlik kuvvetlerinin- sonlu ve durağan bir Evren kabulü altında- Evren'in kütle dağılımı ile

$$\frac{1}{G} \approx \frac{M_{evren}}{R_{evren}} \quad (2.1)$$

şeklinde ilişkilendirilebileceğini öne sürmüştür [5]. Hubble'ın Evren'in genişlediğini keşfetmesiyle Einstein'ın durağan Evren'i rafa kaldırılmıştır. Hubble sonrası 1950'lere kadarki dönemde gerçekleştirilen kozmolojik ölçekli gözlemler bu sefer genişleyen bir Evren'in gözleyebildiğimiz derinliği içerisinde kalan madde miktarı için

$$\frac{1}{G} \approx \frac{M_{gözlenen}}{R_{gözlenen}}. \quad (2.2)$$

olduğundan form olarak Einstein'ın önerdiği ifadeye benzerlik gösterir. Ancak bu ifade daha ziyade Dirac'ın 'Büyük Sayılar Hipotezi' kapsamında karşılaştığı tevâfuklardan birine karşılık gelmektedir [6]. Zira buradaki  $G$  kütle çekim sabiti genişleyen bir Evren için Evren'in gözlenen yarıçapına karşılık gelen kütlenin zaman içinde değişmesi sayesinde artık bir sabit olmaktan çıkmıştır. Bu Dirac'ın değişken kütle çekimi sabiti önerisi olarak bilinmektedir. Aynı ifade daha sonra Sciama'nın eylemsizlik kuvvetleri üzerine yaptığı çalışmada ortaya çıkmıştır [7].

Buraya kadarki çalışmaları skaler alan kullanarak daha kapsamlı bir teoride birleştiren Jordan olmuştur [8]. Jordan, Kaluza - Klein kuramının özel bir formülasyonunu kullanarak dört boyutlu ve eğrilikli bir manifoldu beş boyutlu düz bir uzay-zaman içine gömmüştür.

Jordan'ın dört boyutlu Lagrangianı

$$L_J = \sqrt{-g} \left[ \phi_J^\gamma \left( R - \frac{\omega_J}{\phi_J^2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_J \partial_\nu \phi_J \right) + L_{MADDE}(\phi_J, \psi) \right] \quad (2.3)$$

şeklindedir. Burada  $\phi_J$  Jordan skaler alanı,  $\gamma$  ve  $\omega_J$  sabitleri ve  $\psi$  madde alanlarını temsil etmektedir. (2.3) göz önüne alındığında Jordan skaler alanının hem uzay - zaman ile hem de madde alanları ile çiftlenim halinde olduğu görülmektedir.

Jordan'ın çalışmasından kısa zaman sonra ve ondan bağımsız olarak Brans ve Dicke [5, 9] daha sade bir Lagrangian kullanarak yeni bir kuram ortaya atmıştır. Motivasyonunu daha çok Sciama'nın çalışmasından alan Brans - Dicke kuramının Lagrangianı

$$L_{BD} = \sqrt{-g} \left[ \phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + L_{MADDE}(\psi) \right] \quad (2.4)$$

şeklindedir. Her iki Lagrangianı ortaya çıkan  $\omega$  JBD sabiti veya ayarlama faktörü (fudge factor) olarak anılmaktadır. JBD kuramının madde alanlarının var olduğu durum için  $\omega \rightarrow \infty$  limitinde GG kuramına indirgeneceği öngörülmekle birlikte bu sabitin değerini gözlemsel verilerin belirlemesi beklenmektedir.

Burada Brans - Dicke kuramının GG'e göre dikkat çeken farklarından bahsetmek gerekir: Öncelikle GG'in aksine Brans - Dicke kuramında kütle çekim sabiti yoktur. Bu sabitin görevini Lagrangianın ilk teriminde Ricci skaleri  $R$  ile çarpım halinde bulunan  $\phi$  Brans - Dicke skaler alanı üstlenir. Pratik amaçlar için bu skaler alandan

$$G_{Etkin} = \frac{1}{\phi} \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanan lokal bir etkin kütle çekim sabiti üretilebilir. Dirac ve Sciama'nın çalışmalarına dönülecek olursa (2.2) ifadesinde  $1/G = \phi$  yazılarak bir skaler alan tanımlandığında bu alanın,  $\rho$  yoğunluk olmak üzere

$$\square \phi \approx \rho \quad (2.6)$$

gibi ikinci derece bir kısmi diferansiyel denklemi sağlaması beklenir. Bunu sağlamak için Brans - Dicke Lagrangianı'nın ikinci teriminde  $\phi$ 'nin birinci türevlerini içeren ifade yer almıştır.

Basitliğinin yanında Brans ve Dicke'nin yaklaşımının Jordan'inkinden önemli farkı, varlığı önerilen skaler alan  $\phi$ 'nin madde ile doğrudan etkileşim halinde olmayıp uzay - zaman ile etkileşmesidir. Buradaki amaç ZEP'nin sağlanabilmesidir. Ancak bunu yaparken 'Güçlü Eşdeğerlik Prensibi'nden feragat edilmektedir. Zira maddenin tek etkisi uzay-zaman geometrisi olmaktan çıkmıştır. (2.4) eylem integralinin metriğe göre varyasyonu alındığında

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} \left( \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi \right) + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi), \quad (2.7)$$

skaler alana göre varyasyonu alındığında

$$\frac{2\omega}{\phi} \square \phi + R - \frac{\omega}{\phi^2} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi = 0, \quad (2.8)$$

alan denklemleri elde edilir. Burada  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$  Einstein tensörü,  $T_{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$  enerji - momentum tensörü,  $\nabla_\mu$  kovaryant türev,  $\square \equiv \nabla^\mu \nabla_\mu$  ve  $A'(x) \equiv \partial A(x)/\partial x$ 'dir. Eğer (2.7) denkleminin izi alınır ve (2.8) denkleminde  $R$  yerine konulursa

$$(2\omega + 3) \square \phi = \kappa T, \quad (2.9)$$

elde edilir. Burada  $\mathcal{T} \equiv g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$  şeklindedir. Son denklem bize skaler alana enerji - momentum tensörünün kaynaklık ettiğini ifade etmektedir ki; bu Mach ilkesi ile bire bir örtüşür. Bu özelliği o dönemde JBD kuramını GG'in bir adım ötesine taşımış olsa da akademik camia nihai değerlendirme için gözlem verilerinin sonuçları üzerine yoğunlaşmıştır. Burada iki teori için ayırt edici faktörler vardır. Bunlar JBD kuramındaki skaler alan  $\phi$  ve ayarlama faktörü  $\omega$ 'dır. İki teoriyi bu parametrelerle ayırt etmenin çok kolay olmadığı söylenebilir. (2.9)'de  $\phi$  için kaynak olarak stres-enerji tensörünün yalnızca diyagonal elemanlarının katkı sağlaması skaler alanın fotonla etkileşime girmediği sonucunu doğurur. Bu ise örneğin ışık sapması gözlemleri göz önüne alındığında GG'den farklı bir sonuç beklenmeyeceği anlamına gelir. 1970'lerin başlarındaki veriler ayarlama faktörü için  $\omega > 5$  öngörürken 1990'ların Very Long Baseline Interferometer verisi  $\omega > 3600$ , 2003'de elde edilen Cassini - Huygens veri sonuçları  $\omega > 40000$  olması gerektiğini öngörmüştür [10].

JBD kuramını özel kılan iki önemli niteliği bulunmaktadır. Bunlardan ilki kuramsal gerekçelerle (tam *Mach*çılık) GG'e alternatif olarak ortaya atılan ilk başarılı teori olarak

kabul edilmesidir. İkinci özelliği ise MEK kuramlarının bir ana grubu olan Skaler - Tensör Kuramlarının (STK) atası pozisyonunda olmasıdır. Burada kısaca ifade edilen JBD kuramı STK grubu için bir prototip kuram olarak kabul edilmektedir.

### 2.1.2. Genel Göreliliğin Teleparalel Eşdeğeri

Genel göreliliğin kütle çekimini yorumlamada kullandığı başarılı geometri dili, temel kuvvetleri birleştirme motivasyonu ile ortaya atılan alternatif kuramlara da esin kaynağı olmuştur.

GG'e alternatif kuramların en ilgi çekici olanlarından biri de bizzat Einstein tarafından Büyük Birleşik Kuram bağlamında ortaya atılmış bulunan Teleparalel Kütle Çekim Kuramıdır [11]. Bu kuramda Einstein GG'te sağlanan kazanımları Maxwell elektromanyetizmasına da taşımak istemiştir. Ancak elektromanyetizma için kütle çekimde kabul edildiği şekilde bir ZEP bulunmamaktadır. GG ise ZEP üzerine kuruludur. Bu durumu çözmek amacıyla Einstein GG'de kullandığı uzay eğriliği fikrinden tüm uzay-zamanın düz olduğu uzak paralelizm (Teleparalelizm) fikrine yönelmiştir. Bundan dolayı Einstein uzak paralelizmi inşa etmek için GG'te kullandığı ve eğriliğin kaynağı pozisyonundaki metrik koneksiyondan vazgeçmiştir. Uzak paralelizmi sağlayan global olarak düz ancak trivial olmayan koneksiyon ise Wietzenböck tarafından tanımlanmıştır [12]. Einstein teleparalel kütle çekimi kuramını, tetradlar cinsinden ifade edilen Wietzenböck koneksiyonları üzerine inşa etmiştir.

Bu kuramın dinamik değişkenleri 4 boyut için 16 tetrad potansiyelidir. Kavramsal farklılıklara rağmen kuramın GG ile eşdeğer sonuçlar verdiğini gören Einstein, GG'in 10 adet serbestlik derecesi ile elektromanyetizmanın 6 adet serbestlik derecesinin bu tetrad potansiyelleriyle ifade edilebileceğini düşünmüştür. Daha sonra durumun böyle olmadığı, GG'ten artı kalan 6 serbestlik derecesinin Lorentz dönüşümleri ile ilgili olduğu ortaya çıkmış ve kuram gözden düşmüştür. Yıllar sonra Møller [13, 14] tetradlar ile inşa edilen enerji-momentum komplekslerinin metrikler ile oluşturulanlara nazaran daha mâkul gerekçelere dayandığını ifade ederek Einstein'ın fikirlerini yeniden canlandırmıştır. Bunun ardından Pellegrini ve Plebanski [15] kuramı bir ayar kuramı formunda tekrar formüle ederek son haline getirmişlerdir. GG ile eşdeğer sonuçlar öngördüğü için sıklıkla "Genel Göreliliğin Teleparalel Eşdeğeri" olarak adlandırılan kuram artık ötelemeler için bir ayar kuramı

olarak ele alınmaktadır. GGTE'ni kuramsal mânada önemli kılan unsur da onun bir ayar kuramı oluşudur. GG ile kuantum kuramını birleştirmede karşılaşılan kuantum kuramının lokal olmayışı ve dolayısı ile eşdeğerlik prensibine sahip olmaması kaynaklı kavramsal uyumsuzluklar GGTE için geçerli değildir. Detaylı bilgi bu bölümünün hazırlanmasında yararlanılan H. I. Arcos ve J. G. Pereira'nın çalışmasından [16] edinilebilir. GGTE kuramının öngördüğü kütle çekiminin ve kavramsal yapısının anlaşılması açısından tetradlar ve ayar kuramı yaklaşımı üzerinde kısaca durmak faydalı olacaktır.

İleriki bölümlerde literatürdeki gösterim geleneğini bozmamak adına metrik koneksiyonlarla oluşturulan niceliklerin üzerinde “o”, Wietzenböck koneksiyonları ile oluşturulan niceliklerin üzerinde “•” işareti kullanılacaktır.

### 2.1.2.1. Tetradlar

GG'te metrik tensör hem nedensel hem dinamik yapı için temel değişken pozisyonunda olmakla beraber buna alternatif olarak uzay-zamanın her noktasında eylemsiz bir referans sistemi tanımlayan yerel bir çerçeve takımı olan tetradlar düşünülebilir. Tetradlar  $e_a^\mu$  şeklinde bir tanjant uzayı bir uzay-zaman indisi ile ifade edilirler. Uzay-zaman ve tanjant uzayı indisleri arasında geçiş yapılmasına imkân tanırırlar. GG'te yerel koordinatlar için baz vektörleri  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$  ile tanjant uzayı baz vektörleri  $\frac{\partial}{\partial x^a}$  arasındaki ilişki tetradlar tarafından kurulur. Aşağıda açıklanacak holonomik durum için tetrad ve tersi sırası ile  $e_a^\mu$  ve  $e_\mu^a$  ile, anholonomik durum için  $h_a^\mu$  ve  $h_\mu^a$  ile gösterilecektir. Bu yapılar arasında

$$e_a^\mu e_\mu^b = h_a^\mu h_\mu^b = \delta_b^a \quad (2.10)$$

$$e_a^\mu e_\nu^a = h_a^\mu h_\nu^a = \delta_\nu^\mu \quad (2.11)$$

ilişkileri bulunmaktadır. Ayrıca doğrusal baz vektörleri  $e_a$ 'lar arasında

$$[h_a, h_b] = h_a^\mu h_b^\nu (\partial_\mu h_\nu^c - \partial_\nu h_\mu^c) h_c = f_{ab}^c h_c \quad (2.12)$$

komütasyon bağıntıları bulunur. Burada  $f_{ab}^c$ 'ler yapı katsayıları veya anholonomi katsayıları olarak anılır. Holonomik durum yapı katsayılarının sıfır olduğu

$$[e_a, e_b] = 0 \quad (2.13)$$

özel durumu ile tanımlanır. Bu katsayıların manifoldun bütün noktalarında sıfır olduğu çerçevelere holonomik çerçeve denir. Bu çerçeveler bir sonraki kısımda da görüleceği üzere eylemsizdir. Kütle çekiminin olmadığı eylemsiz düz Minkowski uzay-zamanı için uzay-zaman ve tanjant uzayı indisleri arasındaki

$$\eta_{\mu\nu} = e_{\mu}^a e_{\nu}^b \eta_{ab} \quad (2.14)$$

ilişkisi holonomik çerçeveye örnektir. Kütle çekim ve eylemsizliğin mevcut olduğu doğrusal çerçeveler için ise bu ilişki

$$g_{\mu\nu} = e_{\mu}^a e_{\nu}^b \eta_{ab} \quad (2.15)$$

şeklinde dir. Burada (2.15) göz önüne alındığında tetradların bir anlamda metrik tensörün kare kökü olduğu söylenebilir. Tetrad– metrik tensör ilişkisi ve doğrusal çerçeveler hakkında bu kısa tanıtıcı bilgilere ek olarak eylemsizlik kuvvetlerinin anlaşılması açısından spin koneksiyonlara değ inmek faydalı olacaktır.

#### 2.1.2.2. *Eylemsizlik Etkileri ve Spin Koneksiyonu*

Özel görelilik kuramı ele alındığında kuramın eylemsiz çerçeveler için Lorentz kovaryansına sahip olduğu hatırlanacaktır. Bu durumda  $\{x^{\mu}\}$  koordinat sisteminde ifade edilen eylemsiz  $e'^a_{\mu}$  çerçevesi

$$e'^a_{\mu} = \partial_{\mu} x'^a \quad (2.16)$$

holonomik – bu özel durum için aş ıkar tetrad ifadesi de kullanılmaktadır – formunda olacaktır. Yerel  $x'^a(x^{\mu})$  koordinatları üzerinde uygulanan bir

$$x^a = \Lambda^a_b(x) x'^b \quad (2.17)$$

Lorentz dönüşümü (2.16) holonomik çerçevesinde

$$e^a_{\mu} = \Lambda^a_b(x) e'^b_{\mu} \quad (2.18)$$

dönüşümüne neden olacaktır. (2.16), (2.17) ve (2.18) beraber kullanıldığında

$$\dot{A}^a_{b\mu} = \Lambda^a_e(x) \partial_\mu \Lambda_b^e(x) \quad (2.19)$$

$e^a_\mu$  çerçevesindeki eylemsizlik etkilerini temsil eden Lorentz koneksiyonu olmak üzere

$$e^a_\mu = \partial_\mu x^a + \dot{A}^a_{b\mu} x^b \equiv \mathcal{D}_\mu x^a \quad (2.20)$$

elde edilecektir. Burada  $\mathcal{D}_\mu$  koneksiyona karşılık gelen kovaryant türevidir. Genel spin koneksiyonu  $\omega^a_{b\mu}$ 'nün  $\Lambda^a_b(x)$  yerel bir Lorentz dönüşümü altında

$$\omega^a_{b\mu} = \Lambda^a_e(x) \omega'^e_{d\mu} \Lambda_b^d(x) + \Lambda^a_e(x) \partial_\mu \Lambda_b^e(x) \quad (2.21)$$

şeklinde değişim göstermesinin [17] bir sonucu olarak (2.19)  $\dot{A}'^e_{d\mu} = 0$  şeklindeki bir spin koneksiyonun Lorentz dönüşümünden

$$\dot{A}^a_{b\mu} = \Lambda^a_e(x) \dot{A}'^e_{d\mu} \Lambda_b^d(x) + \Lambda^a_e(x) \partial_\mu \Lambda_b^e(x). \quad (2.22)$$

şeklinde elde edilebilir. Bu şekilde eylemsiz bir çerçeveden başlayarak  $\Lambda^a_b(x^\mu)$  yerel Lorentz dönüşümleri ile değişik türdeki eylemsiz olmayan çerçevelere geçiş yapılabilir. Her bir değişik türdeki sayısız çerçeve ise birbirine  $\Lambda^a_b = \text{sabit}$  olacak şekilde manifold üzerindeki noktadan bağımsız olan global Lorentz dönüşümleri ile bağlıdırlar.

(2.18) denklemi Lorentz dönüşümünü tetradlar cinsinden

$$\Lambda^a_b(x) = e^a_\mu e'^\mu_b \quad (2.23)$$

şeklinde ifade etmeye imkân tanır.  $e^a_\mu$  çerçevesi için  $\dot{A}^a_{bc} = \dot{A}^a_{b\mu} e_c^\mu$  olmak üzere anholonomi katsayıları

$$f^c_{ab} = \dot{A}^c_{ba} - \dot{A}^c_{ab} \quad (2.24)$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan Lorentz koneksiyonları için

$$\dot{A}^a_{bc} = \frac{1}{2} (f^a_{bc} + f^a_{cb} - f^a_{ca}) \quad (2.25)$$

elde edilir. Beklendiği üzere saf eylemsiz koneksiyondan elde edilen  $\dot{A}^a_{b\mu}$  için eğrilik  $\dot{R}^a_{bv\mu}$ ,

$$\dot{R}^a_{bv\mu} \equiv \partial_v \dot{A}^a_{b\mu} - \partial_\mu \dot{A}^a_{bv} + \dot{A}^a_{ev} \dot{A}^e_{b\mu} - \dot{A}^a_{e\mu} \dot{A}^e_{bv} = 0 \quad (2.26)$$

sıfır olacaktır. Aşıkâr  $e^a_\mu$  tetradı için, burulma tensörünün de

$$\dot{T}^a_{v\mu} \equiv \partial_v e^a_\mu - \partial_\mu e^a_v + \dot{A}^a_{ev} e^e_\mu - \dot{A}^a_{e\mu} e^e_v = 0 \quad (2.27)$$

şeklinde sıfır olacağı görülmektedir. Öte yandan burulma tensörü özelinde önemli bir nokta spin koneksiyonunun sıfırdan farklı olduğu durum için burulma tensörü Lorentz dönüşümü altında

$$\dot{T}^a_{v\mu} \rightarrow \Lambda^b_a \dot{T}^b_{v\mu} \quad (2.28)$$

şeklinde kovaryantlık gösterirken spin koneksiyonun sıfır olduğu saf tetrad durumu için 2.3.5.3. kısmında değinileceği üzere kovaryant olmayışıdır.

Sıradaki kısımda modern matematiksel fizikte önemli bir yer tutan ayar kuramlarının bakış açısı ile GGTE'ne yaklaşım sağlanacaktır.

### 2.1.2.3. Ötelemeler için Ayar Kuramı

Ayar kuramları tanjant demetleri, bu demetlerde tanımlı ayar alanlarıyla tanımlanan koneksiyonlar, koneksiyonlarla inşa edilen kovaryant türevler, eğrilikler vb. gibi geometrik varlıklarla ilgilenir. Böylece vektörel/tensörel niceliklerin bir noktadan diğer bir noktaya taşınırken nasıl değişim gösterdikleri belirlenebilmektedir. Ayar kuramlarının kökeni Noether teoremi kaynaklı korunum yasalarına dayanmaktadır. Kütle çekiminin bir ayar kuramı olarak ele alındığı ilk çalışma Utiyama'nın çalışması [18]'dir. GGTE Plebanski ve Pellegrini'nin çalışmaları ile kütle çekimi için ötelemelerin ayar kuramı haline gelmiştir. Burada diğer ayar kuramlarında olduğu gibi dinamik değişken, ayar potansiyelidir. Bu ayar potansiyeli  $B_\mu$

$$B_\mu = B^a_\mu P_a \quad (2.29)$$

değerlerini öteleme grubunun Lie cebirinden almaktadır. Burada  $P_a = \partial/\partial x^a$  tanjant uzayı için sonsuz küçük öteleme üretici olup

$$[P_a, P_b] = 0 \quad (2.30)$$

komütasyonunu sağlamaktadır. Ayar dönüşümleri tanjant uzayı koordinatları üzerinde sonsuz küçük bir  $\eta^a \equiv \eta^a(x^\mu)$  parametresi ile gerçekleştirilen

$$x^{a'} = x^a + \eta^a \quad (2.31)$$

şeklindeki yerel bir öteleme dönüşümüdür. Bu dönüşüm sonsuz küçük öteleme üretici cinsinden ifade edilecek olursa

$$\delta x^a = \eta^b P_b x^a \quad (2.32)$$

elde edilir. Bu form sonsuz küçük dönüşüm olarak ifade edilir. Genel bir alan kaynağı  $\phi(x^\mu)$  için aynı  $x^\mu$  noktasında bu dönüşüm

$$\delta \phi = \eta^a P_a \phi \quad (2.33)$$

şeklinde olacaktır. Ayar kuramlarının anahtar özelliği bu tarz dönüşümleri yerellikten çıkararak globalleştirmektir. Bunun için (2.33) dönüşümü  $\phi$ 'nin türevleri için de yazılabilmelidir. Türev için elde edilen

$$\delta(\partial_\mu \phi) = \eta^a \partial_a \partial_\mu \phi + (\partial_a \phi) \partial_\mu \eta^a \quad (2.34)$$

ifadesi kovaryant değildir. Burada kovaryansı sağlamak adına

$$B_\mu = B^a{}_\mu P_a \quad (2.35)$$

olacak şekilde bir ayar potansiyeli tanımlanır ve  $\phi$  ötelemeleri için ayar kovaryant türevi

$$h_\mu \phi = \partial_\mu \phi + B^a{}_\mu P_a \phi \quad (2.36)$$

olarak tanımlanır. Böylelikle (2.34)'de  $\partial_\mu$  yerine  $h_\mu$  yazıldığında

$$\delta(h_\mu \phi) = \eta^a \partial_a \partial_\mu \phi \quad (2.37)$$

skaler alanın türevi için kovaryantlık sağlanmış olur. Ayar kovaryant türevi

$$h^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + B^a{}_\mu \equiv h_\mu x^a \quad (2.38)$$

şeklinde tanımlanan anholonomik tetrad cinsinden

$$h_\mu \phi = h^a{}_\mu \partial_a \phi \quad (2.39)$$

formunda yazılabilir. Ayar potansiyeli  $B^a{}_\mu$  için gerçekleştirilen

$$B^{a'}{}_\mu = B^a{}_\mu - \partial_\mu \eta^a \quad (2.40)$$

dönüşümü altında tetradın

$$h^{a'}{}_\mu = h^a{}_\mu \quad (2.41)$$

sağladığı görülecektir. Bu durum tetradın ayar invaryant olduğunu gösterir. Ayar kuramlarında kovaryant türevlerin komütasyonlarından alan şiddeti elde edilir. Bu durumda öteleme ayar kovaryant türevi için alan şiddeti

$$\dot{T}^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu B^a{}_\nu - \partial_\nu B^a{}_\mu \equiv \partial_\mu h^a{}_\nu - \partial_\nu h^a{}_\mu \quad (2.42)$$

olacaktır. (2.40) göz önüne alındığında  $\dot{T}^a{}_{\mu\nu}$ 'de ayar invaryanttır. Alan şiddeti ifadesi için bir koneksiyon

$$\dot{\Gamma}^a{}_{\mu\nu} = \partial_\nu h^a{}_\mu \quad (2.43)$$

olacak şekilde tanımlandığında alan şiddetinin

$$\dot{T}^a{}_{\mu\nu} = \dot{\Gamma}^a{}_{\nu\mu} - \dot{\Gamma}^a{}_{\mu\nu} \quad (2.44)$$

burulma tensörü formunda olduğu görülecektir. Öte yandan anholonomik tetrad (2.38) için Weitzenböck koneksiyonu

$$\dot{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} = h_a^\rho \partial_\nu h^a_\mu \equiv h_a^\rho \dot{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} \quad (2.45)$$

şeklinde olacağından Wietzenböck koneksiyonu burulması ile alan şiddeti arasında

$$\dot{T}^\rho_{\mu\nu} = \dot{\Gamma}^\rho_{\nu\mu} - \dot{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} \quad (2.46)$$

ilişkisi bulunur. Buradan çıkan sonuç alan şiddetinin tetrad bazında ifade edilen burulma tensöründen başka birşey olmadığıdır.

Burada Wietzenböck koneksiyonu üzerinde biraz durmak GGTE'nin iyi anlaşılabilmesi açısından faydalı olacaktır. Wietzenböck koneksiyonu için burulma tensörü genel anlamda sıfırdan farklı olsa da eğrilik tensörü her zaman sıfırdır. Wietzenböck koneksiyonu ile tanımlanan kovaryant türev tetrad alanı için özdeş olarak sıfırdır.

$$\dot{\nabla}_\nu h^a_\mu \equiv \partial_\nu h^a_\mu - \dot{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} h^a_\rho = 0 \quad (2.47)$$

Bu GGTE'nin en önemli ön kabulü olan 'mutlak paralellik' varsayımının ifadesidir.

GG'te uzay-zamanın yapısından sorumlu olan burulmasız Levi - Civita koneksiyonu  $\overset{\circ}{\Gamma}^\rho_{\mu\nu}$  ile eğriliksiz Weitzenböck koneksiyonu  $\dot{\Gamma}^\rho_{\mu\nu}$  arasında

$$\dot{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} + \dot{K}^\rho_{\mu\nu} \quad (2.48)$$

ilişkisi bulunur. Burada  $\dot{K}^\rho_{\mu\nu}$  Wietzenböck koneksiyonu için kontorsiyon olup burulma tensörleri cinsinden

$$\dot{K}^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( \dot{T}^\rho_{\mu\nu} + \dot{T}^\rho_{\nu\mu} - \dot{T}^\rho_{\mu\mu} \right) \quad (2.49)$$

şeklinde ifade edilir. Kontorsiyon aynı zamanda bir koneksiyonun Levi - Civita gibi metrik koneksiyon olup olmadığının bir ölçüsüdür.

Buraya kadar geline nokta ayar potansiyeli  $B^a_\mu$  ile alan şiddeti ve burulma tensörü arasındaki ilişki gösterilmiş, tetrad alanları ile tanımlanan Wietzenböck koneksiyonu

ile metrik tensör ile tanımlanan bir koneksiyon olan Levi - Civita koneksiyonu arasındaki ilişkiden bahsedilmiştir. İleriki kısımlarda GGTE için Lagrangian ve alan denklemleri yazılacak daha sonra teleparalel kuvvet denklemi elde edilerek kuramın GG ile eşdeğerliğinden bahsedilecektir.

#### 2.1.2.4. *Lagrangian ve Alan Denklemleri*

GGTE Lagrangianı GG'deki Ricci skaler  $R$ 'nin yerine burulma skaleri  $T$  getirilerek

$$\dot{\mathcal{L}} = \frac{h}{2k^2} \dot{T} \quad (2.50)$$

şeklinde yazılır. Buradaki burulma skaleri  $T$  burulma tensörünün indirgenemeyen bileşenleri cinsinden yazılacak olursa Lagrangian

$$\dot{\mathcal{L}} = \frac{h}{2k^2} \left[ \frac{1}{4} \dot{T}^\rho_{\mu\nu} \dot{T}^{\mu\nu}_\rho + \frac{1}{2} \dot{T}^\rho_{\mu\nu} \dot{T}^{\nu\mu}_\rho - \dot{T}_{\rho\mu}{}^\rho \dot{T}^{\nu\mu}_\nu \right] \quad (2.51)$$

halini alır. Burada  $k^2 = 8\pi G/c^4$  ve  $h = \det(h^a_\mu)$  'dür.

Bu Lagrangian aynı zamanda süperpotansiyel  $\dot{S}^{\rho\mu\nu}$

$$\dot{S}^{\rho\mu\nu} = -\dot{S}^{\rho\nu\mu} = \left[ \dot{K}^{\mu\nu\rho} - g^{\rho\nu} \dot{T}^{\sigma\mu}_\sigma + g^{\rho\mu} \dot{T}^{\sigma\nu}_\sigma \right] \quad (2.52)$$

tanımlanarak ve

$$T^\mu_{\mu\rho} = K^\mu_{\rho\mu} \quad (2.53)$$

özdeşliği kullanılarak

$$\dot{\mathcal{L}} = \frac{h}{4k^2} \dot{T}_{\rho\mu\nu} \dot{S}^{\rho\mu\nu} \quad (2.54)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Bu ifade kontorsiyon cinsinden yazıldığında

$$\dot{\mathcal{L}} = \frac{h}{2k^2} \left( \dot{K}^{\mu\nu\rho} \dot{K}_{\rho\nu\mu} - \dot{K}^{\mu\rho}_\mu \dot{K}^{\nu}_\rho{}^\nu \right) \quad (2.55)$$

ifadesine dönüşür. Kontorsiyon cinsinden ifade edilebilen bu Lagrangian GG ile GGTE Lagrangianlarını birbirine bağlamada kullanılabilir. Bu gerçekleştirildiğinde iki Lagrangian

arasında

$$\dot{\mathcal{L}} = \overset{\circ}{\mathcal{L}} - \partial_\mu \left( 2 h k^{-2} \dot{T}^{\nu\mu}{}_\nu \right) \quad (2.56)$$

ilişkisi olduğu görülecektir. Burada

$$\overset{\circ}{\mathcal{L}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2k^2} \overset{\circ}{R} \quad (2.57)$$

standart GG'te Einstein denklemlerinin türetildiği Einstein - Hilbert Lagrangianıdır. Buradan da görüleceği gibi GG ve GGTE arasındaki fark bir diverjans terimidir. Møller'in GG'i tetradlar cinsinden ifade ettiği Lagrangian ile Einstein - Hilbert Lagrangianı arasındaki farkın da bir diverjans terimi olduğu göz önüne alınarak Møller Lagrangianı Wietzenböck koneksiyonları cinsinden yazıldığında sonucun GGTE ile bire bir örtüştüğü görülmektedir [16]. Lagrangian (2.54) madde alanlarını da içerecek şekilde

$$\mathcal{L} = \dot{\mathcal{L}} + \mathcal{L}_{MADDE} \quad (2.58)$$

formunda yazılarak ayar alanı  $B^a{}_\rho$ 'ya göre türetildiğinde

$$\partial_\sigma (h \dot{S}_a{}^{\rho\sigma}) - k^2 (h \dot{J}_a{}^\rho) = k^2 (h \Theta_a{}^\rho) \quad (2.59)$$

GGTE için alan denklemleri elde edilir. Burada  $\dot{S}_a{}^{\rho\sigma} = h_a{}^\lambda \dot{S}_\lambda{}^{\rho\sigma}$  ve

$$h \Theta_a{}^\rho \equiv -\frac{\delta \mathcal{L}_{MADDE}}{\delta B^a{}_\rho} \equiv -\frac{\delta \mathcal{L}_{MADDE}}{\delta h^a{}_\rho} = -\left( \frac{\partial \mathcal{L}_{MADDE}}{\partial h^a{}_\rho} - \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}_{MADDE}}{\partial_\lambda \partial h^a{}_\rho} \right) \quad (2.60)$$

enerji-momentum tensörüdür. Ayar akımı  $\dot{J}$  ise

$$h \dot{J}_a{}^\rho \equiv -\frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial B^a{}_\rho} \equiv -\frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial h^a{}_\rho} = \frac{h}{k^2} h_a{}^\lambda \dot{S}_c{}^{\nu\rho} \dot{T}^c{}_{\nu\lambda} - h_a{}^\rho \dot{\mathcal{L}} \quad (2.61)$$

olup, burada kütle çekim alanına ait enerji ve momentumu ifade eder.

### 2.1.2.5. Teleparalel Kuvvet Denklemi ve Genel Görelilik

Kütlesi  $m$  olan bir parçacığın kütle çekimini ifade eden  $B^a{}_\mu$  ayar alanındaki hareketi

$$\mathcal{S} = \int_A^B [-mc d\sigma - mc B^a{}_\mu u_a dx^\mu] \quad (2.62)$$

eylem integraliyle ifade edilir. Burada tanjant uzayı çizgi elemanı  $d\sigma = (\eta_{ab} dx^a dx^b)^{1/2}$  şeklindedir. Lagrangianın ilk terimi serbest parçacık eylemi olup, ikinci terim parçacığın kütle çekim alanı ile etkileşimini ifade etmektedir. Bu Lagrangian

$$d\sigma = u_a dx^a \quad (2.63)$$

kullanılarak

$$\mathcal{S} = -mc \int_A^B u_a (\partial_\mu x^a + B^a{}_\mu) dx^\mu \quad (2.64)$$

formunda yazılabilir. Tetrad ile ayar alanı arasındaki

$$h^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + B^a{}_\mu \quad (2.65)$$

ilişkisi kullanılarak bu eylem

$$\mathcal{S} = - \int_A^B mc h^a{}_\mu dx^\mu = - \int_A^B mc u_\mu dx^\mu \quad (2.66)$$

olarak yazılır. Burada  $u_\mu dx^\mu = ds$  olduğundan bu eylem spinsiz bir parçacık için GG'te yazılan

$$\mathcal{L}_{GG} = - \int_A^B mc ds \quad (2.67)$$

eylemine eşittir ( $ds = (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{1/2}$ ).

GGTE için hareket denklemi (2.62) Lagrangianından

$$h^a{}_\mu \frac{du_a}{ds} = \dot{T}^a{}_{\mu\rho} u_a u^\rho \quad (2.68)$$

şeklinde elde edilir. Burada burulma tensörü  $\dot{T}^a{}_{\mu\rho}$  ayar potansiyelinin alan şiddetine karşılık

gelmektedir. Bu hareket denkleminin sol tarafı tetrad sayesinde uzay-zaman indisleri ile ifade edildiğinde

$$h^a{}_\mu \frac{du_a}{ds} = \frac{du_\mu}{ds} - \dot{\Gamma}^\theta{}_{\mu\nu} u_\theta u^\nu \quad (2.69)$$

olacaktır. Bu ifade Wietzenböck koneksiyonu ile

$$u^\nu \dot{\nabla}_\nu u_\mu \equiv \frac{du_\mu}{ds} - \dot{\Gamma}^\theta{}_{\mu\nu} u_\theta u^\nu \quad (2.70)$$

şeklinde tanımlanan Wietzenböck kovaryant türevi olarak ifade edilebilir. Böylece (2.68)

$$\frac{du_\mu}{ds} - \dot{\Gamma}^\theta{}_{\mu\nu} u_\theta u^\nu = \dot{T}^\theta{}_{\mu\nu} u_\theta u^\nu \quad (2.71)$$

halini alacaktır. Denklemin sol tarafının jeodezik denklemi formunda olduğu göz önüne alındığında sağ tarafın sıfırdan farklı oluşu bir kuvvet ifade eder. Dolayısıyla sağ taraftaki burulma tensörü kütle çekim kuvvetine karşılık gelmektedir. Daha kompakt bir ifade elde etmek adına

$$\dot{T}^\theta{}_{\mu\nu} u_\theta u^\nu = -\dot{K}^\theta{}_{\mu\nu} u_\theta u^\nu \quad (2.72)$$

özdeşliği kullanılarak bir teleparalel kovaryant türev  $u^\nu \dot{D}_\nu u_\mu$

$$u^\nu \dot{D}_\nu u_\mu \equiv \frac{du_\mu}{ds} - \left( \dot{\Gamma}^\theta{}_{\mu\nu} - \dot{K}^\theta{}_{\mu\nu} \right) u_\theta u^\nu = 0 \quad (2.73)$$

şeklinde ifade edilebilir. Metrik koneksiyon ve Wietzenböck koneksiyonu arasındaki ilişkiden (2.73) ifadesinin

$$u^\nu \overset{\circ}{\nabla}_\nu u_\mu \equiv \frac{du_\mu}{ds} - \overset{\circ}{\Gamma}^\theta{}_{\mu\nu} u_\theta u^\nu = 0 \quad (2.74)$$

şeklinde yazılan GG'teki jeodezik denkleminin eşit olduğu görülür ki; bu iki kuramın kavramsal farklarının yanında spinsiz bir parçacığın hareketi için eşdeğer sonuçlar öngördüklerini gösterir.

### 2.1.2.6. Eşdeğerlik Prensibi

Bilindiği gibi elektromanyetizma üniter  $U(1)$  grubu için bir ayar teorisi olarak başarılı bir şekilde formüle edilmiştir. Bu formülasyonda  $m$  kütleli  $q$  yüklü bir parçacığın  $A_\mu$  elektromanyetik alanındaki hareketi

$$\mathcal{S} = -mc \int_A^B \left( u_a \partial_\mu x^a + \frac{q}{mc^2} A_\mu dx^\mu \right) \quad (2.75)$$

ile ifade edilebilir. Bu Lagrangian'dan türetilen hareket denklemi ise  $F^{ac}$  elektromanyetik alan şiddeti olmak üzere

$$\frac{du^a}{ds} = \frac{q}{mc^2} F^{ac} u_c \quad (2.76)$$

ile ifade edilen Lorentz denklemidir. Bu denklemin ifade ettiği elektromanyetik kuvvet  $\frac{q}{m}$  oranına bağlı olduğundan parçacıkların taşıdığı yük ve sahip oldukları kütleye göre değişecektir. Dolayısı ile GG'te kütle çekimin kütleden bağımsız serbest düşme sağlayan evrenselliğine sahip değildir. Bundan ötürü elektromanyetizmanın bir eşdeğerlik ilkesi yoktur. Bu aşamada GGTE'nin ayar teorisi yaklaşımını göz önünde bulundurularak elektromanyetizmadaki durum ile bir benzerlik taşıyıp taşımadığının incelenmesi GGTE'nin ilginç yönlerine ışık tutacaktır.

Bu durumu değerlendirmek adına ayar potansiyeli  $B^a_\mu$  ile ifade edilen kütle çekim alanında spinsiz bir parçacığın hareketini göz önüne almak faydalı olacaktır. Bu parçacık için kütle çekimsel kütle  $m_K$  ile eylemsizlik kütlesi  $m_E$  olmak üzere (2.75) Lagrangianına benzer şekilde

$$\mathcal{S} = \int_A^B \left( -m_E c d\sigma - m_K c B^a_\mu u_a dx^\mu \right) \quad (2.77)$$

olarak ifade edilir. Bu eylem integralinden

$$\left( \partial_\mu x^a + \frac{m_K}{m_E} B^a_\mu \right) \frac{du_a}{ds} = \frac{m_K}{m_E} \dot{T}^a_{\mu\rho} u_a u^\rho \quad (2.78)$$

hareket denklemi elde edilir. Bu hareket denklemi GG'deki gibi bir jeodezik denklemi değil elektromanyetizmadaki gibi bir kuvvet denklemidir. Yine Lorentz kuvvetindeki gibi kütle çekimi kuvveti  $\frac{m_K}{m_E}$  oranına bağlıdır. Bunun yanında kuvvet denklemi  $\frac{m_K}{m_E}$  oranına bağlı olsa

da  $B^a{}_\mu$  ve  $\dot{T}^a{}_{\rho\mu}$  bu orandan bağımsızdır. Dolayısıyla (2.59) denklemleri  $B^a{}_\mu$  için çözülebilir ve kuvvet denkleminde yerine yazılarak parçacığın hareketi belirlenebilir. Aynı şey GG için geçerli değildir. GG  $m_K \neq m_E$  durumunda tutarlılığını yitirmektedir [19].

## 2.2. GENELLEŞTİRİLMİŞ KÜTLE ÇEKİMİ

### 2.2.1. Genel Göreliliğin Modifikasyonları

Başarılı bir fiziksel teorinin başarılı bulunduğu alanın dışına çıkıldığında gözlemsel veriden farklı sonuçlar öngörmesi, teorinin limitlerinin belirlenmesine ve teorinin bu limitler dışında modifiye edilmesine yol açar. Bunun en belirgin örneklerinden biri GG'tir. GG'in Güneş Sistemi ölçeği dışına çıkıldığında gözlem verileri ile uyumsuzluğu aşikâr olmasına rağmen GG'in modifiye edilmesi gerektiği yönünde halen yaygın bir kanaat olduğu söylenemez. Buna karşın GG'in gözlemler nedeniyle eksik ya da zayıf kaldığı taraflarını modifiye etme gerektiği görüşü gün geçtikçe taraftar toplamaktadır. Bu camianın temel motivasyonu gözlemsel olmakla birlikte GG'in eksik yanları kuramsal motivasyonların da etkisiyle zaman içinde daha da derinleşen bir sorunlar kümesine dönüşmüştür. Takip eden bölümlerde GG'in eksik tarafları ve bu eksikliklere çözüm olarak önerilen bazı kuramlardan bahsedilecektir.

#### 2.2.1.1. Genel Göreliliğin Eksikleri ve MEK

Tarihi başarıları bir yana bırakıldığında GG bazı teorik ve gözlemsel çıkmazları içinde barındırmaktadır. Bunları ultraviyole ve infrared rejimleri olarak sınıflandırmak mümkündür. ultraviyole rejimi ile ilgili meseleler daha ziyade teorik ve kuantum kuramı ile bağlantılıdır. Kuramsal perspektiften bakıldığında GG ile kuantum kuramını bir arada barındıran tutarlı bir kuantum kütle çekimi kuramının bulunmadığı görülmektedir. Böyle bir kuram hem renormalize edilebilir hem de üniter olmalıdır. Üniterlikten kasıt kuramın hem hayalet alanlardan hem de takyon alanlarından arınmış olmasıdır. GG ile kuantum kuramının uyum sağladığı zemin örneğin erken Evren'in ve karadelik tekilliklerinin daha iyi anlaşılmasına imkân tanıyacaktır. Bu zeminin oluşması için GG'in renormalize edilebilir ve üniter olması gereklidir. GG'te kullanılan EH eylemi renormalize edilebilir değildir. Renormalizasyonun sağlanması için EH eylemine yüksek dereceden eğrilik terimleri eklenmelidir [20]. Öte yandan Stelle'nin çalışması [21] göstermiştir ki; GG eylem integraline ikinci derece eğrilik terimleri eklemek kuramın renormalize edilebilir olmasını sağlarken

üniterliğini bozmaktadır.

Modifiye edilmiş kütle çekim kuramlarının infrared rejimindeki motivasyonları daha çok kozmolojik ve astrofiziksel gözlem verilerinin yorumlanmasına dair problemler ile ilgilidir. Buna örnek olarak günümüzde kütle çekim için standart haline gelmiş  $\Lambda$ CDM ( $\Lambda$  Cold Dark Matter) modeli gösterilebilir. Bu model aslında bir nevi GG modifikasyonudur. Çünkü bu modelde Evren'in ivmelenerek genişlemesini açıklayabilmek adına  $\Lambda$  kozmolojik sabiti gözlemlerle belirlenecek bir parametre olarak Einstein denklemlerine eklenmektedir. Yine bu modelde gökada dönüş eğrilerinin düzlüğü, gökada kümeleri gözlemleri gibi gözlemleri açıklayabilmek için bir soğuk karanlık madde (Cold Dark Matter) terimi yine Einstein denklemlerine eklenmektedir. Dolayısı ile  $\Lambda$ CDM modelinde Einstein denklemlerinin hem kaynak hem geometri terimleri modifiye edilmektedir. Bu durumda  $\Lambda$ CDM modeli; minimal çiftlenim kabulünden vazgeçilmeden yani geometri basitliğini koruyarak mevcut gözlemlerle uyumlu bir kuram devşirme yaklaşımı olarak görülebilir. Kozmolojik sabite karşılık gelen enerji yoğunluğu

$$\rho_{\Lambda} \simeq 10^{-47} GeV^4 \quad (2.79)$$

olarak hesaplanmıştır [22]. Bu enerjinin Kuantumlu Alan Kuramı kaynaklı vakum enerjisinden kaynaklandığı fikrinden hareketle Kuantumlu Alan Kuramı için vakum enerjileri farklı cut-off ölçekleri için hesaplanmıştır. Cut-off ölçeği hesaplanacak enerjinin ıraksamaması için kuramın varsayılan geçerlilik limitidir. Bu ölçek Planck ölçeği olarak kabul edildiğinde

$$\rho_{Pl} \simeq 8.410^{76} GeV^4 \quad (2.80)$$

elde edilmektedir [23]. Tahmin edilen ile ölçülen değerler arasında 123 mertebe farkı bulunması "vakum felaketi (vacuum catastrophe)" olarak adlandırılmıştır. Mertebe farkının kaynağının seçilen cut-off ölçeğinin yüksekliğinden kaynaklandığı düşünülse de mâkul cut-off ölçekleri için mertebe farkı kabul edilemeyecek değerlerde kalmaktadır. Mertebe farkının bu derece yüksek oluşu GG ve Kuantumlu Alanlar Kuramı'nın tekrar gözden geçirilmesini gerektirmektedir. Vakum için hesaplanan enerji yoğunluğunun gözlemlerden elde edilen değerden çok farklı oluşu "karanlık enerji" şeklinde anılan, hal denklemi parametresi negatif olan egzotik kaynak terimlerini gündeme getirmiştir. Bu şekildeki bir

kaynak terimi yeni ekstra skaler alan şeklinde ifade edilebilir.

Kozmolojik sabitle ilgili dikkat çekici bir diğer husus da kozmolojik sabitin neden bu derece küçük olduğudur. Bu durumda Evren'deki enerji yoğunluğu parametresinin  $\Omega \simeq 1$  şeklinde kritik yoğunluğa yakın oluşu ilginçtir. Bu durum "kozmojik sabit problemi" olarak anılmaktadır ve GG yalın haliyle bu duruma bir açıklama getirmekten uzak görünmektedir.

Einstein denklemlerini modifiye etmede usul olarak sadece kaynak terimleri kullanmak için gerçekçi bir gerekçe bulunduğu söylenemez. Zira kaynak terimi olarak düşünülen karanlık enerji ya da karanlık madde formları halâ gizemini korumaktadır. Diğer yandan  $\Lambda$ CDM modelindeki gibi varlığı kabul edilen bir kozmolojik sabitin Evren'in erken döneminde gerçekleştiği düşünülen ani şişmeyi (enflasyon) öngörmesi mümkün değildir. Çünkü bu enflasyon döneminin ardından Evren bir radyasyon baskın evreye girmelidir ki; bunu kozmolojik sabitle sağlamak mümkün değildir. Enflasyonu sağlamak adına "inflaton" skaler alanı kullanılmaktadır. Bu durum GG kuramının kaynak terimleri kısmı yerine geometri kısmının modifiye edilmesinin daha uygun olacağı düşüncesini akıllara getirmiştir. GG alan denklemlerinin geometriden sorumlu sol tarafında yapılacak bir modifikasyonla kozmolojik sabit veya yeni kaynak terimlerine ihtiyaç duyulmadan kozmik ivmelenme verileriyle uyumlu bir kozmoloji elde edilebilir. Bu sefer kozmik ivmelenmeye dair gözlem verilerinin yükünü ekstra geometri terimleri çekecektir. Modifiye kütle çekim kuramları bağlamında enflasyon ve kozmik ivmelenme dönemleri bir arada modellenebilir. Benzer şekilde gökadalara dönme eğrileri gözlemlerinde ihtiyaç duyulan karanlık madde terimi kullanmaya ihtiyaç duyulmaksızın MEK veya Modifiye Edilmiş Newton Dinamiği gibi kuramlar vasıtasıyla gözlem verileri ile tutarlı kuramsal yapıyı inşa etmek mümkündür. Ancak karanlık madde ile ilgili MEK çalışmalarındaki başarının halen karanlık enerji bağlamındaki başarı düzeyinden uzak olduğu görülmektedir.

Evren'in enerji dağılımının tahmin edilen hali günümüz kozmolojisi için bir diğer soru işaretini teşkil etmektedir. Kozmolojik sabit ya da karanlık enerji kaynaklı enerji ile baryonik ve karanlık madde toplamının neden aynı mertebede olduğuna dair bir işaret GG'te bulunmamaktadır. Bu problem denk gelme (coincidence) problemi olarak anılmaktadır. GG için bazı modifikasyonlar bu duruma bir açıklama getirebilme potansiyeline sahiptirler [24].

$\Lambda$ CDM modeli kullanılarak gerçekleştirilen simülasyonlarda Samanyolu gökadasının uydusu pozisyonunda yaklaşık 500 kadar cüce gökada bulunması gerekirken [25] yerel grup

için sadece 38 uydu gökadanın gözlenmiş olması [26] "kayıp uydu problemi" olarak anılmaktadır.

GG'de ortaya çıkan bu eksiklikler ve  $\Lambda$ CDM türü modellerin tatmin edici bulunmayışı GG'in geometri sektörü üzerinde modifikasyonlar yapılarak yeni modeller ortaya çıkmasına neden olmuştur.

### 2.3. MODİFİYE EDİLMİŞ KÜTLE ÇEKİM KURAMLARI: SKALER-TENSÖR KURAMLARI, $F(R)$ VE $F(T)$ KURAMLARI

GG'i 4-boyutta modifiye ederek genelleştirmenin temelde iki yöntemi vardır. Bunlardan ilki EH Lagrangianı'nı minimal olmayan bir etkileşimle bir ya da birden çok skaler alan kullanılarak modifiye edilmesi, ikincisi ise yüksek dereceden eğrilik terimlerinin EH Lagrangiana eklenmesidir ki; sonraki bölümlerde iki yöntemin eşdeğerliğinden bahsedilecektir. Bu noktada hangi modellerin hem teorik tutarlılık hem de gözlemlerle uyum anlamında sağlıklı olduğunu anlamaya yönelik kriterlerden bahsetmek faydalı olacaktır.

#### 2.3.1. MEK için Yaşayabilirlik Koşulları

MEK kuramlarının bütünü ele alındığında  $f(R)$  kuramlarının ortaya çıktığı yıllarda kuantum kütle çekimi motivasyonu ile yüksek dereceden farklı eğrilik terimlerinin EH Lagrangianına eklenmesi sonucu ortaya çıkan modeller üzerine çokça çalışma yapılmıştır.

Gözlemsel ve deneysel verilerde kaçınıcı dereceden terimlerin, hangi geometrik invariantların Lagrangiana ekleneceğine dair herhangi bir ipucu bulunmadığından kuramların yaşayabilirlik koşulları belirlenerek bu koşulları sağlayan kuramlar üzerinden gitme yönünde genel bir eğilim ortaya çıkmıştır. Bu MEK kuramlarının tümü için belirsiz bir alanın daraltılabilesine olanak tanıyacaktır. Yaşayabilirlik koşulları; kuramların gözlemlerle uyumlu olup olmadığı, kuramsal tutarlılık ve kararlılığa sahip olup olmadığı gibi niteliklerinin belirlenmesi için ortaya koyulmuş ölçütlerdir. Takip eden kısımda bu ölçütler temel anlamda ele alınacaktır.

### **2.3.1.1. Zayıf Alan Limiti**

GG modifiye edilirken dikkat edilmesi gereken en önemli konulardan biri GG'in hakimiyet sınırlarından çıkarak kozmolojik dinamikler hakkında öngörüle bulunurken Güneş Sistemi ölçeğindeki dinamiklerin öngörülelememesi tehlikesidir.

### **2.3.1.2. Kozmolojik Dinamikler**

Büyük Patlama günümüz gözlenen Evren'ini açıklayabilmek için erken döneminde ani şişmeye (enflasyon) ihtiyaç duymaktadır. Enflasyonun olmadığı Evren modellerinde ufuk, manyetik monopol, düzlük gibi problemler ortaya çıkmaktadır. Modern kozmolojideki genel kabul; erken enflasyon döneminin ardından Büyük Patlama Nükleosentezinin gerçekleşebilmesi için radyasyon baskın evre, bu evreden sonra ise büyük ölçekli yapı oluşumları için madde baskın evre olması gerektiği yönündedir. Evren'in mevcut durumda kozmik ivmelenme aşamasında olduğu göz önüne alınırsa, sağlıklı bir MEK kuramı tüm bu evreleri aralarında düzgün geçişler olacak şekilde modelleyebilmelidir.

Uzaysal eğriliksiz kozmolojik çözümler göz önüne alındığında Friedmann – Lemaitre – Robertson – Walker metriğinin elde edilebildiği karanlık enerjili çözümler veya kozmolojik sabit içeren çözümler ile aynı çözümü sağlayan MEK kuramları çoğunlukla fiziksel olarak ayırt edilemezdir. Bunun yanında yapı oluşumu ile ilgili kozmolojik tedirgemelere (pertürbasyon) dair dinamiklerdeki farklılıklar kuramların birbirinden farklı öngörülerini ortaya koymaktadır. Bu noktada sağlıklı bir MEK kuramının özellikle KAPI ve gökada taramaları ile uyumlu sonuçlar öngörmesi beklenmektedir.

### **2.3.1.3. Kararsızlıklar**

Modifiye kütle çekim kuramlarının değerlendirilmesi için bir diğer önemli kriter; teoremin stabil olmasıdır. Kuram belirli koşullar altında kararlılığını yitirdiğinde gözlem verileri ile sağlanan uyumun bir anlamı kalmayacaktır.

### ***Ostragratsky Kararsızlığı***

Klasik mekanikte Ostragratsky teoremi fiziksel olayların neden ikinci dereceden denklemlerle ifade edildiğine açıklama getirmek üzere ortaya atılmıştır. Buna göre

eğer Lagrangian zamanın birinci dereceden yüksek türevlerini bulunduruyorsa doğrusal olarak kararsız bir Hamiltonyen ortaya çıkmaktadır. Ostragratsky kararsızlığı MEK Lagrangianlarına uygulanmasında yüksek dereceli eğrilik terimleri ve fonksiyonel yapılar metriğin birden yüksek dereceli türevlerinin Lagrangianda yer almasına neden olabilmektedir. Bu durum ise bazı hallerde Ostragratsky kararsızlığına neden olmaktadır.

### ***Frolov Kararsızlığı***

A. V. Frolov [27] tarafından  $f(R)$  modellerinde ortaya çıkması muhtemel bir kararsızlık olarak ortaya atılmıştır. Buna göre  $f(R)$  kuramı skaler-tensör formunda yazıldığında sonlu bir potansiyel için tekil eğrilik değerleri ortaya çıkabilir. Bu tekillikleri Lagrangiana yüksek eğrilik terimleri ekleyerek bertaraf etmek mümkündür [28].

### ***Dolgov - Kawasaki Kararsızlığı***

Bu kararsızlık türü  $f(R)$  kuramında ortaya çıkmıştır. Örneğin

$$f(R) = R - \mu^4/R \quad (2.81)$$

için yapılan analizler bu fonksiyonel yapının kararsız olduğunu göstermiştir [29]. Daha sonra genel fonksiyonel formlar üzerinde bu tür kararsızlıklar için  $f'' < 0$  koşulu ile ortaya çıktığı görülmüştür [30].

#### ***2.3.1.4. Hayalet alanlar***

Hayalet alanlar negatif normlu kütleli hallere karşılık gelirler. Bir kuram hayalet alan öngörüyorsa üniterlikle ilgili sorunlar ortaya çıkacaktır. MEK kuramlarında kullanılan yüksek dereceden eğrilik terimleri hayalet alanlara sebebiyet verebilmektedir.

#### ***2.3.1.5. Cauchy problemi***

Başlangıç değer probleminin düzgün tanımlanmış olması bir kuramın öngörü kabiliyetini doğrudan etkileyen faktörlerdendir. Cauchy problemi GG için R. Arnowitt, Charles Misner ve Stanley Deser tarafından geliştirilen ADM yaklaşımı ile uzay-zaman 3+1 boyut için ayrıştırılarak tanımlanmıştır [31]. Bu yaklaşım GG'in yaygın bir Hamilton gösterimi olarak

bilinmektedir. ADM gösteriminde uzay-zaman; sapma (lapse)  $N$ , yer değiştirme (shift)  $N^i$ , uzaysal metrik  $h_{ij}$  olmak üzere

$$ds^2 = -(N^2 - N^i N_i) dt^2 - 2N_i dt dx^i + h_{ij} dx^i dx^j \quad (2.82)$$

( $i, j = 1, 2, 3$ ), metriği şeklinde ifade edilir. Dış eğrilik  $K_{ij}$  şeklinde ifade edilir. Cauchy problemi 3+1 denklem sistemi

$$\partial_t \vec{u} + M^i \nabla_i \vec{u} = \vec{S}(\vec{u}) \quad (2.83)$$

olacak şekilde hem zaman hem uzay için birinci dereceden denklemler halinde ifade edilebilirse iyi formüle edilmiştir [30]. Burada  $M^i$  karakteristik matris,  $\vec{u}$  temel değişkenler  $h_{ij}$ ,  $K_{ij}$  olup  $\vec{S}(\vec{u})$  kaynak terimlerini ifade etmektedir. [32, 33]. Yaşayabilirlik koşulları ile ilgili ayrıntılı bilgi için [30, 34, 35] kaynaklarına başvurulabilir.

### 2.3.2. Skaler - Tensör Kuramları

nceki bölümde JBD kuramına yer verilirken kuramın neden gözden düştüğüne değinilmemiştir. Kısaca bahsetmek gerekirse o dönemde JBD gibi kuramlar, gerekiliklerinin anlaşılması ve GG ile kıyaslanabilmesi maksadıyla bir dizi teste tabi tutuldular. Spesifik gezegen yörüngesi tahminleri, ışığın yayılımı gözlemleri gibi gözlemlerin yanında eşdeğerlik prensibine dair gözlemler gerçekleştirilmişse de yeni gözlemlerle alt sınır değeri sürekli yükselen  $\omega$  parametresi JBD kuramını GG'ten ayırt edilemez kılmiş, JBD ve benzeri kuramlar GG'ten daha iyi öngörüler sunamamışlardır. Güneş Sistemi leğindeki bu veriler ışığında JBD gibi alternatif kuramlar GG'e karşı avantaj sağlayamamış ve görece basitliği sayesinde GG tahtını korumuştur.

Büyük Patlama Kuramı Evren'in mevcut durumunu ifade edebilmek için erken Evren'de GG'in öngöremediği ani bir şişme (enflasyon) evresine ihtiyaç duymaktadır. Erken Evren'deki bu enflasyon evresini öngörebilmek için varsayımsal 'inflaton' alanı kullanma fikri ortaya çıkmıştır. Aynı dönemlerde popülerlik kazanan Sicim Kuramları ise ktle çekimini spin-2 graviton ve skaler 'dilaton' alanları ile ifade etmiştir. Bu durum skaler alanları tekrar gündeme getirmiştir. Literatür bu aşamada daha esnek fonksiyonel formlar kullanma yönünde gelişim göstermiş [36–38] ve Skaler - Tensör Kuram (STK) ortaya çıkmıştır. Genel bir STK; JBD Lagrangianında yer alan  $\phi$  skaler alanının  $F(\phi)$  ve  $\omega(\phi)$

çiftlenim alanları ile ifade edildiği

$$S_{ST} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{F(\phi)}{2} R - \frac{\omega(\phi)}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) - U(\phi) \right] + S_{MADDE}(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (2.84)$$

eylemi ile tanımlanır. Burada  $\psi$  madde alanlarını temsil etmektedir. Kinetik terim  $\frac{\omega(\phi)}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi)$  ele alındığında  $\omega = 1$  kanonik skaler alana  $\omega = -1$  ise fantom alanına karşılık gelecektir.  $F(\phi)$  fonksiyonu için  $\xi$  çiftlenim sabiti olmak üzere

$$F(\phi) = \xi \phi^2 \quad (2.85)$$

sıkça kullanılan bir fonksiyonel formdur. Bu tip minimal olmayan çiftlenimler skaler alanların eğri uzay-zamandan kaynaklı kuantum düzeltmeleri [39] renormalizasyonla ilgili durumlar [37] veya süpersicim kuramları kaynaklı olabilmektedir. Yakın zamandaki Planck verileri (2.85) durumunun mümkün olmayacağı sonucunu doğursa da [40] genel anlamda bu modeller erken Evren enflasyonunu açıklayabilme iddiası taşırlar.

Minimal çiftlenim durumu (2.84) eylemi için  $F(\phi) = 1$  durumunda ortaya çıkar. Bu daha ziyade minimal çiftlenimli kozmik öz (Quintessence) modellerinde kullanılmaktadır [41]. Kozmik öz modellerinin Evren'in erken dönem enflasyonu ve geç dönem ivmelenmesi gibi uygulama alanları bulmaktadır [42–44].

### 2.3.3. $f(R)$ Kuramı

GG'te kullanılan geometri dilinde yüksek dereceden eğrilik terimlerinin kullanılması neredeyse GG kadar eski bir geçmişe sahiptir. Weyl [3] ve Eddington [45]'in çalışmaları buna örnektir. Hiç şüphesiz GG'in yeni ortaya atıldığı ve başarı göstermeye başladığı bu dönemlerde yüksek eğrilik terimlerinin araştırılmasındaki motivasyon daha ziyade bilimsel meraktan ibarettir.

Özellikle 1970'lere gelindiğinde GG'i modifiye etmek için yeterince teorik gerekçe olgunlaşmıştı. Ancak bu döneme kadar literatürdeki ilgi daha çok skaler alanlar üzerinde yoğunlaşmıştı. Daha ziyade matematiksel motivasyonlu olan Lovelock'un çalışmaları [46, 47] GG'i modifiye etmenin üslubu ile ilgili belli sınırlar çizerek bu alanda çalışacak araştırmacıların kurama ait hangi özellikleri koruyabileceği ve hangi özelliklerden vazgeçmek durumunda kalacağı konusunda bir çerçeve oluşmasını sağlamıştır.

Öte yandan GG'in erken Evren enflasyonu, kozmik ivmelenme, karanlık madde gibi olgulara kendi tutarlılığı çerçevesinde bir açıklama getirememesi ve bu olguların kaynak terimleri ve kozmolojik sabite ihale edilmesi, araştırmacıları yüksek dereceden eğrilik terimleri kullanma yönünde motive etmiştir. Bu kapsamda ilk olarak Buchdahl [48] tarafından ortaya atılan  $f(R)$  kuramları GG için en doğrudan ve kolay genelleme şekli olarak ön plana çıkmıştır. Takip eden yıllarda Starobinsky [49] EH Lagrangianına

$$f(R) = R + \alpha R^2 \quad (2.86)$$

( $\alpha > 0$ ) şeklinde kuadratik terimler eklemek suretiyle erken Evren enflasyonu için bir model önermiştir. Bu model KAPI anizotropi ölçümleri ile de uyumlu görüldüğünden enflasyon için skaler alan varsayımına karşı güçlü bir alternatif durumundadır [50]. Bu model, içerdiği kuadratik terimden dolayı aynı zamanda kozmik ivmelenme için de kullanılabilir. Ancak kozmik ivmelenme Evren'in geç döneminde gerçekleştiğinden enflasyon ve kozmik ivmelenme dönemleri arasında olması gerektiği düşünülen radyasyon baskın ve madde baskın dönemlerin de modele ayrıca dâhil edilmesi sofistike bir kuram için mecburidir.

Sadece kozmik ivmelenme bağlamında da  $f(R)$  kuramları çokça çalışılmıştır. Örneğin daha sonraları kararsızlıklara mahal verebildiği [29] görülen

$$f(R) = R - \alpha/R^n \quad (2.87)$$

şeklinde yazılan Lagrangian en çok çalışılan model olmuştur [51–53].

Bunların dışında karanlık maddenin de yüksek dereceden eğrilik terimleriyle formüle edilmesine yönelik girişimler de bulunmaktadır [54, 55]. Ancak karanlık madde özelinde kozmoloji üzerine yapılan çalışmalara nazaran az çalışma bulunmaktadır.

Bu aşamada öncelikle  $f(R)$  kuramının formalizmiyle ilgili alternatifler üzerinde durulacak daha sonra MEK kuramlarının yaşayabilirlik koşulları irdelenecek dolayısıyla da  $f(R)$  formalizminin ve hangi fonksiyonel formların sağlıklı oldukları tartışılacaktır.

### 2.3.3.1. Metrik $f(R)$ Kuramı

$f(R)$  Kuramının metrik gösterimi için eylem integrali aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{S}_{metrik} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + \mathcal{S}_{MADDE} \quad (2.88)$$

Bu eylemin kontravaryant metrik  $g^{\mu\nu}$ 'ye göre varyasyonundan

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{f(R)}{2} g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu} \square f'(R) + \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.89)$$

alan denklemleri türetilir. Üssü fonksiyon  $f(R)$ 'ın argümenti  $R$ 'ye göre türev ifade eder. Denklemlerin ilk iki terimleri metriğin dördüncü türevini içermektedir. Bu yüzden metrik  $f(R)$  kuramlarına bazen dördüncü derece kütle çekimi kuramları da denilmektedir. (2.89) denkleminin izi

$$3\square f'(R) + Rf'(R) - 2f(R) = \kappa \mathcal{T} \quad (2.90)$$

olacaktır. Burada  $\mathcal{T} \equiv T^\mu{}_\mu$  maddeyi ifade eden enerji-momentum tensörünün izidir. Bu denklem cebirsel bir ifade olan Einstein denkleminin izi  $R = -\kappa \mathcal{T}$  ile kıyaslandığında oldukça farklıdır. Çünkü (2.90) ifadesi cebirsel bir ifade değil  $f'(R)$  için ikinci derece bir diferansiyel denklemdir. Böylece  $f'(R)$ , teoremin skaler bir serbestlik derecesi olarak bir dinamik değişken rolünü üstlenecektir. (2.89) alan denklemleri

$$T_{\mu\nu}^{etkin} = \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{f(R) - Rf'(R)}{2} g_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu} \square f'(R) \right] \quad (2.91)$$

geometrik terimleri de kapsayan etkin enerji-momentum tensörü olmak üzere

$$G_{\mu\nu} = \kappa \left( T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{etkin} \right) \quad (2.92)$$

şeklinde bir etkin Einstein denklemi olarak da yazılabilir.  $T_{\mu\nu}^{etkin}$ 'in herhangi bir enerji koşulunu sağlamayacağı ve genel olarak etkin enerji yoğunluğunun pozitif tanımlı olmayacağı unutulmamalıdır. STK'nda olduğu gibi  $f(R)$  kuramlarında da  $G_{etkin} \equiv G/f'(R)$  olacak şekilde etkin bir kütle çekim sabiti tanımlanabilir. Buradan hareketle gravitonun pozitif kinetik enerji taşıyabilmesi için  $f'(R)$ 'nin pozitif olması gerekliliği ortaya çıkar.

Metrik  $f(R)$  kuramı kapsamında gözlemsel verilerle uyumlu ve 2.3.1. bölümünde bahsedilecek olan kuramsal yaşayabilirlik koşullarını sağlayan modeller bulunmaktadır. Bu modellerden en yaygını Starobinsky modelinin genel formu olan

$$f(R) = R + \lambda R_0 \left[ \frac{1}{\left(1 + \frac{R^2}{R_0^2}\right)^n} - 1 \right] \quad (2.93)$$

modelidir. Kozmolojik gözlemlerle uyumlu olan modeller Güneş Sistemi ölçeğinde hayatta kalabilmek için bukalemon (chameleon) mekanizmasına ihtiyaç duymaktadırlar. Gözlemlerle uyumlu modellerin Dolgov - Kawasaki kararsızlığına uğramamaları için  $f''(R) \geq 0$  koşuluna uymaları gereklidir.

### 2.3.3.2. *Palatini $f(R)$ Kuramı*

GG'te olduğu gibi  $f(R)$  kuramlarında da Palatini yaklaşımı bulunmaktadır. Bu durumda  $g_{\mu\nu}$  ve koneksiyon  $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$  bağımsız değişkenlerdir. Yani koneksiyon  $g_{\mu\nu}$ 'den üretilen bir metrik koneksiyonu değildir. GG'te Palatini yaklaşımı ile üretilen alan denklemleri saf metrik yaklaşımı ile üretilenlerle birebir örtüşüyor olsa da bu durum  $f(R)$  kuramlarında geçerli değildir.

Metrik  $f(R)$  kuramları gibi Palatini  $f(R)$  kuramları da karanlık enerjiye bir açıklama getirebilme maksadıyla ilk olarak  $f(R) = R - \mu^4/R$  formunda çalışılmıştır. Palatini için eylem integrali

$$\mathcal{S}_{Palatini} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(\tilde{R}) + \mathcal{S}_{MADDE} [g_{\mu\nu}, \psi^{(m)}] \quad (2.94)$$

olarak ifade edilir. Bu kuram iki adet Ricci tensörü tanımlanmasına olanak tanımaktadır. İlki fiziksel metrik  $g_{\mu\nu}$ 'den üretilen metrik koneksiyon ile elde edilen  $R_{\mu\nu}$ 'dür. Diğeri ise metrik olmayan bir koneksiyon  $\Gamma_{\mu\lambda}^{\mu}$  'dan üretilen  $\tilde{R}_{\mu\nu}$ 'dür. Bu Ricci tensöründen  $\tilde{R} \equiv g^{\mu\nu} \tilde{R}_{\mu\nu}$  Ricci skaleri üretilir. Eylem integralinin madde kısmı  $\Gamma$ 'ya açık bağlı olmayıp sadece  $\psi^{(m)}$  ile gösterilen madde alanları ve metriğe bağlıdır. Palatini eylemi (2.94)'nin metriğe göre varyasyonundan

$$f'(\tilde{R}) \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{f(\tilde{R})}{2} g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.95)$$

elde edilir. Burada metrik  $f(R)$  kuramlarında olduğu gibi dördüncü derece denklemler ortaya çıkmazlar. Koneksiyona göre varyasyondan ise

$$\tilde{\nabla}_\delta (\sqrt{-g} f'(\tilde{R}) g^{\mu\nu}) - \tilde{\nabla}_\delta (\sqrt{-g} f'(\tilde{R}) g^{\delta(\mu}) \delta_\lambda^{\nu)}) = 0 \quad (2.96)$$

alan denklemleri ortaya çıkar. Burada  $\tilde{\nabla}_\delta$ ,  $\Gamma$  koneksiyonuna göre kovaryant türevi ifade etmektedir. Denklem (2.95) ve (2.96)'in izinden

$$f'(\tilde{R})\tilde{R} - 2f(\tilde{R}) = \kappa \mathcal{T} \quad (2.97)$$

cebirsel denklemi ile

$$\tilde{\nabla}_\lambda (\sqrt{-g} f'(\tilde{R}) g^{\mu\nu}) = 0 \quad (2.98)$$

elde edilir. (2.98) ele alındığında

$$\tilde{g}_{\mu\nu} \equiv f'(\tilde{R}) g_{\mu\nu} \quad (2.99)$$

şeklinde  $g_{\mu\nu}$ 'nin bir konformal dönüşümünün kovaryant türevi olarak düşünülebilir. (2.97)'den anlaşılacağı üzere metrik  $f(R)$  kuramındaki durumun aksine  $f'(\tilde{R})$  dinamik değişken durumunda değildir.

(2.95) ve (2.96) kullanılarak bağımsız koneksiyon

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} \frac{1}{f'(\mathcal{R})} g^{\lambda\sigma} \left[ \partial_\mu (f'(\mathcal{R}) g_{\nu\sigma}) + \partial_\nu (f'(\mathcal{R}) g_{\mu\sigma}) - \partial_\sigma (f'(\mathcal{R}) g_{\mu\nu}) \right] \quad (2.100)$$

elde edilir. Bu koneksiyon alan denklemlerinden yok edilerek aşağıdaki alan denklemleri elde edilebilir.

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{f'} T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left( R - \frac{f}{f'} \right) g_{\mu\nu} + \frac{1}{f'} (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) f' - \frac{3}{2(f')^2} \left[ \nabla_\mu f' \nabla_\nu f' - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\lambda f' \nabla^\lambda f' \right] \quad (2.101)$$

Palatini yaklaşımı için elde edilen Ricci skaleri ile metrik kuramın Ricci skaleri arasında

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = R &+ \frac{3}{2(f'(\mathcal{R}))^2} (\nabla_\mu f'(\mathcal{R})) (\nabla^\mu f'(\mathcal{R})) \\ &+ \frac{3}{f'(\mathcal{R})} \square f'(\mathcal{R}) \end{aligned} \quad (2.102)$$

ilişkisi bulunmaktadır.

Buraya kadar kısaca açıklanan Palatini  $f(R)$  kuramı teorik açıdan bazı problemleri barındırmaktadır. Bu problemler skaler alan için dinamik bir denklem bulunmayışı, Cauchy probleminin düzgün tanımlanamaması, madde alanlarındaki süreksizliklerin eğrilik tekilliklerine neden olması ve Standart Model ile uyumlu olmayışıdır [30, 34].

### 2.3.3.3. *Metrik Afin $f(R)$ Kuramı*

Metrik Afin  $f(R)$  kuramı Palatini  $f(R)$  kuramlarının daha genel formu pozisyonunda olup [30], eylem integrali

$$\mathcal{S}_{Afin} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(\tilde{R}) + \mathcal{S}_{MADDE} [g_{\mu\nu}, \Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \psi^{(MADDE)}] \quad (2.103)$$

şeklinde yazılmaktadır. Burada madde alanları da simetrik olmayan koneksiyon  $\Gamma$ 'ya açık bağlıdır. Bu durum madde ile ilişkili bir burulma ortaya çıkmasına sebep olur. Bu yapı aslen temel parçacıkların spinlerinin ifade edilmesi maksadıyla önerilmiştir. Bu kuramda madde-enerji eylemi  $S_{MADDE}$  Palatini yaklaşımındaki gibi yardımcı bir alan pozisyonundaki  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ 'ya göre türetilerek

$$\Delta_\lambda^{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda} \quad (2.104)$$

şeklinde ifade edilen ve hipermomentum olarak adlandırılan yeni bir nicelik tanımlanır. Kuramın alan denklemleri (2.103) Lagrangianının metrik, koneksiyon ve Lagrange

çarpanına göre türetilerek düzenlenmesiyle

$$f'(\mathcal{R})\mathcal{R}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}f(\mathcal{R})g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.105)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[ -\lambda (\sqrt{-g} f'(\mathcal{R}) g^{\mu\nu}) + \sigma (\sqrt{-g} f'(\mathcal{R}) g^{\mu\sigma}) \delta^\nu_\lambda \right] + 2f'(\mathcal{R}) g^{\mu\sigma} S_{\sigma\lambda}{}^\nu = \kappa (\Delta_\lambda{}^{\mu\nu} - \frac{2}{3} \Delta_\sigma{}^{\sigma[\nu} \delta^{\mu]}_\lambda) \quad (2.106)$$

$$S_{\mu\sigma}{}^\sigma = 0. \quad (2.107)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $S_{\mu\nu}$

$$S_{\mu\nu}{}^\lambda \equiv \Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda \quad (2.108)$$

şeklinde koneksiyonun anti-simetrik kısmı olan Cartan tensörüdür.

Metrik-afin  $f(R)$  kuramının astrofiziksel ve kozmolojik dinamiklere dair öngörülleri hakkında derinlemesine bir araştırma bulunmamakla beraber Poplawski [56] tarafından gerçekleştirilen çalışmada kozmik ivmelenme metrik afin  $f(R)$  kuramı çerçevesinde incelenmiştir.

#### 2.3.3.4. $f(R)$ İçin Yaşayabilirlik Durumu

Burada  $f(R)$  kuramları değişken yapısına göre farklı modeller üretebildiğinden yaşayabilirlik açısından hangi modellerin sağlıklı olduğuna da değinmek gereklidir. Öncelikle metrik  $f(R)$  kuramı içinde hem gözlemsel hem teorik koşulları sağlayan modeller olduğunu ifade etmek gerekir. Güneş Sistemi ölçeğinde tüm sağlıklı modeller bukalemun mekanizmasına (chameleon mechanism) ihtiyaç duyarlar. Ayrıca Dolgov - Kawasaki kararsızlığına dair  $f'' < 0$  koşulu dikkat edilmesi gereken bir sınırlamadır. Cauchy problemi de düzgün olan metrik  $f(R)$  kuramı için Ostragratsky kararsızlığı ve hayalet alanlar ise söz konusu değildir. Hayalet alanların ortaya çıkmadığı diğer bir geometrik invaryant GB invaryantıdır [57, 58].

Palatini  $f(R)$  kuramında Dolgov - Kawasaki kararsızlığı bulunmamakla beraber skaler - tensör eşdeğerinde dinamik olmayan bir skaler alan ortaya çıkmaktadır. Cauchy problemi skaler tensör eşdeğerinde skaler alanın ikinci türevleri yer aldığı için düzgün değildir. Ayrıca Palatini yaklaşımında madde süreksizlikleri eğrilik tekilliklerine yol açar. Metrik afin kuramı

için ise yeterince çalışma olmadığından yaşayabilirlik koşullarını sağlayıp sağlayamadığı belirgin değildir.

#### 2.3.4. Eğrilik için Farklı Genellemeler

$f(R)$  kuramlarının başarılı uygulamaları göz önüne alındığında Ricci skaleri  $R$ 'nin dışında Ricci tensörünün karesi ( $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ ), Kretschmann skaleri ( $R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho}$ ) gibi invariantlar da  $f(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho})$  şeklinde fonksiyonel yapıya dâhil edilebilir [59]. Bu modeller özellikle karanlık enerji bağlamında kozmolojik modellerde kullanılmışlardır [60–62]. Ancak bu modellerin genel olarak spin-2 hayalet alanlara neden olduğu görülmektedir. Bu durumun istisnası  $R^2$ ,  $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$  ve  $R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho}$  kuadratik invariantlarının özel bir kombinasyonu olan Gauss - Bonnet invariantının kullanılmasıdır [57].

##### 2.3.4.1. Lovelock İnvaryantları, $f(\mathcal{G})$ , $f(R, \mathcal{G})$ , $f(R, \phi, \mathcal{G})$ Kuramları

Lovelock invariantları bir Lagrangiana eklendiklerinde ortaya ekstra tensörel serbestlik derecesi çıkmasına sebep olmayan geometrik invariantlardır. En yaygın kullanılan Lovelock invariantı

$$\mathcal{G} \equiv R^2 - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (2.109)$$

olarak tanımlanan GB invariantıdır. GB invariantı EH Lagrangianına eklendiğinde 3+1 boyut için bir diverjans terimi şeklinde ifade edilebildiğinden alan denklemlerine katkıda bulunmaz. Lovelock invariantlarının daha yüksek boyutlarda alan denklemlerine katkı sağladığı terimler metriğin ikinci türevlerini içerirler. Bu tür ifadelere Lovelock Lagrangianı denir. Örneğin;

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\kappa} (R + 2\Lambda) + \alpha(R_{\lambda\mu\nu\rho}R^{\lambda\mu\nu\rho} + R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}), \quad (2.110)$$

ile ifade edilen Einstein - Lanczos Lagrangianı 5 ve 6 boyut için Lovelock Lagrangianıdır. Boyut sayısı yükseldiğinde alan denklemlerine ek terimler gelirken denklemler ikinci derece kalmaya devam edecektir.

MEK kuramları kapsamında Gauss–Bonnet invariantına ait genellemeler  $f(\mathcal{G})$  şeklinde [63] veya Ricci skaleriyle beraber  $f(R, \mathcal{G})$  şeklinde [64, 65] ortaya çıkmışlardır.

Sicim kuramı ile ilişkili bir model olarak öne sürülen  $f(G)$  kuramı için eylem integrali madde alanlarının varlığı halinde

$$\mathcal{S} = \frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} R + f(\mathcal{G}) \right] + \mathcal{S}_{MADDE} \quad (2.111)$$

şeklinde. Bu eyleme karşılık gelen alan denklemleri

$$G_{\mu\nu} + 8 [R_{\mu\rho\nu\sigma} + R_{\rho\nu}g_{\sigma\mu} - R_{\rho\sigma}g_{\nu\mu} - R_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} + R_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} + (R/2)(g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})] \nabla^\rho \nabla^\sigma f_{,\mathcal{G}} + (\mathcal{G} f_{,\mathcal{G}} - f) g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (2.112)$$

olarak türetilmektedir. Kuram 3+1 boyutta tanımlandığından  $f \equiv \mathcal{G}$  durumunda GG'e indirgenecektir. GB invariantının  $f(\mathcal{G})$  durumu için çapraz terimler ortaya çıktığından eylem integralinde yer alan  $f(\mathcal{G})$  terimleri alan denklemlerine katkıda bulunurlar. Bunun yanında denklemler ikinci derece denklemler olarak kalmaya devam edecektir. Kuramın Güneş Sistemi ölçeğindeki mevcut ölçümlerle uyumlu sonuçlar verdiği ancak mükemmel akışkanlar için yoğunluk tedirgemelerinde kararsızlıklar olabileceği görülmektedir [50]. Bu kuramın kozmolojik özelliklerine dair yapılan çalışmalar kozmik yavaşlamadan kozmik ivmelenmeye uygun bir geçişle kozmik ivmelenmenin  $f(\mathcal{G})$  kuramı tarafından öngörülebileceğini göstermiştir [63].

GB invariantı ile ilişkili bir diğer modifiye kütle çekimi kuramı

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R, G) + S_M(g^{\mu\nu}, \psi) \quad (2.113)$$

şeklinde Ricci skalerinin de fonksiyonel yapıya dâhil edildiği  $f(R, \mathcal{G})$  kuramıdır. Burada  $S_M(g^{\mu\nu}, \psi)$  madde eylemidir. Bu eylemin metrik varyasyonundan

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}^{(MADDE)} + \nabla_\mu \nabla_\nu f_R - g_{\mu\nu} \square f_R + 2R \nabla_\mu \nabla_\nu f_G - 2g_{\mu\nu} R \square f_G - 4R_\mu^\lambda \nabla_\lambda \nabla_\nu f_G - 4R_\nu^\lambda \nabla_\lambda \nabla_\mu f_G + 4R_{\mu\nu} \square f_G + 4g_{\mu\nu} R^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta f_G + 4R_{\mu\alpha\beta\nu} \nabla^\alpha \nabla^\beta f_G - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} V + (1 - f_R) (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) \quad (2.114)$$

alan denklemleri elde edilir. Burada

$$f_R \equiv \frac{\partial f(R, G)}{\partial R} \quad f_G \equiv \frac{\partial f(R, G)}{\partial G} \quad (2.115)$$

$V \equiv f_R R + f_G G - f(R, G)$  ve  $T_{\mu\nu}^{(\text{MADDE})}$  madde için enerji-momentum tensörüdür.

$f(R, \mathcal{G})$  kuramının kozmolojik çözümlerinin kararlılık durumları ile ilgili [64] ve enerji koşulları kullanılarak yaşayabilirlik durumlarının incelendiği [65] çalışmalar bulunmaktadır.

$f(R, \mathcal{G})$  ve  $f(\mathcal{G})$  kuramlarının daha genel bir hali  $f(R, \phi, \mathcal{G})$  şeklinde ifade edilebilir. Bu modeller sicim kuramları kapsamında ortaya çıkan dilaton alanının Lagrangiana katılması şeklinde tanımlanabilirler. Bu modeller Büyük Patlama öncesi kozmolojisinde kullanılmışlardır [66, 67]. Ayrıca kozmik ivmelenme ve erken enflasyonda  $f(R, \phi, \mathcal{G})$  türü Lagrangianlarla çalışılmıştır [68–70]. Hem dilaton hem de GB terimlerinin beraber kullanıldığı bu Lagrangianlar sicim kuramının alçak enerji yaklaşımı olarak en çok çalışılan Lagrangianlardandır. Bu sebepten diğer kuram grupları gibi kozmolojik sonuçları çokça çalışılmakla beraber karadelik çalışmaları da bulunmaktadır [71–73].

#### 2.3.4.2. $f(R, \square R, \square^2 R, \dots, \square^n R)$ Kuramları

Bu kuram grubu GG için yüksek mertebeden kuantum düzeltmeleri bağlamında kullanılmaktadır [74].  $f(R)$  Lagrangianına  $\square R$  terimi eklendiğinde alan denklemlerinde metriğin 6. dereceden türevleri ortaya çıkar. Benzer şekilde  $\square^2 R$  terimi 8. derece türevlere yol açar. En genel durumda Lagrangian

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} F(R, \square R, \square^2 R, \dots, \square^n R) \quad (2.116)$$

olup alan denklemleri

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu} = & \frac{1}{\mathcal{M}} \left\{ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (F - \mathcal{M} R) + (g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma}) \mathcal{M}_{;\lambda\sigma} + \right. \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i (g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}) (\square^{j-i})_{;\sigma} \left( \square^{i-j} \frac{\partial F}{\partial \square^i R} \right)_{;\lambda} + \\ & \left. - g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} \left[ (\square^{j-1})_{;\sigma} \square^{i-j} \frac{\partial F}{\partial \square^i R} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.117)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $G^{\mu\nu}$  Einstein tensörü ve

$$\mathcal{M} = \sum_{j=0}^n \square^j \left( \frac{\partial F}{\partial \square^j R} \right) \quad (2.118)$$

olarak tanımlanmıştır. Dolayısı ile  $\square^n R$  için  $2n+4$ 'üncü dereceden türevler ortaya çıkacaktır. Bu Lagrangian kurgusu için  $n \rightarrow 0$  durumunda metriğin dördüncü derece türevlerini içeren  $f(R)$  Lagrangianı elde edilecektir.

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} F(R, \square R) \quad (2.119)$$

durumunda ortaya çıkan 6. derece denklemler konformal olarak iki skaler alanla beraber Einstein denklemlerine eşdeğerdir. Bu durum ikiden yüksek derecelere genellenecek olursa her iki derece bir skaler alana eşdeğerdir. Dolayısı ile metriğin yüksek dereceden türevlerini içeren bu tür Lagrangianlara konformal dönüşüm uygulanarak dereceleri Einstein denklemlerine kadar düşürülebilir. Bu aşamada elde edilen alan denklemleri Einstein denklemleri ve skaler alan terimlerinden meydana gelecektir.

Dörtten yüksek mertebeli kütle çekimi de denilen bu kuram grubunun erken Evren enflasyonu [75–78], sıçrayan Evren modelleri, büyük patlama nükleosentezi [79] gibi kozmolojik dinamiklere hangi durumlarda nasıl cevap verdiği üzerine gerçekleştirilen çalışmalar bulunmaktadır.

### 2.3.4.3. Yerel Olmayan $f(R)$ Kuramları

Yerel olmayan kütle çekimi kuramları kuantum ilmek (quantum loop) düzeltmeleri kapsamında ortaya atılmış kuramlardır. Bu kuramlar için genel eylem

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} [F(R, \square R, \square^2 R, \dots, \square^m R, \square^{-1} R, \square^{-2} R, \dots, \square^{-n} R) + \mathcal{L}_{\text{MADDE}}] \quad (2.120)$$

formunda olup burada  $\square^{-1} R = \frac{1}{\square}$  skaler d'Almbertian operatörü ( $\square$ )'nün tersidir. Bu yapı  $A, B, \chi_k, \eta_k, (k = 1, 2, \dots, m)$ , ve  $\xi_l, \phi_l, (l = 1, 2, \dots, n)$ , skaler alanları kullanılarak

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} & \left[ \frac{R}{2} - \frac{3}{2B^2} \partial_\mu B \partial^\mu B + \frac{1}{2B} \left( \partial_\mu \chi \partial^\mu A + \sum_{k=2}^m \partial_\mu \chi_k \partial^\mu \eta_{k-1} + \sum_{l=1}^n \partial_\mu \xi_l \partial^\mu \phi_l \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{4B^2} \left( -BA + F(A, \eta_1, \dots, \eta_m, \phi_1, \dots, \phi_n) + \sum_{k=1}^m \chi_k \eta_1 + A \xi_1 + \sum_{l=2}^n \xi_l \phi_{l-1} \right) + \mathcal{L}_{\text{MADDE}}^A \right] \end{aligned} \quad (2.121)$$

şeklinde bir Einstein çerçevesinde yazılabilir. Örneğin (2.120) Lagrangianının basit durumu

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2\kappa^2} R (1 + f(\square^{-1}R)) + \mathcal{L}_{\text{MADDE}} \right\} \quad (2.122)$$

için skaler - tensör form

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2\kappa^2} \{R(1 + f(\phi)) + \xi(\square\phi - R)\} + \mathcal{L}_{\text{MADDE}} \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2\kappa^2} \{R(1 + f(\phi)) - \partial_\mu \xi \partial^\mu \phi - \xi R\} + \mathcal{L}_{\text{MADDE}} \right] \end{aligned} \quad (2.123)$$

şeklinde elde edilebilir. Bu eylem integrali metriğe göre türetildiğinde

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \{R(1 + f(\phi) - \xi) - \partial_\rho \xi \partial^\rho \phi\} - R_{\mu\nu} (1 + f(\phi) - \xi) \\ &+ \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi \partial_\nu \phi + \partial_\mu \phi \partial_\nu \xi) - (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) (f(\phi) - \xi) + \kappa^2 T_{\mu\nu} = 0 \end{aligned} \quad (2.124)$$

alan denklemlerini verir. Benzer şekilde sırasıyla skaler alanlar  $\phi$  ve  $\xi$ 'ye göre türetilerek

$$\square \xi + f'(\phi) R = 0 \quad (2.125)$$

$$\square \phi = R \quad \text{veya} \quad \phi = \square^{-1} R \quad (2.126)$$

denklemleri elde edilecektir.

Yerel olmayan kütle çekimi kuramlarının kozmolojik dinamikler bağlamındaki davranışları ve Newton limitleri [80, 81] üzerine çeşitli çalışmalar bulunmaktadır [82–88]. Kuram kozmik evreler arası geçişleri ince ayar probleminden belli bir düzeyde kurtulmak suretiyle açıklayabilmektedir [87]. Bunun yanında erken dönem enflasyonu ile geç dönemdeki kozmik ivmelenme bu kuram kapsamında birleştirilebilmekte ve hem Güneş Sistemi ölçeğindeki verilerle uyumlu hem de beklenen kozmik evre geçmişini sağlayabilen sonuçlar öngörebilmektedir [85, 89].

#### 2.3.4.4. $f(R, \mathcal{T})$ kuramları

$f(R)$  kuramlarında madde ile etkileşim durumunda ortaya farklı kuvvetler çıkabileceği yönündeki çalışmadan [90] hareketle bir diğer kuram grubu ortaya atılmıştır [91]. Bu modele göre Lagrangian Ricci skaleriyle beraber enerji-momentum tensörünün izi  $\mathcal{T}$ 'nin

de fonksiyonlarını

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi} \int f(R, \mathcal{T}) \sqrt{-g} d^4x + \int L_m \sqrt{-g} d^4x \quad (2.127)$$

şeklinde içerir. Bu durumda alan denklemleri

$$\begin{aligned} f_R(R, \mathcal{T}) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R, \mathcal{T}) g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) f_R(R, \mathcal{T}) \\ = 8\pi T_{\mu\nu} - f_{\mathcal{T}}(R, \mathcal{T}) T_{\mu\nu} - f_{\mathcal{T}}(R, \mathcal{T}) \Theta_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.128)$$

olarak elde edilir.  $\mathcal{T}$ 'nin metriğe göre varyasyonu

$$\frac{\delta(g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta})}{\delta g^{\mu\nu}} = T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu} \quad (2.129)$$

olarak hesaplanmış olup burada

$$\Theta_{\mu\nu} \equiv g^{\alpha\beta} \frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.130)$$

olarak tanımlanmıştır. Ayrıca (2.128) denkleminin kontraksiyonundan

$$f_R(R, \mathcal{T}) R + 3\square f_R(R, \mathcal{T}) - 2f(R, \mathcal{T}) = 8\pi \mathcal{T} - f_{\mathcal{T}}(R, \mathcal{T}) \mathcal{T} - f_{\mathcal{T}}(R, \mathcal{T}) \Theta \quad (2.131)$$

elde edilir ( $\Theta = \Theta_\mu^\mu$ ).  $f(R, \mathcal{T})$  kuramı için bazı modellerin kozmolojik çözümleri üzerine yapılan çalışmalarda gözlemsel verilerle uyumlu sonuçlar elde edilmiştir [92–94].

### 2.3.4.5. Konformal Kütle Çekimi

Weyl kütle çekimi olarak da anılan Konformal Kütle Çekimi Kuramı GG'in ortaya atılmasını müteakip Weyl [95] tarafından ortaya atılmıştır. Kuramın eylem integrali

$$\mathcal{S}_{Konformal} = -\alpha_G \int d^4x \sqrt{-g} C_{\lambda\mu\nu\kappa} C^{\lambda\mu\nu\kappa} \quad (2.132)$$

şeklinde olup burada  $C_{\lambda\mu\nu\kappa}$  konformal tensör ya da diğer adıyla Weyl tensörü

$$\begin{aligned} C_{\lambda\mu\nu\kappa} = & R_{\lambda\mu\nu\kappa} + \frac{1}{6} R^\alpha_\alpha [g_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa} g_{\mu\nu}] \\ & - \frac{1}{2} [g_{\lambda\nu} R_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa} R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R_{\lambda\kappa} + g_{\mu\kappa} R_{\lambda\nu}] \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Burada  $\alpha_G$  özçiftlenim sabitidir. (2.132) eylem integralinden elde edilen alan denklemleri

$$B_{\mu\nu} = \frac{-2}{3}R \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Rg_{\mu\nu} \right) - \frac{2}{3}(g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu \nabla_\nu)R + \square \left( R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) - \nabla_\lambda \nabla_\mu R^\lambda_\nu - \nabla_\lambda \nabla_\nu R^\lambda_\mu + 2R_{\mu\lambda}R^\lambda_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.133)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $B_{\mu\nu}$  konformal invariant ve izi sıfır olan Bach tensörüdür.

Mannheim ve Kazanas [96] tarafından gökadalardan dönme eğrileri bağlamında gündeme getirilen kuram dördüncü derece denklemlere sahip olmasına rağmen hayalet alanlara da çözüm olarak önerilmiştir [97]. Karanlık maddenin yanı sıra karanlık enerji [98], kozmolojik sabit ve vakum enerjisi [99] bağlamında da incelenmiş olan kuram zayıf alan limitinde

$$\Phi(r) = -\frac{A}{r} + Br$$

potansiyeline sahiptir. Bu potansiyel galaktik dönme eğrileriyle uyumlu olmakla beraber Newton limitinde sorunlar ortaya çıkacağı öne sürülmüştür [100]. Bu iddia da dikkate alınarak galaktik dönme eğrileri bağlamında konformal kütle çekimi için yeni çözümler bulunmuştur [101]. Bu çalışmada gökadalardan iç kısımları için Einstein–Hilbert terimlerinin dış bölümlerinde ise Weyl terimlerinin geçerli olacağı bir ölçeklendirme ile etkin eylemin

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [R + \tilde{\alpha} C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma}] \quad (2.134)$$

şeklinde olması gerektiği öne sürülmüştür. Weyl kütle çekiminin kütle çekimsel mercek [102] gibi astrofiziksel etkileri de çalışılmış olmakla beraber kuramın kozmolojik dinamiklerinin derinlemesine incelendiği bir literatür bulunmamaktadır.

Eğrilik için farklı genellemeler konusunda daha detaylı bilgi için [50, 103] kaynakları incelenebilir.

### 2.3.5. $f(T)$ Kuramı

Modifiye edilmiş kütle çekimi kuramları arasında son yıllarda popülerlik kazanmış bir kuram da GGTE kuramının cebirsel bir genellemesi formundaki

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x h [f(T) + L_{MADDE}] \quad (2.135)$$

Lagrangianı ve bu Lagrangianın  $h_\mu^a$  tetradına göre türetilmesinden elde edilen

$$S_a^{\mu\nu} f_{TT} \partial_\mu T + h^{-1} \partial_\mu (h S_a^{\mu\nu}) f_T - T_{\mu a}^\sigma S_\sigma^{\nu\mu} f_T + \frac{1}{4} h_a^\nu f = 4\pi \Theta_a^\nu \quad (2.136)$$

alan denklemlerine sahip  $f(T)$  kuramıdır. Bunun başlıca sebebi kuramın gözlemsel kozmolojik ve astrofiziksel dinamikler için ümit verici öngörülere sahip olmasıdır [104–106]. Bir diğer neden  $f(R)$  kuramında alan denklemleri dördüncü derece iken  $f(T)$  kuramında ikinci derece oluşudur. Bunların dışında GGTE'nin GG'e eşdeğer sonuçlar öngörmesinin yanında bir ayar kuramı oluşu onu kuantum kuramı ile kavramsal anlamda daha uyumlu kılmaktadır.  $f(T)$  kuramının bu kavramsal avantajı da taşıdığı fikri onu özellikle  $f(R)$  gibi kuramlardan bir adım öne taşımıştır. Bunun yanında yerel Lorentz invaryansı ve tetrad çerçevesine bağlılıkla ilgili  $f(T)$  kuramını tartışmalı kılan başka problemler ortaya çıkmıştır. Takip eden kısımlarda  $f(T)$  kuramının problemleri ve bu problemlerin olası çözümleri ele alınarak kuram daha derinlemesine incelenecektir.

#### 2.3.5.1. $f(R)$ ile $f(T)$ Kuramlarının Eşdeğerliği

GG ile GGTE arasındaki kavramsal farklılıklar  $f(R)$  ile  $f(T)$  kuramları arasında süregelse de eşdeğerlik ilişkisinin aynı şekilde devam ettiği söylenemez. Bunun sebebi bahsi geçen eşdeğerliğin (2.56)'deki sınır terimine takılmasıdır. GG ve GGTE söz konusu olduğunda sınır terimi alan denklemlerine katkıda bulunmaz iken  $f(T)$  kuramı söz konusu olduğunda fonksiyonel yapının içine girdiğinden diğer terimlerle çiftlenime girerek bu sefer alan denklemlerine katkı sağlayacaktır. Bundan dolayı sınır terimi  $B$  olmak üzere  $R = -T + B$  olması sebebiyle

$$\dot{\mathcal{L}} \equiv \overset{\circ}{\mathcal{L}} \quad (2.137)$$

şeklinde iken artık

$$f(R) \equiv f(-T + B) \neq f(T) \quad (2.138)$$

olmak üzere ekstra terimler ihtiva eden genelleştirilmiş bir GGTE kuramı ortaya çıkmaktadır. Bu sınır terimlerden gelen çapraz çiftlenim terimleri aynı zamanda  $f(T)$  kuramının skaler tensör eşdeğeri için konformal dönüşümlerle bir Einstein çerçevesi oluşturulmasında sorun yaratır.

### 2.3.5.2. İyi Tetradlar

$f(T)$  kuramının standart saf tetrad formülasyonu için en genel sorun herhangi bir uzay-zamana ait metrik tensörü sağlayan tek bir tetrad takımının olmayışıdır. Bunun yanında bahsi geçen uzay-zamanı ifade edebilen tetrad takımlarının tümü  $f(T)$  alan denklemlerini  $f(T)$  fonksiyonel formu üzerine bir koşul getirmeden sağlamamaktadır. Bunun temel sebebi  $f(T)$  kuramının yerel Lorentz kovaryansının olmayışıdır. Lorentz kovaryansı  $f(T) = c_1 + c_2 T$   $c_1$  ve  $c_2$ 'nin sabit olduğu doğrusal  $f(T)$  durumunda sağlanabilir. Genel fonksiyonel durumda ise metriği sağlayan tetradlar birbirlerine Lorentz dönüşümü ile bağlıdırlar. Dolayısı ile aynı uzay-zamanı ifade eden ancak alan denklemlerini sağlamayan tetradlar ile sağlayan tetradlar arasında bir yerel Lorentz dönüşümü vardır. Bu durumu daha derinlemesine inceleyenler Tamanini ve Boehmer [107] olmuştur. Bu çalışmada alan denklemlerini doğrudan sağlayan tetradları "iyi tetradlar" olarak ifade etmişler ve bu tetradların nasıl elde edilebileceğine dair yöntem araştırması yapmışlardır. Bu yaklaşım bazı çalışmalarda uygulama alanı bulmuştur [108]. Burada genel küresel simetrik bir

$$ds^2 = e^{A(t,r)} dt^2 - e^{B(t,r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.139)$$

uzay-zamanı için genel köşegen bir

$$e_{\mu}^a|_{\text{diag}} = \begin{pmatrix} e^{A(t,r)/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{B(t,r)/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \sin \theta \end{pmatrix} \quad (2.140)$$

tetrad takımı yazılarak iyi tetradlar bu tetradların

$$e_\mu^a|_{\text{diag}} \mapsto e_\mu^a = \Lambda_b^a e_\mu^b|_{\text{diag}} \quad (2.141)$$

olacak şekilde bir Lorentz dönüşümü şeklinde ifade edilebilir. Lorentz dönüşümü tanjant uzayında gerçekleştiğinden metrik bu dönüşümden etkilenmez. Bu Lorentz dönüşümü Euler açıları  $\varphi$ ,  $\vartheta$ ,  $\psi$  cinsinden bir 3-boyutlu  $\mathcal{R}$  dönmesi olarak

$$\Lambda_b^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}(\varphi, \vartheta, \psi) \end{pmatrix} \quad (2.142)$$

şeklinde ele alınabilir.

$$\mathcal{R}(\varphi, \vartheta, \psi) = R_z(\psi)R_y(\vartheta)R_x(\varphi) \quad (2.143)$$

şeklindeki dönmeler için Euler açıları

$$\varphi = \gamma(r) \quad \vartheta = \theta - \pi/2 \quad \psi = \phi \quad (2.144)$$

olarak seçildiğinde

$$h_\mu^a = \begin{pmatrix} e^{A/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{B/2} \sin \theta \cos \phi & e^{B/2} \sin \theta \sin \phi & e^{B/2} \cos \theta \\ 0 & -r(\cos \theta \cos \phi \sin \gamma + \sin \phi \cos \gamma) & r(\cos \phi \cos \gamma - \cos \theta \sin \phi \sin \gamma) & r \sin \theta \sin \gamma \\ 0 & r \sin \theta (\sin \phi \sin \gamma - \cos \theta \cos \phi \cos \gamma) & -r \sin \theta (\cos \theta \sin \phi \cos \gamma + \cos \phi \sin \gamma) & r \sin^2 \theta \cos \gamma \end{pmatrix} \quad (2.145)$$

döndürülmüş tetradı elde edilir. Bu tetrad alan denklemlerinde yerine yazıldığında 7 bağımsız denklem elde edilir. Bunlardan

$$f_{TT} T_r \cos \gamma = 0 \quad f_T B_t = 0 \quad (2.146)$$

$f(T)$  formu üzerindeki kısıtları ifade etmektedir. İlk ifadede  $f(T)$ 'nin üzerindeki kısıtları kaldırmak için en uygun seçenek  $\gamma = \pi/2$  ve  $B = B(r)$  kabulüdür. Böylece iyi tetrad

$$\tilde{h}^a_{\mu} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B \cos \phi \sin \theta & r \cos \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta \\ 0 & -B \cos \theta & r \sin \theta & 0 \\ 0 & B \sin \phi \sin \theta & r \sin \phi \cos \theta & r \cos \phi \sin \theta \end{pmatrix} \quad (2.147)$$

olacaktır. Tetradların iyi tetrad olmalarını sağlayan özellik onların alan denklemlerini çözmeleridir. Bununla beraber iyi tetradların temel anlamdaki tek özelliği seçilen geometri için Lorentz dönüşümü kaynaklı eylemsizlik etkilerinin olmadığı yani spin koneksiyonun sıfır olarak seçilebildiği tetradlar olmalarıdır.

### 2.3.5.3. $f(T)$ ve Yerel Lorentz Kovaryansı

Yerel Lorentz kovaryansı GG kuramının en önemli temel taşlarından biridir. GGTE ile GG arasındaki (2.56) eşdeğerliği göz önüne alındığında Lagrangianlar arasında bir sınır terimi bulunmaktadır. Bu sınır teriminin iyi anlaşılması adına saf tetradlar cinsinden ifade edilen alan şiddeti  $T^a_{\mu\nu}$  (2.17) Lorentz dönüşümü altındaki davranışına değinmek gerekir. Alan şiddetine Lorentz dönüşümü uygulandığında

$$T^a_{\mu\nu} \rightarrow \Lambda_b^a T^b_{\mu\nu} + \Lambda_b^a (h_\nu^c \partial_\mu \Lambda_c^b - h_\mu^c \partial_\nu \Lambda_c^b) \quad (2.148)$$

olacağından bu dönüşüm altında kovaryant davranış göstermediği söylenebilir. Dolayısı ile ayar kuramı diliyle alan şiddeti olarak ifade edilen burulma tensörü anholonomi katsayılarına indirgenmiş olur. Burulma tensörü için kovaryantlığın olmayışı burulma skaleri için de kovaryantlığın olmayacağı anlamını taşır. Ancak GGTE Lagrangianından türetilen alan denklemleri Lorentz kovaryanttır. Bunun nedeni Lagrangian düzeyinde kovaryantlığı bozan terimin eylemsizlikle ilgili olup dinamiğe etki etmemesidir. Bunun yanında Li ve arkadaşlarının çalışmasına göre [109]  $f(T)$  kuramı Lagrangianı ve alan denklemleri Lorentz kovaryant değildir.

Lorentz kovaryansı ile ilgili bu durumun asıl kaynağı teleparalellik varsayımı ile ortaya atılan saf tetrad yaklaşımıdır. Krššák [110, 111] GGTE kuramının tam kovaryant bir formülasyonunun saf tetrad yaklaşımı yerine spin koneksiyonlarının da hesaba dâhil edildiği

durumda yazılabileceğini ifade etmiştir. Bu formülasyonda burulma tensörü ve burulma skaleri de Lorentz dönüşümleri altında kovaryant olacaktır. Dolayısı ile Lagrangian artık sadece saf tetradlarla üretilen Wietzenböck koneksiyonlarının yanında spin koneksiyonunu da kapsayacak şekilde  $\dot{\omega}^\mu = \dot{\omega}_\nu^{ab} h_a^\nu h_b^\mu$  olmak üzere

$$\mathcal{L}_{GGTE}(h^a_\mu, \dot{\omega}^a_{b\mu}) = \mathcal{L}_{GGTE}(h^a_\mu, 0) + \partial_\mu(h\dot{\omega}^\mu) \quad (2.149)$$

formunda ifade edilecektir. Böylece spin koneksiyonu dinamiğe etki etmeyen sınır terimi şeklinde ifade edilmiş olur. Öte yandan (2.149) ifadesine benzer şekilde burulma tensörü için de

$$T(h^a_\mu, \dot{\omega}^a_{b\mu}) = T(h^a_\mu, 0) + \frac{4}{e} \partial_\mu(h\dot{\omega}^\mu) \quad (2.150)$$

yazılabilir. GGTE için bu usulle yerel Lorentz kovaryansı sağlanabilir. Buna karşın yerel Lorentz kovaryansını sağlamak adına spin koneksiyonu devreye almanın teleparalelliğin kaybına sebep olacağı ifade edildiği çalışmalar bulunmaktadır [112].

Krššák'ın yaklaşımı  $f(T)$  kuramında da kullanılabilir.  $f(T)$  kuramının formülasyonunda gözden kaçan ana unsur; GGTE'de sıfıra eşdeğer olan ve dinamiği etkilemeyen spin koneksiyonlarının bu kuramda sadece "düzgün çerçeve" tabir edilen çerçevelerde sıfıra eşit oluşudur. Dolayısı ile bu çerçeveler kullanıldığında alan denklemlerini çözebilen tetradlar bulunabilecektir. Bu çerçevelerin nasıl bulunacağına dair yapılan çalışmada [111] spin koneksiyonu tekrar devreye alınarak yerel Lorentz kovaryansının sağlanabileceği ifade edilmiştir. Bunun için referans bir tetrad takımı seçilir ve saf eylemsiz kısmını bulmak için bunun kütle çekimi sabiti sıfırlanır. Ancak spin koneksiyonun eklenmesi ile Lorentz kovaryansı sağlanırken problemin karmaşılaşması kaçınılmazdır. Bu şekilde "düzgün çerçeve" ifade eden bu spin koneksiyonlarını elde etmek yerine "iyi tetradlar" elde ederek devam etmek de ikinci bir seçenektir. İyi tetradları elde etmek ve bu yolla devam etmek her spesifik problem için ayrı bir komplikasyona yol açacaktır. Bütün bunların yanında üçüncü bir seçenek standart saf tetrad formülasyonu ile devam ederek köşegen tetradlarla da devam etmektir. Bu şekilde elde edilen çözümler alan denklemlerini doğrudan sağlamasalar da bir Lorentz dönüşümü kadar uzak oldukları iyi tetradlarla aynı fiziksel anlamı taşırlar.

#### 2.3.5.4. $f(T)$ Kozmolojisi

Modifiye edilmiş kütle çekimi kuramlarının en önemli motivasyon ve test alanı hiç şüphesiz kozmolojik dinamiklere dair yaptıkları öngörülerdir. Bu tip kuramların ortak yaklaşımı FLRW uzay-zamanı kullanılarak modifiye edilen Friedmann denklemlerini elde etmektir. Bu aşamada  $f(T)$  kuramı için modifiye edilmiş kozmolojik dinamikler incelenecektir. Bunun için  $a$  genişleme faktörü olmak üzere uzay eğriliği sıfır olan homojen, izotropik

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (2.151)$$

Robertson - Walker metriğini tetrad bileşenleri  $e_a(x^\mu)$  cinsinden

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a_\mu e^b_\nu \quad (2.152)$$

şeklinde yazmak gerekir. Böylece teleparalel kurama geçiş yapılarak Wietzenböck koneksiyonları cinsinden burulma skaleri kozmolojik kabuller altında elde edilmiş olur.

$$T = -6H^2 \quad H = \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.153)$$

Bu  $T$  değeri için elde edilen modifiye Friedmann denklemleri

$$12H^2 F_T + F = 16\pi G \rho \quad (2.154)$$

$$48H^2 \dot{H} F_{TT} - (12H^2 + 4\dot{H}) F_T - F = 16\pi G p \quad (2.155)$$

veya

$$-2T F_T + F = 16\pi G \rho \quad (2.156)$$

$$-8\dot{H} T F_{TT} + (2T - 4\dot{H}) F_T - F = 16\pi G p \quad (2.157)$$

ve korunum yasası

$$\frac{d}{dt}(a^3 \rho) = -3a^3 H p \quad (2.158)$$

şeklinde olacaktır. Bu korunum denkleminin  $p = w\rho$  hal denklemi için

$$\rho \propto (1+z)^{3(1+w)} \quad (2.159)$$

şeklinde bir çözümü vardır ( $z$  kozmik kırmızıya kayma). Diğer modifiye kütle çekimi kuramlarında olduğu gibi  $f(T)$  kuramı için de bu modifiye Friedmann denklemleri standart Friedmann denklemleri cinsinden

$$\rho_T = \frac{1}{2k^2}(2TF_T - F + 6H^2), \quad p_T = -\frac{1}{2k^2}[-8\dot{H}TF_{TT} + (2T - 4\dot{H})F_T - F + 4\dot{H} + 6H^2] \quad (2.160)$$

olmak üzere

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \rho_T) \quad (2.161)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{6}[\rho + \rho_T + 3(p + p_T)] \quad (2.162)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece ekstra terimler yoğunluk ve basınç parametrelerinin içerisinde burulma katkısı olarak ifade edilmiş olur. Benzer şekilde hal denklemi parametresi

$$w = -1 + \frac{-8\dot{H}TF_{TT} - 4\dot{H}F_T}{-2TF_T + F} \quad (2.163)$$

şeklini alır.

### 2.3.6. $f(T)$ 'nin Astrofiziksel ve Kozmolojik Öngörülleri

#### 2.3.6.1. Erken Evren Enflasyonu

Günümüz kozmolojisinde Evren'in bugünkü haline gelebilmesi için erken Evren'de bir ani genişleme fazına ihtiyaç duyulmaktadır. Erken Evren enflasyonu kozmolojinin ufuk, düzlük, monopol problemlerine deva olmasının [113–116] yanında ilkel dönem inhomojeniteleri gibi Evren'in bugünkü gökada, gökada kümeleri gibi dev yapılarının oluşumundan da sorumlu görünmektedir [117]. Bundan dolayı modern kozmolojinin temel taşlarından biri erken Evren enflasyonudur.  $f(T)$  kuramının da gündeme gelme gerekçesi olarak erken Evren enflasyonunu açıklayabilme imkanına sahip olması gösterilebilir.  $f(T)$  kuramının çeşitli enflasyon senaryoları ile ilişkisini araştırmaya yönelik birçok çalışma bulunmaktadır

[118–122]. Bu kısmın hazırlanmasında da faydalanılan yayında [104] Born - Infeld (BI) Lagrangianlarının teleparalel versiyonu kullanılarak 'inflaton' skaler alanı olmaksızın erken Evren enflasyonunun öngörülebileceği öne sürülmüştür. Aslen enflasyonu bir skaler alana ihtiyaç duymadan Einstein - Cartan kuramı bağlamında çözmek mümkündür. Ancak bu kuramlarda enerji-momentum tensörü için spin den kaynaklı antisimetrik terimlere ihtiyaç duyulmaktadır.

Born ve Infeld, Maxwell teorisindeki sonsuz özenerji şeklinde ortaya çıkan tekillikleri bertaraf edebilme amacıyla başlangıç Lagrangianı  $\mathcal{L} = \sqrt{-g}L$  olan sistemler için bu Lagrangianı Modifiye ederek

$$\mathcal{L}_{BI} = \sqrt{-g} \lambda \left[ \sqrt{1 + \frac{2L}{\lambda}} - 1 \right] \quad (2.164)$$

şeklinde bir alan Lagrangianı önermişlerdir [123]. Bu Lagrangian son yıllarda sicim kuramının alçak enerji yaklaşımlarında ve öz (quintessence) kuramlarında madde akışkanlarının hem enflasyon hem kozmik ivmelenmeyi üretebilecek şekilde modellenmesinde kullanılmaktadır. Ferraro'nun çalışmasına dönülecek olursa, ana motivasyonun burulma skaleri  $T$ 'den türetilen ikinci derece denklemlerin avantajının BI Lagrangianına taşınarak kozmoloji uygulamalarındaki durumun incelenmesi olduğu söylenebilir. Bunun için öncelikle (2.164) Lagrangianı,  $T$  burulma skalerini içerecek şekilde

$$\mathcal{L}_{TBI} = \frac{\lambda}{16\pi G} h \left[ \sqrt{1 + \frac{2S_{\mu}^{\nu\rho} T_{\nu\rho}^{\mu}}{\lambda}} - 1 \right] \quad (2.165)$$

olarak yazılmıştır. Bu Lagrangianın nasıl bir kozmoloji öngördüğünü değerlendirebilmek için (2.151) FLRW metriğine tekabül eden bir

$$h_{\mu}^i = \text{diag}(1, a(t), a(t), a(t)) \quad (2.166)$$

tetradı çözüm olarak ele alınmalıdır. Kaynak olarak homojen ve izotropik akışkan ele alındığında bu tetrad takımı için sadece iki bağımsız alan denklemi vardır. Modifiye edilmiş Friedmann denklemlerinin eşdeğeri pozisyonundaki bu alan denklemleri

$$\left(1 - \frac{12H^2}{\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{16\pi G}{\lambda} \rho \quad (2.167)$$

( $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$  Hubble parametresi ve  $q = -\ddot{a}/\dot{a}^2$  yavaşlama parametresi)

$$\left(\frac{16H^2}{\lambda} + \frac{4H^2}{\lambda}q - 1\right)\left(1 - \frac{12H^2}{\lambda}\right)^{-\frac{3}{2}} + 1 = \frac{16\pi G}{\lambda}p \quad (2.168)$$

şeklindedir. (2.167)'nin zamana göre türevi alınıp (2.168) göz önüne alındığında elde edilen korunum denklemi  $p = \omega\rho$  hal denklemi için

$$a^{3(1+\omega)}\rho = a_o^{3(1+\omega)}\rho_o = \text{sabit} \quad (2.169)$$

çözümü elde edilir ( $a_o$  ve  $\rho_o$  bugünkü değerleri ifade etmektedir). Yine (2.167) ve (2.168)'den

$$1 + q = \frac{3}{2} \frac{(1 + \omega)}{\left(1 + \frac{16\pi G}{\lambda}\rho\right)\left(1 + \frac{8\pi G}{\lambda}\rho\right)} \quad (2.170)$$

elde edilir ki; bu sonuç negatif basınç değerlerine ihtiyaç duyulmadan ivmelenerek genişlemenin (yani  $q < 0$ ) mümkün olabileceğini göstermektedir. Bunun için  $\rho$  değerinin

$$\frac{32\pi G}{\lambda}\rho > -3 + \sqrt{13 + 12\omega} \quad (2.171)$$

olacak şekilde büyük olması yeterlidir. Yüksek  $\rho$  değerlerine erken Evren'de ulaşılabilceği açıktır. Ancak erken Evren enflasyonu şeklinde eksponansiyel bir genişleme için (2.170)'de  $\rho \rightarrow \infty$  limiti göz önüne alınmalıdır. Böylece yavaşlama parametresi  $q \rightarrow -1$  değerini alacaktır. Detaylar için [104, 124] incelenebilir.

### 2.3.6.2. Kozmik İvmelenme

Kozmik ivmelenme [125, 126] modifiye kütle çekimi kuramları için en önemli çıkış noktalarında biridir. Bu bağlamda önceki bölümde bahsedildiği üzere erken Evren enflasyonunu ifade etmek üzere kullanılan  $f(T)$  kuramı kozmik ivmelenmeyi ifadede de doğal bir aday pozisyonuna gelmiştir. Kozmik ivmelenmenin  $f(T)$  kuramı bağlamında ele alındığı önemli çalışmalar bulunmaktadır [105, 127, 128].

Bu yaklaşımlardan hareketle Bengochea ve Ferraro'nun çalışmasında  $\alpha$  ve  $n$  gözlemler tarafından belirlenecek gerçel sabitler olmak üzere  $f(T)$  için

$$f(T) = T - \frac{\alpha}{(-T)^n} \quad (2.172)$$

fonksiyonel formu ele alınmıştır.<sup>1</sup> Buradaki temel yaklaşım (2.172) Lagrangianı ve (2.159) (2.161)'da yerine yazılarak  $H(z)$  için nümerik olarak çözüldükten sonra elde edilen sonuçları 307 SNe Ia verisi ile kıyaslama şeklindedir. Bu verilerle kıyaslandığında elde edilen best-fit değerleri  $\Omega_m = 0.42$  ve  $n = 1.30$  şeklindeyse de Baryon Akustik Osilasyonu ve KAPI verileri eklendiğinde best-fit değerleri  $\Omega_m = 0.27$  ve  $n = -0.10$  şeklinde  $\Lambda$ CDM modeliyle uyumlu sonuçlar öngörmektedir. Ayrıca model kozmik yavaşlama fazından ivmelenme fazına geçiş için öngörölmüş değerler [129] ile uyumlu  $z_{ivmelenme} \simeq 0.74$  kırmızıya kayma değerini öngörmüştür.

Bengochea ve Ferraro'nunkine benzer bir çalışma Eric V. Linder tarafından gerçekleştirilmiştir [105]. Bu çalışmada Lagrangian için  $T + f(T)$  formu kullanılmıştır. Bu şekilde modifiye Friedmann denklemleri yazılarak  $f$ 'nin sabit olduğu durumun bir kozmolojik sabite  $f$ 'nin  $T$ 'ye göre lineer olduğu durumun ise kütle çekimi sabiti  $G$  için bir yeniden tanımlamaya karşılık geldiği sonucuna varılmıştır. İki tür fonksiyonel form

$$f = \alpha(-T)^n = \alpha 6^n H^{2n} \quad (2.173)$$

ve

$$f = cT_0 \left(1 - e^{-p\sqrt{T/T_0}}\right) \quad (2.174)$$

kullanılarak yapılan analizler neticesinde (2.173) modelinin geçerliliği için  $n \ll 1$  koşulunun sağlanması gerektiği ayrıca  $n = 1/2$  için ekstra boyutlu bir kuram olan olan Dvali - Gababadze - Poratti (DGP) kütle çekimi kuramıyla uyumlu bir genişleme geçmişi öngördüğü sonuçlarına varılmıştır. (2.174) için ise hal denklemi parametresi ile basınç  $p$  değerlerine yer verilmiştir. Bu model yüksek kırmızıya kaymada ve gelecek dönemler için  $\Lambda$ CDM modeliyle uyumludur ( $p < 0.51$  hariç). Evren'in ivmelenerek genişlemesinin  $f(T)$  kuramı bağlamında incelendiği en kapsamlı çalışma ise Ratbay Myrzakulov tarafından gerçekleştirilmiştir [128]. Bu çalışmada hem farklı akışkan türleri ve farklı hal denklemleri hem de  $f(T)$  için farklı fonksiyonel formlar kullanılarak ivmelenen Evren için geliştirilen modeller mevcut kuramların kozmolojik dinamikleriyle örtüşmektedir. Myrzakulovun çalışması karanlık enerjiye ihtiyaç duyulmadan her türlü kozmolojik çözümün  $f(T)$

<sup>1</sup> Bu Lagrangian kurgusu  $f(R)$  kuramlarında da kullanılan bir fonksiyonel form olup bu formun özelliği erken dönemde  $T$  terimi baskın iken Evren'in geç dönemlerinde  $-\frac{\alpha}{(-T)^n}$  teriminin baskın oluşudur.

kuramından elde edilebileceği sonucunu ortaya koymaktadır.

### 2.3.6.3. *Karanlık Madde*

Karanlık madde araştırmalarından elde edilen gözlemsel bulgulardan hareketle karanlık madde için önerilen madde formlarının istenilen sonuçları vermemesi modifiye edilmiş kütle çekimi literatürünü de bu konuda zenginleştirmiştir. Bu bağlamda  $f(T)$  kuramının da karanlık madde etkisi gösterebilen geometrik terimleri üretebileceği düşünülmüş, bazı araştırmacılar bu konuda çalışma yapmışlardır [106, 130].

Rahaman'ın çalışmasında genel küresel simetrik bir

$$ds^2 = -e^{a(r)} dt^2 + e^{b(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.175)$$

metriğinden hareketle

$$ds^2 = -B_0 r^l dt^2 + e^{b(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.176)$$

galaktik dönme eğrilerini veren metrik elde edilmiştir ( $l = 2(v^\phi)^2$  ve  $B_0$  integrasyon sabiti). Bu metriğin üretilabileceği bir tetrad

$$e^i_\mu = \text{diag}[\sqrt{B_0 r^l}, e^{\frac{b}{2}}, r, r \sin \theta] \quad (2.177)$$

şeklinde yazılabilir. Rahaman'ın çalışmasında bu tetrad genel  $f(T)$  alan denklemleri için bir girdi olarak kullanılmış,  $f(T) = T$  ve  $f(T) = \alpha T + T_0$  durumları ve kaynak terimlerinin hal denklemleri için çeşitli varsayımlar altında analizler yapılmıştır. Bu analizler neticesinde galaktik dönme eğrilerine temel teşkil eden kararlı dairesel yörüngelerin burulma etkisiyle açıklanabileceği çözümlerin aynı zamanda arka plan eğriliği ile ilişkili olabileceği sonucuna varılmıştır.

Bir diğer çalışmada [106] yine genel küresel simetrik bir tetrad takımı için galaktik halo madde dağılımının izotropik olduğu kabulü altında  $f(T) = T$  durumunun bir başka analizi gerçekleştirilmiştir. Jamil dönme eğrilerine konu gökada için küresel simetrik uzay-zaman varsayımını kullanmıştır. Dolayısı ile başlangıç noktası genel küresel simetrik (2.175)

metriği seçilerek bu metriktten hareketle

$$\left\{ e^i_{\mu} \right\} = diag \left\{ e^{a(r)/2}, e^{b(r)/2}, r, r \sin \theta \right\} \quad (2.178)$$

tetradı kullanılarak burulma skaleri

$$T(r) = \frac{2e^{-b}}{r} \left( a' + \frac{1}{r} \right) \quad (2.179)$$

şeklinde  $r$ 're bağlı olarak hesaplanmış,  $f(T) = T$  durumu için dinamik denklemler  $\rho$  yoğunluk,  $p_r$  radyal basınç ve  $p_t$  teğetsel basınç cinsinden elde edilmiştir. Asıl ilgilenilen tetrad potansiyeli  $e^{a(r)}$  olduğundan sistemi basitleştirmek adına  $b(r)$

$$b(r) = c \quad (2.180)$$

şeklinde sabit seçilmiş ve kaynak terimleri için  $p_r = p_t$  şeklinde izotropik akışkanlık varsayımı yapılmıştır. Bu kabuller altında  $e^{a(r)}$  tetrad potansiyelinin  $C_1$  ve  $C_2$  integrasyon sabitleri olmak üzere

$$e^{a(r)} = \frac{r^{3-\sqrt{13-4e^c}}}{16(-13+4e^c)^2} (C_1 r^{\frac{\sqrt{13-4e^c}}{2}} - C_2)^4 \quad (2.181)$$

şeklinde elde edilebildiği görülmektedir. Öte yandan gökadalara dönüş hızları için genel ifade

$$v_{\phi} = \left( \frac{r(e^a)'}{2e^a} \right)^{1/2} \quad (2.182)$$

şeklinde dir. Burada (2.181) yerine yazıldığında bu model için gökadalara dönüş hızları elde edilir. Bu sonuçların verilerle uyumlu olduğu ifade edilmiştir. Jamil'in çalışmasında ayrıca gökadalara için merkezi yoğunluk da elde edilen tetrad çözümü kullanılarak

$$\rho(r) = \frac{1}{16\pi} \left[ c_2 + \frac{2c_1(1-e^{-c})}{r^2} \right] \quad (2.183)$$

şeklinde hesaplanmıştır. Bu merkezi yoğunluk ifadesi gözlemsel verilerden elde edilen iki model ile kıyaslanmış NFW [131] modeliyle uyumlu öngörüler yapabildiği görülmüştür.

### 2.3.7. Teleparalel Kütle Çekimi için Diğer Genellemeler

GG'de olduğu gibi GGTE'nde de Lagrangian için farklı genellemeler yapmak mümkündür. GG ele alındığında eğrilik skalerinin farklı fonksiyonel formlarını temsil eden  $f(R)$  kuramının yanı sıra Bölüm 2.3.4.'de bahsedildiği üzere eğrilik skalerinin diferansiyel fonksiyonlarını da içeren  $f(R, \square R)$  veya GB invaryantı gibi geometrik invaryantları içeren  $f(\mathcal{G})$ ,  $f(R, \mathcal{G})$ ,  $f(R, \mathcal{T})$  vb. formlardaki Lagrangianlardan türetilen kuramlar da bulunmaktadır.

Literatürde benzer şekildeki genellemelerin kozmolojik motivasyonların yanı sıra yerel Lorentz invaryansı gibi  $f(T)$  kuramının yapısal problemlerinden yola çıkılarak teleparalel kütle çekimi için de gerçekleştirildiği görülmektedir. Burada bazı genellemelerden bahsedilecek olup detaylı bilgi bu bölümün hazırlanmasında yararlanılan [110, 124, 132, 133] kaynaklarından elde edilebilir.

#### 2.3.7.1. $f(T, B)$ Kuramı

Bu kuram aslen geniş bir kuram grubunu kapsamaktadır.

$$\mathcal{S}_{f(T, B)} = \frac{1}{\kappa} \int d^4x e f(T, B) + \mathcal{S}_{MADDE} \quad (2.184)$$

eylem integralinden türetilen kuramda  $B = \frac{2}{e} \partial_\mu (e T^\mu)$  bir sınır terimini ifade etmektedir. Eğrilik skaleri  $R$  ile burulma skaleri  $T$  arasında

$$R = -T + \frac{2}{e} \partial_\mu (e T^\mu) = -T + B \quad (2.185)$$

ilişkisi olduğu noktasından bakıldığında  $f(T)$ , eğrilik  $f(R)$  kuramlarının yanı sıra teleparalel eğrilik  $f(R, T)$  kuramının da  $f(T, B)$  kuramının özel durumlarına karşılık geldiği söylenebilir. Bu kuramın kozmolojik dinamikleri bazı fonksiyonel formlar için incelenmiş ve uygun kozmolojik dinamiklerin bu kuramdan türetilbildiği sonucuna varılmıştır [132].

#### 2.3.7.2. $f(T, T_G)$ Kuramı

GB invaryantının  $f(R)$  fonksiyonel yapısına dahil edilerek  $f(R)$  kuramlarının  $f(R, \mathcal{G})$  şeklinde genellemelerinden esinlenilerek üretilmiş bir kuram grubu olan  $f(T, T_G)$  için  $D$

boyutta eylem integrali

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa_D^2} \int d^D x e f(T, T_G) + \mathcal{S}_{MADDE} \quad (2.186)$$

şeklindedir. Burada  $T_G$  GB invaryantının teleparalel eşdeğeridir. Bu invaryant (2.185)'nden hareketle

$$\begin{aligned} T_G = & (K_{EA}^{A_1} K_B^{EA_2} K_{FC}^{A_3} K_D^{fA_4} - 2K_A^{A_1 A_2} K_{EB}^{A_3} K_{FC}^E K_D^{FA_4} \\ & + 2K_A^{A_1 A_2} K_{EB}^{A_3} K_F^{EA_4} K_{CD}^F + 2K_A^{A_1 A_2} K_{EB}^{A_3} K_{C,D}^{EA_4}) \delta_{A_1 A_2 A_3 A_4}^{ABCD} \end{aligned} \quad (2.187)$$

şeklinde tanımlanmıştır [134]. Burada Bu invaryant eğrilik GB invaryantı  $\mathcal{G}$ 'ye

$$e\mathcal{G} = eT_G + \text{toplam diverjans} \quad (2.188)$$

şeklinde bir ilişki ile bağlantılı olduğu varsayımı altında elde edilmiştir. Kuram  $f(T)$  kuramı gibi yerel Lorentz invaryansına sahip olmama sorunu ile karşı karşıyadır. Bu kuramın kozmolojik dinamikleri incelendiğinde karanlık enerji için parametre seçimlerine bağlı olarak farklı hal denklemi parametre yelpazesinde çözüm sunmaktadır. Ayrıca karanlık madde-karanlık enerji ölçeklendirmesi ile ilgili bir çözüm sunarak rastlantı (coincidence) problemine ışık tutabilir [124].

### 2.3.7.3. Minimal Olmayan Madde-Burulma Çiftlenimi

Yine  $f(R)$  kuramları kapsamında çalışılan ilginç konulardan birisi de madde-geometri için minimal olmayan çiftlenim yaklaşımıdır. Bu yaklaşım  $f(R)$  kuramı için ekstra kuvvetler ortaya çıkarmış ve test parçacıkları için hareketin jeodezik olmayışı sonucunu doğurmuştur.  $f(T)$  kuramı için T. Harko tarafından yapılan çalışmada doğrudan  $f(R)$  için kullanılan Lagrangian formu uygulanarak [135]

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4 x e \{T + f_1(T) + [1 + \lambda f_2(T)] \mathcal{L}_{MADDE}\} \quad (2.189)$$

Lagrangianı ve bu Lagrangianı da hareket denklemleri elde edilerek kozmolojik dinamikleri  $f_1(T)$  ve  $f_2(T)$  fonksiyonlarının farklı durumları için incelenmiştir. Bu modeller için gerçekleştirilen hesaplamalar sonucunda erken enflasyondan geç dönem ivmelenmesine kadarki evriminin öngörülebildiği sonucuna varılmıştır [135].

Minimal olmayan madde-burulma çiftlenimi için gerçekçi modeller oluşturmak adına Rui-Hui Lin tarafından gerçekleştirilen çalışmada Evren'in radyasyon baskın, madde baskın ve günümüz ivmelenecek genişlemesine dair kozmolojik dinamiklerini ifade edebilen iki model üzerinde durulmuştur [136]. İki modelin de SNe Ia, CMB, Baryon Akustik Osilasyonu verileriyle uyumlu kozmolojik evrim geçmişi öngördüğü gösterilmiştir. Bir diğer çalışmada ise bu modellerin Güneş Sistemi ölçeğindeki dinamikleri incelenmiştir. Perihel presesyonu, jeodetik etki ve kütle çekimsel kırmızıya kayma gibi etkiler üzerine yapılan çalışmada elde edilen sonuçlara göre modellerden birisi her üç testte de başarı göstermiş, diğer modelde ise serbest parametre Merkür'ün perihel presesyonu tarafından sınırlandırılmıştır [137].

#### 2.3.7.4. $f(T, \mathcal{T})$ Kuramı

Bu kuram da minimal olmayan madde-burulma ilişkisi üzerine kurulmuştur. Ancak buradaki minimal olmayan çiftlenim burulma skaleri  $T$  ile enerji-momentum tensörünün izi  $\mathcal{T}$  arasındadır. Bu kuramın alan denklemleri

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x e [T + f(T, \mathcal{T})] + \int d^4x e \mathcal{L}_m \quad (2.190)$$

Lagrangianından türetilmiştir. Burada  $f(T, \mathcal{T})$  burulma skaleri  $T$  ve enerji-momentum tensörünün izi  $\mathcal{T}$ 'nin keyfi fonksiyonunu ifade etmektedir [135]. Harko'nun [135] çalışmasında (2.190)'den türetilen alan denklemleri FRW uzay-zamanını ifade eden tetradlar için yazılmış böylelikle modifiye edilmiş Friedmann denklemleri elde edilerek kuramın kozmolojik sonuçları üzerinde durulmuştur.

Bu çalışmada herhangi bir gözlemsel veri ile karşılaştırma yapılmamıştır. Bununla beraber doğrusal düzeydeki skaler tedirgeme (pertürbasyon) durumunda model parametrelerinin geniş bir sınıfı için kararsızlık ve hayalet alanları gibi problemlerin olmadığı sonucuna varılmıştır. Bir diğer husus da modelde kullanılan parametrelere bağlı olarak Evren'in enflasyon, madde baskın dönem ve son dönem ivmelenecek evrelerinin hepsini kapsayan çözümlerin bu kuramda mümkün görünmesidir. Ayrıca hal denklemi parametresi  $\omega$  için de kozmik öz ve fantom fazları arasında bir serbestlik bulunmaktadır.

#### 2.3.7.5. $f(R, T)$ Kuramı

İlk olarak Ratbay Myrzakulov tarafından ortaya atıldığı için "Myrzakulov kuramı" da denilen kuramda eğrilik skaleri  $R$  ile burulma skaleri  $T$ 'nin genel fonksiyonel formu

kullanılmaktadır. Bu kuramda;  $f(R)$  ve  $f(T)$  kuramları arasındaki farklılıklar göz önüne alındığında iki kuramın da özelliklerini içereceği yaklaşımdan hareketle

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} [f(R, T) + \mathcal{L}_m] \quad (2.191)$$

Lagrangianı kullanılmakta olup  $f(R)$  ve  $f(T)$  arasındaki notasyon farkını ortadan kaldırmak adına  $|e| \equiv \det(e^i_\mu) = \sqrt{-g}$  tanımları yapılmıştır [138]. Alan denklemleri ise tetrada göre türetilmektedir. Myrzakulov'un kuramı tanıttığı çalışmasında

$$f(R, T) = \mu R + \nu T$$

Lagrangianı için FRW uzay-zamanının  $a = a_0 t^\delta$  şeklindeki karanlık enerji içermeyen ivmelenerek genişlemeyen çözümünü elde etmiştir.

#### 2.3.7.6. $f(T_{vek}, T_{ten}, T_{aks})$ Kuramı

Modifiye edilmiş kütle çekimi kuramları içinde doğrudan burulmaya özgü bir genelleme olan  $f(T_{vek}, T_{ten}, T_{aks})$  kuramının kökeni "Yeni Genel Görelilik" olarak adlandırılan çalışmaya dayanmaktadır [139]. Buradaki kullanılan yaklaşımda öncelikle burulma tensörü Lorentz dönüşümlerine göre indirgenemez bileşenleri olan vektörel, aksiyel ve tensörel burulmalar

$$v_\mu = T^\lambda_{\lambda\mu} \quad (2.192)$$

$$a_\mu = \frac{1}{6} \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} T^{\nu\sigma\rho} \quad (2.193)$$

$$t_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} (T_{\lambda\mu\nu} + T_{\mu\lambda\nu}) + \frac{1}{6} (g_{\nu\lambda} v_\mu + g_{\nu\mu} v_\lambda) - \frac{1}{3} g_{\lambda\mu} v_\nu \quad (2.194)$$

cinsinden

$$T_{\lambda\mu\nu} = \frac{2}{3} (t_{\lambda\mu\nu} - t_{\lambda\nu\mu}) + \frac{1}{3} (g_{\lambda\mu} v_\nu - g_{\lambda\nu} v_\mu) + \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} a^\rho \quad (2.195)$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki (2.192), (2.193) ve (2.194) burulmalarının kareleri alınarak

$$T_{ten} = t_{\lambda\mu\nu} t^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} (T_{\lambda\mu\nu} T^{\lambda\mu\nu} + T_{\lambda\mu\nu} T^{\mu\lambda\nu}) - \frac{1}{2} T^\lambda_{\lambda\mu} T^\nu{}^\mu \quad (2.196)$$

$$T_{aks} = a_\mu a^\mu = \frac{1}{18} (T_{\lambda\mu\nu} T^{\lambda\mu\nu} - 2 T_{\lambda\mu\nu} T^{\mu\lambda\nu}) \quad (2.197)$$

$$T_{vek} = v_\mu v^\mu = T^\lambda_{\lambda\mu} T^\nu{}^\mu \quad (2.198)$$

şeklinde üç ayrı kuadratik burulma invaryantı tanımlanabilir. GGTE kuramında kullanılan burulma skaleri  $T$  bu üç kuadratik burulma invaryantı cinsinden

$$\mathcal{L}_{\text{GGTE}} = \frac{h}{16\pi G} \left( \frac{3}{2}T_{\text{aks}} + \frac{2}{3}T_{\text{ten}} - \frac{2}{3}T_{\text{vek}} \right) \quad (2.199)$$

olacak şekilde ifade edilir. Yeni Genel Görelilik’de ise bu bahsi geçen üç invaryantın katsayıları  $a_i$ ’ler

$$\mathcal{L}_{\text{YGG}} = \frac{h}{2\kappa} \left( a_0 + a_1 T_{\text{aks}} + a_2 T_{\text{ten}} + a_3 T_{\text{vek}} \right) \quad (2.200)$$

Lagrangianında görüldüğü şekliyle keyfi bırakılmıştır [110]. Burada  $a_0$  kozmolojik sabit olarak yorumlanabilir. Hayashi’nin yaklaşımında burulma invaryantları  $R$  cinsinden

$$-\frac{3}{2}T_{\text{aks}} - \frac{2}{3}T_{\text{ten}} + \frac{2}{3}T_{\text{vek}} = -R \quad (2.201)$$

olarak ifade edilerek Lagrangian ifadesi

$$\mathcal{L}_{\text{YGG}} = \frac{h}{2\kappa} \left( a_0 - R + b_1 T_{\text{aks}} + b_2 T_{\text{ten}} + b_3 T_{\text{vek}} \right) \quad (2.202)$$

şekline dönüştürülmüştür. Böylece katsayılar

$$b_1 = a_1 + \frac{2}{3}, \quad b_2 = a_2 + \frac{2}{3}, \quad b_3 = a_3 - \frac{2}{3} \quad (2.203)$$

formunda yeniden tanımlanmıştır. Açıkça görülmektedir ki; YGG Lagrangianı kuadratik burulma invaryantlarının doğrusal fonksiyonları ile sınırlıdır. Bu Lagrangian

$$\mathcal{L}_{\text{ATV}} = \frac{h}{2\kappa} f(T_{\text{aks}}, T_{\text{ten}}, T_{\text{vek}}) \quad (2.204)$$

gibi daha genel bir formda yazılabilir. Bu durumda üç burulma invaryantı da farklı değişken gibi davranacaktır [133]. Bu fonksiyonel yapıya sınır terimi

$$B = \frac{2}{e} \partial_\mu (e v^\mu) \quad (2.205)$$

de eklenebilir. Bu durumda Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{e}{2\kappa} f(T_{\text{ax}}, T_{\text{ten}}, T_{\text{vec}}, B) \quad (2.206)$$

halini alacaktır. Bunun yanında standart  $f(T)$  kuramının konformal dönüşüm altında minimal çiftlenim halinde bir Einstein çerçevesine dönüşmediği göz önüne alınarak bir konformal  $f(T)$  kuramı arayışının sonucu olarak indirgenemeyen üç burulma invaryantının konformal dönüşüm özellikleri incelenmiştir. Bu invaryantlar konformal dönüşüm altında

$$T_{\text{aks}} = \Omega^2 \hat{T}_{\text{ax}} \quad (2.207)$$

$$T_{\text{ten}} = \Omega^2 \hat{T}_{\text{ten}} \quad (2.208)$$

$$T_{\text{vec}} = \Omega^2 \hat{T}_{\text{vec}} + 6\Omega \hat{v}^\mu \partial_\mu \Omega + 9\hat{g}^{\mu\nu} (\partial_\mu \Omega) (\partial_\nu \Omega) \quad (2.209)$$

$$B = \Omega^2 \hat{B} - 4\Omega \hat{v}^\mu \partial_\mu \Omega - 18 \partial^\mu \Omega \partial_\mu \Omega + \frac{6}{\hat{e}} \Omega \partial_\mu (\hat{e} \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \Omega) \quad (2.210)$$

şekinde dönüşmektedir. Görüldüğü üzere  $T_{\text{aks}}$  ile  $T_{\text{ten}}$  bileşenleri için konformal dönüşümde ekstra terimler bulunmazken  $T_{\text{vec}}$  için ekstra terimler ortaya çıkmaktadır. (2.199) göz önüne alındığında GGTE'nin neden bir minimal çiftlenimli Einstein çerçevesine sahip olmadığı netliğe kavuşmuş olur. Bu durumda YGG ve  $f(T_{\text{vek}}, T_{\text{ten}}, T_{\text{aks}})$  kuramları için  $T_{\text{vek}}$ 'in katsayısı '0' seçilerek minimal çiftlenimli bir Einstein çerçevesi elde edilebilir. Bu kuramın teleparalel kuramın en genel hali olabileceği düşüncesinden hareketle (2.205) şeklinde bir sınır teriminin de fonksiyonel yapıya  $f(T_{\text{vek}}, T_{\text{ten}}, T_{\text{aks}}, B)$  olacak şekilde eklenmesi kuramın  $f(R)$  rejimini de kapsayacağı söylenebilir.

### 2.3.7.7. Minimal Olmayan Skaler Alan–Burulma Çiftlenimi

Minimal olmayan skaler alan-eğrilik çiftlenimi GG kuramında kozmik öz (quintessence) senaryoları kapsamında çalışılmıştır [140, 141]. Benzeri bir çalışma Geng tarafından eğrilik skaleri yerine burulma skaleri için gerçekleştirilmiştir [142]. Burada Lagrangian  $\xi$  minimal olmayan çiftlenim sabiti olmak üzere

$$\mathcal{S} = \int d^4x e \left[ \frac{T}{16\pi G} + \frac{1}{2} \left( \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \xi T \phi^2 \right) - V(\phi) + \mathcal{L}_m \right] \quad (2.211)$$

şeklinde olup bu Lagrangiandan FLRW metriği için türetilen Friedmann denklemleri göz önüne alındığında skaler alan karanlık enerji ile ilişkilidir.

Burada dikkat çekici husus burulma skaleri için yapılan hesapların, eğrilik skaleri için yapılanların aksine sadece kozmik öz ile ilişkili sonuçlar vermediği, kuintom senaryolarına da olanak tanıyabileceği sonucudur. Bunun sebebi minimal olmayan çiftlenimli burulma skalernin, bir konformal dönüşüm uygulanarak minimal çiftlenim haline getirilemeyişidir. Bu durum teoriye ait çözümlerin daha komplike ancak daha zengin olmasını sağlamaktadır.



### 3. MALZEME VE YÖNTEM

#### 3.1. $F(R)$ TEORİSİNİN SKALER-TENSÖR EŞDEĞERİ

Hem metrik hem de Palatini  $f(R)$  kuramları skaler-tensör kuramlara eşdeğerdirler. Bu durumda  $f'(R)$  JBD skaler alanı görevini üstlenecektir. Genel olarak bu gibi Lagrangianlar için alan denklemleri

$$\mathcal{S}_{met} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + \mathcal{S}_M(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (3.1)$$

iken yeni bir alan  $\chi$  tanımlanarak (3.1) eyleminin eşdeğeri

$$\mathcal{S}_{met} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [f(\chi) + f'(\chi)(R - \chi)] + \mathcal{S}_M(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (3.2)$$

şeklinde yazılabilir. Yeni eylem integralinin  $\chi$ 'ye göre varyasyonundan

$$f''(\chi)(R - \chi) = 0 \quad (3.3)$$

elde edilir. Böylece  $f''(\chi) \neq 0$  için  $\chi = R$  yazılarak (3.2) elde edilebilir. Yeni bir  $\varphi$  alanı  $\chi$  cinsinden  $\varphi = f'(\chi)$  şeklinde tanımlanarak

$$V(\varphi) = \chi(\varphi)\varphi - f(\chi(\varphi)) \quad (3.4)$$

yazıldığında (3.2) eylemi

$$\mathcal{S}_{met} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} (\varphi R - V(\varphi)) + \mathcal{S}_M(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (3.5)$$

formunu alacaktır. "O'Hanlon Eylemi" de denilen bu eylemin Lagrangianı  $\omega = 0$  için  $V(\varphi)$  potansiyel terimli Brans-Dicke Lagrangianına tekabül etmektedir [143].

### 3.1.1. $\omega = 0$ ve Metrik $f(R)$ Kuramı

(3.5) eylemi metriğe göre türetildiğinde elde edilen alan denklemleri

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{\phi} T_{\mu\nu} - \frac{1}{2\phi} g_{\mu\nu} V(\phi) + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi) \quad (3.6)$$

$$R = V'(\phi) \quad (3.7)$$

şeklinde. Bu denklemler yukarıdaki alan tanımları kullanılmak suretiyle (2.89) 'den türetilir. (3.7)'de  $R$  yerine yazılarak (3.6)'in izi alınırsa skaler alan  $\phi$ 'nin ilgili madde alanları ile dinamik ilişkisini veren

$$3\square\phi + 2V(\phi) - \phi \frac{dV}{d\phi} = \kappa T \quad (3.8)$$

denklemi elde edilir. STK ile  $f(R)$  kuramlarının eşdeğerliği için yukarıda ifade edilen  $f'' \neq 0$  koşulu, kuramı Brans-Dicke formunda yazabilmeyi sağlayan  $\phi = f'(R)$  değişken değiştirmesinin tersine çevrilebilir olmasının bir gereği olarak düşünülebilir. Bu durum  $d\phi/dR = f'' \neq 0$  şeklinde yeterli ancak gerekli olmayan bir koşul olarak da ifade edilebilir. Gerekli olan koşul  $f'(R)$ 'ın sürekli ve bire bir fonksiyon olmasıdır [144]. Denklem (3.3)'den hareketle,  $f'' \neq 0$ 'dan  $\phi = f'(R)$  yazılabilir. Böylece (3.1) ile (3.5) eylemleri eşdeğerdirler. Eğer  $f''$  tanımlı değil ya da sıfır ise o zaman  $\phi = f'(R)$  kabulü anlamsız olur ve iki kuramın eşdeğerliği tehlikeye girer.

### 3.1.2. $\omega = -3/2$ ve Palatini $f(R)$ Kuramı

$f(R)$  kuramının Palatini formülasyonu için de metrik formülasyonda olduğu gibi bir STK eşdeğerinden bahsetmek mümkündür [145, 146]. Palatini  $f(R)$  eylemi

$$\mathcal{S}_{pal} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(\mathcal{R}) + \mathcal{S}_M(g_{\mu\nu}, \psi), \quad (3.9)$$

ile başlayarak metrik kuram için gerçekleştirilen adımlar tekrarlanır ve  $\phi$  skaler alanı tanımlanırsa

$$\mathcal{S}_{pal} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [\phi \mathcal{R} - V(\phi)] + \mathcal{S}_M(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (3.10)$$

elde edilecektir. Her ne kadar bu eylem integrali metrik kuram için elde edilen (3.5) eylemi ile form olarak aynı olsa da  $\omega_0 = 0$  için Brans - Dicke kuramına tekabül etmez. Hiç şüphesiz bunun sebebi Ricci skaleri  $\mathcal{R}$  'nin metrik tensör  $g_{\mu\nu}$ 'den türetilmemiş olmasıdır. Buna karşın (2.95)'nin cebirsel çözümünden bağımsız koneksiyon elde edilebilir ve bu eylemde yerine yazılabilir. Bu durumdan kuramın dinamikleri etkilenmez. Böylece (3.10) eylemi

$$\mathcal{S}_{pal} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left( \phi R + \frac{3}{2\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) + \mathcal{S}_M(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (3.11)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada elde edilen eylem  $\omega_0 = -3/2$  için Brans - Dicke kuramına karşılık gelmektedir. Bu eylemin metrik ve skaler alana göre türetilmesinden

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{\phi} T_{\mu\nu} - \frac{3}{2\phi^2} \left( \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi \right) + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi) - \frac{V}{2\phi} g_{\mu\nu} \quad (3.12)$$

$$\square \phi = \frac{\phi}{3} (R - V') + \frac{1}{2\phi} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi \quad (3.13)$$

alan denklemleri ortaya çıkar. (3.12)'nin izi kullanılarak  $R$  (3.13) denkleminde yok edilirse skaler alan  $\phi$  doğrudan madde alanlarına aşağıdaki denklemle bağlanır.

$$2V - \phi V' = \kappa T \quad (3.14)$$

### 3.2. KONFORMAL DÖNÜŞÜMLER VE EINSTEIN ÇERÇEVESİ

Konformal dönüşümler STK'ında sıkça kullanılan bir tekniktir. Lagrangianda çarpım halinde bulunan Ricci skaleri  $R$  ile skaler alan  $\phi$ 'nin ayrılarak toplam halinde bulunduğu Einstein çerçevesine geçilmesine olanak sağlar. Bunun en güzel örneği prototip JDB kuramıdır. Lagrangianın standart formu (2.4) Jordan çerçevesi kabul edilir ve metrik üzerinde

$$g_{\mu\nu} \mapsto \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} \quad (3.15)$$

$$\Omega = \sqrt{G\phi}$$

olacak şekilde bir konformal dönüşümle tekrar ölçeklendirme uygulanacak olursa

$$\mathcal{L}_{BD} = \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{\tilde{R}}{16\pi G} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\phi} - U(\tilde{\phi}) + e^{-8\sqrt{\frac{\pi G}{2\omega+3}} \tilde{\phi}} \mathcal{L}_{MADDE} \right] \quad (3.16)$$

Einstein çerçevesi Lagrangianı elde edilir ( $U(\tilde{\phi}) = \frac{V(\phi)}{(G\phi)^2}$ ). Bu yapı bize alan denklemleri görece daha karmaşık olan Jordan çerçevesindeki problemi, bilinen birçok çözümü olan Einstein çerçevesine indirgeme kolaylığı sağlar. Bunun yanında konformal dönüşümler, genel bir modifiye kütle çekimi kuramı ele alındığında yüksek dereceli denklemlerin derecelerinin düşürülmesi için de kullanılmaktadır. Örneğin Lagrangiana  $R^2$  terimi dördüncü,  $R\Box$  altıncı  $R\Box^2 R$  sekizinci derece denklemler üretir. Lagrangiana konformal dönüşümlerle eklenecek her bir skaler alan üretilen denklemlerin derecesini iki derece düşürecektir. Örneğin altıncı derece denklemler ikinci derece denklemlere dönüşürken iki adet skaler alanın da denklemlere eklenmesi gereklidir.

### 3.2.1. Metrik $f(R)$ Kuramı için Einstein Çerçevesi

Yukarıda bahsedilen motivasyonla metrik  $f(R)$  kuramı için elde edilen ST eşdeğeri eylem (3.5) için bir Einstein çerçevesi bulmak maksadı ile metrik üzerinde

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = f'(R) g_{\mu\nu} \equiv \varphi g_{\mu\nu} \quad (3.17)$$

olacak şekilde bir konformal dönüşüm uygulanır ve skaler alan  $\varphi = f'(R) \rightarrow \tilde{\varphi}$

$$d\tilde{\varphi} = \sqrt{\frac{2\omega+3}{2\kappa}} \frac{d\varphi}{\varphi} \quad (3.18)$$

olacak şekilde yeniden tanımlanırsa bu yeni skaler alan  $\tilde{\varphi}$ 'nin Ricci eğrilik skaleri ile minimal çiftlenimde olduğu ve bu alana ait kinetik enerji terimlerini de içeren

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{\tilde{R}}{2\kappa} - \frac{1}{2} \partial^\alpha \tilde{\varphi} \partial_\alpha \tilde{\varphi} - U(\tilde{\varphi}) \right] \quad (3.19)$$

Einstein çerçevesi eylemi elde edilmiş olur.  $\omega = 0$  için metrik  $f(R)$  kuramının ST eşdeğeri

$$\varphi \equiv f'(R) = e^{\sqrt{\frac{2\kappa}{3}} \tilde{\varphi}} \quad (3.20)$$

$$U(\tilde{\varphi}) = \frac{Rf'(R) - f(R)}{2\kappa (f'(R))^2} \quad (3.21)$$

kullanılarak

$$\mathcal{S}'_{met} = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{\tilde{R}}{2\kappa} - \frac{1}{2} \partial^\alpha \tilde{\varphi} \partial_\alpha \tilde{\varphi} - U(\tilde{\varphi}) \right] + S_M(e^{-\sqrt{2\kappa/3} \tilde{\varphi}} \tilde{g}_{\mu\nu}, \psi) \quad (3.22)$$

olarak elde edilir. Burada  $R = R(\tilde{\varphi})$ 'dir. Metrik  $f(R)$  kuramından hareketle, eşdeğeri STK'ın Einstein çerçevesine doğrudan geçiş yapılabileceği yönünde çalışmalar da bulunmaktadır [147, 148]. Bunun yanında Jordan ve Einstein çerçeveleri ile beraber sonsuz sayıda çerçeve bulunduğunu belirtmek gerekir [146, 149]. Jordan ve Einstein çerçevelerinin eşdeğerliği üzerinde farklı tartışmalar [150] devam etmekte ise de (3.2), (3.5), ve (3.22)'nin aynı fiziksel kuramın farklı ifadeleri olup eşdeğer oldukları kabulü hakimdir.

### 3.2.2. Palatini $f(R)$ Kuramı için Einstein Çerçevesi

Metrik kuram için kullanılan aynı konformal dönüşüm (3.17) Palatini eyleminin ST eşdeğeri (3.11) eylemi üzerine de uygulanırsa  $U(\varphi) = V(\varphi)/(2\kappa\varphi^2)$  olmak üzere

$$\mathcal{S}'_{pal} = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{\tilde{R}}{2\kappa} - U(\varphi) \right] + \mathcal{S}_M(\varphi^{-1}\tilde{g}_{\mu\nu}, \psi) \quad (3.23)$$

Palatini eyleminin ST eşdeğeri için Einstein çerçevesi eylemi elde edilmiş olur. Burada dikkat çekici husus metrik  $f(R)$  kuramındaki durumun aksine skaler alan için herhangi bir tekrar tanımlamaya gerek kalmamasıdır.

### 3.2.3. Jordan ve Einstein Çerçevelerinin Eşdeğerliği

Konformal dönüşüm, Jordan çerçevesinde kütle çekimsel bir değişken olan  $\varphi$ 'yi Einstein çerçevesi madde alanı olan  $\tilde{\varphi}$ 'ye dönüştürür. Bu kapsamda JBD kuramı Einstein çerçevesi ile GG arasındaki iki önemli farktan da bahsetmek gerekir. Bunlardan ilki GG'te vakum çözümü olarak yer alan  $R_{\mu\nu} = 0$ 'nın JBD Einstein çerçevesinde yer almamasıdır. Bunun sebebi denklemlerin sağ tarafında  $\tilde{\varphi}$ 'nin kütle çekim kaynağı olarak her koşulda yer alıyor olmasıdır. İkinci önemli fark (3.22) göz önüne alındığında madde Lagrangianının eksponansiyel bir çarpan ile çarpılmış olmasıdır. Bu çarpım durumu madde ile  $\tilde{\varphi}$  arasında normal olmayan bir çiftlenim olduğunun ifadesidir. Bu ise enerji korunum denkleminde daha sonra da jeodezik denkleminde modifikasyona neden olmaktadır. Beşinci kuvvet tartışmalarına yol açan bu durum Zayıf Eşdeğerlik Prensibinin Einstein çerçevesinde çiğnenmesine neden olmakta ve Einstein çerçevesinin metrik bir kuram olmadığı anlamına gelmektedir.

Birçok araştırmacı Jordan çerçevesine dair kuramsal hesaplamaların gözlemsel ve deneysel veriler ile daha uyumlu olduğunu dile getirmektedir. Diğer yandan enerji ile ilgili hususlar

göz önüne alındığında Jordan çerçevesi  $\varphi$  alanı enerji koşullarını çiğneyebilirken Einstein çerçevesi alanı  $\tilde{\varphi}$  bu koşulları sağlamaktadır [150]. FLRW kozmolojisi için iki çerçevenin farklı ivmelenme profilleri gösterdikleri yönünde de çalışmalar bulunmaktadır ki, bu iki çerçevenin eşdeğerliği fikrine gölge düşüren bir durumdur. Jeodezik denklemi ele alındığında ise Jordan çerçevesi için geçerli olan ZEP'nin Einstein çerçevesi için geçerli olmadığı görülmektedir.

### 3.3. ÇÖZÜM KOLAYLAŞTIRICI NSY

Matematiksel fiziğin en önemli teoremlerinden olarak kabul edilen Noether teoremleri, modifiye kütle çekimi kuramlarında da yaygın olarak kullanılmaktadır [151]. Noether teoremlerinin modifiye kütle çekimi kuramlarına uygulanması literatürde Noether Simetri Yaklaşımı olarak ifade edilmektedir. Bu yöntem sayesinde hem  $f(R)$   $f(T)$  gibi belirsiz fonksiyonel formlar üzerine koşullar getirebilmek hem de korunan büyüklükler sayesinde dinamik yapı indirgenerek analitik çözümlere ulaşmak mümkün olabilmektedir [151–153]. Bunu yapabilmek için 'Alan Lagrangianı' formundaki Lagrangian konfigürasyon uzayına taşınarak  $L(q_i, \dot{q}_i)$  nokta-gibi 'Kanonik Lagrangian' formunda yazılmalıdır. Böylece sistem konfigürasyon uzayına taşınarak sonlu sayıda serbestlik derecesine indirgenir. Bu Lagrangian mekanik bir sistem Lagrangianı gibi davranacaktır. Önemli fark eylem integrali mekanikte zaman parametresi üzerinden alınırken burada Lagrangianın serbest parametresi üzerinden alınacak olmasıdır.

$$S = \int L(q^i, \dot{q}^i) dt \quad (3.24)$$

Burada kullanacağımız notasyonda  $t$  zamandan ziyade genel bir afin parametreyi ifade etmektedir.

#### 3.3.1. Noether Simetrileri

$\mathcal{L}(q^i, \dot{q}^i)$  kanonik, nokta-gibi ve dejenere olmayan  $\left\| \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_i' \partial q_j'} \right\| \neq 0$  bir Lagrangian olmak üzere genelleştirilmiş koordinatları  $q_i$  üzerinde  $Q^j(q^i)$  bir nokta dönüşümü ele alınacak

olursa bu nokta dönüşümü  $Q$  üzerinde genel bir vektör alanı

$$X = \alpha^i(q^i) \frac{\partial}{\partial q^i} \quad (3.25)$$

şeklinde  $\alpha^i(q^i)$  genel katsayı fonksiyonları cinsinden ifade edilebilir. Aynı vektör alanı hızları da içerecek şekilde genelleştirilirse

$$X = \alpha^i(q^i) \frac{\partial}{\partial q^i} + \dot{\alpha}^i(q^i) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \quad (3.26)$$

veya daha kompakt ifadesi ile

$$X = \alpha_i \partial_{q_i} + \dot{\alpha}_i \partial_{\dot{q}_i} \quad (3.27)$$

Elde edilir. Burada

$$\dot{\alpha}_i = \left( \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) \dot{q} \quad (3.28)$$

şeklinde, (3.27) nokta dönüşümleri üreten vektör (üretici vektör) alanı için genel ifadedir.

Literatürde nokta gibi Lagrangiandan Noether simetrilerini elde etmek için iki yöntem kullanılmaktadır. Bunlardan ilki NSY'dır. Burada temel prensip nokta-gibi Lagrangianın üretici vektör boyunca Lie türevini sıfıra eşitleme esasına dayanmaktadır. Eğer  $\mathcal{L}$  nokta - gibi Lagrangianı için

$$L_X \mathcal{L} = 0 \quad (3.29)$$

yani  $X \mathcal{L} = 0$  ifadesini sağlayan sıfırdan farklı en az bir  $\alpha_i$  varsa o zaman Noether simetrilerinden dolayısı ile dinamik sistemin hareket sabitlerinden bahsedilebilir. Böyle bir sistem için hareket sabiti

$$\Sigma = \alpha_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.30)$$

ile ifade edilir.

### 3.3.2. Noether Ayar Simetrileri

'Noether Ayar Simetrisi Yaklaşımı' olarak da anılan bu ikinci yöntem NSY'nın ekstra simetriler elde etmeye yönelik bir genellemesidir.

Bir vektör alanı  $X$ ;  $\xi$  ile  $\eta^j t$ 'nin düzgün fonksiyonları,  $q^i$ 'ler  $n$  tane kanonik koordinat olmak üzere

$$X = \xi(t, q^i) \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \eta^j(t, q^i) \frac{\partial}{\partial q^j} \quad (3.31)$$

olarak tanımlanır.  $X$ 'in jet uzayı  $B_M = \{t, q^k, \dot{q}^k, \ddot{q}^k, \dots, q^{[n]k}\}$  üzerindeki uzantısı

$$X^{[n]} = X + \eta_i \partial_{q_i} + \dots + \eta_{i_1 \dots i_n} \partial_{q_{i_1 \dots i_n}}$$

olarak tanımlanır. Burada

$$\eta^{[1]i} = \frac{d}{dt} \eta^i - \dot{q}^i \frac{d}{dt} \xi \quad (3.32)$$

$$\eta^{[n]i} = \frac{d}{dt} \eta^{[n-1]i} - q^{[n]i} \frac{d}{dt} \xi \quad (3.33)$$

olup  $X^{[n]}$  üretici fonksiyon  $X$ 'in  $n$ 'inci prolongasyonudur.  $X$ 'in birinci prolongasyonu ise

$$X^{[1]} = X + \sum_{j=1}^n \left( \dot{\eta}^j - \dot{q}^j \xi \right) \frac{\partial}{\partial q^j} \quad (3.34)$$

şeklinde ifade edilebilir. Eğer tam türev operatörü  $D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i}$  olmak üzere

$$X^{[1]}(\mathcal{L}) + \mathcal{L}(D_t \xi) = D_t G \quad (3.35)$$

koşulunu sağlayan sürekli bir ayar fonksiyonu  $G$  var ise o zaman  $X$  vektörü  $\mathcal{L}$  Lagrangianı için bir varyasyonel simetri üretici vektörüdür denir. (3.35) denklemiyle üretilen simetrilere tekabül eden korunan büyüklükler

$$\Sigma = \xi \mathcal{L} + (\eta^j - \dot{q}^j \tau) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} - G \quad (3.36)$$

şeklinde hesaplanır.

### 3.3.3. $f(T)$ Kozmolojisi ve Noether Simetri Yaklaşımı (NSY)

Bu kısımda NSY'nın Modifiye Kütle çekim Kuramlarındaki uygulamaları üzerinde durulacaktır. Noether simetrilerinin nokta-gibi Lagrangianlara uygulanmak suretiyle alan denklemleri çözülmeyen metrik potansiyelleri için çözüm elde edilmesine yönelik kapsamlı bir çalışma ilk olarak 1996'da gerçekleştirilmiştir [151]. Bu kısımda NSY'nın  $f(T)$  kozmolojisi üzerindeki uygulamasına yönelik Basilakos'un çalışması [153] gözden geçirilerek NSY'nın nasıl işlediği üzerinde durulacaktır.

Kozmoloji uygulamalarında standart araç haline gelen FLRW metriği kartezyen koordinat çerçevesinde  $a(t)$  kozmolojik ölçek çarpanı olmak üzere

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (3.37)$$

olarak ifade edilir. Bu metriğe karşılık gelecek şekilde bir tetrad takımı

$$h_\mu^i(t) = \text{diag}(1, a(t), a(t), a(t)) \quad (3.38)$$

şeklinde seçilebilir. Şimdi bu tetrad takımı kullanılarak elde edilecek burulma skaleri ile alan Lagrangianı formunda

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x e f(T) + \mathcal{S}_{madde} + \mathcal{S}_{radyasyon} \quad (3.39)$$

şeklinde madde ve radyasyon alanları ile beraber ifade edilen  $f(T)$  Lagrangianı sonlu serbestlik derecesine sahip, konfigürasyon uzayında tanımlı kanonik (nokta-gibi Lagrangian) Lagrangiana dönüştürülerek kozmolojik denklemler yazılabilecektir. (3.38) tetradı için elde edilen nokta gibi Lagrangian  $\{a, T\}$  kanonik değişkenleri için

$$\mathcal{S}_T = \int \mathcal{L}(a, \dot{a}, T, \dot{T}) dt$$

formunda olacaktır. Bu aşamada (3.38) tetradı cinsinden hesaplanan burulma skaleri  $T$ ,  $H$

Hubble parametresi olmak üzere

$$T = -6 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -6H^2 \quad (3.40)$$

olarak elde edilir. (3.39) eyleminde burulma skaleri üzerine (3.40) ifadesi bir bağ koşulu olarak getirilebilir. Bunun için bir  $\lambda_{\mathcal{L}}$  Lagrange çarpanı kullanılarak  $f(T)$  eylemini

$$\mathcal{S}_T = 2\pi^2 \int dt \left\{ f(T)a^3 - \lambda_{\mathcal{L}} \left[ T + 6 \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \right] \right\} \quad (3.41)$$

şeklinde yazmak mümkündür. Bu eylemin  $T$ 'ye göre varyasyonu alındığında  $\lambda_{\mathcal{L}}$  için

$$\lambda_{\mathcal{L}} = a^3 f'(T)$$

elde edilir. Bu değer Lagrangianında yerine yazılarak nokta-gibi Lagrangianın  $\{a, T\}$  değişkenlerine göre kanonik hali nihai şekliyle elde edilir.

$$\mathcal{L} = a^3 [f(T) - T f'(T)] - 6\dot{a}^2 a f'(T), \quad (3.42)$$

Öte yandan (3.37) tetradı (3.39) eyleminden türetilen alan denklemlerinde  $i = \nu = 0$  ve  $i = \nu = 1$  için yerine yazıldığında

$$12H^2 f'(T) + f(T) = 16\pi G \rho \quad (3.43)$$

$$48H^2 \dot{H} f''(T) - 4(\dot{H} + 3H^2) f'(T) - f(T) = 16\pi G p \quad (3.44)$$

denklemleri elde edilir. Burada enerji yoğunluğu ve basınç değerleri madde ve radyasyon alanları için ayrı ifade edilecek olursa  $\rho = \rho_{madde} + \rho_{radyasyon}$  ve  $p = p_{madde} + p_{radyasyon}$  şeklinde toplam değerleri ifade etmektedir. Lagrangiana ait enerji fonksiyonu ve Euler - Lagrange denklemleri

$$E_{\mathcal{L}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} \dot{a} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{T}} \dot{T} - \mathcal{L} \quad (3.45)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} \quad (3.46)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{T}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} \quad (3.47)$$

kullanılarak (3.43) ve (3.44) denklemleri türetilir. Bu aşamadan sonra  $f(T)$  kuramının kozmoloji uygulaması için elde edilen (3.42) Lagrangianına NSY uygulanabilir. Burada bir önceki kısımda bahsi geçen Noether Ayar Simetrileri üzerinden gidilecektir.

Nokta-gibi Lagrangian (3.42),  $t$  serbest parametresi ile beraber  $\{t, a, T\}$  parametre uzayında tanımlı olduğundan simetri üretici vektörünü (3.31)'u

$$X = \xi(t, a, T) \partial_t + \eta_1(t, a, T) \partial_a + \eta_2(t, a, T) \partial_T$$

şeklinde, bu vektörün jet uzayı üzerindeki birinci prolongasyonu (3.34)'u da

$$X^{[1]} = \xi \partial_t + \eta_1 \partial_a + \eta_2 \partial_T + \eta_1^{[1]} \partial_{\dot{a}} \quad (3.48)$$

olacak şekilde tanımlamak uygun olacaktır. (3.42) Lagrangian için Hessian matrisi '0' olup bundan dolayı Lagrangian singülerdir. Bunun sebebi Lagrangian'da  $T$ 'te dair bir hız terimi olmayışıdır. Lagrangianın singüler olması enerji tanımı ile ilgili sorunlara yol açabilmekteyse de sistemin simetrilerinin ve dinamik yapının anlaşılmasına engel değildir.

Tekrar Noether simetrilerinin uygulanmasına dönülecek olursa jet uzayı  $\bar{B}_M = \{t, a, T, \dot{a}\}$  şeklinde olup  $X$ 'in jet uzayı  $\bar{B}_M$  üzerindeki birinci prolongasyonu  $\eta_1^{[1]} = \dot{\eta}_1 - \dot{a} \xi$  olacaktır. (3.35)'deki terimler ele alındığında ilk terim  $X^{[1]} \mathcal{L}$

$$\begin{aligned} X^{[1]} \mathcal{L} = & [3a^2 \eta_1 (f_T T - f) + a^3 f_{TT} T \eta_2] + \\ & + [12f_T a \eta_{1,t}] \dot{a} + [12f_T a \xi_{,a}] \dot{a}^3 + \\ & + 6[f_T \eta_1 + f_{TT} a \eta_2 + 2f_T a \eta_{1,a} - 2f_T a \xi_{,t}] \dot{a}^2 + \\ & + [12f_T a \eta_{1,T}] \dot{a} \dot{T} + [12f_T a \xi_{,T}] \dot{a}^2 \dot{T} \end{aligned}$$

İkinci terim  $\mathcal{L} \dot{\xi} = L(D_t \xi)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \dot{\xi} = & [a^3 (f_T T - f) \xi_{,t}] + [a^3 (f_T T - f) \xi_{,a}] \dot{a} + \\ & + [a^3 (f_T T - f) \xi_{,T}] \dot{T} + [6f_T a \xi_{,t}] \dot{a}^2 + \\ & + [6f_T a \xi_{,a}] \dot{a}^3 + [6f_T a \xi_{,T}] \dot{a}^2 \dot{T} \end{aligned}$$

Denklemin diğer tarafındaki terim ise

$$\dot{G} = G_{,t} + G_{,a} \dot{a} + G_{,T} \dot{T}$$

olacaktır. Lagrangiana ait Noether simetrilerinin ortaya çıkarılabilmesi için bu terimler (3.35)'te yerine yazılarak  $\dot{a}$  ve  $\dot{T}$ 'nin kuvvetlerine ait terimler gruplanıp ayrı ayrı sıfıra eşitlenir. Bunun çıkış noktası Lagrangianın Lie türevinin sıfıra eşit olması gerekliliğidir [151]. Bu gerçekleştirildiğinde aşağıdaki çiftlenimli yapıdaki denklem takımı ortaya çıkmaktadır.

$$\xi_{,a} = 0 \quad \xi_{,T} = 0 \quad \eta_{1,T} = 0 \quad (3.49)$$

$$a^3 (f_T T - f) \xi_{,T} = g_{,T} \quad (3.50)$$

$$3a^2 \eta_1 (f_T T - f) + a^3 f_{TT} T \eta_2 + a^3 (f_T T - f) \xi_{,t} = g_{,t} \quad (3.51)$$

$$12f_T a \eta_{1,t} + a^3 (f_T T - f) \xi_{,a} = g_{,a} \quad (3.52)$$

$$f_T \eta_1 + f_{TT} T a \eta_2 + 2f_T a \eta_{1,a} - f_T a \xi_{,t} = 0 \quad (3.53)$$

(3.49) ve (3.50) denklemlerinden

$$\xi = \xi(t) \quad \eta_1 = \eta_1(t, a) \quad g = g(t, a)$$

elde edilir. Bu durumda (3.52) denklemi aşağıdaki hali alır.

$$12f_T a \eta_{1,t} = g_{,a}$$

$\eta_1, g$  fonsiyonlarının da  $T$ 'den bağımsız olduğu bilgisi

$$\eta_1 = \eta_1(a) \quad g = g(t)$$

sonucuna ulaştırır. (3.53) denklemin  $f_T$ 'ye bölüldüğünde

$$2\eta_{1,a} + \frac{\eta_1}{a} + \frac{f_{TT}}{f_T} \eta_2 - \xi_{,t} = 0 \quad (3.54)$$

ortaya çıkar ki, buradan

$$\eta_2 = \frac{f_T}{f_{TT}} S(a, t)$$

elde edilir. Burada  $S$  keyfi bir fonksiyondur. Bu sonuçlar (3.51) ve (3.54) ile birlikte

değerlendirildiğinde

$$2\eta_{1,a} + \frac{\eta_1}{a} + S(a,t) - \xi_{,t} = 0 \quad (3.55)$$

$$3a^2\eta_1(f_T T - f) + a^3 f_{TT} T S + a^3(f_T T - f)\xi_{,t} = g_{,t} \quad (3.56)$$

elde edilir. (3.55) denkleminde  $S(a,t) = M(a) + N(t)$  elde edilir. Bu şekilde  $f \neq e^{kT}$  durumu için nihai koşullar

$$2\eta_{1,a} + \frac{\eta_1}{a} + M + N - \xi_{,t} = 0 \quad (3.57)$$

$$3\frac{\eta_1}{a} + \frac{f_T T}{f_T T - f} M + \frac{f_T T}{f_T T - f} N + \xi_{,t} = \frac{1}{a^3(f_T T - T)} g_{,t} \quad (3.58)$$

olacaktır.

(3.55), (3.56) denklemleri  $\xi = c_0$  ve  $\eta_1 = \eta_2 = 0$  (yani  $S = 0$ ) olduğu sürece keyfi  $f(T)$  için geçerlidir. Bu duruma tekabül eden Noether integrali  $\mathcal{H}$  Hamiltonianidir. (3.57), (3.58) koşullarından aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{f_T T}{f_T T - f} = \frac{n}{n-1} \quad (3.59)$$

ve

$$g_{,t} = 0 \quad N = c + \xi_{,t}$$

$$2\eta_{1,a} + \frac{\eta_1}{a} + M = c$$

$$3\frac{\eta_1}{a} + \frac{n}{n-1} M = m$$

$$\frac{n}{1-n} N - \xi_{,t} = m$$

(3.59) denkleminin çözümünden  $f_0$  bir integral sabiti olmak üzere

$$f(T) = f_0 T^n \quad (3.60)$$

elde edilir. Bu fonksiyonel yapı ile  $n \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ , için Noether simetri vektörü

$$X_1 = \left( \frac{3C}{2n-1} t \right) \partial_t + \left( Ca + c_3 a^{1-\frac{3}{2n}} \right) \partial_a + \left[ \frac{1}{n} \left( (c-m)n + 3c_3 a^{-\frac{3}{2n}} \right) + \frac{3C}{2n-1} + c \right] T \partial_T$$

ve bu vektöre karşılık gelen Noether integrali  $C = \frac{m(1-n) + nc}{3}$  olmak üzere

$$I_1 = \left( \frac{3C}{2n-1} t \right) \mathcal{H} - 12f_0 n \left( Ca^2 + c_3 a^{2-\frac{3}{2n}} \right) T^{n-1} \dot{a}$$

olur.  $n = \frac{3}{2}$ , durumu için için Noether simetri vektörü

$$X_2 = \frac{1}{5} (3c - 2m) t \partial_t + \left[ \left( \frac{c}{2} - \frac{m}{6} \right) a + c_4 \right] \partial_a + \left[ (m + 11c) - \frac{c_4}{a} + \frac{2}{5} (8c - 2m) \right] T \partial_T \quad (3.61)$$

ve karşılık gelen Noether integrali

$$I_2 = \frac{1}{5} (3c - 2m) t \mathcal{H} - 18f_0 \left[ \left( \frac{c}{2} - \frac{m}{6} \right) a^2 + c_4 a \right] T^{\frac{1}{2}} \dot{a}$$

olacaktır. Son olarak  $n = \frac{1}{2}$  durumu için için Noether simetri vektörü

$$X_3 = c_1 t \partial_t + \left( -2c_1 + c_3 a^{\frac{1}{4}} \right) \partial_a + \left( 4c_1 + c_2 + \frac{3c_3}{2} a^{-\frac{3}{4}} \right) T \partial_T$$

ve karşılık gelen Noether integrali

$$I_3 = c_1 t \mathcal{H} - 6f_0 \left( -2c_1 a + c_3 a^{\frac{3}{4}} \right) T^{-\frac{1}{2}} \dot{a}$$

olarak elde edilmiştir. Burada önemli bir sonuç  $f(T) = f_0 T^n$  fonksiyonel formunun ekstra Noether simetrilerine olanak sağlayan yegâne form olmasıdır.

### 3.3.3.1. Kozmolojik Çözümler

Burada  $f(T) = f_0 T^n$  kütle çekimi modelinin kozmolojik kabuller altında bulunabilecek analitik çözümleri üzerinde durulacaktır. Lagrangian (3.42)'den

$$\ddot{a} + \frac{1}{2a}\dot{a}^2 + \frac{f''}{f'}\dot{a}\dot{T} - \frac{1}{4}a\frac{f'T - f}{f'} = 0 \quad (3.62)$$

ve (3.40) denkleminin türevinden

$$\dot{T} = 12 \left[ \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^3 - \frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^2} \right] \quad (3.63)$$

elde edilip (3.62)'de  $f(T) = f_0 T^n$  (3.42) ve (3.63) yerine yazıldığında

$$(2n-1) \left[ \ddot{a} - \frac{\dot{a}^2}{2a} \frac{(2n-3)}{n} \right] = 0 \quad (3.64)$$

elde edilir. Bu denklemin çözümü  $H_0$  hubble sabiti,  $a(z) = (1+z)^{-1}$  ve  $n$  pozitif reel sayı olmak üzere

$$a(t) = a_0 t^{2n/3} \quad H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2n}{3t} \quad (3.65)$$

veya

$$H = H_0 a^{-3/2n} = H_0 (1+z)^{3/2n} \quad (3.66)$$

Yavaşlama parametresi ise (3.66) kullanılarak  $q = -1 - \frac{d \ln H}{d \ln a} = -1 + \frac{3}{2n}$  elde edilir. (3.65) çözümünün dönüm noktası olmayışı  $f(T) = f_0 T^n$  modeli için Evren'in  $n$ 'ye bağlı olarak sadece ivmelenme ya da sadece yavaşlama fazının olduğu anlamına gelir. Bekleneceği üzere  $n = 1$  için bu model Einstein de Sitter modeline indirgenir.

Öte yandan ivmelenerek genişleme (yani  $q < 0$ )  $n > \frac{3}{2}$  durumunda ortaya çıkmaktadır.

Buraya kadar elde edilen sonuçlardan hareketle  $f(T) = f_0 T^n$  modeli baz alınarak doğrusal madde tedirgemeleri için büyüme faktörü hesaplanacaktır. Maddenin doğrusal tedirgemeleri için genel evrim denklemi;  $\rho_m$  madde yoğunluğu ve  $G_{\text{etkin}} = \frac{G}{f'(T)}$  etkin kütle çekim

parametresi olmak üzere

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G_{\text{eff}}\rho_m\delta_m = 0 \quad (3.67)$$

şeklindedir.

Diğer yandan (3.43) kullanılarak  $\rho_T = \frac{1}{16\pi G}[2Tf'(T) - f(T) - T]$  olmak üzere

$$4\pi G\rho_m = \frac{3H^2}{2} - 4\pi G\rho_T = \frac{3H^2}{2} - \frac{2Tf'(T) - f(T) - T}{4} \quad (3.68)$$

yazılabilir. Buradan hareketle (3.67) denkleminde (3.40) ve (3.68)  $G_{\text{etkin}}$  tanımıyla beraber yerine yazılacak olursa

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m + \frac{2Tf'(T) - f(T)}{4f'(T)}\delta_m = 0 \quad (3.69)$$

şeklinde genel bir denklem elde edilir.  $f(T) = f_0T^n$  modeli için öncelikle GG durumu ( $n = 1$ ) ele alındığında  $G_{\text{etkin}} = G$  olacaktır. Bunu sağlayacak  $f_0$  değeri  $G_{\text{etkin}} = G/f_0$  olduğundan  $f_0 = 1$  seçilebilir. Böylece (3.69)'den

$$\ddot{\delta}_m + \frac{4n}{3t}\dot{\delta}_m - \frac{2n(2n-1)}{3t^2}\delta_m = 0 \quad (3.70)$$

elde edilir. (3.70) denklemi Euler türü bir denklem olup genel çözümü

$$\delta_m(t) = C_1t^{2n/3} + C_2t^{1-2n} \quad (3.71)$$

veya ölçek faktörü cinsinden

$$\delta_m(a) = \tilde{C}_1a + \tilde{C}_2a^{3(1-2n)/2n} \quad (3.72)$$

şeklindedir. Burada  $\tilde{C}_1 = C_1/a_0^{3/2n}$  ve  $\tilde{C}_2 = C_2/a_0^{3(1-2n)/2n}$ , dir. Çözümler incelendiğinde  $0 < n < \frac{1}{2}$  için iki adet büyüme faktörü varken  $n > \frac{1}{2}$  için  $D_+ = a \propto t^{2n/3}$  olacak şekilde tek büyüme faktörü bulunmaktadır. Büyüme faktörü ölçek faktörünün fonksiyonu olarak yazıldığında model Einstein - de Sitter modeliyle örtüşür. Buradan kümeleşmeye ait büyüme faktörü  $f_+(a) = d\ln D_+/d\ln a$ 'nın bütün ölçek faktörleri için sabit kalacağı anlamı çıkar ki; bu bugünkü büyüme faktörü verilerinin  $f(T) = f_0T^n$  modeli ile örtüşmediğini gösterir.

## 4. BULGULAR

Bu bölümde tez kapsamında sonuçlandırılan bilimsel çalışmalardan bahsedilecektir. Bu çalışmaların ürünü olarak 'Spherical and cylindrical solutions in  $f(T)$  gravity by Noether Symmetry Approach' isimli makale *European Physical Journal C* dergisinde yayınlanmıştır.

### 4.1. $F(T)$ TEORİSİNİN SKALER - TENSÖR EŞDEĞERİ

Önceki bölümde STK'ı ile  $f(R)$  kuramı arasında kurulan ilişki  $f(T)$  kuramının da bir Skaler - Tensör eşdeğeri olabileceği fikrini doğurur.

Genel  $f(T)$  eylem integrali;  $e = \det e^i_\mu = \sqrt{-g}$ ,  $I_m$  madde eylemi ve birimler  $c = 16\pi G = 1$  olacak şekilde seçildiğinde

$$\mathcal{S} = \int d^4x e f(T) + S_m \quad (4.1)$$

halinde olacaktır.

$f(R)$  kuramı için izlenilen yol  $f(T)$  Lagrangianı için takip edildiğinde (4.1) ifadesi

$$\mathcal{S} = \int d^4x e [f(\chi) + (T - \chi)f'(\chi)] + I_m(e^i_\mu) \quad (4.2)$$

halini alacaktır. Burada  $f'(\chi) \equiv df/d\chi$ 'dir. (4.2) Lagrangianının  $\chi$ 'ye göre varyasyonu alındığında  $(T - \chi)f''(\chi) = 0$ 'nin çözümünün  $f''(\chi) \neq 0$  için  $\chi = T$  olacağı açıktır. Bu sonuç (4.2)'de yerine yazıldığında tekrar (4.1) elde edilir.

Eğer  $F(\varphi) = f'(\chi)$ 'yi sağlayacak şekilde bir  $\varphi = \varphi(r)$  skaler alanı tanımlar ve bu skaler alan için  $\omega(\varphi)g^{\mu\nu}\nabla_\mu\varphi\nabla_\nu\varphi$  şeklinde bir kinetik terim tanımlarsak (4.2) eylem integrali

$$\mathcal{S}_{\text{JF}} = \int d^4x e [F(\varphi)T - \omega(\varphi)g^{\mu\nu}\nabla_\mu\varphi\nabla_\nu\varphi - V(\varphi)] + S_m(e^i_\mu) \quad (4.3)$$

skaler - tensör eylem integraline dönüşecektir [154]. Burada  $V(\varphi) = \chi f'(\chi) - f(\chi)$  skaler potansiyeldir. (4.3) genel  $f(T)$  kuramının Jordan çerçevesi formunda  $\omega = 0$  değerli skaler - tensör eşdeğeridir.

#### 4.1.1. Konformal Dönüşümler ve Einstein Çerçevesi

Jordan çerçevesi Lagrangianlarından uygun konformal dönüşümlerle Einstein çerçevesine geçilebileceği  $f(R)$  kuramı örneğinde incelenmiştir. Burada yine bir konformal dönüşüm uygulanarak (4.3) Lagrangianı için Einstein çerçevesi Lagrangianı elde edilecektir. Metrik için kullanılmış olan konformal dönüşüm

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu} \quad \hat{g}^{\mu\nu} = \Omega^{-2}(x) g^{\mu\nu} \quad (4.4)$$

tetradlar için

$$\hat{e}_\mu^a = \Omega(x) e_\mu^a \quad \hat{e}_a^\mu = \Omega^{-1}(x) e_a^\mu \quad \hat{e} = \Omega^4 e \quad (4.5)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan burulma skaleri  $T$  için

$$\hat{T} = \Omega^{-2} T + 4 \Omega^{-3} \partial^\mu \Omega T_{\rho\mu}^\rho - 6 \Omega^{-4} \partial_\mu \Omega \partial^\mu \Omega \quad (4.6)$$

ve

$$T = \Omega^2 \hat{T} - 4 \Omega \partial^\mu \Omega \hat{T}_{\rho\mu}^\rho - 6 \hat{\partial}^\mu \Omega \hat{\partial}_\mu \Omega \quad (4.7)$$

elde edilir. (4.7) ifadesi (4.3)'de yerine yazılırsa Einstein çerçevesi eylem integrali

$$\mathcal{S}_{EF} = \int [d^4x e [\hat{T} - 2 \frac{[F'(\varphi)]}{F} \hat{\nabla}^\mu \varphi \hat{T}_{\rho\mu}^\rho - (\frac{2\omega}{F} + \frac{3[F'(\varphi)]^2}{F^2}) \frac{1}{2} \hat{g}^{\mu\nu} \hat{\nabla}_\mu \varphi \hat{\nabla}_\nu \varphi - U(\varphi)] + \mathcal{S}_m \quad (4.8)$$

veya

$$\mathcal{S}_{EF} = \int [d^4x e [\hat{T} + 2F^{-1} \hat{\partial}^\mu F \hat{T}_{\rho\mu}^\rho - \frac{1}{2} \hat{g}^{\mu\nu} \hat{\nabla}_\mu \psi \hat{\nabla}_\nu \psi - U(\varphi)] + \mathcal{S}_m [F(\varphi)^{-1/2} \hat{e}^i_\mu] \quad (4.9)$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$F = \Omega^2 \quad U = \frac{V(\varphi)}{F(\varphi)^2} \text{ ve } (\frac{d\psi}{d\varphi})^2 = (\frac{2\omega}{F} + \frac{3[F'(\varphi)]^2}{F^2}) \text{ 'dir. Burada } I_m = 0 \text{ vakum durumu için}$$

(4.8) Lagrangianının  $\hat{e}_\lambda^i$  tetradına göre varyasyonundan

$$\begin{aligned}
& \hat{\partial}_\mu (\hat{e} S_i^{\mu\lambda}) + \hat{e} \hat{e}_i^\nu \hat{T}^\rho_{\mu\nu} \hat{S}^{\mu\lambda}_\rho - \frac{1}{4} \hat{e} \hat{e}_i^\lambda \hat{T} \\
& + \frac{1}{2} \partial_\mu (\hat{e} F^{-1} \hat{\partial}^\mu F \hat{e}_i^\lambda - \hat{e} F^{-1} \hat{\partial}^\lambda F \hat{e}_i^\mu) \\
& + \frac{1}{2} \hat{e} \hat{e}_i^\lambda F^{-1} \hat{\partial}^\mu \hat{T}^\rho_{\rho\mu} + \frac{1}{2} \hat{e} \hat{e}_i^\rho F^{-1} \hat{\partial}^\mu \hat{T}^\lambda_{\rho\mu} + \\
& \frac{1}{4} \hat{e} \hat{e}_i^\nu \hat{\nabla}^\lambda \psi \hat{\nabla}_\nu \psi - \frac{1}{8} \hat{e} \hat{e}_i^\lambda \hat{\nabla}^\mu \psi \hat{\nabla}_\mu \psi - \frac{1}{4} \hat{e} \hat{e}_i^\lambda U(\psi) = 0
\end{aligned} \tag{4.10}$$

alan denklemleri elde edilir. Bu genel bir  $f(T)$  kuramının skaler - tensör eşdeğeri kuramın Einstein çerçevesi için alan denklemleridir. Denklemlerin terimleri değerlendirildiğinde ilk üç terimin burulma skaleri  $T$ 'den son üç terimin ise skaler alan ile ilgili kısımdan türediği görülmektedir. Bu altı terim Einstein çerçevesi alan denklemleri için beklenen terimlerdir. Bunlar dışında kalan üç terim burulma tensörü ile skaler alanın çiftlenim halinde olduğu kısımdan türemiştir. Bazı araştırmacılar bu üç terimden dolayı  $f(T)$  kuramının Einstein çerçevesi olmadığını ileri sürmektedirler [154, 155]. Ancak Einstein çerçevesinin varlığı için Einstein tensörünün skaler alandan ayrılmış olmasının yeterli olacağı yönünde görüşler bulunmaktadır [156] ki; (4.10) denklemindeki ilk üç terim GG'deki Einstein tensörüne tekabül eder. Önümüzdeki bölümlerde [157] kapsamında elde edilen Jordan ve Einstein çerçeveleri için küresel ve silindirik simetride çözümler ele alınacaktır.

## 4.2. KÜRESEL SİMETRİK ÇÖZÜMLER

(4.10) gibi çözümü zor denklemler göz önüne alındığında, problemi indirgemek için yapılacak varsayımların başında bir geometri seçimi gelir. Burada ilk olarak küresel simetriyi ele almak mâkul bir tercih olacaktır. Kullanılacak yöntem (4.10) denklemlerinin doğrudan çözülmesi yerine bu denklemlerin türetildiği Lagrangianın simetrilerini bulma esasına dayanmaktadır. Bunun için Lagrangianın nokta-gibi Lagrangian halinde yazılması gereklidir.

#### 4.2.1. diag (A, B, M, M sin( $\theta$ )) Tipi Küresel Simetrik Çözümler

Genel küresel koordinatlar ( $t, r, \theta, \phi$ )'de tanımlı simetrik ve köşegen bir tetrad takımı

$$e^i_v = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M(r) \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu tetrad takımı Jordan çerçevesi (4.3) ve Einstein çerçevesi (4.8) Lagrangianlarında yerine yazılarak küresel simetrik nokta-gibi Lagrangianlar elde edilebilir ve bu nokta-gibi Lagrangianların bölüm 3.3'de açıklanan Noether simetrileri bulunabilir. Küresel simetrik tetrad için nokta-gibi Lagrangian

$$\int \mathcal{L}(A, B, M, \phi, \dot{A}, \dot{B}, \dot{M}, \dot{\phi}) dr \quad (4.12)$$

formunda olacaktır. Burada " " Lagrangianın bir afin parametresine - küresel simetri için  $r$ 'ye - göre türevi ifade etmektedir. Bu konfigürasyon değişkenlerine sahip bir Lagrangian için (3.29) yani

$$X\mathcal{L} = 0 \quad (4.13)$$

eşitliğini sağlayan

$$X = \alpha \partial_A + \beta \partial_B + \gamma \partial_\phi + \delta \partial_M + \dot{\alpha} \partial_{\dot{A}} + \dot{\beta} \partial_{\dot{B}} + \dot{\gamma} \partial_{\dot{\phi}} + \dot{\delta} \partial_{\dot{M}} \quad (4.14)$$

ve  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 'dan en az biri sıfırdan farklı olacak şekilde bir vektör varsa bu bir Noether vektörüdür. Burada

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \left( \frac{\partial \alpha}{\partial A} \right) \dot{A} + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial B} \right) \dot{B} + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} \right) \dot{\phi} + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial M} \right) \dot{M} \\ \dot{\beta} &= \left( \frac{\partial \beta}{\partial A} \right) \dot{A} + \left( \frac{\partial \beta}{\partial B} \right) \dot{B} + \left( \frac{\partial \beta}{\partial \phi} \right) \dot{\phi} + \left( \frac{\partial \beta}{\partial M} \right) \dot{M} \\ \dot{\gamma} &= \left( \frac{\partial \gamma}{\partial A} \right) \dot{A} + \left( \frac{\partial \gamma}{\partial B} \right) \dot{B} + \left( \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} \right) \dot{\phi} + \left( \frac{\partial \gamma}{\partial M} \right) \dot{M} \\ \dot{\delta} &= \left( \frac{\partial \delta}{\partial A} \right) \dot{A} + \left( \frac{\partial \delta}{\partial B} \right) \dot{B} + \left( \frac{\partial \delta}{\partial \phi} \right) \dot{\phi} + \left( \frac{\partial \delta}{\partial M} \right) \dot{M} \end{aligned} \quad (4.15)$$

şeklindedir. Burada  $X$  vektörü genel bir sonsuz küçük simetri üreticidir. Lagrangiana ait Noether simetrileri onun (3.29)' da ifade edildiği üzere bir Noether vektörü boyunca sürüklendiğinde değişmeyişiinden kaynaklanmaktadır.

#### 4.2.1.1. Jordan Çerçevesi

Jordan çerçevesi nokta-gibi Lagrangianı (4.11) ve (4.3) kullanılarak

$$\mathcal{L}_{JF} = -\frac{\varphi_r^2 AM^2 \omega(\varphi)}{B} - \frac{2M_r^2 AF(\varphi)}{B} - \frac{4A_r M_r MF(\varphi)}{B} - ABM^2 V(\varphi) \quad (4.16)$$

şeklinde elde edilir.  $A, B, M$  radyal koordinat  $r$ 'ye bağlı fonksiyonlardır. Kullanılan köşegen tetrad (4.11) genel küresel simetrik

$$ds^2 = -A(r)^2 dt^2 + B(r)^2 dr^2 + M(r)^2 d\Omega^2 \quad (4.17)$$

metriğini üretebilen bir tetrad takımıdır. Burada  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$ 'dir.

#### NSY ile Elde Edilen Çözüm

Bu nokta-gibi Lagrangian ve (4.14) vektörü (4.13) denkleminde yerlerine yazıldığında birinci derece türevlerin kuadratik bir ifadesi ortaya çıkacaktır. Bu ifadenin sıfıra eşit olabilmesi için  $\dot{A}^2, \dot{B}^2, \dot{M}^2, \dot{\varphi}^2$  ve  $\dot{A}\dot{B}, \dot{A}\dot{M}, \dot{A}\dot{\varphi}, \dot{B}\dot{M}, \dot{B}\dot{\varphi}, \dot{M}\dot{\varphi}$  gibi çapraz terimlerin katsayılarının ayrı ayrı sıfıra eşit olması gereklidir. Bu durumda türevsiz kalan ifadenin de sıfıra eşit olması gerekir. Bu onbir kısmî türevli denklemin yazılması anlamına gelir. Bu denklemlerin hepsi bağımsız sonuç ifade etmezler. Ayakta kalan denklemler yazılarak düzenlendiğinde

$$\delta_A = 0 \quad \delta_B = 0 \quad \alpha_B = 0 \quad \gamma_B = 0 \quad (4.18)$$

$$\frac{F_\varphi}{F} \gamma + \delta_M + \alpha_A - \frac{\beta}{B} + \frac{\delta}{M} + \frac{A}{M} \delta_A = 0 \quad (4.19)$$

$$\frac{\omega_\varphi}{\omega} \gamma + \gamma_\varphi + 2\frac{\delta}{M} + \frac{\alpha}{A} - \frac{\beta}{B} = 0 \quad (4.20)$$

$$\frac{\omega}{F} AM \gamma_A + 2\delta_\varphi = 0 \quad (4.21)$$

$$\frac{\omega}{F} M \gamma_M + 2\frac{\alpha_\varphi}{A} + 2\frac{\delta_\varphi}{M} = 0 \quad (4.22)$$

$$\frac{V_\varphi}{V}\gamma + 2\frac{\delta}{M} + \frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{F_\varphi}{F}\gamma + 2\delta_M - \frac{\beta}{B} + \frac{\alpha_A}{A} + 2\frac{M}{A}\alpha_M = 0 \quad (4.24)$$

elde edilir. Noether vektörü  $\vec{N} = (\alpha, \beta, \varphi, \delta)$  ile gösterilmek üzere bu denklemleri sağlayan Noether vektörü

$$\vec{N}_1 = (A, B, \varphi, M) \quad \vec{N}_2 = (3A, B, \varphi, M) \quad (4.25)$$

olarak bulunmuştur. Böylece yukarıdaki denklemlerden  $F(\varphi)$ ,  $\omega(\varphi)$  ve  $V(\varphi)$  çözümleri  $c_1, c_2, c_3$  sabitler olmak üzere aşağıdaki şekilde bulunur.

$$F(\varphi) = \frac{c_1}{\varphi^2}, \quad \omega(\varphi) = \frac{c_2}{\varphi^3}, \quad V(\varphi) = \frac{c_3}{\varphi^4} \quad (4.26)$$

Bu gibi bir sistemde birbirleri arasında komütasyon yapabilen Noether vektörleri için birden fazla hareket sabitinin bulunabileceği bilinmektedir [150]. Bu durumda  $\vec{N}_1$  ve  $\vec{N}_2$  Noether vektörlerine  $\Sigma_1$  ve  $\Sigma_2$  hareket sabitleri tekabül eder. Bunlar,

$$\Sigma_1 = -2\frac{\varphi\varphi_rAM^2\omega}{B} - 8\frac{MM_rFA}{B} - 4\frac{A_rFM^2}{B} \quad (4.27)$$

$$\Sigma_2 = -2\frac{\varphi\varphi_rAM^2\omega}{B} - 12\frac{MM_rFA}{B} \quad (4.28)$$

olarak elde edilirler. Bu hareket sabitleri kullanılarak [152]'dekine benzer biçimde  $A_r$ 'nin integrasyonu ile  $A$  elde edilebilir. Bunun için  $B$  (4.27) ve (4.28) kullanılarak denklemlerden elenebilir.  $\Sigma_2$  cinsinden  $B$

$$B = -2\frac{(\varphi\varphi_rAM^2\omega + 6MM_rFA)}{\Sigma_2} \quad (4.29)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ifade (4.26) ile beraber (4.27)'de yerine yazılıp  $M = r$  olarak tanımlanırsa

$$\Sigma_1(c_2r\frac{\varphi_r}{\varphi^2} + 6\frac{c_1}{\varphi^2}) = \Sigma_2(c_2r\frac{\varphi_r}{\varphi^2} + 4\frac{c_1}{\varphi^2} + 2\frac{c_1rA_r}{\varphi^2A}) \quad (4.30)$$

elde edilecektir. Buradan  $A(r)$

$$A(r) = \frac{e^{\frac{(\Sigma_1 - \Sigma_2)c_2\varphi}{2c_1}}}{Kr^{\frac{2\Sigma_2}{3\Sigma_1}}} \quad (4.31)$$

olacaktır.  $\varphi = \ln(r)$  durumu için bu ifade

$$A(r) = \frac{r^{\frac{(\Sigma_1 - \Sigma_2)c_2}{2c_1} - \frac{2\Sigma_2}{3\Sigma_1}}}{K} \quad (4.32)$$

şeklini alır. (4.32) ifadesi (4.29)'de yerine yazılarak  $B(r)$

$$B(r) = \frac{-2(c_2 + 6c_1)}{K\Sigma_2} r^{1 + \frac{(\Sigma_1 - \Sigma_2)c_2}{2c_1} - \frac{2\Sigma_2}{3\Sigma_1}} \ln(r)^2 \quad (4.33)$$

şeklinde elde edilmiş olur. Bu çözüme tekabül eden çizgi elemanı sabitlerin tekrar tanımlanması ile

$$ds^2 = -\frac{K_1}{r^u} dt^2 + \frac{K_2}{r^{u-2} \ln(\frac{r}{r_0})^4} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.34)$$

şeklinde ifade edilir.

#### 4.2.1.2. Einstein Çerçevesi

Küresel simetrik tetrad (4.11) Einstein çerçevesi Lagrangianı (4.8)'de yerine yazılırsa küresel simetrik Einstein çerçevesi nokta-gibi Lagrangianı

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EF} = (-ABM^2U + \frac{\varphi_r^2 AM^2 \omega(\varphi)}{FB} + \frac{2M_r^2 A}{B} - \frac{4A_r M_r M}{B} + \frac{4\varphi_r M_r ABM}{F(\varphi)} + \\ \frac{2\varphi_r A_r F_\varphi BM^2}{F(\varphi)} - \frac{3\varphi_r^2 F_\varphi^2 AM^2}{F^2 B}) \end{aligned} \quad (4.35)$$

olarak elde edilir. Jordan çerçevesinde yapıldığı gibi bu nokta - gibi Lagrangian ve (4.14) vektörü (4.13) denkleminde yerlerine yazıldığında elde edilen kuadratik ifadelerin katsayıları

sıfıra eşitlendiğinde bağımsız denklemler,

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{2AM^2\omega}{FB} + \frac{3F'^2AM^2}{F^2B}\right)\gamma_M + \left(\frac{4F''ABM}{F} - \frac{4F'^2ABM}{F^2}\right)\gamma + \frac{2F'BM^2}{F}\alpha_M \\ & + \frac{4F'ABM}{F}\delta_M + \frac{4F'BM}{F}\alpha - \frac{4M}{B}\alpha_\varphi + \frac{4F'ABM}{F}\gamma_\varphi - \frac{4A}{B}\delta_\varphi \\ & + \frac{4F'AM}{F}\beta + \frac{4F'AB}{F}\delta = 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{2AM^2\omega}{FB} + \frac{3F'^2AM^2}{F^2B}\right)\gamma_A + \left(\frac{2F''BM^2}{F} - \frac{2F'^2BM^2}{F^2}\right)\gamma + \frac{4F'ABM}{F}\delta_A \\ & + \frac{2F'BM^2}{F}\beta + \frac{2F'BM^2}{F}\alpha_A + \frac{2F'BM^2}{F}\gamma_\varphi + \frac{4F'BM}{F}\delta - \frac{4M}{B}\delta_\varphi = 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{2AM^2\omega}{FB} + \frac{3F'^2AM^2}{F^2B}\right)\gamma_\varphi + \frac{F'AM^2\omega}{F^2B}\gamma - \frac{3F'F''AM^2}{F^2B}\gamma - \frac{AM^2\omega_\varphi}{FB}\gamma \\ & + \frac{3F'^3AM^2}{F^3B}\gamma + \frac{4F'ABM}{F}\delta_\varphi - \left(\frac{M^2\omega}{FB} + \frac{3F'^2M^2}{2F^2B}\right)\alpha + \frac{2F'BM^2}{F}\alpha_\varphi \\ & + \left(\frac{AM^2\omega}{FB^2} + \frac{3F'^2AM^2}{2F^2B^2}\right)\beta - \left(\frac{2AM\omega}{FB} + \frac{3F'^2AM}{F^2B}\right)\delta = 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\frac{4F'ABM}{F}\gamma_M - \frac{4M}{B}\alpha_M - \frac{4A}{B}\delta_M - \frac{2}{B}\alpha + \frac{2A}{B^2}\beta = 0 \quad (4.39)$$

$$\frac{2F'BM^2}{F}\gamma_M + \frac{4F'ABM}{F}\gamma_A - \frac{4M}{B}\alpha_A + \frac{4M}{B^2}\beta - \frac{4A}{B}\delta_A - \frac{4}{B}\delta - \frac{4M}{B}\delta_M = 0 \quad (4.40)$$

$$\frac{4F'ABM}{F}\gamma_B - \frac{4A}{B}\delta_B - \frac{4M}{B}\alpha_B = 0 \quad (4.41)$$

$$\frac{2AM^2\omega}{FB}\gamma_B + \frac{3F'^2AM^2}{F^2B}\gamma_B - \frac{2F'BM^2}{F}\alpha_B - \frac{4F'ABM}{F}\delta_B = 0 \quad (4.42)$$

$$\frac{2F'BM^2}{F}\gamma_B - \frac{4M}{B}\delta_B = 0 \quad (4.43)$$

$$\frac{2F'BM^2}{F}\gamma_A - \frac{4M}{B}\delta_A = 0 \quad (4.44)$$

$$-BM^2U\alpha - AM^2U\beta - ABM^2U_\varphi\gamma - 2ABMU\delta = 0 \quad (4.45)$$

şeklinde dirler. Buradan (4.36) – (4.45) denklemlerini sağlayan iki Noether vektörü

$$\vec{N}_3 = (0, 0, k, 0) \quad \vec{N}_4 = (-2A, 0, 0, M) \quad (4.46)$$

olarak elde edilebilir. Burada  $K$  bir sabittir. Bu iki Noether vektörü için  $F(\varphi)$ ,  $\omega(\varphi)$  ve  $V(\varphi)$ 'nin ortak çözümü  $k_1$ ,  $k_2$  sabitler olmak üzere

$$F(\varphi) = k_1 e^{K\varphi} \quad \omega(\varphi) = k_2 e^{K\varphi} \quad U(\varphi) = U_0 \quad (4.47)$$

olarak bulunur. Buradan hareketle (4.46) Noether vektörlerine tekabül eden hareket sabitleri

$$\Sigma_3 = 2K \frac{\varphi_r A M^2 \omega}{F B} + 4K \frac{A B M M_r F'}{F} + 2K \frac{A_r B M^2 F'}{F} - 3K \frac{\varphi_r A M^2 F'^2}{F^2 B} \quad (4.48)$$

$$\Sigma_4 = 4 \frac{A M - A_r M^2}{B} \quad (4.49)$$

olacaktır. Bu iki hareket sabiti ile  $B$  elenebilir. Bunun için öncelikle (4.47)'da elde edilen sonuçlar (4.48)'de yerine yazılıp  $M = r$  kabul edilir ise  $2k_2 = 3k_1 K^2$  koşulu için  $A(r)$  integre edilerek

$$A(r) = \sqrt{\frac{\Sigma_3 \Sigma_4}{k_1 K}} \frac{1}{2r} \quad (4.50)$$

bulunur. (4.49) ve (4.50) kullanıldığında

$$B(r) = 4 \sqrt{\frac{\Sigma_3}{\Sigma_4 k_1 K}} \quad (4.51)$$

şeklinde  $B(r)$ 'de bulunmuş olur. Bu son ifade  $B(r)$  için yazılan Euler-Lagrange denkleminde kullanılırsa  $\varphi(r)$  ayrıca integre edilebilir.  $B(r)$  için yazılan Euler-Lagrange denkleminde

$$B = \sqrt{\frac{2A M^2 F \omega \varphi_r^2 + 4A F^2 M_r^2 + 8M F^2 A_r M_r + 3A M^2 F'^2 \varphi_r^2}{2A M^2 F^2 U - 8A M F F' \varphi_r M_r - 4M^2 F F' \varphi_r A_r}} \quad (4.52)$$

elde edilir. (4.51) ile (4.52) eşitlendiğinde,  $U = 0$  kabulü altında ve sabitler yeniden adlandırıldığında  $\varphi$  için

$$\varphi(r) = c_4 + c_5 \ln\left(\frac{1}{r}\right) + c_6 \ln(r) \quad (4.53)$$

çözümüne ulaşmak mümkün olur. Bu çözüme tekabül eden çizgi elemanı

$$ds^2 = -\frac{\Sigma_3 \Sigma_4}{k_1 K} \frac{1}{4r^2} dt^2 + 16 \frac{\Sigma_3}{\Sigma_4 k_1 K} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \quad (4.54)$$

Küresel simetri için  $B = 1/A$  seçilerek Schwarzschild tipi köşegen tetradlar ile de benzer hesaplar gerçekleştirilebilir. Sıradaki kısımda bu durum için gerçekleştirilen hesaplamalar ele alınacaktır.

#### 4.2.2. $\text{diag}(A, 1/A, M, M \sin(\theta))$ Tipi Küresel Simetrik Çözümler

Önceki kısımda yer alan (4.11) tetradı  $B = 1/A$  durumu için

$$e^i_v = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/A(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M(r) \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

şeklinde olacaktır. Bu tetradda çalışmanın avantajı şüphesiz nokta-gibi Lagrangian için değişken sayısının azalmasıdır. İlerideki kısımlarda bu tetrad için yine hem Jordan hem Einstein çerçeveleri nokta-gibi Lagrangianları elde edilerek NSY yöntemiyle çözümler elde edilecektir.

##### 4.2.2.1. *Jordan Çerçevesi*

Son olarak ele alınan (4.55) tetradı için Jordan çerçevesi Lagrangianı

$$\mathcal{L}_{JF} = -\left(2FA^2M_r^2 + 4FAMA_rM_r + \omega A^2M^2\varphi_r^2 + M^2V\right) \quad (4.56)$$

olacaktır.

#### *NSY ile Elde Edilen Çözüm*

Bu (4.56) nokta-gibi Lagrangian'a NSY uygulandığında aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\omega M^2 \gamma_M + 2 \frac{M}{A} \alpha_\varphi + 2F \delta_\varphi = 0 \quad (4.57)$$

$$\omega AM \gamma_A + 2F \delta_\varphi = 0 \quad (4.58)$$

$$2\omega \gamma_\varphi + \omega_\varphi \gamma + 2\omega \frac{\alpha}{A} + 2\omega \frac{\delta}{M} = 0 \quad (4.59)$$

$$F' \gamma + 2F \frac{M}{A} \alpha_M + 2F \delta_M + 2 \frac{\alpha}{A} = 0 \quad (4.60)$$

$$\frac{F'}{F} \gamma + \delta_M + \alpha_A + \frac{\alpha}{A} + \frac{A}{M} \delta_A + \frac{\delta}{M} = 0 \quad (4.61)$$

$$\delta_A = 0 \quad (4.62)$$

$$\frac{V_\varphi}{V}\gamma + 2\frac{\delta}{M} = 0. \quad (4.63)$$

Bu denklem takımı  $V = 0$  için

$$\vec{N}_5 = (A, \varphi, M) \quad \vec{N}_6 = (2A, \varphi, 0) \quad (4.64)$$

olarak elde edilebilir. Bu iki Noether vektörü için  $F(\varphi)$ ,  $\omega(\varphi)$ 'nin ortak çözümü  $k_8, k_9$  sabitler olmak üzere

$$F(\varphi) = \frac{k_8}{\varphi^4} \quad \omega(\varphi) = \frac{k_9}{\varphi^6} \quad V(\varphi) = 0 \quad (4.65)$$

şeklinde elde edilebilir. Bu değerler kullanılarak elde edilen korunan büyüklükler

$$\Sigma_5 = -2(\varphi_r A^2 M^2 \omega + 4A^2 M M_r F + A_r A M^2 F) \quad (4.66)$$

$$\Sigma_6 = -2(\varphi_r A^2 M^2 \omega + 4A^2 M M_r F + A_r A M^2 F) \quad (4.67)$$

şeklindedir. Bu korunan büyüklükler ve (4.65) kullanılarak ve sabitler düzenlenerek

$$A(r) = \frac{C_1}{r^{\frac{s}{2}}} \quad (4.68)$$

olarak elde edilir ( $\frac{s}{2} = 2(\frac{\Sigma_5}{\Sigma_6} - 1)$ ). Burada Euler-Lagrange denklemleri kullanılarak elde edilen

$$\varphi = \frac{c_0}{r^{\frac{k_8}{k_9}}} \quad (4.69)$$

değeri kullanılmıştır. Bu çözüme karşılık gelen çizgi elemanı

$$ds^2 = -\frac{C_1}{r^s} dt^2 + \frac{1}{\frac{C_1}{r^s}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin(\theta)^2 d\phi^2 \quad (4.70)$$

şeklindedir.

### *Euler - Lagrange Denklemlerinden Elde Edilen Çözüm*

Nokta Lagrangian (4.56) için Euler-Lagrange denklemleri

$$-2\varphi_r^2 A^2 M^2 \omega + 4F A M M_{rr} + 4F_\varphi A M M_r \varphi_r = 0 \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} \omega_\varphi A^2 M^2 \varphi_r^2 + 4\varphi_r A^2 M M_r \omega + 4\omega A A_r M^2 \varphi_r + 2\omega \varphi_{rr} A^2 M^2 \\ - 2F_\varphi A^2 M_r^2 - 4F_\varphi A_r M_r A M = 0 \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} -2\omega \varphi_r^2 A^2 M - 2M V + 4F M_{rr} A^2 + 8F A_r M_r A + 4F_\varphi \varphi_r M_r A^2 + 4F A_{rr} A M \\ + 4F A_r^2 M + 4F_\varphi \varphi_r A_r M A = 0 \end{aligned} \quad (4.73)$$

şeklinde olacaktır. Bu denklemler  $\varphi = k r$  kabulü altında  $C_0$  ve  $C_1$  sabitler olmak üzere

$$F(\varphi) = C_0 - \left( \frac{\ln(\varphi) - \ln(\varphi - k R_0)}{2k R_0} \right) \quad (4.74)$$

$$\omega(\varphi) = \frac{C_1}{\varphi^3 - \varphi^2 k R_0} \quad (4.75)$$

$$V(\varphi) = -3F \frac{k^3 R_0^2}{\varphi^3 - k R_0^2 \varphi^2} + \omega k^2 R_0 \quad (4.76)$$

için çözüldüğünde

$$A(r) = \sqrt{\left(1 - \frac{R_0}{r}\right)} \quad (4.77)$$

elde edilir. Bu çözüme karşılık gelen çizgi elemanı

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_0}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_0}{r}\right)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \quad (4.78)$$

şeklinde ifade edilir.

#### 4.2.2.2. Einstein Çerçevesi

(4.55) tetradı için Einstein çerçevesi Lagrangianı

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EF} = - \left( 2A^2 M_r^2 + 4AMA_r M_r + \frac{\omega}{F} A^2 M^2 \varphi_r^2 - 4 \frac{F'}{F} M \varphi_r M_r \right. \\ \left. - 2 \frac{F'}{F} \frac{M^2}{A} A_r \varphi_r + \frac{3}{2} \left( \frac{F'}{F} \right)^2 A^2 M^2 \varphi_r^2 + M^2 U \right) \end{aligned} \quad (4.79)$$

olarak elde edilir.

#### NSY ile Elde Edilen Çözüm

Bu Lagrangian kullanılarak NSY işletildiğinde

$$\begin{aligned} 2 \frac{\omega}{F} A^2 M^2 \gamma_M - 3 \left( \frac{F'}{F} \right)^2 A^2 M^2 \gamma_M + 4 \frac{F'}{F} M \gamma_\varphi + 4 \frac{F''}{F} M \gamma - 4 \left( \frac{F'}{F} \right)^2 M \gamma + 2 \frac{F'}{F} \frac{M^2}{A} \alpha_M \\ - 4AM \delta_\varphi + 4 \frac{F'}{F} M \delta_M - 4A^2 \delta_\varphi + 4 \frac{F'}{F} \delta = 0 \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$\frac{F'}{F} M \gamma_M - AM \alpha_M - A^2 \delta_M - A\alpha = 0 \quad (4.81)$$

$$\frac{F'}{F} \frac{M^2}{A} \gamma_M + 2 \frac{F'}{F} M \gamma_A - 2AM \delta_M - 2AM \alpha_A - 2M\alpha - 2A^2 \delta_A - 2A\delta = 0 \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{\omega}{F} A^2 M^2 \gamma_A - 3 \left( \frac{F'}{F} \right)^2 A^2 M^2 \gamma_A + 2 \frac{F'}{F} \frac{M^2}{A} \gamma_\varphi + 2 \frac{F''}{F} \frac{M^2}{A} \gamma - 2 \left( \frac{F'}{F} \right)^2 \frac{M^2}{A} \gamma \\ + 2 \frac{F'}{F} \frac{M^2}{A} \alpha_A - 2 \frac{F'}{F} \frac{M^2}{A^2} \alpha - 4AM \delta_\varphi + 4 \frac{F'}{F} \frac{M}{A} \delta + 4 \frac{F'}{F} M \delta_A = 0 \end{aligned} \quad (4.83)$$

$$2 \frac{F'}{F} \frac{M^2}{A} \gamma_A - 4AM \delta_A = 0 \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} -2 \frac{\omega}{F} A^2 M^2 \gamma_\varphi - 3 \left( \frac{F'}{F} \right)^2 A^2 M^2 \gamma_\varphi - \frac{\omega'}{F} A^2 M^2 \gamma + \frac{\omega F'}{F^2} A^2 M^2 \gamma - 3 \frac{F' F''}{F^2} A^2 M^2 \gamma \\ + 3 \left( \frac{F'}{F} \right)^3 A^2 M^2 \gamma - 2 \frac{\omega}{F} AM^2 \alpha - 2 \frac{\omega}{F} A^2 M \delta - 3 \left( \frac{F'}{F} \right)^2 AM^2 \alpha \\ + 2 \frac{F'}{F} \frac{M^2}{A} \alpha_\varphi - 3 \left( \frac{F'}{F} \right)^2 A^2 M \delta + 4 \frac{F'}{F} M \delta_\varphi = 0 \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$\frac{U'}{U} \gamma + 2 \frac{\delta}{M} = 0 \quad (4.86)$$

denklemleri elde edilecektir.

$$\vec{N}_7 = (-A, \varphi, M) \quad \vec{N}_8 = (0, 3\varphi, 0) \quad (4.87)$$

olarak elde edilebilir. Bu iki Noether vektörü için  $F(\varphi)$ ,  $\omega(\varphi)$ 'nin ortak çözümü  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  sabitler olmak üzere

$$F(\varphi) = c_2 e^{\frac{c_1}{2\varphi^2}} \quad (4.88)$$

$$\omega(\varphi) = c_3 \frac{e^{\frac{c_1}{2\varphi^2}}}{\varphi^2} \quad U = 0 \quad (4.89)$$

şeklinde elde edilebilir. Bu değerler kullanılarak elde edilen korunan büyüklükler  $\Sigma_7$  ve  $\Sigma_8$  kullanılarak  $A(r)$

$$A(r) = \sqrt{\frac{\Sigma_7 - \Sigma_8}{6r} - \frac{3c_1}{2\varphi^2}} \quad (4.90)$$

şeklinde elde edilebilir. Bu durumda çözüme karşılık gelen çizgi elemanı

$$ds^2 = -\left(\frac{\Sigma_7 - \Sigma_8}{6r} - \frac{3c_1}{2\varphi^2}\right)dt^2 + \frac{1}{\left(\frac{\Sigma_7 - \Sigma_8}{6r} - \frac{3c_1}{2\varphi^2}\right)}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (4.91)$$

olup,  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2$ 'dir. Bu çözüm  $\varphi(r)$ 'ye bağlı olduğundan  $\varphi(r)$ 'nin farklı durumları farklı çözümlere tekabül edecektir.

Örneğin  $\varphi = \varphi_0$  sabit değeri için çizgi elemanı

$$ds^2 = -\left(\alpha - \frac{\beta}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{\left(\alpha - \frac{\beta}{r}\right)}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (4.92)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $\alpha = \frac{-3c_1}{2\varphi_0^2}$ ,  $\beta = \frac{\Sigma_8 - \Sigma_7}{6}$  ve  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2$ 'dir. Kolaylıkla görülebileceği gibi standart Schwarzschild çözümü  $\alpha = 1$  ve  $\beta = 2M$  durumuna tekabül etmektedir.

Yine  $\varphi = \sqrt{\frac{-3c_1}{2(1+\frac{\varphi^2}{r^2})}}$  durumu ele alındığında  $\frac{\Sigma_8 - \Sigma_7}{6} = 2M$  durumu için (4.91) çizgi elemanının Reissner - Nordström metriğine dönüştüğü görülecektir.

### 4.3. EKSENEL SİMETRİK ÇÖZÜMLER

#### 4.3.1. diag (A, C, M, C) Tipi Silindirik Simetrik Çözümler

##### 4.3.1.1. Jordan Çerçevesi

Silindirik simetrik bir metrik

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\mu-2\nu} dr^2 + r^2 e^{-2\nu} d\phi^2 + e^{2\mu-2\nu} dz^2 \quad (4.93)$$

ve  $\mu$  ile  $\nu$  sadece  $r$ 'nin fonksiyonu olmak üzere bu metriğe tekabül eden ortogonal tetrad takımı

$$h^0 = e^\nu dt \quad h^1 = e^{\mu-\nu} dr \quad h^2 = re^{-\nu} d\phi \quad h^3 = e^{\mu-\nu} dz \quad (4.94)$$

şeklinde ifade edilebilir [1]. Bu tetrad takımı daha genel fonksiyonel formda  $A(r) = e^\nu$   $C(r) = e^{\mu-\nu}$   $M(r) = re^{-\nu}$  olmak üzere  $(t, r, \phi, z)$  koordinatlarında

$$e^i_v = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C(r) \end{pmatrix} \quad (4.95)$$

şeklinde ifade edilebilir. Jordan çerçevesi skaler - tensör eşdeğeri Lagrangianı (4.3) için bu tetradla hesaplanan nokta-gibi Lagrangian

$$\mathcal{L}_{JF} = -\phi_r^2 AM\omega - AC^2 MU - \frac{2FC_r M_r A}{C} - 2FA_r M_r - \frac{2FA_r C_r M}{C} \quad (4.96)$$

olacaktır.

#### NSY ile Elde Edilen Çözüm

Küresel simetrik durumdakine benzer şekilde NSY bu Lagrangiana uygulandığında aşağıdaki denklem takımı elde edilir.

$$AM\omega\gamma_M + \frac{FA}{C}\beta_\phi + F\alpha_\phi = 0 \quad (4.97)$$

$$AM\omega\gamma_C + \frac{FM}{C}\alpha_\phi + \frac{FA}{C}\delta_\phi = 0 \quad (4.98)$$

$$AM\omega\gamma_A + \frac{FM}{C}\beta_\varphi + F\delta_\varphi = 0 \quad (4.99)$$

$$2AM\omega\gamma_\varphi + AM\omega_\varphi\gamma + M\omega\alpha + A\omega\delta = 0 \quad (4.100)$$

$$F'\gamma + \frac{FM}{C}\beta_M + \frac{FA}{C}\beta_A + F\delta_M + F\alpha_A = 0 \quad (4.101)$$

$$\frac{F'M}{C}\gamma + \frac{FM}{C}\beta_C + \frac{FM}{C}\alpha_A - \frac{FM}{C^2}\beta + \frac{FA}{C}\delta_A + \frac{F}{C}\delta + F\delta_C = 0 \quad (4.102)$$

$$\frac{FM}{C}\beta_A + F\delta_A = 0 \quad (4.103)$$

$$\frac{FA}{C}\beta_M + F\alpha_M = 0 \quad (4.104)$$

$$\frac{FM}{C}\alpha_C + \frac{FA}{C}\delta_C = 0 \quad (4.105)$$

$$\frac{F'A}{C}\gamma + \frac{FM}{C}\alpha_M + \frac{FA}{C}\delta_M - \frac{FA}{C}\beta_C + \frac{F}{C}\alpha - \frac{FA}{C^2}\beta + F\alpha_C = 0 \quad (4.106)$$

$$AC^2MV_\varphi\gamma + MC^2V\alpha + 2ACMV\beta + AC^2V\delta = 0 \quad (4.107)$$

Buradan  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  için

$$\vec{N}_5 = (A, 0, 0, -M) \quad (4.108)$$

$$\vec{N}_6 = (A, -2C, 0, M) \quad (4.109)$$

$$\vec{N}_7 = (A, 0, \varphi, 0) \quad (4.110)$$

çözümlerinin elde edilebileceği görülür. Bu  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  değerleri için  $F(\varphi)$ ,  $\omega(\varphi)$ ,  $U(\varphi)$ 'nin fonksiyonel formları

$$F(\varphi) = \frac{k_3}{\varphi^2} \quad \omega(\varphi) = \frac{k_4}{\varphi^3} \quad U(\varphi) = \frac{k_5}{\varphi} \quad (4.111)$$

olarak bulunur. Tetrad potansiyellerinin integre edilebilmesi adına  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  için bulunan ilk iki çözüm kullanılarak hareket sabitleri

$$\Sigma_5 = 2F(M_r A - M A_r) \quad (4.112)$$

$$\Sigma_6 = 2F(M_r A + M A_r - \frac{2MAC_r}{C}) \quad (4.113)$$

şeklinde hesaplanır. Başta tanımladığımız fonksiyonel yapı  $M = \frac{r}{A}$  yerine yazılarak [1],  $\varphi(r) = \ln(r)$  değeri için tetrad potansiyelleri

$$A(r) = K_0 r^{\frac{\Sigma_5 - 2}{4k_3}} \quad (4.114)$$

ve

$$C(r) = K_1 r^{1 - \frac{\Sigma_6 + 2}{4k_3}} \quad (4.115)$$

olarak elde edilir. Bu çözüme karşılık gelen metrik

$$ds^2 = -\frac{K_3}{r^v} dt^2 + \frac{K_4}{r^w} dr^2 + \frac{r^{v+2}}{K_3} d\phi^2 + \frac{K_4}{r^w} dz^2 \quad (4.116)$$

şeklinde olup Levi - Civita çözümü [1] ile benzerliği dikkat çekicidir.

### ***Euler - Lagrange Denklemlerinden Elde Edilen Çözüm***

Çözümün genel hali (4.95) için  $C(r) = \frac{1}{A(r)}$  kabul edildiğinde (4.96) nokta Lagrangian aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$L_{JF} = -\varphi_r^2 A M \omega - \frac{MU}{A} + \frac{2FA_r^2 M}{A} \quad (4.117)$$

Bu nokta Lagrangian'a karşılık gelen Euler - Lagrange denklemleri ise

$$-\varphi_r^2 M \omega + \frac{MU}{A^2} - \frac{4FA_r M_r}{A} - \frac{4FA_{rr} M}{A} + \frac{2FA_r^2 M}{A^2} - \frac{4F_\varphi A_r M \varphi_r}{A} = 0 \quad (4.118)$$

$$\varphi_r^2 A M \omega_\varphi + 2\varphi_r A M_r \omega + 2\varphi_r A_r M \omega + 2\varphi_{rr} A M \omega + \frac{2F_\varphi A_r^2 M}{A} = 0 \quad (4.119)$$

$$-\varphi_r^2 A \omega - \frac{U}{A} + \frac{2FA_r^2}{A} = 0 \quad (4.120)$$

şeklindedir. Bu denklemler  $C_0$  ile  $\omega_0$  sabitler ve  $\varphi = K_9(r - r_0)$  olmak üzere

$$F(\varphi) = C_0 - (K_9 r_0^2 \ln(\varphi + r_0 K_9) + \frac{(2K_9 + 1)\varphi^2 - 4r_0 K_9 \varphi}{4K_9}) \omega_0 \quad (4.121)$$

ve

$$U(\varphi) = 2kF(\varphi) - k^2\varphi^2\omega \quad (4.122)$$

için çözüldüğünde

$$A(r) = k(r - r_0) \quad (4.123)$$

elde edilir.  $M(r) = \frac{r}{A(r)}$  olduğundan bu çözüm için çizgi elemanı

$$ds^2 = -k^2(r - r_0)^2 dt^2 + \frac{1}{k^2(r - r_0)^2} dr^2 + \frac{r^2}{k^2(r - r_0)^2} d\phi^2 + \frac{1}{k^2(r - r_0)^2} dz^2 \quad (4.124)$$

olacaktır.

#### 4.3.1.2. Einstein Çerçevesi

Silindirik simetrik (4.95) tetradı için Einstein çerçevesi Lagrangianı (4.8)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EF} = & -AMC^2U + \varphi_r^2 \left( \frac{AM\omega}{F} - \frac{3F_\varphi^2 AM}{F^2} \right) - \frac{2M_r C_r A}{C} + \frac{2\varphi_r M_r A C^2 F_\varphi}{F} \\ & + 2A_r M_r + \frac{2\varphi_r C_r A C M F_\varphi}{F} - \frac{2C_r A_r M}{C} + \frac{2A_r \varphi_r C^2 M F_\varphi}{F} \end{aligned} \quad (4.125)$$

nokta-gibi Lagrangian formunda olacaktır.

#### NSY ile Elde Edilen Çözüm

Jordan çerçevesi için yapıldığı şekilde (4.125) Lagrangianına NSY uygulanarak aşağıdaki denklem takımı elde edilir.

$$\begin{aligned} -\left(\frac{2AM\omega}{F} + \frac{3F'^2 AM}{F^2}\right)\gamma_A + \frac{2F'CM^2}{F}\gamma_\varphi + \left(\frac{2F'''MC^2}{F} - \frac{2F'^2 MC^2}{F^2}\right)\gamma + \\ \frac{2F'MC^2}{F}\alpha_A + \frac{2F'ACM}{F}\beta_A + \frac{4F'CM}{F}\beta - \frac{2M}{C}\beta_\varphi + \frac{2AC^2F'}{F}\delta_A \\ - 2\delta_\varphi + 2\frac{F'C^2}{F}\delta = 0 \end{aligned} \quad (4.126)$$

$$\frac{2F'AC^2}{F}\gamma_M - \frac{2A}{C}\beta_M - 2\alpha_M = 0 \quad (4.127)$$

$$\frac{2F'MAC}{F}\gamma_M + \frac{2F'AC^2}{F}\gamma_C - \frac{2M}{C}\alpha_M - \frac{2A}{C}\beta_C - \frac{2A}{C}\delta_M - \frac{2\alpha}{C} + \frac{2A\beta}{C^2} - 2\alpha_C = 0 \quad (4.128)$$

$$\frac{2F'M^2C}{F}\gamma_M + \frac{2F'AC^2}{F}\gamma_A - \frac{2M}{C}\beta_M - \frac{2A}{C}\beta_A - 2\delta_M - 2\alpha_A = 0 \quad (4.129)$$

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{2AM\omega}{F} + \frac{3F'^2AM}{F^2}\right)\gamma_C + \frac{2F'CMA}{F}\gamma_\phi + \left(\frac{2F''MCA}{F} - \frac{2F'^2MCA}{F^2}\right)\gamma \\ & + \frac{2F'MC^2}{F}\alpha_C + \frac{2F'ACM}{F}\beta_C + \frac{2F'CM}{F}\alpha - \frac{2M}{C}\alpha_\phi + \frac{2AMF'}{F}\beta \\ & + 2\frac{F'AC^2}{F}\delta_C + 2\frac{F'AC}{F}\delta - \frac{2A}{C}\delta_\phi = 0 \end{aligned} \quad (4.130)$$

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{2AM\omega}{F} + \frac{3F'^2AM}{F^2}\right)\gamma_\phi - \frac{AM\omega_\phi}{FB}\gamma + \frac{2F'AM\omega}{F^2}\gamma - \frac{3F'F''AM}{F^2}\gamma \\ & + \frac{3F'^3AM}{F^3}\gamma - \left(\frac{M\omega}{F} + \frac{3F'^2M}{2F^2}\right)\alpha + \frac{2F'MC^2}{F}\alpha_\phi - \left(\frac{A\omega}{F} + \frac{3F'^2A}{2F^2}\right)\delta \\ & + \frac{2F'AC^2}{F}\delta_\phi + \frac{2F'ACM}{F}\beta_\phi = 0 \end{aligned} \quad (4.131)$$

$$\frac{2F'ACM}{F}\gamma_C - \frac{2A}{C}\delta_C = 0 \quad (4.132)$$

$$\frac{2F'CM^2}{F}\gamma_C + \frac{2F'ACM}{F}\gamma_A - \frac{2M}{C}\beta_C - \frac{2M}{C}\alpha_A + \frac{2M}{C^2}\beta - \frac{2A}{C}\delta_A - \frac{2}{C}\delta - 2\delta_C = 0 \quad (4.133)$$

$$\frac{2F'CM^2}{F}\gamma_A - \frac{2M}{C}\beta_A - 2\delta_A = 0 \quad (4.134)$$

$$AC^2MU'\gamma + MC^2U\alpha + 2ACMU\beta + AC^2U\delta = 0 \quad (4.135)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{3F'^2MA}{F^2}\gamma_M + \frac{2F'AC^2}{F}\gamma_\phi + \frac{2F'C^2M}{F}\alpha_M + \frac{2F'ACM}{F}\beta_M + \\ & \frac{2AC^2F'}{F}\delta_M + 2\frac{F'C^2}{F}\alpha + 4\frac{F'CA}{F}\beta - \\ & \frac{2A}{C}\beta_\phi - 2\alpha_\phi + \left(\frac{2F''AC^2}{F} - \frac{2F'^2AC^2}{F^2}\right)\gamma + \frac{2\omega AM}{F}\gamma_M = 0 \end{aligned} \quad (4.136)$$

Denklemler (4.126) - (4.136) için  $k$  bir sabit olmak üzere iki çözüm

$$\vec{N}_8 = (A, 0, 0, -M) \quad (4.137)$$

$$\vec{N}_9 = (0, 0, k, 0) \quad (4.138)$$

elde edilebilir. Hareket sabitleri,

$$\Sigma_8 = 2MA_r - 2AM_r \quad (4.139)$$

$$\Sigma_9 = k(-\varphi_r(\frac{2MA\omega}{F} + \frac{3MAF'^2}{F^2}) + M_r\frac{2AC^2F'}{F} + C_r\frac{2ACMF'}{F} + A_r\frac{2MC^2F'}{F}) \quad (4.140)$$

şeklinde elde edilir. Bu iki hareket sabiti kullanılarak  $F(\varphi)$ ,  $\omega(\varphi)$ ,  $U(\varphi)$  fonksiyonları

$$F(\varphi) = k_6 e^{K\varphi} \quad \omega(\varphi) = k_7 e^{-2K\varphi} \quad U(\varphi) = U_0 \quad (4.141)$$

olmak üzere elde edilirler.  $M = \frac{r}{A}$  yerine yazılarak ve  $\varphi(r) = \ln(r)$  kabulü altında  $A(r)$  ve  $C(r)$  için sabitler yeniden düzenlendiğinde

$$A(r) = c_7 r^{\frac{\Sigma_8+2}{4}} \quad (4.142)$$

$$C(r) = \sqrt{-\frac{c_8}{r^{3K}} - \frac{c_9}{r^2} + c_{10}} \quad (4.143)$$

çözümleri elde edilir. Bu çözüme tekabül eden çizgi elemanı ise

$$ds^2 = -\frac{K_5}{r^p} dt^2 + (-\frac{K_6}{r^q} - \frac{K_7}{r^2} + K_8) dr^2 + \frac{r^{p+2}}{K_5} d\phi^2 + (-\frac{K_6}{r^q} - \frac{K_7}{r^2} + K_8) dz^2 \quad (4.144)$$

şeklinde olacaktır.

#### 4.3.1.3. Genel $f(T)$ Lagrangianı için Çözüm

Şimdiye kadar kullanılan  $f(T)$  skaler-tensör eşdeğer formdaki Lagrangianının dışında genel  $f(T)$  eylem integralinin orjinal formu olan (2.135) için (4.95) tetradının  $\text{diag}(A, 1/A, M, 1/A)$  durumuna tekabül eden nokta Lagrangian

$$\mathcal{L}_{f(T)} = F \frac{M}{A} + 2F_T A_r^2 \frac{M}{A} - F_T T \frac{M}{A} \quad (4.145)$$

şeklinde olacaktır.

#### NSY ile Elde Edilen Çözüm

(4.145) Lagrangianına NSY uygulandığında

$$\alpha_T = 0 \quad \alpha_M = 0 \quad (4.146)$$

$$2F_{TT} \frac{M}{A} \gamma + 4F_T \frac{M}{A} \alpha_A - 2F_T \frac{M}{A^2} \alpha + 2 \frac{F_T}{A} \delta = 0 \quad (4.147)$$

$$-F_{TT} T \frac{M}{A} \gamma - F \frac{M}{A^2} \alpha + \frac{F}{A} \delta + F_T T \frac{M}{A^2} \alpha - F_T \frac{T}{A} \delta = 0 \quad (4.148)$$

denklemleri elde edilecektir. Bu denklemler  $a_0$  bir sabit olmak üzere

$$\vec{N}_{10} = (a_0, 0, a_0 \frac{A}{M}) \quad (4.149)$$

çözüldüğünde  $M = \frac{r}{A}$  için hareket sabiti

$$\Sigma_{10} = 4a_0 F_T \frac{A_r r}{A^2} \quad (4.150)$$

olacaktır. Bu çözüm  $f(T)$  formu üzerinde bir kısıtlama getirmemektedir. Dolayısı ile  $f(T)$  formu için durum çalışması yapılarak  $A(r)$  için farklı çözümler elde etmek mümkündür. Örneğin  $f_0$  bir sabit olmak üzere  $f(T) = f_0 T$  doğrusal fonksiyon durumu için  $k_{\Sigma_{10}} = \frac{\Sigma_{10}}{4f_0 a_0}$  şeklinde bir diğer sabit tanımlanarak

$$A(r) = k_{\Sigma_{10}} (\ln(r) - r_0) \quad (4.151)$$

şeklinde bir çözüm elde etmek mümkündür. Bu çözüme karşılık gelen çizgi elemanı

$$ds^2 = -k_{\Sigma_{10}}^2 (\ln(r) - r_0)^2 dt^2 + \frac{1}{k_{\Sigma_{10}}^2 (\ln(r) - r_0)^2} dr^2 + \frac{r^2}{k_{\Sigma_{10}}^2 (\ln(r) - r_0)^2} d\phi^2 + \frac{1}{k_{\Sigma_{10}}^2 (\ln(r) - r_0)^2} dz^2 \quad (4.152)$$

şeklindedir.

Bir diğer durum olarak  $f(T) = f_0 T^2$  ele alındığında

$$A(r) = \frac{\Sigma_{10}}{k_{\Sigma_{10}}} \left( \frac{r^{\frac{2}{3}}}{2\sqrt[3]{2}} - r_0 \right)^3 \quad (4.153)$$

çözümü elde edilmektedir. Sabitler  $C_{\Sigma_{10}} = \frac{\Sigma_{10}}{16k_{\Sigma_{10}}}$  ve  $R_0 = \frac{r_0}{2\sqrt[3]{2}}$  olarak yeniden

düzenlendiğinde bu çözüme karşılık gelen çizgi elemanı

$$ds^2 = -C_{\Sigma_{10}}^2 (r^{\frac{2}{3}} - R_0)^6 dt^2 + \frac{1}{C_{\Sigma_{10}}^2 (r^{\frac{2}{3}} - R_0)^6} dr^2 + \frac{r^2}{C_{\Sigma_{10}}^2 (r^{\frac{2}{3}} - R_0)^6} d\phi^2 + \frac{1}{C_{\Sigma_{10}}^2 (r^{\frac{2}{3}} - R_0)^6} dz^2 \quad (4.154)$$

şeklindedir.

#### 4.3.2. diag (A, 1/A, M, $\alpha_0$ M) Tipi Silindirik Simetrik Çözümler

Lemos'un çalışmasında [2] Einstein denklemlerinin çözümü olduğunu ifade ettiği metriğin genel formu

$$ds^2 = -A(r)^2 dt^2 + \frac{1}{A(r)^2} dr^2 + M(r)^2 d\phi^2 + \alpha_0^2 M(r)^2 dz^2 \quad (4.155)$$

için  $(t, r, \phi, z)$  koordinatlarında tanımlı bir tetrad takımı seçilerek silindirik simetrik çözümler elde edilebilir. Burada kullanılacak uygun tetrad takımı küresel simetri durumundaki (4.55) tetrada benzer şekilde

$$e^i_v = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/A(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 M(r) \end{pmatrix} \quad (4.156)$$

olarak seçilebilir.

##### 4.3.2.1. Einstein Çerçevesi

Einstein çerçevesi Lagrangianı (4.3), silindirik simetrik (4.156) tetradı için

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EF} = -\alpha_0 \Big( & 2A^2 M_r^2 + 4A M A_r M_r + \frac{\omega}{F} A^2 M^2 \varphi_r^2 - 4 \frac{F'}{F} M \varphi_r M_r \\ & - 2 \frac{F'}{F} \frac{M^2}{A} A_r \varphi_r + \frac{3}{2} \left( \frac{F'}{F} \right)^2 A^2 M^2 \varphi_r^2 + M^2 U \Big) \end{aligned} \quad (4.157)$$

nokta-gibi Lagrangianına dönüşür. Bu Lagrangiana NSY uygulanıp  $M(r) = r$  kabul edildiğinde

$$\vec{N}_{11} = (-A, \varphi, M) \quad (4.158)$$

$$\vec{N}_{12} = (0, 3\varphi, 0) \quad (4.159)$$

için

$$F(\varphi) = f_0 e^{-\frac{\varphi_0}{2\varphi^2}} \quad \omega(\varphi) = \frac{\omega_0}{\varphi^2} F(\varphi) \quad U = 0 \quad (4.160)$$

eld edilir. Bu değerler birlikte kullanıldığında  $A(r)$  için

$$A(r) = \sqrt{\frac{K_9}{\alpha_0 r} - \frac{K_{10}}{\varphi^2}} \quad (4.161)$$

çözümü elde edilir. Bu çözüme karşılık gelen çizgi elemanı ise

$$ds^2 = -\left(\frac{K_9}{\alpha_0 r} - \frac{K_{10}}{\varphi^2}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(\frac{K_9}{\alpha_0 r} - \frac{K_{10}}{\varphi^2}\right)} dr^2 + r^2 d\phi^2 + \alpha_0^2 r^2 dz^2 \quad (4.162)$$

şeklinde olacaktır.

#### 4.3.3. Newman - Janis Prosedürü İle Elde Edilen Kerr - Newman Çözümü

##### 4.3.3.1. $diag(A^2, 1/A^2, M^2, M^2 \sin^2(\theta))$ Formundaki Metrikten Elde Edilen Çözüm

Önceki kısımlarda (4.55) türü tetrad için elde edilmiş olan (4.91) çözümünün  $\varphi = \sqrt{\frac{-3c_1}{2(1+\frac{Q^2}{r^2})}}$  ve  $\frac{\Sigma_8 - \Sigma_7}{6} = 2M$  için

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (4.163)$$

şeklinde Reissner - Nordström metriği olarak elde edilebileceği ifade edilmiştir.

Genel küresel simetrik statik bir metrikten eksenel simetrik bir metrik üretilmesi ilk defa Newman ve Janis'in [158] Schwarzschild çözümünden Kerr çözümünü elde etmesi ile gerçekleşmiştir. Aynı prosedür uygulanarak küresel simetrik (4.163) Reissner - Nordström metriğinden eksenel simetrik Kerr - Newman çözüm elde edilebilmektedir. Bilindiği gibi Kerr - Newman çözümü elektriksel yükün olmadığı durumda ( $Q = 0$ ) Kerr çözümüne, dönmenin olmadığı durumda ( $a = 0$ ) Reissner-Nordström çözümüne her ikisinin de olmadığı durumda Schwarzschild çözümüne indirgenebildiğinden bahsi geçen çözümlerin en genel halidir. Detayları EK-1'de yer alan prosedürün temel prensibi kaynak metriği kompleks boş

(null) tetradlar cinsinden yazarak kompleks bir dönüşüm altında eksenel simetrik bir çözüm elde etme esasına dayanmaktadır. Bu prosedür gerçekleştirildiğinde (4.163) metriği

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2Mr-Q^2}{\Sigma} & 1 & 0 & a \sin^2(\theta) \frac{2Mr-Q^2}{\Sigma} \\ . & 0 & 0 & a \sin^2(\theta) \\ . & . & -\Sigma & 0 \\ . & . & . & -\sin^2(\theta) \frac{(r^2+a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma} \end{pmatrix} \quad (4.164)$$

halini alır [159]. Burada  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2(\theta)$  ve  $\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr + Q^2$ 'dir. Metrik simetrik olduğundan matristeki noktalar simetrik değerlerine eşittir. Çapraz terimlerin minimize edildiği Boyer - Lindquist koordinatlarında (4.164) metriği

$$ds^2 = \frac{\Delta - a^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma} dt^2 + (r^2 + a^2 - \Delta) \frac{2a \sin^2(\theta)}{\Sigma} dt d\phi \\ + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 - \sin^2(\theta) \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma} d\phi^2 \quad (4.165)$$

şeklinde ifade edilir [159].

#### 4.4. KARADELİK ÇÖZÜMLERİ

Önceki kısımda elde edilen tam çözümlerin hangi koşullar altında karadelik çözümlerine tekabül ettikleri bu kısımda incelenecektir. Bunun için öncelikle elde edilen tetrad çözümleri metrik formda yazılarak metriğin ıraksadığı durumlar tespit edilmelidir.

Takip eden kısımlarda ıraksama durumlarının gerçek tekillik mi yoksa koordinat tekiliği mi olduğunu ayırt etmek için Kretschmann, Ricci ve burulma skalerleri hesaplanarak çözümlere ait olay ufku ve Killing ufku yüzeylerinin bulunup bulunmadığı belirlenecektir.

#### 4.4.1. Küresel Simetrik Karadelikler

##### 4.4.1.1. *diag (A, B, M, M sin(θ)) Formundaki Küresel Simetrik Çözümler*

Bu genel form için çözümlerden elde edilen çizgi elemanı (4.34),  $r = 0$  ve  $r = r_0$ 'da tekildir. Hesaplanan Kretschmann skaleri

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{8r^{2u-8}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)^8 u^2}{K_2^2} - \frac{8r^{2u-8}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)^7 u^2}{K_2^2} + \frac{4r^{2u-8}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)^6 u^2}{K_2^2} - \frac{8r^{2u-8}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)^8 u}{K_2^2} + \frac{16r^{2u-8}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)^7 u}{K_2^2} + \frac{12r^{2u-8}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)^8}{K_2^2} - \frac{32r^{2u-8}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)^7}{K_2^2} + \frac{32r^{2u-8}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)^6}{K_2^2} - \frac{8r^{u-6}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)^4}{K_2} + \frac{4}{r^4} \quad (4.166)$$

Ricci skaleri ise

$$R = \frac{2\left(r^u \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)^4 u - r^u \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)^3 u - r^u \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)^4 + 4r^u \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)^3 - K_2 r^2\right)}{K_2 r^4} \quad (4.167)$$

ve burulma skaleri

$$T = \frac{2(u-1)r^u \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)^4}{K_2 r^4} \quad (4.168)$$

olarak elde edilmiş, neticede  $u < 4$  için  $r = 0$ 'da gerçek tekillik,  $r = r_0$ 'da ise koordinat tekiliği olduğu anlaşılmıştır. Koordinat tekiliği  $r = r_0$ 'da  $g_{rr}$ 'yi tekil yapan yüzey olup bu yüzey bir olay ufku ifade etmektedir.

##### 4.4.1.2. *diag (A, 1/A, M, M sin(θ)) Formundaki Küresel Simetrik Çözümler*

##### *Jordan Çerçevesi*

Jordan çerçevesi için farklı  $F(\varphi)$ ,  $\omega(\varphi)$  ve  $V(\varphi)$  konfigürasyonlarında bulunan iki çözümden ilki (4.70) NSY ile bulunmuştur. Bu çözüm  $r = 0$ 'da tekildir. Bu çözüm için bir ufuk bulunup

bulunmayacağını irdelemek adına  $g_{tt}$  ve  $g_{rr}$ ,  $s \gtrsim 0$  ve  $s \approx 0$ , için McLaurin serisine açılırsa

$$g_{tt} \approx -K_3(1 - s \ln r) \quad (4.169)$$

$$g_{rr} \approx \frac{K_4}{1 - s \ln r} \quad (4.170)$$

elde edilecektir. Bu duruma karşılık gelen yeni metrik

$$ds^2 = -K_3(1 - s \ln r)dt^2 + \frac{K_4}{1 - s \ln r}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin(\theta)^2 d\phi^2 \quad (4.171)$$

$r = 0$  ve  $r = e^{\frac{1}{s}}$  için tekildir. Sırasıyla Kretschmann, Ricci ve burulma skalerlerinin

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{4K_4^2 + (8 \ln(r) s - 8) K_4 + (4 \ln(r)^2 + 5) s^2 - 8 \ln(r) s + 4}{r^4 K_4^2} \quad (4.172)$$

$$R = \frac{2K_4 + 2 \ln(r) s + 3s - 2}{r^2 K_4} \quad (4.173)$$

$$T = \frac{(2 \ln(r) + 2) s - 2}{K_4 r^2} \quad (4.174)$$

şeklinde hesaplanması sonucunda  $r = e^{\frac{1}{s}}$  değeri olay ufkuna tekabül eden bir koordinat tekiliği halini almaktadır. Bu değer aynı zamanda  $g_{tt}$ 'nin sıfırlanıp işaret değiştirdiği değer olduğundan bu değere tekabül eden yüzey aynı zamanda bir Killing ufkudur.

İkinci çözüm Euler - Lagrange denklemlerinin doğrudan çözülmesiyle elde edilmiştir. Bu çözüme karşılık gelen metrik (4.78)  $r$  için iki değerde tekildir. Bu değerler  $r = 0$ ,  $r = R_0$  değerleridir. Eğrilik ve burulma invariantları

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{12R_0^2}{r^6} \quad (4.175)$$

$$R = 0 \quad (4.176)$$

$$T = -\frac{2}{r^2} \quad (4.177)$$

şeklinde hesaplanarak  $r = 0$ 'da gerçek tekilik,  $r = R_0$ 'da ise hem Killing ufku hem olay ufku bulunduğu görülmektedir.

### ***Einstein Çerçevesi***

Çözümler kısmında elde edilen (4.91) çözümü  $\varphi$ 'nin

$$\varphi(r) = 3\sqrt{\frac{c_1 r}{\Sigma_7 - \Sigma_8}} \quad (4.178)$$

durumu için tekildir. Ancak bu tekillik durumu bir  $r$  değerine tekabül etmez. Dolayısı ile bir ufuk ifade etmemektedir. Bunun yanında  $\varphi$ 'nin üzerinde bir koşulun bulunmadığı genel durumda

$$r = \frac{\varphi^2}{9} \sqrt{\frac{\Sigma_7 - \Sigma_8}{c_1}} \quad (4.179)$$

yarıçapı  $\varphi$ 'nin farklı fonksiyonel durumlarına göre konumu parametrize edilebilen bir yüzey ailesidir.

### **4.4.2. Eksenel Simetrik Karadelikler**

#### ***4.4.2.1. diag (A, C, M, C) Tipi Silindirik Simetrik Çözümler***

Jordan çerçevesi çözümü (4.116) için  $v, w > 0$  için  $r = 0$ 'da bir fiziksel tekillik olduğu görülmektedir. Bu tekilliği gizleyecek herhangi bir ufuk bulunmadığından bu metrik  $r = 0$ 'da çıplak bir tekilliğe sahiptir.

Einstein çerçevesinde de durum Jordan çerçevesine benzer şekilde  $r = 0$ 'da bir çıplak tekillik olacak şekildedir. Bu metrik için eğrilik invariantlarının genel yapısı incelendiğinde metriğin daha özel durumları için ufuk elde edilebileceği görülmüş olup bu özel durumlar araştırılarak (4.124) çözümü elde edilmiştir.

### ***Jordan Çerçevesi Lagrangianı için diag (A, 1/A, M, 1/A) Formunda Çözüm***

Çizgi elemanı (4.124) göz önüne alındığında bu uzay-zamanın  $r = r_0$ 'da tekil olduğu görülmektedir. Bu çözüme ait eğrilik ve burulma invariantları

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{12k^4 (r_0^2 + r^2)}{r^2} \quad (4.180)$$

$$R = -\frac{2k^2 (r_0 + r)}{r} \quad (4.181)$$

$$T = -\frac{4k^2 r_0 + 2k^2 r}{r} \quad (4.182)$$

şeklinde hesaplanmıştır. Bu durumda gerçek tekiliğin  $r = 0$ 'da olduğu görülmektedir. Bunun yanında  $r = r_0$ 'da  $g_{rr}$  ıraksadığı ve  $g_{tt}$  işaret değiştirdiğinden bu yüzey hem Killing ufku hem olay ufkunun bulunduğu yüzeydir.

#### **Genel $f(T)$ Lagrangianı için $diag(A, 1/A, M, 1/A)$ Formunda Çözümler**

Bu kapsamda bulunan birinci çözüm  $f(T) = T$  durumu için bulunan ve (4.152) çizgi elemanını veren çözümdür. Bu çözüm için Kretschmann, Ricci ve burulma invariantları sırasıyla

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{8k_{\Sigma_{10}}^4 \left( 2r_0^2 + (2 - 4\ln(r)) r_0 + 2\ln(r)^2 - 2\ln(r) + 3 \right)}{r^4} \quad (4.183)$$

$$R = -4 \frac{k_{\Sigma_{10}}^2}{r^2} \quad (4.184)$$

$$T = \frac{2k^2}{r^2} \quad (4.185)$$

olarak hesaplanmıştır. Buradan gerçek tekiliğin  $r = 0$ 'da bulunduğu görülmektedir. Bu durumda  $r = e^{r_0}$  hem Killing hem olay ufkunun bulunduğu yüzeyi temsil etmektedir.

$f(T) = f_0 T^2$  durumu için elde edilen çözüm ele alındığında eğrilik invariantları

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{128 C_{\Sigma_{10}}^4 \left( r^{\frac{2}{3}} - R_0 \right)^8 \left( R_0^2 + 2r^{\frac{2}{3}} R_0 + 6r^{\frac{4}{3}} \right)}{3r^{\frac{8}{3}}} \quad (4.186)$$

$$R = -\frac{8C_{\Sigma_{10}}^2 \left( R_0 - r^{\frac{2}{3}} \right)^4 \left( r^{\frac{1}{3}} R_0 + 3r \right)}{3r^{\frac{5}{3}}} \quad (4.187)$$

olarak elde edilir. Bu durumda gerçek tekiliğin  $r = 0$ 'da bulunduğu anlaşılmaktadır. Dolayısı ile  $r = R_0^{\frac{3}{2}}$  hem olay ufku hem Killing ufkunun bulunduğu yüzeyi ifade etmektedir.

#### **4.4.2.2. $diag(A, 1/A, M, \alpha_0 M)$ Tipi Silindirik Simetrik Çözümler**

Lemos'un statik silindirik çözümü [2] için yazılan genel bir formdan yola çıkılarak elde edilen (4.162) çözümünün  $\phi = \frac{-K_{10}^{1/2}}{\alpha_0 r}$  durumu için Lemos'un statik çözümüne tekabül ettiği

kolaylıkla görülebilir. Bunun yanında

$$r = \frac{\varphi^2 K_9}{\alpha_0 K_{10}} \quad (4.188)$$

durumu  $\varphi$ 'nin farklı fonksiyonel durumlarına karşılık gelen bir yüzeyler kümesini ifade eder. Bunun haricinde  $\varphi = \sqrt{\frac{K_{10} \alpha_0 r}{K_9}}$  durumu için çözüm tekildir. Ancak  $\varphi$ 'nin bu durumu bütün  $r$  değerleri için tekil olduğundan bir ufuk ifade etmez.

#### 4.4.2.3. Kerr - Newman Çözümü

Önceki kısımda elde edilen Kerr - Newman çözümü (4.165) için Kretschmann invariantı

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{8}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^6} & \left( 6m^2(r^6 - 15a^2 r^4 \cos^2 \theta + 15a^4 r^2 \cos^4 \theta - a^6 \cos^6 \theta) \right. \\ & - 12mQ^2 r(r^4 - 10a^2 r^2 \cos^2 \theta + 5a^4 \cos^4 \theta) \\ & \left. + Q^4(7r^4 - 34a^2 r^2 \cos^2 \theta + 7a^4 \cos^4 \theta) \right) \end{aligned} \quad (4.189)$$

şeklinde hesaplanmıştır [160]. Bu çözüm GG bağlamında çokça bilinen özelliklere sahiptir. Hesaplanan eğrilik invariantına bakıldığında halka şeklinde bir gerçek tekillik bulunduğu görülmektedir. Olay ufkunun belirlenmesi için  $g_{rr}$ 'yi tekil yapan iç ve dış olay ufukları sadece  $r > 0$  ve  $M^2 \geq a^2 + Q^2$  için mevcut olup

$$r_{ufuk\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2} \quad (4.190)$$

olarak hesaplanmıştır.  $g_{tt}$ 'nin sıfır olduğu iç ve dış yüzeylerde Killing ufku ile ergoküreler (ergosphere) çakışık olup bu yüzeyler

$$r_{ergo\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2(\theta) - Q^2} \quad (4.191)$$

olacak şekilde konumlanmaktadır.

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada  $f(T)$  kuramının küresel ve eksenel simetrik çözümleri elde edilmiştir. Burada  $f(T)$  Lagrangianı skaler-tensör formunda yazılarak elde edilen Jordan çerçevesi Lagrangianı konformal dönüşümle Einstein çerçevesine dönüştürülmüştür. Einstein çerçevesinden kasıt Einstein tensörünün skaler alandan ayrıştırılmasıdır [156]. Elde edilen Einstein çerçevesi beklenildiği gibi skaler alan kısmı ile tensörel kısmın tamamen ayrıştığı bir formda olmayıp skaler alan ve burulma tensörü arasında minimal olmayan çiftlenim bulunmaktadır. Bundan dolayı bazı araştırmacılar elde edilen çerçevenin bir Einstein çerçevesi olmadığını ileri sürmektedirler [154].

Gerek genel  $f(T)$  Lagrangianı gerekse skaler - tensör eşdeğeri Jordan ve Einstein çerçevesi Lagrangianlarından elde edilen alan denklemlerinin çözümü oldukça zordur. Çözüm yöntemi olarak öncelikle alan Lagrangianı bazı çözüm formları varsayılarak nokta-gibi Lagrangiana dönüştürülmüş, NSY ve Euler-Lagrange denklemleri kullanılarak çözümler elde edilmiştir. Çözümler aranırken Einstein denklemlerinin literatürde bilinen genel çözüm formlarından yola çıkılmıştır. Eksenel simetrik çözümlerde statik silindirik simetrik çözüm formları tercih edilmiştir [1, 2]. Çözümlerin çoğunluğu skaler-tensör formundaki  $f(T)$  Lagrangianları üzerinden gerçekleştirilmiş olsa da standart  $f(T)$  Lagrangianı için de Prasanna'nın çalışmasında [1] yer alan türde metrik için çözümler elde edilmiştir. Buradakine benzer şekilde skaler - tensör eşdeğer formun her iki çerçevesi için de nokta-gibi Lagrangianlara NSY uygulanarak, bazı Lagrangianlar için de NSY'na ek olarak Euler - Lagrange denklemlerinin çözülmesiyle elde edilmiştir. Bunun için küresel simetrik ve silindirik simetrik köşegen metrikleri üretebilen köşegen tetradlar kullanılmıştır. Köşegen tetradlar genel olarak  $f(T)$  kuramı alan denklemlerini sağlamamakla beraber denklemleri sağlayan ve genel olarak köşegen olmayan tetradlara bir Lorentz dönüşümü ile bağlıdır. Öte yandan çözümlerin karadelik çözümleri bağlamında incelenmesi aşamasında metrik formalizme geçildiğinden ve iki tetrad aynı metriğin kökleri olduğundan fiziksel anlam bakımından köşegen tetradla köşegen olmayanın eşdeğer olduğu söylenebilir.

NSY kullanılarak korunan büyüklükler elde edilmiş, bu korunan büyüklükler cinsinden tam çözümlere ulaşılmıştır. Elde edilen nokta-gibi Lagrangianlarda her iki tetrad için de Einstein

çerçevesi Lagrangianları daha karmaşık olduğundan bu çerçevede çözümlere ulaşmak daha zor olmuştur. NSY kullanımının genel avantajı tetrad potansiyellerini korunan büyüklükler cinsinden ifade ederek birinci derece denklemlerin çözülebilmesidir. Aynı Lagrangian için Euler-Lagrange denklemleri ise ikinci dereceden denklemlerdir. Çözümün daha zor olmasına rağmen belirli çözümlerden yola çıkılarak bu çözümün mümkün olduğu  $F(\varphi)$ ,  $\omega(\varphi)$  ve  $V(\varphi)$  fonksiyonel formlarının bulunması aşamasında Euler - Lagrange denklemlerinin kullanılması daha uygundur.

$f(T)$  kuramın öngördüğü karadelik mekaniği üzerinde gerçekleştirilecek çalışmalar bu tez kapsamında bulunan karadelik çözümleri için tamamlayıcı nitelikte olacaktır. Buradan hareketle gelecek projeksiyonu olarak  $f(T)$  karadelikleri için entropi hesaplarının gerçekleştirilmesi, elde edilen çözümlerin karadelik mekaniği bağlamında anlamlandırılmasını sağlayacaktır.

## KAYNAKLAR

- [1]. Prasanna A. R., 1975, Static cylinder of perfect fluid with nonzero spin density, *Phys. Rev. D* 11, 2083.
- [2]. Lemos J., 1995, Cylindrical black hole in general relativity, *Phys. Lett. B*, 353, 46-51.
- [3]. Weyl H., 1919, A new extension of relativity theory, *Ann. Phys.*, 59, 101-133.
- [4]. Kaluza T., 1921, Zum unitätsproblem der physik, *Int. J. Mod. Phys. D*, 27, no.14, 1870001.
- [5]. Brans C. H., 2010 Varying Newton's constant: A personal history of scalar-tensor theories *Einstein Online* Vol. 04, 1002.
- [6]. Dirac P. A. M., 1938, A New Basis for Cosmology, *Proc. Roy. Soc.* A165, 199.
- [7]. Sciama D. W., 1953, On the Origin of Inertia, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, 113, 1, 34-42.
- [8]. Jordan P., 1955, *Schwerkraft und Weltall*, Vieweg, Braunschweig.
- [9]. Brans C. H. and Dicke R. H., 1961, Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation, *Phys. Rev.* 124, 925.
- [10]. Bertotti, B., Iess, L., ve Tortora, P., 2003, A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft, *Nature*, 425, 374-376.
- [11]. A. Unzicker ve T. Case, 2005, Translation of Einstein's attempt of a unified field theory with teleparallelism, *arXiv:physics/0503046 [physics]*.
- [12]. Weitzenböck, R., 1923, *Invarianten Theorie*, (Nordho, Groningen).
- [13]. Møller, C., 1961, Conservation laws and absolute parallelism in general relativity. *Mat. Fys. Dan. Vid. Selsk.* 1, 1-50.
- [14]. Møller, C., 1961, Further remarks on the localization of the energy in the general theory of relativity. *Ann. Phys.* 12, 118-133.
- [15]. Pellegrini, C. ve Plebanski, J., 1963 Tetrad fields and gravitational fields. *Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk.* 2, 1-39.
- [16]. Arcos H. I. ve Pereira J. G., 2004, Torsion gravity: A Reappraisal, *Int. J. Mod. Phys. D* 13, 2193.
- [17]. Kobayashi S. ve Nomizu K., 1996, *Foundations of Differential Geometry Vol. 1*, (Wiley Classics Library. Wiley, 2nd ed.)
- [18]. Utiyama R., 1956, Invariant theoretical interpretation of interaction, *Phys. Rev.* 101, 1597.

- [19]. Aldrovandi R., Pereira J. G. ve Vu K. H., 2004, Gravitation without the equivalence principle, *Gen. Rel. Grav.* 36, 101.
- [20]. Utiyama R. ve DeWitt B. S., 1962, Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields, *J. Math. Phys.*, 3, 608–618.
- [21]. Stelle K. S., 1977, Renormalization of higher derivative quantum gravity, *Phys. Rev.*, D16, 953–969.
- [22]. Weinberg S., 1989, The cosmological constant problem, *Rev. Mod. Phys.* 61, 1.
- [23]. Adler R. J., Casey B. ve Jacob O. C., 1995, Vacuum catastrophe: An Elementary exposition of the cosmological constant problem, *Am. J. Phys.*, 63, 620.
- [24]. Nojiri S. ve Odintsov S. D., 2007, Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* 4, 115.
- [25]. Moore B., Ghigna S., Governato F., Lake G., Quinn T. R., Stadel J. ve Tozzi P., 1999, Dark matter substructure within galactic halos, *Astrophys. J.* 524, L19.
- [26]. Mateo M., 1998, Dwarf galaxies of the Local Group, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 36, 435.
- [27]. Frolov A. V., 2008, A Singularity Problem with  $f(R)$  Dark Energy, *Phys. Rev. Lett.* 101, 061103.
- [28]. S. A. Appleby, R. A. Battye, ve A. A. Starobinsky., 2010 Curing singularities in cosmological evolution of  $f(R)$  gravity. *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 6:5, 0909.1737.
- [29]. Dolgov A. D. ve Kawasaki M., 2003, Can modified gravity explain accelerated cosmic expansion?, *Phys. Lett. B* 573, 1.
- [30]. Faraoni V., 2008,  $f(R)$  gravity: Successes and challenges, *arXiv:0810.2602 [gr-qc]*.
- [31]. Arnowitt, R., Deser, S., Misner, C., 1959, Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity. *Phys. Rev.* 116 (5): 1322–1330.
- [32]. Lanahan-Tremblay N. ve Faraoni V., 2007, The Cauchy problem of  $f(R)$  gravity, *Class. Quant. Grav.* 24, 5667.
- [33]. Faraoni V. ve Lanahan-Tremblay N., 2008, Breakdown of the initial value formulation of scalar-tensor gravity and its physical meaning, *Phys. Rev. D* 78, 064017.
- [34]. Sotiriou T. P. ve Faraoni V., 2010,  $f(R)$  Theories Of Gravity, *Rev. Mod. Phys.* 82, 451.
- [35]. Clifton T., Ferreira P. G., Padilla A. ve Skordis C., Modified gravity and cosmology, 2012, *Phys. Rept.* 513, 1.
- [36]. Chernikov, N. A., ve Tagirov, E. A., 1968, Quantum theory of scalar fields in deSitter space-time. *Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor.*, A9, 109.

- [37]. Callan, C. G., Jr., Coleman, S. R., ve Jackiw, R., 1970, A New improved energy - momentum tensor. *Ann. Phys.*, 59 , 42-73.
- [38]. Birrell, N. D., ve Davies, P. C. W., 1980. Conformal Symmetry Breaking and Cosmological Particle Creation in  $\lambda\phi^4$  Theory. *Phys. Rev.*, D22, 322.
- [39]. Ford, L. H., 1987, Gravitational particle creation and inflation. *Phys. Rev.*, D35, 2955.
- [40]. Martin, J., Ringeval, C., Trota, R., ve Vennin, V., 2014, The best inflationary models after Planck. *JCAP*, 1403 , 039.
- [41]. Copeland, E. J., Sami, M., ve Tsujikawa, S., 2006, Dynamics of dark energy. *Int.J. Mod. Phys.*, D15, 1753-1936.
- [42]. Ratra, B., ve Peebles, P. J. E., 1988, Cosmological Consequences of a Rolling Homogeneous Scalar Field, *Phys. Rev. D* 37, 3406.
- [43]. Wetterich, C., 1988, Cosmology and the Fate of Dilatation Symmetry. *Nucl. Phys.*, B302, 668-696.
- [44]. Zlatev, I., Wang, L.-M., ve Steinhardt, P. J., 1999, Quintessence, cosmic coincidence and the cosmological constant. *Phys. Rev. Lett.*, 82 , 896-899.
- [45]. Eddington, A. S., *The Mathematical Theory of Relativity*, (Cambridge University Press, London, 1923)
- [46]. Lovelock D., 1971, The Einstein tensor and its generalizations, *J. Math. Phys.* 12, 498.
- [47]. Lovelock D., 1972, The four-dimensionality of space and the einstein tensor, *J. Math. Phys.* 13, 874.
- [48]. Buchdahl H. A., 1970, Non-linear Lagrangians and cosmological theory, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 150, 1.
- [49]. Starobinsky A.A., 1980, A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity, *Phys. Lett. B* 91, 99.
- [50]. De Felice A. ve Tsujikawa S., 2010,  $f(R)$  theories, *Living Rev. Rel.* 13, 3.
- [51]. Capozziello S., 2002, Curvature quintessence, *Int. J. Mod. Phys. D* 11, 483.
- [52]. Capozziello S., Cardone V. F., Carloni S. ve Troisi A., 2003, Curvature quintessence matched with observational data, *Int. J. Mod. Phys. D* 12, 1969.
- [53]. Nojiri S. ve Odintsov S. D., 2003, Where new gravitational physics comes from: M-Theory? *Phys. Lett. B* 576, 5.
- [54]. Boehmer C. G., Harko T. ve Lobo F. S. N., 2008, Dark matter as a geometric effect in  $f(R)$  gravity, *Astropart. Phys.* 29, 386.
- [55]. Usman M., 2016, On the dark matter as a geometric effect in  $f(R)$  gravity, *Gen. Rel. Grav.* 48, no. 11, 147.

- [56]. Poplawski N. J., 2006, Acceleration of the Universe in Einstein frame of a metric affine  $f(R)$  gravity *Class. Quant. Grav.* 23, 2011.
- [57]. Nunez A. ve Solganik S., 2004, The Content of  $f(R)$  gravity, *arXiv:hep-th/0403159*.
- [58]. Comelli D., 2005, Born-Infeld-type gravity, *Phys. Rev. D* 72, 064018.
- [59]. Ishak M. ve Moldenhauer J., 2009, A minimal set of invariants as a systematic approach to higher order gravity models, *JCAP* 0901, 024.
- [60]. Carroll S. M., De Felice A., Duvvuri V., Easson D. A., Trodden M. ve Turner M. S., 2005, The Cosmology of generalized modified gravity models, *Phys. Rev. D* 71, 063513.
- [61]. Calcagni G., Tsujikawa S. ve Sami M., 2005, Dark energy and cosmological solutions in second-order string gravity, *Class. Quant. Grav.* 22, 3977 (2005)
- [62]. Sami M., Toporensky A., Tretjakov P. V. ve Tsujikawa S., 2005, The Fate of (phantom) dark energy universe with string curvature corrections, *Phys. Lett. B* 619, 193.
- [63]. Nojiri S., Odintsov S. D. ve Gorbunova O. G., 2006, Dark energy problem: From phantom theory to modified Gauss - Bonnet gravity, *J. Phys. A* 39, 6627.
- [64]. de la Cruz-Dombriz A. ve Saez-Gomez D., 2012, On the stability of the cosmological solutions in  $f(R, G)$  gravity, *Class. Quant. Grav.* 29, 245014.
- [65]. Atazadeh K. ve Darabi F., 2014, Energy conditions in  $f(R, G)$  gravity, *Gen. Rel. Grav.* 46, 1664.
- [66]. Gasperini M. ve Veneziano G., 1993, Pre - big bang in string cosmology, *Astropart. Phys.* 1, 317.
- [67]. Gasperini M., Maggiore M. ve Veneziano G., 1997, Towards a nonsingular pre - big bang cosmology, *Nucl. Phys. B* 494, 315.
- [68]. Carter B. M. N. ve Neupane I. P., 2006, Towards inflation and dark energy cosmologies from modified Gauss - Bonnet theory, *JCAP* 0606, 004.
- [69]. Carter B. M. N. ve Neupane I. P., 2006, Dynamical relaxation of dark energy: A Solution to early inflation, late-time acceleration and the cosmological constant problem, *Phys. Lett. B* 638, 94.
- [70]. Nojiri S., Odintsov S. D. ve Sasaki M., 2005, Gauss - Bonnet dark energy, *Phys. Rev. D* 71, 123509.
- [71]. Mignemi S. ve Stewart N. R., 1993, Charged black holes in effective string theory, *Phys. Rev. D* 47, 5259.
- [72]. Mignemi S., 1995, Dyonic black holes in effective string theory, *Phys. Rev. D* 51, 934.
- [73]. Alexeev S. O. ve Pomazanov M. V., 1997, Black hole solutions with dilatonic hair in higher curvature gravity, *Phys. Rev. D* 55, 2110.

- [74]. Schmidt H. J., 2006, Fourth order gravity: Equations, history, and applications to cosmology, *eConf* C0602061, 12.
- [75]. Gottlober S., Muller V. ve Schmidt H. J., 1990, Inflation from  $R^3$  and  $RR$  terms revisited, *PRE-ZIAP* 90-16.
- [76]. Berkin A. L. ve Maeda K., 1990, Effects of  $R^3$  and  $RR$  terms on  $R^2$  inflation. *Phys. Lett. B*, 245:348-354.
- [77]. Berkin A. L. ve Maeda K., 1991, Inflation in generalized Einstein theories. *Phys. Rev. D*, 44:1691-1704.
- [78]. L. Amendola, A. Battaglia Mayer, S. Capozziello, F. Occhionero, S. Gottloeber, V. Muller ve H. J. Schmidt, *Class. Quant. Grav.* **10**, L43 (1993).
- [79]. Nesseris S. ve Mazumdar A., 2009, Newton's constant in  $f(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, \square R)$  theories of gravity and constraints from BBN, *Phys. Rev. D* 79, 104006.
- [80]. T. Koivisto, 2008, Dynamics of Nonlocal Cosmology, *Phys. Rev. D* 77, 123513.
- [81]. Koivisto T. S., 2008, Newtonian limit of nonlocal cosmology, *Phys. Rev. D* 78, 123505.
- [82]. Jhingan S., Nojiri S., Odintsov S. D., ve diğ., 2008, Phantom and non-phantom dark energy: The Cosmological relevance of non-locally corrected gravity, *Phys. Lett. B* 663, 424.
- [83]. Deffayet C. ve Woodard R. P., 2009, Reconstructing the Distortion Function for Nonlocal Cosmology, *JCAP* 0908, 023.
- [84]. Nojiri S. ve Odintsov S. D., 2007, Modified gravity and its reconstruction from the universe expansion history, *J. Phys. Conf. Ser.* 66, 012005.
- [85]. Nojiri S. ve Odintsov S. D., 2007, Unifying inflation with LambdaCDM epoch in modified  $f(R)$  gravity consistent with Solar System tests, *Phys. Lett. B* 657, 238.
- [86]. Dimitrijevic I., Dragovich B., Grujic J., ve diğ., 2015, Cosmology of modified gravity with a non-local  $f(R)$ , *arXiv:1509.04254 [hep-th]*.
- [87]. Deser S. ve Woodard R. P., 2007, Nonlocal Cosmology, *Phys. Rev. Lett.* 99, 111301.
- [88]. Soussa M. E. ve Woodard R. P., 2003, A Nonlocal metric formulation of MOND, *Class. Quant. Grav.* 20, 2737.
- [89]. Nojiri S. ve Odintsov S. D., 2008, Modified non-local  $f(R)$  gravity as the key for the inflation and dark energy, *Phys. Lett. B* 659, 821.
- [90]. Bertolami O., Boehmer C. G., Harko T. ve Lobo F. S. N., 2007, Extra force in  $f(R)$  modified theories of gravity, *Phys. Rev. D* 75, 104016.
- [91]. Harko T., Lobo F. S. N., Nojiri S. ve Odintsov S. D., 2011,  $f(R, T)$  gravity, *Phys. Rev. D* 84, 024020.

- [92]. Houndjo M. J. S., 2012, Reconstruction of  $f(R, T)$  gravity describing matter dominated and accelerated phases, *Int. J. Mod. Phys. D* 21, 1250003.
- [93]. Jamil M., Momeni D., Raza M. ve Myrzakulov R., 2012, Reconstruction of some cosmological models in  $f(R, T)$  gravity, *Eur. Phys. J. C* 72, 1999.
- [94]. Alvarenga F. G., de la Cruz-Dombriz A., Houndjo M. J. S., ve diğ., 2013, Dynamics of scalar perturbations in  $f(R, T)$  gravity, *Phys. Rev. D* 87, 10, 103526.
- [95]. Weyl H., 1918, Gravitation and electricity, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* 465.
- [96]. Mannheim P. D., ve Kazanas D., 1989, Exact vacuum solution to conformal weyl gravity and galactic rotation curves, *Astrophys. J.* 342, 635–638.
- [97]. Mannheim P. D., 2007, Solution to the ghost problem in fourth order derivative theories, *Found. Phys.* 37, 532.
- [98]. Mannheim P. D., 2006, Alternatives to dark matter and dark energy, *Prog. Part. Nucl. Phys.* 56, 340.
- [99]. Mannheim P. D., 2012, Making the Case for Conformal Gravity, *Found. Phys.* 42, 388.
- [100]. Yoon Y., 2013, Problems with Mannheim’s conformal gravity program, *Phys. Rev. D* 88, 027504.
- [101]. Deliduman C., Kaşıkçı O. ve Yapiskan B., 2015, Flat Galactic Rotation Curves from Geometry in Weyl Gravity, *arXiv:1511.07731 [gr-qc]*.
- [102]. Kaşıkçı O. ve Deliduman C., 2019, Gravitational Lensing in Weyl Gravity, *Phys. Rev. D* 100, 2, 024019.
- [103]. Nojiri S. ve Odintsov S. D., 2011, Unified cosmic history in modified gravity: from  $f(R)$  theory to Lorentz non-invariant models, *Phys. Rept.* 505, 59.
- [104]. Ferraro R. ve Fiorini F., 2007, Modified teleparallel gravity: Inflation without inflaton, *Phys. Rev. D* 75.
- [105]. Linder E.V., 2010, Einstein’s Other Gravity and the Acceleration of the Universe, *Phys. Rev. D* 81.
- [106]. Jamil M., Momeni D. ve Myrzakulov R., 2012, Resolution of dark matter problem in  $f(T)$  gravity, *Eur. Phys. J. C* 72, 2122.
- [107]. Tamanini, N., ve Boehmer, C. G., 2012, Good and bad tetrads in  $f(T)$  gravity. *Phys. Rev. D* 86, 044009.
- [108]. Bahamonde S., Camci U., Capozziello S. ve Jamil M., 2016, Scalar-Tensor Teleparallel Wormholes by Noether Symmetries, *Phys. Rev. D* 94, no. 8, 084042.
- [109]. B. Li, T. P. Sotiriou ve J. D. Barrow, 2011,  $f(T)$  gravity and local Lorentz invariance, *Phys. Rev. D* 83, 064035.

- [110]. Krššák M., van den Hoogen R. J., Pereira J. G. ve diğ., 2019, Teleparallel theories of gravity: illuminating a fully invariant approach, *Class. Quant. Grav.* 36, 18, 183001.
- [111]. Krššák M. ve Saridakis E. N., 2016, The covariant formulation of  $f(T)$  gravity, *Class. Quant. Grav.* 33, 11, 115009.
- [112]. Sotiriou T. P., Li B. ve Barrow J. D., 2011, Generalizations of teleparallel gravity and local Lorentz symmetry, *Phys. Rev. D* 83, 104030.
- [113]. Kolb, E. W., ve M. S. Turner, 1992, *The Early Universe* (Addison-Wesley, California).
- [114]. Linde, A., 1990, *Particle Physics and Inflationary Cosmology* (Harwood Academic Publishers, Switzerland).
- [115]. Misner, C. W., 1968, The Isotropy of the Universe, *Astrophys. J.* 151, 431.
- [116]. Weinberg, S., 1972, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley and Sons, United States of America).
- [117]. Mukhanov, V. F., 2004, Nucleosynthesis without a computer, *Int. J. Theor. Phys.* 43, 669-693.
- [118]. Bamba K., Nashed G. G. L., El Hanafy W. ve Ibraheem S. K., 2016, Bounce inflation in  $f(T)$  Cosmology: A unified inflaton-quintessence field, *Phys. Rev. D* 94, no. 8, 083513.
- [119]. Awad A., El Hanafy W., Nashed G. G. L. ve diğ., 2018, Constant-roll Inflation in  $f(T)$  Teleparallel Gravity, *JCAP* 1807, 026.
- [120]. Raatikainen S. ve Rasanen S., 2019, Higgs inflation and teleparallel gravity, *JCAP* 1912, no. 12, 021.
- [121]. Bahamonde S., Dialektopoulos K. F. ve Levi Said J., 2019, Can Horndeski Theory be recast using Teleparallel Gravity?, *Phys. Rev. D* 100, no. 6, 064018.
- [122]. Akbarieh A. R. ve Izadi Y., 2019, Tachyon Inflation in Teleparallel Gravity, *Eur. Phys. J. C* 79, no. 4, 366.
- [123]. Born M. ve Infeld L., 1934, Foundations of the new field theory, *Proc. R. Soc. A* 144, 425.
- [124]. Cai Y. F., Capozziello S., De Laurentis M. ve Saridakis E. N., 2016,  $f(T)$  teleparallel gravity and cosmology, *Rept. Prog. Phys.* 79, no. 10, 106901.
- [125]. Perlmutter S. *et al.* [Supernova Cosmology Project Collaboration], 1999, Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 high redshift supernovae, *Astrophys. J.* 517, 565.
- [126]. Riess A. G. *et al.* [Supernova Search Team], 1998, Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant, *Astron. J.* 116, 1009.
- [127]. Bengochea G. R. ve Ferraro R., 2009, Dark torsion as the cosmic speed-up, *Phys. Rev. D* 79 124019.

- [128]. Myrzakulov R., 2011, Accelerating universe from  $f(T)$  gravity, *Eur. Phys. J. C* 71, 1752.
- [129]. Melchiorri A. Luca Pagano, Stefania Pandolf., 2007, When did the acceleration start *Phys. Rev. D* 76, 041301(R).
- [130]. Rahaman F., Biswas R., Fatima H. I., Islam N., 2014, A New Proposal for Galactic Dark Matter: Effect of  $f(T)$  Gravity *Int. J. Theor. Phys.* **53** 370.
- [131]. Navarro J. F., Frenk C. S., White S. D. M., 1996, The Structure of Cold Dark Matter Halos, *Ap. J.* 463, 563.
- [132]. Bahamonde S. ve Capozziello S., 2017, Noether Symmetry Approach in  $f(T, B)$  teleparallel cosmology, *Eur. Phys. J. C* 77, no. 2, 107.
- [133]. Bahamonde S., Böhmer C. G. ve Krššák M., 2017, New classes of modified teleparallel gravity models, *Phys. Lett. B* 775, 37.
- [134]. Kofinas G. ve Saridakis E. N., 2014, Teleparallel equivalent of Gauss - Bonnet gravity and its modifications, *Phys. Rev. D* 90, 084044.
- [135]. Harko T., Lobo F. S. N., Otalora G. ve Saridakis E. N., 2014,  $f(T, \mathcal{T})$  gravity and cosmology, *JCAP* 1412, 021.
- [136]. Feng C. j., Ge F. f., Li X. z. ve diğ., 2015, Towards realistic  $f(T)$  models with nonminimal torsion-matter coupling extension, *Phys. Rev. D* 92, 10, 104038.
- [137]. Lin R. H., Zhai X. H. ve Li X. Z., 2017, Solar system tests for realistic  $f(T)$  models with non-minimal torsion-matter coupling, *Eur. Phys. J. C* 77, no. 8, 504.
- [138]. Myrzakulov R., 2012, Dark Energy in  $f(R, T)$  Gravity, *arXiv:1205.5266 [physics.gen-ph]*.
- [139]. Hayashi K. ve Shirafuji T., 1979, New General Relativity, *Phys. Rev. D* 19, 3524.
- [140]. Faraoni V., 2000, Inflation and quintessence with nonminimal coupling, *Phys. Rev. D* 62, 023504.
- [141]. Bertolami O. ve Martins P. J., 2000, Nonminimal coupling and quintessence, *Phys. Rev. D* 61, 064007.
- [142]. Geng C. Q., Lee C. C., Saridakis E. N. ve diğ., 2011, Teleparallel dark energy, *Phys. Lett. B* 704, 384.
- [143]. O' Hanlon J. 1972, Intermediate-Range Gravity: A Generally Covariant Model, *Phys. Rev. Lett.* 29 137–138.
- [144]. Olmo, G. J., 2007, Limit to general relativity in  $f(R)$  theories of gravity *Phys. Rev. D* 75, 023511.
- [145]. Flanagan E. E., 2003, Higher order gravity theories and scalar tensor theories, *Class. Quant. Grav.* 21, 417.
- [146]. Sotiriou T. P., 2006,  $f(R)$  gravity and scalar-tensor theory, *Class. Quant. Grav.* 23, 5117.

- [147]. Whitt B., 1984, Fourth-order gravity as general relativity plus matter, *Phys. Lett. B* 145, 176.
- [148]. J. D. Barrow ve S. Cotsakis, 1988, Inflation and the conformal structure of higher-order gravity theories, *Phys. Lett. B* 214 515.
- [149]. Flanagan E. E., 2004, The Conformal frame freedom in theories of gravitation, *Class. Quant. Grav.* 21, 3817.
- [150]. Capozziello S. ve Faraoni V. , *Beyond Einstein Gravity*, Springer, Dordrecht, Heidelberg, London, New York.
- [151]. Capozziello S., De Ritis R., Rubano C. ve diğ., 1996, Noether symmetries in cosmology, *Riv. Nuovo Cim.* 19N4 1.
- [152]. Capozziello S., De Laurentis M. ve Stabile A., 2010, Axially symmetric solutions in  $f(R)$  gravity *Class. Quant. Grav.*, 27, 16.
- [153]. Basilakos S., Capozziello S., De Laurentis M. ve diğ., 2013, Noether symmetries and analytical solutions in  $f(T)$ -cosmology: A complete study, *Phys. Rev. D* 88.
- [154]. Yang R. J., 2011, Conformal transformation in  $f(T)$  theories *EPL (Europhysics Letters)*, 93 6.
- [155]. Wright M., 2016, Conformal transformations in modified teleparallel theories of gravity revisited *Phys. Rev. D* 93.
- [156]. Capozziello S. -*e-posta yoluyla görüşme*
- [157]. Nurbaki A. N., Capozziello S. ve Deliduman C., 2020, Spherical and cylindrical solutions in  $f(T)$  gravity by Noether Symmetry Approach, *Eur. Phys. J. C* 80, no. 2, 108.
- [158]. Newman E. T. ve Janis A. I., 1965, Note on the Kerr SpinningParticle Metric, *J. Math. Phys.* 6 915.
- [159]. Brauer O., Camargo H. A. ve Socolovsky M., 2015, Newman-Janis Algorithm Revisited, *Int. J. Theor. Phys.* 54, no.1, 302-314.
- [160]. Henry R. C., Kretschmann scalar for a kerr-newman black hole, 2000 *Astrophys. J.* 535, 350.
- [161]. Newman E. T., Couch E., Chinnapared K. , Extton A.,Prakash A. ve diğ., 1965, Metric of a Rotating, Charged Mass, *J. Math. Phys.* 6 918.

## EKLER

### EK 1. Newman - Janis Algoritması ile Küresel Simetriden Eksenel Simetriye Geçiş

#### EK 1.1. Eddington-Finkelstein Formunun yazılması

Bu kısımda küresel simetrik çözümlerden başlayarak eksenel simetrik çözümler elde etmede kullanılan Newman - Janis algoritması [158, 161] tanıtılarak işleyişi ele alınacaktır. Prosedürün nasıl işlediğini göstermek adına örnek üzerinde durmak sağlıklı olacaktır. Öncelikle küresel simetrik bir çözüm  $g_{tt}(t, r) = A(r)^2$  ve  $g_{rr}(t, r) = B(r)^2$  olmak üzere

$$ds^2 = A(r)^2 dt^2 - B(r)^2 dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (1.1)$$

olsun. Prosedürü işletebilmek için bu çizgi elemanı  $(u, r, \theta, \phi)$  Eddington - Finkelstein koordinatlarında yazılmalıdır.

Bunun için zaman koordinati cinsinden bir boş (null) koordinat  $u$   $dt = du + F(r)dr$  şeklinde tanımlanmalı ve  $g_{rr}$  bileşeni elimine edilmelidir.  $F(r) = \frac{B(r)}{A(r)}$  şeklinde tanımlanarak bu dönüşüm uygulandığında çizgi elemanı (1.1)

$$ds^2 = A(r)^2 du^2 + 2A(r)B(r)dudr - r^2 d\Omega^2 \quad (1.2)$$

haline dönüşecektir. Bu çizgi elemanına tekabül eden metriğin kontravaryant bileşenleri

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{A(r)B(r)} & 0 & 0 \\ \frac{1}{A(r)B(r)} & -\frac{1}{B(r)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/(r^2 \sin^2 \theta) \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

şeklindedir.

### EK 1.2. Kompleks Boş Tetradlar Üzerinde Dönüşüm ve Yeni Metrik

Üst çizgi kompleks eşlenik olmak üzere  $l^\mu$ ,  $n^\mu$ ,  $m^\mu$  ve  $\bar{m}^\mu$  şeklinde dört adet boş tetrad (null tetrad),

$$l_\mu l^\mu = m_\mu m^\mu = n_\mu n^\mu = 0 \quad l_\mu n^\mu = -m_\mu \bar{m}^\mu = 1 \quad l_\mu m^\mu = n_\mu \bar{m}^\mu = 0 \quad (1.4)$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde tanımlandığında bu vektörler cinsinden kontravaryant metrik (1.3),

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + l^\nu n^\mu - m^\mu \bar{m}^\nu - m^\nu \bar{m}^\mu \quad (1.5)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada yapılması gereken şey uygun boş vektör takımını elde etmektir. Bu vektörler (1.3) için

$$\begin{cases} l^\mu = \delta_1^\mu \\ n^\mu = -\frac{1}{2} \frac{1}{B(r)^2} \delta_1^\mu + \frac{1}{A(r)B(r)} \delta_0^\mu \\ m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} (\delta_2^\mu + \frac{i}{\sin\theta} \delta_3^\mu) \\ \bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} (\delta_2^\mu - \frac{i}{\sin\theta} \delta_3^\mu) \end{cases} \quad (1.6)$$

şeklinde yazılabilir. Bu noktadan sonra Newman–Janis algoritmasının püf noktası devreye girmektedir. Koordinat fonksiyonları  $x^\mu = (u, r, \theta, \phi)$  kompleks değerli kabul edilerek bunlar üzerinde  $a$  bir sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= u + ia \cos \theta \\ \tilde{r} &= r - ia \cos \theta \\ \tilde{\theta} &= \theta \\ \tilde{\phi} &= \phi \end{aligned} \quad (1.7)$$

olacak şekilde kompleks bir dönüşüm uygulanacaktır. Bu noktada  $A(r)$  ve  $B(r)$  fonksiyonları için açık ifadeler kullanmak NJ algoritmasının sonuçlarını görmek açısından sağlıklı

olacaktır. Bu maksatla  $A(r)$  ve  $B(r)$  [152] takip edilerek

$$A(r) = e^{\phi(r)} \quad B(r) = e^{\lambda(r)} \quad (1.8)$$

şeklinde seçildiğinde (1.6) tetrad vektörleri (1.7) dönüşümü altında

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{l}^\mu = \delta_1^\mu \\ \tilde{n}^\mu = -\frac{1}{2}e^{-2\lambda(\tilde{r},\theta)}\delta_1^\mu + e^{-\lambda(\tilde{r},\theta)-\phi(\tilde{r},\theta)}\delta_0^\mu \\ \tilde{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(\tilde{r}-ia\cos\theta)} \left[ ia(\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) \sin\theta + \delta_2^\mu + \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu \right] \\ \tilde{\bar{m}}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(\tilde{r}+ia\cos\theta)} \left[ -ia(\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) \sin\theta + \delta_2^\mu - \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu \right] \end{array} \right. \quad (1.9)$$

şeklini alacaktır. Bu dönüştürülmüş tetradlardan (1.5) uyarınca yeni bir kontravaryant metrik

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma^2} & e^{-\lambda(\tilde{r},\theta)-\phi(\tilde{r},\theta)} + \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma^2} & 0 & -\frac{a}{\Sigma^2} \\ \cdot & -e^{-2\lambda(\tilde{r},\theta)} - \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma^2} & 0 & \frac{a}{\Sigma^2} \\ \cdot & \cdot & -\frac{1}{\Sigma^2} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{\Sigma^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

elde edilecektir. Burada  $\Sigma = \sqrt{\tilde{r}^2 + a^2 \cos^2 \theta}$ 'dır. Bu metrik kovaryant formda

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\phi(\tilde{r},\theta)} & e^{\lambda(\tilde{r},\theta)+\phi(\tilde{r},\theta)} & 0 & ae^{\phi(\tilde{r},\theta)}[e^{\lambda(\tilde{r},\theta)} - e^{\phi(\tilde{r},\theta)}] \sin^2 \theta \\ \cdot & 0 & 0 & -ae^{\phi(\tilde{r},\theta)+\lambda(\tilde{r},\theta)} \sin^2 \theta \\ \cdot & \cdot & -\Sigma^2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -[\Sigma^2 + a^2 \sin^2 \theta e^{\phi(\tilde{r},\theta)}(2e^{\lambda(\tilde{r},\theta)} - e^{\phi(\tilde{r},\theta)})] \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

halini alacaktır. Metrik simetrik olduğundan matristeki noktalar  $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$  şeklinde simetrik bileşenlerine eşittir.

Bu (1.11) metriğine köşegen dışı elemanları elemek maksadı ile bir ayar dönüşümü uygulanabilir. Bunun için  $\tilde{u}$  ve  $\phi$

$$d\tilde{u} = dt + g(\tilde{r})d\tilde{r} \text{ and } d\phi = d\phi + h(\tilde{r})d\tilde{r} \quad (1.12)$$

şeklinde ve

$$\begin{cases} g(\tilde{r}) = -\frac{e^{\lambda(\tilde{r},\theta)}(\Sigma^2 + a^2 \sin^2 \theta e^{\lambda(\tilde{r},\theta) + \phi(\tilde{r},\theta)})}{e^{\phi(\tilde{r},\theta)}(\Sigma^2 + a^2 \sin^2 \theta e^{2\lambda(\tilde{r},\theta)})} \\ h(\tilde{r}) = -\frac{ae^{2\lambda(\tilde{r},\theta)}}{\Sigma^2 + a^2 \sin^2 \theta e^{2\lambda(\tilde{r},\theta)}} \end{cases} \quad (1.13)$$

olmak üzere tekrar tanımlanır. Bu tanımlardan hareketle  $(t, \tilde{r}, \theta, \phi)$  koordinatlarında (1.11) metriğini

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\phi(\tilde{r},\theta)} & 0 & 0 & ae^{\phi(\tilde{r},\theta)}[e^{\lambda(\tilde{r},\theta)} - e^{\phi(\tilde{r},\theta)}]\sin^2 \theta \\ \cdot & -\Sigma^2/(\Sigma^2 e^{-2\lambda(\tilde{r},\theta)} + a^2 \sin^2 \theta) & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & -\Sigma^2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -[\Sigma^2 + a^2 \sin^2 \theta e^{\phi(\tilde{r},\theta)}(2e^{\lambda(\tilde{r},\theta)} - e^{\phi(\tilde{r},\theta)})]\sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

formunda yazmak mümkündür. Bu şekilde yazıldığında yeni metriği Boyer - Lindquist formuyla karşılaştırmak daha kolay olmaktadır.

## ÖZGEÇMİŞ

| Kişisel Bilgiler |                                                                          |
|------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| Adı Soyadı       | Ali Nur NURBAKİ                                                          |
| Doğum Yeri       | Ankara                                                                   |
| Doğum Tarihi     | 28.09.1978                                                               |
| Uyruğu           | <input checked="" type="checkbox"/> T.C. <input type="checkbox"/> Diğer: |
| Telefon          | 0507 460 91 17                                                           |
| E-Posta Adresi   | nanuba@gmail.com                                                         |
| Web Adresi       | http://                                                                  |



| Eğitim Bilgileri |                                           |
|------------------|-------------------------------------------|
| Lisans           |                                           |
| Üniversite       | Ankara Üniversitesi                       |
| Fakülte          | Fen Fakültesi                             |
| Bölümü           | Astronomi ve Uzay Bilimleri Anabilim Dalı |
| Mezuniyet Yılı   | 2002                                      |

| Yüksek Lisans    |                               |
|------------------|-------------------------------|
| Üniversite       | Orta Doğu Teknik Üniversitesi |
| Enstitü Adı      | Fen Bilimleri                 |
| Anabilim Dalı    | Fizik                         |
| Programı         | Matematiksel Fizik            |
| Mezuniyet Tarihi | 2010                          |

| Doktora          |                                           |
|------------------|-------------------------------------------|
| Üniversite       | İstanbul Üniversitesi                     |
| Enstitü Adı      | Fen Bilimleri                             |
| Anabilim Dalı    | Astronomi ve Uzay Bilimleri Anabilim Dalı |
| Programı         | Astronomi ve Uzay Bilimleri Programı      |
| Mezuniyet Tarihi | 2020                                      |

| Makale ve Bildiriler                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <p><b>Makaleler</b></p> <p>Spherical and cylindrical solutions in <math>f(T)</math> gravity by Noether Symmetry Approach,<br/>A. N. NURBAKİ, S. CAPOZZIELLO, C. DELİDUMAN,<br/>Eur. Pyhs. J. C <b>80</b>, no. 2, 108 (2020).</p> <p>Black Hole Solutions in <math>f(T)</math> Gravity,<br/>A. N. NURBAKİ, S. CAPOZZIELLO, C. DELİDUMAN,</p> |  |

Annals of Physics

***Bildiriler***

Genel Göreliliğin Modifikasyonları: Karanlık Madde ve Karanlık Enerji.

A. N. NURBAKİ, S. CAPOZZIELLO, C. DELİDUMAN, A. T. SAYGAÇ  
UAK 2016, Erzurum

TÜRKSAT Gözlemevinde Gerçekleştirilen GEO Kuşak Uydu Gözlem Faaliyetleri

A. N. NURBAKİ, H. H. ERTOK, B. YILDIZ, D. BAŞ,  
UAK 2016, Erzurum

Optik Gözlemlerle TÜRKSAT Uydularının Yörüngelerinin Belirlenmesi

A. N. NURBAKİ, B. YILDIZ, D. BAŞ, H. H. ERTOK, Ş. GÜLGÖNÜL, M.  
HELVACI,  
UHUK 2016, Kocaeli

$f(T)$  Teorisinde Küresel Simetrik Karadelik Çözümleri,

A. N. NURBAKİ, S. CAPOZZIELLO, C. DELİDUMAN, A. T. SAYGAÇ  
UAK 2018, Kayseri