

T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

$F_t(k,n)$ TİPİNDEKİ FİBONACCİ SAYILARI ÜZERİNE

Nur Şeyma YILMAZ

Danışman: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2024
Her Hakkı Saklıdır.

ÖZET

Doktora Tezi

$F_t(k,n)$ TİPİNDEKİ FİBONACCİ SAYILARI ÜZERİNE

Nur Şeyma YILMAZ

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

Bu tezde, distance Fibonacci sayı dizileri üzerine araştırma yapılmıştır. İlgili bağlamda, literatür analiz edilmiştir ve araştırma kavramsal çerçeveye oturtulmuştur. Literatürde distance Fibonacci sayı dizileri ile ilgili birçok açıdan boşluk olduğu ve bu konudaki araştırmaların az olduğu gözlemlenmiştir. Literatürdeki distance Fibonacci sayı dizileri ile ilgili boşluğu kapatmaya odaklanılmıştır. $F_3(k,n)$ ve $F_4(k,n)$ distance Fibonacci sayı dizileri tanımlanıp özellikleri analiz edilmiştir ve bu dizilerin k 'nın özel değerleri için Padovan ve Narayana dizileriyle ilişkisi bulunmuştur. Bu dizilerin çeşitli özellikleri verilmiştir ve diziler için üreteç matrisleri bulunmuştur. Daha sonra bu dizilerin tanımları negatif tamsayılar için genişletilmiş, Pascal üçgeni ile ilişkileri bulunmuştur. Bunu takiben, genelleştirilmiş $F_t(k,n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi tanımlanmıştır. Bu dizi için de aynı adımlar izlenilmiştir.

2024, 91 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Distance Fibonacci dizileri, Fibonacci dizileri, Genelleştirilmiş Fibonacci dizileri, Narayana dizileri, Padovan dizileri.

ABSTRACT

PhD Thesis

ON FIBONACCI NUMBERS OF THE TYPE $F_t(k,n)$

Nur Şeyma YILMAZ

Erzincan Binali Yıldırım University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

In this thesis, the research is conducted on distance Fibonacci sequences. In the relevant context, the literature is analyzed and the research is placed into a conceptual framework. It is observed that there is a gap in many aspects of distance Fibonacci sequences and research on this topic is scarce. The focused on closing several gaps of distance Fibonacci sequences in the literature. $F_3(k, n)$ and $F_4(k, n)$ distance Fibonacci sequences are defined and their properties are analyzed. Their relationship with the Padovan and Narayana sequences are found for special values of k in these sequences. Various properties of these sequences are given and generator matrices are found for the sequences. Later, the definitions of these sequences are extended to negative numbers and their relationship with Pascal's triangle are found. Following this, the generalized Fibonacci number sequence $F_t(k, n)$ -distance is defined. The same steps are followed for this sequence as well.

2024, 91 Pages

Keywords: Distance Fibonacci sequences, Fibonacci sequences, Generalized Fibonacci sequences, Narayana sequences, Padovan sequences.

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim süresince yol göstericiliğini, kıymetli bilgilerini ve yardımını benden asla esirgemeyen üzerimde büyük emeği olan değerli hocam Prof. Dr. Engin ÖZKAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarımıza destek veren Rzeszów University of Technology'den Sayın Doç.Dr. Andrej Włoch'a teşekkür ederim.

Ayrıca her daim yanımda olan eşim M. Çağrı YILMAZ'a, canım kardeşim R. Altar ÇİÇEKSİZ'e, aileme ve teknik desteklerinden dolayı arkadaşım Oğuz Emre BALKAR'a teşekkürü bir borç bilirim.

Bu tezimi oğlum Pamir'e armağan ediyorum.

Nur Şeyma YILMAZ

Eylül, 2024

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	i
SİMGELER ve KISALTMALAR	iii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	13
2.1. Fibonacci Sayı Dizisi ve Polinomu	13
2.2. Lucas Sayı Dizisi ve Polinomu	15
2.3. Padovan Sayı Dizisi.....	17
2.4. Narayana Sayı Dizisi	18
2.5. Graf.....	19
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	20
3.1. Distance Fibonacci Sayı Dizileri.....	20
3.2. $F_2(k,n)$ -Distance Fibonacci Sayı Dizisi	25
3.3. $F_2(k,n)$ -Distance Fibonacci Sayı Dizisinin Matris Üreteci.....	30
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	32
4.1. $F_3(k,n)$ -Distance Fibonacci Sayı Dizisi	32
4.2. $F_3(k,n)$ -Distance Fibonacci Sayı Dizisinin Matris Üreteci.....	39
4.3. $F_3(k,n)$ -Distance Fibonacci Sayı Dizisinin Pascal Üçgeni ile İlişkisi	41
4.4. $F_4(k,n)$ -Distance Fibonacci Sayı Dizisi	46
4.5. $F_4(k,n)$ -Distance Fibonacci Sayı Dizisinin Matris Üreteci.....	53
4.7. $F_t(k,n)$ - Distance Fibonacci Sayı Dizisi.....	60
4.8. $F_t(k,n)$ -Distance Fibonacci Sayı Dizisinin Matris Üreteci	66
4.9. $F_t(k,n)$ -Distance Fibonacci Sayı Dizisinin Pascal Üçgeni ile İlişkisi	69
5. SONUÇ.....	76
6. ÖNERİLER	77
KAYNAKLAR	78

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1. $Fd(2, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi ile Pascal üçgeni arasındaki ilişki...	21
Şekil 3.2. n çift sayı olmak üzere, $Fd(3, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi ile Pascal üçgeni arasındaki ilişki.....	21
Şekil 3.3. n tek sayı olmak üzere, $Fd(3, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi ile Pascal üçgeni arasındaki ilişki.....	21
Şekil 3.4. $F_2(4, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin bir yorumu.	27
Şekil 3.5 (a) ve (b). $F_2(2, n)$ ve $F_2(5, n)$ -distance Fibonacci sayı dizileri ile Pascal üçgeni arasındaki ilişki.....	29
Şekil 3.6. (a) ve (b). $F_2(4, n)$, $F_2(6, n)$ ve $F_2(7, n)$ -distance Fibonacci sayı dizileri ile Pascal üçgeni arasındaki ilişki.	29
Şekil 4.1. $F_3(6, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin bir yorumu.	34
Şekil 4.2. D Grafi.	42
Şekil 4.3. $F_3(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi için bir merdiven yorumu.	46
Şekil 4.4. $F_4(8, n)$ -distance Fibonacci sayısının bir yorumu.	47
Şekil 4.5. D Grafi	58
Şekil 4.6. $F_4(5, 30)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin bir merdiven yorumu.....	59
Şekil 4.7. $F_4(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin bir merdiven yorumu.....	60
Şekil 4.8. $F_5(10, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin bir yorumu.....	62
Şekil 4.9. D Grafi	70

TABLÖLAR LİSTESİ

Sayfa

Tablo 1.1. Fibonacci Probleminin Açıklaması.....	2
Tablo 3.1. $Fd(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi	20
Tablo 3.2. Negatif n tamsayıları için $Fd(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi.	22
Tablo 3.3. $F_2(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi.....	26
Tablo 3.4. n negatif tamsayıları için $F_2(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi.	28
Tablo 4.1. $F_3(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi.....	33
Tablo 4.2. Negatif tamsayılar için $F_3(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi.	35
Tablo 4.3. $F_3(5, n)$ ve $F_3^l(5, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi.....	42
Tablo 4.4. $F_4(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi.....	47
Tablo 4.4. $F_4(k, n)$ distance Fibonacci sayı dizisi.	49
Tablo 4.5. $F_4(5, n)$ ve $F_4^l(5, n)$ -distance Fibonacci sayı dizileri.	57

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$F_t(k, n)$	(t, k) -distance Fibonacci sayısı
$F_2(k, n)$	$(2, k)$ -distance Fibonacci sayısı
$F_3(k, n)$	$(3, k)$ -distance Fibonacci sayısı
$F_4(k, n)$	$(4, k)$ -distance Fibonacci sayısı
$Fd(k, n)$	(k, n) -distance Fibonacci sayısı
F_n	n . Fibonacci sayısı
$F_n(x)$	n . Fibonacci polinomu
L_n	n . Lucas sayısı
$L_n(x)$	n . Lucas polinomu
N_n	n . Narayana sayısı
P_n	n . Padovan sayısı

1. GİRİŞ

Sayı dizileri, serilerin ve fonksiyonların anlaşılmasında temel oluşturmaktadır. Aynı zamanda istatistik, veri analizi, programlama, algoritma geliştirme, şifreleme gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Matematiğin en önemli konularından biri olarak nitelendirilen sayı dizileri içinde en yaygın olarak bilineni Fibonacci sayı dizileri olduğu görülmektedir.

Fibonacci sayı dizilerinin adını, onu bulan İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci'den aldığı belirtilmektedir. Fibonacci sayı dizilerinin ortaya çıkışının, bir probleme bağlı olarak gerçekleştiği ifade edilmektedir. 1202 yılında yayınlanan “Liber Abaci” adlı kitabında, Leonardo Fibonacci, tavşanlarla ilgili bir problem üzerinden Fibonacci dizilerini elde etmiştir. Bu problem şu şekildedir:

“Belirli bir bölgeye konulan bir erkek ve bir dişi tavşan, doğumlarından sonraki bir ay içerisinde olgunluğa erişmektedir. İkinci aydan sonra bu çift tavşanlara, her ay bir çift tavşan yavrusu doğarak eklenmektedir. Bu habitatta herhangi bir tavşanın ölmediği varsayımına göre, bir yıl sonunda o bölgede kaç çift tavşan bulunacaktır?”

Bu problemin çözümüne bakıldığında, ilk olarak 1. ayda bir çift tavşanın olduğu görülmektedir. Bu bir çift tavşan, bir ay içinde olgunlaşarak, 3. ayda bir çift tavşan daha doğururlar. Böylece 3. ayda, o bölgede iki çift tavşan olur. Ardından 4. ayda olgunlaşmış olan bir çift tavşan, yeni bir çift tavşan daha doğmasını sağlar ve bölgede üç çift tavşan olur. 5. ayda ise yetişkin olan iki çift tavşan, birer çift tavşan daha doğururlar ve bölgede 5 çift tavşan olur. Bu dizilime göre tavşanların sayılarının aylara göre değişimi, Tablo 1.1 de görülmektedir.

Tablo 1.1. Fibonacci Probleminin Açıklaması

Aylar	Tavşan Çifti Sayısı
1. Ay  	1
2. Ay  	1
3. Ay    	2
4. Ay      	3
5. Ay         	5

 : Yeni doğan tavşan  : Olgunlaşan tavşan

Böylece, Fibonacci sayıları olarak bildiğimiz sayılar meydana gelmektedir. Bu sayılar 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,... şeklinde olup, her terim kendinden önceki iki terimin toplanması ile elde edilmektedir.

Fibonacci sayı dizisinin bazı ilginç özellikleri bulunmaktadır. Örneğin, dizinin üç ve üçün katlarındaki terimleri 2'ye, dört ve dördün katlarındaki terimleri 3'e ve beş ve beşin katlarındaki terimleri ise 5'e bölünebilmektedir. Dizinin ikinci teriminden sonraki her ardışık iki terimi aralarında asaldır. Dizinin herhangi ardışık on teriminin toplamı, her zaman 11'in katı olarak karşımıza çıkmaktadır.

Fibonacci dizisi ne kadar incelenirse, o kadar büyüleyici bir dizi olduğu görülmektedir. En ilgi çeken özelliği, ardışık terimleri oranlanırsa, belli bir terimden sonrasının oranının 1,618 sayısını verdiği anlaşılmaktadır. Altın oran olarak adlandırılan bu sayı, doğada birçok formda karşımıza çıkmaktadır. Örneğin, çam kozalaklarında, ayçiçeği tohumlarında, papatyalarda, birçok çiçeğin taç yapraklarında, salyangozlarda, bazı kabuklu deniz canlılarında görülmektedir. Bu özelliğinden dolayı altın oran, doğada dengeyi ve estetik açıdan güzelliği simgelemektedir. Bir form, altın orana ne kadar yakınsa, estetik açıdan o kadar güzel olduğu düşünülmektedir.

Tarih boyunca altın oran, birçok medeniyet tarafından da denge sistemi olarak kullanılmıştır. Mimaride, resimde, heykelde, müzikte ve daha birçok sanat alanında uygulama alanı bulmuştur. Örneğin, Leonardo Da Vinci'nin Mona Lisa ve Son Akşam

Yemeği tablosunda, Beethoven ve Mozart'ın eserlerinde altın orana rastlanılmaktadır. Yunanistan'daki Parthenon Tapınağı'nda, Mısır'daki piramitlerde ve Mimar Sinan'ın ünlü eserleri Süleymaniye ve Selimiye camilerinde altın oran görülmektedir. Altın oranla ilgili olan bu örnekler, Fibonacci dizisinin önemini ortaya koymaktadır.

Zaman içerisinde Fibonacci sayı dizilerinin yanı sıra Lucas, Narayana, Padovan, Jacobsthal, Pell, Perrin, Tribonacci gibi sayı dizilerinin, cebirde kendilerine önemli bir yer edindiği görülmektedir. Popülerliği artan sayı dizileri, birçok matematikçinin ilgisini çekmekte ve bu alana yönelik yapılan çalışmaların sayısı günden güne artmaktadır.

Bu sayı dizilerini konu alan bazı önemli çalışmalar, ilerleyen paragraflar altında belirtilmektedir.

Yapılan en eski çalışmalardan biri olarak Grünbaum (1960)'ın çalışması öne çıkmaktadır. Bu araştırmada, Fibonacci dikdörtgenlerinin geometrik özelliklerini ve bu özelliklerin çözümünde karşılaşılan belirsizlikler ele alınmaktadır. Dikdörtgenlerin özellikleri, matematiksel ve geometrik açıdan incelenirken, problem çözümünde ortaya çıkan belirsizliklere de odaklanılmaktadır. İlgili çerçevede, bu tür belirsizliklerin nasıl ele alınabileceğini ve çözüm sürecindeki zorlukları tartışılmaktadır.

Ardından Horadam (1961)'in "A Generalized Fibonacci Sequence" adlı makalesi, dikkat çeken çalışmalardan biri olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu çalışma, Fibonacci dizisinin genelleştirilmiş bir versiyonunun ele alındığı bir çalışma olarak da bilinmektedir. Araştırmada, bilinen Fibonacci dizisinin temel prensiplerinden yola çıkılarak, daha genel bir Fibonacci dizisinin oluşturulabileceği ifade edilmektedir. Bu genelleştirilmiş dizi, herhangi iki başlangıç terimi ve herhangi bir aritmetiksel kurala uygun olarak türetilmektedir.

Öte yandan Fuchs (1963)'un araştırmasında, Fibonacci'nin bir problemine odaklanılmıştır. Bu problem, Fibonacci sayılarının belirli bir kurala göre tersinin alınması ve bu işlemin ardından elde edilen sayıların asal sayı olup olmadığının incelenmesi olarak bilinmektedir. Belirtilen çalışmada, Fibonacci sayılarının matematiksel özellikleri ve asal sayılarla olan ilişkisi derinlemesine incelenmiştir. Fuchs (1963), Fibonacci sayılarının tersinin alınmasıyla ilgili çeşitli bulguların nasıl anlaşılacağını açıklamıştır. Ayrıca,

Fibonacci sayılarının tersi alındığında, elde edilen sayıların asal olup olmadığına ilişkin teoremler geliştirmiştir.

Bununla beraber Hoggatt (1965)'in çalışmasında, Fibonacci sayı dizileri ile Lucas sayı dizileri arasında bir bağlantı olup olmadığı araştırılmıştır. Yapmış olduğu araştırmada, bu bağlantıya yönelik elde ettiği bulguları yorumlayarak, yeni bağlantıların ortaya çıktığını tespit etmiştir. Bu bağlamda Hoggatt (1965)'in çalışması, Fibonacci sayı dizileri ve Lucas sayı dizileri arasındaki bağlantıları ortaya çıkaran ilk araştırmalardan biri olarak nitelendirilmektedir.

Konuya farklı bir şekilde yaklaşan Hoggatt ve Bicknell (1973)'in araştırmasında, Fibonacci polinomlarının kökleri incelenmiştir. İlgili çalışmada, Fibonacci polinomlarının köklerinin reel sayılar ya da karmaşık sayılar olup olmadığı gibi sorulara cevaplar aranmıştır. Ayrıca, bu köklerin dağılımı ve özellikleri de irdelenmiştir.

Bu alana farklı bir katkıda bulunan Gould (1981), Fibonacci matrisinin tarihçesini ve daha yüksek boyutlu bir problemi ele almıştır. Bu araştırmada, Fibonacci dizisinin matris formundaki temsili ve tarihçesi incelenmiştir. Elde edilen bulgular, Fibonacci dizisinin matris formundaki temsiliyle ilgili tarihçesini ve daha geniş bir matematiksel problem alanına olan uygulanabilirliğini açıklığa kavuşturmuştur.

Akabinde altın oranı ele alan Vajda (1989), Fibonacci ve Lucas sayıları ile altın oran arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Belirtilen araştırmada, Fibonacci ve Lucas dizilerinin özellikleri ile altın oran arasındaki derin bağlantılar ve etkileşimler detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Araştırmacı, bu sayı dizilerinin matematiksel yapılarını, özelliklerini ve kullanım alanlarını incelerken, altın oranın matematikteki önemini ve yaygın kullanıldığını alanları vurgulamıştır. Elde edilen bulgular, Fibonacci ve Lucas sayılarının yanı sıra altın oranın da matematik ve bilimdeki çeşitli konularda nasıl kullanıldığını göstermektedir.

Allouche, J. P. and Johnson, J. (1996)" tarafından kaleme alınan "Narayana's cows and delayed morphism" başlıklı çalışma, Hindistan'ın tanınmış matematikçisi Narayana'nın ortaya atıp "Narayana's cows" başlığı altında bulduğu Narayana dizilerini ve özelliklerini incelemektedir.

Öte yandan, literatürde Padovan ve Fibonacci sayıları arasındaki ilişkiye yönelik Ian Stewart'ın ortaya koymuş olduğu sorunun, araştırmacıların ilgisini çektiği bilinmektedir. Buna yönelik bir çalışma gerçekleştiren Weger (1997), Fibonacci ile Padovan sayılarını ele almıştır. Yapmış olduğu “Padua and Pisa are exponentially far apart” başlıklı bu araştırmada, Stewart'ın sorusuna cevap aramıştır. Burada ilgili sayılar arasındaki farklılıkları inceleyerek, negatif indisli artan Padovan sayılarına yönelik çeşitli bulguları sunmuştur.

Fibonacci temasına yönelik alana yeni bir araştırma kazandıran Koshy (1998), Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili yeni özellikleri keşfetmiştir. Bu makalede, yeni özelliklerin nasıl türetildiğini ve nasıl kullanılabileceğini ayrıntılı olarak açıklanmaktadır. Ayrıca, bu özelliklerin matematiksel özellikleri ve pratik uygulamalardaki önemi üzerinde durulmaktadır. Koshy'nin çalışması, Fibonacci ve Lucas sayılarının temel özelliklerinin daha derinlemesine anlaşılması ve matematiksel ilişkilerinin genişletilmesi yolunda önemli bir adım olarak değerlendirilmektedir.

Yapılan değerlendirmelerde, Fibonacci ve Lucas sayıları üzerine araştırma yapan birçok araştırmacının literatürde çalışmalarının giderek yaygınlaştığı görülmektedir. Fibonacci ve Lucas sayılarını detaylı bir şekilde ele alan Koshy (2001), yayınlamış olduğu “Fibonacci and Lucas Numbers with Applications” adlı kitabında, bu sayılara ait birçok formül ortaya koymuştur. Ayrıca doğada çeşitli formlarda karşılaşılan altın oran örneklerini ayrıntılı bir şekilde inceleyerek önemli tespitlerde bulunmuştur.

Bununla beraber Viola (2001)'nin araştırmasında, Fibonacci sayılarının doğadaki yaygın görünüşleri ve bu sayıların matematiksel özellikleri incelenmiştir. Belirtilen araştırmada, bu dizinin bitkilerin yaprak diziliminde, çiçeklerin yaprak sayısında, koni ve spiral şeklindeki kabuklarda ve diğer doğal oluşumlarda nasıl görüldüğü açıklanmaktadır. Viola (2001), Fibonacci sayılarının doğadaki bu geniş dağılımının ve matematiksel prensiplerinin, doğadaki yapıların temelinde yattığına dikkat çekmektedir. Ayrıca, bu ilişkinin sanat, mimari ve diğer alanlardaki insan yapımı eserlerde de görülebileceği öne sürülmektedir. İlgili araştırma, doğa ile matematik arasındaki derin bağlantıları ve Fibonacci sayılarının evrensel varlığını vurgulayarak, matematiksel düşüncenin doğadaki izlerinin takip edilmesine olan ilgiyi artırmaktadır.

Öte yandan Lando (2003), Fibonacci sayılarının matrislerle ilişkisini incelemiştir. Bu çalışmada, Fibonacci sayılarının matrisler aracılığıyla nasıl temsil edilebileceği ve bu temsilin, sayıların özelliklerinin daha iyi anlaşılmasına nasıl katkıda bulunabileceği ele alınmıştır. Belirtilen araştırma, bu sayı dizisinin birinci dereceden homojen bir lineer fark denklemiyle ifade edilebileceğini ve bu denklemin matris formunu açıkladığını vurgulamaktadır. Ayrıca, Fibonacci dizisinin çeşitli matris operasyonlarıyla nasıl ilişkilendirilebileceği ve bu ilişkinin sayıların özelliklerini incelemeye nasıl kullanılabileceği gösterilmektedir.

Bu alana nilpotent gruplar üzerine bir araştırma kazandıran Özkan (2003), nilpotent gruplardaki 3 adımlı Fibonacci dizilerini incelemiştir. İlgili çalışmada, Fibonacci dizilerinin nilpotent gruplar içindeki genişlemesi üzerinde durulmuştur. Özkan (2003), bu 3 adımlı Fibonacci dizilerinin, nilpotent gruplar içinde nasıl tanımlandığını açıklayarak, matematiksel özelliklerini detaylı bir şekilde ele almıştır.

Benzer şekilde 3 adımlı Fibonacci dizilerini ele alan Özkan, Aydın ve Dikici (2003), modül m üzerinde 3 adımlı Fibonacci dizilerini incelemişlerdir. Belirtilen çalışmada, 3 adımlı Fibonacci dizilerinin modül m üzerindeki davranışları ve özellikleri araştırılmıştır. 3 adımlı Fibonacci dizilerinin modül m üzerinde nasıl davrandığı ve elde edilen bulguların modül m aritmetiği üzerindeki etkileri değerlendirilmiştir. Bu alanda 3 adımlı Fibonacci dizilerinin matematiksel yapılarını anlamak isteyen araştırmacılar için önemli bir kaynak olarak görülmektedir.

Öcal, Tuglu ve Altinisik (2005), k -genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarının temsili üzerine odaklanmışlardır. Belirtilen çalışmada, bu klasik dizilerin genelleştirilmiş versiyonları olan k -genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerinin temsilin incelenmesi gerçekleştirilmiştir. Ayrıca, k -genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerinin matematiksel yapılarının analiz edilmesiyle birlikte, bu dizilerin farklı temsilleri ortaya konulmuştur.

Öte yandan altın oranla ilgili dikkat çeken araştırmalardan birini literatüre kazandıran Knott (2006), Fibonacci sayılarının Altın Oran ile olan ilişkisini derinlemesine incelemiştir. Ayrıca, Fibonacci dizilerinin sanat, mimari ve müzik gibi alanlarda kullanımını vurgulamıştır.

Bununla beraber Stakhov ve Rozin (2006), Fibonacci ve Lucas p -sayıları için Binet formüllerinin teorisini ele almışlardır. İlgili çalışmada, Fibonacci ve Lucas dizilerinin Binet formüllerinin teorik açıklamaları incelenmiştir. Ayrıca, bu formüllerin teorik temelleri açıklanmış ve bu formüllerin Fibonacci ve Lucas p -sayıları üzerindeki etkileri incelenmiştir. Elde edilen bulgular, Binet formüllerinin Fibonacci ve Lucas dizileri üzerindeki önemini ve etkisini vurgulamaktadır.

Akabinde Fibonacci k -sayıları üzerine odaklanılan bir araştırma yapan Falcón ve Plaza (2007), k -parametrelili genelleştirilmiş Fibonacci dizileri olan Fibonacci k -sayılarını ele almışlardır. İlgili çalışmada, k -parametresinin değişimiyle Fibonacci dizilerinin nasıl değiştiği ve özelliklerinin nasıl etkilendiği araştırılmaktadır. Fibonacci k -sayıları üzerine yapılan bu araştırma, sayı teorisi ve matematiksel modelleme alanlarına yönelik yeni bir bakış açısı sunmaktadır. Fibonacci dizilerinin genelleştirilmiş versiyonlarının matematiksel özelliklerinin anlaşılması için değerli bir kaynak olarak kabul edilmektedir.

Kısıtlanmış Fibonacci dizileri üzerine odaklanan Özkan (2007), bu dizilerin özelliklerini ve davranışlarını incelemiştir. Kısıtlanmış Fibonacci dizileri, klasik Fibonacci dizilerinden belirli bir noktada kesilmiş veya kısıtlanmış olan diziler olarak ifade edilmektedir. Özkan (2007), bu kısıtlanmış dizilerin, matematiksel özelliklerine ve davranışlarına yönelik önemli değerlendirmelerde bulunmuştur.

k -Fibonacci ve k -Lucas sayılarının özelliklerini ve uygulamalarını inceleyen Bolat (2008), k -parametresinin değişimiyle k -Fibonacci ve k -Lucas sayılarının nasıl değiştiğini ve özelliklerinin nasıl etkilendiğini araştırmıştır. Ayrıca, bu genelleştirilmiş sayı dizilerinin matematiksel özellikleri ve pratik uygulamalardaki kullanımları üzerinde durmuştur.

Vajda'nın 2009 yılında yayınladığı "Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section: Theory and Applications" kitabında da, tarihsel süreç içerisinde çeşitli alanlara konu olan Fibonacci ve Lucas sayılarının matematiksel özellikleri irdelenmiştir. Bu matematiksel özellikler ile Altın Oran arasındaki ilişkiyi ayrıntılı bir biçimde ele alan Vajda (2009)'nın bu çalışmasının literatüre önemli katkılar sağladığı düşünülmektedir.

Fibonacci sayılarının ve Altın Oran'ın matematiksel özelliklerini inceleyen Cox ve Katz (2009), doğadaki desenlerden, sanat ve mimariye kadar birçok alanda rastlanıldığına dikkat çekmişlerdir. Belirtilen araştırmada, Fibonacci sayılarının matematiksel özellikleri, tarihi ve çeşitli uygulama alanları, Altın Oran'ın matematiksel ve geometrik özellikleri detaylı bir şekilde ele alınmıştır.

k -Fibonacci sayıları üzerine literatüre yeni bir araştırma kazandıran El-Mikkawy ve Sogabe (2010), klasik Fibonacci dizilerinden farklı bir yaklaşımla, k -Fibonacci sayıları adı verilen yeni bir sayı dizisi tanıtmışlardır. Bu yeni sayı dizisinin, matematiksel analiz, sayı teorisi ve uygulamalı matematik gibi birçok alanda potansiyel kullanım alanlarına sahip olabileceğini ifade etmişlerdir.

Verner (2010)'ın "Fibonacci, Rabbits and Nature" adlı çalışması, doğadaki Fibonacci sayı dizilerinin çeşitli fenomenler tarafından nasıl modellendiği incelemektedir. Kitapta, bitki büyümesi, kabuk yapıları ve organizmaların biçimleri gibi alanlarda Fibonacci dizilerinin etkisi detaylı bir şekilde ele alınmaktadır. Verner (2010), Fibonacci dizilerinin doğadaki yaygın görünümünü matematiksel modelleme kullanarak açıklamaktadır. Ayrıca bu yayında, Fibonacci dizileri biyoloji, ekoloji ve çevre bilimlerindeki uygulamaları tartışılarak, doğa ile matematik arasındaki ilişki vurgulanmaktadır. Ayrıca bu yayında, doğanın temel prensiplerini anlama ve açıklama konusunda, Fibonacci sayılarının önemine değinilmektedir.

k -Lucas sayıları üzerine odaklanan bir araştırma yapan Falcon (2011), Fibonacci dizisi gibi matematik biliminde önemli bir yere sahip olan Lucas dizisine yönelik k -parametresiyle genelleştirilmiş Lucas sayıları olan k -Lucas sayılarını incelemiştir. Ayrıca, k -parametresinin değişimiyle k -Lucas sayılarının nasıl değiştiği ve özelliklerinin nasıl etkilendiğine yönelik değerlendirmelerde bulunmuştur.

Pell dizileri konusuna yönelik bir çalışma yapan Deveci ve Karaduman (2015), Pell dizilerinin sonlu gruplar içindeki davranışlarını ve özelliklerini incelemişlerdir. Pell dizilerinin grup teorisi bağlamında nasıl çalıştığını ve grup yapılarıyla nasıl ilişkilendirildiğini araştırmışlardır. Elde ettikleri bulgular, Pell dizilerinin grup teorisindeki rolünü ve gruplarla olan ilişkisini aydınlatmaktadır.

"On Relationship among A New Family of k -Fibonacci, k -Lucas Numbers, Fibonacci and Lucas Numbers" başlıklı çalışmalarıyla literatürde öne çıkan Özkan, Altun ve Göçer (2017), yeni bir k -Fibonacci ve k -Lucas sayıları ailesiyle, Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki ilişkileri incelemişlerdir. İlgili çalışmada, k -parametresiyle genelleştirilmiş yeni bir aile olan k -Fibonacci ve k -Lucas sayıları tanıtılmıştır. Bu yeni ailenin, Fibonacci ve Lucas sayıları ile nasıl ilişkili olduğunu ve aralarındaki bağlantıların nasıl analiz edildiğini değerlendirmişlerdir. Elde ettikleri bulgular, k -Fibonacci ve k -Lucas sayılarının, klasik Fibonacci ve Lucas dizileriyle paralel olarak davrandığını göstermektedir.

Ardından Özkan, Aydoğdu ve Altun (2017), belirli bir Fibonacci ve Lucas sayısı ailesi için bazı özelliklerin türetilmesini ve incelenmesini amaçlayan bir araştırma gerçekleştirmişlerdir. Bu özelliklerin matematiksel özelliklerini ve uygulanabilirliklerini araştırmışlardır. Elde ettikleri bulgular, belirli bir Fibonacci ve Lucas sayısı ailesinin matematiksel davranışlarını ve özelliklerini daha iyi anlaşılmasına yardımcı olmaktadır.

Fibonacci ailesinin bir sayısal modellemesi üzerine çalışma yapan Falcon ve Plaza (2019), Fibonacci dizisi ve onun varyasyonları olan Fibonacci ailesinin dinamiklerini araştırmışlardır. Bu araştırmada, Fibonacci ailesinin bir diskret modeli tanıtılarak, bu modelin matematiksel özellikleri değerlendirilmiştir. Ayrıca, Fibonacci ailesinin farklı başlangıç koşullarına ve parametrelere bağlı olarak nasıl değiştiğine yönelik değerlendirmelerde bulunmuşlardır.

Fibonacci dizisinin matematiksel özelliklerini, tarihini ve çeşitli uygulama alanlarını derinlemesine inceleyen Dobb (2020), ilgili dizinin temel özelliklerini açıklayarak, matematikte ve diğer disiplinlerdeki kullanımlarını ele almıştır. Ayrıca, Fibonacci dizisinin türevlerinden ve genelleştirmelerden de bahsetmiştir.

Gauss Narayana sayıları ve bunların polinomları üzerine odaklanan Özkan ve Kuloğlu (2021), ilgili sayıların ve bunların polinomlarının yeni özelliklerini incelemişlerdir. Bu polinomların matematiksel özelliklerini ve uygulanabilirliklerini araştırmışlardır. Gauss Narayana sayılarının, polinomlarının ve özelliklerinin açıklandığı bu araştırmada, belirtilen polinomların yeni özellikleri ve özellikleri hakkında bilgi sağlanmaktadır.

Bununla beraber, k -Narayana dizilerinin kendine benzerliği üzerine odaklanılan Özkan, Kuloğlu ve Peters (2021), k -Narayana dizilerinin kendine benzerlik özelliğini anlamak için flip graf görünümelerini kullanmışlardır. Eriştikleri bulgular, k -Narayana dizilerinin kendine benzerlik özelliğinin flip graflar aracılığıyla nasıl görselleştirilebileceğini ve anlaşılabileceğini göstermektedir. Çalışma, bu alana Narayana dizilerinin kendine benzerlik özellikleri hakkında yeni bir bakış açısı sunmaktadır.

Fibonacci dizilerine yönelik bu alanda öne çıkan araştırmaların değerlendirilmesinin ardından, çalışmanın ana konusunu oluşturan distance Fibonacci dizilerine yönelik çalışmalar, filtrelenerek, daha detaylı bir literatür taramasına tabi tutulmuştur. Distance Fibonacci dizileriyle alakalı yapılan çalışmalara yönelik değerlendirmeler, bu araştırmanın amacına uygun bir şekilde gerçekleştirilmiş ve kuramsal çerçevenin daha efektif bir şekilde oluşturulmasına imkân sağlamıştır.

Belirtilen çerçeveden hareketle, ilk olarak Kwasnik ve Wloch (2000)'un araştırması ele alınmıştır. Çeşitli graf türleri için genelleştirilmiş kararlı kümelerin ve çekirdeklerin sayısını belirlemek için matematiksel yöntemlerin kullanıldığı bu araştırmanın sonucunda elde ettikleri bulgular, grafların yapısını anlamak ve analiz etmek için önemli ipuçları sağlamaktadır. Graf teorisi alanındaki araştırmalara ve grafların analizine yönelik önemli katkılar sağlayan bu çalışma, alandaki araştırmacılar için değerli bir kaynak olarak görülmektedir.

Genelleştirilmiş Fibonacci sayılarına yönelik bir araştırma yapan Wloch (2012), bu sayıların farklı yorumları üzerinde durarak, bu yorumların matematiksel ve pratikteki önemini araştırmıştır. Genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının graf teorisi, kombinatorik ve diğer matematiksel alanlardaki çeşitli bağlamlardaki yorumlarını incelemiştir. Yaptığı araştırma ile genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının, çeşitli matematiksel yapılar ve uygulamalar açısından zenginliğini ve çeşitliliğini vurgulamaktadır.

Öte yandan distance Fibonacci sayıları ve bunların yorumları ile matris üreteçleri üzerinde yoğunlaşan bir araştırma yapan Bednarz ve Wołowiec-Musiał (2013), bu sayıların geometrik, kombinasyonel veya diğer matematiksel bağlamlardaki yorumlarını araştırmışlardır. Elde edilen sonuçlar, distance Fibonacci sayılarının farklı yorumlarının ve bunların matris üreteçlerinin matematiksel yapılarının ve özelliklerinin daha iyi

anlaşılmasını sağlamaktadır. Bu çerçevede ilgili çalışma, matematik literatürüne distance Fibonacci sayıları ve bunların çeşitli yorumları hakkında, yeni bir bakış açısı sunmaktadır.

Distance Fibonacci ve distance Lucas sayıları üzerinde odaklanan Brod, Piejko ve Włoch (2013), bu sayıları ve uygulamalarını incelemişlerdir. Klasik Fibonacci ve Lucas dizilerinden farklı bir şekilde tanımlanan, Distance Fibonacci ve distance Lucas sayılarının, matematik alanında geniş bir yelpazede uygulamaları olduğuna dikkat çekmiştir. Ayrıca, bu sayıların çeşitli alanlardaki uygulamaları üzerinde durarak, distance Fibonacci ve distance Lucas sayılarının matematiksel özelliklerinin anlaşılmasına yönelik önemli değerlendirmelerde bulunmuşlardır.

Fibonacci ve Lucas dizilerinin genellemelerini ifade eden genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarına yönelik bir araştırma yapan Włoch (2013), matematik literatüründe bu sayıların çeşitli uygulamalarına dikkat çekmektedir. Çalışmasında, bu genelleştirilmiş sayılar için yeni özellikler türeterek, teori ve uygulamadaki önemi üzerinde durmuştur. Aynı zamanda bu özelliklerin, graf teorisi, kombinatorik veya diğer matematiksel alanlardaki uygulamalarını da tartışmıştır.

Öte yandan Fibonacci tipi sayıların toplam graf yorumunu ele alan Bednarz, Włoch ve Wołowiec-Musiał (2015), bu yorumun teori ve uygulamadaki önemine dikkat çekmişlerdir. Fibonacci tipi sayıların toplam graf yorumunun, graf teorisi, kombinatorik ve diğer matematiksel alanlardaki uygulamalarda nasıl kullanılabileceğine yönelik önemli bilgiler paylaşmışlardır. Bu yönüyle ilgili araştırma, Fibonacci tipi sayıların matematiksel yapılarının daha iyi anlaşılmasına ve çeşitli matematiksel problemlerde kullanılmalarına yönelik değerli katkılar sunmaktadır.

Fibonacci sayılarına dayanarak geliştirilen ve matematiksel yapıların analizinde önemli bir rol oynayan bir araştırmayı literatüre kazandıran Włoch, Bednarz, Bród, Włoch ve Wołowiec-Musiał (2013), genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının uzaklık anlamında yeni bir türünü ifade eden $F_2(k, n)$ -distance Fibonacci sayılarını incelemişlerdir.

Biz de bu tezde, distance Fibonacci sayılarına yönelik araştırmalar yapıp, bu sayıları genel kapsamda değerlendirdik. Buradan hareketle tezimizin genel amacı; distance Fibonacci

sayılarına ait yeni dizi ailelerini tanımlamak, bunların özelliklerini incelemek, belirtilen dizilerin graf yorumlarını ortaya koyarak matris teorisiyle ilişkilendirmek ve negatif tamsayılar için ilgili sayıların genişletilmiş hallerini bulmak olarak belirlenmiştir. Distance Fibonacci sayıları ile Padovan, Narayana sayı dizileri arasındaki ilişkilerin çeşitli şekillerde değerlendirilmesi hedeflenmiştir. Ayrıca distance Fibonacci sayılarının matris üreteçlerini bulmak ve bu sayıların Pascal üçgeni ile arasındaki ilişkileri bulmak hedeflenmiştir. Bu çerçevede $F_3(k, n)$, $F_4(k, n)$ -distance Fibonacci sayıları ile bu sayıların genelleştirilmiş hali olan $F_t(k, n)$ -distance Fibonacci sayıları üzerine çalıştık. İlk olarak, $F_3(k, n)$ -distance Fibonacci sayılarını tanımlayıp matematiksel özelliklerini ve davranışlarını analiz ettik. Bu sayıların Fibonacci dizisi içindeki yerini ve matematiksel yapılarını inceleyerek, farklı matematiksel bağlamlarda nasıl kullanılabileceğine ilişkin değerlendirmelerde bulunduk.

Akabinde, $F_4(k, n)$ -distance Fibonacci sayılarına yönelik bir araştırma yapıp bu sayıların özellikleri üzerine çeşitli araştırmalar yaptık.

Son olarak, bu alandaki eksiklikten yola çıkarak, önceki çalışmalarda bulmuş olduğumuz distance Fibonacci sayılarının genel hâllerini ortaya koyan $F_t(k, n)$ -distance Fibonacci sayılarını esas alan bir çalışma yaptık.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Fibonacci Sayı Dizisi ve Polinomu

Tanım 2.1.1.

$F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2$$

rekürans bağıntısı ile verilen diziye Fibonacci sayı dizisi denir. Fibonacci sayı dizisi, her bir elemanın önceki iki elemanın toplamıyla elde edildiği bir sayı dizisi olup, Fibonacci sayı dizisi $\{0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233, \dots\}$ şeklindedir (Koshy, 2001).

Fibonacci sayı dizisine karşılık gelen $x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denklemi çözüldüğünde

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

kökleri bulunur. Burada denklemin α pozitif köküne altın oran denir. Bu oran 1,618 değerine karşılık gelir. Her Fibonacci sayısı, kendinden önceki Fibonacci sayısına bölündüğünde ‘altın oran’ sayısına yakınsar (Knott,2006).

Ayrıca, bu denklemin kökleri kullanılarak, Fibonacci sayı dizisinin terimlerinin elde edilmesini sağlayan Binet formülü elde edilir, bu formül;

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

şeklindedir. (Koshy, 2001).

Teorem 2.1.2.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ile tanımlanan matris verilsin. Bu matrisin n . kuvvetini alırsak,

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu matris Fibonacci sayı dizisinin n . terimini elde etmeyi sağlar. Özellikle büyük Fibonacci sayılarını hesaplarırken, matris çarpımından faydalanmak kolaylık sağlar (Koshy, 2001).

Teorem 2.1.3.

Fibonacci sayı dizisi için Cassini özdeşliği

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n, n \geq 1$$

dir (Koshy, 2001).

Teorem 2.1.4.

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1, n \geq 1$$

dır (Koshy, 2001).

Tanım 2.1.5.

$F(k, n) = n + 1, n \leq k$ başlangıç koşulu olmak üzere,

$$F(k, n) = F(k, n - 1) + F(k, n - k), n \geq k + 1$$

rekürans bağıntısı ile verilen diziye genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisi denir (Kwasnik, Wloch, 2000).

Tanım 2.1.6.

Fibonacci polinomu $F_0(x) = 0, F_1(x) = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere,

$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x)$$

şeklinde rekürans bağıntısı ile tanımlanmıştır (Koshy, 2001).

Fibonacci polinomuna karşılık gelen ikinci dereceden denklem,

$$\lambda^2 - \lambda x - 1 = 0$$

şeklinde olup bu denklemin kökleri,

$$\alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} \text{ ve } \beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

olur. Buradan hareketle Fibonacci polinomunun Binet formülü,

$$F_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

olur. Binet formülü, Fibonacci dizisinin terimlerinin bulunmasında yardımcıdır (Koshy, 2001).

2.2. Lucas Sayı Dizisi ve Polinomu

Tanım 2.2.1.

$L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere,

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n \geq 2$$

rekürans bağıntısı ile verilen diziye Lucas sayı dizisi denir. Lucas sayı dizisi, Fibonacci sayı dizisinin tanımındaki gibi her bir elemanın önceki iki elemanın toplamıyla elde edildiği bir sayı dizisidir. Lucas sayı dizisi; $\{2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, \dots\}$ şeklindedir (Koshy, 2001).

Lucas sayı dizisine karşılık gelen $x^2 - x - 1 = 0$ ikinci dereceden denklem çözüldüğünde

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

kökleri bulunur. Buradan hareketle Lucas sayı dizisinin terimlerinin elde edilmesini sağlayan Binet formülü,

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

olur (Koshy, 2001).

Teorem 2.2.2.

Lucas sayı dizisi için Cassini özdeşliği

$$L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}, n \geq 1$$

dir (Koshy, 2001).

Teorem 2.2.3.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisleri olmak üzere,

$$RQ^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{pmatrix}$$

şeklinde olur (Özkan, 2017).

Teorem 2.2.4.

$$L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n, n \geq 1$$

olur (Koshy, 2001).

Teorem 2.2.5.

$$L_n L_{n+1} = L_{2n+1} + (-1)^n, n \geq 1$$

olur (Hoggatt, 1965).

Tanım 2.2.6.

Lucas polinomu $L_0(x) = 0$, $L_1(x) = 2$ başlangıç değerleri olmak üzere,

$$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x)$$

şeklinde rekürans bağıntısı ile tanımlanmıştır (Koshy, 2001).

Lucas polinomuna karşılık gelen ikinci dereceden denklem,

$$\lambda^2 - \lambda x - 1 = 0$$

şeklinde olup bu denklemin kökleri,

$$\alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} \text{ ve } \beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

olur. Buradan hareketle Lucas polinomunun Binet formülü,

$$L_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x)$$

olur. Binet formülü Lucas dizisinin terimlerinin bulunmasında yardımcıdır (Koshy, 2001).

2.3. Padovan Sayı Dizisi

Tanım 2.3.1.

$P_0 = P_1 = P_2 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere,

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geq 3$$

rekürans bağıntısı ile verilen diziye Padovan sayı dizisi denir. P_n ile gösterilen Padovan sayı dizisi, her bir elemanın kendinden önceki ikinci ve üçüncü eleman ile toplanması ile elde edilir. Padovan sayı dizisi şu şekildedir; $\{1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 15, \dots\}$ (Weger, 1997).

Padovan sayı dizisine karşılık gelen karakteristik denklem $x^3 - x - 1 = 0$ şeklinde olup, bu denklemin kökleri,

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{27 + 3\sqrt{69}}{54}} + \sqrt[3]{\frac{27 - 3\sqrt{69}}{54}}$$

$$\beta = w \sqrt[3]{\frac{27 + 3\sqrt{69}}{54}} + w^2 \sqrt[3]{\frac{27 - 3\sqrt{69}}{54}}$$

$$\gamma = w^2 \sqrt[3]{\frac{27 + 3\sqrt{69}}{54}} + w^3 \sqrt[3]{\frac{27 - 3\sqrt{69}}{54}}$$

Burada $w = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 1'in ilkel karmaşık küp köküdür. α, β, γ karakteristik denklemin kökleri olmak üzere, Padovan sayı dizisinin terimlerini bulaya yardımcı olan Binet formülü

$$P_n = \frac{(\alpha+1)\alpha^n}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{(\beta+1)\beta^n}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{(\gamma+1)\gamma^n}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

şeklindedir (Lien, 2005).

Teorem 2.3.2.

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ile tanımlanan matris verilsin. Bu matrisin n. kuvvetini alırsak,

$$Q^n = \begin{pmatrix} P_{n-5} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ P_{n-4} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-1} & P_{n-2} \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu matris Padovan sayı dizisinin n. terimini elde etmeyi sağlar. (Lien, 2005).

2.4. Narayana Sayı Dizisi

Tanım 2.4.1.

$N_0 = 0$, $N_1 = N_2 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere,

$$N_n = N_{n-1} + N_{n-3}, n \geq 3$$

rekürans bağıntısı ile verilen diziye Narayana sayı dizisi denir. N_n ile gösterilen Narayana sayı dizisi, her bir elemanın kendinden önceki eleman ve kendinden önceki üçüncü eleman ile toplanması ile elde edilir. Narayana sayı dizisi şu şekildedir; $\{1,1,1,2,3,4,6,9,13,19,28,41,60, \dots\}$ (Allouche vd., 1996).

Narayana sayı dizisine karşılık gelen karakteristik denklem $x^3 - x^2 - 1 = 0$ şeklinde olup bu denklemin kökleri,

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = 0$$

$$\alpha\beta\gamma = 1$$

olur. Narayana sayı dizisi için Binet formülü şu şekildedir;

$$N_n = \alpha^n a + \beta^n b + \gamma^n c, n \geq 0$$

$$\text{Burada, } a = \frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}, b = \frac{\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}, c = \frac{\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

dır .

2.5. Graf

Tanım 2.5.1.

U boştan farklı bir küme ve E, U 'nun iki elemanlı alt kümelerinin bir sınıfı olmak üzere,

$G = (U, E)$ ikilisine graf (çizge) denir. U, G grafının köşeler kümesi, E ise, G grafının kenarlar kümesi olarak adlandırılmaktadır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Distance Fibonacci Sayı Dizileri

Tanım 3.1.1.

$k \geq 2$ ve $n \geq 0$ tamsayılar olsun.

$Fd(k, n) = 1$, $0 \leq n \leq k - 1$ başlangıç koşulu olmak üzere,

$$Fd(k, n) = Fd(k, n - k + 1) + Fd(k, n - k), n \geq k \geq 2$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan diziye distance Fibonacci sayı dizisi denir. Bu dizi $Fd(k, n)$ ile gösterilir (Bednarz, vd., 2013).

Bazı özel k ve n değerleri için distance Fibonacci sayı dizisinin terimleri Tablo 3.1’de gösterilmiştir.

Tablo 3.1. $Fd(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$Fd(2, n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
$Fd(3, n)$	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37
$Fd(4, n)$	1	1	1	1	2	2	2	3	4	4	5	7	8	9	12
$Fd(5, n)$	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	4	4	4	5	7
$Fd(6, n)$	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	4	4	4	4

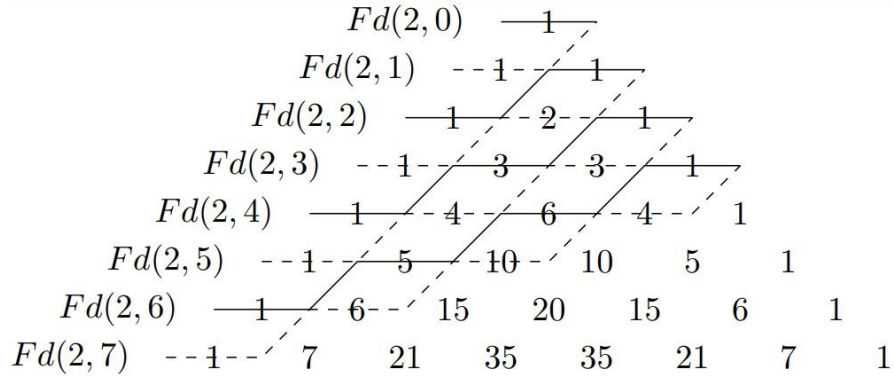
$Fd(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi üzerine çalışıldığında aşağıdaki özellikler görülmektedir.

$Fd(2, n) = F_n$, yani $k = 2$ için, $Fd(2, n)$ bilinen Fibonacci dizisini vermektedir.

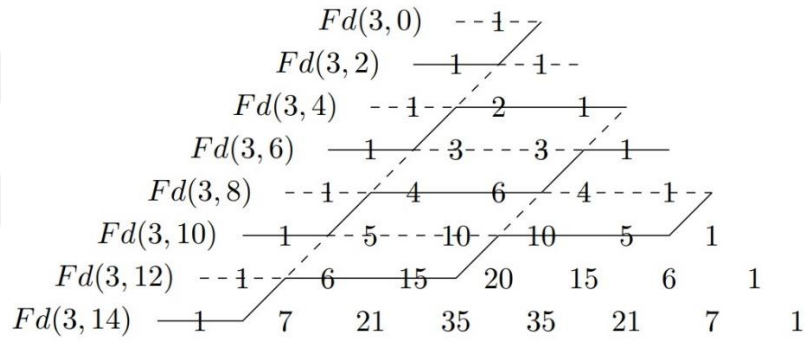
$Fd(3, n) = Pv(n)$, yani $k = 3$ için, $Pd(3, n)$ Padovan dizisini vermektedir.

Pascal üçgenini kullanarak, $Fd(2, n)$ ve $Fd(3, n)$ -distance Fibonacci sayı dizilerinin terimlerinin elde edilmesi Şekil 3.1, Şekil 3.2 ve Şekil 3.3’te gösterilmektedir. Her satırda

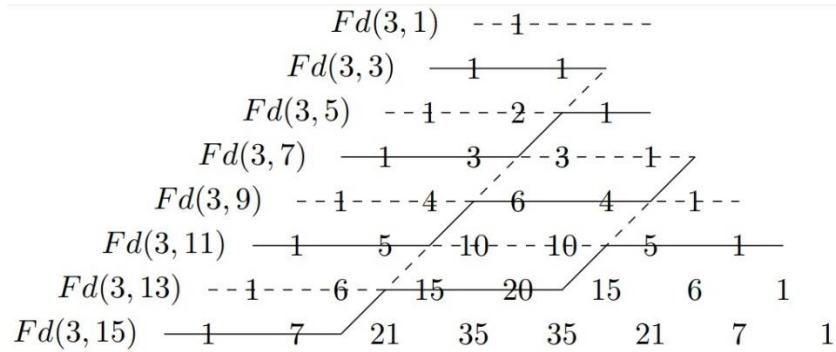
bir tam, bir kesikli çizgi ile gösterilen çizgiler başlangıçta hangi çizgi kullanıldıysa aşağıdan yukarıya doğru o çizgi takip edilerek dizinin terimleri elde edilir.



Şekil 3.1. $Fd(2, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi ile Pascal üçgeni arasındaki ilişki.



Şekil 3.2. n çift sayı olmak üzere, $Fd(3, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi ile Pascal üçgeni arasındaki ilişki.



Şekil 3.3. n tek sayı olmak üzere, $Fd(3, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi ile Pascal üçgeni arasındaki ilişki.

Tanım 3.1.2.

$k \geq 2$ ve $n \geq 0$ tamsayılar olsun.

$Fd(k, n) = 1$, $0 \leq n \leq k - 1$ başlangıç koşulu olmak üzere,

$$Fd(k, n) = Fd(k, -n + k) + Fd(k, -n + 1), n \geq 0$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan diziye negatif tamsayılar için distance Fibonacci sayı dizisi denir.

Bazı özel k değerleri ve negatif n tamsayıları için distance Fibonacci sayı dizisinin terimleri Tablo 3.2’de gösterilmiştir.

Tablo 3.2. Negatif n tamsayıları için $Fd(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi.

n	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$Fd(2, n)$	34	-21	13	-8	5	-3	2	-1	1	0	1
$Fd(3, n)$	2	-1	0	1	-1	1	0	0	1	0	1
$Fd(4, n)$	6	-4	3	-2	2	-1	1	0	1	0	1
$Fd(5, n)$	-2	2	-1	1	0	0	1	0	1	0	1

Teorem 3.1.3.

$k \geq 2$ ve $n \geq 0$ tamsayılar olsun.

- i) $\sum_{i=0}^n Fd(k, -ki) = -Fd(k, -nk - 1) + 1$
- ii) $\sum_{i=0}^n Fd(k, -ki + 1) = -Fd(k, -nk) + 2$

İspat.

- i) $n = 0$ için $Fd = (k, 0) = 1 = 1 = 0 + 1 = Fd(k, 1) + 1$ olur. Varsayalım keyfi n için, $\sum_{i=0}^n Fd(k, -ki) = -Fd(k, -nk - 1) + 1$ ifadesi doğru olsun. $n+1$ için

$$\sum_{i=0}^{n+1} Fd(k, -ki) = -Fd(k, -(n+1)k - 1) + 1$$

ifadesinin doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} Fd(k, -ki) &= \sum_{i=0}^n Fd(k, -ki) + Fd(k, -nk - 1) \\
&= -Fd(k, -nk - 1) + 1 + Fd(k, -nk - k) \\
&= -Fd(k, -nk - k - 1) + 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Benzer şekilde, ii)'de ispatlanabilmektedir.

Bilinen Fibonacci sayı dizilerinin matris gösterimi $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$ dir. Bu matrisin determinanı Cassini formülünü vermektedir;

$$\det Q_n = (-1)^n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$$

Bu bilgiler ışığında distance Fibonacci sayı dizilerinin matris üreteçleri tanımlanmaktadır.

Tanım 3.1.4.

$Q_k = [q_{ij}]_{k \times k}$ matrisi verilsin. Başlangıç koşulu olarak, $1 \leq i \leq k$ için, q_{i1} , $Fd(k, n)$ distance Fibonacci sayı dizilerinin açılımında $Fd(k, n - i)$ 'nin katsayısına eşittir.

Ayrıca $j \geq 2$ için

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, j = i + 1 \\ 0, j \neq i + 1 \end{cases}$$

olur. Bu tanımdan $k = 2, 3, 4, \dots, k$ için

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix}$$

Q_k matrisi, distance Fibonacci sayı dizilerinin matris üreticidir, bu nedenle Q_k matrisi distance Fibonacci matrisi olarak adlandırılmaktadır. Ayrıca başlangıç koşulu olarak A_k matrisi tanımlanmaktadır. Bu matris aşağıdaki gibidir:

$$A_k = \begin{bmatrix} Fd(k, 2k-2) & Fd(k, 2k-3) & . & . & . & Fd(k, k) & Fd(k, k-1) \\ Fd(k, 2k-3) & Fd(k, 2k-4) & . & . & . & Fd(k, k-1) & Fd(k, k-2) \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ Fd(k, k) & Fd(k, k-1) & . & . & . & Fd(k, 2) & Fd(k, 1) \\ Fd(k, k-1) & Fd(k, k-2) & . & . & . & Fd(k, 1) & Fd(k, 0) \end{bmatrix}$$

Teorem 3.1.5.

$k \geq 2, n \geq 1$ tamsayılar olsun. O halde,

$$A_k Q_k^n = \begin{bmatrix} Fd(k, n+2k-2) & . & . & . & Fd(k, n+k) & Fd(k, n+k-1) \\ Fd(k, n+2k-3) & . & . & . & Fd(k, n+k-1) & Fd(k, n+k-2) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ Fd(k, n+k) & . & . & . & Fd(k, n+2) & Fd(k, n+1) \\ Fd(k, n+k-1) & . & . & . & Fd(k, n+1) & Fd(k, n) \end{bmatrix}$$

olur.

İspat.

Eğer $n=1$ ise, $Fd(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin genel tanımından ve basit hesaplamalarla ifadenin doğru olduğu görülmektedir.

Yukarıdaki ifadenin n için doğru olduğunu varsayalım. Bu ifadenin $n+1$ için bu ifadenin doğru olduğu gösterilmelidir.

$A_k Q_k^{n+1} = (A_k Q_k^n) Q_k$, varsayımdan ve genel tanımdan,

$$\begin{aligned}
 A_k Q_k^{n+1} &= \begin{bmatrix} Fd(k, n+2k-2) & . & . & . & Fd(k, n+k) & Fd(k, n+k-1) \\ Fd(k, n+2k-3) & . & . & . & Fd(k, n+k-1) & Fd(k, n+k-2) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ Fd(k, n+k) & . & . & . & Fd(k, n+2) & Fd(k, n+1) \\ Fd(k, n+k-1) & . & . & . & Fd(k, n+1) & Fd(k, n) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} Fd(k, n+2k-1) & . & . & . & Fd(k, n+k+1) & Fd(k, n+k) \\ Fd(k, n+2k-2) & . & . & . & Fd(k, n+k) & Fd(k, n+k-1) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ Fd(k, n+k-1) & . & . & . & Fd(k, n+3) & Fd(k, n+2) \\ Fd(k, n+k) & . & . & . & Fd(k, n+2) & Fd(k, n+1) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.2. $F_2(k, n)$ -Distance Fibonacci Sayı Dizisi

Tanım 3.2.1.

$k \geq 1$, $n \geq 0$ tamsayılar olsun.

$F_2(k, i) = 1$, $i = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ başlangıç koşulu olmak üzere,

$$F_2(k, n) = F_2(k, n-2) + F_2(k, n-k)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan diziye $F_2(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi denir. Bu diziye, $(2, k)$ -distance Fibonacci dizisi de denir (Włoch, vd., 2013).

Bu sayı dizisinin, her bir elemanı kendinden önceki 2. elemanı ile kendinden önceki k . elemanın toplanması ile elde edilmektedir.

Bazı özel k ve n değerleri için, $F_2(k, n)$ -distance Fibonacci dizisinin aldığı değerler aşağıdaki Tablo 3.3.teki gibidir.

Tablo 3.3. $F_2(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$F_2(1, n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
$F_2(2, n)$	1	1	2	2	4	4	8	8	16	16	32	32	64	64	128
$F_2(3, n)$	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37
$F_2(4, n)$	1	1	1	1	2	2	3	3	5	5	8	8	13	13	21
$F_2(5, n)$	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12
$F_2(6, n)$	1	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	4	6	6	9

$F_2(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi üzerine çalışıldığında aşağıdaki özellikler görülmektedir.

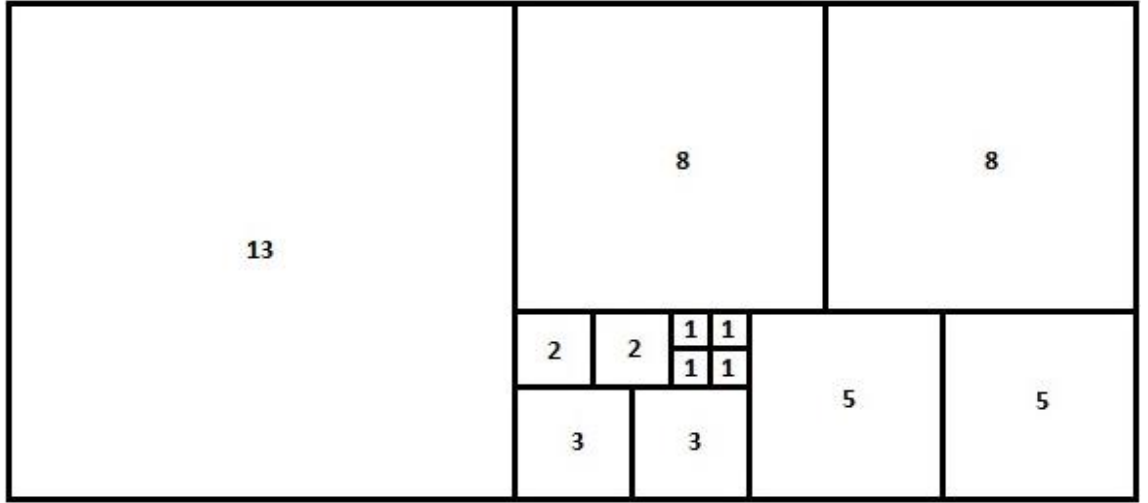
k çift sayı olduğunda, $F_2(k, 2n) = F_2(k, 2n + 1)$ olur. Yani, dizinin terimlerinin 2 defa tekrarlandığı görülmektedir. Bu yüzden, k çift sayı ise, elde edilen dizilere ‘ikiz’ $(2, k)$ –distance Fibonacci sayı dizisi denilmektedir.

$F_2(1, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi, bilinen Fibonacci sayı dizisidir.

$F_2(2, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin terimleri 2’nin kuvvetlerinin 2 defa tekrar edilmesi ile oluşmaktadır.

$F_2(3, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi, Padovan sayı dizisidir.

$F_2(4, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin terimleri, bilinen Fibonacci sayı dizisinin terimlerinin 2 defa tekrar edilmesi ile oluşmaktadır. Aşağıdaki Şekil 3.4’te bir düzlemin bu dizinin terimleri ile kaplanması bir yorumunu göstermektedir.



Şekil 3.4. $F_2(4, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin bir yorumu.

Şekil 3.4.'e $F_2(4, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin bir yorumudur. Bu şekil, bu dizinin terimlerinden oluşan karelerin birleşmesiyle düzlemin nasıl kaplanacağını bir yorumu olarak verilmektedir.

$F_2(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi negatif tamsayılar için tanımlanmıştır.

Tanım 3.2.2.

$k \geq 1$, $k \neq 2$ ve $n \geq 0$ tamsayılar olsun.

$F_2(k, 0) = F_2(k, 1) = 1$ başlangıç koşulu olmak üzere,

$$F_2(k, -n) = F_2(k, k - n) - F_2(k, k - 2 - n), \quad n \geq 1$$

rekürans bağıntısı ile verilen diziye negatif tamsayılar için $F_2(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi denir. Bazı özel k değerleri ve n negatif tamsayıları için, $(2, k)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin bazı terimleri Tablo 3.4.'te gösterilmiştir.

Tablo 3.4. n negatif tamsayıları için $F_2(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi.

n	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$F_2(1, n)$	34	-21	13	-8	5	-3	2	-1	1	0	1
$F_2(3, n)$	2	-1	0	1	-1	1	0	0	0	0	1
$F_2(4, n)$	-3	-3	2	2	-1	-1	1	1	0	0	1
$F_2(5, n)$	2	1	-1	-1	0	1	1	0	0	0	1
$F_2(6, n)$	-1	-1	0	0	1	1	0	0	0	0	1

Teorem 3.2.3.

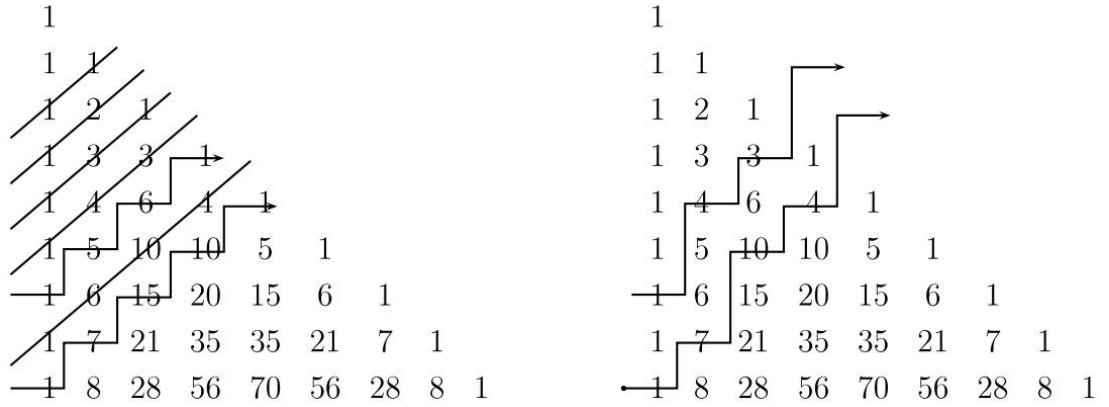
n ve k tamsayılar olsun ve $n \geq 0$ olsun. O halde,

- i) $\sum_{i=0}^n F_2(k, 2i) = F_2(k, 2n + k) - 1, k \geq 2$
- ii) $\sum_{i=0}^n F_2(k, 2i + 1) = F_2(k, 2n + k + 1) - 1, k \geq 1$
- iii) $\sum_{i=0}^n F_2(k, ki + m) = F_2(k, nk + m + 2) - 1, k \geq 3$ ve $0 \leq m \leq k - 3$

olur (Włoch, vd., 2013)

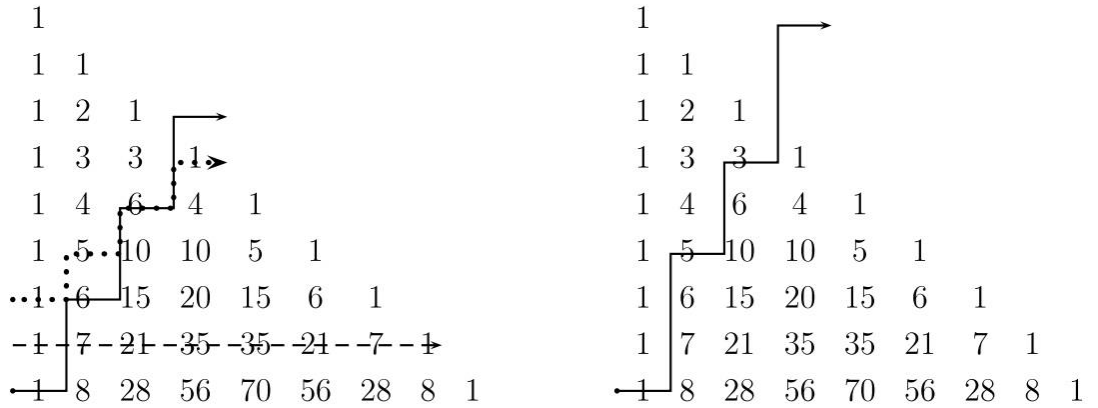
Pascal üçgeninin köşegenlerindeki sayıların toplamının ardışık Fibonacci sayıları olduğu bilinmektedir. Ayrıca Pascal üçgeninin satırları sola dayalı olarak gösterilebilmektedir.

Fibonacci sayıları bir merdivenle belirlenmiştir. Aşağıdaki Şekil 3.5. (a)'da, Pascal üçgeninin köşegenlerindeki sayılar, eğik düz çizgilerle işaretlenmiştir. Bu çizgilerin toplamı $F_2(1, n) = F_n$, bilinen Fibonacci dizisini verir. Şekil 3.5. (b)'de ise, Pascal üçgeni sonsuz bir alanı göstermektedir. Ardışık merdivenlerin yüksekliği $\left\lfloor \frac{k-2}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{k-2}{2} \right\rceil$ olup, bütün $F_2(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizilerini Pascal üçgeninin terimlerinin toplamı olarak belirlemektedir. $k = 5$ olmak üzere, $F_2(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizileri için inşa edilmiş merdiven 2,1,2,1, ... yüksekliklerindedir. Bunları aşağı veya yukarı hareket ettirerek n tek sayıları için, $F_2(5, n)$ -distance Fibonacci sayı dizilerinin terimleri elde edilir. n çift sayıları için, bir sütun üzerinde yükseklikler 1,2,1,2, ... olacak şekilde $F_2(5, n)$ -distance Fibonacci sayı dizilerinin terimleri elde edilir. Buna merdiven yorumu da denir.



Şekil 3.5 (a) ve (b). $F_2(2, n)$ ve $F_2(5, n)$ -distance Fibonacci sayı dizileri ile Pascal üçgeni arasındaki ilişki.

Aşağıdaki Şekil 3.6. (a)'da, Pascal üçgeni k çift sayı olduğundaki $F_2(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizilerini göstermektedir. $F_2(6, n)$ -distance Fibonacci sayı dizileri kesintisiz çizgi, $F_2(4, n)$ -distance Fibonacci sayı dizileri noktalı çizgi ile gösterilmektedir. İkili sayılar tüm terimlerin toplamı olduğundan, satır kesikli çizgi ile gösterilmiştir. Şekil 3.6. (b)'de ise, Pascal üçgeni $F_2(7, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisini göstermektedir.



Şekil 3.6. (a) ve (b). $F_2(4, n)$, $F_2(6, n)$ ve $F_2(7, n)$ -distance Fibonacci sayı dizileri ile Pascal üçgeni arasındaki ilişki.

3.3. $F_2(k,n)$ -Distance Fibonacci Sayı Dizisinin Matris Üreteci

$F_2(k,n)$ -distance Fibonacci sayı dizilerinin matris üreteçleri şu şekildedir;

$Q_k = [q_{ij}]_{k \times k}$ matrisi verilsin. Başlangıç koşulu olarak, $1 \leq i \leq k$ için, q_{i1} , $F_2(k,n)$ -distance Fibonacci sayı dizilerinin açılımında $F_2(k, n-i)$ 'nin katsayısına eşittir.

Ayrıca $j \geq 2$ için,

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, j = i + 1 \\ 0, j \neq i + 1 \end{cases}$$

olur. Bu tanımdan $k = 2, 3, 4, \dots, k$ için

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Q_k matrisi distance Fibonacci sayı dizilerinin matris üretecidir, bu nedenle Q_k matrisi distance Fibonacci matrisi olarak adlandırılmaktadır. Ayrıca başlangıç koşulu olarak P_k matrisi tanımlanmaktadır. Bu matris aşağıdaki gibidir:

$$P_k = \begin{bmatrix} F_2(k, 2k-2) & F_2(k, 2k-3) & \dots & \dots & F_2(k, k) & F_2(k, k-1) \\ F_2(k, 2k-3) & F_2(k, 2k-4) & \dots & \dots & F_2(k, k-1) & F_2(k, k-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_2(k, k) & F_2(k, k-1) & \dots & \dots & F_2(k, 2) & F_2(k, 1) \\ F_2(k, k-1) & F_2(k, k-2) & \dots & \dots & F_2(k, 1) & F_2(k, 0) \end{bmatrix}$$

Teorem 3.3.1.

$$P_k Q_k^n = \begin{bmatrix} F_2(k, n+2k-2) & . & . & . & F_2(k, n+k) & F_2(k, n+k-1) \\ F_2(k, n+2k-3) & . & . & . & F_2(k, n+k-1) & F_2(k, n+k-2) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ F_2(k, n+k) & . & . & . & F_2(k, n+2) & F_2(k, n+1) \\ F_2(k, n+k-1) & . & . & . & F_2(k, n+1) & F_2(k, n) \end{bmatrix}$$

olur (Włoch, vd., 2013).

Teorem 3.3.2.

$k \geq 2$ tamsayılar olsun. O halde,

$$\det Q_k = (-1)^{k+1}$$

$$\det P_k = (-1)^{\frac{(k+1)k-2}{2}}$$

(Włoch, vd., 2013).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, $F_3(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizileri ile $F_4(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizileri tanımlanmıştır. Bu dizilere ait özellikler incelenmiş olup, temel teoremler verilmiştir. Bu dizilerin üreteç fonksiyonları ve matris gösterimleri üzerine çalışılmıştır. Negatif tamsayılar için bu dizilerin tanımları genişletilmiştir. Ayrıca bu dizilerin graf yorumları verilmiştir. Akabinde bu dizi ailelerinin tanımı genelleştirilerek $F_t(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizileri tanımlanmıştır. Tanımlanan genelleştirilmiş distance Fibonacci sayı dizisi için çeşitli özellikler ile temel teoremler verilmiş olup, bu dizi ailesi negatif tamsayılar için de tanımlanmıştır. İlerleyen aşamalarda bu dizi ailesinin üreteç fonksiyonları ve matris gösterimleri verilmiş olup graf yorumları da incelenmiştir.

4.1. $F_3(k, n)$ -Distance Fibonacci Sayı Dizisi

Tanım 4.1.1.

$k \geq 1, n \geq 0$ tamsayıları verilsin.

$F_3(k, n) = 1, n = \{0, 1, 2, \dots, \max\{2, k - 1\}\}$ başlangıç koşulu olmak üzere,

$$F_3(k, n) = F_3(k, n - 3) + F_3(k, n - k), n \geq \max\{3, k\}$$

rekürans bağıntısı ile verilen diziye $F_3(k, n)$ -distance Fibonacci dizisi denir. Bu diziye, $(3, k)$ -distance Fibonacci dizisi de denir (Özkan, Yılmaz, Włoch, 2021).

Bu sayı dizisinin, her bir elemanı kendinden önceki 3. elemanı ile kendinden önceki k . elemanın toplanması ile elde edilmektedir.

Bazı özel k ve n değerleri için, $F_3(k, n)$ -distance Fibonacci dizisinin aldığı değerler aşağıdaki Tablo 4.1.'deki gibidir.

Tablo 4.1. $F_3(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$F_3(1, n)$	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129	189
$F_3(2, n)$	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49
$F_3(3, n)$	1	1	1	2	2	2	4	4	4	4	5	7	8	9	12	15
$F_3(4, n)$	1	1	1	1	2	2	2	3	4	4	5	7	8	9	12	15
$F_3(5, n)$	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	5	5	7	8	9
$F_3(6, n)$	1	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	5	5	5	8
$F_3(7, n)$	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	5	5
$F_3(8, n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4
$F_3(9, n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4
$F_3(10, n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3

$F_3(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi üzerine çalışıldığında aşağıdaki özellikler görülmektedir.

$F_3(1, n + 1)$ -distance Fibonacci dizisinin terimleri $\{1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, \dots\}$ olup, bu terimler Narayana dizisini vermektedir.

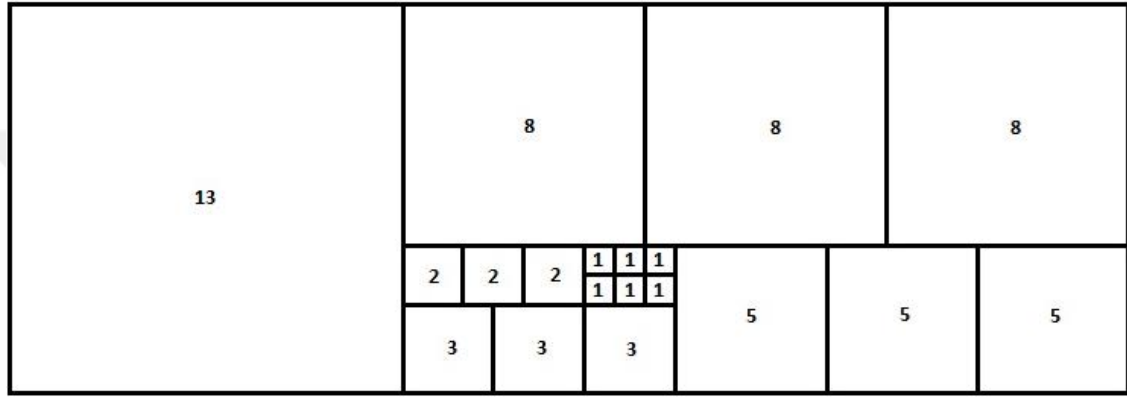
$F_3(2, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi $\{1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, \dots\}$ olup, bu terimler Padovan sayı dizisini vermektedir.

$F_3(3, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin terimleri $\{1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 8, 8, 8, 16, 16, 16, \dots\}$ olup, bu terimlerin $\{2^0, 2^0, 2^0, 2^1, 2^1, 2^1, 2^2, 2^2, 2^2, 2^3, 2^3, 2^3, 2^4, 2^4, 2^4, \dots\}$ şeklinde olduğu görülmektedir. Buradan hareketle $F_3(3, n) = 2^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}$ olup, sonuç olarak bu dizinin terimleri, 2'nin kuvvetlerinin 3 defa tekrar edilmesi ile oluşmaktadır.

$F_3(4, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin terimleri A079398 dizisini vermektedir (OEIS, 2024).

$F_3(5, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin terimleri A226503 dizisini vermektedir (OEIS, 2024).

$F_3(6, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin terimleri $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 5, 5, \dots\}$ olup, $F_3(6, n) = F_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}$ dir. Sonuç olarak, bu dizi Fibonacci sayı dizisinin terimlerinin 3 defa tekrar edilmesinden meydana gelmektedir. $F_3(6, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisine üçlü Fibonacci sayı dizisi de denmektedir. Aşağıdaki Şekil 4.1.'de bir düzlemin üçlü Fibonacci sayı dizisinin terimleri ile kaplanmasını göstermektedir. Bu yorum dizinin terimlerinin oluşturduğu karelerin büyüterek devam etmesi ile bir düzlemi kaplamasını ifade etmektedir.



Şekil 4.1. $F_3(6, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin bir yorumu.

Tanım 4.1.2.

$k = 1, 2, 3$ için, $F_3(1, -n) = F_3(1, -n + 3) - F_3(1, -n + 2)$

$$F_3(2, -n) = F_3(2, -n + 3) - F_3(2, -n + 1)$$

$$F_3(3, -n) = \frac{1}{2} F_3(3, -n + 3)$$

$k \geq 4$ için, $F_3(k, n) = 1, n = 0, 1, 2, \dots, k - 1$ başlangıç koşulları olmak üzere,

$$F_3(k, -n) = F_3(k, -n + k) - F_3(k, -n + (k - 3))$$

rekürans bağıntısı ile verilen diziye negatif tamsayılar için tanımlanmış $F_3(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi denir (Özkan, Yılmaz, Włoch, 2021).

Aşağıdaki Tablo 4.2.'de k ve n 'nin aldığı bazı özel değerlerde, negatif tamsayılar için tanımlanmış $F_3(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin aldığı değerler görülmektedir.

Tablo 4.2. Negatif tamsayılar için $F_3(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$F_3(1, n)$	1	1	1	0	0	1	0	-1	1	1	-2	0	3	-2	-3	5
$F_3(2, n)$	1	1	1	0	1	0	0	1	-1	1	0	-1	2	-2	1	1
$F_3(3, n)$	1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
$F_3(4, n)$	1	1	1	1	0	1	0	1	-1	2	-2	3	-4	6	-8	11
$F_3(5, n)$	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	-1	0	2	1	-2	-2
$F_3(6, n)$	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1	2
$F_3(7, n)$	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	-1
$F_3(8, n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1

Negatif n tamsayıları için, $F_3(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi üzerine çalışıldığında aşağıdaki özellikler görülmektedir. n negatif bir tamsayı olmak üzere;

$F_3(3, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin terimleri,

$$\left\{1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \dots\right\}$$

olup bu terimlerin

$$\left\{\frac{1}{2^0}, \frac{1}{2^0}, \frac{1}{2^0}, \frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^4}, \dots\right\}$$

şeklinde olduğu görülmektedir. Buradan hareketle $F_3(3, n) = \frac{1}{2^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}}$ olup, sonuç olarak bu dizinin terimleri, $\frac{1}{2}$ 'nin kuvvetlerinin 3 defa tekrar edilmesi ile oluşmaktadır.

$F_3(6, n)$ -distance Fibonacci dizisinin terimleri üçer defa tekrarlanmalarla oluşur.

Teorem 4.1.3.

$k \geq 1, n \geq 0$ tamsayıları olmak üzere,

$$F_3(3k, 3n) = F_3(3k, 3n + 1) = F_3(3k, 3n + 2)$$

dir (Özkan, Yılmaz, Włoch, 2021).

İspat.

İspat n üzerinden tümevarım yoluyla yapılmaktadır. $F_3(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin genel tanımından,

$$F_3(3k, 0) = F_3(3k, 1) = \dots = F_3(3k, 3k - 1) = 1$$

olur. Aynı şekilde $F_3(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin genel tanımından,

$$F_3(3k, 3k) = F_3(3k, 3k + 1) = F_3(3k, 3k + 2) = 2$$

Aynı şekilde

$$F_3(3k, 3k + 3) = F_3(3k, 3k + 4) = F_3(3k, 3k + 5) = 3$$

$\forall t \leq n$ için

$$F_3(3k, 3t) = F_3(3k, 3t + 1) = F_3(3k, 3t + 2)$$

doğru olduğunu varsayalım.

$$F_3(3k, 3(n + 1)) = F_3(3k, 3(n + 1) + 1) = F_3(3k, 3(n + 1) + 2)$$

doğru olduğunu gösterelim.

$$F_3(3k, 3(n + 1)) = F_3(3k, 3n + 3) = F_3(3k, 3n) + F_3(3k, 3n + 3 - 3k)$$

$$= F_3(3k, 3n) + F_3(3k, 3(n + 1 - k))$$

$$F_3(3k, 3(n + 1) + 1) = F_3(3k, 3n + 4) = F_3(3k, 3n) + F_3(3k, 3n + 4 - 3k)$$

$$= F_3(3k, 3n) + F_3(3k, 3(n + 1 - k) + 1)$$

$$\begin{aligned}
F_3(3k, 3(n+1) + 2) &= F_3(3k, 3n + 5) = F_3(3k, 3n) + F_3(3k, 3n + 5 - 3k) \\
&= F_3(3k, 3n) + F_3(3k, 3(n+1 - k) + 2)
\end{aligned}$$

Yukarıdaki varsayımdan bu üç ifadenin de birbirine eşit olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.4.

$k \geq 3, n \geq 0$ tamsayıları olmak üzere, $0 \leq t \leq 2$ için

$$\sum_{i=0}^n F_3(k, 3i + t) = F_3(k, 3n + k + t) - 1$$

dır (Özkan, Yılmaz, Włoch, 2021).

İspat.

İspat n üzerinden tümevarım yoluyla yapılmaktadır. $k \geq 3$ keyfi bir tamsayı ve $t=0$ için ifadenin doğru olduğunu gösterilir. $t = 1$ ve $t = 2$ için de benzer şekilde ispatlanır.

Eğer $n=0$ ise, $F_3(k, 0) = F_3(k, 3 \cdot 0 + k) - 1 = 2 - 1 = 1$.

Eğer $n=1$ ise, $k=3$ için, $F_3(k, 0) + F_3(k, 3) = 1 + 2 = F_3(k, 3 + 3) - 1 = 4 - 1 = 3$

ve $k > 3$ için

$$F_3(k, 0) + F_3(k, 3) = 1 + 1 = F_3(k, 3 + k) - 1 = 3 - 1 = 2.$$

Varsayalım ki

$$\sum_{i=0}^n F_3(k, 3i) = F_3(k, 3n + k) - 1$$

doğru olsun. Buradan

$$\sum_{i=0}^{n+1} F_3(k, 3i) = \sum_{i=0}^n F_3(k, 3i) + F_3(k, 3(n+1))$$

$$= F_3(k, 3n + k) - 1 + F_3(k, 3n + 3) = F_3(k, 3(n + 1) + k) - 1$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.5.

$k \geq 1, n \geq 0$ tamsayıları olmak üzere, $F_3(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$g(x) = \frac{1+t}{1-x^3-x^k}, t = \begin{cases} 0, k=1 \\ x, k=2 \\ x+x^2, k \geq 3 \end{cases}$$

(Özkan, Yılmaz, Włoch, 2021).

İspat.

$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_3(k, n) \cdot x^n$. 4.1.1. tanımından,

$$g(x) - x^3 g(x) - x^k g(x) = 1+t, t = \begin{cases} 0, k=1 \\ x, k=2 \\ x+x^2, k \geq 3 \end{cases}$$

Buradan hareketle, $g(x) = \frac{1+t}{1-x^3-x^k}$ bulunmaktadır.

Teorem 4.1.5.'ten, k 'nın özel değerleri için Narayana ve Padovan sayı dizilerinin üreteç fonksiyonları elde edilmektedir.

Sonuç 4.1.6.

$k = 1$ olduğunda Narayana sayı dizisinin üreteç fonksiyonu, $g(x) = \frac{1}{1-x-x^3}$ olarak bulunmaktadır.

$k = 2$ olduğunda Padovan sayı dizisinin üreteç fonksiyonu, $g(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x^2-x^3}$ olarak bulunmaktadır.

4.2. $F_3(k,n)$ -Distance Fibonacci Sayı Dizisinin Matris Üretici

$Q_k = [q_{ij}]_{k \times k}$ bir kare matris olsun. $1 \leq i \leq k$ olacak şekilde q_{i1} , $F_3(k, i)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin genel tanıma uygun bir şekilde açıldığında sağ taraftaki katsayısına eşittir. $j > 1$ ve keyfi bir i için, eğer $j = i + 1$ ise, $q_{ij} = 1$ ve diğer durumlarda $q_{ij} = 0$ olur. Buradan hareketle matrisler aşağıdaki gibidir;

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots, Q_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Başlangıç koşulu olarak, P_k kare matrisi tanımlanmaktadır;

$$P_k = \begin{bmatrix} F_3(k, 2k-2) & F_3(k, 2k-3) & \dots & \dots & F_3(k, k) & F_3(k, k-1) \\ F_3(k, 2k-3) & F_3(k, 2k-4) & \dots & \dots & F_3(k, k-1) & F_3(k, k-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_3(k, k) & F_3(k, k-1) & \dots & \dots & F_3(k, 2) & F_3(k, 1) \\ F_3(k, k-1) & F_3(k, k-2) & \dots & \dots & F_3(k, 1) & F_3(k, 0) \end{bmatrix}$$

Laplace açılımını ve determinantların temel özelliklerini kullanarak, aşağıdaki sonuçlar elde edilmektedir.

Teorem 4.2.1.

$k \geq 3$ bir tamsayı olsun.

$$\det Q_3 = 2, \det Q_k = (-1)^{k+1} \text{ ve } \det P_k = (-1)^{2k + \frac{k(k+1)}{2} - 3}$$

(Özkan, Yılmaz, Włoch, 2021).

Teorem 4.2.2.

$k \geq 3, n \geq 0$ tamsayılar olsun.

$$P_k Q_k^n = \begin{bmatrix} F_3(k, n+2k-2) & . & . & . & F_3(k, n+k) & F_3(k, n+k-1) \\ F_3(k, n+2k-3) & . & . & . & F_3(k, n+k-1) & F_3(k, n+k-2) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ F_3(k, n+k) & . & . & . & F_3(k, n+2) & F_3(k, n+1) \\ F_3(k, n+k-1) & . & . & . & F_3(k, n+1) & F_3(k, n) \end{bmatrix}$$

dır (Özkan, Yılmaz, Włoch, 2021).

İspat.

Eğer $n = 1$ ise, $F_3(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin genel tanımından ve basit hesaplamalarla ifadenin doğru olduğu görülmektedir.

Yukarıdaki ifadenin n için doğru olduğunu varsayalım. Bu ifadenin $n+1$ için bu ifadenin doğru olduğu gösterilmelidir.

$P_k Q_k^{n+1} = (P_k Q_k^n) Q_k$, varsayımdan ve genel tanımdan

$$P_k Q_k^{n+1} = \begin{bmatrix} F_3(k, n+2k-2) & . & . & . & F_3(k, n+k) & F_3(k, n+k-1) \\ F_3(k, n+2k-3) & . & . & . & F_3(k, n+k-1) & F_3(k, n+k-2) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ F_3(k, n+k) & . & . & . & F_3(k, n+2) & F_3(k, n+1) \\ F_3(k, n+k-1) & . & . & . & F_3(k, n+1) & F_3(k, n) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_3(k, n+2k-1) & . & . & . & F_3(k, n+k+1) & F_3(k, n+k) \\ F_3(k, n+2k-2) & . & . & . & F_3(k, n+k) & F_3(k, n+k-1) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ F_3(k, n+k-1) & . & . & . & F_3(k, n+3) & F_3(k, n+2) \\ F_3(k, n+k) & . & . & . & F_3(k, n+2) & F_3(k, n+1) \end{bmatrix}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2.3.

$k \geq 3, n \geq 2$ tamsayıları olsun.

$$\det P_k Q_k^n = (-1)^{\left[2k + \frac{k(k+1)}{2} - 3\right] + n \cdot (k+1)}$$

dır (Özkan, Yılmaz, Włoch, 2021).

4.3. $F_3(k, n)$ -Distance Fibonacci Sayı Dizisinin Pascal Üçgeni ile İlişkisi

$F_3(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin Pascal üçgeni ile ilişkisini incelemek için $F_3(k, n)$ dizisi ile aynı rekürans bağıntısına sahip başlangıç koşulları farklı olan yeni bir dizi ailesi tanımlanmıştır.

Tanım 4.3.1.

$k \geq 1, n \geq 0$ tamsayılar olsun.

$$F_3^i(k, n) = \begin{cases} 1, n = k - i \\ 0, n \neq k - i \end{cases}, n = 0, 1, 2, \dots, \max\{2, k - 1\} \text{ başlangıç koşulları olmak}$$

üzere,

$$F_3^i(k, n) = F_3^i(k, n-3) + F_3^i(k, n-k)$$

rekürans bağıntısı ile verilen diziye $F_3^i(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi denir (Özkan, Yılmaz, Włoch, 2021).

Bazı özel n değerleri ve $k = 5$ için, bu dizinin terimleri ile $F_3(5, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi bazı terimleri Tablo 4.3'te gösterilmektedir.

Tablo 4.3. $F_3(5, n)$ ve $F_3^i(5, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$F_3^1(5, n)$	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	2	1	1	3
$F_3^2(5, n)$	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	2	1	1	3	1
$F_3^3(5, n)$	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	2	1	1	3	1	3
$F_3^4(5, n)$	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	2	1
$F_3^5(5, n)$	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	2	1	1
$F_3(5, n)$	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	5	5	7	8	9

Teorem 4.3.2.

$k \geq 4$, $n \geq 0$ ve $0 \leq i \leq k - 1$ tamsayılar olsun. O halde,

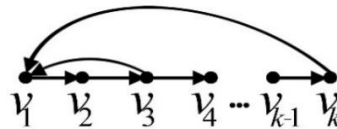
$$F_3(k, n) = \sum_{i=0}^{\max\{2, k-1\}} F_3^i(k, n)$$

dır (Özkan, Yılmaz, Włoch, 2021).

Q_k matrisinin n . kuvveti, $F_3^i(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin terimlerinden oluşmaktadır (Er,1984).

$$Q_k^n = \begin{bmatrix} F_3^1(k, n+k-1) & . & . & . & F_3^1(k, n-1) & F_3^1(k, n) \\ F_3^2(k, n+k-1) & . & . & . & F_3^2(k, n-1) & F_3^2(k, n) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ F_3^{k-1}(k, n+k-1) & . & . & . & F_3^{k-1}(k, n-1) & F_3^{k-1}(k, n) \\ F_3^k(k, n+k-1) & . & . & . & F_3^k(k, n-1) & F_3^k(k, n) \end{bmatrix}$$

Q_k matrisi Şekil 4.2’te görülen özel bir D grafının bitişiklik matrisi olarak yorumlanmaktadır.



Şekil 4.2. D Grafı.

Q_k^n matrisinin D grafindaki karşılık gelen köşeler arasındaki n uzunluğundaki tüm farklı yolların sayısını içerdiği iyi bilinmektedir. Bu yorum kullanılarak aşağıdaki teorem ispatlanmaktadır.

Teorem 4.3.3.

$k \geq 4$, $n \geq 0$ ve $0 \leq i \leq k - 1$ tamsayılar olsun. O halde,

$$F_k^i(k, n) = \sum_{\substack{\alpha_3, \alpha_k \\ 3\alpha_3 + k\alpha_k = n}} \binom{\alpha_3 + \alpha_k}{\alpha_3}$$

$$F_k^i(k, n) = \sum_{\substack{\alpha_3, \alpha_k \\ 3\alpha_3 + k\alpha_k = n - (3 - j + 1)}} \binom{\alpha_3 + \alpha_k}{\alpha_3} + \sum_{\substack{\alpha_3, \alpha_k \\ 3\alpha_3 + k\alpha_k = n - (k - j + 1)}} \binom{\alpha_3 + \alpha_k}{\alpha_3}, j = 2, 3$$

ve

$$F_3^i(k, n) = \sum_{\substack{\alpha_3, \alpha_k \\ 3\alpha_3 + k\alpha_k = n - (k - j + 1)}} \binom{\alpha_3 + \alpha_k}{\alpha_3}, 3 < j \leq k.$$

(Özkan, Yılmaz, Włoch, 2021).

İspat. $1 \leq j \leq k$ için, Q_k^n matrisinin q_{j1} elemanı, v_j tepe noktasından v_1 tepe noktasına kadar n uzunluğundaki farklı yönlendirilmiş yolların toplam sayısına eşittir. Bu Şekil 4.2’de görülmektedir. Bu tür yolların her biri başlangıçta kısa bir $P = v_1 - \dots - v_1$ yolunu ve ardından 3 veya k uzunluğundaki döngülerden oluşan bir C dizisini içermektedir.

Kısa yol P ’ye bağlı olarak n uzunluğundaki birkaç yolu ele alalım.

Durum 1. $P = v_1 - v_2 - v_3 - v_1$ veya $P = v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - \dots - v_k - v_1$. Bu durumda P yolu sırasıyla C_3 veya C_k döngüsü oluşturur. Tüm yol rastgele sırasıyla C_3 veya C_k döngülerinin bir dizisidir; onun uzunluğu eşitliği sağlayan α_3, α_k eşitliği için $n = 3\alpha_3 + k\alpha_k$ olur. Böylece,

$$\sum_{\substack{\alpha_3, \alpha_k \\ 3\alpha_3 + k\alpha_k = n}} \binom{\alpha_3 + \alpha_k}{\alpha_3} = F_3^i(k, n)$$

Durum 2. $P = v_j - v_{j+1} - \dots - v_k - v_1$, $1 < j \leq k$. P yolunun uzunluğu $k - j + 1$ ve uzunluğun kalan kısmı $n - (k - j + 1) = 3\alpha_3 + k\alpha_k$ olur. C_3 veya C_k döngüsünden oluşur. Durum 1'e benzer şekilde

$$\sum_{\substack{\alpha_3, \alpha_k \\ 3\alpha_3 + k\alpha_k = n - (k - j + 1)}} \binom{\alpha_3 + \alpha_k}{\alpha_3}$$

olur.

Durum 3. $P = v_j - \dots - v_3 - v_1$, $1 < j \leq 3$. P yolunun uzunluğu $3 - j + 1$ ve $3 - j + 1 = 3\alpha_3 + k\alpha_k$ olur. Buradan

$$\sum_{\substack{\alpha_3, \alpha_k \\ 3\alpha_3 + k\alpha_k = n - (3 - j + 1)}} \binom{\alpha_3 + \alpha_k}{\alpha_3}$$

olur.

$j = 2, 3$ için

$$F_3^j(k, n) = \sum_{\substack{\alpha_3, \alpha_k \\ 3\alpha_3 + k\alpha_k = n - (3 - j + 1)}} \binom{\alpha_3 + \alpha_k}{\alpha_3} + \sum_{\substack{\alpha_3, \alpha_k \\ 3\alpha_3 + k\alpha_k = n - (k - j + 1)}} \binom{\alpha_3 + \alpha_k}{\alpha_3}$$

olur. $3 < j \leq k$ için

$$\sum_{\substack{\alpha_3, \alpha_k \\ 3\alpha_3 + k\alpha_k = n - (k - j + 1)}} \binom{\alpha_3 + \alpha_k}{\alpha_3} = F_3^j(k, n)$$

olur.

Teorem 4.3.4.

$k \geq 4$, $n \geq 0$ tamsayılar olsun. O halde,

$$F_3(k, n) = \sum_{i=0}^2 \sum_{\substack{\alpha_3, \alpha_k \\ 3\alpha_3 + k\alpha_k = n - (3 - i + 1)}} \binom{\alpha_3 + \alpha_k}{\alpha_3} + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\substack{\alpha_3, \alpha_k \\ 3\alpha_3 + k\alpha_k = n - (k - i + 1)}} \binom{\alpha_3 + \alpha_k}{\alpha_3}$$

olur (Özkan, Yılmaz, Włoch, 2021).

Bu teoremden, $F_3(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizilerine eşit olan toplamı elde edilmektedir. Binomları kullanarak $F_3(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizileri için yeni formüller türetilmektedir. Kolaylık sağlamak için grafiksel bir sunum kullanılmaktadır.

Örneğin, $F_3(4, 25)$ - distance Fibonacci sayı dizisi,

$$\binom{8}{7}, \binom{7}{3}, \binom{8}{8}, \binom{7}{4}, \binom{6}{0}, \binom{7}{5}, \binom{6}{1}, \binom{7}{6}, \binom{6}{2} \text{ ve } \binom{8}{8}, \binom{7}{4}, \binom{6}{0}, \binom{7}{5}, \binom{6}{1}$$

toplamıdır veya $F_3(4, 26)$ -distance Fibonacci sayı dizisi,

$$\binom{8}{6}, \binom{7}{2}, \binom{8}{7}, \binom{7}{3}, \binom{8}{8}, \binom{7}{4}, \binom{6}{0}, \binom{7}{5}, \binom{6}{1} \text{ ve } \binom{8}{7}, \binom{7}{3}, \binom{8}{8}, \binom{7}{4}$$

toplamıdır. Bu binomlar Pascal üçgeninin içinde geometrik desen oluşturmaktadır, buna merdiven denilmektedir.

$F_3(4, n)$ sayılarını Pascal üçgenini kullanarak hesaplamak kullanışlı bir yöntem olmaktadır.

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Yukarıda sunulan merdiven her iki yönde sonsuza uzatılabilmektedir. Böylesine sonsuz bir merdiveni bir sütun sola kaydırarak, bir sonraki $F_3(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisini elde edilmektedir. Merdivenin neredeyse her adımında bitişik iki binom var. Aşağıdaki Şekil 4.3'te binomun aşağıda yazılan temel özelliğini kullanarak hemen yeni bir en basit merdiven elde edilmektedir.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Şekil 4.3. $F_3(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi için bir merdiven yorumu.

4.4. $F_4(k, n)$ -Distance Fibonacci Sayı Dizisi

Tanım 4.4.1.

$k \geq 1, n \geq 0$ tamsayılar olsun.

$$F_4(k, n) = 1, n \in \{0, 1, 2, 3, \dots, \max\{3, k-1\}\}$$

başlangıç koşulu olmak üzere,

$$F_4(k, n) = F_4(k, n-4) + F_4(k, n-k), n \geq \max\{4, k\}$$

rekürans bağıntısı ile verilen diziye $F_4(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi denir. Bu dizi, $(4, k)$ -distance Fibonacci sayı dizisi olarak da ifade edilmektedir (Yılmaz, Włoch, Özkan ve Strzałka, 2023).

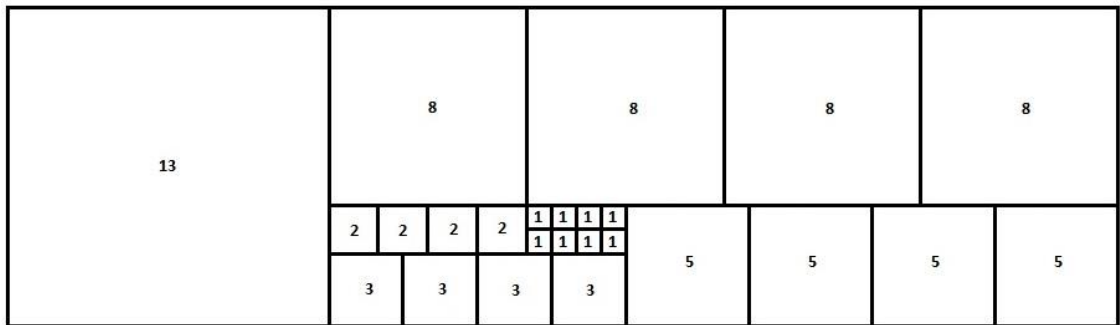
Bu sayı dizisinin, her bir elemanı kendinden önceki 4. elemanı ile kendinden önceki k. elemanın toplanması ile elde edilmektedir.

Bazı özel k ve n değerleri için, $F_4(k, n)$ -distance Fibonacci dizisinin aldığı değerler aşağıdaki Tablo 4.4.'teki gibidir.

Tablo 4.4. $F_4(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$F_4(1, n)$	1	1	1	1	2	3	4	5	7	10	14	19	26	36	50	69
$F_4(2, n)$	1	1	1	1	2	2	3	3	5	5	8	8	13	13	21	21
$F_4(3, n)$	1	1	1	1	2	2	2	3	4	4	5	7	8	9	12	15
$F_4(4, n)$	1	1	1	1	2	2	2	2	4	4	4	4	8	8	8	8
$F_4(5, n)$	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	4	4	4	5	7	8
$F_4(6, n)$	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	4	4	5	5
$F_4(7, n)$	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	5
$F_4(8, n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
$F_4(9, n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3
$F_4(10, n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3

Aşağıdaki Şekil 4.4'te bir düzlemin $F_4(8, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin terimleri ile kaplanmasını göstermektedir.



Şekil 4.4. $F_4(8, n)$ -distance Fibonacci sayısının bir yorumu.

$F_4(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi üzerine çalışıldığında aşağıdaki özellikler görülmektedir.

$F_4(2, n)$ ve $F_4(8, n)$ - distance Fibonacci sayı dizilerinin terimleri, Fibonacci sayı dizisinin terimlerinin 2 kere veya 4 kere tekrar edilmesiyle oluşmaktadır. Yani, $F_4(2, n) = F_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ ve $F_4(8, n) = F_{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}$ dır.

$F_4(6, n)$ - distance Fibonacci sayı dizisi, Padovan sayı dizisinin terimlerinin 2 kere tekrar etmesiyle oluşmaktadır. Yani, $F_4(6, n) = Pv_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ dır.

$F_4(12, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi, Narayana sayı dizisinin terimlerinin 4 kere tekrar etmesiyle oluşmaktadır. Yani, $F_4(12, n) = N_{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}$

$F_4(1, n + 1)$ - distance Fibonacci sayı dizisinin terimleri, A003269 dizisini verir.

$F_4(3, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin terimleri, A079398 dizisini verir.

$F_4(5, n)$ - distance Fibonacci sayı dizisinin terimleri, A103372 dizisini verir.

$F_4(10, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin terimleri, A005686 dizisini verir (Sloane, 2023).

Tanım 4.4.2.

$k \in \{1, 2, 3\}$ için

$$F_4(k, 0) = F_4(k, 1) = F_4(k, 2) = F_4(k, 3) = 1$$

ve

$$F_4(1 - n) = F_4(1, -n + 4) - F_4(1, n + 3)$$

$$F_4(2, -n) = F_4(2, -n + 4) - F_4(2, -n + 2)$$

$$F_4(3, -n) = F_4(3, -n + 4) - F_4(3, -n + 1)$$

$$F_4(4, -n) = \frac{1}{2} F_4(4, -n + 4)$$

$k \geq 4$ için $F_3(k, n) = 1$, $n \in \{0, 1, 2, \dots, k - 1\}$ başlangıç koşulları olmak üzere,

$$F_4(k, -n) = F_4(k, -n + k) - F_4(k, -n + (k - 4))$$

rekürans bağıntısı ile verilen diziye negatif tamsayılar için tanımlanmış $F_4(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi denir (Yılmaz, Włoch, Özkan ve Strzałka, 2023).

Aşağıdaki tablo 4.4.'de k ve n 'nin aldığı bazı özel değerlerde, negatif tamsayılar için tanımlanmış $F_4(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin aldığı değerler görülmektedir.

Tablo 4.4. $F_4(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$F_4(1, n)$	1	0	0	0	1	0	0	-1	1	0	1	-2	1	-1	3	-3
$F_4(2, n)$	1	0	0	1	1	-1	-1	1	2	-3	-3	5	5	-8	-8	13
$F_4(3, n)$	1	0	1	0	1	-1	2	-2	3	-4	6	-8	11	$-\frac{1}{15}$	21	-29
$F_4(4, n)$	1	$-\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$F_4(5, n)$	1	0	0	0	1	0	0	0	-1	1	0	0	1	-2	1	0
$F_4(6, n)$	1	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	-1	1	1	1	1	-2
$F_4(7, n)$	1	0	0	0	0	1	1	1	0	-1	-1	-1	1	2	2	1
$F_4(8, n)$	1	0	0	0	0	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	2	2	2

Teorem 4.4.3.

$k \geq 1, n \geq 0$ tamsayıları olmak üzere,

- i) $F_4(4k, 4n) = F_4(4k, 4n + 1) = F_4(4k, 4n + 2) = F_4(4k, 4n + 3)$
- ii) $F_4(2k, 2n) = F_4(2k, 2n + 1)$

dır (Yılmaz, Włoch, Özkan ve Strzałka, 2023).

İspat i).

İspat n üzerinden tümevarım yoluyla yapılmaktadır. $F_4(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin genel tanımından,

$$F_4(4k, 0) = F_4(4k, 1) = \dots = F_4(4k, 4k - 1) = 1$$

olur. Eğer $n = 4k$ ise, $F_4(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin genel tanımından,

$$F_4(4k, 4k) = F_4(4k, 4k + 1) = F_4(4k, 4k + 2) = 2$$

$n \geq 4k + 1$ olsun. $\forall t \leq n$ için

$$F_4(4k, 4t) = F_4(4k, 4t + 1) = F_4(4k, 4t + 2) = F_4(4k, 4t + 3)$$

doğru olduğunu varsayalım. $n + 1$ için

$$F_4(4k, 4(n + 1)) = F_4(4k, 4(n + 1) + 1) = F_4(4k, 4(n + 1) + 2) = F_4(4k, (n + 1) + 3)$$

doğru olduğunu gösterelim.

$$F_4(4k, 4(n + 1)) = F_4(4k, 4n + 4) = F_4(4k, 4n) + F_4(4k, 4n + 4 - 4k)$$

$$= F_4(4k, 4n) + F_4(4k, 4(n + 1 - k))$$

$$F_4(4k, 4(n + 1) + 1) = F_4(4k, 4n + 5) = F_4(4k, 4n) + F_4(4k, 4n + 5 - 4k)$$

$$= F_4(4k, 4n) + F_4(4k, 4(n + 1 - k) + 2)$$

$$F_4(4k, 4(n + 1) + 3) = F_4(4k, 4n + 7) = F_4(4k, 4n) + F_4(4k, 4n + 7 - 4k)$$

$$= F_4(4k, 4n) + F_4(4k, 4(n + 1 - k) + 3)$$

Yukarıdaki varsayımdan

$$F_4(4k, 4n) = F_4(4k, 4n + 1) = F_4(4k, 4n + 2) = F_4(4k, 4n + 3)$$

ve

$$F_4(4k, 4(n + 1 - k)) = F_4(4k, 4(n + 1 - k) + 1) = F_4(4k, 4(n + 1 - k) + 2)$$

$$= F_4(4k, 4(n + 1 - k) + 3)$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

İspat ii).

İspat n üzerinden tümevarım yoluyla yapılmaktadır. $F_4(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin genel tanımından,

$$F_4(2k, 0) = F_4(2k, 1) = 1$$

olur. Eğer $k \geq 2$ ve $n = 2k$ ise, $F_4(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin genel tanımından,

$$F_4(2k, 2n) = F_4(2k, 2n + 1) = 2$$

$n \geq 2k + 1$ olsun. $\forall t \leq n$ için

$$F_4(2k, 2t) = F_4(2k, 2t + 1)$$

doğru olduğunu varsayalım. $n + 1$ için

$$F_4(2k, 2(n + 1)) = F_4(2k, 2(n + 1) + 1)$$

$$F_4(2k, 2(n + 1)) = F_4(2k, 2n + 2) = F_4(2k, 2n) + F_4(2k, 2n + 2 - 2k)$$

$$= F_4(2k, 2n) + F_4(2k, 2(n + 1 - k))$$

$$F_4(2k, 2(n + 1) + 1) = F_4(2k, 2n + 3) = F_4(2k, 2n) + F_4(2k, 2n + 3 - 2k)$$

$$= F_4(2k, 2n) + F_4(2k, 2(n + 1 - k) + 1)$$

Yukarıdaki varsayımdan

$$F_4(2k, 2n + 2) = F_4(2k, 2n + 3)$$

ve

$$F_4(2k, 2(n + 1 - k)) = F_4(2k, 2(n + 1 - k) + 1)$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4.4.

- i) $\sum_{i=0}^n F_4(1, i) = F_4(1, n+4) - 1$
- ii) $\sum_{i=0}^n F_4(2, i) = F_4(2, n+4) + F_4(2, n+3) - 2$
- iii) $\sum_{i=0}^n F_4(3, i) = F_4(3, n+4) + F_4(3, n+3) + F_4(3, n+2) - 3$
- iv) $\sum_{i=0}^n F_4(k, i) = F_4(k, n+k) + F_4(k, n+k-1) + F_4(k, n+k-2) + F_4(k, n+k-3) - 4, k \geq 4$
- v) $\sum_{i=0}^n F_4(1, 2i) = F_4(1, 2n+1) + F_4(1, 2n-1)$
- vi) $\sum_{i=0}^n F_4(2, 2i) = F_4(2, 2n+5) - 1$
- vii) $\sum_{i=0}^n F_4(k, 2i) = F_4(k, 2n+k+1) + F_4(k, 2n+k-1) - 2, k \geq 4$ ve k çift tamsayı ise.
- viii) $\sum_{i=0}^n F_4(3, 3i) = F_4(3, 3n+4) - 1$
- ix) $\sum_{i=0}^n F_4(3, 3i+1) = F_4(3, 3n+5) - 1$
- x) $\sum_{i=0}^n F_4(k, 4i) = F_4(k, 4n+k) - 1, k \geq 4$ ise.

(Yılmaz, Włoch, Özkan ve Strzałka, 2023).

Teorem 4.4.5.

$k \geq 1, n \geq 0$ tamsayıları olmak üzere, $F_4(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$g(x) = \frac{1+t}{1-x^4-x^k}, \quad t = \begin{cases} 0, k=1 \\ x, k=2 \\ x+x^2, k=3 \\ x+x^2+x^3, k \geq 4 \end{cases}$$

(Yılmaz, Włoch, Özkan ve Strzałka, 2023).

İspat.

$g(x) \sum_{n=0}^{\infty} = F_4(k, n)x^n$. $F_4(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin genel tanımından,

$$g(x) - x^4 g(x) - x^k g(x) = 1 + t, \quad t = \begin{cases} 0, k = 1 \\ x, k = 2 \\ x + x^2, k = 3 \\ x + x^2 + x^3, k \geq 4 \end{cases}$$

dır. Buradan hareketle, $g(x) = \frac{1+t}{1-x^4-x^k}$ bulunmaktadır.

4.5. $F_4(k, n)$ -Distance Fibonacci Sayı Dizisinin Matris Üretici

$m = \max\{4, k\}$ ve $Q_k = [q_{ij}]_{m \times m}$ bir kare matris olsun. $1 \leq i \leq k$ olacak şekilde q_{i1} , $F_4(k, i)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin genel tanıma uygun bir şekilde açıldığında sağ taraftaki katsayısına eşittir. $1 < j \leq m$ ve $1 \leq i \leq m$ için, eğer $j = i + 1$ ise, $q_{ij} = 1$ ve diğer durumlarda $q_{ij} = 0$ olur. Buradan hareketle matrisler aşağıdaki gibidir;

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix}$$

Başlangıç koşulu olarak, P_k kare matrisi tanımlanmaktadır;

$$P_k = \begin{bmatrix} F_4(k, 2k-2) & F_4(k, 2k-3) & \cdot & \cdot & \cdot & F_4(k, k) & F_4(k, k-1) \\ F_4(k, 2k-3) & F_4(k, 2k-4) & \cdot & \cdot & \cdot & F_4(k, k-1) & F_4(k, k-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_4(k, k) & F_4(k, k-1) & \cdot & \cdot & \cdot & F_4(k, 2) & F_4(k, 1) \\ F_4(k, k-1) & F_4(k, k-2) & \cdot & \cdot & \cdot & F_4(k, 1) & F_4(k, 0) \end{bmatrix}$$

Laplace açılımını ve determinantın temel özelliklerini kullanarak, aşağıdaki sonuçlar elde edilmektedir.

Teorem 4.5.1.

$k \geq 1, n \geq 0$ tamsayılar olsun.

$$\det Q_k^n = \begin{cases} (-1)^n, k \in \{1, 2, 3\} \\ (-2)^n, k = 4 \\ (-1)^n, k \in \{6, 8, 10, \dots\} \\ 1, k \in \{5, 7, 9, \dots\} \end{cases}$$

dır (Yılmaz, Włoch, Özkan ve Strzałka, 2023).

Teorem 4.5.2.

$k \geq 1$ tamsayı olsun.

$$\det P_k = \begin{cases} -1, k \in \{1, 2, 3, 4\} \\ (-1)^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}, k > 4 \end{cases}$$

dır (Yılmaz, Włoch, Özkan ve Strzałka, 2023).

Teorem 4.5.3.

$k \geq 1, n \geq 1$ tamsayılar olsun. O halde,

$$P_k Q_k^n = \begin{bmatrix} F_4(k, n+2k-2) & . & . & . & F_4(k, n+k) & F_4(k, n+k-1) \\ F_4(k, n+2k-4) & . & . & . & F_4(k, n+k-1) & F_4(k, n+k-2) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ F_4(k, n+k) & . & . & . & F_4(k, n+2) & F_4(k, n+1) \\ F_4(k, n+k-1) & . & . & . & F_4(k, n+1) & F_4(k, n) \end{bmatrix}$$

dır (Yılmaz, Włoch, Özkan ve Strzałka, 2023).

İspat.

Eğer $n = 1$ ise, $F_4(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin genel tanımından ve basit hesaplamalarla ifadenin doğru olduğu görülmektedir.

Yukarıdaki ifadenin n için doğru olduğunu varsayalım. Bu ifadenin $n + 1$ için bu ifadenin doğru olduğu gösterilmelidir.

$P_k Q_k^{n+1} = (P_k Q_k^n) Q_k$, varsayımdan ve genel tanımdan,

$$P_k Q_k^{n+1} = \begin{bmatrix} F_4(k, n+2k-2) & . & . & . & F_4(k, n+k) & F_4(k, n+k-1) \\ F_4(k, n+2k-3) & . & . & . & F_4(k, n+k-1) & F_4(k, n+k-2) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ F_4(k, n+k) & . & . & . & F_4(k, n+2) & F_4(k, n+1) \\ F_4(k, n+k-1) & . & . & . & F_4(k, n+1) & F_4(k, n) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_4(k, n+2k-1) & . & . & . & F_4(k, n+k+1) & F_4(k, n+k) \\ F_4(k, n+2k-2) & . & . & . & F_4(k, n+k) & F_4(k, n+k-1) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ F_4(k, n+k-1) & . & . & . & F_4(k, n+3) & F_4(k, n+2) \\ F_4(k, n+k) & . & . & . & F_4(k, n+2) & F_4(k, n+1) \end{bmatrix}$$

Sonuç 4.5.4.

$k \geq 1, n \geq 0$ tamsayılar olsun.

$$\det Q_k^n = \begin{cases} (-1)^{n+1}, k \in \{1,2,3\} \\ (-1)^{n+1} 2^n, k = 4 \\ (-1)^{n+\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}, k \in \{6,8,10, \dots\} \\ (-1)^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}, k \in \{5,7,9, \dots\} \end{cases}$$

dır (Yılmaz, Włoch, Özkan ve Strzałka, 2023).

4.6. $F_4(k,n)$ -Distance Fibonacci Sayı Dizisinin Pascal Üçgeni ile İlişkisi

$F_4(k,n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin Pascal üçgeni ile ilişkisini incelemek için $F_4(k,n)$ dizisi ile aynı rekürans bağıntısına sahip başlangıç koşulları farklı olan yeni bir dizi ailesi tanımlanmıştır.

Tanım 4.6.1.

$k \geq 1, n \geq 0, k \geq i \geq 1$ tamsayılar olsun.

$F_4^i(k,n) = \begin{cases} 1, n = k - i \\ 0, n \neq k - i \end{cases}, n = 0,1,2, \dots, \max\{3, k - 1\}$ başlangıç koşulları olmak

üzere,

$$F_4^i(k,n) = F_4^i(k,n-4) + F_4^i(k,n-k)$$

rekürans bağıntısı ile verilen diziye $F_4^i(k,n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi denir (Yılmaz, Włoch, Özkan ve Strzałka, 2023).

Bazı özel n değerleri ve $k = 5$ için, bu $F_4^i(5,n)$ -distance Fibonacci dizisinin terimleri ile $F_4(5,n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi bazı terimleri Tablo 4.5'te gösterilmektedir.

Tablo 4.5. $F_4(5, n)$ ve $F_4^i(5, n)$ -distance Fibonacci sayı dizileri.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$F_4^1(5, n)$	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	2	1	0
$F_4^2(5, n)$	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	2	1	0	1
$F_4^3(5, n)$	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	2	1	0	1	3
$F_4^4(5, n)$	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	2	1	0	1	3	3
$F_4^5(5, n)$	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	2	1
$F_4(5, n)$	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	4	4	4	5	7	8

Teorem 4.6.2.

$k \geq 4$, $n \geq 0$ ve $0 \leq i \leq k - 1$ tamsayılar olsun. O halde

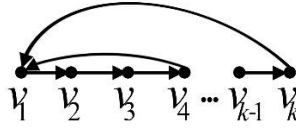
$$F_4(k, n) = \sum_{i=0}^{\max\{3, k-1\}} F_4^i(k, n)$$

olur (Yılmaz, Włoch, Özkan ve Strzałka, 2023).

Er, $F_4^i(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizilerine benzer dizi ailesi üzerinde çalışmıştır (Er, 1984). Dizi ailesinin tamamlayıcı matrisinin n 'inci kuvvetinin özel bir sıraya göre bu dizilerin girdilerinden oluştuğunu gösterdi. Bunun sonucundan Q_k matrisi, aşağıdaki gibi $F_4^i(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin terimlerinden oluşmaktadır.

$$Q_k^n = \begin{bmatrix} F_4^1(k, n+k-1) & . & . & . & F_4^1(k, n-1) & F_4^1(k, n) \\ F_4^2(k, n+k-1) & . & . & . & F_4^2(k, n-1) & F_4^2(k, n) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ F_4^{k-1}(k, n+k-1) & . & . & . & F_4^{k-1}(k, n-1) & F_4^{k-1}(k, n) \\ F_4^k(k, n+k-1) & . & . & . & F_4^k(k, n-1) & F_4^k(k, n) \end{bmatrix}$$

Q_k matrisi Şekil 4.5.'te görülen özel bir D grafının bitişiklik matrisi olarak yorumlanmaktadır.



Şekil 4.5. D Grafı

Q_k^n matrisinin, D grafindaki karşılık gelen köşeler arasındaki n uzunluğundaki tüm farklı yolların sayısını içerdiği iyi bilinmektedir. Yani, q_{ij} girişi, D digrafındaki v_i köşesinden v_j köşesine kadar n uzunluğundaki tüm yolların sayısına eşittir. Q_k^n matrisinin böyle bir graf yorumunu kullanarak, 4.3.3 Teoremindeki gibi benzer şekilde kanıtlanabilmektedir.

Teorem 4.6.3.

$k \geq 4$, $n \geq 0$ ve $0 \leq i \leq k - 1$ tamsayılar olsun. O halde,

$$F_4(k, n + k - 1) = \sum_{\substack{\alpha_4, \alpha_k \\ 4\alpha_4 + k\alpha_k = n}} \binom{\alpha_4 + \alpha_k}{\alpha_4},$$

$$F_4^j(k, n + k - 1) = \sum_{\substack{\alpha_4, \alpha_k \\ 4\alpha_4 + k\alpha_k = n - (4 - j + 1)}} \binom{\alpha_4 + \alpha_k}{\alpha_4} + \sum_{\substack{\alpha_4, \alpha_k \\ 4\alpha_4 + k\alpha_k = n - (k - j + 1)}} \binom{\alpha_4 + \alpha_k}{\alpha_4}, j = 2, 3, 4$$

ve

$$F_4^j(k, n + k - 1) = \sum_{\substack{\alpha_4, \alpha_k \\ 4\alpha_4 + k\alpha_k = n - (k - j + 1)}} \binom{\alpha_4 + \alpha_k}{\alpha_4}, 4 < j \leq k.$$

(Yılmaz, Włoch, Özkan ve Strzałka, 2023).

4.6.2 ve 4.6.3. teoremlerine dayanarak aşağıdaki teorem yazılmaktadır.

Teorem 4.6.4.

$k \geq 4, n \geq 0$ tamsayılar olsun. O halde,

$$F_4^j(k, n+k-1) = \sum_{i=0}^3 \sum_{\substack{\alpha_4, \alpha_k \\ 4\alpha_4 + k\alpha_k = n-i}} \binom{\alpha_4 + \alpha_k}{\alpha_4} + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\substack{\alpha_4, \alpha_k \\ 4\alpha_4 + k\alpha_k = n-i}} \binom{\alpha_4 + \alpha_k}{\alpha_4}$$

olur (Yılmaz, Włoch, Özkan ve Strzałka, 2023).

Bu teoremden $F_4(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizilerine eşit olan toplamaları elde edilmektedir. Binomları kullanarak $F_4(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizileri için yeni formüller türetilmektedir. Kolaylık sağlamak için grafiksel bir sunum kullanılmaktadır.

Örneğin, $F_4(5, 30)$ -distance Fibonacci sayı dizisi,

$$\binom{6}{2}, \binom{6}{3}, \binom{6}{3}, \binom{6}{4}, \binom{6}{4}, \binom{6}{5}, \binom{6}{5}, \binom{6}{6}, \binom{7}{0}, \binom{7}{0}, \binom{7}{1}, \binom{7}{1}, \binom{7}{2}$$

toplamıdır. Bu binomlar Pascal üçgeninin içinde geometrik desen oluşturmaktadır, buna merdiven denilmektedir ve aşağıdaki Şekil 4.6.'da gösterilmektedir. İlgili girişler mavi renkle gösterilmektedir, altı çizili girişler iki kez sayılmaktadır.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{1} & \underline{7} & \underline{21} & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 36 & 84 & 126 & 126 & 84 & 36 & 9 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 45 & 120 & 210 & 252 & 210 & 120 & 45 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

Şekil 4.6. $F_4(5, 30)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin bir merdiven yorumu.

Yukarıda sunulan merdiven her iki yönde sonsuza uzatılabilmektedir. Böylesine sonsuz bir merdiveni bir sütun sağa kaydırarak, bir sonraki $F_4(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisini elde edilmektedir. Merdivenin her adımında bitişik iki binom var. Binomun aşağıdaki temel özelliğini kullanarak aşağıdaki Şekil 4.7.'de yeni bir basit merdiven elde edilmektedir.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 36 & 84 & 126 & 126 & 84 & 36 & 9 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 45 & 120 & 210 & 252 & 210 & 120 & 45 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

Şekil 4.7. $F_4(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin bir merdiven yorumu.

Formülün bu tür dönüşümleri 4.6.3. ve 4.6.4. teoremlerini kullanarak şu sonuca yol açmaktadır.

Sonuç 4.6.5.

$k = 5, n \geq 0$ tamsayılar olsun. O halde,

$$F_4(5, n + 1) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor} \binom{\lfloor \frac{n+3-i}{4} \rfloor}{i}$$

olur.

Yukarıdaki sonucun sadece özel k değerleri için sağlandığı unutulmamalıdır.

4.7. $F_t(k, n)$ - Distance Fibonacci Sayı Dizisi

Tanım 4.7.1.

$n \geq 0, 1 \leq t \leq k$ olsun.

$F_t(k, n) = 1, n \in \{0, 1, 2, \dots, k - 1\}$ başlangıç koşulu olmak üzere,

$$F_t(k, n) = F_t(k, n - t) + F_t(k, n - k), n \geq k$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan diziye $F_t(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi denir. Bu dizi, (t, n) -distance Fibonacci sayı dizisi olarak da ifade edilmektedir (Yılmaz, Włoch, Özkan, 2024).

Bu sayı dizisinin, her bir elemanı kendinden önceki t . elemanı ile kendinden önceki k . elemanın toplanması ile elde edilmektedir.

$k \in \{1, 2, 3\}$, $t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ve $0 \leq n \leq 20$ için, $F_t(k, n)$ -distance Fibonacci dizisinin aldığı değerler aşağıdaki gibidir:

$$F_1(1, n) = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, \dots, 2^{20}\}$$

$$F_1(2, n) = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181\}$$

$$F_1(3, n) = \{1, 1, 1, 2, 2, 3, 5, 7, 10, 15, 22, 32, 47, 69, 101, 148, 217, 318, 466, 683, 1001\}$$

$$F_2(1, n) = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181\}$$

$$F_2(2, n) = \{1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, 32, 32, 64, 64, 128, 128, 256, 256, 512, 512, 1024\}$$

$$F_2(3, n) = \{1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65, 86, 114, 151, 200\}$$

$$F_3(1, n) = \{1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, 88, 129, 189, 277, 406, 595, 872, 1278\}$$

$$F_3(2, n) = \{1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65, 86, 114, 151, 200\}$$

$$F_3(3, n) = \{1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 8, 8, 8, 16, 16, 16, 32, 32, 32, 64, 64, 64\}$$

$$F_4(1, n) = \{1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 14, 19, 26, 36, 50, 69, 95, 131, 181, 250, 345\}$$

$$F_4(2, n) = \{1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 8, 8, 13, 13, 21, 21, 34, 34, 55, 55, 89\}$$

$$F_4(3, n) = \{1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 7, 8, 9, 12, 15, 17, 21, 27, 32, 38\}$$

$$F_5(1, n) = \{1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 11, 15, 20, 26, 34, 45, 60, 80, 106, 140\}$$

$$F_5(2, n) = \{1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 14, 18, 22, 27, 34, 41\}$$

$$F_5(3, n) = \{1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 7, 8, 9, 12, 13, 16, 20, 22\}$$

$$F_6(1, n) = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 16, 21, 27, 34, 43, 55, 71\}$$

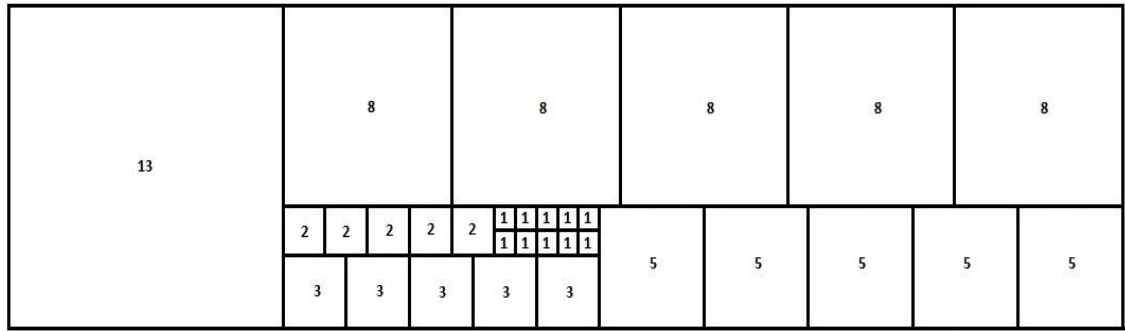
$$F_6(2, n) = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 6, 6, 9, 9, 13, 13, 19, 19, 28\}$$

$$F_6(3, n) = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 8, 8, 8, 13, 13\}$$

Sonuç 4.7.2.

$F_t(2t, n)$ - distance Fibonacci sayı dizisi, t defa tekrar eden bilinen Fibonacci sayı dizisinin terimlerinden oluşup, bu terimler bir düzlemi kaplamaktadır.

Şekil 4.1. ve Şekil 4.4., $F_3(6, n)$ ve $F_4(8, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin terimleri ile bir düzlemin kaplanmasını göstermektedir. Aşağıdaki Şekil 4.8.'de $F_5(10, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin terimlerinin düzlemi nasıl kapladığı gösterilmektedir.



Şekil 4.8. $F_5(10, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin bir yorumu.

Tanım 4.7.3.

$k \geq 1$, $k \neq t$ ve $n \geq 1$ olsun.

$F_t(k, n) = 1$, $n \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ başlangıç koşulu olmak üzere,

$$F_t(k, -n) = F_t(k, k-n) - F_t(k, k-t-n), \quad n \geq t$$

rekürans bağıntısı ile verilen diziye negatif tamsayılar için tanımlanmış $F_t(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi denir (Yılmaz, Włoch, Özkan, 2024).

Teorem 4.7.4.

$t \geq 2$, $m \geq 1$ ve $n \geq 0$ tamsayılar olsun.

$$F_t(mt, nt) = F_t(mt, nt + 1) = \dots = F_t(mt, nt + (t - 1))$$

dır (Yılmaz, Włoch, Özkan, 2024).

İspat.

n üzerinden tümevarım yolu ile ispat yapılmaktadır. m ve t sabit tamsayılar olsun.

$F_t(mt, nt)$ dizisinin bütün başlangıç değerleri 1'dir. Yani $n = 0$ için

$$F_t(mt, 0) = F_t(mt, 1) = \dots = F_t(mt, t - 1) = 1$$

dır.

$\forall i \leq n$ için

$$F_t(mt, it) = F_t(mt, it + 1) = \dots = F_t(mt, it + (t - 1))$$

ifadesinin doğru olduğunu varsayalım. $n + 1$ için ifadenin doğru olduğunu gösterelim.

$$F_t(mt, (n + 1)t) = F_t(mt, (n + 1)t + 1) = \dots = F_t(mt, (n + 1)t + (t - 1))$$

Buradan,

$$F_t(mt, (n + 1)t) = F_t(mt, nt) + F_t(mt, (n + 1 - m)t)$$

$$F_t(mt, (n + 1)t + 1) = F_t(mt, nt + 1) + F_t(mt, (n + 1 - m)t + 1)$$

⋮

$$F_t(mt, (n + 1)t + (t - 1)) = F_t(mt, nt + (t - 1)) + F_t(mt, (n + 1 - m)t + (t - 1))$$

Varsayımımızdan bu eşitliklerin birinci terimlerinin ve ikinci terimlerinin kendi aralarında eşit olduğu görülür. Buradan $n+1$ için ifadenin doğru olduğu görülür ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.7.5.

$n \geq 0$ ve $1 \leq t \leq k$ tamsayılar olsun.

$$\sum_{i=0}^n F_t(k, n) = \sum_{j=0}^{t-1} F_t(k, n + k - j) - t$$

olur (Yılmaz, Włoch, Özkan, 2024).

İspat.

n üzerinden tümevarım yolu ile ispat yapılmaktadır. Eğer $n = 0$ ise,

$$\sum_{i=0}^n F_t(k, n) = F_t(k, 0) = 1$$

Diğer bir deyişle,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{t-1} F_t(k, k - j) - t &= F_t(k, k) + F_t(k, k - 1) + \dots + F_t(k, k - (t - 1)) - t \\ &= 2 + (t - 1)1 - t = 1 \end{aligned}$$

dır. Varsayalım ki $n \geq 0$ için

$$\sum_{i=0}^n F_t(k, n) = \sum_{j=0}^{t-1} F_1(k, n + k - j) - t$$

ifadesi doğru olsun. $n + 1$ için ifadenin doğru olduğunu göstermeliyiz.

$$F_t(k, n + k + 1) = F_t(k, n + 1) + F_t(k, n + k + 1 - t)$$

eşitliğinden

$$F_t(k, n + 1) = F_t(k, n + k + 1) - F_t(k, n + k + 1 - t)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} F_t(k, i) &= \sum_{i=0}^n F_t(k, i) + F_t(k, n+1) \\
&= \sum_{j=0}^{t-1} F_t(k, n+k-j) - t + F_t(k, n+1) \\
&= F_t(k, n+k) + F_t(k, n+k-1) + \dots \\
&\quad + F_t(k, n+k-(t-2)) + F_t(k, n+k-(t-1)) \\
&\quad + F_t(k, n+k+1) - F_t(k, n+k-(t-1)) - t \\
&= F_t(k, n+k+1) + F_t(k, n+k) + \dots \\
&\quad + F_t(k, n+k-(t-2)) \\
&= F_t(k, (n+1)+k) + F_t(k, (n+1)+k-1) + \dots \\
&\quad + F_t(k, (n+1)+k-(t-1)) - t
\end{aligned}$$

Böylece

$$= \sum_{j=0}^{t-1} F_t(k, n+k-j) - t$$

olur. Buradan ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.7.6.

$1 \leq t \leq k$, $n \geq 0$ tamsayıları olmak üzere, $F_t(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$g(x) = \frac{1+z}{1-x^t-x^k}, z = \begin{cases} 0, k=1 \\ x, k=2 \\ \vdots \\ x+x^2+x^3+\dots+x^{t-1}, k \geq t \end{cases}$$

(Yılmaz, Włoch, Özkan, 2024).

İspat.

$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_t(k, n)x^n$. $F_t(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin genel tanımından,

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_t(k, n)x^n = F_t(k, 0) + F_t(k, 1)x + F_t(k, 2)x^2 + \dots \\ g(x) &= F_t(k, 0) + F_t(k, 1)x + \sum_{n=2}^{\infty} F_t(k, n-1)x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_t(k, n-2)x^n + \dots \\ g(x) &= F_t(k, 0) + F_t(k, 1)x + x^t \sum_{n=1}^{\infty} F_t(k, n)x^n + \dots + x^k \sum_{n=0}^{\infty} F_t(k, n)x^n \\ g(x) &= F_t(k, 0) + F_t(k, 1)x + x^t(g(x) - F_t(k, 0)) + x^k g(x) \\ g(x) - x^t g(x) - x^k g(x) &= F_t(k, 0) + (F_t(k, 1) - F_t(k, 0))x + \dots \end{aligned}$$

Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$g(x) - x^t g(x) - x^k g(x) = 1 + z, t = \begin{cases} 0, k = 1 \\ x, k = 2 \\ x + x^2, k \geq 3 \\ x + x^2 + x^3, k \geq 4 \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{1 + z}{1 - x^t - x^k}$$

olur.

4.8. $F_t(k, n)$ -Distance Fibonacci Sayı Dizisinin Matris Üretici

$1 \leq t \leq k$ tamsayılar olsun ve $Q_{tk} = [q_{ij}]_{k \times k}$ bir kare matris olsun. q_{i1} elemanı, $F_t(k, i)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin genel tanıma uygun bir şekilde açıldığında sağ taraftaki katsayısına eşittir. $1 \leq i \leq k$ ve eğer $i = k$ ise, $q_{i1} = 1$ ve eğer $i = t = k$ ise, $q_{i1} = 2$ ve diğer durumlarda $q_{i1} = 0$ 'dır. Ayrıca $1 < j \leq k$ ve $1 \leq i \leq k$ için, eğer $j = i + 1$ ise, $q_{ij} = 1$ ve diğer durumlarda $q_{ij} = 0$ olur. Buradan hareketle matrisler aşağıdaki gibidir;

$$Q_{11} = [2], Q_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, Q_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$k > t$ için

$$Q_{tk} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix}$$

olur.

Başlangıç koşulu olarak, P_{tk} kare matrisi tanımlanmaktadır;

$$P_{tk} = \begin{bmatrix} F_t(k, 2k-2) & F_t(k, 2k-3) & . & . & . & F_t(k, k) & F_t(k, k-1) \\ F_t(k, 2k-3) & F_t(k, 2k-4) & . & . & . & F_t(k, k-1) & F_t(k, k-2) \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ F_t(k, k) & F_t(k, k-1) & . & . & . & F_t(k, 2) & F_t(k, 1) \\ F_t(k, k-1) & F_t(k, k-2) & . & . & . & F_t(k, 1) & F_t(k, 0) \end{bmatrix}$$

Laplace açılımını ve determinantın temel özelliklerini kullanarak, aşağıdaki sonuçlar elde edilmektedir.

Teorem 4.8.1.

$1 \leq t \leq k$ ve $n \geq 1$ tamsayılar olsun. O halde,

$$P_{tk} Q_{tk}^n = \begin{bmatrix} F_t(k, n+2k-2) & . & . & . & F_t(k, n+k) & F_t(k, n+k-1) \\ F_t(k, n+2k-3) & . & . & . & F_t(k, n+k-1) & F_t(k, n+k-2) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ F_t(k, n+k) & . & . & . & F_t(k, n+2) & F_t(k, n+1) \\ F_t(k, n+k-1) & . & . & . & F_t(k, n+1) & F_t(k, n) \end{bmatrix}$$

dır (Yılmaz, Włoch, Özkan, 2024).

İspat.

Eğer $n = 1$ ise, $F_4(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisinin genel tanımından ve basit hesaplamalarla ifadenin doğru olduğu görülmektedir.

Yukarıdaki ifadenin n için doğru olduğunu varsayalım. Bu ifadenin $n + 1$ için bu ifadenin doğru olduğu gösterilmelidir.

$P_{tk}Q_{tk}^{n+1} = (P_{tk}Q_{tk}^n)Q_{tk}$, varsayımdan ve genel tanımdan,

$$\begin{aligned}
 P_{tk}Q_{tk}^{n+1} &= \begin{bmatrix} F_t(k, n+2k-2) & \cdot & \cdot & \cdot & F_t(k, n+k) & F_t(k, n+k-1) \\ F_t(k, n+2k-3) & \cdot & \cdot & \cdot & F_t(k, n+k-1) & F_t(k, n+k-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_t(k, n+k) & \cdot & \cdot & \cdot & F_t(k, n+2) & F_t(k, n+1) \\ F_t(k, n+k-1) & \cdot & \cdot & \cdot & F_t(k, n+1) & F_t(k, n) \end{bmatrix} \\
 &\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} F_t(k, n+2k-1) & \cdot & \cdot & \cdot & F_t(k, n+k+1) & F_t(k, n+k) \\ F_t(k, n+2k-2) & \cdot & \cdot & \cdot & F_t(k, n+k) & F_t(k, n+k-1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_t(k, n+k-1) & \cdot & \cdot & \cdot & F_t(k, n+3) & F_t(k, n+2) \\ F_t(k, n+k) & \cdot & \cdot & \cdot & F_t(k, n+2) & F_t(k, n+1) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Sonuç 4.8.2.

$1 \leq t \leq k$ ve $n \geq 0$ tamsayılar olsun.

$$\det Q_{tk} = \begin{cases} (-2)^{k+1}, t = k \\ (-1)^{k+1}, t < k \end{cases}$$

ve

$$\det P_{tk} = (-1)^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}$$

dır.

4.9. $F_t(k,n)$ -Distance Fibonacci Sayı Dizisinin Pascal Üçgeni ile İlişkisi

$F_t(k,n)$ -distance Fibonacci sayı dizileri ile Pascal üçgeni arasındaki bağlantıyı keşfetmek için, $F_t(k,n)$ dizisi ile aynı rekürans bağıntısına sahip başlangıç koşulları farklı olan yeni bir dizi ailesi tanımlanmıştır.

Tanım 4.9.1.

$k \geq 1, n \geq 0, 1 \leq t \leq k$ tamsayılar olsun.

$F_t^i(k,n) = 1, n = k - i$ ve $F_t^i(k,n) = 0, n \in \{0,1, \dots, k-1\}$ başlangıç koşulları olmak üzere,

$$F_t^i(k,n) = F_t^i(k,n-t) + F_t^i(k,n-k), n \geq k$$

rekürans bağıntısı ile verilen diziye $F_t^i(k,n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi denir (Yılmaz, Włoch, Özkan, 2024).

Bütün $F_t^i(k,n)$ -distance Fibonacci sayı dizileri aynı matris üretici olan Q_k matrisini paylaşmaktadır.

Teorem 4.9.2.

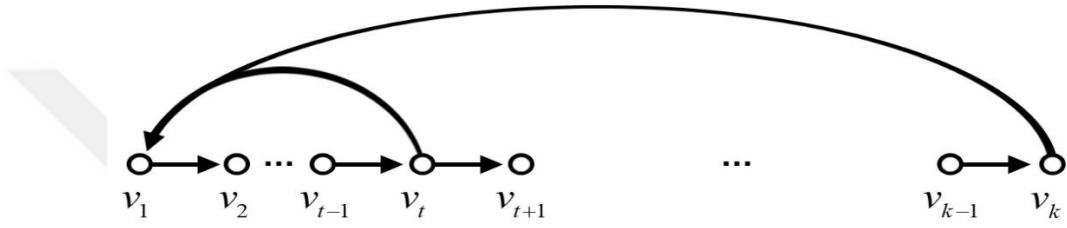
$1 \leq t \leq k, n \geq 0$ ve $0 \leq i \leq k-1$ tamsayılar olsun. O halde,

$$F_t(k,n) = \sum_{i=0}^{k-1} F_t^i(k,n)$$

olur (Yılmaz, Włoch, Özkan, 2024).

$$Q_k^n = \begin{bmatrix} F_t^1(k, n+k-1) & . & . & . & F_t^1(k, n-1) & F_3^1(k, n) \\ F_t^2(k, n+k-1) & . & . & . & F_t^2(k, n-1) & F_3^2(k, n) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ F_t^{k-1}(k, n+k-1) & . & . & . & F_t^{k-1}(k, n-1) & F_t^{k-1}(k, n) \\ F_t^k(k, n+k-1) & . & . & . & F_t^k(k, n-1) & F_t^k(k, n) \end{bmatrix}$$

Q_k^n matrisi, Şekil 4.9.'da gösterildiği gibi bir D grafının bitişiklik matrisi olarak oluşturulmaktadır.



Şekil 4.9. D Grafı

Q_k^n matrisinin D grafındaki karşılık gelen köşeler arasındaki n uzunluğundaki tüm farklı yolların sayısını içerdiği iyi bilinmektedir. Yani, q_{ij} girişi, D grafındaki v_i köşesinden v_j köşesine kadar n uzunluğundaki tüm yolların sayısına eşittir. Q_k^n matrisinin böyle bir graf yorumunu kullanarak 4.3.3. teoreminin ispatına benzer şekilde kanıtlanabilmektedir. Ayrıca, $F_t^i(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizilerinin ailesi benzer metotlar kullanılarak oluşturulmaktadır.

Teorem 4.9.3.

$1 \leq t \leq k$, $n \geq 0$ tamsayılar olsun. O halde,

$$F_t^1(k, n+k-1) = \sum_{\substack{\alpha_t, \alpha_k \\ t\alpha_t + k\alpha_k = n}} \binom{\alpha_t + \alpha_k}{\alpha_t}$$

$j = 2, 3, \dots, t$ için

$$F_t^j(k, n+k-1) = \sum_{\substack{\alpha_t, \alpha_k \\ t\alpha_t + k\alpha_k = n-(t-j+1)}} \binom{\alpha_t + \alpha_k}{\alpha_t} + \sum_{\substack{\alpha_t, \alpha_k \\ t\alpha_t + k\alpha_k = n-(k-j+1)}} \binom{\alpha_t + \alpha_k}{\alpha_t}$$

ve

$t < j \leq k$ için

$$F_t^j(k, n+k-1) = \sum_{\substack{\alpha_t, \alpha_k \\ t\alpha_t + k\alpha_k = n-(k-j+1)}} \binom{\alpha_t + \alpha_k}{\alpha_t}$$

olur (Yılmaz, Włoch, Özkan, 2024).

Teorem 4.9.4.

$1 \leq t \leq k$, $n \geq 0$ tamsayılar olsun. O halde,

$$F_t(k, n+k-1) = \sum_{i=1}^{t-1} \sum_{\substack{\alpha_t, \alpha_k \\ t\alpha_t + k\alpha_k = n-i}} \binom{\alpha_t + \alpha_k}{\alpha_t} + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{\substack{\alpha_t, \alpha_k \\ t\alpha_t + k\alpha_k = n-i}} \binom{\alpha_t + \alpha_k}{\alpha_t}$$

olur (Yılmaz, Włoch, Özkan, 2024).

Aşağıda $F_t(k, n)$ -distance Fibonacci dizisi ile ilişkili Pascal benzeri bir üçgen tanımlanmıştır. Bu doğrultuda bazı teoremler verilir ve bu teoremler ispatlanmıştır.

Tanım 4.9.5.

t ve k sabit tamsayılar olsun. $F_t(k, n)$ dizisi, graf P_n 'nin $\{P_t, P_k\}$ kaplamalarının toplam sayısına eşittir. Kaplama kümesi dahil edilen P_t yollarının sayısına göre alt kümelerine ayrılabilir. $n \geq 1$ için, $[n/m]$ graf P_n 'nin $\{P_t, P_k\}$ kaplamalarının sayısı olup, her kaplamada tam olarak m tane P_t yolu bulunur. Ayrıca $[0/0] = 1$ kabul ediyoruz. Yani bu demektir ki, başlangıçta herhangi bir kaplama olmadığında (boş grafik) bir tane kaplama olduğunu varsayıyoruz (Yılmaz, Włoch, Özkan, 2024).

Teorem 4.9.6. $t \geq 1, k \geq t$ ve $n \geq t$ tamsayıları olsun. O halde,

$$F_t(k, n) = \sum_{m=0}^n \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$$

olur (Yılmaz, Włoch, Özkan, 2024).

İspat: n_0 , yalnızca P_k yollarını kullanarak P_n 'yi kaplayan tüm $\{P_t, P_k\}$ kaplamalarının sayısı olarak tanımlanır. Kaplamaların sayısını belirlemek için P_n 'nin geri kalanının nasıl kaplanabileceğine bakalım. Geri kalan kaplamalar belirli bir desen izler: bazı durumlarda hiçbir kaplama olmayabilir. Bazen tek bir düğüm bazen de belirli bir düğüm dizisi olabilir.

Yani geri kalan kaplamalar, $R_1 = \emptyset, R_2 = v_n, \dots$ ve $R_t = v_n, \dots, v_{n-t-1}$. Dolayısıyla, $n = ik + r$ ve $r = 0, 1, \dots, t-1$ için tam olarak böyle bir kaplama vardır ve $r = t, \dots, k-1$ için kaplama yoktur.

Bu teorem, Pascal'a benzer bir üçgenin ilk sütununu hesaplamaya yarar ve bu teoremden Pascal'a benzeyen üçgenin ilk sütunun t tane 1 ve $k-1$ tane 0'dan oluşan ve tekrar eden bir dizi olduğu ortaya çıkar.

Teorem 4.9.7. $t \geq 1, k \geq t$ ve $n \geq t$ tamsayıları olsun. O halde,

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}$$

olur (Yılmaz, Włoch, Özkan, 2024).

İspat: Tanım gereği, n_0 yalnızca P_k yollarını kullanarak P_n grafının tüm $\{P_t, P_k\}$ kaplamalarının sayısıdır. Geri kalan kaplamalar şu şekilde olabilir; $R_1 = \emptyset, R_2 = v_n, \dots, R_t = v_n, \dots, v_{n-t-1}$.

Sonuç 4.9.8. $t \geq 1, k \geq t$ ve $n \geq t$ tamsayıları olsun. O halde,

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} 1, n \equiv \text{mod } k < t \\ 0, n \equiv \text{mod } k \geq t \end{cases}$$

olur.

Teorem 4.9.7. ve sonuç 4.9.8., Pascal benzeri üçgenlerin ilk sütunundaki sayıların düzenini ve bu düzenin ne şekilde tekrarlandığının anlaşılmasını sağlar.

Teorem 4.9.9. $t \geq 1, k \geq t$ ve $n \geq t$ tamsayıları olsun. O halde,

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-k \\ m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-t \\ m \end{bmatrix}$$

olur (Yılmaz, Włoch, Özkan, 2024).

İspat: $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ tanımından, P_n yolunun $\{P_t, P_k\}$ kaplamalarının sayısı olduğunu bilinmektedir. Buradan, P_n grafinin geri kalan kısmını m adet P_t yolu kullanarak kaplamak için, $n - km$ yol vardır. Eğer P_n 'nin ilk t düğümünü P_t yolu ile kaplarsak, P_n nin kalan kısmını $n - tm - 1$ şekilde kaplayabiliriz. Temel sayma kuralından,

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-k \\ m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-t \\ m \end{bmatrix}$$

bulunur.

Örneğin, $t = 2, k = 5$ alınırsa, $F_2(5, n)$ dizisine karşılık gelen $\begin{bmatrix} 13 \\ 4 \end{bmatrix}$ sayısını düşünelim.

Bu her kaplamanın P_2 yollarından dört tanesinin P_{13} yolunun sekiz düğümünü kaplayacak olduğu $\{P_2, P_5\}$ kaplamalarının sayısına eşittir. Geri kalan düğümler P_5 yolu tarafından kaplanır. Çünkü bu beş şekilde elde edilebilir.

Pascal'a benzer üçgenin birkaç satırı aşağıda verilmiştir;

$$P_{2,5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 10 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 10 & 0 & 0 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 10 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 10 & 10 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 20 & 15 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 15 & 20 & 0 & 21 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 15 & 0 & 35 & 21 & 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$P_{2,5}$, $F_2(5, n)$ dizisine karşılık gelirken, $P_{2,3}$, $F_2(3, n)$ dizisine karşılık gelir.

$P_{1,1}$, $F_1(1,n)$ dizisine karşılık gelir ve bunun klasik Pascal üçgenini verdiği aşağıda gösterilmiştir.

$$P_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 36 & 84 & 126 & 126 & 84 & 36 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorem 4.9.9., belirli bir yol kombinasyonunun belirli bir sayıda düğümü kapsayarak nasıl farklı kaplama yolları oluşturulduğunu gösterir ve bu sayıları Pascal benzeri bir üçgen şeklinde de düzenler. Bu da karmaşık problemlerde yol sayısını hesaplamayı kolaylaştırır.

5. SONUÇ

Bu tezde, hakkında literatürde çok az araştırma yapıldığı fark edilen distance Fibonacci sayı dizileri ele alınmıştır. Bu sayı dizileri incelenerek yeni dizi aileleri ve bu ailelerin genelleştirilmiş hali tanımlanmıştır.

Bu bağlamda ilk olarak, $F_3(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi tanımlanmıştır. Bu dizinin özellikleri incelenerek, bu dizinin Padovan ve Narayana sayı dizileri ile ilişkileri ortaya konmuştur. Pascal üçgeni kullanarak bu dizilerin terimlerinin nasıl oluşturulduğu gösterilmiştir. Bu dizilerin tanımları negatif tamsayılar için genişletilmiştir. Bu dizilerin matris üreteçleri, üreteç fonksiyonları bulunmuş ve çeşitli özellikleri gösterilmiştir. Akabinde, $F_4(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi tanımlanmış olup bu dizinin özellikleri incelenmiştir. Bu dizinin Padovan ve Narayana sayı dizileri ile ilişkileri ortaya konmuş olup bu dizinin tanımı negatif tamsayılar için genişletilmiştir. Pascal üçgeni kullanarak bu dizilerin terimlerinin nasıl oluşturulduğu gösterilmiştir. Bu dizilerin matris üreteçleri, üreteç fonksiyonları bulunmuş ve çeşitli özellikleri gösterilmiştir.

Son olarak, bu dizi ailelerinden yola çıkarak genelleştirilmiş $F_t(k, n)$ -distance Fibonacci sayı dizisi tanımlanmıştır. Aynı adımlar bu dizi ailesi için de tekrarlanmış olup genelleştirilmiş dizi ailesinin özellikleri incelenmiş, Padovan ve Narayana sayı dizileri ile ilişkisi ortaya konmuştur. Bu dizi ailesinin tanımı negatif tamsayılar için genelleştirilmiş, Pascal üçgeni ile ilişkisi ortaya konmuş, matris üreteçleri ile üreteç fonksiyonu bulunmuştur.

Ayrıca bu tezde yapılan çalışmalar ile distance Fibonacci sayılarına yönelik genel bir bakış açısı kazandırılmıştır. Distance Fibonacci sayılarına yönelik ele alınan ve önceki kısımlarda belirtilen çalışmalar, araştırmanın kuramsal çerçevesinin oluşturulması adına önemli kaynaklar olarak değerlendirilmektedir. Bu bağlamda araştırmanın içerikleri, metodolojisi, bulguları ve beklenen çıktıları, belirtilen çalışmalardan hareketle ve bilimsel araştırma yöntemleri kullanılarak ortaya çıkarılmıştır.

6. ÖNERİLER

Bu tezde yapılan çalışmalar sonucu tanımlanan distance Fibonacci sayı dizileri, Jacobsthal ve Pell gibi farklı sayı dizilerine de uygulanabilir. Bulunan yeni aile dizileri bu alanda yapılan çalışmaları çoğaltabilir. Ayrıca bulunan yeni dizi ailelerinin polinomları da çalışılarak literatüre çeşitli alanlarda katkı sağlanabilir.



KAYNAKLAR

- Atkins, J. and Geist, R., (1987) "Fibonacci numbers and Computer algorithms", *College Maths J.*, 18, 328-336.
- Ali, A. and Tariq, S., (2020) "Comprehensive study on Fibonacci Lucas Sequences and Their Applications", *Mathematics*, 8(8), 1274.
- Bednarz, U., Włoch, A. and Wołowiec-Musiał, M., (2013) "Distance Fibonacci numbers, their interpretations and matrix generators", *Commentationes Mathematicae*, 53(1), 35-46.
- Bród, D., Piejko, I., Włoch, I., (2013) "Distance Fibonacci numbers, distance Lucas numbers and their applications", *Ars Combinatoria*.
- Bednarz, U., Włoch, I. and Wołowiec-Musiał, M., (2015) "Total graph interpretations of numbers of the Fibonacci type", *Journal of Applied Mathematics*, 1, 1-7. <https://doi.org/10.1155/2015/837917>.
- Bród, D. and Włoch, A., (2021) "(2,k)-distance Fibonacci polynomials", *Symmetry*, 13, 303. <https://doi.org/10.3390/sym13020303>.
- Cox, A.M. and Katz, V. J., (2009) "Fibonacci: Mathematics of Fibonacci numbers and the Golden Section", *Dover Publications*.
- Deveci, Ö. ve Karaduman, E., (2012) "The generalized order k-Lucas sequences in finite groups", *Journal of Applied Mathematics*, 464580.
- Deveci, Ö. ve Karaduman, E., (2012) "The cyclic groups via the Pascal matrices and the generalized Pascal matrices", *Linear Algebra Applications*, 437, 2538-2545.
- Diestel, R., (2005) "Graph Theory" *Springer-Verlag*, Heidelberg, New York, Inc.
- Dobb, E., (2020) "Fibonacci Sequence: A comprehensive analysis", *Journal of Mathematics and Its Applications*, 12(3), 127-135.
- Er, M.C., (1984) "Sums of Fibonacci numbers by matrix methods", *Fibonacci Quart.*, 22 (3), 204-207.
- El-Mikkawy, M. and Sogabe, T., (2010) "A new family of Fibonacci numbers", *Applied Mathematic and Computation*, 215, 4456-4461.
- Fuchs, E.F., (1963) "On a problem of Fibonacci", *The Fibonacci Quaterly*, 28-31.
- Feingold, A.J., (1980) "A hyperbolic GCM lie algebra and the Fibonacci numbers", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 80, 379-385.

- Fredman, M.L. and Tarjan, R.E., (1987) "Fibonacci heaps and their uses in improved network optimization algorithms, *J.ACM.*, 34, 596-615.
- Falcon, S. and Plaza, A., (2007) "The k-Fibonacci sequence and the Pascal 2-Triangle", *Chaos, Solitons and Fractals*, 33, 38-49.
- Falcon, S. and Plaza, A., (2009) "On k-Fibonacci numbers of arithmetic indexes", *Applied Mathematics and Computation*, 208, 180-185.
- Falcon, S., (2011) "On the k-Lucas numbers", *Int. J.Contemp. Math. Sciences* 6(21), 1039-1050.
- Falcon, S. and Plaza, A. (2019) "Chaos in a discrete model of the Fibonacci family", *Chaos, Solitons and Fractals* 118, 273-279.
- Falcon, S., (2019) "Binomial transform of the generalized k-Fibonacci numbers", *Communications in Mathematics and Applications*, 10(3), 643-651.
- Grünbaum, B. (1960) "Fibonacci rectangles: the ambiguity of neat problems", *The Fibonacci Quaterly*, 90-93.
- Horadam, A.F., (1961) "A generalized Fibonacci sequence", *Amer. Math. Monthly* 68, 455-459.
- Hoggat, V.E., (1969) "Fibonacci and Lucas numbers", *Houghton-Mifflin*.
- Hoggat, V.E. and Bicknell-Johnson, M., (1980) "The reciprocal Fibonacci constant", *Fibonacci Quaterly*, 18(2), 143-147.
- Jaiswal, D.V., (1969) "On a generalized Fibonacci sequence", *LabdevJ. Sci. Tech. Part. A.*, 7, 67-71.
- Kwasnik, M. and Włoch, I., (2000) "The total number of generalized stable sets and kernels in graphs", *Ars Combinatoria*, 55, 139-146.
- Koshy, T., (2001) "Fibonacci and Lucas numbers with applications", *John Wiley and Sons Inc.*, New York.
- Knott, R., (2006) "Fibonacci numbers and golden section", *The Mathematics of Phi*.
- Kiliç, E., (2007) "The generalized order-k-Fibonacci-Pell sequence by matrix methods", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 209, 133-145.
- Kiliç, E. and Taşçi D., (2010) "On the generalized Fibonacci and Pell sequences by Heisenberg matrices, *Ars Combinatoria*, 94, 161-174.
- Lee G.Y., Lee, S.G., Kim, J.S. and Shin, H.K., (2001) "The Binet formula and representations of k-generalized Fibonacci numbers", *Fibonacci Quaterly*, 39 (2), 158-164.

- Lando, S., (2003) "Fibonacci numbers and matrices", *Fibonacci Quaterly*, 41(4), 347-355.
- Miles, E.P., Jr., (1960) "Generalized Fibonacci numbers and associated matrices", *Am.Math. Mon.*, 67, 745-752.
- Nelson, Y.Li. and Toufik, M., (2008) "An identity involving Narayana numbers", *European Journal of Combinatorics*, 672-675.
- Özkan, E., Altun, İ. And Göçer A., (2017) "On relationship among a new family of k-Fibonacci, k-Lucas numbers, Fibonacci and Lucas numbers", *Chiang Mai Journal of Science*, 444, 1744-1750.
- Özkan, E., Aydoğdu, A., Altun, İ., (2017) "Some identities for a family of Fibonacci and Lucas numbers", *Journal of Mathematics and Statistical Science*, 3 (10), 295-303.
- Özkan E., Altun, İ., (2019) "Generalized Lucas polynomials and relationships between the Fibonacci polynomials and Lucas polynomials", *Commun. Algebra*, 47, 10-12.
- Özkan, E., Kuloğlu B., (2021) "On the new Narayana polynomials, the Gauss Narayana numbers and their polynomials", *Asian-Eur. J. Math.*, 14 (06), 2150500. <https://doi.org/10.1142/S179355712150100X>.
- Özkan, E., Yilmaz, N.Ş. ve Włoch, A., (2021) "On $F_3(k, n)$ -numbers of the Fibonacci type", *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, vol.27, 77. <https://doi.org/10.1007/s40590-021-00381-9>.
- Stojmenovic, I., (2000) "Recursive algorithms in computer science courses: Fibonacci numbers and binomial coefficients", *IEEE Transactions on Education*, 43, 273-276.
- Sburlati, G., (2002) "Generalized Fibonacci sequences and linear congruences", *Fibonacci Quaterly*, 40, 446-452.
- Sinha, S., (2017) "The Fibonacci numbers and its amazing applications", *International Journal of Engineering Science Invention*, Vol.6 Issue 9, 7-14.
- Soykan, Y., (2020) "Generalized Fibonacci numbers: sum formulas", *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science*, 35(1), 89-104.
- Sloane, N.J.A., (2021) "The on-line encyclopedia of integer sequences", <https://oeis.org/>, Son erişim tarihi: 18.04.2024.
- Viola, A., (2001) "Fibonacci numbers and nature", *The Mathematical Gazette*, 85(503), 27-29.
- Vajda, S., (2008) "Fibonacci, Lucas numbers and the golden section: theory and applications", *Dover Publications*.

- Verner, P., (2010) "Fibonacci, rabbits and nature", *John Wiley and Sons*.
- Włoch, I., (2008) "Trees with extremal numbers of maximal independent sets including the set of leaves, *Discrete Mathematics*, 308, 4768-4772.
- Włoch, A., Włoch, I., (2011) "Generalized Padovan numbers, Perrin numbers and maximal k-independent set in graphs", *Ars Combinatoria*, 99, 359-364.
- Włoch, A., "Some interpretations of the generalized Fibonacci numbers", *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 9(2), 1-11.
- Włoch, A., (2012) "On generalized Fibonacci numbers and k-distance K_p -matchings in graphs" *Discrete Applied Mathematics*, 160, 1399-1405.
- Włoch, A., (2013) "Some identities for the generalized Fibonacci numbers and the Lucas numbers", *Applied Mathematics and Computation*, 219, 5564-5568.
- Włoch, I., Bednarz U., Bród, D., Włoch, A. and Wolowiec-Musiał, M., (2013) "On a new type of distance Fibonacci numbers", *Discrete Applied Mathematics*, 161, 2695-2701.
- Włoch, I. and Włoch, A., (2020) "On some multinomial sums related to the Fibonacci type numbers", *Tatra Mt. Math. Publ.*, 77, 99-108.
- Yilmaz, N.Ş., Włoch, A., Özkan, E., and Strzalka, D., (2023) "On doubled and quadrupled Fibonacci type sequences, *Annales Mathematicae Silesianae*, <https://doi.org/10.2478/amsil-2023-0020>.
- Yilmaz N.Ş., Włoch, A., Özkan E., (2024). "Generalization of the Distance Fibonacci Sequences" *Axioms* **13**, 420. doi:10.3390/axioms13070420.