

FARK DENKLEMLERİ VE DENGELİ

Gölser Pınar YILMAZ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HAZİRAN 2006
ANKARA**

Gülser Pınar YILMAZ tarafından hazırlanan FARK DENKLEMLERİ VE DENGELİ HALİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Soner GÖNEN
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından İstatistik Anabilim Dalında Yüksek lisans olarak kabul edilmiştir.

Başkan: : Prof. Dr. Hüseyin TATLIDİL

Üye : Prof. Dr. Soner GÖNEN

Üye : Prof. Dr. Reşat KASAP

Üye : Prof. Dr. Hülya BAYRAK

Üye :Yrd. Doç. Dr. Atilla GÖKÇE

Tarih : 22.6.2006

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Gülser Pınar YILMAZ

FARK DENKLEMLERİ VE DENGİ HALİ**(Yüksek Lisans Tezi)****Gölser Pınar YILMAZ****GAZİ ÜNİVERSİTESİ****FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Haziran 2006****ÖZET**

Bu çalışmada fark denklemleri, fark denklemlerinin çeşitleri ve denge koşulları hakkında bilgi verilmektedir. Ekonometride önemli yer tutan eşanlı denklem tahminleri, eşanlı denklem modellerinin niteliği, belirlenme sorunu ve aşırı belirlenmiş denklemlerin tahmin yöntemlerinden biri olan iki aşamalı en küçük kareler yöntemi anlatıldı. Birinci dereceden fark denklemlerine bir uygulama olması amacıyla eşanlı bir denklem yapısına sahip olan Milli Gelir denklemlerine klasik ekonometri yöntemlerinden biri olan İki Aşamalı En Küçük Kareler yöntemi uygulandı. Çalışmada kullanılan değişkenlerin durağan olduğu varsayıldı ve zaman serisi özellikleri bakımından incelenmedi. Türkiye Ekonomisi'nin 1988:1 - 1999:4 dönemi ele alındı, denklem tahminlerinde E-Views paket programı kullanıldı. Birinci dereceden fark denklemleri aracılığıyla denge durumları yorumlandı.

Bilim Kodu : 205.1.066
Anahtar Kelimeler : Fark Denklemleri, denge, eşanlı denklemler
Sayfa Adedi : 65
Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Soner GÖNEN

DIFFERENCE EQUATIONS AND EQUILIBRIUM SITUATIONS**(M.Sc. Thesis)****Gülser Pınar YILMAZ****GAZİ UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****June 2006****ABSTRACT**

In this study, the information about difference equations, the kinds of difference equations and equilibrium conditions are given. Simultaneous equations forecast, the qualifications of simultaneous equation models and identification of them and two step least squares method which is one of the excess identified equations forecast methods in which is an important aspects in econometry is evaluated. In order to an application of first order difference equations, one of the classical econometry method Two Step Least Squares is applied on National Income having simultaneous structure. The variables used in the study are assumed to be stable and these variables aren't evaluated by properties of time series. The period of 1988:1 – 1999:4 Turkish Economy is taken on and E-Views program is used in the estimations of equations. By using first order difference equations the equilibrium conditions are evaluated.

Science Code : 205.1.066**Key Words : Difference equations, equilibrium, simultaneous equations****Page Number : 65****Adviser : Prof. Dr. Soner GÖNEN**

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Hocam Prof. Dr. Soner GÖNEN'e, çalışmalarımda yol gösterici olduğu ve yapıcı eleştirisiyle sonuca ilerlememi sağlayan kıymetli Hocam Prof. Dr. Fikri ÖZTÜRK'e, yardımlarını benden esirgemeyen Doç. Dr. Atilla GÖKÇE'ye, Yrd. Doç. Dr. Funda YURDAKUL'a, Doç. Dr. Aslan YİĞİDİM'e, tecrübelerinden yararlandığım değerli programcı arkadaşlarım Beyza RÜZGAR, Bora SARI, Emel KARATAŞ, Zeynep F. CANBEK'e, tezim boyunca beni destekleyen değerli Müdürüm Ümit TOPRAK'a ve son olarak beni manevi destekleriyle yalnız bırakmayan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	x
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR	xii
1. GİRİŞ	1
2. FARK DENKLEMLERİ	3
2.1. Fark Denklemlerinin Elde Edilmesi	6
2.2. Fark Denklemlerinin Genel Teoremleri	7
2.3. Birinci Dereceden Fark Denklemleri	8
2.3.1. İteratif yöntem	8
2.3.2. Genel yöntem	8
2.4. Dengenin Dinamik İstikrarı	10
2.5. İkinci Sıra Fark Denklemleri	14
2.5.1. Durum 1: $\Delta > 0$	15
2.5.2. Durum 2: $\Delta = 0$	16
2.5.3. Durum 3: $\Delta < 0$	17
2.6. Yüksek Sıra Doğrusal Fark Denklemleri	18
2.6.1. Yakınsaklık ve Schur teoremi	20

Sayfa

2.7. Eşanlı Doğrusal Fark Denklemleri.....	21
2.7.1. Matris eşitlikleriyle çözüm gösterimi	23
3. EŞANLI DENKLEMLER.....	26
3.1. Eşanlı Denklem Modellerinde Tanımlar	26
3.2. Merkezci Olmayan Wishart Dağılımının Eşanlı Denklemlere	28
Uygulanması	
3.3. Belirlenme Sorunu	32
3.3.1. Belirlenmede sayma koşulu	34
3.3.2. Belirlenmede mertebe koşulu.....	34
3.4. Aşırı Belirlenmiş Bir Denklemin Tahmini: İki Aşamalı En Küçük Kareler Yöntemi (2AEK).....	36
3.4.1. İki aşamalı en küçük kareler yönteminin varsayımları	41
3.4.2. İki aşamalı en küçük kareler yönteminin özellikleri	42
4. BİRİNCİ DERECEDE FARK DENKLEMLERİ UYGULAMASI: MİLLİ GELİR BELİRLENME MODELİ	44
4.1. Toplam Harcama Yaklaşımı	44
4.2. Denge Geliri ve Harcama Düzeyi	45
4.3. Belirlenme Koşulları.....	48
4.3.1. Belirlenmede sayma koşulu	48
4.3.2. Belirlenmede mertebe koşulu.....	49
4.4. İki Aşamalı En küçük Kareler Yöntemiyle Yapısal Modelin Tahmini.....	52
5. SONUÇLARIN YORUMLANMASI.....	57
KAYNAKLAR.....	58
EKLER.....	60
EK-1 Milli gelir belirlenme modelinin tahmin sonuçları.....	61

Sayfa

EK-2 Milli gelir tahmininde kullanılan veriler.....	63
ÖZGEÇMİŞ.....	65

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. Köklerin zaman patikaları.....	12
Çizelge 4.1. Özel tüketim denkleminin tahmini	52
Çizelge 4.2. Yatırım denkleminin tahmini.....	53
Çizelge 4.3. İthalat denkleminin tahmini.....	53

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Köklerin zaman patikaları	13
Şekil 4.1. GSMH'nın denge gelirine yakınsaması	56

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
C_t	Özel tüketim harcamaları
I_t	Yatırım harcamaları
Y_t	Gayri safi milli hasıla
Y_{t-1}	Bir dönem gecikmeli milli gelir
D_t	Döviz kuru
M_t	İthalat
t	Zaman
G_t	Devlet harcamaları
X_t	İhracat

Kısaltmalar	Açıklama
GSMH	Gayri safi milli hasıla

1. GİRİŞ

Ekonomi kuramının uğraş alanı genellikle denge durumundaki ilişkiler olduğundan durağanlık kavramı ekonomide önemli bir yer tutmaktadır. Herhangi bir ekonomik değişkenin incelenmesi, zaman içinde nasıl bir yapı ortaya koyduğunun bulunması ve belli bazı denge değerlere yakınsayıp yakınsamadığının bulunması amacıyla dinamik çözümleme tipine başvurulmaktadır.

Dinamik çözümlemede bir değişkenin dengeye yakınsayıp yakınsamadığını bulmak için zaman çözümlemesi işin içine sokulur. Değişkenlerin zamanlaması iki şekilde yapılır. Zaman sürekli ya da kesikli değişken olarak ele alınabilir. Sürekli zaman çözümlemesinde değişken zamanın her noktasında değişmeye uğrar. Kesikli zaman çözümlemesinde ise değişken bir zaman döneminde yalnızca bir defa değişmeye uğrar. Sürekli zaman durumunda türevsel kullanılmaktadır.

Bu doğrultuda hazırlanan bu çalışmanın amacı fark denklemleri ve denge durumunun incelenmesi ve Türkiye ekonomisinin değerlendirilmesinde önemli yere sahip olan milli gelir denkleminin uygulanmasıdır. Günümüzde uygulama alanı geniş olan milli gelir hesapları bir ülkenin kalkınma ve ekonomik gelişmişlik durumunu göstermektedir. Kalkınma plan ve programlarının hazırlanmasında, ekonomi politikalarının etkisini ve başarı derecesini ölçmekte faydalı olmaktadır.

Bu amaca ulaşabilmek için eşanlı denklem sistemlerinden olan milli gelirle ilgili denklemlere klasik ekonometri yöntemlerinden biri olan İki Aşamalı En Küçük Kareler yöntemi uygulandı. Çalışmada kullanılan değişkenlerin durağan olduğu varsayıldı ve zaman serisi özellikleri bakımından incelenmedi. Türkiye Ekonomisi'nin 1988:1 - 1999:4 dönemi ele alındı, denklem tahminlerinde E-Views paket programı kullanıldı.

Fark denklemleriyle ilgili çalışmasında Yurdakul (1999) İç Kamusal Borçların Fiyatlar Üzerine Etkilerini incelemiştir. Kızılsu, Aksoy, Kasap (2001)'ın zaman serisi özellikleri bakımından incelediği ARCH ve türevsel modelleri yardımıyla

farklı eğilimler gösteren yıllık GSMH büyüme hızını modelleyen çalışmaları bulunmaktadır. Eşanlı denklem sistemleriyle de ilgili olarak Kulakoğlu (1986) eşanlı (simultane) denklem sistemlerini ayçiçeği piyasasına uygulamıştır. Saraçoğlu (1991) milli gelir hesaplama yöntemleri üzerine çalışması bulunmaktadır.

Çalışmanın ikinci bölümünde fark denklemleri, fark denklemlerinin çeşitleri ve denge durumu (istikrar koşulları) hakkında bilgi verilmektedir.

Üçüncü bölümde çalışmada kullanılan ekonometrik yöntem anlatılmıştır. Ekonomide önemli yer tutan eşanlı denklem modellerinin niteliği, belirlenme sorunu ve aşırı belirlenmiş denklem tahmin yöntemlerinden biri olan iki aşamalı en küçük kareler yöntemine değinilmektedir.

Dördüncü bölümde, eşanlı bir model olan milli gelir modeli tahmin edilerek fark denklemleri aracılığıyla denge durumu yorumlanmaktadır.

Beşinci bölümde ekonometrik analizler ve fark denklemleri aracılığıyla elde edilen sonuçlar topluca gözden geçirilmiş, sonuçların ekonomi kuramına uygulduğu değerlendirilerek 1988:1 - 2001:4 dönemi Türkiye ekonomisine ait milli gelir yapısı hakkında çıkarsamalar yapılmıştır.

2. FARK DENKLEMLERİ

Sürekli zaman bağlamında bir y değişkeninin değişim kalıbı türevlerle ifade edilir ve bunlarda yer alan zaman değişimi çok küçüktür. dy/dt ifadesi birinci dereceden türevsel denklemi göstermektedir. dy^2/dt^2 ya da dy^3/dt^3 şeklinde yüksek dereceden türevleri de kullanılır. Bir denklemde türevin aldığı en yüksek kuvvete o türevsel denklemin derecesi denir.

Birinci dereceden doğrusal türevsel denklem;

$$\frac{dy}{dt} + b(t).y = c(t) \quad (2.1)$$

biçiminde ifade edilir.

Homojen (türdeş) durum için b ve c değerleri sabit ve özel olarak $c(t)=0$ ise

$$\frac{dy}{dt} + by = 0 \quad (2.2)$$

dir. Burada b sabittir. Homojen denklemin çözümü

$$\frac{dy}{dt} = -by \quad (2.3)$$

şeklindedir. Her iki tarafı y 'ye bölersek;

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dt} = -b \quad (2.4)$$

elde edilir. $y(t)$ t anındaki y 'nin değerini göstermek üzere;

$$y(t) = Ae^{-bt} \quad (\text{genel çözüm}) \quad (2.5)$$

$$y(t) = y(0)e^{-bt} \quad (\text{özel çözüm}) \quad (2.6)$$

burada rasgele bir A sabiti yer almaktadır. Dolayısıyla, bu bir genel çözümdür. A yerine belirli bir değer konulduğunda bulunan çözüm özel çözümdür. $y(0)$ 'da içinde olmak üzere her biri bir A değerine karşılık gelen sonsuz sayıda özel çözüm vardır. Burada $y(0)$ çözümün başlangıç koşulunu sağlayan tek bir değerdir.

Homojen olmayan durum için;

$$\frac{dy}{dt} + by = c \quad (2.7)$$

şeklindeki bir denklemin çözümü, homojen denklemin çözümünde bulacağımız tamamlayıcı çözüm y_c ile denklemin herhangi bir başlangıç değerine göre bulunan özel çözüm olan y_p 'nin toplanımından elde edilir.

Homojen denklemin çözümü tamamlayıcı çözüm olarak nitelendirilsin. Aşağıdaki gibi

$$y_c = Ae^{-bt} \quad (2.8)$$

bulunur. Eş. 2.5' te herhangi bir özel çözüm ise $y=k$ gibi bir sabit olarak alınsın. Eş.

2.7 eşitlikte yerine konulursa sabitin türevi 0 olduğundan $\frac{dy}{dt} = 0$ ' dır.

$$y.b=c \quad (2.9)$$

$$y = \frac{c}{b} \quad (2.10)$$

sonucu elde edilir. Özel çözüm ile tamamlayıcı çözümün toplanmasıyla genel çözüm aşağıdaki gibi bulunur.

$$y(t) = y_p + y_c = Ae^{-bt} + \frac{c}{b} \quad (b \neq 0) \text{ 'dır} \quad (2.11)$$

Bu eşitliğin bir genel çözüm olmasını sağlayan sebep A sabitinin varlığıdır. $t=0$ olduğunda

$$y(0) = A + \frac{c}{b} \text{ ve } A = y(0) - \frac{c}{b} \quad (2.12)$$

dolayısıyla genel çözüm;

$$y(t) = \left[y(0) - \frac{c}{b} \right] e^{-bt} + \frac{c}{b} \quad (2.13)$$

olur. Aynı şekilde sürekli zaman bağlamında türevsel denklemlerin çözümlerinde olduğu gibi kesikli zaman bağlamında fark denklemlerinin çözümü dikkate alınacaktır.

Zaman kesikli bir değişken olarak ele alınıp, t değişkeninin yalnızca tam sayı değerleri almasına izin verilince, türev kavramı artık uygun olmayacaktır. Bu durumda, y değişkeninin değişim kalıbı, $y(t)$ 'nin türevleri ve türevsellersi ile değil “farkları” ile ifade edilir. Buna uygun olarak, türevsel denklemlerin yerini fark denklemleri alacaktır. Fark denklemlerinin iktisadi dönem çözümlemelerinde uygulamaları mevcuttur. Dönem çözümlemelerinde bir ekonomik değişken kesikli zamanlarda gözleniyor olabilir. Burada değişim kalıbı artık dy/dt yerine kesikli zamanda $\Delta y/\Delta t$ alacaktır. Bu ifade de Δy biçiminde basitleştirilebilir. Buna y 'nin birinci dereceden farkı denilir [1].

2.1. Fark Denklemlerinin Elde Edilmesi

$y=f(t)$ ifadesi fark almada ardışık döneminin kapsandığına bağlı olarak çeşitli değerler alabilir. Birinci fark $\Delta y=f(t+1)-f(t)$ şeklindedir. Karışıklıktan kaçınmak için y' 'ye bir zaman alt işareti eklenir ve o zaman birinci dereceden farkları;

$$\Delta y_t=f(t+1)-f(t)=y_{t+1}-y_t$$

$$\Delta y_{t+1}=f(t+2)-f(t+1)=y_{t+2}-y_{t+1}$$

şeklinde bulunur. Burada y_t t. dönemdeki y değeri anlamını taşımaktadır. Diğer taraftan ikinci dereceden farklar ise birinci farkların kullanımı ile saptanabilir.

İkinci dereceden farklar;

$$\Delta^2 y_t = \Delta y_{t+1} - \Delta y_t = (y_{t+2} - y_{t+1}) - (y_{t+1} - y_t) = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t$$

şeklinde yazılır. Aynı şekilde devam edilerek iki ikinci fark denklemi arasındaki fark alınabilir. Böylece $y=f(t)$ fonksiyonuna ait üçüncü fark aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \Delta^3 y_t &= \Delta^2 y_{t+1} - \Delta^2 y_t = (\Delta y_{t+2} - \Delta y_{t+1}) - (\Delta y_{t+1} - \Delta y_t) = \Delta y_{t+2} - 2\Delta y_{t+1} + \Delta y_t \\ &= (y_{t+3} - y_{t+2}) - 2(y_{t+2} - y_{t+1}) + (y_{t+1} - y_t) \\ &= y_{t+3} - 3y_{t+2} + 3y_{t+1} - y_t \end{aligned}$$

daha yüksek dereceden fark denklemleri de bu şekilde elde edilir. Buna göre fark denklemi zamanın bilinmeyen fonksiyonuna ait $\Delta y_t, \Delta^2 y_t$ gibi farkların bir ya da daha fazlasını içeren fonksiyonel bir denklemdir.

Türevsel denklemlerde olduğu gibi fark denklemleri doğrusal ya da doğrusal olmayan, homojen olmayan birinci ya da ikinci (ya da daha yüksek mertebeden) olabilir. Ayrıca eşanlı fark denklemleri de vardır.

Homojen ve homojen olmayan fark denklemleri arasında bir ayrım yapılması gereklidir. n. sırada homojen denklem

$$c_n y_{t+n} + c_{n-1} y_{t+n-1} + \dots + c_1 y_{t+1} + c_0 y_t = 0 \quad (2.14)$$

şeklinde tanımlanabilir [2].

Homojen olmayan bir fark denkleminin çözüm yolu ise;

$$c_n y_{t+n} + c_{n-1} y_{t+n-1} + \dots + c_1 y_{t+1} + c_0 y_t = g(t) \quad (2.15)$$

- 1) Homojen olmayan denkleme ait y_p şeklinde özel (belirli) bir çözüm saptayınız.
- 2) $g(t)=0$ olduğunu kabul ederek böylece elde edilen homojen denklemi çözülüp y_c tamamlayıcı çözüm elde edilir
- 3) Bu iki çözümün toplanmasıyla genel çözüme ulaşılır.

2.2. Fark Denklemlerinin Temel Teoremleri

- i) $y(t)$ 'nin belirli bir homojen fark denklemlerinin çözümü olması durumunda A 'nın bir sabit olarak tanımlandığı $Ay(t)$ aynı fark denklemlerinin çözümüdür.
- ii) Belirli bir homojen ($n>1$) $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ gibi iki farklı çözüme sahip ise A_1 ve A_2 'nin bir sabit olarak tanımlandığı $A_1 y_1(t) + A_2 y_2(t)$ fonksiyonu da aynı denklemin bir çözümüdür. Süpervizyon teoremi olarak adlandırılan bu teorem yüksek mertebeden denklemler içinde genişletilebilir.
- iii) $y(t)$ 'nin homojen olmayan bir denkleme ait belirli bir çözüm olması durumunda aynı denkleme ait genel çözüm belirli çözüme homojen karşıtına denk gelen çözümün eklenmesiyle bulunur [3].

2.3. Birinci Dereceden Fark Denklemleri

Bir fark denklemini çözmekteki amaç y_t 'nin bir zaman patikasını bulmaktır. Birinci dereceden fark denklemlerinin iki tip çözüm yöntemi vardır. Bunlar iteratif yöntem ve genel yöntem olarak ayrılabilir.

2.3.1. İteratif yöntem

İteratif yöntem kullanışsız olsa da bir çözümün temel doğasını ortaya çıkarmada etkilidir. Burada birinci sıra fark denklemleriyle dikkate alınacaktır. Fark denklemi yalnızca iki ardışık dönemi ele alacaktır. Böyle bir kalıp, başlangıçta y_0 'ın verilmesiyle kolaylıkla aşamalı olarak yinelerek diğerleri içinde elde edilebilir.

Örneğin

$y_0=7$ başlangıç değeri alındığında $y_{t+1}=y_t+3$ denkleminin kullanmayı tercih edildiğinde, bu denklemden adım adım aşağıdakiler elde edilir.

$$y_1=y_0+3$$

$$y_2=y_1+3 = y_0+3+3 =y_0+2(3)$$

$$y_3=y_2+3= y_0+2(3) +3=y_0+3(3)$$

$$\dots\dots\dots (2.16)$$

Her bir t dönemi için genellendiğinde

$$y_t=y_0+t(3)=7+3t (2.17)$$

olur. Bu denklem herhangi bir t dönemi için y değerini gösterir. Dolayısıyla bir tür çözümünü oluşturur. İterasyon süreci kaba bir süreçtir ancak bir zaman patikasının şeklinin açıkça göstermek faydalıdır.

2.3.2. Genel yöntem

Birinci sıra fark denklemleri genel olarak,

$$c_1 y_t + c_0 y_{t-1} = g(t) \quad (2.18)$$

şeklinde yazılabilir. Burada c_0 ve c_1 birer sabit ve $g(t)$ de bilinen bir fonksiyondur. c_0 ve c_1 sabitlerinin her ikisinin de sıfırdan farklı olması gerekir. Böyle olmaması durumunda denklem fark denklemleri olma özelliğini kaybedecektir.

Fark denklemlerinde amaç bir y değişkeninin veri değişim kalıbından bir zaman patikası elde etmektir.

Bu amaçla genel çözüm

$$y(t) = y_p + y_c \quad (2.19)$$

olacaktır. Burada, türevsel denklemlerde olduğu gibi homojen denklemin çözümü tamamlayıcı denklemin çözümü y_c 'yi, homojen olmayan denklemin herhangi bir çözümü ise y_p 'yi göstermektedir. Aşağıda y_c tamamlayıcı fonksiyonu

$$c_1 y_t + c_0 y_{t-1} = 0 \quad (2.20)$$

ya da

$$y_t + b y_{t-1} = 0 \quad (2.21)$$

olan homojen birinci sıra fark denklemi olarak ele alınabilir. Burada $b = c_0/c_1$ 'dir. Başlangıç döneminde (örnek olarak $t=0$) y fonksiyonu A gibi bir değere sahip olduğu varsayılın. Bu durumda, değişik t değerleri karşısı olan y değerleri aşağıda gösterildiği gibi belirlenebilir:

$$y_1 = -b y_0 = -bA$$

$$y_2 = -b y_1 = -b(bA) = -b^2 A$$

$$y_3 = -b y_2 = -b(b^2 A) = -b^3 A$$

$$y_4 = -b y_3 = -b(b^3 A) = -b^4 A$$

.....

dolayısıyla çözüm (yani herhangi bir y değeri)

$$y_t = A(-b)^t \quad (2.22)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ifadede türevsel denklemlerdeki Ae^{-bt} ifadesinin fark denklemlerindeki karşılığıdır. Her zaman dönemi için dengeden sapmayı gösterecektir. Özel çözüm ise dönemler arası denge düzeyini temsil eder.

İktisadi problemlerde y 'nin başlangıç dönemindeki değerinin bilindiği varsayılır. Prensipde $t=0$ için $y_t=y_0$ 'dır. Bu da $A=y_0$ olduğunu ifade eder. Bu durum başlangıç koşulu olarak adlandırılır. A 'nın ölçek ve ayna etkisi olmak üzere iki etkisi vardır. A ölçek etkisiyle $A(-b)^t$ terimlerini şişirir veya söndürür. Ayna etkisiyle de $A(-b)^t$ 'nin şeklini somut olarak etkiler. Çünkü $A=-1$ alındığında her bir zaman patikası yatay eksene göre ayna görünüşleri ile yer değiştirecektir. b 'nin önemi ise dengenin dinamik istikrarı kavramı ile eş tutulacaktır.

2.4. Dengenin Dinamik İstikrarı

Tamamlayıcı çözüm, her zaman dönemi için dengeden sapmayı belirleyecektir. Dolayısıyla dengenin dinamik olarak istikrarlı olup olmama sorunu tamamlayıcı fonksiyonun $t \rightarrow \infty$ olurken sıfıra yaklaşıp yaklaşmayacağı sorunu ile aynıdır. Bu durumda b 'nin değeri belirleyici bir öneme sahiptir. İlk olarak A katsayısını yok kabul ederek yalnızca b 'nin önemiyle dikkate alınacaktır. $y_t = A(-b)^t$ fonksiyonunun zaman içindeki davranış şekli b parametresinin işaretine ve mutlak değerine bağlıdır. b 'nin negatif bir değere sahip olması durumunda $-b$ pozitif olacak ve hareket (y 'nin zaman içinde takip ettiği patika) tektonlu olacaktır. Diğer taraftan b 'nin pozitif olduğu durumlarda ise fonksiyon değeri bir t değerinden diğerine pozitif ve negatif değerler arasında salınır. Dolayısıyla fonksiyon t 'nin tek değerleri için negatif ve çift değerleri için pozitif değerler alacaktır. Bu durum salınmalı hareket olarak nitelendirilecektir.

Mutlak değer olarak alındığında b değeri 1'den küçük olduğunda yakınsayan; 1 'den büyük olduğunda ıraksayan hareketi ifade edecektir. b 'nin mutlak değerinin 1'den büyük olması durumunda t değeri arttıkça fonksiyon değeri sonsuza yaklaşacaktır. b 'nin değeri 1'den küçük olduğunda ise t arttıkça fonksiyon değeri 0'a yakınsayacaktır. $b=1$ olduğu özel durumda fonksiyon eşit genişliğe sahip bir salınım olacaktır.

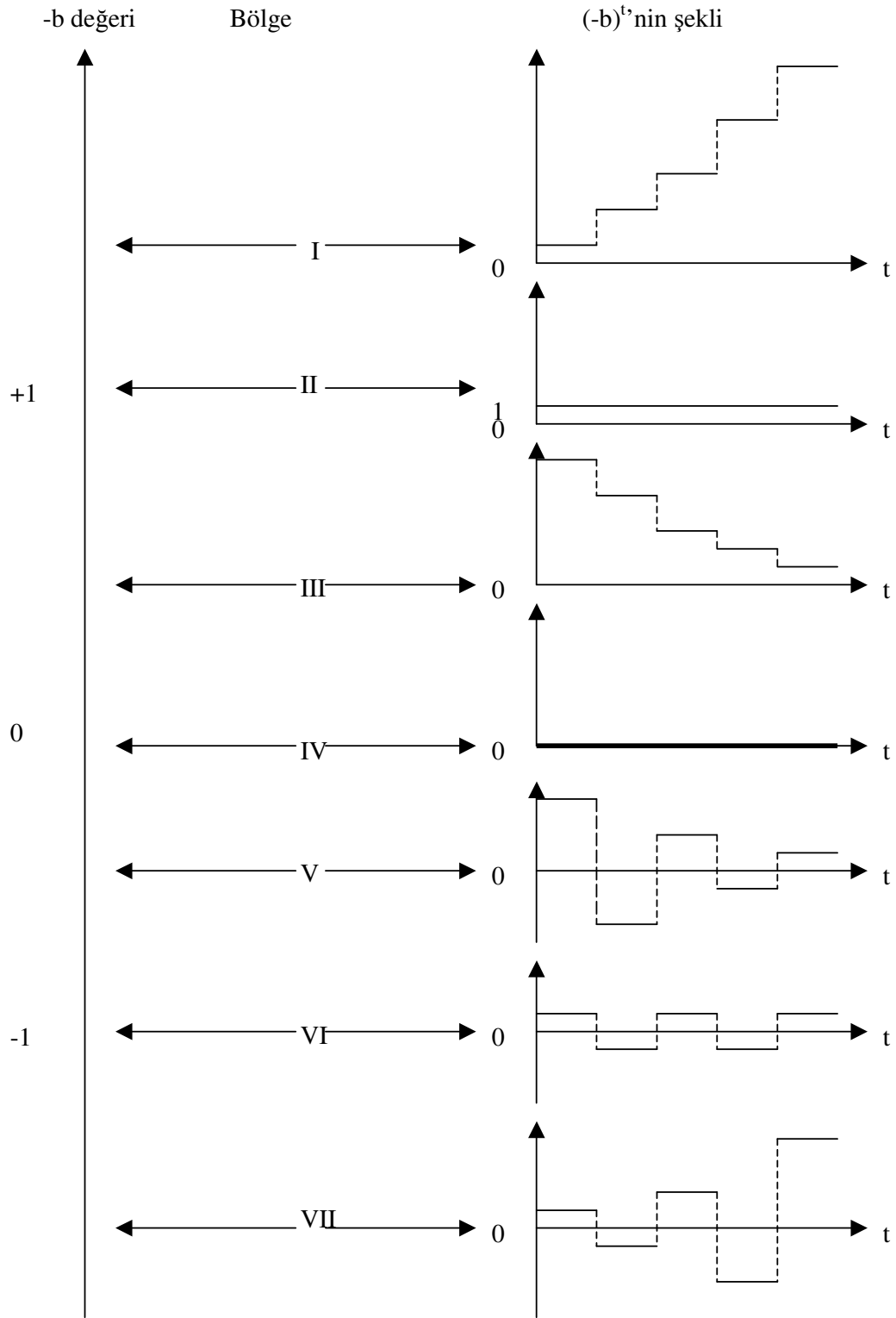
Yukarıdaki açıklamaları kısaca özetlendiğinde $(-b)^t$ 'nin zaman patikası

$-b < 0$	salınlı	$ -b > 1$	ıraksak
ise		ise	
$-b > 0$	salınımsız	$ -b < 1$	yakınsak

olacaktır. b^t ifadesinin yakınsaklığı b 'nin mutlak değerine bağlıdır. Bunlar çizelge 2.1' de özetlenecektir.

Çizelge 2.1. Köklerin zaman patikaları

Bölge	-b	(b) ^t	(-b) ^t değerleri t=0 t=1 t=2 t=3 t=4...
I	-b>1 ($ b >1$)	Örn.,(2) ^t	1 2 4 8 16
II	-b=1 ($ b =1$)	Örn.,(1) ^t	1 1 1 1 1
III	0<-b<1 ($ b <1$)	Örn.,($\frac{1}{2}$) ^t	1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$
IV	-b=0 ($ b =0$)	Örn.,(0) ^t	0 0 0 0 0
V	-1<-b<0 ($ b <1$)	Örn.,($-\frac{1}{2}$) ^t	1 $-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $-\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$
VI	-b=-1 ($ b =1$)	Örn.,(-1) ^t	1 -1 1 -1 1
VII	-b<-1 ($ b >1$)	Örn.,(-2) ^t	1 -2 4 -8 16



Şekil 2.1. Köklerin zaman patikaları

Analitik bir şekilde göstermek için $-b$ ($-\infty$ ve $+\infty$) aralığında değer alsın diyelim. Çizelge 2.1’ de her bir bölgede $(-b)^t$ ifadesi farklı bir tip hareket şekli oluşturur. I. bölgede $-b>1$ olduğunda t giderek arttıkça ve ıraksayan bir hareketi vardır. II. bölgede $-b=1$ eşit genişliğe sahip bir harekete, III. bölgede $0<-b<1$ gittikçe 0 ‘a yakınsayan bir harekete, IV. bölgede düz bir çizgiye, V. bölgede $1<-b<0$ arasında salınmalı 0’a yakınsayan bir harekete, VI. bölgede $-b=-1$ olması halinde düzgün eş salınımlı VII. bölgede $-b<-1$ olmasında dengeden ıraksıyan bir hareket yapısı ortaya çıkacaktır.

2.5. İkinci Sıra Fark Denklemleri

İkinci sıra fark denklemleri genel olarak,

$$c_2y_{t+2}+c_1y_{t+1}+c_0y_t=g(t) \quad (2.23)$$

şeklinde tanımlanır. Burada c_0, c_1, c_2 birer sabit ve $g(t)$ ’de bilinen bir fonksiyondur. c_0 ve c_2 katsayılarının her ikisininde 0’dan farklı olması gerekir. Aksi halde denklem birinci sıra fark denkleminde dönüşecektir.

İkinci sıra fark denkleminin homojen karşıtı

$$c_2y_{t+2}+c_1y_{t+1}+c_0y_t=0 \quad (2.24)$$

dır. Bu denklem yeniden düzenlenerek

$$y_{t+2}+a_1y_{t+1}+a_2y_t=0 \quad (2.25)$$

elde edilir. Burada

$$a_1=c_1/c_2 \quad a_2=c_0/c_2 \quad (2.26)$$

dir. Birinci sıra fark denklemlerinde olduğu gibi tamamlayıcı fonksiyonu bulmak için homojen denklem üzerinde durulur. Böyle bir denklemin genel çözümünde de $A(-b)^t$ ifadesinin rol oynadığını görüldü. Öyleyse $y_t = A(-b)^t$ çözüm olacaktır. Bu doğal olarak $y_{t+1} = A(-b)^{t+1}$ anlamına gelecektir.

$$Ab^{t+2} + a_1 Ab^{t+1} + a_2 Ab^t = 0 \quad (2.27)$$

Ab^t ortak çarpan parantezine alınırsa

$$b^2 + a_1 b + a_2 = 0 \quad (2.28)$$

haline gelir. Bu karesel denklem iki karakteristik köke sahiptir.

$$b_1, b_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \quad (2.29)$$

formülü ile belirlenir. Burada $a_1^2 - 4a_2 = \Delta$ ile göstererek Eş. 2.28 denklemini incelenebilir.

2.5.1. Durum 1: $\Delta > 0$

Bu durumda b_1 ve b_2 gibi birbirinden farklı iki reel kök elde edilir. Bu durumda b_1^t ve b_2^t ifadeleri doğrusal bağımsızdır. Daha önce belirtilen prensiplere göre bu iki çözüm birleştirilerek tamamlayıcı çözüme ulaşılır.

$$y_c = A_1 b_1^t + A_2 b_2^t \quad (2.30)$$

şeklinde tanımlanabilir. A_1 ve A_2 değerleri bilinmeyen birer sabittir.

Çözümün ima edeceği hareket şekli (tektonlu, salınlı ya da her ikisinin bir bileşimi) b_1 ve b_2 'nin işaretine bağlıdır. Pozitif bir sayının t . kuvveti her zaman

pozitifdir. (tektonlu hareket). Buna karşılık negatif bir sayının t . kuvveti kuvvetin çift ya da tek olmasına göre pozitif ve negatif değerler alabilir (Düzgün olmayan salınımlı hareket). Hareket ancak ve ancak her iki kök mutlak değerlerinin mutlak değerlerinin 1'den daha küçük olması durumunda yakınsayan olarak nitelendirilebilir. Bu durumda Eş. 2.15' nin sağ tarafındaki her iki terimde sıfıra yaklaşacaktır. t değeri arttıkça y_t 'nin hareketi sayısal olarak daha büyük olan tarafından belirlenecektir. Bunun sonucu sayısal olarak daha büyük olan kök “dominant kök” olarak adlandırılır.

2.5.2. Durum 2: $\Delta=0$ Olması Hali

Bu durumda tekrarlanan reel kökler vardır. $a_1^2=4a_2$ olduğunda karekök içindeki ifade sıfır olacak ve karakteristik kökler tekrarlanacaktır.

$$b(=b_1=b_2)=\frac{-a_1}{2} \quad (2.31)$$

tamamlayıcı fonksiyonu şöyle yorumlanabilir.

$$A_1b^t + A_2b^t = (A_1 + A_2)b^t = A_3b^t \quad (2.32)$$

tek bir tane çözüm bulunmuş olması yeterli değildir. Çünkü bulunan çözümlerimiz doğrusal bağımsız olmalıdır. Bir başka çözüm olması gerekmektedir. A_3b^t teriminden bağımsız bir çözüm olarak b^t 'yi t ile çarpılır. Yeni bileşen terimi A_4tb^t biçimini alır ve tekrarlanan kök durumu için tamamlayıcı fonksiyon;

$$y_c = A_3b^t + A_4tb^t \quad (2.33)$$

şeklinde yazılır dolayısıyla b^t ve tb^t birbirinden farklı iki çözümdür. Bu noktada b^t 'nin mutlak değerce 1'den küçük olması sağlanınca yakınsama gerçekleşecektir. b^t 'nin yakınsama etkisi t çarpanının büyütme etkisinden daha güçlüdür.

2.5.3. Durum 3: $\Delta < 0$

Bu durumda kökler iki tane karmaşık sayıdan oluşur. Yani sayılar $h \pm v_i$ şeklindedir. $b_1, b_2 = h \pm v_i$ biçimindedir.

Burada

$$h = \frac{-a_1}{2} \quad \text{ve} \quad v = \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2} \quad (2.34)$$

olur. Dolayısıyla, tamamlayıcı çözüm

$$y_c = A_5 b_1^t + A_6 b_2^t = A_5 (h + v_i)^t + A_6 (h - v_i)^t \quad (2.35)$$

biçimindedir. y_c kolaylıkla yorumlanamaz. Ancak De Moivre teoreminden faydalanarak trigonometrik terimlere dönüştürülebilir.

$$(h \pm v_i)^t = R^t (\cos \theta t + i \sin \theta t) \quad (2.36)$$

Burada R 'nin değeri her zaman pozitif alınır.

$$R = \sqrt{h^2 + v^2} = \sqrt{\frac{a_1^2 + 4a_2 - a_1^2}{4}} = \sqrt{a_2} \quad (2.37)$$

olurken θ 'da aşağıdaki koşulu yerine getiren $[0, 2\pi)$ aralığındaki açının radyan ölçümü olur.

$$\cos \theta = \frac{h}{R} = \frac{h}{\sqrt{a_2}} \quad \text{ve} \quad \sin \theta = \frac{v}{R} = \frac{v}{\sqrt{a_2}} \quad (2.38)$$

Böylece tamamlayıcı çözümü

$$\begin{aligned}
y_c &= A_5 R' (\cos \theta + i \sin \theta) + A_6 R' (\cos \theta - i \sin \theta) \\
&= R' [(A_5 + A_6) \cos \theta + (A_5 - A_6) i \sin \theta] \\
&= R' (A_7 \cos \theta + A_8 \sin \theta)
\end{aligned} \tag{2.39}$$

biçiminde dönüştürülebilir. Burada

$$A_7 = A_5 + A_6 \quad \text{ve} \quad A_8 = (A_5 - A_6)i$$

dir. Bu tamamlayıcı çözümü bulabilmek için R, θ, A_7, A_8 'i bilmeliyiz. A_7, A_8 daha sonra verilecek olan başlangıç koşullarından belirlenebilir. v sanal kısım ve h gerçel kısmı bulunduktan sonra tanımlanan R ve θ değerleri hemen elde edilir.

2.6. Yüksek Sıra Doğrusal Fark Denklemleri

Bir fark denkleminin derecesi yer alan en yüksek dereceden farka bakılarak yani içerilen en çok sayıdaki zaman gecikmesi tarafından belirlenir. n . sıradan fark denklemini;

$$y_{t+n} + a_1 y_{t+n-1} + \dots + a_{n-1} y_{t+1} + a_n y_t = c \tag{2.40}$$

şeklindedir.

Bunun özel çözümünü bulmak yöntemi de ötekilerden farklı değildir. Başlangıç olarak $y_t = k \cdot y_1$ (dönemler arası eş kalan denge durumu) ele alabiliriz. Bu çözümün sağlamadığı durumlarda $y_t = kt$ ya da $y_t = kt^2$ olan benzeri çözümleri deneriz. Bununla birlikte tamamlayıcı çözümü bulabilmek için homojen denklemin çözümü

$$b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_{n-1} b + a_n = 0 \tag{2.41}$$

şeklindedir.

Bu denklemin n tane kökü ($b_i, i=1, 2, \dots, n$) olacaktır, köklerin tümünün reel ve farklı olduğu varsayılırsa tamamlayıcı çözüm

$$y_c = \sum_{i=1}^n A_i b_i^t \quad (2.42)$$

şeklindedir.

Tekrarlanan reel kökler söz konusu olduğunda örneğin ($b_1=b_2=b_3$) toplamdaki ilk üç terim

$$A_1 b_1^t + A_2 t b_1^t + A_3 t^2 b_1^t \quad (2.43)$$

biçiminde değiştirilmelidir. Eğer bir bileşik karmaşık kökler ilişkisi varsa, b_{n-1}, b_n diyelim. Toplamındaki son iki terimin çözümü aşağıdaki gibidir.

$$R^t (A_{n-1} \cos \theta t + A_n \sin \theta t) \quad (2.44)$$

Herhangi bir başka karmaşık sayılar ikilisine de benzeri bir anlatım biçimi verilebilir. Bununla birlikte, tekrarlanan kökler söz konusu olduğu durumda, ikisinden birine R^t yerine tR^t çarpanı kullanılır.

y_p ve y_c çözümleri bulunduktan sonra toplanarak tüm fark denkleminin genel çözümüne ulaşılır, yani

$$y_t = y_p + y_c$$

ancak bu çözümde toplam n tane rastgele sabit olduğundan bunu bulmak için n tane başlangıç koşulu gerekecektir.

2.6.1. Yakınsaklık ve Schur teoremi

Burada n büyük olunca homojen denklemi niceliksel olarak çözmek kolay olmayabilir. Zaman patikalarına ilişkin belli niteliksel sonuçları bulmada Schur teoreminden faydalanılabilir. Zaman patikası yakınsaklığını homojen denklemdeki her bir kökün mutlak değerinin 1'den küçük olması durumunda dengeye yakınsayabilir.

n . dereceden aşağıdaki gibi çok terimli bir denklemin;

$$a_0 b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_{n-1} b + a_n = 0 \quad (2.45)$$

kökleri ancak ve ancak aşağıda verilen n tane determinantın tümünde pozitif iseler yakınsak olacaktır.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & \vdots & a_n \\ a_n & \vdots & a_0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \vdots & a_n & a_{n-1} \\ a_1 & a_0 & \vdots & 0 & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & 0 & \vdots & a_0 & a_1 \\ a_{n-1} & a_n & \vdots & 0 & a_0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & : & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 & : & 0 & a_n & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & : & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & : & 0 & 0 & \cdots & a_n \\ \hline a_n & 0 & \cdots & 0 & : & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & : & 0 & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & : & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & : & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix}$$

Teoreme göre, n tane determinantın tümü de pozitif iseler determinantın kökleri 1'den küçük olacaktır. Bu determinantların yapımı basittir. Bu en iyi biçimde, her bir matrisi dört parçaya ayıran kesikli doğruların yardımı ile açıklanır. k. determinant olan Δ_k 'nin her bir alanı her zaman $k \times k$ alt determinant içerir. Üst sol parça ana köşegen üzerinde yalnızca a_n 'lere ana köşegenin yukarısında sıfırlara ve ana köşegen elemanlarının aşağısında her bir sütündaki ardışık katsayılar için giderek daha da büyüyen alt işaretlere sahiptir. Üst sol parça elemanlarının devriği alındığı zaman, alt sağ alanı elde edilir. Üst sağ parça dönüldüğünde şimdi de ana köşegen üzerinde yalnızca a_n katsayısını ana köşegenin aşağısına sıfırları ve ana köşegenden yukarıya doğru çıkarken her bir sütunda ardışık katsayılar için giderek daha da küçülen alt işaretleri yerleştirilir. Bu alanın elemanlarının devriğini aldığı zaman alt sol alanı elde edilir.

Homojen denklemin katsayıları özgün fark denklemlerinin sol yanında görünenlerle aynı olduğundan, bunlar doğrudan doğruya belirlenen determinantlara yerleştirilir.

2.7. Eşanlı Doğrusal Fark Denklemleri

Belli konularda, özellikle genel denge ve girdi-çıktı modellerinde çözümün dinamik olması için birçok değişkenin zaman patikalarının eşanlı olarak belirlenmesi gerekir. Bu eşanlı fark denklemlerini ya da eşanlı türevsel denklemleri ortaya çıkarır.

Doğrusal denklemler hem birinci sıradan, hem de yüksek sıradan olabilirler. Bir n. sıra fark denklemi verildiğinde, bunu her zaman eşanlı birinci sıra fark denklemlerinin matematiksel olarak eş değeri olan bir denklem sistemine dönüştürebilir. Şimdilik birinci sıradan eşanlı denklemleri ele alınsın.

Aşağıdaki fark denklemi sisteminin verildiğini varsayalım.

$$\begin{aligned} x_{t+1} + mx_t + ny_t &= d \\ y_{t+1} - x_t &= e \end{aligned} \quad (2.46)$$

Bu sistemdeki iki denklemi de sağlayan x ve y zaman patikalarını belirlemek için özel ve tamamlayıcı çözümleri belirlenir.

Özel çözüm yine dönemler arası denge düzeyini gösterecektir. Bunlar $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ olsun.

İlk olarak $x_{t+1} = x_t = \bar{x}$ ve $y_{t+1} = y_t = \bar{y}$ olarak alıp denklem sistemimizde yerine konursa $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ denge değerlerine ulaşılır.

Tamamlayıcı çözümü konursa ise yine homojen denklemde $x_t = A_1 b^t$ ve $y_t = A_2 b^t$ ve aynı şekilde $x_{t+1} = A_1 b^{t+1}$ ve $y_{t+1} = A_2 b^{t+1}$ değerlerini yerine koyarak bulunur.

$$(b+m)A_1 + nA_2 = 0$$

$$-A_1 + bA_2 = 0$$

Bu sistem A_1 ve A_2 değişkenleri cinsinden bir doğrusal homojen denklem sistemi olarak düşünülebilir. b'yi bir parametre olarak düşünmek için $A_1 = A_2 = 0$ çözümünden kaçınmak için katsayı determinantlarının yok olması gerekir.

$$\begin{vmatrix} b+m & n \\ -1 & b \end{vmatrix} = b^2 + bm - n = 0$$

Bu karesel denklemden A_1 ve A_2 'nin her ikisinin de 0 olmasını önleyen değer veya değerleri bulunur. Bunlar homojen denklemin çözümleri olarak adlandırılır.

2.7.1. Matris Eşitlikleriyle Çözüm Gösterimi

Tek bir denklem ile bir denklem sisteminin çözümünün nasıl yapılacağını yukarıda görülür. Şimdi ise matrislerden faydalanılarak n denklemlilik bir eşanlı denklemin nasıl çözüleceği üzerinde durulacaktır.

İlk olarak Eş. 2.46' da verilen denklem sistemi matrislerle ifade edildiğinde

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & n \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

yazılabilir.

Ya da daha kısa olarak,

$$Gu + Pv = c \quad (2.48)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada G, 2×2 'lik bir birim matrisi; P, x_t ve y_t terimlerinin katsayılarına ait 2×2 'lik matrisi gösterilir. u, v ve c aşağıdaki gibi tanımlanan sütun vektörleridir.

$$u = \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Özel çözüm için $x_{t+1} = x_t = \bar{x}$ ve $y_{t+1} = y_t = \bar{y}$ denklemde yerine konulursa

$$(G+P) \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = c \quad (2.50)$$

biçimine indirgeyecektir. Eğer $(G+P)^{-1}$ mevcutsa denge çözümünü

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = (G+P)^{-1}c \quad (2.51)$$

biçiminde bulunur. Tamamlayıcı çözümleri bulmak için u ve v vektörler yerine aşağıdaki değerleri koyulur.

$$u = \begin{bmatrix} A_1 b^{t+1} \\ A_2 b^{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} b^{t+1} \quad \text{ve} \quad v = \begin{bmatrix} A_1 b' \\ A_2 b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} b' \quad (2.52)$$

Bu çözümleri homojen yerine koyarak;

$$I \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} b^{t+1} + P \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} b^t = \mathbf{0} \quad (2.53)$$

biçiminde ya da b^{-t} ile çarptıktan sonra

$$(bI+P) \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.54)$$

Biçiminde bir denklem elde edilir. Burada $\mathbf{0}$ bir sıfır vektörüdür. A_1 ve A_2 olağan çözümlerinden kaçınmak için

$$|bI + P| = 0 \quad (2.55)$$

olması gerekir. Bu b_i köklerini bulmamızı sağlayan homojen bir denklemdir.

$$bI = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} m & n \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

b_i değerlerini bulup özel cmle topladığında genel cme ulaşılr.

Burada n bk olunca homojen denklemler niceliksel olarak cmek kolay olmayabilir. Burada da zaman patikalrına ilişkin belli niteliksel sonuları bulmada Schur Teoreminden faydalanılabilir [1].

$u_1, u_2, \dots, u_M = M$ tane olasılıklı bozucu terim

$t = 1, 2, \dots, T =$ Toplam gözlem sayısı

B 'lar = içsel değişkenlerin katsayıları

γ 'lar = önceden belirlenmiş değişkenlerin katsayılarıdır.

Her bir değişkenin her bir denklemde yer alması gerekmediğine dikkat etmek gerekir.

Eşanlı denklem modeline giren değişkenler iki türdür: İçsel, yani değerleri model içinde belirlenen değişkenler; önceden belirlenmiş, yani değerleri model dışında belirlenen değişkenler. İçsel değişkenler olasılıklı, önceden belirlenmiş değişkenler ise olasılıksızmış gibi ele alınır.

Önceden belirlenmiş değişkenler ikiye ayrılır: Gecikmeli ya da değil dışsal değişkenler veya gecikmeli içsel değişkenler. Böylece X_t bu döneme ilişkin dışsal değişken iken, $X_{1(t-1)}$ bir dönem geriden gelen gecikmeli dışsal değişkendir. $Y_{1(t-1)}$ bir dönem geriden gelen gecikmeli içsel değişkendir, ama t döneminde $Y_{1(t-1)}$ değeri bilindiğinden olasılıksızmış gibi işlem görür o yüzden önceden belirlenmiş değişkendir. Kısacası, bu dönemin dışsal, gecikmeli dışsal, gecikmeli içsel değişkenleri önceden belirlenmiş sayılır, bunların değerleri model içinde aynı dönemde belirlenmez.

Hangi değişkenin içsel, hangilerinin önceden belirlenmiş olacağı model kurucuya kalmıştır. Model kurucu, iktisadi değişkenleri içsel ya da önceden belirlenmiş diye ayırırken çok özenli davranmalıdır. Yaptığı ayırımı önsel ya da kuramsal temelde savunabilmelidir. Eş. 3.1'de verilen denklemlere yapısal denklemler ya da davranış denklemleri denir. Çünkü bir ekonominin iktisadi modelinin yapısını ya da bir iktisadi birimin tüketicinin ya da üreticinin, davranışını ortaya koyarlar. (β) ve (γ) 'lar yapısal katsayılarıdır.

Yapısal denklemler M tane içsel değişkene göre çözülüp, indirgenmiş kalıp denklemleri ile bunlarla ilişkili indirgenmiş kalıp katsayıları bulunabilir. İçsel bir değişkeni yalnızca önceden belirlenmiş değişkenler ve olasılıklı bozucu terimler cinsinden gösteren bir denklem, indirgenmiş kalıp denklemdir.

Eşanlı denklemlerin genel olarak özellikleri aşağıdaki gibi gösterilebilir.

Tek denklemler modelinin tersine, eşanlı model denklemlerinde birden çok bağımlı, içsel değişken söz konusudur, bu da içsel değişken sayısı kadar denklemi gerektirir.

Eşanlı denklem modellerine özgü bir nitelik, bir denklemde içsel (bağımlı) olan bir değişkenin denklem takımındaki başka bir denklemde açıklayıcı (bağımsız) değişken olarak görünebilmesidir.

Bunun sonucunda böyle bir içsel açıklayıcı değişken olasılıklı olmakta, açıklayıcı değişken olarak yer aldığı denklemin hata terimiyle de genellikle ilişkili bulunmaktadır.

Bu durumda klasik EKK yöntemi uygulanamamakta, çünkü bu yolla elde edilen tahmin ediciler tutarsız çıkmakta, yani örneklem ne kadar büyürse büyüsün, anakütledeki gerçek katsayı değerlerine yakınsamamaktadır.

Eşanlı denklem modelleri özellikle ekonometrik modellerde sık sık kullanıldıklarından, çeşitli tahmin teknikleri geliştirilmiştir [4].

3.2. Merkezci Olmayan Wishart Dağılımının Eşanlı Denklemlere Bir Uygulaması

1964’de Kabe, Merkezci Olmayan Wishart Dağılımının daha önce 1963 yılında Basman tarafından çalışılan 3 eş zamanlı doğrusal yapısal denklem sistemi için

kullanılabileceğini ortaya çıkarmıştır. 1963'te ise Kabe benzer iki denklem sistemi üzerinde çalışmıştır [5].

Kabe, Basmann'nın 1963 yılında yayımladığı makalesinden yararlanarak 3 eş zamanlı denklem sistemlerini şöyle açıklamıştır [6].

$$\begin{aligned} y_{t1} &= \beta_{12}y_{t2} + \beta_{13}y_{t3} + \gamma_{11}x_{t1} + \gamma_{12}x_{t2} + \gamma_{13}x_{t3} + e_{t1} \\ y_{t2} &= \beta_{22}y_{t2} + \beta_{23}y_{t3} + \gamma_{21}x_{t1} + \gamma_{22}x_{t2} + \gamma_{23}x_{t3} + e_{t2} \\ y_{t3} &= \beta_{32}y_{t2} + \beta_{33}y_{t3} + \gamma_{31}x_{t1} + \gamma_{32}x_{t2} + \gamma_{33}x_{t3} + e_{t3} \end{aligned} \quad , \quad t = 1, \dots, N \quad (3.2)$$

Burada y_{t1} , y_{t2} , y_{t3} 'ler içsel (bağımlı) değişkenler, x_t 'ler dışsal (bağımsız) değişkenler ve e_t 'ler hata terimleridir. Bu denklem sistemi yapısal denklem sistemidir. Buradaki β ve γ ise yapısal parametrelerdir. Bu sistem yalnız bağımlı değişkenler için çözülürse artık yapısal denklem olmaz. Artık çok içsel (bağımlı) değişkenli regresyon denklemi olur. Bu durumda bu denklemlere indirgenmiş denklem adı verilir. Bunların katsayıları artık regresyon katsayıları olur.

Yapısal parametreler merkezsiz olmayan Wishart dağılımına uyar.

Önce merkezsiz Wishart dağılımı dikkate alınsın. $p \times p$ boyutlu simetrik, pozitif tanımlı W matrisinin dağılımı

$$f(V) = \begin{cases} \frac{k|V|^{(n-p-1)/2}}{|\Sigma|} e^{-\frac{1}{2}V\Sigma^{-1}V} & V > 0, \Sigma > 0; \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

fonksiyonuyla verilir. Diğer durumlarda ise $f(V) = 0$ 'dır.

p =değişken sayısı $p < n$

n =serbestlik derecesi (genellikle gözlem sayısının 1 eksiği)

$$k = \left[2^{np/2} \pi^{p(p-1)/4} \prod_i^p \Gamma\left(\frac{n+1-j}{2}\right) \right]^{-1} \quad (3.4)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{1/2}$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n} \pi^{\frac{1}{2}} \quad (3.5)$$

dir. Eş. 3.3'te verilen dağılım $p \leq n$ olmak üzere Σ ölçek matrisli, n serbestlik dereceli tekil olmayan Merkezsel Wishart Dağılımı olarak adlandırılır ve $W(\Sigma, p, n)$ şeklinde gösterilir. Bu dağılımı Wishart 1928'de geometrik yolla bulmuştur.

Merkezsel Wishart dağılımının ise her biri $p \times 1$ boyutlu $X_1, \dots, X_n$ gözlem vektörleri bağımsız olarak çok değişkenli normal dağılıyorsa $X_i \sim N(\underline{0}, \underline{\Sigma})$ ve $X_1, \dots, X_n$ vektörlerinin matrisi olan $p \times n$ boyutlu X matrisinden türetilen $p \times p$ boyutlu $W = XX'$ matrisinin dağılımının merkezsel Wishart dağılımı olduğu gösterilmiştir. Kısaca

$$f(V) = f(XX') = W(\Sigma, p, n)$$

ile gösterilir. Burada W çarpımlar toplamı matrisidir. Dolayısıyla ikinci dereceden momentler matrisi olarak düşünülebilir. Wishart dağılımının $p=1$ için özel hali χ^2 dağılımıdır.

Eğer $X_i \sim N(\underline{\theta}, \underline{\Sigma})$ ise $V = \sum_i^N (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})'$ matrisinin dağılımı merkezsel olmayan Wishart dağılımıdır. $[E(X_i) = \underline{\theta}_i \neq \underline{0}]$ ve $f(V) = V^*(\underline{\Sigma}, p, n)$ ile gösterilir. Merkezsel olmayan Wishart dağılımı merkezsel Wishart dağılımının yoğunluk fonksiyonu ile Bessel fonksiyonunun dağılımının çarpımından oluşan karmaşık (imaginary) bir fonksiyondur.

Yapısal denklemindeki bazı değişken vektörleri ve parametre matrislerini aşağıdaki gibi yazılsın.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} & -\beta_{13} \\ 1 & -\beta_{22} & -\beta_{23} \\ 1 & -\beta_{32} & -\beta_{33} \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix}$$

$$y_t = \begin{bmatrix} y_{t1} \\ y_{t2} \\ y_{t3} \end{bmatrix}, \quad x_t = \begin{bmatrix} x_{t1} \\ x_{t2} \\ x_{t3} \end{bmatrix}, \quad e_t = \begin{bmatrix} e_{t1} \\ e_{t2} \\ e_{t3} \end{bmatrix}, \quad t=1, \dots, n+1$$

Yapısal denklemlerin çözümünde kuramsal olarak

$$y_t = B^{-1} \Gamma x_t + u_t \quad t=1, \dots, n+1 \quad (3.6)$$

yazılır. Burada $u_t = B^{-1} e_t$ 'dir. u_t 'nin normal dağıldığı varsayılır. $B^{-1} \Gamma$ 'nin en küçük kareler tahmin edicileri P olsun p^2 ögesi olan P'nin dağılımı çok değişkenli normal dağılım olup

$$\underline{P} \sim N(B^{-1} \Gamma, I_3 \otimes I_3)$$

ile gösterilir. Burada $\otimes$ Kronecker çarpımdır. I birim matristir ve $V = PP'$ olmak üzere;

$$V = \begin{bmatrix} v_{11} & \vdots & v_{12} & v_{13} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{21} & \vdots & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & \vdots & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

şeklinde yazarak Kabe 1964'te

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_{12} \\ \hat{\beta}_{13} \end{bmatrix} = V_{22}^{-1} V_{21} \quad (3.8)$$

sonucuna ulaştı. Önceki bilgilerimize göre

$$f(V) = W_r^*(I, 3, n)$$

olduğunu göstermişti. Burada W^* merkezsiz olmayan Wishart dağılımı $V_{11}, V_{12}, V_{21}, V_{22}$ ise formüldeki Wishart matrisinin parça matrisleridir. r ise $B^{-1}\Gamma$ ’nın rankıdır. $r=1 \quad \forall (B^{-1}\Gamma)_{ij} = 0, (B^{-1}\Gamma)_{33} \neq 0, -\infty < \hat{\beta}_{12} < \hat{\beta}_{13} < \infty$ alındığında;

$$f(\hat{B}_{12}, \hat{B}_{13}) = \frac{\exp(\beta^{-1}\Gamma)_{33}^2 / 2}{\pi(1 + \hat{\beta}_{12}^2 + \hat{\beta}_{13}^2)^2} {}_1F_1 \left\{ 2, \frac{3}{2}, \frac{(\beta^{-1}\Gamma)_{33}^2 (1 + \hat{\beta}_{12}^2)}{2(1 + \hat{\beta}_{12}^2 + \hat{\beta}_{13}^2)} \right\} \quad (3.9)$$

olduğunu göstermiştir. Burada ${}_1F_1$ konfluent hipergeometrik fonksiyondur [7].

Basmann 1961’deki çalışmasında katsayıların indirgenmiş form matrisi P , P ’nin beklenen değer Π matrisi olmak üzere P ’nin normal dağıldığını, PP' ’nün merkezi olmayan Wishart dağıldığını görmüştür ve buradan hareketle stokastik yapısal denklemlerin çözümlerine ulaşmıştır [8]. Ancak bu şekilde çözüm bulmak çok güç ve sınırlı olduğundan Basmann ve Theil’in önderlik ettiği daha uygulanabilir bir çözüm yolu geliştirilmiştir. Bu sebepten aşağıdaki çözüm yolu dikkate alınacaktır [9].

3.3. Belirlenme Sorunu

Bir eşanlı denklem modelinde bir denklemin belirlenip belirlenmediğini bulmak tahmin sorunundan önce gelir. Belirlenme sorunu, yapısal bir denklemin anakütle katsayılarının sayısal tahminlerinin, tahmin edilen indirgenmiş kalıp katsayılarından tahmin edilip edilemeyeceği anlamına gelir. Bu yapılabiliirse o denklem belirlenmiştir; yapılamıyorsa denklem eksik ya da aşırı belirlenmiş demektir.

Belirlenmiş bir denklem ya tam belirlenmiş ya da aşırı belirlenmiştir. Yapısal anakütle katsayılarına biricik sayısal değerler bulunabiliyorsa tam belirlenme vardır. Yapısal denklemlerin bir ya da birden çok katsayısına birden çok değer bulunabiliyorsa aşırı belirlenme var demektir. Belirlenme sorununun nedeni, değişik yapısal katsayı kümelerinin aynı veri kümesiyle uyumlu olabilmeleridir. Veya bir başka deyişle, belli bir indirgenmiş kalıp denklemi, değişik yapısal denklemlerle ya da değişik modellerle uyumlu olabilir, bunlardan hangi modeli incelemekte olduğumuzu söylemek güç olabilir. Belirlenmenin genel özelliklerini aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

1. Belirlenme sorunu tahmin sorunundan önce gelir.
2. Belirlenme sorunu, tahmin edilen indirgenmiş kalıp katsayılarından, yapısal katsayıların birer tane sayısal tahminlerinin bulunup bulunmayacağını sorgular.
3. Eğer bulunabiliyorsa eşanlı denklem takımındaki bir denklem belirlenir. Bulunmazsa o denklem ya belirlenmemekte ya da eksik belirlenmektedir.
4. Belirlenebilen bir denklem ya tam ya da aşırı belirlenir. İlk durumda yapısal katsayılara biricik değerler verilebilir; ikinci durumdaysa yapısal katsayıların biri ya da daha çoğu için birden çok değer söz konusu olabilir.
5. Belirlenme sorununun ortaya çıkış nedeni, aynı veri kümesinin birden çok yapısal katsayılar kümesiyle yani değişik modellerle uyum içinde olabilmesidir.
6. Yapısal bir denklemin belirlenebilirliğini değerlendirmek için, içsel bir değişkeni yalnızca önceden belirlenmiş değişkenlerle ifade eden indirgenmiş kalıp denklemleri tekniği kullanılabilir.
7. Çok zaman alan bu süreç yerine, belirlenmenin ya sayma koşuluna ya da mertebe koşuluna başvurulabilir. Sayma koşulu uygulanması kolay olmakla birlikte belirlenme için yalnız gerekli koşulu verir. Öte yandan mertebe koşulu belirlenme için hem gerekli hem yeterlidir. Mertebe koşulu sağlanıyorsa, sayma koşulu da sağlanabiliyor demektir. Ama bunun tersi doğru değildir. Yine de uygulamada belirlenmeyi anlamak için genellikle sayma koşuluyla yetinilmektedir.

Bir eşanlı denklem takımındaki bir denklemin belirlenip belirlenmediğini anlamak için, indirgenmiş kalıp katsayılarına başvurulabilir. Yani yapısal denkleminizi içsel

değişkene göre çözümlenip indirgenmiş denklemleri ile indirgenmiş kalıp katsayılarına ulaşılabilir. Ama bu örnekler bu sürecin ne kadar zaman harcamaya, emek gerektirici olduğunu da ortaya koymaktadır. Neyse ki bu süreci kullanmak zorunlu değildir. Belirlenmede sayma ve mertebe koşulları denen süreç, düzenli bir yol sunarak bu yükü hafifletir. Bu yöntemler sayesinde bir denklemin belirlenip belirlenmediğini kolaylıkla bulabiliriz.

Sayma ve mertebe koşullarını şunlarla ifade edeceğiz.

M = Modeldeki içsel değişken sayısı

m = Belli bir denklemdaki içsel değişken sayısı

K = Modeldeki önceden belirlenmiş değişken sayısı

k = Belli bir denklemdaki önceden belirlenmiş değişken sayısı

3.3.1. Belirlenmede sayma koşulu

1. M tane eşanlı denklemi olan bir modelde bir denklemin belirlenebilmesi için, o denklemin modeldeki değişkenlerden (içsel ya da önceden belirlenmiş) en az $M - 1$ tanesini dışlaması gerekir. Eğer tam $M - 1$ tanesini dışlıyorsa tam belirlenmiş, $M - 1$ den fazlasını dışlıyorsa aşırı belirlenmiştir.
2. Daha açık bir ifade kullanmak istersek; M tane eşanlı denklemi olan bir modelde bir denklemin belirlenebilmesi için, o denklemden dışlanmış önceden belirli değişken sayısı, o denklemden yer alan içsel değişken sayısının 1 eksiğinden az olmamalıdır, yani $K - k \geq m - 1$ olmalıdır. Eğer $K - k = m - 1$ ise denklem tam belirlenmiş, $K - k > m - 1$ ise de aşırı belirlenmiş olur.

3.3.2. Belirlenmede mertebe koşulu

Sayma koşulu, belirlenmenin gerekli ama yeterli olmayan bir koşuldur yani bu koşul sağlansa bile bir denklem belirlenemeyebilir. Daha genel olarak bir denklem sayma koşulu olan $K - k \geq m - 1$ eşitsizliğini sağlarsa bile belirlenmemiş olabilir. M tane içsel değişkeni olan M denklemlili bir modelde, bir denklem ancak ve ancak, modelin

öteki denklemlerinde yer alan ama bu denklemden dışlanmış hem içsel hem önceden belirlenmiş değişkenlerin katsayılarından oluşturulabilen $(M - 1)(M - 1)$ boyutlu en az bir tane sıfır olmayan determinant varsa belirlenebilir. Sayma koşulu bir denklemin tam mı, yoksa aşırı mı belirlendiğini gösterirken, mertebe koşulu belirlenip belirlenmediğini göstermektedir. Mertebe koşulunu göstermek için denklemlerimizin çözümünün olup olmadığını göstermek gerekecektir. Mertebe koşulu incelenirken şu yolu izlenir.

Denklem sistemini hata terimlerini sağ tarafta bırakıp bir tür çizelge hazırlanır.

Denklem sistemindeki katsayıları belirttikten sonra katsayılardan sıfır olmayanların hizasındaki sütündakilerin üstü çizilir. Çizelgede üstü çizilmeden kalan gözeler, denklem takımında olup da o denklemde olmayan değişkenlerin katsayılarını verecektir. Bu gözelerden katsayılardan, $M-1$ boyutunda olanaklı, A gibi, bütün matrisleri oluşturup bunların determinantlarını elde edilir. Eğer 0 olmayan en az bir determinant bulunabilirse söz konusu denklem belirlenmiştir. Sözgelimi A gibi bir matrisin mertebesi bu durumda tamda $M-1$ 'e eşittir. $(M-1)(M-1)$ boyutlarındaki olanaklı bütün matrislerinin determinantları 0 'sa , A matrisinin mertebesi $M-1$ 'den düşüktür, incelenen denklem belirlenemez.

Belirlenmenin sayma ve mertebe koşullarına ilişkin M denklemlilik eşanlı denklem takımındaki bir yapısal denklemin belirlenmesinin genel ilkeleri şöyledir:

Eğer $K - k \geq m - 1$ ve A matrisinin mertebesi $M-1$ 'den büyük ise, denklem aşırı belirlenmiştir.

1. Eğer $K - k = m - 1$ ve A matrisinin mertebesi $M-1$ ise, denklem tam belirlenmiştir.
2. Eğer $K - k \leq m - 1$ ve A matrisinin mertebesi $M-1$ 'den küçükse, denklem eksik belirlenmiştir [4].

3.4. Aşırı Belirlenmiş Bir Denklemin Tahmini: İki Aşamalı En Küçük Kareler (2AEK) Yöntemi

Bir “tek denklem yöntemi” olup modeldeki denklemlere tek tek uygulanır. Yapısal parametrelerin tahminleri için sağlıklı sonuçlar vermiş ve aşırı belirlenmiş denklemler için geliştirilen teknikler içinde en önemlisidir.

İki aşamalı en küçük kareler, kuramsal açıdan dolaylı en küçük kareler (DEK) ve araç değişkenler (AD) yöntemlerinin birer uzantısı olarak düşünülebilir. Diğer eşanlı denklem teknikleri gibi iki aşamalı en küçük kareler de eşanlı denklem sapmasını elden geldiğince ortadan kaldırmaya çalışır. Bu sapmanın kaynağının fonksiyonun açıklayıcı değişkenleri arasında içsel değişkenlerden kaynaklandığını gördük. Bu tür içsel değişkenlerde, biri modelin önceden (dışsal) değişkenlerce belirlenmiş düzenli, öteki rassal iki bileşeni vardır ve bu ikincisi, ilgili değişkenle yapısal denklemin rassal terimi u arasındaki bağımlılığı doğurur. Genelde, modelin indirgenmiş kalıp denklemlerini incelersek, her içsel değişkenin, modelin önceden belli bütün değişkenlerin (X 'lerin) ve rassal değişkenin (u 'nun) bir fonksiyonu olduğunu görürüz. i 'inci içsel değişkenin indirgenmiş değişim kalıbı şöyledir.

$$y_i = \Pi_{i1}x_1 + \Pi_{i2}x_2 + \dots + \Pi_{ik}x_k + v_i \quad (3.10)$$

Tam kesin (stokastik olmayan) bileşen, dışsal değişkenleri (x 'leri) ve bunların indirgenmiş kalıp katsayılarını (Π 'leri) içeren terimlerden oluşur. Rassal bileşen ise yapısal denklemlerin rassal değişkenleri v 'larla yapısal parametreler b 'lerin bir fonksiyonudur, yani

$$v_i = f(u_1, u_2, \dots, u_G; b_1, \dots, b_k) \quad (3.11)$$

Burada G =Modelin içsel değişken sayısı ve k =Önceden belirlenmiş yani dışsal değişken sayısıdır.

En küçük kareler eşanlı denklem sapmasının görülmesinin nedeni rassal bileşen v_i 'dir. Çünkü burada yapısal denklemlerin u 'larla ilişkili olmasından kaynaklanmaktadır. Eğer v_i 'yi bilinseydi, yapısal denklemden rassal değeri çıkarıp kesin bileşenle ilgilenilirdi. Ancak v_i gözlemlenemez ve y_i 'nin tam kesin değeri bulunamaz. Bu bileşenin bir tahmini şöyle bulunabilir. Önce y_i ile modelin tüm önceden belirlenmiş dışsal değişkenleri arasında regresyon kurarak $\hat{y}_i$ tahminleri bulunur. y_i yerine bu hesaplanmış $\hat{y}_i$ değerini bir açıklayıcı değişken olarak kullanılır.

Burada dikkat edilmesi gereken diğer bir noktada $\hat{y}$ 'da da bir rassal değişim vardır. Bu tahmin edilmiş indirgenmiş kalıp katsayılarından kaynaklanmaktadır. Gerçekten de $\hat{y}$, hatta yapısal hatalar u 'larla ilişkilidir; 2AEK'de $n \rightarrow \infty$ gittikçe bu korelasyon da kaybolur.

2AEK sıradan en küçük karelerin iki aşamada uygulanmasıdır.

İlk aşamada indirgenmiş kalıp denklemlerine en küçük kareler uygulanırsa içsel değişkenlerin tam ve kesin rasgele değişkenlerin bir tahminini bulunur.

$$y_i = \hat{y}_i + v_i \quad (3.12)$$

Burada

$$\hat{y}_i = \hat{\Pi}_{i1}x_1 + \hat{\Pi}_{i2}x_2 + \dots + \hat{\Pi}_{ik}x_k \quad (3.13)$$

İkinci aşamada denklemin sağındaki içsel değişkenleri, $\hat{y}_i = y_i - v_i$ tahmin değerleriyle değiştirir ve dönüştürülmüş bu denkleme sıradan en küçük kareler uygulayarak yapısal parametrelerin tahminlerini bulunur.

2AEK yöntemindeki simgeleri aşağıdaki gibi verilsin.

y_i 'ler içsel değişkenleri ($i=1,2,\dots,G$)

x_i 'ler önceden belirlenmiş yani dışsal değişkenler ($i=0,1,2,\dots,k$)

b 'ler, içsel değişkenlerin katsayılarını

γ 'lar, önceden belirli değişkenlerin katsayılarını gösterecektir.

Bu durumda i'ninci yapısal denklemin genel gösterilişi şöyle olacaktır.

$$y_i = b_{i1}y_1 + b_{i2}y_2 + \dots + b_{iG}y_G + \dots + \gamma_{i1}x_1 + \dots + \gamma_{ik}x_k + u_i \quad (3.14)$$

İlk aşamada, Π tahminlerini bulmak için, indirgenmiş kalıp denklemlerine sıradan en küçük kareler uygulanır.

$$\begin{aligned} y_1 &= \Pi_{11}x_1 + \Pi_{12}x_2 + \dots + \Pi_{1k}x_k + v_1 \\ y_2 &= \Pi_{21}x_1 + \Pi_{22}x_2 + \dots + \Pi_{2k}x_k + v_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ y_G &= \Pi_{G1}x_1 + \Pi_{G2}x_2 + \dots + \Pi_{Gk}x_k + v_G \end{aligned} \quad (3.15)$$

İndirgenmiş kalıp katsayıları $\hat{\Pi}$ 'ları kullanarak içsel değişkenler için bir tahmin edilmiş değerler kümesi bulunur ($\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_G$).

İndirgenmiş kalıp modelini bulabilmek için yalnızca y 'leri bütün x 'lerin birer fonksiyonu olarak yazıp EKK uygular ve Π değerlerini buluruz. Π 'lerle yapısal parametreler (b 'ler ve γ 'lar) arasındaki kesin ilişkileri bilmemize gerek yoktur. Çünkü ikincileri birinci denklemlerden tahmin etmek amaç değildir. Bilinmesi gereken şey, modelin bütün yapısal denklemlerdeki bütün değişkenler önceden belirli değişkenlerdir. Bu bilgi sayesinde ardışık olarak yerine koymalarla uğraşmadan, indirgenmiş kalıp denkleminin yukarıdaki gibi bir genel gösterimini doğrudan yazabiliriz.

İkinci aşamadaysa, $\hat{y}$ 'ları yapısal denklemde yerine koyar ve dönüştürülmüş fonksiyonları elde edilir.

$$y_i = b_{i1}\hat{y}_1 + b_{i2}\hat{y}_2 + \dots + b_{iG}\hat{y}_G + \dots + \gamma_{i1}x_1 + \dots + \gamma_{ik}x_k + u_i^* \quad (3.16)$$

$$\text{Burada } u_i^* = u_i + b_{i1}v_1 + b_{i2}v_2 + \dots + b_{iG}v_G$$

başlangıçta denklem şöyledir:

$$y_i = b_{i1}y_1 + b_{i2}y_2 + \dots + b_{iG}y_G + \dots + \gamma_{i1}x_1 + \dots + \gamma_{ik}x_k + u_i$$

$$y_1 = \hat{y}_1 + v_1, y_2 = \hat{y}_2 + v_2 \dots y_G = \hat{y}_G + v_G$$

yerine konulursa şu bulunur.

$$y_i = b_{i1}(\hat{y}_1 + v_1) + b_{i2}(\hat{y}_2 + v_2) + \dots + b_{iG}(\hat{y}_G + v_G) + \dots + \gamma_{i1}x_1 + \dots + \gamma_{ik}x_k + u_i$$

Yeniden düzenleyerek;

$$y_i = b_{i1}\hat{y}_1 + b_{i2}\hat{y}_2 + \dots + b_{iG}\hat{y}_G + \dots + \gamma_{i1}x_1 + \dots + \gamma_{ik}x_k + (u_i + b_{i1}v_1 + \dots + b_{iG}v_G) \quad (3.17)$$

Dönüştürülmüş yapısal denkleme EKK uygulayarak yapısal parametrelerin 2AEK tahminlerini bulunur.

İki aşamalı en küçük kareler tahminlerinin formülleri, sıradan en küçük kareler yönteminin aynısıdır; tek fark burada açıklayıcı değişkenler, sağ yandaki içsel değişkenlerin tahmin edilmiş değerleri ($\hat{y}$ 'lar) ve fonksiyonun önceden belli değişkenleridir. Dolayısıyla, iki açıklayıcı değişkenli basit yapısal denklem

$$y_1 = b_2y_2 + \alpha_1 + u \quad (3.18)$$

için dönüştürülmüş denklem şöyledir:

$$y_1 = b_2 \hat{y}_2 + \gamma_1 + (u + b_2 v_2) \quad (3.19)$$

ve normal denklemler de şunlardır:

$$\sum y_1 \hat{y}_2 = b_2^* \sum \hat{y}_2^2 + \gamma_1^* \sum x_1 \hat{y}_2 \quad (3.20)$$

$$\sum y_1 x_1 = b_2^* \sum x_1 \hat{y}_2 + \gamma_1^* \sum x_1^2 \quad (3.21)$$

2AEK tahminlerinin formülleri de şöyledir:

$$b_2^* = \frac{\begin{vmatrix} \sum y_1 \hat{y}_2 & \sum x_1 \hat{y}_2 \\ \sum y_1 x_1 & \sum x_1^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum \hat{y}_2^2 & \sum x_1 \hat{y}_2 \\ \sum x_1 \hat{y}_2 & \sum x_1^2 \end{vmatrix}} \quad \text{ve} \quad \gamma_1^* = \frac{\begin{vmatrix} \sum \hat{y}_2^2 & \sum y_1 \hat{y}_2 \\ \sum x_1 \hat{y}_2 & \sum y_1 x_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum \hat{y}_2^2 & \sum x_1 \hat{y}_2 \\ \sum x_1 \hat{y}_2 & \sum x_1^2 \end{vmatrix}} \quad (3.22)$$

ya da

$$b_2^* = \frac{(\sum y_1 \hat{y}_2)(\sum x_1^2)}{(\sum \hat{y}_2^2)(\sum x_1^2) - (\sum x_1 \hat{y}_2)^2} \quad (3.23)$$

$$\gamma_1^* = \frac{(\sum \hat{y}_2^2)(\sum y_1 x_1)}{(\sum \hat{y}_2^2)(\sum x_1^2) - (\sum x_1 \hat{y}_2)^2} \quad (3.24)$$

2AEK tahminlerinin varyansları da şu ifadelerden hesaplanabilir.

$$\text{var}(b_2^*) = s_u^2 \cdot \frac{\sum x_1^2}{(\sum \hat{y}_2^2)(\sum x_1^2) - (\sum x_1 \hat{y}_2)^2} \quad (3.25)$$

$$\text{var}(\gamma_1^*) = s_u^2 \cdot \frac{\sum y_2^2}{(\sum \hat{y}_2^2)(\sum x_1^2) - (\sum x_1 \hat{y}_2)^2} \quad (3.26)$$

burada

$$s_u^2 = \frac{\sum (y_1 - b_2^* y_2 - \gamma_1^* x_1)^2}{n - k} \quad (3.27)$$

s_u^2 'nin, ikinci aşamada bulunan b_2^* ve γ_1^* tahminleriyle, bütün değişkenlerin başlangıçtaki gözlemlerinin çarpımları kullanılarak tahmin edildiğine dikkat edilmelidir.

3.4.1. İki aşamalı en küçük kareler yönteminin varsayımları

2AEK'in indirgenmiş kalıp denklemlerine ve dönüştürülmüş yapısal fonsiyona klasik en küçük kareler uygulanması olduğu görüldü. Buradaki dönüştürme, içsel değişkenlerin yerine indirgenmiş kalıp denklemlerinden bulunmuş $\hat{y}$ tahmin değerlerinin geçirilmesidir. Bu yöntemin varsayımları ilk olarak; başlangıçtaki yapısal denklemin bozucu terimi u , sıfır ortalama sabit varyans ve sıfır kovaryans gibi bilinen stokastik varsayımlarını sağlamalıdır. Aksi halde indirgenmiş kalıp hata terimleri v_i 'ler bu özellikleri taşımayacak ve bu yöntem işlerliğini kaybedecektir. İkinci olarak; a) İndirgenmiş kalıp hata terimi v_i de bilinen stokastik varsayımları sağlamalıdır. Ortalaması 0, varyansı sabit ve kovaryansı 0 olmalı b) v , bütün yapısal modelin dışsal değişkenlerinden bağımsız olmalarıdır. Sıfır ortalama, sabit varyans ve sıfır kovaryans varsayımları bütün yapısal denklemlerin rassal terimleri (u 'lar) için sağlandığında v_i 'ler içinde sağlanmış olur, çünkü v_i , yapısal u 'ların kesin bir doğrusal fonksiyonudur. Üçüncü olarak; Açıklayıcı değişkenler tam çoklu doğrusal değildir ve makro değişkenler uygun biçimde toplulaştırılmıştır. Dördüncü olarak; Dışsal değişkenler bakımından model doğru kurulmuş varsayılmaktadır. Yani bütün dışsal (önceden belirlenmiş) değişkenlerin, hangi denklemde yer aldıkları ve bu

denklemdaki dışsal değişkenleri doğru olarak bilinmektedir. Beşinci olarak, örnek çapımızın yeterince büyük olduğu varsayılmaktadır. Özellikle gözlem sayısının, yapısal denklemdaki önceden belirli değişken (dışsal) sayısından büyük olduğu varsayılmaktadır. Eğer örnek çapı, toplam dışsal değişken sayısından küçükse, ilk aşamadaki sıradan en küçük kareler uygulanması doğru olmaz ve tahminlerimizde anlamlı değildir [10].

3.4.2. İki aşamalı en küçük kareler yönteminin özellikleri

Eşanlılık varsa EKK tahmin edicileri tutarlı bile değildir. Eşanlılık varken iki aşamalı en küçük kareler (2AEK) tutarlı ve etkin tahmin ediciler verirler. Bir ifade edildiği üzere eşanlılık sorunu bazı değişkenlerin içsel olmaları dolayısıyla da bozucu terim ile ilişkili olmasından kaynaklanmaktadır. Denkleminiz aşırı belirlenmiş olduğunda, 2AEK yöntemine başvurulur. 2AEK'nın şu özelliklerine dikkat edilir:

Modeldeki başka denklemleri hesaba katmadan tek bir denkleme uygulanabilir. Böylece, çok sayıda denklemleri olan ekonometri modellerini çözerken tasarruf sağlar ve uygulamada yaygın kullanılır.

1. Aşırı belirlenmiş denklemlerdeki anakütle katsayıları için çoğul tahminler veren DEK'in tersine, 2AEK her anakütle katsayısı için tek bir tahmin verir.
2. Uygulanması kolaydır çünkü modeldeki öbür değişkenleri bilmeye gerek kalmadan denklem takımındaki dışsal ya da önceden belirlenmiş değişken sayısını bilmek yeterlidir.
3. Her ne kadar özellikle aşırı belirlenmiş denklemler için tasarlanmışsa da, tam belirlenmiş denklemlere de uygulanabilir.
4. Yapısal katsayılar ikinci aşama denklemlerinden doğrudan bulunabilmektedir. Ancak burada dikkat edilmesi gereken bir nokta vardır. İkinci aşamada tahmin edilen standart hatalar düzeltme gerektirir.

Denklemler takımını gecikmeli içsel değişken içerdiğinde, 2AEK katsayı tahmin edicilerinin tutarlılığı ve büyük örneklem normalliği, ek olarak şu koşulu gerektirir:

Örnekleme büyürken her bir gecikmeli içsel değişken değerinin ortalama karesi, artı değerli bir olasılık limitine yakınsar. Eğer çeşitli yapısal denklemlerde yer alan bozucu terimler bağımsız dağılmıyorsa, gecikmeli içsel değişkenler denklem takımının bu işleyişinde bağımsız kalamazlar. Bu da bu değişkenlerin aslında önceden belirlenmiş olmadıkları anlamına gelir. Ama 2AEK süreci içinde bu değişkenler yine de önceden belirlenmiş gibi ele alınırlarsa, ortaya çıkan tahmin ediciler tutarsız olur [4].

5. BİRİNCİ DERECEDE FARK DENKLEMLERİ UYGULAMASI: MİLLİ GELİR BELİRLENME MODELİ

GSMH bir ekonomide belirli bir dönemde üretilen tamamlanmış (nihai) mal ve hizmetlerin piyasa fiyatları ile ifade edilen değerlerinin toplamıdır. GSMH ülkenin genel ekonomik performansının değerlendirilmesinde kullanılır. GSMH üç farklı yöntemle hesaplanır. Bu yöntemler sırasıyla toplam harcama yaklaşımı, toplam gelir yaklaşımı ve toplam üretim yaklaşımı olarak nitelendirilir [11]. Saraçoğlu (1991) milli gelir hesaplama yöntemleri üzerine çalışması bulunmaktadır [12].

Bu çalışmada toplam harcama yaklaşımıyla eşanlı bir denklem sistemi olan milli geliri 2AEK yöntemiyle tahmin edilmektedir. Kulakoğlu (1986) eşanlı (simultane) denklem sistemlerini ayçiçeği piyasasına uygulamıştır [13]. Daha sonra fark denklemlerinden faydalanarak milli gelirin 1988:1 -1999:4 döneminde nasıl bir yapıya sahip olduğu hakkında çıkarsamalar yapıldı. Yurdakul (1999) Fark denklemleriyle ilgili çalışmasında İç Kamusal Borçların Fiyatlar Üzerine Etkilerini incelemiştir [14]. Ayrıca Kızılsu, Aksoy, Kasap (2001)'ın zaman serisi özellikleri bakımından incelediği ARCH ve türevsel modelleri yardımıyla farklı eğilimler gösteren yıllık GSMH büyüme hızını modelleyen çalışması bulunmaktadır [15].

4.1. Toplam Harcama Yaklaşımı

Bir ekonomide bir yılda üretilen nihai malların piyasa değeri, alıcıların bu malları satın almak için ödemeleri gereken para miktarına (toplam harcamaya) tanım gereği eşittir. Ayrıca bir yılda üretilen nihai malların satışından elde edilen gelir (toplam gelir), alıcıların bu malları satın almak için ödedikleri para miktarına (toplam harcamaya) eşittir. Dolayısıyla da bir ekonomide bir yılda üretilen nihai malların piyasa değerini, alıcıların bu malların satışından elde ettikleri geliri (toplam harcamaya) hesaplamak suretiyle dolaylı bir biçimde ölçmek mümkündür. Ayrıca bir ekonomide bir yılda üretilen nihai malların piyasa değerini, gerçekleştirilen üretimin parasal değerini hesaplamak suretiyle dolaysız olarak da ölçmek mümkündür [16].

4.2. Denge Geliri ve Harcama Düzeyi

Denge gözlemlenen değişkenlerin, planlanana uygun seyretmesi nedeniyle ekonomik birimlerin kararlarını ve davranışların değiştirmedikleri bir ortamdır. Diğer bir ifadeyle denge mevcut durumdan, ayrılma eğiliminin söz konusu olmadığı noktadır.

Bir ülkedeki denge gelir ve harcama düzeyinin belirlenmesi planlanan ve fiilen gerçekleşenin aynı olduğu gelir ve harcama düzeyine ulaşması anlamına gelir. Oysa ekonomide gerçekleştirilmesi planlanan toplam harcamalar her zaman GSMH'ye yani gelire eşit olmayabilir.

Keynesyen makroekonominin ortaya çıkışı 1930'larda yaşanan Büyük Buhran'ın hemen ardından olmuş ve bir anlamda bu büyük krizden kurtulmanın yollarını ortaya koymuştur. Keynes sonrası dönemde makroekonomi alanındaki çalışmalar Keynes'in görüşlerini anlamaya ve geliştirmeye yönelik olmuş ve 1960'ların sonlarına kadar Keynesyen model ekonominin izleyişini açıklamada hakim model olmuştur. Keynes'e göre Büyük Buhran'ın başlıca nedeni toplam talepteki yetersizliktir. Bu talep yetersizliği eksik istihdamın ana kaynağıdır. Keynes'e göre ekonominin yalnızca kısa dönemde değil uzun dönemde bile eksik istihdam dengesine takılabileceğini, ekonominin bu durumu ortadan kaldırılacak mekanizmalara sahip olmadığını öne sürmekte ve devlet müdahalesini kaçınılmaz görmektedir.

Keynes'e göre, toplam talebi ortaya koyan bir teori, ekonominin farklı sektörlerinin planladıkları harcamalar ayrı ayrı belirlenmeli ve bunların birleştirilmesi ile toplam talebe ulaşılmalıdır. Burada ekonomiyi tüketiciler, firmalar, devlet ve dış dünya olarak dört farklı sektöre ayırarak bunları ekonominin ürettiği hasılaya yönelik taleplerini ayrı ayrı ortaya koyacak ve bunların birleştirilmesiyle ekonominin toplam hasıla talebine ulaşılacaktır [17].

Bir ekonomide belirli bir dönemde yapılan harcamalar, o ekonomideki fertlerin ve firmaların yapacakları tüketim ve yatırım harcamaları ile devletin yaptığı tüketim ve

yatırım harcamalarından oluşmaktadır. öyleyse harcamalar yönünden GSMH şu şekilde ifade edilir.

$$\text{GSMH} = C + I + G \quad (4.1)$$

Bu ifadede C özel tüketim harcamalarını (özel firmaların ve fertlerin dayanıklı ve dayanıksız mal ve hizmetlere yaptığı harcamalar toplamı) I özel yatırım harcamalarını (özel firmaların üretim teçhizat, inşaat yatırım araçları...), G devlet harcamalarını (devletin yaptığı eğitim, sağlık, bayındırlık, milli savunma, sanayi, transfer ödemeleri vb. harcamalar toplamını) ifade etmektedir.

Günümüzde her ülke ürettiği mal ve hizmetlerin ihtiyacının üzerinde olan bir kısmını başka ülkelere satıp, onun yerine ihtiyaç duyduğu mal ve hizmetleri diğer ülkeden satın almaktadır. Dolayısıyla GSMH rakamlarına ihraç edilen mal karşılığında elde edilen gelirlerle, ithal edilen mal için yapılan ödemeleri de dahil etmek gerekir. İhracata (X), ithalata (M) denildiğinde, harcamalar yönüyle GSMH'yı şu şekilde ifade ederiz.

$$\text{GSMH} = C + I + G + (X - M) \quad (4.2)$$

C= Özel tüketim harcamaları (özel firmaların ve fertlerin dayanıklı ve dayanıksız mal ve hizmetlere yaptıkları harcamalar toplamı)

I= Özel yatırım harcamaları (özel firmaların üretim, teçhizat, inşaat yatırım harcamaları)

G= Devlet harcamaları (devletin yaptığı eğitim, sağlık ,bayındırlık, milli savunma, sanayi ,transfer ödemeleri vb harcamalar toplamı) ifade etmektedir [18].

X = ihracat

M=ithalat

$$C_t = a_0 + a_1 Y_t + a_2 Y_{t-1} \quad (4.3)$$

$$I_t = b_1 Y_t + b_2 Y_{t-1} \quad (4.4)$$

$$M_t = c_0 + c_1 Y_t + c_2 D_t \quad (4.5)$$

$$Y_t = C_t + I_t + X_t - M_t + G_t \quad (4.6)$$

Milli gelir denklemi eşanlı bir denklemdir. Bu denklemlerinin tahminini EKK (en küçük kareler tahmin edicileri)'yle yapılmaz. Çünkü EKK yönteminin önemli varsayımlarından biri, açıklayıcı değişkenlerin olasılıksız oldukları veya da olasılıklı (rassal) iseler olasılıklı bozucu teriminden bağımsız dağıldıklarıdır. Eğer bu koşullar sağlanamıyorsa EKK tahmin edicileri yalnız sapmalı olmakla kalmaz Aynı zamanda tutarsız da olurlar. Yani örneklem sonsuza doğru büyüdükçe tahmin ediciler kendi yığın parametre değerlerine yakınsamazlar. Aşağıda verilen Milli gelirle ilgili;

$$C_t = a_0 + a_1 Y_t + a_2 Y_{t-1} + u_{1t} \quad (4.7)$$

$$I_t = b_1 Y_t + b_2 Y_{t-1} + u_{2t} \quad (4.8)$$

$$M_t = c_0 + c_1 Y_t + c_2 D_t + u_{3t} \quad (4.9)$$

$$Y_t = C_t + I_t + X_t - M_t + G_t \quad (4.10)$$

denklemler yapısal denklemler olarak adlandırılır. Yapısal denklemlerin katsayıları dolaylı etkiyi gösterir. Burada C_t , I_t , M_t , Y_t bağımlı ya da içsel değişkenler Y_{t-1} , X_t , D_t , G_t dışsal değişkenler olarak ele alınır. u_{1t} , u_{2t} , u_{3t} , u_{4t} olasılıklı değişkenlerinden içsel değişkenlerimizi bağımsız dağılmadıkları görülebilir. Dolayısıyla bu denklemlere tek tek klasik EKK uygulanması tutarsız tahminlere yol açacaktır.

Milli gelir tahmininde indirgenmiş kalıp denklemi Eş. 4.10'da Eş. 4.7, Eş. 4.8, Eş. 4.9 nolu denklemleri yerlerine koyulduğunda elde edilen denklemdir. Dikkat edilirse bu denklem sadece dışsal değişkenlerden ve hata teriminden oluşmaktadır. İndirgenmiş kalıp denkleminin katsayıları toplam etkiyi göstermektedir.

$$Y_t = C_t + I_t + X_t - M_t + G_t$$

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_t + a_2 Y_{t-1} + u_{1t} + b_1 Y_t + b_2 Y_{t-1} + u_{2t} + X_t - c_0 - c_1 Y_t - c_2 D_t - u_{3t} + G_t$$

$$(1 - a_1 - b_1 + c_1) Y_t - (a_2 + b_2) Y_{t-1} = a_0 + X_t + G_t - c_2 D_t$$

$$Y_t = \frac{a_0}{(1 - a_1 - b_1 + c_1)} + \frac{a_2 + b_2}{(1 - a_1 - b_1 + c_1)} Y_{t-1}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(1-a_1-b_1+c_1)} X_t - \frac{c_2}{(1-a_1-b_1+c_1)} D_t + \frac{1}{(1-a_1-b_1+c_1)} G_t \\
\Pi_0 &= \frac{a_0}{(1-a_1-b_1+c_1)} \\
\Pi_1 &= \frac{a_2+b_2}{(1-a_1-b_1+c_1)} \\
\Pi_2 = \Pi_4 &= \frac{1}{(1-a_1-b_1+c_1)} \\
\Pi_3 &= \frac{-c_2}{(1-a_1-b_1+c_1)} \\
Y_t &= \Pi_0 + \Pi_1 Y_{t-1} + \Pi_2 X_t - \Pi_3 D_t + \Pi_4 G_t + \omega_t \tag{4.11}
\end{aligned}$$

4.3. Belirlenme Koşulları

4.3.1. Belirlenmede sayma koşulu

Eş. 4.7, Eş. 4.8, Eş. 4.9 ve Eş. 4.10 denklemlerine göre sayma koşulunu incelendiğinde; genel olarak C_t , I_t , M_t , Y_t olmak üzere 4 tane içsel değişken var. Y_{t-1} , X_t , D_t , G_t ise eşanlı denklem modelindeki önceden belirlenmiş yani olasılıksız dışsal değişkenlerimizin sayısı da 4 tanedir.

Birinci denklem için sayma koşulunu uygulandığında,

$$C_t = a_0 + a_1 Y_t + a_2 Y_{t-1} + u_{1t} \tag{4.12}$$

Bu denklemdeki önceden belirlenmiş değişken Y_{t-1} olup bir tanedir. İçsel değişken sayısı ise C_t ve Y_t olmak üzere iki tanedir.

$$K-k > m-1$$

$$4-1 > 2-1$$

$$3 > 1$$

olduğundan denklem aşırı belirlenmiştir.

İkinci denklem için sayma koşulunu uygulandığında,

$$I_t = b_1 Y_t + b_2 Y_{t-1} + u_{2t} \quad (4.13)$$

Bu denklemdeki önceden belirlenmiş değişken Y_{t-1} olup bir tanedir. İçsel değişken sayısı ise I_t ve Y_t olmak üzere iki tanedir.

$$K - k > m - 1$$

$$4 - 1 > 2 - 1$$

$$3 > 1$$

olduğundan denklem aşırı belirlenmiştir.

Üçüncü denklem için sayma koşulu ise

$$M_t = c_0 + c_1 Y_t + c_2 D_t + u_{3t} \quad (4.14)$$

Bu denklemdeki önceden belirlenmiş değişken D_t olup bir tanedir. İçsel değişken sayısı ise M_t ve Y_t olmak üzere iki tanedir.

$$K - k > m - 1$$

$$4 - 1 > 2 - 1$$

$$3 > 1$$

olduğundan denklem yine aşırı belirlenmiştir.

5.3.2. Belirlenmede mertebe koşulu

Belirlenmenin mertebe koşulunun açıklanması amacıyla; eşanlı denklem sistemimizi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
C_t - a_0 - a_1 Y_t - a_2 Y_{t-1} &= u_{1t} \\
I_t - b_1 Y_t - b_2 Y_{t-1} &= u_{2t} \\
M_t - c_0 Y_t - c_1 D_t &= u_{3t} \\
Y_t - C_t - I_t - X_t + M_t - G_t &= 0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Belirlenmeyi kolaylaştırabilmek için yukarıdaki denklem takımını aşağıdaki gibi yazılsın.

	İçsel Değişkenler				Sabitler	Dışsal Değişkenler			
	C_t	I_t	M_t	Y_t		Y_{t-1}	D_t	G_t	X_t
<i>I</i>	1	0	0	$-a_1$	$-a_0$	$-a_2$	0	0	0
<i>II</i>	0	1	0	$-b_1$	0	$-b_2$	0	0	0
<i>III</i>	0	0	1	$-c_0$	0	0	$-c_1$	0	0
<i>IV</i>	-1	-1	1	1	0	0	0	-1	-1

Bu denklemin belirlenebilmesi için öbür denklemlerde olup da bu denklemde olmayan değişkenlerin katsayılarından elde edilir. Rank Koşulu gereği;

$$\begin{aligned}
r(X) &= M - 1 \\
r(X) &= 4 - 1 = 3
\end{aligned}$$

3×3 boyutunda, sıfırdan farklı en az birer determinant bulmalıyız. Şimdi sırasıyla denklemlerimizde 0 olan katsayıları kapatıp rank koşulunu sağlayıp sağlamadığı incelenir.

I. Denklemin Rank Koşulu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -c_1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -c_1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -c_1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -c_1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

II. Denklemin Rank Koşulu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -c_1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -a_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -a_0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

III. Denklemin Rank Koşulu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -a_0 & -a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -b_2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -a_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -a_0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Eş. 4.15'te son denklem dışındaki diğer denklemlerinde yer alan ama bu denklemden dışlanmış hem içsel hem önceden belirlenmiş değişkenlerin katsayılarından oluşturulan 3×3 boyutunda, sıfırdan farklı en az birer determinant bulunduğundan bu model belirlenmektedir.

4.4 İki Aşamalı En Küçük Kareler Yöntemiyle Yapısal Modelin Tahmini

Çizelge 4.1. Özel tüketim denkleminin tahmini

Bağımlı Değişken: C_t				
Yöntem: 2AEK				
Örnek Değerler Aralığı: 1988:2 1999:4				
Gözlem çapı: 47 son ayarlamadan sonra				
Dışsal Değişkenler : X_t G_t Y_{t-1} D_t				
Değişken	Katsayılar	Standart hata.	t-istatistiği	Olasılık değeri.
C	2676,847	619,4185	4,321548	0,0001
Y_t	0,477901	0,024808	19,26362	0,0000
Y_{t-1}	0,085612	0,019668	4,352923	0,0001
R^2	0,937622	F-değeri		263,4180
Düzeltilmiş R^2	0,934787	Durbin-Watson istatistiği		1,594204

Çizelge 4.2. Yatırım denkleminin tahmini

Bağımlı Değişken: I_t				
Yöntem: 2AEK				
Örnek Değerler Aralığı : 1988:2 1999:4				
Örnek Çapı: 47 son ayarlamaadan sonra				
Dışsal Değişkenler : X_t G_t Y_{t-1} D_t				
Değişken	Katsayılar	Standart hata	t-istatistiği	Olasılık değeri.
Y_t	0,222418	0,020195	11,01350	0,0000
Y_{t-1}	0,049359	0,020188	2,444969	0,0185
R^2	0,712595	F-Değeri		130,0589
Düzeltilmiş R^2	0,706208	Durbin-Watson istatistiği		1,594204

Çizelge 4.3. İthalat denkleminin tahmini

Bağımlı Değişken: M_t				
Yöntem: 2AEK				
Örnek Değerler Aralığı: 1988:2 1999:4				
Örnek Çapı: 47 son ayarlamaadan sonra				
Dışsal Değişkenler: X_t G_t Y_{t-1} D_t				
Değişken	Katsayılar	Standart Hata	t-istatistiği	Olasılık değeri.
Y_t	0,225231	0,010935	20,59712	0,0000
D_t	9,503957	1712,824	5,548707	0,0000
R^2	0,670877	F-Değeri		107,9002
Düzeltilmiş R^2	0,663563	Durbin-Watson istatistiği		1,241923

Yapısal denklemimizin katsayılarını aşağıdaki gibi bulduktan sonra;

$$\begin{aligned}
C_t &= 2676,847 + 0,477901Y_t + 0,085612Y_{t-1} \\
I_t &= 0,222418Y_t + 0,049359Y_{t-1} \\
M_t &= 0,225231Y_t + 9,503957D_t \\
Y_t &= C_t + I_t + X_t - M_t + G_t
\end{aligned}
\tag{4.16}$$

İndirgenmiş denklemi önceden belirkenmiş ya da dışsal değişkenlerden oluşmaktadır. Aşağıda gösterildiği şekildedir.

$$Y_t = \Pi_0 + \Pi_1 Y_{t-1} + \Pi_2 X_t - \Pi_3 M_t + \Pi_4 G_t + \omega_t \tag{4.17}$$

Çizelge 4.4 İndirgenmiş denklemin EKK ile tahmini

Bağımlı Değişken: GSMH				
Yöntem: EKK				
Örnek Değerler Aralığı: 1988:2 1999:4				
Örnek Çapı: 47 son ayarlamaadan sonra				
Değişken	Katsayılar	Standart Hata	t-statistiği	Olasılık değeri
C	10956,07	2618,666	4,183835	0,0001
Y _{t-1}	-0,546127	0,163679	-3,336576	0,0018
X _t	3,225273	0,519674	6,206337	0,0000
D _t	-21,77952	7251,825	-3,003315	0,0045
G _t	5,871691	2,169668	2,706263	0,0098
R ²	0,659800	F-statistic	20,36422	
Düzeltilmiş R ²	0,627400	Durbin-Watson istatistiği	2,461320	

$$Y_t = 10956,07 - 0,546127Y_{t-1} + 3,225273X_t - 21,77952D_t + 5,871691G_t \tag{4.18}$$

dir. İndirgenmiş denkleminde göre katsayılar elde edildikten sonra milli gelirin zaman patikasını fark denklemleri aracılığıyla incelenir.

Yine denklemimizi aşağıdaki biçimde yazarak;

$$Y_t + 0,546127Y_{t-1} = \frac{10956,57 + 3,225273X_t - 21,77952D_t + 5,8716916G_t}{1 + 0,546127} \quad (4.19)$$

Öncelikle zaman patikasının denge değerinden sapmasını gösteren tamamlayıcı çözüm bulundu. 1988:1 dönemine ait GSMH değeri $A=y_0=14522,20$ alınıp tamamlayıcı çözümde yerine koyarsak

$$y_c = A(-b)^t = 14522,20(-0,546127)^t \quad (4.20)$$

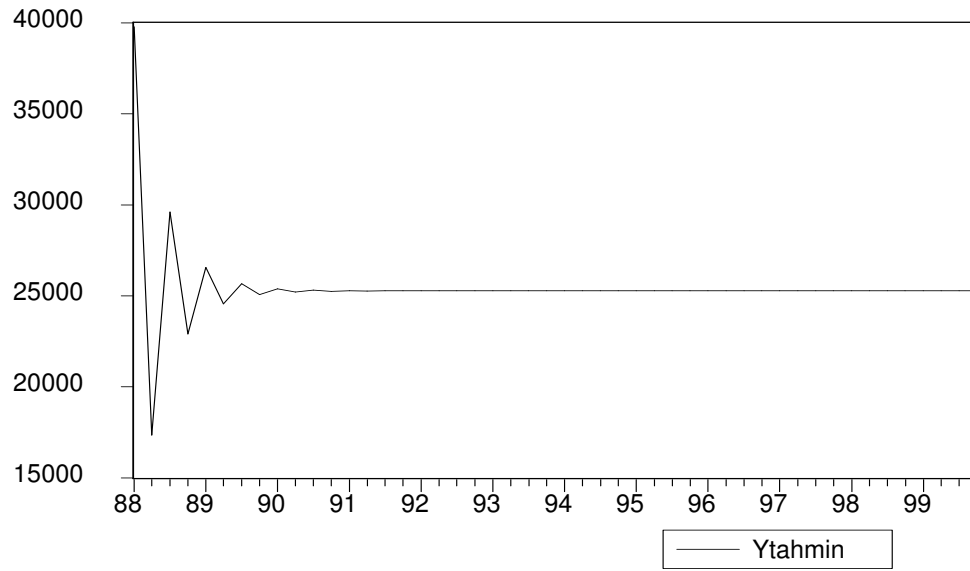
buna göre $-0,546127 < 1$ olduğundan yakınsayan ve $-0,546127$ t'nin çift değerleri için pozitif tek kuvvetleri için negatif değer aldığından salınmalı bir hareket yapısı izlendi.

Sıra y_p denge değerini bulmak olacaktır. Ancak bu tahminde tek bir denge değeri yoktur. Bu sebepten denge değerlerinin bir ortalaması alınıp y_p değeri bulunur. Ytahmin değerlerinin bu değer etrafındaki biçimi incelendi. Sırasıyla denge değerleri ;

$$y_p = \frac{10956,57 + 3,225273X_t - 21,77952D_t + 5,8716916G_t}{1 + 0,546127} \quad (t=1988:1 - 1999:4) \quad (4.21)$$

bu formüle göre hesaplanan denge değerlerinin ortalaması $\bar{y}_p = 25271,21$ olarak bulunur.

$$\begin{aligned} Y_{\text{tahmin}} &= A(-0,546127)^t + \frac{10956,57 + 3,225273X_t - 21,77952D_t + 5,8716916G_t}{1 + 0,546127} \\ &= 14522,20(0,546127)^t + 25271,21 \quad (t=0,1,2,3,\dots,47) \quad (4.22) \end{aligned}$$



Şekil 4.1. GSMH'nın denge gelirine yakınsaması

5. SONUÇLARIN YORUMLANMASI

Bu çalışmada fark denklemleri, fark denklemlerinin çeşitleri ve denge koşulları hakkında bilgi verilmektedir. Ekonomide önemli yer tutan eşanlı denklem sistemleri, eşanlı denklem modellerinin niteliği belirlenme sorunu ve aşırı belirlenmiş denklemlerin tahmin yöntemlerinden biri olan iki aşamalı en küçük kareler yöntemi anlatıldı. Fark denklemlerini uygulanışını göstermek için ekonomi alanındaki eşanlı bir model olan milli gelir tahmin edilmektedir. Milli gelirle ilgili denklemlere klasik ekonometri yöntemlerinden biri olan İki Aşamalı En Küçük Kareler Yöntemi uygulandı. Çalışmada kullanılan değişkenlerin durağan olduğu varsayıldı ve zaman serisi özellikleri bakımından incelenmedi. Türkiye Ekonomisi'nin 1988:1-1999:4 dönemi ele alındı, denklem tahminlerinde E-Views paket programı kullanıldı.

1988:1-1999:4 dönemleri arasındaki tüketim, yatırım, milli gelir, ihracat, ithalat ve kamu harcamalarına ilişkin veriler kullanılarak eşanlı modellenen ve bu modellerden biri olan milli gelirin birinci mertebeden bir fark denklemi olduğu sonucuna varılmıştır. Milli gelirin hareket şekli ise bu birinci dereceden denklemin kökü olan $-0,546127$ değerine bağlıdır. Bu değer mutlak değerce 1 'den küçük olduğundan zaman patikasına göre yakınsayan bir hareket gözlemlenmiştir. Ayrıca bu değer negatif olduğundan salınmalı bir hareket izlenmiştir. Her dönem itibariyle farklı denge değerleri elde edilmesine rağmen milli gelir hakkında genel bir kanıya varmak için bu denge değerlerinin ortalaması alınarak ortalama denge değeri bulunmuştur. Bu değerler üzerinden yorum yapılmıştır.

Bu bulgulara göre Milli gelir artışı dönemler itibariyle sabittir. Ortalama olarak milli gelirde artış veya azalış yaşanmamıştır

KAYNAKLAR

1. Chiang, A. C., “Sürekli zaman: Birinci sıra türevsel denklemler”, “Kesikli zaman: Birinci sıra fark denklemleri”, ”Yüksek Sıra Fark Denklemleri ve Eşanlı Dinamik Modeller”, Matematiksel İktisadın Temel Yöntemleri, 2.cilt, Çeviri Editörleri: Kip, E., Sarımeşeli, M., Aydoğmuş, O., Karatop, U., **Gazi Üniversitesi Yayınları**, Ankara, 528-534, 620-634, 653-687, (1974).
2. Gondolfo, G., “İktisadi Analiz I Fark Denklemleri”, Çeviri Editörü Sarımeşeli, M., **Gazi Kitabevi** Ankara, 1-9, 53-60 (1995).
3. Hamilton, J. D., “Difference equations”, “Lag operators”, Time Series Analyses, 2nd ed., **Princeton University Press**, The United States of America, 1-43, (1994).
4. Gujarati, D. N., “Eşanlı Denklem Modelleri”, Temel Ekonometri, Çeviri Editörleri: Şenesen Ü., Şenesen G., **Literatür Yayıncılık**, İstanbul, 635-706. (1995).
5. Kabe, D. G., “A note on the exact distributions of the GCL estimators in leading over identified cases”, **Journal of American Statistical Association**, The United States of America, 58: 535-537, (1963).
6. Kabe, D. G., “A note on the exact distributions of the GCL estimators in a leading three equation case”, **Journal of American Statistical Association**, The United States of America, 59: 881-894, (1964).
7. Press, S. J., “The wishart and related distributions”, Applied Multivariate Analysis, **Holt Rinehart and Winston Inc.**, NewYork, 100-117 (1972).
8. Basmann, R. L., “A note on the exact finite sample frequency functions of the GCL estimators in two leading over identified cases”, **Journal of American Statistical Association**, The United States of America, 56: 619-636, (1961).
9. Jonston, J., “Simultaneous equation systems”, Econometric Methods, 3rd ed., **McGraw-Hill Book Company**, The United States of America, 442-460, (1984).
10. Koutsoyiannis, A., “Eşanlı ilişkileri olan modeller”, Ekonometri Kuramı Ekonometri Yöntemlerinin Tanıtımına Giriş, Çeviri Editörleri: Şenesen Ü., **Verso Matbaacılık Sanayii**, Ankara, 333-396 (1989).
11. DİE, “Milli tahmin yöntemleri”, İllere Göre Gayrisafi Yurtiçi Hasıla, 1.baskı, **Devlet İstatistik Enstitüsü Matbaası**, Ankara, 9-10 (2001).
12. Saraçoğlu, M., “Milli gelir hesaplama yöntemleri ve kişi başına milli gelir üzerine bir değerlendirme”, Yüksek Lisans Tezi, **Gazi Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü**, Ankara, 1-10 (1991).

13. Kulakoğlu, Ö., “Eşanlı (Simultaneous) denklem sistemleri ve ayçiçeği piyasasına uygulaması”, Yüksek Lisans Tezi, *Gazi Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü*, Ankara, 20-30 (1986).
14. Yurdakul, F., “İç kamusal borçların fiyatlar üzerine etkileri”, *Gazi Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Dergisi Fakültesi Dergisi*, 1(3): 9-24 (1999).
15. Kızılsu, S. S., Aksoy, S., Kasap, R., “Bazı makro ekonomik zaman dizilerinde değişen varyanslılığın incelenmesi”, *Gazi Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Dergisi Fakültesi Dergisi*, 3(1): 11-13 (2001).
16. Ünsal, E. M., “İktisadi Faaliyetlerin Ölçülmesi”, Makro İktisat, *İmaj Yayıncılık*, 3.Baskı, Ankara, 27-34 (1996).
17. Yıldırım, K., Karaman, D., “Keynesyen Model”, Makroekonomi, Üçüncü basım, **Eğitim, Sağlık Bilimsel Araştırma Çalışmaları Vakfı**, Eskişehir, 139-148, (2003).
18. Dinler, Z., “Milli Gelir”, İktisada Giriş, 2.Baskı, **Ekin Yayıncılık**, Bursa, 288-292, (1998).

EKLER

EK-1 Milli gelir belirlenme modelinin tahmin sonuçları

Zaman	t	y_p	Ytahmin
1988:1	0	17557,24	39793,41
1988:2	1	18952,82	17340,24
1988:3	2	20022,59	29602,52
1988:4	3	22529,87	22905,76
1989:1	4	18530,63	26563,04
1989:2	5	19020,50	24565,70
1989:3	6	19520,78	25656,51
1989:4	7	22099,68	25060,79
1990:1	8	17853,79	25386,13
1990:2	9	19706,36	25208,45
1990:3	10	20189,01	25305,48
1990:4	11	24097,73	25252,49
1991:1	12	18779,33	25281,43
1991:2	13	19674,62	25265,63
1991:3	14	21517,79	25274,26
1991:4	15	23870,64	25269,54
1992:1	16	18883,62	25272,12
1992:2	17	20687,79	25270,71
1992:3	18	23141,20	25271,48
1992:4	19	25432,62	25271,06
1993:1	20	20103,73	25271,29
1993:2	21	21728,18	25271,17
1993:3	22	23449,33	25271,23
1993:4	23	26874,51	25271,20
1994:1	24	20618,65	25271,22
1994:2	25	22310,22	25271,21
1994:3	26	25993,73	25271,21
1994:4	27	27811,82	25271,21
1995:1	28	22623,66	25271,21
1995:2	29	24280,93	25271,21
1995:3	30	26441,68	25271,21
1995:4	31	28501,23	25271,21
1996:1	32	24926,20	25271,21
1996:2	33	26293,83	25271,21
1996:3	34	30864,43	25271,21
1996:4	35	32138,36	25271,21
1997:1	36	25935,13	25271,21
1997:2	37	29743,30	25271,21
1997:3	38	35129,50	25271,21
1997:4	39	35249,79	25271,21
1998:1	40	29770,03	25271,21
1998:2	41	33506,60	25271,21
1998:3	42	35864,66	25271,21

EK-1 (Devam) Milli gelir belirlenme modelinin tahmin sonuçları

Zaman	t	y_p	Ytahmin
1998:4	43	37314,65	25271,21
1999:1	44	29037,73	25271,21
1999:2	45	31798,31	25271,21
1999:3	46	34418,46	25271,21
1999:4	47	38220,92	25271,21

EK – 2 Milli gelir tahmininde kullanılan veriler

Zaman	t	G _t	D _t	Y _t	X _t	M _t	C _t	I _t
1988:1	0	1158,200	0,001158	14522,20	2911,100	3132,900	11429,20	3676,300
1988:2	1	1363,200	0,001291	16831,60	3206,900	3284,100	11888,00	4578,700
1988:3	2	1428,800	0,001516	25614,40	3600,300	2937,100	15028,70	5188,300
1988:4	3	1832,700	0,174850	19140,00	4068,100	3315,700	13292,10	4855,300
1989:1	4	1179,800	0,001912	14394,90	3338,400	2727,000	10592,80	4192,400
1989:2	5	1370,700	0,002075	16605,90	3225,700	3125,400	11559,20	4443,400
1989:3	6	1400,100	0,002191	26448,60	3412,000	3678,100	15246,20	5193,500
1989:4	7	1880,000	0,002307	19897,90	3774,600	4012,600	13706,90	4871,500
1990:1	8	1210,200	0,002377	16114,20	2958,600	3995,700	12098,30	4271,200
1990:2	9	1473,300	0,002544	19073,20	3367,700	4428,300	13335,90	5304,700
1990:3	10	1486,800	0,002679	27931,50	3574,500	4559,100	16940,10	6075,900
1990:4	11	2126,700	0,002766	21472,90	4283,300	5044,000	15428,90	6018,100
1991:1	12	1313,900	0,003095	15899,80	3213,500	3806,800	12373,80	4411,700
1991:2	13	1521,800	0,003969	18738,90	3264,200	3849,700	13325,30	5265,900
1991:3	14	1579,300	0,004473	28891,10	4043,100	4543,800	17635,00	6217,800
1991:4	15	2164,300	0,004943	21357,30	4106,000	4874,100	15579,20	6039,500
1992:1	16	1237,500	0,005669	17290,80	3402,600	4310,500	13026,60	4815,800
1992:2	17	1502,800	0,006688	19917,40	3784,500	4615,700	13726,90	5738,900
1992:3	18	1723,900	0,007063	30444,00	4558,100	4954,000	18082,00	6169,300
1992:4	19	2364,300	0,008126	22670,30	4490,700	5057,900	16027,40	6158,200
1993:1	20	1388,400	0,009055	18267,70	3712,800	5234,400	13698,00	5320,300
1993:2	21	1623,900	0,009943	22127,90	4062,800	6546,200	15430,20	7173,700
1993:3	22	1767,700	0,011649	32820,20	4626,100	7027,200	19492,30	7958,300
1993:4	23	2419,200	0,013386	24460,80	5082,000	6907,400	17379,20	8121,400
1994:1	24	1400,100	0,017721	19017,20	3938,400	5626,900	14498,30	5754,900
1994:2	25	1551,100	0,032488	19982,00	4474,500	4320,500	13855,90	5734,000
1994:3	26	1760,100	0,031309	29960,40	5859,800	4783,600	18040,90	6471,500
1994:4	27	2236,000	0,036323	22773,40	5865,000	5358,800	16098,80	6066,400
1995:1	28	1499,200	0,041013	18970,40	4719,300	5480,900	14008,80	4955,100
1995:2	29	1700,500	0,042609	22502,70	5147,300	5949,500	15527,90	6596,200
1995:3	30	1800,000	0,046519	32967,90	6002,000	6727,800	19678,10	7337,700
1995:4	31	2411,000	0,051998	24587,20	5877,000	7875,000	16796,60	7933,900
1996:1	32	1520,700	0,063713	20777,90	5784,100	7281,300	15551,80	5970,200
1996:2	33	1831,600	0,076566	24342,80	5873,800	7825,100	16998,10	7779,900
1996:3	34	2080,100	0,084473	34660,60	7612,500	8301,300	20902,70	8817,300
1996:4	35	2614,500	0,098046	26298,50	7250,400	7968,600	18160,90	8030,400
1997:1	36	1461,200	0,199260	22118,60	6377,000	8337,400	16832,00	6474,300
1997:2	37	1842,700	0,136730	26551,20	7507,600	9559,900	18662,00	8943,400
1997:3	38	2202,600	0,162775	37619,70	9434,600	10264,70	22766,80	9953,400
1997:4	39	2872,200	0,186490	28584,80	8273,400	10254,60	19359,60	9766,100

EK - 2 (Devam) Milli gelir tahmininde kullanılan veriler

Zaman	t	G _t	D _t	Y _t	X _t	M _t	C _t	I _t
1998:1	40	1586,900	0,224650	24226,00	7986,700	9700,000	18275,70	7093,600
1998:2	41	2117,800	0,252090	27743,60	8811,600	10553,90	18555,00	8810,800
1998:3	42	2158,800	0,272570	38581,90	9867,500	9865,200	23055,20	9210,900
1998:4	43	3172,700	0,293200	28751,60	8716,900	9194,200	18227,40	8652,900
1999:1	44	1751,600	0,342068	22314,60	7336,600	8087,700	17317,80	5729,700
1999:2	45	2163,300	0,393508	26724,90	7910,800	10456,40	18386,80	7406,800
1999:3	46	2354,900	0,432750	35664,70	8818,300	9660,200	22376,30	7929,900
1999:4	47	3353,100	0,496777	27339,60	8824,300	9671,500	17996,00	7406,400

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, ad : YILMAZ, Gülser Pınar
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 07.04.1981 Ankara
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 505 243 83 00
e-mail : gulpin81@hotmail.com.

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Ankara Üniversitesi/ İstatistik Bölümü	2003
Lise	Etlik Lisesi (YDA)	1996

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2005	Tapu Kadastro Gen. Müd.	Programcı

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Kitap okumak, gezmek, spor yapmak.