

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**FARKLI GEOMETRİYE SAHİP KARBON NANOTÜP TAKVİYELİ
PLAKLARIN BURKULMA ANALİZİ**

Berkay DOĞAN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEMMUZ 2021

ANTALYA

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**FARKLI GEOMETRİYE SAHİP KARBON NANOTÜP TAKVİYELİ
PLAKLARIN BURKULMA ANALİZİ**

Berkay DOĞAN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEMMUZ 2021

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FARKLI GEOMETRİYE SAHİP KARBON NANOTÜP TAKVİYELİ
PLAKLARIN BURKULMA ANALİZİ

Berkay DOĞAN
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 09/07/2021 tarihinde jüri tarafından Oybirliği / Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ömer CİVALEK
Doç. Dr. Mehmet AVCAR
Dr. Öğr. Üyesi Bekir AKGÖZ

ÖZET

FARKLI GEOMETRİYE SAHİP KARBON NANOTÜP TAKVİYELİ PLAKLARIN BURKULMA ANALİZİ

Berkay DOĞAN

Yüksek Lisans Tezi, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ömer CİVALEK

Temmuz 2021; 43 sayfa

Bu tez çalışmasında karbon nanotüp takviyeli plakların burkulma davranışı incelenmiştir. Burkulma analizleri farklı plak teorileri kullanılarak yapılmış olup farklı teorilerden elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Analiz edilen plak elemanlar farklı mesnetlenme durumları göz önüne alınarak incelenmiştir. Rombik plak, çarpık plak, trapez plak, simetrik olmayan trapez plak, eğik plak gibi farklı geometrik özelliklere sahip plaklar incelenmiştir. Farklı plak teorilerinin, mesnetlenme şekillerinin, geometrik özelliklerin, karbon nanotüp takviyesi dağılımlarının, düğün noktası sayısının burkulma davranışı üzerindeki etkileri karşılaştırmalı olarak gösterilmiştir. Ayrıca aynı plak elemanları için titreşim ve eğilme analizleri de yapılmış olup sonuçları teze eklenmiştir.

ANAHTAR KELİMELE: Ayrık tekil konvolüsyon, Burkulma, Diferansiyel quadrature, Karbon nanotüp takviyeli plak.

JÜRİ: Prof. Dr. Ömer CİVALEK

Doç. Dr. Mehmet AVCAR

Dr. Öğr. Üyesi Bekir AKGÖZ

ABSTRACT

BUCKLING ANALYSIS OF CARBON NANOTUBE-REINFORCED PLATES WITH DIFFERENT GEOMETRIES

Berkay DOĞAN

MSc. Thesis in Civil Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Ömer CİVALEK

July 2021; 43 pages

In this thesis, the buckling behavior of carbon nanotube reinforced plates is investigated. Obtained results using various plate theories are compared. Analyzed plates are chosen using different boundary conditions. Various plate types with different geometric characteristics such as rhombic plate, skew plate, trapeze plate, non-symmetric plate, inclined plate are studied. Comparative results for the effect of different plate theories, boundary conditions, geometric characteristics, distribution of carbon nanotubes, number of grid point on buckling behavior are demonstrated. Also, for the same plates, modal and bending analyzes are made and results are added in the thesis.

KEYWORDS: Buckling, Carbon nanotube-reinforced plate, Differential quadrature, Discrete singular convolution.

COMMITTEE: Prof. Dr. Ömer CİVALEK

Assoc. Prof. Dr. Mehmet AVCAR

Asst. Prof. Dr. Bekir AKGÖZ

ÖNSÖZ

Teknolojide ortaya çıkan gelişmelere paralel olarak plak ve kabuk sistemlerin teşkil edilmesi hem kolaylaşmakta hem de bu tür yapılara olan ihtiyaçlar artmaktadır.

Günümüzde kalın plak, kalın kabuk veya bunların birleşmesinden oluşan konstrüksiyonlar, dairesel ve sektör geometriye sahip plaklar geniş uygulama alanı bulmaktadır. Dikdörtgen geometri dışında paralelkenar, dörtgen veya çarpık geometriye sahip plaklar köprü ve uçak uzay yapılarında ve gemi mühendisliğinde kullanılmaktadır. Bu yapıların boyutlandırmaya esas teşkil edecek titreşim frekanslarının hesaplanması yaklaşık 20 yıldır araştırmacıların üzerinde çalıştığı bir konudur. Bu tez kapsamında Kirchhoff plak teorisi kullanılarak farklı geometriye sahip dörtgen plakların serbest titreşim hesapları yeni iki yöntem olan tekil konvolüsyon ve diferansiyel quadrature yöntemleriyle yapılarak sonuçlar karşılaştırılacaktır.

Bu çalışma süresince zaman ayırarak tezin oluşumuna yardım eden danışman hocam Prof. Dr. Ömer CİVALEK'e, ANSYS ve SAP2000 ile yapılan modelleme sırasında yaptığı katkılardan dolayı Doç. Dr. Hakan ERSOY'a, Tez sürecinde desteklerini esirgemeyen Araş. Gör. Kadir MERCAN'a ve son olarak yüksek lisans çalışmam süresinde ve hayatımın her aşamasında bana maddi ve manevi her türlü desteği veren aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
ÖNSÖZ	iii
AKADEMİK BEYAN	v
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	3
3. MATERYAL VE METOT	5
3.1. Diferansiyel Quadrature (DQ) Metodu	5
3.1.1. Kuvvet polinomları ile ağırlık matrislerinin hesabı.....	5
3.1.2. Lagrange polinomları ile ağırlık katsayıların hesabı	6
3.2. Ayırık Tekil Konvolüsyon (ATK) Metodu	9
3.2.1. Shannon'un delta (RSD) kerneli.....	9
3.2.2. Düzensiz geometriye sahip plaklar için dönüşüm	10
3.2.3. Temel denklemler	11
3.2.4. Serbest titreşim hesabı	12
3.2.5. Burkulma hesabı	14
3.2.6. Eğilme hesabı.....	16
3.2.7. Sınır koşullar.....	16
3.3. Fonksiyonel Derecelendirilmiş KNT Takviyeli Kompozitler.....	17
3.4. Dörtgen Plakların Burkulma Hesabı	18
3.5. Dörtgen Plakların Titreşim Hesabı.....	20
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	23
5. SONUÇLAR	39
6. KAYNAKLAR	40
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Farklı geometriye sahip karbon nanotüp takviyeli plakların burkulma analizi” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

09/07/2021

Berkay DOĞAN

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

A_{ij}	: DQ katsayıları (1.derece)
B_{ij}	: DQ katsayıları (2.derece)
C_{ij}	: DQ katsayıları (3.derece)
D_{ij}	: DQ katsayıları (4.derece)
$\psi(x)$	: Göz önüne alınan fonksiyon
x_j	: Değişken bölgesindeki ayırık noktalar
$\Psi(x_j)$	: x_j noktasındaki fonksiyon değeri
$\Psi_x(x)$	: Fonksiyonun birinci türevi
$\Psi_{xx}(x)$	: Fonksiyonun ikinci türevi
T_n	: Birinci tür Chebyshev polinomları
x_j, y_j, z_k	: x, y ve z doğrultusundaki düğüm noktaları
δ	: Bitişik grid nokta dağılımı için alınan değer
N_x, N_y, N_z	: x, y ve z doğrultularındaki düğüm nokta sayısı
u, v, w	: İlgili deplasmanlar
a, b, c	: Üç boyutlu Plak için göz önüne alınan boyutları
ν	: Poisson oranı
X, Y, Z	: Her bir doğrultudaki boyutsuz koordinatlar
U, V, W	: Boyutsuz bileşenler
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	: İlgili doğrultudaki normal gerilmeler
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	: İlgili doğrultudaki kayma gerilmeleri
G	: Kayma modülü
E	: Elastisite modülü
t	: Zaman değişkeni

P_x, P_y	: Plak kenarlarına x ve y doğrultularında etkiyen basınç kuvveti
q	: Plağa etkiyen yayılı yük
Ω	: Plak için boyutsuz frekans
k	: Plak kenar boyutları oranı (a/b)
ω	: Doğal frekans
U_0	: Plak orta nokta boyutsuz deplasmanı
λ	: Dikdörtgen plak için burkulma faktörü

Bu tezde ondalık ayıraç olarak nokta işareti (.) kullanılmıştır.

Kısaltmalar:

ATK	: Ayrık Tekil Konvolüsyon
TK	: Tekil Konvolüsyon
DQ	: Diferansiyel Quadrature
HDQ	: Harmonik Diferansiyel Quadrature
KNT	: Karbon Nanotüp
FD	: Fonksiyonel Derecelendirilmiş
FD-KNTT	: Fonksiyonel Derecelendirilmiş Karbon Nanotüp Takviyeli
SSSSS	: Dört Kenarı Basit Mesnetlenmiş
CCCC	: Dört Kenarı Ankastre Mesnetlenmiş
SCSC	: İki Kenarı Basit İki Kenarı Ankastre Mesnetlenmiş

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Bir eksenli düğüm noktaları.....	5
Şekil 3.2. Dört düğüm noktasına sahip bir geometrik dönüşüm.....	10
Şekil 4.1. Çarpık plak	23
Şekil 4.2. Trapez plak	23
Şekil 4.3. Simetrik olmayan trapez plak	24
Şekil 4.4. SSSS rombik plağın burkulma değeri için düğüm nokta sayısına bağlı yakınsaması ($\beta=45$).....	27
Şekil 4.5. CCCC çarpık plak için orta nokta deplasman değerinin SAP2000 ve ATK ile hesaplanan sonuçlarının karşılaştırılması ($h=8$ cm; $a=b=800$ cm; $\nu=0.3$; $E=8736$ kN/cm ² ; $\alpha=15^\circ$).....	28

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. Farklı KNT dağılımlarına göre kalınlık yönünün bir fonksiyonu olarak KNT'lerin hacim oranları.....	18
Çizelge 4.1. SSSS çarpık plak için boyutsuz temel frekans değeri	
$\Omega = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D} ; \theta=30^\circ$	24
Çizelge 4.2. SSSS mesnetli çarpık plak için farklı açılar için temel frekans değeri	
$\Omega = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D}$	24
Çizelge 4.3. SSSS rombik plak için frekans değeri $\Omega = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D}$	25
Çizelge 4.4. Simetrik olmayan trapez plak için frekans değerleri $\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D} ;$ h/c=3.0; c/d=2.5; $\beta=0$	25
Çizelge 4.5. Rombik plak için burkulma değeri ($K=N_x a^2/\pi^2 D$).....	26
Çizelge 4.6. Trapez plak için burkulma değerleri ($K=N_x a^2/\pi^2 D$) (h/c=1; $\beta=0$).....	26
Çizelge 4.7. SCSC rombik plak için eğilme değerleri	26
Çizelge 4.8. Tek eksenli basınç etkisi altında SSSS ince izotropik eğimli plakların burkulma yükü parametrelerinin yakınsaması ($\lambda = N_x b^2 / D \pi^2$) (a/b=1; h/b=0.001)	29
Çizelge 4.9. Tek eksenli basınç etkisi altında SSSS lamineli (45/-45/45/-45/45) ve FD-KNTT lamineli dörtgen plak (b/a=0.8; c/a=0.7; $\gamma=75$; $\beta=70$; $V_{cn}=0.17$; UD-CNT) karşılaştırmalı burkulma analizi sonuçları ($\lambda = N_x b^2 / E \pi^2 h^2$).....	29
Çizelge 4.10. Karşılaştırmalı CCCC lamineli (45/-45/45/-45/45) ve FD-KNTT lamineli eğik plak (h/a=0.1; b/a=1; $\alpha=45$; $V_{CNT}=0.17$; UD-CNT) için frekans değerleri ($\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2}$)	30
Çizelge 4.11. Açılı lamineli (45/-45/45/-45) ve eğik plakların (h/a=0.1; b/a=1; $\alpha=75$; $E_1/E_2=40$; $E_2=E_3$; $G_{12}=0.6 E_2$; $G_{13}=G_{23}=0.5 E_2$; $\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0.25$) frekans değerleri ($\Omega = \omega a^2 / \pi^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2}$)	30
Çizelge 4.12. Açılı lamineli (45/-45/45/-45/45) ve eğik plakların (h/a=0.2; b/a=1; $E_1/E_2=40$; $E_2=E_3$; $G_{12}=0.6 E_2$; $G_{13}=G_{23}=0.5 E_2$; $\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0.25$) frekans değerleri ($\Omega = \omega a^2 / \pi^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2}$)	31
Çizelge 4.13. Açılı lamineli (45/-45/45/-45/45) ve eğik plakların (h/a=0.2; b/a=1; $E_1/E_2=40$; $E_2=E_3$; $G_{12}=0.6 E_2$; $G_{13}=G_{23}=0.5 E_2$; $\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0.25$) frekans değerleri ($\Omega = \omega a^2 / \pi^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2}$)	32

Çizelge 4.14. Tek eksenli basınç etkisi altında açılı lamineli eğik plakların ($h/a=0.1$; $b/a=1$; $E_1/E_2=10$; $E_2=E_3$; $G_{12}=0.5 E_2$; $G_{13}=G_{23}=0.5 E_2$; $\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0.33$) kritik burkulma yükleri ($\lambda = N_x b^2 / E \pi^2 h^2$).....	33
Çizelge 4.15. Çok eksenli basınç etkisi altında açılı lamineli eğik plakların ($h/a=0.1$; $b/a=1$; $E_1/E_2=10$; $E_2=E_3$; $G_{12}=0.5 E_2$; $G_{13}=G_{23}=0.5 E_2$; $\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0.33$) kritik burkulma yükleri ($\lambda = N_x b^2 / E \pi^2 h^2$).....	33
Çizelge 4.16. Tek eksenli basınç etkisi altında CCCC lamineli (45/-45/45/-45/45) ve FD-KNTT lamineli dörtgen plak ($b/a=0.8$; $c/a=0.7$; $\gamma=75$; $\beta=70$; $h/a=0.02$) kritik burkulma yükleri ($\lambda = N_{xy} a^2 / E h^3$)	34
Çizelge 4.17. Çok eksenli basınç etkisi altında CCCC lamineli (45/-45/45/-45/45) ve FD-KNTT lamineli dörtgen plak ($b/a=0.8$; $c/a=0.7$; $\gamma=75$; $\beta=70$; $h/a=0.02$) kritik burkulma yükleri ($\lambda = N_{xy} a^2 / E h^3$)	35
Çizelge 4.18. SSSS lamineli (45/-45/45/-45/45) ve FD-KNTT lamineli dörtgen plak ($b/a=0.8$; $c/a=0.7$; $\gamma=75$; $\beta=70$; $h/a=0.05$) kritik burkulma yükleri ($\lambda = N_{xy} a^2 / E h^3$)	35
Çizelge 4.19. Çok eksenli basınç etkisi altında SSSS izotropik eğik plakların ($a/b=1$; $h/b=0.001$) burkulma yükünün yakınsaması ($\lambda = N_{cr} b^2 / D \pi^2$)	36
Çizelge 4.20. Tek eksenli basınç etkisi altında CCCC (45/-45/45/-45/45) KNT dörtgen plakların ($b/a=0.8$; $c/a=0.7$; $\gamma=75$; $\beta=70$; $h/a=0.02$) kritik burkulma yükleri	36
Çizelge 4.21. Çok eksenli basınç etkisi altında CCCC (45/-45/45/-45/45) KNT dörtgen plakların ($b/a=0.8$; $c/a=0.7$; $\gamma=75$; $\beta=70$; $h/a=0.02$) kritik burkulma yükleri	37
Çizelge 4.22. Çift eksenli basınç etkisi altında SSSS FD-KNTT dörtgen plak ($b/a=1$; $h/a=0.01$) kritik burkulma yükleri ($\lambda = N_{xy} a^2 / E h^3$)	37
Çizelge 4.23. Tek eksenli basınç etkisi altında SSSS ve KNT(UD) çarpık plakların ($b/a=1$; $h/a=0.02$) kritik burkulma yükleri	38
Çizelge 4.24. Tek eksenli basınç etkisi altında Fonksiyonel dereceli($z/h+1/2$) ^p kompozit ve dörtgen plakların ($b/a=0.8$; $c/a=0.7$; $\gamma=75$; $\beta=70$; $h/a=0.2$) kritik burkulma yükleri	38

1. GİRİŞ

Tarih boyunca toplumlar uygarlaşma ve refah düzeyine ulaşma hedefiyle her alanda olduğu gibi teknolojik ilerlemelerde kaydetmişler ve böylece yeni ihtiyaçlar doğmuştur. Bu ihtiyaçların karşılanması amacıyla teorik ve pratik çalışmalar yürüten mühendisler de çeşitli yöntemler üzerinde yoğunlaşmışlardır.

İhtiyaçların farklı alanlara kayması günümüz yapı mühendisliğinin büyük bir çoğunluğunu yüzeysel taşıyıcı sistemlere yöneltmiştir. Teknolojinin gelişmesine paralel olarak bu tür sistemlerin teşkil edilmesinin mümkün olması nedeniyle, günümüz yapı mühendisliği daha çok yüzeysel taşıyıcılar veya bu tür sistemlerden oluşan yapılarla ilgilenmektedir. Artık günümüzde kalın plak, kalın kabuk veya bunların birleşiminden meydana gelen yapıların uygulama alanları çok geniştir.

Kalın bir plak veya kalın bir silindirik kabuğun gerilme analizi veya dinamik analizi önemli matematiksel güçlükler ortaya çıkarmaktadır. Örneğin kalın yapılar için dönel simetrik durumda bile günümüze kadar uygun bir kapalı çözüm bilinmemektedir. Kalınlığın, diğer boyutlar yanında ihmal edilemeyecek mertebede olan kemer barajlar, sığınak örtüsü tonozlar ve basınç odaları, nükleer enerji santralleri gibi yapılarda ince kabuk teorisi ile yapılan hesaplar mühendislik amaçları için yeterli olmamaktadır.

Mühendislik problemleri ve biyolojik sistemlerde kurulacak denklem genellikle kısmi türevli diferansiyel formdadır. Bu denklemlerin çözümü için günümüze kadar pek çok yöntem önerilmiştir. Bunlar kesin çözüm verenler, analitik çözüm yöntemleri, ya da sayısal olarak yaklaşık çözüm getiren metotlardır.

Mühendislik sistemlerini analizi, çözülecek sistemi tanımlayan matematik modelin oluşturulması ve sistemi tanımlayan matematik denklemlerin analitik ya da çeşitli sayısal yaklaşımlarla çözülmesi olarak iki ana aşamada gerçekleşir. Birinci aşama tecrübe, farklı boyutta modelleme yeteneği ve ilgili matematik altyapısı; ikinci aşama ise güvenilir, hızlı ve gelişmiş bir hesaplayıcıyı gerektirir (Civalek 2004).

Oluşturulan sayısal modelin, ana modele göre güvenilirliği; sayısal modelin belirli koşullar altındaki çözümüyle elde edilen sonuçların; aynı koşullar altında gerçekleşen fiziksel olayın sonuçları ile uyumluluğuna bağlıdır. Modellerin büyük çoğunluğu sınır değer formundaki diferansiyel denklemlerdir (Civalek 2004). Bu denklemler varyasyon problemleriyle fiziksel modele en uygun şekilde uyarlanabilir. Varyasyonel problemler sınır değer problemlerinde göre daha geniş kullanım alanlarına sahiptir. Bunun en önemli nedeni modelin giriş verileri üzerindeki süreklilik ve türevlenebilirlik koşullarının varyasyonel problemlerde daha uygulanabilir oluşudur. Matematik modelleme işleminin sonraki aşaması problemin ayırık model olarak kullanılacak hesap yöntemine tanıtılmasıdır. Bu yöntem klasik sonlu farklar yönteminden daha farklı bir yapıya sahip olup, en önemli ayırt edici özelliği sonlu farklar yöntemi sınır değer problemini esas alırken, sonlu elemanlar yöntemi varyasyonel problemi esas alır.

Mühendislik problemlerini “sürekli ve süreksiz ortam problemleri” olarak iki ana başlık altında sınıflandırabiliriz. Sürekli ortam problemlerinin çözümünde denklem sisteminin oluşturulması aşamasında çeşitli matematiksel güçlüklerle karşılaşılabilir.

Bununla birlikte süreksiz ortam problemlerinin çözümünde hesaplayıcı kapasitesi ve çözüm süresi değişkenlik gösterir.

Matematik model oluşturulurken genellikle çözümü istenen sistemi ifade eden “integral denklem” ya da “diferansiyel denklem” kümelerinden oluşur. Karmaşık sınır koşullarından dolayı ulaşılan kısmi ya da adi türevli diferansiyel denklem kümesinin analitik çözümü oldukça zordur. Bu durumda çeşitli uygulanabilir analiz teknikleri ortaya kullanılır. Denklemlerin matris formda ifade edilebilmesi ve bu şekilde çözülebilmesi gelişen teknolojiye paralel olarak bilgisayar tekniğinin de gelişmesiyle birlikte sayısal analiz yöntemlerine büyük katkı sağlamış; dolayısıyla analizlerin daha pratik ve güvenilir olmaları yönünde ilerlemelerine neden olmuştur. Sonlu farklar, sonlu elemanlar, sınır elemanlar, diferansiyel dönüşüm, varyasyonel (değişim) hesap ve Ritz günümüzde en etkin kullanılan yaklaşık analiz yöntemleri olarak göze çarpmaktadır. Birçok nümerik hesap metodunda sonsuz sayıda serbestlik derecesine sahip sürekli ortam problemi sonlu sayıda serbestlik dereceli bir sistem olarak modellenerek geçerli bir çözüm elde edilir.

İster Sonlu eleman tekniği veya sınır elemanlar/farklar metodunda düğüm noktalarının artması daha hassas sonuçlara ulaşılmasını sağlar. Ayrıca yüksek hassasiyet için düğüm noktalarının arttırılması; çözümde faydalanılacak bilgisayar kapasitesini ve çözüm süresini de paralel olarak arttıracaktır. Fakat pek çok problemde tutarlı ve gerçek değerine yakın sonuçlara ulaşabilmek birkaç özel düğüm noktasında mümkün olabilmektedir.

Bilgisayarın günümüzde daha da efektif kullanılmasıyla birlikte denklemlerin matrislerle ifade edilebilmesi ve bilgisayar ortamına eskiye göre daha kolay aktarılması sonucunda kullanılan metotlar daha pratik ve hızlıdır.

2. KAYNAK TARAMASI

Matematiksel fiziğin önemli denklemlerinden biri de dördüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerdir. Akustik ve titreşim hesaplarında Helmholtz denkleminin çözümü önem kazanmakta iken dördüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemler katı cisimler mekaniğinde plakların eğilmesi, titreşimi ve burkulma analizinde öne çıkmaktadır. Membran sistemler; uygulamada pek çok yerde karşımıza çıkan yapılar olup bunların titreşim analizleri ve frekans değerleri dizayn aşamasında önemli büyüklüklerdir. Plaklar ise otomotiv, uçak-uzay, gemi mühendisliği ve inşaat mühendisliğinde karşılaşılan pek çok yapı elemanlarında kullanılmaktadır. Bu tez çalışmasında özellikler farklı geometriye sahip ince ve kalın plakların burkulma analizi sayısal olarak incelenmiştir. Geliştirilen programın performansı açısından eğilme ve titreşim sonuçları da incelenmiş ve daha önce yapılan tez çalışmasındaki sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

İnce ve kalın plak yapılar kullanım amacına göre çeşitli geometrilerde olacağı gibi daha çok; kare, dikdörtgen, dairesel, çarpık ve üçgen geometriler tercih edilmektedir. Günümüze kadar; birçok sayısal ve analitik yöntem bu tarz sitemlerin burkulma ve titreşim davranışlarını modellemede kullanılmıştır. Bunlar; ağırsız yöntemler, merkezi farklar, sonlu elemanlar, sınır elemanlar, Rayleigh-Ritz, Petrov-Galerkin, harmonik ya da genelleştirilmiş quadrature yöntemleri ya da bazı analitik yöntemler ile plak ve kabukların statik hesabı ya da burkulma hesabı çalışılmıştır.

Lim ve diğerleri yaptıkları çalışmalarda basit mesnetlenmiş kalın eğik plakların (Lim vd. 1995), konsol trapez simetrik elemanların (Lim ve Liew 1995), konsol trapez simetrik elemanlar için üç boyutlu (Lim 1999), genel trapez elemanların (Lim vd. 1996) titreşim analizlerini yapmıştır.

Son zamanlarda yaklaşım fonksiyonu olarak meshless (ağırsız) yöntemlerde kullanılan yerel radyal fonksiyonları esas alan bir diferansiyel quadrature yöntemi Wu ve diğerleri (2007) tarafından önerilmiş ve metot çeşitli geometrilerdeki membran sistemlerin frekans hesabında başarıyla kullanılmıştır.

Diferansiyel quadrature (DQ) yöntemi literatürde belirli çerçeveler içerisinde kullanılmıştır (Striz vd. 1995). Kang ve diğerleri (1989) yayınladıkları çalışmada yapısal elemanların statik analizlerinde DQ yönteminin kullanışını göstermiştir. Ayrıca, Du ve diğerleri (1994) DQ yönteminin yapısal problemlerde nasıl uygulanacağını göstermiştir. Bert ve diğerleri (1994a; 1994b) Bert ve Malik (1997) yayınladıkları çalışmada DQ yönteminin kompozit malzemeleri analizinde etkili ve güçlü bir yöntem olduğunu göstermiştir. Bu çalışmalardan sonra yapılan az sayıdaki çalışmalarda ise birden fazla ve farklı sınır koşullarının DQ yöntemine dahil edilmesi (Malik ve Bert 1996), Kirchhoff plaklara uygulanması (Liew ve Liu 1997), kalın dairesel plaklarda uygulanması (Han ve Liew 1997), dört düğüm noktalı dörtgen plaklar için uygulanması (Liew ve Han 1997), sekiz düğüm noktalı plaklara uygulanması (Han ve Liew 1997) gösterilmiştir.

Lin ve diğerleri (1994a; 1994b) yayınladıkları çalışmalarda plakların termal etki altında eğilme analizlerini DQ yöntemini kullanarak irdelemişlerdir.

DQ yöntemiyle serbest titreşim analizleri hem plak hem kirişler için önceki çalışmalarda başarılı bir şekilde uygulanmış ve yöntemin hassasiyeti kanıtlanmıştır (Bert vd. 1994a).

Literatürde ayırık tekil konvolüsyon (ATK) yöntemi 2000’li yılların başlarından beri plaklara uygulanmış ve elde edilen sonuçlar yöntemin doğruluğunu kanıtlamıştır (Zhao ve Wei 2002; Wan ve Wei 2000; Wei vd. 2002). ATK yöntemiyle titreşim analizleri kompozit kabuklar için (Civalek 2006a), konik kabuklar için (Civalek 2006b); lineer olmayan analiz ile birlikte dörtgen plaklar için (Civalek 2007b), farklı mesnet koşullarıyla plaklar için (Wei vd. 2001), yüksek frekanslı titreşim için (Wei vd. 2002) yapılmıştır. Ayrıca, ATK yöntemiyle burkulma analizlerini içeren çalışmalar da yayınlanmıştır (Civalek 2007a; Wang vd. 1994a; Hou ve Wei 2002).

Kiani ve Mirzaei (2018) dikdörtgen ve çarpık plak için burkulma analizini incelemiş ve nanotüp takviyesinin etkisi sonuçlarda irdelenmiştir. Zhang vd. (2015) ağsız (meshless) lokal Galerkin yöntemiyle çarpık plağın burkulma analizi yapılmış ve parametrik sonuçlar verilmiştir.

DQ yönteminin kullanıldığı çalışmalar plak titreşimi için çok fazla olup, HDQ ise daha sınırlı olup daha çok dairesel ve dikdörtgen plak sistemlere uygulanmıştır. Plaklar ile ilgili yapılmış pek çok çalışma olmasına rağmen karbon nanotüp takviyeli plaklar için sadece birkaç çalışma olup bunların içinde ATK ve HDQ yöntemiyle yapılmış çalışma sadece bir tanedir.

Bu çalışmada hem daha önce literatürde çözümü olmayan geometrilere ait çözümler HDQ ve DQ yöntemleri ile verilmiş, hem de ATK yöntemi ilk farklı geometriye sahip plakların burkulma analizine uygulanmıştır. Her bir yöntemin performansı karşılaştırılmıştır. Göz önüne alınan plak karbon nanotüp ile takviyeli kompozit plaklardır ve uygulamada (uçak-uzay, gemi mühendisliği, otomobil) pek çok kullanım alanı vardır.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Diferansiyel Quadrature (DQ) Metodu

Bu metotta türev:

$$u_x(x_i) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij} u(x_j) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.1)$$

olacaktır.

Ağırlık katsayılarının hesabı (Belmann vd. 1972) verilmiştir.

3.1.1. Kuvvet polinomları ile ağırlık matrislerinin hesabı

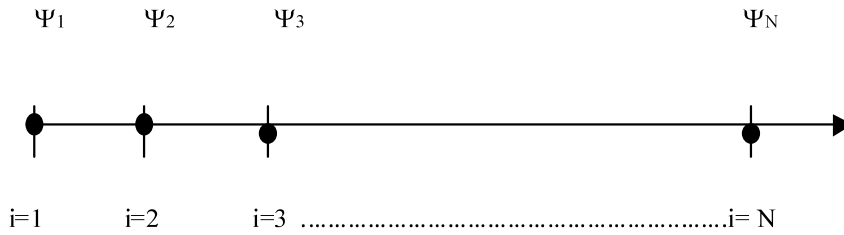
Denklem (3.1) tam olarak alındığında, test fonksiyonu olarak (N-1) ya da daha küçük dereceden seçilen polinom fonksiyonu için:

$$u_k(x) = x^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.2)$$

verilen Denklem (3.1)'de kullanıldığında aşağıda belirtildiği formda bir doğrusal denklem takımına ulaşılır:

$$(k-1)x_i^{k-2} = \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j^{k-1} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad \text{ve} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad \text{için} \quad (3.3)$$

Şekil 3.1'de tek boyutlu bir sistem için tanımlanan düğüm noktaları gösterilmiştir.



Şekil 3.1. Bir eksenli düğüm noktaları

Denklem (3.3) matris formda aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\{ \partial \Psi(x) / \partial x \}_i = [A_{ij}] \{ \Psi(x) \}_j \quad (3.4)$$

Buna göre ikinci dereceden türev için metot:

$$\psi_{xx}(x_i) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N B_{ij} \psi(x_j); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.5)$$

(B_{ij}) : İkinci dereceden türev için ağırlık katsayısı

olarak ifade edilir. Denklem (3.5) birinci dereceden ağırlık katsayıları cinsinden:

$$\psi_{xx}(x_i) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i}; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.6)$$

Denklem (3.2) ile verilen polinom fonksiyon uygulanarak ikinci dereceden türev ifadesi:

$$(k-1)(k-2)x_i^{k-3} = \sum_{j=1}^N B_{ij} x_j^{k-1} \quad (3.7)$$

eşitliği olarak bulunmuştur.

İkinci dereceden türev ifadesi Denklem (3.3)'teki yaklaşımla çözümlerse ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden ağırlık katsayıları (B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}) aşağıdaki formda hesaplanır.

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} A_{kj} \quad (3.8)$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} B_{kj} \quad (3.9)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} C_{kj} \quad (3.10)$$

3.1.2. Lagrange polinomları ile ağırlık katsayıların hesabı

Bağımlı u değişkeni:

$$u(\bar{x}) = c_0 + c_1 \bar{x} + c_2 \bar{x}^2 + \dots + c_{n+2} \bar{x}^{n+2} \quad (3.11)$$

olsun. Burada x değişkeninin $\bar{x}$ ile ifade edilmesinin nedeni $[-1,1]$ aralığında lokal koordinatlarda işlem yapılmasıdır. Dönüşüm

$$\bar{x} = \frac{2}{(x_j - x_i)}(x - x_i) - 1 \text{ ile gerçekleştirilir. Burada } x_i \text{ ve } x_j \text{ global koordinat sisteminin uç noktalarıdır.}$$

Böylece Denklem (3.9):

$$u(\bar{x}) = [b]\{c\} \quad (3.12)$$

olarak yazılır. Burada:

$$[b] = [1 \quad \bar{x} \quad \bar{x}^2 \quad \dots \bar{x}^{n+1} \quad \bar{x}^{n+2}]$$

$$\{c\} = \left\{ c_0 \quad c_1 \quad c_2 \dots c_n \quad c_{n+1} \quad c_{n+2} \right\}^T$$

ile tanımlıdır. Böylece bağımlı değişken “ u ”:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ u'_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \\ u'_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_0 & \bar{x}_0^2 & \cdot & \cdot & \bar{x}_0^n & \bar{x}_0^{n+1} & \bar{x}_0^{n+2} \\ 0 & 1 & 2\bar{x}_0 & \cdot & \cdot & n\bar{x}_0^{n-1} & (n+1)\bar{x}_0^n & (n+2)\bar{x}_0^{n+1} \\ 1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_1^2 & \cdot & \cdot & \bar{x}_1^n & \bar{x}_1^{n+1} & \bar{x}_1^{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \bar{x}_{n-1} & \bar{x}_{n-1}^2 & \cdot & \cdot & \bar{x}_{n-1}^n & \bar{x}_{n-1}^{n+1} & \bar{x}_{n-1}^{n+2} \\ 1 & \bar{x}_n & \bar{x}_n^2 & \cdot & \cdot & \bar{x}_n^n & \bar{x}_n^{n+1} & \bar{x}_n^{n+2} \\ 0 & 1 & 2\bar{x}_n & \cdot & \cdot & n\bar{x}_n^{n-1} & (n+1)\bar{x}_n^n & (n+2)\bar{x}_n^{n+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \\ c_{n+1} \\ c_{n+2} \end{Bmatrix}$$

ya da:

$$\{u\} = [N_0]\{c\} \quad (3.13)$$

olarak yazılır.

$$\{\bar{u}\} = \left\{ u(\bar{x}) \quad u'(\bar{x}) \quad \dots u(\bar{x}) \dots u(\bar{x}) \quad u'(\bar{x}) \right\}^T \quad (3.14)$$

ve

$$[N] = \{[b][b'] \dots [b] \dots [b']\}^T \quad (3.15)$$

$$\{c\} = [N_0]^{-1}\{u\} \quad (3.16)$$

yazılabilir. Bu denklemdeki c değerleri Denklem (3.11) polinomundaki sabitlerdir. Denklem (3.13) ve (3.16)'dan:

$$\frac{d}{d\bar{x}}\{\bar{u}\} = \left(\frac{d}{d\bar{x}}[N]\right)[N_0]^{-1}\{u\} + [N]\frac{d}{d\bar{x}}\left([N_0]^{-1}\{u\}\right) = \left(\frac{d}{d\bar{x}}[N]\right)[N_0]^{-1}\{u\} \quad (3.17)$$

yazılabilir. Böylece 1'den n ' e kadar belirli ayrık noktalar için:

$$\frac{d}{d\bar{x}}\{u\} = [A]\{u\} \quad (3.18)$$

yazılır. Bu denklemde:

$$[A] = [N'_0][N_0]^{-1} \quad (3.19)$$

ile tanımlıdır.

$$x_i = \frac{2i-n}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.20)$$

ya da

$$[A] \equiv \left[\frac{d}{d\bar{x}} \right] \quad (3.21)$$

olur. Diğerleri de:

$$[B] \equiv \left[\frac{d^2}{d\bar{x}^2} \right] = \left[\frac{d}{d\bar{x}} \right] \left[\frac{d}{d\bar{x}} \right] = [A][A] \quad (3.22)$$

$$[C] \equiv \left[\frac{d^3}{d\bar{x}^3} \right] = \left[\frac{d}{d\bar{x}} \right] \left[\frac{d}{d\bar{x}} \right] \left[\frac{d}{d\bar{x}} \right] = [A][A][A] \equiv [B][A] \quad (3.23)$$

$$[D] \equiv \left[\frac{d^4}{d\bar{x}^4} \right] = [B][B] \equiv [C][A] \quad (3.24)$$

şeklinde hesaplanır. Denklem (3.1)'i sağlayacak şekilde x_k ötelenmiş Legendre polinomunun kökleri olarak:

$$u_k(x) = \frac{L_N(x)}{(x - x_k)L_N^{(1)}(x_k)}, \quad k=1, 2, \dots, N \quad (3.25)$$

olarak alınır.

3.2. Ayırık Tekil Konvolüsyon (ATK) Metodu

Wei ve arkadaşları Ayırık Tekil Konvolüsyon algoritmasını ilk olarak katı ve akışkanlar mekaniği problemlerinin çözümünde uyguladı (Wei 2001a; Wei 2001b; Zhao vd. 2002a; Zhao vd. 2002b; Zhao vd. 2002c). ATK algoritmasını kullanarak yüksek frekanslı titreşime sahip plakları ve düzensiz iç destekli plak titreşimlerini analiz etti. Yakın zamanda, Ayırık Tekil Konvolüsyon algoritmasının ve Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature yönteminin dikdörtgen plakların titreşim hesabında karşılaştırılması Ng ve arkadaşları tarafından (Ng vd. 2004), tabakalı konik kabukların ve elastik temel üzerindeki plakların serbest titreşimlerinin sayısal çözümleri ise Civalek (Civalek 2006) tarafından sunulmuştur. Bu çalışmalar ATK algoritmasının özellikle dikdörtgen plakların yüksek frekanslı titreşimleri olmak üzere plakların titreşim analizde son derece işe yaradığını açıkça belirtmektedir. Yakınlarda, ATK-Ritz yöntemiyle Mindlin plaklar ve kalın basık kabukların serbest titreşim analizi Hou vd. (2005) ve Lim vd. (2005a; 2005b) tarafından sunulmuştur.

Tekil konvolüsyon:

$$s(k) = (r * \eta)(k) = \int_{-\infty}^{\infty} r(k-x)\eta(x)dx, \quad (3.26)$$

Denklemden $s=F$, $k=t$, $T=r$. $T(t-x)$ tekil kerneldir.

Örneğin:

$$T(x) = \delta^{(n)}(x); \quad (n=0,1,2,\dots). \quad (3.27)$$

Buradaki ayırık kernel delta tiptir. Kernel $T(x) = \delta(x)$ eşitliği yüzeysel ve eğrisel interpolasyon için önemlidir ve $T(x) = \delta^{(n)}(x)$ eşitliği $n>1$ için türevsel eşitliklerin sayısal çözümünde gereklidir. Yeterli düzgün yaklaşımla, ayırık tekil konvolüsyon yönteminin dikkate alınması son derece etkili olur (Wei 2001).

$$F_{\alpha}(t) = \sum_k T_{\alpha}(t-x_k)f(x_k), \quad (3.28)$$

3.2.1. Shannon'un delta (RSD) kerneli

$$\delta_{\Delta,\sigma}(x-x_k) = \frac{\sin[(\pi/\Delta)(x-x_k)]}{(\pi/\Delta)(x-x_k)} \exp\left[-\frac{(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right]; \quad \sigma>0. \quad (3.29)$$

şeklinde düzenlenmiştir (Wei 2001). Denklemlerde $\Delta=\pi/(N-1)$, σ : Gauss zarfı olup $\sigma=rh$ ile hesaplanır. Herhangi bir mertebeden türev:

$$f^{(n)}(x) \approx \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta}(x-x_k) f(x_k), \quad (3.30)$$

$\delta_{\Delta}(x-x_k) = \Delta \delta_{\alpha}(x-x_k)$ olarak belirtilmiştir ve (n) türevin mertebesi göstermektedir. $(2M+1)$ x çevresinde konumlanan ve genellikle toplam değerinden daha küçük toplam hesap genişliğidir. ATK yönteminde herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun x_i noktası için x koordinat yönündeki türevi aşağıdaki toplam ile verilir.

$$\left. \frac{d^n f(x)}{d x^n} \right|_{x=x_i} = f^{(n)}(x) \approx \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta\sigma}^{(n)}(x_i-x_k) f(x_k); \quad (n=0,1,2,\dots). \quad (3.31)$$

Denklemden n . x değişkenine göre n . mertebeden türev olarak tanımlanır. Örneğin ATK kernellerinin $x=x_i$ deki ikinci mertebeden türevi aşağıdaki gibidir.

$$\delta_{\Delta\sigma}^{(2)}(x-x_j) = \frac{d^2}{d x^2} \left[\delta_{\Delta\sigma}(x-x_j) \right] \Big|_{x=x_i} \quad (3.32)$$

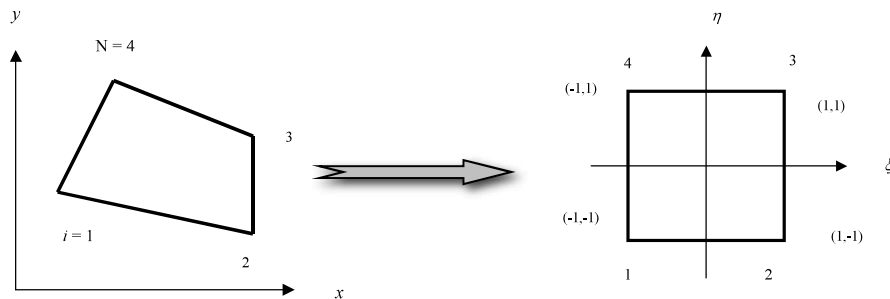
Ayrık formda Denklem (3.32)'deki bu türev

$$f^{(2)}(x) = \left. \frac{d^2 f}{d x^2} \right|_{x=x_i} \approx \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta\sigma}^{(2)}(k\Delta x_N) f_{i+k,j}. \quad (3.33)$$

olarak formüle edilebilir.

3.2.2. Düzensiz geometriye sahip plaklar için dönüşüm

Şekil 3.2'de verilen dört düğüm noktası ile ifade edilen dörtgen bölgeyi göz önüne alalım.



Şekil 3.2. Dört düğüm noktasına sahip bir geometrik dönüşüm

Aşağıdaki bağıntı ile dönüşüm gerçekleştirilir.

$$x = \sum_{i=1}^N x_i \Phi_i(\xi, \eta) \quad (3.34)$$

$$y = \sum_{i=1}^N y_i \Phi_i(\xi, \eta) \quad (3.35)$$

Bu denklemde x_i ve y_i değerleri i . düğümün koordinatları, N düğüm nokta sayısı, ve $\Phi_i(\xi, \eta)$; $i=1,2,3,\dots,N$ değerleri şekil fonksiyonlarıdır. Bu değerler i . düğüm için:

$$\Phi_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i) \quad (3.36)$$

Birinci ve ikinci mertebeden türevler bu dönüşüm ile:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = [J_{11}]^{-1} \begin{Bmatrix} u_\xi \\ u_\eta \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\begin{Bmatrix} u_{xx} \\ u_{yy} \\ 2u_{yx} \end{Bmatrix} = [J_{22}]^{-1} \begin{Bmatrix} u_{\xi\xi} \\ u_{\eta\eta} \\ 2u_{\xi\eta} \end{Bmatrix} - [J_{22}]^{-1} [J_{21}] [J_{11}]^{-1} \begin{Bmatrix} u_\xi \\ u_\eta \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

olarak yazılır. Burada J_{ij} değerleri Jacobian matrisin elemanlarıdır. Bu değerler literatürde tanımlanmıştır (Liew 1997). Örneğin x ve y koordinatlarına göre ikinci mertebeden türev ifadeleri:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = [J_{22}]^{-1} \sum_{i=-M}^M \delta^{(2)}_{\Delta, \sigma}(k\Delta\xi) w_{ik} - [J_{22}]^{-1} [J_{21}] [J_{11}]^{-1} \sum_{i=-M}^M \delta^{(1)}_{\Delta, \sigma}(k\Delta\xi) w_{ik} \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = [J_{22}]^{-1} \sum_{i=-M}^M \delta^{(2)}_{\Delta, \sigma}(k\Delta\eta) w_{jk} - [J_{22}]^{-1} [J_{21}] [J_{11}]^{-1} \sum_{i=-M}^M \delta^{(1)}_{\Delta, \sigma}(k\Delta\eta) w_{jk} \quad (3.40)$$

3.2.3. Temel denklemler

İnce elastik Kirchhoff plağın genel denklemi:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - q(x, y) - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.41)$$

olarak verilir. Burada D plağın eğilme rijitliği, h plağın kalınlığını N_x ve N_y sırasıyla x ve y doğrultularındaki eksenel basınç kuvvetlerini, q yükü, w deplasmanı, ρ plak malzemesinin yoğunluğunu temsil eder.

3.2.4. Serbest titreşim hesabı

Serbest titreşim hesabında yukarıdaki (3.41) denklemi şu halde yazılır:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.42)$$

Düşey deplasman fonksiyonu:

$$w(x, y, t) = W(x, y)e^{i\omega t} \quad (3.43)$$

olarak seçilip Denklem (3.42)'de yerine yazılırsa hareket denklemi:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \Omega^2 W \quad (3.44)$$

olur. Burada $\Omega^2 = \rho h \omega^2 / D$. Şimdi denklemi ikinci mertebeden türevler şeklinde yazmak için aşağıdaki operatörü göz önüne alalım.

$$\nabla^2(\bullet) = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial y^2} \quad (3.45)$$

Bu operatör ∇^2 Laplace operatörüdür. Böylece Denklem (3.44)

$$\nabla^2 \nabla^2(W_{xy}) = \Omega^2 W \quad (3.46)$$

olarak yazılır. İkinci mertebeden türevler içinde aşağıdaki dönüşümleri tanımlayalım:

$$\mathfrak{R} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \text{ and } S = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \quad (3.47)$$

Bu dönüşümler cinsinden dördüncü mertebe türevler:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathfrak{R} \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} S \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} S \quad (3.50)$$

olarak ifade edilir. Bu değerler, geometrik dönüşüm ile birlikte kullanılıncı ξ - η koordinat ekseninde türev ifadeleri aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = [J_{11}]^{-1} \frac{\partial W}{\partial \xi} \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = [J_{11}]^{-1} \frac{\partial W}{\partial \eta} \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = [J_{22}]^{-1} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - [J_{22}]^{-1} [J_{21}] [J_{11}]^{-1} \frac{\partial W}{\partial \xi} \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = [J_{22}]^{-1} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} - [J_{22}]^{-1} [J_{21}] [J_{11}]^{-1} \frac{\partial W}{\partial \eta} \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial \xi^2} = [J_{22}]^{-1} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial \xi^2} - [J_{22}]^{-1} [J_{21}] [J_{11}]^{-1} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} = [J_{22}]^{-1} \frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} - [J_{22}]^{-1} [J_{21}] [J_{11}]^{-1} \frac{\partial S}{\partial \eta} \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} = [J_{22}]^{-1} \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} - [J_{22}]^{-1} [J_{21}] [J_{11}]^{-1} \frac{\partial S}{\partial \xi} \quad (3.57)$$

Denklem (3.44) ikinci mertebeden türevler cinsinden aşağıdaki formda yazılır:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \Omega^2 W \quad (3.58)$$

ya da

$$\nabla^2 (W_{\xi\eta}) = \Omega^2 W \quad (3.59)$$

Şimdi de geometrik dönüşüm formülleri uygulanarak hareket denklemini,

$$\begin{aligned} & [J_{22}]^{-1} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial \xi^2} - [J_{22}]^{-1} [J_{21}] [J_{11}]^{-1} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} + 2 \left([J_{22}]^{-1} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial \eta^2} - [J_{22}]^{-1} [J_{21}] [J_{11}]^{-1} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \eta} \right) \\ & + \left([J_{22}]^{-1} \frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} - [J_{22}]^{-1} [J_{21}] [J_{11}]^{-1} \frac{\partial S}{\partial \eta} \right) = \Omega^2 W \end{aligned} \quad (3.60)$$

olarak yazmak mümkündür. Bu denklem ATK formunda:

$$\begin{aligned} & [J_{22}]^{-1} \left[\sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta,\sigma}^{(2)}(k\Delta\xi) \mathfrak{R}_{kj} + 2 \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta,\sigma}^{(2)}(k\Delta\eta) \mathfrak{R}_{ik} + \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta,\sigma}^{(2)}(k\Delta\eta) S_{ik} \right] \\ & - [J_{22}]^{-1} [J_{21}] [J_{11}]^{-1} \left(\sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta,\sigma}^{(1)}(k\Delta\xi) \mathfrak{R}_{kj} + 2 \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta,\sigma}^{(1)}(k\Delta\eta) \mathfrak{R}_{ik} \right. \\ & \left. + \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta,\sigma}^{(2)}(k\Delta\eta) S_{ik} \right) = \Omega^2 W_{ij} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Bu denklemleri daha genel ve basit formda ifade etmek için aşağıdaki operatörü işlemlere dahil edelim.

$$\mathfrak{S} = (k\Delta\xi) \mathfrak{R}_{kj} + 2(k\Delta\xi) \mathfrak{R}_{ik} + (k\Delta\eta) S_{ik} \quad (3.62)$$

Böylece temel hareket denklemi, serbest titreşim durumunda:

$$[J_{22}]^{-1} \left[\sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta,\sigma}^{(2)} \mathfrak{S} \right] - [J_{22}]^{-1} [J_{21}] [J_{11}]^{-1} \left[\sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta,\sigma}^{(1)} \mathfrak{S} \right] = \Omega^2 W_{ij} \quad (3.63)$$

olur. Geometrik dönüşüm altında denklem:

$$\nabla^4 (W_{\xi\eta}) = \nabla^2 \nabla^2 (W_{\xi\eta}) = \Omega^2 W \quad (3.64)$$

şeklinde yazılır. Buna göre Denklem (3.63) Denklem (3.64)'te yazılarak hareket denklemi:

$$\begin{aligned} & \left([J_{22}]^{-1} \left[\sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta,\sigma}^{(2)} \mathfrak{S} \right] - [J_{22}]^{-1} [J_{21}] [J_{11}]^{-1} \left[\sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta,\sigma}^{(1)} \mathfrak{S} \right] \right. \\ & \left. \times [J_{22}]^{-1} \left[\sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta,\sigma}^{(2)} \mathfrak{S} \right] - [J_{22}]^{-1} [J_{21}] [J_{11}]^{-1} \left[\sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta,\sigma}^{(1)} \mathfrak{S} \right] \right) = \Omega^2 W_{ij} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Bu denklem matris formda:

$$(\mathbf{D}_{\xi}^4 \otimes \mathbf{I}_{\eta} + 2\mathbf{D}_{\xi}^2 \otimes \mathbf{D}_{\eta}^2 + \mathbf{I}_{\xi} \otimes \mathbf{D}_{\eta}^4) \mathbf{W} = \Omega^2 \mathbf{W}. \quad (3.66)$$

Bu denklemde $\mathbf{I}_{\xi}$ ve $\mathbf{I}_{\eta}$ değerleri $(N_r + 1)^2$; ($r = \xi, \eta$) boyutunda birim matrisler olup $\otimes$ ifadesi tensörel çarpımı belirtir.

3.2.5. Burkulma hesabı

Burkulma hali için yönetici denklem:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3.67)$$

olarak yazılır. Yukarıda detaylı olarak titreşim için verilen benzer adımlar uygulanınca denklem ikinci mertebeden olarak:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3.68)$$

olur ve dönüşüm yazılınca,

$$[J_{22}]^{-1} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial \xi^2} - [J_{22}]^{-1} [J_{21}] [J_{11}]^{-1} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left([J_{22}]^{-1} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial \eta^2} - [J_{22}]^{-1} [J_{21}] [J_{11}]^{-1} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \eta} \right) \\
& + [J_{22}]^{-1} \frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} - [J_{22}]^{-1} [J_{21}] [J_{11}]^{-1} \frac{\partial S}{\partial \eta} \\
& - N_x \left([J_{22}]^{-1} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - [J_{22}]^{-1} [J_{21}] [J_{11}]^{-1} \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) \\
& - N_y \left([J_{22}]^{-1} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} - [J_{22}]^{-1} [J_{21}] [J_{11}]^{-1} \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) - 2N_{xy} \left([J_{22}]^{-1} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.69}$$

denkleminde ulaşılr. ATK metodu ile ayrık formda:

$$\begin{aligned}
& [J_{22}]^{-1} \left[\sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(2)}(k\Delta\xi) \mathfrak{R}_{kj} + 2 \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(2)}(k\Delta\eta) \mathfrak{R}_{ik} + \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(2)}(k\Delta\eta) S_{ik} \right] \\
& - [J_{22}]^{-1} [J_{21}] [J_{11}]^{-1} \left(\sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(k\Delta\xi) \mathfrak{R}_{kj} + 2 \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(k\Delta\eta) \mathfrak{R}_{ik} + \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(2)}(k\Delta\eta) S_{ik} \right) \\
& - N_x \left([J_{22}]^{-1} \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(2)}(k\Delta\xi) W_{kj} - 2 [J_{22}]^{-1} [J_{21}] [J_{11}]^{-1} \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(k\Delta\xi) W_{kj} \right) \\
& - N_y \left([J_{22}]^{-1} \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(2)}(k\Delta\eta) W_{ik} - 2 [J_{22}]^{-1} [J_{21}] [J_{11}]^{-1} \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(k\Delta\eta) W_{ik} \right) \\
& - 2N_{xy} \left([J_{22}]^{-1} \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(k\Delta\xi) \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(k\Delta\eta) W_{ik} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.70}$$

olur. Böylece Denklem (3.62) ile verilen son operatörün uygulanması ile burkulma denklemi:

$$\begin{aligned}
& \left([J_{22}]^{-1} \left[\sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(2)} \mathfrak{S} \right] - [J_{22}]^{-1} [J_{21}] [J_{11}]^{-1} \left[\sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)} \mathfrak{S} \right] \right. \\
& \times [J_{22}]^{-1} \left[\sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(2)} \mathfrak{S} \right] - [J_{22}]^{-1} [J_{21}] [J_{11}]^{-1} \left[\sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)} \mathfrak{S} \right] \Big) \\
& - N_x (G_\xi) - N_y (G_\eta) - 2N_{xy} (G_{\xi\eta}) = 0
\end{aligned} \tag{3.71}$$

olarak yazılır. Bu denklemde G_ξ, G_η ve $G_{\xi\eta}$ değerleri aşağıda verildiği gibidir:

$$\begin{aligned}
G_{\xi} &= \left([J_{22}]^{-1} \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(2)}(k\Delta\xi) W_{kj} - 2[J_{22}]^{-1}[J_{21}][J_{11}]^{-1} \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(k\Delta\xi) W_{kj} \right) \\
G_{\eta} &= \left([J_{22}]^{-1} \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(2)}(k\Delta\eta) W_{ik} - 2[J_{22}]^{-1}[J_{21}][J_{11}]^{-1} \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(k\Delta\eta) W_{ik} \right) \\
G_{\xi\eta} &= \left([J_{22}]^{-1} \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(k\Delta\xi) \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(k\Delta\eta) W_{ik} \right)
\end{aligned} \tag{3.72}$$

3.2.6. Eğilme hesabı

Aşağıdaki plak eğilme denklemi:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = q \tag{3.73}$$

Benzer prosedürler uygulanınca ayrık formda:

$$\begin{aligned}
&\left([J_{22}]^{-1} \left[\sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(2)} \mathfrak{S} \right] - [J_{22}]^{-1}[J_{21}][J_{11}]^{-1} \left[\sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)} \mathfrak{S} \right] \right. \\
&\quad \left. \times [J_{22}]^{-1} \left[\sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(2)} \mathfrak{S} \right] - [J_{22}]^{-1}[J_{21}][J_{11}]^{-1} \left[\sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)} \mathfrak{S} \right] \right) = q_{ij}
\end{aligned} \tag{3.74}$$

3.2.7. Sınır koşullar

Çalışmada iki tip sınır koşulu dikkate alınmıştır. Bu sınır koşullarının yukarıda verilen temel denklemlere dâhil edilmesiyle problem titreşim ve burkulma probleminde bir öz değer problemine, eğilme hesabı için ise bir lineer denklem takımına indirgenir. Bu koşullar için denklem aşağıda verilmiştir.

i) Sabit mesnet (S):

$$W = 0, \quad -D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial s^2}\right) = 0. \tag{3.75}$$

ii) Ankastre mesnet (C):

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial n} = 0. \tag{3.76}$$

Sınır koşullarının dâhil edilmesiyle ilgili literatürde önemli sayıda kaynak vardır (Wei 2002, Zhao vd. 2002a, Civallek 2007)

3.3. Fonksiyonel Derecelendirilmiş KNT Takviyeli Kompozitler

Fonksiyonel derecelendirilmiş kompozitler metal ve seramik gibi en az iki farklı malzemenin karışımından oluşur. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin mekanik özelliklerini hesaplayabilmek için çeşitli teoriler geliştirilmiştir. Bu teoriler şöyle sıralanabilir “kuvvet kanunu”, “üstel”, “sigmoid”, “Mori-Tanaka” (Shen 2011).

Kuvvet kanunu:

$$P_{(z)} = P_m + (P_c - P_m) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k \quad (3.77)$$

Sigmoid:

$$P_{(z)} = \begin{cases} P_m + (P_c - P_m) \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h-2z}{h} \right)^k \right) & 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \\ P_m + (P_c - P_m) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{h+2z}{h} \right)^k \right) & -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \end{cases} \quad (3.78)$$

Üstel:

$$P_{(z)} = P_m \exp \left(\ln \left(\frac{P_c}{P_m} \right) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k \right) \quad (3.79)$$

Mori-Tanaka:

$$\frac{K_{(z)} - K_m}{K_c - K_m} = \frac{\left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k}{1 + \left(1 - \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k \right) (K_c - K_m) / (K_m + 4\mu_m/3)} \quad (3.80)$$

$$\frac{\mu_{(z)} - \mu_m}{\mu_c - \mu_m} = \frac{\left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k}{1 + \left(1 - \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k \right) (\mu_c - \mu_m) / [\mu_m + \mu_m (9K_m + 8\mu_m) / (6(K_m + 2\mu_m))]} \quad (3.81)$$

Denklem (3.80) ve (3.81)'e göre elastisite modülü ve Poisson oranı şöyle hesaplanır:

$$E(z) = \frac{9K_{(z)}\mu_{(z)}}{3K_{(z)} + \mu_{(z)}} \quad (3.82)$$

$$\nu(z) = \frac{3K_{(z)} - 2\mu_{(z)}}{6K_{(z)} + 2\mu_{(z)}} \quad (3.83)$$

burada P_m ve P_c sırasıyla üst ($z = -h/2$ ve alt ($z = h/2$) kısım bileşenlerinin hacim oranıdır. $K_{(z)}$ ve $\mu_{(z)}$ ise sırasıyla efektif kütle ve kayma modülleridir. Ayrıca, k malzeme özelliği gradyan indeksidir, c ve m seramik ve metal kısmı ifade eder. Çizelge 3.1’de

Farklı KNT dağılımlarına göre kalınlık yönünün bir fonksiyonu olarak KNT'lerin hacim oranları gösterilmiştir.

Çizelge 3.1. Farklı KNT dağılımlarına göre kalınlık yönünün bir fonksiyonu olarak KNT'lerin hacim oranları

KNT Dağılımları	V_{CN}
UD	V_{CN}^*
FG-V	$V_{CN}^* \left(1 + 2 \frac{z}{h}\right)$
FG-O	$2V_{CN}^* \left(1 - 2 \frac{ z }{h}\right)$
FG-X	$4V_{CN}^* \frac{ z }{h}$

Burada V_{CN} hacim oranıdır ve V_{CN}^* şöyle hesaplanır:

$$V_{CN}^* = \frac{m_{CN}}{m_{CN} + (\rho_{CN}/\rho_m) - \left(\frac{\rho_{CN}}{\rho_m}\right)m_{CN}} \quad (3.84)$$

Denklem (3.84)'teki m_{CN} , ρ_{CN} , ve ρ_m sırasıyla KNT'lerin kütle oranı, yoğunluğu ve matrisidir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler seramik ve metal gibi en az iki adet, farklı özelliklere sahip malzemenin homojen olmayan şekilde, bir veya daha fazla yönde kademeli ve sürekli olarak değişecek şekilde birleşmiş halidir. Ayrıca, bazı malzeme özellikleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$E_{11} = \eta_1 V_{CNT} E_{11}^{CNT} + V_m E^m, \quad (3.85)$$

$$\nu_{12} = V_{CNT}^* \nu_{12}^{CNT} + (1 - V_{CNT}^*) \nu^m \quad (3.86)$$

$$E_{22} = \frac{\eta_2}{\left(\frac{V_{CNT}}{E_{22}^{CNT}} + \frac{V_m}{E^m}\right)} \quad (3.87)$$

$$G_{12} = \frac{\eta_3}{\left(\frac{V_{CNT}}{G_{12}^{CNT}} + \frac{V_m}{G^m}\right)} \quad (3.88)$$

3.4. Dörtgen Plakların Burkulma Hesabı

Birinci dereceden kayma deformasyon teorisine dayanarak, lamine plakların burkulması için geçerli denklemler şu şekilde verilmiştir (Reddy 1997):

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, z, t) + z\varphi_x(x, y, z, t), \quad v(x, y, z, t) = v_0(x, y, z, t) + z\varphi_y(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (3.89)$$

u_0 , v_0 ve w_0 orta düzlemin deplasmanlarını ifade eder. Ayrıca, z enine koordinatı temsil eder. Plakların gerinim bileşenleri şu şekilde verilmiştir:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_{yx}}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right), \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \end{aligned} \quad (3.90)$$

burada ε_{xx} ve ε_{yy} eksenel gerinimler, γ_{xy} , γ_{xz} ve γ_{yz} ise açılmal gerinimlerdir. Potansiyel enerjinin ikinci varyasyonu şöyle ifade edilir:

$$\begin{aligned} \delta^2 \Pi &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_A \left[\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \frac{\hat{\sigma}_{xx}}{2} \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\hat{\sigma}_{yy}}{2} \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + \hat{\tau}_{xy} \delta \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right] dA dz \end{aligned} \quad (3.91)$$

burada σ_{xx} ve σ_{yy} eksenel gerilmeler, τ_{xy} , τ_{xz} ve τ_{yz} ise kayma gerilmeleridir. Nihai denklem şöyle ifade edilir:

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} = 0 \quad (3.92)$$

$$A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} = 0 \quad (3.93)$$

$$A_{44} \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + A_{55} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) - k_w w_0 + k_p \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned} B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} \\ - A_{55} \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} \\ - A_{44} \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.96)$$

burada,

$$\begin{aligned} (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (i, j = 1, 2, 6), \quad A_{ij} = K_S \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} dz \quad (i, j = 4, 5), \\ \hat{N}_{ii} &= \int_{-h/2}^{h/2} \hat{\sigma}_{ii} dz \quad (i = x, y), \quad \hat{N}_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \hat{\tau}_{ij} dz \quad (i = x, y) \end{aligned} \quad (3.97)$$

Plakların rastgele kenarları için düzlem içi ve düzlem dışı sınır koşulları:

$$u_n = n_x u_0 + n_y v_0 \text{ veya } N_{nn} = n_x^2 N_{xx} + 2n_x n_y N_{xy} + n_y^2 N_{yy} = 0 \quad (3.98)$$

$$u_s = -n_y u_0 + n_x v_0 \text{ veya } N_{ns} = (n_x^2 - n_y^2) N_{xx} - n_x n_y (N_{yy} - N_{xx}) = 0 \quad (3.99)$$

$$w \text{ veya } V_n = Q_x n_x + Q_y n_y = 0 \quad (3.100)$$

$$\phi_n = n_x \phi_x + n_y \phi_y \text{ veya } M_{nn} = n_x^2 M_{xx} + 2n_x n_y M_{xy} + n_y^2 M_{yy} = 0 \quad (3.101)$$

$$\phi_s = -n_y \phi_x + n_x \phi_y \text{ veya } M_{ns} = (n_x^2 - n_y^2) M_{xx} + n_x n_y (M_{yy} - M_{xx}) = 0 \quad (3.102)$$

burada n_x ve n_y , x ve y - eksenlerindeki birim normal vektörüdür. Ortaya çıkan kuvvet ve momentler şöyle hesaplanır:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = A_1 \varepsilon_0 + B \kappa, \quad \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = B \varepsilon_0 + D \kappa, \quad \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = A_2 \gamma_0 \quad (3.103)$$

burada,

$$\varepsilon_0 = \begin{Bmatrix} \partial u_0 / \partial x \\ \partial v_0 / \partial x \\ \partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x \end{Bmatrix}, \quad \kappa = \begin{Bmatrix} \partial \varphi_x / \partial x \\ \partial \varphi_y / \partial x \\ \partial \varphi_x / \partial y + \partial \varphi_y / \partial x \end{Bmatrix}, \quad \gamma_0 = \begin{Bmatrix} \varphi_x + \partial w_0 / \partial x \\ \varphi_y + \partial w_0 / \partial y \end{Bmatrix} \quad (3.104)$$

3.5. Dörtgen Plakların Titreşim Hesabı

Burkulma hesabında kullanılan denklemler kullanılarak ve birinci dereceden kayma deformasyon teorisine dayanarak, lamine plakların titreşim denklemleri şöyle ifade edilir:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, z, t) + z \varphi_x(x, y, z, t), \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, z, t) + z \varphi_y(x, y, z, t), \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (3.105)$$

u_0 , v_0 ve w_0 ise orta düzlemin deplasmanlarını ifade eder. Ayrıca, z enine koordinatı temsil eder. Plakların gerinim bileşenleri şu şekilde verilmiştir:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \varepsilon_0 + z\kappa, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \gamma_0 \quad (3.106)$$

burada ε_{xx} ve ε_{yy} eksenel gerinimler, γ_{xy} , γ_{xz} ve γ_{yz} ise açısıl gerinimlerdir. Ayrıca, κ eğriliktir.

$$\varepsilon_0 = \begin{Bmatrix} \partial u_0 / \partial x \\ \partial v_0 / \partial x \\ \partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x \end{Bmatrix}, \quad \kappa = \begin{Bmatrix} \partial \varphi_x / \partial x \\ \partial \varphi_y / \partial x \\ \partial \varphi_x / \partial y + \partial \varphi_y / \partial x \end{Bmatrix}, \quad \gamma_0 = \begin{Bmatrix} \varphi_x + \partial w_0 / \partial x \\ \varphi_y + \partial w_0 / \partial y \end{Bmatrix} \quad (3.107)$$

Hamilton prensibini plağın toplam enerji denklemlerine yerleştirerek,

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (3.108)$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad (3.109)$$

$$\delta w_0 : \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - k_w w_0 + k_p \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (3.110)$$

$$\delta \varphi_x : \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (3.111)$$

$$\delta \varphi_y : \frac{\partial M_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_y = I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad (3.112)$$

burada k_w ve k_p sırasıyla Winkler ve Pasternak zemin sabitleridir. N_{xx} , N_{yy} ve N_{xy} ise düzlem içi kuvvetlerdir. M_{xx} , M_{yy} ve M_{xy} ise momentleri ifade eder. Q_x ve Q_y enine kuvvetlerdir. Ayrıca, I_0 , I_1 ve I_2 kütle atalet momentleridir.

$$\begin{aligned} (N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}) dz, \quad (M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}) z dz, \\ (Q_x, Q_y) &= K_s \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz, \quad (I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (1, z, z^2) dz \end{aligned} \quad (3.113)$$

Burada K_s kayma düzeltme faktörüdür. Nihai denklemler şöyle elde edilir:

$$\begin{aligned}
& A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} \\
& = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.114}$$

$$\begin{aligned}
& A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} \\
& = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.115}$$

$$A_{44} \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + A_{55} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) - k_w w_0 + k_p \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \tag{3.116}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} \\
& - A_{55} \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.117}$$

$$\begin{aligned}
& B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} \\
& - A_{44} \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.118}$$

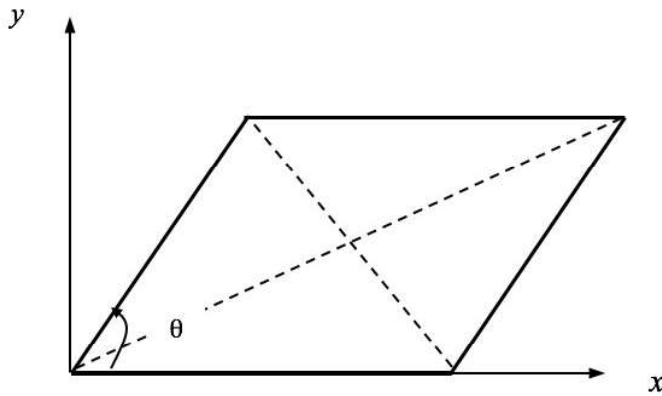
burada,

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (i, j = 1, 2, 6), \quad (A_{ij}) = K_s \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} dz \quad (i, j = 4, 5) \tag{3.119}$$

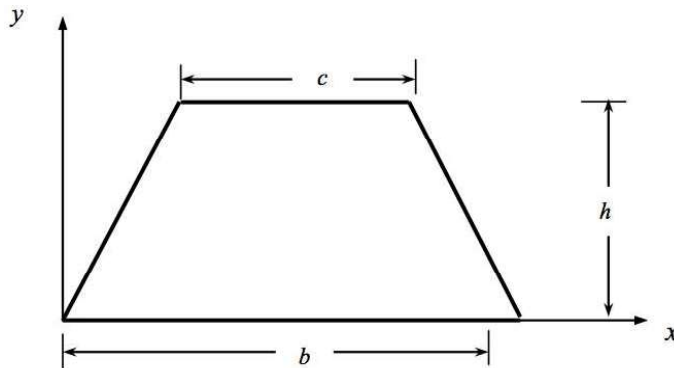
4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Yukarıda detaylı olarak sunulan formülasyonlar kullanılarak sayısal sonuçlar karşılaştırmalı olarak sunulacaktır. Bu amaçla Şekil 4.1 ve Şekil 4.2’de verilen plaklar dönüşüm formülleri yardımıyla çözülmüştür. Tüm bulgular Çizelge 4.1-Çizelge 4.9’da sunulmuştur. Şekil 4.3’te simetrik olmayan trapez plak çizimi gösterilmiştir. Bu plaklar daha öncede (Gürses 2008) çözülmüş ve sonuçlar farklı metotlar ile elde edilmiştir. Bu tezde karşılaştırma amacıyla aynı örnekler çözülecektir.

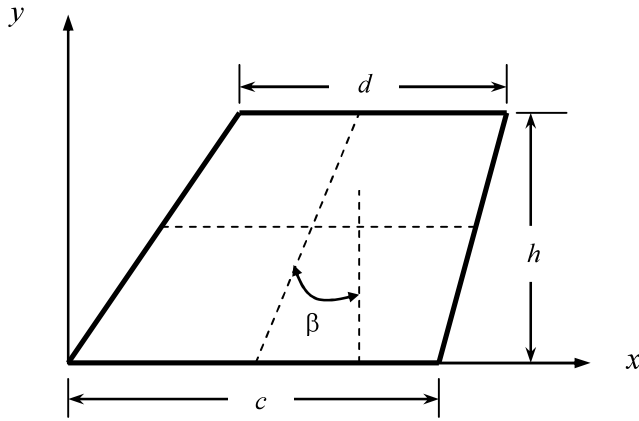
SSSS çarpık plak için boyutsuz temel frekans değeri, Çizelge 4.1’de karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Düğüm nokta sayısı 15’e ulaşınca her iki yöntemde yeter doğrulukta sonuçlar vermiştir. Ancak bu örnekte DQ yöntemi için eşit ağırlıklı düğüm nokta dağılımı seçilmiştir. Eşit olmayan dağılıma sahip düğüm nokta dağılımı için DQ yönteminin sonuçları kısmen daha iyi olacaktır. Bu örnekte ATK yöntemi için r katsayısı 2.63 alınmıştır. SSSS mesnetli çarpık plak için farklı açılar için temel frekans değeri farklı açılar için hesaplanmış ve Çizelge 4.2’de özetlenmiştir. Liew ve Han (1995) tarafından verilen analitik çözüm esas alınınca her iki metodun yaklaşımının iyi olduğu söylenebilir.



Şekil 4.1. Çarpık plak



Şekil 4.2. Trapez plak



Şekil 4.3. Simetrik olmayan trapez plak

SSSS rombik plak için ilk dört frekans değeri Çizelge 4.3'te verilmiştir. Bu plak için çarpık plak da kullanılan kenar değerleri oranı $b/a=1$ dir. Mod sayısına bağlı frekans değerinin artması beklenen sonuçtur.

Çizelge 4.1. SSSS çarpık plak için boyutsuz temel frekans değeri $\Omega = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D}$; $\theta=30^\circ$

N	Metot				
	Liew ve Lam (1990)	Sonlu elemanlar	HDQ Bu çalışma	DSC Lagrange kernel	DSC Shannon kernel
5	2.540	2.531	2.606	2.6139	2.610
7			2.553	2.5573	2.553
9			2.544	2.5414	2.545
11			2.546	2.5401	2.543
15			2.542	2.5439	2.542
17			2.540	2.5418	2.542

Çizelge 4.2. SSSS mesnetli çarpık plak için farklı açılar için temel frekans değeri $\Omega = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D}$

θ				
	Liew ve Lam (1990)	Sonlu elemanlar	DQ	ATK
0	2.00	2.00	2.00	2.00
15	2.110	2.120	2.113	2.114
30	2.540	2.520	2.542	2.542
45	3.540	3.450	3.452	3.452

Çizelge 4.3 SSSS rombik plak için frekans değeri $\Omega = (\omega a^2) \sqrt{\rho h / D}$

ATK				
Mod sayısı				
b/a	1	2	3	4
1.0	9.870	24.731	24.731	39.554
HDQ				
Mod sayısı				
b/a	1	2	3	4
1.0	9.872	24.734	24.732	39.5543

Simetrik olmayan trapez plak için ilk üç frekans değeri karşılaştırmalı olarak Çizelge 4.4'te özetlenmiştir. Sonuçlar 3 farklı mesnet koşulu için verilmiştir. 16 düğüm noktası kullanılarak hesaplanan değerler, Bert ve Malik (1996) tarafından DQ yöntemiyle verilen değerler ile uyum içindedir.

Çizelge 4.4. Simetrik olmayan trapez plak için frekans değerleri $\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$;
h/c=3.0; c/d=2.5; $\beta=0$

Sınır Koşullar	DQ ($N_\xi=N_\eta=17$) Bert ve Malik (1996)			Bu çalışma HDQ $N_\xi=N_\eta=15$		
	Mod sayısı			Mod sayısı		
	1	2	3	1	2	3
SSSSS	5.388	9.421	14.676	5.391	9.429	14.679
CCCC	10.427	15.563	21.476	10.427	15.563	21.475
SCSC	9.443	14.386	19.897	9.452	14.388	19.902

Rombik ve trapez plak için burkulma değeri karşılaştırmalı olarak Çizelge 4.5 ve Çizelge 4.6'da özetlenmiştir. Sonuçlar SSSS, SCSC ve CCCC olmak üzere 3 farklı mesnet koşulu için verilmiştir.

16 düğüm noktası kullanılarak hesaplanan değerler, Wang vd. (1994) tarafından DQ yöntemiyle verilen değerler ile uyum içindedir. En büyük burkulma değeri dört kenarın ankastre tutulduğu plak için hesaplanmıştır. Hem açı değeri ve hem sınır koşulları burkulma yükü üzerinde etkilidir.

Çizelge 4.5. Rombik plak için burkulma değeri ($K=N_x a^2/\pi^2 D$)

β	Wang vd. (1994a)			ATK Lagrange kernel $r=3.32$		
	SSSS	SCSC	CCCC	SSSS	SCSC	CCCC
45	9.87	16.4	20.69	9.852	15.949	20.155
60	5.98	10.6	13.75	5.874	10.565	13.682
75	4.39	8.3	10.89	4.396	8.308	10.833
90	4.00	7.7	10.08	4.000	7.713	10.078

Çizelge 4.6. Trapez plak için burkulma değerleri ($K=N_x a^2/\pi^2 D$) ($h/c=1$; $\beta=0$)

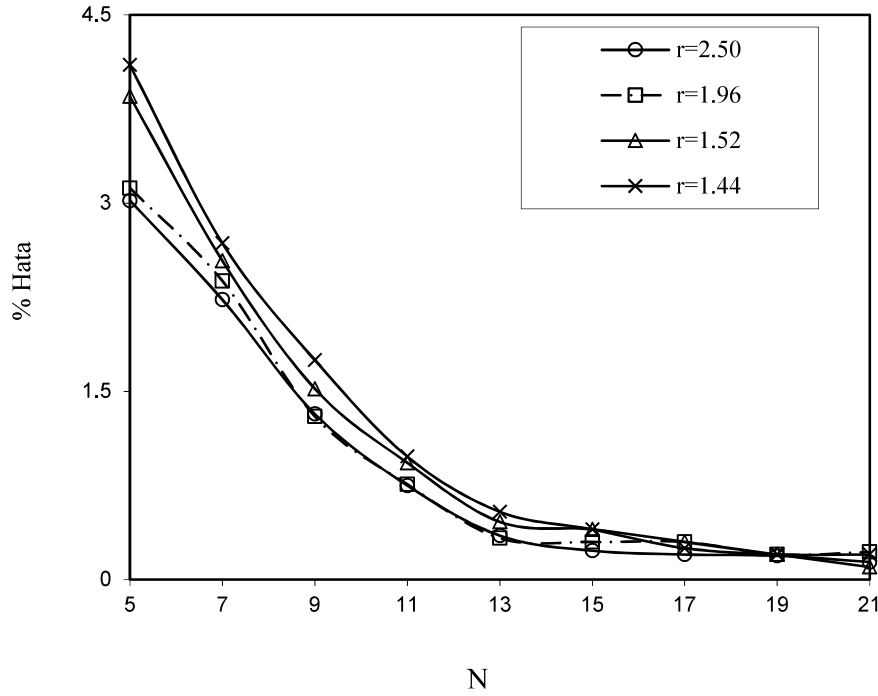
d/c	HDQ yöntemi		
	SSSS	SCSC	CCCC
0.2	3.8360	5.1640	10.723
0.4	3.1211	3.9348	8.7530
0.6	2.5609	2.9523	7.1012

Statik hesaba örnek olması bakımından SCSC sınır koşullarına sahip rombik plak için eğilme değerleri hesaplanmış ve Çizelge 4.7’de özetlenmiştir. Tabloda W boyutsuz orta nokta deplasmanı M_x eğilme momentidir. Sonuçlar literatür değerleri ile uyumludur.

Çizelge 4.7. SCSC rombik plak için eğilme değerleri

Açı	Wang vd. (1994b)		Bu çalışma HDQ	
	W	M_x	W	M_x
30	0.0326	0.0097	0.0330	0.0095
45	0.0814	0.0157	0.0818	0.0813
60	0.135	0.0204	0.1350	0.1350
75	0.176	0.0234	0.1764	0.1764
90	0.192	0.0244	0.1920	0.1925

Düğüm nokta sayısının etkisini incelemek için SSSS rombik plağın burkulma değeri için düğüm nokta sayısına bağlı olarak ATK, DQ ve HDQ yöntemleriyle hesaplanmış ve Şekil 4.4'te verilmiştir. Kullanılan üç yöntemde neredeyse benzer yaklaşım sergilemiş ve yeter doğrulukta sonuçlar 11 düğümden sonra elde edilebilmiştir.

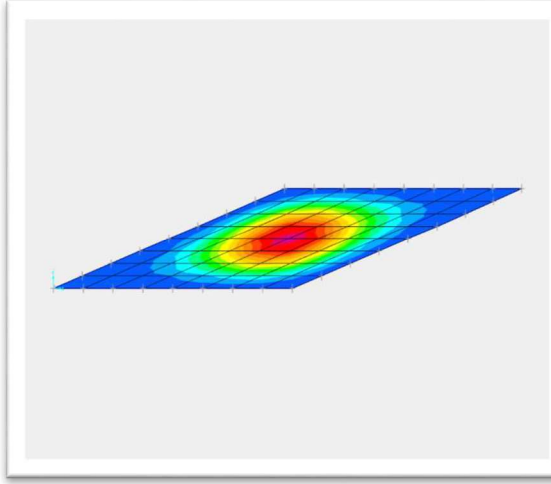


Şekil 4.4. SSSS yamuk plağın burkulma değeri için düğüm nokta sayısına bağlı yakınsaması

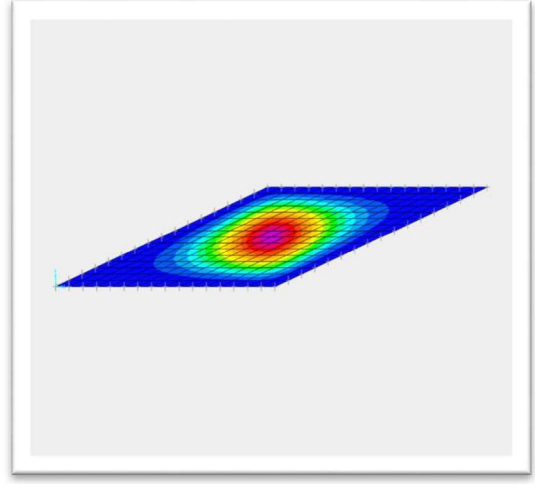
Şekil 4.4'te çarpık plak için elde edilen merkezi deplasman değerleri verilmiştir. Elde edilen değerler farklı düğüm nokta sayıları için verilmiştir. Sonuçlar uyum içindedir. Şekil 4.5'te ise ANSYS paket program ile hesaplanan değer görülmektedir.

Şekil 4.4'te görüleceği üzere, elde edilen sonuç üzerinde sadece düğüm nokta sayısı değil aynı zamanda ayırık tekil konvolüsyonda yaklaşımı etkileyen r parametresi de etkilidir.

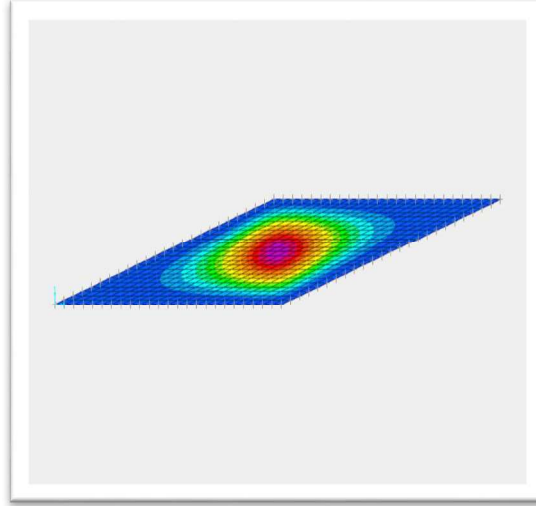
Yine Şekil 4.4'te görüleceği üzere sonuçlar düğüm nokta sayısının artmasına bağlı olarak iyileşmektedir. Benzer sonuçlar DQ metodu kullanılarak da hesaplanmıştır (Gürses, 2008). Burada metodun yakınsamışını görmek için tekrar analiz farklı bir yöntemle yapılmıştır.

SAP 2000: $W_c=1.352 \times 10^{-4}$ ATK : $W_c=1.376 \times 10^{-4}$ 

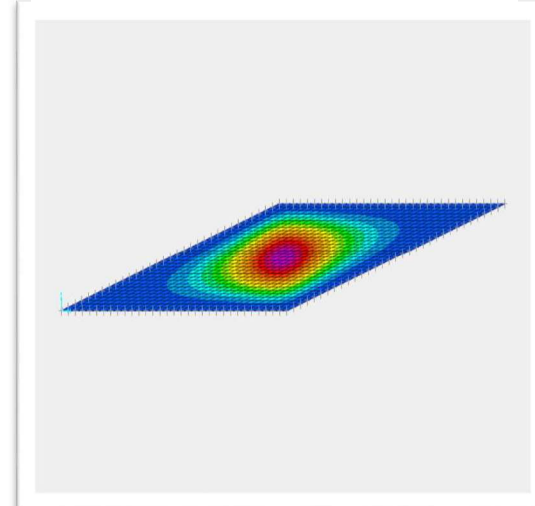
11x11

SAP 2000 : $W_c= 1.491 \times 10^{-4}$ ATK: $W_c=1.503 \times 10^{-4}$ 

18x18

SAP 2000: $W_c=1.526 \times 10^{-4}$ ATK : $W_c=1.528 \times 10^{-4}$ 

26x26

SAP 2000 : $W_c=1.526 \times 10^{-4}$ ATK : $W_c=1.528 \times 10^{-4}$ 

36x36

şekil 4.5. CCCC arpık plak için orta nokta deplasman değerinin SAP2000 ve ATK ile hesaplanan sonuçlarının karşılaştırılması ($h=8$ cm; $a=b=800$ cm; $\nu=0.3$; $E=8736$ kN/cm²; $\theta=15^\circ$)

Çizelge 4.8. Tek eksenli basınç etkisi altında SSSS ince izotropik eğimli plakların burkulma yükü parametrelerinin yakınsaması ($\lambda = N_{cr} b^2 / D \pi^2$) (a/b=1; h/b=0.001)

Eğim Açısı ($^\circ$)	Malekzadeh ve Zarei (2014)	ATK-Shannon Kerneli			
		9×11	11×11	11×13	13×13
90	3.2637	3.2712	3.2708	3.2705	3.2705
75	3.5302	3.5323	3.5319	3.5317	3.5317
60	4.4341	4.4490	4.4486	4.4483	4.4483
45	6.0730	6.1113	6.1105	6.1102	6.1102
Eğim Açısı ($^\circ$)	Malekzadeh ve Zarei (2014)	ATK-Lagrange-delta Kerneli			
		9×11	11×11	11×13	13×13
90	3.2637	3.2725	3.2721	3.2719	3.2719
75	3.5302	3.5338	3.5329	3.5328	3.5328
60	4.4341	4.4523	4.4510	4.4508	4.4506
45	6.0730	6.1142	6.1133	6.1125	6.1125

Çizelge 4.9. Tek eksenli basınç etkisi altında SSSS lamineli (45/-45/45/-45/45) ve FD-KNTT lamineli dörtgen plak (b/a=0.8; c/a=0.7; $\gamma=75$; $\beta=70$; Vcn=0.17; UD-CNT) karşılaştırmalı burkulma analizi sonuçları ($\lambda = N_x b^2 / E \pi^2 h^2$)

a/h	Malekzadeh ve Shojae (2013)	ATK- Shannon Kerneli			
		11×11	11×13	13×13	15×13
5	11.3991	11.4271	11.4265	11.4263	11.4263
10	31.7184	32.0489	32.0486	32.0485	32.0485
50	78.5109	79.3703	79.3699	79.3697	79.3697
a/h	Malekzadeh ve Shojae (2013)	ATK- Lagrange-delta Kerneli			
		11×11	11×13	13×13	15×13
5	11.3991	11.4282	11.4278	11.4275	11.4275
10	31.7184	32.0498	32.0495	32.0492	32.0492
50	78.5109	79.3747	79.3743	79.3738	79.3738

Çizelge 4.10. Karşılaştırmalı CCCC lamineli (45/-45..) ve FD-KNTT lamineli eğik plak ($h/a=0.1$; $b/a=1$; $\theta=45$; $V_{CNT}=0.17$; UD-CNT) için frekans değerleri ($\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2}$)

Mod	Malekzadeh ve Zarei (2014)	ATK- Shannon Kerneli			
		11×11	11×13	13×13	15×13
1	36.5173	36.5211	36.5203	36.5201	36.5201
2	51.6823	51.7004	51.6991	51.6989	51.6989
3	64.9648	65.0574	65.0567	65.0564	65.0564
a/h	Malekzadeh ve Zarei (2014)	ATK- Lagrange-delta Kerneli (r=4.96)			
		7×9	9×9	9×11	11×11
1	36.5173	34.8359	34.8017	34.8017	34.8017
2	51.6823	50.1930	50.1825	50.1825	50.1822
3	64.9648	61.0253	61.0147	61.0147	61.0143

Çizelge 4.11. Lamineli (45/-45/45/-45) ve eğik plakların ($h/a=0.1$; $\alpha=75$; $E_1/E_2=40$ $E_2=E_3$; $G_{12}=0.6E_2$; $G_{13}=G_{23}=0.5E_2$; $\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0.25$) frekansları ($\Omega = \omega a^2 / \pi^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2}$)

Sınır Koşulları	Mod	ATK Sonuçları				
		9×9	11×11	13×11	13×13	15×13
SSSS	1	1.9404	1.9404	1.9402	1.9402	1.9402
	2	3.4226	3.4225	3.4225	3.4225	3.4225
	3	3.8810	3.8808	3.8805	3.8805	3.8805
	4	4.4515	4.4513	4.4510	4.4510	4.4510
	5	4.9921	4.9919	4.9917	4.9917	4.9917
CCCC	1	2.4130	2.4128	2.4128	2.4128	2.4128
	2	3.8623	3.8621	3.8619	3.8619	3.8619
	3	4.2213	4.2212	4.2210	4.2210	4.2210
	4	5.2814	5.2814	5.2811	5.2811	5.2811
	5	5.9549	5.9548	5.9546	5.9546	5.9546

Çizelge 4.12. 45/-45/45/-45/45 ve eğik plakların ($h/a=0.2$; $b/a=1$; $E_1/E_2=40$; $E_2=E_3$ $G_{12}=0.6 E_2$; $G_{13}=G_{23}=0.5 E_2$; $\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0.25$) ($\Omega = \omega a^2 / \pi^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2}$)

θ	Mod	ATK Sonuçları (SSSS)		
		11×11	13×13	13×15
60	1	2.0019	2.0014	2.0014
	2	3.6410	3.6408	3.6408
	3	4.2941	4.2937	4.2937
	4	5.0838	5.0835	5.0835
	5	6.2686	6.2681	6.2681
45	1	2.4898	2.4893	2.4893
	2	4.2471	4.2467	4.2467
	3	5.6028	5.6024	5.6024
	4	5.6036	5.6032	5.6032
	5	7.0530	7.0525	7.0525
ATK Sonuçları (CCCC)				
60	1	2.6754	2.6751	2.6751
	2	4.1432	4.1428	4.1428
	3	4.7465	4.7462	4.7462
	4	5.5041	5.5037	5.5037
	5	6.5686	6.5683	6.5683
45	1	3.3682	3.3680	3.3680
	2	4.8265	4.8264	4.8264
	3	6.0851	6.0849	6.0850
	4	6.1364	6.1362	6.1362
	5	7.4398	7.4395	7.4396

Çizelge 4.13. 45/-45/45/-45/45 eğik plakların ($h/a=0.2$; $b/a=1$; $E_1/E_2=40$; $E_2=E_3$; $G_{12}=0.6 E_2$; $G_{13}=G_{23}=0.5 E_2$; $\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0.25$) frekans değerleri ($\Omega = \omega a^2 / \pi^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2}$)

ATK Sonuçları (SSSS)				
θ	Mod	11×11	13×13	13×15
60	1	2.1270	2.1263	2.1263
	2	3.6281	3.6279	3.6279
	3	4.3262	4.3258	4.3258
	4	4.5937	4.5934	4.5934
	5	5.0572	5.0569	5.0569
45	1	2.6804	2.6802	2.6802
	2	3.2898	3.2896	3.2896
	3	4.2936	4.2934	4.2934
	4	5.6440	5.6438	5.6438
	5	5.9210	5.9207	5.9207
ATK Sonuçları (CCCC)				
60	1	2.7583	2.7582	2.7582
	2	4.1371	4.1368	4.1368
	3	4.9256	4.9253	4.9253
	4	5.4541	5.4537	5.4537
	5	6.6384	6.6382	6.6381
45	1	3.4625	3.4624	3.4624
	2	4.8327	4.8325	4.8325
	3	6.1005	6.1002	6.1002
	4	6.2586	6.2583	6.2583
	5	7.3923	7.3922	7.3920

Çizelge 4.14. Tek eksenli basınç etkisi altında açılı lamineli eğik plakların ($h/a=0.1$; $b/a=1$; $E_1/E_2=10$; $E_2=E_3$; $G_{12}=0.5 E_2$; $G_{13}=G_{23}=0.5 E_2$; $\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0.33$) kritik burkulma yükleri ($\lambda = N_x b^2 / E \pi^2 h^2$)

ATK Sonuçları (45/-45/45/-45)						
Sınır koşulu	Eğim açısı	9×11	11×11	13×11	13×13	15×13
CCCC	75	3.3623	3.3610	3.3594	3.3594	3.3594
	60	3.5641	3.5621	3.5613	3.5612	3.5612
	45	4.9632	4.9618	4.9610	4.9610	4.9610
SSSS	75	2.0630	2.0628	2.0617	2.0617	2.0617
	60	3.3382	3.3380	3.3369	3.3369	3.3369
	45	3.8837	3.8835	3.8826	3.8826	3.8826
CCCC	75	2.3084	2.3077	2.3076	2.3074	2.3074
	60	2.5852	2.5849	2.5811	2.5811	2.5811
	45	3.0813	3.0810	3.0793	3.0793	3.0793
SSSS	75	1.9185	1.9181	1.9175	1.9173	1.9173
	60	2.1904	2.1897	2.1892	2.1892	2.1892
	45	2.7330	2.7328	2.7319	2.7319	2.7319

Çizelge 4.15. Çok eksenli basınç etkisi altında açılı lamineli eğik plakların ($h/a=0.1$; $b/a=1$; $E_1/E_2=10$; $E_2=E_3$; $G_{12}=0.5 E_2$; $G_{13}=G_{23}=0.5 E_2$; $\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0.33$) kritik burkulma yükleri ($\lambda = N_x b^2 / E \pi^2 h^2$)

ATK Sonuçları (45/-45/45/-45)						
Sınır koşulu	Eğim açısı	9×11	11×11	13×11	13×13	15×13
CCCC	75	2.3382	2.3380	2.3371	2.3371	2.3371
	60	2.5715	2.5713	2.5714	2.5703	2.5703
	45	2.9298	2.9296	2.9283	2.9283	2.9283
SSSS	75	1.7210	1.7208	1.7194	1.7194	1.7194
	60	1.7221	1.7217	1.7211	1.7209	1.7209
	45	1.9449	1.9446	1.9434	1.9435	1.9435

Devamı arkada

Çizelge 4.15.'in devamı

CCCC	75	1.4283	1.4279	1.4276	1.4276	1.4276
	60	1.6396	1.6390	1.6388	1.6384	1.6384
	45	1.9934	1.9927	1.9920	1.9918	1.9918
SSSS	75	1.0750	1.0748	1.0738	1.0736	1.0736
	60	1.0130	1.0126	1.0112	1.0112	1.0112
	45	1.1342	1.1339	1.1326	1.1327	1.1327

Çizelge 4.16. Tek eksenli basınç etkisi altında CCCC lamineli (45/-45/45/-45/45) ve FD-KNTT lamineli dörtgen plak ($b/a=0.8$; $c/a=0.7$; $\gamma=75$; $\beta=70$; $h/a=0.02$) kritik burkulma yükleri ($\lambda = N_{xy} a^2 / Eh^3$)

KNT Dağılımı	V_{CNT}	ATK Sonuçları				
		9×11	11×11	13×11	13×13	15×13
FG-O	0.11	128.1553	128.1549	128.1546	128.1546	128.1546
	0.14	156.2035	156.2033	156.2031	156.2031	156.2031
	0.17	196.8386	196.8382	196.8379	196.8379	196.8379
FG-V	0.11	142.6405	142.6404	142.6402	142.6402	142.6402
	0.14	171.8040	171.80357	171.8035	171.8035	171.8035
	0.17	218.4186	218.4184	218.4184	218.4184	218.4184
UD	0.11	182.9637	182.9635	182.9633	182.9633	182.9633
	0.14	220.3070	220.3069	220.3067	220.3067	220.3067
	0.17	282.1981	282.1978	282.1978	282.1978	282.1978
FG-X	0.11	210.3853	210.3852	210.3851	210.3851	210.3851
	0.14	251.7296	251.7294	251.7294	251.7294	251.7294
	0.17	327.0216	327.0214	327.0213	327.0213	327.0213

Çizelge 4.17. Çok eksenli basınç etkisi altında CCCC lamineli (45/-45/45/-45/45) ve FD-KNTT lamineli dörtgen plak ($b/a=0.8$; $c/a=0.7$; $\gamma=75$; $\beta=70$; $h/a=0.02$) kritik burkulma yükleri ($\lambda = N_{xy} a^2 / Eh^3$)

V_{CNT}	KNT Dağılımı	HDQ Sonuçları				
		7×7	9×11	11×11	11×13	13×13
0.11	UD	99.4009	99.3886	99.3825	99.3825	99.3825
	FG-V	75.2032	75.2016	75.1984	75.1984	75.1984
	FG-O	67.7483	67.7407	67.77403	67.77403	67.77403
	FG-X	115.4205	115.4110	115.4098	115.4098	115.4098
0.14	UD	120.9234	120.9226	120.9210	120.9210	120.9210
	FG-V	91.8069	91.8057	91.8057	91.8057	91.8057
	FG-O	80.7533	80.7525	80.7518	80.7518	80.7518

Çizelge 4.18. SSSS lamineli (45/-45/45/-45/45) ve FD-KNTT lamineli dörtgen plak ($b/a=0.8$; $c/a=0.7$; $\gamma=75$; $\beta=70$; $h/a=0.05$) kritik burkulma yükleri ($\lambda = N_{xy} a^2 / Eh^3$)

V_{CNT}	KNT Dağılımı	ATK sonuçları (13×13) Tek eksenli yük etkisi altında	ATK sonuçları (13×13) Çok eksenli yük etkisi altında
0.11	FG-O	71.3570	33.8510
	FG-V	93.5087	44..8875
	UD	110.9681	50.3954
	FG-X	132.1258	61.9680

Çizelge 4.17 ve Çizelge 4.18’de hesaplanan sonuçların farklı parametreler ve farklı metotlar ile çözümü Civalek ve Avcı (2020) çalışmasında mevcuttur. Çizelge 4.19 ile Çizelge 4.22’de burkulma yükleri farklı KNT ve KNT oranı için verilmiştir. En büyük burkulma yükü FGX dağılımında hesaplanmıştır.

Çizelge 4.19. Çok eksenli basınç etkisi altında SSSS izotropik eğik plakların ($a/b=1$; $h/b=0.001$) burkulma yükünün yakınsaması ($\lambda = N_{cr} b^2 / D\pi^2$)

Eğim açısı ($^\circ$)	Malekzadeh et al. [158]	ATK- Shannon Kerneli			
		9×11	11×11	11×13	13×13
90	3.2637	3.2712	3.2708	3.2705	3.2705
75	3.5302	3.5323	3.5319	3.5317	3.5317
60	4.4241	4.4490	4.4486	4.4483	4.4483
45	6.0730	6.1113	6.1105	6.1102	6.1102
Eğim açısı ($^\circ$)	Malekzadeh et al. [158]	ATK-Lagrange-delta Kerneli			
		9×11	11×11	11×13	13×13
90	3.2637	3.2725	3.2721	3.2719	3.2719
75	3.5302	3.5338	3.5329	3.5328	3.5328
60	4.4241	4.4523	4.4510	4.4508	4.4506
45	6.0730	6.1142	6.1133	6.1125	6.1125

Çizelge 4.20. Tek eksenli basınç etkisi altında CCCC (45/-45/45/-45/45) KNT dörtgen plakların ($b/a=0.8$; $c/a=0.7$; $\gamma=75$; $\beta=70$; $h/a=0.02$) kritik burkulma yükleri

KNT Dağılımı	V_{cn}	ATK Sonuçları				
		9×11	11×11	13×11	13×13	15×13
FG-O	0.11	128.1553	128.1549	128.1546	128.1546	128.1546
	0.14	156.2035	156.2033	156.2031	156.2031	156.2031
	0.17	196.8386	196.8382	196.8379	196.8379	196.8379
FG-V	0.11	142.6405	142.6404	142.6402	142.6402	142.6402
	0.14	171.8040	171.80357	171.8035	171.8035	171.8035
	0.17	218.4186	218.4184	218.4184	218.4184	218.4184
UD	0.11	182.9637	182.9635	182.9633	182.9633	182.9633
	0.14	220.3070	220.3069	220.3067	220.3067	220.3067
	0.17	282.1981	282.1978	282.1978	282.1978	282.1978
FG-X	0.11	210.3853	210.3852	210.3851	210.3851	210.3851
	0.14	251.7296	251.7294	251.7294	251.7294	251.7294
	0.17	327.0216	327.0214	327.0213	327.0213	327.0213

Çizelge 4.21. Çok eksenli basınç etkisi altında CCCC (45/-45/...) KNT dörtgen plakların ($b/a=0.8$; $c/a=0.7$; $\gamma=75$; $\beta=70$; $h/a=0.02$) kritik burkulma yükleri

V_{cn}	KNT Dağılımı	GDQ Sonuçları				
		9×7	9×9	9×11	11×11	11×9
0.11	UD	102.5632	102.1035	101.9635	101.9635	101.9632
	FG-V	79.2058	78.1258	77.9635	77.9638	77.9638
	FG-O	69.8004	69.0153	68.8052	68.8052	68.8052
	FG-X	118.2561	117.8632	117.8548	117.8548	117.8548
0.14	UD	119.1337	120.3579	121.3337	121.3335	121.3335
	FG-V	92.0059	93.5530	93.5486	93.5486	93.5486
	FG-O	81.3523	81.7638	81.8305	81.8305	81.8305
	FG-X	140.2356	141.3214	142.8394	142.8394	142.8394
0.17	UD	152.0547	153.0251	153.5801	153.5802	153.5801
	FG-V	114.3005	115.3384	114.1034	114.1033	114.2033
	FG-X	180.0029	181.3607	180.2039	180.2041	180.2041

Bu sonuçlar ATK konvolüsyon ile de hesaplanmıştır ve sonuçlar yakındır (Civalek ve Avcı 2020).

Çizelge 4.22. Çift eksenli basınç etkisi altında SSSS FD-KNTT dörtgen plak ($b/a=1$; $h/a=0.01$) kritik burkulma yükleri ($\lambda = N_{xy} a^2 / Eh^3$)

KNT Dağılımı	V_{CNT}	ATK Sonuçları				
		7×9	11×11	13×11	13×13	15×13
FG-O	0.11	19.8075	20.9612	20.8075	20.8075	20.8075
	0.14	28.016	28.0058	27.9004	27.9004	27.9004
	0.17	33.5281	32.4029	32.3916	32.3916	32.3916

Çizelge 4.23. Tek eksenli basınç etkisi altında SSSS ve KNT(UD) çarpık plakların ($b/a=1$; $h/a=0.02$) kritik burkulma yükleri

θ	Yüklemeye Tipi	ATK Sonuçları-Lagrange kernel ($r=2.68$)				
		7×7	7×9	9×9	9×11	11×9
45	Her iki yön	16.1891	16.1805	16.1485	16.1236	16.1236
	X yönünde	69.6504	69.6467	69.6032	69.5003	69.5003
60	Her iki yön	16.3730	16.3689	16.3287	16.3054	16.3054
	X yönünde	57.7032	57.6904	57.6534	57.6372	57.6372

Çizelge 4.24. Tek eksenli basınç etkisi altında Fonksiyonel dereceli($z/h+1/2$)^p kompozit ve dörtgen plakların ($b/a=0.8$; $c/a=0.7$; $\gamma=75$; $\beta=70$; $h/a=0.2$) kritik burkulma yükleri

p	Sınır Koşulları	ATK Sonuçları-Lagrange kernel ($r=2.88$)				
		7×9	9×9	9×11	11×11	11×13
0.5	SSSS	3.8304	3.8264	3.8264	3.8258	3.8258
	CCCC	5.0010	4.9982	4.9970	4.9965	4.9965
1	SSSS	2.9975	2.9908	2.9908	2.9904	2.9904
	CCCC	3.9891	3.9862	3.9860	3.9854	3.9854
5	SSSS	1.8804	1.8739	1.8734	1.8731	1.8731
	CCCC	2.3383	2.3315	2.3311	2.3303	2.3303

Hem karbon nanotüp takviye durumu ve hem de fonksiyonel dereceli malzeme durumunda burkulma yükleri Çizelge 4.23 ve Çizelge 4.24'te farklı yük ve mesnet koşulu için verilmiştir.

5. SONUÇLAR

Plak ve kabukların mühendislik problemlerinde kullanımı teknolojiye ve yeni malzeme tekniklerine bağlı olarak yaygınlaşmıştır. Kompozit malzemelerin kullanımı ve yaygınlaşmış ve tabakalı kompozitlerin teşkil edilmesinin mümkün olması, tasarımlarda farklı şekil ve geometride plak ve kabukların yapılabilmesine olanak sağlamıştır.

Günümüzde gelişmiş malzeme tekniklerinin yaygınlaşması ile daha hafif ve daha sağlam, darbe direnci fazla, termal etkilere daha dayanıklı ve mikro çatlakların oluşmasını engelleyen ya da bunların gelişmesini durduran pek çok kompozit tekniği mevcuttur. Fonksiyonel tabakalı/dereceli kompozit tekniği, karbon nanotüp takviyeli kompozit ve grafen plak takviyeli kompozit bunlardan bazılarıdır.

Bu tez çalışmasının temel amacı farklı geometriye sahip plakların (izotrop, tabakalı ve karbon nanotüp takviyeli) burkulma hesabı için farklı metotlar ile formülasyonların verilmesi ve çözümüdür. Ancak karşılaştırma amaçlı eğilme ve titreşim hesabı da yapılmış ve literatürdeki benzer tezlerde ve aynı kökten gelen metotlar ile bulunan sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Ayrık tekil konvolüsyon da farklı kerneller kullanıldığından ilgili sonuçlar değişmiştir. Kökenleri aynı (DQ, HDQ, GDQ, ya da ATK–Shannon kernel, ATK–Lagrange kernel) olmasına rağmen bir parametrede (r , Delta, grid sayısı, düğüm noktası seçimi) yapılan küçük bir değişiklik sonuçları değiştirmektedir.

ATK yöntemi daha stabil bir yöntem olup, yüksek mod burkulmalarında da daha az düğüm noktası ile hassas sonuçlara ulaşılmıştır.

Hem Diferansiyel quadrature, hemde harmonik diferansiyel quadrature, ya da genelleştirilmiş versiyonu aynı performansa sahiptir. Ancak daha önceki makale ve tezlerde de vurgulandığı gibi harmonik diferansiyel quadrature metodu titreşim ve burkulma problemlerinde daha efektiftir.

Ayrık tekil konvolüsyonda sonuca etki eden faktörler, kernel tipi, gauss zarfı ve r değeridir. Grid sayısı da tüm ayırıklaştırma metotlarında (sonlu farklar, sonlu elemanlar gibi) olduğu gibi sonuçlar üzerinde etkindir.

En büyük burkulma yükü FG-X dağılımında ve $V_{cnt}=0.17$ için hesaplanmıştır. En küçük burkulma yükü ise FG-O dağılımı ve $V_{cnt}=0.11$ için bulunmuştur.

Fonksiyonel dereceli kompozit durumunda ise; fonksiyonel derece için indeks değeri (p) arttıkça burkulma yükü azalmaktadır.

6. KAYNAKLAR

- Belmann, R.E. and Casti, J. 1971. Differential quadrature and long-term integration. *Journal of Mathematical Analysis Application*, 34: 235-238.
- Bert, C.W. and Malik, M. 1996a. Differential quadrature method in computational mechanics: A review. *Applied Mechanic Rev*, 49(1): 1-28.
- Bert, C.W. and Malik, M. 1996b. The differential quadrature method for irregular domains and application to plate vibration. *Int. J. Mech. Sci.*, 38(6): 589-606.
- Bert, C.W. and Malik, M. 1996c. Free vibration analysis of tapered rectangular plates by differential quadrature method: A semi- analytical approach. *Journal of Sound and Vibration*, 190(1): 41-63.
- Bert, C.W. and Malik, M. 1997. Differential quadrature: A powerful new technique for analysis of composite structures. *Journal Of Composite Structures*, 39: 179-189.
- Bert, C.W., Jang, S.K. and Striz, A.G. 1987. Two new approximate methods for analyzing free vibration of structural components. *AIAA Journal*, 26(5): 612-618.
- Bert, C.W., Wang, Z. and Striz, A.G. 1993. Differential quadrature for static and free vibration analysis of anisotropic plates. *International Journal of Solids And Structures*, 30(13): 1737-1744.
- Bert, C.W., Wang, Z. and Striz, A.G. 1994a. Static and free vibrational analysis of beams and plates by differential quadrature method. *Acta Mechanica*, 102: 11-24.
- Bert, C.W., Wang, Z. and Striz, A.G. 1994b. Convergence of the DQ method in the analysis of anisotropic plates. *Journal Of Sound And Vibration*, 170(1): 140-144.
- Civalek, Ö. 1998. Plak ve kabukların sonlu elemanlar metoduyla analizi. Yüksek Lisans Semineri, Fırat Üniversitesi
- Civalek, Ö. 2004. Application of differential quadrature (DQ) and harmonic differential quadrature (HDQ) for buckling analysis of thin isotropic plates and elastic columns. *Engineering Structures*, 26(2): 171-186.
- Civalek, Ö. 2007a. Three-dimensional vibration, buckling and bending analyses of thick rectangular plates based on discrete singular convolution method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 49: 752-765.
- Civalek, Ö. 2007b. Nonlinear analysis of thin rectangular plates on winkler-pasternak elastic foundations by DSC-HDQ methods. *Applied Mathematical Modeling*, 31: 606-624.
- Civalek, Ö. ve Çatal, S. 2004. Genelleştirilmiş diferansiyel quadrature methodu ile kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü. Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.
- Civalek, Ö., Avcar, M. 2020. Free vibration and buckling analyses of CNT reinforced laminated nonrectangular plates by discrete singular convolution method, *Engineering with Computers*, 38:450-468.

- Du, H., Lim, M.K. and Lin, R.M. 1994. Application of generalized differential quadrature method to structural problems. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 37: 1881-1896.
- Gürses, M.2008. Farklı geoemtriye sahip Kirchoff plakların ayırık tekil konvolüsyon ve diferansiyel quadratüre yöntemleriyle titreşim hesabı, Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Ensititüsü, Antalya.
- Hou, Z.J. and Wei, G.W. 2002 A new approach to edge detection. *Pattern Recognition*,35: 1559-1570.
- Kang, K., Bert, C.W. and Striz, A.G. 1995. Vibration analysis of shear deformable circular arches by the differential quadrature method. *Journal of Sound and Vibration*, 181(2): 353-360.
- Kang, K., Bert, C.W. and Striz, A.G. 1996. Vibration analysis of horizontally curved beams with warping using DQM. *Journal of Structural Engineering ASCE*, 122(6): 657-662.
- Kang, S.K., Bert, C.W. and Striz, A.G. 1989. Application of differential quadrature to static analysis of structural components. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 28: 561-577.
- Kiani, Y, Mirzaei, M.2018. Rectangular and skew shear buckling of FG-CNT reinforced composite skew plates using Ritz method. *Aerospace Science and Technology*,77:388-398.
- Liew, K. M. and Han, J-B. 1997. A four–note differential quadrature method for straight-sided quadrilateral reissner/mindlin plates. *Communications in Numerical Methods in Engineering* ,13: 73-81.
- Liew, K. M. and Han, J.B. 1995. Bending analysis of simply supported shear deformable skew plates. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 123(3): 214-221.
- Liew, K. M. and Lam, K. Y. 1990. Application of two dimensional plate functions to flexural vibration of skew plates. *Journal of Sound and Vibration*, 139(2): 241-252.
- Liew, K. M. and Liu, F.L. 1997. Differential cubature method: A solutions technique for kirchhoff plates of arbitrary shapes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,145: 1-10.
- Liew, K.M., Hung, K.C. and Lim, M.K. 1995. Vibration characteristic of simply supported thick skew plates in three-dimensional setting. *Journal Of Applied Mechanics ASME*, 62: 880-886.
- Lim, C.W., Liew, K.M. and Kitipornchai, S. 1996. Vibration of arbitrarily laminated plates of general trapezoidal planform. *Journal of the Acoustical Society of America*, 100(6): 3674-3685.
- Lin, R.M., Lim, M. K. and Du, H. 1994a. Large deflection analysis of plates under thermal loading. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,117: 381-390.

- Lin, R.M., Lim, M. K. and Du, H. 1994b. Deflection of plates with nonlinear boundary supports using generalized differential quadrature. *Computers & Structures*, 53(4): 993-999.
- Malekzadeh, P., Shojaee, M. 2013. Buckling analysis of quadrilateral laminated plates with carbon nanotube reinforced composite layers, *Thin-Walled Structures*, 71: 108–118.
- Malekzadeh, P., Zarei, A.R. 2014. Free vibration of quadrilateral laminated plates with carbon nanotube reinforced composite layers. *Thin-Walled Structures*, 82: 221–232.
- Ng, C.H.W., Zhao, Y.B. and Wei, G.W. 2004. Comparison of discrete singular convolution and generalized differential quadrature for the vibration analysis of rectangular plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193: 2483 –2506.
- Oden, J. T., Sato, T. 1967. Finite strains and displacements of elastic membranes by the finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, 3(4): 471-488.
- Quan, J.R. and Chang, C.T. 1989b. New insights in solving distributed system equations by the quadrature method-II. numerical experiment. *Computers Chemical Engineering*, 13(9): 1017-1024.
- Reddy, J. N. 1997. On locking-free shear deformable beam finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 149(1-4): 113-132.
- Shen, H.S. 2011. Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, part I: axially-loaded shells. *Composite Structures*, 93: 2096–2108.
- Striz, A.G., Wang, X., and Bert, C.W. 1995. Harmonic differential quadrature method and applications to analysis of structural components. *Acta Mechanica*, 111:85-94.
- Wan, D.C. and Wei, G.W. 2000. Numerical solutions of incompressible Euler and Navier-Stokes equations by efficient discrete singular convolution method. *Acta Mechanica Sinica* ,16(3), 223-239.
- Wang, C.M. Wang, C.Y., and Reddy, J.N. 2005 Exact Solutions for Buckling of Structural Members, CRC, Boca Raton, Florida.
- Wang, X., Striz, A.G. and Bert, C.W. 1994. Buckling and vibration analysis of skew plates by the differential quadrature method. *AIAA Journal*, 32(4): 886-889.
- Wang CM, Liew KM, Xiang Y, Kitipornchai S. 1993. Buckling of rectangular Mindlin plates with internal line supports. *International Journal of Solids and Structures* 30(1):1–17.
- Wei, G.W. 1999. Discrete singular convolution for the solution of the Fokker–Planck equations. *Journal of Chemical Physics*, 110: 8930-8942.

- Wei, G.W. 2000a. Solving quantum eigenvalue problems by discrete singular convolution. *Journal of Physics B*, 33: 343-352.
- Wei, G.W. 2000b. Discrete singular convolution for the Sine-Gordon equation. *Physica D*, 137: 247-259.
- Wei, G.W. 2000c. A unified approach for the solution of the fokker-planck equation. *Journal of Physics A: Math. Gen.*, 33: 4935-4953.
- Wei, G.W. 2000d. Wavelets generated by using discrete singular convolution kernels. *Journal of Physics A: Math. Gen.*, 33: 8577-8596.
- Wei, G.W., Zhao, Y.B. and Xiang, Y. 2001. The determination of natural frequencies of rectangular plates with mixed boundary conditions by discrete singular convolution. *International Journal of Mechanical Sciences*, 43: 1731-1746.
- Wei, G.W., Zhao, Y.B. and Xiang, Y. 2002. Discrete singular convolution and its application to the analysis of plates with internal supports; part 1: theory and algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55: 913-946.
- Zhang, L.W., Lei, Z.X., Liew, K.M. 2015. Buckling analysis of FG-CNT reinforced composite thick skew plates using an element-free approach. *Composites Part B: Engineering*, 75:36-46.
- Zhao, S., Wei, G.W. 2002. DSC analysis of rectangular plates with Non-Uniform boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 255(2): 203-228.
- Zhao, S., Wei, G.W. and Xiang, Y. 2002a. Discrete singular convolution and its application to the analysis of plates with internal supports; part 2: applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55: 947-971.
- Zhao, S., Wei, G.W. and Xiang, Y. 2002b. Discrete singular convolution for the prediction of high frequency vibration of plates. *International Journal of Solids and Structures*, 39: 65-88.
- Zhao, S., Wei, G.W. and Xiang, Y. 2002c. Plate vibration under irregular internal supports. *International Journal of Solids and Structures*, 39: 1361-1383.
- Zhao, S., Wei, G.W. and Xiang, Y. 2005. DSC analysis of free-edged beams by an iteratively matched boundary method. *Journal of Sound and Vibration*, 284: 487-493.

ÖZGEÇMİŞ

Berkay Doğan

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans	Akdeniz Üniversitesi
2018 – 2021	Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Antalya
Lisans	Beykent Üniversitesi
2012 – 2016	Mühendislik & Mimarlık Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü (100% burslu), İstanbul

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Bölge Servis Geliştirme Mühendisi	Weir Minerals, Natca (North Africa, Turkey, Central Asia)
2021 – Devam Ediyor	İstanbul
Servis Destek Mühendisi	Weir Minerals, Turkey
2018-2021	İstanbul
Teknik Ofis Mühendisi	Nurşah İnşaat AŞ.
2016-2018	Kemer / Kumluca Yolu, Antalya