

T.C.
BOLU ABANT İZZET BAYSAL ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM
DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI



FARKLI MATEMATİK TOPLULUKLARININ İSPAT
KARAKTERİSTİKLERİNİN İNCELENMESİ: ALGILAR VE
PRATİKLER

DOKTORA TEZİ

YASEMİN YILMAZ AKKURT

TEZ DANIŞMANI
PROF. DR. SONER DURMUŞ

BOLU, OCAK - 2024

KABUL VE ONAY SAYFASI

Yasemin YILMAZ AKKURT tarafından hazırlanan “**FARKLI MATEMATİK TOPLULUKLARININ İSPAT KARAKTERİSTİKLERİNİN İNCELENMESİ: ALGILAR VE PRATİKLER**” adlı tez çalışması jürimiz tarafından Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı’nda Doktora Tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir. 5/01/2024

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman
Prof. Dr. Soner DURMUŞ
Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi

.....

Üye
Prof. Dr. Hakan YAMAN
Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi

.....

Üye
Prof. Dr. İbrahim ÇETİN
Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi

.....

Üye
Prof. Dr.
Tuba AYDOĞDU İSKENDEROĞLU
Trabzon Üniversitesi

.....

Üye
Doç. Dr. Şahin DANIŞMAN
Düzce Üniversitesi

.....

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. İbrahim KÜRTÜL
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu bildirir,

aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Teze ilişkin Turnitin adlı programında enstitü müdürlüğünce belirlenen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan benzerlik raporuna göre, tezin benzerlik oranı %30'u geçmemektedir.

Bu çalışma için Sosyal Bilimlerde İnsan Araştırmaları Etik Kurulundan 2020/185 sayısı ile etik izin alınmıştır.

.....

YASEMİN YILMAZ AKKURT

ÖZET

**FARKLI MATEMATİK TOPLULUKLARININ İSPAT
KARAKTERİSTİKLERİNİN İNCELENMESİ: ALGILAR VE
PRATİKLER
DOKTORA TEZİ
YASEMİN YILMAZ AKKURT
BOLU ABANT İZZET BAYSAL ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. SONER DURMUŞ)
BOLU, OCAK - 2024
xiv+340**

Bu araştırmanın amacı, matematikçilerin, matematik eğitimcilerinin, matematik programı öğrencilerinin ve matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin matematiksel ispata ilişkin karakteristiklerini algı ve pratikleri açısından incelemektir. Nitel bir araştırma deseninin benimsendiği bu çalışmada, çoklu durum çalışması yöntemi kullanılmıştır. Araştırmaya Türkiye’deki bir devlet üniversitesinin eğitim fakültesindeki matematik eğitimcileri ile matematik öğretmenliğinin son sınıf öğrencileri, fen edebiyat fakültesindeki matematikçiler ile matematik programı son sınıf öğrencileri olmak üzere 34 kişi katılmıştır. Araştırmada iki farklı veri toplama aracı kullanılmıştır. Birincisi, katılımcıların matematiksel ispat algılarını anlamaya yönelik yarı-yapılandırılmış görüşmeler aracılığıyla, ikincisi katılımcıların matematiksel bir iddiayı ispatlama girişimindeki yaklaşımlarını (pratikleri) anlamaya yönelik etkinlik temelli görüşme protokolleri aracılığıyla veriler elde edilmiştir. Araştırmada toplanan nitel veri tümevarımsal, tümdengelimsel ve her ikisinin harmanlandığı bir yaklaşımla nitel içerik analizi yöntemi kullanılarak analiz edilmiştir.

Araştırma bulguları katılımcıların matematiksel ispata ilişkin algılarının ispat tarifleri, ispatın özellikleri, okul matematiği ile üniversite matematiği arasındaki gerilim, ispatlama yolları (girişimlerinin doğası) ve ispata verilen değer (önem) olmak üzere 5 farklı şekilde olduğunu ortaya koymaktadır. Araştırmanın algılara ilişkin bulguları arasında, matematikçilerin ağırlıklı olarak matematiksel dünya tabanlı ispat tarifi verdikleri, matematik eğitimcilerinin ise ağırlıklı olarak öğretim odaklı ispat tarifi verdikleri görülmüştür. Bu iki topluluğun öğrencileri açısından, matematik programı öğrencilerinin ağırlıklı olarak araç odaklı ispat tarifi verdiği, matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin ise ağırlıklı olarak süreç odaklı ispat tarifi sundukları ortaya çıkmıştır.

Araştırmanın pratiklere ilişkin bulguları arasında, katılımcıların genel olarak doğal ve formal yollarla ispatlama girişimlerinin şekillendiği, özel olarak ise bu yollarda birbirlerinden beslenerek yaklaşımlarının çeşitlendiği görülmüştür. Özellikle matematikçilerin tamamen formal içinde kalan ile doğala gidip daha sonra formala rotalandırılan yollarla araştırmalarını yürüttükleri, diğer katılımcı grupların ise sıkça doğal rotalarla ilgili olan yolları izledikleri ortaya çıkmıştır.

ANAHTAR KELİMELELER: Matematiksel İspat, Algı ve Pratik, Doğal ve Formal Rota, Matematiksel Topluluk, Çoklu Durum Çalışması

ABSTRACT

INVESTIGATION OF THE PROOF CHARACTERISTICS OF DIFFERENT MATHEMATICAL COMMUNITIES: PERCEPTIONS AND PRACTICES

PHD THESIS

YASEMİN YILMAZ AKKURT

BOLU ABANT İZZET BAYSAL UNIVERSITY

INSTITUTE OF GRADUATE STUDIES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND SCIENCE EDUCATION

MATHEMATICS EDUCATION DEPARTMENT

(SUPERVISOR: PROF. DR. SONER DURMUŞ)

BOLU, JANUARY 2024

xiv+340

The purpose of this research is to examine the characteristics of mathematicians, mathematics educators, and their undergraduate students regarding their perceptions and practices related to mathematical proof. In this research, the qualitative research method of multiple case study was employed. A total of 34 participants took part in the research, including mathematicians, mathematics educators, and their final-year undergraduate students from a state university in Turkey. Two different data collection instruments were utilized in the research. The first involved semi-structured interviews aimed at understanding participants' perceptions of mathematical proof, while the second employed task-based interview protocols to comprehend participants' approaches (practices) in attempting to prove a mathematical claim. Qualitative content analysis was employed with the blended approach in terms of inductive and deductive manners in research data analysis.

Research findings revealed five distinct aspects of participants' perceptions related to mathematical proof. These aspects include proof descriptions, features of proof, tension between school mathematics and university mathematics, proof pathways (nature of their attempts), and the value (importance) assigned to proof. Among the research findings regarding perceptions reveal that mathematicians mainly provide mathematical proof descriptions in terms of a mathematical world-based, while mathematics educators primarily offer teaching-focused descriptions of proof. In terms of students from these two communities, it is evident that the students of the first group mainly present tool-focused proof descriptions, while those of the second group mainly offer process-oriented proof descriptions.

Among the research findings regarding practices, it is observed that participants generally shape their proof attempts through both natural and formal routes, and specifically, their approaches diversify by driving on each other in these routes. Particularly, mathematicians are noted for enacting their research through paths that either remain entirely formal or start with some natural ways and later transition to a formal route. However, the other participant groups frequently pursue routes related to natural ways.

KEYWORDS: Mathematical Proof, Perception and Practice, Natural and Formal Route, Mathematical Community, Multiple Case Study

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL VE ONAY SAYFASI	ii
ETİK BEYAN.....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİL LİSTESİ.....	ix
TABLO LİSTESİ	xi
KISALTMA VE SEMBOLLER LİSTESİ	xii
TEŞEKKÜR	xiii
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Problem Durumu	1
1.2 Araştırmanın Amacı ve Önemi	4
1.3 Araştırma Soruları	8
1.4 Araştırmanın Sınırlılıkları.....	9
1.5 Araştırmanın Varsayımları	9
1.6 Tanımlar.....	9
2. ARAŞTIRMANIN KURAMSAL TEMELİ VE İLGİLİ	
ARAŞTIRMALAR.....	11
2.1 Kuramsal Çerçeve.....	11
2.1.1 Matematiksel İspatın Tanımı, Tarihsel Temelleri ve Gelişimi.....	11
2.1.1.1 Matematiksel İspatı Tanımlama	16
2.1.1.2 Matematiksel İspatın Tarihsel Temelleri ve Gelişimi.....	17
2.1.2 Matematiksel İspatın Rollerı	20
2.1.3 Okul Matematiği ve Üniversite Matematiği Arasındaki Gerilim.....	22
2.1.4 Matematik Eğitiminde Matematikçilerin Rolü.....	24
2.1.5 İspatı Kavramsallaştırmaya Yönelik Çerçeveler	25
2.1.5.1 Bell (1976)	25
2.1.5.2 Van Dormolen (1977)	26
2.1.5.3 Balacheff (1988).....	26
2.1.5.4 Harel ve Sowder (1998)	27
2.1.5.5 Tall (1998, 2013).....	32
2.2 İlgili Araştırmalar	37
3. YÖNTEM.....	43
3.1 Araştırmanın Deseni	43
3.2 Katılımcılar	44
3.3 Veri Toplama Süreci.....	49
3.3.1 Yarı-Yapılandırılmış Görüşmeler.....	50
3.3.2 Etkinlik Temelli Görüşme Protokolleri	52
3.3.3 Araştırmacı Notları	58

3.4 Pilot Uygulama	58
3.5 Veri Analizi	60
3.5.1 Çözümleme	60
3.5.2 Kodlama	61
3.6 Geçerlik ve Güvenirlik	66
3.7 Etik.....	68
3.8 Araştırmacının Rolü.....	69
4. BULGULAR	70
4.1 Araştırmanın Birinci Alt Problemine İlişkin Bulgular	70
4.1.1 İspat Tarifleri	72
4.1.1.1 Matematikçilerin Matematiksel İspat Tarifleri.....	77
4.1.1.2 Matematik Eğitimcilerinin Matematiksel İspat Tarifleri.....	85
4.1.1.3 Matematik Programı Öğrencilerinin Matematiksel İspat Tarifleri	92
4.1.1.4 Matematik Öğretmenliği Programı Öğrencilerinin Matematiksel	İspat Tarifleri.....
4.1.2 İspatın Özellikleri	96
4.1.2.1 Matematikçilere Göre Matematiksel İspatın Özellikleri.....	109
4.1.2.2 Matematik Eğitimcilerine Göre Matematiksel İspatın Özellikleri	118
4.1.2.3 Matematik Programı Öğrencileri ile Matematik Öğretmenliği	Programı Öğrencilerine Göre Matematiksel İspatın Özellikleri
4.1.3 Okul Matematiği ile Üniversite Matematiği Arasındaki Gerilim...	123
4.1.3.1 Matematikçiler ve Matematik Programı Öğrencileri Açısından	Matematiksel İspatta Kendini Gösteren Gerilim Tetikleyicileri
4.1.3.2 Matematik Eğitimcileri ve Matematik Öğretmenliği Programı	Öğrencileri Açısından Matematiksel İspatta Kendini Gösteren Gerilim
4.1.3.3 Matematik Öğretmenliği Programı Öğrencileri Açısından	Matematiksel İspatta Kendini Gösteren Gerilim Tetikleyicileri
4.1.4 İspatlama Yolları (Girişimlerinin Doğası)	148
4.1.4.1 Matematikçilerin Matematiksel İspatlama Girişimlerinin Doğası	158
4.1.4.2 Matematik Eğitimcilerinin Matematiksel İspatlama Girişimlerinin	Doğası 164
4.1.4.3 Matematik Programı Öğrencilerinin Matematiksel İspatlama	Girişimlerinin Doğası.....
4.1.4.4 Matematik Öğretmenliği Programı Öğrencilerinin Matematiksel	İspatlama Girişimlerinin Doğası
4.1.5 İspata Verilen Değer ve Atfedilen Önem	179
4.1.5.1 Matematikçiler Tarafından İspata Verilen Değer ve Atfedilen	Önem 195
4.1.5.2 Matematik Eğitimcileri Tarafından İspata Verilen Değer ve	Atfedilen Önem.....
4.1.5.3 Matematik Programı Öğrencileri Tarafından İspata Verilen Değer	ve Atfedilen Önem
4.1.5.4 Matematik Öğretmenliği Programı Öğrencileri Tarafından İspata	Verilen Değer ve Atfedilen Önem
4.1.6 Çarpaz Durum Analizi	223
4.2 Araştırmanın İkinci Alt Problemine İlişkin Bulgular	224
4.2.1 Matematikçilerin Matematiksel İspat Pratikleri	225
4.2.2 Matematik Eğitimcilerinin Matematiksel İspat Pratikleri	247

4.2.3 Matematik Programı Öğrencilerinin Matematiksel İspat Pratikleri	264
4.2.4 Matematik Öğretmenliği Programı Öğrencilerinin Matematiksel İspat Pratikleri	286
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	302
6. ÖNERİLER.....	322
6.1 Uygulayıcılara Yönelik Öneriler	322
6.2 Araştırmacılara Yönelik Öneriler	324
6.3 Müfredat Geliştiricilere Yönelik Öneriler	325
7. KAYNAKLAR.....	327
8. EKLER.....	338
EK 1. Görüşme Protokolü (Öğrenci).....	338
EK 2. Görüşme Protokolü (Öğretim Üyesi)	339
EK 3. Etkinlik Temelli Görüşme Protokolü (Öğrenci ve Öğretim Üyesi) ..	340



ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1. İspat oluşturmada doğal ve formal rotalar (Tall, 2013, s.285)	32
Şekil 2.2. Matematiksel ispatın uzun vadeli gelişimi (Tall, 2013)	34
Şekil 2.3. Matematiğin üç dünyasında farklı ispatlama yaklaşımları	35
Şekil 3.1. Araştırmada kullanılan görüşme protokollerinin genel yapısı.....	50
Şekil 3.2. Etkinlik temelli görüşme protokolünün yapısı	56
Şekil 3.3. Etkinlik 1'in genel görünümü.....	58
Şekil 3.4. Pilot ve asıl uygulama olmak üzere araştırmanın takvimi.....	60
Şekil 3.5. Nitel veri indirgeme süreci (Adu, 2019, s.26)	65
Şekil 4.1. 1MA1'in Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri	226
Şekil 4.2. 1MA5'in Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri (birinci girişim)	231
Şekil 4.3. 1MA5'in Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri (ikinci girişim).....	233
Şekil 4.4. 1MA9'un Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri (ilk teşebbüsler, taslak fikirler).....	235
Şekil 4.5. 1MA9'un Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri (nihai girişim).....	236
Şekil 4.6. 1MA8'in Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri	240
Şekil 4.7. 1MA7'nin Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri	246
Şekil 4.8. 2EA1'in Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri	248
Şekil 4.9. 2EA2'nin Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri	250
Şekil 4.10. 2EA7'nin Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri	252
Şekil 4.11. 2EA3'ün Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri (ilk girişimler)	255
Şekil 4.12. 2EA3'ün Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri (ikincil girişimler)	256
Şekil 4.13. 2EA3'ün Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri (ikincil girişimin iyileştirilmesi)	257
Şekil 4.14. 2EA3'ün Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri (ikincil girişimden sonra yeni fikirler)	258
Şekil 4.15. 2EA3'ün Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri (eski ve yeni girişimlerinden elde ettiği çıkarımlar)	259
Şekil 4.16. 2EA4'ün Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri	260
Şekil 4.17. 3MÖ5'in Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri	266
Şekil 4.18. 3MÖ6'nın Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri	269

Şekil 4.19. 3MÖ2'nin Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri	276
Şekil 4.20. 3MÖ7'nin Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri (pozitif tamsayılar üzerinden girişi)	278
Şekil 4.21. 3MÖ7'nin Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri (pozitif rasyonel sayılar üzerinden girişi)	279
Şekil 4.22. 3MÖ7'nin Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri (ispat olarak görünmesi için süsleme girişi)	280
Şekil 4.23. 3MÖ3'ün Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri	282
Şekil 4.24. 4EÖ9'un Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri	289
Şekil 4.25. 4EÖ2'nin Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri	292
Şekil 4.26. 4EÖ7'nin Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri	296
Şekil 4.27. 4EÖ1'in Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri	299
Şekil 4.28. Katılımcıların grup bazlı matematiksel ispat pratikleri	301

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 2.1. Matematiksel ispatın rolleri ve ispatlama süreci çerçevesi (Paddack, 2009, s. 36)	21
Tablo 2.2. İspatın matematikte sahip olduğu roller (Güler ve Öçal, 2022, s.47-48)	22
Tablo 2.3. Bell'in çerçevesi.....	25
Tablo 2.4. Van Dormolen'in çerçevesi.....	26
Tablo 2.5. Balacheff'in çerçevesi	27
Tablo 2.6. Harel ve Sowder'in çerçevesi.....	28
Tablo 2.7. İspat kavramına ilişkin farklı bakış açıları (Çelik ve Aydoğdu İskenderoğlu, 2023, s. 206)	31
Tablo 3.1. Araştırmadaki katılımcılar için kullanılan grup ve kimlik profilleri.....	47
Tablo 3.2. Katılımcı profilleri (Matematikçiler)	47
Tablo 3.3. Katılımcı profilleri (Matematik eğitimcileri)	48
Tablo 3.4. Katılımcı profilleri (Matematik programı öğrencileri ve matematik öğretmenliği programı öğrencileri)	49
Tablo 4.1. Matematiksel ispatla ilgili algılara ilişkin kategoriler (katılımcı sayısı)	71
Tablo 4.2. Farklı matematiksel topluluklara göre matematiksel ispat tarifleri.....	78
Tablo 4.3. Farklı matematiksel topluluklara göre matematiksel ispatın özellikleri	110
Tablo 4.4. Farklı matematiksel topluluklara göre gerilim unsurları.....	136
Tablo 4.5. Farklı matematiksel topluluklara göre ispatlama yolları.....	158
Tablo 4.6. Farklı matematiksel topluluklara göre matematiksel ispata verilen değer ve atfedilen önem	196
Tablo 4.7. Çapraz durum tablosu	224

KISALTMA VE SEMBOLLER LİSTESİ

Bkz	: Bakınız
KPSS	: Kamu Personel Seçme Sınavı
LYS	: Lisans Yerleştirme Sınavı
NCTM	: National Council of Teachers of Mathematics (Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi)
ort.	: Ortalama
örn.	: Örneğin
s.	: Sayfa
TÜBİTAK	: Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu
vb.	: Ve benzeri
vd.	: Ve diğerleri

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimimden itibaren birlikte çalıştığım, görüş ve önerileriyle, bilgi ve tecrübeleriyle hem akademik hem de doktora tezimde büyümemi sağlayan, her zaman anlayış göstererek yardımlarını esirgemeyen değerli hocam, sayın danışmanım Prof. Dr. Soner DURMUŞ'a çok teşekkür ediyorum.

Tezime yapıcı olan eleştirel fikirlerle, orijinal katkılarla dokunuşta bulunan, Tez İzleme Komitesi Toplantılarıyla sınırlı kalmayıp her fırsatta fikirlerinden faydalanabildiğim değerli hocalarım Prof. Dr. Hakan YAMAN ve Prof. Dr. İbrahim ÇETİN'e teşekkür ederim.

Tez jürimde yer alarak farklı bakış açıları ve zengin düşünme fırsatları oluşturan kıymetli hocalarım Prof. Dr. Tuba AYDOĞDU-İSKENDERÖĞLU'na ve Doç. Dr. Şahin DANIŞMAN'a katkıları ve önerilerinden dolayı çok teşekkür ediyorum.

Tezimin veri toplama sürecinde değerli görüşlerine başvurduğum Doç. Dr. Muhammed Fatih DOĞAN'a teşekkür ederim. Bu süreçte fikirlerinden faydalanarak çok şey öğrendiğim kıymetli dostum Dr. Öğr. Üyesi Seda EDEN ÜNLÜ'ye, birlikte gelişerek, birbirimizi sürekli ileri taşıyarak bu süreci keyifle tamamladığım arkadaşım Dr. Öğr. Üyesi Melisa KARAKAYA ÖZTÜRK'e çok teşekkür ederim. Tezimi yazarken iş yoğunluğumu görüp desteklerini esirgemeyen, yükümü hafifleten değerli çalışma arkadaşlarım Dr. Öğr. Üyesi Ümmügülüm CANSU ve Dr. Öğr. Üyesi Ülkü AYVAZ'a çok teşekkür ederim. Bu koşturmacada bıkmadan usanmadan yardımlarıyla, en basit bir şeyde bile hızlı ve pratik düşünerek çözüm üretmesiyle, fikirlerine güvendiğim kıymetli arkadaşım Tuncay ALP'e çok teşekkür ederim.

Uzun soluklu bu yolda sürekli anlayış göstererek nazımı çeken ve koşulsuz desteklerini hissettiğim sevgili aileme çok teşekkür ediyorum. Varlığınıza minnettarım. Ve sonuncusu ama en kıymetlisi... Bu zorlu süreci tamamlayabilmemin en büyük gücü, sevgili eşim Bahadır AKKURT'a sonsuz teşekkür ediyorum.

Doktora eğitimim boyunca 2211-E Doğrudan Yurt İçi Doktora Burs Programı ile desteklediği için Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumuna (TÜBİTAK) çok teşekkür ederim.



*mührünü ölümsüzleştiren
değerli matematikçilere...*

Q.E.D

1. GİRİŞ

1.1 Problem Durumu

Öğrenci: Arabanın hızı saatte 50 km'dir. Bu ne anlama geliyor?

Öğretmen: Herhangi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde bir δ vardır, öyleki $|t_2 - t_1| < \delta$ iken $\left| \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} - 50 \right| < \varepsilon$ dir.

Öğrenci: Nasıl oluyor da herhangi biri böyle bir cevabı düşünebildi?

(Grabiner, 1983, s.185)

Üniversiteye yeni başlayan öğrenciler, daha önceki okul deneyimlerinde gördükleri ve aşına oldukları matematik ile üniversitede öğretildiği ve tartışıldığı şekliyle matematiğin aynı olmadığını hatta aralarındaki farklılığın bilincinde olduklarını ifade etmektedir (Pinto ve Karsenty, 2018). Bunun bir sebebi, akademideki matematiğin (üniversite bağlamında), öğrencinin daha önceki okul deneyimi temelindeki “matematik” olarak ilişkilendirilene benzememesidir (Sfard, 2014).

Genel olarak okul sınıflarında uygulanan matematiğin, matematikçilerin matematiksel etkinliğinden farklı olduğu da kabul edilmektedir. Böyle bir farklılık, öğretmenlerin matematiğin doğasına ilişkin görüşlerinin matematikçilerin disipline ilişkin görüşlerinden farklı olabileceğini düşündürmektedir. Ya da tam tersine, öğretmenler matematiği matematikçilere benzer şekillerde bir disiplin olarak görebilirler, ancak okul bağlamı söz konusu olduğunda farklı şekilde değerlendirebilirler (Beswick, 2012). Ayrıca erken kademeden ileri kademeye geçiş yaptıkça, öğrencilerin ispat bilgisi tüm kademeler boyunca yaş ve hazır bulunuşluğun getirisine bağlı olarak değişebilmektedir. Harel ve Sowder (2007) bunu lise öğrencisinin ispat anlayışı, bir üniversite matematik öğrencisinden; günümüz matematikçisinin ispat anlayışı eski dönem matematikçisinden farklı olacağı şeklinde belirtmektedir. Bu durum, matematik sınıfı topluluğundaki amaçlar ile matematikçiler topluluğundaki amaçlar arasındaki farklılıkların iki topluluğun farklı amaç ve mesleki gerekliliklerin söz konusu olduğunu belgeler niteliktedir (Staples vd., 2012). Hemmi'ye (2006) göre matematiksel ispat matematiksel pratikte zengin anlamlara sahiptir ve farklı bağlamlara göre kullanımında bu nedenle çeşitlilik göstermektedir. Bu açıdan ispat, matematikçiler, eğitimciler ve öğrencileri ilgilendiren tüm matematiksel toplulukların meselesi haline gelmiştir. Bununla birlikte Mariotti'ye (2004) göre, bu topluluklarda ispat,

matematikçiler açısından matematiksel karmaşıklığın kendisi ispatla ilgili en önemli problem olurken, öğrenciler açısından anlam meselesidir. Eğitimciler ise bu noktada kendilerine ispatı daha anlamlı kılabilecek öğretim bağlamları tasarlamak zorundadırlar. Bununla birlikte, matematikçiler ve matematik eğitimcileri arasında ispatlamanın tüm matematik sınıflarında önemli bir rol oynaması gereken temel bir etkinlik olduğu konusunda bir fikir birliği vardır (Weber, 2010b). İspatın matematik topluluğunda olduğu gibi sınıfta da aynı rolü oynayabileceğini ya da oynaması gerektiğini düşünmek bu açıdan önemli olacaktır (Stylianides vd., 2017).

Bilimsel bir disiplin olarak matematik, aksiyomatik-tümdengelimli yapısı ile karakterize edilmekte olup ve genellikle üst düzeyde bir soyutlama ile işaretlenir (Dreher vd., 2016). Üniversitede öğretilen tarzda matematik olarak karşılık bulan bu matematik, aksiyomatik-tümdengelimli bir yapıya sahip olması nedeniyle tanımlar, teoremler ve ispatlarla ilgili teorilerin titiz bir şekilde kurulmasına odaklanmaktadır (Klein, 2016). Diğer taraftan okul matematiği ise, matematiği günlük yaşamı anlamak ve kolaylaştırmak için bir araç olarak kullanmaya odak kurmaktadır. Böylelikle bu seviyede, matematiksel kavramlar genellikle tümevarımsal bir yaklaşımla, yani genel bir örneği temsil eden prototipler kullanılarak tanıtılır ve öğretilir, ayrıca belirli bir bağlama bağlıdır (Dreher vd., 2016).

Özellikle üniversite düzeyine bırakılan matematiksel ispatla ilgili asıl öğrenilecek içerik, öğrencilerin genellikle lisede gördükleri ispatlarla ilgili tartışmalarda örtük olarak bırakılmaktadır. Bu nedenle çoğu öğrenci, üniversitede ilk kez karşılaştığı ispat odaklı derslere hazırlıksız yakalanmaktadır. Dolayısıyla kendilerinden titiz ispatları nasıl okuyacakları ve anlayacakları beklendiğinde ya da matematiksel argümanları geçerli bir ispat haline nasıl getirecekleri ve bunları başkalarına iletmeyi öğrenmeleri gerektiği beklendiğinde bunalmaktadır (Pinto ve Karsenty, 2018, s.130). Bazen de bazı dersler arası geçişlerde (örn. analiz gibi bir dersten soyut matematik gibi bir derse) hayal kırıklığına uğramaktadır (Campbell vd., 2000). Bu durum farklı çerçevelerde şu şekilde karşılık bulur: üç dünya çerçevesi, algı ve işlemin teorik matematiğinden, tanım ve tümdengelim formal matematiğine geçişin öğrenciler için büyük bir zorluk olduğunu ortaya koymaktadır (Tall, 2013, s. 287). Bunun bir sebebi, okul matematiğinin somutlaştırma ve sembolizmi ile üniversitedeki aksiyomatik formal düşünce arasındaki büyük bir farklılıktır (Tall, 2013, s.284). Nardi'ye (1996) göre ise matematik, soyut kavramlar

üzerine kurulu bir düşünme biçimi olarak nitelendirilmekte olup, böyle olması nedeniyle soyutlama, matematikte ulaşılması en zor zihinsel etkinliklerden biri olarak görülmektedir. Eğitimsel açıdan matematiksel soyutlama ile karşılaşma, informel tabanlı okul matematiğinden üniversite matematiğinin daha formel yapısına geçişin kritik bir eşiğini temsil eder. Bu geçiş daha çok bilişsel gerilimlerle karakterize edilir.

İspatlama sürecinde zorlanmalarının bir nedeni olarak, öğrencilerin matematik dilini ve günlük dili kullanmalarının ispat yazma bakımından farklılık göstermesi (“eğer, ise” ifadelerinin kullanımı) düşünülebilir (Epp, 2003). Daha erken matematik öğrenimlerinden elde ettikleri deneyimlerinde, ispat olarak kabul edilenin, daha çok matematiksel bir iddia ya da ifadenin doğruluğuna yönelik ikna edici argüman girişimleri yer almaktadır. Öğrenciler, üniversitede reel analiz ve soyut cebir gibi ispata yönelik ileri düzey matematik derslerine girdiklerinde ise ispatın karakteri değişir ve bu derslerde, öğrencilerin matematiksel ispatlar veya günümüz/modern matematikçiler tarafından üzerinde anlaşmaya varılan iyi tanımlanmış kurallara uyan argümanlar üretmeleri beklenir (Weber ve Alcock, 2009). Bu durumun matematik eğitimi araştırmalarındaki karşılığı, lisans öğrencilerinin matematiksel ispatın karakterini derinden kafa karıştırıcı bulduklarını ve bu kafa karışıklığının onları başarılı bir şekilde ispat oluşturmalarını engelleyebileceği yönündedir (Weber ve Alcock, 2009). Kısacası ispatlama, matematiksel öğrenmede gerekli ancak öğrenciyi bir bakıma zorlayan bir etkinliktir (Shinno ve Fujita, 2021). Bu sebeple öğrencilerin gözünde ispatın zor olarak karşılanması doğal tepkilendirilmelidir. Matematiksel ispatı kavramayı veya oluşturmayı öğrenmenin kolay bir iş olmadığı da göz ardı edilmemelidir (Pinto ve Karsenty, 2018).

Bununla birlikte, bilimsel bir disiplin olarak matematik ile okullarda öğretilen bir ders olarak matematik arasında giderek artan bir uçurum (Schweiger, 2006) olduğu belirtilmektedir. Bu farklılaşmada bağlamsal bir düğümün, matematikçilerin matematik olarak kabul ettikleri şey ile öğretmenlerin ve eğitimcilerin matematik olarak algıladıkları arasındaki boşluktan (Wu, 2011) kaynaklandığı da söylenebilir. Bu düğümü çözebilmek matematikçilerin ve matematik eğitimcilerinin elinde; yani iş birliği ve deneyimlerini birbiriyle paylaşımları önemli görünmektedir. Okul ve üniversite matematiği arasındaki uçurum her zamankinden daha geniş görüldüğü için, bu durumun doğasını ve

nedenlerini anlamak, günümüz öğrencilerini uçuruma düşmekten korumaya yardımcı olabilir (Sfard, 2014).

1.2 Araştırmanın Amacı ve Önemi

İspatın matematikte yeri var mıdır, varsa nedir? Bu soru, alan yazında hem matematik disiplini hem de matematik eğitimi çevresi açısından çoğu araştırmacının gündemini meşgul etmiştir. Bu araştırmacılardan Schoenfeld (2009) eğer ki problem çözme matematiğin kalbi olarak nitelendirilirse, o zaman ispat da onun ruhudur diye açıklamıştır. Bu söylemiyle, ispatın matematikteki yeri problemine ve matematik için önemine değinmiştir. Diğer taraftan bazı araştırmacılar için ispat matematiğin temeli (VanSpronsen, 2008; Sarı, 2011; Moore, 2016) olarak nitelendirilmektedir. Bu nedendir ki, matematiksel bir önermenin doğru mu yoksa yanlış mı olduğunun onu ispatlayana (ya da çürütene) kadar bilinmeyeceği belirtilmektedir (CadwalladerOlsker, 2011).

Matematiksel ispatın, matematiğin yapısının ne olduğunun öğrenilmesi, takdir edilmesi ve matematiksel bilgiyi iletişim aracılığıyla geliştirerek yaygınlaştırılmasında olmazsa olmaz bir potansiyel taşıması (Pólya, 1981), hem matematik yapmada hem de matematiğin anlaşılmasında gerekli olarak görülmesi (Almeida, 2000), matematiksel içeriğin aktarılması/iletilmesinde aracılık rolü üstlenmesi (Inglis vd., 2013) gibi yönleriyle, merkezi bir matematiksel etkinlik olduğu (Boyle vd., 2015) düşünülmektedir. Ayrıca hem lisans matematik eğitiminde çok önemli bir role sahip olması (Chamberlain ve Vidakovic, 2021) hem de genel olarak matematik eğitimi araştırmalarında bir bütünün ayrılmaz parçası olarak görülerek tamamlayıcı bir rol üstlenmesi, çoğu çalışmanın matematiksel ispata odaklanmasını ve ana aktörü olmasını açıklar niteliktedir (May, 2022).

İspatın matematikteki merkezi öneme sahip olması, aynı zamanda diğer disiplinlere göre matematiği karakterize eden doğrulama yönteminin sistematik bir şekilde kullanılması açısından (Arsac, 2007) matematiğe üstün bir nitelik kazandırmaktadır. Bu merkezi fikri ortak bir şekilde paylaşan Krantz (2007) “tıpkı bir beyzbol vuruşunun kalbinde el-göz koordinasyonu olması, bir mühendis olmanın kalbinde pratik teknik kavrayış olması, bir ressam olmanın kalbinde bir renk ve estetik duygusu olması gibi, bir matematikçi olmanın kalbinde ise ispatları takdir etme ve oluşturma yeteneği vardır” örneklemede bulunarak matematiksel ispatın önemine ve matematikçinin temel uğraşının ispatla anılmasına katkıda bulunmaktadır (s. 33).

Matematikçiler ara sıra matematik eğitimindeki araştırmacılar tarafından yürütülen çalışmaların odak noktası haline gelmektedir (Weber, 2012; Leikin vd., 2018; Fernandez-Leon vd., 2020). Stylianou'ya (2002) göre matematikçilerin verilen bir problem üzerinden akıl yürütme yollarının incelenmesi, ispatlarını geliştirirken düşünme süreçlerine özel bir bakış, onların ispat anlayışlarının doğası ve koşulları hakkında önemli bir mesaj vermektedir. Bu nedenle araştırmacı, matematikçilerin problem üzerinde sergilediği performansın ve bu yetkin performansı karakterize eden özelliklerin ayrıntılı bir incelemesi ile uzman matematikçilerin problem çözme davranışlarının çeşitli yönlerinin keşfedilebileceğini düşünmektedir. Bu incelemeden elde edilecek bilginin, öğrencilerin matematikteki ilerlemesini destekleyebilecek şekilde kullanabilmeye katkı sunacaktır (Stylianou, 2002).

Matematikçilerin matematik eğitimi araştırmalarında katılımcı olarak incelenmesiyle pedagojik bilgi ve pratikleri hakkında bilgi edinilmektedir (Weber, 2012). Bu bağlamda Alcock (2010) matematikçilerin lisans matematiği öğretiminde paylaşılmayı bekleyen önemli miktarda deneyime sahip olduklarını belirtmektedir. Bu nedenle araştırmacı, matematikçilerin pedagojik deneyimlerini araştırmanın öğrencilerin matematiksel akıl yürütme ve davranışları hakkında zengin bir fikir kaynağı olacağına inanmaktadır. Bunun yanı sıra Alcock (2010) matematik eğitimi topluluğu, matematikçilerin öğretimleriyle ilgili tartışmalara katılmalarını istiyorsa, matematikçilerin perspektiflerini anlamaları gerektiğini hatta matematikçilerin görüşlerini ciddiye almanın önemsenmesi gerektiğinin altını çizmektedir. Bu perspektiflerin genel odağı, “matematiksel büyümenin tam spektrumunu ya da yelpazesini görmek için matematik uzmanlarının düşüncelerinin doğasını anlamanın gerekli olduğunun farkındayız” (Tall, 1991, s. xiii) görüşünün yaygınlaştırılabilmesi çabasıdır.

Matematikçi gibi düşünmenin ne demek olduğu, matematikçi gibi yapmanın (CadWalladerOlsker, 2011; Schoenfeld, 1992, 2016; Fernández-León vd., 2020; Stillman vd., 2020) neye benzediği, katılımcıların matematikçilerin yaptıkları aynı tür etkinliklere katılmaları (Rasmussen vd., 2005) sağlanarak anlaşılabilir. Bu bağlamda Stavrou (2014) matematikçilerin nasıl ispatlamaya koyulduklarını matematiğin önemli bir yönü olarak görmekte ve matematikçilerin, hangi ispat yöntemlerinin kullanılacağına nasıl karar verdiğine daha detaylı bakmanın faydalı olacağını ifade etmektedir. Weber (2008) matematikçilerin ispatlama girişimlerinde

argümanlarını geçerli bir ispat haline nasıl ulaştırdıklarını inceleyen bir araştırma yapmıştır. Fakat matematikçilerin ispatları nasıl oluşturduğunu ve yapılandırıldığını görmek için daha fazla araştırma yapılması gerekmektedir (Stavrou, 2014). Diğer taraftan, Trulove (2004) matematik eğitimi alanında öğretmen adayları ve öğrencileri ele alan inançların (algıların) sıklıkla incelendiğini fakat bu alandaki uzmanlarla sınırlı çalışmaların yapıldığından bahsetmektedir. Ayrıca mevcut alan yazının temel olarak öğretmenlerle yapılan çalışmalara dayandığı, matematikçileri ele alan çalışmaların ise sınırlılığına dikkat çekilmektedir (Yan vd., 2020). Dolayısıyla alandaki profesyonelleri ele alan tutumlar, inançlar ve kavramlar, gelecekteki öğretmenlerin eğitimi ve mevcut öğretmenler için hizmet içi fırsatlar hakkındaki kararları şekillendirmede değerli görülmektedir. Bu açıdan uzmanların ispat yazma stratejilerinin daha fazla araştırılmasının kıymetli olacağı (VanSpronsen, 2008) görüşü üzerinde yoğunlaşmaktadır.

Uzman ve acemi çalışmalarında, hangi farklılıkların mevcut olduğunun bilinmesi, öğretimsel vurgular için fikir verebilmektedir (Harel ve Sowder, 2007). Benzerliklerin ve farklılıkların neden var olabileceğinin anlaşılması, bu farklılıkların uygun veya arzu edilir olup olmadığını değerlendirmeye ve ardından uygulamaya ve/veya topluluklar arasındaki uyum anlayışına yönelik düzenlemeler için ilk ve gerekli adım (Staples vd., 2012) olarak nitelendirilmektedir. Bu nedenle öğrencilerin ve matematikçilerin uygulamaları arasındaki boşluğu kapatma çabası, matematik öğretiminin bir hedefi olarak kabul ediliyorsa, matematikçilerin matematik yaparkenki düşünce ve davranışlarını net ve doğru bir biçimde anlamak gerekmektedir (Stylianou, 2002). Böylelikle, matematikçilerin matematik yaparken davranışlarını incelemek bu anlayışı geliştirmede fayda sağlayabilecektir (Weber, 2012).

Sadece matematik eğitimindeki öğrenciler için değil aynı zamanda lisans matematik programlarındaki öğrenciler için de ispatla ilgili kavrayışlar ve oluşması gereken ya da kazanılması beklenen yeterlilikler (Fagan ve Melhuish, 2018) önemli bir diğer boyuttur. Bunun bir sebebi, matematik bölümü öğrencilerinin çoğu, aynı zamanda lise matematik öğretmen adaydır (Weber, 2010a). Matematik öğretmen adayları ayrı bir öğrenci kategorisidir; acemi öğretmenler ve uzman öğrenciler arasında bir kavşakta bulunurlar (Sears, 2019). Okul Matematiği için Prensipler ve Standartlar klavuzunda, “yönlendirme ile öğrenciler, açıklamaları kabul etmek için yüksek standartlar geliştirmelidir” ve öğrencilerin “sınıfların sorgulama

toplulukları haline gelebilmesi için açıklamaları aramaları, formüle etmeleri ve eleştirmeleri” gerektiği belirtilmektedir (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000, s. 346). Bu doğrultuda, tüm öğrencilere bir disiplin olarak matematikte doğası ve rolü bakımından ispatla ilgili zengin fırsatlar sunabilme ve deneyimler yaşatabilmek adına ortaöğretim matematik öğretmenlerine önemli görevler düşmekte olup, öğretmenlerin bunları yerine getirebilmesine katkıda bulunabilecek önemli bir nokta ise kendilerinin ispat anlayışlarının anlaşılmasıdır (Knuth, 2002b). Bu nedenle, lise öğretmen adaylarından, doğru bir ispat anlayışına sahip olmadan matematik bölümünden mezun olarak ayrıldıklarında ve birer matematik öğretmeni olarak öğretime başladıklarında yukarıda açıklanan amaçları gerçekleştirebilmelerini beklemek söz konusu olamayacaktır (Weber, 2010a). Diğer taraftan, matematik öğretmenlerinin ispatla ilgili deneyimlerinin doğasından başlıca sorumlu tarafların aynı zamanda bu öğretmenlerin ispat kavramlarını geliştirmekle de yükümlü olması (Knuth, 2002b) sebebiyle, alandaki uzmanların/profesyonellerin düşünme yolları ve yapılarının birlikte araştırılması açısından bu çalışmanın önemli olduğu düşünülmektedir. Özetle, aynı madalyonun iki yüzünü de referans alarak birbirlerini tamamlaması açısından matematiksel ispatın karşılıklarına disiplin ve eğitimsel bir perspektifte bakmak faydalı olabilir.

Matematikçilerin ispatlamayla ilgili olarak algılanan karakteristiklerinin (özellikle öğrencilerde gözlemlenemeyen göstergeler) daha iyi anlaşılmasıyla, öğrencilerin tamamlayıcı uzantılarına daha doğru bir bakış açısının geliştirebileceği (Lynch ve Lockwood, 2019) düşünülmektedir. Bu bağlamda, matematikçilerin uygulamaları hakkında fikir sahibi olarak; böylece öğrencilerin matematiksel düşüncelerinde ve etkinliklerinde daha başarılı olabilmeleri için neler yapabileceğine, daha verimli olmalarının nasıl sağlanacağına dair anlayışlar, farklılıkların dikkatli bir analiziyle, matematikçilerin öğrencilerin yapmadığı şeylerini daha derinden anlamaya çalışarak (Lynch ve Lockwood, 2019) yakalanabilmektedir. Bu sayede, öğrencilerde gözlemlenen/gözlemlenmek istenen yapılar ile öğretim üyelerinde gözlemlenen/gözlemlenmek istenen yapılar arasındaki temel benzerlikleri ve farklılıkları vurgulayarak, ispatlamada belli başlı karakteristikler hakkında öğretimsel çıkarımlara yönelik bilgiler edinebilir. Bu açıdan farklı matematiksel topluluklar karşılaştırıldığında, öğrencilerin ispatla ilgili düşünce yapılarının ve algılarının bu topluluklar içerisinde nasıl

konumlandırılacağı belli bir yörüngede resmedilebilir. Matematiksel ispatta öğrencilerin nerede kaldıkları, aslında neye dönüşmesi/evrilmesi gerektiği, beklenen olgunlaşma seviyesine ulaşıp ulaşılmadığının bir ölçüsü olarak hangi katkıların/müdahalelerin yapılması gerektiğinin anlaşılmasında daha deneyimli/uzman profillerin incelenmesi değerli bir araştırma noktasıdır. Fakat alan yazın incelendiğinde, yurt dışında matematikçileri ve matematikçilerin pratiklerini ele alan son yıllara doğru büyüyen (örn. Stewart ve Schmidt, 2017; Stewart, Esptein ve Troup, 2019; Yan vd., 2020) bir araştırma gövdesi olsa da, Türkiye’de bu yöndeki çalışmaların öğretim üyeleri açısından daha sınırlı olduğunu hatta pür matematikçiler açısından mevcut olmadığını göstermektedir (Öztürk ve Demirel, 2022; Sakallı-Doğru, 2022). Ayrıca matematiksel ispatı tüm toplulukların meselesi (Selden ve Selden, 2003; Hemmi, 2006) olarak görme durumu dikkate alındığında, ülkemizde bu alanda yapılmış çalışmaların yaygın katılımcıları öğretmen adayları olarak görünmekte olup matematik bölümü öğrencilerini kapsayan çalışmaların da benzer şekilde sınırlı olduğu dikkat çekmektedir (Öztürk ve Demirel, 2022; Sakallı-Doğru, 2022). Bu bağlamda, bu araştırmanın matematiksel ispatın farklı topluluklarını birlikte ele alarak alan yazına katkıda bulunacağı düşünülmektedir.

Bu araştırma, matematiksel ispatın üniversite düzeyinde temel alıcı kitlesini ve verici gövdesini oluşturan hem öğrenci hem de öğretim üyesi bileşenlerine matematik disiplini ve matematik eğitimi toplulukları cinsinden temas ederek odaklanmaktadır. Araştırmanın amacı, farklı matematik topluluklarının ispat karakteristiklerini algı ve pratikleri açısından incelemektir.

1.3 Araştırma Soruları

- 1) Matematikçilerin, matematik eğitimcilerinin, matematik öğretmenliği programı son sınıf öğrencilerinin ve matematik programı son sınıf öğrencilerinin matematiksel ispata ilişkin algıları nelerdir?
- 2) Matematikçilerin, matematik eğitimcilerinin, matematik öğretmenliği programı son sınıf öğrencilerinin ve matematik programı son sınıf öğrencilerinin matematiksel ispata ilişkin pratikleri nelerdir?

1.4 Araştırmanın Sınırlılıkları

Matematikçilerin, matematik eğitimcilerinin, matematik programı son sınıf öğrencilerinin ve matematik öğretmenliği programı son sınıf öğrencilerinin matematiksel ispatlama girişimleriyle anlaşılmaya çalışılan pratikleri Etkinlik 1 ile sınırlıdır.

1.5 Araştırmanın Varsayımları

Matematikçilerin, matematik eğitimcilerinin, matematik programı öğrencilerinin ve matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin araştırma sürecindeki görüşme sorularını içtenlikle cevapladıkları varsayılmıştır.

Katılımcıların matematiksel ispat üzerine düşüncelerini açık ve samimi bir şekilde ortaya koydukları varsayılmıştır.

1.6 Tanımlar

Matematikçi: Alanyazındaki bazı çalışmalarda matematikçi olarak, doktora derecesine sahip olan ve matematik alanında araştırma makaleleri yayınlamış olan araştırmacılar olarak ‘araştırmacı matematikçisi’ (research mathematician) (Fernández-León vd., 2021) ifadesi kullanılmaktadır. Çalışmalarda ‘matematikçi’ olarak örtük olarak üniversitedeki pür bir matematikçiden bahsedilmektedir (Stillman vd., 2020). Selden ve Selden’in (2003) çalışmasında matematikçiden, özellikle pür matematik alanında araştırma yapan, teori ortaya atan ve teoremleri ispatlayan kişi anlamında bahsedilmektedir. Bu çalışmada matematikçi, doktora derecesi almış, pür matematik alanında araştırma makaleleri yayınlamış olan ve teori ortaya atarak teoremleri ispatlayan araştırmacıları ifade eder.

Matematik Eğitimcisi: Bu çalışmada doktora derecesine sahip olan ve matematik eğitimi alanında araştırma makaleleri yayınlamış olan araştırmacıları ifade eder.

Matematik programı öğrencileri: Bu çalışmada ‘matematik programı öğrencileri’ ile bir devlet üniversitesinin Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde öğrenim gören son sınıf öğrencileri kastedilmektedir.

Matematik öğretmenliği programı öğrencileri: Bu çalışmada ‘matematik öğretmenliği programı öğrencileri’ ile aynı devlet üniversitesinde (yukarıda ifade edildiği bağlamda) Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünde öğrenim gören son sınıf öğrencileri kastedilmektedir.

Matematiksel ispat (formal bağlam): Kabuller, tanımlar, teoremler, çıkarım kuralları çerçevesinde ispatlanması gereken cümleyi mantıksal çıkarım kurallarını kullanarak adım adım göstermektir (Houston, 2009, s.116).

Matematiksel ispat (matematiksel sınıf bağlamı/okul matematiği): “matematiksel bir iddiayı doğrulamak ya da çürütmek amacıyla oluşturulan birbirine mantıksal olarak bağlı bir dizi savdan oluşan şu özelliklere sahip matematiksel bir argümandır: 1) sınıf topluluğu tarafından doğru olarak kabul edilmiş ve başka herhangi bir gerekçelendirmeye ihtiyaç duyulmayan matematiksel ifadeleri kullanır (kabul edilmiş ifadeler kümesi), 2) sınıf topluluğu tarafından bilinen ve geçerli olan ya da sınıf topluluğunun kavramsal erişim sınırları içerisindeki akıl yürütme biçimlerini kullanır (argümantasyon modları), 3) iletişim olarak sınıf topluluğu tarafından bilinen ve uygun olan ya da bu topluluğun kavramsal olarak erişim sınırları içerisindeki ifade etme biçimlerini kullanır (argümanın temsil modları)” (Stylianides, 2007, s. 291).

2. ARAŞTIRMANIN KURAMSAL TEMELİ VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Araştırmanın bu bölümünde, araştırmaya konu olan matematiksel ispat kavramına, bu kavramın kuramsal temellerine ilişkin açıklamalara ve alanyazındaki ilgili araştırmalara yer verilmiştir.

2.1 Kuramsal Çerçeve

Bu kısımda, matematiksel ispat kavramına, matematik tarihi boyunca bu kavramın gelişimine, çeşitli rollerine, okul matematiği ve üniversite matematiği bağlamlarına, matematikçilerin matematik eğitimindeki rollerine ve ispatın kavramsallaştırılmasına yönelik çerçevelere ilişkin açıklamalara yer verilmiştir.

2.1.1 Matematiksel İspatın Tanımı, Tarihsel Temelleri ve Gelişimi

İspat, çok yönlü, tanımlanması zor ve farklı kişilerin farklı görüşlere sahip olduğu bir kavramdır; aslında tüm matematiğe nüfuz etmektedir (Hemmi, 2006). Tall (1989) bu durumdan “öğrenciler, *ispat* teriminin birçok farklı anlama geldiği bir dünyada yaşıyorlar ve bu yüzden onların ispatın anlamını yorumlamaları öğretmeninkinden farklı olabilir, tıpkı bir öğretmenin yorumunun diğerinden farklı olabilmesi gibi” şeklinde bahsetmektedir (s.2). Bu nedenle Tall’a (1999) göre matematiksel ispat sürecinin iki farklı amacı vardır. Birincisi, bir varsayımın bir dizi mantıksal adımda belirtilen bir sonuca yol açtığını göstermektir. Diğer, varsayımlardan sonucun nasıl ve neden çıktığı konusunda anlamlı bir fikir/içgörü vermektir. Bu ikisinin birbirinden bağımsız olabileceğini, yani mantıksal bir ispatın anlamlı olması gerekmediğini ve anlamlı bir ispatın mantıksal olması gerekmediğini dikkate almaktadır. İkinci olan, ikna edici bir içgörü sağlayarak, öğrencilerin düşüncelerini desteklemek için bağlantılar kurmalarına yardımcı olmaktadır (s.118).

Bazı araştırmalarda genel olarak matematiksel ispatın iki ayrı yönüne vurgu yapılmaktadır. Bu araştırmalara örnek olarak Dawson (2006), Arsac (2007) ve CadWalladerOlsker (2011) verilebilir. CadWalladerOlsker’e (2011) göre matematiksel ispatla neyi kastettiğimiz ya da bu kavramdan neyi anladığımız bir matematikçiye, bir eğitimciye, bir filozofa ya da bir öğrenci gibi hala üzerinde bir uzlaşma kurulmaya ya da buna gelen cevapların evrildiği, evrilmeye açık olduğu kısacası çeşitli toplulukların bakış açısından farklı bir mesele haline geldiği

anlaşılmaktadır. Böyle olmakla birlikte yaygın olarak iki farklı ispat kavramından bahsedilebileceğini ifade etmektedir: Formal ispat ve pratik ispat (s.34). Dawson (2006) da hemen hemen aynı bir tanımlamadan bahsederek ispatı formal ispatlar ve informal ispatlar şeklinde ikiye ayırmaktadır (s. 270).

Arsac (2007) matematiksel ispatla kastedileni iki uça ele almaktadır: formal bir kutup, sosyal/kültürel kutup. İlki, kesin kurallara uyarak matematiksel ispatın biçimiyle ya da görünümüyle; diğerrinin matematikçiler tarafından geçerli olarak kabul edilmesi yönüyle karakterize edilmesiyle ilgilidir. Formal anlamda kullanılan bir tanım, ispatlama sürecinin sonuçlarını matematiksel olarak uygun bir şekilde tanımlamak için yeterlidir, ancak bir ispatın temel özelliklerini ve ispat oluşturmak için gerekli sosyal bileşenleri tanımlamakta başarısız olur (Bieda, 2010, s. 354; örn. Dawson, 2006).

Hanna'ya (1990) göre 'formal ispat', 'kabul edilebilir ispat' ve 'ispat öğretimi' şeklinde 3 farklı ispat algısından bahsetmek mümkündür. Hanna'nın bu ayrımı, ispatı sırasıyla, matematiksel pratiğin (uygulamanın) yaklaştığı ideal olarak düşünülebilecek nitelikte, formal mantıkta teorik bir kavram olarak; nitelikli matematikçiler için neyin kabul edilebilir olduğu yönünde, normatif bir kavram olarak; öğrenciye iletmeye değer fikirleri açıklamaya yarayacak nitelikte, matematik eğitiminde bir etkinlik olarak anlamamıza katkıda bulunmaktadır.

Ayrıca Hanna (1990) 'ispatlayan bir ispat' ve 'açıklayan bir ispat' şeklinde de bir ayrıma ihtiyaç duymakla birlikte, bu iki ispat türünün de matematiksel bir ispatın gerekliliklerini yerine getirdiğini ve bu yüzden matematiksel bir iddianın geçerliliğini saptamaya eşit derecede katkıda bulunduğunu ifade etmektedir. Buradaki ayrım noktası, ilki, sadece bir teoremin doğru olduğunu gösterirken, diğeri, o teoremin neden doğru olduğunu da göstermektedir. Bu ayrımı daha anlaşılır kılacak bir durum olarak, Hanna, ispatlayan bir ispatta tümevarım veya sentaktik hususların dayanak olabileceğini; açıklayan bir ispatta ise ilgili matematiksel fikirlere, öne sürülen teoremin doğru olmasına neden olan matematiksel özelliklere dayalı bir mantığın gerektiğini belirtmektedir (s. 9).

Diğerr taraftan Schweiger (2006) matematiğin kullanım alanlarını ilgilendirebilecek bir duruma değinerek matematik ile ilgili birkaç farklı kültürden bahsetmektedir: günlük yaşamda veya sosyal pratikte matematik, uygulamalar için bir araç kutusu olarak matematik, okulda matematik ve bir bilim olarak matematik. Bu değışen bağlamlara göre matematiksel ispatın da farklı bağlamlardaki

duruşunun ya da tezahürlerinin olabileceği akla gelmektedir. Bu anlamda Recio ve Godino'nun (2001) çalışmasında görülebilmektedir. Bu araştırmacılar açısından, matematik camiası (topluluğu) tarafından katı ve mutlak bir şekilde anlaşılan ispat fikri, tek geçerli kavram olarak kabul edilmiş görünmektedir. Öte yandan, ispatın çeşitli anlamlarına ilişkin sistematik bir çalışma yürütmenin, yalnızca öznel bakış açısından değil, aynı zamanda farklı kurumsal bağlamlarda da gerekli olduğu düşünülmektedir. Bu tür bir çalışma, farklı araştırmaların katkılarını karşılaştırmaya, yeni araştırma problemleri oluşturmaya, öğrencilerin gözlenen güçlüklerine alternatif yorumlar sunmaya ve yeni didaktik önerileri hazırlamaya hizmet edeceği belirtilmektedir (Recio ve Godino, 2001, s.83). Recio ve Godino'nun bahsettiği, matematiksel ispatın anlamlarını irdelediği kurumsal bağlamlar; günlük yaşam, deneysel/ampirik bilimler, profesyonel matematik, mantık ve matematiğin temelleridir. Doğruluk ve ispat meselesinin bu bağlamlarda çağrıştırdığı anlamlar sayesinde daha farklı bakış açılarını belirlemenin de mümkün olduğunu eklemektedir (s. 92).

Günlük yaşam: Araştırmacılar, günlük yaşamda ispatın anlamını Miller-Jones'ın (1991) informel akıl yürütme terimiyle destekleyerek, bireylerin duruma özgü argümanları kullanarak yol almasıyla karakterize etmektedirler. Sembolik mantık ve matematiksel dilin formelliği yerine günlük yaşam dilini kullandığı için, ispatın nesnel özelliklerinden yoksundur, ifadenin mutlak ve evrensel bir geçerliliği yoktur; kurala uymayan bir örnek, kuralı tamamen geçersiz kılmaz, fakat ifadeyi sağlayan daha fazla olgu bulunduğunda geçerliliği artmaktadır (Recio & Godino, 2001, s.92).

Deneysel/ampirik bilimler: Deneysel doğrulama ile koşullandırılmış rasyonel ve nesnel bilgi üretmeye yönlendiren bir doğrulama amacına sahiptir. Günlük yaşamın sezgisel argümantasyonunun yerini deneysel ispat; inançların yerini ise deneysel olarak doğrulanmış teoriler alır (Recio ve Godino, 2001, s.93).

Profesyonel matematik: Matematiksel ispat, matematiksel önermelerin doğruluğunu gerekçelendirmek için mantıksal bir yol işletilerek geliştirilen bir süreç olarak nitelendirilmektedir. Bu ispatın tipik modeli tümdengelimli ispat olarak görülmektedir. Bununla birlikte, matematik öğretmenlerinin sınıflarında 'öğrenci için anlayış nasıl geliştirilir' ilkesine dayalı bir uygulama benimsemeleri gereği biçimci titizliğin pratikteki karşılığı kırılmaktadır (Recio ve Godino, 2001, s.94, örn, Ruthcoven).

Bu bakımdan matematiksel pratikte karşılaşılan gerçekler söz konusudur ve burada formel geçerliliğin farklı bir derecelendirmesinden (örn. Van Asch, pre-formal) bahsetmek mümkündür. Örneğin biçimci bir görünüşün (ve sadece bunların geçerli olarak nitelendirildiği bağlamın) ötesinde, bir görselleştirme, bir grafik temsil gibi argümanlar öğrenci anlayışında ikna edici yollar olarak matematiksel ispat şeklinde anlam kazanabilir.

Mantık ve matematiğin temelleri: Bu bağlamda ispat kavramı, tümdengelim ve formel sistemlerle bağlantılı bir şekilde ele alınmaktadır. Yukarıda belirtildiği gibi, tümdengelimli bir argümantasyon sürecine işaret etmektedir. Pür tümdengelimli akıl yürütme argümanları, aksiyomatik ve formel sistemlerde yer almaktadır (Recio ve Godino, 2001, s. 94-95). Çıkarım kuralları, teoremleri temsil eden cümlelerin aksiyomlardan nasıl çıkarılabileceğini belirlemektedir. Matematiksel bir teorideki ispatın karşılığı, her biri bir aksiyom (ya da aksiyomlardan çıkarım kurallarıyla elde edilen bir önerme) olan bir önermeler dizisidir. Teorem ise bir ispat kullanılarak bu yolla elde edilen bir önermedir. Formelleştirme, semantik bir doğruluk anlayışını, sentaktik bir doğruluk anlayışıyla değiştirir. Bu, belirli bir formel sistem içinde tutarlılık olarak yorumlanır.

Diğer araştırmacılar ve Recio ve Godino (2001) gibi Miller-Jones (1991) da benzer bir duruma işaret ederek “benim bakış açımdan, formel akıl yürütme, bunun yerine temeldeki mantıksal ilişkilere (kapalı bir tümdengelim sisteminin dayatılmasıyla belirlenir) dayanarak düşünmenin bu "durumsal olumsuzluğu" azaltmayı amaçlarken, informel akıl yürütme bir duruma özgü kaynakların kullanımını arar” (s.108). Bu görüşe göre, informel akıl yürütme, durumun belirli faktörlerinin akıl yürütmeye girme şekli ile karakterize edilir. Formel akıl yürütme, kullanılan tümdengelim sistemine göre kapalıyken, informel akıl yürütme, uygulandığı duruma göre kapalı sayılabilir. Gündelik akıl yürütmenin birçok biçimi, mevcut durumun özelliklerinden, zaman içinde ortaya çıkma kalitesine sahip görünüyor. Yerleşik (situated) düşünmenin bu ortaya çıkan niteliği, çoğu zaman, çoğu günlük durumda makul ölçüde etkili olan buluşsal (heuristics) veya zihinsel kısayollar olarak informel akıl yürütme görüşüne yol açmıştır (Miller-Jones, 1991). Matematikte genel ifadelerin doğrulanma şekli olarak ispatlama, günlük söylemlerden oldukça farklı olan ve tarihsel olarak bakıldığında belirli kurallar tarafından yönetilir (Valenta ve Enge, 2022).

Araştırmalarda “ispat” ve “ispatlama” terimleriyle ilgili, günlük yaşam, matematik ve matematik eğitimi gibi farklı bağlam ve alanlarda genel olarak farklı şekillerde kullanıldığına dikkat çekilmektedir (Reid ve Knipping 2010). Herbst ve Balacheff (2009) bu çoklu kullanımları göz ardı etmek iletişim kurma çabalarında bir çıkmaza yol açabilir. Ancak cevap, tek bir “doğru” kullanımda ısrar etmek değildir. *“Alan, ‘ispat’ ile ne demek istediğimiz konusunda bir çıkmazdaysa, bunun kısmen, kelimenin her kullanımı için başvurulacak kapsamlı bir ispat kavramı üzerindeki ısrardan kaynaklandığını iddia ediyoruz. Birinin ispat işini gözlemlemek istediği matematiksel etkinlik alanına özellikle dikkat etmemiz gerektiğini öneriyoruz... Sınıfların matematiğini anlamak ve değerlendirmek için onu işlevsel hale getirmek için kelime için en az üç anlama ihtiyacımız olduğunu savunduk... ispatın benzersiz-tek ve evrensel bir karakterizasyonu diye bir şey yoktur; belirli nesneler hakkında belirli iddialar için belirli ispatlar vardır”* (Herbst ve Balacheff, 2009, s.62). Bunun altında, ispatın her bağlamda evrensel olarak sadece tek bir anlamının olduğu şeklindeki ısrarın, özellikle matematik eğitimi sınıflarında matematiksel söylemi kıran bir çıkmaza sürükleyeceği düşüncesi yatmaktadır.

Herbst ve Balacheff’in ele almak istediği düşüncenin özünde, matematik sınıfının kendine özgü koşullarının, okul matematiğindeki ispatın doğası hakkındaki düşündüğümüzün, matematik camiasındaki gibi bir ortamdakinden farklı olarak düşünülmesini gerektirdiği yer almaktadır. Bu koşullar, matematik disiplininde ispatın varlığının, okul matematiğinde nasıl var olduğuna dair belirli sonuçlara neden olan, öğretmen ve öğrenci arasındaki kendine özgü dinamiği kabul eden ve belirli bir argümanla ikna olmanın bireyin özünde olduğunu kabul eden amaçlarla çerçevelenebilir (Stylianou vd. 2009, s. 14-15).

İspat ve ispatlamayla ilgili farklı kullanımların söz konusu olması, bunların birbirinden ayrık şeyler olduğu anlamına gelmemelidir. Bir araştırmacının bir bağlamda bu farklı kullanımlardan sadece bir tanesini benimsemesi, bir sonraki kullanımında da aynı amaçla ya bakış açısında olacağını garantilemez. Aksine, farklı kullanımların olduğunun farkında olmak, matematik eğitimindeki araştırmaları daha iyi yorumlamak için kıymetlidir (Reid ve Knipping, 2010, s. 33). Her iki akıl yürütme türü de uygulanabilir olduğundan, öğretmenin kendi tercihleri ve ispatın kişiye mantıklı gelen anlamı ne olursa olsun, matematik eğitimcilerinin her iki akıl yürütme türünün farkında olması, bunların kullanımına izin vermesi ve hatta bunlara teşvik etmesi önemlidir (CadWalladerOlssker, 2011). Bu nedenle,

özellikle öğretmen eğitiminde, ispat kavramının içinde barındırdığı çok yönlülüğün vurgulanması gerektiği düşünülmektedir (Zeybek-Şimşek, 2020).

2.1.1.1 Matematiksel İspatı Tanımlama

Günümüzde ispatın tanımında ortak bir görüş paylaşamamaktadır. Ancak ispatı idealize etmeye çalışan bazı tanımlamalar mevcuttur. Örneğin ispat, matematiksel bilgiyi ya da bilgileri içselleştirmeye yarayan temel mekanizmalardan biri olarak görülebilmektedir (Pala ve Narlı, 2018). Bunun yanı sıra, ispat kavramı çok çeşitli konuları ve fikirleri içinde barındırdığından ispatı tanımlama ya da ispat için gerekli olan titizlik (rigor) standardı konusunda, araştırmacılar arasında bazı tutarsızlıklar olmuştur (Knapp, 2005). Bazı araştırmacılara göre ispatlama ikna edici olma ile eş anlamda kullanılırken (Balacheff, 1987), okul matematiğinde 'ispat' dediğimiz şeyin uygulamasına/pratiğine bakmak gerektiğini vurgulayan bir çalışmada (Tall, 1989) ise ikna edici argümanların ispat olmayabileceğine dair görüş hakimdir. Alibert ve Thomas (2002) kişi için bir ifade hakkında kesinlik sağlamanın kendini ikna etmek ve başkalarını ikna etmek şeklinde iki amacı olabileceğini belirtmiştir. Bu doğrultuda, Harel ve Rabin (2010) ise ispatı kişinin kendisi adına emin olmak veya başkalarını bir iddianın doğru olduğuna ikna etmek için ürettiği belirli bir argüman olarak tanımlamaktadırlar. Genel olarak bakıldığında, ispatı tanımlama kısmının biraz zorlu bir süreç olduğu söylenebilir. Çünkü bir matematikçi keşfettiğini düşündüğü şeyi anlatmadan önce, onu tanımlamalıdır. Düşünceler labirentinin içinde, başkalarının ilgisini çeken yeni bilgi olma potansiyeline sahip olanı ayırt etmek onun için kolay değildir ve elde edilen ispatlar nadiren orijinal varsayımlardandır. Bu yüzden eski veya yeni, benzer ve ilgili bilgilerin tamamen yeniden düzenlenmesine başlanmalıdır. Buna ek olarak, kişinin hatalarının ve gelişigüzel ilerlemenin izlerini taşıyan tüm ilgisiz düşünceler bastırılmalıdır (Brousseau, 1997).

Tanımlama boyutundaki zorluğun üstesinden gelebilmenin bir yolu, eğer ispat olmayan şeyleri tanımlayabilirsek ispatın ne olduğunu tanımlayabilmeye dair fikir edinebiliriz. Bu yüzden bu noktayı aydınatabilecek görüşlerin varlığı da önemli görülmektedir. Örneğin, Pólya'ya (1957) göre bir argümanın ispat olabilmesi için, hiçbir boşluk, hiçbir açık, hiçbir belirsizlik bırakmamalıdır; yoksa o ispat değildir. Ayrıca, Pólya böylesine kesin bir şekilde eksiksiz bir ispat fikrini Öklid'ten ve onun eserinden anlamanın mümkün olduğunu belirtmiştir (s. 215).

Öklid'in eserinde, aksiyomlar, tanımlar ve önermeler rastgele sırada verilmemektedir, tamamlanmış bir sırayla sunulmaktadır. Her önerme, önceki aksiyomlara, tanımlara ve önermelere dayandırılabilir şekilde konumlandırılmaktadır. Şimdiki geometri sistemi ispatlarla pekiştirilmiştir. Her önerme, bir ispatla önceki aksiyomlara, tanımlara ve önermelere bağlıdır. Bu tür ispatları anlamadan sistemin özü anlaşılamaz. Kısacası, Pólya öğrenciye mantıksal sistem fikrini kazandırmak isteniyorsa, geometrik ispatlara yer ayrılması gerektiğini ifade etmiştir (s. 217). Bu doğrultuda Pólya'dan hareketle daha iyi bir anlayış geliştirebilmek adına, matematiksel ispatın tarihi serüvenine bir göz atmakta fayda vardır.

2.1.1.2 Matematiksel İspatın Tarihsel Temelleri ve Gelişimi

Çoğu çalışma alanında bilgi, gözlemlerden, gözlemlerin sonuçları hakkında akıl yürütme yoluyla ve diğerlerinin gözlemlerini, yöntemlerini ve teorilerini inceleyerek elde edilmiştir. Yöntemler gözlemlerden öğrenilmiş ve başkalarına aktarılmıştır (Zacharie, 2009). Çünkü çevremizdeki dünyayı anlamlandırabilme insanın doğasında vardır. Bir disiplin olarak matematikte de bir zamanlar böyle olmuştur, çünkü matematik bu uğraş için doğal bir araçtır (Krantz, 2007).

Matematik tarihinde, ispatın titizliği ve ispata olan gereksinimler o zaman diliminde yaşayan farklı kültürlerin uğraşlarına göre değişmiştir. İspatla ilgili tarihi bir perspektiften bazı çalışmalar bu değişimleri anlamamıza katkıda bulunmaktadır (bkz. Kleiner, 1991; Almeida, 2001; Krantz, 2007; Zacharie, 2009).

Babil matematiği, Yunan öncesi matematiğin en gelişmiş ve karmaşık olanıdır, ancak ispat kavramından yoksundur. Babil matematiğinde genel bir ifade yoktur ve sonuçların geçerliliğine dair herhangi bir çıkarım (deduction) veya hatta makul bir açıklama girişi yoktur. Buradaki matematik belirli problemlerle ilgilenir ve çözümler kurallara dayalıdır (Kleiner, 1991).

Matematik, ilk zamanlarda genellikle pratikteki faydası ile ilişkilendirilmiştir. Örneğin antik Mısır, Babil ve Çin matematiği, araziyi ölçmek, vergileri hesaplamak, tutulmaları tahmin etmek, denklemleri çözmek için kurallardan oluşmuştur (Zacharie, 2009). Bu nedenle, geometri ve trigonometri sorularını dikkate almak doğal karşılanmıştır. Üçgenler ve dikdörtgenler bu bağlamda ortaya çıkmış, böylece erken geometri bu yapılar üzerinde yoğunlaşmıştır. Daha sonra arenaların, su depolarının vb. diğer pratik projelerin

tasarımı için çemberler devreye girmiş ve bunlar üzerinde tartışılmıştır. Tüm bunlar göz önüne alındığında, matematik olgular üzerine kurulmuştur. Bu bağlamda, matematiksel bir olgu için gerekli olan tüm gerekçelendirme bundan ibaret olmuştur. Bu yüzden matematiksel ifadelerin ispatlanması kavramı, doğruluğunun test edilmesi düşüncesi hep bir fikrin geliştirilmesinden sonrasına bırakılmıştır. O yüzden başlangıçta, ispat kavramı için bir standart yoktur. “Oyunun kuralları” olan mantıksal yapı henüz kurulmamıştır. Bunun için, matematikçilerin ilk önce tanımları ve aksiyomları yerine koyması gerekmektedir. Tarihte matematiksel ispatın doğasını anlamaya yönelik çabalar bu yönde olmuştur. Daha sonra matematiğe yaklaşımda değişiklikler olmuştur. Antik matematikçiler (Miletli Thales, Knidoslu Eudoxus, Atinalı Theaetetus) gerçek anlamda teoremleri formülleştiren kişiler olmuştur (Krantz, 2007). Antik Yunanlılar, aritmetik ve geometride sonuçların doğru olduğunu ispatlamanın mümkün olduğunu keşfetmişlerdir. Matematikteki bazı gerçeklerin açık olduğunu ve diğerlerinin çoğunun mantıksal olarak açık olanları takip ettiğinin gösterilebileceğini bulmuşlardır (örn. Pisagor bağıntısı, bkz. Zacharie, 2009).

Aksiyomatik yöntem, antik Yunanlıların matematiğe yaptığı en önemli katkıdır. Matematiğin soyutlamalarla ilgilendiğinin ve tümdengelimli akıl yürütmeyle ispatlamanın matematiksel akıl yürütme için bir temel sunduğu açık bir şekilde kabul edilmiştir. Tarihin ilerleyen zamanlarında, on altıncı ve on yedinci yüzyıllarda sembolik notasyonun ortaya çıkışıyla (esas olarak Viète, Descartes ve Leibniz'den kaynaklanan), bu gelişmenin çok güçlü bir gösterim yöntemi olduğu düşünülmüştür (örn. Cardan'ın 1545'te Kübik çözüm için verdiği ispat). Temeller ile ilgili endişe hiçbir zaman tam olarak eksik olmamış ancak 19. yüzyılda gelişim göstermesi, baskın bir şekilde ele alınmasına katkı sağlamıştır. Bu yüzyılda özellikle Gauss'un 1801'deki eserinde görünür olan, matematiğin çeşitli alanlarında ve özellikle analizdeki kavram ve yöntemlerin incelenmesi ruhunu başlatmıştır. Arkasından Peacock'un cebirdeki, Bolzano'nun analizdeki çalışmaları gelmiştir. Daha sonra Cauchy'nin 1821'de analiz için sağlam bir temel sağlayan çalışmaları (limit, süreklilik, yakınsaklık, türev ve integral) kavramsal incelemeleri takip etmiştir. Cauchy'nin, analizin titizleştirilmesine yönelik yeni önerileri, yeni problemleri beraberinde getirmiş ve yeni nesil matematikçileri bu problemleri çözmeye ikna etmiştir. Cauchy'nin analize yaklaşımı bu varisleri için iki temel problem, a) limit ve süreklilik kavramlarına ilişkin sözel tanımlar ve sonsuz

küçükleri sıkça kullanması b) limitlerin varlığını ispatlarken geometriye sezgisel anlamda başvurulması olmuştur. Burada Cauchy'nin sonsuz küçükleri, modern limit ve süreklilik tanımında (Weierstrass) x , ε ve δ gibi niceleyiciler gibi niceleyiciler arasındaki ayrımı veremediğinden bunların konumlandırılmasını bulanıklaştırmaktadır. 1847'de Boole ile matematiksel mantığın gelmesi, aksiyomatik yöntemin 19. yüzyılın sonlarında yeniden doğmasına yol açmıştır. Bu gelişmeleri soyut kavramlar, polinom teorisi ile "formlar", dönüşümler; halka, alan, vektör uzayı kavramlarının ortaya çıkışı takip etmiştir. Analizin temelleri gerçek sayılara indirgenerek rasyonel sayılarla tanımlanması, bunu kısa süre sonra rasyonellerin pozitif tam sayılara indirgenmesi izlemiştir. Pozitif tam sayıların temelleri sorunu, 19. yüzyılın son yirmi yılında Dedekind, Peano ve Frege tarafından farklı şekillerde ele alınmıştır. Bununla birlikte, üçü de pozitif tam sayıları tanımlamak için aksiyom sistemlerini kullanmışlardır. Öklid dışı geometrinin oluşturulmasının sonucu olarak, Öklid geometrisinin ve daha genel olarak aksiyomatik sistemlerin temellerinin yeniden incelenmesi gündeme gelmiştir. Pasch, Peano ve Hilbert, geometrinin temellerinin dikkatli bir analizi yoluyla modern aksiyomatik yöntemin (19. yüzyılın sonlarında) geliştirilmesine öncülük etmişlerdir (Kleiner, 1991).

Bu ve takip eden gelişmelerin her biri matematiğe temeller bulma, bir temele oturtma düşüncesiyle beslenerek ispata titizlik statüsü kazandırmada önemli değerler katmıştır. Kısacası, mevcut matematiksel ispat geleneğinin kökeni Yunan matematiğine dayanmaktadır. Bu gelenekte matematiksel bir ispat, (i) bir sonucu doğrulamak (ii) iletişim kurmak ve başkalarını ikna etmek (iii) bir sonucu keşfetmek ve (iv) sonuçları tümdengelimli bir sistem içerisinde sistematik hale getirmek için kullanılmaktadır (Almeida, 2001).

Yukarıdaki tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramları çevresinde, bir temele ya da daha geniş bir bağlama oturtan, bugünkü matematik hakkındaki düşünme şeklimizi ilk kez formel hale getirerek ileri taşıyan İskenderiyeli Öklid (Euclid) olmuştur. Önce tanımlar ve aksiyomlar, sonra teoremler ve en son ispatlar gelir. Böylece en temel eseri olan Elementler (Elements) sayesinde ispatın en titiz dayanağını oluşturmuştur. Bu nedenle bugün yaptığımız matematiğe inanmanızın ya da güvencemizin kaynağı Öklid'dir diyebiliriz (Krantz, 2007).

2.1.2 Matematiksel İspatın Rollerı

Alanyazın incelendiğinde matematikte ispatın rollerine çeşitli şekillerde değinildiği görölmektedir. Dolayısıyla ispatın rolleri ve ispatlama süreci, hem matematikçiler hem de öğrenciler için temel bir öneme sahip olduğundan matematik eğitimi alanındaki çoğu araştırmacı tarafından da farklı şekillerde ele alınarak karakterize edilmektedir (Paddack, 2009).

Matematiksel ispatın rollerine ilişkin bazı araştırmacılar temel kaynakları baz alarak, yapılacak araştırmalara rehberlik olması bakımından çeşitli çerçeveler geliştirmektedir. Bu çerçeveler sayesinde ispatın rollerine ilişkin geniş bir bakış açısı sağlanabilmektedir. Bu anlamda Paddack (2009) bazı araştırmacıların (de Villiers, 1999; Harel ve Sowder, 2007; Hersh, 1993; Yackel ve Hanna, 2003; Hanna, 1989; Stylianides ve Silver, 2004; Hanna ve Jahnke, 1993; Lakatos, 1976; NCTM, 1991, 2000; Larson ve Zandieh, 2005; Ellis, 2007) işaret ettiğı rolleri bir araya getirerek bütöncöl bir rol listesi hazırlamıştır (Tablo 2.1). Benzer şekilde Güler ve Öçal (2022) matematik eğitimi alanyazınında de Villiers (1990), Hanna (2000), French (2014) gibi bazı araştırmacıların çalışmalarından yararlanarak ispatın matematik eğitimindeki rollerinden Tablo 2.2’de bahsetmiştir.

Tablo 2.1. Matematiksel ispatın rolleri ve ispatlama süreci çerçevesi (Paddack, 2009, s. 36)

Roller	Tanımlama / Açıklama	Kaynak
Doğrulama (<i>verification</i>)	Matematiksel bir ifadenin doğru olduğunu gösterir.	de Villiers (1999), Harel ve Sowder (2007), Hersh (1993), Yackel ve Hanna (2003)
Açıklama (<i>explanation</i>)	Matematiksel bir ifadenin neden doğru olduğuna, doğrulamanın neden bu gerçeği gösterdiğine dair bir fikir verir.	de Villiers (1999), Hanna (1989), Harel ve Sowder (2007), Hersh (1993), Stylianides ve Silver (2004), Yackel ve Hanna (2003)
İletişim (<i>communication</i>)	Matematiksel sonuçların anlamı, geçerliliği ve önemiyle ilgili sosyal etkileşimin geliştirilmesi <i>Aslını anlama ve inandırma bağlamları</i>	de Villiers (1999), Hanna ve Jahnke (1993), Harel ve Sowder (2007), Hersh (1993), Yackel ve Hanna (2003)
Keşfetme (<i>discovery</i>)	İspatlama sürecinde, birey ya da toplum için yeni olan sonuçların icat edildiği veya keşfedildiği durumlar	de Villiers (1999), Harel ve Sowder (2007), Lakatos (1976), NCTM (2000), Yackel ve Hanna (2003)
Tanımların araştırılması (<i>exploration of definitions</i>)	Matematiksel bir ifadenin doğruluğunu ispatlamak amacıyla varsayımlara dayalı tanımlar oluşturma, bu tanımları test etme ve ispatlama, mantıksal çıkarımlar yapmak için tanımları kullanma süreci	Larson ve Zandieh (2005), NCTM (2000), Yackel ve Hanna (2003)
Genelleme (<i>generalization</i>)	Gerekçelendirme sürecinde yapılan çalışmalarla örüntülere dayalı olarak genelleştirilmiş ifadeler, kurallar, sınıflandırmalar, varsayımlar ya da tanımlar oluşturma süreci	Ellis (2007), NCTM (2000), Stylianides ve Silver (2004), Yackel ve Hanna (2003)
Varsayımın gerekçelendirilmesi, reddedilmesi veya değiştirilmesi ile varsayımların sonuçları (<i>Justification, dismissal or modification of a conjecture and the consequences of assumptions</i>)	Bir varsayımı gerekçelendirme, değiştirme veya reddetme süreci. Tümevarımsal akıl yürütmenin sınırlılıkları ve gücü hakkında bilgi edinme, varsayımlarla ilgilenmenin yanı sıra varsayımların sonuçlarıyla da ilgilenme	NCTM (2000), Lakatos (1976), Stylianides ve Silver (2004), Yackel ve Hanna (2003)
Sorgulama (<i>inquiry</i>)	Matematik aracılığıyla matematiği sorgulama	NCTM (1991)

Tablo 2.2. İspatın matematikte sahip olduğu roller (Güler ve Öçal, 2022, s.47-48)

İspatın matematikte rolleri	Açıklaması
Doğrulama	De Villiers'in (1990) belirttiği gibi "Geleneksel olarak ispatın işlevi, neredeyse yalnızca matematiksel ifadelerin geçerliliğinin doğrulanması (kanaat veya gerekçelendirme) açısından ele alınmaktadır. Buradaki fikir, kanıtın esas olarak ya kişisel şüpheyi ve/ya şüphelerin şüphelerini ortadan kaldırmak için kullanılmasıdır". İspat için bu rol, sıkça ifade edilen "kendinizi ikna edin, bir arkadaşınızı ikna edin, bir düşmanınızı ikna edin" şeklindedir (Harel ve Sowder, 1998, 2007; Mason, Burton ve Stacey, 1985).
Açıklama	İspat, matematiksel argümanların netliğini en üst düzeye çıkaracak şekilde oluşturulur. Genellikle matematik ders içeriklerinde ispatın bu rolü üzerinde sıklıkla durulmaktadır. Matematiksel bir ifadenin neden doğru olduğunu göstermek ifadenin doğru olmasının ötesinde bir geçerliliğe sahiptir. Dolayısıyla, ispatların açıklama rolü matematiksel ifadelerin geçerlilikleri hakkında güvenin oluşmasını sağlamaktadır (French, 2014).
Keşfetme	İspatların bir sonucu olarak ortaya çıkan ve genellikle problemleri çözmek için matematiksel olarak bazı algoritmaların oluşumu ve gösteriminin bir yolu olarak tanımlanır (Hanna, 2000). İşsel olarak oluşan ve otomatikleşen bu durumun değişen yönleri yeni varsayımlara yol açabilir. Sınıf ortamında kullanılan dinamik geometri yazılımları ispatın bu rolünün görülmesi açısından pratik bir yol olarak kullanılabilir.
Estetik	İspatlar genellikle matematiksel ifadelerde hem işlev hem de biçimsel olarak güzel ve estetik olarak kabul gören kısalık ve netliğin bir kombinasyonuna sahiptir. Özellikle görsel ispatlar ve açıklamaların genellikle bir sanat olduğu da kabul görmektedir (French, 2014). Ayrıca matematiğin kendine has yapısı sayesinde kullanılan argüman ve ifadelerin oluşturduğu ispatların estetik kaygısı taşımamasına rağmen çıkan sonucun matematikçi tarafından bir sanat eseri olduğu söylenebilir.
Algoritma oluşturma potansiyeli	Matematiksel bir ispatın yapısı, genellikle makineler aracılığıyla hızlı hesaplama için bazı tarifler verebilir. Örneğin, analizdeki sonlu farklar tahmin edilebilir ve bu nedenle hemen hemen her türlü diferansiyel denklemi çözmek adına yöntemler tasarlamak için kullanılabilir algoritmalar oluşturulabilir (French, 2014).
Akılda kalıcılık	Her ispatın kendine ait bir hikayesinin olduğu düşünülmektedir. Dolayısıyla bu hikayenin kahramanları da matematiksel olarak ifade edilen tanım, teorem ve aksiyomlardır. Eğer bu kavramlar arasındaki ilişkiler ağı iyi organize edilebilirse ispatın akılda kalıcılığı da daha fazla olacaktır. Ayrıca görsel ispatların da yine akılda kalıcılık için etkili bir yol olarak kullanılabileceği ifade edilmektedir (de Villiers, 2012).
Sistematikleştirme	Matematiksel ispatların tarihten günümüze ulaşması ve yapılarının korunması manasına gelmektedir. Euclid'in Elementler kitabından günümüz matematiksel ispatlar için gerekli olan kavramsal alt yapının oluşmasını ve ilerletilmesini sağlamaktadır. Ayrıca ispatların sistematikleştirme rolü sayesinde matematikçiler, ispatlarda gerek olmayan tanım ve aksiyomlar yerine bunların küçük bir kümesi üzerinden gerekli kavram ve fikirlerle sade bir yapı oluşturabilirler (Dede ve Karakuş, 2014).
İletişim	Matematiksel ispatların bu rolü sayesinde ispatların anlaşılması ve diğer matematikçilere aktarılması sağlanmaktadır. Matematiksel ispatlardaki "aslına anlama" ve "ikna etme" (Harel ve Sowder, 1998) süreçlerinin işletilmesinde ispatı yapanın kendisine başkalarına karşı yaptığı savunmaların temeli ispatın bu rolü sayesinde oluşmaktadır.

2.1.3 Okul Matematiği ve Üniversite Matematiği Arasındaki Gerilim

Alanyazında okul matematiği ile üniversite matematiği arasındaki geçişe doğrudan işaret eden çalışmalar (örn. Wu, 2011; Hannula, 2018) olabildiği gibi diğer ilgili çalışmalarda da bu duruma dikkat çekilmektedir (örn. Yopp, 2011; Schoenfeld, 1994; Hanna ve Jahnke, 1996; Hersch, 1993). Bu çalışmalarda okul matematiği olarak nitelendirilen kademedan (genel olarak lise, ortaokul, ilkokul) üniversite matematiği olarak nitelendirilen ileri matematiğe doğru öğrenme yolculuğunda olan öğrenciler üzerinde bu geçiş bazı farklı etkilere neden olabilmektedir.

Tall (2002) matematiksel düşünmede doğrulama (verification) süreci için Mason ve diğerlerinin (1982) tanımladığı "kendini ikna et, arkadaşını ikna et,

düşmanını ikna et” şeklindeki üç düzeyden sırasıyla bahsetmektedir. Bu düzeylerin matematiksel gelişimdeki, temel fikirlerden daha gelişmiş biçimlere ilermesini matematiksel gelişmişliği temsil edebilecek bir duruma benzeterek ifade etmektedir. İlk düzey, birey için matematiksel ifadelerin neden doğru olabileceğine dair bir anlayış olarak bireye fikir vermesidir. İkinci düzey, bireyin argümanını mantıksal açıdan daha uygun bir şekilde organize ederek, arkadaşını ikna etmesini gerektirir. Üçüncü düzey, bireyin argümanının artık eleştiri testine dayanabilmesi için analiz edilmesi ve iyileştirilmesini gerektirir. Tall, matematiksel düşünme anlamında bu son düzeyden ispatın yaklaştığı nokta olarak bahsetmektedir. Yaklaşım ifadesiyle tamamen ispat olarak karşılık bulmadığını, eksik olanın ‘biçimsel tanımlar’ kavramı ve bu tanımlardan elde edilen ‘mantıksal formal çıkarımlar’ olduğunu belirtmektedir. Tall, farklı okul kademelerinin her seviyesinde matematiksel düşünmenin önemine değinirken, daha temel matematiksel düşünmenin biçimsel (formal) soyutlama sürecinden yoksun olduğunu ve bu yüzden bu seviyenin en biçimsel şekli aldığı ‘kesinlik basamağını’ içermediğini ifade etmektedir. Bu kritik durumu, temel düzeyden daha ileri matematiksel düşünceye geçiş olarak açıklamaktadır: *açıklamalardan tanımlamaya, ikna etmekten ispatlamaya* (tanımlara dayalı olarak mantıksal bir şekilde) geçiş. Bu geçişin, öğrencilerin üniversite matematiğinin başında biçimsel soyutlamalarla ilk kez karşılaşmaları ve bununla baş etmeleri sırasında görülen bilişsel bir yeniden yapılanmayı gerektirdiğini belirtmektedir. Tall bunu, temel matematikteki *tutarlılıktan*, bireyin formal tanımlardan çıkarımlar yoluyla oluşturmayı zorunlu tutan soyut varlıklara ya da kavramlara dayalı ileri matematiğin *sonuçlarına* geçiş olarak ifade etmektedir (s.20).

Tall’un (2002) işaret ettiği kritik geçişle ilgili özel ve farklı bir noktaya değinen Moreno-Armella (2014), üniversite matematiğinde Analiz (Calculus) dersi açısından sezgisel ile formal arasındaki gerilimle bu durumu ifade etmiştir. Analizin değişim ve yığılmayı (yığılma noktası) incelemede epsilon ve delta matematiği olarak bilinen formalize edilmiş fikirler ve kavramlar aracılığıyla tanıtılmaya devam etmesi nedeniyle, bu geçişlerin doğru bir aktarımda yapılmaması noktasını gerilimin bir alt aktörü olarak görmektedir.

Stillman ve diğerlerine (2020) göre matematiğin eğitimsel ve disiplineli eksenlerinde iki farklı odak yapısı kuruludur. Araştırmacılar, bir yanda matematikçilerin problemleri çözmek için sentaks güdümlü analitik becerileri

kullanarak düzenli olarak ispatlama, mantıksal ve tümdengelimli akıl yürütme, problem çözme gibi uygulamalarla sürekli meşgul olduklarını; diğer taraftan eğitimsel bir perspektiften bakıldığında ise, matematik eğitimi camiasında matematikçilerin bu tür uygulamaları matematiği anlamanın ve kullanmanın kendi eğitimsel hedeflerine ulaşma açısından tam bir karşılık bulamadığını ifade etmektedirler. Gerçek hayatta karşılaştığımız problemler göz önünde bulundurulduğunda tümdengelimsel bir titizlik standardı yakalamaktan daha çok, buradaki olay ve olgulara bakış açısını onlar hakkında fikir sahibi olabilme, deneysel yollara başvurarak içgörü kazanma ya da tahmin yürütebilmeye değer vermenin daha ön planda olduğunu açıklamaktadırlar (Stillman vd., 2020). Bu nedenle okul matematiği bağlamı göz önünde bulundurulduğunda matematik öğretmenlerinin matematiği kullanma şekli ve matematik bilgisi (bu bağlamın gerekliliklerine göre hareket etme sınırlamasıyla yerleşen), pür matematikçilerin ihtiyaç duyduğu ve kullandığı biçiminden farklılaşabilmektedir (Ball ve Bass, 2000).

2.1.4 Matematik Eğitiminde Matematikçilerin Rolü

Öğretmen eğitiminde ya da genel olarak matematik eğitiminde matematikçilerin rolüne işaret eden bazı çalışmaların (örn. Bass, 2005; Hodge vd., 2010; Yopp, 2011; Leikin vd., 2018; Yan vd., 2020) olduğu görülmektedir. Wu'ya (2006) göre okul matematiğinde matematikçiler kritik bir önem taşımaktadır. Bunun nedenini, matematikçilerin önemini ortamdan (okul bağlamından) çekerek, “ya olmasaydı” şeklinde ters düşünceden ifade ederek açıklamaktadır. Araştırmacı, eğer okul matematik eğitimi matematikçilerden izole edilirse, okul matematiğinin kendisinin de izole olacağını ve matematiğin kaçınılmaz olarak, büyük ölçüde artık matematiğe benzemeyen bir şeye evrilerek amacından sapacağını (Wu, 2006) düşünerek matematikçilerin önemli rolünün altını çizmektedir.

Staples ve diğerleri (2012) öğretmenlerin bakış açılarını belgelemeye ek olarak, bu matematik öğretmenlerinin gerekçelendirme amaçlarını, matematikçiler için belgelenen amaçlarla iki nedenden dolayı karşılaştırma durumundan bahsetmektedir. İlk olarak, sınıflarda gerekçelendirme üzerine oldukça büyük bir araştırma seti, bir referans çerçevesi olarak matematikçi topluluğunun amaçlarını kullanır (örn. de Villiers, 1999; Hanna, 2000; Knuth, 2002a, Weber ve Mejia-Ramos, 2015). Sonuç olarak, bu çerçeveleme bize bu alanyazına katkıda bulunma

fırsatı sunmaktadır. İkincisi, disiplinler çalışanların değerli amaçlarının veya uygulamalarının, o konunun öğretildiği sınıf topluluklarının canlı bir yönü olup olmadığını belgelemek önemlidir. Bu tür belgeler, bu benzerliklerin ve farklılıkların neden var olabileceğini anlamaya, bu farklılıkların uygun veya arzu edilir olup olmadığını değerlendirmeye ve ardından uygulamaya ve/veya topluluklar arasındaki uyum anlayışımıza yönelik düzenlemelere yönelik ilk ve gerekli adımdır. Bu iki uygulama topluluğu arasında bağlantılar kurmaya ve aynı zamanda onların gerekçelendirme pratiklerini şekillendirebilecek farklı amaçlara hizmet ettiklerini kabul etmeye ihtiyaç vardır Staples vd., 2012).

2.1.5 İspatı Kavramsallaştırmaya Yönelik Çerçeveseler

2.1.5.1 Bell (1976)

Bell'e göre ispat, bir şüpheliyi ikna etmeye yarayan toplumsal bir etkinliktir. Matematiksel ispatın taşıdığı 3 duyu vardır. Bunlar sırasıyla doğrulama ya da gerekçelendirme, aydınlatma ve sistematikleştirme. Birincisi, bir önermenin doğruluğuyla ilgilidir. İkincisinde, iyi bir ispatın önermenin neden doğru olduğuna dair fikri iletmesi beklenir, ispatın geçerliliğini etkilemese de ispattaki duruşu estetik olarak hoş görünmesidir. Üçüncü ispat duygusu ise matematiksel olarak en karakteristik olanıdır. Çünkü sonuçların aksiyomlar, kavramlar ve teoremlerden oluşan tümdengelimli bir sisteme göre düzenlenmesini ifade eder.

Tablo 2.3. Bell'in çerçevesi

Bell (1976)	Deneysel gerekçelendirmeler
	Tümdengelimsel gerekçelendirmeler

Bell çalışmasında, sınıftaki matematiksel etkinlikte neye ihtiyaç duyulduğunu netleştirmek için ispatla ilgili deneysel ve tümdengelimsel (deductive) olmak üzere iki gerekçelendirme modundan bahsetmektedir. Deneysel gerekçelendirmeler, bir veya iki durumun değerlendirilmesi ya da daha çok durumların test edilmesine kadar uzanan kontrolleri içerir. Bir başka ifadeyle, örneklerin kullanımına dayanır. Tümdengelimsel gerekçelendirmeler, veri ve sonuç arasında ilişki kurabilmek için çıkarım yapmaya dayanır. Veri ile kabul edilmiş gerçekler ya da ilkelerle ilişkisi olan argümanlardan sonuç üretildiğinde tam formuna ulaşır.

2.1.5.2 Van Dormolen (1977)

Birey bir problemi çözmek istediğinde genelde ilk olarak tümdengelimsel bir akıl yürütmeyi takip etmeyecektir. Problemi kavramaya çalıştığı, iyi kötü düzensiz bir deneme yanılma süreciyle işe koyulur. Bunu başarılı bir şekilde gerçekleştirdikten sonra çözümünü düzenli bir forma sokmaya çalışır. Diğer bir ifadeyle, neredeyse (ideale yaklaşan) mantıklı bir argümana dönüştürür. Sonunda, tümdengelimli bir argüman yazabilmiş olur.

Tablo 2.4. Van Dormolen'in çerçevesi

Van Dormolen (1977)	Özel örnek
	Kavramın somut genelleyicisi olarak örnek
	Tümdengelimsel argüman

Bunları van Hiele'nin üç farklı düşünme düzeyi ile ilişkilendirmektedir. Zemin seviyesinde, öğrenci düşüncesi özel nesnelerle sınırlıdır. Öğrenciye benzer nesnelerin çeşitli örnekleri sunulursa hepsinin ortak bir yönü olduğunu sıralayarak anlayabilir, tüm yamuklarda geçerli olduğunu keşfeder. Buradaki yamuk bir formdan çıkıp kavram haline gelir (birinci seviye). Öğrenci farklı alanlardaki argümanların ortak öğeleri olduğunu fark etmeye başlar (ikinci düşünme seviyesi). Yani çeşitli verileri organize edebilir. Van Dormolen, öğrencilere ispat vermenin gerçekte ne anlama geldiğini öğretene kadar onlardan anlayış ve içgörü ile tümdengelimli argümanlar vermelerinin beklenmemesi gerektiğinin altını çizmiştir.

2.1.5.3 Balacheff (1988)

Balacheff (1987), van Dormolen'in (1977) ispat taksonomisini 4 kategori altında genişletmiştir. Saf deneycilik (naive empiricism), ispatlanacak bir ifadenin rastgele seçilmiş birkaç örnekle kontrol edildiği ispat türüdür. Can alıcı deney (crucial experiment), dikkatle seçilmiş bir örnek üzerinden ifadenin kontrol edildiği ispat türüdür. Genelleyici örnek (generic example), gerekçelendirmenin bir sınıfın karakteristik bir temsilcisi olarak seçilen bir örnekteki işlemlere ya da dönüşümlere dayandırıldığı ispat türüdür. Düşünce deneyi (thought experiment), eylemlerin içselleştirildiği ve belli (özel) örneklerden ayrıldığı ve gerekçelendirmenin, formelleştirilmiş sembolik ifadelerin kullanımına ve dönüştürülmesine dayandığı ispat türüdür.

Tablo 2.5. Balacheff'in çerçevesi

Balacheff (1987, 1988, 1991)	Saf deneycilik
	Can alıcı deney
	Genelleyici örnek
	Düşünce deneyi

2.1.5.4 Harel ve Sowder (1998)

Bell (1976) ve Balacheff'in (1991) çalışmalarının genişletilmiş versiyonu olarak Harel ve Sowder (1998) kendi çalışmalarından elde ettikleri deneysel veriler üzerinden şema bakış açımızı daha kapsamlı bir şekilde ele almaya çalışmışlardır. Çalışmalarında kullandıkları çerçeveye bir öğrencinin ispat şeması kavramını ortaya atmışlardır (Sowder ve Harel, 1998). İspat ve gerekçelendirmeyi eş anlamda kullanmaktadırlar. İspatlama/gerekçelendirme, kişinin ikna olması şeklinde 'aslını anlama' (ascertaining) ve bir başkasını ikna etme anlamında 'inandırma' (persuading) içermektedir. Yani bir bireyin ispat şeması kendisini ve başkasını ikna etme yollarını etkileyen her şeyden oluşur. Aynı kişiye ait farklı bağlamlarda ya da farklı zamanlarda ürettiği argümanlar farklı kategorilere girebilir, bu da kişinin yürüttüğü mantık çizgisi şemaların kombinasyonunu içerebilir.

Birkaç öğretim deneyinden ve başka bir üniversitede yapılan çapraz kontrolden, ispat şemalarının kategorileri üniversite matematik bölümü öğrencilerini tanımlamada kullanışlı olabileceği görülmektedir (Sowder ve Harel, 2003). Öte yandan araştırmacılar sayı teorisi, geometri, lineer cebir, Öklid geometrisi ve kalkülüs dersleri (analize dayalı dersler) kapsamında, üniversite 2, 3 ve 4. sınıf matematik öğrencileri ve beklenenden daha ileride 7, 8 ve 9. sınıf öğrencileriyle yürüttükleri öğretim deneylerinin sonucunda ispat şemalarını Tablo 2.6 geniş yelpazede kategorilendirmişlerdir (Harel ve Sowder, 1998). İspat şemaları, her birisinin de alt kategorileri olan dışsal ikna, deneysel ve analitik olmak üzere üçe ayrılır (Harel ve Sowder, 1998; Sowder ve Harel, 1998, 2003).

Tablo 2.6. Harel ve Sowder'in çerçevesi

Harel & Sowder (1998)	Dışsal ikna	Otoriter		
		Ritüel		
		Sembolik		
	Deneyisel	Tümevarımsal		
		Algısal		
	Analitik	Dönüşümsel	İçselleşmiş	
			İçselleştirilmiş	
			Kısıtlayıcı	Bağlamsal Uzamsal
		Aksiyomatik		Genelleyici
				Yapıcı
			Sezgisel-aksiyomatik	
			Yapısal	
			Aksiyomatikleştirme	

Dışsal ikna ispat şemaları: Bu şemada, öğrencinin kendisini ve başkalarını ikna etmek için sunacağı şeyler dışsal kaynaklarda bulunmaktadır. Bu kaynağın türü aşağıdaki alt kategorilerden biri gibi olabilir.

Otoriter: Öğrenci, sonucu gerekçelendirmek için ders kitabına, öğretmene ya da daha bilgi sahibi olan sınıf arkadaşının onayına güvenip ikna olursa otoriter ispat şemasını kullanmış olur.

Ritüel (alışkanlık edinilmiş): Martin ve Harel (1989) yanlış ispatın doğrulamasına verilen yanıtları inceleyerek ispatın ritüel yönünü de araştırdıkları çalışmasına göre, bir argümanın doğruluğunu, ilgili akıl yürütmenin doğruluğu yerine, sadece argümanın biçimiyle yargılayan bir öğrenci ritüel ispat şemasını kullanmış olur. Bunun bir örneği olarak, üniversite öğrencilerinin sadece lise geometrisinde öğrendikleri çift sütun ispat formatında verilmiş akıl yürütmeyi ispat olarak kabul ettiklerini varsayalım. Ne kadar sağlam argümanlar sunulursa sunulsun, argümanlar eğer böyle bir formatın dışında verilirse ispata şüpheli yaklaşabilirler. Bu da onların ritüel ispat şeması kapsamında olduğunu gösterir.

Sembolik: Öğrenciler, sembollere herhangi bir anlamdan ya da ortaya çıktıkları durumdaki niceliklerle herhangi bir ilişkiden bağımsız bir şekilde davranırlarsa sembolik ispat şemasını sergilemiş olurlar. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ ifadesini $\frac{a+c}{b+d}$ gibi düşünmesi, $2^5 \times 2^3$ ifadesini 4^{15} olarak değerlendirmesi, $\sin(x + y)$ ifadesini

$\sin x + \sin y$ ya da $\sqrt{a^2 + b^2}$ ifadesini $a + b$ ile değiştirmesi gibi durumlar bu ispat şemasındaki örnekler olabilir.

Deneyisel ispat şemaları: Sadece örneklere dayalı olarak yapılan gerekçelendirmeler bu ispat şemasının kullanıldığını göstermektedir. Bu ispat şemasındaki türler aşağıdaki alt kategorilerden biri gibi olabilir.

Algısal, öğrenci bir ya da birkaç çizimle, algıladıklarıyla başkasını ikna etmeye çalıştığında bu ispat şemasını sergiliyordur denebilir. Tümevarımsal (inductive), bir varsayımı bir ya da daha fazla örnekle değerlendirerek kendisini ve başkasını ikna etmeye çalışan öğrenci örneklere dayalı ispat şemasını kullanıyor demektir.

Analitik ispat şemaları: Mantıksal çıkarımlar yoluyla varsayımları geçerli kılan bir şemadır.

Dönüşümsel: Öğrencilerin gerekçelendirmelerinin bir durumun genel yönleriyle ilgilenmesi ve genelde varsayımı çözmeye yönelik akıl yürütme içerir. Örneğin örüntünün arkasındaki yapıyı algılama gibi. Burada, argüman geneldir ve örneklere dayalı ispat şemasındaki gibi bir örüntünün bulunmasından ziyade akıl yürütülmesine odaklanır. Varsayımın genel yönlerinin dikkate alır, hedefe yönelimli ve öngörmeli zihinsel operasyonları uygular, tümdengelimli/dedüktif (deductive) bir süreci kullanır.

İçselleşmiş (internalized): buluşsal (heuristic) argümanları kullanır.

İçselleştirilmiş (interiorized): ona sahip olan kişi tarafından farkına varması için üzerine yansıtılan içselleşmiş ispat şemasıdır. Bir kişinin ispat şemasına ilişkin farkındalığı genellikle kişi onu başkalarına açıkladığında, onu diğer ispat şemalarıyla karşılaştırdığında, ne zaman kullanılabileceğini ya da kullanılamayacağını belirttiğinde gözlemlenir. (Harel ve Sowder, 1998).

Kısıtlayıcı (restrictive): varsayımların ya da gerekçelendirmelerin üzerinde kısıtlama koymasıdır. Kısıtlamanın türüne bağlı olarak, sırasıyla bağlamsal (contextual), genelleyici (generic) veya yapıcı (constructive) bir ispat şeması olarak adlandırılabilir.

Bağlamsal: ispatın gerçekteleştiği bağlamanın, bir ispat argümanı oluşturmak için önemli olduğunu vurguladıklarında gözlemlenir. Bağlamsal şemanın belirli bir durumu olan, öğrencilerin problem durumunu yalnızca hayal gücü uzayına göre düşünebildikleri uzamsal (spatial) şemadır. Ya da bağlam, geometrik bir düzlemde konumlandırılırsa uzamsaldır denebilir.

Genelleyici: varsayımlar genel terimlerle yorumlanır, ancak ispatları belirli bir bağlamda ifade edilir. Öğrenciler belirli bir bağlam için temel argümanları kullandıklarında bu şemalar belirgindir denebilir.

Yapıcı: öğrencilerin şüpheleri, nesnelerin varlığının gerekçelendirilmesinin aksine, nesnelerin gerçek inşası ile ortadan kaldırılır. Bu ispat şemasının bir göstergesi, öğrencilerin çelişkili ispattan hoşlanmamasıdır.

Aksiyomatik: Matematikte bilgi, sonra gelen sonuçların öncekilerin mantıksal sonuçları şeklinde birikimsel olarak organize edilebilir. Bu organizasyon, tanımlanmamış terimler, tanımlar, varsayımlar ve teoremleri içerir. Örneğin Öklid geometrisinde, ‘nokta’ ve ‘doğru’ tanımlanmamıştır, ‘iki noktadan tek bir doğru geçer’ gibi ifadeler varsayılmıştır. Bu tarz bir sistem üzerinde çalışan öğrenci aksiyomatik ispat şemasına sahiptir denebilir.

Sezgisel-aksiyomatik (intuitive-axiomatic): yukarıdaki tanımın tersine yalnızca kendi sezgisine karşılık gelen aksiyomları ya da reel sayılarla ilgili deneyimine ilişkin “ F ’deki herhangi bir a ve b için, $a + b = b + a$ ” gibi kendi ispatlama fikirlerini ele alabilir.

Yapısal (structural): bir aksiyom koleksiyonuyla karakterize edilen ortak bir yapıyı paylaştığı anlaşılan farklı gerçekleştirmelerden (realizations) durumların temsili olarak varsayımların ve teoremlerin düşünüldüğü aksiyomatik bir şemadır. Daha açık bir ifadeyle, yapısal şemaları kullanan öğrenciler, bir aksiyomun farklı bağlamlarda uygulanabileceğini anlar çünkü yapılar belirli özellikleri ve ardından belirli aksiyomları paylaşır. Yapısal şemada, yapıyı tanımlayan aksiyomlar kalıcıdır ve çalışmanın odağı aksiyom sistemi üzerinde değil yapının ta kendisidir. Bunu bir örnek üzerinden daha anlaşılır kılabilmek için, öğrenci vektör uzayı aksiyomları temelinde vektör uzayları teorisini inceleyebilir.

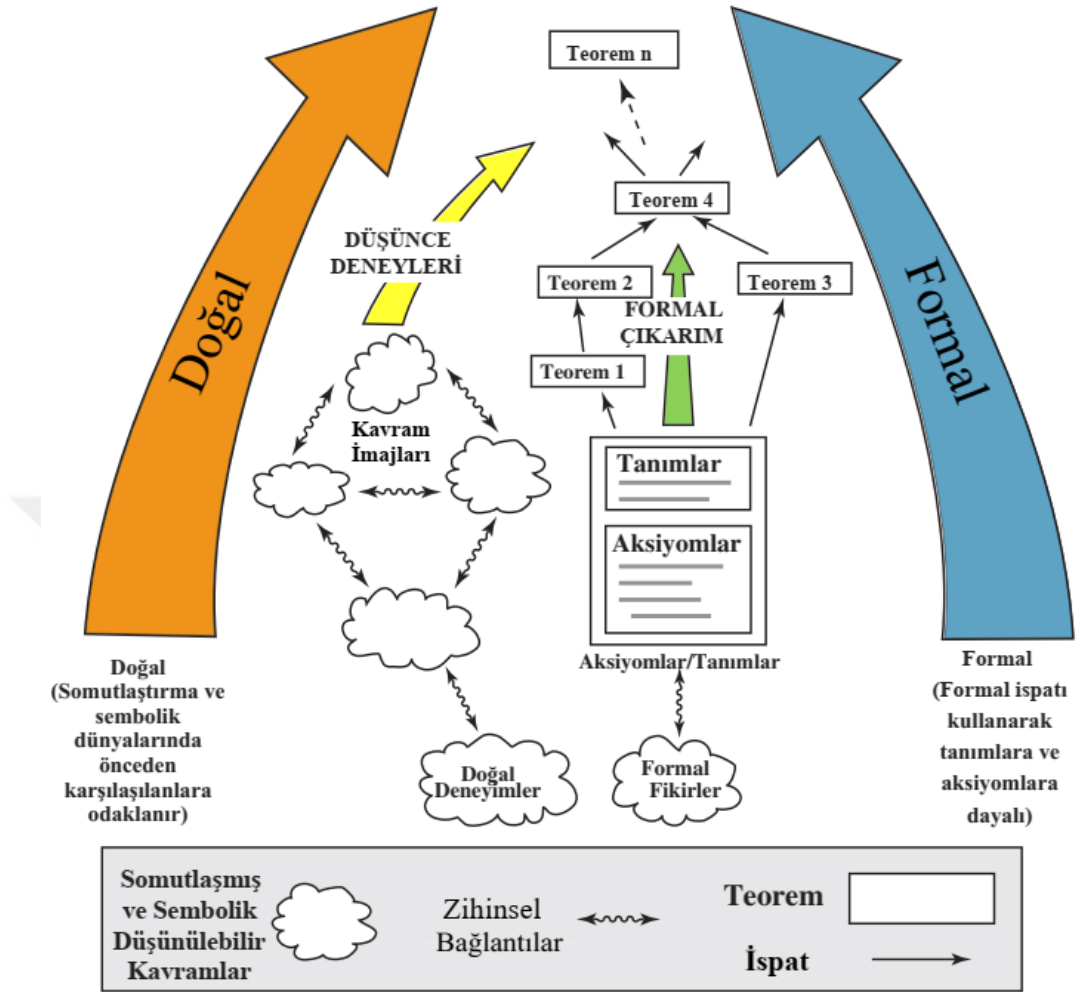
Aksiyomatikleştirme (axiomatizing): öğrencinin çeşitli aksiyom dizilerinin sonuçlarını araştırabildiği ya da belli bir alanı aksiyomlaştırdığı bir şemadır. Öğrencilerin matematiğin çeşitli alanlarındaki bir dizi aksiyomu inceleyebildikleri şema da denebilir. Ayrıca yapısal ispat şemasının aksiyomatikleştirme şeması için bilişsel bir ön koşul olduğu düşünülmektedir.

Çelik ve Aydoğdu-İskenderoğlu (2023) matematiksel ispat kavramına ilişkin farklı bakış açılarını derleyerek her bir bakış açısı içerisinde ispat kavramının nasıl ele alındığını ispatın öne çıkan temel işlevleriyle (roller) birlikte Tablo 2.7’de özetlemiştir:

Tablo 2.7. İspat kavramına ilişkin farklı bakış açıları (Çelik ve Aydoğdu-İskenderoğlu, 2023, s. 206)

Bakış Açıları		Açıklaması	Roller
Pür matematiksel açıdan	Formal ispat	En son adımı ispatlanacak önerme olan çıkarımlar dizisidir. Bu dizide her bir çıkarım; ya bir aksiyoma ya da dizideki önceki adımlara bir çıkarım kuralının uygulanması ile elde edilir. Bu bakış açısına göre, bir ispatın doğrulanması iyi tanımlanmış ve açıkça ifade edilmiş matematik ve bu mantık kurallarına uygunluğunun incelenmesi şeklinde mekanik bir süreçle gerçekleştirilebilir. Bu sebeple bu tür ispatlar son derece güvenilir kabul edilmekle birlikte, ispatı oluşturma sürecine dönük olabilecek yaratıcı çabayı (sezgisel temsillere, kavramsal bilgiye ve keşfe dayalı) çok fazla yansıtmamakla eleştirilmektedir.	Doğrulama Sistematikleştirme
	Sıradan ispat	Doğal ve formal matematiksel dilin karışımından oluşur. Gerekli yerlerde normal tündengelimli çıkarımlara yer verilir. Doğal dil kullanılarak bu formal tündengelimli çıkarımlar arasında kavramsal köprüler kurulur.	Doğrulama İkna etme Açıklama
Bilişsel ve sosyal teoriler açısından	İkna etme olarak ispat	Bu bakış açısına göre ispat bir matematikçiyi (yani konuyu bilen uzmanı) ikna eden bir argümandır. Burada da tıpkı pür matematiksel bakış açısında olduğu gibi yüksek bir ikna etme standardını yakalamak amaçlanmış, bu doğrultuda eğitimin ana amacı “matematikçileri ikna etmek için kullanılabilecek kanıt tiplerinin öğrencileri de ikna etmesini sağlamak” şeklinde belirlenmiştir. Yani öğrencilerin deneysel veya otoriteye bağlı argümanlar yerine tündengelimli argümanlarla ikna olması sağlanmalıdır.	İkna etme
	Problem çözme olarak ispat	Bu bakış açısı altında ispatlama problem çözme süreci olarak kavramsallaştırılmıştır. Bu ispat perspektifi ürün yani ispatın kendisinden çok bu ürünü ortaya koyan ispat sürecine odaklanmaktadır. İspat sürecinin öğrencilerin akıl yürütme, gerekçelendirme, argüman sunma gibi önemli becerileri geliştirmek için bir araç olarak hizmet edebileceği düşünülür. İdeal olarak öğrencinin ispat yapmayı gerektiren bir durumda doğru cevap verebilmesi, yani tündengelimli bir yaklaşımla uygun argümanları yazabilmesi, sunulan argümanların yeterliği veya mantıksal bir hata içerip içermediği hakkında karar verebilmesi beklenir.	Keşif
	Sosyal uzlaşma aracı olarak ispat	Bu bakış açısı altında ispatlama sosyal bir eylem olarak tanımlanır. Pratikte de ispatlama genellikle sosyal bir bağlam içinde gerçekleşir ve bir ifadenin nasıl-neden kanıtlandığı, neyin bir ispat olarak kabul edildiği bu sosyal bağlamda yakın şekilde ilişkilidir. Bu bakış açısında eğitimin temel amaçlarından biri; öğrencilerin ispat eylemiyle, tıpkı bir matematik topluluğunda olduğu gibi, otantik bir şekilde meşgul olmalarını sağlamaktır. Bir başka deyişle öğrenciler çeşitli matematiksel iddiaların doğruluğu hakkında tartışma, bu tartışmaları çözüme kavuşturma aracı olarak ispatı kullanma deneyimi elde etmelidir. Ayrıca ispat tıpkı matematikçilerin kullandığı gerekçelerle (ispatta geçen kavramlar hakkında anlamalarını geliştirme, ispatın niçin geçerli olduğuna ilişkin bakış kazanma,...) sınıf grubunda kullanılmalıdır.	İletişim Açıklama Keşif

2.1.5.5 Tall (1998, 2013)



Şekil 2.1. İspat oluşturmada doğal ve formal rotalar (Tall, 2013, s.285)

“Met-before” (önceden karşılaşılan), bireyin daha önce tanıştığı ya da karşılaştığı deneyimlere dayanarak belirli bir zamanda kullandığı zihinsel bir yapı biçimindeki bireyin kavram imajının bir parçasıdır. Birey, karşılaştıkları yeni durumlara bağlantı kurmak için daha önceki deneyimlerini getirir. Birey entelektüel olarak daha da geliştikçe, bu ön bilgi, bilgi şemalarında birbirine bağlı, bireylerin düşünme şeklini çerçeveleyen düşünülebilir kavramlara sıkıştırılır (Tall ve Mejia-Ramos, 2006). Bu teorik çerçeve şu temeller üzerine inşa edilmiştir:

- Çocuk, genetik yapıda *önceden belirlenmiş (set-before)* jenerik yeteneklerle doğar;
- Mevcut bilişsel gelişim, *daha önce karşılaşılmış (met-before)* deneyimler üzerine kuruludur;

- Bu, başarılı bağlantıları güçlendiren ve diğerlerini baskılayan nöronal bağlantıların uzun süreli potansiyel artışı (uzun süreli güçlenmesi) yoluyla gerçekleşir;

- Eylemler, (prosedürel) **eylem-şemaları (action-schemas)** olarak koordine edilir;

- Fikirler, dil ve sembolizm kullanılarak **düşünülebilir kavramlara** sıkıştırılır;

- Düşünülebilir kavramlar ise, daha geniş (kavramsal) **bilgi şemalarına (knowledge schemas)** doğru iletirilir/inşa edilir/geliştirilir;

- Matematiksel düşünme; **somutlaştırma (embodiment)**, **sembolizm** ve daha sonra **formal ispat** yoluyla bilişsel olarak inşa edilir ve her biri zaman içinde incelikte gelişir;

- Matematiksel düşünmede başarı, önceden karşılaşmaların (met-befores) etkisine, zengin düşünülebilir kavramların sıkıştırılmasına hem güçlü hem de basit olan art arda gelişmişlik düzeylerinin oluşturulmasına bağlıdır;

- Matematik, bilim, felsefe ve benzeri alanlarda uzun vadeli teori inşa etmedeki bu başarı, çeşitli topluluklar tarafından önemli olarak görülen daha önce karşılaşmış (met-before) olan seçilmiş fikirler üzerine birikimli olarak inşa etmenin yanı sıra önemsiz olarak kabul edilen bağlantıların açık ya da örtük bir şekilde bastırılmasını/gizli tutulmasını gerektirir (Tall ve Mejia-Ramos, 2006).

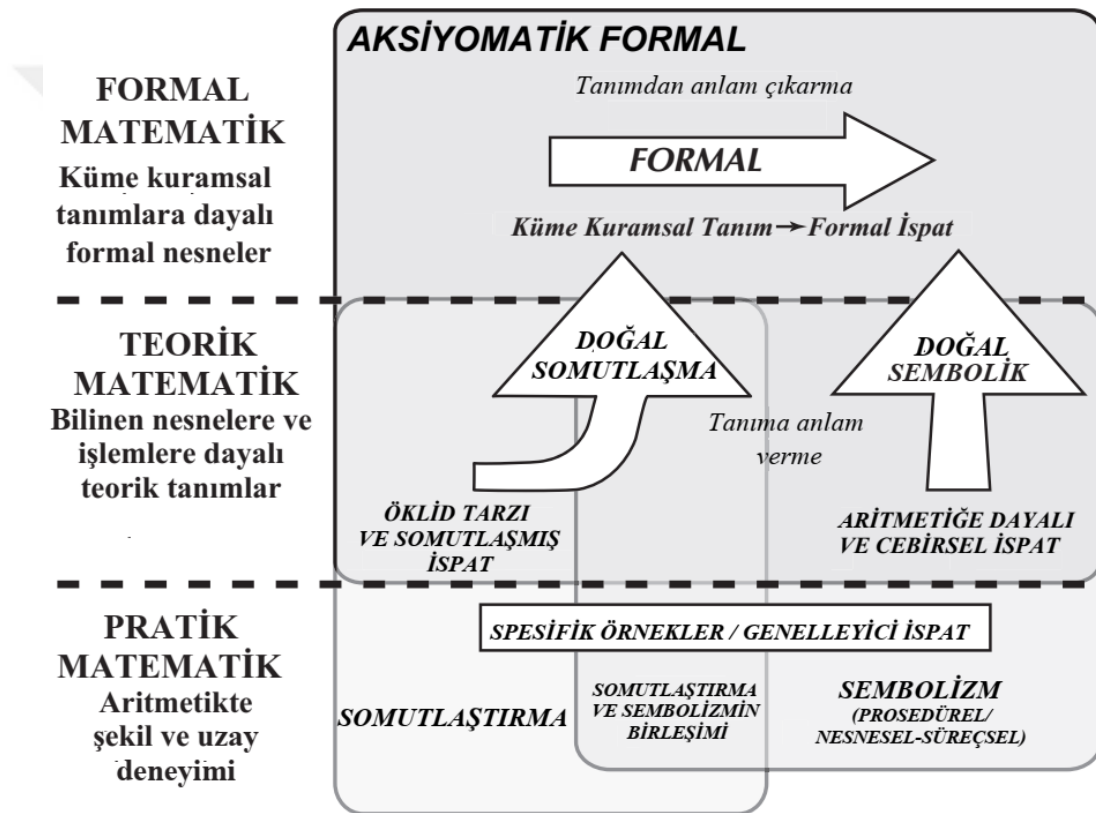
Bu çerçeveye göre bazı öğrenciler matematik yaparken daha çok prosedürlere odaklanabilirken daha başarılı öğrenciler genellikle süreç ve kavram şeklinde ikili olarak sembollerin esnek kullanımını geliştirirler (Tall ve Mejia-Ramos, 2006). Bu çerçeve daha sonra Tall'un (2006) "matematiğin üç zihinsel dünyası" olarak tanımladığı şu yapıya dönüşmüştür (Tall ve Mejia-Ramos, 2006):

- Kavramsal-somutlaşmış dünya (**conceptual-embodied**), nesnelerin özelliklerinin algılanmasına ve yansıtılmasına dayalıdır.

- Nesnesel süreçsel-sembolik dünya (**proceptual-symbolic**), eylemler (sayma gibi) ve sembolleştirme yoluyla somutlaştırılan kavramları içerir. Bu dünya, sayı gibi düşünülebilir kavramların geliştirilmesinde kritik rol oynar. Semboller hem yapılacak süreçleri (işlemleri) hem de düşünülecek kavramlar olarak işlev gören sembolleri temsil eder ve bu semboller "nesnesel-süreçsel" olarak adlandırılır.

• Aksiyomatik-formal dünya (**axiomatic-formal**), anlam inşası sürecinde sırayı tersine çeviren bir yapıdır: bilinen kavramlara dayalı tanımlardan küme-teorik tanımlara dayalı formal kavramlara doğru yönlendiren süreç (formal tanımlara ve ispata dayalı) (Tall ve Mejia-Ramos, 2006).

Matematiğin üç dünyası olarak adlandırılan bu yapı, pratik matematikteki özel ve genelleyici örneklerden, teorik matematikteki doğal somutlaştırılmış ve sembolik ispata, ardından niceleyici küme teorisi aksiyomlarına ve tanımlarına dayalı formal ispata kadar, matematiksel ispatın tüm bilişsel gelişimini göstermektedir (Şekil 2.2).



Şekil 2.2. Matematiksel ispatın uzun vadeli gelişimi (Tall, 2013)

Matematiğin bu üç dünyasında ispat karşılıkları ise şu şekilde görünmektedir:

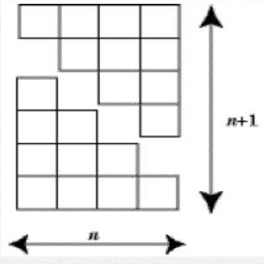
- Somutlaşmış dünyada, birey, fiziksel deneylerle başlayarak nesnelerin/olayların birbirine nasıl uyduğunu bulmaya çabalar. Ardından, bu deneyimler sözlü açıklamalara dönüşür; bu sözlü açıklamalar, hem görsel yapıları sözlü ispatlarla desteklemek hem de tanımlardan ve

ispatlardan yola çıkarak küresel bir teori oluşturmak için Öklid geometrisinde kullanılır.

- (Nesnesel-süreçsel; Proceptual) sembolik dünyada, argümanlar belirli sayısal/nümerik hesaplamalarla başlar ve sembolik manipülasyon yoluyla $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$ gibi cebirsel özdeşliklerin ispatına dönüşür.
- Formal dünyada, ispat, tamlık aksiyomu kullanılarak ispatlanan ara değer teoremi gibi formal tümdengelim yoluyla (Tall ve Mejia-Ramos, 2006).

Matematiğin üç dünyasında ispatın daha iyi anlaşılabilmesi için Şekil 2.3'te yer alan matematiksel ifadenin ispatına yönelik 3 farklı yaklaşım paylaşılmıştır. Buradaki problem, 1'den n'e kadar olan ardışık doğal sayıların toplamının $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ olduğunu gösterilmesidir.

1'den n'e kadar olan ardışık doğal sayıların toplamı $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ dir.

- Resimdeki örüntü (embodied)

- Aritmetik hesaplamada örüntü (proceptual)

Sütunları ekleme	$\begin{array}{r} 1 + 2 + \dots + 99 + 100 \\ 100 + 99 + \dots + 2 + 1 \\ \hline 101 + 101 + \dots + 101 + 101 = 100 \times 101 \end{array}$
- Tümevarım ispatı (formal)

Şekil 2.3. Matematiğin üç dünyasında farklı ispatlama yaklaşımları

Matematiğin üç dünyası çerçevesinden Tall'un (2013) doğal ve formal yollarını temsil eden bir yapıya doğru geçildiğinde bireyin düşünceleri iki şekilde harekete geçebilmektedir. Bunlardan birincisi formal yoldan düşünerek, diğeri

doğal yoldan düşünerek hareket etmektir. *Formal düşünme*, formal ispatlar oluşturmak için küme-teorik tanımlara dayanmaktadır (Pinto ve Tall, 1999, 2002; Tall ve Mejia-Ramos, 2006). *Doğal düşünme*, tanıma anlam vermek için somutlaştırmaya ve sembolizme dayalı düşünce deneylerini kullanan ve formel ispatlara çevrilecek olası teoremleri önermektedir (Pinto ve Tall, 1999, 2002; Tall ve Mejia-Ramos, 2006). Matematiksel ispat oluşturulurken uyandırılan (evoked) önceki karşılaşmalar (met-befores), sadece kavramsal somutlaştırmaları değil, aynı zamanda nesnel-süreçsel sembolik hesaplamaları da (genelleyici olabilecek potansiyel) içerir. Bu açıdan doğal bir yaklaşım; somutlaştırma, sembolizm ya da her ikisinin bir kombinasyonuna ya da harmanlanmasına dayanabilmektedir (Tall ve Mejia-Ramos, 2006).

Weber (2004), Tall'un (2013) çerçevesine (Şekil 2.1) ispatın ezbere/mekanik öğrenilmesini içeren **prosedürel** bir yaklaşım eklemiştir. Buna göre, doğal ve formal düşünenler, kavram imajı ve/veya kavram tanımına dayalı bilgi şemaları oluşturmaya çalışırken; mekanik olansa daha ilkel bir eylem-şema öğrenme biçimine karşılık gelen prosedürel bir yaklaşım olarak çerçevede karşılık bulabilmektedir (Tall ve Mejia-Ramos, 2006).

Tall'un (2013) çerçevesi bu başlık altında ele alınan matematiksel ispatla ilgili diğer çerçevelerden belli yönlerle farklılık taşımaktadır. Diğer çerçevelerin aksine bu çerçeve, daha gelişmiş ve uzun vadeli matematiksel ispatın gelişim ya da olgunlaşma sürecine odaklanmaktadır. Bu çerçeve, bireylerin akıl yürütme süreçlerinde doğrusal bir hatta ilerlememesi, anlamlı düşünce sıçrayışlarında bulunması yönleriyle ispata dayalı fikirleri nasıl inşa ettiklerini izleyebilme açısından rehber olabilmektedir. Bu anlamda bireylerin düşünce sıçrayışlarının özünü anlamaya çalışırken süreci nasıl ördükleri daha çok dikkat çeken bir nitelik oluşturabilmektedir. Tall'un çerçevesinde esnek hareket ve çift yönlü geçişler, yolların birbirinden beslenerek ilerletilmesine izin vermektedir. Somut ve sembolik dünyalar harmanlanarak formal tanımlara çevrilecek bir rota oluştururken, gerektiğinde de (ya da uygun olduğunda) tekrar formal yola ya da doğal yola geçiş yapıp rotanın yeniden oluşturulup yönlendirilebilmesi mümkün olabilmektedir. Dolayısıyla Tall'un çerçevesi, bireyin düşüncelerini harekete geçiren mekanizmalar ya da düşüncelerini ele geçiren ilk fikirler aracılığıyla bilgilerini rafine ederek, gerekirse eleyerek daha ince taneli yapılara nasıl dönüştürdüğünü açıklayabilecek bir güce sahiptir. Bunun yanı sıra, diğer teorik çerçevelerin daha özel alanları

araştırma bağlamları oluşturmalarının yürütülecek araştırmaya sınırlılık getirmesine karşılık matematiğin üç dünyası çerçevesi, bireyin ya da öğrencinin matematiksel düşünme sürecine daha genel bir bakış açısı sunduğu için bazı çalışmalarda (örn. Chin, 2013) tercih edilmektedir. Dolayısıyla bu araştırmada matematiğin üç dünya çerçevesi üzerinden temellendirilen Tall'un (2013) matematiksel düşünmede doğal ve formal yolları yansıtan çerçevesinin, araştırmanın matematikçi katılımcıları da dikkate alındığında matematiksel ispata ilişkin pratiklere daha işlevsel bir bakış açısı sunacağına inanıldığı için tercih edilmiştir.

2.2 İlgili Araştırmalar

Matematik eğitimi alan yazını incelendiğinde matematiksel ispat geniş bir çalışma tabanı oluşturmaktadır. Özellikle Türkiye'de son yıllarda matematiksel ispat üzerine yapılan çalışmaların eğilim gösterdiği bazı çalışmalarda (Öztürk ve Demirel, 2022; Sakallı-Doğru, 2022) görülmektedir. Bu çalışmaların ortaya koyduğu önemli bir sonuç, ispat üzerine yapılmış araştırmaların amaçları incelendiğinde kayda değer bir bölümü ispat süreci, ispata yönelik görüş ya da bakış açılarını inceleme şeklinde ivme kazandığı olmuştur. Ayrıca örneklem bazında incelendiğinde araştırmaların çoğunluğunda öğretmen adaylarının yer aldığı dikkat çekmiştir. Hem Öztürk ve Demirel'in (2022) tez ve makaleler açısından sistematik çalışması hem de Sakallı-Doğru'nun (2022) lisansüstü tezler açısından sentez çalışması katılımcı profiller açısından incelendiğinde, en az öğretim üyeleri ve matematik bölümü öğrencileri ile gerçekleştirilmiş sınırlı çalışmaların olmasını gözler önüne sermektedir.

Bu kısımda bu araştırmanın matematikçiler, matematik eğitimcileri, matematik programı öğrencileri ve matematik öğretmenliği programı öğrencileri boyutlarıyla daha çok ilgililik taşıyan alanyazındaki çalışmalar belli bağlamlarda özetlenerek sunulmuştur.

Sönmez vd. (2023) matematik öğretmen adaylarının ispatlama sürecindeki ileri-geri tekniğini kullanma durumlarını incelemeyi amaçlamıştır. Bunun için cebir ve geometri öğrenme alanlarından oluşturulmuş sorularla öğretmen adaylarıyla görüşmeler gerçekleştirmişlerdir. Araştırmalarının sonucunda farklı akademik başarı seviyelerindeki öğretmen adaylarının sorunun ilgili olduğu öğrenme alanından bağımsız bir şekilde ispatlama sürecinde ileri-geri hareketlerini bilinçli bir şekilde yönetmeseler bile yoğun bir şekilde bu tarz hamlelerde bulunduklarını

tespit etmişlerdir. Araştırmacılar ayrıca öğretmen adaylarının başarı düzeyinin artmasına bağlı olarak ileri-geri hamle sayılarında da artış gözlemlediklerini ifade etmişlerdir.

Öztürk ve Güven (2022) geometri etkinlikleri aracılığıyla ilköğretim matematik öğretmenliği programı birinci sınıf üniversite öğrencilerinin (50 kişi) bir ispatı değerlendirirken dikkat ettikleri kriterlerin ne olduğunu belirlemeye çalışmıştır. Araştırmacılar, öğretmen adaylarının %58'inin ispat değerlendirme kriteri olarak gerekçelendirmeyi, %35,9'unun ise matematiksel dilin uygunluğunu önemli bir kriter olarak gördükleri sonucuna ulaşmıştır. Ayrıca çalışmaları, öğretmen adaylarının gerekçelendirme açısından kullanılan tanım, aksiyom ve teoremlerin ispat adımlarında kullanımının, matematiksel dil açısından ise sembolik dilin uygun bir şekilde kullanımını en önemli kriter olarak gördüklerini ortaya koymuştur.

Yılmaz-Akkurt ve Yıldırım (2021) ortaokul matematik öğretmen adaylarının ispat kavramlarını incelemişlerdir. Öğretmen adaylarının ispat deneyimlerindeki farklılıkları belirlemek amacıyla fenomenografik bir yaklaşım kullanmışlardır. Araştırmanın sonucunda öğretmen adaylarının niteliksel olarak farklılaşan matematiksel ispat kavramlarının basitten karmaşığa doğru bir gelişmişlik hiyerarşisinde 5 kategoriyle açıklanabildiğini ortaya çıkarmışlardır. Bu kategoriler sırasıyla, (A) ispat bir problem çözme yoludur, (B) anlamanın bir aracıdır, (C) düşünmeyi ikna edici bir şekilde açıklamaktır, (D) mantıksal argümanlar kullanarak varsayımları doğrulamaktır ve (E) matematiğin keşfi için bir araçtır. Ayrıca bu araştırmaları matematiksel bir söylem açısından, öğretmen adaylarının A ve B kategorilerindeki ispat kavramlarının kişinin matematiksel sonuçları anlama veya bir sonuca ulaşma anlamıyla, diğer taraftan C, D ve E kategorilerindeki ispat kavramlarının başkalarıyla bu sonuçları paylaşma anlamıyla ilişkili olduğu göstermiştir. Bununla birlikte bir argümanın ispat olarak kabul görmesi kişiye anlamlı geldiği sürece yeterliken diğer taraftan ispat sayılabilmesi için matematiksel açıdan kabul almasının ön planda olduğunu gösteren kategorilerin sırasıyla A, B ve C kategorilerine karşılık D ve E kategorileri olduğunu ifade etmişlerdir. Bir başka ifadeyle araştırmacılar kişiye bağlı olarak ve kişiden bağımsız bir şekilde matematiksel olarak yönlerle kategorilerin niteliksel olarak ayırdığından bahsetmişlerdir.

Akarsu-Yakar'ın (2019) çalışmasında matematiğin üç dünyası çerçevesi, ortaokul düzeyinde 6-8. sınıf öğrencilerinin cebir ve geometri gibi öğrenme alanlarında yer alan sorular üzerinden matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi için kullanılmıştır. Araştırmanın sonuçları arasında, her ne kadar kendi sınıf seviyesi kazanımları arasında yer almayan sorular olsa da 6. ve 7. sınıf öğrencilerinin aksiyomatik-formal dünyaya ait bir düşünme süreci geliştirebildikleri yer almaktadır. Çalışmada, özellikle 6. sınıf öğrencilerinin kavramları inşa süreçleri incelendiğinde matematiksel düşünmelerinin daha özgün olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Araştırmacı bu durumu, sınıf seviyesi ilerledikçe öğrencilerin derste öğrendiği bilgilerin ispatlama sürecini geliştirdiği yönünde yorumlamıştır.

Stewart, Epstein ve Troup'ın (2019) çalışmaları, bir matematikçinin üniversite birinci sınıf lineer cebir dersindeki özdeğerler ve özvektörlerin öğretimini yansıtan günlüklerinin analizine dayanmaktadır. Araştırmacılar matematikçinin sınıfını formal dünyaya ulaştırmak için yönlendirdiği öğretiminde, somut ve sembolik hatta formal düşünceyi vurgulayan bir dizi etkinlik kullandığını ifade etmiştir. Araştırmanın sonucu, matematikçinin, sınıfını formal dünyaya yönlendirirken birtakım zorluklarla karşılaştığını ortaya çıkarmıştır. Ayrıca bu matematikçinin kendisinin kavram imajını oluşturmaya çalışırken, öğrencilerinde aynı etkiyi yakalamayan bir imaj çizmesi araştırmanın dikkat çekici bir sonucu olmuştur.

Hannula (2018) çalışmasında, matematik öğretmen adaylarının okul matematiği ile üniversite matematiğinin arasındaki boşluğun doğasıyla ilgili kavrayışları ile matematiğin üç dünyası çerçevesine göre matematiksel düşünme biçimlerini incelemek amacıyla görüşmüştür. Araştırmasında kavramsal-somutlaşmış dünya ile nesnel süreçsel-sembolik dünyayı matematiksel düşünmenin informal bileşenleri olarak, aksiyomatik-formal dünyayı ise matematiksel düşünmenin formal bileşenlerini ifade etmesi yönüyle ele almıştır. Çalışmada, matematik öğretmen adaylarının üniversiteye geçişte ve matematiksel düşünmenin formal ve informal bileşenlerini birleştirmekle ilgili yaşadıkları zorluklar ortaya koyulmuştur. Genel olarak bu çalışmada, öğretmen adaylarında çağrışan ya da uyandırılan (evoked) kavram imajlarında matematiğin birinci (kısaca somut) ve ikinci (kısaca sembolik) dünyasının baskın olduğu görülmüştür. Bir başka ifadeyle, betimlemeler, tanımlamalar ve açıklamaların üniversite

matematiğinde vurgulanan aksiyomatik-formal teori yerine, daha çok okul matematiğinde vurgulanan fiziksel ve sembolik yorumlarına dayandığını göstermiştir. İnfomal bileşenler arasındaki bağlantılar (örn. okul matematiğindeki gibi vektörleri göstermek için oklar, vektörlerin dağılma özelliği için sembolik hesaplamalar) sağlanabilmişken, matematiksel düşünmenin formal ve infomal bileşenlerini birleştirebilmek, katılımcılar için hiç de doğal olmayan hatta zor bir durum olarak görünmüştür. Çalışmadaki öğretmen adaylarından bazıları aksiyomatik-formal dünyaya ait tanımları kullanabilmiş fakat bu tanımları bazı iddiaları açıklayabilme noktasında ise kullanamadıkları görülmüştür. Diğer taraftan, öğretmen adaylarından biri aksiyomatik-formal tanımların birkaçını kullanabilse bile, bu tanımları matematiğin birinci veya ikinci dünyasıyla bağlantılı hale getiremediği tespit edilmiştir.

Stewart ve Schmidt (2017) çalışmalarında matematiğin üç dünyası çerçevesi ile Piaget'nin bilişsel gelişim çerçevesinin uyum sürecini harmanlayarak bir matematikçi ve onun öğrencilerinden birinin düşünme süreçlerini incelemeyi amaçlamıştır. Araştırmacılar, çalışmalarının sonucunda bir teoremi ispatlama sürecine pedagojik zorlukların eşlik ettiğini gördüklerini belirtmişlerdir. Matematikçi bu sürecin öğrencilerine daha dikkatli bir şekilde erişilebilir hale getirilmesi noktasında onların yeteneklerinin bilincinde olmasına rağmen, bu araştırma, matematikçi ve öğrenci arasındaki farklılıkların belirgin olduğunu göstermiştir.

Güler (2016) çalışmasında, matematik eğitimindeki öğretim üyelerinin (akademisyenlerin) görüşlerini alarak matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispatlamada yaşadıkları zorluklar, bu anlamda zorlandıkları dersler, matematik eğitiminde ispatın önemi ve öğretmen adaylarının mesleki yaşamlarındaki işlevlerini incelemeyi amaçlamıştır. Akademisyenlere göre matematik eğitiminde ispatın önemi şu şekilde olmuştur. İspatın problem çözme, muhakeme, matematiksel düşünme, yaratıcılık becerisi geliştirdiği; matematiğin temeli olduğu, matematiksel iletişimi sağladığı, kavramların doğruluğu/yanlılığı konusunda ikna edici ya da tatmin edici argümanlar ürettiği ve ezbere dayalı öğrenmeyi engellediği için önemlidir. Bu anlamda çalışması, akademisyenlere göre matematiksel ispatın üst düzey düşünme becerilerini geliştirdiğini ifade ettiğini ortaya çıkarmıştır. Güler'in (2016) çalışmasının diğer bir sonucu akademisyenlere göre öğretmen adaylarının mesleki hayatlarında ispatın işlevinin ne olduğuyla

ilgilidir. Araştırmacı bu anlamda şu sonuçlara ulaşmıştır: İspat, problemlere karşı farklı bakış açısı kazandırır, problem çözme becerisini geliştirir, analitik düşünme becerisini geliştirir, matematiksel içerik bilgisine katkısı vardır, matematiğin doğası hakkında inançlara katkı sağlar.

Hannah vd. (2016) üniversite öğrencilerinin lineer cebirin temel kavramları hakkında anlayışları, bu kavramları kullanabilme ve açıklayabilme becerilerini araştırmak istediği çalışmalarında, hem Tall'un matematiğin üç dünyası (somut, sembolik, formal) çerçevesini hem de Dubinsky'nin APOS (Eylem, Süreç, Nesne, Şema) teorisini harmanlayarak kullanmıştır. Araştırmanın sonucunda, öğrencilerin somut dünyayla karşılık bulan bir düşünme sürecinde yer aldıkları, buna karşılık sembolik ifadede zorlandıkları; kavramları ifade ederken hata yaptıkları tespit edilmiştir. Bunun yanı sıra APOS teorisinin Nesne seviyesine ulaşamamış olmaları araştırmanın bir diğer sonucu olmuştur.

Tuncay (2015) çalışmasında 2 ortaöğretim matematik öğretmen adayı, 2 lise matematik öğretmeni ve 1 akademisyenin (doktora tez aşamasında araştırma görevlisi) matematiksel düşünme süreçlerini incelemek istemiştir. Çalışmanın sonuçları içerisinde, matematiksel düşünme sürecindeki bazı boyutlar açısından özellikle ispat yöntemini akademisyen katılımcı sıklıkla kullanabilmişken, bazı boyutlarda özellikle özelleştirmede öğretmen adaylarının daha fazla çözüm üretebildikleri görülmüştür.

Dickerson ve Doerr (2014) lise matematik öğretmenleriyle yaptığı çalışmasında matematiksel ispatın öğretmenlerin gözündeki rolünü araştırmıştır. Araştırmalarının sonucunda ispatın matematiksel bir anlayış geliştirme, mantıksal düşünme ve üstbilişsel becerileri geliştirme ile soyut olan matematiksel bir bilgiyi somutlaştırma açısından önemli rollere sahip olduğu ortaya çıkarılmıştır. Diğer taraftan, öğretmenlerle yaptığı iki farklı çalışmada Knuth (2002a, 2002b) matematiksel ispatın rollerine ilişkin sonuçları paylaşmıştır. Knuth'un (2002a) ilk çalışması öğretmenlerin, mantıksal düşünme, düşünceyi açığa çıkarma, matematiği iletişim yoluyla aktarma, nedenini matematiksel olarak açıklama ve matematiksel bilgiyi oluşturma açısından rolüne değinildiğini ortaya çıkarmıştır. Knuth'un (2002b) ikinci çalışmasında ise öğretmenlerin ispatı doğrulama, açıklama, iletişim, bilgiyi oluşturma ve matematiksel sonuçları sistemleştirme aracı olarak gördüklerini ifade etmiştir.

Jukić ve Brückler (2014) iki matematik öğretmen adayının diferensiyel ve integral hesabın içerisinde geçen temel matematiksel kavramlara ilişkin bilgilerini incelemeyi amaçlamıştır. Araştırmalarında elde etmiş oldukları veriyi matematiğin üç dünya çerçevesini kullanarak analiz etmişlerdir. Araştırmalarının sonucunda kavramsal-somutlaşmış dünyada doğru bir şekilde geliştirilmiş olan kavramların, nesnesel süreçsel-sembolik ve aksiyomatik-formal dünyadaki kavramların da doğru kullanımına ve anlaşılmasına uzun vadeli yansıtacağı yönünde katkı sağladığını ifade etmişlerdir. Diğer taraftan, sembolik dünyadaki akıcılığın somutlaşmış ve formal dünyaya yardımcı olmadığını belirtmişlerdir.

Taştepe (2012) çalışmasında matematiksel ispat kavramını kitap, öğretmen ve öğrenci boyutunda incelemek istemiştir. Bu amaçla çalışmasında üniversite matematik derslerindeki ispat kavramı ve bu kavrama yaklaşımları ele almıştır. Çalışmasında öğrenci boyutu için öğretmen adayları, öğretmen boyutu için ise öğretim üyeleri olarak görünmektedir. Çalışması, öğretmen adaylarının, matematikte ispatın yeri ve ispat yapmanın önemini değindiklerini fakat bazı derslerde yapılan ispatları anlamakta güçlük çektiklerini ortaya koymuştur. Zorlanmalarının bir sebebi olarak öğretmen adaylarının özellikle ispat ve ispat yapmayla ilk defa üniversite seviyesinde karşılaşmış olmalarını ifade etmeleri olmuştur. Ayrıca çalışması, öğretmen adaylarının matematiksel ispatla ilgili bazı temel kavramların lisede de görülmesi gerektiğini fakat sınav sistemi faktörünün buna elvermediğini belirten görüşlerini ortaya çıkarmıştır.

Kashefi vd. (2010) mühendislik öğrencilerinin Mühendislik Matematiği ya da Çok Değişkenli Analiz olarak okutulan derste rutin olmayan problemler üzerinden iki değişkenli fonksiyonları öğrenebilme süreçlerinde matematiğin üç dünyası çerçevesinin etkisini incelemek istemişlerdir. Araştırmada sonuç olarak, öğrencilerin öğrenme süreçlerinde zorluklarla karşılaştığı görülmüştür. Araştırmalarının sonuçları arasında öğrencilerin ortak yaşadığı güçlüklerin daha önce karşılatığı deneyimlerinde, üç dünyanın uygun bir temsilini seçmede, matematiksel düşünmenin bir dünyasından bir diğerine geçişte zorluk yaşadıklarını ifade etmişlerdir.

3. YÖNTEM

3.1 Araştırmanın Deseni

Bu araştırmanın amacı, farklı matematik topluluklarının ispat karakteristiklerini algı ve pratikleri açısından inceleyerek karşılaştırmaktır. Bu amaca ulaşmak için çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması kullanılmıştır. Nitel durum çalışması, bir program, bir kurum, bir birey, bir süreç ya da bir sosyal birim gibi sınırlı bir olgunun derinlemesine, bütüncül bir şekilde tanımlanması ve analiz edilmesi olarak ifade edilmektedir (Merriam, 2009). “Durum”, tek bir birey olabildiği gibi, birden çok birey ya da bir grup, bir topluluk şeklinde de olabilmektedir (Creswell, 2015). Durum çalışmasının odağı, güncel bir fenomeni yani durumu, özellikle fenomen ve bağlam arasındaki sınırlar açıkça belli olmadığında, derinlemesine ve gerçek hayat bağlamı içerisinde araştırmaktır (Yin, 2018).

Durum çalışmaları, incelenecek durum ya da durumlara göre tek ya da çoklu durumlar şeklinde farklılaşabilmektedir. Bu açıdan durum çalışmaları, araştırmaya konu olan meseleyle ilgili çok sayıda durumu içerebilir. Durum çalışmalarının birden fazla duruma odaklanması, çoklu durum çalışması olarak adlandırılır (Stake, 2005; Creswell, 2015). Çoklu durum çalışmalarında, araştırılacak ya da incelenecek konuya ilişkin derinlemesine kavrayış sağlayabilmek adına çoklu durumlar karakterize edilerek birbirleriyle karşılaştırılmaktadır. Bu yönüyle çoklu durum çalışmaları, tüm durumlardaki süreçleri ve sonuçları (çıktıları) görmeyi sağlayarak, daha güçlü tanımlamalar ve açıklamalar aracılığıyla daha derin bir anlayışın yakalanmasını işlevselleştirmektedir (Creswell, 2015).

Stake’e (2005) göre çoklu durum çalışmasında her bir durum ayrıntılı olarak incelenir. Çünkü incelenecek her bir durumun kendine has özellik ya da nitelikleri vardır. Bu açıdan bakıldığında durumların anlattığı bir hikâye vardır. Bu tarz çalışmalarda, çalışmaya konu olan meselenin durumlarda nasıl sergilendiğini daha iyi anlamaya çalışmak amaçlanır. Böylelikle durumların kendine özgü karakteristikleri, mesele hakkında ortaya koyabilecekleri açısından merak konusudur (Stake, 2005). Bu nitel durum çalışmasında ilgilenilen mesele, matematiksel ispatın kendisidir. Katılımcıların matematiksel ispatla ilgili algı ve pratiklerini derinlemesine anlamak bu araştırmanın odağıdır. Bu araştırmada matematikçiler, matematik eğitimcileri, matematik programı son sınıf öğrencileri

ve matematik öğretmenliği programı son sınıf öğrencileri toplulukları olmak üzere 4 durum belirlenmiştir. Farklı matematik toplulukları olarak atfedilen akademisyenler (öğretim üyeleri) ve öğrencileri, bu araştırmada çoklu durumları oluşturmaktadır. Bunun için araştırmada çoklu durum deseni kullanılmıştır. Bu araştırmada, her bir durum önce kendi içerisinde bütüncül olarak ele alınmış, daha sonra da durumlar arası karşılaştırılmıştır.

3.2 Katılımcılar

Nitel çalışmalarda, içinde bulunulan bağlam da dikkate alınarak insan deneyiminin zengin içeriklerinin detaylı ve derinlemesine araştırılması ve anlaşılması temel amaçtır (Polit ve Beck, 2010). Bu nedenle nitel araştırmada örneklemden evrene genelleme yapma amacı güdülmeyen ya da genelleme ihtiyacı aranmadan, belirli durumları ya da olayları derinlemesine anlayabilmeye odaklanılmaktadır (McMillan ve Schumacher, 2013). Böylesi derinlemesine bir odaklanma, nitel bir araştırma için belli bir amaca yönelik olarak seçilecek daha küçük örneklemelere dayanmaktadır ve “amaçlı örnekleme” olarak adlandırılan bu katılımcı seçim mantığı ve araştırma için potansiyel gücü (Patton, 2014), ilgili araştırmacının araştırdığı konu hakkında bilgi sahibi, aydınlatıcı ve zengin veri sağlayabilecek katılımcılara yönelmesidir (McMillan ve Schumacher, 2013).

Bu araştırmada amaçlı örnekleme yöntemlerinden *ölçüt örnekleme*, *maksimum çeşitlilik örnekleme* ve *kartopu (zincir) örnekleme* harmanlanarak bir arada kullanılmıştır. Ölçüt örnekleminin mantığı, önceden belirlenmiş bir kriter/ölçüt baz alınarak katılımcıların bu ölçütleri ya da kriterleri karşılayanlar arasından seçilmesine dayanmaktadır (Patton, 2014, s. 425). Araştırmanın çalışma grubunda yer alacak kişilerin matematiksel ispata dair algıları ve ispatlama pratikleri hakkında veri sağlayabilmek amacıyla ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Çalışma grubunda yer alacak matematik programı öğrencileri ile matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin belirlenmesinde, lisans öğretimlerinin son yani “4. sınıf seviyesinde olan mezun olmaya yakın öğrenciler” olması ve onların akademik camiadaki öğretmenleri olan matematikçiler ve matematik eğitimcilerinin belirlenmesinde “en az 5 yıllık mesleki deneyime sahip” olması şartı, ölçüt olarak alınmıştır.

Maksimum çeşitlilik (heterojenlik) örnekleme stratejisi, birçok farklı durumu kapsayan ana temaları yakalamayı ve açıklamayı hedefler. Küçük örneklemelerde, bireysel durumlar (vakalar) birbirinden çok farklı olduğundan

büyük bir heterojenlik sağlayabilmek sorun yaratabilir. Ancak bu strateji, görülen bu zayıflığı, büyük çeşitlilikten ortaya çıkan ortak örüntüleri belirleyerek bir ortamın ya da fenomenin çekirdek deneyimlerini ve merkezi olarak paylaşılan boyutlarını yakalamak için bir güce dönüştürür (Patton, 2014, s.428). Bu örnekleme stratejisine göre, büyük çeşitliliğe sahip küçük bir örneklem seçildiğinde, iki tür bulgu üretilecektir: her bir durumun (vakanın) oldukça nitelikli, ayrıntılı açıklamaları, biricikliği (uniquenesses) ve çeşitliliğini ortaya koyabilmede kullanışlıdır; durumlar arasında ortaya çıkan önemli ortak örüntüler ise heterojenlikten türemiş oldukları için özellikle anlamlıdır (Patton, 2014, s.429). Bu araştırmada heterojenlik adına, matematikçiler ve matematik eğitimcileri olmak üzere farklı kurumsal aidiyetlerinin olması, doktor öğretim üyesi, doçent ve profesör şeklinde farklı akademik titrlerde ve farklı uzmanlık alanlarına sahip olmaları ile matematik programı öğrencileri ve matematik öğretmenliği programı öğrencileri açısından farklı matematiksel başarı seviyelerinde yer almaları, maksimum çeşitliliği temsil etmektedir.

Kartopu (zincir ya da ağ) örnekleme, katılımcı tavsiyeleri çerçevesinden örneklem seçimini temellendirerek, araştırma için aranan profile/özellığe sahip katılımcıları belirleyebilme stratejisidir. Araştırmacı, araştırmasının doğası ve amacı için istenen profil ya da özellikleri tanımlayarak, her bir katılımcıdan bu kriterlere uyacağını düşündüğü diğer kilit kişileri önermelerini ister (McMillan ve Schumacher, 2013, s.351). Kısacası araştırmanın ilgi alanına girebilecek kişileri, kendilerini tanıyan kişiler tarafından önerilmesi (Glesne, 2016, s.51) yoluyla katılımcı belirleme stratejisi olarak ifade edilebilir. Ayrıca bu örnekleme yöntemi, katılımcı gözlem araştırmaları yerine, derinlemesine görüşmeleri içeren çalışmalarda daha çok kullanılmaktadır (McMillan ve Schumacher, 2013, s.351). Bu araştırmada gerçekten matematiksel ispatla ilgili doğru kişilere ulaşabilme, bu konuda zengin ve derinlemesine bilgi verebilecek katılımcıların dahil edilebilmesi adına kartopu örnekleme yöntemi kullanılmıştır.

Nitel araştırmalar için uygun örnekleme stratejisine karar verebilmek kadar bir diğer önemli boyut, örneklem büyüklüğüdür (Creswell, 2013). Örneklem büyüklüğünün, araştırmanın amacı, araştırma problemi, temel veri toplama stratejisi ve bilgi açısından zengin durumların erişilebilirliğine (bazı bilgi vericiler sayıca azdır, yerlerini tespit etmek zordur, buna karşılık diğerlerini tespit etmek ve bulmak nispeten kolaydır) bağlı olarak değişebilmektedir (McMillan ve

Schumacher, 2013, s.352). Daha önce de açıklandığı üzere, nitel araştırma sonucu elde edilecek kavrayış, örneklem büyüklüğünden çok bilginin zenginliğince tartışılmaktadır. Bununla birlikte örneklem büyüklüğünü belirleyebilmede geçerli bir diğer yaklaşım veri doygunluğu (çalışmaya daha fazla kişi eklemek ya da alana tekrar geri dönmek yeni kavrayışlar sağlayacak mıdır düşüncesi) olarak görülmektedir (McMillan ve Schumacher, 2013, s.353). Doygunluk örnekleme, az sayıda örneklem büyüklüğü problemiyle başa çıkmak kullanılan amaçlı bir strateji olarak (Patton, 2014, s. 454) baz alınmaktadır. Lincoln ve Guba'ya (1985) göre nitel araştırmada amaç eğer ki bilgiyi en üst düzeye çıkarmaksa, örneklem büyüklüğü, veriden gelen bilgi miktarının artık yeni bir bilgi akışı sunmadığı ya da araştırmaya daha önceki veriden farklı yeni bir nitelik katılmamaya başladığı anda doyuma ulaşılmış demektir (s. 202).

Katılımcılar hakkında kapsamlı ve ayrıntılı bilgiyi elde edebilmede, örneklem büyüklüğünün ne kadar olması gerektiği yönünde veri doygunluğunun dışında kesin bir kılavuz verilememekle birlikte, Creswell (2013) durum çalışması araştırması için bir çalışmanın içerisinde 4 ya da 5'ten fazla durumu dahil etmemenin bir yol olabileceğinden, bu sayının durumlar (vakalar) açısından temaları belirleme ve çarpaz durum tema analizi (cross-case theme analysis) yapabilmeye yeterli veriyi sağlayabileceğinden bahsetmektedir. Bu nedenle çoklu durum çalışması olarak desenlenen bu araştırmada, katılımcı sayısının her bir durum içerisinde 5'in altında olmayacak şekilde ve 4 durumda da en az aynı değer gözetilerek, aynı zamanda artık yeni bir katılımcıdan farklı bir veri katılmamaya başladığı anda ya da yeni katılımcının getirdiği matematiksel ispat içeriği daha öncekilerin etrafında tekrarlanıyorsa, veri artık doymuştur kararına varılmıştır.

Araştırmanın katılımcılarını Türkiye'nin Batı Karadeniz Bölgesinde lisans düzeyinde eğitim vermekte olan bir üniversitesinin Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü programına kayıtlı son sınıf öğrencileri ve Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği programına kayıtlı son sınıf öğrencileri; ilgili fakültelerde lisans ve lisansüstü seviyede ders vermekte olan Matematikçiler ve Matematik Eğitimcileri oluşturmaktadır. Araştırma 2021-2022 öğretim yılı Bahar dönemini kapsamaktadır. Araştırmada, 9 matematikçi ve 9 öğrencisi, 7 matematik eğitimcisi ve 9 öğrencisi olmak üzere toplam 34 katılımcı yer almaktadır. Bu katılımcılar tamamen gönüllülük esasına göre seçilerek araştırmaya dahil edilmiştir. Tablo 3.1-3.4 ile katılımcılara ait bilgiler sırasıyla verilmiştir.

Tablo 3.1. Araştırmadaki katılımcılar için kullanılan grup ve kimlik profilleri

	Grup profili			
	Matematikçiler (1)	Matematik Eğitmcileri (2)	Matematik Programı Öğrencileri (3)	Matematik Öğretmenliği Programı Öğrencileri (4)
Kimlik profili				
Matematikçiler (MA)	1MA1	2EA1	3MÖ1	4EÖ1
	1MA2	2EA2	3MÖ2	4EÖ2
Matematik Eğitmcileri (EA)	1MA3	2EA3	3MÖ3	4EÖ3
	1MA4	2EA4	3MÖ4	4EÖ4
Matematik Programı Öğrencileri (MÖ)	1MA5	2EA5	3MÖ5	4EÖ5
	1MA6	2EA6	3MÖ6	4EÖ6
	1MA7	2EA7	3MÖ7	4EÖ7
Matematik Öğretmenliği	1MA8		3MÖ8	4EÖ8
Programı Öğrencileri (EÖ)	1MA9		3MÖ9	4EÖ9

Araştırmadaki katılımcılardan bahsederken kolaylık olması bakımından bazı profil tanımlamaları yapılmıştır. MA, EA, MÖ ve EÖ kodları sırasıyla araştırmadaki matematikçiler, matematik eğitmcileri, matematik programı öğrencileri ve matematik öğretmenliği programı öğrencilerine işaret eden kısaltmalardır. Araştırmada 4 durum olduğu için bunları birbirinden ayırabilmek için de sırasıyla katılımcı gruplara 1, 2, 3 ve 4 numaralı kodlar eklenmiştir. Böylece matematikçilere 1MA, matematik eğitmcilerine 2EA, matematik programı öğrencilerine 3MÖ ve matematik öğretmenliği programı öğrencilerine 4EÖ grup kodları kullanılmıştır. Bir başka ifadeyle, bu düzenlemede numaralandırılmış ilk haneler katılımcıların ait olduğu grubu temsil etmektedir. Numaralandırılmış son haneler ise o grupta yer alan katılımcının sıra numarasını yansıtmaktadır. Örneğin, “2EA5”, araştırmanın 2. grubu olan matematik eğitmcilerinden 5. sıradaki katılımcıyı temsil etmektedir.

Tablo 3.2. Katılımcı profilleri (Matematikçiler)

Kimlik	Mesleki Deneyim	Uzmanlık Alanı	Verdiği Dersler
1MA1	14-15 yıl	Fonksiyonel Analiz	Analiz, kompleks analiz, fonksiyonel analiz, metrik uzay, fourier analizi, harmonik analiz, deltasal çekirdekli operatörler, operatör teori
1MA2	9 yıl	Uygulamalı Matematik, Aritmetik	Integral transformation and asymptotic expansion, temel matematik, advanced calculus, linear algebra, calculus

		Kombinatorik, Cebir ve Sayılar	
1MA3	11 yıl	Geometri, Eğriler	Diferansiyel geometri, analitik geometri, kinematik, calculus on manifolds, matematik tarihi
1MA4	27 yıl	Topoloji, Analiz, Uygulamalı Matematik	Calculus, kompleks analiz, lineer cebir, topoloji, computer applications in science, introduction to computer's programming
1MA5	30 yıl	Fonksiyonel Analiz, Cebir, Topoloji	Fonksiyonel analiz, metrik uzaylar, cebir, topoloji
1MA6	12 yıl	Yaklaşımlar Teorisi	Analiz, ileri analiz, Hilbert uzayları, matematik tarihi
1MA7	21 yıl	Cebir, Uygulamalı Cebir, Sembolik Hesaplama, Algoritmalar	Soyut matematik, cebir, sayılar teorisi, mathematica, computer applications, cebirsel geometri, calculus, diferansiyel denklemler, bilgisayar ve sembolik hesaplama
1MA8	10 yıl	Cebir, Cebir ve Sayılar Teorisi, Değişmeli Cebir ve Halkalar, Modüller	Soyut matematik, soyut cebir, Lineer cebir, diferansiyel denklemler, Python, mathematica, calculus, fonksiyonel analiz
1MA9	17 yıl	Cebir ve Sayılar teorisi, Grup Halka Teorisi, Modül Teorisi	Analiz, cebir, soyut matematik, lineer cebir

Tablo 3.3. Katılımcı profilleri (Matematik eğitimcileri)

Kimlik	Mesleki Deneyim	Uzmanlık Alanı	Verdiği Dersler
2EA1	13 yıl	İstatistiksel düşünce, Geometri	Problem çözme, matematik ders kitabı incelemesi, Analiz 3, diferansiyel denklemler, matematik öğretiminde ilişkilendirme
2EA2	22 yıl	Kesirler	Öğrenme öğretme yaklaşımları, Geometri öğretimi, ortaokul matematik öğretim programları, matematik felsefesi, Çocuklarda matematiksel düşünce
2EA3	16 yıl	Öğretmen eğitimi	Problem çözme, materyal geliştirme, analiz, dönem sayılar teorisi, öğretim teknolojileri ve materyal tasarımı, problem çözme, matematik sınıflarında iletişim
2EA4	17 yıl	Matematik başarısının ölçülmesi, Gruplarda radikal teorisi	Olasılık ve istatistik, ölçme ve değerlendirme
2EA5	13 yıl	Fuzzy topolojik uzaylar, matematiksel modelleme	Analiz, özel öğretim yöntemleri, bilgisayar, cebir, lineer cebir, matematik eğitiminde teknoloji kullanımı, matematik eğitiminde modelleme, lineer cebir 2, analiz 2
2EA6	20 yıl	Information technology, bilgisayar destekli eğitim	Temel matematik, matematik öğretimi, Bilgisayar, matematik öğretimi ve bilgisayar destekli matematik
2EA7	12 yıl	Gerçekçi matematik eğitimi, bilgi	Genel matematik, analiz,

oluşturma süreçleri, cebirde kavram yanılgıları, cebir öğretimi	cebir öğretimi, matematik okuryazarlığı, matematik eğitiminde kavram yanılgıları, oyunla matematik öğretimi

Tablo 3.4. Katılımcı profilleri (Matematik programı öğrencileri ve matematik öğretmenliği programı öğrencileri)

Kimliği				Not ort.			
3MÖ1	Matematik Öğrencisi	Programı	2.88	4EÖ1	Matematik Öğret. Progr.	3.23	
3MÖ2	Matematik Öğrencisi	Programı	2.94	4EÖ2	Matematik Öğret. Progr.	3.56	
3MÖ3	Matematik Öğrencisi	Programı	3.15	4EÖ3	Matematik Öğret. Progr.	3.08	
3MÖ4	Matematik Öğrencisi	Programı	2.82	4EÖ4	Matematik Öğret. Progr.	3.24	
3MÖ5	Matematik Öğrencisi	Programı	2.25	4EÖ5	Matematik Öğret. Progr.	3.25	
3MÖ6	Matematik Öğrencisi	Programı	2.82	4EÖ6	Matematik Öğret. Progr.	3.20	
3MÖ7	Matematik Öğrencisi	Programı	3.26	4EÖ7	Matematik Öğret. Progr.	3.38	
3MÖ8	Matematik Öğrencisi	Programı	2.68	4EÖ8	Matematik Öğret. Progr.	3.53	
3MÖ9	Matematik Öğrencisi	Programı	2.80	4EÖ9	Matematik Öğret. Progr.	3.08	

3.3 Veri Toplama Süreci

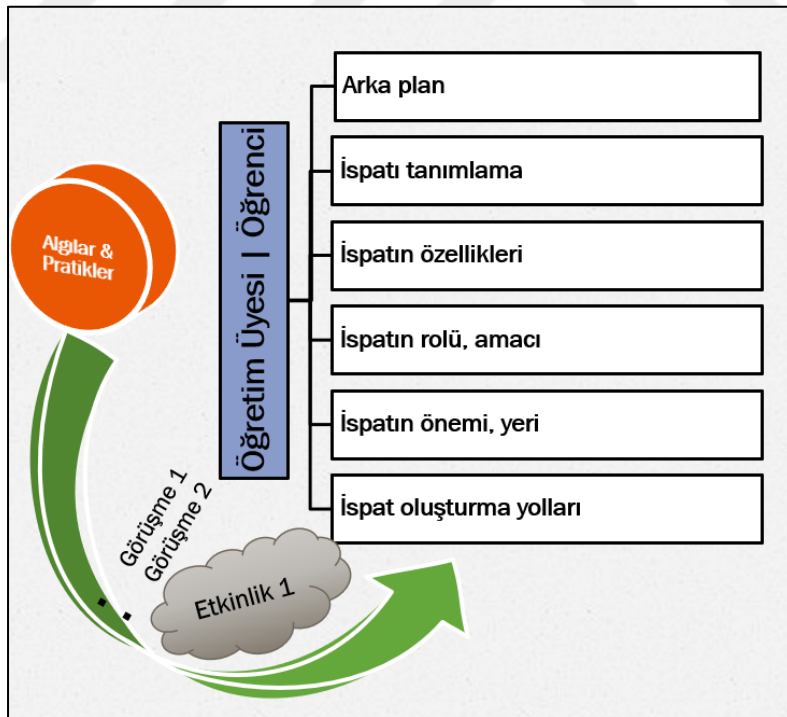
Araştırmada nitel araştırmalarda yaygın bir şekilde kullanılan görüşme yöntemi kullanılmıştır. Araştırmada katılımcılarla gerçekteştirilen görüşmeler aracılığıyla elde edilen veriler yarı yapılandırılmış görüşme tekniği ile toplanmıştır. Bu görüşme türünde daha önceden belirlenmiş bir görüşme rehberi (bu araştırmada görüşme protokolü olarak adlandırılmıştır) takip edilerek (McMillan ve Schumacher, 2013, s.381), araştırmacının araştırdığı konuyla ilgili daha ayrıntılı bilgi alabilmek amacıyla, görüşme esnasında katılımcıdan vermiş olduğu yanıtları açmasını olanaklı kılan ek soruları sorabilme esnekliğine sahiptir.

Bu doğrultuda matematikçiler, matematik eğitimcileri, matematik programı öğrencileri ve matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin matematiksel ispata ilişkin algıları ve pratiklerini ortaya çıkarabilmek için sırasıyla (etkinlik temelli olmayan) yarı yapılandırılmış görüşme ve etkinlik temelli yarı yapılandırılmış görüşme protokolleri hazırlanmıştır (EK 1, 2 ve 3). İlerleyen kısımlarda kolaylık olması açısından etkinlik temelli olmayan yarı yapılandırılmış görüşmeden sadece

“yarı yapılandırılmış görüşme”, etkinlik temelli yarı yapılandırılmış görüşmeden sadece “etkinlik temelli görüşme” şeklinde bahsedilecektir.

3.3.1 Yarı-Yapılandırılmış Görüşmeler

Yarı yapılandırılmış görüşme soruları ile etkinlik temelli görüşme sorularının tamamı daha önceki matematiksel ispat çalışmalarınca test edilmiş soruların içerisinde araştırma sorularına cevaplar üreteceği düşünülenlerden seçilerek bu araştırmaya dahil edilmiştir. Yarı yapılandırılmış görüşme protokolünde yer alan görüşme soruları 6 başlıkta toplanmıştır: arka plan soruları, ispatı tanımlama, ispatın özellikleri, ispatın amacı ve rolü, ispatın yeri ve önemi, ispat oluşturma yolları (Şekil 3.1, Görüşme 1). Katılımcılara görüşme protokolü uygulanmadan önce, yapılacak araştırma hakkında kendilerini bu çalışmada ne beklediği şeklinde bilgilendirme yönergesi açıklanmıştır. Her bir katılımcıdan izin alınarak görüşmeler ses ve video kaydı altına alınarak gerçekleştirilmiştir. Katılımcılarla bireysel olarak yapılan her bir görüşme (görüşmenin getirisine göre farklı oturumlara göre esnek düzenlenebilen) yaklaşık 1-1,5 saat sürmüştür.



Şekil 3.1. Araştırmada kullanılan görüşme protokollerinin genel yapısı

Görüşme protokolünün birinci başlığı altındaki sorular, katılımcıların matematiksel ispatla ilgili daha geniş çerçevesiyle ve geçmiş matematiksel

deneyimleriyle ilgili arka plan sorularını içermektedir. Bu soruların amacı, matematiksel ispatla ilgili bir ilk bağlamsal veri elde edebilmek için, ayrıca katılımcıların kamera karşısında kendilerini tanıtmaya sorularının sorulmasıyla daha rahat bir görüşme ortamı sağlanabilmesi için ilk olarak yöneltilmiştir. Arka plan soruları matematiksel ispatla ilgili daha özellikli ya da derinlemesine soruların öncesinde konuya genel bir çerçeve oluşturmak için kullanılmıştır. Matematik programı öğrencileri ile matematik öğretmenliği programı öğrencilerine, ne kadar süredir bölümünün öğrencisi olduğu, aldığı/almakta olduğu dersler, bu derslerde matematiksel ispatla ilgili deneyimleri, genel olarak matematiksel ispat deneyimleri, genel akademik not ortalaması hakkında sorular sorulmuştur. Matematikçiler ile matematik eğitimcilerine, mesleki deneyimleri, bölümünde ne kadar süredir öğretim yaptıkları, uzmanlık alanları, verdiği/vermekte olduğu dersler, matematiksel ispatla ilgili genel olarak öğrencilerin deneyimleri, özel olarak sınıflarında matematiksel ispatla ilgili gördüğü ya da öğrencileriyle matematiksel ispat etkileşimleri hakkında sorular sorulmuştur.

Görüşme protokolünün ikinci başlığı itibarıyla genel olarak katılımcılara aynı sorular sorulmuştur. Bu başlık altındaki sorular, ispatın katılımcılar tarafından nasıl tanımlandığı, kendileri için matematiksel ispatın ne anlama geldiği gibi sorulardan oluşmaktadır.

Görüşme protokolünün üçüncü başlığı altında, katılımcılara matematiksel ispatın ne gibi özellikleri olduğu sorulmuştur. Matematiksel bir argümanın, yapılan bir açıklamanın matematiksel bir ispat olarak nitelendirilmesine izin veren niteliklerin ne olduğunun anlaşılması ispatın özelliklerinin ne olduğunun ifade edilmesine yardımcı olmuştur.

Görüşme protokolünün dördüncü başlığı altındaki sorular, matematiksel ispatın ne gibi amacı olduğu, neden yapıldığı, ne gibi rollerinin olduğunun anlaşılmasıyla ilgilidir. Bu bağlamda katılımcıların matematiksel ispatın amacı ve rolleri üzerine ne düşündüğü şeklindeki görüşleri bu sorular çerçevesinde anlaşılmaya çalışılmıştır.

Görüşme protokolünün beşinci başlığı altındaki sorular, matematiksel ispatın önemi ve yeri ile ilgilidir. Bu başlık altındaki soruların amacı, katılımcıların ispata ne gibi önem atfettiklerinin (örneğin “bir öğrenci olarak ispatı bilmek neden önemlidir?”), öğrenciler açısından bölümlerinden mezun olduktan sonraki mesleki yaşantısında ispatın yerinin anlaşılmasının, matematikçiler ve matematik

eğitimcileri açısından öğrencilerinin mezun olup mesleki hayata atıldıklarında ispatın buradaki yaşantılarında ne gibi bir yeri (izi) olacağının anlaşılmasına ışık tutmaktır.

Görüşme protokolünün altıncı ve son başlığı altındaki sorular, katılımcıların matematiksel ispat oluşturma yollarıyla ilgilidir. Bu başlık altındaki sorularla, katılımcılara göre “matematiksel bir ispat nasıl yapılır?” sorusuna cevap aranmak istenmiştir. Katılımcıların matematiksel ispat oluşturma yolları, herhangi bir matematiksel iddianın ispatlanması durumuyla karşı karşıya kaldıklarında (örneğin bir teoremi ispatlamak) “neler yapıyorlar, nasıl bir yol izliyorlar?” gibi sorularla anlaşılacak istenmiştir.

3.3.2 Etkinlik Temelli Görüşme Protokolleri

Bu kısımda “etkinlik” olarak adlandırılan yapı, Rasmussen ve diğerlerinin (2005) kullandığı şekliyle karşılık bulmaktadır. Bu araştırmacılar matematiksel etkinlik olarak, sadece düşünmek ve uygulamak şeklinde bir ayırımı bulunmak yerine, her ikisinin de kapsanmasını hedeflemektedir. Öğrenciler, belirli matematiksel etkinliklere katıldıklarında sadece bilgilerini harekete geçirerek pratiğe dökmezler, aynı zamanda süreç içerisinde düşünce tarzlarını ve akıl yürütme becerilerini de geliştirebilirler, genişletebilirler. Hem yapma hem de düşünme süreçlerine odaklanan etkinlik aracılığıyla, katılımcıların matematiksel bir konuyu ya da kavramla ilgili öğrenmelerini aktifleştirerek yansıtabilmelerine olanak sağlanır (s. 53, 70).

Weber ve Mejia-Ramos (2015) matematik eğitimcilerinin öğrencilerine matematiği öğretme hedeflerinin yaygın bir varsayım etrafında yapılandırıldığından bahsetmektedir. Bu varsayım, matematik eğitimcilerinin birincil amacının matematikçilerin sahip olduğu çerçevedeki gibi bir ispatlama ve ikna olma standardına öğrencilerini kavuşturabilme ya da ulaştırabilme gayesine dayanmaktadır. Bu nedenle matematik eğitimi alanında yapılan araştırmaların genel olarak takip ettiği adımlar şu şekildedir: öğrencilerine gerçekçelendirme ile ilgili bir görev ya da etkinlik (justification-related task) verilir. Araştırmacılar öğrencilerin bu etkinlik üzerinde nasıl çalıştıkları, bu süreci nasıl tamamladıkları, bu süreçte sergiledikleri davranışlarını analiz ederek gerekçelendirme ve ispat üzerine inançları hakkında çıkarım yapar. Daha sonra, öğrencilerin sahip oldukları inançlar, matematik camiasının (matematikçiler topluluğunun) inançlarıyla

karşılaştırılarak, öğrenciler ve matematikçilerin sahip oldukları inançlar arasındaki uyumsuzluklar ya da farklılıklar tespit edilir. Ardından bu uyumsuzluklar, öğrencilerinin gerekçelendirme ve ispat hakkındaki inançlarını matematikçilerinkine dönüştürebilmenin bir yolunu bulabilmek açısından, araştırmacılara dikkate almaları gereken bir çağrı niteliği taşıyarak onlara rehber olur (Weber ve Mejia-Ramos, 2015).

Weber ve Mejia-Ramos'un yukarıda bahsettiği tasarım çerçevesi, bu araştırmada matematiksel ispat anlamında ilk olarak öğrenci ve matematikçi boyutuyla uygulamaya geçirilmek istenmiştir. Bunun bir sebebi, alanyazında üzerinde durulması gereken bir durum ve hala ihmal edilen bir nokta olarak (etkinliğe dair araştırmacının motivasyonu), öğrencilerin ve öğretmenlerin esnek bir şekilde matematiksel düşünme sürecine girebilecekleri matematiksel etkinliklerle uğraşmalarının yaygın olmadığı belirtilmesidir (örn., Weiss ve Moore-Russo, 2012). Bu noktada Weber ve Mejia-Ramos'un (2015) yukarıda belirttiği, Harel ve Sowder'in (2007) iki topluluğun matematiksel ispatla ilgili inançlarının karşılaştırılmasıyla ilgili durumu ve Smith'in (2006) yönlendirmeleri, bu araştırmada dikkate alınmak istenmiştir. Örneğin, Smith (2006) matematiksel bir ifadeyi ispatlama etkinliğiyle ilk kez karşılaştıklarında öğrencilerin yaptıklarının, onların ispatlama anlayışları hakkında çok şey ortaya koyduğunu ifade etmiştir (s. 74). Bu doğrultuda, bu araştırmada öğrencilerin bir matematikçi gibi düşünebilmesine izin verecek şekilde, ispata dayalı akıl yürütmeyi ortaya çıkarabilme amacıyla matematiksel ispatlama etkinliği hazırlanmasına karar verilmiştir.

Diğer taraftan, sadece öğrenci-matematikçi perspektifinden olarak sınırlamak yerine matematik eğitimcilerinin, yukarıda araştırmacıların bahsettiği öğrenciler açısından öğretimsel hedeflerini matematikçilere yaklaştırabilme meselesinde kendi rollerinin ne olduğunun da anlaşılması, bu araştırma için önemli bir mesele olarak görülmektedir. Bu doğrultuda matematiksel bir etkinlik üzerinden matematikçilerin, matematik eğitimcilerinin, matematik programı öğrencilerinin ve matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin matematiksel ispatla ilgili düşünme yollarının anlaşılması bu araştırmanın ilgilendiği geniş bir çerçeve olmaktadır. Bu bakımdan araştırmada matematiksel bir etkinlik etrafında tüm katılımcıların matematiksel ispatla ilgili pratiklerini anlayabilmek için etkinlik temelli görüşmeler kullanılmıştır.

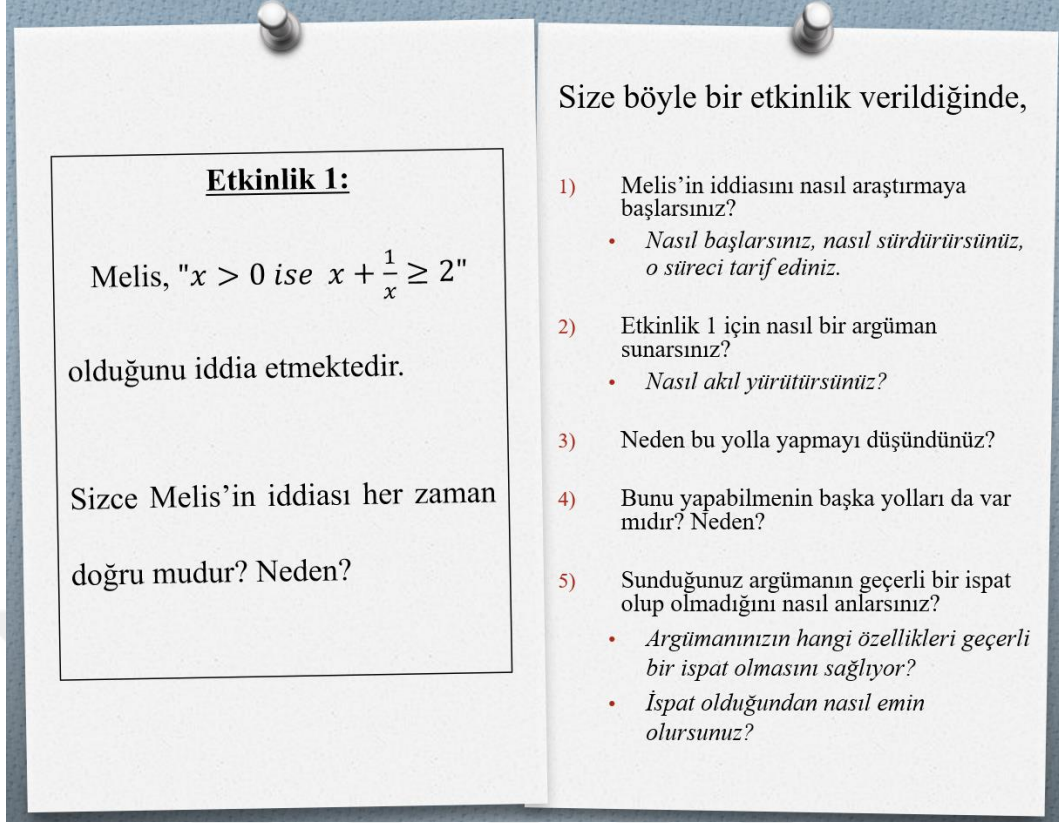
Etkinlik temelli görüşmeler (task-based interviews), matematiksel bir etkinlik veya bir dizi etkinlik üzerinde çalışırken bir katılımcının veya bir katılımcı grubunu ele alan görüşmelerdir (Maher ve Sigley, 2014). Bu tarz görüşmeler, matematik eğitiminde nitel araştırmalarda araştırmacılar tarafından bir bireyin veya bir grup öğrencinin mevcut ve gelişmekte olan matematiksel bilgi ve problem çözme davranışları hakkında bilgi edinmek için kullanılmakta olup, katılımcıların mevcut bilgilerinin, eski bilgisindeki büyümenin ve belirli matematiksel fikirlerin, yapıların ve muhakeme yollarının temsillerinin ortaya çıkarılmasını amaçlamaktadır (Maher ve Sigley, 2014).

Araştırma için etkinlik temelli görüşmeleri tasarlarken, seçilecek matematiksel içeriğin (ispatla ilgili problem durumu) araştırmadaki tüm katılımcıların seviyesini dengeler nitelikte olmasına dikkat edilmiştir. Etkinliğin zorluk derecesini ayarlama şeklinde dengelemeden bahseden Nordby'nin (2013) önerisi dikkate alınmıştır. Bu noktada, etkinliğin katılımcılara “çok kolay” ya da “çok zor” gelmesinin üstesinden gelebilmek için bazı hususlara dikkat edilerek hazırlanması istenmiştir. Etkinlikte yer alacak matematiksel ispatlamayı gerektiren problemin çok kolay olması durumunda, matematikçiler ve matematik eğitimcileri şeklindeki katılımcılar tarafından basit olarak algılanması, sıkıcı ve gereksiz bir uğraş olarak görünebilme ihtimali varken, bu iki grubun öğrencileri açısından ise matematiksel ispatla ilgili yaklaşımlarını sergileyebilmede daha az derinlikte ve zayıf bir bakış ortaya koyabilmeye zemin oluşturabilme tehlikesi vardır. Diğer taraftan etkinliğin çok zor olması, matematikçiler ve matematik eğitimcilerinin üzerinde uğraşmaya değer olduğunu sağlarken, yine öğrencileri bakımından yeterli ve güvenilir veriyi elde etmenin önünü kapatabilme ihtimali vardır. Araştırmada her iki durumdan da olabildiğince kaçınılmaya çalışarak, tüm katılımcılara elverişli gelebilecek bir matematiksel problem arayışına girilmiştir. Burada dikkat edilen bir diğer nokta, matematik bölümlerindeki gibi teorem şeklinde verilen bir yapıyı ispatlama etkinliği olarak değil, daha çok ortaya atılmış bir iddianın üzerinden temellendirilerek; öğrenme alanları bağlamında düşünüldüğünde ise daha çok fikirlerin açılmasına yardımcı olabilecek, her seviyeye uygun düşebilecek elementer ya da cebirsel anlamda bir matematiksel etkinliğin araştırmaya dahil edilmesinin, araştırmanın amacına daha iyi hizmet edebileceği düşünülmüştür. Bunun için, matematik eğitimi alanında durum çalışması deseni yapılmış ve etkinlik temelli görüşmeler aracılığıyla yapılandırılmış çalışmalar incelenmiştir.

Özel olarak ise matematiksel ispat, akıl yürütme, ispata dayalı akıl yürütme şeklindeki araştırmalara odaklanılmıştır.

Matematiksel ispatla ilgili katılımcıların ispat anlayışlarının ne olduğunun anlaşılması, ispatla ilgili bilişsel yapıların ortaya çıkarılmasında genellikle yarı yapılandırılmış ve etkinlik temelli görüşmeler kullanılmaktadır (Nordby, 2013). Bu çalışmalara örnek olarak, Knuth (2002a), Knuth (2002b), Raman (2003), Weber ve Alcock (2004), Samkoff ve diğerleri (2012), Nordby (2013), Lockwood ve diğerleri (2016) ve Mejia-Ramos ve Weber (2020) verilebilir. Bu çalışmalardan Mejia-Ramos ve Weber (2020), matematik eğitimi araştırmacılarının matematikçilerin pratiği (uygulamaları) hakkında bilgi edinmek için de sıklıkla etkinlik temelli görüşmeler kullandıklarını ifade etmektedir.

Yarı yapılandırılmış görüşmeler için kullanılacak matematiksel problem Knuth'un (1999, 2002a, 2002b) çalışmasından bu araştırmaya uyarlanarak dahil edilmiştir. Etkinliğin yapısı, Knuth'un (1999, 2002a, 2002b) çalışmalarında nasıl ifade edildiyse o şekilde (Şekil 3.2'de tırnak içinde orijinal ifadesi); etkinliğin katılımcılara sunulduğu ise araştırmacı tarafından geliştirilmiş haliyle yansıtılmıştır. Bu düzenlemelerin ana amacı, matematiksel ispat literatüründe ya da matematik bölümlerinde sıklıkla ve geleneksel olarak karşılaşılan “ispatlayınız”, “gösteriniz”, “X yöntemiyle ispatlayınız/doğruluğunu gösteriniz” yaygın kullanımları, katılımcılara dayatılan bir görev olmasından çıkarmak için özellikle dikkat edilmesidir (Şekil 3.2).



Şekil 3.2. Etkinlik temelli görüşme protokolünün yapısı

Alanyazında sık kullanılan matematiksel ispat durumundan farklı olarak bu organizasyon,

- Eksiklik
- Soru formatının karakteri
- Zorluk dengeleyicisi
- Kendi argümanının sorumluluğunu alma
- Akıl yürütme sürecine girişimi kolaylaştırıcılığı

olmak üzere etkinliğin çoklu giriş noktaları bulunmaktadır. Bu noktalar sırasıyla açıklanmıştır. *Eksiklik boyutu*, Melis'in iddiasının içerisinde hangi küme olduğu bilgisi paylaşılmamıştır. Katılımcıların araştırma tabanlarını nasıl hazırlayacağını görebilmek için bilinçli olarak bu şekilde kullanılmıştır. *Soru formatının karakteri*, zorunlu olarak dayatılan bir görev yerine katılımcının kendisini rahat ve esnek hissetmesi için problem durumunda kullanılan soru tarzı yumuşatılmıştır. *Zorluk dengeleyicisi*, tüm katılımcılara kavramsal olarak açık, erişilebilir ve anlaşılabilir gelebilecek seviyede bir matematiksel içeriğe sahiptir. *Kendi argümanının sorumluluğunu alma*, katılımcının kendi düşünceleri üzerine inşa edildiği için

ispatlama girişimi kendisine özgü değer katacağı bir niteliğe sahiptir. *Akıl yürütme sürecine girişimi kolaylaştırıcılığı*, her ne kadar “ispatlayınız” şeklinde denmese de her zaman doğru olup olamayacağına yönelik araştırmasını (kendi argümanını) garanti altına alabilmede katılımcının matematiksel ispatı bir şekilde devreye sokması gerekecektir. Fakat düşüncelerini açığa çıkarmada ilk temel fikirler de bu etkinlik aracılığıyla tutulacaktır. Bu sayede katılımcıların ilk temel fikirlerden daha gelişmiş fikirlere doğru hareketlerinin ya da geniş çerçevedeki hareket alanlarının tam resminin anlaşılmasına katkıda bulunur.

Şekil 3.2’deki etkinliğin katılımcıları olumsuz etkileyebilmesi muhtemel bazı durumlar göz önünde bulundurularak diğer önlemler de alınmak istenmiştir. Bu nedenle etkinlikte kaçınılan noktalar ya da etkinliğin amacı dışına çıkan noktalar,

- Hadi bunu ispatla!
- İspat yeterliliğimi mi ölçeceksin?! (Ana katılımcılar belirlenirken, görüşme planlamaları esnasında bir matematik eğitimcisinin kendisini nasıl bir çalışma bekleyeceği hakkında önden etik çerçeve bilgisinin paylaşıldığı bir ortamda bunu belirtmesi, etkinliğin soru formatının düzenlenmesine yardımcı olmuştur. Katılımcının doğru bir ispat anlayışına sahip olup olmamasının ölçülmesi ya da etkinlikteki iddiada “gerçekten doğru/yanlış karar verdi” gibi bir yeterlilik ölçüsü aranmadığı aksine yürütülen çalışmaya saygı duyulması gerektiği, araştırmanın böyle bir değere sahip olduğu her fırsatta hatırlanmalıdır).

Hazırlanan etkinlikte Melis adlı bir kişinin matematiksel bir iddiası vardır. Katılımcılardan, Melis’in ortaya atmış olduğu iddianın her zaman doğru olup olmadığını araştırmaları beklenmektedir. İddia hakkında ne düşündükleri, iddianın doğruluğu ya da yanlışlığına dair karar verme biçimleri, iddiayı araştırma süreçlerinde (en baştan en sona kadar) nasıl akıl yürüttükleri, iddiayı araştırabileceği yolların farklılaşıp farklılaşmadığına dair yaklaşımları aracılığıyla katılımcıların matematiksel ispatlama girişimleri anlaşılacak istenmektedir. Pilot çalışmada bazı katılımcılar etkinliğin içerisindeki Melis ismine takılmış, bu nedenle Melis’i bir öğrenci olarak anlamaya çalıştıkları görülmüştür. Bazen iddianın araştırılmasında “Melis gibi düşünmek” önemli olabiliyorken bazen katılımcının kendi öz düşüncesini bazı durumlarda tam yakalayamadığı/ortaya çıkarırken gölgelediği de fark edilmiştir. Bu tip durumlarda katılımcıları soruda tutmak için

“Sizin bakış açınızı daha çok merak ediyorum” şeklinde katılımcıya görüşmeler dizisinde hatırlatmalarda bulunulmuştur.

ETKİNLİK 1
Melis, “ $x > 0$ ise $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ” olduğunu iddia etmektedir. Sizce Melis’in iddiası her zaman doğru mudur? Neden?

Şekil 3.3. Etkinlik 1’in genel görünümü

Etkinlik öncesi yarı yapılandırılmış görüşme mantığında olduğu gibi, etkinlik temelli görüşmeler de her bir katılımcıdan izin alınarak ses ve video kaydı altına alınarak gerçekleştirilmiştir. Katılımcılarla bireysel olarak yapılan her bir görüşme ortalama yaklaşık 1 saat sürmüştür.

3.3.3 Araştırmacı Notları

Nitel araştırmalarda katılımcı gözlemlerden, derinlemesine yapılan görüşmelerden, dokümanlardan elde edilen verileri yorumlamak, ayrıntılı bir şekilde açıklamak ve kanıtlarla destekleyerek güçlendirmek için çeşitli tamamlayıcı teknikler kullanılabilmektedir (McMillian ve Schumacher, 2013, s. 388). Nitel araştırmacı araştırmada uzun süre zaman geçirerek deneyim kazanmaya başlar. Bu araştırmada da araştırmacı, başlangıç bulgularını (veri analizi tamamlanmadan) kuvvetlendirmek ve katılımcıya ekstra sorular sorabilmek için katılımcılarla yaptığı görüşmelerde bazı öne çıkan kalıpları gördükçe araştırmasında not almıştır. Araştırmacıya ait bu notlar, aynı zamanda gördüğü ortak durumları anlamlandırabilmede kendisine “bu durumun genel manada yorumu nedir?” sorusunu sorarak düşünmesini sağlamış, bu sayede görüşme soruları içerisinde katılımcının (eğer varsa) bu şekildeki yaklaşım örüntülerini (sözlü olmayan gözlemlenebilen) de bir kenara not etmenin araştırmasına önemli bir değer katacağına inanmıştır. Araştırmacı, notlarına araştırma sürecinde tekrar geri dönerek, bulgularını nihai olarak şekillendirebilmek amacıyla tuttuğu notları seçici bir şekilde kullanabilmiştir.

3.4 Pilot Uygulama

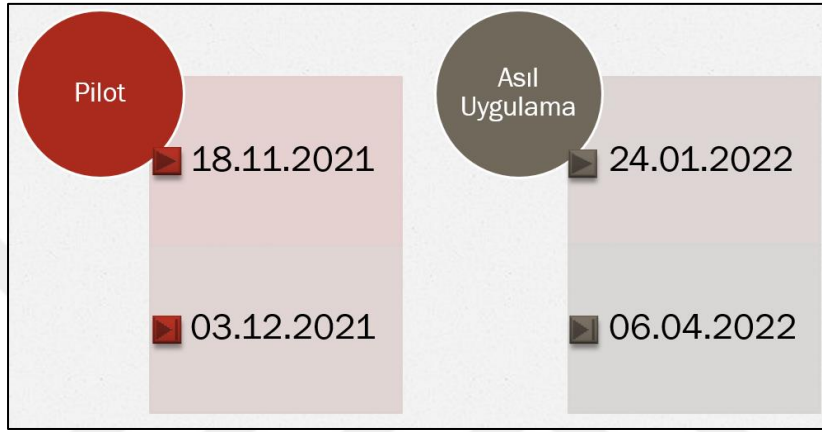
Görüşme sorularının katılımcılara araştırmacının gerçekten de araştırmak istediği soruları olabiliğince doğru sorup soramadığını yakalayacak titizlikle hazırlanmasına, bunun yanı sıra katılımcıdan gerektiğinde ayrıntılı açıklamalarını

sunabilmesine izin veren sonda soruların eklenmesine dikkat edilmiştir. Her ne kadar görüşme soruları hazırlanırken soruların açık, anlaşılır ve net olmasına, katılımcıları herhangi bir yönlendirmeye (araştırmacının spesifik aradığı bir cevaba itmesi) mahal vermeyecek nitelikte olmasına dikkat edilse de, araştırmacının sahaya çıkmadan önce sorularının başka uzman gözler tarafından da incelenmesine ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu nedenle veri toplamaya başlamadan önce araştırmacı araştırmada kullanılmak istenen bütün görüşme sorularını alandaki uzmanlar tarafından incelenmesi için paylaşmıştır. Bu araştırmanın katılımcıları arasında aynı zamanda matematikçiler ve matematik eğitimcileri de bulunduğu için uzman olarak düşünülecek kişilerin en az doktora derecesi almış uzmanlardan oluşmasına önem verilmiştir. Bu bağlamda farklı akademik unvanlarda, farklı üniversitelerde hatta konu alanları gereği farklılaşan pür matematik ve matematik eğitimi (uzman çeşitlemesi) üzerine araştırmalar yapmaya devam eden araştırmacılardan uzman ekip seçilmiştir. Bu kriterleri sağlayabilecek nitelikte toplam 7 uzmana görüşme soruları gönderilmiştir. Bu uzmanların 4'ü Doktor Öğretim Üyesi, 2'si Doçent, 1'i ise Profesördür. Aynı zamanda uzmanların 4'ü matematik eğitiminde, 3'ü ise matematik bölümünde araştırma yapmaktadır. Matematik eğitimindeki uzmanların 2'si ise özellikle “Matematik Eğitiminde İspat” üzerine çalışmalar yürütmektedir.

Uzmanlardan gelen dönüt ve önerilerle (genel olarak dikkat edilmesi istenen, soruların açık olması yani başka bir anlama gelebilecek bir bağlam oluşturarak belirsizlik yaratmaması olmuştur, olabildiğince net ve amaca yönelik ifade edilmesi istenmiştir) görüşme sorularının son halini almasıyla birlikte, sonraki adım olan asıl uygulamaya geçmeden önce, araştırmanın katılımcı gruplarını temsil edebilecek küçük bir örnekleme (1 matematikçi, 1 matematik eğitimcisi, 1 matematik programı son sınıf öğrenci, 1 matematik öğretmenliği programı son sınıf öğrenci olmak üzere toplam 4 kişi) pilot uygulama şeklinde görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bu aşamada pilot görüşmelerin amacı bu soruların doğrudan ilgili olduğu kişilerde ne şekilde karşılık bulacağını kestirebilmede bir yol sunmasıdır. Bu bakımdan pilot uygulama, asıl uygulamaya geçmeden önce hem soruların tekrardan revize ve rafine edilmesi hem de araştırmacının her bir katılımcıyla iki tip görüşme planladığı ana takvimini nasıl organize edeceğine rehber olmuştur.

Asıl uygulama için veri toplama sürecinde görüşmeler planlanırken, katılımcılara uygun olan gün ve saatlerin bir listesi kendileriyle birebir iletişime geçilerek araştırmacı tarafından çıkarılmıştır. Araştırmaya katılım tamamen gönüllülük esasına göre ve katılımcı tarafından daha çok uygun zamanların yaratılmasını gerektirdiği için spesifik olarak önce matematikçiler, sonra öğrenciler gibi bir görüşme sırası araştırmada gözetilmemiştir. Hem pilot çalışma hem de asıl uygulamaya yönelik çalışma takvimi Şekil 3.4’te görülmektedir.



Şekil 3.4. Pilot ve asıl uygulama olmak üzere araştırmanın takvimi

3.5 Veri Analizi

Bu kısımda araştırmanın veri analizine ait aşamalar çözümleme ve kodlama başlıkları altında ele alınarak açıklanmıştır.

3.5.1 Çözümleme

Toplanan ses ve video kayıt verilerinin veri analizine hazır hale getirilebilmesinde ilk aşama verinin dinlenerek yazıya aktarılmasıdır. Bu aşamada her bir katılımcının görüşme sorularına verdikleri cevaplar harf harfine herhangi bir kesintiye, kısaltmaya, değişime uğramadan ağızdan ne çıktıysa doğal bir şekilde, kısacası “ne söylediyse o” titizliğinde bire bir yansıtılarak deşifre edilmeye çalışılmıştır. Bu noktada Adu’nun (2019) benimsediği yaklaşım araştırmacının topladığı verisini nasıl transkript edeceğine rehber olmuştur. Bunun için araştırmada katılımcı ve görüşmeci arasındaki ikili konuşmaların birbirinden ayrıldığı yerlerde araştırmacıdan bahsederken “R”, ilgili katılımcıdan bahsederken örneğin “T” tanımlamasında bulunulmuştur. Bu ikili diyalogda transkript noktasında T kısaltması kullanılırken, bulgular kısmında T’nin karşılığı yer yer

daha açık hale getirilmiştir. Bazı bulguların sunumunda katılımcı grup kimliğine dönüştürülmüş kısaltma için, “T” yerine örneğin “1MA2” katılımcısını temsil eden karşılık görülebilmektedir.

Tüm katılımcıların görüşmeleri yazıya aktarılırken katılımcıların düşünürken boşluk bıraktığı yerler “(düşünüyor)” şeklinde ya da bir jest bir mimik yakalandığı yerde örneğin “(gülüyor)” şeklinde metin uzantıları eklenmiştir. Herhangi bir katılımcının cümlesinin sonunu getiremediği yerlerde “...” ifadesi eklenmiştir. Bu kısım katılımcıdan doğrudan alıntı örneklerinin verildiği üç nokta anlayışıyla karıştırılmamalıdır. Çünkü bu aşama, bulguların sunumunda kullanılan ilgili kategoriye besleyen bölümün daha çok alıntı olarak verilmesinde kısaltmaya gidilen bir tekniktir. Diğeri, görüşmelerin yazıya dökülmüş versiyonunda karşılaşılan özel bir durumdur.

Cümlesinde yer vermediği fakat verinin anlamlı bir bütün olarak araştırmacı tarafından anlaşılabilmesi için katılımcının daha önceki cümlelerde kullandığı bir sözcüğe, kavrama, söz öbeğine göndermede bulunduğu yerlerde “[]” kullanılmıştır. Örneğin katılımcı “[x durumundan bahsediyor]” ya da cümlenin akışını doğal hale getirmede tahmini metnin sağlanmasında aşağıdaki katılımcılardan 1MA7’nin transkriptinde görülen gibi bir karşılık bulabilir:

1MA7: “özellikle cebirdeki çalışma prensibimiz bu [ispat yapmak].”

3.5.2 Kodlama

Nitel araştırmanın doğasında, herhangi bir bilginin derinlemesine olarak araştırılması esas olduğu için, nitel araştırmacılar topladıkları veriyi kodlarken özellikle büyük veri yığını içerisinde kendilerini çok kaybetmeden bu süreci sağlıklı bir şekilde yönetebilmeleri gerekmektedir. Bu nedenle nitel araştırmacının kodlama sürecinde aklında tutması gereken bazı durumlar, araştırmasında odaklı yol olarak ilerlemesine yardımcı olabilmektedir. Böylesine bir hedefli düşünerek yol alma, Auerbach ve Silverstein (2003) tarafından şu şekilde ifade edilmektedir:

“..Bir metin deniziyle karşı karşıya kaldığımızda çoğumuz endişeye kapılırız. Aralarından seçim yapabileceğiniz bu kadar çok materyal varken, neyin kodlanmasının önemli olduğuna ve neyin çıkarılabileceğine karar vermek göz korkutucu bir iştir. Bu durum özellikle yeni başlayanlar için geçerli olmakla birlikte, daha deneyimli nitel araştırmacılar için de geçerlidir... Metni okumaya başladığınızda, her şey önemli görünür ve bir katılımcının söylediği herhangi bir şeyi atlamak imkansız gibi görünür. Öte yandan, her şeyi dahil ederseniz, veri miktarı hantal hale gelecektir. Araştırma kaygıları beyanınız önünüzdeyken, metnin bir bölümünü beyanınızla karşılaştırarak kontrol edebilirsiniz. Söz

konusu metin parçası genel araştırma kaygılarınızla ilgili mi? Eğer ilgiliyse, onu dahil etmeye karar vermeniz daha kolay olacaktır. Değilse, hariç tutma konusunda kendinizi daha rahat hissedeceksiniz. Bu noktada, metnin önemli ancak araştırmanızla ilgisi olmayan bir şey içerdiğini fark edebilirsiniz.” (s. 43-44)

Bu sebeple Auerbach ve Silverstein (2003) araştırma amaçlarına ve sorularına sadık kalarak odaklı bir şekilde ilerlemenin kodlama sürecinin önemli bir parçası olduğuna değinmektedir. Dolayısıyla bu araştırmanın kodlama sürecinde de benzer bir yaklaşımda yol alınmıştır. Araştırmacı veriyi kodlarken aynı zamanda zihninde verinin belli bölümlerine sürekli belli başlı sorular sorarak (Emerson vd., 2011, s.177) da veride verilmek istenen mesajı yakalamak isteyebilir. Orada ne olup bittiğini daha iyi anlayabilmek kendine bazı şu soruları yakın tutmak istemesi de bu işin bir parçası olabilmektedir:

*insanlar olan bitenle ilgili ne söylüyor, bunları nasıl tanımlıyor ve algılıyor?

*olan bitene dair ben ne görüyorum?

*bu notlardan ne öğrendim?

*bu olay/durumun geniş manada önemi ya da anlamı nedir? Bu durumu özel yapan şey nedir?

*dikkatimi en çok ne çekti? (Saldana, 2016, s.22)

Bunlara ek olarak kodlanacak veri miktarı da önemli bir noktadır. Araştırmacı, görüşmeler dizisinde deneyim kazandıkça, veriyi dokudukça, veriyle uzun süre etkileşim kurdukça kodlanabilecek verinin hakkında farkındalık geliştirebilir. Buna yaslanarak araştırmacı, tüm veride neyin önemli neyin önemsiz olduğu ile neyin kodlamaya değer ve gerekli olduğu (Saldana, 2016, s.18) deneyim temelli bir doğrultuda kodlama sürecini ilerletebilir. Araştırmalarda bu durum, Saldana'nın (2016) “verinin su yüzüne çıkan kısmı”; Auerbach ve Silverstein'nın (2003) “alakalı metin”; Sullivan'nın (2012) “kilit anlar” ile (farklı katılımcılarla aynı konu hakkında yapılan görüşmelerden elde edilmiş metinlerin yeniden yapılandırılarak birleştirilmiş hallerini diyalogların içinden) “ince elenip sık dokunmuş” “bam telleri”; Powell ve arkadaşlarının (2003) video kayıtlarının çözümlenip analizlenmesindeki aşamalardan biri olan “kritik olaylar” ile karşılık bulmaktadır.

Bununla birlikte böylesine bir tercihin tartışmaları beraberinde getirse de, Saldana (2016), Poland'ın çalışmasını örnek göstererek sözlerine şöyle devam

etmektedir: “verinin hacmi, sadece yeterli nitel verinizin olmasını değil üzerinde çalışabileceğiniz uygun şekilde deşifre edilmiş ve formatlanmış yeterli *nitelikte* verinizin olabilmesini de güvence altına alır” (s.18).

Araştırmada toplanan nitel veri, nitel içerik analiz yöntemi benimsenerek analiz edilmiştir. “Nitel içerik analizinde sadece daha önceden kavramsal olarak elde edilmiş kodlama çerçevesi kullanılmaz, aynı zamanda kodlama çerçevesi veriye bağlı olarak da geliştirebilir” olması yönüyle esnek bir metot olarak görülmektedir (Çetin, 2016, s. 129). Bu araştırmada da benzer bir durum söz konusudur. Görüşmelerin yarı-yapılandırılmış etkinlik (görev) temelli görüşme ve etkinlik temelli olmayan görüşmeler etrafında yapılması, nitel verinin tümevarımsal, tündengelimsel ve her ikisinin harmanlandığı bir yöntem kullanılarak analiz edilmiştir.

Araştırmanın iki tip nitel verisi bulunmaktadır. Birincisi, katılımcıların matematiksel bir iddianın ispatlanması etkinliği etrafında toplanan ses ve video kayıtları, katılımcıların bu etkinlik üzerindeki çalışmalarını gösteren etkinlik kağıtları ve araştırmacının kritik olaylarla ilgili aldığı notları, araştırmanın etkinlikle ilişkili nitel verilerini oluşturmaktadır. Bu verilerin analizi sürecinde, dokümanlar (etkinlik kağıtları) incelenmiş, her bir katılımcıya ait görüşme ve video kayıtlarının çözümlemeleri yapılmıştır. Etkinlik üzerindeki katılımcıların video kayıtlarının tamamı metne dönüştürülerek çözümlenmiştir fakat kodlama noktasında ve dolayısıyla analiz edilmesinde, daha önceki kısımlarda açıklanan “kritik olaylar” göz önünde bulundurulmuştur. Burada kritik olay, etkinlik çalışmasında katılımcının ispatlama girişiminde önemli görünen, ispatlama yaklaşımlarını ortaya çıkaran, düşüncelerini harekete geçiren yapılar ile açıklamalarında öne çıkan özel mekanizmalar aracılığıyla araştırma sorusuna yanıt doğuran bölümlerin çözümlemeleri odağındadır ve Tall’un (2013) önerdiği çerçevedeki temel rotalara endekslidir. Bu doğrultuda araştırmanın etkinlik temelli görüşmelerinden gelen verileri, Tall’un (2013) önerdiği çerçevedeki rotalar temel alınarak tündengelimsel olarak analiz edilmiştir. Böylelikle matematikçilerin, matematik eğitimcilerinin, matematik programı öğrencilerinin ve matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin ispatlama girişimleri, doğal ve formal rotalardan hangisiyle oluşturduğu belirlenmeye çalışılmıştır.

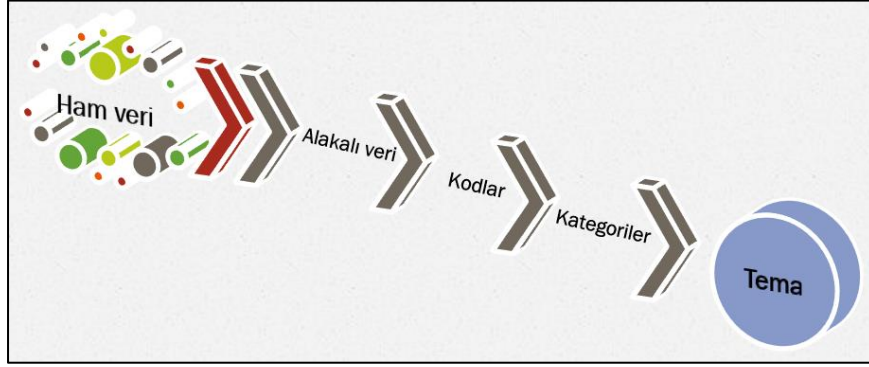
İkinci tip nitel veri, birinci tip nitel veriyle benzer olmakla birlikte etkinlik temelli olmayan verileri içermektedir. Bu kısımda elde edilen veriler tümevarımsal

(veriden kodlara, kodlardan kategorilere, kategorilerden temalara) olarak analiz edilmiştir. Her ne kadar nitel içerik analizi sistematik bir yapıya sahip olsa da evrensel olarak kabul görmüş bir yapısı olmadığı için nitel araştırmacılar birbirinden farklı adımlar izleyerek veri analizi gerçekleştirebilmektedir (Çetin, 2016). Bu kısımda Schreier (2012) ile Asiala ve diğerleri (1996) tarafından önerilen aşamalara göre veri analizi süreci gerçekleştirilmiştir. Transkript edilen veriyi analiz ederken şu aşamalardan geçilmiştir: birinci adımda, bir kelime işlemci programında (microsoft word) her bir katılımcı için (34 kişi) veri tablosu oluşturulmuştur. Veri sütunları her bir katılımcı için iki sütun olacak şekilde yapılandırılmıştır. İlk sütunda ilgili katılımcı için transkript edilmiş tüm verisi yer almaktadır.

İkinci olarak, sol sütundaki bu veri metni araştırmacı tarafından katılımcının ifadeleri bakımından kitalara (bölümlere) ayrılmıştır. Bu sütundaki veri bölümlemesinin amacı, bloklanan bu bölümlerde katılımcının kısaca ne hakkında konuştuğuna yönelik araştırmacıya ikinci sütundaki açıklama alanını sunmasıdır. Bu bölümlenen yapılar kendi içerisinde anlamlı birimleri ifade etmektedir. Katılımcının matematiksel ispatla ilgili spesifik bir düşüncesi üzerine başlayan bir konuşmada, farklı bir bağlama ya da konuya geçene kadarki bir paragraf (bir cümle bile olabilir) bir birim olarak kabul edilmiştir. Kısacası katılımcının konuştuğu bağlam korumalı giriş-çıkış, fikrin başladığı-bittiği yer arasındaki bütündür. Böylelikle kodlama şemasını oluşturmadan önce veri bölümlemesi yapılmıştır. Bunun sebebi araştırmacı tarafından tüm veri baştan sona kadar okunup veriye aşına olmak istenmiştir.

Analizin üçüncü aşamasında, araştırmacı tarafından ilk kodlama şeması oluşturulmuştur. Bunu yaparken, araştırmanın amacı ve araştırma sorularıyla ilişkili verilerin birbiriyle benzerlik taşıdığı ve farklılık gösterdiği noktalar not edilerek, en az iki katılımcı tarafından vurgulanmayan (bazı tekil ve önemli olduğu düşünülenler hariç) kodlama süreci başlatılmıştır. Tüm bu olan biten kodlama sürecini kayıt altına alabilmenin bir yolu olarak görülen kod defteri/kod listesi (Saldana, 2016) araştırmacının hangi kodun ne anlama geldiğinin kısa bir künyesini sağlayarak tutulmuştur. Kodları denetlemenin ve izlemenin, gerekirse ki gerektiği yerde tekrar düzenlemenin araştırmacının kısayolu olarak görülmüştür. Ardından benzer kodlar bir araya getirilerek kategoriler oluşturulmuştur. Sonrasında, benzerlik gösteren kategoriler sınıflandırılarak bir üst kategori altında

gruplandırılarak temalara ulaşılmıştır. Bu adımda Adu'nun (2019) kod geliştirme süreçleri takip edilmiştir.



Şekil 3.5. Nitel veri indirgeme süreci (Adu, 2019, s.26)

Katılımcıların tüm görüşme transkriptlerini kodlama işlemi tamamlanana kadar şu süreçler benzer şekilde kod geliştirme ile ilgili eylemleri içermiştir: mevcut kodlar, ampirik bir göstereyi artık temsil etmemeye başladığında ya da yeterince iyi ifade edemediğinde yeni bir kod oluşturulmuştur. Oluşturulan her yeni kodun neye karşılık geldiği ya da neyi temsil ettiğine göre bir açıklaması yapılmıştır. İlgili olduğu düşünülen fakat araştırma sorusuyla (endekslenmiş kod) doğrudan ilgisi olmayan herhangi bir kod, diğer meselelerle ilgili olduğu düşünüldüğü için “diğer” altında gruplandırılmıştır.

Analizin dördüncü aşamasında, ilk kodlama şemasının denenmesi gerçekleştirilmiştir. Bu kısımda araştırmacı dışında farklı bir araştırmacının veriyi kodlamasına geçmeden önce, araştırmacının veriyi farklı zaman dilimlerinde periyodik olarak kodlamasından bahsetmek önemli görülmüştür. Araştırmacı her ne kadar görüşme verilerinin deşifre edilmesi esnasında kodlamaya başlasa da tüm katılımcıların görüşme verilerinin dökümünün tamamlanmasını beklememiştir. Bununla birlikte tüm katılımcıların görüşme verilerinin dökümü tamamlanıp kodlama süreci tamamlansa da araştırmacı farklı zaman aralıklarında veriyi sanki ilk defa yeni baştan kodluyormuşçasına kodlanacak veri setine iteratif bir yaklaşımda bulunmuştur. Bu döngüler, araştırmacının daha önceki analizindeki kodlamalarına tekrar dönmesini, kodlarını yeniden incelemesini, düzenlemesini, sadeleştirmesini, değiştirmesini, süzerek rafine etmesinde araştırmacıya kategorilerin ortaya çıkmasında rehber olmuştur. Bu işlem aynı verinin aynı araştırmacı tarafından fakat farklı periyodik zamanlarla incelenmesi araştırmacının intra güvenirliği (kendi kendini dışlamaması; araştırmacının kendisiyle uyumu)

yakalamasına varsa ekleme, çıkarma ve yeniden gözden geçirme şeklinde kod listesini güncellemesine katkıda bulunmuştur. Wimmer ve Dominick (1991) veri setinin %10'luk bir kısmının uyum oranını değerlendirmek için kullanılabileceğini ifade etmiştir. Bu doğrultuda verinin bu dilimi araştırmacı dışında başka bir araştırmacı tarafından kodlanmıştır. Araştırmacıların kodlamaları arasındaki uyuma (inter güvenilirlik, çarpaz uyum) bakılmış ve %88 oranında uyum elde edilmiştir. Bu oran Miles ve Huberman (1994) tarafından [formüle edilen “Görüş Birliği / (Görüş Birliği +Görüş Ayrılığı)” üzerinden yüzdeye yansıtılarak hesaplanmış olup] %80 üzerinde olmasıyla yeterli görülmeyle birlikte araştırmacılar arasında ortak olmayan kodlar üzerinde tekrar tartışılarak fikir birliği oluşturulmuştur. Böylelikle kodlama şeması değerlendirilerek gerekli değişiklikler yapılmıştır. Analizin beşinci aşamasında revize edilerek güncellenen kodlama şeması aracılığıyla verinin tamamı kodlanarak, kategoriler ve bu kategorilere ait alt kategoriler belirlenmiş olup daha sonra temalara ulaşarak veri analizi süreçleri tamamlanmıştır.

3.6 Geçerlik ve Güvenirlik

Genel olarak araştırmacılar nitel bir araştırmanın doğru, geçerli ve güvenilir bulgu ve yorumların üretilebilmesini güvence altına alabilecek standartlardan bahsederken geçerlilik ve güvenilirlik ilkelerini ele almaktadır. Bu kavramların anlaşılmasında bazı araştırmacılar nicel araştırma geleneğindeki karşılıkları üzerinden ele alarak daha sonra nitel gelenekteki dönüşümlerinden bahsetmektedir. Bununla birlikte nicel araştırma geleneğinin benimsediği geçerlilik ve güvenilirlik ölçütleri nitel araştırmalarda aynı anlamda bir karşılık oluşturamamaktadır (bkz. genellenebilirlik kaygısı taşımaz). Bunun yerine geçerlilik ve güvenilirliği sağlamak adına alan yazında nitel araştırma geleneğine özgü bazı stratejiler önerilmektedir (Miles ve Huberman 1994; Lincoln ve Guba, 1985; Maxwell, 2013; McMillan ve Schumacher, 2013; Patton, 2014; Glesne, 2016).

Her bir nitel araştırma, araştırmanın temel doğası gereği ortak karakteristiklere (derinlemesine bilgi, zengin içerik, detaylandırılmış durumlar vb.) sahip olsa da araştırma sorusu, araştırmanın amacı, araştırma tekniği, deseni gibi açılardan niteliksel olarak farklı odaklara sahip olabilmektedir. Bu nedenle bu kısımda araştırmanın bağlamı çerçevesince alınan birtakım önlemlerden bahsetmek daha yerinde olacaktır. Bir başka ifadeyle, ne nitel araştırma geleneğindeki

geçerlilik ve güvenilirlikle ilgili kavramların nicel araştırmadaki karşılıklarını birbiriyle karşılaştırmak ne de araştırmacılar tarafından önerilen nitel araştırmada geçerlilik ve güvenilirlikle ilgili stratejilerin bir listesini sunmak ve detaylandırmak bu bölümün kapsamındadır.

Araştırma bulgularının inandırıcılığını sağlayabilmede etkili bir strateji çeşitleme (üçgenleme) olabilmektedir (Lincoln ve Guba, 1985). Farklı veri toplama yöntemlerinin bir arada kullanılması (yöntem çeşitlemesi), tutarlı ve güvenilir verilerin elde edilmesinin yanı sıra, katılımcıların dünyasındaki (kendi anlamlandırmış ya da algılamış oldukları) gerçeklikle en uyumlu verilere ulaşmak için bir strateji olarak görülebilmektedir (Merriam, 2009, s.222). Araştırmadaki matematikçiler, matematik eğitimcileri, matematik programı öğrencileri ve matematik öğretmenliği programı öğrencileriyle bireysel olarak en az iki oturum şeklinde yapılan görüşmeler hem ses hem de video kayıt altına alınarak gerçekleştirilmiştir. Bu katılımcıların etkinlik öncesi ve etkinlik üzerinde çalışırken matematiksel ispat üzerine görüşleri, oturumların her birinde hem sözel, hem video kaydı ile görsel, hem de bire bir düşüncelerinin yazıya dökülmüş metinleriyle yazılı olarak elde edilerek veri analizine dahil edilmiştir. Çoklu veri toplama yöntemlerinin bu şekilde çeşitlemesiyle, her bir katılımcının üç elden matematiksel ispat sesinin (jest ve mimikler, sesli düşünceler, yazıya nakşedilen eylemler/yazıya dökülen düşünceler) eksiksiz bir şekilde kayıt altına alınarak doğru bir şekilde yorumlanabilmesini sağlamıştır. Araştırmada aynı zamanda dört farklı matematiksel topluluktan veri elde edilerek katılımcı boyutunu da çeşitlendirebilme sağlanmıştır.

Erlandson ve diğerleri (1993) araştırma bulgularının aktarılabilirliğini (transfer edilebilirlik) sağlayabilme açısından ayrıntılı betimleme ve amaçlı örnekleme yöntemlerinin kullanılmasını önermektedir. Bu araştırmada hem matematiksel ispata ilişkin pratiklerden elde edilen veriler ile hem de farklı matematiksel toplulukların matematiksel ispata ilişkin algılarına yönelik görüşlerinden elde edilen veriler ayrıntılı bir şekilde betimlenmiştir (bkz. 4. Bölüm, Bulgular). Araştırmada ortaya çıkan temaları desteklemek amacıyla örnekler verilmiş, bulgular detaylı bir şekilde açıklanarak sunulmuştur. Bunu yaparken aynı zamanda araştırmadaki katılımcıların doğrudan alıntılarına yer verilmiştir. Bununla birlikte katılımcıların belirlenmesinde (bu bölümün katılımcılar alt başlığında

açıklanan) amaçlı örnekleme yöntemleri kullanılarak araştırmanın aktarılabilişliğini sağlama yoluna gidilmiştir.

Uzun süreli etkileşim (Creswell, 2013) ve çok oturumlu görüşmeler (Glesne, 2016) araştırmanın inandırıcılığını artırmada diğer etkili yöntemler arasında kabul edilmektedir. Araştırmada dikkat edilen bu yöntemlerle, katılımcıların (özellikle öğrencilerin) kendilerini rahat hissedebilecekleri güvenli ve rahat bir ortam sağlanabilmiştir. Araştırma sürecinde tekrar eden görüşme oturumları güvene dayalı ilişkilerin daha da gelişmesini sağlamış, bu sayede katılımcıların gerçekten ne düşündüklerinin daha doğru bir aynası olmuştur. Aynı zamanda “bir kere alındı bitti” görünmesinden önceki oturumda görüşme deneyimi elde eden katılımcının, sonraki oturumlarda düşüncelerini daha özgür ve esnek bir şekilde açabilmesine, hatta etkinlik üzerinde matematiksel ispat anlayışlarının derinlikli odacıklarına giriş için fırsat sağlamıştır.

Nitel araştırmacılar veri toplama esnasında katılımcıların anlamlandırmalarını katılımcılarla görüşerek sıklıkla doğrulama amacıyla teyit eder. Araştırmacı, daha eksiksiz ve ince anlamlar elde etmek amacıyla konuyu yeniden gündeme getirerek bir görüşme içinde de katılımcı teyidine başvurabilir (McMillan ve Schumacher, 2013, s. 355). Bu araştırmada da araştırmacı, katılımcıların düşüncelerinin tam olarak anlaşılıp anlaşılmadığını ya da doğru bir şekilde temsil edilip edilmediğini anlayabilmek için sık sık katılımcı teyidine başvurmuştur. Bunu hem görüşme esnasında, konu sıcakken anlık teyit anlamında “bunu mu demek istediniz?” şeklinde ya da görüşmelerin deşifre edilmiş ürünlerini ilgili katılımcıya tekrar ulaştırarak gerçekten de “görüşünün doğru bir ifadesi yakalanmış mı yakalanmamış” şeklinde katılımcılardan teyit alınmıştır.

Lincoln ve Guba (1985) araştırma bulgularının tutarlılığını sağlayabilme ölçütlerinden biri olarak güvenilirliğin denetlenmesinden bahsetmektedir. Bu araştırmada elde edilen verilerin ne zaman, nasıl ve nerede toplandığı detaylı bir şekilde sunulmuştur.

3.7 Etik

Bu çalışma için Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi Sosyal Bilimlerde İnsan Araştırmaları Etik Kurulundan 2020/185 sayısı ile etik izin alınmıştır.

3.8 Araştırmacının Rolü

Araştırmacı lisans eğitimini Matematik Bölümünde tamamlamıştır. Bu bölümden mezun olduktan sonra pür matematik alanında yüksek lisansa başlamıştır. Bu anlamdaki lisansüstü öğrenme sürecinde, Türkiye'nin çeşitli üniversitelerinde öğretim üyesi olarak görev yapan matematikçilerin oluşturduğu bir topluluk tarafından haftalık olarak düzenlenen matematik seminerlerine düzenli katılım göstermiştir. Bu sayede matematikçilerin neler yaptığı ile ilgili bir gözleme sahip olmuştur. Bu süreçte mümkün olduğunca matematikçilerin pratiklerini ve repertuarlarını deneyimlemeye ve anlamaya çalışmıştır. Aynı zamanda araştırmacı, matematik eğitiminde de lisansüstü öğrenme sürecinin içerisine girmiş, bu kez matematik öğretenliği programındaki öğrencileri gözlemlene fırsatı bulmuştur. Araştırmacı matematik öğretenliği programındaki her sınıf seviyesi olmak üzere özellikle de mezun olmaya yaklaşan öğrencilerde, matematiksel ispatla ilgili beklenen profillerin olgunlaşmadığını fark etmiştir. Bu duruma dair ilk işaretleri, quiz şeklinde uygulanan sınıf içi öğrenci çalışmalarında görmüştür. Daha sonra arasınave dönem sonu sınavları gibi farklı ortamlarda öğrencilerin matematiksel ispatla ilgili çalışmalarında devam eden izler dikkatini çekmiştir. Bu aşamada matematiksel ispat konusu üzerine araştırma yapmaya merak salmıştır. Bu motivasyonla matematik eğitiminde ispat üzerine yapılan çalışmaları kendisine yakın tutmuştur. Türkiye'den farklı üniversitelerde öğretim üyelerinin matematik eğitiminde ispat uygulamalarının yer aldığı, TÜBİTAK tarafından desteklenen bir projede katılımcı olarak yer alma fırsatını değerlendirmiştir. Böylelikle matematik eğitimindeki güncel ispat çalışmalardan haberdar olmuştur.

Araştırmacı yukarıda açıklanan bağlamlar çerçevesince bu çalışmaya uygun bir yeterlik geliştirebilmiştir. Böyle olmakla birlikte araştırmacı, bu tez çalışmasında kendisinin geçmişten getirdiği tüm matematiksel ispat deneyimlerini, kişisel inançlarını, varsayımlarını, yargılarını ve ön yargılarını hatta beklentilerini bir kenara bırakan bir araştırmacı kimliğine bürünmüştür.

4. BULGULAR

Bu kısımda, veri analizi sonucunda elde edilen bulgular paylaşılacaktır. Bulguların sunumu, araştırmanın alt problemlerine uygun olacak bir dizaynda yapılmaya çalışılmıştır. Bu organizasyonda, ilk olarak katılımcıların matematiksel ispata ilişkin algılarına yönelik bulgular “4.1” başlığı altında, ikinci olarak katılımcıların matematiksel ispata ilişkin pratiklerine yönelik bulgular “4.2” başlığı altında yer almıştır.

4.1 Araştırmanın Birinci Alt Problemine İlişkin Bulgular

Araştırmanın birinci alt problemi, katılımcıların matematiksel ispata ilişkin algıları ile ilgilidir. Araştırma verilerinin yarı-yapılandırılmış görüşmeler boyunca analiz edilmesi sonucunda, matematikçilerin, matematik eğitimcilerinin, matematik programı öğrencilerinin ve matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin matematiksel ispata ilişkin algıları 5 kategori altında değerlendirilmiştir. Bu kategoriler, *ispata tarifleri*, *ispata özellikleri*, *okul matematiği ile üniversite matematiği arasındaki gerilim*, *ispata yolları (girişimlerinin doğası)* ve *ispata verilen değer (önem)* şeklindedir. Bu kategoriler ve alt kategoriler Tablo 4.1’de görülmektedir. Katılımcıların matematiksel ispata yönelik algılarıyla bulgular paylaşılırken bazı adımlar öncelikli olarak ve açık bir şekilde ifade edilmek istenmiştir.

Öncelikle, bu kategorilerin her biri alt kategorileriyle birlikte Tablo 4.1’de ana kategoriler tablosunu yansıtmaları amacıyla verilmek istenmiştir. Ana kategoriler tablosu demenin amacı, her bir matematik topluluğundan bağımsız bir şekilde genel bir kategori listesini ifade etmesidir. İlgili kategoriye ve/veya alt kategoriye katılımcıların yaptığı toplam katkı anlamına gelen toplam katılımcı sayısı, Tablo 4.1’deki ilgili sütun hücrelerinde parantez içerisindeki sayılar şeklinde görülmektedir. Bunu yapmanın amacı, Tablo 4.1 ve ilerleyen tablolarda matematiksel ispata ilişkin algılarıyla çevrelenen kategori ve alt kategorilere katılımcıların gözünden bakabilmeyi ve okuyabilmeyi, genel manada ise bütüncül bir şekilde kategorilerin anlaşılmasını kolaylaştırmaktır.

Diğer taraftan, bu araştırmada toplam 34 katılımcı yer almaktadır. Fakat bazı durumlarda bir katılımcı birden fazla kategori altında yer alabilmektedir. Bu durumlarda katılımcı(lar) diğer kategorilerin altında da gruplandırılmıştır. Böyle bir durumda, ilgili kategorideki katılımcılara ait toplam cevap sayısı 34’ü

geçebilmektedir. Tablo 4.1'i bu açıdan yorumlamak olası karmaşıklığı (belki de anlaşmazlıkları) ortadan kaldıracaktır.

Tablo 4.1. Matematiksel ispatla ilgili algılara ilişkin kategoriler (katılımcı sayısı)

Kategoriler	Alt Kategoriler
İspat Tarifleri	Matematiksel dünya tabanlı tarifler (10)
	İkna tabanlı tarifler (8)
	Araç odaklı (araçsal) tarifler (11)
	Süreç odaklı tarifler (9)
	Öğretim odaklı (sınıfa uyarlanan) tarifler (6)
	Genel tarifler (16)
İspatın Özellikleri	Diğer (2)
	Sosyal boyut (23)
	Bağlamsal boyut (12)
	Doğruluk değeri boyutu (23)
	Mantıksal boyut (33)
	Dilsel boyut (24)
Okul Matematiği ile Üniversite Matematiği Arasındaki Gerilim	Soyut-aşkınlık boyutu (15)
	Alışılmayan (farklı gelen) tarz (12)
	Lise matematiği ile üniversite matematiği arasındaki fark (2)
	Problem çözmeye karşı ispatlama (7)
	İşlemsele karşı kavramsal (9)
	Doğrudan kabul etmeye karşı sorgulama (15)
	Sınav sisteminin getirdiği alışkanlıklar (4)
	Yükün üniversiteye bırakılmasının yarattığı gerilim (11)
	Boşluk hissi (5)
İspatlama Yolları/Girişimlerinin Doğası	Öğrenci-öğretmen arasındaki anlaşmazlık (9)
	Diğer (2)
	İspatlayıcının yeterliliğine göre değerlendirenler (7)
	Dışsal referansa yönelenler (9)
	Soruyla karşılaştığı durum-ortam özelinde bahsedenler (5)
	Genel problem çözmeden bahsedenler (10)
İspata Verilen Değer/ Önem	İspat yönteminden bahsedenler (5)
	İspat yöntemlerinin ötesinde (ileri taşıyanlar) (12)
	Ne ileri taşıyan ne de sadece yöntemle sınırlı kalanlar (4)
	Matematikte temel pratik olarak ispat (28)
	Beceri olarak ispat (34)
	Aktarılabılır/transfer edilebilir bir yapı olarak ispat (17)
	Kimlik olarak ispat /önceliğe göre önem (33)

Aşağıda matematiksel ispatla ilgili algılara ait bulgular, önce katılımcı gruplardan (durumlar) bağımsız bir şekilde ve araştırmanın temaları üzerinden sırasıyla sunulmuş, ilgili kategori ve alt kategorilerin ne anlama geldiği açıklanarak katılımcılardan örnekler verilmiştir. Ardından grup bazlı olarak katılımcıların kategorilerdeki dağılımı Tablo 4.2, Tablo 4.3, Tablo 4.4, Tablo 4.5 ve Tablo 4.6 üzerinden yansıtılarak paylaşılmıştır. Son olarak, matematiksel ispata ilişkin algılar hem her bir tema hem de her bir katılımcı grubun bütüncül olarak yer aldığı ve temaların gruplara nasıl ve ne şekilde dağıldığı, benzeştiği ya da ayrıştığı yapıları görebilmek adına çapraz durum tablosu (Tablo 4.7) üzerinden özetlenerek verilmiştir.

4.1.1 İspat Tarifleri

Katılımcıların matematiksel ispata yönelik algılarının birinci teması “ispat tarifleri”dir. Bu tema, katılımcıların matematiksel ispatın kendileri için ne anlama geldiği, matematiksel ispatla ilgili tanımlamalarının ne olduğu ve matematiksel ispattan ne anladıklarıyla ilgilidir. Bu nedenle matematiksel ispatı nasıl tariflediklerine yönelik ifadeleri incelendiğinde *matematiksel dünya tabanlı tarifler*, *ikna tabanlı tarifler*, *araç odaklı tarifler*, *süreç odaklı tarifler*, *öğretim odaklı tarifler*, *genel tarifler* ve *diğer* kategorileri ortaya çıkmıştır.

Katılımcılar bu tema altında en çok genel tarifler kategorisinde toplanmıştır. Katılımcıların matematiksel ispatı, daha geniş bir yelpazede ele alarak önemli bir metodoloji olarak tarifledikleri *genel tarifler* kategorisinde 16 katılımcının görüşü bulunmaktadır. Bu konuda katılımcılar *çalışma prensibi* ve *düşünme biçimi* olarak metodolojik bağlamlardan bahsetmişlerdir. Çalışma prensibi alt kategorisinde 9 katılımcıya ait görüş bulunmaktadır. Bu katılımcılar, matematiksel ispatı kullanan ya da matematiksel ispata başvuran kişi açısından bir usul, en temel ve doğal bir yaklaşım tarzı, yaptıkları işin doğası ve çalışma alanları gereği başvurdıkları yöntem anlamlarından bahsetmişlerdir. Buradaki katılımcıların altını çizdiği noktalar, ispatın kendileri için kaçınılmaz ve vazgeçilmez bir yöntem olması, ispatsız tek bir adım bile atılamaması, ispatlamadığı hiçbir şeyi kullanmadığını temel bir ilke olarak benimseme, spesifik bir çalışma alanında sıklıkla başvuru alan bir yöntem olması ya da genellikle ispat tekniğini kullanarak çalıştığını, ispatı bu noktada can damarı olarak görmesi gibi vurgulamalar bu kategorinin tipik göstergeleridir.

1MA7, kendisi de dahil çoğu matematikçi için ispatı temel bir pratik olarak görmesi, bir matematikçinin kullandığı tek yöntem olarak vurgulamasının yanı sıra matematik bölümünün doğası gereği ispatın temel teşkil ettiğini ve diğer bölümlerde yapılan araştırmaların yöntemlerinden farkını da ortaya koyarak ispatın matematikte önemli bir yöntem olmasından bahsetmiştir:

1MA7: ...hemen her matematikçinin bana göre her şeyi ispat yani. Verilen birtakım şeylerden yeni bir sonuçlar elde etmek için, yani matematiğin temeli. Yani bir matematikçinin mutlaka yapması gereken şeydir, yani ispatlaması lazım ortaya attığı teoriyi, tezi daha önceki bilgileri kullanarak ispatlaması gerekiyor...burada [matematik bölümünde] yani yaptığımız şey o zaten, yani ortaya bir teorem atıp onu, yani elimizde bir problem varsa, diğer bölümler belki birtakım araştırmalar yapıyor, istatistiksel analiz yapıyor ama bizim elimizdeki tek şey onu

bir şekilde ispatlayabilmek. Yani elimizde elde ettiğimiz, bulmak istediğimiz sonucu, ispatlamamız gerekiyor yani burada matematiğin temeli bu yani. Başka bir yöntem yok.

Düşünme biçimi alt kategorisinde 7 katılımcıya ait görüş bulunmaktadır. Bu katılımcılar matematiksel ispatın, matematiğin yapısı üzerine projektif bir düşünme süreci ya da düşünme merceği, bir bakış açısı, bir yaklaşımla ilgili olabilecek bir mesele şeklinde değerlendirmişlerdir. Daha açık ifadesiyle, bu düşünme biçimi, kişi ile matematik arasındaki mercek gibidir; bu mercek, matematiğin nasıl çalıştığı ya da onun nasıl bir sistem olduğunu, matematiğin çalışma felsefesi hakkında fikir sahibi olmak isteyen kişiye bu yapı üzerine bir düşünce geliştirmesini sağlamaktadır. Bu kategorideki katılımcılar, matematiğin temelinde aslında bu yapıyla ilgili bir düşünmenin yattığı, bazı soyut konu ve kavramların işletim süreçlerinin yapısı üzerine düşünmeyi içeren bir sürece referans vererek matematiksel ispata düşünme biçimi perspektifinden bakmışlardır. 2EA2, matematiği bir düşünme sistemi olarak gördüğünü, ispatın ise bu sistemin içindeki önemli bir düşünme biçimi olduğunu belirtmesi, düşünme biçimi tarifine örnek olarak verilebilir:

2EA2: *Şimdi matematik aslında hani benim için bir düşünme sistemi aslında ve ispat [da] matematik bu düşünme sisteminde bir şeyin bir bilginin bir ilişkinin neden öyle olduğunu ya da neden geçerli, neden doğru olduğunu ortaya koymak için kullanılan bence önemli araç mı diyelim? Aslında önemli kavramlardan biri yani. ...Bir bakış açısı bir yaklaşım aslında ispat. Bu da işte ta ilkokuldan hatta anaokulundan başlayarak hani dedim ya [ispat] bir düşünme biçimi, matematik [de] bir düşünme sistemi.*

İspat tarifleri başlığının ikinci kategorisi olan *araç odaklı tariflerden* bahseden 11 katılımcı, matematiksel bir ifadenin doğruluğunu ve/veya yanlışlığını göstermeye yarayan, onun nereden geldiğini ve temelinde ne olduğunu öğrenmesine izin veren, matematiksel bir konuyu, kavramı anlamının; diğer konu veya kavramların öğrenilmesini kolaylaştıran, bağlantı kurulmasını sağlayan, anlamayı ve anlaşılmayı kolaylaştıran, matematiksel bir bilginin nereden geldiğini ayrıca nedenini de ortaya koyarak açıklamaya yardımcı olan bir araç şeklinde görüş bildirmişlerdir. Aşağıdaki 3MÖ3 katılımcısı, ispatı matematiksel bir konunun mantığını anlama aracı olarak gördüğü için bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

3MÖ3: *ispat deyince hani, ya bir şeyi kafanda tam oturtmak gibi tanımlıyorum ben. Mesela lisede falan görünce, mesela atıyorum, lisede türevi öğretiyorlar, çarpım[ın] türevi. O çarpım türevini yapıyorlar ama havada kalıyor, ispat yapınca mesela üniversitede, limitin*

tanımından ispat yapıyoruz. Bu şekilde hani o şey, türev çarpımını unutsa bile limitin tanımından ispat, yani benim için böyle kafada tam oturtmak, matematikte ilerlemek istiyorsak ya da bir şeyleri bulmak istiyorsak, o ispatlar sayesinde bir ilerleme kat edebiliyoruz.

İspat tarifleri başlığının üçüncü kategorisi, *matematiksel dünya tabanlı tariflerdir*. Katılımcıların görüşleri, mantıksal çıkarım yasaları, matematiksel argümanlar, aksiyomatik yapı, kabuller, tanımlar, daha önceden ispatlanmış teoremler ya da doğru olduğu kesinlikle bilinen matematiksel gerçekler, tutarlı matematiksel metotlar kullanılarak belirli bir yöntemle, matematiksel bir yapının diğer matematiksel yapılarla ilişkisinin mantıksal bir örgüde adım adım kurulması şeklindeki karakteristikleri barındırması açısından matematiksel dünya tabanlı tarifler kategorisi altında bir araya getirilmiştir. Matematiksel dünya tabanlı tariflere göre, matematiksel bir ifadenin doğruluğu, kendi disiplini içerisinde yani formel bir anlamda değerlendirilir. Bu kategorideki bir tarife uyan toplam 10 katılımcı bulunmaktadır. Aşağıda 1MA5 katılımcısı, matematiksel ispatı belli tanımlamalar altında, belirli kurallara bağlı kalarak, gösterilmesi gereken ifadenin çıkarılması için art arda dizilecek kuralların zinciriyle adım adım sonuca doğru ilerlemek şeklinde tariflemektedir. Ayrıca tarifini formel dilin gerekleriyle detaylandırarak sentaksı ön plana çıkarması ve ispatın sembolik tarzda yazılmasına önem vermesiyle, aksiyomatik sistemin sınırları içerisindeki hareketleri ön plandadır. Bu açıdan 1MA5, matematiksel dünya tabanlı tarifler kategorisine örnek verilebilir:

1MA5: *...Bundan önce de mesela “2” dediğimiz şey nedir? “1” dediğimiz şey nedir? “0” dediğimiz şey nedir? Bunların tanımlanması gerekir. Tanımlandıktan sonra $2+2=4$ eder’in, şey, $2+2$ ’nin anlamı tanımlanmalı. Sonra 4 ’ün anlamı tanımlanmalı. Sonra da $2+2=4$ eder’in olduğu verilen bu tanımlamalar altında belli kurallar zinciri içerisinde gösterilebilmeli ki buna üç aşağı beş yukarı bir kanıt diyebiliriz. ..İspat elimizde birtakım objeler var ki matematikte bu objeler hep kümedir. Matematiğin kendi dili içerisinde kümedir ve bu kümeler arasındaki iletişimi kuran birtakım kurallar vardır... O sonucun çıkarılmasına giden birtakım kurallar var. Ben o kuralları art arda dizebiliyorsam gösterebiliyorsam o zaman onu kanıtlamış oluyorum. Mesela bir örnek vereyim. $1=1$ olduğunu nasıl kanıtlarız? Şimdi elimizde ne var? “1” diye bir kavram var. “Eşitlik” diye bir kavram var. Bir de bunların bir yazılımı var. Değil mi? Sembolik olarak yazılımı var, $1=1$ diyoruz.. $1=1$ ’i kanıtlamak için benim bir dayanağımın olması lazım... Bir ilk basamak olacak ve ben o basamaklar üzerinden hareket edeceğim. O hareketle belli bir yere varacağım. Fakat o yere varırken birtakım kurallarla varacağım.. Elimde bir aksiyom, varsaydığım şeyler olacak ki matematiğin içerisinde günümüz matematiğinin içerisinde buna “Zermelo–Fraenkel set theory*

aksiyomları” diyoruz. ..Bu aksiyomlardan bir tanesi şudur: Her x için $x = x$ dir, eşitlik aksiyomu. Her x için $x = x$ ise, ben $1=1$ olduğunu ne yapmış olurum? Kanıtlamış olurum. Hangi kurala göre kanıtlamış olurum? $1=1$ aksiyomunu kullanarak çok basit bir şekilde kanıtlamış olurum.

1MA4, ortaya atılan iddianın doğruluğunu gösterirken bunun nasıl yapılması gerektiğine bir açıklık getirmiş, daha önceden doğrulanmış teorilerin bir zinciriyle hareket edilmesi gerektiğini belirttiği için matematiksel dünya tabanlı tarife uyan diğer bir örnek olarak verilebilir:

1MA4: Ortada bir teori var. Bunun[la].. Yani orada da şey yapacaksın işte “sonlu tane” daha önceden iyi bilinen, doğruluğu kabul edilmiş teorilerin bir dizisini kullanarak yapacaksın... ..Ya da işte dedim ya “sonlu tane iddialar dizisi[dir] ispat”.

İspat tarifleri başlığının dördüncü kategorisi olan *süreç odaklı tariflerden* bahseden 9 katılımcı, gerekçelendirme, akıl yürütme, genelleme, ilişkilendirme, modelleme, karar verme süreci olarak ya da kişinin mantıklı bir düşünce sürecinden geçmesi, bilme ve anlama arzusu gibi matematiksel bir düşünsel süreci ön plana çıkarması yönüyle görüş bildirmişlerdir. 4EÖ8, herhangi bir matematiksel bilginin, onun o son halini almasına kadar geçtiği süreçlerden ve o bilgi elde edilinceye kadar atılan adımların, geçilen aşamaların, kısacası matematiksel bir bilginin ortaya çıkması serüveninde arka plandaki aşamaların tamamına bir ispat anlamı yüklemektedir. Bu nedenle 4EÖ8, ispata matematiksel bir süreç çerçevesinden baktığı için bu kategoridedir:

4EÖ8: İspat ne anlama geliyor..ispat.. bir şeyin neden öyle olduğunu bize aslında bazı farklı tanımlar ya da yöntemler kullanılarak ortaya konulması gibi geliyor.. mesela, o formülün ispatı aklıma geliyor. O formülün ortaya çıkış noktası. Aslında birazcık tarihsel bir anlamda bir şey ifade ediyor ispat deyince. Yani sonuçta bir bilgi ortaya çıkıyor ve bu bilgi ortaya çıkarken başka bilgiler bir araya geliyor.. Bilgi ortaya çıktığında ondan o bilgi ortaya çıkışıya kadar aslında onu ortaya çıkaran bilgi.. O yolların yani o süreç aklıma geliyor ispat denince. .. Mesela π sayısının ortaya çıkışı aklıma geldi.. onun ispatına da ilk başta böyle, tabii ki de kesinlikle π sayısına ulaş, hani direkt ulaşamıyorlar ama π sayısına ulaşmadaki o aşamadaki mesela durumlar sanki bana ispat gibi geliyor. ..Hani oradaki o süreç ama tabii ki tam olarak ulaşamıyorlar. Böyle adım adım hani yaklaşıyorlar..işte beşgen çiziyoruz dairenin içine. Daha sonra altıgen, yedigen, on gen, hani bu aslında bildiğimiz şekillerden yola çıkarak bir dairenin alanına ulaşmaya çalışıyoruz gibi. Bana bu da sanki ispatmış gibi geliyor açıkçası. Yani sonuçta oraya ulaşırken ki o denediğimiz yollar ve bu yollar aslında bizi doğruya da götürüyormuş gibi. Doğruya da götürdüğü için bu süreç ispat süreciyimş gibi geliyor.. Yani ispattan anladığım bu gibi.

İspat tarifleri başlığının beşinci kategorisi olan *ikna tabanlı tarifler* kategorisinde, ispat formel ya da tümdengelimli sistemin geleneklerine uyan bir tarif yerine daha çok ikna edici bir argüman anlamında değerlendirilmektedir. Bu kategoride, matematiksel bir ifadenin doğru olduğuna emin olmak için kişisel bir anlamlandırma, tatmin olma ön planda olduğu gibi katılımcı sadece kendisi için anlamlı olmasıyla yetinmez, toplumu da inandırmak ön plandadır. Bu tarife uyan toplam 8 katılımcı bulunmaktadır. Aşağıda 2EA6, formel biçimin dışında insanları ikna etmeye dayalı bir ispat tarifi sunduğu için bu kategoridedir:

2EA6: ...Yoksa mesela şimdi düşünün siz Pisagor teoremini ispatlayacaksınız $a^2+b^2=c^2$ şimdi bunu nasıl ispatlayabilirsiniz? Bunu siz cebirsel ispatlayabilirsiniz.. Bunu bu şekilde $a^2+b^2=c^2$ olduğunu biliyorsun bir görsel [ile] gösterebiliriz...Cebir çıkmadan önce biliyorsunuz çoğu zaman için o zamanlar için geometrik ispatlar mevzubahisti. Geometrik ispatlar aslında yine karşıdakini görsel olaraktan ikna etmeye dayalı bir yöntem. Yoksa yani geometrik ispat dediğimiz şey cebirle göre daha mı iyidir daha mı kötüdür? ..çözümünü cebirsel bir şekilde çözüyor denklemini ama o denklemin çözümünü yine eski, “ben bunu çözdüm ama” diyor “anlamanız için bir de görsel çözeyim” diyor ..Bakıyorsunuz mesela çok güzel açıklamış cebirsel bir şekilde ama insanlar anlamamışlar yani veya ikna olmamışlar. Ondan sonra gitmiş onu geometrik olaraktan bir daha ispatlamış. Yani burada ne anlıyoruz? Demek ki bu [ispat] mantıkla ilgili değil, insanları ikna etmeyle ilgili bir durum. Yani bu yapılan işin makul olduğunu, doğru olduğunu göstermeyle [ilgili]. İspat bununla ilgili bir şey. Yoksa yani belli bir formata hapis kalmamak lazım, yani ispatı bir ikna süreci olarak görmek gerekir. ..Benim için bir şeyin doğruluğu, doğru sonucu bulmak aslında ispatlamak demektir bir şeyin doğruluğuna ikna olmak. ..Çoğu problemin çözümünü birisi ispatlayabilir, siz başka bir yöntemle bunun doğruluğunu gösterebilirsiniz bence o da bir ispattır. Yani bana göre ispat, bir şeyin doğruluğuna kendi ikna olmak, başkasını ikna etmektir. Yani ben öyle yaklaşıyorum meseleye.

İspat tarifleri başlığının son kategorisi olan *öğretim odaklı tarifler* başlığını oluşturacak nitelikte görüşlerini bildiren 6 katılımcı, ispat tariflerini matematiksel ilişkilerden ve yapılardan yararlanılan, formel yerine daha informel bir biçimde ifade edilebilen gösterim gibi daha ‘sınıfa uyarlanan’, illaki pür matematiksel tabanlı olmasına ihtiyaç duyulmayan, hedef kitleye göre biçimsel derecesi indirgenebilen ya da uyarlanabilen bir nitelikte sunmuşlardır. 2EA2, matematiksel ispatın sınıftaki karşılığını matematiğin kendi iç dünyasındaki biçiminden ayırarak ele almaktadır. Burada, formel biçimin ötesinde, neden öyle olduğunun gerekçelendirilmesinde matematiksel bir açıklama ya da bunun böyle olmasının

gösterilmesinde daha informel odaklı bir vurguya sahip olması 2EA2'nin ispatın bu kategorideki tarifini yansıtmaktadır:

2EA2: *[formel ispatla kastettiğim]Hani bu tümdengelim ile düşünmeyi gerektiren biliyorsun, lise geometrisinin ya da lise matematiğinin ve daha üst düzey matematikte karşımıza ve matematikçinin kullandığı ispat biçimini söylüyorum. Genellikle bizim sınıflarımızdaki ispat biçimi, daha doğrusu kanıtlama biçimi diyelim.. Diyelim ki bir paralel kenarın, hani geometri dersimden örnek verecek olursam diyelim ki bir dörtgenin karşılıklı kenarları paralel ise buradan hangi sonuçları çıkarabiliriz? Şimdi genellikle öğrenciler ezbere.. Ben bunun o ezbere bilgiden ziyade neden işte bir dörtgenin karşılıklı kenarları paralel ise karşılıklı açıları eşit olmak zorunda? Karşılıklı kenarları da eşit olmak zorunda, bunu açıklamalarını istiyorum. Genellikle burada öğrenciler bazen deneysel yollara başvuruyorlar. Yani işte kâğıt katlayarak ya da ölçerek ben bunun yanı sıra. Bu tür deneysel yöntemlerin yanı sıra biraz daha ilişkilerden faydalanarak yani işte paralel doğrular ve kesenleri üzerinde oluşturdukları açılardan faydalanarak biraz daha matematiksel yapılardan faydalanarak açıklamalar getirmelerini ve göstermelerini istiyorum. Ama tabi ki bu dediğim gibi üst düzey o tümdengelimli, ispat biçiminden biraz daha farklı oluyor tabi ki. Daha informel düzeydeki bir ispat biçimi şeklinde oluyor.*

Diğer kategorisinde matematiksel ispatın tarifini verirken kavramın kendisini ifadelerinde tekrar kullanarak, aynı kavramı farklı bir şekilde ifade ediyor gibi görünse de döngüsel bir şekilde ispat kavramını kanıt olarak aynı anlamda ele alarak görüş bildiren 2 katılımcı yer almaktadır. Aşağıdaki 4EÖ4 katılımcısına ait alıntı diğer kategorisine örnek olarak gösterilebilir:

4EÖ4: *Yani, ispat yine biraz önceki söylediğim gibi olacak. Yani var olan bir bilgiyi kanıtıyoruz...*

4.1.1.1 Matematikçilerin Matematiksel İspat Tarifleri

Buraya kadar olan matematiksel ispatın tarifine yönelik bulgular, katılımcı gruplardan bağımsız bir şekilde verilmiştir. Aşağıda matematikçilerin, matematik eğitimcilerinin, matematik programı öğrencilerinin ve matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin grup bazlı matematiksel ispata ilişkin tariflerine yönelik bulgular Tablo 4.2 üzerinden paylaşılmıştır.

Tablo 4.2. Farklı matematiksel topluluklara göre matematiksel ispat tarifleri

KATEGORİ	ALT KATEGORİLER	1MA (9)	2EA (7)	3MÖ (9)	4EÖ (9)
TARİFLER	Matematiksel dünya tabanlı tarifler	6	3	-	1
	İkna tabanlı tarifler	1	3	2	2
	Araç odaklı (araçsal) tarifler	1	1	6	3
	Süreç odaklı tarifler	-	3	1	5
	Öğretim odaklı (sınıfa uyarlanan) tarifler	-	6	-	-
	Genel tarifler	9	-	-	-
	Çalışma prensibi	-	7	-	-
TARİFLER	Düşünme biçimi	-	-	-	-
	Diğer	-	-	1	1
1MA : Matematikçiler 2EA : Matematik Eğitimcileri 3MÖ : Matematik Programı Öğrencileri 4EÖ : Matematik Öğretmenliği Programı Öğrencileri Not: Parantez içindeki sayılar, o grubun toplam katılımcı sayısını göstermektedir. Her bir hücredeki sayılar ise o gruptaki kaç katılımcının ilgili kategoride bir görüşünün olduğunu temsil etmektedir.					

Çalışmadaki matematikçilerin tamamı genel tarifler kategorisinin çalışma prensibi alt kategorisinde ispat tarifinde bulunmuştur (bkz. Tablo 4.2). Matematikçiler farklı uzmanlık alanlarında branşlaşsalar da ispatı teorik matematiksel çalışmalarını besleyerek ilerleten önemli bir mekanizma olarak görmektedir. Bu bakımdan matematikçiler matematiksel ispatı bir matematikçinin yaptığı işle özdeşleştirmektedir. 1MA8, matematiksel bir yapı üzerinde çalışırken o yapıyı açabilecek elindeki tek anahtarın ispat olduğunu vurgulamıştır:

1MA8: *Yani cebirciler için çok da zor olmayan bir cevabı var aslında. Dediğim gibi bizim en çok kullandığımız yöntem. Yani çünkü şimdi genelde belli bir yapı var, yani işte bu grup olabilir, ring olabilir, başka bir matematiksel yapı olabilir. Sen o yapı üzerinde çalışıyorsun. Yani bir şeyler bulmaya çalışıyorsun ya da o yapının özelliklerini ortaya çıkarmaya çalışıyorsun. ...O yüzden cebirciler için çok ayrı bir yeri var. Çünkü bizim, ee, kullandığımız tek araç olabilir... dedim ya uygulamalı matematik çalışan biri için, “ya ben arada kullanıyorum ama hani benim çok da işime yarayan bir şey değil” diyebilir. Ama biz onun [ispatın] haricinde hiçbir şey kullanmıyoruz neredeyse. ...kullandığım tek şey ispat tekniği yani tek şey onun ispatını yapmak.*

Benzer şekilde, 1MA6, matematiksel ispatı bir matematikçinin çalışma ve araştırma alanı gereği sıklıkla başvurduğu temel bir ilke olarak tariflemiştir:

1MA6: *Analiz konusunda zaten ispat bizim sık sık başvurduğumuz bir yöntem. Yani mecburuz aslında.. hiç ispat vermeden “soru çöz, soru çöz” gibi bir şey matematik bölümünde, özellikle fen edebiyat matematik bölümünde çok makul olmaz..*

1MA2 ise akademik çalışmalarını yayınlamak için ortaya attığı teoriyi desteklemede ispata muhtaç olduğunu, teorik matematik alanında çalışan biri olarak

ve matematik bölümünün bir üyesi olarak ispat olmadan bir adım bile atamadığını ifade etmiştir:

1MA2: *Yani matematiksel ispatın bence [bendeki] karşılığı matematikteki her şey yani. Matematikte ee teorik matematikte, ispatsız hiçbir şey yapamazsın yani bir adım öteye gidemezsin... Bizim kendi çalıştığımız, işte doktora alanlarımızda da ya da bir makale yapmak istersek de, bir şey söylüyorsak onu ispatlayacağız ki bir karşılığı olsun... Yani onsuz tek bir adım bile atamıyoruz.*

1MA2 gibi 1MA1 de benzer görüşü paylaşmıştır. Bir matematikçi olarak benimsediği ve öğrencilerine de her fırsatta sürekli ifade etmeyi önemli gördüğü “ispatlamadığım hiçbir şeyi kullanmam” ifadesiyle bir matematikçinin ispatla anılması gereken duruşunu temsil etmiştir. Ayrıca 1MA1 ispatlayarak desteklediği kendi teorik çalışmalarının ilerideki araştırmalara zemin oluşturacak kadar önemli olduğunu vurgulamıştır.

Tablo 4.2 incelendiğinde matematikçilerin çoğunun matematiksel dünya tabanlı ispat tarifi sundukları görülmektedir. Bu kategorideki matematikçiler özellikle matematiksel dünya ile genel olarak fiziksel dünya arasındaki farka işaret etmişler, ikincisinin daha çok “diğer bölümlerde araştırmalar yapılması, eğitim bilimlerinde anket gibi yöntemlerin topluma yayılarak anlam kazanması, istatistiksel analiz, deney, gözlem, sezgi ve ön görmenin kullanılması” şeklindeki duruşla ilgili olduğu, ilkinin ise böyle bir misyon ya da odağının olmamasıyla ya da matematiğin kendi düzlemindeki varoluşuyla işin realitesi, pratikteki karşılığının ayrıştığı bir durum şeklindeki görüşlerinde baskınlaşmıştır. Bu duruşla ilgili olarak, 1MA5 ispat tarifinde bir yandan günlük hayatın akışına ya da pratikteki yansımalarına da atıfta bulunmaktadır:

1MA5: *...Zaten matematik denildiği zaman ortada birtakım veriler var ve bu verileri kullanarak gösterilmek istenen bir şey varsa belli kurallar içerisinde, zaten o ispat oluyor... Fakat işin bir realitesi var, bir pratiklik gerçekliği var ve bu gerçekliğin bir de matematiğin kendi düzlemi içerisinde bir duruşu var. Mesela matematikte $2 + 2 = 4$ eder'in kanıtlanması mutlak ve mutlak gerekirken, günlük yaşam içerisinde kanıtlanması gerekmeyen bir olgudur. Diğer taraftan mesela $2 + 2 = 4$ edebilmenin kanıtı sanırım 2500 teorem gerekiyor. Bu 2500 teoremin hepsini gösterdiğiniz zaman ve bunu pratik yaşama uyguladığınız zaman işin içerisinde çıkamaz hale gelirsiniz. Ya da bir pazara gittiğiniz zaman $2 + 2 = 4$ eder mi etmez mi onun bir kanıtının sunulması gereksizdir. Fakat matematiğin kendi duruşu içerisinde belli ölçülerde kanıtlanması gerekir. Bu belli ölçüler dediğimiz şey de e tabi ki bazen çok sıkıcı olabilir. Neyi amaçlıyoruz, ne kadar kanıtı ihtiyacımız var? Belli ölçülerde mutlaka kanıtlanması gerekir...*

Böyle olmakla birlikte 1MA5 matematiksel ispata geçişinde deneysel yolları basamak olarak kullandığı matematiksel ispat tarifini ince bir ayarlamada vermektedir. 1MA5, deneysel çalışmalarından elde ettiği bulgularını kendisini matematiksel olarak bir sonraki aşamaya taşımasında önemli bir zemin olarak görmektedir. Bu noktada önce deneysel bilimlere dayalı bir ispat açıklamasında bulunmuş, bu tarz bir ispattan matematiksel dünya tabanlı bir ispata geçişini açıklamıştır. Bunu yaparken, deneysel gözlemleri sadece o aşama için güvence sağlarken, her zaman için garanti altına alınabilecek bir yaklaşımda bulunmak matematiksel ispatın deneysel ispattan ayrıldığı kritik bir vurgu olmuştur:

1MA5: ...Mesela bilimsel ispat dediğimiz şey nedir? Ve matematiksel ispat dediğimiz şey nedir?

Bunların arasındaki farkı bir örnek üzerinden izah etmeye çalışayım. Şimdi ben bir binaya çıkıyorum, 10 katlı bir binaya. Elime taş alıyorum ve taşı bırakıyorum yere. İlk bıraktığım zaman taş yere düşüyor. İkinci bıraktığım zaman taş yere düşüyor. Üçüncü bıraktığım zaman taş yere düşüyor. ...Acaba bir sonraki seferde bıraktığım taş yere düşer mi düşmez mi? Bu soru üzerinden hareket edecek olursak biri diyebilir ki “düşer” biri diyebilir ki “düşmez”. Sonra ben alırım taşı, tekrar bırakırım. Doğru sonucunu o aşama için öğrenebilirim. Değil mi? Bu nedir? Bir deneysel kanıttır ve diyebiliriz ki bırakılan taş yere düşer. Neye göre düşer? Deneysel gözlemime göre düşer. Öyle değil mi? Şimdi bakıyorum deneysel gözlemimi bir kenara bırakmam benim için çok değerli deneysel gözlem. Onu heba edemem. Ama öbür taraftan, her bıraktığım zaman bir sonraki bırakacağımın düşüp düşmeyeceğini ne yapamıyorum, garanti edemiyorum. O nedenle kendimi güvene almak için diyorum ki “Eğer her bırakılan taş yere düşerse” varsayımıyla sonraki işlemimi yapıyorum... daha ileri giderek diyorum ki ben bunu bir aksiyoma dönüştürüyorum diyorum... ve aksiyomumu şöyle kuruyorum: “bırakılan taş yere düşer”. Şimdi bu aksiyomu ben geliştigüzel kurmadım. O aksiyomu kurmamın arka planında bir deneysel bir emek var. O deneysel emeğimi deneysel kanıtımı ben aksiyoma dönüştürüyorum...Dolayısıyla deneysel kanıtı ben aksiyoma dönüştürdüğüm zaman matematiksel kanıtlamak ya da matematiksel yapının da örgüsünü kurmaya başlamış oluyorum. Deneysel kanıtla bilimsel kanıtla ya da bilimsel varoluşla aksiyomatik var oluş arasında bir geçişkenlik yaşıyorum.

1MA5, matematiksel ispatın formel tanımını her seferinde daha da detaylandırarak vermeye devam etmektedir. Bu kez daha fazla soyutlama ile formel tarifini genişletmiştir. Formel sistem içerisinde tanım-teorem-ispadı (T-T-İ) nasıl yapılandığı, sonlu aşamalılık vurgusu ve retorik tarzda bir söylem içerisinde bulunuşu dikkat çekmektedir. Ayrıca bu tarifinin içerisinde, ispatta tanımların önemi, eylemlerinden çok da bağımsız olmaması açısından sezgilerin rolü, nasıl bir bağlam içerisinde tanımda bulunulursa anlamın ve tarifi değişeceğine dair ön

planda tuttuğu elementler de vardır. Bunların yanı sıra ispatın kesinlik, mantıksal, dilsel özelliklerinin (ileride ya da daha önce açıklanan) tamamına atıfta bulunarak; deneysel ispatı somut, matematiksel ispatı soyut olarak ele alarak ispatın özelliklerine göre ayırttığı formel sistemin özellikleriyle donatılmış bir diğer matematiksel dünya tabanlı tarifi şu şekilde olmuştur:

1MA5: ...Cantor, 1800'lü yılların sonunda sadece masa başında sonsuza gitmiş. Hem de hiçbir masraf yapmadan sonsuza gitmiş ve dünyada hiç kimsenin haberi olmamış, kimsenin ilgisini çekmemiş. Ama diğer taraftan 1800 şey 1960'lı yılların ortalarında 300000 km ötedeki uzaya çıkıldığı zaman yer gök inlemiş ve çok masraf yapılmış. Öyle değil mi? ..Yani siz dediniz ki, sonsuza gitmek çok daha pahalı bir işlemdir dediniz. Fakat sonsuzluk kavramının tanımlamasını yapmadığımız zaman bu bizi yanıltabiliyor. Dolayısıyla kavramların üzerinde işlem yaparken o kavramların neler olduğunu elimizden geldiği kadar tanımlamak gerekiyor... Fakat yine de bir başlangıç noktamızın olması gerekiyor. Mesela siz “bir”i nasıl gösterirsiniz? Bildiğimiz şeyle gösterirsiniz ama ilkel gösterimi nedir? Sadece bir çizgidir. Bir mağara resminde bir çizgi varsa ben bunu “1” olarak okuyorum. Demek ki bir objeyi bir şeyle isimlendiriyorum. ..Bunların ortak bir özellikleri var: ikisinin de 1'er tane olması. Fakat 1'in hala ne olduğunu ne yapmıyorum bilmiyorum. Öyle değil mi? Fakat sezgisel olarak baktığımız zaman hepsi de birebir eşlenebiliyor. ..Bunlardan bağımsız olarak elime bir taş alıyorum. 100 tane taş alıyorum. Bu her bir taşı bir koyunla eşleştiriyorum... 100 koyundan “koyun”u attığım zaman geriye kalan birimsiz olan o kavrama o şeye ben 100 diyorum öyle tanımlamaya çalışıyorum. ...Fakat bu tanımlamayı yaparken de bazı aksiyomlara, bazı aksiyom sistemini kurmam gerekiyor. Bu aksiyom sistemi öyle bir aksiyom sistemi ki hemen hemen de “varlığı tartışılmaz, doğru olmadığı tartışılmaz” gibi aksiyomlar. ...Onu bir basamak olarak alma yoluna gidebileyim ki “ben varım” aksiyomu üzerinden 1'i, 2'yi, 3'ü, 5'i tanımlayabileyim... Ben elmayı atarsam geriye bir “2” gibi bir şeyler kalması gerekir” sezgisi benim kafamı kurcalıyor... Mesela 2 elmayı attığım zaman geriye kalan 2 ile 2 ayvadan ayvayı attığım zaman geriye kalan 2 aynı 2 mi? ...Dolayısıyla bu 2'leri benzetmeye de çalışıyorum. Bu 2'ler aynı ikiler olmalı diyorum ve onun üzerinden bir tanımlama yapmaya çalışıyorum. Bu tanımlamayı yaparken birtakım kurallar da ister istemez oluşuyor, oluşması gerekiyor. Dolayısıyla bir “objeler” var elimizde. Bir de “kurallar” manzumesi var. Bu kurallar, bu objeler arasındaki iletişimi sağlıyor. Sonrasında birtakım objeleri gruba aldığım zaman bu objeler grubundan bunu elde ederim dediğim zaman belli bir kural içerisinden ve sonlu aşama ile o sonuca ulaşıyor muyum, ulaşmıyor muyum? Ulaşıyorsam bir anlamda kanıtlamış oluyorum tabi ki.

1MA5'in deneyin ve sezginin potansiyel rolünü tarifine de yansıttığı görülmüştür. Yukarıdaki alıntısında ise bu kez sezgileri basamak olarak kullandığı dikkat çekicidir. Bununla birlikte matematikçiler arasında 1MA9 açısından eğer ki matematiksel ispat üzerinde konuşuluyorsa sezgiyi kesinlikle reddettiğini, sezgi

diye bir şey olmadığının altını çizdiği dikkat çekmektedir. Her ne kadar 1MA5 ile 1MA9 matematikçileri birbirinden farklılaşıyor gibi görünseler de tariflerinin içine ister istemez ispatlama girişimlerinin doğası da (matematiksel ispatlama girişimleri ilerde ilgili başlık altındaki yerinde açıklanacak) karışmaktadır. Buradaki temel ayırım tarif ve ispatlama girişimlerindeki incelikli açıklamalarında yatmaktadır.

1MA5'e benzer şekilde 1MA1'in de ifadelerinde matematiksel dünya tabanlı ispatı, matematiğin dışındaki pozitif bilimler (disiplinler) ile gerçek dünyada karşılaştığımız olgular üzerine düşündüklerimizin bastırılmasıyla ele almaktadır. 1MA1 bu çerçevedeki matematiksel ispat tarifini, fiziksel karşılıklarının olmaması gibi bir nitelikte görüşlerine yansıtmış, gerçek dünyadaki gözlemlenebilecek yapılardan, deneysel yöntemlerden, günlük hayatta karşılaşılabilecek durumlardan ayırarak ifade etmiştir:

1MA1: ...Buradaki [matematikte] ispatlar doğadaki yapılarla uyumlu olacak gibi bir durumdan bahsetmiyorum. Matematik ayrı bir şey. Matematiksel model dediğimiz yapılar veya matematiksel ortaya koymuş olduğumuz dünya diyelim matematiksel dünya dediğimiz yapı bizim dünyamızla bazen çakışır ama çoğunlukla da eşleşmezler, çakışmazlar bile bunlar. ... Ama matematiksel olarak bakıldığında zaman benim o odaya ulaşma, kapıyı açma değil, ulaşma imkânım bile yoktur matematiksel olarak. Neden? Çünkü ben, benimle kapının arasında bir mesafe var, öyle değil mi? Bir mesafe var... Matematiksel olarak yapamadığım bir şeyi fiziksel olarak yapabiliyorum... matematiksel modellerdeki veya teorilerde ortaya konmuş olan yapıların ispatlarındaki amaç ve kullanılan argümanlar, fiziksel olan argümanlarla aynı olmak zorunda değildir... Yani o kendi içerisinde, mesela şöyle bir, bu sorudan şöyle bir durum ortaya çıkıyor. Ne anlama geliyor derken "bir işe yarıyor mu, kullanılır mı?" gibi bir söyleme de gidiyor...Kendi içerisinde tutarlı olması demek, kendi metodlarını, kullanarak argümanlarını kullanarak sonlu adımla iddiayı ispatlamak. Ha! Bu şu anda bir şey ifade etmeyebilir. Yani fiziksel olarak dünya ile karşılaşmış olan veya fiziksel yapılarda kimyada herhangi bir bilim alanında karşılaşmış olan bir problemin çözümü olmayabilir. Olmuyor olması olmayacağı anlamına gelmez. Bu ilerde başka bir problemde karşımıza çıkar ve kullanabileceğimiz bir materyaldir. Matematiğin böyle bir misyonu da yoktur zaten. O kendi içerisinde tutarlı olması, iddiasını sonlu adımla da söyleyebiliyor olması kendi açısından yeterlidir. ..özellikle teorik olarak çalışan, matematiğin teorik alanlarında çalışan arkadaşlarımızın yapmış olduğu şeyler var olan bir problemin çözümü için tasarlanmış şeyler değildir. Öyle bir amaç güdülmez...Yani fiziksel olarak baktığınız zaman böyle bir şey mümkün değil gibi görünüyor. Algılayamıyoruz. Ama matematiksel olarak mümkün. Var. ... İlla fiziksel olarak da karşımıza çıkması gerekmiyor bunların...

1MA9 da bölümündeki diğer matematikçiler gibi formel izler taşıyarak, matematiksel dünya tabanlı bir ispat tarifinde bulunmaktadır. Matematiksel ispatın

mantıksal örgüsünden bahsederken hipotezden sonuca varmak için eldeki yapılar arasındaki ilişkiyi ispat olarak görmektedir. Ayrıca 1MA5 gibi T-T-İ yapısını ifadelerine de yansıtmaktadır:

1MA9: ...tanımını veririm, örneğini veririm. Sonra da o tanıma ilişkin işte “bu varsa şu vardır” dediğim an ispat başlar. Yani o yapıları diğer yapılarla birleştirmem lazım benim. Tanımı veririm, önceden verilmiş yapılarla benim onu birleştirmem lazım. Mesela... Ring verdim. Sub-ring verdim, integral domain verdim, field verdim. E dedim ki “finite integral domain field’dır” dedim. Yani ispat başladı. Yani o yapıların diğer yapılarla iletişimini kurmaya başladığın an ispat başlar. Tanım verdin örnek verdin bitecek mi bu iş? Bu yapının madem tanımını verdiysen diğer yapılarla ilişkisini kurman gerekir. O zaman da teori çıkar, ispatlar da başlar. Yani ayrılmaz bir bütün ki. Tanımı verdiğin an, o tanımın diğer tanımlarla ilişkisini kurmaya başladığın an ispat başlar.

Ayrıca 1MA9, yapılar arasındaki bağlantıyı nasıl kurduğunu aşağıdaki gibi açıklayarak detaylandırmaktadır. Tam da bu noktada, bu matematikçinin düşüncesinde gizli/örtük olarak işlettiği bir mekanizma, görüşlerinde altı çizili yerde yakalanmakta ve açığa çıkmaktadır. İspatlanacak ifadeye bir bilinmezlik ortamında bulunduğu gibi önce problem çözme şeklinde ne anlama geldiğini anlamaya çalışma çabasındandır. Bu mekanizma: önce olayı çözme, sonra ispatlama. Bu kısım algılarla ilgili girişimlerinin doğası (ilerleyen başlıklarda) noktasında tam yakalanmasa da tarifleri içerisine gömülü bir vaziyettedir. Bu nedenle aşağıdaki alıntıda, tarifiyle ispatlama girişiminin geçiş bağlantısında olması nedeniyle 1MA9’un birbirinin uzantısı olan görüşü olduğu gibi verilmek istenmiştir.

1MA9: İspat dediğim şey, hani bir şeyi ispat edin hani [bu] bir sorudur ve ben onu çözüyorumdur. Çözmek! ...Yani elimde diyelim ki bir yapı var diyelim ki elimde bir tanım var, bir yapı var ve ben başka bir yapıyla onun ilişkisini kuracağım, ama o ilişki nedir bilmiyorum aslında. Aslında o soruyu çözüyorum. Ben bu yapıyla bu yapının ilişkisini nasıl kuracağım. Çözdün, çözdün, bitirdin dersin ki “bu”, “elinde bu yapı varsa şu yapıyla ilişkisi şudur”, ispattır. Aslında buna geçiyor. Aslında aynı şey. Önceden bilmiyorsun, soruyu çözmektir yani ispat. O yapılar arasındaki ilişki kurmaktır. İspatla yaparsın bunu. Ha bilmezsin önceden, dersin, “çözdüm” dersin, başlarsın böyle elindeki olanlarla, potansiyeli kullanıp ona [bulmak istenene] yaklaşırsın, bulursun, ondan sonra da “ispatlayın” dersin. İspat yapıyorsun aslında sen. Soruyu çözmek [ispat]. Yani matematiksel ispat, biliyorsunuz, yani “hipotez-implication-conclusion”, [yani hipotez] implies conclusion. Elinde hipotezin var, bu sonucu belirtir [ima eder] onu buluyorsun. Ha! sonucu vermezsin, bilmiyorsan sonucu. Önce bir çözersin. Ha dersin aslında aynı şey. Soruyu çözmek, o yapılar arasındaki bağlantıyı kurmak. Elindeki yapılar arasındaki bağlantı kurmaktır ispat.

Diğer taraftan 1MA8, matematiksel bir ifadenin doğruluğunu garantileyebilmek için kendisine verilen ifadenin içindeki şartları (hipotez) dikkate alarak, elindeki gerçeklerle, doğru olduğu kesinlikle bilinen gerçekleri birleştirerek göstermesi gerekenle sonuçlanan bir yapıyı takip etmektedir. Bu şekilde ilerlettiği süreci “verilen puzzle’ı çözme” aktivitesi olarak matematiksel açıdan oyun gibi gördüğü düşünülmektedir. Yani, kendisine verilen matematiksel ifadeye “puzzle” gözüyle bakmaktadır. Bir anlamda bu puzzle’ını (belki de yapbozu ima ediyor) büyük resme benzettiği düşünülebilir. Bu açıdan ele alındığında, puzzle’ı için gerekli parçaları birleştirerek, birleştirirken de parçaları uygun şekilde bir araya getirerek kısaca 1MA8 ilmek ilmek puzzle parçalarını oluşturarak bir sonuca ulaşma çabasıdır. Verdiği örneği matematiksel dünya tabanlı bir ispat tarifini sunduğunun anlaşılmasına yardımcı olmuştur:

1MA8: *Ya aslında yapmak istediğimiz şey, verilen ifadenin doğru olduğunu göstermek. Yani bize bir ifade veriliyor. İstenen şartlar dahilinde, elimizdeki şeyin evet [bir önceki cümlesine katılma anlamında] doğru olduğunu göstermek diye düşünüyorum ben. Doğruluğunu garantilemek de diyebiliriz ya da yani. ...Ya aslında şey gibi bence; puzzle gibi. Yani elinde bir takım böyle gerçekler var. Bir takım işte daha önceden doğru olduğunu kesinlikle bildiğin şeyler var. Onları birleştirerek aslında yeni bir, ee, sana verilen puzzle’ı çözmeye çalışıyorsun aslında. Öyle söyleyeyim yani. Şimdi örnek vermeye çalışacağım. Örnek üzerinden yapmaya çalışayım. Ha! mesela “iki tane çift sayının toplamı çift sayıdır” en basitinden [örnek olarak]. Şimdi burada bana verilen şey ne? hadi “tamsayı” diyelim. İki tane tam sayının toplamı, “iki çift tam sayının toplamı yine bir çift tam sayıdır”. Şimdi diyor ki “elinde iki tane tamsayı var ve bunlar çift”. Senin göstermek istediğin şey bunların toplamının “çift olduğu”. Yani ben, ne var elimde işte x var y var bunlar tam sayılarım ve bunların çift olduğunu biliyorum, buradan da yine başka bir gerçeğe gideceğim. Bunları birleştirerek, bu ikisinin toplamının çift olduğunu bulmam lazım. Yani puzzle’ım şey $(x+y = 2k)$ gibi bir şey bu. Elimde ne var? “ $x = 2$ ’nin bir katı”, “ $y = 2$ ’nin bir katı”. Ben bu parçaları birleştirip $(x+y=2k)$ gibi bir sonuca gitmeye çalışacağım. Yani daha önce bildiğim gerçekleri kullanıp, bana verilen puzzle’ı aslında oluşturmaya çalışıyorum. Ben öyle düşünüyorum. Çünkü işte x ’in tek-çift olması y ’nin tek olması hepsi puzzle’ın ayrı birer parçaları, tamsayı olmaları ayrı bir parça. Bu parçaları uygun şekilde bir araya getirip en sonunda $x+y=$ çift bulacağım. Bence [bu görüş, yine ben öyle düşünüyorum anlamında].*

Yeri ileriki başlıklara bırakılsa da bazı matematikçilerin matematiksel dünya tabanlı tariflerine, herhangi bir matematiksel ifadenin ispatlanması durumuyla (etkinlik öncesi anlamında) karşılaştığındaki girişimlerinin doğası ister istemez karışmıştır. Bu nedenle matematikçilerin ispatlama girişimlerinin doğasını

anlamada, tarifleri içerisindeki özel mekanizmalar görüşlerini çerçeveleyebilmek için önemli bir potansiyel uzantı niteliği taşımaktadır. Bu açıdan 4.1.4 başlığını okurken (ya da tam tersi 4.1.1 başlığı içerisinde kalırken) bu iki başlık birbirlerini ileri geri beslemektedir. Araştırmacının önem başlığında da belirttiği gibi bu motivasyon, matematikçilerle aynı ortama konulduğunda öğrencilerin etkinlik üzerinde nasıl hareket ettikleri, matematikçilerin yaptıklarıyla öğrencilerin eksik bıraktıkları ya da ilerletemedikleri ya da halatın koptuğu yerleri tartışabilmeye de önemli bir bakış açısı sağlayabilmiştir.

4.1.1.2 Matematik Eğitimcilerinin Matematiksel İspat Tarifleri

Çalışmadaki matematik eğitimcilerinin tamamı, matematikçiler gibi genel tarifler kategorisinde fakat düşünme biçimi alt kategorisinde ispat tarifinde bulunmuştur (bkz. Tablo 4.2). Matematikçiler için çalışma prensibi, matematik eğitimcileri için düşünme biçimi şeklinde farklılaşan ispat anlamları arasında, ilkinin matematikçinin doğrudan yaptığıyla, yani ispatla ilgili meşguliyetiyle anlaşılabilir bir mesele; ikincisinin matematiğin nasıl bir çalışma alt yapısına sahip olduğunu düşünmeyle ya da matematiğin ispat mantığıyla nasıl temellendirildiğinin anlaşılmasında kişinin belirli bir düşünce geliştirmesi şeklindeki bir çerçeveden ele alınabilecek matematiğe dair bir yaklaşım biçimi vardır. 2EA7, matematiğin yapısını anlama ve tanıma için matematiksel ispatı bir düşünme biçimi olarak ele almanın esas olduğunu belirtmektedir:

2EA7: ...Yani bu işte bu düşünce aslında [ispatla ilgili olan şey], yani formel böyle hani “hadi bunları gösterelim, işte teoremi yaz ispatını yap” şeklinde değil de bu esas temel şey [burada bu] düşünce. Bu düşünceden hareketle, yani matematiğin aslında böyle bir şey olduğunu [böyle bir düşünme tarzından] hareketle ilerlemek lazım [ispatla bu anlamda bakmak lazım].

2EA4 ise olasılık gibi bazı konu ve kavramların işletim süreçlerinin yapısı üzerine düşünmeyi içeren bir sürece işaret etmiştir:

2EA4: ...Mesela diyelim ki bir olayın olasılığını soruyorum ben öğrencilere. Hatta olayı da mesela en basitinden şey örneği vardır ya: “Bir torbada 5 tane mavi top var, 4 tane diyelim ki sarı top var. Elinizi o torbaya atıp oradan bir top seçiyorsunuz. Topun mesela sarı olma ihtimali nedir?” diye bir soru soruyorum. Şimdi öğrenciler buna hemen otomatik $\frac{4}{9}$ diyorlar. Ama “ $\frac{4}{9}$ sürecine hangi matematiksel yapı sayesinde ulaşıyorlar? Bunu anlayalım” dediğimizde iş onlar için acayip zor bir hal alıyor. Yani “olasılık dediğimiz şey nedir, nasıl tanımlanır” ya da “bir şeyin olasılığı iki bileşik olayın olasılığı tek bir olasılığın üzerinden nasıl tanımlanır” gibi şeylere geldiğimizde onlar için o süreci işletmek çok kolay olmasına rağmen bu sürecin

yapısı üzerine düşünmek çok zor bir hale geliyor. İspat da biraz işte aslında bu işletim süreçlerinin yapısı ile ilgili bir düşünme süreci. Matematik aslında bu yapıyla ilgili bir düşünme sürecidir...

Matematikçilerin aksine matematik eğitimcileri için matematiksel ispatın anlamı daha çok öğretim odaklı bir tarifle ilişkilendirilmektedir. Tablo 4.2 incelendiğinde matematik eğitimcilerinin neredeyse tamamı (6) bu kategoride bir ispat görüşüne sahiptir. Bu kategorideki 4 matematik eğitimcisi özellikle formal anlamdaki (bir matematikçinin yaptığı şekliyle) ispatların kendileri için anlamlı olmadığını belirtmeleri dikkat çekicidir. Hatta bu durumu ortak paylaşan matematik eğitimcilerinin görüşlerine süreç odaklı ve ikna tabanlı ispat anlamları da eşlik etmektedir. Örneğin, 2EA1 ve 2EA6 hem öğretimsel hem ikna hem de ispatın süreç anlamıyla da örtüşen görüşleri mevcuttur. Diğer taraftan ispat meselesine öğretimsel olarak bakan 2EA2 ve 2EA7, sırasıyla ya ikna ya da süreç anlamlarıyla da ispatla ilgili görüşlere sahiptir. Genel olarak bu durum şu anlama gelebilmektedir: öğretimsel açıdan ispattan bahseden 4 matematik eğitimcisi, aynı zamanda ikna ve/veya süreç anlamlarına da gelen ispat anlayışına sahiptir. Aşağıdaki alıntılarda doğal olarak birden fazla ispat tarifine vurgu yapıldığı görünecektir.

2EA6 matematiksel ispata öğretimsel bir bağlamla ilişkili ikna anlamında değer yüklemiştir. Onun ispatla ilgili eğitimsel bakış açısında, ikna süreci aynı zamanda matematik öğretiminde kişinin (öğrenci) inandığı, sahiplendiği, savunduğu, uygulamasına aldığı düşünceyi ya da bilgiyi her ortamda örneğin günlük hayatla da ilişkilendirerek etkili ve pratik bir şekilde kullanabilmesi ön plandadır, bilgisayar teknolojilerinin de bu konuda işlevsel araçlar olma niteliğindedir. Bu nedenle formel yerine daha çok öğretimsele yönelimli ikna ve süreçle eşlik eden bir ispat çerçevesindedir. Ayrıca özellikle ilkokul seviyesi gibi temel matematik konularının öğretiminde, bazı şeylerin öğrencilere ispatının gereksiz görüldüğü, bu seviyede aşırı formal biçimde olabileceğini, hatta matematikçilerin çok fazla ispatta ısrarının ya da ispata aşırı odaklanmalarını anlamlı bulmadığını, bir matematik eğitimcisi olarak kendi düşüncesinde karşılık bulmayan bir amaca hizmet ediyormuşçasına, yani esas amaç olan ikna ve doğruluğun ötesinde bir şey uğruna odak kurmalarına pragmatik yaklaşımdıklarını düşünmektedir:

2EA6: ... Yani bu matematikçilerin yaklaşımıyla şey farklı [ispat]. Biz iknaya uğraşıyoruz çünkü ikna önemlidir yani şüpheyi ortadan kaldırmaya çalışıyoruz kişilerin... Biliyorsun inanç, inanç değil de bizim şeyimiz ama inanç gibi yani öyle olması gerekiyor. Bir kişi bir şeyin doğruluğuna inanırsa onu savunur tabi bu eğitim tarafında da aynı şey geçerli ne zaman ki aksini bulana kadar, bir şeyin aksini bir şekilde, sahip olduğu fikrin veya bilginin yanlış olduğu gösterilene kadar kişi sağlam bir şekilde onu savunur ve kullanır. Biz de eğitimde bunu istiyoruz genelde, [öğrencinin] matematik bilgisinin bu düzeyde olmasını istiyoruz, çünkü hani bu Bloom'un aşamalarında bile var yani. Hani biz bilgi seviyesi değil de en azından uygulama seviyesinde, anlamının ötesinde, bunu istiyoruz. Yoksa siz sentez, onun üzerindeki seviyeler çok fazla hani herkes için mümkün olmayabiliyor ama genelde biz uygulama seviyesini hedefliyoruz. Burada da öğrencinin ciddi öğrendiği bilgiyi sahiplenmesi gerekiyor, sahiplenmenin ön kuralı da ikna olmaktır. Yani bir şeyin doğru olduğuna ne kadar kendinizi ikna ederseniz ve diğer bilgilerle bağlantılı olduğuna, o kadar o bilgiye sahiplenirsiniz, o bilgiyi kullanırsınız. İşte bu, bence bu, biz gösterim diyoruz. Yani bunu öğrenciye göstermiş oluyoruz, illa bu öğrencinin bu formal ispat yöntemlerini bilmesi gerekmiyor kullanmak için. O biraz daha matematikçiler için bir şey yani bu şeyin ispatı böyledir. Aynı bu hocanın, karga eti almış da hoca demiş ya "tarifesi bende" diye, ama eti sende. Aslında bu biraz tarife gibi yani yemek tarifi gibi ispatlar. Tamam [böyle] olabilir ama her zaman yemek tarifi kullanmak zorunda değilsin veya yemek tarifini bilmek zorunda değilsin etin lezzetini almak için. Yani bir de böyle bakmak lazım. Yani, bazen matematikçilerin çok fazla ispatta ısrar etmesi, hani şöyle bir durum var yani, "1+1 neden 2 dir" diye. Hadi bunu ispatlamak. Tamam güzel, ispatlayalım, tamam çok güzel ama şimdi bizim kendi açımızdan ilkokulda bunu ispatlayalım desek, öğrenciler "neyi ispatlayacaksın" diyecek, "1+1 zaten 2" yani daha nesini ispatlayacaksın bunun? Yani burada çok formal bir yaklaşım oluyor yani bazen hani matematikçilerin ispata yaklaşımı şeyi aşıyor, yani bu iknanın ötesinde veya doğrunun ötesinde sanki matematiksel bir oyunmuş gibi, matematikçilerin kendi arasında oynadığı bir oyunmuş gibi bir aşamaya geliyor. Bunu ilk söyleyen ben değilim yani bunu Hardy'den tutun da bir sürü farklı matematikçi bu konuda farklı yorumları var yani. Bu ispatın bazen bu matematikçiler tarafından çok abartıldığı hususunda. Yani burada şeyi, dengeyi iyi kurmak lazım. Mesela ben eğitim açısından benim asıl şeyim öğrencinin sahip olduğu bilgi hakkında şüphenin giderilmesi, ikna olması ve o bilgiyi tereddütsüz ihtiyaç duyduğu yerde kullanabilmesidir. Bunun yöntemi de, yani ben, bir şekilde bu bilgiyle öğrencinin oynaması gerekiyor, o bilginin doğruluğu konusunda ikna olması gerekiyor. Hani bu bilgisayar teknolojileri, bilgi işlem, buna faydalı olabilir diye düşünüyorum evet, benim bu konudaki görüşüm bu.

Genel çerçeveden bakıldığında 2EA6'nın tüm düşüncelerini sarmalayan görüşü aslında şu söylemi özetlemektedir: "tamam [böyle] olabilir ama her zaman yemek tarifi kullanmak zorunda değilsin veya yemek tarifini bilmek zorunda değilsin etin lezzetini almak için". 2EA1 de benzer görüşleri paylaşarak, 2EA6'yı

destekler niteliktedir. 2EA1 ayrıca teorikte aslolan ispatla kendi pratiğindeki farklı olabileceğini, fen edebiyattaki dünya ile eğitimdeki dünyanın farklı süreçlere sahip olduğunu dolayısıyla ispata ikincisinin içinde ve kendi görüşüyle de örtüşen bir anlam yüklediği görülmektedir:

2EA1: *Yani ispat, şöyle diyeyim. Baktığımız zaman doğada pek çok şey var, özellikle matematikte ya da bilimde diyebilirim. Pek çok bulunmuş şey, yer çekiminden tutun da kara deliğe kadar, ya da işte nanoteknolojiden tutun da kablosuz ağ iletişimine kadar ya da insan vücudundaki olan her şey. Ama bunların nasıl oluştuğu ya da sebebinin ne olduğunu insanoğlu hep bir açıklama yoluna gitmiştir. Ben ispatın da buradan geldiğini düşünüyorum. Bir şeylerin sebebini açıklama, nedenini bulma. Ya da kanıtlama, doğrulama hani “işte budur. Bu, buradan kaynaklanıyor” süreci diye düşünüyorum. Bundan dolayı da bir şey yapıyorsak eğer, bunun doğruluğunu gösterme, doğru olduğuna inandırma, toplumu da inandırma, kendini de inandırma, dengeleri de inandırma diye düşünüyorum. Benim fikrim bu açıkçası... Ama o [oğlum] izah ettiği zaman benim mantığıma uyuyorsa benim için doğrudur... ben kendi doğrularımdan yola çıkıyorsam, odur. Ama sen ispat etmişsindir orada, evet teorik olarak ispatın var. Ama bana göre, benim pratiğimde o ispat olmayabilir... Formel bir çözümü varsa ve formel bir şekilde yapıldıysa o ispat. Ama benim için, ben kendi açımdan düşündüğüm zaman evet bu böyle olabilir ama beni ikna edebiliyorsa karşıdaki, ikna olduğum pek çok ispat ortamı yani mesela en basitinden, temel pisagor denkleminde bahsediyoruz: $a^2+b^2=c^2$. İşte c hipotenüs, a ve b dik kenar ama bunun nasıl olduğuna dair biliyorsun ki, bir modellememiz var, alan modellememiz var. Bu alan modellemesi beni ikna etti, ben inandım ve gördüm, evet doğru. Bu benim için doğrudur. Yani bu bir ispattır. Öznel demek istemiyorum, sadece kişiyi inandırdığı sürece ispat, ispattır diyorum... Benim için açıkçası eğitimdeki ispat şudur: “Nereden geliyor? temeli ne? nereye bağlayacağım, bu ne?” bu soruların cevabıdır. Yani hadi bakalım $x^2 + y^2$ eşittir işte x artı y nin karesi- 2xy değildir olay. Yani o iki denklemi eşitlemekten “bu nereden geliyor?” Hani basit bir pisagor örneğinden yola çıkarsak, “ $a^2+b^2=c^2$ diyoruz ama bu nasıl bir şey? Ben bunu alanla gösterebilir miyim? Evet alan modeliyle gösterebilirim. Bunun adına direkt ispat demiyorum da ben mesela, örneğin matematik öğretiminde ilişkilendirme dersinden yola çıkayım. Günlük yaşamla ilişkilendirme diyoruz. “E şimdi sen bunu nasıl ilişkilendirebilirsin? Bu teoremi aldın öğrenciyi pat diye veremezsin” diyorum, “sunamazsın” [diyorum]. “Bunu nasıl anlatabilirsin? Nereden geliyor bu?” [diyorum öğrencime]. Ya da üçgenin iç açıları toplamı 180 derecedir diyoruz. “Neden 180 derece, neyle bir bağlantı [kurabilirsin]?” “Evlerin çatısını düşünün, neden çatılar üçgen şeklinde olabilir?” [diye soruyorum]. Yani tamamen öğretimle [öğretimiyle ilgileniyorum]. Buna diyorum ya, bizi bence fen edebiyattan ayıran... Yani ben ispat demesem de bunun sadece kendi düzeyinde, yani öğretmen adaylarına bu şekilde veriyorum ve onlar da az önce dediğim gibi çok daha verimli ve iyi mezun olduklarını düşünüyorlar... Yani şöyle düşünüyorum. Fen edebiyat bambaşka bir dünya, sürekli sayılar, işlemler, teoremler, kurallar var, formüller var ve hep bir kural,*

formüle dayatılarak ilerleyen bir süreç yani bir kuralın bir yerden geldiğini göstermek için başka bir kurala başvurulabiliyor... Ama baktığımız zaman eğitimde bu süreç böyle değil. ...Kendi ön bilgilerini kullanarak, günlük hayattaki, normal informal yaşantısını düşünerek kurallara ulaşmaya çalışsın.” ... Aslında kelime anlamından yola çıkarak, “paylaşım”, bir paylaşım yapıyorum ve bu paylaşımında bana düşen, benim payıma düşen oradaki “pay”... Ama fen edebiyatta bu durum yok. Öğrenmekten ziyade hani hep diyorum ya orası mutfak, burası saha. Orada pişiyor, bize geliyor. Biz onun öğretimini gösteriyoruz. Orada tamamen sayılar, kurallar, formüller, bilim insanların ürettikleri, türettikleri ve orada üretilen şeyler var. Bu ikisinin farkını ben bu şekilde ayırt ediyorum.

Bu gruptaki anlamda düşünceye sahip bir diğer matematik eğitimcisi 2EA7, düşüncesini açmaya başlar başlamaz matematiksel ispatın kendisi için anlamlı olmadığını ifade ederek bunun hatta kendi lisans eğitimindeki öğrencilik deneyimlerinde yattığını belirtmiştir. Bu durum matematik öğretmenliği bölümünün bir üyesi olarak öğretimsel hedeflerini şekillendiren bir itici güç olabilmektedir. Bu bağlamda, formel anlamdaki ispatın öğretimsel açıdan zorunlu olup olmadığını, öğrencilerin yaratıcılıklarını harekete geçirip geçirmediğini, öğrenilen (öğrenildiği düşünülen) bilgilerin gerçekten de o anlamda anlayış ya da kavrayış yakalayıp yakalamadığını sorgulamaktır. Bunun yerine ispatın anlamı üzerine daha çok eğitimdeki yaklaşım felsefelerinden yapılandırmacılığın hedefleri doğrultusunda öğrencinin var olan bilgisi üzerinden hareket ederek, örüntüler arayarak genelleme şeklindeki bir süreç yaklaşabilmesi hem kendi hem de öğretimde benimsediği yapılarla ilişkilendirmiştir. 2EA7; 2EA1 ve 2EA6 gibi öğretimde ve pratikteki duruşlarıyla, anlayışa hizmet eden, çocuğa nüfuz ederek işleyen ispata anlam yüklemektedir.

2EA7: *Ya matematiksel ispat bana çok anlamlı şey açısından gelmiyor. Yani bir düşünce ya, matematiği daha iyi anlamak açısından güzel bir şey. Ama hani onun o kalıp yaklaşımı yani benim lisansta da öyleydi. Yani aldığım derslerde de onu gördüm. Ya bir de şeyin içinde çok fazla boğuluyorsunuz... O yüzden hani ben biraz uzak duruyorum açıkçası [ispattan] yani. O şeyi de engellediğini düşünüyorum. Yani o yaratıcılık bağlamında, hani üst düzey bir matematik grubu olur da bir tartışma yaparsanız da yeni bir teori, yeni bir şey yapma bağlamında aslında çok güzel bir şey... Ama hani öğretimsel boyutta baktığımız zaman, özellikle hani kendi yaş grubumuzda yani 5-8 grubunda baktığımız zaman ya buna gerek var mı? Yani bunun ya da bunu öğretecek öğretmene bunları böyle hani bir zorunluluk gibi verme noktası var mı? Ya belki şey de var yani öbür taraftan baktığın zaman, öğretmen adayına bu hani benim söylediklerimin kaç geçiyor yani ispatla ilgili? ...Yani bunu fen edebiyattaki dersler için de söyleyebiliriz ki, hani mesela yüksek lisansta ya da işte formasyon grubuna girdiğimiz zaman çocukların aslında o hani, ispatın o güzelliğini ya da hani matematik*

dünyasının içindeki o rakamlarla ya da teorem işte şey anlamında, çok fazla gömüldüklerini ama hiçbir anlam çıkarmadıklarını sadece hamallık yapıldığı kanaatindeyim açıkçası. Yani o şeyi [orada yapılanları] tam anlamadığı zaman bu sefer de yaptığı işlemler onun için anlamsız. Yani sürekli bir şey içinde kalıyor, yani kısır döngü içinde. Yani bitirdiği anda hani “ben neyi öğrendim?” Ya da “bu ders, dersten geçtikten sonra matematiğin hangi güzelliğini elde ettim” düşüncesi yok [öğrencide]... Yani öğretimsel açıdan baktığımız zaman öğrencinin kendi savını ortaya attığı, bu savı yani belki bizim formal yöntemlerle göstermiyor ama informal yani var olan bilgisini kullanıp özellikle bizim yaş grubu için söylüyorum. Yani bizim yaş grubundan kastettiğimiz ortaokul öğrencileri. Yani bu mantıkla ilerlediği zaman... Yani öğrenci, işte hani kendi bilgisini kendi oluşturacak. Hani şey yapılandırmacılığın ana temel felsefesi bu. Ama oluşturabilmesi için önceki bilgilerle bir şey yapacak ve çocuk var olan işte, adım adım ulaştırdığı zaman bir bilgiye ulaşacak ve o bilgiden sonra bir genellemeye varacak aslında. Hani dediğim gibi parçalardan [bütüne] işte tümevarım şeyi bu [mantığı bu]. Parçalar bir araya gelecek ya da hani örüntüler bir araya gelecek bir genel kurallar olacak [genel kurala ulaşılacak]. Bu noktadan bakarsan ispata, hani benim yaklaşımım genellikle hani bu açıdan. Şimdi tez ortaya atıyorsunuz, ispatlıyorsunuz [siz]. Çocuk için de aynı. Yani var olan bilgisiyle bir fikir ortaya atılıyor ve bu fikri ispatlayıp, işte genellemeye vardığı anda öğretimsel açıdan şey geçiyor [ispat burada anlamlılaşıyor; çocuğa işliyor, geçiyor]. Tabi hani bu çocuğun, yani şeyi yapmasını beklemiyoruz. İşte hani “formal yöntemle hadi matematiksel olarak bunu söylediğin düşüncüyü göster” demiyorsun. Çocuk bu sefer ne yapıyor? Çok basit şeylerle bunu anlatmaya çalışıyor. Yani bir koordinat düzlemi işte şeydeki olay, şeyden başlayıp, sinemadaki oturum yerinden başlayıp bunu bir koordinat düzlemine genellemesi, yani daha soyut bir düşünceye ulaştırması, günlük hayattan bir olaydan yola çıkıp, hani koordinat düzlemine kadar gelebiliyorsa aslında bir bence bir ispatlama yöntemidir.

Burada şu ayrımı yapmakta fayda vardır. Bahsi geçen 4 matematik eğitimcisi için kesinlikle matematiksel dünya tabanlı bir çerçeveden formal ispat anlayışını benimsemediklerini, aksine formal mantıkla ilişkilendirilmiş olana da karşı gelerek reddettiklerini (ya da formeldense öğretimsel şeklinde söylemleriyle) çünkü matematikçiler için bunun geçerli olduğu, bu nedenle hem kendi görüşleriyle hem de öğretimsel amaçlarını aynı doğrultuda çerçevelediğini göstermektedir. Bu açıdan bu düşüncedeki matematik eğitimcileri tamamen formeli reddedenler şeklinde diğer 3 matematik eğitimcisinden ayrılmaktadır.

Matematik eğitimcileri dikkate alındığında, her ne kadar ağırlıklı olarak öğretim odaklı ve düşünme biçimi şeklinde matematiksel ispat tarifi sunsalar da kendi içlerinde (yukarıdaki açıklandığı şekliyle) bazı ayrışimlardan bahsetmek mümkündür. Örneğin diğer 3 matematik eğitimcisi, matematikçilerin çoğu gibi matematiksel dünya tabanlı bir ispat görüşüne sahiptir. Aşağıdaki alıntıda bu

matematik eğitimcilerinden 2EA4'ün mantıksal çıkarım kuralları ve argümanlar aracılığıyla matematiksel ispatın temel yapısı üzerinden hareketle matematiksel dünya tabanlı tarifi şu şekilde olmuştur:

2EA4: *Elimde diyelim ki matematiksel argümanlar var. A ve B argümanları var. Ben bu A ve B argümanlarının içerisinde aslında C gibi başka bir argümanın da saklı olduğunu görüyorum. Ya da olup olmadığını inceliyorum daha doğrusu, görmüyorum ama. Şimdi o C argümanı bu A ve B argümanlarının içerisinde çıkarılabilir mi? Bunun için de elimde matematiksel çıkarım kuralları var. Bu çıkarım kurallarını kullanarak, bu A ve B argümanlarından hareketle bu çıkarım kuralları sayesinde, bu A ve B argümanlarının C argümanına denk olduğunu gösterebilir miyim? Matematiksel ispatın yapısı bu. Dolayısıyla ispat demek ki bunu ifade ediyor...*

Diğer 2 matematik eğitimcisinin, kendi görüşleri matematiksel dünya tabanlı bir tarife girse de öğretimsel bağlam söz konusu olduğunda formal anlam kırılıma uğramaktadır. Yani hem matematiksel dünya tabanlı hem de öğretimsel tabanlı ispat tariflerini görüşlerinde barındırmaktadır. Örneğin 2EA5'e kendisi için ispatın ne anlama geldiği sorulunca, matematikte bir teorem ispatlanırken kendi geleneği içerisinde, belli bir mantık çerçevesinde, matematikte yasal olarak geçerli kabul edilen kuralların takip edilmesinden bahsederek formal ispat tarifine katkıda bulunmuştur. Her ne kadar kendisi formal anlamda bir ispat tarifine sahip olsa da, formal ispattaki gibi bir standardı yakalamanın daha erken sınıf seviyelerinde uygun olmadığını, matematikçilerin, özellikle akademik çevrelerdeki bazı matematikçilerin görsel ve sezgisel yollar aracılığıyla ulaşılmış ispatlara olan eleştirileri ve bu anlamda yapılan informal ispatları ciddiye almamalarını, hatta kabul etmek bir yana reddedilmesiyle sonuçlanmasının, gelişmekte olan bir birey için matematiksel kavramların öğrenilmesi ve anlaşılmasında ciddi bir engel olduğunu ifade etmiştir. Bu nedenle informal ispatların eğitimsel bir değere sahip olduğunu, hatta formal ispata köprü olabilecek bir değere sahip olduğunu belirtmiştir. Bu durum, 2EA5'in görüşlerinde şu şekilde yer almıştır:

2EA5: *...matematikçiler informal ispatı, çok kızanlar bile var da ispat olarak kabul etmiyorlar yani. Hatta benim bir çalışmam olmuştu. Enaktif proof diye böyle bir hareketli ispat gibi görsellerle nesneleri hareket ettirip çocuğu bir şeylere ikna ediyorsunuz. Mesela sezgisel olarak, yani üçgen çizdiniz bir kâğıda. Köşelerini parçaladık. Bir yerde bir araya getirdik onları, bir doğru açı oluşuyor. Buradan ne sonucuna varıyoruz? Üçgenin iç açıları ölçüleri toplamı 180° sonucuna varıyoruz ama bunu, ispat mı? Değil! Ama informal anlamda bir ispat yani. Matematikte, matematikte şimdi üçgenin iç açılarının 180° olduğunu ispatlamak demek,*

genel [olmalı], o senin çizdiğin kâğıttaki üçgen için olan bir durum olmamalı. Tüm üçgenler için geçerli olan ifadeler olmalı. Sonuçta öyle olmalı. Bunu ben anlıyorum ama bunu öğrencilere anlatmak kolay olmayabiliyor. Ama matematikçilerin yaptığı da bazen çok vicdansızlık oluyor, diğerini de hiç adam yerine koymamak. Yani şey şu, informal ispatı. Sezgisel olarak öğrenciye bir şeyi zihninde canlandırıp ikna etmek, mesela Geogebra... orada görsel ispatlar yapabiliyoruz Geogebra'da. Ama bunlar elbette matematiksel ispat kabul edilemiyor, ama hiç mi değeri yok eğitimsel anlamda? Mutlaka öğrenciye bir şeyler kazandırıyor. Belki diğerinin kapısını da açabilir, [yani] formal ispatın. Şey diyecektim, yani o çalışmayı gönderdiğim hakemlerden biri öyle bir kızdı ki “bunlara da ispat demeyin, zaten milletin kafası karışık!”. Ya ben ispat demedim ki zaten. Bunlar informal ispat dedim çalışmada. Ama ona bile kızanlar var... Makale gidiyor önlerine böyle şeylere deliriyorlar. Bunlara ispat mı denir [diye]. Ama o zaman şeyi nasıl açıklayacağız? Yani dünyada söz sahibi kurumlar var. Bu NCTM mesela müfredatla yön veriyor. Ne diyor “ispat” diyor, “anasınıfından itibaren kullanılmalı” diyor. Eğitimde, ispat eğitimi, “ispat eğitime yer verilmeli” diyor anasınıfından itibaren. Anasınıfında biz olmayana ergi yöntemini mi göstereceğiz? p ise q önermesinden falan mı bahsedeceğiz? Yani olmaz işte informal ispatı kullanmamız gerekiyor. O da yaşamın bir parçası.

Matematikçilerde olduğu gibi matematik eğitimcilerinde de özellikle bahsi geçen 4 matematik eğitimcisinin ispat tariflerinin arasına ispatlama mekanizmaları ya da girişimlerinin doğası karışabilmektedir. Görüşlerini ifade ettiği yerlerdeki altı çizili anlamlar bu şekilde ispatlama girişimleri hakkında da bilgiler içermektedir. Bu nedenle matematik eğitimcilerinde de yer yer ispat tariflerinin içerisinde ispatlama yolları gömülüdür.

4.1.1.3 Matematik Programı Öğrencilerinin Matematiksel İspat Tarifleri

Matematikçiler ve matematik eğitimcilerinin aksine, matematik programı öğrencileri ne matematiksel dünya tabanlı ne öğretim odaklı ne de genel tarifler kategorisinde olan ispat anlamları gibi bir tarifte bulunmuşlardır (bkz. Tablo 4.2). Bu durumun genel manada anlamı ve yorumu ve de dikkat çekici bir yanı, kendi bölümlerindeki matematikçilerle ortak görüşü paylaşmadıkları gibi en azından bir şekilde matematiksel dünya tabanlı tariflerle yakından ilgisi olabilecek bir nitelikte de kesişmedikleridir. Tabiri yerindeyse, bu iki topluluk (grup) matematiksel olarak ayrı dünyaların insanları gibi davranmaktadırlar ve kesişimleri “boş küme”dir. Matematikçilerin çoğu (6) matematiksel dünya tabanlı bir tarif sunarlarken, bu topluluğun (grubun) öğrencileri ağırlıklı olarak (6) matematiksel ispata araç odaklı bir tarif anlamı yüklemektedirler. Bu öğrencilerden 3'ü ispatı doğruluğunu ve/veya

yanlışlığını göstermeye yarayan araç olarak, 2'si anlamlandırma ya da anlamayı kolaylaştıran araç olarak görürken 1 öğrenci matematiksel bir bilginin nereden geldiğini ve neden öyle olduğunun aydınlatılması şeklinde açıklama aracı olarak görmektedir. 3MÖ2 doğrulama/yanlışlama aracı olarak ispat tarifinde bulunmuştur:

3MÖ2: *Ya benim için ispat, bir şeyi yani o şeyin o olduğunu göstermek anlamına geliyor. Ya da bir olay örgüsü var, yani bir olay var, bir durum var. Bu durumun doğru olduğunu ya da yanlış olduğunu göstermek olarak algılıyorum ben.*

3MÖ9 açısından ispat, doğru olduğunun gösterilmesi yerine daha açıklayıcı anlam ve vurguya sahiptir. Bu öğrenci matematiksel bir bilginin nereden geldiğinin gösterilmesinde bunun neden böyle olduğunun aydınlatılmasıyla ilişkilendirilebilecek niteliğe işaret ettiği için ispatı açıklama aracı olarak tariflemektedir:

3MÖ9: *İspat şu anlama geliyor, yani bir şeyin kanıtı, mesela “bu neden böyle?” diye sorulduğunda verilen cevap ispat değil midir yani odur bence çünkü ispat yani bir öğrencimiz sordu bize lisede diyelim, “bu nereden geliyor?” diye, ben onu cevaplarsam ispat olur çünkü onun nereden geldiğini anlatıyorum, bence budur.*

Tablo 4.2 incelendiğinde matematik programı öğrencilerinden 2'si ikna tabanlı bir tarifte bulunmuştur. 3MÖ1 matematiksel bir ifadenin doğru olduğundan emin olma yani sonucun doğru olması noktasında kendisini tatmin etmesi şeklinde ele alarak ispata kısa bir şekilde değinmiştir. 3MÖ5 ise insanların matematiksel bir fikir ortaya atarak bir şey bulduklarını iddia etmesi, bu iddialarını başkaları için inandırıcı kılabilmek adına ellerindeki kanıtları/delilleri ortaya koymaları, matematiğin de böyle temellendirildiğini ifade etmesi üzerine, kendisinden öte insanları ikna eden bir argüman niteliğinde ispat tarifi sunmuştur:

3MÖ5: *Benim için ne anlama geliyor... Yani o ortaya attığımız ortaya sunduğumuz herhangi bir konunun gerçekliğine ya da doğruluğunu kanıtlama ihtiyacı olabilir. Hani böyle bir şey var buna inanın demek gibi bir şey yani ispat benim için... Yani şöyle aklıma gelen ilk şeyi söylemek istiyorum. Mesela bir arkadaşına bir konu hakkında bilgi verdiğim zaman onunla ilgili bir şey duymak bir şey somut bir şey görmek istediğimde ona sunduğum deliller olabilir... Yani her bilimin içerisinde bu delilleri toplama, onları yani ispatlamak bütün bilimlerde var. Matematiğin de temel taşlarından biri bu. Yani insanlar ortaya bir fikir atmışlar, bir şey bulduklarını iddia etmişler ve bunları inandırmak için söylediklerinin arkasını doldurabilmek için ellerindeki kanıtları ortaya döküyorlar yani ispat bende çağırttığı bu.*

4.1.1.4 Matematik Öğretmenliği Programı Öğrencilerinin Matematiksel İspat Tarifleri

Diğer gruplarla (matematikçiler, matematik eğitimcileri ve matematik programı öğrencileri) karşılaştırıldığında, matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin matematiksel ispat tarifleri ağırlıklı olarak süreç odaklı bir yapıdadır. Diğer bir deyişle, Tablo 4.2 incelendiğinde matematiksel ispatla ilgili süreç odaklı bir tarifte en fazla görüş bildiren matematik öğretmenliği programı öğrencileridir. Bunun genel manada anlamı, bu öğrenciler için ispat denilince matematiksel süreçler daha çok akla gelmekte ve ön plana çıkarılmaktadır.

Şu anda kullanılan çoğu teorem, formül, işlem gibi matematiksel yapıların ve kavramların zaman içerisinde nasıl geliştiği, hangi süreç ve aşamalardan geçerek nasıl nihai haline ulaştığı noktasında matematiksel ispatın 4EÖ5'e düşünme alanı açarak, üretilenleri sorgulaması için kendisine düşünme fırsatı sunduğunu belirtmiştir. Pisagor teoreminde olduğu gibi kullanmakta haşır neşir olunan basit gibi görünen formüllerin ortaya çıkış süreci açısından, kısacası yapılan ispatların sonucunda ortaya çıkan sadece ürünle değil, bu sonuçlara nasıl ulaşıldığının arkasındaki düşüncel sürece odaklı bir ispat anlamı yüklemiştir. Bu nedenle, 4EÖ5 zamanında bu formüle ulaşanların düşünce sürecini ve eylemlerini anlamaya değer vermektedir:

4EÖ5: ... Yani biz bunları sadece bir, ezberden ziyade, “hangi süreçlerden geçerek gelmiş, bu ispata nasıl ulaşılmış, hangi adımlardan geçilmiş?” [şeklinde] bunları görebiliyoruz. Bunları gördüğümüz için de bu ispatların aşamalarını gördüğümüz için de yani, bu bizim için sadece normal, “hu tamam, yapılmış, şey yapılmış, bu bulunmuş” şeklinde [ee ne olmuş yani gibi yüzeysel] değil de bu ispatı insan şey yapıyor, inceliyor, şey yapıyor, “neresinden gelmiş, nasıl bulmuşlar, bunu buradan nasıl düşünmüşler?” gibisinden akıl yürütme üzerine daha çok oluyor. İspat üzerinde düşünüyorum mesela: “bu bu aşamadan bu aşamaya nasıl gelmiş?” Yani bu insanı daha çok düşünmeye sevk ediyor matematiksel ispatlar... Pisagor teoremi diyelim $a^2+b^2=c^2$ yine hep aynı örnekler üzerinden gidiyorum gibi oldu da. Mesela hocam burada, yani bizim için, baktığımızda günümüzde sadece bu normal bir formülden [ibaret] formül gibi [yalın duruyor sadece] ama zamanında insanlar bunun için kaç farklı ispat türü denemişler mesela? Bunu denemek nasıl akıllarına gelmiş, nereden akıllarına gelmiş, bunu nasıl bulmuşlar? Bunlar [üzerine düşünmek] yani ilginç geliyor...

Aşağıdaki alıntıda görüldüğü üzere 4EÖ9, zaman geçtikte öğrenilen bilgilerin daha derin bir şekilde anlamı keşfedilerek içselleştirilmiş bir öğrenme ve anlamlandırma sürecine dönüştürülmesine işaret ettiği için, daha önceden kategorilerin ne anlama geldiğinin açıklandığı kısımda verilen 3MÖ3'ün mantığını

anlama aracı olarak baktığı ispat tarifinden daha derin bir anlam taşımaktadır. Bu durum genel olarak matematik programı öğrencilerinin temel doğrulama gibi araçsal odaklara, matematik öğretmenliği öğrencileri açısından düşünme temelli süreçlerin gözetilmesine; benzer yapıların matematikçilerin çalışma prensibini sadece doğrulama aracı olarak yaptığı şeyler olarak yapay bir şekilde öğrencilerinin benimsemesine, eğitimcilerin düşünme biçimi yaklaşımlarının kendi öğrencilerinde düşünsel süreçlere odaklanmasını yansıtıcı bir şekilde açıklayabilir.

4EÖ9: ...matematiksel ispat konusunda tam bir tanım olarak değil de anlamlandırma olarak bakıyorum diyorum. Yani bildiğimiz bir şeyin, hiçbir şekilde ilk başta anlamını bilmediğimiz, düz olarak öğrendiğimiz bir şeyin zaman içerisinde anlamlandırılıp hani nereden geldiğini görmek. Yani anlamlandırma benim için, ispat bir anlamlandırma aslında. Mesela bir formülün anlamlandırılması. Düz bir şekilde böyle o formülü herkes uygulayabilir ama ispatının, yani anlamının ne olduğunu bilirim o benim için çok daha farklı bir şey olur ve hangi konularla ilişkilendirebileceğim konusunda düşünce dünyamı daha da genişletebilir... geçmiş bilgilerim de sürekli bir şeyler öğreniyorum ama onlar arasında asla bir bağlantı yok ilk başta. Öğreniyorum, öğreniyorum, öğreniyorum. Daha sonrasında, o mesela işte, genelde matematikte öyledir. Yani birikimli olarak devam eder, birikir, birikir, birikir. En son onu hepsini bir şeyde kullanabilirsin. İşte o kullanırken, atıyorum daha önceden öğrendiğim bir bilginin o konularla, diğer konularla bağlantısını kurmak için anlamını bilmek gerekir bana göre... ne şekilde kullanacağını bilir, daha anlamlı bilir. Yani daha içten bilir. Farklı stratejiler geliştirebilir bu konuyla alakalı. Hani o an bir formül yoksa kendiliğinden bir formül de oluşturabilir. Çünkü en ayrıntısına kadar biliyordur...

Her ne kadar matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin görüşleri süreç odağına yığılsa da araç odaklı bir tarif içerisine giren 3 öğrencinin görüşü bulunmaktadır. Bu tür tarifte bulunan öğrencilerden 4EÖ1 için matematikteki bazı kurallar ve formüller aracılığıyla bir şeyin doğruluğunu ortaya koyma aracı olarak, 4EÖ3 için bir kuralın, bir formülün ya da bir düşüncenin nereden geldiğini gösterme aracı olarak ele alınmıştır. 4EÖ8 ise ispatı nereden geldiğini ve neden öyle olduğunu açıklama aracı olarak (aynı zamanda sürece de işaret eden iki tarifli) görüş bildirmiştir. Tam da bu noktada, kendi zihnindeki ispata dair düşüncesinin gerçekte olan (ideal) matematik dünyasında kabul edilen ispatla örtüşüp örtüşmediği kafasını kurcalamaktadır. Bir başka deyişle, kendi ispat anlayışının matematik topluluğunun kabullerine uygun olup olmadığı noktasında muallakta kalmıştır. Bir yanda kendi dünyasında ispatı daha çok nedenini açıklamaya dayandırmakta, diğer yanda sanki matematik dünyasında böyle değil gibi düşüncesi, kendisini içsel bir çelişki yaşıyor

gibi göstermektedir ya da belirsizliğe kapılmış gibi bir durumda olarak yorumlatmaktadır:

4EÖ8: ...benim kafamdaki ispatla, gerçek ispat gerçekten örtüşüyor mu bilmiyorum. Yani ispat düşüncem... Ya da bir şeyi açıklama gayesi “neden böyle oldu?” “Ya kesin bu şekilde oldu. Çünkü bu noktalardan geldi ve buraya ulaştık” gibi...benim düşündüğüm ispatla acaba gerçekte olan, o matematik dünyasında kabul edilen sanki o ispat farklı olabilir gibi düşündüm. Hani ben burada daha çok açıklamalardan bahsettiğim [kafasındaki ispat anlayışı] için ya da bir bilginin ortaya çıkışından bahsettiğim için acaba ispat daha farklı bir şey olabilir mi diye düşündüm hani o matematik içerisinde...

Bununla birlikte farklı iki öğrenci grubu (matematik programı öğrencileri ve matematik öğretmenliği programı öğrencileri) karşılaştırıldığında, matematik programı öğrencilerinde tarifiyenmeyen formel anlam, matematik öğretmenliği programı öğrencilerden sadece 4EÖ2 tarafından verilmiştir. Ayrıca 4EÖ8 için çelişkili ya da bulanık görünen yapı, 4EÖ2 için zihnine yerleşmiş bir karşılık bulmaktadır. Bu öğrenci (4EÖ2) araştırmadaki çoğu matematikçi ve bölümündeki bazı matematik eğitimcileri gibi verdiği tarif açısından matematiksel dünya tabanlı düşünen bir gösterge niteliğinde olmuştur. Bu açıdan 4EÖ2 kendi bölümü içerisinde özel bir durum oluşturmuştur ve aşağıdaki alıntıyla görüşleri paylaşılmıştır:

4EÖ2: Matematiksel ispat. Bunu biraz düşünüyüm. Hani biraz daha düşünüyüm. (Düşünüyor). Belli ee, aslında zaten biz ispat yaparken belli şeyleri kabul ederek başlıyoruz aslında. Hani biz bunlara, olasılık ve istatistikte postulat, aksiyom demiştik. Hani onlara bağlı kalarak, sayısal verilerden de yararlanarak aslında biz bir çıkarım yapıyoruz. Bizim bu yaptığımız çıkarıma biz aslında ispat diyoruz ama belli şeyleri kabul ederek başlıyoruz... Onların çerçevesi dahilinde eğer biz onun doğruluğunu kanıtlayabiliyorsak eğer biz buna ispat diyoruz.

4.1.2 İspatın Özellikleri

Katılımcıların matematiksel ispata yönelik algılarının ikinci teması “ispatın özellikleri”dir. Bu tema, katılımcıların matematiksel ispatı gerçekten ispat olarak gösteren temel yapıların ne olduğu, bir başka deyişle onun matematiksel ispat olarak nitelendirilmesine izin veren yapıların ya da ispat olma standardını karşılayan koşulların ne olduğuyla ilgilidir. Daha iyi anlaşılması için, bu temanın kategori ve alt kategorileri, katılımcıların ispat oluştururken olması gereken bir içindekiler listesinden bahsetmeleri ya da herhangi bir matematiksel ifadenin ispatlanması girişiminin ürünü olarak ortaya çıkan çözümün, açıklamanın, düşüncenin ispat olarak değerlendirilebilecek niteliklerine katkıda bulunmaktadır. Katılımcıların matematiksel ispatın ne gibi özellikleri olduğuna yönelik ifadeleri 6

farklı kategoride açıklanabilmektedir. Bu kategoriler *sosyal boyut, bağlamsal boyut, doğruluk değeri boyutu, mantıksal boyut, dilsel boyut ve aşkınlık (soyut) boyutu* olarak isimlendirilmiştir. Katılımcılar bu tema altında en çok mantıksal boyut kategorisinde toplanmıştır.

Katılımcılar matematiksel bir ispatta olması gereken özellikleri mantıksal açıdan uygunluğunu, iyi yapılandırılması/kurgulanması/organize ve dizayn edilmesi, mantıksal bir dizilimde ve yapıda görünebilmesi gibi anlamlara gelen ifadelerle değinmeleri yönüyle *mantıksal boyut* kategorisi meydana getirilmiştir. Bu kategoride toplam 33 katılımcıya ait görüş mevcuttur. Bu konuda katılımcılar matematiksel ispatın özelliklerinden *düzeni vardır, doğruluğunu/yanlışığını garantileyen yapılar vardır, tutarlıdır, sonlu adımlıdır ve iyi gerekçelendirilmiştir* şeklinde bahsetmiştir.

Düzeni vardır alt kategorisinde 17 katılımcıya ait görüş bulunmaktadır. Bu katılımcılar matematiksel ispatın kendine özgü bir yapısı, şablonu, formatı olan; belli bir disiplin, sistem ya da çerçevenin içerisinde, belli bir yöntemle ve düzen içerisinde işletmekle ilgili olduğu durumlardan bahsetmiştir. 4EÖ4 ispat oluştururken belli bir süreç ve planın takip edilmesinin ve o çerçevenin dışına çıkmadan belli bir yöntemle hareket edilmesini ifade ettiği için bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

4EÖ4: ...Bunun bir süreci var ve o süreçten ilerlememiz gerekiyor, o şeyden hiç çıkmamamız gerekiyor... o ispatlama sürecinde neyi kullanmış? Hani tümevarım mı, tümdengelim mi veya farklı varsa şu an aklıma gelmiyor hangisini kullanmış diye bakarım. Ve onun hani sürecini planlamasını doğru şekilde ilerletmiş mi?...

4EÖ9 ilk olarak modellemeyi ispat olarak gördüğünü ifade eden söylemlerine rastlansa da sonradan düşüncelerini tekrar gözden geçirerek, üzerine biraz daha düşünerek, modellemenin ispatı tam olarak karşılamadığını bunun nedenini modellemenin farklı bir gösterim şekli ya da çözüm yolu olmasına, ispat olsaydı onun nereden geldiği, temelinde ne olduğunu göstermeyi yansıtması gerekirdi gibi bir duruma dayandırmaktadır. Bu nedenle 4EÖ9 neyin ispat sayılıp neyin sayılmayacağına yakın bir düşünceye sahip olduğu için bu kategoridedir:

4EÖ9: ...modelleyerek görsel olarak görüp aslında onu kanıtlatabiliyoruz ama bunu tam olarak ispat diyebilir miyiz bilemedim şimdi. Biraz düşünmem lazım... buna ispat diyemeyiz sanırım ya, çünkü aynı şeyin sadece biraz daha farklı bir şekilde gösterimi yani bu sanırım... İspat, yani ilk başta ispat olarak düşündüm ama daha sonra hani 2 dakika düşünmeme izin verin

dedim ya hocam hani orada, sonra düşündüm ki hani bu bir tam olarak bir ispat olmuyor. Onun nereden geldiğini göstermiş olmuyorum. Sadece aynı şeyin nasıl farklı şekilde çözüldüğünü, çözülebildiğini göstermiş oluyorum....

Doğruluğunu/yanlışlığını garantileyen yapılar vardır alt kategorisinde 18 katılımcıya ait görüş bulunmaktadır. Bu katılımcılar matematiksel bir ispat oluşturu(lu)rken içinde olması gereken özelliklerden şu şekilde bahsetmiştir. Daha önceden ispatlanmış teoremler, doğruluğu bilinen ve kabul edilen gerçekler, tanımlar, teoremler, kabuller, aksiyomlar ya da matematiksel yapı içerisinde var olan ilişkiler temele alınarak ispat yapılmaktadır. Bu tür referanslarla yani ispatın yaslandığı bir temel üzerinden hareket ettirilmesini baz almaktadırlar. Bu nedenle dayanak noktaları bu kategorideki katılımcılar için önemli bir kriterdir. 1MA3 ispatın yapılışında matematikte yardımcı önermeler olarak bilinen lemmalar üzerinden evrensel kabul görmüş doğrularla birlikte adım adım hareket ettiği için bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

1MA3: ... hani doğruluğu evrensel kabul edilmiş ispatları zaten yaparken aşama aşama lemmaları işte ne bileyim, verilenleri kullanarak yapıyoruz...

Yapılan ispatın doğruluğu ya da gerçekliğini gösterebilecek niteliklerden bahsederken, temelde aksiyom ya da ispatlanmış daha önceki yapılar, dayanağın ve alt dayanakların bir bir açılarak en temeline inenene kadar sürekli doğruluğu garantilenmiş yapıları ön planı çıkardığı için 4EÖ3 bu kategoridedir:

4EÖ3: ...ispat yaparken bile hani bir şeye dayandırarak ee bir sonuca ulaştığımız için ispatın da aslında daha ispat edilebilecek hani hep daha büyüyecek, daha genişleyecek bir kavram, bir özellik olduğunu düşünüyorum. Çünkü dediğim gibi mesela bir örnek vermiştim, $(2 + 2 = 4)$ kabul ediyoruz. Neye göre Peano aksiyomlarına göre. Peki, Peano aksiyomları neye göre oluşturuldu ya da hani onun bir ispatı var mıdır? Hep geniş, daha gittikçe genişleyecek bir alan olarak düşünüyorum... Şimdi bir matematiksel kural var. Bu kuralı hani veriyoruz ama hani neye göre veriyoruz? İspat ya da o kural doğru mu? Gerçek mi kime göre doğru, kime göre gerçek? şeklinde sorular sorulduğunda ispat teoremlere veya aksiyomlara dayandırılarak oluşturulduğu için işte bir ispat olmuş oluyor...

Tutarlıdır alt kategorisinde 13 katılımcıya ait görüş bulunmaktadır. Bu katılımcılar için matematiksel ispat önceki matematiksel modellerle uyumlu ve tutarlı, çelişkili olmayan sonuçlar üretmelidir ya da temele alınan bilgilerin doğruluğu üzerinden yanlış sonuçlara ulaşmama, farklı çıkarımlara neden olmaması ispat oluşturulmasında bir kriterdir.

Bir iddiada bulunulduğunda matematikte bir karşılığının olması, bu karşılık gelen durumun da o sistem içerisindeki bazı yapılarla uyumsuzluk yaratmaması, örtüşmesi ve çelişkiye yol açmamasının gerektiğini vurguladığı için 1MA2 bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

1MA2: ... Tutarlı olması gerekiyor. Tutarlılık çok önemli bir nokta şeyde, ispatta. Tutarlı mı diye bakarım ve ona göre kontrol ederim. Yani bir, sonuca doğru bir şekilde ulaşmış mı? Verdiği bilgiler tutarlı mı ve doğru yaklaşmış mı? ...Yani bir iddiası var. Bunun işte matematikte bir karşılığı olması gerekiyor. Yani bunun... Nasıl söyleyeyim? Yani bunun şey olmaması lazım; bazı şeylerle çelişmemesi lazım. Bunun gerçekten doğru olması lazım. O tutarlı olup olmadığını da işte, bir ifaden var ama bu tutarsız; başka bir yerden baktığın zaman farklı bir anlama geliyor, farklı bir çıkarım yapılabiliyor, farklı bir yola sevk ediyor seni o. Herhangi bir tutarsızlık olmayacak yani bütün şeyler birbiriyle örtüşecek anlamında söyledim.

Sonlu adımlıdır alt kategorisinde 3 katılımcıya ait görüş bulunmaktadır. Bu katılımcılar, matematiksel bir ispat yapıldığında sayılabilir nitelikte sonlu adımla sonuca ulaşmanın esas olmasından bahsetmiştir. Yani yapılmış/yapılacak bir ispatın aynı zamanda kaç adımda ispata ulaşıldığını gösteren bir özelliği vardır. 1MA1 bir başlangıç noktası bir de gösterilmesi gereken sonuç arasında atılan adım sayısı sonlu adettir düşüncesinin altını çizdiği için bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

1MA1: ...Yaptığınız tutarlı matematiksel modelleri kullanarak fakat “sonlu adımda”. Sonlu. Burada önemli olan nokta şudur: sonlu adımda olması gerekir. Yani 3 adımda sonuçlandırmanız gerekir. 50 adımda sonuçlandırmanız gerekir. Dolayısıyla “bu böyledir, bunu devam ettirsek, sonunda bu, bu olur”. Böyle bir şey, ispat değildir! Sonlu adımda sonuca ulaşmak gerekir. Yani sonlu adımlıdan kastettiğim şu. Yani bir işlem yaparsınız. Başka bir işlem daha yaparsınız. Başka bir işlem daha yaparsınız. Onun sonucunda artık oluşmuş olur. Nasıl olur? Mesela bir şeyin “tek olduğunu” göstermek istediğimizi varsayalım. Tek olduğunu göstermek istiyorsanız ben onun 2 tane olduğunu veya birden fazla olduğunu kabul edersem. Ve bu birden fazla olanların tamamının aynı olduğunu ispatlarsam iş bitti. Kaç tane adım oldu? Birden fazla olduğunu kabul ettim: birinci adım. 2’nci adımda hepsi aynı oldu. Dolayısıyla tek oldu. Aynı şey gibi, tümevarımda da. Tümevarım ispatlarını yaparken de ispat kelimesi çıkıyor. Ne oluyor? Başlangıç noktasını kabul ediyoruz, söylüyoruz. Belirli bir nokta için doğru olduğunu kabul ediyoruz. Ondan sonrası için de doğru olduğunu ispatlarsak bitmiş oluyor. Öyle değil mi? 3 adımlık bir yapıdır tümevarım da. A! tümevarım dediğiniz aslında sonsuz elemanlı bir küme üzerinde tanımlanmış olan veya iddia edilmiş olan bir yapının ispatını biz 3 adımda ne yapıyoruz? İspatlıyoruz. Burada önemli olan, “ispat sonlu adımlı olmak zorundadır”. Sonlu adımlı değilse ispat olmaz o.

İyi gerekçelendirilmiştir alt kategorisinde 19 katılımcıya ait görüş bulunmaktadır. Bu katılımcılar ispatın açıklayıcılığıyla ilişkili durumlara değinmiştir. Hiyerarşik bir sırada, aşama aşama yapılması gereken bir yapıda olmasının yanı sıra her bir adımda ayrıntılı açıklamalar, nedenler (gerekçeler), geçişler adım adım açıklanmış bir şekilde ispat iletilemelidir. 2EA3 kendisine matematiksel bir ilk dayanak noktası oluşturarak, sonraki dayanakların sürekli birbirini tamamlayarak hedeflenen yargıya ulaşmak için her geçiş adımında bu adımın neden atıldığına ya da o adımı atmaya hakkının olup olmadığının sürekli sorgulaması altında hiçbir boşluk bırakmaksızın, özetle bunun yargıya ulaşılana kadar sürekli birbirine kenetli bir şekilde izlemesi gerektiğini vurgulaması bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

2EA3: *Buradaki bu bahsetmiş olduğum süreçte ispat olmasını sağlayan en temel şey bence tanımlar ve bu tanımlar üzerine oturtmuş olduğumuz yapılar. Buradaki yaptığım şey ne olmuş oluyor? Bir tanımla yola çıkıyorum, neyi tanımlamak istiyorum ya da hangi tanım üzerinden gitmek istiyorum? Eşkenar üçgen tanımı üzerinden gitmek istiyorum, o zaman bu tanımın üzerine oturacak olduğum diğer ispatlanmış ya da kabul edilmiş yapıları kullanmak. Dolayısıyla birbirini gerektiren yapılar ya da birbirini çürütmeyen yapılar karşına çıkıyor. En sonda ispatladığımı nereden biliyorum? Başlangıçtaki bir bilgi vardı, bu başlangıçtaki bilgiden yola çıkarak yargıya ulaşıyorum yani bir hipotezim var bu hipotezden yola çıkarak bir yargıya ulaşıyorum. Bu yargı bana söylüyor ki, hipotezle yargı arasındaki bileşenler birbirine kenetli bir şekilde gidiyor, birbirine bağlantılı bir şekilde gidiyor ve birbirini çürüten herhangi bir nokta yok. Buradaki benim dikkat ettiğim noktalardan bir tanesi şu, ispatlayacak olduğum bir yapıyı ispatın kendi içerisinde kullanmamak. Mesela burada ne dedik biz, elimizde bir üçgen vardı, üçgenin iç açılarının toplamının 180 derece olduğunu yine Öklid bağlamında tartıştığımız için söylüyoruz, bunun ispatlandığını vesaire kabul ederek ilerliyoruz ama ben tutup aradaki şeyi atlamıyorum mesela üçgenin iç açılarının toplamını bulduğumda, iç açıları 60 derece dolayısıyla bu bir eşkenar üçgendir dediğimizde bunun doğrudan bir şeyi yoktur, ispatta bir eksiklik olduğu hissediliyor. Niye hissediliyor? Çünkü ara geçişte tanıma uymayan bir yapı yani eşkenar üçgen tanımını verirken kenar üzerinden vermişim, açı üzerinden vermiş olsaydım kabul edilebilirdi. Yani deseydim ki, iç açıları eşit olan üçgenler eşkenar üçgendir, demiş olsaydım, öyle bir tanım yapmış olsaydım direkt geçiş yapılabilirdi ama o boşluğu dolduracak bir bilgi var, o bilgiyi sürekli olarak ekleyerek aslında sonuca doğru gidiyoruz. İspatın tamamlanıp tamamlanmadığı da aslında belki bununla bağlantılı. En son neye ulaşıyorum? Yargıya ulaşıyorum, yargıya ulaştığımda biliyorum ki bu yargı ispatlamak istediğim, ulaşmak istediğim nokta. O zaman bu ulaşmak istediğim noktayı ben boşlukları kapatarak gelmiş oluyorum, birbiriyle bağlantılı boşlukları kapatarak ben gelmiş oluyorum. Belki şu olabilir, biz sürekli olarak kendimize şunu sormamız gerekiyor, “bu neden böyle?” Yani “ben buradan buraya geçiyorum peki buradan*

buraya geçme hakkım var mı?” gibi. ... mesela buradaki ekranı düşünelim, ekranın bu uç köşeleri dik açılardan oluşuyor ama diğer iki köşe hakkında bir bilgi verilmemiş, sadece deniliyor ki iki köşesi dik olan bir dörtgenimiz var elimizde acaba bu bir dikdörtgen midir? Bunun ispatını yaparken, dikdörtgen olmadığını ispatlamak için ya da dikdörtgen olduğunu ispatlamak için elimizdeki bilgi yeterli mi? O zaman kendimize neyi sormamız gerekiyor? Bu paralellikleri oluşturmamız gerekiyor, acaba paralelliği oluşturabiliyor muyuz? Yani dikdörtgen özelliklerini sağlayan bazı yapıları oluşturabiliyor muyuz? O zaman ne yapmış oluyoruz? Otomatik olarak tanıma gitmiş oluyoruz yani benim bu ispatı yapabilmem için tanıma ihtiyacım var. O zaman tanım üzerinden, tanımın gerekliliklerini yerine getirecek şekilde bu ispat sürecini tamamlıyoruz...

İspatın özellikleri başlığının ikinci kategorisi olan *dilsel boyuttan* bahseden 24 katılımcı, kullanılan dil ya da söylem açısından bazı noktalara değinmiştir. Bu konuda katılımcılar *dilin anlaşılabilirliği* ve *dilin biçiminden* bahsetmiştir. Yapılan ispatın bir başkası tarafından okunurken ispatta kullanılan dilin anlaşılması gerektiği yönündeki görüşleri barındıran *dilin anlaşılabilirliği* alt kategorisinde, katılımcılardan 11’i dilin özenli kullanılmasından, 6’sı profesyonel konuşmayı yansıtmamasından, 5’i dilin daha çok ekonomik bir şekilde tasarruflu kullanılmasından bahsetmiştir.

Dilin özenli kullanılmasını içerir alt kategorisi, matematiksel ispatın iyi organize edilmesiyle ilgili katılımcı görüşlerini barındırmaktadır. Matematiksel dilin veya sembollerin doğru ve uygun kullanılmamasının, sentaktaki ufak bir değişimin ispatta ciddi sıkıntı yaratabileceğini, bu nedenle ispat yaparken matematiksel dilin düzenini bozmadan çok dikkatli olunması gerektiğini vurguladığı için 3MÖ4 bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

3MÖ4: *...bir yerde virgül koymayıp, bir yerde parantez koymuştum bu yüzden sorunun yanlış olduğu olmuştu. Bu tarz şeylere çok dikkat etmek gerekiyor çünkü ispat yaparken bu tarz şeyler hata kaldırmıyor, sonuç yanlış çıkabiliyor. O yüzden tek tek işte böyle özümseye özümseye böyle dikkatli dikkatli bakarak gittiğimde sonucun doğru olduğunu görüyorum...*

Matematiksel ispat söz konusu olduğunda ispata konu olacak ya da ispatta kullanılacak her şey açık olmalıdır. Profesyonel konuşma, ispatla ilgili bir konuşma hukukunu ya da tarzını yansıtır. Bu nedenle matematiksel bir ispat yapılırken seyirciye vermek istediği mesajın etkili, açık, anlaşılır, tam ve akıcı bir şekilde karşılık bulabilmesini kolaylaştırır. Bunun için de belli bir profesyonelleşmeyi gerektirir. İspatla ilgili terminolojiye sahip olmak (bu bir yöntemi tanımak, sembolleri tanımak ve ne amaçla orada bulunduğunu anlamak olabilir), yapılan

ispatı okuyabilme ve anlayabilmede önemli faktördür. İspat da bu noktada katılımcılar için ortak dil geliştirme ve etkili iletişim tabanı hazırlar. 2EA3 kendisi dışındakilerin yapmış olduğu ispatı incelerken görmek istediği özel bir konuşma biçiminden bahsetmektedir. Kişinin düşüncelerinde yer alan ifadelerin matematiksel dil aracılığıyla kâğıda açık bir şekilde akabiliyor olmasını (zihindekilerin yazılı olarak kâğıtta can bulabilmesini, yazılı formlar üzerinde de matematiksel bir dille düşüncelerini temsil edebilmesini) önemli bulmaktadır. Bu nedenle 2EA3 profesyonel konuşmayı içerir şeklindeki alt kategoriye örnek olarak verilebilir:

2EA3: *...Dolayısıyla öğrencileri değerlendirirken ya da başkasının yapmış olduğu bir teoremi değerlendirirken bu konuşma biçimi, daha doğrusu bu geçişleri görmeyi daha çok istiyorum... öğrenci bazında düşündüğümüzde öğrencinin kâğıtta konuşabiliyor olması lazım, eğer kâğıtta bir ispat yapıyorsa kâğıt üzerinde bu düşünce biçimini yansıtması gerekiyor işte o yansıtmayı da matematiksel dil belki karşımıza çıkacak...*

Ekonomiktir alt kategorisi, ispatın daha kısa ve pratik bir yoldan, çok kafa karıştırmadan ispatlanacak ifadeye tutumlu yaklaşılmasıyla ilgili katılımcı görüşlerini içermektedir. Aşağıdaki alıntıda 4EÖ7 daha basit bir ispat yolu bulabilme çabalarında dilin tasarruflu kullanılmasından bahsettiği için bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

4EÖ7: *... neden farklı bir yol olmasın? Veya daha kolay, daha basite indirgenmiş bir yol bulunabilir miydi? Çünkü bir şeyin tanımını yaparken ekonomiklikte bizim için bir yer tutuyordu, kelimelerden de tasarruf edebilmek, anlaşılabilirlik açısından, saflık açısından ...*

Dilin biçimi alt kategorisinde katılımcılardan 19’u ispat yaparken kullanılan dilin sayısal ya da spesifik örnekleri barındırması yerine daha genel bir yapıyı temsil etmesini, 8’i dilin ifade edilışinde ya da sunuluşunda sembolik ya da cebirsel bir şekilde olmasını göz önünde bulundurmuştur. 3MÖ2, elindeki ispatlanacak ifadenin hipotezinden yol alarak sonuca giderken eğer reel sayılar gibi bir küme üzerinde ispat gerçekleştirilecekse hipotezden sonuca giderken bu kümeden alınacak her sayı için doğru sonuca ulaşılmasının gerektiğinden bahsetmektedir. Aşağıdaki alıntı 3MÖ2’nin ispatın genel olması durumunu vurgulamasına örnek olarak verilebilir:

3MÖ2: *... hipotezden başlayıp sen sonuca doğru gidebiliyorsan ve bu hani her, mesela diyelim her sayı için kullanıyorsa diyelim örnekte her reel sayı için kullanıyorsa ve ben onu her reel sayı için sonuca gidebiliyorsam o zaman bunun ispat olduğunu düşünüyorum. Çünkü hani*

hipotezden başlamışız sonuca doğru gidebilmişiz. O zaman burada bir ispat yapabilmışım yani ben o sonucu gösterebilmişim diyorum. Bu ispattır diyebiliyorum.

4EÖ6 ise örüntünün kuralının yanlış olduğunu söyleyebilmek için onu yanlışlayıcı bir örnek bulmak yeterliyken doğruluğundan emin olabilmek için her sayı için örüntü kuralının çalışıyor olması gerektiğini ifade etmiş, bu örneğiyle ispat arasında benzerlik kurarak ispatın da genel olmasına doğru bir düşünce geliştirdiği için bu kategoridedir:

4EÖ6: *...Yani mesela örüntünün genel kuralını bulmuş olmam ve istenilen herhangi bir terimdeki değerini bulmaya kalkmış olmam genellemiş olmam. Yani aslında bakarsak hani gene örüntünün genel kuralından kastım genellemiştik orada. Genellediğimiz zaman her ifadede bunun doğru olacağına emin olabiliyoruz. ...mesela şey vardır. Bir kuralın doğruluğunu şey yapmak için yalanlayabilmek için bir tane yanlış şey bulmak bizim için yeterliydi ama doğruluğunu kabul edebilmek için doğruluğundan emin olabilmek için her sayı için mesela bir örüntü kuralını da her sayı için doğru sonuca ulaştırabiliyor mu? Ya da bir fonksiyonda her sayı için doğru sonuca ulaştırabiliyorsa eğer, evet bu kural ya da bu algoritma doğrudur diyebiliyorduk. Yine aynı şekilde ispatlama sürecinde de yaptığımız ispatın doğru olabilmesi için uygun hangi konuyu üzerindeyse ya da hangi durum üzerindeyse her o konu ve o durum üzerinde her şeyi kapsayabilecek bir şekilde doğru ve doğru olabilmesi gerekiyor. Aksi takdirde sadece bir mesela bir ispat yaptık ve bu ispatın bir tane kafamızdan rastgele bir sayı seçtik ve o sayıyla bunu kontrol etmemiz bizim doğru olduğu bu yaptığımız ispatın doğru olduğu anlamına gelmez. Her sayı için bunun doğru olabilmesi gerekiyor.*

3MÖ7 matematiksel sembol veya harf kullanarak cebirsel bir biçimde ispatın yapılmasıyla ilgili bir özelliğe atıfta bulunmaktadır. Bu açıdan dilin ifade edilmesinde sembolik dile referansta bulunduğu için bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

3MÖ7: *... reel sayılar kavramı çok uzun, geniş kapsamlı bir şey olduğu için daha çok bir harf veriyoruz. Yani “reel sayılardan herhangi bir eleman aldığımızda şu şekilde ilerliyor” demek için...*

4EÖ4 ise ispatın genel olması durumundan bahsetmesinin yanısıra ispat yaparken günlük konuşulan dil yerine matematiksel dili kullanmanın gerektiğini, matematiksel dilin de ağırlıklı olarak cebiri içerdiğini vurgulamasından ötürü bu kategoridedir:

4EÖ4: *Matematiksel ispat, var olan bir bilgiyi matematiksel bir dille... Mesela tek sayı derken yani onu ayrı yazıyoruz, çift sayı derken ayrı yazıyoruz o şekilde... mesela $(2a+1)$ falan şeklinde gösteriyoruz ya tek sayıları, o şekilde ondan bahsettim... Böyle günlük değil de o matematiksel dili kullanmamız gerekiyor...Mesela şey diyoruz. “Şunu verelim, bak tuttu”*

hani. O tarzda değil de “arkadaşlar hani bunun şey genellemesi, ispatı bu. Buna ne verirsek verelim hani bu sağlanacak” [gibi]... o şekilde günlük dilden ayırmamız gerekiyor. Biraz daha matematiksel konuşmak gerek... çoğunlukla zaten cebiri içeriyor bence...

İspatın özellikleri başlığının üçüncü kategorisi, *sosyal boyuttur*. Katılımcıların, bir şeyi ispat olarak görüp görmemede, onun ispat olarak akademik camiada/belli bir topluluk tarafından kabul alıp almamasını etkileyen bir faktör olarak, çoğunluğun/herkes tarafından kabul edilebilmesi, ortak karara varabilme ve uzlaşabilme olarak, kişiyi tatmin etmesi ve/veya kişinin bir başkasına akla yatkın bir açıklama/çözüm sunması, kişinin/başkasının mantığına yatan bir nitelik olarak şeklindeki görüşleri sosyal boyut kategorisi altında bir araya getirilmiştir. İspat oluştururken olması gereken bir listenin içindeki varlığı ya da ispatlama girişiminin sonucunda üretilen şeyin ispat olarak değerlendirilebilecek bir niteliği olarak da katılımcıların görüşlerinde bu boyut karşılık bulabilmektedir. Özetle bu kategorideki katılımcılar için ispatın ikna etme kapasitesi/gücü, kabul alabilirliği, mantığa yatkınlığı dikkat edilen bir kriter olmuştur. Bu kategorideki bir tarife uyan toplam 23 katılımcı bulunmaktadır. Aşağıda 1MA1, bir başkasını ikna edebilecek bir dizayna sahip olmasından ya da yapılan ispatın karşı tarafa mantıklı ve inandırıcı gelmesi yönlerinden bahsettiği için bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

1MA1: *...İspat dediğimiz şey[de] problemi ortaya koyduktan sonra, karşı tarafı ikna edebilecek şekilde bir dizayn geliştirmeniz gerekiyor...Çünkü orada ben mantıkla ifade ettim, inandılar...*

Yapmış olduğu ispatı başka insanlara ya da matematikçilere sunduğunda onlar tarafından kabul edilebilir bulunabilmesi ya da ispatının onlar için ikna edici olarak görülebilmesinden bahsettiği için 4EÖ6 bu kategoridedir:

4EÖ6: *Kabul edilebilir yani, insanlara bunu sunduğum zaman mesela bir formülün ispatını yapıyorum ve bunu insanlara gösterdiğimde “evet, bu ikna edici oldu” diyebilmeli ya da insanlar ya da matematikçilerce...*

3MÖ3 için yapmış olduğu ispat kendisini tatmin etmiştir. Ancak sadece kendi bakış açısıyla sınırlı kalmayarak başkalarıyla da tartışarak, kendisinin yürüttüğü çalışmanın eksikleri/hataları olabileceği ihtimaline karşılık ispatının genel kabul görmesinin tamamlayıcı bir niteliğine vurgu yaptığı için bu kategoridedir:

3MÖ3: *... Onun dışında gidip tartışırım başka kişilerle işte bilen kişilerle daha doğrusu. Çünkü sadece ben yaptım, sonuca ulaştım, “tamam, ispat tamamdır” demek biraz yanlış olur.*

Çünkü yani benim bilmediğim şeyler olabilir. Yanlış yaptığım şeyler olabilir adım adım giderken oralarda. O yüzden beni tatmin edebilecek sonuca ulaştıktan sonra tartışmak benim için en doğrusu olur. Onun dışında, bu tartışma sonucunda, eğer tamamsa, işte herkes tarafından kabul edilmesi lazım zaten bu ispatın...

İspatın özellikleri başlığının dördüncü kategorisi, *doğruluk değeri boyutudur* ve 23 katılımcının görüşü bu kategori altında birleştirilmiştir. Bu kategori altında matematiksel bir ispatın doğruluğunun anlaşılmasında *geçerlilik* ve *inandırıcılık* şeklinde iki ayrık görüş yer almaktadır. Bu kategorinin inandırıcılık alt kategorisi, bir önceki sosyal boyut kategorisine bir anlamda benzemektedir fakat buradaki inandırıcılık, yapılan/oluşturulan ispatın özellikle doğruluğu noktasıyla ilişkili bir niteliğe işaret ediyor olmasıdır. Katılımcıda “kendi mantığına uyuyorsa ya da başkası/başkaları tarafından kabul alabiliyorsa, o zaman doğrudur” mantığı varsa o katılımcı inandırıcılık boyutuyla daha çok doğruluk arayışındadır. Bir başka ifadeyle “kendi mantığına uyuyorsa o zaman doğrudur” düşüncesi öznel kararlar oluşturulmuş doğruluk, “başkası tarafından kabul alabiliyorsa o zaman doğrudur” düşüncesi nesnel kararlar oluşturulmuş doğruluk değeri taşımaktadır. Bu iki düşünceden herhangi biriyle ya da her ikisiyle örtüşen katılımcı görüşleri *inandırıcılık* alt kategorisinde konumlandırılmıştır. Bu anlamda düşünüen 7 katılımcı bulunmaktadır. 4EÖ5 bir bilginin herkes tarafından genel kabul görülmesiyle ispatlanmasının aynı anlama geldiğini düşündüğü için bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

4EÖ5: ... Çünkü bu ispatlanmamıştır. Bir genel kabul görüldüğü durumu yoktur. Genel kabul kabul görmediği için de bunu kullanamayız... Genel kabul görmesinden kastım yani bu ispatın, yani zaten ispat edilmiş demek. Herhalde herkes tarafından kabul edildiği anlamına geliyor gibi düşündüm. O yüzden genel kabul görmesi bir şeyin ispatlanması aslında bir şey ispatlandıysa herkes kabul eder... Kabul görmüş olması en büyük özelliği yani bir şey ispatlandıysa o an kabul görmüştür gibi düşünebilirim. İspatın özellikleri hocam, düşünüyorum... Ya özellikleri dediğim gibi bunun kabul görmüş olması, yani ispatlanmış olması, başkaları tarafından yanlışlanamaması en büyük özelliklerden biri olarak görüyorum hocam...

Diğer taraftan matematiksel ispatın kişiden ya da kişilerden bağımsız (kendisi ya da bir başkasının da ötesinde), her durumda ve her ortamda geçerli ve evrensel olarak doğru olmasından bahseden 16 katılımcının görüşleri *geçerlilik* alt kategorisinde yer almaktadır. 2EA3 matematiksel ispatı tartışmasız ve taraflardan bağımsız şekilde nitelendirmenin yanı sıra sosyal bağlamlarda geçerli olabilecek

durumlarla matematiksel geçerliliğin farklılığını da ortaya koyarak ifade ettiği için bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

2EA3: ... matematiksel bilginin geçerli olmasını sağlayacak tek şey o bilginin ispatlanması, dolayısıyla diğer matematiksel yapılarla ya da diğer tanımlı olduğu matematiksel teorem ve kavramlarla ilişkisinin kurulması. Yani bence matematiği temelde diğer disiplinlerle birbirinden ayıran noktası da ortaya atılan iddiaların ya da ortaya atılan fikirlerin ispatsız kabul edilmemesi. Dolayısıyla herhangi bir bireysel bir düşünceye bağlı kalmaksızın ya da herhangi bir özel bir duruma bağlı kalmaksızın matematikteki kuralların işletildiği bir evren ya da disiplin. Çünkü matematiksel olarak ispatlanamıyorsa bunu matematiksel bilgi olarak kabul etmiyoruz dolayısıyla ispatlanması gerekiyor, matematiksel bir geçerliliğinin olması gerekiyor. Ondan sonra ancak bir önermenin doğru ya da yanlış olduğuna karar veriyoruz. Dolayısıyla bana göre matematiği disiplin yapan ve diğerlerinden tamamen ayrı yapan en temel özellik bu ispat mekanizmasının tartışmasız ve kayırmaz bir şekilde çalışıyor olması. Hukuktaki örneği şöyle düşünebiliriz, hukuk eğer herkese göre işlemiyorsa o hukuk değildir, dolayısıyla matematik bu ayrıcalığı alıyor yani matematikte herhangi bir kayırmacılık, eğer çalışmıyorsa çalışmıyor. Yani bir kural varsa ve matematiksel bir yapıya oturmuyorsa biz onu matematik disiplini içerisinde matematiksel bilgi olma yolundan çıkarabiliriz...

İspatın özellikleri başlığının beşinci kategorisi, *soyut-aşkınlık boyutudur* ve 15 katılımcının görüşü bu kategori altında birleştirilmiştir. Bu kategoride katılımcılar matematiksel ispatın ihtiyaçtan bağımsız, günlük çerçeveden bağımsız, fiziksel dünyada karşılıkları olmayan, gerçek hayatla/dünyayla bağlantısı kopuk, gerçek hayatta karşılaşılan herhangi bir probleme cevap üretme sorumluluğu taşımayan nitelik ya da soyut matematiksel nesnelerle ilgililiği, somut karşılık yerine soyut duruş, görselleştirilebilecek ya da canlandırılabilir bir nitelikte olmayışı, fiziksel bir ortamda doğrudan manipüle edilebilecek bir yapısının olmayışı gibi soyut ve aşkın özelliklerden bahsetmiştir. 2EA6 ispatın gerçek hayatla bağlantısının olmadığını, somut bağlam ya da durumları dışarıda tuttuğunu ifade ettiği için bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

2EA6: ...biliyorsunuz ispatın en önemli özelliği, belli bir değerden, konteksten, bağlamdan bağımsız olması, yani tamamen soyut bir şekilde olması yani bunun dünyayla bağlantısını kesiyoruz, bir problemle bağlantısını kesiyoruz ki her durumda uygulanabilsin geçerli olsun...

Benzer şekilde 1MA8, uğraşılan konunun üzerine derin düşünülerek eğilinmesi gerektiğini, birkaç somut örnekle bunun anlaşılamayacağını belirttiği için bu kategoridedir:

1MA8: ...Yani bu şey olmuyor deneme yanılma, yani işte gideyim de yerine 2 yazayım 3 yazayım ile olmuyor. Çünkü hani şimdi uğraştığın şey böyle çok rahat görselleştirebilecek olan bir şey değil...

İspatın özellikleri başlığının son kategorisi olan *bağlamsal boyut* başlığını oluşturacak nitelikte görüş bildiren 12 katılımcı, matematiksel ispat oluşturulurken sabit olmayan (değişken) yapıların doğası gereği ispatın değişebileceği ya da bazı durumların/koşulların ispatın karakterini etkileyebileceğinden bahsetmişlerdir. Bu konuda katılımcılar ispat üzerine *modele göre değişebilir, düzeye göre değişebilir, yönteme göre değişebilir ve zamana göre yeniden düzenlenebilir* şeklinde düşünmektedir.

Modele göre değişebilir alt kategorisinde 8 katılımcıya ait görüş bulunmaktadır. Bu katılımcılar açısından ispatlanacak matematiksel ifadenin üzerinde çalışılan küme, uzay ya da model önemlidir. Bu yapılar değiştiği takdirde bir kümede geçerli olan bir ispat farklı bir küme üzerinde farklı bir sonuç üretebilir. Bu kategorideki katılımcılara göre yapılacak ispatın sınırlarını çerçevelemek için hangi küme üzerinde ya da hangi koşullar altında o matematiksel iddianın/ifadenin geçerli olacağı önemli bir boyuttur. 1MA5 ispatlanacak teorem aynı kalsa da onun üzerinde tanımlı model değiştiği anda farklı sonuçlar elde edileceğini belirttiği için bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

1MA5: ...Beni çelişkiye... Şimdi çok anlamlı bir soru. Şimdi ben belli bir model içerisinde çalışıyorum. Mesela bu modellerden bir tanesi şu olabilir. O model içerisinde iki değer olur. Tamam mı? O değerlerden bir tanesi gerçekleşmiyorsa, “o objenin değeri diğeridir” diyorum... Diyelim ki yazı tura atacağım. 2 değer var. Değil mi? Bir yazı bir tura... Şimdi ben attım. Attım parayı. Arkadaş bana dedi ki “yazı gelmedi”. O zaman ben diyorum ki “tura gelmiştir” diyorum. “Yazı gelmediyse tura gelmiştir” diyorum. Öyle değil mi? Şimdi asal sayılarla ilgili 2 durum söz konusu olduğunu varsayıyorum. Ya “sonsuzdur” ya “sonludur”. Öyle değil mi? Eğer sonlu olduğunu varsaydığım zaman bir çelişki çıkıyorsa karşıma o zaman diyorum ki, “sonlunun karşıtı olan sonsuz durumu söz konusudur” diyorum. Ve o zaman da diyorum ki, “asal sayıların sayısı sonsuzdur” diyorum. Fakat model değiştiği zaman, bir modelde doğru olan bir teorem bir başka modelde yanlış olabilir matematikte. Hangi modeller üzerinde oyunu kurduğunuz çok önemli. Bir teorem bir model içerisinde doğrudur. Ama modelinizi değiştirdiğiniz zaman, nedir? Yanlış olabilir.

Benzer şekilde 4EÖ2 Öklid geometrisinde üçgenin iç açıları toplamı 180 derece iken, Öklid dışı geometrilere bu toplamın 180 dereceden farklı çıkabileceğini söylediği için bu kategoridedir:

4EÖ2: ...Örneğin biz eğer bir şeyi, geometride bir şeyi ispatlıyor olsak mesela örneğin “Pisagor Teoremi”. Biz bunu Öklid’in kendi çıkarımlarını kabul ederek aslında şey yapıyoruz. Yani mesela, hani biz üçgenin iç açılarını hani 180 olarak ispatlayabiliyoruz. Ama burada kabul ettiğimiz bazı yargılar var. Ama başka bir geometride ise üçgenin iç açıları toplamı mesela 180 değil. Çünkü biz orada farklı bir hani, ne, ön kabullerimiz farklı olduğu için sonuç farklı çıkıyor. Ama ikisinde de ispat yapmış oluyoruz. O şekilde söyleyebilirim.

Düzeye göre değişebilir alt kategorisinde 5 katılımcıya ait görüş bulunmaktadır. Bu katılımcılar kime göre ya da kimin için şeklinde hangi kitleye ispat sunulacaksa, ispatın bu durumların özelinde/temelinde, örneğin bir öğrenciyse eğer onun kavramsal gelişim düzeyinde olan bir ispat derecesini ifade ederek, ispatın bir değişkenliğe uğrayacağından bahsetmiştir. İspatın ortaokul gibi belli bir sınıf seviyesinde matematiğin kendi içindeki kesin (rigorous) duruşu yerine daha esnek ve sınıfa ait bir nitelik taşıması gerektiğinden bahsettiği için 4EÖ8 bu kategoriye örnek olarak verilebilir. 4EÖ8 için böylesi bir ispatın bu seviyede bir öğrencinin kendisinden de bir parça değer katabilmesi ve kendi özgün ispatını yaratabilmesi açısından önemlidir.

4EÖ8: ... yine bu sınıf içindeki duruma kayıyoruz aslında. O daha esnekmiş gibi geliyor bana. Hani tabii ki ispatın belli aşamaları olmalı gibi de geliyor yani ama sınıfa uyarladığımızda daha böyle esnek yapılmış gibi hissediyorum... o sınıftaki esnek yapı hani daha çok bize ait bir şey olsun hani. “Evet ben de kendime ait bir ispat yapıyorum” şeklinde. Hani daha çok kesin hani işte alt küme koyacaksın ya da işte burada bir şeyler olacak vesaire o kesinlikten biraz daha uzakmış gibi hani daha çok uzak yapabiliriz gibi sınıf ortamında o şekilde düşünüyorum.

Yönteme göre değişebilir ile zamana göre yeniden düzenlenebilir alt kategorilerinin her birinde sadece 2 katılımcıya ait görüş bulunmaktadır. İspatın yönteme göre değişir olmasından bahseden katılımcılar, ispat yaparken kullanılan çeşitli yöntemler olduğu için haliyle yapılacak ispat da bu yöntemlerden birini kullanmayı gerektirdiğini; bu durumda hangisi kullanılacaksa ya da bu yöntemlerden herhangi birinin seçimiyle yapılacak ispatın da değişebileceğini düşünmektedir. Aşağıdaki 4EÖ7 katılımcısı, ispatın yönteme göre değişebilir olduğundan bahsettiği için bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

4EÖ7: Yani baktığım zaman bazı konulara göre değişkenlik gösterebilecektir. Örneğin bazı ispatları tümdengelim şekline göre yapıyoruz bazılarını tümevarım şeklinde yapıyoruz bazılarını benzerlikler kullanarak analogiler kullanarak yapıyoruz, benzer özelliklerinden birbirleriyle ilişkilendirerek yapıyoruz... Tümdengimsel yöntemde ise sahip olunan önce

büyük bir varlık var büyük bir veri topluluğu var daha sonra ben kendi sonucuma ulaşabilmek için bunları yavaş yavaş bölerek yavaş yavaş gruplandırarak aşağı doğru iniyorum, özele doğru iniyorum... Analogiler kullanıyorsam eğer benzerliklerinden faydalaniyorsam da iki veri grubunu birbiriyle karşılaştırıyorum ve diyorum ki bu özellikten burada da var. Benzer özellikler yardımıyla sonuca da varılabilir dediğim gibi hani buradaki ispat yöntemlerinin tek bir özelliği veya belirli özellikleri genel olarak belirli özelliklere sahip olmalı dediğim zaman aklıma önce üçe bölmek veya daha fazla bölüm yapmak geliyor. Çünkü dediğim gibi farklı yöntemlerini kullanacaksam ben ispatın farklı aşamalara değinmem gerekiyor. Farklı aşamalardan geçmem gerekiyor. İşte tümevarım tümdengelim veya işte analogiler kullanıyorsam benzerlikler kullanıyorsam farklı aşamaları takip etmem gerekiyor. Bunun içinde alt basamaklarına inmeyi tercih ederdim. Dediğim gibi tümevarım farklı aşamalar farklı özellikler getiriyorken tümevarım tümdengelim de farklı özellikler veya benzerlikler kullanıyorsam bu yöntem içinde farklı aşamalarında farklı özellikler gerektirebileceğini düşünüyorum. Bunun içinde ispat yaparken hangi yöntemin seçilebileceği hangi yöntemin seçilmesi gerektiğini seçip ona göre bir özellik kıyaslaması veya özellik seçilmesi gerektiğini düşünüyorum.

İspatın zamana göre yeniden düzenlenebilir olmasından bahseden katılımcılar için o zamanki anlayışla ya da mevcut bilgiler ışığında yapılan bir ispat, yeni bilgilerin de matematiksel sisteme dahil olmasıyla tekrar gözden geçirilerek yeniden düzenlemeye ve yorumlamaya açıktır. Aşağıdaki alıntıda 2EA2 katılımcısı bu durumdan bahsettiği için bu alt kategoriye örnek olarak verilebilir:

2EA2: *Olmadığı durumlar olabilir tabi. Yani matematik tarihinde böyle örnekler var. Mesela, Euler formülünün çok yüzlü tanımına göre, tarih içinde yeniden düzenlendiğini biliyoruz. Böyle örnekleri var. O günkü matematiksel bilginin imkân verdiği şekliyle ancak doğru olduğunu gösterebiliriz ya da o gösteremeyiz ki öyle olsaydı zaten Fermat'ın son teoremi 350 yıl beklemezdi. Demek ki elimizdeki mevcut bilgi yeterli değildi.*

4.1.2.1 Matematikçilere Göre Matematiksel İspatın Özellikleri

Matematikçilerin, matematik eğitimcilerinin, matematik programı öğrencilerinin ve matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin grup bazlı matematiksel ispatın özelliklerine yönelik bulguları Tablo 4.3 üzerinden paylaşılmıştır.

Tablo 4.3. Farklı matematiksel topluluklara göre matematiksel ispatın özellikleri

KATEGORİ	ALT KATEGORİLER	1MA (9)	2EA (7)	3MÖ (9)	4EÖ (9)	
ÖZELLİKLER	<i>Sosyal boyut</i>	7	5	5	6	
	<i>Bağlamsal boyut (BB)</i>	1	5	3	3	
	BB: Modele göre değişebilir	1	1	3	3	
	BB: Düzeye göre değişebilir	-	4	-	1	
	BB: Yönteme göre değişebilir	-	-	-	2	
	BB: Zamana göre yeniden düzenlenebilir	-	1	-	1	
	<i>Doğruluk değeri boyutu (DB)</i>	8	6	4	5	
	DB: Geçerlilik	8	4	2	2	
	DB: İnanırcılık	-	2	2	3	
	<i>Mantıksal boyut (MB)</i>	9	7	8	9	
	MB: Düzeni vardır	4	6	2	5	
	MB: Doğruluğunu/yanlışlığını garantileyen yapılar vardır	6	4	1	7	
	MB: Tutarlıdır	3	5	2	3	
	MB: Sonlu adımlıdır	3	-	-	-	
	MB: İyi gerekçelendirilmiştir	8	3	8	-	
	<i>Dilsel boyut (DB)</i>	8	5	6	5	
	<i>DB: Dilin anlaşılabilirliği</i>	Dilin özenli kullanımını içerir	5	3	3	-
		Profesyonel konuşmayı içerir	4	1	1	-
	<i>DB: Dilin biçimi</i>	Ekonomiktir	3	-	1	1
		Vurgu genel olmadadır	7	4	3	5
<i>Soyut-aşkınlık boyutu</i>	Vurgu ifade edilmiştir	3	2	2	1	
		5	6	1	3	
1MA : Matematikçiler						
2EA : Matematik Eğitimcileri						
3MÖ : Matematik Programı Öğrencileri						
4EÖ : Matematik Öğretmenliği Programı Öğrencileri						
Not: Parantez içindeki sayılar, o grubun toplam katılımcı sayısını göstermektedir. Her bir hücredeki sayılar ise o gruptaki kaç katılımcının ilgili kategoride bir görüşünün olduğunu temsil etmektedir.						

Çalışmadaki matematikçilerin bağlamsal boyut ile soyut-aşkınlık boyutu dışındaki diğer kategorilerde daha yaygın ve ağırlıklı bir şekilde matematiksel ispatın özelliklerine değindiği görülmektedir (bkz. Tablo 4.3). Ayrıca matematiksel ispatın özellikleri başlığının sosyal boyut kategorisinde tüm katılımcı grupların birbirine yakın sayıda görüşleri yer alsada bu kategoride daha çok matematikçilerin görüşleri bulunmaktadır. Diğer taraftan matematiksel ispatın özellikleri başlığının doğruluk değeri boyutu, mantıksal boyut ve dilsel boyut kategorileri dikkate alındığında bazı kategorilerde katılımcıların birbirine yakın sayıda görüş bildirme durumları söz konusu olsa da bu kategorilerin alt kategorilerinde katılımcı grupların birbirlerinden belli yönlerle farklılaştığı görülmektedir. Bu farklılaşma matematikçiler açısından doğruluk değeri boyutu kategorisinin “geçerlilik” alt kategorisinde belirgin olarak karşılık bulmaktadır. Çalışmadaki 9 matematikçiden 8’inin matematiksel ispatın öznel ya da nesnel olmasından öte evrensel olmasıyla ilişkilendirdikleri, matematiksel doğrulukla işaretledikleri görüşleri hakimdir.

1MA3, matematiksel ispatın doğru bilgi anlayışına katkısı yönüyle her zaman şüphe duyulmaksızın kullanılabilir bir niteliğe sahip olması ve evrensel olma özelliğinden bahsetmiştir:

1MA3: ... Doğru olduğunu bildiğimiz bilgi olduğu için, yani doğru olduğunu bildiğimiz için, bunu [ispatı] her daim kullanabileceğimizi, şüphesiz kullanabileceğimiz için önemlidir. Şüphe yoktur çünkü o doğrudur. Evrenseldir diye düşünüyorum. ... Çünkü her şey biz bu doğruları matematiğin içindeki matematik bilimindeki doğrulara zaten bu ispatlarla ulaştık, kalıcı oldu bizim bu doğrularımız. Niye? Bu matematiksel ispatlarımızla evrensel doğrulara ulaştık. Kesin bilgiler elde edebildik...

1MA9, Einstein'ın formülü ya da Fermat'ın son teoreminin matematiksel olarak doğru ve geçerli olarak kabul edilebilmesinin ancak bunların ispatlanmasıyla mümkün olduğunu vurgulamıştır. Ayrıca bu formülü ortaya atan kişinin itibarındansa (ya da tanınırlığından öte) ya da teori olarak yaşamasında öznenen bağımsız olduğunu ifade etmiştir. Bir başka ifadeyle 1MA9, Einstein olduğu için ya da Fermat olduğu için değil, matematiksel olarak gerçekten bu formülün ya da teoremin doğru olduğunun gösterilmesi, matematiksel olarak ispatlanmasıyla anlamlı olmasını ilişkilendirmiştir:

1MA9: ... Bu ben yazdığım için olmuyor ya da bu kabul edilmiş yani bir matematikte kabul edilmiş şeyler değil. Bunların hepsinin mantığı var yani. ... Yani mesela Einstein $E=mc^2$ [formülünü] sen kabul ettin mi hemen, öğrenmedin mi niye öyle olduğunu? Einstein dediği için mi öyle yani? Hani ispatsız olur mu ya? Yani $E=mc^2$ Einstein dedi. Tamam, doğru mu dediniz yani? Ya da değil mi? Ne bileyim ya da çok bildiğiniz bir kavram[ı] hemen kabul ettiniz mi? Evet mi diyorsunuz hemen ya da biz size bir şey dediğimizde hemen evet mi diyorsunuz? Evet, sen öyle dedin, öyle mi oluyor yani? İspatsız olur mu bunlar? Yani birilerinin dediği için bir şeyler olmuyor. Belli tanımlar var, belli kavramlar var ve ön potansiyel var. Ön bilgi var, onları kullanıp o sonuçlar çıkıyor. Yani. İspat yapmadan, yani direkt kabul etmek demektir yani birinin dediğini. Olacak iş değil! Yani “hoca” mesela “böyle dedi, öyle oluyor” [dedi öğrenci]. Olmaz [bu]! Mesela değil mi? İspatsız olmaz. Biri bir şey dediği için o şey olmuyor çünkü, ispat o, ispatı var o şeylerin. Mesela Fermat'ın son teoremi var senelerce insanlar uğraştı...Çözüldüğünü söylüyorlar yani Fermat'ın son teoremi[nin]. Yani şimdi kabul mü etmiş insanlar? Fermat öyle, bakın Fermat diyor bir de bunu yani. Fermat öyle dedi diye biz kabul mi ettik yani? İnsanlar araştırdılar yani, bakın çözdüler. İspat yani, ispat yapıp çözdüler. Çözmek demek onu ispatlamak demektir. Yani biri bir şey dediği için, kabul etmediğimiz için ispat yapmak zorundayız. Birileri bir şey dediği için olmuyor çünkü bir şeyler.

Matematikçilerin diğer katılımcı gruplardan tamamen farklılaştığı mantıksal boyut kategorisinin “sonlu adımlıdır” alt kategorisi olmuştur. Nispeten daha az matematiğin (3) ispatın sonlu adımlı bir yapıda olması gerektiği görüşü paylaşılsa da çalışmadaki diğer katılımcılar tarafından ifade edilmeyen bir duruma işaret ettikleri yönüyle ayrılmaktadır. 1MA5 matematiksel ispatın sonlu adımda

olması durumundan bahsederken aynı zamanda doğruluk değeri açısından geçerliliğine hizmet eden bir özelliğine de eş zamanlı olarak vurgu yaptığı görüşü şu şekilde olmuştur:

1MA5: *Şimdi benim ispatım, senin ispatın, onun ispatı diye bir ispat yoktur. Kurallar vardır. O kurallar içerisinde objelerle oynayarak sonlu adımlar içerisinde varılan sonuçların ne olduğu tartışmasız bir şekilde ortaya konur. Dolayısıyla ispat dediğimiz şey aslında kişilerden bağımsızdır. Ancak ispatın doğru olup olmadığı kontrol edilir. Yanlış var mı yok mu? Kurallar dışına çıkmış mı, çıkmamış mı?*

Mantıksal boyut kategorisinde matematikçilerin diğer katılımcı gruplardan ikili olarak farklılaştığı alt kategorilerin de olduğu görülmüştür. Matematik eğitimcileri ile matematik öğretmenliği programı öğrencilerinden farklı olarak, matematikçilerin mantıksal boyut kategorisinin “iyi gerekçelendirilmiştir” alt kategorisinde ağırlıklı olarak görüşleri yer almaktadır. Çalışmadaki 9 matematikçiden 8’i, matematiksel ispatın adımlarının iyi açıklanmış ve adımlar arası her geçişin nedenleriyle birlikte gerekçelerinin iyi kurulmuş olmasından bahsetmiştir.

1MA2, matematiksel bir ispattan bahsediliyorsa ispatın içerisindeki adımlar iyi bir şekilde ilerletilmiş, kapsama alanları iyi açıklanmış ve gözden kaçan bir şey olmamış ya da geride eksik bir şey kalmamış şeklindeki durumlara değinmiştir:

1MA2: *... her şey böyle mükemmel bir şekilde ilerlemiş, bütün ilişkiler kurulmuş bütün, hiç gözden bir şey kaçmamış şekilde gidiyorsan o zaman o doğru oluyor. Yani o aradaki adımları, neyi kapsadığını, işte neler için geçerli olduğunu çok iyi bir şekilde analiz edip, hani onun ispatta bir var olduğunu [bunların ispatta varlığından bahsediyor] görmek gerekiyor... Adım adım giderim işte dediğim gibi...*

1MA4 hem yapılmış bir ispatın bir başkasına ikna edici gelmesi yönüyle sosyal boyutla ilişkili bir ispat özelliğinden hem de mantıksal boyut altında iyi gerekçelendirmeye ilişkili bir ispat özelliğinden birlikte bahsetmiştir:

1MA4: *...Çünkü sen mesela bir matematiksel bir makale yazıp bunu dergiye gönderdiğin zaman, adamlar oradaki kanıtları, ispatları teker teker incelemiyor mu? Niye inceliyorlar? Çünkü bakıyorlar ki “hakikaten bu teori doğru mu, değil mi?” Yani teorenin doğruluğunu göstermek için bir sürü iddia kullandın, iddiaları harmanladın. İşte bu iddialardan dolayı ise “benim teorim şudur [ve] doğrudur” diyorsun. Adamlar onlara bakmayacaklar mı? Evet, onlara bakacaklar veya ikna olurlarsa ikna olacak. İkna olmazlarsa ya da adımlar arasında bir “gap”, bir boşluk görürlerse “buradan buraya nasıl geçtin, yani burada geçişte bir problem*

var. Bak şu açıdan baktığın zaman buradaki geçiş çok da doğru gözüküyor” gibi sana “feedback”ler yani geri dönütler veriyor biliyorsun.

1MA6 matematiksel ispatın her bir adımında, bir önceki adımdan sonraki adıma geçişe izin veren sebeplerin yansıtılmasını önemseddiğini ve açık bir şekilde ifade edilmesi gerektiğini vurgulamıştır:

1MA6: *Yani, bir kere ispatı yaparken teoremin içinde verilen tanımların, kullanılacak işte atıyorum, ön teori varsa, ön bir tanım varsa, işte lemması varsa, bunların hepsinin önceden açık olarak verilmiş ve anlaşılmış olması lazım. Ondan sonra teoremin ispatına başladığında hep geriye dönerek yani işte “bundan dolayı bunu yapıyoruz”, işte atıyorum, “türevlenebilir olduğu için sürekli” ya da “şöyle olduğu için bu kabul edebiliriz”, “bu, burada olduğu için doğrudur”, işte “çalıştığımız küme kapalı olduğu için sağlanır” bunları birleştirir birleştirir hep geriye dönerek, adım-adım, adım-adım arkadaki şeyleri nasıl birleştirdiğimizi, inşa ettiğimizi anlayıp öyle sonuca ulaşması lazım. İspat böyle yapılırsa işlevsel olur.*

Benzer şekilde 1MA9 matematikçisi de matematiksel ispatın adım adım ilmek öreri gibi birbirine bağlantılı şekilde ilerleyen bir özelliğine vurgu yaparak, her adıma sebep sunulmasının gereğinden bahsetmiştir, ilmek ilmek satır satır dokumanın altını çizmiştir:

1MA9: *Adım adım. Mesela bir... mesela en basitinden bir makale okuyorsunuz hani, sizin değil başkasının mesela, makale okuyorsun, teorisini okuyorsun: adım adım, adım adım. Yani ilmek öreri gibi. “Şu vardır” dediği için öyle olmuyor. Onun “niye öyle olduğunu” adım adım, adım adım, ilmek ilmek dokurum. Yanlış çıktı zaman artık o geçersiz bir ispattır; burada hata vardır... Ama o ilmek devam ediyorsa, hiçbir pürüzsüz [hiçbir pürüz yoksa] her şeyin sebebi belli ise.. Yani, çünkü ilmek ilmek örüyorum, adım adım okuyorum. Her şey tamamsa o teori doğrudur ama bir yerde sıkıntı yaratıyorsa, sebep belli değil[se], gösteremiyorsa o teori yanlış olabilir ya kendin ispatını yapacaksın ya counterexample [vereceksin]... Ya da ispat yaptın ilmekte bir yerde söküklük var. Yani sebep söyleyemedin orada bir. Yani “tamam da bu niye böyle oluyor” diyorsun, “tamam da böyle niye oluyor?” O söküğü belki counter example çözecek, belki devam ettireceksin. Yani sen o orada, hani “tamam da niye böyle oluyor mu, oluyor ha tamam” dediğin an ispat o ilmek devam eder, yani gider, özersin yani. Ama bir yerde sorun çıkarsa “yok ya bunda bir tuhaflık var. Yanlış demek [ki] counter example veririm” [dersin]. ...Adım adım ilmek ilmek dokursun. Sebeplere okey denildi, her şeyde okey okey aldıkça o teori sonuna kadar okey dersen bitmiştir. Doğrudur.*

Diğer taraftan matematik eğitimcileri ile matematik programı öğrencilerinden farklı olarak, matematikçilerin mantıksal boyut kategorisinin “doğruluğunu/yanlışlığını garantileyen yapılar vardır” alt kategorisinde ağırlıklı olarak görüşleri yer almaktadır. Matematikçilerin 6’sının bu anlamda bir görüşe

sahip olduğu görülmüştür. Bu matematikçilerden 1MA6 doğru matematiksel bir bilgiyle yola girilmesinin önemli bir başlangıç olduğunu ifade etmiştir:

1MA6:... kendisinden önce yapılan teoremleri işte birçok bilim alanında herhalde literatür taraması deniyor, yani onları doğru şekilde oraya koymuş mu? Onları koyup ondan sonra ispatına geçtiğimde kendi ortaya koyduğu, daha önde verilmiş ispatlanmış şeyleri ortaya koyarak doğru adımlarla ispatlanmış mı?...

1MA8 matematiksel bir ispat oluştururken daha önceden bilinen matematiksel gerçekler üzerinden hareket ettirilmesi üzerinde durmuş, tanım gibi bir dayanak noktasıyla ilgili özelliğe işaret etmiştir:

1MA8: İşte mesela şey, x çift bir tam sayıdır. Şimdi bu çift tam sayıları nasıl yani tanım olarak biliyoruz değil mi? Bunun genel geçer kullanılan bir tanımı var. Diyoruz ki “bir tamsayı çifttir. Ne zaman?” eğer ikiye bölünüyorsa ya da diyoruz ki “bir tam sayı çifttir, eğer 2 çarpı başka bir tamsayı” olarak yazıyorsun. Bu bildiğim gerçeklerden bir tanesi. Yani iki tane çift tamsayı bana verildiği zaman diyorum ki ben çift tam sayının ne demek olduğunu biliyorum. Bildiğim gerçek bu...

Çalışmadaki katılımcı gruplarla karşılaştırıldığında matematikçilerin farklılaştığı diğer bir kategori dilsel boyut olmuştur. Bu kategoride matematikçilerin dilin anlaşılabilirliğiyle ilgili olan “dil özenli kullanımını içerir” ve “profesyonel konuşmayı içerir” alt kategorilerinde; dilin biçimiyle ilgili olarak ise ağırlıklı olarak “vurgu genel olmadadır” alt kategorisinde görüşlerinin toplandığı görülmektedir. Matematiksel ispatın özellikleriyle ilgili dilin özenli kullanımından bahseden 5, profesyonel konuşmadan bahseden 4 matematikçi bulunmaktadır. Bu iki alt kategorinin her ikisinden birlikte bahseden 3 matematikçinin olduğu görülmektedir. 1MA1 bu durumdan şu şekilde bahsetmiştir:

1MA1:... İspattan önce problemi ortaya koymak, düzgün ortaya koymak gerekiyor. Problemi net olarak ortaya koymak gerekir... ispatta olması gereken bir kere dedim ya bir dildir matematik, matematik bir dildir. Dolayısıyla matematiksel bir iddiada bulunmak istiyorsanız çok özenli davranmanız lazım. Yani öznesini yüklemine işte zarfını tümlecini düzgün bir şekilde ifade etmeniz lazım. Bu ne demektir? Eğer siz bir ispatta bulunabilmeniz için önce teoremi ortaya koymanız lazım. İddiayı ortaya koymak lazım. İddiayı ortaya koyabilmeniz için bir şey, alanınızı net olarak belirlemeniz lazım. Alanınızı net olarak belirledikten sonra bunu söyleyebilirsiniz. Neden bunu söylüyorum? Mesela bir fonksiyonu aldığınızı varsayın. Birazcık profesyonel konuşalım artık. Bir fonksiyonu aldığınızı varsayın. f fonksiyonunu yazdım x^2 diye bir fonksiyon var. $f(x) = x^2$ kuralıyla verilmiş olan bir fonksiyon. Ben dedim ki “ f fonksiyonunun türevi nedir?” diye sordum mesela. Türevini soruyorum. Şimdi f fonksiyonunun türevini soruyorsam, burada öğrenciler $2x$ cevabını verirler lisede. Ama

benim öğrencilerime sorsanız $2x$ cevabını vermez hiç birisi. Neden vermez? Burada şunu sorarlar: $f(x) = x^2$ kuralıyla verilmiş olan bir fonksiyonun: 1) Tanım kümesini verdim mi ben? Vermedim! Önce tanım kümesini vermem lazım. Yani türevi nerede alıyorum? Anlamlı bir yerde mi alacağım? 2) Hangi değişkene göre türevini alıyorum? Onu sordum mu? Sormadım! $f(x) = x^2$ nin tanım kümesini verdiğimi de varsayıyorum. $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye gittiğini varsayalım. $\mathbb{R}$ 'den işte $(0, \infty)$ a gittiğini varsayalım. Detaylandıralım. Bunun türevine yine $2x$ demezler! Çünkü kime [göre] türev aldığımızı veya almayı istediğimizi sormadım. Ha! x 'e göre türev alıyorsak $2x$. Biraz detaylandırıyoruz işte burada. Eğer x^2 'ye göre türev alacaksak bu sefer de 1 [vurgulayarak söylüyor] veya z 'ye göre türev alıyorsak bunun cevabı da 0 [vurgulayarak söylüyor]. Mesela siz bana sorsanız ki $f(x) = \arcsin x$ (bilmem ne bilmem ne bilmem ne) fonksiyonu dediniz. “Bunun türevi nedir hocam” diye sordunuz. Ben de içerisinde bulunmayan bir değişken aklıma geldi: L değişkeni geldi. Dedim “0 (vurgulayarak söylüyor)”. İtiraz edemezsiniz bana. Orada neyi soracaksınız siz bana “hocam 0 olmaz” Niye 0 olmasın? “ L ye göre türev aldım, siz L 'ye göre türev aldığınızı söylemediniz ki!” şimdi buradan nasıl bir durum ortaya çıkıyor? Bu aslında size bir mesaj veriyor. Siz böyle bir basit olarak değerlendirdiğimiz bir yapının bile aslında içerisinde “sağlam” bir şekilde ifadelerinin yer alması gerektiğini söylüyor. Dolayısıyla bir teorem yazarken oldukça detaylı bakmak gerekiyor. Alanları net olarak belirlemek gerekiyor. Çünkü matematiksel olarak burada yani a noktasında farklı, b noktasında farklı, c noktasında farklı şekilde yapıların karşımıza çıkması çok muhtemel. O bulunduğu konumda değişken bir yapı olarak karşımıza çıkar. Ha! Bu şununla çelişkili değildir. Öyle bir yanlış algılama olmasın. Matematikte her şeyin, doğrunun cevabı tektir gibi bir algı yok, öyle bir şey yok... Aynı şartlar altında kurallarını aynı şekilde koyarsanız, o zaman bu söylediğiniz doğru. $2 + 2 = 4$. $2 + 2$ başka bir şey de olabilir. Ama oradaki toplama işlemini çarpma işlemini farklı bir şekilde tanımlarsanız ki bunlar var zaten. Klasik toplama işlemi üzerinden baktığınız zaman siz $2 + 2$ 'ye 4 diyebilirsiniz ve değişmez bu. İfade edebildim mi? Dolayısıyla matematiksel yapının ne olduğu net olarak ortaya konmalı, onun üzerinden iddianızı ispatlamanız gerekiyor... Yani neyi kullanacağını, neyi kullanarak bu sonuca ulaşacağını. Yani hangi materyaller var, hangi tip yapılar? Yani argümandan kastettiğim şu: reel sayılar üzerinde çalıştığınız zaman skaler toplamayı, skaler çarpmayı kullanacaksınız mesela. Bunlar belli olur. Eğer komplekste çalışacaksanız o zaman buradaki skaler toplama, skaler çarpma olmayacak. Oradaki Hamilton çarpması olacak, şu olacak, bu olacak. Yani bilinen gerçekler ortaya çıkacak. Ama kompleksin içerisinde reel sayıları alt küme olarak aldığınız zaman o zaman farklı bir durum ortaya çıkacak. Skalerleri de kullanma potansiyeliniz ortaya çıkacak. Dolayısıyla argümanları net olarak belirlemeniz lazım. Yani çalıştığınız alanı düzgün ifade etmeniz lazım. Açık bırakırsanız o zaman farklı anlamlar çıkar. Net konuşmak lazım. “Çok genel konuşmak” durumu pek mümkün değildir matematikte. Şartlarınızı ve konumunuzu kullanacağınız yapıları bile netleştirmekte fayda vardır.

1MA8 de benzer şekilde hem dilin özenli kullanılması hem de profesyonel konuşmayı içermesi açısından matematiksel ispatın dilsel özelliklerinden

bahsetmiştir. Düşüncelerin yazılı bir şekilde de kağıda aktarılması, kişinin bununla yetinmeyip karşı tarafa da anlamlı, açık ve anlaşılır gelebilecek bir konuşma tarzı takınması, sağlıklı bir iletişim tabanı hazırlayabilmesi ve ortak bir şekilde matematiksel ispat üzerinden anlaşabilme gibi noktalara değinmiştir:

1MA8: ... Çünkü sorunun çözümünü belki biliyor, içerde geçen tanımları biliyor ama onların hepsini bir araya getirip anlamlı şekilde karşı tarafa aktarmayı çok bilmiyor. İspat tekniklerini bu yüzden kullanıyoruz zaten. Ayrıyeten tabi şimdi herhangi bir makale ya da kitap okumak yani matematiksel bir kitabı okuyup oradan verilen şeyleri anlamak için de ispat tekniğine ihtiyacımız var... “olabildiği kadar hani sen aklındakileri kâğıda dökmeye çalış ama tabi bu anlamlı şekilde olsun... Baştan bana dedi ki, işte iki tane fonksiyonum var. Fonksiyonlarım şu şekilde özelliklere sahip, bunları çarpabilirim çünkü bu aralıkta tanımlılar” gibi, aslında bildiği ama o an sanki çok önemli değilmiş gibi düşündüğü şeyler var. Çünkü evet sen biliyorsun ama kâğıdın üstünde ben bunu görmüyorum. Yani başka biri okuduğu zaman onun da fonksiyonun hangi özelliklere sahip olduğunu görmesi lazım ... Yani herkes onu biliyor, çok yazmasına gerek yokmuş gibi düşünüyor ama orada işte n eleman Z ya da n eleman R yazdığınız zaman bile fark ediyor yazdığınız şeyin anlamı.

1MA8 gibi 1MA9 için de benzer bir durum söz konusudur. 1MA9 matematikçisine göre ispatlama teknikleri yapılan ispatın kolay anlaşılmasını sağlamaktadır. Ayrıca düzgün bir ispat yapmanın niteliğini güzel bir şekilde anlatabilme ve sunabilmenin belirlediğini, bunu karşısındakiyle ortak bir şekilde anlaşabilmeyle ilişkilendirerek yansıttığı görüşleri şu şekildedir:

1MA9: ... Yani teknik, ispatının kolay anlaşılmasını sağlar. Teknikleri, tabi ki ispat tekniğiyle ile gitmek zorundasın. Bu ispatın süsüdür teknik. Yani karşı taraf da “ne diyorsun ya” deyip aslında bazen kızıyoruz ya bazı insanlar “ya ne diyorsun güzel anlat” diyoruz ya bazen kızıyoruz ya. Adam[da] bir teknik yok yani. Belli bir teknik içinde adım adım yapılan ispatlarda kızmayız. Tamam ispatlamış ama “ne yapıyorsun artık yani sen” diyecek oluyorsun bazen, kızılıyorsun yani. “bu kadar da olmaz!” yani diyorsun. Orada yani belli bir tekniğin olacak. Hani süstür bu teknikler yani ve nasıl diyeyim o ispatı nasıl diyeyim, senin benim herkesin adam gibi anlayacağı yani nasıl diyeyim. “ya evet öyledir” deyip kimsenin karşı çıkmayacağı şeylerdir bunlar. Yani “evet öyledir” deriz yani hani. Hani kafası çalışan insanlar artık gördüğü zaman “ya tabi ki öyledir, tabi ki öyledir. Evet, evet” [diye] böyle kafa sallaya sallaya giderler yani böyle düzgün ispat yapılır.

Çalışmadaki matematikçilerden 7’sinin dilsel boyut kategorisinin dilin biçimsel özellikleriyle ilgili “vurgu genel olmadadır” alt kategorisinde görüşleri bulunmaktadır. 1MA2 ispatın genel ifadeleri barındırması gerektiğinden bahsederek “delil” ve “ispat” arasındaki ayrıma değinmiştir:

1MA2: ... Şimdi ben buna mesela bir örnek verirsem, işte onu sağlayan bir işte sayı alıp, işte ya da fonksiyon alıp onun teoremden bahsettiğim ifadeleri gerçekleştirdiğini gösterirsem bu delil olur. Ama en genel anlamda, işte bu bütün, ne görürsem göreyim, işte bunun doğru olduğunu gösterecek bir şekilde yaparsam o ispatı, o, ispat olmuş oluyor yani... Yani mesela işte fonksiyonlar, işte “polinomlar, fonksiyondur” [diyelim] atıyorum. Şimdi bu, bir tane polinom alıp, işte “ x^3 polinomu fonksiyondur” dersem, bu bir ispat olmaz yani. Ben “bütün polinomların” işte “fonksiyon olduğunu” gösterecek bir şeyler kullanmam gerekiyor ki onu işte ispatlamış olayım demek istedim aslında.

1MA8’in “matrisin boyutu ne olursa olsun”, “matrisin içindeki elemanları ne olursa olsun doğru olduğunu garantilemek” şeklinde vurguladığı ifadeleri, matematiksel ispatın genel olmasından bahsettiği görüşlerini yansıtmaktadır:

1MA8: ... İşte atıyorum, işte “ AxB ’nin determinanı BxA ’nın determinantına eşittir, bunu göster”. Mesela en basitinden aklıma gelen bir şey. Şimdi bunu göstermek için öğrencinin orada bir ispat yapması lazım. Determinantın tanımını biliyor. Matrisin tanımını biliyor. Ama şimdi ben diyorum ki “herhangi iki tane A ve B matrisi için bu eşitliğin sağlandığını göster”. Bu sefer öğrenci şey yapıyor. İşte bir tane kafadan A matrisi yazıyor bir tane B matrisi yazıyor. Bunları çarpıyor, determinantını alıyor. Yani sayısal olarak bunu yapmaya çalışıyor. Ama bizim orada istediğimiz, verilen çözümün, matrisin boyutu ne olursa olsun ve matrisin içindeki elemanları ne olursa olsun doğru olduğunu garantilemek. İşte bunu yapmak için öğrencinin orada küçük de olsa bir ispat yapması lazım. Yani belki çok büyük bir ispat gibi değil ama neticede işte “ A şöyle bir matris olsun” diye başlayacak işte “ A ile B ’nin çarpımı budur, determinantın tanımından bu gelir” gibi orada bildiği tüm tanımları birleştirerek bir ispat yazması lazım... ama soru o, yani “bunun böyle olduğunu göster”. Yani öyle olduğu zaman kafadan herhangi bir fonksiyon verip yapamıyorsun bunu. Mecburen genel bir çözüm yazman gerekiyor. Genel çözüm yazmanın yolu da ispatını yapmak.

1MA6 matematiksel ispatın genel olması özelliğiyle ilgili meslektaşlarıyla (bölümündeki matematikçiler gibi) benzer düşünmekle birlikte öğrencilerinde gözlemlediği bir duruma genellik ve genellenebilirlik bağlamlarında şu şekilde yer vermiştir:

1MA6: Zaman zaman şöyle şeylere de denk geliyoruz. Dersin dışında herhangi bir öğrenci geliyor ve diyor ki, “ben” diyor “hocam böyle bir şey buldum, bunu ispatladım” diyor. Şimdi ben buna bir kere öncelikle çok pozitif yaklaşıyorum bu çünkü bir çabadır, bir emektir, matematiği sevmektir. Ama genellikle onların bahsettiği şeyler cebir alanında genel hali ispatlanmış şeyler oluyor ve onlar hani onun özel halini kendisi hani bir örüntü oluşturarak ispatladığını düşünüyor, hoşuna gidiyor...

1MA6’nın burada bahsettiği, matematiksel ispatın genel olmasıyla örüntüden genellemeye ulaşma olarak görülen yapının birbirinden ayrılır

özelliğinin anlaşılmasına hizmet etmektedir. Yukarıdaki ifadesinde 1MA6'nın öğrencilerinde fark ettiği, örüntüden genellemeye gitmeyi matematiksel ispatla özdeşleştirdikleri farklı bir duruma işaret etmesidir. Bir başka ifadeyle, örüntüden hareket ederek ulaşılmış genellemeyi ya da genel ifadeyi, 1MA6'nın öğrencileri ispat sanmaktadır. Bu durumun neye karşılık geldiği, öğrenciler açısından matematiksel ispatın özellikleri başlığı altında aşağıda yansıtılmıştır.

4.1.2.2 Matematik Eğitimcilerine Göre Matematiksel İspatın Özellikleri

Matematikçilerden farklı olarak çalışmadaki matematik eğitimcilerinin matematiksel ispatın özellikleriyle ilgili bağlamsal boyut ve soyut-aşkınlık boyutu kategorilerinde görüşlerinin ağırlıklı olarak yer aldığı görülmektedir. Matematik eğitimcilerinin bağlamsal boyut kategorisindeki görüşleri matematiksel ispatın özelliğinin düzeye göre değişebileceği etrafında daha çok toplanmıştır. 2EA6 için öğrencinin yaş düzeyi ve dolayısıyla hazırbulunuşluğu ve bulunduğu sınıf seviyesine göre ispatın değişebileceğini yansıtan görüşü şu şekilde olmuştur:

2EA6: ... Şöyle, yani Piaget'e göre bizim ispatı öğretmemiz için çocuğun en az 12-15 [yaş] arasında olması lazım. 15'ten sonra ciddi anlamda ispat [verilir]. Çünkü [çocuğun] soyut düşünmeye gelmesi lazım. Şimdi anaokulunda ispat olur mu? Olmaz ama olur. Nasıl olur? Şöyle olur. O ispat değil işte o sorgulamayla ilgili bir şey...

Benzer şekilde 2EA2, 2EA5 ve 2EA7 matematik eğitimcileri, öğrencilerin yaşları ve gelişmişlikleri doğrultusunda ya da işlenen matematiksel konunun ya da verilecek matematiksel kavram ve içeriğin öğrenci seviyesine uygunluğu üzerinden, matematiksel ispatın özelliğinin değişebileceğini ifade etmiştir. 2EA7 tarafından daha erken seviyeler göz önüne alındığında matematiksel kavramın öğretiminde örüntüden genellemeye ulaşma şeklinde ve cebirsel düşünme odaklı ispata dayalı bir nitelik ön planda olabiliyorken, daha üst düzey bir matematiksel kavramın üzerindeki anlayışın ortaya çıkarılmasında ise ispatın formal olan niteliğinin daha çok ön planda olduğu ifade edilmiştir. 2EA2 matematik eğitimcisi, daha alt sınıf seviyelerinde nedenini açıklama ve gerekçelendirme niteliğinde olan ispata karşılık, daha üst sınıf seviyelerinde formal ve tümdengelimli bir ispat niteliğinden bahsetmesiyle matematiksel ispatın düzeye göre değişebileceğini belirtmiştir. 2EA5 matematik eğitimcisi, üniversite seviyesine gelmiş bir öğrencisinden beklediği ispat ile daha erken yaş ve sınıf seviyesinde herhangi bir

öğrenciden beklediği ispat bakımından değişiklik gösterebilen matematiksel ispatla ilgili özelliklere şu şekilde değinmiştir:

2EA5: ... Şekillerle bir şeyler açıklamaya çalışmışlar. Onu beklemiyorum yani ben. Biraz daha böyle tanımlara teoremlere uygun; disiplinli ve böyle formal, üniversite öğrencisinden bir kanıt bekliyorum... Elbette küçük yaşlarda olsalar ona göre bir şey sorulsa “nedenini açıklayın”, “neden böyle?” falan [gibi]... Orada sezgisel açıklamalarına da değer verip puan verdiğim oluyor...

Çalışmadaki matematik eğitimcilerinin matematiksel ispatın özellikleri ile ilgili soyut-aşkınlık boyutu kategorisinde ağırlıklı olarak (6) yer aldıkları bir diğer kategori olmuştur. 2EA1 ve 2EA7 matematik eğitimcileri, matematiksel ispatın öğretimsel anlamda somut duruşuna karşılık fen edebiyat matematiği dünyasında ya da formal anlamda soyut olması niteliğine dikkat çekmiştir. Diğer 4 matematik eğitimcisi, matematiksel ispatın özelliklerinden fiziksel karşılığının olmayışı, günlük çerçeveden, ihtiyaçtan ya da düşünceden bağımsız olması, gerçek hayatta bağlantısının kopuk soyut bir niteliğe sahip olmasından bahsederek ispatın soyut ve aşkın olma durumlarına işaret etmiştir.

Matematik eğitimcilerinden 2EA5, deneysel bilimlerin daha çok deney, gözlem ve elle tutulur işlerle meşguliyetine karşılık matematik disiplininin pozitif bilimlerin tanımına uymayan yapısını ispat üzerinden ele alarak matematiksel ispatın görselleştirilebilecek ya da fiziksel olarak eşleştirilebilecek bir niteliğinin olmayışı, soyut duruşunu ön plana çıkarmıştır. Benzer şekilde 2EA4 de matematiğin diğer bilimlerden ayrıldığı noktayı ispat üzerinden ifade etmekle birlikte matematiksel bağlamla gerçek bağlamın farklılığına işaret ederek bu kategorideki bir ispatın özelliğine şu şekilde katkıda bulunmuştur:

2EA4: ... Bir matematiksel ifade için düşünelim. Matematiksel ifadeyi günlük, günlük ifadelerden ayıran özellik ne? Mesela şimdi şeyi düşünelim. Mesela ikimizi içeren bir matematiksel ifade kuralım. Diyelim ki: “Ne Yasemin ne de X (katılımcı kendi ismini söylüyor) Bolulu ise Yasemin Bolulu değildir”. Böyle bir matematiksel ifade kurdum şimdi, oldu mu? Oldu... Yani “ne Yasemin ne de X Boluluysa” bu ifade zaten içinde “Yasemin’in de Bolulu olmadığını” saklıyor bu bilgiyi. Dolayısıyla “ne X ne de Yasemin Boluluysa Yasemin Bolulu değildir.” Böyle bir ifadenin matematiksel olarak doğru olduğunu gösteriyor. Şimdi buradaki mühim olan nokta şu; sen [özünde] Bolulu olsan da bu cümle doğru, Bolulu olmasan da bu cümle doğru. Dolayısıyla senin gerçekte ne olduğunla, bu matematiksel ifadenin doğruluğunun arasında bir ilişki yok artık. İşte matematiği diğer disiplinlerden ayıran şeyi bu. Matematik o yüzden totolojik bir ifadedir. Yani doğruluğu kendi içerisinde matematiksel...

Matematikçilere benzer şekilde matematik eğitimcilerinin tamamı, mantıksal boyut kategorisinde matematiksel ispatın özelliklerinden bahsetmiştir. Bununla birlikte matematikçilerden farklı olarak, matematik eğitimcilerinin görüşleri bu kategorinin “düzeni vardır” ve “tutarlıdır” alt kategorilerinde ağırlıklı olarak yer aldığı görülmüştür.

Matematik eğitimcilerinin 6’sı matematiksel ispatın kendine özgü bir geleneği, belli kurallarca yönetilen bir yapısı, bu kuralların dışında ilerletilenlerin kabul edilmediği bir düzeninden bahsetmiştir. 2EA4, matematiksel ispatta çıkarım kurallarının belli olduğunu belirtmiştir. Çıkarım kurallarına uygun çıkarımlar yapılıp yapılmadığının üzerinden hareket ederek, bu prosedürlerin yerine getirilip getirilmemesinin izin verdiği müddetçe matematiksel ispatın sınırını çizmiştir. Benzer şekilde 2EA3 matematik eğitimcisi de matematiksel ispatın içerisinde belli değişmez kuralların olduğunu ve bu kuralları işletmek gerektiğini belirtmiş, bu kuralların belirli bir sistem içinde işlediğini, sistem değiştirilse bile bu yeni sistemin kendi kurallarını işletmenin gerekliliğini vurgulamıştır.

Matematiksel ispatın özelliklerinden düzeninin olması şeklinde bahseden bir diğer matematik eğitimcisi 2EA5’tir. Önergeler mantığında matematiksel bir ispat yapılırken belli mantık kurallarının olduğundan bahsetmiş, matematiksel ispatın mantık kuralları çerçevesinde yapılması gerektiğini vurgulamış, bunun dışındakilerin kabul edilmediğini ifade etmiştir. Bu nedenle bu kuralların işletilip işletilmemesiyle ilgili ispatın düzeni olması gereğinin altını çizmiştir:

2EA5: ...Yani bir önermeyi ispatlayacaksa örneğin p ise q önermesini ispatlayacaksa “ q doğru olsun” diye başlayan öğrenciler oluyor. Mesela $\sqrt{2}$ ’nin rasyonel olmadığını ispatlayacağız. Rasyonel olmasın diye başlıyor zaten. Yani böyle bir ispat tekniği yok ama rasyonel olmasın diye başlıyor... Bunu böyle yapması matematikteki o resmî ispat dediğimiz hani... bir formal ispat var. Bir de informal ispat var. Formal ispatta böyle bir düzen yok. p ise q önermesini ispatlarken q doğru kabul etmek diye bir yöntem yok. Tamam, p ’yi doğru kabul edip ilerleyebilirsin, oradan q ’ya ulaşabilirsiniz. Buna doğrudan ispat deriz...

Matematik eğitimcilerinin 5’i matematiksel ispatın özelliğinden tutarlı olarak bahsetmiştir. Bu matematik eğitimcilerinin 3’ü hem düzen özelliği hem de tutarlılık özelliğinden bir arada bahsetmiştir. Bu ikili özellikten bahseden 2EA2’nin görüşü şu şekildedir:

2EA2:... Bu anlamda tabi matematiğin o sistematığının dışına çıkmaması gerekiyor. Çünkü matematik yapmanın belli kuralları var. Belli gelenekleri var. O gelenekler içinde bir

önermenin bir şeyin ya da bir bilginin neden doğru olduğunu, neden öyle olduğunu gözler önüne serebilmem için o yapı içinde, matematiksel yapı içinde, her zaman geçerli olduğunu gösterecek bir çalışma içinde olmam gerekir ... Bir gözlem yaptın, çalışmalar yaptın, bir ilişki ortaya çıkardın. Onun her zaman doğru olduğunu göstermen gerekiyor. Yani en azından içinde çalıştığın sistem, tabi içinde çalıştığın ne diyelim? Matematiksel sistem içinde doğru olduğunu ama diğerleriyle de çelişmemesi gerekir. Hani dedik ya Öklid geometrisi Öklid-dışı geometriler; tutarlı olması gerekir. Yani o yapının içine oturabilmesi gerekir...

2EA6 matematiksel ispatın belli bir düzeninin olduğunu anlaşılmaya hizmet eden durumdan, kuralı belli olan bir oyunda kural dışı harekette bulunmamak anlamında bahsetmiştir. Ayrıca bu kural işletilirken mantıksal yapısında bir tutarsızlık olmaması noktasını da içeren görüşü şu şekilde olmuştur:

2EA6: *Ya dediğim gibi şu an ben uzun yıllardır ispatla uğraşmıyorum ama şöyle söyleyebilirim: bu ispat [bu ispat dediğimiz şey] belli kuralı olan bir oyundur. Ona bakarsın [kurala göre, oyuna göre], ona göre yaparsın. Yaptığın işler doğru mu? İşte mantık silsilesine bakarsın tutarlı mı? Oradan gidebilirsiniz ama orada dediğim gibi ispatta kullanacağınız belli kurallar vardır oyun kuralı. Ona göre, o kuralların dışına çıkamazsınız, o kurallara göre onu test edersiniz...*

4.1.2.3 Matematik Programı Öğrencileri ile Matematik Öğretmenliği Programı Öğrencilerine Göre Matematiksel İspatın Özellikleri

Çalışmadaki öğrenci gruplarından matematik programı öğrencilerinin matematiksel ispatın özelliklerinden nasıl bahsettiği Tablo 4.3 üzerinden incelendiğinde, bu gruptaki öğrencilerin matematikçiler ve matematik eğitimcilerine benzer şekilde mantıksal boyut kategorisinde ağırlıklı olarak görüşlerinin yer aldığı görülmektedir. Bu kategoride ise bölümlerindeki matematikçilerle ortak bir görüşe sahip olarak matematiksel ispatın “iyi gerekçelendirilmiştir” alt kategorisindeki niteliğine işaret etmişlerdir.

Çalışmadaki 9 matematik programı öğrencisinden 8’i, matematiksel ispatın adım adım, sıra sıra, aşama aşama (öncelik ve sonralık gözetilerek) yapılmış, iyi açıklanmış, en ince ayrıntısına kadar detaylandırılmış niteliklerine yer vermiştir. Ayrıca bu programdaki öğrencilerden 3MÖ5, matematiksel ispatın ortaya atılmış teoriyi gerçekten açıklar nitelikte olması gerektiğini belirtmiş; 3MÖ7, yapılacak ispatın hangi aralıkta geçerli ya da uygun olduğu ya da hangi kümede çalışıldığının belirtilmesinin önemi üzerinde durduğunu ifade etmiş; 3MÖ8, belli bir yöntem kullanıldıysa bunun neden kullanıldığının özellikle açıklanmasını önemsemiştir.

3MÖ9 öğrencisinin ispatın özelliğinden iyi gerekçelendirilmiş olarak bahsettiği geniş çerçevedeki görüşü şu şekilde olmuştur:

3MÖ9: ... çünkü hani ispat dediğimizde bütün adımları tek tek ispatlamamız gerektiği için birbirine bağdaştırıp... Aslında nereden başladığı benim için çok önemli yani nereden başlamış hani. Yani acaba işine geldiği gibi mi başlamış ya da bir şey ortaya, mesela bir yerden başladı diyelim bir önergeyi (önermeyi kastediyor) ispatlamak için, acaba o önergeyi önceden ispatlaması da gerekiyor mu, çünkü belki de o öyle değil yani. Hani ispatlanmış şeyi acaba en başta yazdığı şeye de bakarım çünkü en temelden başlamamız gerektiği için onun da bir ispatı var mı diye bakarım yani çünkü belki de yanlış da olabilir yani böyle bir şey var mı acaba diye kuşkulanırım... Bir şey ispat olması için en başta yazılan şeyin yazılan önergeden sonraki yapılan her adımın bir şey olarak anlatıl... yani bir şeyden nasıl çıkarıldığını orada göstermemiz gerekiyor. Mesela eşittir koyuyoruz yani ispat yaparken, eşittir koyduğumuzda neden eşittir olduğunu kesinlikle göstermemiz lazım. Bir adımdan en sondaki adıma geçerken aradaki adımları yazmazsak bu ispat değildir bence yani. Çünkü o zaman ispat neresinde bunun, aradaki adımları yazmazsak? O adımlar[dır] asıl ispat. Çünkü nasıl geldiğini biraz uzun olacak ama nasıl geldiğini açıkladığımızda, ispat budur benim için. Yani aradaki o bazen çok kısa ispatlar oluyor insan bir kuşkuya düşüyor acaba yani bu ne yani, nasıl bu kadar kısa, genelde ispatlarımız uzun olduğu için. Benim için budur yani, o adımların tek tek yazılması gerektiği. ... Ve yani önerge verildikten sonra ispatlanacak şeyle ilgili, aslında daha demin söylediğim şey de buna denk oluyor yani, aradaki adımlar yazılınca en son ispatlamamız gereken şeyi bulmamız gerekiyor. Yani onu bağdaştırmamız gerekiyor önergeyle yani aradaki adımlar yazıldığında bu zaten bulunmuş olur...

Çalışmanın diğer bir öğrenci grubunu oluşturan matematik öğretmenliği proramındaki öğrenciler açısından Tablo 4.3 incelendiğinde ise tüm katılımcı gruplarda ortak olan mantıksal boyut kategorisinde, bu gruptaki öğrencilerin tamamının görüşünün yer aldığı görülmektedir. Böyle olmakla birlikte, matematik öğretmenliği programı öğrencileri bu kategorideki “doğruluğunu/yanlışığını garantileyen yapılar vardır” alt kategorisinde ağırlıklı (7) bir şekilde yer almıştır. Bu anlamda, matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin görüşleri bu çalışmadaki matematikçilerin çoğu gibi matematiksel ispatın dayanak noktalarıyla ilgili olan özelliğinde yoğunlaşmıştır.

Matematik öğretmenliği programı öğrencilerinden 4EÖ8 yapılacak ispatın doğru temellere dayandırılması gerekliliğini önemsemiştir. 4EÖ1 ve 4EÖ9 öğrencileri, daha önce doğru olduğu kabul edilmiş dayanaklar üzerinden; 4EÖ5 ve 4EÖ7 öğrencileri, doğruluğu ispatlanmış bilgilerin ya da matematiksel sonuçların temelinde ispatın yapıldığını ifade etmiştir. 4EÖ5 öğrencisi, ispatlama sürecinde

daha önceden ispatlanmış bilgilerden yola çıkılarak faydalanıldığından şu şekilde bahsetmiştir:

4EÖ5: ... bir akademik çalışma olsun veya bilimsel bir çalışma olsun. Mesela bilimsel çalışmalarda yeni bir şey bulunmaya çalışırken kanıtlanmış ispatlanmış bilgiler kullanıldığını düşünüyorum. Yani eğer ispatlanmamış bir bilgiyi yeni bir bilimsel çalışmada yeni bir ispat sürecinde kullanamayız. Bir ispat sürecinde kullanabilmemiz için o bilginin daha önceden ispatlanmış olması lazım ki bizim oluşturacağımız sürece faydası olması gerekiyor...

Bu bölümün ispatın özellikleri başlığının altında katılımcı gruplardan bağımsız şekilde ele alınan dilsel boyut kategorisinde ‘vurgu genel olmadadır’ alt kategorisi altında örneklenen 3MÖ2 ve 4EÖ6 öğrencilerinin her ikisi de matematiksel ispatın genel olması yönüne katkıda bulunabilecek görüşlere sahip olmakla birlikte bu iki görüşün arasında ince bir ayrım vardır. İlkinde (3MÖ2) belli bir matematiksel yapı üzerinde düşünerek (hipotez ve sonuç şeklinde ayıklama) hipotezden sonuca giderken üzerinde çalışılan kümeden (örneğin reel sayılar) alınabilecek her bir sayı için ya da bu kümeden hangi sayı alınırsa alınsın doğru sonuca varılmasıyla ilişkiliyken, diğer öğrencideki (4EÖ6) genelliğin vurgusu 1MA6’nın bahsettiği örüntüden ulaşılmış genelleme tipidir.

4.1.3 Okul Matematiği ile Üniversite Matematiği Arasındaki Gerilim

Katılımcıların matematiksel ispata yönelik algılarının üçüncü teması “okul matematiği ile üniversite matematiği arasındaki gerilim” şeklindedir. Bu tema, katılımcıların üniversite öncesi (en yakın karşılaştırma seviyesi olarak lise matematiğini baz alma) matematikle ilgili deneyimlerinin (düşüncelerinin), üniversitede karşılaştıkları matematikle ilgili deneyimleri (düşüncelerinin) arasında görünen bir farklılığa işaret ederken, tam da bu geçişte matematiksel ispatla karşılaşmanın katılımcılar tarafından gerilimi tetikleyen bir faktör olarak ele alınmasıyla ilgilidir. Aynı zamanda bu seviyelerdeki matematiğin amaç ve odaklarının farklılığından kaynaklı etkilerin ispata yansımaları içermektedir. Katılımcıların okul matematiği ile üniversite matematiği arasındaki gerilime işaret eden görüşlerinden *alışılmayan tarz, lise matematiği ile üniversite matematiği arasındaki fark, problem çözmeye karşı ispatlama, işlemsele karşı kavramsal, doğrudan kabul etmeye karşı sorgulama, sınav sisteminin getirdiği alışkanlıklar, yükün üniversiteye bırakılmasının yarattığı gerilim, boşluk hissi, öğrenci-öğretmen arasındaki anlaşmazlık* ve diğer kategorileri ortaya çıkmıştır. Bu gerilim unsurları ya öğrenci katılımcıların görüşlerinin doğal bir yansıması olabilmekte ya da

akademisyen katılımcıların fark ettikleri bir tespit niteliği taşıyabilmektedir. Bu başlık altında ve ilerleyen kısımlarda kısaca ‘gerilim’ ifadesi kullanılacaktır.

Aşağıda her bir kategorinin ne anlamaya geldiği önce açıklanmış, sonra da ilgili kategoride görüşü bulunan katılımcılardan örnekler paylaşılmıştır. Her ne kadar katılımcıların görüşlerine yukarıda ifade edilen bu kategoriler üzerinden bakılmaya çalışılsa da bazı katılımcıların görüşleri gerilimin kaynağını oluşturan unsurlar açısından net bir şekilde ayıramamaktadır. Örneğin, bu tema altında bazı katılımcıların görüşleri tekil bir gerilimle işaretlenebileceği gibi daha geniş ve kompleks bir şekilde iç içe kenetlenmiş ya da birbirinin uzantısı olan birleşik gerilimli bir yapıda da olabilmektedir. Böyle bir durumda katılımcının/katılımcıların baskın olan görüşü temel alınarak kategorilendirmeye gidilmesi uygun olmuştur. Bu doğrultuda katılımcıların bu tür birlikteliklerini içeren gerilimle ilgili söylemlerinde daha çok öne çıkardığı düşünceleri tutulmuştur. Bu nedenle kategorileri bu anlamda okumakta/değerlendirmekte fayda olduğu düşünülmektedir.

Katılımcılar bu tema altında en çok *doğrudan kabul etmeye karşı sorgulama* kategorisinde toplanmıştır. Katılımcıların okul matematiğinde işlenen ya da ele alınan konuların, tanıtılan matematiksel bilgilerin, spesifik bir problemin çözümünde kullanılan formüllerin, henüz ispat gibi bir kavram öğrencinin bilişsel gelişiminde olmadığı için direkt olarak kural ya da hazır bilgi şeklinde verilmesine karşılık üniversite matematiğinde bu kuralın ispat aracılığıyla nereden geldiğinin anlaşılması, o bilginin nasıl ortaya çıktığının sorgulanması şeklinden bahsettikleri doğrudan kabul etmeye karşı sorgulama kategorisinde 15 katılımcının görüşü bulunmaktadır. 4EÖ9 üniversitede bazı matematik konularını ispat sayesinde nereden geldiğini sorgulamaya ve anlamaya başladığını fakat kendi öğrencilik zamanında bazı matematik konularını öğretmenleri ispat üzerinden verselerdi “anlayamazdım” söylemini bizzat staj okulunda girdiği bir derste deneyimlemiştir ve bu duruma hak vermiştir. İlk başlarda öğrencilere bölmeyle ilgili konuyu anlatırken nereden geldiğine dair fikirleri aşılacak için çok çabaladığından bahsetmiştir. Daha sonra sorgulamaya dayalı götürmek istediği dersinden öğrencinin düzeyine ispat tarzının hitap etmediğini farketmesi üzerine vazgeçmiştir. Üstelik “ben biliyorum, sorguluyorum, onlar kuralı istiyor” anlaşmazlığı durumu vazgeçmesinde daha da etkili olmuştur. Aşağıda 4EÖ9’un kuralı veren öğretmene dönüşme hikayesi bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

4EÖ9: ... alan derslerimizde mesela bir şey gördüğüm zaman “A!” diyorum mesela atıyorum, integral görüyorum ama integral ne demektir, nereden geliyordu bu integral? İşte Riemann toplamını gördüğüm zaman ya bu Riemann toplamı nereden geliyor bunun anlamı nedir? Bunun ispatını nasıl yapmıştık? Hani onların hepsini bildiğim için tabii ki bir soruyu çözerken kafamda çok daha oturarak çözüyorum, çok daha fikir yürütebiliyorum... mesela staja gidiyoruz şimdi atıyorum nedir, hangi konudur? Mesela geometri konusu diyelim. Geometri konusunu anlatırken, geometriden nedir mesela? Üçgenler işte iç açıları toplamı 180 derece. Bunu öğrenciye direkt söylüyorsun ama o 180 derecenin nereden geldiğini, nasıl oluştuğunu hani ben biliyorum. Şimdi onu öğrenciye aslında açıklamak istiyorum. Hani ispatlamak istiyorum, göstermek istiyorum ama onun o düzeye inemeyeceğini bildiğim için o beni sınırlandırıyor. Bazı noktalarda bu durumda hani diyorum “yapsam mı acaba? Öğrencilere göstersem mi?”... İşte dendi ki, “öğrencilere bakın böyle gösterirseniz hani ispatı ile gösterirseniz çok daha iyi akıllarında kalır”... dediler [hocalarımız]. Üniversite l’de bize bunu benimsettiler. Ama gittiğimiz staj okullarında öğrencilerin düzeylerine baktığımız zaman ya öğrenci hani iç açıları ölçüleri toplamı 180 derece olmayı bile hani hiç sorgulamıyor... mesela, bu bölmenin anlamını biz üniversitede, ben burada öğrendim. Yani belki ilkokulda veren hocalarım vardır. Şimdi bana, onu düşünüyorum. Onu direkt ilk bölmeyi öğrendikten sonra mantığını o şekilde verselerdi büyük ihtimal ben anlayamazdım... “Ha!” dedim. “Demek ki oradan geliyor” Ama bölmeye daha yeni tanışmış, bölme ile yeni tanışmış birine direkt özel olarak “bak bu, buradan geliyor; aslında bu, bu demek” dediğimizde eminim karıştıracaktır yani. Ben ilk başta buna ihtimal vermiyordum ya karıştırmaz kesinlikle daha iyi anlar diyordum ama staja gittiğim zaman çok daha rahat gördüm bunu. Öğrenciler artık ... şunu istiyorlar, “bize kuralı ver” veya o düzeyde [sınıf düzeyinde] olan, “bize kuralı ver bize kuralı uygulayalım, tamam”. Yeri bu kadar. Ve bunu veren öğretmeni daha çok seviyorlar... ilk başta çok fazla yani boğazım ağrıyordu. Böyle bir şeyleri anlatmaya çalışıyordum... işte “bak bu, buradan gelebilir, şöyle olur gelir bak...” tarzında. Yok! hocam verim alamadım sıkıntı. Ondan sonra ikinci yöntem olarak bu kural vermeyi gösterdim. “Bakın” dedim. “Bunu gördüğünüzde bunu yapacaksınız” Açtım soruyu, “hadi çözün bakalım” dedim. Öğrenciler çözüyor, derse herkes aktif katılmaya çalışıyor. “Hocam ben yapabilir miyim? Ben yapabilir miyim” tarzında sonra sizi ayıryeten bir sevmeye başlıyorlar hocam. Mesela ders “ya bu hocanın dersi gelse de o derse girsek” falan tarzında [düşünüyorlar]. Çünkü herhalde öğrencilere o çok kolay geliyor artık. “Ha, tamam, biz bunu yaparız, kuralını öğrendik biz her şekilde yaparız” kafasına giriyorlar...

Gerilimle ilgili düşüncelerinden *alışılmayan tarz* kategorisini oluşturacak şekilde bahseden 12 katılımcı bulunmaktadır. Bu kategoride katılımcıların gözünden ispatla ilgili, ispatın doğasının ya da mantığının ne olduğunun bilinmemesi, ispatla yapılan şeyin daha önce pratik ettikleri herhangi bir şeyle benzeşmediğinin ifade edilmesi, ispat yaparken ne yapılmaya çalışıldığının

anlaşılmaması, hele ki üniversiteye özellikle bölüme yeni gelenler olarak yeni bir tarzla karşılaşmanın yarattığı bir gerilim vardır. 4EÖ8 herhangi bir derste yaptıkları şeyleri dikkate aldığında soyut matematikte karşılaştığı ispatın kendisine/kendilerine farklı geldiğini ifade ettiği için alışılmayan tarz kategorisine örnek olarak verilebilir:

4EÖ8: *Yani nasıl söyleyebilirim... Böyle daha çok hani biz işte soyut matematikten örnek vereyim ... o güne kadar alışık olmadığımız bir şekilde ders işlediğimiz için...*

1MA3 ise girdiği derslerinde bazen öğrencilerde ispatla ilgili gördüğü/fark ettiği durumlardan bahsetmektedir. Özellikle birinci sınıf öğrencilerine ispat yaparken saçma gelen ya da derste bir teoremin ispatını yaparken öğrencilerin ne yapılmaya çalışıldığını anlamayan yabancı tavırlarından bahsettiği için 1MA3 alışılmayan tarz kategorisindedir:

1MA3: *... Ama şey var peki mesela atıyorum bir kabul ile yola çıkıyorsak niye biz onu alıyoruz? Mesela bir “a” doğal sayı ya da epsilon şu olsun diye işe başlıyorsak “ben onu niye alıyorum? Bana saçma geliyor” işte bunları bir kavramayabiliyorlar. Özellikle birinci sınıf öğrencileri daha yeni oldukları için soyut matematik dersinde ispatları böyle daha fazla haşır neşir oldukları için...Gözlerinden anlaşıyor zaten. (Gülüyor). Sınıfta dönüp arkaya baktığınız zaman hepsinin bakışı yani “ne diyor ne oluyoruz, neredeyiz” bir bakışları var...*

2EA5 mezun olma aşamasına gelmiş öğrencilerine hala ispatın mantığının yapay ve işlevsiz gelmesinden ve yabancı olarak görülmeye devam etmesinden bahsetmektedir. Bu düşünceleriyle 2EA5 alışılmayan tarz kategorisine örnek olarak verilebilir:

2EA5: *... Yani üniversiteyi bitirecek ama ben matematikten mezun oldum ama hiç ispatla ilgili bir şeyler bu dersler onlara sorsan istemiyorlar. Zaten büyük kısmı bu “Cebir olmasın, Lineer cebir, Analiz bunlar nereden çıkıyor, bunları kullanmıyoruz da” gibi düşünüyorlar...*

Gerilimle ilgili düşüncelerinden *yükün üniversiteye bırakılmasının yarattığı gerilim* kategorisini oluşturacak şekilde bahseden 11 katılımcı bulunmaktadır. Bu kategoride katılımcılar ispat fikriyle temellendirilen matematiksel yapıların şimdiye kadar açılmayıp üniversitede birden ve yoğun bir şekilde ele alınmasının ya da üniversite öncesinde geçirilen/üzerinde durulmayan ispatın/ispatla ilgili olan mantığın yerini üniversiteye bırakmanın bir yük oluşturduğu durumundan bahsetmektedir. 4EÖ4 ispatla ilgili fikirlerin ilk oluşmaya başladığı yerde çok fazla önemsenmeyen ya da üzerinde durulmayan yapısının üniversite seviyesinde önemli olmaya başlaması fakat daha önceden ispatın mantığı öğretilmediği için şu an bu

durumun üzerlerine binen yük şeklindeki etkilerinden yakınmaktadır. Aşağıdaki alıntısında 4EÖ4 o zamanlar olarak liseyi, şu an olarak üniversiteyi kastetmektedir ve yükün üniversiteye bırakılmasının yarattığı gerilim kategorisine örnek olarak verilebilir:

4EÖ4: ... Ya mesela bir sorunun birden fazla çözümü oluyordu. Hoca onları çözüyordu çözüyordu, sonra bunun ispatını gösteriyordu hani ne kadar mantıklıymış diyorduk o zamanlar şaşıryorduk ama üstünde de pek durmuyorduk hani. “Siz bunu bilin, ispatı o kadar da önemli değil” noktasına geliyorduk. Ama şu sürece gelince bizim olan, bizim için önemli olan ispat oldu aslında, nereden geldiği oldu. O zamanlar o kadar önemli değildi ve çok hani önemsememiştik yeter ki soruyu çözeyim mantığı vardı ama şimdi öyle olmadı. O yüzden de zorlanıyoruz bence. Yani ilk başladığımızda bunlar bize verilmiş olsaydı şu o kadar zorlanmazdık. Yani bu bize böyle öğretilmedi şu an biz de zorlanıyoruz.

Benzer şekilde 1MA7 de, bölüme gelen öğrencilerinde gözlemlediği ve üzerlerine binen yük ile ilgili bazı durumlardan bahsetmiştir. Üniversite öncesi ispatla ilgili fikirlerin neredeyse lisede hiç verilmediğini, belki bir nebze mantık dersinde verilse de bölüme gelen öğrenci profilinin bu kısımlardaki eksikliğini görebildiğini, genel olarak üniversiteye ispattan yoksun bir şekilde geldiklerini, bu nedenle üniversitede ilk karşılaştıkları için (ya da karşılaşıyor olmaları nedeniyle) zorluk çektiğinden bahsettiği için bu kategoridedir:

1MA7: ...İspatı yapmada çok zorlanıyorlar... (kaynağını açıklıyor) Verilen bir şeyi hiç ispatlayarak buraya gelmiyorlar... Ya büyük oranda herhâlde üniversiteye geldiklerinde karşılaşıyorlar. Bilmiyorum lise eğitiminde [var mı] şimdi kendi oğlum var oradan biraz gördüğüm kadarıyla pek ispatı üzerinde verilmiyor, yani kalıp olarak bir teorem veya bir şeyi kalıp olarak ezberletiliyor veya biraz altyapısı verilse de ispat yapıldığını zannetmiyorum hiç. İspatla burada karşılaşıyorlar. Yani, birinci sınıfa gelen öğrencilerimiz de genelde ispat şeyi, hatta bu mantık dersindeki o temel mantıksal düşünce kısmı bile çok eksik geliyorlar maalesef.

Gerilimle ilgili düşüncelerinden öğrenci-öğretmen arasındaki anlaşmazlık kategorisini oluşturacak şekilde bahseden 9 katılımcı bulunmaktadır. Bu kategorideki katılımcıların ikili anlaşmazlıkları söz konusu olabilmektedir. Öğrenci açısından, kendi bölümündeki öğretim üyelerinden onlar gibi gelişmiş matematiksel düşünme kimliğine (henüz) bürünememiş bireyler olarak kendilerini bu matematiksel seviyede anlayabilmelerini bekledikleri fakat bunun göz ardı ediliyor olması ya da öğrencilerinden kendileri gibi düşünme şekline sahip olmasını beklediklerini, bunun dışındaki yaklaşımlara çok değer vermedikleri şeklindeki

söylemleri bir anlaşmazlık yaratmaktadır. Aşağıdaki alıntı 3MÖ8 öğrencisi tarafından anlaşmazlıkla ilgili bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

3MÖ8: *...ben şöyle düşünüyorum, ispat yollarının insandan insana değişebileceğini düşünüyorum. Elbette bazı temel sayısal derslerin ispatı birebirdir ve aynıdır, ona hiçbir şekilde sözüm yok ama dediğim gibi soyut dersinde mesela ispat yaparken benim kafamı karıştıran şey benim ispat etme yöntemim böyle ve ben sonuçta, $2+2$ 'nin 4 olduğunu göstermekse bana verilen sorun, ben de bunu kendi yollarımla bu şekilde ispat edebiliyorum demek. Ama hocamıza göre...onun ispatı hepsine göre değişiyor. Ve burada işler birbirine giriyor, bende stres yapıyor yani asıl amacımız $2+2$ 'nin 4 olduğunu göstermekse hepsinin farklı yolları olduğu için bu kabul edilmiyor. Madem soyut düşünce herkesten herkese göre değişiyorsa neden soyut matematikte tek bir ispat yöntemi var ve sadece o kabul edilmeli gibisinden düşündüğüm zaman da dediğim gibi hem bir telaş ve stres kaplıyordu beni... Mesela ben $2+2$ 'nin 4 olduğunu $A+B$ 'den veya onun üzerinden anlatmayı ispat olarak görüyorsam, o yolu izlemek istiyorsam bu bazen hocaya göre doğru gelmiyordu, dolayısıyla oradan puan kırıyordu ama ben onun hani $2+2$ 'nin 4'e eşit olduğunu bir şekilde nezdinde kanıtladığımı düşünüyordum ve ispat ettiğimi düşünüyordum ama burada da hocaların öğrettiği yollardan gitmemiz gerektiği için de kişiden kişiye göre değişiyor dedim...*

Öğretim üyesi açısından ise, kendi bölümündeki öğrencilerinden artık lisedeki gibi mekanik olarak işletilen süreçlerdense mevzuya daha çok ispat üzerinden bakabilme, yapının üzerine teorik düşünme ve inceleme yapmalarını beklediklerini fakat bunun hala oturmamasını anlayamadıklarını, yani eski gelenekteki gibi düşüncelerinin hala devam etmesini algılamayadıklarıdır. Bazı öğretim üyeleri için öğrencilerinin seviyelerine bağlı olarak birbirleriyle etkileşim açısından ayrı düştükleri ya da bazen birbirlerinin farkına varamadıkları, bazen onlara geçmeyen durumlarla karşılaştıklarını ki her zaman tam anlamıyla öğrenciye geçmeyen matematikte bir şeyin geride kalıyor olmasının bu tür anlaşmazlıkları besliyor olmasıyla ilişkili görmektedir. Aşağıdaki alıntı 1MA2 öğretim üyesi tarafından anlaşmazlıkla ilgili bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

1MA2: *Ee bir teoremin ispatı eğer anlaşılabilirse öğrenciler açısından da bizim açımızdan da çok faydalı oluyor. Ama matematik alanında çok anlaşılması güç, yani bizim tarafımızdan bile anlaşılması güç olan teoremler var. Onların ispatlarını biz aktarmaya çalışıyoruz ama karşıdaki öğrencide karşılık bulmuyor bazen. Bununla da çok sık karşılaşıyoruz. O işte karşılık bulmadığı zaman da ders sadece belli bir çözüm yöntemini soruya uygulamaktan öteye geçemiyor maalesef...Anlaşılması gerekiyor ispatın ki, öğrenci onu uygulayabilsin. Bunu her zaman yakalayabiliyor muyuz? Ondan şüphelerim var yani. Her zaman tam anlamıyla öğrenciye geçmiyor... Çünkü böyle analitik düşünebilen, bir şeyler arasında neden sonuç ilişkisi kurabilen öğrenci sayısı çok az oluyor ya da şey oluyor, düşünmek istemiyorlar*

yani. Hani adım adım ilerlemek çoğuna çok zor geliyor. Sadece o teoremi bir yerde kullanmak daha kolay geliyor. Bunun için uğraşıyoruz aslında ama belki bizde de hata vardır bilmiyorum. Geçemediğimiz [bunu aşamadığımız] çok oluyor yani. Hani ben öğrencilerin seviyelerine de bağlıyorum bunun şeyini, belki bizim hani eksiklerimiz de vardır tam olarak öğretebilme açısından belki eksiklerimiz vardır ama elimizden geleni yaptığımızı düşünüyorum. Ama karşılık bulma konusunda işte eksikler var...Yani bu sıkıntı şuradan kaynaklanıyor. Mesela biz teoremi anlıyoruz. Nereden geldiğini işte, onun temelindeki matematiksel ee bilmemiz gereken kavramları biliyoruz. Ya da işte onun nasıl bir düşünceyle o şekilde ispatlandığını kavrayabiliyoruz. Ama öğrenciye geçirirken öğrencinin eksikleri oluyor. Mesela işte o kullandığımız atıyorum, bir tane eşitsizliği ya da kullandığımız bir uyarlamayı diyeyim, genelde ispatlarda bazı şeyleri hani kolaylık olsun diye baştan hani tahmin yürütüp onu devam ettiriyoruz. Bazı çeşit ispatlarda diyeyim. Onları mesela direk kafasından göremiyor [öğrenci]. Çünkü onun için belli bir şey, aşama gerekiyor. Belli de bir birikim bu, bu şekilde düşünmeyi bilmesi gerekiyor. Ya da işte pratik, pratiği olması gerekiyor vesaire. O pratik derste bir anda kazandırabilecek bir şey değil. Biz yapıyoruz ama eminim eksiktir yani, çünkü her zaman ee matematikte öğrenilmesi gereken şeyler çok fazla var yani. Özellikle bu teori boyutuna geçtiği zaman. Öyle olunca da bütün hepsini, hepsi öğrenciye direk geçmediği için zorlanıyorlar yani. Biz de, biz de o bilgilerin eksikliğinin farkına varamıyoruz. Mesela o bilgiyi bilmesi gerekiyor ama o bilgi yok öğrencide. Ee biz onun var olduğunun üzerinden devam ettiğimiz için bizim hatamız bu olabilir belki. Ama işte sürekli de geçmişe dönüp işte “şu şuydu, bu buydu” diye devam edersek bu sefer yapacağımız şeyden kopuyoruz...

Gerilimle ilgili düşüncelerinden *işlemsele karşı kavramsal* kategorisini oluşturacak şekilde bahseden 9 katılımcı bulunmaktadır. Bu kategoride katılımcılar, okul matematiğinde deneyimlediği şekliyle öğrenciler açısından uygulanacak prosedürler vardır ve bunlar işletilerek mekanizma (matematik) üzerine çalışılma eğilimi vardır. Matematiksel işin anlamlandırma boyutu ya da yapının kavramsal olarak ne anlama geldiğinin düşünülmesi üzerine herhangi bir gayret yoktur hatta öğrenci açısından böylesi bir ihtiyaç da yoktur. Üniversitedeki ispat tam da bu noktada öğrencinin algıladığı sınırların içerisinde mevcut değildir. Bu nedenle bazı katılımcılar ispatla karşılaşan öğrenciler açısından “kısa ispatlar sevilir, uzun ispatlar atılır”; denenerek görülen deneysel çabalar anlamlıdır fakat bunların genelleştirilmesi ya da her zaman benzer sonuçları üretilip üretmeme şeklindeki bir üst kavrayış meselesi önemsizdir; sınav gibi bir ortamda bir tane basit ispatlama etkinliğinin üzerine yoğunlaşmanın aksine o sorunun es geçilerek daha çok işlemsele ya da çözümleme gerektiren sorulara yönelme gibi durumlara işaret etmiştir.

Aşağıdaki 2EA4'ün görüşünü yansıtan alıntı, işlemsele karşı kavramsal kategorisine örnek olarak verilebilir:

2EA4: ... öğrenciler prosedür olarak matematikte her şeye yöneliyorlar. Süreci işletmek odağı, odakları süreci işletmek oluyor sonuçta. Ama o süreci anlamlandırmak üzerine yani matematiksel düşünmek üzerine pek bir eğilimleri olmuyor... öğrencilerin ispat konusu, ancak bir dersin konusu ise, mesela cebirde biraz daha ispat ön plana çıktığı için orada “şu nasıl ispatlanır” diye bir özellikle bir kaygıları oluyor ama onun dışındaki matematik derslerinde yani prosedür ağırlıklı, işlem ağırlıklı matematik derslerinde ispatla karşılaşmak, onların beklemediği bir şey olduğu için afallatıyor onları. Temel farklılık bu. Dolayısıyla matematiksel düşünme sürecinde öğrencilerin ispata yönelik bir kaygıları yok. Asıl sorun bu... Yani şey akıllarına geliyor: örnek çözelim de birkaç örnek, bu örneği çözdüğümüzde o sürecin nasıl işlediğini görelim ve bundan sonraki örnekleri daha önceki örneğe benzeterek yürütmeye çalışalım. Öğrencilerin genel eğilimi bu. Şöyle bir eğilim yok öğrencilerde: “bu örneğin, bu örnekteki yapısal, bu örnekteki yapı ne? nasıl bir biçimde ben bu soruda çözüme ulaştım? Acaba biçimi anlayabilir miyim? Onu anlarsam, ben bundan sonraki sorularda da o biçimin olup olmadığını görebilirim” şeklinde bir bakış [açısı] geliştirme gayretleri yok. Asıl [işte], ispat da biraz bu bakışla ilgili bir şey. Yani matematikte birtakım prosedürler yürütüyorsunuz. Sonra dönüp bu prosedürlerin niye doğru olduğu üzerine düşündüğünüzde filan artık, mesele ispatın konusu olmaya başlıyor. Öğrencilerde bu eksik.

Gerilimle ilgili düşüncelerinden *problem çözmeye karşı ispatlama* kategorisini oluşturacak şekilde bahseden 7 katılımcı bulunmaktadır. Bu kategoride katılımcılar, verilen herhangi bir matematiksel problem ya da genel haliyle soru çözmekle bir ispat yapmak arasındaki temel ayrıma işaret etmektedir. Okul matematiği seviyesinde öğrenci, daha çok bir konu ya da matematiksel bir kavramı anlayabilme, öğretim programında hedeflenen kazanımlara ulaşabilme, temel matematiksel becerileri kazanabilmek için standart ya da rutin problemlerle karşılaşır ve bu problemler üzerinden ilgili matematiksel içeriğe aşina olur ve konu/kavramla ilgili bol alıştırmaya yaparak ve örnek teşkil edecek benzer uygulama sorularını çözerek matematiksel bilgilerini sağlamlaştırmaya çalışır. Bu sebeple sıklıkla benzer problemlerle haşır neşir olarak ustalaşırlar ve güven alanlarının dışına çok çıkmazlar. Bu kategorideki katılımcılara göre lise matematiğinde problem çözmenin baskın oluşu üniversite matematiğinde ise ispatlamanın yer alışı matematiksel etkinliğin doğasını değiştirmektedir. Hatta lisedeki gibi problem çözmeyele karşılaşmayı beklerken ispatlamayla karşı karşıya kalmanın kendilerini (zamanında) afallattığını belirtmiştir. Bu durum da bir gerilim faktörü

oluşturmuştur. 4EÖ6 liseden üniversiteye geçince, ilkinde daha çok problem çözmeye dayalı bir matematik eğitimi aldığını hatta lisede türev ve integrali bunlarla ilgili çıkabilecek soruları çözebilmek için öğrendiğini düşünmektedir. Üniversite matematiğinde türev ve integralin ne anlama geldiğini artık soru çözmekten başka bir şeyle ilgili olduğunu idrak etmesi ve genel olarak ispatla karşılaşması onun neye uğradığını anlamamasına neden olmuştur. Bu açıdan problem çözmeden ispatlamaya dönüşen matematiksel etkinliğin doğasına işaret eden görüşlere sahip olduğundan 4EÖ6 bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

4EÖ6: ... Birinci sınıfta da ispatla karşılaşınca böyle neye uğradığımı anlayamadım... Zaten kapsamlı bir matematik eğitimim yoktu. Sadece toplama çıkarma ve problem çözmeye dayalı bir matematik eğitimi almıştım lise hayatımda... Ben sadece soruyu çözebilmek için onları öğrenmiştim ve türevin integralin tam olarak ne olduğunu bilmiyordum bile... Üniversitede bu tarz konularla karşılaşınca... bu sefer ispatla karşılaştım... Konuya hâkim olamadan konuyu sadece çözmekten ibaret kaldığım için bir anda ispatla karşılaşınca benim için zor oldu...

1MA2 şu an kendi öğrencilerinde fark ettiği, kendisinin de zamanında ispat yerine daha çok problem çözme şeklinde soru beklediğini belirtmiştir. Bu durumda 1MA2 kendi öğrenciliğini anımsayarak, şuanki öğrencileri üzerinden “onların böyle düşünmesini anlayabiliyorum, beni de afallatmıştı” şeklinde düşündüğü için bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

1MA2: Yani mesela bu üniversite yıllarımızdan kalma bir şey de olabilir belki. İşte mesela bir final sınavı, bir vize sınavı falan olacağımız zaman derdik ki işte “teorem sordu mu” [ya da] işte “ispat yapacak mıyız” vesaire gibi hep böyle bir onu [ispatı] şey zor, yapılması güç daha çok böyle hani daha problem çözme, daha teori [değil de] uygulama tarzı soruları severdik ama böyle bir teorem sorulduğu zaman böyle bir afallardık. Bir zor gelirdi “acaba nasıl yapacağız” vesaire gibi...

1MA8 görüşlerinin başında sayısal göstermekle bir şeyin o olduğunu göstermek arasında farklılığa işaret etmektedir. Öğrencileri açısından sayısal olarak göstermek, soruyu çözebilmek alışlagelmiş bir etkinliktir. Bu nedenle öğrencileri kendilerine yöneltilen sorunun içerisinde bazı kalıpları görünce problem çözmeden başka bir şey yapılacağını farkındadır. Bu durumda, 1MA8’in öğrencilerinin sınavda ispat tarzı beklemediğini daha çok problem çözme şeklinde çıkmasını istediğini yansıtan aşağıdaki görüşleri problem çözmeye karşı ispatlama kategorisinde karşılık bulmaktadır:

1MA8: ...Bazen de öğrenci diyor ki yani “soruyu yazarken başına *Show that* yazmayın hocam” ya da işte “*prove that*, yani gösteriniz, böyle olduğunu garantileyiniz yazmayın. Ben onu görünce bu soruyu yapıyorum” diyor kimi öğrenci de...

3MÖ6 soru çözmekle ispat yapmanın farklı olduğunu belirtmektedir. Soru çözmeden bahsederken el pratikliği olan, alışkanlığında olan bir tarzdan bahsediyorken diğerinin ise tamamen farklı bir süreç olduğunu ifade etmektedir. Bu görüşüyle 3MÖ6 problem çözmeye karşı ispatlama kategorisindedir:

3MÖ6: *Yani şimdi soru çözmekle ispat yapmak bence çok farklı şeyler olduğunu düşünüyorum... Soru sorulan bir soruyla ispatlanan bir soru bence aynı şeylere sahip değil özelliği... Mesela soru çözdüğüm zaman mesela yine determinanttan örnek vermem gerekirse mesela o tarz soruları çok çözüyorum. El pratikliğim oluyor, alışıyorum falan ama mesela ispata geldi mi... Hani diğerinde biraz el pratikliği giriyor... Yapabiliyorum bir şekilde ama diğerinden emin olamıyorum... Mesela dediğim gibi bir soruyu çözerken el pratikliği oluyor. Ama mesela ispat yaparken öyle bir şey olmuyor.*

Gerilimle ilgili düşüncelerinden *boşluk hissi* kategorisini oluşturacak şekilde bahseden 5 katılımcı bulunmaktadır. Bu kategori ispatın yerinin üniversiteye bırakılmasının yarattığı gerilim şeklinde yukarıda açıklanan yükün tezat kategorisidir. Boşluk hissi kategorisindeki katılımcılar lisede ispatla ilgili eksik bırakılan ya da açılmayan yapıların üniversitede de açılmaması ya da açılacağını umması fakat bu beklentinin farklı sebeplerle karşılanamasından, ispatın üniversite seviyesinde yoğun olarak ele alınamamasından, katılımcı(lar)da bir eksiklik ya da yetersizlik oluşmasına neden olmasından bahsetmektedir. 4EÖ6 pandeminin getirdiği durumlardan kaynaklı olarak ispat konusunun üniversitede üzerinde çok durulmadığı ve bunun doğal sonucu olarak bir eksiklik oluştuğunu belirttiği için boşluk hissi kategorisine örnek olarak verilebilir:

4EÖ6: ... *online eğitime geçtiğimiz için uzaktan eğitimde birazcık bu konu üzerinde durulmadı maalesef ki burada bir eksiklik oluştu bizim için. Keşke uzaktan eğitim gibi bir süreç dahil olmasaydık ve ispatla ilgili çalışmalarımızı yüze yüze daha kapsamlı bir şekilde çalışabilme imkânımız olsaydı...*

Gerilimle ilgili düşüncelerinden *sınav sisteminin getirdiği alışkanlıklar* kategorisini oluşturacak şekilde bahseden 4 katılımcı bulunmaktadır. Katılımcılara göre, okul matematiğinin son kademesi olan liseye kadarki (hatta lise son sınıfa kadar) matematiğin öğrencilerin öğrendiği bilgilerinin sınanmasında kullanılan çoktan seçmeli tarzdaki sınavların odağında, belli bir süre içerisinde ki bu genellikle kısa sürede doğru cevabı bulma, bu nedenle hemen cevaba gitmeye eğilim alanı

açması ve doğru seçeneği işaretlemeye iten tasarımı, öğrencilere belli alışkanlıklar ve bu odakta ezber yapma gibi bazı stratejiler ya da kalıplar geliştirerek, böyle bir hareket alanı içerisinde olmalarına doğal olarak izin vermektedir. Üniversiteye gelene kadar öğrencilerin böyle bir yoğun sınav döneminden geçmesi ve bu tarzın öğrencide gelenekleşerek kökleşmesi üniversite öncesi edindiği alışkanlıkları ve kafalarında oluşturduğu şablonlarını temsil etmektedir. Bu nedenle katılımcıların gözünden öğrenciler üniversitede karşılaştığı ispata da bu şablonu doğal olarak giydirmek isteyeceklerdir. 1MA8'in sınav sisteminden kalan alışkanlıklarla öğrencilerin şartlamalarından bahsettiği aşağıdaki ifadesi, sınav sistemi alışkanlığıyla ilgili bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

1MA8: ... biraz da belki bizim sınav sistemimizden kaynaklı bir şey. Yani üniversiteye gelene kadar çok yoğun bir, işte sınav döneminden geçiyorlar. Sürekli böyle işte “hemen sorunun cevabını bulayım, seçeneğini bulayım ve işaretleyim” durumu var. İspat yaparken de kendi, işte mesela tam sayılarla ilgili 1 yazıyor, 2 yazıyor, 3 yazıyor, “bak o zaman hepsi için doğrudur” diyor. Biraz da bu sınav sisteminden kaynaklı böyle şartlamaları olduğunu düşünüyorum [öğrencilerin]...

1MA8 gibi düşünen bir diğer katılımcı 1MA7'dir. Öğrencilerin temel matematik eğitimlerinde deneyimledikleri teste yönelik alışkanlıklarını ispata da taşınmasından bahsettiği için 1MA7 bu kategoriye örnek olarak gösterilebilir:

1MA7: ... Yani ispat yerine örnekle geçiştirmeye çalışıyorlar... Yani herhalde temel matematik eğitimlerinden kaynaklanıyor biraz. Daha çok teste yönelik, yani hemen cevaba gitme, karalayıp bir şeyler bulma alışkanlığının getirdiği...

Lisede matematiğin yapısı ya da çalışma felsefesi üzerine odaklandırılmış bir ispat eğitimi yerine çoktan seçmeli bir sınav kültürüyle yetişmiş bir öğrencinin, matematiği en hızlı ve en çok soru çözmeye öğrenmesi ve deneyimlemesine, bu formatın da daha çok öğretmenlikte öğrencisini sınava en iyi hazırlayan, matematiğin felsefesinden habersiz bir matematikçi olması gibi bir amaca dönüşmesine yol açmasından bahsettiği için 2EA5 bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

2EA5: ... Sadece soru çözmek, çoktan seçmeli bir sınavda doğru seçeneği en hızlı nasıl işaretlerim; bu değil matematik... Yoksa soru çöz, örnek çöz. Lisedeki yıllarda yani lisede de böyle yapılsa ispata dayalı güzel olacak da yapılmadı diyelim, öyle yetiştirdi. Öğretmenliği ne olarak düşünüyor? Çocukları LYS mi artık adı da değişip duruyor. O sınava yetiştirmek olarak düşünüyor. En iyi matematikçi kimdir? En çok soru çözdürendir gibi. Matematiğin yapısından felsefesinden bihaber...

Gerilimle ilgili düşüncelerinden *lise matematiği ile üniversite matematiği arasındaki fark* kategorisini oluşturacak şekilde bahseden 2 katılımcı bulunmaktadır. Bu kategori aynı zamanda doğrudan gerilim temasının oluşmasını sağlayan In Vivo kodla üretilmiştir. Bu kategori, diğer kategorilere göre nispeten az katılımcı görüşüyle oluşturulsa da “bazen az şey çok anlam barındırır”ın vücut bulmuş halidir ve kendi temasını oluşturmadaki gücünü yansıtmaktadır. Farklı okul seviyelerinde/kademelerinde matematiğin temel çalışma mantığının birbirine benzediğini fakat kullanılan teknik açısından okul matematiğinin üniversite matematiğinden farklı olduğunu vurguladığı için 3MÖ4 lise matematiği ile üniversite matematiği arasındaki fark kategorisine örnek olarak verilebilir:

3MÖ4: *Yani şu şekilde söyleyeyim, bir kere benim lisede gördüğüm matematikle şu an gördüğüm matematiğin aynı olmadığını çok farkındayım, bir kere bu açıdan dolayı matematiğe daha farklı bakıyorum... hani problem çözme falan olarak ilkokul, ortaokul, hani bir öğrenciye ders verirken işte ilk temelinden sonuna kadar bir anda konuyu vermeyip... hani adım adım gittiğimizde aynı bizim üniversite mantığına gidiyor yine yani yavaş yavaş bilgiyi öğrenciye aktarıp en sonunda doğru olduğunu göstermeye çalışıyorum ama şimdi benim üniversitede gördüğüm matematikle lisede gördüğüm, yani ortaokulda gördüğüm matematik sadece adım adım olarak gitmekte aynı. Yoksa teknik olarak, şey olarak aynı değiller bana göre...*

Okul matematiği ile üniversite matematiği arasındaki gerilimle doğrudan ilgisi olmayan az sayıdaki katılımcıya ait görüşler çerçevesinde diğer kategorisi oluşturulmuştur. Buradaki katılımcılar üniversite seviyesinde okutulan matematik için lisans öğretim programlarındaki katalogla ilgili bir durumdan bahsetmiştir. Bu katılımcılar müfredatta okutulan bazı derslerin sıralamasının ya da okutulacak sınıfın uygun olmamasından kaynaklı olarak öğrencilerin yaşadığı sıkıntılara değinmiştir.

1MA7 matematik bölümü açısından katalogla ilgili sıkıntılı bir durumdan bahsetmektedir. Bölüme yeni gelmiş bir öğrenciye daha ileri seviyede okutulacak bir içerikte olan sayıların inşası dersinin, üniversite birinci sınıf seviyesindeki öğrenciye çok hitap etmediği gibi, o öğrenciyi tamamen dersten koparabilecek güçlükte soyut kavramların yer almasının ve öğrenciyi bu içeriğe maruz bırakmanın gereksiz olduğunu ifade etmektedir. Bunun yerine ispatla ilgili tekniklerin ve üst düzey matematiğin temel önemli konularının geniş bir şekilde öğretilmesinin ve öğrenciye özümsettirilmesinin birinci sınıf seviyesi olarak daha doğru olacağına

inanmaktadır. Bu yönüyle 1MA7'nın görüşleri diğer kategorisine örnek olarak verilebilir:

1MA7: ... bizde mesela soyut dersi 2 dönemdi. İkinci dönemde bu sayıların inşası gibi şeyler veriliyordu. Ben bunların gereksiz olduğunu düşünüyorum. Yani o [öğrenci] daha yeni gelmiş matematikte [matematik bölümüne gelmiş] bir öğrenciye, şimdi integerlar, Peano aksiyomlarında şey yaptırmak. (Gülüyor). Ondan sonra ne bileyim, oradan da rasyonel sayıları o kadar soyut şekilde kurmayı öğretmenin anlamı çok fazla yok. Ben mesela bu dersi kendim aldığımda X Üniversitesinde (üniversite ismini veriyor), o tarzını, o tarzdaki soyut şeyin sayı inşası, işte sonsuzluk kavramı, değişik sonsuzluklar, onları son sınıfta vermişlerdi bize. Ama biz bunu mesela birinci sınıf, soyutun temel şeylerini verdikten sonra ikinci dönem onu vermeye çalışıyoruz ve öğrenci tamamen kopuyor. Onun yerine “bu ispat teknikleri, set teori, fonksiyon nedir” bunları birinci sınıfta daha genişleterek [vermek gerekiyor] çünkü İngilizceden maalesef çok zayıf geliyorlar bunları iyice şey yapmamız lazım, özümsetmemiz lazım birinci sınıf derslerinde.

2EA5 ise matematik öğretmenliği programı açısından katalogla ilgili sıkıntılı bir durumdan bahsetmektedir. Matematik öğretmenliği programındaki öğrenciler, üniversite birinci sınıfta ispat yöntemlerini öğrenecekleri Soyut Matematik dersini birinci dönem almamaktadır. Buna karşılık ispat yöntemleriyle ilgili içeriğe bir şekilde bu dersten önce Analiz dersinde de erişebilmektedir. Fakat Analiz dersinden daha çok Soyut Matematik, matematiksel ispatın mantığını ve felsefesini veren ders niteliğinde olduğu için öğrencinin ispatla ilgili asıl kapması gereken içerik takip eden bir sonraki akademik dönemde ele alınacaktır. Durum böyle olunca da öğrencilerin müfredatın uygun olmayan sıralamasından kaynaklı matematiksel ispatla ilgili zorluk çekeceğinden bahsettiği için 2EA5 diğer kategorisindedir:

2EA5: ...Öğrencilerimizin müfredattan kaynaklı bazı sorunları var. Mesela bu ders [Analiz] hemen birinci sınıfın ilk döneminde başlıyor fakat öğrenciler henüz soyut matematik dersini almamış oluyorlar. Soyut Matematik dersi ise matematiksel ispatın felsefesini onlara tam kazandırmayı amaçlayan bir ders. O olmadan bu olduğu için biz biraz zorlanıyoruz... Yani işte, bizim en büyük sorunumuz duruyor, duruyor ispat mesela... Şeye kadar, önceden dokuzuncu sınıfa kadar hiç yoktu. Birden dokuzuncu sınıfta karşılaşıyordu çocuk. Şimdi belki daha da ileri düzeye geldi o, bilmiyorum. Yani müfredatta belki lisede var ama karşılaşmıyor öğrenci birden nerede karşılaşıyor? 12'yi bitiriyor...üniversite birinci sınıfta karşılaşıyor. Onda da dersleri öyle sıralamışlar ki ispatın yöntemini, tekniğini öğreneceği soyut matematiği götürüp ikinci döneme koymuşlar. İyi de birinci dönemde de var ispatın olduğu dersler yani. Müfredatlar buna uyumlu olmalı...

4.1.3.1 Matematikçiler ve Matematik Programı Öğrencileri Açısından Matematiksel İspatta Kendini Gösteren Gerilim Tetikleyicileri

Matematikçilerin, matematik eğitimcilerinin, matematik programı öğrencilerinin ve matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin grup bazlı matematiksel ispatta gerilime yönelik bulguları Tablo 4.4 üzerinden açıklanarak paylaşılmıştır.

Tablo 4.4. Farklı matematiksel topluluklara göre gerilim unsurları

KATEGORİ	ALT KATEGORİLER	1MA (9)	2EA (7)	3MÖ (9)	4EÖ (9)
GERİLİM	Alışılmayan (farklı gelen) tarz	3	1	6	2
	Lise matematiği ile üniversite matematiği arasındaki fark	-	-	2	-
	Problem çözmeye karşı ispatlama	2	-	3	2
	İşlemsele karşı kavramsal	6	3	-	-
	Doğrudan kabul etmeye karşı sorgulama	5	2	5	3
	Sınav sisteminin getirdiği alışkanlıklar	3	1	-	-
	Yükün üniversiteye bırakılmasının yarattığı gerilim	6	4	-	1
	Boşluk hissi	-	-	-	5
	Öğrenci-öğretmen arasındaki anlaşmazlık	4	-	4	1
	Diğer	1	1	-	-
1MA : Matematikçiler 2EA : Matematik Eğitimcileri 3MÖ : Matematik Programı Öğrencileri 4EÖ : Matematik Öğretmenliği Programı Öğrencileri Not: Parantez içindeki sayılar, o grubun toplam katılımcı sayısını göstermektedir. Her bir hücredeki sayılar ise o gruptaki kaç katılımcının ilgili kategoride bir görüşünün olduğunu temsil etmektedir.					

Tablo 4.4 incelendiğinde matematiksel ispatla ilgili gerilimi en çok yaşayan ya da bu gerilimden en çok etkilenen görüşleri barındıran gruplar, matematikçiler ve matematik programı öğrencileridir. Ayrıca matematik eğitimcileri ve matematik öğretmenliği programı öğrencileri ile karşılaştırıldığında gerilim teması altındaki kategorilerdeki görüşlerinin baskın spektrumlu olması da bu gruplara özgü bir nitelik olmuştur. Tablo 4.4 dikkate alındığında, matematikçiler matematiksel ispatta kendini gösteren gerilim unsurlarını daha çok işlemsele karşı kavramsal ile yükün üniversiteye bırakılmasının yarattığı gerilim kategorilerindeki durumlara dayandırmaktadır.

Matematikçiler genel olarak yükün üniversiteye bırakılması ilgili, matematiksel ispatın sadece üniversite seviyesinde değil daha önceki sınıf seviyelerinde de öğrencilerin karşılaşması gerektiğini, bunun şu açıdan kritik olduğunu ifade etmiştir. Öğrenciler üniversiteye geldiklerinde bu tarz düşünmeyi daha önce deneyimlemedikleri için ilk defa üniversitede karşılaşmalarının üzerlerinde bir gerilim ya da yük (çoğu zaman da verilecek içeriğin öğrenci tarafından anlaşılması noktasında zorlanmalarına neden) oluşturmaktadır.

Matematikçiler (6) bu durumu yaygın bir şekilde öğrencilerinde gözlemlediklerini belirtmiştir. Özellikle 1MA3 ve 1MA9 matematikçileri kendi öğrencilerinde gördüğü birkaç duruma değinirken “neden” sorusuna daha erken seviyelerde yer verilmesinin gerekliliğini yükle ilişkili olarak ele almaktadır.

1MA3 üniversiteye gelene kadar ispatın öğrencilere ana okulundan itibaren ufak ufak benimseltilmesi gerekliliğinden bahsetmiştir. Ayrıca “niye” sorusuyla gelen araştırma ihtiyacının daha erken sınıflarda yer almaması, şu an 1MA3’ün kendi öğrencilerinin de doğal olarak araştırıcı veya sorgulayıcı bir yaklaşım takınamamasına neden olan bir duruma itmektedir:

1MA3: ... öğrenciler söylemiyor. Bir de o var. Yani “hocam anlamadık etmedik işte şura niye böyle, bu niye böyle” [diye söylemiyorlar]. Biraz araştırıcı yönleri eksik; eksik gelmişler. Yani aslında ispat bir şeyde, ana sınıfında ilkokulda bile verilmeli. Ufak tefek de olsa ispatlar [verilmeli]. Ya zaten ortaokulda genelde öğrencinin soyut düşünme, soyut, 6. sınıf gibi hatta 7 diyelim soyut düşünebilme artık oluşmuş olması gerekiyor. Bu yüzden onlara ufak ufak ispatlar vererek aslında bir liseye üniversiteye alıştırarak gelseler bizim için daha kolay olacak...

1MA9 matematikçisi için de benzer bir durum geçerlidir. Üniversiteye gelene kadar “niye öyle” sorusu altında matematiksel ispatın mantığını öğrencilere güzel bir şekilde yerleştirilmemesi asıl sorun olarak hala durmaktadır. Neden sorusunu sormayı bir matematik öğretmenin rutini olması gerektiğini, öğrencisine hangi sınıf seviyesinde olursa olsun bunun yerleştirmesi gerektiğini vurgulamıştır. “Böyle olmalı ki üniversite seviyesinde öğrenci artık matematiksel ispatla ilgili bir bocalama yaşamasın” söylemiyle de bu durumun altını çizmektedir:

1MA9: Zor olarak görüyorlar, çünkü hiç karşılaşmadıkları için. Yani mesela bir şeyler onlara hep kural diye verildiği için, ortaokulda bile söyleyecekler işte diyor ki, dikdörtgenin ya da işte üçgenin iç açıları toplamı 180 derece. Dikdörtgeninki 360 derece. “Ee ne? Niye öyle?” demedikleri, demeyi [denmesi] öğretilmediği için... Niye öyle denilmesi öğretilmiyor çocuklara. Bunu hoca öğretir, “neden öyle? Ne var ki biz o’na 180 diyoruz ona 360 diyoruz” ya da neyse işte. Ya da çok işte Ngen’in köşegen sayısı, yani tak yazıyor oraya diyecek ki “neden öyle?” Neden öyleyi önce hocanın öğretmesi lazım. Neden öyle sorusu sorması gerektiğini hocanın öğretmesi lazım. Dolayısıyla üniversiteye gelince de çocuk bocalamaması lazım. Yani “neden öyle, elimde ne var ki ben ona öyle diyorum?”. Bunu [bu soruyu] hocanın vermesi lazım. Ortaokuldan başlayarak verilmesi lazım. Yani ortaokul dediğim 5, 6, 7, 8 artık ne veriliyorsa onlara artık o zamanda o konulara göre neden öyleyi öğretmeleri lazım. Sorunumuz bu zaten. Yani hocaların 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 hocalarının “neden öyleyi” öğretmemelerinden kaynaklı. Çocuk sadece “ha öyle” [diyor formüle], “öyle

ise ben bunu alırım kullanırım” [diyor kural işletiyor] ama neden öyle [kısımlı yok, boş]. Yani mesela bakıyorsun çokgen’in tanımı var. İşte köşegenin tanımı var ve bu tanıma göre bu tanıma göre “niye öyle?” Tamam, yazıyorsun, o kuralı başka yerde de kullanıyorsun ama, ama o kural nereden geliyor? Bu ben yazdığım için olmuyor ya da bu kabul edilmiş yani bir matematikte kabul edilmiş şeyler değil. Bunların hepsinin mantığı var yani. Ha “iki noktadan bir doğru geçer”. Evet, artık bunu kabul ediyoruz. Yani iki noktadan [bir doğru geçer] ama gerisi, artık geometride belki buna bağlı “iki noktadan bir doğru geçer”e bağlı bir ton teori var. Yani soru var ortada ve bununla alakalı çözülür. Yani dolayısıyla “neden öyleyi” öğretmeleri lazım insanların, hocaların.

Matematikçiler (6) genel olarak işlemele karşı kavramsalla ilgili, öğrencilerinin hala lisedeki gibi birtakım işlemlerle meşgul olmanın getirdiği prosedürel davranışlarına şahit olduklarından bahsetmektedir. Matematikçiler bu durumu yaygın bir şekilde hem derslerinde gözlemledikleri hem de sınav gibi ortamlarda öğrencilerin cevapladığı soruların özelinde elde edilen sonuçlarda gördüklerini belirtmiştir. 1MA3 dersinde gözlemlediği bir durum olarak, öğrencilerinin uzun yapılan ispatlarda gerildiğini ya da o sürecin içine bir nebze olsa girebilmişse yarısında bir yerde bıraktığını ifade etmiştir:

1MA3: ... Ama hani kısa ispatları biraz daha hoşlarına gidiyor ya da ne bileyim ispatların çeşitleri de var. Mesela olmadığını gösterirsen onları mutlu ediyor çünkü kolay. Bir tane örnek veriyoruz. Bu doğru değilse tamam işte ispat bitmiştir, hani bitiriyorsun...

Bu açıdan 1MA3’ün görüşünün genel manada öğrenci gözünden yorumu, öğrencilerin uzun ispatlarda bunaldıkları kısa hemen sonuç getiren ispatları sevdikleri, üzerinde daha çok düşünmeyi gerektiren uzun ispatlara karşı dirençli olma/istememe pratik bir şekilde bir örnekle bitirilebilen ispatlara daha sempatik olmaları “kısa ispatlar sevilir, uzun ispatlar atılır” düşüncesi altında kavramsal yerine işlemsel hareketlere dönüşebilmesidir.

1MA6 eğer bir sınav yapacaksa her sınavda mutlaka bir tane ispatla ilgili bir soruya yer verdiğini özellikle öğrencilerinin düşüncelerini anlamak ve öğrenmek için böyle bir gayret içerisinde olduğundan bahsetmiştir. Diğer sınav sorularının ise başlayıp bir şekilde işlemlerini yapıp sonuna kadar getirebilecekleri sorular niteliğinde olduğunu ifade etmiştir. İspatla ilgili sorusu özellikle öğrencilerinin kendi düşüncelerini ortaya koymasını beklediği soru niteliğindedir. Girdiği dersinde sınav sorularının içeriğini şimdiye kadar bu şekilde oluşturduğundan bahsetmektedir. Böyle olmakla birlikte her seferinde öğrencilerinden özellikle ispatla ilgili sorduğu soruya dönüş anlamında tam karşılık

alamadığını dile getirmiştir. Yapacağı bir sonraki yakın tarihli sınavında da sorularını türsel olarak benzer şekilde hazırladığını fakat önceki deneyimlerinden de gördüğü üzere bu sınavda da öğrencilerinin ispat sorusuna dokunmadan diğer işlemsel sorulara yöneleceğinden şu şekilde bahsetmektedir:

1MA6: ... Hatta yarın da bütünleme sınavım var. Orada da gene ispat bir tane sordum ama tahminim şu ki o soruyu direkt es geçecekler çocuklar. Yani çünkü çok basit bir şey ama onun üzerine yoğunlaşmak onlar için çok zor geliyor. O yüzden de ispatı ne kadar verirsem vereyim, şu ana kadar aldığım geri dönüş genelde çok düşük oldu.

1MA6'nın bahsettiği bu durum tipik olarak kavramsal yerine işlemsel düşünmeye devam eden bir hareketle çerçevelenmektedir. Bu durum aynı zamanda 1MA6'nın dersinde ispatı ne kadar ele alsada da sınavda öğrencinin odağı ispattan ziyade çözümleme gerektiren sorularla ilgilendiklerine, daha çok işlemselle meşgul olacaklarına işaret eder. Bu durum öğrenciler açısından basit bir ispat sorusu üzerine yoğunlaşma gibi bir gayretlerinin olmadığını da göstermektedir. Benzer durum 1MA2 ve 1MA8 matematikçilerinin daha önceki görüşlerinde problem çözmeye karşı ispatlama kategorisinde örneklendirilen ve işlemselle karşı kavramsalda da eş kodlanarak yer almaktadır. Sınav ortamında tercih edilen soruların niteliği açısından “show that”, “prove that” ya da bakınca anlaşılan teorik soruya karşılık pratik soru (uygulama gerektiren) olarak ayrılarak öğrencilerin seçimlerine yansımaktadır. Bu durum genel olarak öğrencinin kavrayış yakalama ya da orada matematiksel olarak ne anlaşıldığının önüne prosedür duvarı örme şeklinde geçmektedir.

Matematikçilerin aksine matematik programı öğrencileri, matematiksel ispatta kendini gösteren gerilim unsurlarını daha çok kendilerine farklı gelen alışılmayan tarz (6) ile karakterize etmektedir. Matematik programı öğrencileri genel olarak alışılmayan tarzla ilgili, ispat yaparken ne yapılacağını ya da ne yapılmaya çalışıldığını anlamadıklarını, kendilerine çok değişik ve farklı gelen bir tarzdan dolayı ilk başta zorlandıklarından bahsetmektedir. 3MÖ1 bölümdeki ilk senesinde karşılaştığı ispattan kısaca şu şekilde bahsetmiştir:

3MÖ1: Yani değişik, ilk senemde çok değişik gelmişti bana...

3MÖ5 öğrencisi bölümünün hazırlık sınıfını geçtikten sonra birinci sınıf matematik derslerini görmeye başladığında, derste ispatla ilgili ne yapılmaya çalışıldığını uzunca bir süre anlamadığını, derste öğretmenin lisedeki gibi

olmayan bir tarzda ders anlatarak ispata girdiğinden bahsetmesiyle şaşırmış görünüyordu:

3MÖ5: ... bu bölüme geçince açıkçası ilk önce ne yaptığınızı uzunca bir süre anlamadım. Benim için ilk 1. ve 2. ay çok zor geçti...Ya sanırım aklımda kalan dönemin ilk ders, ilk dersi değildi sanırım. İlk geldim 1. sınıfta X (isim veriyor) hocanın “0” ispatı aklımda kalmıştı galiba. Yani şöyle çok şaşırmıştım çünkü çok enteresan bir derse başlamıştı. Calculus o zaman Calculus dersi veriyordu ve tahtanın neredeyse tamamına bir sürü “0” yazdı. Gözüümün önünde şu an sadece ilk sorduğunuzda beliren şey bu olmuştu. $0!$ faktörün niye 1’e eşit olduğu ya da 0’ın nereden geldiği gibi bir ispatı...

Matematik programı öğrencilerinden 3MÖ2 ve 3MÖ6, bazı cebirsel eşitliklerde, özellikle bu yapıların birbirine eşit olduğunun gösterilmesinde ne yapılmaya çalışıldığını tam kavrayamadıkları için zorlandıklarını ifade etmektedir. Bu öğrenciler, bölüme yeni gelenler olarak sürekli bunlarla karşılaşmak, ispatın mantığının ya da doğasının ilk zamanlar anlaşılmamasından kaynaklı bir gerilim oluşturmuştur. Bu durumu 3MÖ6 aşağıdaki gibi aktarmıştır:

3MÖ6: ... sürekli ispat yapıyorduk ve her aşamasını harfî harfîne göstermek zorundaydık. Hani dediğim gibi $A+B=3$ diyorsun ama $B+A=3$ olduğunu da göstermem lazımdı ve bu beni çok zorlamıştı birinci sınıfta. Hani ne yapacağımı da çok anlamamıştım açıkçası.

Henüz yeni başlayanlar şeklindeki matematik bölümünün birer öğrencileri olarak matematiksel ispatla karşılaşılıyor olma, bu öğrencilere daha önce görmedikleri yeni bir sürüm matematikle karşılaşma izlenimini uyandırmaktadır. Bu nedenle ispatın bu aşamadaki varlığı, kendilerine şu ana kadar gördüğü, pratik ettiği matematikle benzeşmeyen, bilinen matematikle örtüşmeyen bir matematiğin kapısını açıyormuş gibi gelmektedir.

Tablo 4.4. dikkate alındığında hem matematikçilerin hem de kendi öğrencilerinin matematiksel ispatta kendini gösteren gerilimle ilgili görüşlerinin doğrudan kabul etmeye karşı sorgulama kategorisi ile öğrenci-öğretmen arasındaki anlaşmazlık kategorisinde ortaklaştığı görülmektedir. Her iki kategoride de bu gruplar açısından eşit sayıda görüş bulunmaktadır. Bu iki kategori aynı zamanda bu iki grup açısından birbiriyle bağlantılı ya da kenetli bir şekilde ilerlemektedir. Bahsi geçen kategorilerle ilgili görüşler bu iki grup açısından birlikte ele alınmış ve kategoriler açısından sırasıyla aşağıda paylaşılmıştır.

1MA8 matematikçisi üniversiteye gelene kadar okutulan matematiğin doğasına aşına bir öğrencinin ispatta bocalamasıyla ilgili yansımalarına şu şekilde değinmiştir:

1MA8: ... matematik alanında hep şey olmuş işte, “konu bu, formülü bu”. Limitten atıyorum ya da türev diyelim işte x üzeri n ’nin türevi, n çarpı x üzeri $n-1$, bu. Böyle böyle bir formül kodlanmış öğrencinin kafasında. “ x üzeri n ” verince evet türevini hesaplayabiliyor. Ama “bunun gerçekten böyle olduğunu bana göster” dediğin zaman orada bir bocalıyor. Diyor ki, “ee zaten böyle ben neyi göstereyim?” gibi bir düşünce var öğrencinin kafasında...

1MA9 matematikçisi, öğrencilerin üniversiteye ilk geldiklerinde ispatla ilgili yapılan şeylere “kurallar silsilesi”, “birilerinin uydurduğu bir şey” gibi ilk yabancı duruşlarını gözlemlediğini hatta daha önceden bilinen fakat o zamanlar bir matematiksel önerme gözüyle bakılmayan matematiksel ifadelerin ispatlanması durumuna geldiği zaman işin doğasının değişmesinden bahsetmiştir:

1MA9: İlk başlarda mesela soyut matematiğe girdiğimde ilk geldiklerinde ilk iki dönem çok, ilk dönem çok zorlanıyorlar. Çünkü kurallar silsilesi halinde veriliyor onlara her şey kural gibi. Yani sanki birinin uydurduğu bir şey yani. Hani onların hepsinin sebebi var. Bir tanıma bağlı ve tanımlar arasında ilişkilerle onların her birinin bir ispatı var. Yani dolayısıyla ilk başta çok şey yapıyorlar, bocalıyorlar. Mesela şunu dediğim zaman “öyle ki ya” diyorlar, mesela “iki çift sayının toplamı çift sayıdır” diyor. “Ya tabi öyledir” diyorlar (öyledir ki tabi anlamında öğrencilerinin düşüncesini vurguluyor). “Hadi bunu ispatlayalım” ...

1MA4 matematikçisi, öğrencilerin üniversiteye gelene kadar kendilerine “kural” diye verilen matematiksel bilgilerin üzerinde hiç düşünme fırsatının olmadığını, üniversitede ise bunların mantığı ispatla verildiğinde kısa süreli anlayış sağlansa da öğrenci açısından bilinen formülün yine o haliyle kullanmaya devam edeceği ısrarı, ispatla göstermeye, önceden kabul edilenleri sorgulamaya geldiğinde öğrencilerin korkularından bahsetmiştir:

1MA4: ... $0! = 1$. Neden 1? Yani mesela öğrenci bunu hiç düşünmüyor belki. $0!$ ’ü ne zaman kullanmaya başlıyor? Belki orta 1, orta 2, orta 3’te bilmiyorum yani açıkçası. Belki lise 1, lise 2 olsun fark etmez ki. Sadece, $0!$ neden 1? [diye sorulduğunda] “hep kabul” deyip geçiyor yani. Ama neden böyle? Bunu ancak üniversiteye geldiğinde görüyor ki aslında operatörün 0’daki değeriymiş. Ama onu da kanıtlıyorsun işte gösteriyorsun... [Bu] öğrenciyi ürkütüyor ve diyor ki “hani tamam, güzel anladım. Lambda gibi bir operatörün 0’daki değeri imiş” E yani “bana ne!” yani “ne değişti? E $0!$ ’i ben gene 1 olarak kullanıyorum. Ne yani bu bilgi benim ne işime yarayacak” sorgulaması altında bir bocalıyor tabi. “Ne gereği var” sorusu çok ciddi sıkıntı öğrenci için...

Diğer taraftan, matematik programı öğrencilerinden 5'i liseden henüz yeni üniversiteye geçmişken, bu seviyedeki yani üniversite matematiğiyle tanışırken karşılaştıkları ispattan şu şekilde bahsetmiştir. Doğru olduğu bilinen bir şeyi ispatlamanın zorluğu, ispatlamaya ihtiyaç duymanın gereksizliği ya da doğru olduğu bilinen bir şeyin sorgulanmasının tuhaflığı, saçma ve anlamsız bulunması noktalarına değinerek lisede doğrudan kabul ettikleri matematiksel bilgi ve kuralların üniversitede ispatla sorgulanması anlamında bir gerilim yaşamıştır. Bu konuda 3MÖ5 şu şekilde bahsetmiştir:

3MÖ5: ... şu an ne yapıyoruz ortaya zaten sunduğumuz varsayımı ben biliyorum. Bunu neden ispatlama ihtiyacı duyuyoruz? Yani şöyle bir şeye kapılmıştım. Sanki sürekli aynı şeyleri yaparak, yine aynı sonucu elde ediyormuşuz gibi. Mesela "0" ispatlıyoruz, işte 0! neden 1'e eşittir? Bunu ispatlıyoruz ama sanki ortada bir işlem var ve bunu sürekli döndürerek yapıyormuşuz gibi bir izlenime kapılmıştım. Ama şimdilerde artık sanırım sorgulama isteğim azaldı. Yani ilk sınıfa göre birinci sınıftaki durumuma göre şimdiki halim arasında yani bayağı bir fark var. İlk geldiğimde çok bocalamıştım. "Şu an biz ne yapıyoruz? Neden bunu yapmaya ihtiyaç duyuyoruz?" gibi sorular vardı kafamda şimdi, öyle bir şey kalmadı... Mesela ilk geldiğimiz derste ispat yöntemlerini gördük işte. Bu derslerin içeriği genel olarak böyleydi. Ama neden ispatlamaya çalıştığımızı bilmiyordum. Hani "şu an ne yapıyoruz?" gibi sorular oluyor. "Neden bunu ispatlama ihtiyacı duyuyoruz?" gibi sorular vardı aklımda sürekli yani bunu geldiğim ilk sene, 1. sınıf için söylüyorum... Şu an demek istediğim hani, ilk zamanlarda yaptıklarımız bana saçma geliyordu. Yani bir mantığını anlayamıyordum. Neden şu an bunu ispatlıyoruz derken ondan bahsediyorum. Hani bunun bana ne gibi bir faydası olacak gibi düşüncelerim vardı...

Tüm bunlarla ilgili yaşanan gerilim, etkilerini lise sondan üniversite birinci sınıfa geçişte kendini göstermektedir. Her ne kadar hem bu programdaki öğrenciler hem de matematikçiler böyle bahsetseler de öğrencilerin ilerleyen sınıf seviyelerinde matematiksel ispata alışmanın da getirisiyle, kendilerine ilk başta saçma gelen ispatın daha sonra ne anlama geldiğini, mantığını daha ileri sınıflarda kavramaya başladıklarını, ilk günkü gibi olmadıklarını belirtmiştir. Bu durum o ilk geçişi problematik kılmaktadır.

Öğrenci-öğretmen arasındaki anlaşmazlık noktasında matematikçiler iki şekilde düşünmektedir. 1MA6 ve 1MA7 açısından matematiğe daha çok ispat üzerinden bakmaktansa hala mekanik hareketlerle yapıyı incelemenin öğrencilerde kök salmasını bir şekilde anlamlandıramadıklarıyla ilgilidir. 1MA2 ve 1MA5 açısından bu durum öğrencinin matematik seviyesi ile ilgilidir. Bununla ilgili 1MA5 şu şekilde bahsetmiştir:

1MA5: ... Daha önce ikili sohbetler içerisinde de sıklıkla söylemiş olabilirim. Hani siz başta dediniz işte “kaç yıldır matematikçisiniz, matematik dersi veriyorsunuz” dediniz ve ben de yaklaşık olarak bir 35-40 yıldır hem ders vermekte olduğumu hem de öğrenme durumunda olduğumu söylemiştim. Bu süreç içerisinde biri bana “ $2+2=$ kaç eder” diye sorduğu zaman ciddi bir duraksama yaşıyorum. Diğer taraftan bir pazarcı ile konuştuğum zaman $2+2=4$ ettiğini hiç kuşkuyla yer vermeyecek kafası çok net bir şekilde söyleyebiliyor. Şimdi ben bu işin içerisindeyim. $2+2=4$ ettiği konusunda kuşku duyuyorum. Fakat doğrudan bu alan içerisinde olmayan bir kişi kuşku duymuyor bundan. $2+2=4$ ettiği konusunda hiç kuşku duymuyor. Dolayısıyla benim kuşku duymam, diğer tarafın kuşku duymaması. Birlikteliği, beraberliği, zaman zaman sıkıntı çıkartabiliyor. Buradaki sıkıntıyı şu şekilde söyleyeyim: “İşte ne gereği var, son derece açık değil mi?” şeklinde. Bunu öğrenciler içerisinde de sıklıkla yaşıyoruz. Mesela ben “ $2+2=4$ eder’i kanıtlayalım” dediğim zaman öğrenci diyor ki “zaten çok açık değil mi?” diyor. Ben de diyorum ki, “açık olmak ne demek?” Ve bunlarla ilgili olayı benimseyip benimsememeye ve onun seviyesine bağlı olarak anlaşmazlıklar olabiliyor...

Diğer taraftan, matematik programı öğrencilerinin 3’ü (3MÖ5, 3MÖ6 ve 3MÖ8) için özellikle sınav gibi bir ortamdaysa öğretmenin teorik kısımlardan puan kırar imajı çizmesi, beklenen şekilde yapılmayanın değer görmeyişi, onların istediği gibi ispat sürecini yönetememe ya da ilerletememe durumlarının öğretmene farklı gelmesi ve doğal olarak farklı matematik seviyelerinde olmanın getirdiği, aynı şekilde düşünememekle ilgili ayrılmalar iki taraf açısından bir anlaşmazlık doğurmaktadır. Bu durum matematik bölümü öğrencilerinin genel bir sesi olarak 3MÖ7 tarafından, özel olarak doğrudan kabul etmeye karşı sorgulama ile öğrenci-öğretmen arasındaki anlaşmazlık kategorilerinin yanı sıra, tüm gerilim kategorilerine değinen bir bakış açısıyla şu şekilde ifade edilmiştir:

3MÖ7: Çünkü biz lisede, liseye kadar hiç alışkın olmadığımız bir şey [ispat]. Biz teoremleri, verilen formülleri hep ezber olarak kabul etmişiz [lisede ispat noktasında]. Hani çok sorgulama yeteneğimiz olmuyor. Bu böyle deniliyor, kural deniliyor ve biz de onu öyle o şekilde kabul ediyoruz. Aslında hepimiz birinci sınıfta özellikle bence çok zorlandık. Yani “birin bire eşit olmadığı” söylendiğinde çok zorlandık ya da ne bileyim hani “ $2+2$ ’ye reel sayılarda “4” dendiğini. Onun dışında daha geniş kapsamlı düşündüğünde “olmadığını” [bunun 4’e eşit olmadığını] sorgulamak bize çok tuhaf geliyordu. Hani öyle işte. Biz bugüne kadar bunu böyle kabul etmişiz dedik. Aslında en basit dersler birinci sınıfta oluyor. O basit derslerde bu ispatlar bize yeni yeni aşılarmaya başladığında gerçekten zorlu geçti bizim için. Yani benim için açıkçası öyleydi... O yüzden biz sınavlarda hani ispat değil de daha çok hani formülü olan şeyler çıksın [istiyorduk]. Biz de işte formülü uygulayalım, sonuca ulaşalım istiyorduk. Hocalar da o yüzden hani “hiç böyle düşünmeyin. Her sınavda muhakkak en az bir tane ispat sorulacak” diyordu... Ben biraz stresli bir insanımdır. Böyle her şey illa “çok

doğru olacak şey yapılacak” diye her şeyi düşünmek, düşünen bir yapıya sahibim. Bunu duyduğumda [her sınavda ispat çıkma durumu] da gerçekten biraz streslendim... Ama dediğim gibi hiç alışkın olmadığım bir şey olduğu için ispat, beni hep korkutuyordu... Çünkü hiç alışkın olmadığı bir şeyin içine giriyor. Hani hep derler zaten “bu görmüş olduğunuz üniversitedeki matematik asla lisedeki matematiğe benzemiyor” diye. Yani matematik bölümünü kazanmış herkese söylenir. Bunun sebebi de bence bu ispatlar daha soyut kısmı olduğunu düşünüyorum. Yani soyut kısmına biz pek alışkın değiliz...Şu an ben de mesela geçmiş dönem derslerime baktığımda, ne kadar kolay olduğunu farkına varıyorum. Evet gerçekten diyorum çok basit şey. Ve üniversitedeki hocalar tabi ki sürekli tekrar ettikleri için, her yıl aynı şeyleri anlattıkları için onlara da çok basit geliyor. Ama birinci sınıf öğrencisi için bu iş böyle değil. O yüzden hocalar çok, bunun [ispatın] basit olduğunu bilincinde ama öğrenci bilincinde değil. O yüzden bunlar [ispatlar bize] göz korkutucu geliyor. Yani hocaların aslında hani “bunu zaten çok kolay şekilde yaparsınız” bir şeyi [demesi] ama öğrenci o zaman çok zorlanıyor ve şey psikolojisine giriyor. Yani bu kadar basit şeyin olduğunu söylüyor [hoca] ve “ben bunda bu kadar zorlanıyorsam ilerleyen zamanlarda acaba beni ne bekliyor?” psikolojisine giriyor. Aslında hani [öğrencinin] zorlandığı şey daha önce hiç alışkın olmadığı bir şeyle karşılaşmış olması. Yani lise eğitiminde, liseye kadar olan eğitimde daha çok “ezberciydik”. Şimdi daha çok “sorgulayıcı” kısmındayız...İspatın basit olduğunu hocalar bize söylerken aynı zamanda alışkın bir şey olmadığımızın farkında olup bu şekilde yorum yaparak gitmeleri aslında bence daha rahat öğrenmemize yardımcı olacak. Hani “anlıyorum şu an zorlamanızı çünkü daha önce hiç böyle bir şey görmediniz. Ama işte şu mantıkla düşünürseniz, soruya şu şekilde yaklaşırsanız” gibi cümleler aslında, yani burada bence rahatlatacak olan şey matematiksel bir bilgi değil de psikolojik bir bilgi olduğunu düşünüyorum... biraz aslında psikolojik olarak önyargılarımız ve korkularımız hani kırılrsa daha sonra zaten hocalarımızın gerçekten matematik bilgisi tartışılmaz, çok güzel bir aktarıyorlar ama dediğim gibi hepimizin biraz psikolojik korkuları olduğu için yani hiç alışkın olmadığı bir şeyle karşılaşıyorsun ve sen çok bilgiliymişsin gibi aslında anlatılıyor oradakiler ama daha yolun başındasın, hiçbir şey bilmiyorsun. O yüzden gözüm çok korkuyor. O yüzden ben hala, yani benimle aynı dönemde olup hani sorunun içinde ispat varsa eğer sınavda ispat çıkacaksa bunu bu yüzden morali bozulan arkadaşlarım var yani.

3MÖ7 tarafından özetlenen durum dikkate alındığında, kendisi ve bölümündeki öğrenciler açısından genel olarak anlaşmazlıkların sebebi öğrenci seviyesinin bir matematikçinininkinden farklı, daha temel ve kavramsal olarak daha az derinlikte olması ve bunun matematikçiler tarafından farkında olunmamasıdır.

4.1.3.2 Matematik Eğitimcileri ve Matematik Öğretmenliği Programı Öğrencileri Açısından Matematiksel İspatta Kendini Gösteren Gerilim Tetikleyicileri

Tablo 4.4 incelendiğinde, matematikçiler ve matematik programı öğrencilerinin aksine matematik eğitimcileri ve matematik öğretmenliği programı öğrencilerinde matematiksel ispatta kendini gösteren gerilim unsurları genel olarak daha az katılımcı görüşüyle kendini göstermektedir. Bununla birlikte matematik eğitimcileri açısından yükün üniversiteye bırakılmasının yarattığı gerilim kategorisinde (4) diğer kategorilere göre daha çok görüş bildirilmiştir. Diğer taraftan yük ile ilgili görüş bildiren tüm katılımcı gruplar dikkate alındığında, bu kategoride en çok matematikçiler ile matematik eğitimcilerinin görüşleri yer almaktadır. Bir başka ifadeyle, matematik eğitimcileriyle matematikçilerin ortak bir gerilime işaret ettiği kategori sadece yükün üniversiteye bırakılmasının yarattığı gerilim kategorisi olmuştur.

Matematik eğitimcilerinden 2EA3, matematikçilerden 1MA9 gibi üniversiteye bırakılan yük ile ilgili gerilim noktasına okul matematiğinde “niye” sorusunun üzerinde durulmayışı üzerinden dikkat çekmiştir:

2EA3: ... başka bir nokta da yine formül oluşturmayla, formülün nereden geldiğini bilmeyle bağlantılı. Şimdi öğrenciler mesela pi sayısını bir sabit değer olarak biliyorlar, şimdi tamam sabit bir değer ama öğrenciye şunu sorduğumuzda, “ya pi sayısı hiçbir şekilde tekrar etmeyen, sonsuza giden bir sayı, sonsuza giden bir sayı nasıl sabit olur?” sorusunu soruyoruz, bunu cevabını oluşturamıyorlar. Niye oluşturamıyorlar? Çünkü orada ezberlenen bir pi sayısının sabit olduğu durum var ama neden sabit olduğu hiçbir şekilde ispatlanmamış, yani “neden sabit olarak alıyoruz?” onun tartışması öğrenciler tarafından çok fazlasıyla sorgulanmamış. Dolayısıyla öğrenci bu tür durumları çok fazla sorgulamadığı için bize geldiklerinde, öğretmen olmaya başladıklarında da benzer sıkıntıları, benzer durumları aslında kendileri de yaşıyorlar yani çok fazlasıyla kendi sorgulamadığı için sorgulayacak şekilde de öğretim sürecine girmiyor. Yani kendi öğrencilerine de emin olun sorgulatmayacak çünkü öğretmen adayı olarak o kavramsal bilgiye sahip değil. Dolayısıyla kaçılan noktalardan bir tanesi de bu bana göre... Ben mesela bizim çocuklarla bazı etkinlikler yaparken eğer bana bir iddiada bulunuyorlarsa yaptıkları işlem konusunda, “bu neden böyle?” diyorum, “bunu neye göre düşündün?” Ya da “bunun böyle olduğunu nereden biliyorsun?” Ya da örüntü sorusu çözüyorsan, “peki bu örüntünün kuralının her zaman geçerli olduğunu nereden biliyorsun?” gibi sorular aslında karşımıza çıkıyor. Burada da eğitim açısından baktığımızda muhtemelen birazcık okuldaki ortamla üniversitedeki bizim yetiştirmiş olduğumuz öğretmen adaylarının ortamı birazcık birbirinden ayrılıyor gibi. Çünkü okuldaki öğretmenlerin öğrencilere bu tür sorgulamaları çok nadir görülen bir şey...

Matematik eğitimcilerinden 2EA5 dersinde ispat üzerinden anlattığı konuda öğrencilerine garip gelen bir durumdan bahsetmiştir. Öğrencilerinin birden üniversitede karşılaşması yerine ispatla daha erken tanıştırılmasının, yükün üniversiteye atılmasındansa yayılarak, kademe kademe verilerek tüm matematiğe nüfuz etmesinden şu şekilde bahsetmiştir:

2EA5: ... Böyle giriyoruz ispata. Aslında kümelerde küçük küçük ispatlar ile başlıyoruz o derste. Örneğin işte A alt küme B ise A kesişim B , A kümesine eşittir gibi, bunlardan. Onlar bile çok garip geliyor öğrencilere demek ki lise yıllarında hiç değinilmiyor ispata ... Buna [ispat eğitime] kafa yorup bunu anaokulundan itibaren bunun temellerini atıp erkenden tanıştırmalıyız öğrencileri... Böyle olursa yani durup durup üniversiteye gelince karşılaşır şoka giriyor. Matematik okumak bu muymuş diyor? Garip geliyor ona. Ya oysaki küçükten başlayıp yavaş yavaş düzeyi artırılarak bir eğitim verilse, bu konuda artık o müfredatı uzmanları hazırlar. Ne yapılır ne edilir, şimdi ben ayrıntısını bilemem de ama bu işe bir önceden başlamak lazım yani aniden üniversitede karşılaşmamak lazım...

Matematik öğretmenliği programı öğrencileri açısından ise boşluk hissi kategorisinde (5) diğer kategorilere göre daha çok görüş belirtilmiştir (bkz. Tablo 4.4). Bu kategoriyle ilgili özel bir durum, sadece bu programdaki öğrencilerin görüşlerinin yer almasıdır. Bu yönüyle matematik öğretmenliği programı öğrencileri çalışmadaki diğer katılımcı gruplar tarafından ifade edilmeyen bir gerilime işaret etmeleriyle tamamen farklılaşmaktadır. Matematik öğretmenliği programı öğrencilerinden 4EÖ3 ve 4EÖ8 bölüme gelmeden önce ispatın üzerinde kapsamlı bir şekilde durulacağını düşündüklerinden bahsetmiştir. Durum bekledikleri gibi gelişmeyince matematiksel ispatla ilgili kendilerinde bazı eksiklikler gördüklerini ve yetersizliklerinin farkında olduklarını ifade etmiştir. Bu konuda 4EÖ3 şu şekilde bahsetmiştir:

4EÖ3: ... liseye kadar zaten böyle daha çok ezbere dayalı kurala dayalı formüle dayalı bir matematik gördük. Üniversitede de bunun genişleyeceğini hani bunun dediğim gibi açılacağını düşünmüştüm ama çok da açılmadı ve hani eğitim hep bu şekilde ilerlediği için...bugüne kadar gördüğümüz matematik eğitimi ilkokuldan üniversite sonuna kadar hep ezbere dayalı üniversitede biraz daha hani ispat kısmını görsek de çok da yeterli olduğunu ya da çok da dolu dolu bir eğitim öğretim gördüğümüzü düşünmüyorum. Zaten ilkokuldan liseye kadar full ezbere dayalı bir matematik gördük işte. Hani belki düzey olarak baktığınızda hani öğrencinin yaş düzeyi ya da işte düşünme algılama düzeyi uygun değildir belki ispata ama belli bir yerden sonra küçük küçük ilerleyerek hani o matematiksel kuralların, formüllerin, nereden geldiğinin açıklanabileceğini düşünüyorum ve öğrencinin anlayabileceğini düşünüyorum. İlkokul çocuğuna tabii ki ispat öğreteceğiz ama liseye

geldiğinde daha böyle o matematik görüyor ama hani daha önce ilkokul ve ortaokulda gördüğün matematiğin bir tık üstü olmasındansa bu üniversitede göreceğimizin daha küçük bir versiyonu böyle küçük küçük “mantığı nereden geliyor?” şeklinde öğretilmesini isterdim ama biz böyle bir eğitim görmedik...Üniversiteye geldiğimde de dediğim gibi dersler indirgendi, içerik azaltıldı. Hani çok basit düzeyde öğretildi. Bunun da etkisi var bu şekilde. Hani bütün bir matematik eğitimi öğretimi açısından baktığımda kendimi yetersiz görüyorum.

4EÖ2 ise türevin anlamının ortaokulda eğitim anlamına geldiğini bunu üniversitede değil, dersanede alan eğitimi derslerine çalışırken öğrendiğini, üniversitede daha çok eğitim dersleri gördüğü için odaklarının matematiksel ispat anlamındaki bir yoğunlukta olmadığını belirtmiştir. Ayrıca ispatla ilgili temeli tam öğrenememenin, temeli öğrenmeden de uygulamaya geçmenin yarattığı durumlardan bahsetmiş, ne anlama geldiğini bilememenin getirdiği zorluklara işaret etmiştir:

4EÖ2: Ya bazı şeylerin tam temelini öğrenmediğimizden dolayı olabilir belki. Hani mesela örnek veriyorum. İntegralde bir formül öğreniyoruz ama bununla alakalı herhangi bir bağdaştırma yapmıyoruz. Sadece... örneğin “üstel fonksiyonun türevi böyle alınır” ama hani bunun nereden geldiği, ne şekilde olduğu hani bunu biraz da hatta şimdi şimdi görüyoruz biz alan derslerini çalışırken (KPSS’ye hazırlanırken aslında yeni anladığını ifade ediyor). Hani biraz daha bağlantı kurmak gerekiyor. “Aaa! Evet!” hani “bu böyle miydi” yani aslında şu formülü, “kullandığımız formül buradan mı geliyordu” şeklinde biraz daha düşünüyoruz. Ama bence temeli tam olarak öğrenemediğimiz için ispatta bu şekilde zorlanıyoruz. Yani... Mesela evet bir türev görüyoruz ama “türev ne demek?” aslında yani biz bunu tamamen öğrenmeden uygulamaya geçtiğimiz için belki de olabiliyor... Ya mesela örneğin hani türevin aslında mantığı şu şekilde, yani benim şu an bildiğim kadarıyla. Hani ben bir yerdeki eğime bakıyorum yani bir yerdeki yükseliş artış azalış miktarına bakıyorum aslında. Ama türevi ben önceden hani bir şey ile bağdaştıramıyordum yani hani o sadece benim için bir “konuydu” hani ne anlama geldiğini bilmediğim için. Mesela bu türevin en başında öğretilen hani “ $f(x)$ eksi” (türevin tanımındaki h ’lı şeyler anlamında demek istiyor) diye başlayan bir formül. Hani bunun mantığı aslında bizim yıllardır ortaokuldan beri bildiğimiz eğitim formülünden geldiğini aslında yeni yeni fark ediyorum. E o zaman da hani ispatta da illaki hani bunları kullanıyoruz biz biraz daha, bu ilk, yani sayısal ifadeleri ama bunların belki de tam olarak ne anlama geldiğini bilmediğimiz için de ispat yapamıyor olabiliriz. Ben böyle düşünüyorum ... Üniversitede de aslında çok fazla sık da duymadık yani hani çok fazla bir şey ispatlamaya yönelik bir çalışma yapmadık. Biz daha çok eğitim, daha çok eğitim dersleri gördüğümüz için hani eğitim üzerine odaklanıyorduk yani. O tür matematiksel bir yoğunluğumuz yoktu fazla.

Buradaki kritik durum, bu programdaki öğrenciler tarafından ifade ediliyor olmasına karşılık matematik eğitimcilerinin böyle bir durumdan bahsetmiyor olmasıdır. Matematik eğitimcisi ve öğrencisi anlamında ikili olarak düşünüldüğünde, bir matematik eğitimcisinin gerilim olarak gördüğü yük faktörü ve bölümünün bir öğrencisinin gerilim olarak yaşadığı boşluk hissi (aynı zamanda yükün tezat kategorisi), bu iki grubun matematiksel ispatla yaşanan gerilim açısından bağlantısının kopuk olabileceğine dair ya da farkında olunamayan bir şeye dair bir işarettir.

4.1.4 İspatlama Yolları (Girişimlerinin Doğası)

Katılımcıların matematiksel ispata yönelik algılarının dördüncü teması “ispatlama yolları”dır. Bu tema, katılımcıların matematiksel bir ifadenin ispatlanması gerektiğinde bunun nasıl ispatlanacağına dair yaklaşımlarıyla, herhangi bir matematiksel ifadenin ispatlanması durumuyla karşı karşıya kaldıklarındaki girişimlerinin doğasıyla ilgilidir. Katılımcıların matematiksel bir ispat yaparken ispatlama girişimlerinin nasıl olduğuna yönelik görüşleri 7 farklı kategoride açıklanabilmektedir. Bu kategoriler *ispatlayıcının yeterliliğine göre değerlendirenler, dışsal referansa yönelenler, soruyla karşılaştığı durum-ortam özelinde bahsedenler, genel problem çözmeden bahsedenler, ispat yönteminden bahsedenler, ispat yöntemlerinin ötesinde ileri taşıyanlar ve ne ileri taşıyan ne de sadece yöntemle sınırlı kalanlar* olarak isimlendirilmiştir.

Katılımcılar bu tema altında en çok *ispat yöntemlerinin ötesinde ileri taşıyanlar* kategorisinde toplanmıştır. Bu kategoride 12 katılımcının görüşü bulunmaktadır. Katılımcılar, bir teorem ispatlanırken, ortaya atılmış matematiksel bir iddiayı ispatlamaya çalışırken ya da genel olarak matematiksel bir ifadenin ispatı yapılırken matematiğin izin verdiği yolların dışına çıkmadan ya da matematiksel çerçevenin sunduğu yollarla ilerleyerek belli bir ispat tekniği/yöntemi kullanarak, kullandığı başlangıç niteliği olarak seçtiği yöntem işe yaramazsa farklı bir yöntemle benzer süreci işleterek, iddiayı anlayabilmek için bazen örnekle test ederek, iddianın bulunduğu bağlamla ilişkili alt bağlamları kendisine zemin olarak hazırlayarak, yeri geldiğinde sezgisel yolları kendisine ilk sıçrama tahtası olarak kullanarak gibi daha ince ve sık, daha geniş ve gelişmiş düşünme deneylerinde bulunarak kendilerini ispata götürecek çözülebilir formlara yaklaştırmaya çalışmaktadır. Özetle bu kategorideki katılımcılar matematiksel ispatın belli bir

ispat yöntemiyle yapmanın ötesinde daha derin bir yaklaşım içerisinde bulunarak probleme sürekli ileri geri dokumalar (sıçrama sarmalları, elimde ne var neyi bulmalıyım gibi gidilebilecek bir rota hazırlama, sonuçtan başlamak bana neyi verirdi gibi geriye sarma vb.) yaparak yoğun bir ispatlama girişimi çabası içerisinde. Aşağıdaki 1MA4 katılımcısına ait alıntı bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

1MA4: Hocam ispatı yapma yöntemi benim açımdan 2 tane. Biri, doğrudan ispat yöntemi. Yani, eldeki verileri kullanarak sonuca varma. Diğeri, şey, sonucun yanlış olduğunu varsayıp eldeki bilgileri kullanarak bu varsayımın yanlış olduğunu göstermek. İspat, [bu yüzden] bence bu 2 türle yapılır... (izlediği ve işlettiği yolu açıklıyor) Ya ben şöyle başlıyorum genelde. Genel başlama yöntemim, yani işte, herhalde şey diyorsun yani “eğer A doğruysa bu B ’yi gerektirir” gibi bir durum varsa ben B ’den başlıyorum. Bilmediğim şeyden başlarım. Ve bildiğim bilgileri kullanarak, o bilmediğim şeyin doğru olduğunu göstermeye çalışırım genelde. Bizde yapılan yöntem budur. Bilmiyorum anlatabildim mi yani ama o şey yani sahada (bunu vurgulayarak söylüyor) gösterilmesi gereken bir şey. Yani bir şeyi kanıtlayacaksın hocam. Genelde insanlar hani şey der ya “eğer A işte doğruysa $A+B=C$ ’dir”. Yani insanlar genelde “ A doğruysa”dan başlıyor. $A+B=C$ ’den başlarsın. A ’nın doğru olduğu bilgisini kullanırsın... (örneklendiriyor) Şu an aklımda pratikte bir örnek yok. Ama, ee, (düşünüyor). Ha! Bak mesela şöyle bir şey olabilir mesela. “ A, B ’nin alt kümesi olsun.” Diyebilirsin ki “ τA alt küme τB ’dir.” Şimdi bunu göstermeye çalışacaksın. Şimdi biz başlarken nereden neyi göstermeye çalışıyoruz? Göstermeye çalıştığım şey $\tau A \subset \tau B$ değil mi? Oradan başlıyoruz. Yani $A \subset B$ ’den başlamam yani. Oradan ($A \subset B$ ’den başlayarak demek istiyor) τA ’ya gitmeye çalışmam. A ile τA arasında ilişki kurmaya çalışmam. B ile τB arasında ilişki kurmaya çalışmam yani. $\tau A \subset \tau B$ ’yi [yani] göstermeye, oradan başlarım. O yola oradan çıkarım. Onu da yaparken nasıl yaparım biliyor musun? Mesela, mesela bir yolu şöyledir. τB ’nin tümleyeni de τA ’nın tümleyeninin altında olur. Tümleyenlerden başlarım. Mesela τA ’nın yapısı gereği bana bunu, beni bu yöne iter. Ama τA ’nın yapısı başkaysa; bu sefer, tutarsın τA ’dan bir eleman alırsın, onun τB ’de olduğunu göstermeye çalışırsın. Gösterirken de A ’nın B ’nin altında olduğunun [$A \subset B$ varsayımı] bilgisini kullanırsın. Ama mesela benim sana bahsettiğim orada şu an [topolojik alt yapı] içerisinde vermek çok sıkıcı olacağı için vermeyeyim. Yani oradaki [göstermek istenilende ilgilenilen] τA ’nın yapısı ise bunun tümleyeninden gitmeye beni motive eder. Oradaki τA ’nın kabuğunun yapısından kaynaklı. O durumda ben mesela $\tau A \subset \tau B$ ’yi göstermek yerine, τB ’nin tümleyeni alt kümedir τA ’nın tümleyeninden giderim. Umarım daha somut bir örnek olmuştur...(ilerleme kararlarını açıklıyor) Şimdi birini seçersin. Gidemezsin. Gidemezsin kalırsın. Gösteremezsin olmaz bir türlü. Sonra öbürünü denersin. Eğer onda da bir sonuç bulamadıysan şey yaparsın, teorini gözden geçirirsin. Belki de yanlış bir teori attın ortaya. Dolayısıyla o seçim tamamıyla benim, benim kendi hayatımda random oluyor yani. Eğer bir de konuya çok hakimsen, hangisiyle daha çabuk yol alabileceğini bilip onu seçebilirsin. Ama konuya acayip hâkim

değilsen, e bu durumda ikisinden bir tanesini seçersin. Gidemediğin noktada diğerini denersin hocam yani açıkçası.

Benzer şekilde IMA9 ispatın mutlaka belirli bir teknikle yapılacağını belirtse de bu sürecin tek düze olmayan doğasını kapsamlı bir şekilde ele alarak ispatlama girişimlerinde kendisine yön veren mekanizmalardan ayrıntılı bir şekilde bahsettiği için ispat yöntemlerinin ötesinde ileri taşıyanlar kategorisine örnek olarak verilebilir:

1MA9: *Öncelikle, dediğim gibi elimde olan hipotezime bakarım. Bana ne sorulmuş? elimde ne var?*

Ve ee ön bir, benim bu sonuca gitmem için elimde, bu verilen bilgiler işte, hipotezim var. Hipoteze göre elimde bütün referansları araştırırım, o sonuca gidecek bütün referansları araştırırım. Elimde ne var? İnternet kaynakları artık referanslar, makaleler; makaleleri araştırırım. Yani o tanımlarla ilgili ee yani hipotezde verilen tanımlarla ilgili, kavramlarla ilgili önceden bulunmuş şeylere bakarım beni o sonuca götürebilecek. Hani o kavramlar arasında ilişki sağlayacak sonuçlara giderim. Ve bu şekilde hareket ederim. Yani hipotezimdeki kavramların, ee kavramlarla ilgili önceden ne bulunmuş ki ben o sonuca varırım diye araştırmaya başlarım. Ondan sonra da “beyin” (beynin bu araştırmasından/çalışmasından anlamında bahsediyor) araştırdıktan sonra, artık “elim” çalışmaya başlar. Yani çözülebiliyorsa [tabi problem]. En güzeli de “şu varsa şudur, bulun” denilen soruları çok severim. Hani “şudur” denildiği zaman hani tamam. Ama “şu varsa şöyle olur mu böyle olur mu?” denildiği zaman “olup olmadığını araştırın” denildiği zaman ne olduğu belli değildir o sorular. Yani onu kendimiz soruyoruz zaten bilim adamı olarak. “Elimde şu varsa şöyle midir, böyle midir?” O sorular zor sorulardır. Çünkü hani “şudur” deyince tamam eminsindir ona yaklaşırsın. Ama ötekinde, belki olmaz counterexample vermek zorunda kalırsın belki de veremeyebilirsin. En zor şey olmadığına dair örnek yakalamaktır. Yani bazen counterexample göremeyebiliriz. Yani en zor sorulardan biridir. Hani “bu yapı vardır [acaba] bu yapı mıdır” dediğinde belki değildir, her zaman öyle değildir. O örneği yakalamak çok zordur. Yani dediğim gibi kaynak araştırırım. Makale araştırırım ve tabii bu [eliyle kafasını gösteriyor: beynimi kullanırım]. Bağlantıyı kurmak için de bu, beyin [gerekir]. Yani o potansiyeli tamam biri görür, biri göremeyebilir. Niye? o potansiyeli görmek için de artık bunu [beyni] yani nasıl diyeyim beyni kullanacağız yani. Aralarındaki ilişkiyi görmek için... (ilerleme kararlarını açıklıyor) En çok yaptığım şey direct proof pek kullanmam. Yani gerekirse hani bazen gerekiyor; direct proof ile yola çıkarım ya da contradiction bakarım. Contradiction.. direct proof ile bir başlarım direct proof ile. Hipotezimi alırım conclusion’a doğru çıkarım. Elimdeki ön bilgileri kullanıp. Bir direct ile baktım hani ispatta sorun yaratıyor [bu şekilde başlamak] “not conclusion” ile başlarım yani contradiction metoduna başlarım. Eee yani işte induction yapacağın şeyler barizdir induction hani bas bas bağırır zaten induction’ı kullanacağın yerler. Yani. Bazen cases’lara bölerim hatta direct proof ile çıkarım cases’lere gene bölmek zorunda kalırım. Yani o ispatın getirisine göre hani “şu ispat bununla olur” diye bir şey yok. Yani o teori elinde olanların

sana ne getirdiğini yani “şöyle olursa şöyle” onu (onun gibi demek istiyor) öyle bir şey de diyemezsin yani. O yapı çünkü değişik tanımlar var hani, hani şudur şudur diyemezsin. Hani o elindeki kavramların seni nereye götüreceğini sen [atıyorum] hani direct proof ile başlarsın olmadı contradiction metodu[nu kullanırsın mesela]. Deneme yanılma yaparım yani belki cases'lere bölmem gerektiğini fark ederim. Önce bir uğraşırım yani. Uğraştıkça hani ben “Ha!” [diye ilk başta] hemen bakıp da göremezsin onu demek istiyorum. Bir uğraşman gerekiyor, uğraşacaksın. Ha! en güzel ispat tekniği burada hani direct proof yapmayım da işte contradiction yapsam daha güzel olur diye onu keşfederim. Önce bir onunla başlarım, contradiction burada daha güzel. Belki hani süsleme sanatı gelişir belki. Hani süslerim sonra hani böyle olursa bir “yok ya bu daha güzel olmuyor” [derim] hani şey yaparım. Ama case analysis'lere bölmem gerekiyor böyle öğrenci daha iyi anlar ya da okuyan daha iyi anlar derim. Mesela. Yani o ispat yaptıkça gelişir. Önce bir sonucu bulurum ama, ama bunu ben nasıl güzel yaparım diye daha sonra düşünürüm. Acaba hangi teknik hani buraya önce direct proofla başlarım ama tabii ki. Elimde ne var sonuca nasıl giderim diye başlarım. Yani o orada “şu teknik” hani “şudur” falan. Induction kullanacağım yeri iyi bilirim. Yani öğrencilere öğretiyorum zaten [induction'ı] ne zaman, nerede kullanması gerektiğini. İşte “principle induction” mı, “strong induction” mu uygun olur [diye onlara] hepsini öğretiyoruz yani. Yani önce yani “şudur, şöyledir” diyemezsin ona. “Ben şurada contradiction kullanırsam şöyledir” [demek yanlış]. [Onun yerine] bakarsın mesela direct proof ile başlarsın olmadı. Olmadı. Ya “şunu “not conclusion”, [yani] conclusion'ın tersini alsam acaba bir çelişki yaratabilir mi” falan. Ne bileyim hani diye yani ispata göre hani yaptığın elindeki hipotezine göre hareket edersin yani... (kararlarının arkasındaki niyetlerini açıklıyor) Sezgi bir şey yok. Önce direct proof'la başlıyorsun olmuyorsa, hani, belki oluyor? Olmuyorsa contradiction'a geçiyorsun, tamam mı? Yani sezgi yani o tabii ki tecrübe, tecrübe çok önemli. Evet yapa yapa yapa yapa yapa yapa yapa tecrübe, tecrübe!

İspatlama yolları başlığının ikinci kategorisi, *genel problem çözmeden bahsedenler* şeklindedir ve 10 katılımcının görüşü bu kategori altında birleştirilmiştir. Bu kategorideki katılımcılar için ispatlama, problem çözme sürecinde olduğu gibi bir bilinmezlik ortamıdır. Bu nedenle ortada çözüme ulaştırılması gereken bir problem vardır ve katılımcının problemi çözerken ilişkilendirme sürecini aktifleştirerek, var olan bilgilerini probleme aktarmasını, bazen de bazı akıl yürütme yollarını (analojileri kullanma, problemin parçalarından faydalanarak bütün probleme ulaşmayı sağlayan tümevarımsal hareketler vb.) sürece dahil etmesini, problem parçalarından amacına hizmet edenleri gruplandırmasını, matematiksel ispata özgü değil kendi pratiğinde aktif olarak kullandığı (şu an hali hazırda bir problem çözerken bile işlettiği temel mekanizmalar) yol ve yöntemlerin rehberliğinde daha doğal ve informel bir şekilde yaklaşımlarını içermektedir. 4EÖ1 ispatlama durumuyla karşı karşıya kaldığında

genel olarak yaptıklarının çerçevesini ana hatlarıyla çizmeye çalışmaktadır. Yaklaşımlarının genel olarak bu şekilde olduğunu ve ilk elden aklına gelenlerle yol aldığını belirtmiştir. Matematiksel bir konuyla ilişkilendirme süreciyle ilgilenmesi daha fazla ön planda olduğu için, özellikle matematiksel ispatlamada görünür elementlerden bahsetmemektedir. Bu açıdan 4EÖ1 genel problem çözmeden bahsedenler kategorisine örnek olarak verilebilir:

4EÖ1: *Yani ne yaparım? Yani incelerim öncelikle bu bana hangi, mesela matematikte bunu bir konuyla ilişkilendirmeye çalışırım yani. Nereden nasıl yürüyebilirim? Daha sonra yine hani söylediğim gibi orada bildiğim bir şey var mı mesela? Hani bunu bulmaya çalışırım. Hani farklı dayanaklar ile sonuca ulaşmaya çalışırım... (dayanağı açıyor) Yani işte hani şey orada bildiğim bir şey o ifadenin teoremin içinde mesela bildiğim bir kavram ya da ne bileyim bildiğim bir formül bir şey var mı? Hani bundan bahsetmiştim aslında... (ispatlama girişimlerini açıklıyor) Yani aslında ilk olarak şöyle başlarım herhalde, yani mesela ben de ilk hani o aklıma gelen şeyi uygulayım. Hani buradan bir yere gidiyor muyum? İşte bu olmadıysa farklı bir tanesine geçerim. Yani bu noktada bir deneme yanılma yapıyorum aslında. Daha sonra hani bir yerden bir işte bir çıkar yol gördüysem mesela buradan sanki işte bir sonuca gidebiliyorum gibi ve bu şekilde de farklı yollar deneyerek ya da belki araştırma yaparım yani. Böyle böyle bir sonuca ulaşıyorum... (yolunun genelde bu olduğunu açıklıyor) Yani hep böyle sanki çünkü hani siz sorduğunuzda direkt bende bunlar canlandı. Hani farklı bir a şöyle de oluyor gibi bir şey olmadım. Yani hep böyle yapıyorum herhalde... (ispat yaptığını gösteren niteliklerinden bahsediyor) Yani bir eşitlik kurabilmek gibi bir şey oluyor aslında. Hani ispatladığım şeyi de mesela bir sonucu işte atıyorum 5 buluyorsam hani ispat sonucunda bulduğum ifadede de aynı sonuca ulaşıyorsam eğer hani evet, demek ki bu gibi. Ama hani mesela bunu tek bir denemeyle bu kararı alamam, hani birkaç deneme ya da belki bazı kritik noktalar dediğimiz şeyler vardır ya hani o şekilde deneyerek o noktaları deneyerek hani bir doğruluğa varabiliriz.*

İspatlama yolları başlığının üçüncü kategorisi, *dışsal referansa yönelenler* şeklindedir ve 9 katılımcının görüşü bu kategori altında birleştirilmiştir. Bu kategorideki katılımcılar matematiksel bir ifadenin ispatlanması durumuyla karşı karşıya kaldıklarında genel olarak kitap ya da kendilerine referans olabilecek konuyla ilgili yapılmış kaynaklara erişme arayışı, internet üzerinden bir araştırma yapma ihtiyacı, kendisine güvenilir gelen ikna ediciliği yüksek daha önceden yapılmış çalışmalara başvurma yönelimi, herhangi bir derste yaptıkları ve oradan hatırladıklarını çağırma ya da defterine aldıkları bilgilere dayandırarak ispatlamaya girişeceklerinden bahsettikleri için dışarıya bağımlı olmuştur. Bir başka ifadeyle bu kategorideki katılımcılar kendilerinin dışındaki güvenilecekleri referansları

yardımına çağırılmaktadır. Bazen de ispatlanacak ifadenin tipi/görünümü katılımcıda farklı şeyleri uyandırarak, bu tarzla karşılaşmanın onda yerleşen bir mekanizmayı hep tetiklediği ya da alışkanlığının açığa çıkması şeklindeki durumlar dış görünümlü etkilere sahip olmuştur. Kendisinin herhangi bir ispatlama durumuyla karşı karşıya kaldığında nasıl bir yol izlediği sorusu yönelttiğinde, 4EÖ4 cevabını daha çok derste yaptıkları tümevarım örneği üzerinden vermektedir ve kendi yaptığının ne olduğundan çok sınıfa atfedilen bir bakış açısından “en iyi bildiğimiz şey de tümevarım” detayı ve diğer ispatlama yöntemleri üzerinde durmadıkları şeklinde devam eden görüşleri eşlik etmektedir. Her ne kadar her zaman bu şekilde yapıp yapmadığının anlaşılması için kendisinin yaptıklarını anlamaya yönelik (ayrıca takip sorusu) sorulsa da bu soruya karşılık da benzer şekilde dışa yönelimli cevaplar verdiği için 4EÖ4 dışsal referansa yönelenler kategorisine örnek olarak verilebilir:

4EÖ4: *Mesela tümevarım aklıma geliyor. “n”e değerler veriyoruz ardından değerler dediğim mesela “n”e “k” veriyoruz, sonra (k+1) veriyoruz. En sonunda bunu bir genelliyoruz. Tek tek onun aşamaları oluyor. Zaten en iyi bildiğimiz şey de tümevarım diye düşünüyorum. Diğerleri üzerinde pek durmamıştık çünkü o şekilde en sonunda bir yani şeye varıyorduk genellemeye varıyorduk ve ispatlamış oluyorduk. Şu eşittir şu oluyordu ve biz onu genelleşmiş oluyorduk. Doğruluğunu kanıtlıyorduk... Zaten çok yaptığımız söylenemez. Yani yaptığımız zaman bu şekilde yapıyorduk. Ama tabii ki de her zaman o olmamalı, hani tümünden geleni de kullanılmalı, başka da vardı karşıt bir şey vardı, o da olmalı ama işte yeterli olmadığımız için onu yapıyoruz. Onu da yapamayınca yapamıyoruz.*

3MÖ8 soyut matematikten hatırladığı ya da cebirde gördüğü gibi örneklerle benzerliği açısından kendisine verilen matematiksel ifade eğer sözel bir şekildeyse belli bir ispatlama tipini uygulamaya koyması nedeniyle dışsal referansa yönelenler kategorisi için örnek olarak verilebilir:

3MÖ8: *... Eğer sözel bir şeyi ispatlamam gerekiyorsa onun aksinin yanlış olduğunu ilk önce ispatlayıp sonra doğrunun ne olduğunu gösterirdim ama bu analitik geometride verdiğim ispata göre gidersem de tamamen harflerin... (sözel ifade ne demek açıklıyor) Sözel ifade... Aklıma sözel olarak söyleyebileceğim teorem ne olabilir diye düşünüyorum, cebirde sözel ifade olarak çok görmüştük ama nasıl örnek vereceğimi tam olarak bilemiyorum yani atıyorum bir konu işliyoruz cebirde onun kümesi, atıyorum a kümesine aittir gibisinden yani işleme dayalı bir şey değil de a kümesinin alt kümesidir, b, a kümesinin alt kümesidir bunu ispatlayınız, diye bir sözel bir şey de sorulabilirdi. Bunun çözümünü bir farklı olarak çözebilirdik, ilk önce a kümesinin b kümesinin alt kümesi olmadığını göstermemiz gerekirdi, ilk önce olmadığını göstermek daha sonra evet olmadığını görünce, evet öyleymiş, deyip ispat*

yöntemi sunabilirdim. Yani şu an aklıma gelen örnek bu... (ilk önce olmadığını göstermeyle niye başladığını açıyor) Yani soyut matematikteyken ispat yöntemleri gördüğümüzde böyle bir ispat yöntemine denk gelmiştim. Karşılaştığımız teorem eğer tabii buna uygunsa önce, mesela şöyle örnek vereyim, önümde bardaktan yola çıkarak örnek vermek isterim, bardağın dolu olduğunu ben ispatlamak istiyorum, önce neden boş olmadığından yola çıkarak bir ispat şekli sunabiliriz. Atıyorum bardağı biraz sarsınca elimize su dökülüyor ve dolayısıyla boş olmadığını görüyoruz. İlk önce buradan bir ispat yöntemi çıkartabiliriz. Akabinde, bu doluymuşa zaten otomatikman hizmet ediyor yani o sonucu size veriyor. Böyle bir şeyden yani ilk önce olmadığını gösterip daha sonrasında doğruluğuna götüren ispat şekli olarak.

4EÖ6 kendi çalışmasına rehber olabilecek bir literatür taraması yaparak, bu inceleme sonucunda elde ettiği çalışmalar kendisine güvenilir ve ikna edici gelir ya da onları tutatlı bir yol olarak görünürse, bu çalışmalardan esinlenerek kendi yürüttüğü çalışmasına yön çizebilmesinden bahsetmektedir. Burada 4EÖ6'nın güvendiği, ikna ediciliği yüksek çalışmalara başvurma gereği duyması dışsal referansa yönelenler kategorisi için örnek olarak verilebilir:

4EÖ6: *... Bir sonraki yol da şu olabilir, bu çalışmaya mesela o probleme dayalı problem veya duruma dayalı literatür taraması yapabilirim. Buna benzer çalışmaları yöneten yürüten ya da burada buna benzer çalışmalara dahil olan birileri var mı? Öncelikle ona da bakabilirim. Ona bakmış olmam da bu çalışmada bu ya bu çalışmaya başkalarının bir katkısı var mı? Onların kat-, onların çalışmalarının ikna ediciliğine bakarım. Hani ve nasıl yapmış bu şekilde yapmış ve bunun tutarlı bir yol bu. O zaman bu yoldan devam edilebilir gibi düşünerek onların çalışmalarını önce kontrol edip eleştirip sonra tutarlılığını kabul edebilirsem eğer onların çalışmalarına benzer bir çalışmada yürüyebilirim.*

İspatlama yolları başlığının dördüncü kategorisi, *ispatlayıcının yeterliliğine göre değerlendirenler* şeklindedir ve 7 katılımcının görüşü bu kategori altında bir araya getirilmiştir. Bu kategorideki katılımcılar ispat yapabilmek için kendilerinin belli bir matematiksel birikim düzeyinde olmalarının gerektiğini, kendi bilgi çerçevelerinin izin verdiği birikimlerce ispatlamaya girebileceklerini vurgulamaktadır. Bu nedenle katılımcıların ispatla ilgili belli bir yeterliliği bulunmuyorsa ya da ispatlanacak matematiksel içerikle ilgili bir bilgi eksikliği varsa ispatlama girişimlerinde sıkıntı yaşayacağını dolayısıyla kendi kişisel durumlarının yapacağı ispatını etkileyeceğinden bahsetmektedir. 2EA2 için ispatlayıcı açısından öncelikli ve kritik olan şey, verilen matematiksel ifadenin/önermenin/teoremin ne hakkında olduğu ve onun temelindeki matematiğin anlaşılmasıdır. Hem buna dair derinlemesine bilgi olmaksızın hem de ispatla ilgili belli akıl yürütmelere sahip olmaksızın ispatın başarılı bir şekilde

yürütülmesinin anlamlı olmayacağına işaret etmesi yönüyle ispatlayıcının yeterliliğine göre değerlendirenler kategorisine örnek olarak verilebilir:

2EA2: *Şimdi burada tabii ki öncelikle o önermenin teoremin ya da neyse, onun ne olduğunu bir anlamam gerekir. Yani o arkasındaki matematiği anlamam gerekir ve arkasındaki matematiksel yapıyı anladığım zaman işte hangi ilişkiler var? Hangi... bir kere bilgi olmadan ispat olmaz. Yani derinlemesine bir bilgiye sahip olman gerekir ve belli düşünce süreçlerine de sahip olman gerekir. Yani şimdi bilginin yanı sıra, belli akıl yürütme, üst düzey akıl yürütmelere de sahip olman gerekir...*

İspatlama yolları başlığının beşinci kategorisi, *soruyla karşılaşılaştığı durum-ortam özelinde bahsedenler* şeklindedir ve 5 katılımcının görüşü bu kategori altında birleştirilmiştir. Bu kategorideki katılımcılar ispatlanacak ifadenin durumuna göre ya da kendisine verilen soruya göre, kendisine böyle bir görev verilip verilmemesi durumuna göre, eğer bir sınıftaysa ya da bir sınavdaysa gibi soruyla karşılaştığı ortama göre ispata yaklaşımının ve ispatlama yollarının değişkenlik gösterebileceğini vurgulamaktadır. 3MÖ1 kendisine matematiksel bir ifade verildiği zaman ispatlamaya nasıl başladığı sorulduğunda cevap olarak farklı farklı yollar olduğunu ifade etmiş ve bunun kendisine verilen ifadeye bağlı olduğunu belirterek kısa bir şekilde değinmiştir. 3MÖ1'in görüşünü içeren aşağıdaki alıntı soruyla karşılaşılaştığı durum-ortam özelinde bahsedenler kategorisi için örnek olarak verilebilir:

3MÖ1: *Ya soruya bağlı biraz. Yani genel olarak soruya bağlı. Denklem ya da herhangi bir, bilmiyorum. Yani soruya bağlı şu an. Çok farklı yolları olduğu için şu an ona da bir şey diyemem.*

Kendi yaklaşımıyla ilgili yukarıdaki genel problem çözme kategorisi altındaki görüşlerine ek olarak, izlediği yolların her zaman bu şekilde mi olduğunun sorgulanması altında 4EÖ8 belli bir sınıf ortamında aynı şekilde hareket edemeyeceğini, daha çok sınıfa uyarlayabileceği bir ispatlama yaklaşımında bulunacağından bahsetmesi bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

4EÖ8: *Yani bu gerçi, hani mesela sınıf ortamına uyarlandığında aynı şekilde yaklaşmam muhtemelen. Ama gerçekten bir formülü ispatlarken mesela işte 1^2+2^2 mesela o formülü mesela ortaya çıkartırken bence hepimiz aynı basamaklardan geçiyoruz. Hani o kesindir, o şekildedir gibi. Hani o şekilde böyle daha özel bir ispat olabilir onun için, o soru için mesela bizim. Ama hani sınıf ortamına gelindiğinde daha böyle ispat daha hani esnek oluyor. Hani o biraz önceki bahsettiğim sebeplerden dolayı. Hani o şekilde 2 farklı şekilde düşünüyorum ispat için açıkçası.*

İspatlama yolları başlığının altıncı kategorisi, *ispat yönteminden bahsedenler* şeklindedir ve 5 katılımcının görüşü bu kategori altında birleştirilmiştir. Bu kategorideki katılımcılar tarafından ispat, belli bir ispat tekniğinin kullanılarak işe koşturulmasını içerir şeklinde kabaca, çok fazla detay vermeden, daha yüzeysel bir şekilde ele alınmaktadır. Bu nedenle katılımcıların bu başlığın ilk kategorisinden daha az derinlikte bir ispatlama girişimlerine işaret etmektedir. 3MÖ5 sadece ispat yöntemlerini tanıtmaya ve anlatmaya, ne amaçla bunu kullandığını, bu kullandığı yöntemin onu sonuca götüren doğru bir seçim olup olmadığını gösteren açıkça görünen bir girişim izi taşımadığı için ispat yönteminden bahsedenler kategorisine örnek olarak verilebilir:

3MÖ5: *Yani şöyle ispat dediğimizi şeyin, tek bir şekilde yapmıyoruz. Aslında bunun hani bir birçok yöntemi var. Genel olarak bunları kullanarak yapıyoruz... Yani ortaya attığımız hani iddiaları güçlendirmek için kullandığımız tek bir yöntem yok. Az önce de söylediğim gibi mesela karşıtını kullanarak ispatlayabiliyoruz. Mesela ortaya bir çelişki atarak ispatlayabiliyoruz. Doğrudan ispat yapabiliyoruz, hani birçok yöntemi var...Nasıl ispatlarım... Yani şöyle mesela genel olarak ispat yaparken başlangıç noktamız şu oluyor mesela, farz edelim ki biz aslında şöyle hani soyut bir düşünce kafamızda kuruyoruz ve diyoruz ki mesela şöyle farz edelim ki A [sayısı] 0'dan farklı bir sayı ama onu net bir şekilde söylemiyorum. Onu ben farz ediyorum ve oradan yola çıkarak mesela A 'nın 0'dan farklı bir sayı olduğunu farz ederek o tarz bir yöntem izliyorum. Bunun devamında işlemler yapmaya çalışıyorum.*

4EÖ5'e göre tümevarımsal ve tümdengelimsel olmak üzere iki şekilde ispat yapma yaklaşımı vardır. Bununla birlikte bu yaklaşımların ne olduğunu açarken ya da tanımlarken bu ilk söyleminden biraz kendini rahatsız hissettiğini çünkü kitabi bir tanım sunduğunu söylemiştir. Daha sonraki söyleminde bu kez daha çok kendi cümleleriyle tümevarımsal ve tümdengelimsel yaklaşımlar açısından ispat yapma yollarını tanıtmış ve anlatmıştır. Her iki söyleminde de ispat yöntemleri hakkında bilgi verme ya da bu yöntemlerin sadece ne anlama geldiğini açıklama gayretinde olduğu için 4EÖ5 bu kategorideki düşünceye örnek olarak gösterilebilir:

4EÖ5: *İspat nasıl yapılır hocam? İşte ispatı genel olarak biz öğrendiğimiz gibi tümevarımsal ve tümdengelimsel olarak düşünebilirim yani. Tümdengelimsel olarak düşündüğümüzde biz bir sonuçtan geriye doğru giderek. Biz bunun aşamalarını inerek yani basamaklarını inerek ispatı o şekilde yapabiliriz ya da aynı şekilde sıfırdan başlayıp yani baştan başlayıp biz o ispata ulaşmaya çalışabiliriz farklı yöntemlerle. İşte dediğim gibi baştan başlayıp o ispata ulaşırsak bu tümevarım olur. Tümdengelim olur da bu tanım biraz daha kitabi bilgiye girdi ya. Soruyu bir daha alabilir miyim hocam? Şu an şey yaparken soruyu unuttum ... İspat bana*

göre dediğim o zaman... Yani ben de dediğim gibi ya ispatlanmış bir şeyden geriye doğru giderek bunun ilk aşamasına ulaşabilirim hocam. Ya da ben o ispatlanmış haline ulaşmak için baştan başlayıp bunun üstüne yeni bir şeyler katarak yani aşamalarını ekleye ekleye sondaki sonuca ulaşabilirim. Bu şekilde ispatı yapabilirim. Yapılabilir yani.

İspatlama yolları başlığının son kategorisi *ne ileri taşıyan ne de sadece yöntemle sınırlı kalanlar* şeklindedir ve 4 katılımcının görüşü bu kategori altında birleştirilmiştir. Bu kategorideki katılımcıların görüşleri, ne tamamen ilk kategorideki gibi geniş ve incelikli ispatlama girişimlerinde bulunduklarının ne de altıncı kategorideki gibi daha yüzeysel bir yaklaşım içerisinde olduklarının tam çerçevesini çizemediği için bu kategori altında bir araya getirilmiştir. Bir başka deyişle ispat yöntemlerinin de ötesinde hareketler içeren en üst kategoriye taşınamamış fakat ispat yönteminden bahsedenler kategorisinin de üzerinde bir yaklaşım içerisinde oldukları için ikisi arasında olan bir arayüzde kalmaktadır. 4EÖ2 matematiksel ispatın örneklerle yapılmadığının farkındadır. Örnekle denemesi, sadece kendisine verilen matematiksel ifadenin ne anlama geldiğini anlamak için bir basamaktır. Bu anlayışı yakaladıktan sonra, artık ispatın ispat yöntemleriyle yapılacağının bilincindedir. Fakat yine de burada kendi girişimlerinin doğası sadece bu söylemiyle sınırlı kalmıştır, çok fazla detay vermemiştir. Bu açıdan 4EÖ2 ne ileri taşıyan ne de sadece yöntemle sınırlı kalanlar kategorisi için örnek olarak verilebilir:

4EÖ2: *Aslında öncelikle hani bir değer verme olayı şeyi vardır. Yani direk bir değer veririz hani “acaba sağlıyor mu?” şeklinde ama tabi ki de hani değerler vererek ispata ulaşamayız. O yüzden hani ispat yöntemleri kullanılıyor. Yani o yöntemlerle ispatlamaya çalışıyoruz...*

3MÖ2 sıra sıra işe yarayan yöntemi bulana kadar deneme yaptığını ama bunun öncesinde kendisine verilen matematiksel ifadeyi ilk olarak hipotez ve sonuç şeklinde bir parçalama (eğer mümkünse) yaptığını belirtmiştir. İşe yarayan yöntemi bulmasına hizmet eden niteliklerin doğasının kendi rahat çözebileceği yöntemden mi yoksa verilen matematiksel iddianın getirisi/yapısının onu o yöntemlere yöneltmesinden mi olduğu açık olarak anlaşılamamaktadır. Bu açıdan 3MÖ2 ne ileri taşıyan ne de sadece yöntemle sınırlı kalanlar kategorisindeki gibi bir girişime örnek olarak gösterilebilir:

3MÖ2: *... Önce ben bir hipotezine bakıyorum, bir de sonucu varsa yani bir sonuç varsa, yani bir hipotez ve bir sonuç ifadesi varsa önce ben bir bakıyorum hipotezi var mı, sonucu var mı diye. Sonra bir ayıkıyorum hipotez, sonuç diye. Ondan sonra bir bakıyorum hani hangi*

yöntemle daha rahat çözebilirim diye. O yöntemi, rahat bulduğum yöntemi bulduğum zaman o yöntemle çözmeye başlıyorum. Eğer ki o yöntem olmazsa başka bir yöntemi deniyorum. Böyle yapıyorum.

4.1.4.1 Matematikçilerin Matematiksel İspatlama Girişimlerinin Doğası

Matematikçilerin, matematik eğitimcilerinin, matematik programı öğrencilerinin ve matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin grup bazlı matematiksel ispatlama yollarına yönelik bulguları Tablo 4.5 üzerinden paylaşılmıştır.

Tablo 4.5. Farklı matematiksel topluluklara göre ispatlama yolları

KATEGORİ	ALT KATEGORİLER	1MA (9)	2EA (7)	3MÖ (9)	4EÖ (9)
İSPATLAMA YOLLARI	İspatlayıcının yeterliliğine göre değerlendirenler	-	1	2	4
	Dışsal referansa yönelenler	-	2	4	3
	Soruyla karşılaştığı durum-ortam özelinde bahsedenler	-	-	4	1
	Genel problem çözmeden bahsedenler	-	4	-	6
	İspat yönteminden bahsedenler	-	-	2	3
	İspat yöntemlerinin ötesinde ileri taşıyanlar	9	3	-	-
	Ne ileri taşıyan ne de sadece yöntemle sınırlı kalanlar	-	-	3	1
1MA : Matematikçiler 2EA : Matematik Eğitimcileri 3MÖ : Matematik Programı Öğrencileri 4EÖ : Matematik Öğretmenliği Programı Öğrencileri Not: Parantez içindeki sayılar, o grubun toplam katılımcı sayısını göstermektedir. Her bir hücredeki sayılar ise o gruptaki kaç katılımcının ilgili kategoride bir görüşünün olduğunu temsil etmektedir.					

Çalışmadaki matematikçilerin tamamı ispat yöntemlerinin ötesinde ileri taşıyanlar kategorisinde ispatlama girişimlerinde bulunmuştur (bkz. Tablo 4.5). Ayrıca matematikçilerin ispatlama girişimlerinin doğası, bu kategorinin dışındaki herhangi bir yaklaşımla etiketlenmemesi yönüyle diğer katılımcılardan belirgin ve keskin bir şekilde ayrılmaktadır. Bu durum, bariz bir şekilde hem kendi bölümlerindeki öğrencilerinden hem matematik eğitimcilerinden hem de onların kendi programlarındaki öğrencilerinden farklı, matematikçilere özgü ve biricik olan yaklaşımlarını göstermektedir.

1MA5 ispat yaparken elindeki teoremi açabileceği, anlayabileceği, teoremlerle ilişkisinin olduğunu bildiği alt alanlara özgün teoremini (kendisine ilk verildiği şekliyle) çekerek ilk elden olayı orada çözümlemeye çalışacağını, bunu yaparken de kurallara aykırı hareket etmeden dikkatli bir şekilde yapması gerektiğini vurgulamaktadır. Çektiği boyutta bir değerlendirip daha sonra kendisine ilk verilen haline yani eski konumuna tekrar koyması, teoremden ispatlayacağı ifadeye denk ifadeler türetmekle meşgul olduğunun bir göstergesidir. Bu kurduğu denklik, ilk

ispatlamak istediği yapının kolay ya da çözülebilir olmadığı durumlarda daha açılabilir ya da çözülebilir formlarına erişmesini olanaklı kılmaktadır. İspatlama girişimlerini detaylandırırken ilerleyen görüşlerinde örnek bir durum üzerinden durumu daha iyi açıklayabilme çabasına girmektedir. Düşüncelerini sürekli ele geçiren bazı noktalara da değinmektedir. Burada giriş çıkışlar yaptığı yerlerden biri de sezgileridir. Sezgilerini yabana atmaması ispatlama girişimlerinde doğal reflekslerinin bir uzvu gibidir. Genel olarak bakıldığında ispatlama girişimlerinin doğasında matematiksel sistemin içinde söylediklerinin dayanak gövdesini oluşturan “tanım gereği” bunu yapabiliyor olması, belirli “bir yöntem uygulaması”, “model” olarak gördüğü çalışılan uzayda iki değerden sadece birinin gerçekleşmesi, sezgilerinden de yardım alarak modelde alacağı iki değerden birini seçerek bir varsayımda bulunarak işe koyulması IMA5’in incelikli, derinlemesine ve ileri taşınmış bir girişim alanını yansıtmaktadır:

1MA5: *İspatı yaparken kurallara bağlı bir şekilde olayı daha bildiğim alt teoremlere çekmeye çalışıyorum. Yani o teoremi bulunduğu yerden alakalı olabileceğini düşündüğüm ve bana yakın olan teorem içerisine çekip orada olayı çözmeye çalışıyorum. Mesela alt teorem dediğimiz şey şu. Bana hipotenüs teoremini kanıtlamak için ben neyi kullanıyorum? Bir karenin alanını kullanıyorum. Bir dik üçgenin alanının ne olduğunu kullanıyorum. Ne yaptım? Teoremi hangi boyuta çektim? Bir karenin alanının ne olduğunu bilme boyutuna çektim. Tabi ki bu çekme işlemi yaparken kuralları da bozmadan yapıyorum. O bildiğim boyuta çekiyorum. Bildiğim boyutta değerlendirip onu kendi konumuna tekrar koyuyorum ... Mesela bu şeye benzer. Diyelim ki? Ne diyeyim? Diyelim ki biri hakkında bilgiler almak istiyorum. Değil mi? Birtakım bilgiler almak istiyorum. O bilgileri almak için o kişinin bazı zaaflarını yakalıyorum. Onu görüyorum, zaaflarını yakalıyorum. Sonra o kişiyi kendi zaaflarının içerisine çekmeye çalışıyorum. O zaafların içerisinde bu arkadaş “acaba çözülebilir mi?” diyorum. Çözülebilir ise çalışırsa o araç üzerinde onun kafasındaki bilgileri almış oluyorum. Yani kendi bildiğim boyuta çekmeye çalışıyorum olayı. ... (izlediği yolları detaylandırıyor) Diyelim ki “asal sayıların sayısı ne kadardır ya da ne kadar çoktur asal sayılar?” Asal sayılar en az doğal sayılar kadar büyüktür, yani doğal sayılarla asal sayılar birbiriyle eşleşebilir. Yani sonsuzdur değil mi? Şimdi asal sayıların sonsuzluğunu nasıl kanıtlayacağız? Buradan baktığım zaman önce asal sayılarla doğal sayılar arasındaki bir ilişkiyi bulmak gerekiyor. Belki de hiç o ilişkiyi bulmadan da kanıtlanabilir. Gerçi doğrudan bir ilişki var. Tanım gereği her asal sayı bir doğal sayıdır. Ama bir şeyi görüyorum ben. Neyi görüyorum? İlk aşama olarak, her doğal sayı bazı sonlu tane asal sayıların çarpımı olarak yazılabilir. Bu yazım sonrasında ben asal sayıların, bunu kullanarak bir sonraki aşamaya geçiyorum. Bu bir sonraki aşama nedir? Asal sayıların sonsuz tane olduğunu sezgisel olarak gördüğüm için diyorsun ki “bu sezgimi de heba etmeyeyim” diyorsun. Asal sayıların sonlu*

tane olduğunu varsayayım diyorsun. Bu varsayım üzerinden bir çelişki elde ediyoruz. Bir çelişki elde ettiğin zaman diyorsun ki “benim varsayımının tersi doğrudur” diyorsun. Değil mi? Bak bir yöntem uyguladım. Nedir o yöntem? “Olmadığını varsaymak”. Niye olmadığını varsaydım? O ortamda sezgilerim benim devreye giriyor. Sezgilerim de heba etmemek için orada bir deneme yapıyorum. Olmadığını varsayıyorum. Olmadığını varsaydığım zaman diyorum ki yine bir doğal sayı alayım diyorum. Ve bu doğal sayı, bütün asal sayıların çarpımını bir fazlası olsun diyorum. Tamam mı? Sonra onu kullanarak bir çelişki elde ediyorum. Nasıl bir yöntem uyguladım? 1) Her asal sayının bir doğal sayı olduğu zaten tanım gereği var. 2) Her doğal sayı bir asal sayı olmasa bile sonlu tane asal sayının çarpımı olarak yazılabilirliği üzerinden doğal sayılarla asal sayıları birbirine daha çok yakınlştırıyorum. Sonra farklı bir sezgim giriyor ortaya. O sezgi “asal sayılar herhalde sonsuz tanedir” diyor. Sezgiyi devreye soktum. Sonra sonlu tane olursa ne olur diyorum. Bir varsayım yapıyorum değil mi? Bir varsayım yapıyorum. Ondan sonra bütün asal sayıların çarpımının bir fazlasını alıyorum. İşlemi böyle devam ettiriyorum. Bu işlemi yaptıktan sonra bir bölü bir asal sayı karşıma bir doğal sayıymış gibi ortaya çıkıyor ki bu da çelişki oluyor. Böyle bir yaklaşım. ... (Sezgisel kararının arka planını açıklıyor) Diyelim ki bir futbol maçındayım. Bir futbol maçında bir oyuncuyum. Değil mi? 2 kişiye pas verme durumunun söz konusu olduğunu varsayalım. Benimle aynı takımda olan 2 kişiden birine pas vereceğim. Tamam mı? Bakıyorum. Biri daha dinamik duruyor. Daha çevik duruyor. Ben onun gerçekten “daha dinamik mi daha çevik mi ya da topu ona gönderdiğim zaman topu daha iyi gönderir mi”yi kesin bilmemekle birlikte dış algısal olarak sezgisel olarak diyorum ki, “bu kişi topu daha iyi çevirebilir” diyorum ve topu ona gönderiyorum. Sezgim bu. Belki de yanılıyorum. Eğer yanıldıysam, bir sonraki top çevirme için girişimim ne olacak? O kişiye topu vermemek olacak belki de. Sezgiler bu şekilde devreye giriyor. Yani bizim algılayışımızdan çok uzak değil bu sezgiler.

1MA7, ispatlama süreci ne kadar karmaşık bir süreç gibi görülse de teknik açıdan bakıldığında ispatlamada belli tekniklerin olduğunu belirtmektedir. İspatlama durumuyla karşı karşıya kaldığında öncelikli olarak verileni mantığına yatırabilmesi için ilk elden örneklerle bir acaba doğru mu kontrolüyle hareket etmeyi anlamlı bulmaktadır. Ya orada bitirmiş (aksine örnek bulunmuştur) olacaktır ya da doğru olabileceğine dair bir ipucu yakalayıp sonra daha geniş incelemelerde bulunmaya ve ispatlamaya girişme bölümü açılacaktır. Bu aşamada ise daha yoğun düşünme eylemleri aktiftir ve sık sık değiş tokuşlar (yöntemle başlama-çıkma girme-örnekle engeli aşma-yöntemini değiştirme-süreci tekrar başlatma) kullanılabilir, sonuca götürebilecekler üzerinden düşünsel olarak oynanabilir. Diğer taraftan eğer ispatlanacak olan teorem değil de herhangi birinin iddiasıysa her zaman kafada bir “acaba bu iddia doğru mu” düşüncesini ayrıca aklında tutmaktadır. Örneklerin ispatlamada, kendisinin ispatlama yolundaki taşları

kaldırmada potansiyel katkısını göz ardı etmemektedir. Genel olarak bakıldığında, 1MA7 bölümündeki diğer matematikçiler için de olduğu gibi, olay sadece ispat yönteminden ibaret değildir; oradan çıkmış, bunun ötesinde daha gelişmiş bir şey söylemektedir:

1MA7: ...Ya şimdi değişik teknikleri var biliyorsunuz ispat yapmanın. Öncelikle verilenden başlayarak, elimde bildiklerimden başlayarak o sonuca doğru gitmeye çalışıyorsunuz. Bu bazen, tıkanıyorsunuz dediğimiz gibi. Veya daha doğrusu şöyle diyeyim; öncelikle test etmeye çalışalım yani. Bu verilen “gerçekten doğru mu?” yani birtakım örneklerle önce onu bir test ederim, kafama yatmasını sağlarım. Çünkü örnekler bazen sizi ispata da götürür yani çok basit de değil genelde daha karmaşık örneklerde “ha! bu doğruymuş” onu incelerim daha sonra ispata başlarsınız, bir yerde tikanırsanız yönteminizi değiştirirsiniz. “Ha! buradan yürümüyor bu ispat” [dersiniz]. Acaba bunun tersini kabul edip işte kontrapozitif mi yapayım mı gibi. Yani çok da fazla biliyorsunuz ispatta çok fazla da teknik yok, birkaç tane teknik var. Aslında o kadar çok karmaşık gösterilen ispatlarda da kullanılan şeyler genelde bunlar... Ya ne bileyim işte, düşünürsünüz, bir sonuç elde etmeye çalışırsınız. “ha buradan sonra niye ilerleyemiyorum” acaba şey yine orada da kafanız şeye gider, “acaba gerçekten doğru mu bu ifade buraya kadar geldim ama tam sonucu elde edemiyorum acaba buradan sonra bir hata mı var”. Yine örneklere geri dönersiniz, onu düşünürsünüz. Onunla, o engeli aşmaya çalışırsınız veya tekniğinizi değiştirerek aşmaya çalışırsınız ispatını. Veya benzeri konularda yapılmış ispatları incellersiniz. Onlar nasıl düşünülmüş [diyerek], oradan sonuç elde etmeye çalışırsınız. Zaten bu iddiaysa, genelde de bazen de ispatlanamıyor, biliyorsunuz. Ama bir teoremse ya dediğiniz, bir kitaptaki bir teoremi ispatlamak veya orada verilmemiş veya daha değişik yolla ispatlamaksa; bu şekilde düşünürsünüz. Ama iddia ise zaten kafanızda “acaba doğru mu” [düşüncesi] her zaman var. Yani iddiayı kendiniz de ortaya atabilirsiniz veya başkasının bir iddiasını göstermeye çalışırken “acaba doğru mu” [dersiniz] yani ispata dalarsınız ama kafanızda her zaman “gerçekten bu iddia doğru mu” şeyi de vardır. Yani ters örnek verip iddianın yanlış olduğunu da göstermeye çalışabilirsiniz belli yerlerde. Tıkandığınız yerlerde özellikle, örnekler sizi açar yani. (seçim kararlarının arka planını açıklıyor) ... biraz tecrübeye bakıyor ama çoğunlukla zaten yanlış olduğunuz da olursa geri dönüp başka bir yöntemle ispat etmeye çalışıyorsunuz. Yani ne diyeyim, o biraz tecrübeden kaynaklanıyor. Yani “buradan gidersem bu sonuca doğru gidebilirim” [gibi]. Zaten ortaya iddia atarken yarı ispatı da kafanızda yapıyorsunuz, yani tam ispatı yapmamış olsanız bile ben bunu buradan alsam, bunu buradan alsam bu sonuç çıkar diyor, zaten şöyle bir genel çerçeveyi çiziyorsunuz. O da zaten size, ispata yol veriyor yani o yöntemle de ispata girişiyorsunuz. Ha genelde yanlış da çıkabiliyor o yöntem, arada yöntem değişikliğine gitmek zorunda kalabiliyorsunuz. Ama işte biraz tecrübeden kaynaklanıyor diyebilirim, hangi yöntemi seçeceğiniz.

1MA2, ispat yaparken kastettiğinin anlaşılmasında cümlesine ilk elden bunu matematiksel ispat yapma ya da matematik disiplinin içinde yapılan ispat açısından

yer vermektedir. Düşünce havuzunda, soruya nasıl yaklaşacağını bilme, hangi yöntemin burada açılacağını bilme, elinde teoremin kendisine sunduğu hipotezinin varlığını not etme, ulaşmak istediği bir hedefini göz önünde tutması, geçmişten getirdiği temel matematiksel bilgilerini sürecinin içerisinde kullanmayı da aklında tutması, adım adım ilerleyerek akıl yürüterek, tecrübeleriyle de yönlendirilmiş anlamlı hareketler içerisinde girerek geniş çevreveden girişimlerinin doğasından bahsetmektedir. Ek olarak ispat yöntemlerinden tümevarım yönteminden bahsederken tümevarımın doğal sayılar üzerinden bir karşılığı olması avantajını kullanması gibi birçok mekanizmayı ispatlama yaklaşımının içerisinde düşünmesi yönüyle, olayın sadece gelişigüzel bir yöntem alayım da süreç aksın gibi basit bir mesele olmadığını farkındadır ve nihayetinde ispat yöntemlerinin de ötesine daha ileriye taşınmış bir bakış açısındadır:

1MA2: ... İşte ee bizim alanımız[ın] içindeyim. Yani ispat, ilk önce soruya nasıl yaklaşacağını, acaba hangi ispat yönteminin bunda çalışacağını bilmem gerekiyor. Ondan sonra, ee teoremin işte hipotezleri olacak. Yani ben bunları, var olduğunu [elimde bunlar var] biliyorum ve ulaşmak istediğim de bir hedef var. Bu, ilk önce işte bu nereden başlayacağımı bilip, o hipotezleri kullanıp belki geçmişten getirdiğim işte temel matematiksel bilgileri de kullanarak en son artık o sonuca varacağım yani. Birçok şeyi kullanıyorum (bunları sıralıyor): ilk önce işte bir akıl yürüteceğim, nasıl yaklaşacağım bu probleme [diye]. Ondan sonra, işte elimde var olan bilgileri nasıl kullanırım, başka neye ihtiyacım var [diye düşünürüm]. Ve işte sonucunda ulaşacağım şeye nasıl en, daha efektif bir şekilde ulaşabilirim gibi adımları var tabi. Ben bu şekilde yaklaşıyorum yani. Ben[im yaklaşım tarzım şu şekilde] “ilk önce neyi kullanmalıyım burada, işte şeylerim neler, kabullerim neler ve işte hangi bilgiler bana gerekli buna ulaşmam için” gibi düşünüyorum. Daha sonra ulaşıyorum [hedefe]. ...(seçim kararlarının arka planını açıklıyor) Buna da işte tecrübelerimden karar veriyorum. Atıyorum işte, ilk önce matematikte işte bazı sayı kümeleri var: işte reel sayılar, doğal sayılar vesaire. İşte ele aldığım şey, ee, ele aldığım teorem işte “acaba nasıl bir teorem?” Yani bu, buna ben nasıl yaklaşacağım? Mesela işte bazı sorular tümevarım ile ispatlanabiliyor. Çünkü işte doğal sayılar üstünden bir karşılığı var. O yüzden tümevarım uygulayabiliyorum. Ama hiç işte bu doğal sayılarla alakası olmayan bir teorem geldi. Ben burada bu yöntemi kullanamam. Bu sefer acaba aksini kabul edip sonra çelişkiye mi düşsem gibi [bir yaklaşım düşünürüm]. Yani tecrübelerine dayanarak diyeyim yani hani onu direk hani “şunu görüyorum, şak şunu uyguluyorum, bunu görüyorum, bunu şak uyguluyorum” gibi bir şey[in] kesinlikle olduğunu düşünmüyorum. Tamamen geçmişten getirdiğin birikimle karar veriyorsun ...(tekrar yaklaşımlarının detaylarından bahsediyor) İşte adım adım: “ilk önce ben bunu nasıl yaklaşacağım, nasıl bir yöntem beni sonuca ulaştırır” önce ona karar veririm. Daha sonra işte “benim elimde var olan hipotezler neler, doğru olduğunu bildiğim şeyler neler” onları bir not ederim. Ondan sonra “acaba başka

temel bilgilere ihtiyacım var mı, başka bir bağlantılar kurmam gerekiyor mu bu hipotezde” onlara karar veririm. Ve en son, o bildiğim şeyleri kullanarak -tabi her zaman kolay olmuyor işte- bir ilişki kurmaya çalışır, onu ispatlamaya çalışırım.

Benzer şekilde IMA8 ise elinde olanlar ve bildikleri üzerinden bir hareket noktası oluşturarak doğrudan ispatla, bir ilk başlangıç yöntemi seçerek kendisine acaba bu seçim yol aldırır mı yaklaşımıyla ilgili bir düşünceye girmektedir. Ya da bazı özel sorularda sonuçtan başlayarak gitmek, acaba bu sonuç doğru olsaydı kendisini nereye taşırdı gibi düşünce deneylerinde bulunmaktadır. İkinci durumla ilerleyişinde hep aklının bir köşesindeki “neyi bulmayı hedefliyorum”, “böyle bir şeyi bulmak için neye ihtiyacım var” (denklik oluşturma sinyali) ya da biraz başlayıp, başladığı ile bitirmek istediği arasındaki o kritik bağlantıyı nasıl açığa çıkaracağı gibi bilinçli ve odaklı ileri geri dokumalarının yaşayan göstergeleridir. Bu şekilde “resimsel görme” gibi bir plan işlettiğinden ve genel olarak böylesi bir düşünme sürecinden geçtiğini ifade etmektedir:

IMA8: ... Yani öncelikle ispat yaparken, en başta bence, eğer en başta aldığım belli kabuller varsa bunları söylemem lazım. Yani “bak benim elimde böyle böyle kabuller var. Ben bunlarla başlıyorum. Bunlarla başlayıp şunu göstereceğim”, yani neyi göstermek istediğimi de en başında söylemem lazım diye düşünüyorum. Çünkü evet, hani hangi noktadan başladığımı, hangi ispat tekniğini kullandığımı en başta benim söylemem lazım ki okuyucu ya işte bu öğrenci olabilir, yazdığınız makaleyi okuyan başka biri olabilir. Yani okuyucu başlarken ha “evet işte burada direkt ispat yapmış” ya da “burada induction’dan gidecek” diye kafasında yerleştirirse bir sonraki basamakları, çok daha rahat oluşturur diye düşünüyorum. Artı [ek olarak] mesela işte şey diyorsak işte “A’nın boş kümeden farklı olduğunu göstereceğiz” diye böyle ekledik. Yani burada amacım bu, yani amacımı belirttim. Birtakım işlemler yaptıktan sonra ve onu, eğer gösterebildiysem A’nın boş kümeden farklı olduğunu, en sonunda işte “şu sebepten dolayı A boş küme değildir” diye, “Evet, bak, burada yukarıda bak bunu söylemiştim, sonuca gittim. Bak göstermek istediğim şeyi burada gösterdim” şeklinde, hani bir açılış ve kapanış cümlesi olması gerektiğini düşünüyorum her zaman. Açılış cümlesinde de amacının ne olduğunu, hangi kabulleri aldığını ve hangi yöntemi kullandığını göstermesi, söylemesi gerekiyor bence... Bir kere önce elimde, yani ne biliyorum onları bir kenara yazıyorum. Ondan sonra, bu biraz zamanla oturan bir şey ama şöyle ifadeye baktığım zaman “acaba direkt ispatını yapabilir miyim?” diye bakıyorum. Yani şöyle; hani direkt ispat yöntemi kullanarak gidebilir miyim diye bakıyorum. Ya da mesela bazen eşitlik falan göstermeniz gereken durumlar olabiliyor. Hani diyorum ki sonuçtan başlıyorum, diyorum ki, “eğer bu eşitlik doğru olsaydı bu bana ne verirdi?” Ya da “böyle bir ifadeyi göstermek için neyi bulmam lazım, hani ben biraz başlayacağım ama arada bir yerde ne bulmam gerekiyor ki bu bulduğum sonuç beni aslında göstermem gereken sonuca götürsün” diye yapıyorum. Ama hani şey, lisans seviyesinde baktığın zaman sorulara, artık zamanla böyle bir 5-6 yıl en

az 5-6 yıl geçtikten sonra şeyi fark ediyorsun. Bunu induction ile çözebilirim; bunu contradiction yani olmayana ergi kullanayım diye o böyle içsel olarak onu hissedebiliyorsun ama çok içinde olmadığın bir alandan öyle bir ispat yapmam gerektiği zaman genelde bu basamakları [yukarıda ilk sıraladığı] kullanıyorum. Yani öyle resimsel olarak görmeyi seviyorum karşımda, o zaman daha kolay, bana öyle geliyor. Ben öyle daha kolay yapıyorum... (resimsel görmeyi açıklıyor) Hani şey hani bana göre o resimsel gösterim benim için. İşte elimde olanları bir kenara yazıyorum (bir eliyle alt alta elindekileri listeliyor gibi yapıyor). Göstermem gereken şeyi başka bir tarafa yazıyorum (bunu da diğer eliyle tarifliyor). Elimde olan şeylerden neler elde edebilirim onları yazıyorum. Yani öyle her şeyi karşımda gördüğüm zaman birleştirmek çok daha kolay geliyor bana.

Yukarıdaki alıntılardan da görüldüğü üzere matematikçiler kendilerine verilen matematiksel iddiayı ispatlamayı hemen bitirilip atılacak, sonuca kavuşturulacak bir iş gibi görmemektedir. Her aşaması detaylandırılmış, ciddi bir emek isteyen, planlı sürecin bir parçasıdır. Bu nedenle matematikçiler ispatlarken yoğun bir düşünce eylemlerinde bulunarak, sık dokumalarla ispatlanacak yapıyı işleyerek kapsamlı bir ispatlama girişiminde bulunmaktadır.

4.1.4.2 Matematik Eğitimcilerinin Matematiksel İspatlama Girişimlerinin Doğası

Çalışmadaki matematik eğitimcilerinin ispatlama yolları matematikçilerle karşılaştırıldığında çeşitlilik gösterebilmektedir. Tablo 4.5'te görüldüğü üzere, matematik eğitimcilerinin ispatlama girişimlerinin doğasını az da olsa ispatlayıcının yeterliliği ya da dışsal referansa ihtiyaç duyma gibi durumlar etkileyebilmektedir. Bununla birlikte herhangi bir ispatlama durumuyla karşı karşıya kaldıklarında nasıl bir yol izledikleri noktasında matematik eğitimcileri ağırlıklı olarak iki farklı şekilde hareket edebilmektedir. Bunlardan biri, ispatlama meselesine problem çözme gibi yaklaşma şeklindedir. Diğer, matematikçilerin tamamında görüldüğü gibi, ispat yöntemlerinin ötesinde ileri taşınmış bir şekildedir. Burada matematik eğitimcilerinde dikkat çekici bir durum, bu iki yaklaşım türlerinde matematik eğitimcileri ikiye bölünmektedir. Çalışmadaki matematik eğitimcilerinden 4'ü genel problem çözmeden bahsedenler kategorisinde yer almaktadır.

Matematik eğitimcilerinden 2EA7 ispatlama durumuyla karşı karşıya kaldığında formal bir şekilde yapmayacağını, bunun yerine daha çok informal düşünceyle hareket ettiğini, özel olarak cebirsel düşünmeyle ilgilendiğini, burada ilişkilerden örüntüler oluşturma ve sonunda genelleme sürecine doğru bir

yaklaşımından bahsetmektedir. Matematiksel bir yol yerine problem çözme, akıl yürütme ve argümantasyonun bu sürecin bir parçası olarak düşündüğünü ve yeterli gördüğünü ifade etmektedir. Formal yaklaşımı kullanmama durumunu şu an pratiğinde fazla kullanmaması ya da uzun zamandır uğraşmamasına dayandırmaktadır. İspatlama girişimlerinin detaylarında yer verdiği kendi düşüncesindeki yaklaşımının kendi öğrencilerinde de benzer olabilmesi onun için öğretimsel bir başarı ölçütü niteliğindedir. Kendisine matematiksel bir ifade verildiğinde onu ispatlamak için nasıl bir yol izlediği sorulduğunda hep odağının ispatlamak yerine daha çok düşünmek, düşünsel süreci aktif tutmak, bir problem çözme gibi meseleye yaklaşmak, ilişki kurmak, genelleme süreci gibi bir yaklaşım içinde bulunmaktır. İfadelerini tamamlarken hem kendi açısından hem de öğretiminde ispata gelene kadar ki bu bahsettiği süreçlerin önemine değinmesi dikkat çekici bir unsur olmuştur. Her ne kadar formal yolu kullanmadığını belirtse de kendi yaklaşımının bir sonraki aşamaya geçmiş halinin ispat olduğunun farkındadır. Bu nedenle bir ispatlama yapmadığını, eğer ki genellemeye kadar gelip ileri taşıyaydı işte o zaman ispat olmuş olacağından bahsetmiştir. Yine de bu aşamaya gelince “tamam”, “yeterli”, “burada bırakıyorum”, “burada duruyorum, burası öbür tarafı” gibi söylemleri ve cümlesini bitirirken son ifadesi “formala bakmam”, “formal yapılmasına ihtiyaç duymam” izlediği yol ve yaklaşımlarının doğasının tamamen böyle anlaşılması çabası içerisindeydi. Bu durumun genel manada yorumu, “benden bir şeyi ispatlamamı beklersen sana en fazla bu kadarını verebilirim, verdiklerim de formal olmaz” şeklinde kendine bir sınır çekmesidir.

2EA7: *Ya bana göre aslında az önce söylediğim yeterlilik, yeterliliklere göre yapılır. (Gülüyor).*

Ama formal dili ben çok fazla kullanmam yani. İnformal o düşünceyi yaşamak benim için daha önemli gibi geliyor. Çünkü onlarla [informel düşünce süreciyle] matematiksel kavramlara ulaşmak, yani ulaşabiliyorsak tabi ki... yani o hani zihinsel olarak yöntemini düşünebilmek bile benim için yeterli. Hani bunu formal olarak belki yapamayabilirsin ama bir matematiksel kavramı oluştururken o az önce (yeterliliklerden bahsediyor) işte problem çözmedir, akıl yürütmedir, argümantasyonu kullandığın anda, yani kullanabilme, bunları düşünebilmek bile aslında benim için bu ispatlama sürecinin doğru yolda ilerlediğini gösterir... (izlediği yollardan bahsediyor) Ya ben daha çok şey arıyorum, belki cebir, cebirsel düşünme mantığıyla ilerleyip şey “ilişki arıyorum” başta. Yani bir örüntü yakalamaya çalışıyorum. Oradan sonra bu örüntüyü yakaladıktan sonra zaten şey başlıyor. Hani bu genelleme süreci başlıyor. Örüntüyü acaba genel olarak nasıl ifade edebilirsin? İşte o süreci yaşadığın anda bazen hani şey oluyor. Belki matematiksel bir yol kullanmıyorsun ama bu düşüncel sürece girmek bile benim için yeterli, [yani yeterli] buluyorum yani şey açısından.

Ama işte formali çok kullanmıyorum açıkçası. Hani formali kullanmamak bir de şeyle alakalı. Dediğim gibi uzun süreden beri formal ispat yöntemlerini [bunlarla] çok fazla uğraşmadığım için, ondan biraz daha çekiniyorum. “Ha! böyle yaparak, yaparım, çözerim” [diyorum daha çok]. Hani o ilişkiyi bulduktan sonra buradan hani ilişkiyi çıkartamadım ama yani ana fikri anladım deyip bazen şey yapabiliyoruz... Ama yani ben öğrencileri, yani öğretmen adayları için de yani lisans düzeyindeki öğrenciler için de yani benim bu düşünce şeyime sahip olduğu, yani buna yaklaşmışlarsa, aslında öğretimin başarılı olduğunu düşünüyorum yani. O düşünsel süreci yaşatmak, sonuç ne olursa olsun daha önemli diye. Yani aslında şey de var. Hani yaparsın yanlış bir şey geldi. Bunu hani düzeltip yeniden başlatmak, yani o şey var işte, problem çözmenin aslında dördüncü aşaması, işte çözümün değerlendirilmesi bağlamında. Bir tane değişkeni değiştiriyorsun. O süreci yeniden yaşıyorsun. Ya da işte, ee, o yanlış yaptığın yeri analiz edip “A! burada acaba şöyle mi?” yapayım deyip... Aslında ispatlama şeyi değil de düşünsel olarak benim kendi kafamda şey var, yani bir ispatlama süreci değil aslında bu. Yani bir genelleme süreci ispatlama demeyelim de genelleme süreci aslında benim temel olarak yaptığım şey. Genellemenin de doğruluğunu yapabilmem için aslında ispata geçmem lazım ama orada duruyorum “A!” diyorum ki “bu öbür tarafı” ... Ama şu var yani 5-8 için bir genelleme süreci yaşadığım anda, “tamam diyorum” ben yani bu süreç bu, hani öğretimsel olarak da, etkinlik geliştirme bağlamında da bu süreç benim için yeterli diyorum. Kalıyorum [burada bırakıyorum]. Öbür tarafı [bunun bir ileri], hani doğruluğu ya da yanlışlığı, yani bu sürecin şeyi, ispata [gelmenin] hani bir sonrası[dır]. İşte o yüzden diyorum, hani 1-2 adım öncesi benim yaptığım diye. Hani hem derslerimde hem kendi zihinsel sürecimde yaptığım şey aslında ispatlamanın, yani işte örüntü bulma ondan sonra genelleyebiliyorsam genelleme[dır]. Bundan bir sonraki ispatlama[dır] aslında. Ama o sürece geçmiyorum ben derslerimde de geçmiyorum, kendi zihnimde de geçmiyorum. Sonuçta da ispatlamaya girer mi? Girmez. Yani senin sorduğun sorunun tam karşılığı aslında ispatlama yapmıyorum ben... Yani genellemeye [kadar gelip] bırakıyorum ben, [ondan sonra] “tamam” diyorum... Ama işte dediğim gibi bu biraz daha şey, yani hâlâ düşünce odaklı giderim. Ama hani bunun formal dilde yapılması[nı], yani çok ihtiyaç da duymam açıkçası. Formal, yani o orasına çok bakmam [odaklanmam].

Matematik eğitimcilerinden 2EA6, bir ispatlama durumuyla karşı karşıya kaldığında hareket etme çevresi matematiksel ispata özgü değil daha çok kendi pratiğinde şu an sıklıkla işlettiği mekanizmalarla ilgilidir. İspatın matematikçilerin yaptığı tarzda değil daha çok ortada bir problem durumu vardır ve bunun doğru olduğunu nasıl gösterebilirim şeklinde bir çözüm arayışı içerisinde. Burada matematiğe özgü ya da matematikçilerin benimsediği gibi yaklaşımlarla değil çünkü bu bilinmezlik ortamında 2EA6 açısından “benim aklıma ilk formel mi gelir”

düşüncesi zihninde daha baskındır. Bu noktadaki görüşlerine ilk olarak şöyle bir küçük alan açmaktadır:

2EA6: ... Şimdi bu bir ispat mıdır? Yani şeye baktığınız zaman? Az önce dediğim gibi bu bir gösterimdir, niye? Çünkü sen bunu deneme yanılma yöntemiyle yapıyorsun ama ben şimdi bu yaptığım yöntemi bütün üçgenler için kullanabilirim. Ben bunu 100 tane üçgen için yapsam bu ispat mıdır? Yok değildir. Peki ne yapmam gerekiyor? Bunu ispatlamanız için bu tabanın karşısındaki o tepe noktasından bir paralel çizmeniz gerekiyor ve orada iç ters açıdan bunu göstermeniz gerekiyor. Şimdi soru şu: benim oraya paralel çizmek nereden aklıma gelecek? Yani şimdi tamam bu çok kolay bir ispat, tamam. Ama şimdi oraya paralel çizmeyi kim bana söyleyecek, nereden aklıma gelecek benim? Yani şimdi her akıllı, bilgisi olan insanın, yani paralel doğruyu bildiğini veya çoğu bilgiyi bildiğini farz ediyoruz. Şimdi bunu ispatlamak için oraya acaba paralel doğru çizmek aklına gelir mi? Ne zaman aklıma gelir? Gelmebilir de yani, şimdi bunun garantisi ne? Şunu diyebilir miyiz yani, paralel doğruyla iç ters açıyı biliyorsan senin oraya şeyi çizebilmen gerekiyor, çizmek zorundasın, bunu kim garanti edebilir yani şeyle ilgili? Ama bunun ispatını bulmak bu şekilde yapıyor yani normal formal ispatı matematikteki. Siz kağıtları kesseniz de o kabul edilmiyor yani, daha değişik yöntem de bulabilirsiniz o da deneme yanılma yöntemine girerse.. yani illa sizin o karşıya bir paralel doğru çizmeniz aklınıza gelmesi gerekiyor. Peki benim aklıma gelmedi paralel doğru çizmek, ben nasıl ispatlayacağım üçgenin iç açılarının toplamının 180 derece olduğunu? İspatlayamayacağım, varsa başka yöntem bilmiyorum ben yani. Mevzu buraya geliyor biraz. Her ne kadar bu [ispat] daha önceki bilgileri kullanmayı gerektirse bile herkesin bu bilgileri kullanacağı anlamına gelmiyor, çoğu zaman için bunlar bir repertuar gibi...

Diğer taraftan da 2EA6 “formel yolla yapılmayan kabul görmüyor” ikileminden sürekli bahsetmektedir. Durum böyle olunca ya da mevzu buralara kadar gelince kendisi için aslanan şeyin bir birey olarak böyle bir bilinmezlik ortamında çözüme nasıl ulaşılır, çözümün doğruluğu nasıl anlaşılır ispatlama girişiminde meseleye formeldense (biçim) daha çok herhangi bir problemi çözmenin (sürecin) doğal mekanizmaları devreye girmesinin değerli olmasıdır. Bu nedenle 2EA7 gibi 2EA6 da ispatlama girişimlerindeki izlediği yollar açısından detaylandığı yaklaşımında ifadelerini tamamlarken ispatla çok fazla ilgilenmediğini ve kullanmadığına yer vererek altını çizmektedir:

2EA6: Benim bilgisayar kullanımım çok iyidir. Bana bir soru sorun ben önce bilgisayarla bunu ispatlarım. Yani bilgisayarla doğruluğundan emin.. İspat demek benim açımdan doğruluğundan emin olmak demektir. Bak ben bununla ilgili bir örnek vereyim... Ama ben ispat yapmadan, o matematikçinin bulmuş olduğu kuralı bulmuştum. Evet nereden buldun diyeceksiniz. Bilgisayar yardımıyla yaptığım deneme yanılma yöntemleriyle bir sürü

deneyerek çok.... Excel'de yaptım ben. Ayrı bir program da kullanmadım. Hani excelde [yaptım]... Onlar bu işin ispatını yapmışlar. Ben orada, hani benim bulduğum yöntemin ispatı nasıl olur, onu da gördüm. Ama şöyle bir durum: ben de aynı sonucu bulmuştum yani. Ama ben nerede buldum ben bilgisayarla buldum. Yani oradakiler [matematikçiler] başka bir number theory üzerinden, başka bir şekilde, bilinen bazı teoremler üzerinden gitmişler. Yani benim için, dediğim gibi ispat bir şeyin doğruluğunu görmektir. Hatta ben bu, yani sabahtan beri ispattan konuşuyoruz. Halbuki ispatın şeyi problem çözmedir benim için. Bakın ben bu konuda yine söylüyorum. Mesela insanlar hep üniversite sorularını bile kâğıt kalemle çözmeye çalışıyor. Ya bilgisayarla, hesap makinesini niye kullanmıyorsunuz? Niye bununla çözmeye çalışmıyorsunuz? Benim için bir şeyin doğruluğu, doğru sonucu bulmak aslında ispatlamak demektir bir şeyin doğruluğuna ikna olmak. Veya genellemek. Nerede geçerli işte genel kuralı düşünerek de bulabilirsiniz teoremlerle. Ama şimdi artık bilgisayar gibi araçlarımız var onunla da bulabilirsiniz. Ben ikinci yöntemi tercih ediyorum... Benim için burada dediğim gibi bu tür beceriler, normalde siz bu araçları bir şeyin doğruluğunu göstermek için kullanabiliyor musunuz? Çözdüğünüz bir problemin doğruluğunu bilgisayarla ispatlayabiliyor musunuz mesela? Bu nerede geçerli? Özellikle bu ihtimal hesaplarında, işte yani olasılıkta falan burada çok fazla, permütasyon kombinasyonda bunu kullanabilirsiniz. Çoğu problemin çözümünü birisi ispatlayabilir, siz başka bir yöntemle bunun doğruluğunu gösterebilirsiniz bence o da bir ispattır. Yani bana göre ispat, bir şeyin doğruluğuna kendi ikna olmak, başkasını ikna etmektir. Yani ben öyle yaklaşıyorum meseleye. Yoksa matematikte ispatla ilgili çok fazla ilgilenmiyorum kullanmıyorum şu an [ispatı].

Çalışmadaki matematik eğitmcilerinden 3'ü ise ispat yöntemlerinin ötesinde ileri taşıyanlar kategorisinde yer almaktadır. Bu kategorideki matematik eğitimcilerinden 2EA4 ispatlama girişimleriyle ilgili detaylara geçmeden önce, ilk olarak neden böyle bir matematiksel ispat yapmak durumunda kaldığını anlamaya çalışır. Bu durumu, kendisine böyle bir görev verilen öğrenci boyutu ve matematik yapmakla özdeşleştirilen, matematiksel ifadeler arasında denklik kurmayla matematik yapan matematikçi boyutuyla açıklayarak ele alır. Kendisi matematikçi olmadığı için o zaman kendisine verilecek bir ispatlama görevi vardır ve artık bu boyut üzerinden düşünerek hareket etmeye başlar. Her ne kadar 2EA4 kendisi matematikçi olmasa da bu çalışmadaki matematikçilerin yaptığı ispatlama girişimlerinde görülen tarzda, matematikçilerin dünyasında olan bir ispatla ispatlama girişimlerini yönettiği ispat yöntemlerinin ötesinde ileri taşıyanlar şeklinde anlaşılmaktadır. Düşünce deneylerinin içerisindeki bazı elementler bu çalışmadaki 1EA2 ve 1MA5 matematikçilerinin ispatlama girişimlerindeki benzerlik taşımaktadır. 1MA2'nin tümevarımın doğal sayılarda bir karşılığı olması

söylemi, 2EA4 için sayılabilir durumlar karşısında tümevarımın işe yarayabilmesiyle benzer hattadır; 1MA5'in teoremden ispatlayacağı ifadeye denk ifadeler türetme ve sezgisel hareketler söylemi, 2EA4 için mevcut yapıyı ispatlayamadığı durumda o yapıya denk olabilecek kontrapozitif gibi bir yaklaşımla daha basit görünebilecek farklı biçimlere sokma düşüncesi benzer hattadır. 2EA4'ün görüşleri aşağıda verilmiştir:

2EA4: *Zor bir soru. Aslında filen... ya da önce şeyi düşünelim: Niye böyle bir durumda kalırım?*

Bir kişi niye matematiksel ispat yapmak durumunda kalır. İstersen buradan başlayalım. Niye böyle bir matematiksel ispat yapmak durumunda kalırım? Şu an aklıma 2 şey geliyor. Birincisi birisi bana “al şunu ispatla” diye görev verir... Evet böyle bir yapalım. Şimdi 2 türlü, bir insan ispat yapmak durumunda kalır. Bir, kendisine böyle bir “öğrencinizdir”, “şunu nasıl ispatlarsınız” filan diye sorulur. Bir boyutu budur. Diğeri de “matematikçisinizdir”, matematik yapmak demek zaten. Matematiksel ifadelerin arasındaki o denklik işte, yeni sonuçların oluşması olduğuna göre... Böylece 2 sebebi olur. Şimdi o zaman ikincisi matematikçiler içindir derim. Biz o zaman birinci dünyadayız. Birinci dünyada biz ispat yapacaksa birisi bize “al şunu ispatla” diye bir görev verir aslında. Neticede biri de bana bu görevi verdiyse, o görevin nasıl yerine getirileceği ile ilgili bir yol yordam filan göstermiş demektir. Böyle baktığımda da o verilen yol yordamlardan hangisi bu göreve uyar diye bakıp ilerlemeye çalışırım. Yani nasıl yollar? İşte mesela burada acaba olmayana ergi yöntemi mi kullanayım, yoksa tümevarımla ispat mı yapılır burada, yoksa karşıt tersini mi ispatlamaya çalışayım, bir çelişki mi bulmaya çalışayım falan gibi yöntemler vardır diyelim ki. Bu yöntemleri uygulamaya çalışırım... (seçim kararlarının arka planını açıklıyor) Ha! Bu muhtemelen bunun birtakım yolları olabilir. Mesela diyelim ki sayılabilir şeylerin ispatı ile ilgili bir meselede uğraşıyorsan, sayılar teorisinde falan olduğu gibi, işte orada benim tümevarımla ispatın işe yaradığını zaten görünce anlarım. Ama şey ise, hemen böyle bakar bakmaz “ha bu tümevarımla ispattır, rahat görülür” diyebileceğim bir alan değilse o zaman işler karışır elbette. Sezgisel olarak, (düşünüyor), sezgisel olarak “ya bu yöntem işe yarayabilir mi?” Biraz deneme yanılma yapabilirim belki. Sonra o mevcut yapıyı ispatlayamıyorsam mesela o yapıya denk bir karşıt tersini alsam “acaba daha mı basit görünür o ifade” falan gibi denemeler yaparım. Dolayısıyla hemen bana aşikâr görünüyorsa hangi ispatın yapılacağı, zaten sorun yok. Görünmüyorsa, onu görebileceğim farklı biçimlere sokmaya çalışırım.

Her ne kadar 2EA4 kendisini bir matematikçi gibi görmese de ispatlama girişimleri yönüyle bu çalışmadaki matematikçiler gibi davranmaktadır. Bu açıdan çalışmadaki kendi grubundaki matematik eğitimcilerinin problem çözme sürecinden bahsedenlerinden ayrılmaktadır. İspat yöntemlerinin ötesinde ileri taşıyanlar kategorisinde yer alan bir diğer matematik eğitimcisi 2EA3'tür. 2EA3,

ispatlama etkinliğini problem çözme sürecine benzetmektedir. Fakat herhangi bir matematiksel ifadenin ispatlanmasıyla karşı karşıya kaldığında yaptığı şeyler açısından, ispatlamaya problem çözme şeklinde bakan bölümündeki diğer matematik eğitimcilerinden (2EA1, 2EA2, 2EA6 ve 2EA7) niteliksel olarak farklı yaklaşmaktadır. Bu düşüncedeki ince ayırım, ispat yaparken belli bir düşünce sürecinden geçme (bir problem çözme sürecinde yapılan şeyler gibi) fakat bunu matematiksel ispata özgü bir sistem ya da çerçeve içinde organize etme, o yapıya oturur şekilde düzenleme açısından 2EA3'ün ispatlama girişimlerinin detaylarında kendisini göstermektedir. 2EA3 de meslektaşı 2EA4 gibi bu çalışmadaki matematikçilerin ispatlama girişimlerini doğasında olan yapılarla ilgilenmektedir. Özellikle 1MA2 ve 1MA8 matematikçileri gibi 2EA3 de ileriye düşünerek “ben neyi ispatlayacağım”, “bunu ispatlamam için neye ihtiyacım var?” şeklinde ve hedefe yönelik yapılacaklarını göz önünde bulundurarak bunları kendisine yakın tutmakla meşguldür. Ayrıca 2EA3 herhangi bir ispatlama durumuyla karşı karşıya kaldığında, yaptığı şeylerin içerisinde ya başında ya sonunda ya da ispatlama girişiminin ortasında bir yerde yaptığı çalışmanın neye dayanarak tabanlaştırıldığını gösteren tanımların kullanılmasına yoğun bir vurguda bulunmuştur:

2EA3: ... Ne yapıyoruz ispat yaparken? Tanımı kullanıyoruz, ispat yaparken başka teoremleri kullanıyoruz veya ispat içerisinde yeniden başka şeyleri ispatlamamız gerekebiliyor. Dolayısıyla bu çerçeveden baktığımızda problem çözme süreci gibi, yani ben ispat yaparken kendi içerisinde bir de problem çözüyorum. Bu problemi belki parçalara ayırabiliyorum ya da bu problemin yapısını göz önünde bulundurarak nasıl hareket edeceğime karar veriyorum. Dolayısıyla ispatı yaparken çalışmış olduğumuz bağlam muhtemelen bizim için çok önemli oluyor... Çünkü ben matematiksel bilgiyi ispatlarken ne yapıyorum? Her seferinde bir şeye hükmetmem gerekiyor, bir karara varmam gerekiyor. Bu karara varabilmem için ne yapıyorum? Bir başlangıç noktası var, bir hipotezim var bunu ortaya koyuyorum. Sonra bunu ortaya koyarken kullanmış olduğum temel yapılar, diyorum ki, tanım gereği ben bunu söylüyorum ya da toplama kuralı vardır, kural gereği böyledir çünkü bunların hepsi bir sistem içerisinde geçer...Aslında matematiksel ispatta böyle bir durum var, bana göre, biz ne yapıyoruz? İspat yapacağımız zaman aslında ileriye düşünüyoruz, diyoruz ki, ben neyi ispatlayacağım? Bunu ispatlayacağım, bunu ispatlamam için neye ihtiyacım var? Bunlara bunlara ihtiyacım var, dolayısıyla ileriye düşünerek bir ispatlama sürecine giriyoruz... (izlediği yollardan bahsediyor) Bir kere bu ispat yapılacak olan durumun, teoremin, iddianın hangi bağlamda ya da hangi bağlantıda olduğu benim için çok önemli. Yani bir ispat yaparken acaba ben bunu sayılar teorisi bağlamında mı düşüneceğim yoksa geometri bağlamında mı düşüneceğim ya da analiz bağlamında mı düşüneceğim gibi. Dolayısıyla bir kere bu önemli. İkincisi, bu ispat ya da önerme dediğimiz yapının alt öncülleri

nelerdir? Benim neye ihtiyacım var? Hangi konularla bağlantılı yani benim başlangıç noktamın ne olması lazım? O başlangıç noktasını belirlemek ve kullanacak olduğum tanımlar varsa belki o tanımları ortaya çıkarmak, hangi bağlamda çalıştığımız, yine o üç bileşenlere (daha önce ifade etmiş olduğu tanımlar, aksiyomlar ve öncül teoremleri kastediyor) doğru gidiyor. O zaman benim o teoremi ispatlayabilmem için teoremin ilişkili olduğu tanımları yakalamam gerekiyor. Ya da benzer problemler ya da benzer teoremler diyelim, olup olmadığı da çok önemli olabiliyor bazen, yani yardımcı teoremler, acaba bu teoremi destekleyebilecek olan ya da bu teoremin belli bir yerinde kullanılması gereken başka teoremler karşıma çıkar mı? Gibi. Ama herhangi bir teorem ispatı yapmaya başladığımızda aslında bu biraz da o konuyla ne kadar haşır neşir olduğumuzla da bağlantılı, eğer çok fazlasıyla tecrübemiz varsa bu bahsetmiş olduğum öncül teoremleri çok hızlı bir şekilde üretebiliriz ya da çağırabiliriz ama çok fazla tecrübemiz yoksa problem çözerken ya da o teoremi ispatlarken karşıma çıkan durumlar olacaktır o durumları ispatlamak için bu sefer ek önermeler kendimiz ortaya atabiliriz ya da kendimiz ek teoremleri ispatlamak zorunda kalabiliriz. Yani bir şeyin bir şeyi gerektirdiğini görmemiz gerekiyor... bir ek bir teoreme ihtiyacım var, yine bunu ya ispatlayacağım ya da önceden ispatlanmış bir yapıya atıfta bulunmam gerekiyor. Bunu yaptıktan sonra, “bak buradan yola çıkarak üç kenarının da eşit olduğunu gördüm dolayısıyla bu bir eşkenar üçgendir” çıkarımında bulunabilirim. Burada var olan bilgi bizi doğrudan ispata götürmeyebiliyor, o zaman ne yapıyoruz? Var olan bilgiyi türetiyoruz, var olan bilginin gerektirdiği başka yapılar ortaya çıkartıyoruz ve bu yapılar bizim ispat yapmamızı ya da o ispattaki boşlukları doldurmamızı sağlıyor. Ve gerektiğinde, ki bazen teoremin ortasında olabilir bazen teoremin sonuna doğru olabilir, her seferinde bir tanım kullanma ihtiyacı hissediyoruz, tanım gereği bu böyledir yani oradaki bir tanımı vurgulamadan yani eşkenar üçgenin tanımı gereği ya da bilmem neyin tanımı gereği demeden aslında ilerleyemiyoruz çünkü ona ihtiyacımız var yani benim bunu neye dayanarak yaptığımı gösteren bir olgu gibi.

4.1.4.3 Matematik Programı Öğrencilerinin Matematiksel İspatlama Girişimlerinin Doğası

Çalışmadaki matematik programı öğrencilerinin ispatlama yolları matematikçilerden çoğunlukla farklı fakat kendi grubu içerisinde çeşitlilik gösterebilmektedir (bkz. Tablo 4.5). Bununla birlikte herhangi bir ispatlama durumuyla karşı karşıya kaldıklarında nasıl bir yol izledikleri noktasında bu programdaki öğrenciler ağırlıklı olarak iki farklı şekilde hareket edebilmektedir. Bunlardan biri, dışsal referansa yönelenler şeklindedir. Diğeri, soruyla karşılaştığı durum-ortam özelinde bahsedenler şeklindedir. Her iki durumda da bu programdaki öğrencilerin bölümlerindeki matematikçilerin yaklaşmadığı tarzda ispatlama girişiminde bulundukları görülmektedir. Bu durumun genel manada bir yorumu, kendi bölümlerindeki matematikçilerle ortak noktada buluşmuyorlar gibi

görünmesidir. Tablo 4.5'te görüldüğü üzere hem dışsal referansa yönelenler hem de soruyla karşılaşılaştığı durum-ortam özelinde bahsedenler kategorilerindeki tarzda bir ispatlama girişiminde bulunan 4'er öğrenci bulunmaktadır.

Kendisine bir teorem ya da matematiksel bir ifade verildiğinde ve kendisinden onun ispatını yapması beklendiğinde ispata ulaşırken nasıl bir yol izlediği ya da yola nasıl çıktığını açıklarken 3MÖ6 kendi zihinsel çerçevesini yoklamak yerine daha çok kendisinden yapılması istenilene benzer bir şeyin yapıp yapılmadığını, internet gibi, kitap gibi çeşitli kaynak araştırmasına ihtiyaç duyması ya da defterinde böyle bir şeyle ilgili yazılmış benzer bir durum var mıdır şeklinde yol izlemesi, kısaca her iki durumda da tamamen dışsal yönelimli bir yaklaşım içerisindedir:

3MÖ6: *Yani ilk başta zaten defterde yazdığım bazı ifadelere bakarım. Hani o tarz bir şey yazmış mıyız ona bakarım. Onun dışında çeşitli kaynaklardan, internette işte kitaplardan falan araştırmalarımı yaparım. Bu şekilde. Yani benzer bir şey varsa ona doğru hani yazabilirim, o tarz bir ifade falan varsa eğer ona göre yazmaya çalışırım bir şeyler.*

Kendisine herhangi bir ispatlama durumuyla karşı karşıya kaldığında nasıl bir yol izlediği sorusu yönelttiğinde, 3MÖ9 cevabını daha çok derste (lisans) yaptıkları ispat yöntemlerinden aklında kalanlarla ya da liseden hatırladığı sınırlı bir bakış açısıyla ispatlama yollarını açıklamaktadır. Kendi öz düşüncesinden çok ağırlıklı olarak ve yapay bir şekilde böyle yapıldığına dayalı bir açıklama sunması 3MÖ9'un dışsal yönelimli bir yaklaşımın içerisinde olduğunu göstermektedir:

3MÖ9: *Bazı teoremlerde varsayıyoruz, bu buna eşittir diye varsayıyoruz ya da mesela k'yı 1 alıyoruz tümevarımda. Böyle ispatlama da yapabiliyoruz. Genelde biz kabul ettiğimiz için oradan başlıyoruz, bir şeyi kabul ediyoruz, çünkü yani sanırım biraz işin içinden çıkılmaz haller alıyor, bir şeyi kabul ettikten sonra onun devamını getiriyoruz... Mesela ardışık sayıların toplamı diye temel bir formül var lisede, mesela onu ispatlarken k'yı önce 1 alıyoruz, sonra 2 alıyoruz, sonra 1 aldıktan sonra 2'yi kabul ediyoruz, son olarak en son kaç aldığımızı ispatlıyoruz, ona göre ispatın doğruluğunu bulmuş oluyoruz. Hani mesela böyle bir örnekte yani tümevarımla onu öyle ispatlamıştık diye hatırlıyorum.*

Matematik programı öğrencilerinden 3MÖ4 ve 3MÖ7 herhangi bir ispatlama durumuyla karşı karşıya kaldığında nasıl bir yol izlediği sorusu üzerine, bölümündeki diğer öğrencilerden farklı bir şekilde yaklaşımlarını açıkladıkları görülmüştür. Bu iki öğrenci kendilerine yönetilen sorunun ortamını sınav odağına çekmiştir. Bir başka ifadeyle araştırmacı tarafından kendilerine yöneltilen soruyla

sınavda karşılaşmışçasına “orada ne/nasıl yapardım” düzlemine çekerek isptlama girişimleri hakkında görüş belirtmiştir. Bu öğrencilerden 3MÖ4 sınavda karşılaştığı zaman yaptıklarını göz önünde bulundurarak şu şekilde bahsetmiştir:

3MÖ4: *Ben öncelikli olarak ezberliyorum, ispatlamada, ilk önce ezberliyorum çünkü insan sınavlarda vesaire panikten dolayı unutabiliyor yani bu herkesin başına gelebiliyor ama en hatırladığım dersten hatırlayacak olursam, ilk önce problemlere bakıyorum, nasıl çözülmüş onu önce özümsemeye çalışıyorum, nasıl yapılmış, nereden gelmiş, mantık nereden başlıyor. Çünkü bir konuya direkt giriş yapamıyorum çünkü bir önceki konu bir önceki konuya bağlanıyor, hepsi birbirine bağlanıyor, problemi bu yüzden çözemiyorum, o yüzden en başından en sonuna kadar ayrıntılı olmak gerekiyor yani bakıyorum soruya hangi konu, atıyorum işte secant metodu diyeyim, buna bakacağım... Öncelikle çok çalışmaktan geçiyor bence bu süreç çünkü bir şeyin doğru olup olmadığını defalarca kez problem çözerek yani o konuyla ilgili çalışma yaparak emin olabilirsiniz. O yüzden önce bununla ilgili baya bir çalışma yapıyorum kendimce, ondan sonra sınavda rahat oluyorum açıkçası... sadece kendi çözdüğüm sorularda çok fazla hata yapmışımdır o da kendime vermiş olduğu rahatlık, artık sınavda değilim, istediğim kadar hata yapabilirim, şansı var ama sınavda böyle olmuyor. Bu şekilde.*

3MÖ4’ün ifadeleri incelendiğinde sınavda eğer bir ispat yapacaksa, kendisi o ispatı yapabilmek için daha öncesinden, sınava kendini hazırlarken yaptığı şeylerin içerisinden, öncelikli olarak yaptığı hazırlıklarından bahsetmektedir. Eğer bu hazırlanma çalışmalarını iyi bir şekilde yerine getirebildiyse sınavda da ispatını rahatlıkla sonuçlandıracağına inanmaktadır. Böyle olmakla birlikte 3MÖ4’ün sınavda nasıl ispatladığını görünür kılan öz girişimlerine açıkça rastlanılamamıştır. Bu durum bu öğrenci özelinde daha çok “ispat yapacaksam bununla sınavda karşılaşacağımdandır ve bu ispata gardımı da bu şekilde alacağımdandır” odağında olması izlenimi uyandırmaktadır. Ayrıca bu öğrencinin bu şekilde cevap oluşturması manidar görünebilir çünkü bu bölümün öğrencileri kendileri sınav dışında, sınıf içerisinde böyle bir uğraşta bulunmuyor olabilirler.

Soruyla karşılaştığı durum-ortam özelinde bahsedenler kategorisindeki bir tarzla ispatlama girişiminde bulunan öğrenciler arasında 3MÖ6 ispatlanacak ifadenin durumuna göre yaklaşımı hakkında görüş bildirmiştir. İspatlanacak ifadenin içerisinde geçen “ispatlayınız” kelimesi 3MÖ6 açısından önemli bir detaydır. Eğer bu ifadeyi sorunun içerisinde görüyorsa bir matematiksel ispat gerektirdiğini biliyordur/farkındadır ve bu şekilde ispatlama yoluna koyulacaktır yoksa soruyu normal bir soru çözer gibi çözme girişiminde bulunacağından

bahsetmektedir. Ayrıca ifadelerinde yer verdiği bu detay ne zaman ispat yapma ne zaman soru çözme yaklaşımı içerisinde olacağını da temsil etmektedir. Ek olarak, bu öğrenci kendisine ispatla denildiği için yani bir görev verildiği için (zorunlu olarak) ispat yaptığını yoksa başka zaman ya da spesifik olarak belirtilmediği müddetçe ispatlamaya gitmeyeceğinin önemli bir sinyali vermektedir (bu kısım etkinlik üzerindeki ispatlama yaklaşımında tekrar yerinde değerlendirilecektir). 3MÖ6'nın görüşleri şu şekildedir:

3MÖ6: ... bir sorulan soruda “bunu ispatla” dediğinde onu ispatlamam gerektiğini biliyorum en azından... Yani mesela işte bir soru var mesela. Bu soruyu mesela ispatla diyor, ben mesela bakıyorum ifadeye mesela ben onu gördüğüm zaman a! bu simetrik özelliğinden geliyor bunu bu şekilde ispatlayabilirim, bunu mesela diyebilirim ama mesela orada o ifadeye vermediği sürece belki de ben direkt soruyu normal bir şekilde çözeceğim. Yani ispatlama yöntemine gitmeyeceğim orada. Yani örnek vererek mesela çözebilirdim ama ispatlamazdım. İspatla denildiği için aslında ispatlıyoruz... Ama normalde mesela bir şeyi mesela açıklarken o[nu ispatlamak aklıma] gelmiyor ama mesela sorularda “evet bunu ispatla” denildiği zaman öyle geliyor.

4.1.4.4 Matematik Öğretmenliği Programı Öğrencilerinin Matematiksel İspatlama Girişimlerinin Doğası

Çalışmadaki matematik öğretmenliği programı öğrencilerinden en az biri ispat yöntemlerinin ötesinde ileri taşıyanlar kategorisi dışındaki bir tarzda ispatlama girişiminde bulunduğu görülmektedir (bkz. Tablo 4.5). Bununla birlikte herhangi bir ispatlama durumuyla karşı karşıya kaldıklarında nasıl bir yol izledikleri noktasında matematik öğretmenliği programı öğrencileri ağırlıklı olarak genel problem çözmeden bahsedenler kategorisindeki gibi ispatlama girişiminde bulunmaktadır. Genel olarak diğer katılımcı gruplarla karşılaştırıldığında, en çok bu programdaki öğrenciler (6) tarafından problem çözme şeklindeki bir yaklaşımın kullanıldığı görülmektedir. Diğer taraftan bu öğrenciler ispatlama girişimlerinin bu tür doğasıyla matematikçiler ve matematik programı öğrencilerinden tamamen ayrılırken matematik eğitimcilerinin 4'ü ile benzer hareket etmektedir. Matematik öğretmenliği programı öğrencilerinden 4EÖ8 herhangi bir ispatlama durumuyla karşı karşıya kaldığında yaptığı şeylerden şu şekilde bahsetmiştir:

4EÖ8: ... Önce o iddiayla ilgili yani diğer bildiğim noktalar varsa eğer ya da mesela o iddianın içindeki kelimeler bile çok önemli aslında. Hani orada kullanılan ifadeler bana tanıdıksa eğer ya da benim önceki bilgilerimle eğer bir noktada böyle ilişki kurabilir isem hani o ilişki kurduğum noktadan hareketle sanki o ispata yönelik bir şeyler yapabilirim, hani çalışmalar

yapabilirim gibi düşündüm. Onun dışında, o ispat yaparken, yani, bilmiyorum. Sanırım belli hani umarım belli noktalara ulaşırım, o ifadeden yani ilişki kurabilirim ki, hani ilişkili olan diğer konularla böyle “evet, bu konuda bu vardı. Belki bununla alakalı olabilir” şeklinde oraya böyle koyup hani daha o iddiayı daha benim için tanıdık bir hale dönüştürebilirim aslında. Tanıdık bir hale dönüştürürsem daha çok üstünde konuşabilirim ya da daha çok işlem yapabilirim ya da farklı süreçleri işin içine katabilirim diye düşünüyorum... (farklı süreçlerin ne demek olduğunu açıklıyor) Yani mesela o bildiğim konuda eğer hakimsem eğer o bildiğim konudan hani yola çıkarak bu iddiaya ulaşmaya çalışırım ya da farklı konular mesela farklı konuların bir araya gelmesiyle sanki bu iddiaya ulaşabilirsem hani onları sürece dahil ederim işte size söylemiştim aslında. Daha çok hani bildiklerimden yola çıkarak böyle bir şey yapabilirim.

Genel olarak bakıldığında 4EÖ8 kendi bilgileriyle iddianın içinde kendisine tanıdık gelenleri bir şekilde bağlantılı hale getirme çabasında olup, var olan bilgilerini probleme aktarmaya çalışmaktadır. Genel problem çözmeden bahsedenler kategorisinde yer alan bir diğer öğrenci 4EÖ6’dır. Bu öğrenci kendisine bir matematiksel ifadenin ispatlanması durumunda nasıl bir yol izlediği sorulduğunda ispatlama girişimlerini şu şekilde açıklamıştır:

4EÖ6: *Nasıl bir yol izlerim... Eldekine bakarak daha önceki yaptığım ispat çalışmalarında benzer bir durumun olup olmadığını öncelikle kontrol ederim. Yani elimdeki problem veya formülün önceki çalışmalarım ile benzer ya da ortak noktalarının olup olmaması benim işimi kolaylaştıracaktır. Benzer bir süreçte önceki ispat etkinliğinde nasıl bir çalışma yapmıştım onu göz önünde bulundururum. Akabinde bu çalışmaya, o şeye yeni ispat sürecini ispatlama süreci etkinliğine yoğunlaşmam daha sağlıklı olacaktır. Yani önceden yaptığım çalışmalar şu anki çalışmamla ışıktutabileceğini düşünüyorum.*

4EÖ6 kendisinin önceki yapmış olduğu çalışmalarla ilişkilendirme yaparak onların rehberliğinde şu anki çalışmasını aydınlatılabileceğinden bahsetmektedir. Bu durum dışsal bir çalışmanın önderliğinde ya da bir başkasının çalışmasını referans alma değil tamamen kendi yürüttüğü daha önceki ispat çalışmasının üzerinden ilişki kurarak hareket ettirme (tıpkı kişinin var olan ön bilgilerini yeni problem durumunda aktifleştirmesi gibi) odaklıdır.

Tablo 4.5 dikkate alındığında bu programdaki öğrencilerin genel problem çözmeden bahsedenler kategorisinden sonra ağırlıklı olarak ispatlayıcının yeterliliğine göre değerlendirenler kategorisinde yer aldıkları görülmektedir. Bu kategoride ise 4 öğrenci bulunmaktadır. Bu kategorideki gibi ispatlama girişiminde bulunan çalışmadaki tüm katılımcılar dikkate alındığında en çok matematik öğretmenliği programındaki öğrencilerin ispatlama yollarının bu çerçevede olduğu

görülmektedir. Bu durumun genel manada bir yorumu, bu programdaki öğrencilerin ispatlama girişimlerinin doğasının ispatlayıcının yeterliliğine de bağlı olmasıdır. 4EÖ4 eğer ispatlama sürecinin neleri içerdiğini biliyorsa kendisine verilen matematiksel ifadeyi ispatlarken kolay bir şekilde yol alabileceğini, o süreç hakkında hiçbir şey bilmeden ise bunun olamayacağını dile getirmiştir:

4EÖ4: *Eğer o yani ispatlama sürecini biliyorsam hani ilk başta şey yapılır, sonra şey yapılır, sonra şöyle genellemeye varılır, sürecini biliyorsam hani kolay bir şekilde yapabilirim. Ama eğer bilmiyorsam farklı yollara da gidebiliriz hani ama işte o doğru olmaz bizim için... Yine o süreci biraz bilmek gerekiyor, hiç bilmeden de olmaz.*

Böyle olmakla birlikte bu öğrencinin görüşmeler boyunca ifadelerinde çok fazlasıyla kullandığı “genelleme”, “genellemiş olma ve ispatlamış olma”, “genellemeye ulaşma, böylece doğruluğunu kanıtlama” şeklinde yer yer vurgulaması düşündürücüdür. Çünkü ister dışsal referans yoluyla elde edilmiş olsun, ister kendi yukarıdaki yeterlilik söylemi içerisinde bulunmuş olsun 4EÖ4’ün yukarıdaki ispatlama sürecinin içerisinde ufak da olsa değindiği genellemeye varma süreci, bölümündeki matematik eğitimcilerinden 2EA7’den kendisine işlemiş/geçmiş/bulaşmış olabilir. Gerçekten de 2EA7 ispata gelene kadarki yani genelleme sürecine ulaşmanın hem kendi düşüncesinde yeterli olduğu hem de öğretiminde öğrencileri kendi yaklaşımına yaklaşabilmişlerse onun için yine yeterli olduğunu söylemişti. Dolayısıyla 2EA7 kendi öğretiminin başarılı olacağının bir göstergesidir şeklindeki bir duruma işaret etmişti. Bu durum dolaylı bir şekilde 4EÖ4’ün ispatlamayı genellemeye varma süreciyle eş gördüğü çıkarımını yaptırmaktadır.

Şu an bir ispatlama durumuyla karşı karşıya kalsa 4EÖ3 kendi ispat yeterliliğiyle ilgili soru işaretleriyle dolu bir durumun ispatlama işinin rengini değiştirebileceğinden bahsetmektedir. Eğer bir şekilde başlarsa da devamını getirip getirememesi, ispatını dayandıracağı noktaları ya da neleri varsayacağını bilememesi; kısacası kendi yeterliliğiyle ilgili baştan sona ispatlama sürekliliğini koruyabilir mi endişelerinin, yapacağı ispatı etkileyeceğinden bahsetmiştir:

4EÖ3: *Hım... Düşünüyem biraz. İspatlayabilir miyim? Önce bir onu düşündüm ispatlayabilir miyim diye düşündüğümde yetersiz kalacağımı düşünüyorum. Bunu daha önce de söylemiştim. Neden? Dediğim gibi hani matematik bölümü öğretmenliği bölümünde okuyoruz. Dersler azaltıldı, içerik indirgendi. İspat yapmayı ve ispatı çok öğrenebildiğimi ya da bir şeyi ispat edebileceğimi düşünmüyorum. Hani bir yerde yetersiz kalabilirim diye görüyorum. O yüzden*

hani bir süreç olarak baktığımda hani başladıktan sonra devamını getirebilir miyim? Ya da ilk o başlangıcını oluşturabilir miyim kısmında baya soru işaretlerim var. Yapamayabileceğimi düşünürüm. ... bir ispatın nasıl yapılacağını, nereden başlayacağımı baktığımda hani bana bugün bir soru verseniz bunu bir teorem verseniz ispatla deseniz açıkçası önce o teoremi bilmem gerekiyor. O teoremi ispatlamak için de hani nereden neye bağlayacağım ya da ne dayandırarak bir şey bir şeyleri varsayarak ispatlamak gerekiyor ya ne o neyi varsayacağımı bilemeyebilirim...

Matematik öğretmenliği programı öğrencilerinden 4EÖ7 ve 4EÖ9 hem genel problem çözmeden bahsedenler hem de ispatlayıcının yeterliliğine göre değerlendirenler kategorilerinde yer almaktadır. Bu öğrencilerin herhangi bir matematiksel ifadenin ispatlanması durumuyla karşı karşıya kaldıklarında yaptıklarının doğasında kendi birikimleri, ön bilgileri, yeterlilikleri ile akıl yürütme yolları ya da düşünsel süreçleri iç içedir. 4EÖ9'un ilk söylemi "o düzeyde miyim" ile başlayan, daha sonrasında ispatlama girişiminde takip ettiği düşünsel süreçte ait mekanizmaları aşağıdaki gibidir:

4EÖ9: *İspat nasıl yapılır... Evet. (Gülüyor). Yani şu an o ispat yapma bunu açıklayacak düzeye geldim mi? Onu düşünüyorum da. İspat nasıl yapılır... İlk başta o formülün hangi problemten yola çıkılıp ortaya konduğunu, hangi düşünceden ortaya çıkıp ortaya konduğunu düşünürüm. Daha sonra bu problemi ortaya koyan kişinin hani nasıl diyeyim işte. O formülde yer alan ifadelerle acaba neleri ilişkilendirip bu formüle ulaştığını düşünmeye çalışırım. Mesela şöyle diyeyim, hani "kökler toplamı formülü acaba nereden geliyor? Bu kökleri nasıl direk böyle formülleştirebildik" tarzında düşünüp acaba hani bu nereden gelebilir? Hani gördü x, y' yi gördü. "Peki, nasıl bu şekilde yapabildi" tarzında veya buna neden ihtiyaç duydu tarzında düşünüp işte o ispattan nereden geldiğine ulaşabilirim diye düşünürdüm herhalde. Tam da bilemedim hocam şu andaki matematik bilgim sanırım buna yetmiyor şu andaki. Hazır bulunuşluğum ve buna yeterli olmadı. Bu soruya cevap verecek kadar.*

4EÖ9, ispatlama girişimlerinde daha çok kendisine verilen problemin (formülün) nereden geldiğini yakalamak için bu aşamada düşünsel süreçleri aktiftir. Formülde yer alan ifadeleri ilişkilendirebileceği yapıları aramaktadır. Problemi ortaya atan kişinin düşünme yollarını anlama çabasıyla, kendisi de o yollardan geçerek formülün nasıl elde edileceğine dair bir fikir oluşturmak istemektedir. Tüm bunlar dikkate alındığında genel olarak bir akıl yürütme sürecinin içerisinde olduğu görülmektedir. Böyle olmakla birlikte cümlesini tamamlarken, ifadesinin ilk başladığı yere gönderme yaparak, yine kendi hazırbulunuşluğunun ya da matematiksel bilgisinin ispatlama yolunu açıklamaya yetmediğini ifade etmektedir.

İspatlama girişimlerinde genel olarak problem çözme sürecinden bahsedenler kategorisinde yer alarak ve belli akıl yürütme yollarını kendine özgü şekilde kullanarak 4EÖ9'dan daha ayrıntılı ve açık bir şekilde yaklaşımını açıklayan 4EÖ7 için de aşağıdaki görüşünde belli bir temele sahip olmayla, zihinsel çerçevesini yoklamasıyla yeterliliğini ilişkilendirmektedir:

4EÖ7: *Buna da yine kendi bir zihin çerçevemi yoklamam gerekecek. Çünkü verilen bir teorem var eğer ben bu teorem hakkında bir fikre bir temele sahip değilsem büyük oranda zaten sonunu getiremeyeceğim. Benim için orada var olan şey sadece sayılar silsilesinden ibaret kalacak. Ben önce verilene bir bakacağım hani verilen teoreme bakacağım daha sonra bunu diyeceğim ki yine az önce bahsettiğim gibi genel olarak benim fikirlerim zaten şeye doğru kayıyor gruplandırabilme, benzer özellik kurabilme, parçalarına inebilme yollarına dayanıyor belki de daha sonra ben bu teoreme benzer bir teorem biliyor muyum veya bu teorem gibi sonuç veren başka bir teorem biliyor muyum bunları bir yoklamam lazım çünkü benzerlikler, benzer aşamalar sonucunda ulaşılmış olabilir bu da benim ispat yaparken kullanabileceğim bir rehber olabilir benim için. Ama hiçbir bilgim yoksa gözle görünür aşikâr olmayan bir ispatsa da yapılan zannetmiyorum benim bunun sonucuna varabileceğimi. O yüzden dediğim gibi önce bir kendimi yoklayacağım benzer yöntemler benzer şekiller içeren teoremler var mı ben biliyor muyum veya bildiklerimi bununla ilişkilendirebiliyor muyum kendi bildiğim teoremlerin bununla ilişkisi var mıdır varsa nasıl bir ilişki kurabilirim önce bunları bir değerlendirmem gerekiyor. Daha sonrasında dediğim gibi eğer benzerlik içeriyorsa benim buna dair birkaç fikrim büyük ihtimalle oluşur biraz çalışmanın sonucunda tabii ki bakacağım mesela diyeceğim ki şu sonuçlar birbirine benzer şu aşamalar birbirine benziyor yöntemler birbirine benziyor o zaman ben şu tekniği veya yöntemi burada denemem lazım. Bu şekilde önce bir deneme yapmaya çalışırım daha sonra başta dediğim benzerlik içerenleri bir kendi önüme sererim daha sonra bakarım bunların hangileri işe yarıyor hangileri işe yaramıyor veya beni bunların ispatlanmış teoremlerin yöntemleri beni bana sorulan teoremin ispatında beni ne kadar ileriye taşıyabiliyor. Bunlara bir bakarım daha sonra kendi zihnimde olan teoremlerin ispatlarını önüme serdiklerim arasında ilişkiler var mı bunlar kendi arasında ilişkili mi bunlara yönelirim çünkü kimisi belki çözüme yüzde altmış oranında götürecektir yüzde yetmiş oranında yakınlaştırtırken veya ben bir çözüm bulurum bulduğum çözüm gerçek çözüme çok yakın yakinken belki diğeri daha uzak bir sonuç verebiliyor. Belki bu iki kendi zihnimde yer alan bu iki ispat yöntemi birbirini tamamlayacak ve benim kendi çözümüm için anahtarım bu olacak. Bu yüzden önce kendi zihnimi yokladım. Daha sonra benzerlik var mı bunlara bakmaya çalıştım daha sonra bunların kendi arasında ilişkisi var mı bunları görmeye çalıştım daha sonrasında da bunların benim sorunuma nasıl çözüm olabileceğini düşünmeye çalıştım. Sorunuzun cevabını verebildim mi?*

Yukarıdaki ifadelerinden de anlaşılacağı üzere, her ne kadar daha derin bir şekilde düşünme yollarından bahsediyor olsa da matematiksel ispata özgüdür diye nitelendirilebilecek ya da işaretlenebilecek yol ve yöntemlere giriş yaptığıyla ilgili bir çıkarımda bulunabilmek güçtür. Eğer böyle olmuş olsaydı, matematiksel sisteme ait elementler ya da o sistemin içerisinde işletilen yol ve mekanizmalar 4EÖ7'nin ifadelerinin içerisinde daha görünür olmalıydı. Genel olarak bakıldığında, 4EÖ7'nin kendi yeterliliği ve genel bir problem çözme sürecinden bahsettiği yollar ispatlama girişimlerinin içerisinde birlikte yer almaktadır.

Tablo 4.5 ayrıca eğitimdeki öğrenciler için tarif ve ispatlama yolunda süreç yaklaşımlarıyla uyumlu görünmektedir. Ayrıca gerilimdeki durumda açılmayan şeyler başarılı bir ispatla sonuçlanmamasına neden oluyor olabilir. Benzer durum eğitimcilerde ayrışmayı (ikiliği yansıtıyor) açıklamaktadır. Diğer benzer bir durum matematik öğrencilerinde içselleştirilmemiş (araç olarak görme) ispat tarifi, öğrencilerin dışsal yönelimini tetikliyor olabilir. Matematikçilerde formal yaklaşım formal uyumlu sonuçları getirmiştir.

4.1.5 İspata Verilen Değer ve Atfedilen Önem

Katılımcıların matematiksel ispata yönelik algılarının beşinci ve son teması “ispata verilen değer ve atfedilen önem”dir. Bu tema, katılımcıların matematiksel ispatın ne amaçla yapıldığı, neden ispat yapmaya gereksinim duyulduğu, ispatın ne gibi rollere sahip olduğu, kendileri için taşıdığı önemi ve mesleki yaşantı(sın)daki yeri hakkındaki görüşleriyle ilgilidir. Katılımcıların matematiksel ispata ne gibi değer verdikleri ve önem atfettiklerine yönelik ifadeleri incelendiğinde, 4 farklı kategori ortaya çıkmıştır. Bu kategoriler *matematikte temel pratik olarak ispat* (MTP), *beceri olarak ispat* (BOİ), *aktarılabılır/transfer edilebilir bir yapı olarak ispat* (TYOİ) ve *kimlik olarak ispat* (KOİ) olarak isimlendirilmiştir.

Aşağıda bu tema altındaki her bir kategorinin ne anlamaya geldiği önce açıklanmış, sonra da ilgili kategoride görüşü bulunan katılımcılardan örnekler paylaşılmıştır. Bununla birlikte aynı katılımcının birden fazla matematiksel ispata verdiği değer durumuyla karşılaşılabilmektedir. Bu durumda bazı kategoriler ya da alt kategorilerde matematiksel ispatla ilgili katılımcı tarafından ifade edilmiş değerli ve önemli görünen durumlar eş kodlanmıştır. Bir başka ifadeyle herhangi bir kategori ya da alt kategorideki değerli ya da önemli görünen boyutlar, bazen diğer kategori ve alt kategorilerdeki değerli/önemli görünen boyutlar açısından aynı

katılımcının görüşleri içerisinde eşlik edebilmektedir. Bu durum daha çok matematikte temel pratik olarak ispat kategorisi ile beceri olarak ispat kategorisinde görülebilmektedir. Böyle olduğunda katılımcıların örnek alıntılarının da yer yer bu şekilde yansıtılması uygun görülmüştür.

Katılımcılar, ispata verilen değer ve atfedilen önem teması altında en çok beceri olarak ispat kategorisinde toplanmıştır. Aynı zamanda araştırmadaki katılımcıların tümü bu kategoride ispatın bazı matematiksel becerileri geliştirmedeki potansiyel rolüne değinmiştir. *Beceri olarak ispat* kategorisi fonksiyonel beceriler, düşünme becerileri ve entelektüel beceriler şeklinde alt kategorileri içermektedir.

Fonksiyonel beceriler alt kategorisi matematiksel ispatın daha çok matematiksel temel becerileri geliştiren rol ve işlevleri bakımından önemli görülmesiyle ilgilidir ve 34 katılımcının tamamının görüşleri bu kategori altında bir araya getirilmiştir. Bu konuda katılımcılar matematiksel ispatın ilişkilendirme becerisi (32), araştırma/sorgulama becerisi (19), açıklama becerisi (15), keşfetme becerisi (15), iletişim becerisi (14), doğrulama becerisi (13) ve problem çözme becerisini (4) geliştirebileceğinden bahsetmiştir.

Matematiksel bir kavramın, formülün ya da kuralın nereden geldiğini anlama, anlamlandırma, ilişki kurma, konunun arka plan mantığını kavrama gibi anlamları barındıran katılımcı görüşleriyle matematiksel ispatın ilişkilendirme becerisini geliştirebilen bir amaca sahip olduğu görülmüştür. Aşağıdaki 1MA3 katılımcısına ait alıntı ilişkilendirme becerisi kategorisine örnek olarak verilebilir:

1MA3: ... Ezberden kurtulmak için yapabilirler az önce demiştim. İşte “neyi nasıl elde ediyoruz” bunu öğrenebilirler. Bunun için ispata başvurmanız gerekir. Kavramları daha iyi anlayabiliriz ispat yaparak. Bilgimiz kalıcı, yani bu öğrendiğimiz şeyler kalıcı olur. Uçucu olmaz, ezber olunca uçucu oluyor. İspat yaparak bilgiyi kalıcı hale getiririz. Yani direk formül vermek yerine bu formülü bu sonucu nasıl elde edebileceğimizi öğretmek adına ispat yaparız. Hani derler ya “balık yemeği değil de balık tutmayı öğretir” onun gibi bir şey...

Matematiksel bir ifadenin doğru olduğunu gösterme açısından ispatın gücüne değinen katılımcı görüşleri, doğrulama becerisi kategorisini oluşturacak şekilde bir araya getirilmiştir. 3MÖ6 katılımcısının matematiksel bir bilginin doğru olduğunu göstermek amacıyla ispatın yapıldığını açıklayan aşağıdaki görüşü bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

3MÖ6: *Yani aslında dediğim gibi bence doğru olan bir bilgiyi kanıtlamak, doğruluğunu göstermeye çalışıyoruz.*

Matematiksel bir ifadenin neden ve/veya nasıl öyle olduğunun aydınlatılması ya da neden doğru/yanlış olduğunu açıklığa kavuşturmakla ilgili katılımcı görüşleri, açıklama becerisi kategorisini oluşturacak şekilde bir araya getirilmiştir. Matematiksel bir cümle kurduğunda, bunun neden böyle olduğunu insanlara açıklayabilmek için ispat yapmak zorunda olduğundan bahsettiği için 1MA2 bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

1MA2: *... Yani ben atıyorum işte, işte “bu serinin Taylor katsayıları” işte “tam sayıdır” gibi bir cümle kurduğum zaman, bunu, işte “neden böyledir” dedikleri zaman insanlar, ben bunu ispatlamak zorundayım ki, matematikte bir şey ifade etsin...*

Matematikte yeni özelliklerin, bilgilerin, ilişkilerin, sonuçların ortaya çıkarılmasında ispatın gücüyle ilgili katılımcı görüşleri, keşfetme becerisi kategorisi altında gruplandırılmıştır. Bu konuda 3MÖ4 katılımcısına ait aşağıdaki alıntı bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

3MÖ4: *... her geçen gün yeni bir araştırma yapılıyor ya da tezler yazılıyor işte yeni kitaplar çıkartılıyor, bilim insanları yeni bir şeyler ispatlamaya çalışıyor. Sürekli hani yeniliğe açık bir alan olduğu için matematik, sürekli bir ispatlama konusu ortaya çıkıyor...*

Merak etme, ‘acaba böyle olmasaydı ne olurdu’ düşüncesiyle araştırma iç güdüsü ya da ‘bu böyle ama neden böyle’ olduğunun sorgulanması ihtiyacıyla ilgili anlamları barındıran katılımcı görüşleri, matematiksel ispatın önemi noktasında araştırma/sorgulama kategorisi altında gruplandırılmıştır. 3MÖ7, matematiksel ispat sayesinde daha çok sorguladığını ve kendisinde merak duygusunun geliştiğini ifade ettiği için bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

3MÖ7: *İspat neyin nereden geldiğini bence gösteriyor bize. Yani bu yüzden “tamam böyle” deyip geçebildiğim bir şey yok. Hani böyle ama “neden böyle”, “nasıl böyle?” Bu soru, tamam yani bu formülü uygulayınca geçiyor ama “nasıl geçiyor?”, “nasıl bunu kabul etmişiz böyle?” diye hani sorgulamamız gerekiyor bence, merak etmemiz gerekiyor... ispatı baz alırsak sadece, dediğim gibi sorgulama yeteneği, merak duygusu çok fazla gelişti [bende]...*

Katılımcıların matematiksel ispat sayesinde ya da matematiksel ispat aracılığıyla fikirlerini/düşüncelerini aktarabilmesi, iletebilmesi, tartışabilmesi ya da kendisini sözlü ya da yazılı bir şekilde bir başkasına ifade etme yolu olarak iletişim kurma çabalarını yansıtan görüşleri, iletişim becerisi kategorisini oluşturacak şekilde bir araya getirilmiştir. Bu konuda 4EÖ4 katılımcısı matematiksel ispatın

yapılma amacıyla ilgili, örneğin öğrencilerin bir sınıf ortamında birbirlerinin fikirlerini duyarak, birbirlerinin fikirlerinden feyz alarak matematiksel bir kuralın nereden geldiğini ortaya çıkarırken fikirleşmeden bahsettiği, tüm sınıfın birer görüşünün alınarak tartışma ortamından bahsetmesi bu kategoriye örnek olarak verilebilir. Ayrıca 4EÖ4, matematiksel ispatın amacıyla ilgili öğrencilerin hem daha sorgulayıcı bir yaklaşım benimsemesini sağlayacağından bahsetmiş hem de fonksiyonel beceriler alt kategorisinin altındaki problem çözme becerisinin de gelişeceğini ifade etmiştir. 4EÖ4 katılımcısına ait aşağıdaki alıntı iletişim, araştırma/sorgulama ve problem çözme kategorileri açısından değerlendirilebilir:

4EÖ4: ...öğrencilerin biraz daha sorgulayıcı yaklaşmasını bence sağlıyor. Hani “nereden gelmiştir, nasıldır?” [gibi]. Yani düşünüyorlar, bir tartışma ortamı yaratılıyor ve sorgulama becerileri, problem çözme becerilerini geliştirebilir bence ispat.

Katılımcıların matematiksel ispatın bazı düşünme becerilerini geliştirebilmede önemli rollere sahip olmasına işaret eden görüşleri yer almıştır. Bu açıdan 17 katılımcının görüşleri *düşünme becerileri* alt kategorisini oluşturacak nitelikte bir araya getirilmiştir. Bu konuda katılımcılar matematiksel ispatın matematiksel düşünme (5), mantıksal ve soyut düşünme (5), analitik düşünme (4) ve yaratıcı düşünmeyi (3) geliştirebileceğinden, matematikçi gibi düşünme bakışı açısı (4) kazandırabileceğinden bahsetmiştir.

Katılımcıların matematiksel ispat sayesinde karşılaşılan herhangi bir karmaşık problem durumunda daha önceki bilgi birikim ve deneyimleri aracılığıyla bir mantık yürütmesi, bağlamdan kopartılmış bir düşünce geliştirerek yani soyutlamaya ulaşarak bir düşünme mekanizması geliştirmesiyle ilgili anlamları barındıran görüşleri, mantıksal ve soyut düşünme kategorisini oluşturacak şekilde bir araya getirilmiştir. Matematiksel ispatın öğrenilmesinin neden önemli görüldüğü ve amacının ne olduğuna yönelik 1MA6 katılımcısına ait aşağıdaki alıntı bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

1MA6: Yani öncelik aslında şu: soyut düşünme yeteneğini artırmak bir kere. Yani matematiksel olarak soyut düşünebilme yeteneğini artırır ispat yapmak... (soyut düşünmenin önemini açıklıyor) Şimdi herhalde ilkokul, ortaokul, lise matematik bilgisi anlamında düşündüğümüzde bize verilen bilgiler biraz daha analitik, lineer yani çözüm odaklı problemler. Evet, hayatın içinden çıkan problemleri de çözüyor ama hayatımızın tüm gidişatını düşündüğümüzde her şey önümüze basit bir problemden ibaret gelmeyecek. Yani komplike [daha karmaşık] olacak yani... Doğal olarak da her şeye analitik olarak yaklaşamaz yani “böyle ise böyledir, birebir” [hayır anlamında]. İşte, oradaki bilgimizi,

oradaki deneyimimizi, oradaki eksikimizi veya ona benzer yapılan deneyimleri toparlayıp işte soyut düşünebilme bence o işe yarar. Hepsini birleştirip, bana nasıl işe yararı ortaya koyar. Zaten analizde yapılan işte ispat şeyi de ona denk geliyor. Yani birkaç teoriyi birleştirip bir sonraki adıma nasıl geçebilirim [ile ilgili].

Matematiksel ispatın kişinin matematiksel bir konu üzerinde çalışırken düşünme şeklini değiştirirerek kişiye yeni bir düşünme tarzı katmasıyla ilgili anlamları barındıran katılımcı görüşleri, yaratıcı düşünme kategorisini oluşturacak şekilde bir araya getirilmiştir. Aşağıdaki 3MÖ9 katılımcısına ait alıntı bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

3MÖ9: *İspat neden yapılır? Çünkü bazı şeylerle yeni teoremler üretebiliriz biz ama bunları nasıl üreteceğiz yani ispat olmadan bunları nasıl yapabiliriz ki, direkt formülleri birleştirip mi yapacağız? Hayır, böyle ilerleyemeyebiliriz. Çünkü ispat nereden geldiğini anlattığı için bir yeni teorem oluşturmak istesek, tabi ki yeni teoremler oluşuyor. Bunlara mesela tez çalışmasında diyelim bu ispatlar çok önemlidir. Çünkü nereden geldiğini anlattığı için onları daha iyi anlayarak oradan yeni bir şeyler yaratabiliyoruz ... Yani ispatın amaçları öğrencinin direkt, yani ispatın amaçları kesinlikle yani bir şeyler öğrenmek isteyen öğrenciye bir şeylerin nereden geldiğini anlattığımız için yani ona belki bir kafasında bir şeyler oluşturuyor. Belki de nasıl diyeyim, direkt formüllerle değil de temellerine inersek ispatla birlikte yeni şeyler oluşturduğu için kafasında, yeni şeyler yarattığı için bu ona yeni bir şey katıyor, düşünme şekli katıyor. Çünkü o ispatın nereden geldiğini anlıyor, formülün nereden geldiğini anlıyor. Ben de bir tane oluşturabilirim diyor, tez mesela... Ne gibi rolleri olabileceğini düşünüyorum... yaratıcılık oluşturuyor bence kesinlikle ispat. Başka türlü formülü direkt görsek biz hiçbir yaratıcılığımız kalmıyor ... onun nereden geldiğini anladığımız için yeni bir yaratımlar ortaya koyabiliyoruz, yeni bir tez oluşturabiliyoruz. İspat bu konuda çok önemli, yaratıcılık oluşturuyor. Yani düşünme şeklimizi değiştirdiği için böyle şeyleri özellikle çok fazla yani ... Yani yaratıcılık oluşturuyor çünkü mesela diferansiyel geometride şu an çok fazla, hoca ders anlatırken dikkatimi çekiyor, oradan onu çıkartıyor. Tabii bu çok zor, nasıl yapmışlar diye de insan düşünüyor, orada onu birleştiriyor formülle. O formülle birleştirdikten sonra yeni bir formül çıkartıyor. Bir bakıyoruz ki biz bunu belki de düşünemezdik, yani düşünemezdik büyük ihtimal bunu görmeseydik. Ama bu sayede onun öyle şeyler çıkartabildiğini, bizim de belki yapabileceğimizi bize düşünce şeklimizi değiştirerek, belki de biz de yapabiliriz diye yani bize onu aktarıyor bence.*

3MÖ9 katılımcısının yaratıcı düşünmeyi geliştirmesi açısından matematiksel ispatın önemi üzerine yukarıdaki görüşlerinin arasında aynı zamanda ilişkilendirme ve keşfetme şeklinde fonksiyonel becerilere değindiği de görülebilmektedir.

Katılımcıların bir durum karşısında neyin neyle bir araya gelebileceğini, hangi sırada ve uygun bir şekilde düşünebilmede ispatın önemine değinmeleri, düşünme becerileri altındaki analitik düşünme alt kategorisinin oluşturulmasına katkıda bulunmuştur. Hem analitik düşünme hem de düşünme becerileri alt kategorisinin altında gruplandırılan diğer alt kategoriler olan matematiksel ispatın matematiksel düşünmeyi geliştirmesi ve matematikçi gibi düşünme bakış açısı kazandırması ilgili örnek alıntılara ilerleyen kategoriler altında yer verilmiştir. Bir başka deyişle analitik düşünme, matematiksel düşünme ve matematikçi gibi düşünmeye ait örnekler, aynı katılımcının diğer kategorilerdeki görüşlerini de barındırması nedeniyle aşağıda 1MA2 (entelektüel beceriler alt kategorisinde), 2EA2 (matematikte temel pratik olarak ispat kategorisinde) katılımcılarının görüşleri içerisinde paylaşılmıştır.

Katılımcılar daha geniş çerçeveden bir bakışla; farkındalık geliştirme, kritik etme ve eleştirel bir şekilde yaklaşabilme, özerklik kazanabilme, kendi bilişsel süreçlerinin bilincinde olma gibi daha derin becerileri geliştirebilmek açısından matematiksel ispatın önemli olduğunu belirtmiştir. Bu açıdan 18 katılımcının görüşleri *entelektüel beceriler* alt kategorisini oluşturacak nitelikte bir araya getirilmiştir. Bu konuda katılımcılar matematiksel ispatın aydınlanma sağlayarak fark etme becerisini (12), üstbilişsel beceriyi (4), bağımsız birey olmasını (2) ve muhakeme yeteneğini (3) geliştirebilmek için önemli olduğundan bahsetmiştir. 1MA2 matematiksel ispatın önemine farkındalık sağlama noktasında değindiği için fark etme becerisi alt kategorisine örnek olarak verilebilir:

1MA2: ... Yani ispat çok önemli çünkü bizim nasıl düşüneceğimizi öğretiyor. Nasıl yaklaşmamız gerektiğini, bir analitik düşünce yapısı oluşturuyor. Yani bir şeylerin, işte bir programlama dili gibi düşünün. Mesela bir şeyi programlarken böyle bir temelin olması gerekiyor hani bir sağlam bir temelin olacak. Oradaki işte probleme bir çözüm bulup bir kod yazacaksın. İspat da böyle yani. O [ispat] senin o düşünce şeyini öyle bir açıyor ki artık hani bir sonraki teoremden hiç görmediğin, işte daha karşına [çıkan] hiç bilmediğin bir şeyde “ya işte şöyle yaklaşabilirim, bak işte şöyle olabilir” gibi bir farkındalık sağlıyor bence. O yüzden matematik için çok önemli. Ya da işte daha küçük yaşlardaki şeyler için de yani farklı tarzda problemlere çözüm bulmak için bence çok önemli yani.

1MA2'nin aynı zamanda matematiksel ispatın analitik düşünmeyi geliştirme ve probleme çözüm üretme potansiyeline değindiği de görülebilmektedir. Diğer taraftan 4EÖ9, matematiksel ispat sayesinde kendisinin

farklı bir kafa yapısına ulaştığını, böylece daha derin beceriler kazandığını ifade etmesi yönüyle üstbilişsel beceri alt kategorisine örnek olarak verilebilir:

4EÖ9: *Matematikçi olarak ispat konusunda benim için tabii ki çok önemli... Bir şeyi ne kadar derinlemesine bilersen yani bir şeyi ne kadar anlamını daha çok, daha çok içine girersen o konu hakkındaki bilgin ile beraber gelecekte karşılaştığın yeni bir duruma o bilgilerini kullanarak, derin bilgilerini, ispatı kullanarak “ya buradan bir şey geliyordu, hani ispat vardı buradan, acaba buradan da yeni bir strateji geliştirebilir miyim?” tarzında bir yönelime girebilir ve düşünce dünyamı daha da geliştirebilirim. Hani benim ispata bakış açım böyle. Hani matematikte ispat bana göre çok önemli bir yerde... benim biraz mantığımda işleyiş tarzı öyle yani... Bir şeyin mantığını kavrayamazsam o şeyi kullanmak bana çok garip geliyor. Sanki öyle kullanıyorum, kullanıp atıyorum gibi öyle bir bilgi var ama sanki beynimde ama aslında onu daha iyi bilsem, benim için çok daha akılda kalıcı ve sanki böyle kültürlenmişim. Hani daha çok matematik biliyorum gibi hissettiriyor biraz da aslında bana ... Benim için kültürlenme, hani biraz kültürlenmişim gibi böyle ya hani hocam tek kullanımlık şeyler olur ya anlamını bilmediğiniz zaman böyle o matematiksel formülleri sadece “bak sen şurada şunu yapacaksın, burada şunu yapacaksın” deyip sadece o bilgiyi bilmek sanki tek seferlik kullan at gibi. Ama anlamını bilmek “ya ben bunu kullanabilirim” [demek]. “Tekrar tekrar dönüştürüp farklı şeylere çevirebilirim” tarzında oluyor ... bu kültürlenme, yani bilgime sanki bilgi katmışım gibi oluyor. O bilgilerle başka bilgileri bağlantılı yapıp “A! o zaman buradan da bu olabilir” tarzında bir fikir yürütüp hani sanki bilgimin üstüne daha çok bilgi katmışım gibi oluyor...*

1MA3 matematiksel ispatın analitik düşünme gibi düşünce yapısının gelişimine katkıda bulunduğunu ifade etmesinin yanısıra kıyaslama yapabilmesi, matematiksel bir konu üzerinde öğrencinin tartışabilecek düzeye erişmesi, hangi yöntemle ilerleyebileceğini kestirebilmesi ya da ayırt edebilmesi anlamındaki görüşlere sahip olması muhakeme yeteneği alt kategorisine örnek olarak verilebilir:

1MA3: *... analitik düşünme yani hızlı düşünmelerini de sağlar bu. Yani bu işi defalarca yaptığı takdirde yani. Birden fazla yaptığı takdirde kıyaslamayı öğrenir işte muhakemeyi sağlar muhakeme yetenekleri; düşünme yapılarını geliştirir. İşte mesela neyin nereden geldiğini bilmelerine yardımcı olur ... Muhakeme... Bir konu üzerinde düşünme yani, tartışabilecek seviyeye gelmesi ve ayırt edebilir bazı şeyleri yani. Yani hangi yöntemle devam edeceğini bilebilir. Kıyaslamayı öğrenir. Muhakeme yeteneği dediğimiz bu diye düşünmekteyim.*

İspata verilen değer ve atfedilen önem başlığının ikinci kategorisi *matematikte temel pratik olarak ispat* şeklindedir ve 28 katılımcının görüşü bu kategori altında birleştirilmiştir. Bu konuda katılımcıların görüşleri *matematiğin temeli, matematiğin gelişmesi ve ilerlemesine yaptığı katkı, öğretimsel gereklilik,*

matematik disiplini gereği ispat, matematik yapmayla ilgilidir ve matematiği sistematikleştirendir alt kategorilerinde toplanmıştır.

Matematiğin temeli alt kategorisinde 19 katılımcıya ait görüş bulunmaktadır. Bu katılımcılar açısından ispat matematik alanı için olmazsa olmaz, ayrılmaz bütün, matematiğin merkezinde yer alan önemli bir kavram ya da matematik ispat olmadan eksiktir. Bu konuda 4EÖ2, matematiksel ispatın matematikteki yeri üzerinden görüşlerini yansıtmıştır. İspatı matematiğin temeli olarak görmesi bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

4EÖ2: *Ya ispatın yeri olarak düşünüyorsak aslında matematiğin temelini oluşturan kısımlar değil midir yani ispat, ben öyle düşünüyorum. Matematiğin temelini oluşturuyor. O şekilde yani...*

1MA5 için ispat matematik disiplininde olmazsa olmaz kavramlardan bir tanesidir. 1MA5'in aşağıdaki alıntısında geçen bir yüzücünün yüzebilmesiyle ispatın matematikte önemli mevcudiyetini ilişkilendirerek örneklendirmesi bu kategoriye örnek olarak gösterilebilir:

1MA5: *Şimdi matematik disiplini içerisinde konuyu ele aldığımız zaman kanıtsız matematik olmaz. Nasıl bir yüzme havuzunda bir yüzücünün yüzebilmesi için bir suyun olması gerekiyorsa matematik yapabilmek için de kendi disiplini bağlamında kanıt kavramının olması gerekir. Ya da olması gereken şeylerden bir tanesidir. Olmazsa olmaz...*

1MA5 gibi 2EA3 katılımcısı da benzer bir görüşü paylaşmıştır. İspatın 'matematiksel bilginin çimentosu' olduğunu belirttiği için 2EA3'e ait aşağıdaki alıntı matematiğin temeli alt kategorisine örnek olarak verilebilir:

2EA3: *... Disiplin olarak baktığımızda da daha doğrusu matematiğin kendi içerisinde ispatın yapısına baktığımızda ya da ispatın matematikteki rolüne baktığımızda yine aslında şey karşımıza çıkıyor, bu ispat dediğimiz şey matematiğin bence yine temelini oluşturan en temel, en kritik öğelerden bir tanesi. Yani ispat, matematiksel bilgiyi harmanlayan ve matematiksel bilginin çimentosu gibi aslında...*

Matematiğin gelişmesi ve ilerlemesine yaptığı katkı alt kategorisinde 15 katılımcıya ait görüş bulunmaktadır. Bu katılımcılar açısından matematiğin bugünkü noktasına gelebilmesinde ve ilerleme kaydedebilmesi ispat sayesinde olmuştur. 1MA9 matematiksel ispatın önemine 'ispatsız olmaz' anlamında değer vermiştir. Ayrıca bir disiplin olarak matematiğin gelişebilmesine yaptığı katkıyla matematiksel ispatı önemli görmesi bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

1MA9: *... Mesela transcendental number'ı tanımlamışlar. Yani böyle böyle gelişiyor bilim, yani nasıl diyeyim ispatla gelişiyor... Sen ürettikçe yani yapılar arasındaki ilişkiyi kurdukça, "ha*

burada bir sıkıntı var” diyorsun mesela. “Ha! şuraya şöyle yapsam” diyorsun, al sana yeni bir tanım çıkıyor! Yeni bir tanımlı oluşturuyorsun yani. O [gelişme] bu kavramlar arasındaki ilişkileri kurdukça artar... İspat önemli. İspatsız olmaz, geliş, gelişmezdi ki matematik, fizik, kimya...

Öğretimsel gereklilik alt kategorisinde 10 katılımcıya ait görüş bulunmaktadır. Bu katılımcılar açısından ispat sadece lise ve üzeri bir seviyedeki matematikte değil anaokulundan başlayarak tüm matematik öğretimin ayrılmaz bir parçası olma durumuyla bütün sınıf seviyelerinin sürekli bir uzantısıdır. 2EA3, matematiksel ispatla okullarda öğrencilere verilmek istenen ya da yansıtılmaya çalışılan bir nokta olarak, matematiğin nasıl çalıştığına dair anlayışın kazandırılmasını önemsemektedir. Bu sebeple de 2EA3 öğrencilerin ispat yapma geleneğini öğrenmelerini ya da ispat yapmaları gerektiğini bilmelerinin altını önemle çizmektedir. Bu görüşüyle 2EA3, matematiksel ispatın matematik öğretiminin önemli bir parçası olmasını göz önünde bulundurması açısından öğretimsel gereklilik alt kategorisine örnek olarak verilebilir.

Matematik disiplini gereği ispat alt kategorisinde 10 katılımcıya ait görüş bulunmaktadır. Bu katılımcılar açısından matematiğin (matematik disiplininin) kendisi ispata alan açarak fırsat sağlamaktadır ve bu nedenle onlar için ispat daha fazla önemli olabilmektedir. Özellikle matematik bölümündeki katılımcılar için ispat, diğer bölümlere göre daha ön plandadır, çünkü uğraştıkları alan ispatla temsil edilir. 3MÖ6’ya ait aşağıdaki alıntı matematik disiplini gereği ispat alt kategorisine örnek olarak verilebilir:

3MÖ6: *Bölümümüz bilim üzerine ve bu yüzden de bence aslında ispat yapmamız[ın] da doğru olduğunu düşünüyorum. Sonuçta nereden geldiğini, bir bilgi var ortada ama nereden geldiğini, nasıl geldiğini bilmiyoruz hiçbir şekilde ve bu bilginin de yani biz[im] matematikçi olarak doğrulamamız da bence çok normal aslında... (neden normal karşıladığını açıklıyor) Yani belki de mesela şu an başka bir bölüm dallarından biri gelse mesela “çok saçma, ne gereği var!” da diyebilir. Ama bizim sanki öyle bir şey demememiz lazım gibi geliyor. Bölümümüzden kaynaklı olduğunu düşünüyorum onu da herhalde. Yani onu [ispatı] öğrenmemiz lazım...*

Matematik yapmayla ilgilidir alt kategorisinde 6 katılımcıya ait görüş bulunmaktadır. Bu katılımcılar matematik yapabilme kültürünün bir parçası ya da matematik yapmanın ayrılmaz bir parçası şeklinde ispata önem atfetmektedir. 2EA2 matematiksel ispatın önemine, yapılma amacına, öğrencileri açısından da gücüne farklı şekillerde değinerek yer vermiştir. Bu noktada matematiksel ispatın açıklama

işlevinin bulunduğu, matematiksel düşünme becerisini geliştirdiği, matematikçi gibi düşünme bakış açısı kazandırabildiğini ifade etmiştir. Aynı zamanda öğrencilerin kendi bilgilerinin otoritesi olma anlamında bağımsız bir birey olarak hareket etmesini sağladığından ve genel olarak ispatın öğretimsel olarak gerekliliğinden bahsetmiştir. Bu görüşlerine ek olarak 2EA2'nin ispatın ayrıca matematik yapmanın ayrılmaz bir parçası olduğunu ifade eden görüşe sahip olmasıyla matematik yapma alt kategorisine örnek olarak verilebilir:

2EA2: *Matematiksel düşünmeyi öğretmek bence. Matematik yapmayı öğretmek. Çünkü matematikçi.. nedir matematik yaparken?... İşte bir problem, bir sorun vardır, bir gözlemi vardır. Bu gözlemi açıklamaya anlamaya çalışır ve bunun doğru olup olmadığını o yapı içinde göstermeye çalışır. Aslında hani matematik yapmanın ayrılmaz bir parçası ispat. O zaman öğrencilerimizin matematiği anlayarak matematik yapmayı öğrenmelerini istiyorsak, o zaman onların da bu gözlüğü takmaları gerekir. Yani yetinmemeleri gerekiyor. Sorgulama, inceleme, çıkarımlar yapıp bu çıkarımların doğruluğunu test etme. Bu bakış açısını kazandırmak gerekir. Yani aslında matematiksel düşünmelerini geliştirmek için de önemli bir araç bence. ... Hem de kendi bilgilerinin otoritesine sahip olma. Yani bir şeyi “neden öyle? Çünkü” deyip gerekçelerini ortaya koyabilmeli. Yani birisi öyle söylediği için, kitapta yazdığı için değil, kendisi ikna olduğu için, anladığı için açıklayabilmeli. ... O bakış açısını bir matematikçi bir probleme nasıl yaklaşır? Bir şeyin öyle olduğunu, doğru olduğunu nasıl gösterir? Bunu anaokulundan itibaren çocuklara kazandırmak gerekir. Yeterli mi onu söylemek, bunu söylememiz, onun doğru olduğunu her zaman geçerli olduğunu göstermek için yeterli mi? Bu sorularla hep çocuğa bu bakış açısını kazandırmamız gerekir. O yüzden hani sadece bir dersle ya da işte belli saatlerimizi ispata ayırarak değil. Matematik öğretiminin bir parçası olması gerekir. Öğretmenin her zaman aklında tutması gereken rutinin bir parçası olması gerekir bu bakış açısı.*

Matematiği sistematikleştirendir alt kategorisinde 2 katılımcıya ait görüş bulunmaktadır. Bu katılımcılar matematiği bir sistem içerisinde bütünleştirerek bir araya getirenin, matematiği ayakta tutanın ispat olduğunu düşünerek ispatın önemine değinmiştir. 2EA3, matematiksel ispatın matematiği sistematize eden bir önemine değindiği için bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

2EA3: *... Yani eğer matematiği biz inşa etmek istiyorsak, matematiği bir disiplin olarak düşündüğümüzde bunun sağlam temeller üzerinde oturmasını istiyorsak, çok parça parça duran yapılar var, bu parça parça yapıların en temeli tanımlar çıkıyor karşımıza. Yani tanım bence matematikte çok önemli bir kavram çünkü eğer bir şekil tanımlıyorsanız, şekil varsa elinizde, o şekli tanıma göre kategorilendiriyorsunuz, sınıflandırıyorsunuz ya da tanım önemli. Başka bir nokta, aksiyomatik bir yapıda olması yani belli kabullerimizin var olması ve bu belli kabullerinde sistem içerisinde bütünüyle çalışıyor olması. Sonra öncül teoremler*

diyebileceğimiz yapıların oluşması. Dolayısıyla bu öncül teoremler de bizim için önemli. Dolayısıyla şu anda 3 tane temel yapı karşımıza çıkıyor, nedir bunlar? Tanımlar var, aksiyomatik yapılar, aksiyomlar var bir de öncül teoremler var ya da öncül yapılar var. İspat dediğimiz durum bana göre bu 3 yapıyı matematik bağlamında bir araya getiriyor...

İspata verilen değer ve atfedilen önem başlığının üçüncü kategorisi *aktarılabılır/transfer edilebilir bir yapı olarak ispat* şeklindedir ve 17 katılımcının görüşü bu kategori altında birleştirilmiştir. Bu konuda katılımcıların görüşleri *farklı bakış açısı, her şeyin temeli ve yaşam tarzı* alt kategorilerinde toplanmıştır. *Farklı bakış açısı* alt kategorisinde 14 katılımcıya ait görüş bulunmaktadır. Bu katılımcılar ispata dayalı düşünme ya da o tarz düşünmenin, matematiğin dışındaki herhangi bir bağlam içinde herhangi bir durumu yorumlama, analiz etme, ölçme, adım adım tasarlama, inşa etme, sonuca varmada ya da matematiksel ispattakine benzer bir muhakeme yürütebilme, daha akılcı ve kanıta dayalı bir tarz oluşturabilmede önemli olduğunu vurgulamıştır. Kısacası bu katılımcılar için matematiksel ispatın kendi düzlemindeki duruşu, katılımcının matematikte ispat yaparken eylemlerinin iz düşümü şeklinde var olur, matematik dışı bağlamlara yansıtılarak işlevsellik kazanır.

Matematiksel ispatın hangi amaca hizmet ettiği noktasında 3MÖ3, doğrudan matematik disipliniyle ilgisi olmayan fakat bu disiplinin pozitif bilimlerdeki komşusu olan fizik, kimya gibi bazı disiplinlere de uyarlanabilir bir yapıyı temsil etmesinden ya da alan açtığı durumlardan bahsetmektedir. Bu nedenle 3MÖ3 farklı bakış açısı alt kategorisine örnek olarak verilebilir:

3MÖ3: *Birçok alana hizmet edebilir. Zaten her alanda matematik var gibi geliyor bana. Mesela inşaat mühendisleri, elektrik-elektronik mühendisleri, mimarlık, peyzaj mimarları vesaire hepsi çizerken ya da tasarlarlarken belli bir matematik kullanıyor. Yani inşaat mühendisleri boru kesimleri olsun, tuğla ölçümleri olsun belli bir matematik hesaplamalarıyla bunları yapıyor. Ya da kimyacılar mesela laboratuvarında belli bir matematik hesabı üzerinden, mol üzerinden hesaplamalar yaparken her alanda kullanıyorlar ve bunun sonucunda kimyacılar mesela sabundur, yani ne bileyim belli başlı kimyasal şeyler bulabiliyor... (burada ispatla ilişkili gördüğü şeyleri açıklıyor) Mesela boru kesimi falan vesaire yani adam ölçüyor mesela atıyorum 3 metredir, 5 metredir, ne kadarsa artık ona göre bir kesim yapıyor ve bunu önce, yani yapmadan önce daha doğrusu, bir kâğıtta tasarlıyor, işte cetvelle vs. hepsini ölçüyor, işlemler yapıyor, silindirin hacmini falan hesaplıyor. Bunları yaptıktan sonra, yani yine onları hesaplaması da bir ispattır bence. Bu işlemleri yaptıktan sonra, bu ispatı kullandıktan sonra, daha doğrusu ondan sonra işine koyuluyor ve bir sonuç elde ediyor yani.*

Her şeyin temeli alt kategorisinde 7 katılımcıya ait görüş bulunmaktadır. Bu kategorideki katılımcılar, ispatın hayatın vazgeçilmez parçası ya da informel yaşamın bir parçası şeklinde genel ama önemli bir yere sahip olduğundan bahsetmiştir. 1MA9, matematiksel ispatın önemini sadece matematikte değil gerçek hayatta da problem çözmeyle bağdaştırmıştır. Bu açıdan hayatın vazgeçilmez parçası olduğuna değindiği için bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

1MA9: ... Yani bu vazgeçilmez, hayatın vazgeçilmez bir parçası yani. İspat, hayatın vazgeçilmez bir parçası, problem çözüyorsunuz.

1MA7 matematiksel ispatın sadece matematiğin temeli değil aynı zamanda matematiğin dışında da örneğin günümüzde bir algoritma geliştirmenin temelinde de ispatın yattığını vurguladığı için herşeyin temeli alt kategorisine örnek olarak gösterilebilir:

1MA7: ... Bir algoritma geliştirme yani, günümüzde de bilgisayar bölümlerinde çok önemli. Bir yazılım geliştirmenin de temeli aslında ispattır...

Yaşam tarzı alt kategorisinde 4 katılımcıya ait görüş bulunmaktadır. Bu kategoride ispat, katılımcının tüm yaşamına nüfuz etmektedir; farkında olarak ya da olmayarak ispatın yanında olmasıyla ilgili katılımcı ifadelerini içermektedir. Yaşam biçimini şekillendirmesi ve hayatını düzenleyen alışkanlıkları arasında yer almasıyla katılımcılar açısından ispatın önemli bir yeri vardır, aynı zamanda, ispatla anlamlı bir şekilde yaşamını sürdürebilmesi katılımcıya ayrı bir değer katmaktadır. 1MA1, matematiksel ispatın herşey için olmazsa olmaz bir değerinin olduğundan bahsetmesinin yanısıra ispat mantığının tüm yaşamına sirayet ederek anlamlı bir yaşam sürmesindeki önemine değindiği için yaşam tarzı kategorisine örnek olarak verilebilir:

1MA1: Yani bu ispatın sadece matematikle alakalı değil, bu her şey için bence olmazsa olmaz. Bu bütün yaşam tarzı ile alakalı. Yaptığınız her şeye... bir olay yaptınız. Ne bileyim bir alışveriş yaptınız. Birisi geldi sordu, “niye bunu aldın?” bir cevabınız var mı? Var. Yaptığınız her şey, bu sizin ispatınız aslında. Niye aldığınızı söylüyorsunuz siz. Dolayısıyla yaşamla alakalı bir şey. Ha! bir misyonla buradayız sonuç itibarıyla yaşıyorsak. Burada yaptığımız her şeye bir neyimizin olması lazım açıklamasının olması lazım. Kendimizce! Başkasınca değil. Kendimizce tutarlı bir yapının olması lazım. Dolayısıyla ispat mantığı, yaptığınız her şeyin, yapacağınız her şeyin anlamlı olması demek. Anlamlı bir şekilde yaşama demek bence...

İspata verilen değer ve atfedilen önem başlığının dördüncü ve son kategorisi, katılımcıların matematiksel ispatın mesleki yaşantı(sın)daki yeri

hakkındaki görüşleriyle oluşturulmuş *kimlik olarak ispat /önceliğe göre önem* şeklindedir. Bu kategorideki katılımcılar ilgili bölümlerden/programlardan mezun olduktan sonra mesleki hayata atıldıklarında matematiksel ispatla ilgili deneyimledikleri şeylerin mesleklerini icra ederlerken kendilerine (ya da öğretim üyeleri açısından kendi öğrencilerine) rehber olup olamayacağı, katkıda bulunup bulunamayacağı gibi ikili durumlar (olumlu-olumsuz) çerçevesinde görüşlerinden bahsetmiştir.

Kimlik olarak ispat kategorisini oluşturacak şekilde görüşlerini belirten 33 katılımcının ifadeleri *şu an öğrenci olarak, akademik ilerleme olarak, öğretmen olarak, farklı bir alanda çalışan biri olarak ve normal bir birey olarak* alt kategorilerinde bir araya getirilmiştir. Şu an öğrenci olarak alt kategorisinde ispata yükledikleri önemle ilgili görüş bildiren 11 katılımcı bulunmaktadır. Bu konuda katılımcıların görüşleri matematiksel ispatın öğrenci kimliğindeki karşılığına olumlu bakanlar ve olumlu bakmayanlar şeklinde ikiye ayrılmaktadır. Bu katılımcılardan 5'i olumlu bakmaktadır. 4EÖ1 bir öğrenci olarak şimdiye kadar öğrendiği matematiksel içeriğin ispat sayesinde doğrulandığı ya da onaylandığını gördüğünü ve bu durumun kendisini motive ettiğini belirttiği için bu kategoriye olumlu anlamda örnek olarak verilebilir:

4EÖ1: *Yani bir öğrenci olarak öğrendiğim şeyleri tasdiklemek konusunda beni motive eder. Hani bu hoşuma gider...*

Katılımcıların 6'sı ise bir öğrenci olarak (ya da öğrenci gözünden) öncelikli hedef dersi geçme, sınavda başarılı olma, katalogu eksiksiz bir şekilde tamamlayarak mezun olabilme amaçlı olduğu için bu kaygıdan dolayı olumsuz bakmaktadır. 2EA7 öğrencilerinin sadece dersi geçme amaçlarının olduğunu, özellikle pür derslerdeki ispatla ilgili durumlardan değinerek yer verdiği için bu kategoriye olumsuz anlamda örnek olarak verilebilir:

2EA7: *... Yani sadece dersi geçtiler. Ya onu hissediyorsun...Yani her derste işte özellikle bu pür derslerde bir ispat kullanılıyor, mutlaka kullanılıyordur. Yani şu andaki derslerin 2018 müfredatının derslerin içeriğini bilmiyorum ama yani işte bunun etkisi ne? Yani %10'u [yüzde onunun bile] gerçekten hani o süreçleri bilerek ya da yani o süreçleri bildiğin anda öğretime bir katkısı olacağını düşünerek yaptığını zannetmiyorum. Çoğunluğu dersi geçeyim [şeklinde bakıyor ispata]. Bu da işte şeye döndürüyor [ispat mevzusunu]. "Zaten 3-5 tane yöntem var, bunları ben şimdilik ezberleyeyim, soru tiplerini bileyim bunları yapayım" ondan sonra [böyle dönem veya ders biter]... [nüfuz] etmiyor işte. Esas demem o. Yani dediğim gibi şeyi düşünüyorlar. Yani şu anda, random seç 4'lerden, bizim 4'lerden 10 kişiyi.*

“İşte bu kadar pür dersi aldınız, hani şu şu dersleri aldın geçtin” yani ve şeyi şu da olsun, yani mesela atıyorum BB ve üstü alanları seç. Hepsine sor, “size bu dersler ne kattı?” de. “Hiçbir şey katmadı” diyecekler...

Mesleki kariyerleri konusunda kendilerine akademik açıdan ilerleme hedefi koyan bir birey açısından matematiksel ispatın yeriyle ilgili görüş bildiren 8 katılımcı bulunmaktadır ve bu katılımcıların tamamı matematik alanında ilerlemek isteyen bir kişi açısından ispatın büyük önem taşıdığını vurgulayarak olumlu durumlardan bahsetmiştir. 3MÖ2’nin bölümünden mezun olduktan sonra mesleki kariyeri için çizdiği yol, uygulamalı matematik alanında ilerlemektir. Burada ispatı büyük oranda kullanacağını ifade ettiği için akademik olarak ilerleme alt kategorisine örnek olarak verilebilir:

3MÖ2: *Yani şimdi ben hani matematik alanında ilerlemek istediğim için yani büyük oranla kullandığım alanda, mesela uygulamalı matematikte ilerlemek istiyorum. Oradan bir formülle uğraşırken ya da bir modelle uğraşırken orada modelin doğruluğunu göstermek için yani çok büyük bir oranla ispat yöntemini kullanacağım. Yani o ispat yöntemini kullanacağım ki, ispat edeceğim ki ileride o modeli kullandıkları zaman doğru olduğunu bilip yani gönül rahatlığıyla o modeli kullanabilsinler.*

Mesleki kariyerleri konusunda kendilerine matematik öğretmenliği hedefi koyan bir birey açısından matematiksel ispatın yeriyle ilgili görüş bildiren 23 katılımcı bulunmaktadır. Bu konuda katılımcıların görüşleri matematiksel ispatın öğretmen kimliğindeki karşılığına olumlu bakanlar ve olumlu bakmayanlar şeklinde ikiye ayrılmaktadır. Bu katılımcılardan 16’sı olumlu bakmaktadır. 1MA8 matematiksel ispatın kazandırdığı düşünme yapısının bir öğretmenin de öğrencisine farklı yol ve yönler çizebilmesinde güçlü bir faktör olarak görmektedir. Bu açıdan 1MA8 matematik öğretmenliği hedefi olan bir öğrenci açısından matematiksel ispata olumlu anlamda bir değer biçtiği için bu kategoriye örnek olarak gösterilebilir:

1MA8: *... Şimdi öğretmenlik yapacaksa, ee, öğrencisine olabildiği kadar, hani ben öğrencilerime hep şeyi söylüyorum, “şimdi okulu bitirdiniz. Diyelim ki bir şekilde bir öğretmenlik, yani atadınız”. “En fazla 1 yıl” diyorum ben. Yani eğer ben çok “sıradan bir öğretmen olayım. Böyle sadece kitapta olan konuyu anlatayım” falan diyorsanız “1 yıl çalışırsınız. 1 yıl sonra çalışmanıza gerek olmayabilir” diyorum. Ama eğer ben “şöyle yapayım” işte “öğrencilerime faydalı bir öğretmen olayım, olabildiği kadar onlara yeni şeyler öğreteyim, onlara farklı kapılar açayım” diyorsanız, sizin de kendinizin de çalışması gerekiyor. Çünkü sen ne kadar çok şey öğrenirsen öğrencine o kadar ona göre daha farklı şeyler öğretebiliyorsun, daha*

farklı yollar çizebiliyorsun. Bu açıdan, iyi öğrenciler yetiştirmek için alanında iyi olmak lazım. Tamam, şu var: belki bir ilköğretim okulunda ya da bir lisede öğretmenlik yaptığımız zaman hiç ispat tekniği kullanmayabilirsiniz. Ama aslında birtakım sorunlara bakış açınız ya da öğrenciyi yönlendirmeniz konusunda bence ispat tekniklerinde, orada edindiği düşünce yapısının farklı olduğunu düşünüyorum. Yani o düşünce yapısı kendi öğrencilerine de farklı yön vermesine sebep oluyor öğretmenin...

Matematiksel ispatın öğretmen kimliğindeki karşılığı noktasında katılımcıların 7'si ise bir öğretmen olarak öncelikli hedef üst düzey matematikte olduğu şekliyle olmadığı için ispatın kullanımına karşı sınırlama (gereken yerde gerektiği kadar) ya da öğretim yapılacak düzeyin ihtiyaçları öncelikli olduğu için ortaokul matematiğinde ispatın anlamlı olamayabileceği düşüncesiyle kendisine yaramayacağı, ikinci plana itilebilme ve öğretmenlikte ne kadar işe yarayabilir gibi düşüncelerinden dolayı olumsuz bakmaktadır. 1MA4 öğretmenlikte örneğin lise düzeyinde hatırlayabildiği kadarıyla matematiksel ispatın pek kullanılmadığını, en azından kendi ortaöğretim deneyiminde gördüklerinin bu şekilde olduğunu ifade etmektedir. Bu açıdan 1MA4 öğretmenlik kimliği kategorisine bu anlamda bir görüş olarak örnek gösterilebilir:

1MA4: ... *Fakat adamın (öğrenciyi kastediyor) amacı sadece bir öğretmen olmaksa, bu aslında biraz ikinci plana itilebilir bir durum benim anladığım. Çünkü liselerde pek kullanılan bir sistem değil. Ha! bilmiyorum [şimdi yanlış olmasın] yani lise sistemini bilmiyorum. Ama hatırladığım kadarıyla kendi ortaöğretimimden hatırladığım kadarıyla hani "çok ispat yaparmıydık?" valla hiç hatırimda kalmadı açıkçası yani yapmazdık gibi geliyor...*

Mesleki kariyerleri konusunda kendilerine doğrudan matematik alanıyla ilgili olmayan bir kariyer hedefi koyan ya da matematiğin dışında başka mecralarda çalışma planlarından bahseden bir birey açısından matematiksel ispatın yeriyle ilgili görüş bildiren 16 katılımcı bulunmaktadır. Bu konuda katılımcıların görüşleri, matematiksel ispatın farklı bir alanda çalışan biri kimliğindeki karşılığına olumlu bakanlar ve olumlu bakmayanlar şeklinde ikiye ayrılmaktadır. Bu katılımcılardan 13'ü olumlu bakmaktadır. 1MA2, öğrencilerinin mezun olduktan sonra hangi sektörde çalıştığının/çalışacağını bir önemi olmaksızın, matematiksel ispatın o alandaki olumlu katkısına değindiği için bu kategoriye örnek olarak verilebilir:

1MA2: ... *dediğim gibi, yani bir problem çözme becerisi geliştiriyor aslında. Bu problem çözme becerisini de işte ezberlediğimiz kalıpları bir soruya uygulayarak yapamayız [kazanamayız]. Yani gerçek hayatta da böyle değil bu. Ama bu işte köken bilgisini [nereden geldiği], işte var olan şeyleri kullanma, işte nasıl akıl yürütme gibi birçok şeyi eklediğimiz zaman işte ispat*

olmuş oluyor zaten. O ispatla da işte gerçek hayatta da [ya da] hangi sektörde çalışırsa çalışsın, illaki çözmek zorunda kalacağı bir sürü problem çıkacak [karşısına]. Yani bu yöntemler beynindeki işte o analitik düşünmeyi geliştirdiği için daha kolay akıl yürüttüğü için ve daha çabuk cevap vereceği için sorulara, gelişeceğini düşünüyorum. Diğer türlü bir robottan farkı olmuyor...

Matematiksel ispatın farklı bir alanda çalışan biri kimliğindeki karşılığı noktasında katılımcılardan 3'ü olumsuz yaklaşmıştır. Bu katılımcılardan 3MÖ6 ve 3MÖ8, matematiğin dışında yazılım alanına yönelmek ya da veri biliminde ilerlemek istediğini belirttiği için buradaki çalışma hayatında ispata çok fazla ihtiyaç duymayacağını ya da burada yapacağı şeylerin ispatla hiç alakasının olmadığını belirtmiştir. Diğer katılımcı 3MÖ5, matematik öğretmenliği yapmayı hedeflediği için onun dışında herhangi bir alanda çalıştığı takdirde ispatın işine yaramayacağını belirtmiştir.

Mesleki kariyerleri konusunda herhangi bir mesleki içeriği belirtmeyen katılımcıların görüşleri kimlik olarak ispat başlığının normal bir birey olarak alt kategorisi altında toplanmıştır. Bu perspektiften, matematiksel ispatın yeriyile ilgili görüş bildiren 11 katılımcı bulunmaktadır. Bu konuda katılımcıların görüşleri, matematiksel ispatın normal bir birey kimliğindeki karşılığına olumlu bakanlar, olumlu bakmayanlar ve duruma göre anlamlı olması yönüyle üçe ayrılmaktadır. Bu katılımcılardan 8'i olumlu bakmaktadır, 2'si olumlu bakmayan bir görüş içerisinde. İkinci duruma 4EÖ9 katılımcısı örnek olarak verilebilir. 4EÖ9'un normal hayatında bir markete gittiğinde ya da bir alışveriş yaparken 'ispata ne kadar ihtiyaç duyabilirim' şeklinde bir çerçevede görüşü bulunmaktadır. Diğer taraftan 1MA5, doğrudan üretime katkısı olmadığı için pür matematiğin (ve bu tarzda yapılan ispatın) sıradan bir birey olarak ve o bireyin uğraşı açısından herhangi bir işe yaramadığını, bu yüzden bunun duruma göre anlamlı olduğunu ifade eden bir çerçeveden bakmaktadır. 4EÖ7 ise hayatını idame ettiren normal bir birey olarak matematiksel ispatın kendisine olan faydasından bahsettiği için bu kategorideki olumlu bakanlar kısmına örnek olarak verilebilir:

4EÖ7: ... Diğer türlü düşünenecek olursam kendimde ne gibi faydalara sebep olabilir? "Biz biliyoruz da sadece öğretmek için miydi, sadece öğrencilerin öğrenmesi için miydi" konusuna değinecek olursam da şu şekilde: bu bana hayatta da karşılaştığım birçok şeyi aslında gruplandırabilme becerisi de veriyor. Hangi işi ne sırayla yapabilirim veya hangi durumlarda hangi yöntemleri tercih etsem daha doğru olabilir [gibi]. "Şu an yaptığım işte sonuca varmak için hangi basamaktayım", "sonuca varmak için" kendimce düşündüğüm

zaman “ne kadar daha yolum var, nasıl ulaşabilirim sonuca” dediğim zaman da bunlar bana olumlu katkı sağlayabiliyor. Bunu da kendi zihinsel esneklik için, aslında biraz da kendime faydası olduğunu düşünüyorum... Kendimce de bahsettiğim gibi bazı şeyleri gruplandırma becerisi veya bir işi yaparken aşamalandırma becerisi veya sonuca ulaşma veya doğru sonuca ulaşma sürecinde bana yardım sağlıyor. Sadece bunu hani bulaşık yıkarken bile düşünebiliyoruz, bakıyoruz önce hangisini yıkayayım [diye]. Önce bakıyoruz; bardaklar daha temiz olmalı, bardaklardan başlıyorum. Bardakları bir araya toparlıyorum. Daha sonraki aşamada diyorum ki “tabaklar daha sonra”, [ardından] daha yağlı ağır olan işte tencere tava gibi bulaşıklara dönüyorum. Bunu bile yaparken aslında kendimce aşama izliyorum. Buradaki aslında ispatların yöntemdeki benzerlik hani benim kendi hayatımda yaptığım şeylerle benzerlik içerdiğini görüyorum. Direkt bir ispat değil ama aşamasal olarak benziyor. Yapısal olarak benziyorlar birbirlerine. Belli aşamalardan geçiyoruz. Belli veriler toparlıyoruz ve en sonunda bir sonuca ulaşıyoruz...

4.1.5.1 Matematikçiler Tarafından İspata Verilen Değer ve Atfedilen Önem

Matematikçilerin, matematik eğitimcilerinin, matematik programı öğrencilerinin ve matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin grup bazlı matematiksel ispata verilen değer ve atfedilen öneme yönelik bulguları Tablo 4.6 üzerinden açıklanarak paylaşılmıştır.

Tablo 4.6. Farklı matematiksel topluluklara göre matematiksel ispata verilen değer ve atfedilen önem

KATEGORİ	ALT KATEGORİLER		1MA (9)	2EA (7)	3MÖ (9)	4EÖ (9)
İSPATA VERİLEN DEĞER VE ATFEDİLEN ÖNEM	Matematikte temel pratik olarak ispat (MTP)		9	6	9	4
	MTP: Matematiğin temeli		5	4	6	4
	MTP: Matematiğin gelişmesi ve ilerlemesine yaptığı katkı		5	6	4	-
	MTP: Öğretimsel gereklilik		7	3	-	-
	MTP: Matematik disiplini gereği ispat		5	-	5	-
	MTP: Matematik yapmayla ilgilidir		1	4	1	-
	MTP: Matematiği sistematikleştirendir		-	2	-	-
	Beceri olarak ispat (BOİ)		9	7	9	9
	BOİ: Fonksiyonel beceriler	İlişkilendirme	9	7	7	9
		Araştırma/Sorgulama	7	4	5	3
		Açıklama	3	5	4	3
		Keşfetme	8	3	4	-
		İletişim	7	4	2	1
		Doğrulama	2	3	6	2
		Problem çözme	3	-	-	1
	BOİ: Düşünme becerileri	Matematiksel düşünme	1	3	-	1
		Matematikçi gibi düşünme bakışı açısı	2	2	-	-
		Analitik düşünme	3	-	1	-
		Yaratıcı düşünme	1	-	1	1
		Mantıksal ve soyut düşünme	5	-	-	-
	BOİ: Entelektüel beceriler	Aydınlanma/fark etme	4	1	3	4
		Üstbilişsel beceri	-	1	1	2
		Bağımsız birey	1	1	-	-
		Muhakeme yeteneği	1	2	-	-
	Aktarılabilir/transfer edilebilir bir yapı olarak ispat (TYOİ)		9	3	3	2
	TYOİ: Farklı bakış açısı		9	2	2	1
	TYOİ: Her şeyin temeli		4	3	-	-
TYOİ: Yaşam tarzı		1	-	2	1	
Kimlik olarak ispat /önceliğe göre önem (KOİ)		9	6	9	9	
KOİ: Öğretmen olarak		4	6	4	9	
KOİ: Akademik ilerleme olarak		4	-	4	-	
KOİ: Farklı bir alanda çalışan biri olarak		9	1	6	-	
KOİ: Şu an öğrenci olarak		3	2	5	1	
KOİ: Normal bir birey olarak		5	2	2	2	
1MA : Matematikçiler 2EA : Matematik Eğitimcileri 3MÖ : Matematik Programı Öğrencileri 4EÖ : Matematik Öğretmenliği Programı Öğrencileri Not: Parantez içindeki sayılar, o grubun toplam katılımcı sayısını göstermektedir. Her bir hücredeki sayılar ise o gruptaki kaç katılımcının ilgili kategoride bir görüşünün olduğunu temsil etmektedir.						

Bu başlık altında çalışmadaki matematikçilerin matematiksel ispata verdikleri değer ve atfettikleri önem durumları, sırasıyla matematikte temel pratik olarak ispat, beceri olarak ispat, aktarılabilir/transfer edilebilir bir yapı olarak ispat ve kimlik olarak ispat /önceliğe göre önem kategorileri bağlamında ele alınmıştır. Bu kategoriler altında matematikçileri çalışmadaki diğer katılımcı gruplardan ayıran ya da ağırlıklı olarak matematikçilere özgü olarak önemli görünen noktalar paylaşılmış ve temsili örnek alıntılarla desteklenmeye çalışılmıştır.

Tablo 4.6 incelendiğinde, matematikçilerin matematikte temel pratik olarak ispat kategorisinin öğretimsel gereklilik alt kategorisinde daha çok görüş belirttiği

görülmektedir. Bu konuda 9 matematikçiden 7'si, matematiksel ispatın öğretimsel olarak tüm sınıf seviyelerine serpilmiş bir şekilde sürekli olarak yer alması ya da farklılaşan okul kademeleri olsa bile her düzey boyunca yer verilmesi gereken bir pratik şeklinde, her seviyede birbirinin uzantısı niteliği taşıyan bir yönle ele alınmasının önemine işaret etmiştir. 1MA2, matematiksel ispatın öğretimsel olarak gerekli hatta erken seviyede daha dikkatli olarak yer almasından bahsetmiştir:

1MA2: ... ilkokuldaki, işte ortaokuldaki, lisedeki öğrenci için ee nasıl ilerlenmeli? Yani illaki şu şekilde olmalı: yani bir şeylerin nereden çıktığını göstere göstere, üstüne koya koya gidilmeli... en basit bir işte Pisagor teoreminin bile herkesçe anlaşılabilir birçok ispat yöntemi var. Belki bunlar öğrencilere hani sevdilerek ya da en baştan başlanmalı bence. Yani çocuğa toplamayı öğretirken bile, işte “bu böyle olduğu için böyle oldu işte” gibi ufak ufak başlanarak ilerlenebilir diye düşünüyorum. Ama en baştan böyle, temel şeylerden bile. İşte bir şey öğrettin sonra ardından işte onun sebebinden, sebebini ispatlayıp ya da işte neyi söylüyorsa onu ispatlayıp, sonraki adıma geçirilerek belki öğretilir. Yani böyle bir kitabı bir şekilde değil de daha açıklayarak olabilir belki... Daha hani dikkatli olunacak şekilde gösterilmesi lazım diye düşünüyorum. (sebebini açıklıyor) Kopulabilir, yani matematik çok kopmaya müsait bir alan. Ee çocuk bir yerden sonra kopar. Anlamsızlaşır onun için ve sadece bir şeyleri ezbere çevirip onu uygulamaya döner... Yani tamamen uzaklaşır yani matematikten.

1MA7 erken seviyeden başlayarak öğrencilere matematiksel ispatla benimsetilmesi gereken içeriğe de değinerek, ispatın matematikteki gerekliliğinin hissedilmesini değerli görmektedir:

1MA7: Yani daha erken bir seviyede, yani ispatın, ispat yapmanın öğrencilere yani temelde de olsa verilmesi gerekiyor... örneğin şimdi ispat da Aristo zamanından başlamış. Özellikle Öklid'in geometri kitabında. Tamamen ispata orada girdiği için mesela geometrik bazı şeyler en azından şekilsel olduğu için lisede onların ispatla verilmesinin çok daha şey olduğunu düşünüyorum, mantıklı olduğunu düşünüyorum. Yani, daha erken seviyede öğrencilerin matematikte ispatın önemini kavrayacak tarzda, yani matematiğin sadece birtakım işlemleri yapabilme kabiliyeti olmadığını, bazı şeylerin ispatla yapılması gerektiğini görmeleri gerekiyor bence daha erken seviyede.

1MA9 ilkokul gibi erken bir seviyeden üniversite gibi ileri seviyeye matematiksel ispatın öğretimsel olarak şu şekilde sürdürülmesini önemli görmektedir:

1MA9: ... Onların tanımları belki hani üniversitedeki tanımlar daha ileri tanımlar olacak, daha farklı tanımlar ekleyeceğiz biz üniversitede onlara... Yani belli tanımlar var. Onlar arasındaki ilişki kura kura ta üniversiteye kadar üniversitedeki tanımlar arasındaki ilişkiyi

kurup ispatlar yapmaya başlayacaksın yani. Yani ispat da hatta ilkokuldan beri geçerli olacak bir şey yani. Tanımlar, bir tanım veriyorsun, onlar arasındaki ilişki kuracaksın yani...

Tablo 4.6'dan matematikçilerin, matematik eğitimcileri ile matematik öğretmenliği programındaki öğrencilerinden matematik disiplini gereği ispat alt kategorisiyle ayrıldığı görülmektedir. Çalışmadaki matematikçilerden 5'i matematiksel ispatın önemiyle ilgili doğal uğraşları gereği ve matematik alanının ispatla işaretlenmesi üzerinden görüş bildirmiştir. 1MA5 öğrencilerinin ispatlama sürecini bilmelerinin önemi noktasında düşüncelerini ifade ederken, matematik bölümü öğrencisi olarak işlerinin bu olduğunu yani matematik disiplini gereği ispatın onlar için örneğin bir mühendislik öğrencisine göre farklı, daha detaylı ve önemli olduğunu ifade etmiştir:

1MA5: ... Bir matematik öğrencisinden ben kanıtı, olması gereken disiplin yapısı içerisinde beklerim. Ama bir mühendislik öğrencisi içerisinde $2 = 2$ derken çok fazla kanıtına da girmem... Ya da amaçları ne olabilir? İşleri o çünkü. İşleri kanıtı öğrenmek, matematik öğrencileri için. Kanıt öğrenmek. Matematiksel nesneleri öğrenmek. Kanıtı giden kuralların ne olduğunu, o mantıksal argümanların ne olduğunu öğrenmek. İşleri o! (beden diliyle budur ki yapıyor).

Matematikçilerin beceri olarak ispat kategorisinde de ağırlıklı olarak görüşleri yer almaktadır. Bu kategoride diğer katılımcı gruplarda da baskın olarak görüldüğü üzere, matematikçilerde de ilişkilendirme becerisi alt kategorisi ön plana çıkmaktadır. Çalışmadaki matematikçilerin tamamının ilişkilendirme becerisi alt kategorisinde yer aldığı görülmektedir. 1MA1 daha önce ezberlenmiş olan matematiksel bilgi ya da kuralların, matematiksel ispatın ilişkilendirme gücü ile mantığını kavrayınca, bağlantı ve ilişki kurulunca zihne daha iyi yerleştiğini belirtmiş ve ispatın ezberi kırdığını ifade etmiştir. Benzer şekilde 1MA5 matematiksel ispat sayesinde ezber yerine konunun mantığını kavradığını, anlamlandırdığını ifade etmiştir. Burada 1MA5 ezberi bir kambur olarak nitelendirerek, ne kadar çok ispat yaparsa ezberle kendisine yük olan şeylerden tek tek kurtulduğunu şu şekilde açıklamıştır:

1MA5: Şimdi diyelim ki ben 130 kiloyum. 130 kiloda ve kilom çok fazla. 80 kiloya inersen kendimi daha iyi hissediyorum. Şimdi ispat da aynı şekilde. Ezberlemiş olduğum bir şeyin, ezberlemiş olduğum bir şey ki buradaki ezberi bir kambur olarak görebilirsiniz. Kanıtladıkça o kambur... Ne kadar çok kanıtlarsam o kambur daha da azalıyor. Daha azaldığı zaman kendimi çok daha iyi hissediyorum...

Matematikçilerin beceri olarak ispat kategorisinde ağırlıklı olarak yer aldığı bir diğer alt kategori, keşfetme becerisi olmuştur. Çalışmadaki 9 matematikçinin 8'i matematiksel ispatın keşfetme becerisini geliştirdiği yönünde ortak görüşte birleşmiştir. Örneğin 1MA9 matematikçisi, ispat sayesinde bölme üzerinden bölmeme kavramının ortaya çıkmasından, Öklid bölme algoritmasının doğuşundan bahsetmiştir. Genel olarak ise tanımlarla diğer tanımların ilişkisinden yeni yeni tanımların, kavramların, ilişkilerin, yapıların, sonuçların ortaya çıktığını belirterek ispatın keşfetmeyle ilgili potansiyeline şu şekilde değinmiştir:

1MA9: ... Yani ispat, tanımı verdiğin an ispat başlar. Yeni bir tanım verdiğin an diğer yapılarla ilişkisini kurarsın ya da o tanımla, dedim ya bölmeyi veriyorsun ve bölmeme ne demek oluyor? O zaman diyorsun ve division algoritmada uyuyor ya da başka bir şey oluşturabilirsin tabii. Division algoritmada “kalan” işte “bölenden küçük olacak işte mutlak değerinden. İşte sıfırdan büyük eşit olacak” diye kavramlar ortaya çıkıyor yani. Öklid algoritması sonra çıkıyor, doğmazdı ki ispat olmasa. Sen tanımda kalırdın. Division algoritma da olmazdı. Öklid algoritmasını da bulamazdın... Ben bunu yapılarla ilişkisini kura kura ne yapıyorum? İspatlama ispatlaya, yeni yeni kavramlar ortaya çıkarıyorum ve yeni nasıl diyeyim ve yeni yeni ve gerçekten önemli kavramlar ortaya çıkıyor... O yapıyı, o yapıya bağlıyorsun; yeni tanımlar, o yapı sana yeni tanımlar getiriyor, o tanımları alıyorsun, diğer yapıya bağlayıp ispatlıyorsun. “Acaba bu ikisi arasındaki ilişki nedir” diye yani ispatsız olmaz. Gelişmezsin ki o zaman. Kalırsın, tanım da doğmaz! Tanım da doğmaz!...

Matematikçilerin keşfetme becerisi alt kategorisinden sonra çoğunlukla görüş belirttiği diğer alt kategoriler araştırma/sorgulama ve iletişim olmuştur. Bu alt kategorilerin her ikisinde de 7 matematikçinin görüşü yer almaktadır. Ayrıca bu matematikçilerden 6'sı matematiksel ispatın hem araştırma/sorgulama becerisini hem de iletişim becerisini geliştirdiğinden bahsetmiştir.

1MA7 “niye böyle bir sonuca ihtiyaç duyuyoruz?” ile “bu sonuç bize ne verecek?” sorularıyla matematiksel kavramları anlamlandırabilme, sorgulayarak matematiksel içeriğin ne anlama geldiğine doğru bir kavrayış geliştirebilme için matematiksel ispatın önemli olduğunu düşünmektedir. Hatta kendi kendilerine sordukları “şu değişirse acaba bu sonucu elde edebiliyor muyum?” tarzının, öğrencilerin sorgulayabilme yeteneği kazanması açısından önemli görmektedir. Diğer taraftan 1MA3, öğrencilerinin ispatlama sürecini bilmelerinin muhakeme yeteneklerini geliştirmesi açısından önemli olduğunu düşünmektedir. Bunun

yanısıra 1MA3 ispatın araştırma/sorgulama yapmayı sağladığından da kısaca şu şekilde bahsetmiştir:

1MA3: *Şimdi bir kere muhakeme yeteneklerinin geliştiğini, sorguladıklarını, araştırmaya yatkınlıklarının olması gerektiğini söylemiştik. Yani ispat bunu sağlıyor zaten hani...*

1MA1 reel sayılardan bir küme ve bir nokta alındığında ortaya çıkabilecek 3 durumun dışında başka ihtimallerin de olabileceğine dair “ya üçünde de değilse” düşüncesinin merak uyandırmasından bahsetmiştir. Matematiksel ispatın bir araştırma iç güdüsü oluşturduğunu ya da araştırma ihtiyacı hissettirdiğini şu şekilde açıklamıştır:

1MA1: *... araştırma yapılır, sorgulanır. “Matematiksel dünyanın içerisinde başka neler olabilir?” sorusunu sorar... Bir reel eksen çizdiğimizi varsayalım. Reel sayılar, çizdik. Orada bir küme aldık, bir aralık aldığımızı varsayalım. Reel sayılardan bir aralık aldık, bir tane de nokta aldık. Reel sayılardan bir nokta aldığımızı varsayalım. Şimdi mantiken bakıldığı zaman bu nokta ya kümenin içindedir ya kümenin dışındadır ya da sınırında diyelim. Başka ihtimal var gibi görünüyor mu? “Bunların üçünde de değilse” diye bir soru sorsa birisi meraklanıp sorsa. İlginç değil mi? İlginç... Reel sayılardan bir aralık aldım. Bir nokta aldınız. O kümenin içinde de değil, o aralığın içinde de değil, dışında da değil, sınırında da değil. Nerede o zaman? Demek ki buradan nasıl bir durum ortaya çıkıyor? Buradan şöyle bir durum ortaya çıkıyor. Demek ki biz aslında bunu yaparken reel sayılar kümesini 3 parçaya ayırdık. Evet 3 parçaya ayırdık. Bir aralık, onun sınırı ve onun dış kısmı dediğimiz kısım olarak. Demek ki bu parçalamamız bizim yeterli değilmiş. Reel sayılar böyle parçalanmıyormuş, daha başka yapılar da varmış, parçalanma durumları da varmış. ... O zaman orayı araştırmak gerekiyor, onu anlamlandırmak gerekiyor ve onu anlamlandırdıktan sonra o noktanın nerede olabileceğini ne yapacağız? Bulmuş olacağız. Anlatabildim mi? biraz sorgulamayla merakla alakalı olan bir durum... Biraz şeyleri, merakı ortaya çıkarmak. “Olmazsa ne olurdu, böyle olsa ne olurdu” gibi bir yaklaşım. Merak. Merak ve zevk alma meselesi tabi ki.*

1MA8 matematiksel bir ifadenin doğruluğunu garantileyebilmede ispatın önemli olduğunu ifade ederken aynı zamanda o ifadenin doğruluğunu gösterebilmede ispatın iletişimsel gücüne de vurgu yapmaktadır. 1MA8 yapmış olduğu çalışmanın doğru olup olmadığını karşısındakine aktarabilmek için ispatın iletişim açısından önemine şu şekilde değinmiştir:

1MA8: *... en basitinden biri gelip sana diyor ki “ya sen yazmışsın ama ben bunun böyle olduğunu düşünmüyorum”. Yani “bu senin fikrine göre doğru, bence bu doğru değil” diyor. Ama eğer ifaden doğruysa sen de ne yaparsın? “Hayır, bak, bundan buradan bu gelir bu şekilde bak ispatını yaparım” [dersin]. Yani “ben bunun doğru olduğunu gösterebiliyorum” diye kendini ifade edebilirsin. ... benim çalıştığım konuyu ya da o çözdüğüm problemin doğru olduğunu*

ya da doğru olmadığını karşı tarafa aktarabilmek için, e kullandığım tek şey ispat tekniği, yani tek şey onun ispatını yapmak...

1MA4 matematikçisi, ortada bir teori ya da bir iddia varsa, bunun doğru olduğunu gösterirken başkalarına açıklaması, onları ikna ederek bunu yapması üzerine görüşlerini ifade etmiştir. Bu anlamda matematiksel ispatın neden yapıldığına ya da ispata neden başvurulduğuna yönelik olarak, bir iddia ortaya atıldığında bu iddianın doğru olup olmadığına insanları ya da hedef kitleyi ikna etme amaçlı olduğundan bahsetmektedir. Genel olarak 1MA4'ün matematiksel ispatın önemiyle ilgili görüşleri incelendiğinde, matematiksel ispata ağırlıklı olarak iletişimsel bir araç değeri biçtiği görülmüştür.

Matematikçilerin, düşünme becerileri kategorisinden mantıksal ve soyut düşünme becerisiyle diğer katılımcı gruplarından ayrıldığı görülmektedir. Bu şekilde görüş bildiren 5 matematikçi bulunmaktadır. 1MA5, öğrencilerinin matematiksel ispatı öğrenmelerinin önemli olduğunu düşünmektedir. Araştırmacı tarafından yöneltilecek öğrencilerin matematiksel ispatı öğrenmelerindeki amacın ne olduğu sorusuna, 1MA5 sorunun tersinden düşünerek cevap vermek istemiştir. Matematiksel ispatın önemine soyutlama ve soyut düşünebilme anlamında değer verdiği görüşleri şu şekilde olmuştur:

1MA5: *...olaya tersinden bakarak sorunun yanıtını aramak da yararlı olabilir. Öğretmeseydik ne olurdu? Diyelim ki ben öğrencilere, matematik öğrencilerine kanıt öğretmedim. Kanıt öğretmediğim zaman size ya da kanıt kavramını vermediğim zaman elde edecekleri şey ne olabilirdi? Kanıt kavramını tanımamış olurlardı. Şimdi eğer insan düşünüyorsa merak ediyorsa meraklarını gidermek istiyorsa ki bu sadece çok dar bir alanda sınırlı olan bir şey değildir. Değil mi? Dolayısıyla kanıt kavramını, soyut kavramını, soyutlama kavramını da bilmesi gerekir. Çünkü soyutlama insanın, insan zekâsının, insan zekâ birikimini inanılmaz derecede farklı şeylere yaklaştırabilecek bir kavram. Bunu ben iyilik, yararlı-yararsızlık üzerinden söyleyemiyorum. Sadece düşünme merakının insanı yakınsattığı yer soyutlama kavramıdır ki soyutlama kavramı içerisinde de kanıt denen kavramın ki kanıtı fiziksel kanıttan soyutsal kanıta geçişi bir 8 katlı 10 katlı binadan bırakılan taş örneği üzerinden söylemiştim. Bıraktığım her taş düşüyordu. Bu gözlemsel olarak “bırakılan taş düşer” anlamı çıkartıyordu ama ben bunu bir aksiyoma bindirirsem daha rahat edecektim. Ve dolayısıyla o deneysel kanıtı soyutsal bir aksiyoma dönüştürerek kendime bir sınır bir çerçeve çiziyorum ve bu sınırı çerçeveyi de bir soyutlama kavramı içerisinde yapmış oluyorum. Dolayısıyla soyutlamayı sağlamanın bir aracı olarak da görebiliriz kanıt kavramını. Ya da deneysel kanıtı ele alıp onu aksiyomatik bir yapıya dönüştürmek ama orada kalmamak aksiyomatik yapıyı bir temel taş olarak bir temel olarak görüp, sonra onun üzerine yeni oyunlar kurmak. O oyunları ne üzerine kurmuş oluyorum? Soyutlaştırmış olduğum*

kavramlar üzerine kurmuş oluyorum. Belki, aksiyomlar üzerine kurulmuş, yani soyut anlamda kurulmuş o yapı üzerine oluşturmuş olduğum oyunları belki başka aksiyomlarla farklı soyutlama kavramına da dönüştürebileceğim. Ben bunu dönüştürürken niye dönüştürüyorum? Çünkü düşünme denen kavram beni oraya itiyor. Düşünme denen kavram beni oraya iterken “acaba elma toptasaydım, daha mı yararlı olur?” bakış açısından da uzaklaşıyorum. Kendimi daha bağımsız bir birey haline dönüştürüyorum. Mideden bağımsız, mide ihtiyaçlarından bağımsızlaşarak düşünmemin vermiş olduğu yetkiyle daha çok soyutlaştırma düzlemine kendimi taşıyorum. Ha o taşıdığım düzlem içerisinde ne olur ne biter bilemem tabi ki yani. Tüm bunları yaparken yaklaşımı “yararlı mı yararsız mı?” sorusundan da kendimi uzak tutuyorum. Çünkü eğer kişiliğimi, düşünme biçimimi oraya hapsedersen kendimde bir zayıflama duraksama dönemi yaşayabilirim...

1MA1, Kalkülüs’ün kelime anlamının ne olduğundan yola çıkarak verdiği örneğinde “el arabası” ve “küçük taş” arasında kurduğu bağla matematiksel ispatın mantıksal düşünme mekanizmasını katalize ettiğini belirtmiştir. 1MA1 bir mantık kullanarak karşılaşılan herhangi bir problemi çözebilmek, bu mantığı kullanarak diğer matematiksel yapıları da ispatlayabileceğini kafasında canlandırabilmek için matematiksel ispatın önemine mantıksal ve soyut düşünme olarak şu şekilde değinmektedir:

1MA1: ... Biz [matematiği] öğretmeye çalışmıyoruz. Biz onlara [öğrencilere] “bu ne demektir?” Yani mantığını anlatmaya çalışıyoruz. Onlar kendileri daha sonra öğrenme işinin içerisine giriyorlar... Bizim işimiz, ifade etme, anlatma ve yorumlama yeteneğini kazandırmak. Biz de var olanı onlara ifade etmeye çalışıyoruz. Onlar bunu aldıktan sonra artık öğrenme işleminin içerisine giriyorlar. Dolayısıyla ispat asıl burada önem kazanıyor. Biz ispatı yaparken onları ifade ediyoruz ama asıl orada önemli olan o teoremin ispatını şey yapması değil, anlaması veya ifade etmesi değil, o mantığı kullanarak başka yapıları da ispatlayabileceğini kafasında canlandırması gerekiyor. Asıl amaç bu zaten. ... (örneklendiriyor) “Kalkülüs” bu ne demektir sizce, kelime anlamı olarak ne demektir? ... “Calculus” İngilizcedeki “calculation”dan gelmez. Yunancada “calculus” kelimesinden gelir... Yunancadaki calculus kelimesi “küçük taş” demektir... Şimdi bu ne demek? Şu demek. Bu nasıl bir yapıdır onu anlatmaya çalışıyorum. Birinci sınıfta veya analizdeki yapıdan bahsediyorum. Şimdi şöyle basitçe düşünelim. İki doğru, Öklid geometrisinde yani düzlemsel geometride baktığımız zaman, iki nokta arasındaki en kısa mesafe nedir? Doğru parçası. ...Cetveli koyuyoruz, ölçüyoruz, oradan buluyoruz. ... Pisagor bağıntısından buluyoruz, öyle değil mi? Peki. Bu düzlemsel, Öklid geometrisi. Peki dünya üzerinde bir nokta aldınız. Başka bir nokta daha aldınız. Bu iki nokta arasındaki uzaklığı ne yapacağız? Ölçeceğiz. Nasıl ölçeceğiz? Delecek miyiz dünyayı? Delmeyeceğiz. Düz değil ama öyle değil mi? Engebeler yok mu? Doğal bir yapı itibarıyla baktığımızda [var]. O zaman burayı nasıl hesaplamamız lazım? Birazcık insanlar düşünüyorlar. “Ya ben neyi biliyorum?”. Geometriyi biliyorum. Diyorum ki neyi

neleri biliyorum? Üçgeni biliyorum, doğruyu biliyorum. Öyle değil mi? Kareyi biliyorum, dikdörtgeni biliyorum. Bunların alanlarını biliyorum. Çevresini, çemberi de biliyorum ama. Öyle değil mi? Çemberi de biliyorum. Ha! Ne yapar insanlar? Bir el arabası vardır... El arabasının önünde tekerleği var, yuvarlak. Doğru mu? Şimdi, siz eğer yolunuz ne olursa olsun, düz de olsa engebeli de olsa bütün yerlerden geçer. Değil mi, o tekerlek demiş olduğunuz yapı? Ha! Siz eğer tekerleği o noktaya, başlangıç noktasına koyduğunuz varsayın. Ve o her bir tur attığı zaman çemberin çevresi kadar mesafe kat edecek mi? O zaman siz başlangıç noktasına bir işaret koyarsanız tekerleğe bir işaret koyarsanız, gideceğiniz yola kadar o tekerleğin her bir tur atışında küçük bir taş alırsanız cebinize. Öyle değil mi? Küçük taş. Gittiğiniz zaman o küçük taşların miktarıyla çemberin çevresini çarptığınız zaman o engebeli olan, yani düzlemsel olmayan şeyi bulmuş olursunuz, uzaklığı bulmuş olursunuz öyle değil mi? Ne yapmış olduk? İki arasında bir ilişki kurduk. O zaman kalkülüs demiş olduğumuz yapı hesaplama değil. Farklı bir materyal kullanarak bildiğimiz geometrik yapıları doğada karşılaştığımız bir problemin çözümüyle yapabilmek için başka bir materyal-taş- kullanarak bunu çözdük. İkisinin arasında bir katalizör kullandık aslında biz. Dolayısıyla hesaplama değildir analiz veya kalkülüs demiş olduğumuz yapı. Bir mantık kullanarak bu problemi nasıl çözebilirim. Evet! Dolayısıyla kalkülüsün içerisine, karşılaşılan herhangi bir problemle ilgili bir çözüm üretme işi yine kalkülüsün içerisine girer, hesaplama yok burada. Anlatabildim mi söylemek istediğimi?

Matematikçilerin matematiksel ispata verdikleri değer ve atfettikleri önem başlığı altında diğer katılımcı gruplardan baskın bir şekilde ayrıldığı, aktarılabilir/transfer edilebilir bir yapı olarak ispat kategorisi olmuştur. Bu kategori altında matematikçilerin tamamı, ispatın sadece matematikle ilgili olmayışına, aynı zamanda matematiğin dışındaki bağlamlarda da önemli bir mesele haline geldiğine inanarak farklı bakış açısı kazandırdığını vurgulamıştır. 1MA2 öğrencilerin ispatla elde ettiği ya da edecekleri düşünme tarzını hayata da aktarabilme ya da hayatını kolaylaştırmasında önemli bir kazanç olarak ele almaktadır. Bu noktada, matematiksel ispatın gerçek hayatta karşılaşılabilecek her tür probleme karşı bir bakış açısı, bir yaklaşım tarzı kattığını ifade etmiştir. Aynı zamanda bölümünü de göz önünde bulundurarak, öğretimsel hedeflerinin odağında öğrencileri için farklı bakış açısı tarzı oluşturabilmek ve öğrencilerine ispata dayalı bu bakışı geçirebilmek esastır. Benzer şekilde 1MA8 de öğrencilerinde genel bir düşünce yapısı oluşturabilmek için ispata yani o tarz düşünmeye öğretimsel hedefleri arasında yer ve değer vermektedir.

1MA5'e göre ispat, matematiğin dışında bir durumu yorumlamada ya da bir sonuç elde etmede önemli bilgiler taşımaktadır. Örneğin istatistiksel bir bilginin hastalığın önlenmesine ya da iyileşmesine yaptığı potansiyel katkıyla ya da bir hava

durumu tahmini için elde edilen olumlu sonuçların etkisini “kısmi kanıt” olarak farklı bakış açısıyla şu şekilde çerçevelemektedir:

1MA5: ... Mesela olaya fiziksel olarak baktığımız zaman ya da pardon deneysel olarak baktığımız zaman bir istatistiki bilgiyi topladığımız zaman bu istatistiki bilginin bize söylemiş olduğu şeyleri kısmi kanıt olarak gördüğümüz zaman bunun birçok yararı olabiliyor. Değil mi? Mesela diyelim ki bir kalp ameliyatında işte “şu şu işlemler yapıldığı zaman hastaların daha iyileşebildiği” konusunda bir istatistiki bilgi ortaya çıktığı zaman bu istatistiki bilgiyi bir kısmi kanıt olarak görüp bunun uygulanması o ameliyatın, ameliyatla ilgili bakış açısının sonucunun yararlı olduğunu söyleyebiliyoruz. Öyle değil mi? Ya da bir hava durumu üzerinden elde edilmiş olan istatistiki bilgilerin uygulanmasının getirmiş olduğu olumlu sonuçlar da çok fazla olabiliyor...

1MA5 gibi 1MA9 da özellikle tıp alanında bir ilacın yan etki geliştirip belli sonuçlar doğurmasıyla, o ilacın nelerle birleşip birleşmemesinin kestiriminde ispatın öngörmesel durumuna değinmektedir. Bu anlamda ispatın yöntemsel olarak uygulanma niteliğiyle belli bir sonuca varma açısından kanıta dayalı bir tarza işaret etmektedir.

Çalışmadaki matematikçilerin tamamı (9) kimlik olarak ispat kategorisinde, özellikle farklı bir alanda çalışan biri olarak alt kategorisinde olumlu düşünceleri paylaşmaktadır. Matematikçiler öğrencilerinin ne meslekte yer alırlarsa alsın, neye yönelirlerse yönelsin ispatın faydasını mutlaka göreceğini ifade etmişlerdir. Bu açıdan, öğrencilerinin matematik bölümünden mezun olduktan sonra, matematiksel ispatın onların mesleki yaşantılarında ne gibi izi olacağı noktasında ortak görüş belirtmiştir. Bu anlamda matematikçiler çoğunluklu olarak matematiksel ispatın matematiğin dışına aktarılabilir olan farklı bakış açısı şeklindeki yönlerin, kişinin mesleki yaşantısında da olumlu izini süreceğini ya da mührünü taşıyacağını düşünmektedir. 1MA1 matematikçisi, matematik dışında farklı bir alanda çalışma potansiyeline sahip bir matematikçinin kariyerinden bahsettiği aşağıdaki görüşü bu düşüncesini yansıtmaktadır:

1MA1: ...biz buradan şeyi, meslek sahibi olarak yetiştirmiyoruz. Matematikçi çıkıyor matematik bölümünden çıkanlar. Öğretmenliği, mühendisliği veya başka bir şey değil. Matematikçi! Matematikçi, öğretmen olamayacak normal şartlarda baktığınız zaman. Araştırmacı olması lazım. Türkiye’de öyle bir potansiyel pek mümkün olmadığı için çoğunlukla başka mekanizmaların içerisine girmesi gerekiyor. Sistemlerin içerisine girmesi gerekiyor. Nereye giriyor? Bankalara giriyor. Bankalara niye matematikçileri alıyorlar? Çünkü oradaki karşılaşılabilecek olası problem demiyorum, olası yeni sistemlere yeni bakış açıları. O ispatlar, yeni bakış açısı oluşturma mantığını veriyor, tercih ediliyor (o yüzden tercih

ediliyorlar demek istiyor). Bakanlıklarda, özellikle Savunma Bakanlığı'nda çok sayıda öğrencim ile ilgili referans istediler veya onlarla ilgili görüşmeler yaptık. “Ha! Bu şöyle bir potansiyele sahiptir. Bu şöyle şöyle şeyler yapabilir” [diyorlar]. Dolayısıyla onlar senin matematik yapmanı istemiyor. Matematik düşüncesine sahip olduğunu bilmek istiyor. Anlatabildim mi söylemek istediğimi? Özellikle banka ve işte bu kritik bakanlıklarda. Yani senin yorumlama gücünü mesela şöyle bir şey de söyleyeyim, lafı da uzatmayım. Amerikan filmleri vardır ya. Amerikan filmlerinde hep böyle deprem olur, sel olur bilmem ne olur. Böyle bilim adamlarını çağırırlar. İşte uzayla ilgili bir şey olur, yerle ilgili bir şey olur, köpek balıkları saldırır. Böyle 3-5 tane bilim adamını çağırırlar. Jeolog çağırırlar, her seferinde bir tane matematikçi çağırırlar. Dikkat ettiniz mi? Hiç alakası yoktur. Matematikçinin orada ne işi var? Öyle değil mi? Hiç alakası yok aslında olayla hiç. Veya atıyorum yanardağ patlıyor. Matematikçiyi çağırıyor. Niye çağırıyor? Aslında olayın, problemin çözümünün belki başka bir şekilde olmasını sağlayacak o. Olaya farklı bir şekilde bakacak. Matematik mantığı yani yeni bir çözümleme üretebileceğinden bahsetsin diye oraya getiriliyor o. Problemi çözsün diye değil! ... Öyle bir problem değil çünkü o. Ama yeni bir düşünce ortaya koymasını bekledikleri için çağırırlar zaten. Bu yüzden bu önemlidir. Biz de burada (matematik bölümünde demek istiyor) o düşünce tarzına sahip olan kişiler yetiştirmeye veya çıkarmaya gayret gösteriyoruz. O yüzden ki matematikçi her alanda iş bulabilir aslında. Düşüncenin ön plana çıktığı her alanda iş bulabilir...

Matematikçilerden 4'ü yazılım alanına yönelmek isteyen bir öğrenci için matematiksel ispatın oraya da olumlu bir transferinin olacağına düşünülmektedir. 1MA7 yazılım geliştirme, bir algoritma yazabilme ya da bu algoritmayı çözümleyebilmede öğrencinin başarılı bir kariyer elde edeceğini düşünülmektedir. 1MA6 bilgisayar alanına yönelmeyi tercih edecek herhangi bir öğrencisi için, matematik bölümünü hakkıyla öğrendiyse yani soyut düşünme becerisini oturtabilmişse, programlamayı yaparken bir çözüm aradığında daha hızlı ve net bir şekilde bunun üstesinden gelebileceğini ya da otomatik olarak çağırabileceği çözümleyici planların devreye gireceğini düşünülmektedir. 1MA8 programlama alanına yönelmek isteyen öğrencilerinin matematiksel ispat sayesinde baştan avantajlı bir konumda olduğundan şu şekilde bahsetmiştir:

1MA8: ... mesela bu benim kendi fikrim, ben şey olduğunu düşünüyorum. Şimdi programlama, program yazabilmek için, herhangi bir programlama dili bilmek, öğrenmek için aslında matematikçilerin 1-0 önde başladıklarını düşünüyorum ben. Çünkü orada da aslında belli bir programı yazmak için şöyle bir şey var, belli basamaklar kullanmanız gerekiyor. O problemi çözen bilgisayar programını yazabilmek için birtakım basamaklardan geçip en sonunda çözüme gitmeniz lazım. Bu da aslında şey gibi, işte önce problemini belirleyeceksin. “Hangi basamakları kullanırım? Hangi basamağı önce, hangisini sonra kullanırım” bunu belirlemek lazım. Bundan sonra yavaş yavaş sonuca gitmek lazım. İspat yapmak da böyle bir

şey aslında. Yani birden beşinci basamağa hemen geçemiyorsun önce 1, 2, 3, 4 diye gideceksin ki en son basamağa gelebilesin...

Çalışmadaki 5 matematikçi ayrıca normal bir birey olarak da matematiksel ispatın öğrencisinin farkında olarak ya da olmayarak tüm yaşamını sarmalayan bir kimlikle yanında olabileceğine inanmaktadır. Örneğin 1MA7 açısından öğrencisinin hayatta karşılaşacağı bir problemi ispatla edindiği deneyimler çerçevesinde çözebilmesi şeklinde, 1MA2 açısından öğrencisinin herhangi bir duruma ispat mantığındaki gibi adım adım yaklaşabilme şeklinde olumlu karşılık bulabileceğini düşünmektedir.

4.1.5.2 Matematik Eğitimcileri Tarafından İspata Verilen Değer ve Atfedilen Önem

Tablo 4.6 incelendiğinde, matematikte temel pratik olarak ispat, beceri olarak ispat ve kimlik olarak ispat kategorilerinde matematik eğitimcilerinin tamamen ya da ağırlıklı olarak görüşleri yer almaktadır. Matematikte temel pratik olarak ispat kategorisi dikkate alındığında, matematiğin gelişmesi ve ilerlemesine yaptığı katkı alt kategorisi, 6 matematik eğitimcisi tarafından daha fazla ön plana çıkmaktadır. Matematik eğitimcilerinden 2EA3, ispatı matematik disiplinini besleyen önemli bir kanal olarak görmektedir. Bu nedenle ispat olmadan matematiğin ilerleyebilmesinin pek mümkün olmayacağını düşünmektedir:

2EA3: ... matematik disiplinini bence besleyen kanallardan bir tanesi. Yani o kanal olmadan matematiği çok fazla ilerletmemiz bence çok mümkün olmayacak.

2EA7, ispat sayesinde var olan matematiksel bilgilerin üzerine yeni bir tuğla (yeni matematiksel sonuçların dahil olması) daha konularak matematiğin gelişmesinden bahsetmiştir. Bu anlamda 2EA7 matematiğin rasyonel bir şekilde ilerleyebilmesi için ispatın temel önemine değinmiştir:

2EA7:... Ama yani ispat olmamış olsaydı dediğim gibi, yani matematiğin ben bu kadar ilerleyip gelişeceğini [sanmıyorum], yani rasyonel bir şekilde ilerleyebilmesi için en temel şey [ispat]...

2EA5 ispat sayesinde matematiksel dünyanın gelişerek büyüdüğünü, matematiğin bugünkü gelişmiş versiyonuna ulaştığını ifade etmektedir. İspat aracılığıyla matematiğin yapısının örülmeye başladığını ya da inşa edildiğini, dolayısıyla ispat olmadan merdivende ilerleme kaydedilemeyeceğini vurgulamaktadır. Bununla birlikte 2EA5 sadece matematiğin gelişmesi ve

ilerlemesine yaptığı katkıyla sınırlamayıp aynı zamanda rastgele düşünceler yerine düzenli bir sistemden bahsetmesi, bu sisteme ispatla yeni bilgilerin katılması, matematiksel kütüğe işlenmesi, matematiğin temel taşı olması noktalarıyla da matematiksel ispatın önemine çoklu açılardan katkıda bulunan görüşlere sahiptir:

2EA5: ... temelde bir, iki [tane] kabul var ama sonra koskoca bir dünya inşa ediliyor. Ne ile? İspatlayarak inşa ediliyor yani bu matematik. Bugünkü dev o bilgi ağına ulaşmışsa, bu hep ispatlarla olmuş. ... İspatlayınca matematik [matematiğin] bilgi kütüğüne diyelim, bir şey eklemiş oluyor. Sonra onun üzerine başka bir şey derken bu böyle dağ gibi büyüyor. Yani matematiğin, oluşan matematiğin yapısının temel taşı, ispat[tır]. O olmadan matematik olmuyor. Yani ispatlamasalar ki kuramazlardı matematiği. Temelde kabul ettikleri şeylerden sonra ispatlamadan ilerleyebilir miydi [matematik]? İlerleyemezdi, o [zaman] rastgele düşünceler olurdu. Bir düzeni olmazdı yani. Onun için ne diyelim ispatın?... Temel taşı diye, ben de temel taşı desem daha iyi olur yani. Hemen hemen o olmazsa olmaz bir kere. İlerlemenin de yolu matematikteki... (ilerlemenin yolu noktasını açıklıyor) Yani bir merdivene benzetmiştik ya, altta en altta kabuller var ama onun bir üstüne nasıl çıkacağız? O alttaki kabulleri kullanıp bir önermeyi ispatlayarak çıkacağız. Onu ispatladık önermemizi ya da teoremimizi neyse, sonra akla başka bir problem geldi ya da başka bir teorem geldi, onu nasıl ispatlayacağız? Alt basamaktaki, bizden önce ispatlanan önermelerle teoremler ile ispatlayarak yapıyı böyle örüyoruz yani. Dolayısıyla ispat olmadan merdivende ilerlemek olmuyor. Matematik bugüne gelememiş oluyor. Onun için [ispat] önemli.

Matematik eğitimcilerinin matematikte temel pratik olarak ispat kategorisinde diğer katılımcı gruplardan nispeten, matematik öğretmenliği programı öğrencilerinden ise farklılaşarak ayrıldığı bir diğer alt kategori, matematiksel ispatın matematik yapmayla ilgili olmasıdır. Bu noktada 4 matematik eğitimcisi görüş belirtmiştir. Bu anlamda düşünen matematik eğitimcileri, genel olarak matematiksel ispatı matematik yapabilmenin ayrılmaz parçası ya da matematik yapabilme kültürünün bir parçası şeklinde değerli görmektedir. Örneğin 2EA5 kendi öğrencileri açısından ispatın önemine yer verdiği görüşlerinde, öğrencilerinin ispatla meşgul olarak belli bir matematik kültürü edineceklerini, ispatın bu açıdan önemli olduğunu düşünmektedir. Diğer taraftan 2EA4 disiplin ve eğitimsel perspektiflerle matematiksel ispatın önemine değinmektedir. İlkinde matematikte temel pratik olarak hem matematiğin gelişmesi hem de matematik yapmanın önemli bir amacı olarak ispatın değerli olduğunu; ikincisinde beceri olarak ispat anlamıyla matematiksel düşünme becerileri kapsamında bir anlayışla ispatın değerli olduğunu açıklamıştır:

2EA4: ... matematiksel açıdan düşünürsek, matematik zaten bu ispat sayesinde gelişiyor, farklı biçimler alıyor. Dolayısıyla matematik açısından baktığımızda ne işimize yarayacak dersek, matematik yapmak için işimize yarayacak ispat. Ama eğitim açısından bakarsak ne işimize [yarayacak] dediğimizde çocukların kafasını çalıştırmaya yarar. (daha toparlayarak açıklıyor) Matematik açısından ispat, matematik yapmanın önemli bir amacıdır. Eğitim açısından ispat, öğrencilerin kafasını çalıştırmasını sağlayacak, kafa çalıştırıcı etkinlikler ortaya çıkarmak, bunun için [bunun içindir ispat].

Diğer katılımcı gruplara benzer şekilde, matematik eğitimcilerinin tamamının (7) beceri olarak ispat kategorisinin ilişkilendirme becerisi alt kategorisinde görüşleri ön plandadır. Bu anlamda 2EA4 matematiksel ispatın hem farkındalık sağlama hem de prosedür yerine matematiksel içeriğin aslını, arka plan mantığını anlama, anlamlandırmayı kolaylaştırıcı yönleriyle ilişkilendirme yapabilmesini hatta bu durumun kendisine keyif verdiğini ifade etmektedir:

2EA4: ... bir matematik meselesiyle uğraştığımda, oradaki matematiksel fikri fark ettiğimde, anladığımda onu, büyük bir haz hissediyorum. “Aha! Bu buymuş diyorum”. Onu anlamış olmak o kadar keyif veriyor ki. Oysa daha önceden mesela benzer soruları 50 kere çözmüştüz, sınav sorularında çıkmış, ne bileyim biz sormuşuz, öğrenciler cevaplamış falan. Ama o arkadaki o fikri hiç anlamamışım. Yani o fikri anlamadan da aslında ben o soruları çözebiliyorum. Ama fikri anladığımda büyük bir mutluluk duyuyorum. Çünkü o fikri anlamamanın bana fiilen hiçbir katkısı yok. Yani “bu bizim ne işimize yarayacak” diye sordun ya, ben arkadaki o matematiksel yapıyı anlamasam da zaten o soruları çözebiliyorum ve iş yapabiliyorum diyelim. Dolayısıyla o matematiksel yapının arkasındaki işleyişi anlamak bana çok büyük keyif veriyor. Ama bu keyfin sebebi, artık ne diyelim, bir işime yaramasından kaynaklanmıyor. Dolayısıyla insanlığın hazzı aslında anlamaktadır, iş yapmakta değildir. Dolayısıyla ispat da yaptığımız işi anlamak üzerine bir gayrettir...

Genel olarak 2EA4’ün ispatı matematiksel mekanizmayı anlama meselesi olarak gördüğü söylenebilir. 2EA3, 2EA5 ve 2EA7 matematik eğitimcilerinin de ispat sayesinde arkadaki temel matematiksel fikri anlama, anlayış geliştirme, ne anlama geldiğini anlamlandırma yollarıyla 2EA4’e benzer şekilde görüşlere sahip olduğu görülmektedir.

Matematik eğitimcilerinin beceri olarak ispat kategorisinde ilişkilendirme becerisinden sonra ağırlıklı olarak görüşlerinin yer aldığı bir diğer alt kategori, açıklama becerisidir. Çalışmadaki 7 matematik eğitimcisinden 5’inin matematiksel ispatın açıklama becerisi alt kategorisinde gruplandırılan görüşleri mevcuttur. 2EA2 matematiksel ispatın sadece matematiksel bir ifadenin doğruluğunu göstermek için kullanılan bir araç olarak değil, aynı zamanda o ifadenin neden öyle

olduğunu göstermek için de kullanılan bir araç olarak önemli gördüğünü belirtmektedir. Bu sebeple matematiksel ispatı sadece doğrulama yöntemi olarak görmenin tek başına yeterli olmayacağını belirtmektedir. 2EA2'ye göre örneğin, matematiksel bir ifadenin doğru olduğuna dair bir gözlem yapılsa bile bunun neden doğru olduğunun da açıklanmasına ihtiyaç duyulmaktadır ya da matematiksel bir ilişkinin, bir yapının neden öyle olduğunun da gözler önüne serilmesi ispatın önemini ortaya koyan ayrı bir güçtür. Daha geniş bir çerçeveden 2EA2 ispatın hem doğrulama hem açıklama hem de keşfetme rolleriyle birlikte çoklu önemine değindiği görülmüştür:

2EA2: ... Yani matematik tarihi de zaten bunu ortaya koyuyor ki matematikte bir şeyin neden öyle olduğunu, doğru olduğunu göstermeye çalışırken hem anlamaya hem açıklamaya çalışırken aslında burada mesela Fermat'ın son teoremi güzel örneklerden biridir. Fermat'ın son teoremini ispatlarken Andrew Wiles, sadece o kaç, yani küçük bir denklemi ... ya da eşitliğin doğru olduğunu göstermeye çalışmamış. Koskoca, matematik içinde farklı alanlar arasındaki ilişkiler, bağlantılar, yeni alanlar ortaya çıkmış. Yani şöyle şu gözle bakarsak, matematik sadece, ispat sadece bir doğrulama, bir şeyin doğru olduğunu gösterme diye bakarsak biraz ispatın gücünü gözden kaçırmış oluruz diye düşünüyorum. İspat aslında bizi matematikte yeni ufukların açılmasında, yeni ilişkilerin ortaya çıkarılmasında önemli bir yere sahip. Çünkü o ispat sürecine doğrulama anlama açıklama süreci içine girdiğimizde, yeni ilişkiler yeni bağlantılar, yeni alanlar aslında ortaya çıkıyor. Yani öyle olmasaydı herhalde Andrew Wiles, 9 koca yılını harcamazdı diye düşünüyorum.

Bazı matematik eğitimcilerinin özellikle kendi grubundaki matematik eğitimcilerinden matematiksel ispatın önemiyle ayrıldığı görüşleri bulunmaktadır. 2EA6 matematiksel ispatın öğrenci tarafından önemine değindiği noktada farklı bir perspektifte görüşlerini yönlendirmektedir. Genel olarak matematiksel ispatın verilen bir kararın mantıklı olup olmamasının sorgulanmasıyla anlaşılmasının öne çıkarılmasını önemsemektedir ya da verilen kararın gerekçeli olması anlamıyla ispatın önemine değinmektedir. Bu açıdan açıklama sunabilme ya da gerekçe verebilme üzerinden ispata değer verdiği görülmektedir. Bununla birlikte erken sınıf seviyelerinde olan öğrenciler açısından hareketlendirdiği fakat daha genel olarak çerçevelendiği durum, ispattan çok öne çıkarılması gereken “en makul, en mantıklı karar alındı mı” şeklinde karar verme ya da muhakeme becerilerinin önemsenmesinin altını çizmektedir. Bu duruma ayrıca değinmesi, eğitimsel açıdan değerli olarak nitelendirilebilecek noktalara odak kurmasıyla açıklanabilir. Nitekim

bu düşüncesi, görüşme boyunca sürekli vurguladığı yerlerde görülmekle birlikte burada da devreye girmektedir:

2EA6: ... Şimdi anaokulunda ispat olur mu? Olmaz ama olur. Nasıl olur? Şöyle olur. O ispat değil işte o sorgulamayla ilgili bir şey. Bizim [anaokulu] buradaki ispattaki kastımız şudur: bir karar verdiğinizde, bir iş yaptığınızda yaptığınız işin ne kadar makul olduğunu devamlı sorgulayın. Eğer siz bir karar alırken en mantıklı kararı mı alıyorsunuz, tutarlı bir karar mı alıyorsunuz ve başkası olsa sizin yerinizde aynı kararı mı alırdı?... burada mevzu bununla ilgili, yani verilen bir kararın mantıklı olup olmaması sorgulanıyor. Bakın hiçbir zaman için ilkokulda bir öğrenci ispat yapamaz yani. Ama ne yapabilir? Şimdi burada bir karar veriyorsunuz, bunun gerekçesini verme... ispat aslında bir gerekçe vermektir, yani yaptığınız her bir hareketin mantıklı olduğuna veya burada yapılabilecek en iyi hareket olduğuna başkalarını ikna etmektir. Bu da ancak gerekçeyle olabilir yani gerekçelendirir ispat. İspat, yapılan hareketlerin gerekçelendirmesi[dir]. “Niye öyle?” [demektir]. “Bak şundan dolayı” [diye] adım adım ben gerekçe sunarak bir sonuca ulaşabilirim... Burada bizim öğrenciden beklentimiz ne? Öğrenciden beklentimiz kesinlikle ispat yapması olmaması gerekiyor. Sadece şu olması gerekiyor: herhangi bir ortamda genellikle problem çözme bağlamında alınan kararlarda acaba en mantıklı, en tutarlı, en ne diyelim makul karar alındı mı? Bu önemlidir. Çünkü problem çözme bir belirsizlik ortamıdır, ne yapacağını bilemezsin. Orada ne yapacaksın? Bak şurada üç tane yol var ben bunları sırasıyla deneyebilirim, denerken de önce hangi yolu deneyeceğime karar veririm [bu] bir karardır, yani bu önemlidir...

2EA6 yukarıda anaokulu ya da ilkokul gibi bir seviyede değiştiği durumu, görüşme boyunca daha ileri sınıf seviyesindeki bir öğrenciye de problem çözme gibi bir anlamda yaymaktadır. Bu şekilde yansıttığı görüşlerinde ispatın çok fazla ön çıkarılmasını eleştirmektedir. Bunun yerine odağın daha çok pratikte anlamlı olan becerilere çevrilmesini yani problem çözme, karar verme, muhakeme yapabilme gibi becerilerle çevrelenmesini daha önemli görmektedir.

2EA1, 2EA6 ve 2EA7, bir matematikçinin ele aldığı biçimdeki formal anlamdaki ya da kendi deyimleriyle pür matematiksel ispatta ısrarcı olmanın ya da önemli olarak vurgulanmasının bazen amacını aştığını ifade etmektedirler. Bu noktada 2EA6 için önemli olan, ispat yerine bilgiyi anlamlandırma ya da ispatın öneminden problem çözmenin önemli olarak anlaşılması gerekmektedir. Bu sebeple o tarz ispatın kendisini ilgilendirmedigini belirtmiş, bir eğitimci olarak yeni fikirler üreten yani herhangi bir probleme kreatif (yaratıcı) bir çözüm öneren insanlara ihtiyaç duyulduğunu, diğer türlü yöntemin sistematik olarak uygulanıp doğruluğunu gösterme ile ilgili olana çok ihtiyaç duyulmadığını ifade etmiştir. Yine

eğitimsel bir çerçevede görüşlerini sunarak daha çok düşünmeyle ilgili, zihinsel faaliyetlerle ilgili mevzulara odaklanmanın önemine değinmiştir. Bu açıdan öğretimsel hedefler bağlamında, 2EA6 için önemli olan ispat değil; düşünme ve sorgulama, sorgulayan bir nesil, bilinçli insan yetiştirmektir. Bu sebeple ispatın pragmatik katkısı olsun ki anlamlı olsun görüşünü özümsemektedir. Bir öğrenci ya da birey açısından, bilgisini gerçek hayatta kullanmıyorsa, yaptığı davranışları sorgulamıyorsa, ispatın herhangi bir anlamı olmadığını hatta problem çözmenin ve matematiğin de bir değerinin olmadığını savunmaktadır.

Diğer taraftan 2EA6 “matematiği işe yaraması için yapmıyoruz” denilse bile, gerçekçi olmak gerektiğini hatırlatmış; ekonominin matematiğin uygulaması ile büyüdüğünü, bu noktada bilgisayarın ya da teknolojinin ispatı geriye ittiğini söylemiştir. Bu nedenle şu an ispatla ilgilenmekten öte halen yürüyen matematik, üretilen matematiğin hüküm sürdüğünü, “buraya nasıl katkı sağlarız” düşüncesinin önemli olduğundan bahsederek, matematikçilerin tarzında ispata odaklanmayı doğru bulmadığını belirtmiştir. Dolayısıyla formal ispatın öneminden informal ispatın değerine işaret etmektedir. Bu açıdan 2EA6 informal ispat yaşamın bir parçası olduğu için eğitimde kullanılan, her vatandaşın kullanabileceği bir tarza geçişi daha manidar bulmaktadır çünkü normalde insanlar günlük hayatlarında matematikçilerin kullandığı tarzı kullanmamaktadır. Özetle 2EA6 ispatın çok fazla öne çıkarılmasına karşı çıkmaktadır, bunun yerine düşünmeyi öne almanın gereğinin altını çizmektedir. 2EA6’nın bu çerçevedeki görüşü mesleki kimliğe de sirayet eden düşüncelerine eşlik etmektedir. Öğrencilerine matematiksel ispatın rehber olmayacağını çünkü verilen eğitimin doğru olmadığını belirtmektedir. Bu açıdan özellikle öğretmen olarak kimlik alt kategorisine olumsuz yaklaşmaktadır.

2EA7 de, 2EA6 gibi benzer görüşlere sahiptir. 2EA7 pür matematiksel ispatın yaratıcılığı engellediğini, onun kalıp yaklaşımının kendisine çok anlamlı gelmediğini belirtmiştir. Her ne kadar ispat matematiğin gelişmesini sağlasa da bir öğrenci, lisanstan mezun olan biri ya da öğretmen adayı da gerçekten böyle mi algılıyor noktasında kendisinin tereddütte olduğunu ifade etmiştir. Bir başka ifadeyle, öğretimsel boyutta bakıldığında 5-8. sınıf grubu için matematiksel ispata gerek olup olmadığı ya da bunu öğretecek öğretmene ispatı bir zorunluluk gibi vermenin anlamlı olup olmadığını ya da öğretmen adayına bu tarzın kaçta kaçının geçtiğini sorgulamaktadır.

2EA7 matematiksel ispatı matematiğin olmazsa olmazı olarak görse de bunu formal dille zorunlu tutmanın ispatın esas ulaşmak istediği amacını bir bakıma törpülediğini ya da formal kalıba hapsedmenin ispatın esas değerini düşürdüğünü belirtmiştir. Bu sebeple formal yerine düşünme sürecinin yaşatılmasını değerli görmektedir. 2EA7, 2EA6'nın da belirttiği gibi, var olan teorileri sürekli olarak ispatlamanın gereksizliğine işaret etmektedir. Kısaca 2EA7 için 2EA6 gibi (aynı zamanda 2EA1 gibi) eğitimsel ve pragmatik yönler olarak süreç önemli, anlayış önemli, kazanç önemlidir. Mesleki kariyer açısından matematiksel ispatın öğretmen olarak kimlik alt kategorisine 2EA7 de olumsuz yaklaşmaktadır. Şu anki uygulamadaki öğretimi baz aldığında, ispatın verilmesine gerek olmadığını çünkü öğrencilerine rehberlik etmediğini, onlara geçmediğini ya da hiçbir şey katmadığını düşünmektedir.

2EA1 de, 2EA6 ve 2EA7 matematik eğitimcileri gibi, matematiksel ispatı pratikteki durumlarına kısıtlayarak önemli görmektedir. Öğrencilerinin meslek olarak öğretmenliği benimsemesi üzerine matematiksel ispatla ilgili “sadece nereden geldiğini bilme” anlamında akıllarında yer etmesinin önemli olduğunu düşünmektedir. Dolayısıyla matematiksel ispatla ilgili öğretmenliğe yarayan kısımlar tutulur diğerleri atılır gibi bir çerçeveyi benimsemektedir. Bu düşüncesini bir uzuv örneğiyle pekiştirerek, hatta toplumsal olarak bakıldığında da aynı değerlendirerek, “kullanılmayan, uygulamaya geçirilmeyen, aktifleştirilmeyen bilgi körelir” şeklinde ve fonksiyonel bölgesini azaltma anlamında işlevsiz olmakla özdeşleştirmektedir.

Burada 2EA1 için farklı bir nokta olarak değerlendirilebilecek bir durum şu şekilde karşılık bulmaktadır. Görüşme esnasında 2EA1, kendi öğrencilik serüveninde (matematik öğretmenliği programının bir öğrencisi iken) matematiksel ispatla ilgili yaşadığı, gördüğü, deneyimlediği bazı durumlardan bahsetmiştir. Zamanında ispatla ilgili yaşadığı zorluk ve mezun olduktan sonra kullanılmayan, içi boş kavramlar (kendi ifadesi) anlamlı olarak kendisine geçmediği için, şu an bölümünün bir öğretim üyesi olarak girdiği derslerinde matematiksel ispatla ilgili bir bağlam söz konusu olduğunda doğal olarak önceki deneyimleri öğretimini şekillendiren bir arka plan oluşturmuştur. Bu nedenle kendi görüşü, öğretimdeki ele alış şekli ve öğrencisine de iletme istediği yönlerin birlikteliğiyle 2EA1'in pür matematiksel ispata karşı duruşu (daha önce ispat tarifleri kategorisindeki görüşlerinde de görüldüğü üzere) “fen edebiyat dünyasına karşılık eğitim dünyası”,

“öğretimsel temele karşılık ispat ve bilim temelli olma”, “mutfağa karşılık sahada olma” çerçevesinde ve birbirinden ayrılması gereken ikili durumların etkisindedir. Dolayısıyla 2EA1 için ispatın önemli olarak nitelendirebilmesi, onun pratikte olumlu sonuçlanan göstergelerinin elde edilmesiyle mümkündür. Öğrencilerinin mezun olduktan sonra matematiksel ispatla ilgili ‘sadece nereden geldiğini bilmenin yeterli olduğu’ bir kapsamda aldıkları eğitimsel içerikle daha iyi öğrenmenin gerçekleştiğini ifade eden dönütlerinin ve öğrenciyken birebir deneyimlediklerinin sürekli döngüsü etrafında, 2EA1 öğretmenlik kimliği olarak ispatın böyle anlaşılmasını daha çok ön planda tutarak hem kendi adına hem de öğrencileri açısından bir sınırlama yapmıştır:

2EA1: ... İspat kullanmıyorum açıkçası ben. Analiz dersinde de diferansiyelde de, evet pek çok teorem veriyoruz. Teoremin uygulamalarını veriyoruz ama ben her zaman şunu savunuyorum: bizi fen edebiyattan ayıran bir temel olmalı. Fen edebiyat ve eğitimin, ikisinin ayrıldığı nokta bence bu noktadan geçiyor diye düşünüyorum. Biz öğretim temelli gidiyoruz, onlar ispat ve bilim üzerine, tabii ki biz de bilim üzerine gidiyoruz ama onlar daha laboratuvarı, daha bence mutfakta. Bizse sahadayız. Yani baktığımız zaman onlar sanki üretiyor, pişiriyor bize veriyor, biz de onları uyguluyoruz gibi düşünüyorum. Öyle olduğu için ben öğrencilerime açıkçası hep şunu söylüyorum. Bu dersi aldığım [üzerimde olan ders], yaklaşık 3 senedir bu dersleri, diferansiyel artık yok ama önceki yani 2018 girişlilerden öncekilere vermiştim ben. Şimdi de analiz dersinde de bunu savunuyorum, öğrencilerime de hep bunu söylüyorum ki “siz buradan öğretmen olarak mezun olacaksınız. Aklınızda şu kalmasın istemiyorum. ‘Yani bu teoremin ispatı neydi?’ Yapamayacağımızı düşünüyorum, unutacaksınız, ezberleyeceksiniz, sınav geçme kaygısıyla bunu öğreneceksiniz ama size öğrenciniz “hocam şu nereden geliyordu” dediğinde “evet bunun geliş yolu şuydu” diye aklınızda bir şey kalsın, o bana yeter” diyerekten ben konuları veriyorum. Onlar da bu noktada daha iyi öğrendiklerini, bana hep bunu söylüyorlar zaten. Kendimden yola çıktım çünkü ben öğrenciyken elementer dersi almıştık iktisadi idari bilimlerden. Lineer cebir almıştık fen edebiyattan. Çok yorulmuştuk, çok zorlanmıştık ama elde var sıfır oldu açıkçası. Mezun olduğumda, geriye dönüp baktığımda ben sadece kavram isimlerinden başka bir şey hatırlamıyordum. Kavramın içi boştu benim için ki iyi öğrencilerden biriydim ben. Ama şu an mesela baktığımda, öğrencilerim mezun oluyor ve bana diyorlar ki “hocam biz bütün bilgileri kullanıyoruz, çünkü öğreniyoruz, ezberlemiyoruz”.

Çalışmadaki 2EA1, 2EA6 ve 2EA7 matematik eğitimcilerinin aksine, 2EA2, 2EA3 ve 2EA5 matematik eğitimcilerinin ispatın öğretmen olarak mesleki kimliğe olumlu yansımalarının olduğunu ifade eden görüşlerini barındırmaktadır. Genel olarak bakıldığında, matematik eğitimcilerinin öğretmenlik kariyeri çizen bir

öğrencisi açısından matematiksel ispatın bu mesleğe getirisinin birbirinden bağımsız olan ikili durumlarına işaret ettikleri görülmektedir.

4.1.5.3 Matematik Programı Öğrencileri Tarafından İspata Verilen Değer ve Atfedilen Önem

Çalışmadaki katılımcıların matematikte temel pratik olarak ispat kategorisinin matematiğin temeli alt kategorisinde hemen hemen birbirine yakın sayıda görüşleri bulunsa da matematik programı öğrencilerinin ağırlıklı olarak görüşleri ön plana çıkmaktadır (bkz. Tablo 4.6). Bu programdaki 9 öğrenciden 6'sı matematiksel ispatı matematiğin temelini oluşturması açısından önemli görmektedir. Bu öğrencilerden 3MÖ5 görüşlerinde sıklıkla yer verdiği, matematiksel ispatın matematiğin temel taşı olmasıdır. Temel taşı olarak görmesine izin veren durumları, bölümdeki 4 yıllık eğitiminde gördüğü şeyler çerçevesinden baktığı zaman, ortaya atılanları ispatlamanın matematiğin temelini oluşturduğunu düşünmesiyle açıklayabilmektedir:

3MÖ5: *Yani şöyle az önce verdiğim cevaplardan aslında farklı bir şey değil yani. Matematiğin temel taşı yani, çok fazla bir söyleyeceğim bir şey kalmadı sanırım bununla ilgili. (sebebinin açıklıyor) Yani matematikte gerçekten hani bu 4 yıldır yaptığımız şey, ortaya attığımız şeyleri açmak. Yani bunları genişletmek, hani neyin nereden geldiğini nasıl bulunduğunu göstermek. Onun dışında bilmiyorum sanırım.*

3MÖ8 öğrencisi de benzer bir görüş paylaşarak, matematiksel ispatın kendisi için anlam ve önemi noktasını açıklarken matematiğe temel teşkil etmesi yönünden bahsetmiştir:

3MÖ8: *Temeli diyebilirim... Yani her ne kadar matematikte işlemler, sayılar ne kadar önemliyse ispatın da anlaşılması için o kadar önemli olduğunu düşünüyorum, yani temeli diye düşündüm açıkçası...*

Matematiksel ispatın önemini açıklarken 3MÖ9 öğrencisi de matematiğin temeli olduğunu ifade etmiştir. Hatta ispatı matematiğin kendisiyle ya da matematik yapmayla özdeşleştirmiş, ispatsız bir matematiğin düşünülemeyeceği anlamlarına gelen görüşleri şu şekilde olmuştur:

3MÖ9: *... biz çünkü ispat yaparken en başından başlıyoruz yani en temelinden başlıyoruz ispatta. Öyle devam ettirerek en sonunda o teoremi mesela ispatlıyoruz ve o formülü buluyoruz diyelim. Bunu, matematikte bunu yaparken matematiği yapmış oluyoruz, matematik budur yani nereden geldiğini anlatıyoruz. İspat bence direkt matematik olarak yani, ispatsız bir*

matematik yani böyle bir şey [düşünülemez], yani matematiğin temeli ispat değil midir? Öyledir yani bence.

Çalışmadaki matematikçilere benzer şekilde ve eşit sayıda (5) olmak üzere, matematik disiplini gereği ispat alt kategorisinde matematik programı öğrencilerinin de görüşleri ortak bir şekilde yer almaktadır. Matematiksel ispat yapmaya neden ihtiyaç duyulduğu ya da ne amaçla yapılıyor olduğuna yönelik görüşlerini açıklayan 3MÖ1, matematik alanı olduğu için ya da alan bunu gerektirdiği için ispatın yapılıyor olmasından bahsetmiştir. Bunun yanı sıra tarihte ya da coğrafyada ispatın olmadığını, matematik alanının doğasının buna alan açtığını görüşüne eklemiştir.

3MÖ8 matematik bölümünün bir öğrencisi gözüyle diğer bölümlere kıyasla ispatın daha önemli olduğunu vurgulamış, basit şekilde ifade edilirse bölümde yapılan, bir hesap kitap tutmak değil, ispatın ana uğraşının matematik disiplinince çevrelenmesine olanaklı kılınmasıdır:

3MÖ8: *İspatı bilmek benim için neden önemli? Eğer, ispatı bilmek benim için diğer bölümlere nazaran bir tık daha önemini aksettiriyor çünkü olayın sadece bir ortalama değer hesaplamakla sınırlı kalmadığını çok net bir şekilde anlıyorsunuz. Örnek vermek gerekirse: ortalama değer. Ben ilk tahtada gördüğüm zaman nasıl lisede otomatik olarak integralin, türevin sembollerini kullanıp bir şey aldıysak bu bende sadece, “hıh tamam soruyu çözerken bunu kullanıyoruz” deyip geçmeme sebep oluyordu ama olayı net olarak anlamıyordum, bunun neden kullanıldığı hakkında bir bilğim veya fikrim yoktu. Ancak üniversiteye geçince türevin de integralin de aslında nasıl ortaya çıktığını görmek, bölüme olan yani benim yaptığım işe olan mantığımı daha fazla arttırdı, “hu tamam o zaman ben bunu bunun için kullanıyormuşum” dememde daha fazla rol oynadı.*

Matematik programı öğrencileri, çalışmadaki diğer katılımcı gruplarda da olduğu gibi, beceri olarak ispat kategorisinde yoğunlaşan görüşlere sahiptir. Bu kategoride ise daha çok ilişkilendirme becerisi alt kategorisinde ağırlıklı bir şekilde görüşlerinin bulunduğu görülmektedir. Diğer katılımcı grupların tamamı ilişkilendirme becerisi alt kategorisinde görüş bildirmişken, bu programdaki 9 öğrenciden 7’si yani ağırlıklı olarak bir görüşe sahip olmuştur. Bu öğrencilerden 3MÖ8 matematiksel ispatın kendisi için önemine kavrayış geliştirmek açısından değinmektedir. Bu açıdan matematiksel ispat 3MÖ8 için anlamayı kolaylaştıran bir öneme sahip olmaktadır.

3MÖ2 açısından matematiksel ispat, integral almanın ne anlama geldiğini bilme, nereden geldiğini anlama hatta daha rahat bir şekilde kavramları anlayabilme açısından önemlidir:

3MÖ2: ... Önceden integral falan alıyorduk ama bunun nereden geldiğini bilmiyorduk. Yani şimdi o ispat yöntemlerini gördüğümüz için nereden geldiğini biliyoruz, nasıl yaptığımızı biliyoruz. Yani daha bir rahat anlamamı sağlıyor böylece.

Matematik programı öğrencilerinin, beceri olarak ispat kategorisinden doğrulama becerisiyle çalışmadaki diğer katılımcı gruplardan ağırlıklı (6) bir şekilde ayrıldığı görülmektedir. Bir başka ifadeyle, diğer katılımcı gruplardan farklı olarak, doğrulama becerisini ağırlıklı bir şekilde ön plana çıkaran bu programdaki öğrenciler olmuştur. Burada dikkat çekici bir nokta, beceri olarak ispat kategorisinde, matematik eğitimcilerinin daha çok değer verdiği açıklama becerisi iken matematik programı öğrencilerinin daha fazla değer verdiği doğrulama becerisi olarak karşılık bulmasıdır. Doğrulama becerisi genel olarak matematiksel bir ifadenin, kuralın, formülün, teoremin ya da bir iddianın doğru ya da yanlış olduğunu gösterme açısından ispatın gücünü yansıtırken, açıklama becerisi bunun üzerine bir tık daha derin bir değer katmaktadır. Basit bir ifadeyle söyleyerek örneklemek gerekirse, açıklama becerisi matematiksel bir ifadenin (kural, formül, teorem ya da iddianın) neden doğru (ya da yanlış) olduğuna dair bir açıklığa kavuşturmayla ilgilenmektedir.

3MÖ2 ve 3MÖ6 matematiksel ispatın verilen bir formülün ya da olayın doğruluğunu göstermek için yapıldığını ifade etmiştir. Benzer şekilde 3MÖ4 matematiksel ispatın yapılma amacı ve rollerinin ne olabileceğine yönelik görüşleri anlaşılmak istendiğinde, sonucun doğru ya da yanlış olduğunu göstermek için ispatın yapıldığını belirtmiştir:

3MÖ4: Doğru ya da yanlış olduğunu gösteriyor sonucun ispat öyle düşünüyorum çünkü başından sonuna kadar bunun için uğraşıyoruz...

Matematik programı öğrencilerinin kimlik olarak ispat kategorisinde ‘farklı bir alanda çalışan biri olarak’ ve ‘şu an öğrenci olarak’ alt kategorilerinde ağırlıklı bir şekilde görüşleri yer almaktadır. Farklı bir alanda çalışan biri olarak alt kategorisinde 6 öğrencinin görüşü bulunmaktadır. Bu anlamda, bölümlerindeki matematikçilerde de olduğu gibi, öğrencilerin bu alt kategoride görüşleri yaygın bir şekilde mevcuttur. Bununla birlikte, matematikçilerin tamamının ‘hangi meslek

grubunda yer alırlarsa alsın ispatın olumlu yansıması olacağı' görüşünü, matematik programı öğrencilerinin 6'sında da olumlu anlamda görmek mümkün değildir. Aksine, bu programdaki öğrencilerin görüşleri daha düzensiz bir şekilde karşılık bulabilmektedir. Örneğin katılımcı gruplardan bağımsız bir şekilde daha önce açıklanan kategori-alt kategori çerçevesinde de görüldüğü üzere, bu programdaki öğrencilerden 3'ü matematiksel ispatın farklı bir alanda çalışan biri kimliğindeki karşılığı noktasında olumsuz yaklaşmaktadır. Bu öğrencilerden 3MÖ6 ve 3MÖ8, yazılım alanında ilerlemede matematiksel ispatı kullanabileceklerini düşünmediğini belirtmiştir. Hatta 3MÖ6 matematik bölümünde akademik olarak ilerlerse işine yarayacağını aksi takdirde farklı bir alanda ya da yazılım alanında bir işlevi olmayacağından şu şekilde bahsetmiştir:

3MÖ6: *Açıkçası doğruyu söylemek gerekirse, yani mesela kendi bölümümden ilerleyemediğim sürece bir işime yaramayacak gibi geliyor yani. Bildiğim bir bilgi ekstra bir bilgi olarak kalacak aklımda ve bölümümde daha detaylı bir bilgiye sahip olacağım belki de...ama kendi bölümümde ilerlemediğim sürece pek bir işime yarayabileceğini de düşünmüyorum açıkçası... Yani şimdi bizim bölümden sonra şimdi yazılım dersleri gördüğümüz için yazılım faktörü altında da çalışabilme imkânımız var. Ama mesela ben yazılım dersinde hiç ispat falan yapmadım. Şimdi ben ileride yazılım sektörüne gitsem bunun yaptığımız matematiksel ispatlarla bunun mesela en ufak örneğin hiçbir alakası yok... Yani şimdi kendi bölümümüzle ilgili bir ilerleme kaydedemediğimiz bir sürece mesela ben yaptığım bir ispatın, başka bir şekilde yaptığımız ispatları yani başka bir şekilde kullanabileceğimizi düşünmüyorum yani. Bunların cidden bir işlevi olacağını düşünmüyorum yani ki kendi bölümümüzden ilerlemediğimiz sürece.*

Farklı alanda çalışan kimlik açısından düzensiz olarak yorumlanmasına neden olan bir durum, bu programdaki öğrencilerden 3MÖ7 de yazılım alanına yönelme hedefinden ve bu alanda matematiksel ispatın potansiyel gücünden bahsetmesidir. Bölümünün mezun olma statüsüne yakın bir öğrencisi olarak 3MÖ7, önceden akademik ilerleme hedefinin olduğunu, şu an ise yazılım sektörüne yöneldiğini belirtmiştir. Matematiksel ispatla yönelmek istediği alandaki uyuşum bağından bahsettiği görüşleri şu şekildedir:

3MÖ7: *... bence şu an birçok iş için merak ve sorgulama yeteneği çok güzel bir yetkinlik. Özellikle yazılım alanında eğer bir şekilde gelişmek istiyorsan. Çünkü yazılım şu an tüm dünyada, evren yani hızla ilerleyen bir şey bizim için ve buradaki en ana etken merak duygusu. Yani o yüzden ben ispatın bana oldukça merak ve sorgulama duygusunu kazandırdığını düşünüyorum. ...Aslında ben geçen seneye kadar akademisyen olmak istiyordum. Bu yüzden hep şey şeklinde düşünmüştüm. İşte ben de bu öğrendiklerimi bu şekilde öğrencilerime*

aktaracağım, buralarda kullanacağım gibi düşünüyordum. Ama daha çok şu an yazılıma yöneldim ve burada öğrenmiş olduğum ispatlar, tabi ki hangi alanda çalıştığınla da alakalı olarak yardımcı olabilir. Ama özellikle dediğim gibi merak duygusu [anlamında] çok fazla yardımcı olacağını düşünüyorum ama bazı yazılımsal şeylerde özellikle kodlama gibi şeylerde, oradaki düşünce mantığıyla bence ispattaki düşünce mantığı bir yerde bana uyuyormuş gibi geliyor. (nasıl uyuştüğünü açıklıyor) ...Yani bir şeyi kodlarken de hani, biz atıyorum resmi bir site, bir sayfa oluşturacaksın. İşte onun da en temeline inerek başlıyorsunuz ya böyle adım adım, hani harf harf, işte nereden geldiğini, nasıl yaptığını göstermeye çalışıyoruz siteyi oluştururken. Her şeyi böyle belli yerlere [eliyle blok blok yapıyor] yerleştiriyoruz. Bence ispat da böyle bir şey yani nereden geldiğini o nereye neyi yerleştirmemiz gerektiğini gösteriyor bize.

Matematik programı öğrencilerinden farklı alandaki kimlik açısından olumlu yaklaşımı olan diğer öğrenciler 3MÖ3 ve 3MÖ9'dur. 3MÖ3 her ne kadar akademik ilerleme hedefli bir duruma değinse de akademisyen olmadığına da yani farklı bir mecrada olsa da matematiksel ispatın kendisine kazandırdığı analitik zekâ ile hata payını düşürmenin önemli etkisinden bahsetmiştir. Bu anlamda, 3MÖ3'ün sadece matematik alanı değil daha geniş alanlara yayılabilme, araştırmalarını genişletebilme, farklı disiplinlere matematiksel ispatı uyarlayarak yönelebilenin gelecekteki olumlu yansımalarına değindiği görülmüştür.

Olumlu bir çerçeveden bakan 3MÖ9 da 3MÖ7'nin matematiksel ispatın sorgulama becerisi kazandırmasıyla mesleğine yansıtılmış görüşüne benzer bir ifadeyle yer vermiştir. 3MÖ9 genel olarak herhangi bir işte başarılı olmanın anahtarının matematiksel ispattaki mantık gibi nereden geldiğinin sorgulanması olduğunu, bu sorgulayıcı tavrın kendisini (genel olarak da bir başkasını) her zaman başarıya taşıyacağına inanmaktadır. Bu görüşüyle hangi meslekte yer aldığındansa, 'hangi mesleği yaparsa yapsın' şeklinde bir vurgusu vardır ve 'matematiksel ispat daima kendisine başarı getirecektir' görüşünü benimsemektedir.

3MÖ9 aynı zamanda bölümündeki diğer öğrencilerden şu an öğrenci olarak kimliğiyle ayrılmaktadır. Bir başka ifadeyle, matematik programı öğrencilerinden 4'ü matematiksel ispata bir öğrenci olarak sadece sınavı geçme amacı güdülen bir çerçeveden bakarak olumsuz anlamda görüş belirtirken, sadece 3MÖ9 açısından bu durum olumlu karşılık bulmaktadır. 3MÖ9 için bir öğrenci olarak sınavdan kaç aldığı mühim değildir, aksine bir teoremi anlamak, onun ispatını öğrenmenin kendisini zihinsel olarak ferahlattığını ifade eden görüşü şu şekilde olmuştur:

3MÖ9: ... hani bir şeylerin nereden geldiğini öğrenince sanki böyle bir tane teorem biliyorsun sanki böyle zihnim aydınlanıyor mu diyeyim yani böyle sanki karanlıktan gün ışığına çıkıyor gibiyim. Bilmiyorum çok mutlu oluyorum mesela çok zorlandığım şeyler de çok oldu, bazen çalışmak istemediğim şeyler de oldu mesela çünkü çok zorluyordu beni, direkt derine inmek, o ispatı anlamak. Ama yine de anlayınca çok mutlu oluyordum yani o anda sınavdan kaç aldığım önemli değil, sadece anlayıp öğrenmek, o teoremin ispatını öğrenmek benim özellikle ruhumu çok mutlu ediyordu bilmiyorum. Belki herkeste böyle değildir ama bende gerçekten böyleydi.

4.1.5.4 Matematik Öğretmenliği Programı Öğrencileri Tarafından İspata Verilen Değer ve Atfedilen Önem

Çalışmadaki matematik öğretmenliği programındaki öğrencilerinin matematikte temel pratik olarak ispat kategorisinin sadece matematiğin temeli alt kategorisinde görüşlerinin yer aldığı dikkat çekmiştir (bkz. Tablo 4.6). Bir başka ifadeyle, çalışmadaki diğer katılımcı grupların matematikte temel pratik olarak ispat kategorisinin diğer alt kategorilerinde bir şekilde görüşleri bulunsan da, matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin bu kategorinin sadece ve sadece matematiğin temeli alt kategorisinde görüşleri (4) mevcuttur. 4EÖ5 matematiksel ispatın matematikteki çoğu teorem, formül, işlem gibi yapıların temelini sağladığını ifade etmiştir:

4EÖ5: Matematiksel ispat aslında şu an günümüzde kullandığımız birçok teoremin olsun, ee formülün olsun işlemin olsun, bunların temelini sağlıyor...

4EÖ9 matematiği bir bütün yapı olarak görmektedir. Bu bütünün parçaları düşünüldüğünde, ispat 4EÖ9 için matematiğin ayrılmaz parçalarından biri olarak önemlidir:

4EÖ9: ... ben ispatı matematikte ayrılmaz bir bütün olarak görüyorum ya. Hani ne ispat[ın] tek başına bir anlamı var, ne de matematikteki normal bilgilerin hani formüllerin tek başına bir anlamı var. Bu ikisi birleştiği zaman matematik bir bütün haline geliyor gibi düşünebilirim yani.

Çalışmadaki matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin tamamının (9) beceri olarak ispat kategorisinde görüşlerinin yer aldığı görülmektedir. Ayrıca bu kategorinin ilişkilendirme becerisi alt kategorisinde de bu programdaki öğrencilerin tamamının görüşleri bulunmaktadır. Dolayısıyla çalışmadaki diğer katılımcı gruplarla hem bu kategori açısından hem de aynı kategori altında ilişkilendirme alt kategorisiyle benzerlik taşımaktadır. 4EÖ3, bir formülden diğer

bir formülü türetebildiği için, böylelikle ezberden kendisini uzaklaştırdığı için matematiksel ispat önemlidir:

4EÖ3: ...Ezberden uzaklaştıran kalıcı bir öğretim sağlıyor... Bir formülden diğerini türetiyorum...

4EÖ4 matematiksel ispatın ne amaçla yapıldığına yönelik 4EÖ3 gibi benzer ifadelere değinerek yer vermiştir. Matematiksel bir bilginin nereden geldiğini anlayabilme, ezber yerine mantığını kavrayabilmek için matematiksel ispatın kullanıldığını belirtmiştir:

4EÖ4: ... mesela bir bilgiyi ezberlemektense neyin nereden geldiğini, hani nasıl olduğunu görmek bilmek daha kalıcı olur bence. Ezberdense o daha mantıklı. O yüzden bence kullanılıyor...

Matematik öğretmenliği programı öğrencilerinden 4EÖ7, çalışmadaki matematikçilerden 1MA5'in ezberi kambur olarak görmesine benzer bir görüşü paylaşarak, matematisel ispatın ezber yapmak yerine ilişkilendirebilmeyi kolaylaştırdığını belirtmiştir. 4EÖ7'ye göre, ezberledikçe matematiksel bilgiler sanki birbirinden ayrık ya da bağımsız olarak görünmektedir, bu nedenle her birine zihinsel olarak farklı birer oda açılarak fazladan yer işgal etmesine neden olmaktadır. Bununla birlikte örneğin toplama ve çarpmayı ayrı ayrı odalamak yerine, çarpmanın temelinde toplananın yattığını bilmek, ikisi arasında bağlantı kurmak matematiksel ispatın ilişkilendirme gücünü yansıtmaktadır:

4EÖ7: ... ezberden bir kurtuluş, biraz daha uzaklaşma... bazı şeyleri sadece kabul etmek beni biraz rahatsız ediyor. Yani ezberlediğimiz zaman her şey birbirinden bağımsız gibi geliyor bana, her şeye farklı bir oda açıyoruz. Örneğin, toplama işlemine farklı bir oda açıyoruz, çıkarma işlemine farklı bir oda açıyoruz, çarpma işlemine, bölme işlemine, fakat bunların arasında ilişkileri göremediğimiz zaman bunlar bizim zihnimizde fazladan yer kaplıyormuş gibi geliyor bana, belki de fazladan yer işgal ediyorlar. Fakat ispatına döndüğüm zaman, çarpmanın temelinde toplananın, bölmenin temelinde çıkarmanın yer alabildiğini görebiliyorum ve bu ilişkilerin, bu ispatların, bunları bu şekilde yapabildiğimizi gösterebilmek benim için bu bilgileri ilişkilendirebilme imkanı sağlıyor...

Matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin matematiksel ispatla ilgili önemli gördüğü noktalar, çalışmadaki diğer katılımcı gruplardan genel olarak ve sayıca az görüşü barındırması yönüyle farklılaşmaktadır. Bununla birlikte matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin beceri olarak ispat kategorisi dışında sadece kimlik olarak ispat kategorisinde görüşlerinin daha fazla ön plana çıktığı görülmektedir. Bu programdaki öğrencilerin tamamı (9) mesleki kariyerleri açısından matematik öğretmenliğini kendilerine hedef olarak benimsediklerini

ifade etmiştir. 4EÖ2 dışındaki öğrenciler, öğretmen olarak mesleklerini icra ederlerken matematiksel ispatın olumlu yansımalarının olacağını ifade etmiştir. Bu öğrencilerden farklı düşünerek ayrılan 4EÖ2, matematiksel ispatla daha çok lise matematiği gibi üst düzey matematikte karşılaşılacağı için, kendisinin de ortaokul matematik öğretmenliği şeklinde bir kariyeri olacağı için, hatta öğretim temelli bir doğrultuda derslerini ilerleteceği için, öğretmenlik serüveninde ispatı kullanmayacağını belirtmiştir.

Matematik öğretmenliği programındaki 4EÖ2 dışındaki diğer 8 öğrenci, alanında ‘iyi bir öğretmen olmak’ için matematiksel ispatın kendileri için önemli olduğunu vurgulamıştır. Bu şekilde düşünen öğrencilerden biri 4EÖ4’tür. 4EÖ4 iyi bir öğretmen olabilmek için kendisini geliştirmesi gerektiğinden bahsetmiştir. Çünkü öğrencilerine en iyi matematiksel içeriği verebilmeyi istemektedir. İspatla ilişkilendirdiği nereden geldiğini açıklayabilme noktasında kendisini yeteri kadar geliştirmişse ya da konuya ne kadar hakimse öğrencilerine de bu bilgilerinin nüfuz edeceğine inanmaktadır:

4EÖ4: ... öğrencilerime hani verebileceğim en iyisini vermek istiyorum. Onlar bana “bu nereden gelmiş” falan dediğinde donup kalmaktansa en iyi bir şekilde açıklamak istiyorum. O yüzden hani kendimi geliştirmeliyim bence bu noktada.

Bu programdaki bazı öğrenciler, iyi öğretmen olmanın yanı sıra, sıradan öğretmen olmamak ya da öğrencilerinde farklılık yaratmak için matematiksel ispatın öğretmenlik kimliğindeki değerine değinmişlerdir.

4EÖ5 şu an bir öğretmen adayı olarak kendisinin ispatlama sürecini bilmesinin ileride öğrencilerine aktarabileceği bir değerinin olduğunu düşünmektedir. Yetiştireceği öğrencileri, farklı meslek gruplarına girebilecek birer potansiyeldedir. Bu nedenle öğrencilerine bir temel oluştuması açısından kendi misyonunu düşündüğünde, ne kadar iyi öğrenirse öğrencilerinin de hayatlarında bir o kadar iyi ve farklı bir etki yaratabileceğine inanmaktadır. Hatta bu noktada 4EÖ5 bir etki silsilesinden bahsederek, kendi öğretmenlik meşalesini ya da iyi öğretmenlik bayrağını devredebileceği yere kadar bu düşüncesini genişletmektedir. Bir başka ifadeyle, eğer kendi öğrencileri arasından bir öğretmen çıkarsa, yetiştirdiği öğrencilerinin de kendi öğrencilerine faydası dokunabilmesi yönüyle, daha ileriye gören bir çerçevede ve gelenekselleştirilebilecek bir önemde, matematiksel ispatın bu kimlikteki değerini ele almaktadır:

4EÖ5: *O süreci bilmek [ispatlama sürecini] yani o süreci öğrenmek, sonuçta ben de ileride bir, şu an bir öğretmen adayım. İleride bir öğretmen olacağım... Benim ileride öğrencilere aktarabilmemi sağlar. Bu öğrencilere aktarabilmek dediğim gibi yani biz aslında bir öğretmen olacağız. İlerideki birçok mühendis olsun, öğretmen olsun, avukat olsun, biz hepsinin temelini aslında biz oluşturacağız. Buradaki temeli, biz ispat sürecini kendimiz iyi öğrendiğimiz durumda öğrencilere güzel bir şekilde aktarabilirsek hepsinin hayatında da aslında farklı bir etki bırakabiliriz. Bunları dediğim gibi bir tane, her öğrenciye katacağımız farklı bir şey onların hayatında çok farklı yönlere çok farklı şeylere sebep olabilir. Bundan dolayı bu ispat sürecini bir öğretmen adayı çok iyi öğrenmeli ki aynı şekilde ileride kendi öğrencilerine aktarabilsin. Çünkü belki de o [öğrenci de] kendi öğrencileriyle başka, ileride kendi başka hayatında kullanacak...*

4EÖ6 öğretmenlik mesleğinde kendisini ilerletmek istediğinden bahsetmiş, fark atan bir öğretmen olma gayesine değinmiştir. Bu anlamda, kendisi de dahil herhangi bir öğretmenin öğrencilerinde fark yaratabilmesi için işleminden daha öteye gitmenin, öğrenciye “kural bu” demekten ziyade o kuralın bağlantılı olduğu matematiksel içeriğe hâkim olmanın gereğinden bahsetmiştir. Dolayısıyla 4EÖ6 için bir öğretmenin matematiksel ispatla ilgili asli görevi olarak nitelendirilebilecek durum, öğrenciye ispatla ilgili mantıksal temelleri atmak, bu sürecin nasıl işlediğini göstermek, ispatlama mekanizmasının nasıl hareket ettiğini onlara açıklayarak anlatmaktır.

Matematik öğretmenliği programı öğrencilerinden 4EÖ7 de fark atan bir öğretmen olma durumuna değinmiştir. Öğrenciye konuyu sadece verip geçen bir öğretmense, öğrencileri monotonluktan ya da sıradanlıktan çıkarmak isteyerek farkındalık yaratma çabasında olan bir öğretmen olarak var olma düşüncelerini ifade ettiği dikkat çekmiştir:

4EÖ7: *...Benim, eğer ispatını biliyorsam ve bunun nasıl gerçekleştiğini görebiliyorsam ve bu kendi deneyimimi öğrencilerime veya işte öğrenen kim ise bunu göstermek, buna [doğru] bir yol sunmak, onun da [öğrencinin] sonuca varma çabasını olumlu etkileyecektir diye düşünüyorum. Ve bunun [böyle yapmanın] biraz daha monotonluktan çıkartıp farklılık oluşturacağını düşünüyorum. Çünkü öğrenciler genel olarak bazı kalıplara sıkıştırılıyor gibi, bazı işlemleri bazı konuları öğrenirken. Hani buradaki, belki de kendi kabına sığmayan öğrenciler olacak ve sonuçlara farklı şekillerde ulaşma imkânı sağlanacaktır. Diğer türlü ben sadece verip geçmiş olacağım. Benim mesleki hayatımda [ispatın] hem bir farkındalık yaratma açısından önemli olacağını düşünüyorum hem de öğrencilerin bu konuya karşı ilgi ve öğrenme isteklerinin arttırabileceğini düşünüyorum...*

Çalışmadaki matematik öğretmenliği programındaki öğrenciler ile matematik eğitimcileri arasında, bu gruplar tarafından mesleki kariyer anlamında vurgulanan öğretmen kimlik noktasında belirgin bir farklılık olduğu görülmektedir. Daha açık bir ifadeyle, matematik öğretmenliği programındaki öğrenciler ile matematik eğitimcileri mesleki kariyer açısından öğretmen kimlikte ortaklaşıyor gibi görünse de bu iki grup, matematiksel ispatın öğretmenlik mesleğine etkisi anlamında birbirinden çoğunlukla ayrılmaktadır.

Çalışmadaki matematik eğitimcilerinin 6'sı, öğretmenlik anlamında matematiksel ispata olumlu-olumsuz bakma ya da yararlı-yararsız görme durumlarına değinmeleri yönüyle ikiye ayrılmaktadır. Her iki durumda da eşit olmak üzere 3'er matematik eğitimcisinin görüşü yer bulunmaktadır. Bunun genel manada yorumu, matematik eğitimcilerinin bu iki durumdan herhangi birinde daha ağırlıklı olarak yer alan görüşünün matematiksel ispat açısından temsil edilememesidir. Diğer taraftan, matematik eğitimcilerinin bu çalışmada yer alan kendi öğrencileri, matematiksel ispatın iyi öğretmen olma çabalarındaki yeri ve potansiyel gücünün yadsınamaz olmasından yani mesleğe olumlu yansımalarından bahsetmeleri yönüyle, görüşleri tam olarak çerçevelenerek temsil edilebilmektedir.

4.1.6 Çarpraz Durum Analizi

Çalışmadaki matematikçilerin, matematik eğitimcilerinin, matematik programı öğrencilerinin ve matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin matematiksel ispata ilişkin algılarının genel görünümü ya da büyük resmi, çarpraz durum tablosuna aktararak Tablo 4.7 ile verilmiştir. Gruplara özgü durumlar ve detaylar önceki başlıklarda verildiğinden, daha genel bir resmi çekebilmek için matematiksel ispata ilişkin 5 algı kategorisi Tablo 4.7'de birincil kategorileri açısından özet bir şekilde sunulmuştur.

Tablo 4.7. Çapraz durum tablosu

KATEGORİ	ALT KATEGORİLER	1MA (9)	2EA (7)	3MÖ (9)	4MÖ (9)
Tarifler	Matematiksel dünya tabanlı tarifler	6	3	-	1
	İkna tabanlı tarifler	1	3	2	2
	Araç odaklı (araçsal) tarifler	1	1	6	3
	Süreç odaklı tarifler	-	3	1	5
	Öğretim odaklı (sınıfa uyarlanan) tarifler	-	6	-	-
	Genel tarifler	9	7	-	-
	Diğer	-	-	1	1
		1MA (9)	2EA (7)	3MÖ (9)	4MÖ (9)
Özellikler	Sosyal boyut	7	5	5	6
	Bağlamsal boyut	1	5	3	3
	Doğruluk değeri boyutu	8	6	4	5
	Mantıksal boyut	9	7	8	9
	Dilsel boyut	8	5	6	5
	Soyut-aşkınlık boyutu	5	6	1	3
		1MA (9)	2EA (7)	3MÖ (9)	4MÖ (9)
Yollar	İspatlayıcının yeterliliğine göre değerlendirenler	-	1	2	4
	Dışsal referansa yönelenler	-	2	4	3
	Soruyla karşılaşlaştığı durum-ortam özelinde bahsedilenler	-	-	4	1
	Genel problem çözmeden bahsedilenler	-	4	-	6
	İspat yönteminden bahsedilenler	-	-	2	3
	İspat yöntemlerinin ötesinde ileri taşıyanlar	9	3	-	-
	Ne ileri taşıyan ne de sadece yöntemle sınırlı kalanlar	-	-	3	1
		1MA (9)	2EA (7)	3MÖ (9)	4MÖ (9)
Gerilim	Alışılmayan (farklı gelen) tarz	3	1	6	2
	Lise matematiği ile üniversite matematiği arasındaki fark	-	-	2	-
	Problem çözmeye karşı ispatlama	2	-	3	2
	İşlemsel karşı kavramsal	6	3	-	-
	Doğrudan kabul etmeye karşı sorgulama	5	2	5	3
	Sınav sisteminin getirdiği alışkanlıklar	3	1	-	-
	Yükün üniversiteye bırakılmasının yarattığı gerilim	6	4	-	1
	Boşluk hissi	-	-	-	5
	Öğrenci-öğretmen arasındaki anlaşmazlık	4	-	4	1
	Diğer	1	1	-	-
		1MA (9)	2EA (7)	3MÖ (9)	4MÖ (9)
Önem	Matematikte temel pratik olarak ispat	9	6	9	4
	Beceri olarak ispat	9	7	9	9
	Aktarılabılır/transfer edilebilir bir yapı olarak ispat	9	3	3	2
	Kimlik olarak ispat /önceliğe göre önem	9	6	9	9
1MA : Matematikçiler 2EA : Matematik Eğitimcileri 3MÖ : Matematik Programı Öğrencileri 4EÖ : Matematik Öğretmenliği Programı Öğrencileri Not: Parantez içindeki sayılar, o grubun toplam katılımcı sayısını göstermektedir. Her bir hücredeki sayılar ise o gruptaki kaç katılımcının ilgili kategoride bir görüşünün olduğunu temsil etmektedir.					

4.2 Araştırmanın İkinci Alt Problemine İlişkin Bulgular

Araştırmanın ikinci alt problemi, katılımcıların matematiksel ispata ilişkin pratikleri ile ilgilidir. Bu kısımda katılımcıların bir etkinlik etrafında matematiksel bir ifadeyi ispatlama girişimlerine yönelik bulguları sunulacaktır. Aşağıda her bir grup bazında matematiksel ispat pratiklerine ilişkin bulgular sunulurken, ilk olarak

ilgili grubun genel yaklaşımları, ispatlama girişimleri ya da araştırma sürecinde izlediği yollardan özetle bahsedilmiştir. Daha sonra etkinlik temelli görüşmelerinden yansıtılan doğrudan alıntılarına ve yazılı çalışmalarını gösteren etkinlik kağıtlarındaki ilgili kısımların görüntülerine yer verilmiştir.

4.2.1 Matematikçilerin Matematiksel İspat Pratikleri

Araştırmadaki matematikçiler ağırlıklı olarak Melis'in iddiasını araştırma sürecinde formal bir yoldan ilerlemiştir. Formel yoldan ilerleyenler açısından matematikçiler iki farklı hareket noktasıyla iddiayı araştırmaya yönelmiştir: ya tamamen formel içinde kalan ya da doğala gidip gelen.

İster doğal yolla inşa edilerek daha sonra formele dönüştürülmüş, isterse tamamen formel içinde kalarak olsun, matematikçiler genel olarak Melis'in iddiasını araştırma sürecinde bazen sözlü olarak bazen de yazılı ifadelerinde aklının bir köşesinde tuttuğu önemli detaylardan bahsetmiştir. Bunlar; aradığım şey, göstermek istediğim şey, denklik kurma, denk ifadelere indirgeme ya da iki yönlü gerektirmelere dönüştürme, görebileceği alana çekme, kendisinden istenenin değişik formunu yazma, aim, (?), 'quantifiers', her, bazı ifadelerini vurgulama, " $\forall$, $\exists$ " sembollerinin/niceleyicilerin kullanımı ve iddiada arayışı; hatta iddiaya temas edecek yaklaşımı değiştirmesi farkındalığı, belli bir ispat çerçevesi ile işletme ihtiyacı duyması gibi incelikli olup, araştırmadaki diğer gruplardan ayrılmaktadır. Bununla birlikte etkinlikte verilen Melis'in iddiasının eksik olup olmadığı bazı matematikçilerin dikkatini çekmiştir. Bu anlamda Melis'in iddiasının çalışma kümesinin ne olduğuna göre araştırma süreçleri ya da ispatlama girişimlerinde değişebilecek mekanizmalardan bahsettikleri görülmüştür.

Araştırmadaki matematikçiler ortaya atılmış bir iddia olduğu için ve bu iddianın kendilerine anlamlı gelebilmesi için sayısal örnekleri kaldıraç olarak kullanmıştır. Yani, matematikçilerin örnekleri kullanmasının bir amacı vardır. Bu amaçlara ulaşabilmede örnekleri bir basamak olarak görmektedir. Bu nedenle matematikçilerin "kesinlikle ispat yapmıyorum" şeklinde eşlik eden cümlelerine rastlanmıştır. Bu açıdan örnekle ispat olmaz anlayışına açık bir göndermede bulunarak fakat örnekleri kendileri için iddianın anlaşılmasında bir taban hazırlama, his ve sezgi geliştirme, ön deneme yapma, iddianın doğru olabileceğine dair önce bir ikna olma, asıl ispata geçişte bir basamak, akıl yürütmede işe yararlık, sayılarla mantığa oturtma ve doğrulama testi gibi rollerle işlevselleştirmektedir.

Matematikçilerin 7'si Melis'in iddiasını araştırırken formal bir yoldan düşünerek ilerlemiştir. Bu matematikçilerden sadece 1MA1 tamamen formal içinde kalan bir yaklaşımda iddiayı araştırabileceği yollara yönelmiştir. 1MA1'in ilk girişimi iddiayı doğal sayılar gibi reel sayıların bir alt kümesinde test etmesiyle ilgilidir. Bir başka ifadeyle, iddiayı anlaşılabilir farklı biçimlere alabilmeyle ispatlama girişiminde bulunmuştur. İkinci girişimi, sadece eşitsizlik üzerinden giderek doğrudan ispatlama yöntemiyle işletilmiş niceleyici bir mantıkta ifade edilmiş bir tarzdadır. Bu yaklaşımları Şekil 4.1'de soldaki ilk girişimi, sağdaki ikinci girişimi olarak görülmektedir.

Şekil 4.1, iki ayrı matematiksel ispat girişimini göstermektedir. Sol tarafta, $x \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ için $n + \frac{1}{n} \geq 2$ iddiasının kanıtı, sağ tarafta ise $x + \frac{1}{x} \geq 2$ iddiasının kanıtı yer almaktadır.

Sol Taraf (Doğal Sayılar İçin):

- $x \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- $n + \frac{1}{n} \geq 2 \quad (n \in \mathbb{N})$
- ① $n=1$, $1 + \frac{1}{1} \geq 2$ ✓
- ② $n=2 \in \mathbb{N}$, $2 + \frac{1}{2} \geq 2$ doğru olan.
- ③ $n=2+1$ için $(2+1) + \frac{1}{2+1} \geq 2$
- ②'den yola çıkarak n doğal sayılar için $n + \frac{1}{n} \geq 2$ olduğunu göster.
- $\Rightarrow \boxed{x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \forall x \in \mathbb{N}}$
- $k+1 + \frac{1}{k+1} \geq 2$ $\boxed{\frac{1}{2} > \frac{1}{k+1}}$
- $k + \frac{1}{k+1} \geq 1$ $2 > 1 \Rightarrow 2 + \frac{1}{k+1} > 1$
- $2+1 + \frac{1}{2+1} \geq 2$

Sağ Taraf (Reel Sayılar İçin):

- $x + \frac{1}{x} \geq 2$
- $\frac{x^2 + 1}{x} \geq 2$
- $x^2 + 1 \geq 2x$
- $x^2 + 1 - 2x \geq 2x - 2x$
- $x^2 + 1 - 2x \geq 0$
- $(x-1)^2 \geq 0$
- $x \in (0, \infty) \Rightarrow x-1 \in (-1, \infty)$
- $\Rightarrow (x-1)^2 \in [0, \infty)$
- $(x-1)^2 \geq 0$
- $\boxed{x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \forall x \in (0, \infty)}$

Şekil 4.1. 1MA1'in Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri

İlk manevrası, iddianın ne ifade ettiğini sesli olarak okurken pozitif reel sayılar üzerinden diye belirtmiştir. Hiç örnek kullanmamıştır. Bir yöntemle ilerlemiş ya da bildikleri üzerinden sonuca ulaşmıştır. Araştırmak istediğinin ne olduğunun her zaman farkında olmuştur. İddiayı ispatlayabileceği bazı yöntemleri düşünmüştür. Bu yöntemini belirlerken iddianın doğru mu yanlış mı olduğuna dair bir yaklaşımla yöntemini seçmek istemiştir. Başlangıç aşaması olarak bu tip iddialar için doğal sayıları göz önünde bulundurmuştur. Daha sonra reel sayılar ya da bunun bir alt kümesinde kısıtlamayla düşüncesini harekete geçirmiştir.

Doğruluğunu en azından bir alt kümede söyleyebilmek/teyit etmek için doğal sayılarla, özel hali için araştırma gereksinimi duymuştur. Bunu araştırmasının birkaç yerinde kendine bir zemin/başlangıç oluşturabilmesi açısından özellikle

vurgulamıştır. Tümevarımla doğal sayılar üzerinden iddiayı araştırmaya başlamıştır. Bunu yaparken küme gösterimlerine, niceleyicilere ve araştırmak istediğini gösteren “?” sembolüne her defasında başvurmuştur. İspatını tamamladı, iddianın doğru olduğunu görmüştür:

R (Araştırmacı): ..ilk etapta bu tümevarımla ya da daha alt küme üzerinden çalışmayı nasıl düşündünüz? Ya da o kararı nasıl verdiniz? Hemen o durumu incelemeye gitmeye nasıl karar verdiniz?

1MA1: Yani şöyle, şöyle karar vermedim aslında. Ama bir iddia varsa o iddiayı anlayabilmek için öncelikle eski bilgileri birazcık kullanmaya çalışmakta fayda vardır. Olayı anlayabilmek için. Bu benzerlik. Bu da birazcık temel bilgilerin olması ile karşımıza çıkan bir yapı. Dolayısıyla böyle bir iddiayı gördüğümüz zaman “bu iddianın özel halleri ile ilgili bir bilgiye sahip miyiz?” durumu hemen devreye girer ve özel hallerinde eğer bu sağlanıyorsa ondan sonra girişimlere başlamakta fayda vardır. Orada birazcık daha, ee teorem demiş olduğumuz şey zaten oldukça mantıklı ve kolay bir şeydir. Bu ne demek? O teorem, bir yerde bir teorem görüyorsanız bu problemle sizden daha önce birisi karşılaşmış ve sizin için o problemi çözmüş demektir. Dolayısıyla teorem gördüğüm zaman ben son derece mutlu oluyorum. Benim yerime bir başkası yapmış zaten bunu. Dolayısıyla bana yardımcı olmuş. O yüzden ki o eskiden veya daha öncesinden yapılmış olan çalışmalara hâkim olmak işimizi oldukça kolaylaştırır ve yeni bakış açıları oluşturmak için yön verir bize. Öyle söyleyeyim.

Asıl amacının bu olmadığını ifade etmiştir. Pozitif reel sayılar için de doğru olduğunu söyleyebilmek için eşitsizlikler üzerine bir ispatla ilgili bir düşünce oluşturma ihtiyacı hissetmiştir (Şekil 4.1, ikinci girişi). Var olan eşitsizliklerle (örn. Bernoulli) ilerleyemeyeceğini, yapısının kuvvetli olmamasından dolayı vazgeçmiştir. Klasik anlamda denklem çözümü ile hareket etmeye başlamıştır. Bunu dikkatli bir şekilde yapmıştır. Cebirsel yapıların kendine izin verdiği, tanıdığı haklar doğrultusunda, araştırmak istediği ifadeyi farklı bir forma sokmaya çalışmıştır. Her seferinde bir sonrakine nasıl geçtiğini açıklamış ve “karşıya attım” gibi söylemlerden kaçınmanın önemini vurgulamıştır:

1MA1: ...Dolayısıyla buradaki ifadeyi şöyle de yazmamız mümkün. $x > 0$ olduğu için $x + \frac{1}{x}$ ifadesinin yani $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ifadesinin değişik bir formunu yazabiliriz. Çünkü bu formula ilgili şu anda aklımıza gelen veya bildiğimiz yapılar pek olmadı. Hatırlayamadık veya diyelim. Çünkü her şeyi de hatırlamamız mümkün değil. İspatla ilgili düşünce oluşturunuz zaten. Dolayısıyla $x > 0$ olduğu için her tarafı x ile çarparsak dolayısıyla bu ifade aslında şöyle yazılabilir. Ne olacaktır? $\frac{x^2 + 1}{x} \geq 2$ olarak karşımıza çıkacak birinci kısımda. Yine her tarafı x ile çarparsak diğer taraf ne olacak? $x^2 + 1 \geq 2x$ olarak çıkacak. Çünkü x , 0'dan büyük olduğu için her tarafı çarparsak eşitsizlikle ilgili de bir problem karşımıza çıkmaz. Buradaki

x pozitif bir reel sayı olduğu için. Burada önemli olan nokta şudur işte matematikte; yani onu alıp bu tarafa atmak gibi bir kavram, matematiksel bir işlem değildir. Öyle bir matematiksel işlem yok. Dolayısıyla her tarafa $(-2x)$ ekleme durumu söz konusu. Çünkü reel sayılarda işlem yaparken toplama çıkarma çarpma bölme üzerine inşa edilmiş olan bir cebirsel yapısı vardır [reel sayıların]. Yani bir eşitliğin onu bu tarafa atmak veya diğerini diğer tarafa atmak gibi matematiksel işlemler yoktur. Bu söylemi kullanmamakta fayda var. O yüzden her taraftan $2x$ ifadesini çıkarırsak. Ne olacaktır bu durumda? $x^2 + 1 - 2x \geq 2x - 2x$. Dolayısıyla buradaki ifade de cebirsel bir yapıdan dolayı x pozitif bir reel sayı. Pozitif bir reel sayı olur. $2x$ de pozitif bir reel sayı olacak. Çünkü reel sayılar kümesi çarpma işlemine göre kapalı bir yapıya sahipti. Dolayısıyla buradaki ifadenin sonucu $2x - 2x = 0$ olacağı için dolayısıyla şuna karşılık gelecek. $x^2 + 1 - 2x \geq 0$. Yani bizim aradığımız yukarıdaki başlangıçta sorulmuş olan ifade $[x + \frac{1}{x} \geq 2]$ aşağıdaki gibi bir $[x^2 + 1 - 2x \geq 0]$ denkleme karşılık geldi. Bunun $[x^2 + 1 - 2x \geq 0]$ gösteriyor] doğru olup olmadığını (“?” koyuyor) soruyor bize. Şimdi bunun özel halinin de zaten doğal sayılar kümesinin doğru olduğunu görmüştük. E şimdi burada yine klasik anlamda bildiğim bir yapıya benzerlik çıktı. Bir öncekinde benzerliğe veya onunla ilgili bir teoremi veya bir eşitsizliği hatırlayamamıştık. Vardır muhtemelen ama her şeyi de hatırlamak mümkün değil. O kadar da iddialı olmanın gereği yok. Her şeyi bilemeyiz çünkü. Araştırarak bunların sonucuna ulaşacağız. E buradaki ifade $[x^2 + 1 - 2x \geq 0]$ dikkat ederseniz yani ortaokul düzeyindeyken de bunu biliriz artık. Buradaki bir ifadenin kare açılımı olarak karşımıza çıkar. Dolayısıyla neyin kare açılımı olacaktır bu? $(x-1)^2$. Dolayısıyla bize sorulan soru aslında şunu soruyor: “ $(x-1)^2 \geq 0$ mi?” diye soruyor. E şimdi biz de biliyoruz ki yine reel sayılardaki, x bir reel sayı. Ondan 1 reel sayısını çıkarırsak, reel sayılardaki çıkarma işleminin kapalılığından dolayı yine bir reel sayı olacak bu. E reel sayının karesi yani kendisi ile çarpılması yine bir reel sayı olacak. Çünkü çarpmaya göre de zaten kapalılık özelliğini sağlıyor. E dolayısıyla “bir reel sayının karesi sıfırdan büyük eşit midir?” Evet. Neden? Çünkü bir sayıyı kendisiyle çarptığımız zaman ne olacaktır? Pozitifse pozitif olacak. Negatifse yine pozitif olacak. Dolayısıyla her hâlükârda bu ya 0’dır. Ya da 0’dan büyük eşittir. Bu ne demek? Bu şu demek; $x \in (0, +\infty) \Rightarrow x-1$, nerede olacak bu durumda, $x-1 \in (-1, +\infty)$ olacak. Bu durumda; $\Rightarrow (x-1)^2$ aldığımız zaman da, bu aralıktan almış olduğumuz bir ifadenin karesini aldığımız zaman da bu kimin elemanı olacak? $(x-1)^2 \in [0, +\infty)$ olacak. Dolayısıyla, $(x-1)^2 \geq 0$ her zaman oldu. Dolayısıyla bunu ispatladık. E bunu ispatlamak demek neyi söylüyor bize? $x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \forall x \in (0, +\infty)$ için doğrudur.

İlerleyen ifadelerinde “tersinin olmadığını” da ispatlamanın bir yol olabileceğini belirtmiştir. Bunun sıkıntılı yönlerinden bahsetmiştir:

1MA1: ... ilk etapta işte $x > 0$ olması ve böyle bir eşitsizlikle ilgili bir iddiada bulunuyor olması doğal sayılar kümesini de içerdiği için o tarafa bir yönelme oldu ilk etapta bende. Fakat bunu farklı şekillerde de yapmak mümkün. Ya oradan sonuç çıkar mı? Bilemiyorum. Çünkü şöyle bir şey vardır. Bir yöntemle veya bir teoremi kullanarak bir şeyi mantıklı ve kolay bir şekilde ispatlıyor olmamız diğer yöntemlerle de yapılabileceği veya kolaylıkla yapılabileceği

anlamına gelmiyor. Orada belki başka problemler karşımıza çıkacak. Onun çözümü için başka başka metodlar veya yöntemler geliştirmemiz gerektiği durum ortaya çıkacak. Mesela şöyle bir şey de yapılabilirdi burada; bu $x + \frac{1}{x}$ 'in bütün pozitif reel sayılar için 2'den büyük eşit olduğunu ispatlamak istiyoruz biz. E bunun eğer küçüktür 2 olmadığını da ne yapabiliriz? İspatlayabiliriz. Yani bir nevi bir şeyin olduğunu ispatlamak yerine onun tersinin olmadığını da ispatlamak mümkün. Ha! Bir şeyin olmadığını ispatlamak her zaman kolay değildir. Her zaman kolay değildir. Çünkü olmadığını ispatlamak için son derece fazla sayıda veriyi ne yapmanız lazım? Değerlendirmeye almanız lazım. Yani bir nevi siz ne yapıyorsunuz böyle bir durumda? Bir şeyin olmadığını araştırıyorsunuz. Olmadığını araştırmak yani bir samanlığı düşünün. Samanlığın içerisinde bir toplu iğne arıyorsunuz ama toplu iğneyi ne için arıyorsunuz? Bulamamak için arıyorsunuz. Bulamamak için aramak kolay bir iş değildir. Bulmak için aramak, nereye bakacağını bilmek veya şunu yapmak bunu yapmak veyahut onu arıyorsun bulduğun zaman işin bitmiştir. Ama bulamamak için aradığın zaman işin hiçbir zaman bitmez. Bakabileceğin yer bitmez. Çünkü baktın bulamadın. Öbürüne bakacaksın. Orada bulamadın! Bulamadın! Bulamadın! Bulamadın! Bunun sonu yok! Dolayısıyla o teori birazcık daha farklı bir şekilde işler. Ya o da bir yöntem, sonuç itibari ile.

Tüm argümanlarında formal dili ağırlıklı olarak kullanmıştır. İfadelerini tamamlarken çalışmasını ispat olarak görmesine izin veren yapılardan bahsetmiştir:

1MA1: Hah! şimdi bunların ispat olduğunu nereden düşünüyoruz veya nereden karar veriyoruz? Kullandığımız yapılardan. Mesela burada bir ön çalışma olarak tümevarım demiş olduğumuz ilkeyi veya yapıyı kullandık. Şimdi tümevarım demiş olduğumuz yapı bir teorem ve ispatlanmış olan bir teorem. E tutarlılıktan kastettiğim şey bu zaten. Sizin yaptığınız bir şey daha önce ispatlanmış olan bir yapıya dayanıyor ise o zaman doğrudur. Zaten o ispatlandığı için o kabul gören bir ispat artık. Dolayısıyla yaptığımız bir şeyin bir dayanağının olması lazım. Tutarlı olması lazım. Daha öncekilerle tutarlı olması lazım. Veya yeni bir şey yapıyorsanız, yeni bir ispat yapıyorsanız o ispatı oluşturabilecek mekanizmaları, tanımları, teoremleri onun öncesinde vermiş olmanız ve onları tutarlı bir matematiksel bir modelle ispatlamış olmanız lazım. Dolayısıyla ispatın içerisinde kullandığınız yapıların ispatlanmış olması lazım daha önceden.

R: Peki hocam teşekkür ederim. Bu etkinlikteki Melis adlı kişinin o zaman iddiası hakkında ne düşünüyorsunuz?

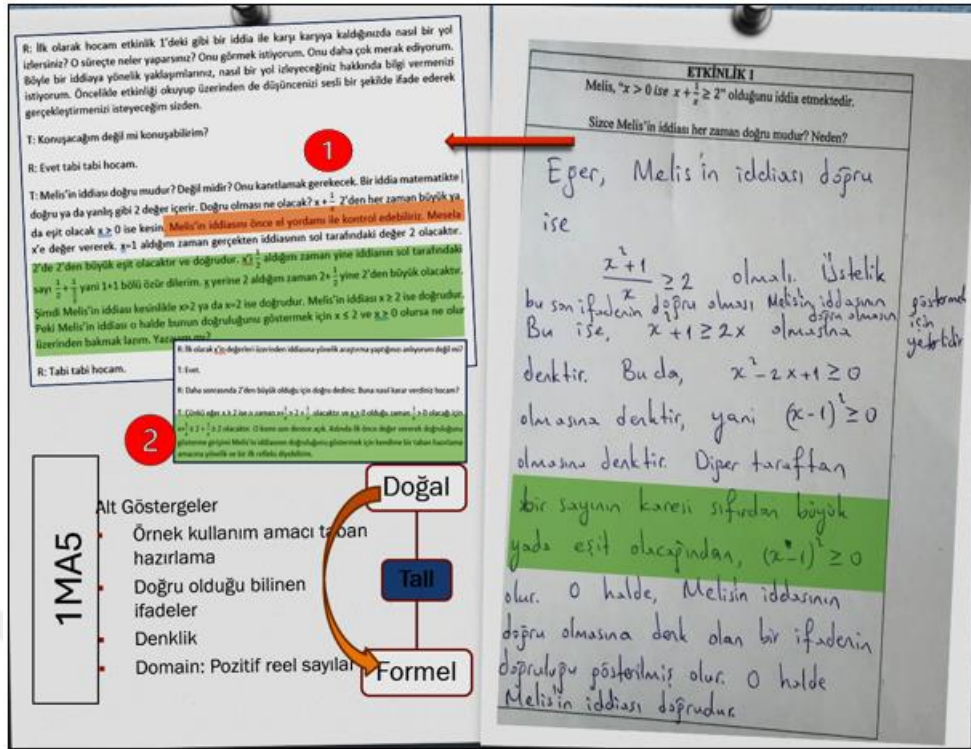
1MA1: Doğru.

R: Her zaman doğru olup olmadığını ya da neden doğru olduğunu hani düşünürsek hocam bunlar üzerinden ne söylersiniz?

1MA1: Yani tanımlamış olduğu nokta kümesi üzerinden, pozitif reel sayılar üzerinden hareket ettiğimiz zaman tamamen doğru olduğunu rahatlıkla söyleyebiliriz bunu. Çünkü biz “bütün” elemanları göz önünde bulundurarak zaten bu çalışmayı yaptık.

Formel yolla ilerleyen araştırmadaki diğer 6 matematikçi, doğal düşünen bir birey olarak ilk etapta iddianın doğru olup olamayacağına dair bir ilk anlayış geliştirmek için belli örnekler kullanmış, bu durumda ne olup bittiğine dair bir düşünme eksenini geliştirdikten sonra formel yolla araştırma sürecini tamamlamıştır. Bu bakımdan ispatlama girişimleri olarak doğal yoldan inşa edilmiş nihai olarak formele dönüştürülmüş bir çerçevededir. Bu şekilde hareket eden matematikçilerden biri 1MA5'tir. Bu matematikçinin, Şekil 4.2'de sol blokta görüldüğü üzere, etkinlikteki iddiayı araştırırken düşünsel süreci aktiftir, etkinlik kağıdına bu düşünceleri yazılı olarak henüz yansıtmış değildir. Düşünme deneylerinde bulunarak matematikte bir iddia varsa “doğru” ya da “yanlış” olmak üzere iki değer alabileceğini, eğer Melis'in iddiası doğru ise ki doğru olmasının ne anlama geldiğini eşitsizliğin gerçekleşmesine denk olmasıyla anlamlandırmaktadır. Bu girişim 1MA5'in iddiayı ispatlayabileyeceği denk ifadelerle dönüştürme çabasının ilk hamlesidir. Fakat bundan önce iddianın doğru olup olmadığını anlamak için 1 değerini verir (doğruluk elde eder, Şekil 4.2'de 1 numaralı bölüm), x 'in 2 ve üzeri değerleri alması durumunda kesinlikle doğru olacağına (sözel ifadelerinde kurmuş olduğu eşitsizlik üzerinden) kanaat getirir. Daha sonra Şekil 4.2'de sağ blokta etkinlik kağıdı üzerinde yaptığı çalışmalardan hem sözel hem de yazılı olarak bahsetmektedir:

1MA5: Olaya şöyle bakarız. Eğer Melis'in iddiası doğru ise $\frac{x^2+1}{x} \geq 2$ olmalı. Bu ise $x^2+1 \geq 2x$ olmasına denktir. Bu da $x^2 - 2x + 1 \geq 0$ olmasına denktir. Yani $(x-1)^2 \geq 0$ olmasına denktir. Diğer taraftan bir sayının karesi sıfırdan büyük ya da eşit olacağından $(x-1)^2 \geq 0$ olur. O halde Melis'in iddiasının doğru olmasına denk olan bir ifadenin doğruluğu gösterilmiş olur. O halde Melis'in iddiası doğrudur. Üstelik bu son ifadenin doğru olması Melis'in iddiasının doğru olmasını göstermek için yeterlidir.



Şekil 4.2. 1MA5'in Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri (birinci girişim)

1MA5 tüm çalışmasını tamamladıktan sonra araştırmacı ile arasında geçen diyalogta örneklerle denemesinin niyetini açıklamaktadır. Bu denemelerinin iddianın doğruluğunu göstermek için taban hazırlama niteliğindedir (Şekil 4.2'de 2 numaralı bölüm). Sağ blokta yaptığı araştırmasının detaylarından şu şekilde bahsetmiştir:

R: Son olarak da Melis'in iddiasını araştırırken denk olan ifadelerden yararlandığınızı görmekteyim. Melis'in iddiasına denk olan ifadeleri burada nasıl görebilmekteyiz hocam?

1MA5: Biraz sezgisel, biraz da bilgi birikimime dayalı olarak bakıyorum. Şöyle soruya bir baktığım zaman ve ufak bir cebirsel işlem yaptığımda $x + \frac{1}{x}$, o ne olacaktır? $\frac{x^2+1}{x}$ olacaktır. $x > 0$ olması avantajını kullanarak soruyu "[acaba] $x^2 - 2x + 1 \geq 0$ midir?"e indirgemiş oluyorum ve o ifade de $(x-1)^2$ 'in ≥ 0 olmasını gördüm. Dolayısıyla o son görmüş olduğum ifade, çok net bir ifade idi doğruluğu. Çünkü bir sayının karesinin sıfırdan büyük eşit olması çok net bir doğruluk. Soruyu oraya indirgemiş oldum.

...

R: Peki hocam. Yazdıklarınız çerçevesinde düşündüğünüzde ne yaptığınızı kısaca yine ifade edebilir misiniz? Daha iyi anlayabilmek için sadece bunu soruyorum.

1MA5: Anlıyorum. Yaptığım şey şu. Melis'in iddiasının doğruluğunu bir başka denk ifadeye indirgemeye çalışıyorum. O indirgemeye çalıştığım iddia da bu soru özelinde bir sayının karesinin sıfırdan büyük ya da eşit olduğuna indirgemiş oluyorum. Daha bu özelde söyleyecek olursam Melis'in iddiasının doğruluğunun şu iddiaya denk olduğunu söylüyorum. Verilen bir x sayısı için $x-1$ sayısının karesinin sıfırdan büyük eşit ifadesini indirgemiş oluyorum. $(x-1)^2 \geq 0$ olduğuna göre her $x > 0$ için hatta her x için, Melis'in iddiası da doğru olmuş oluyor.

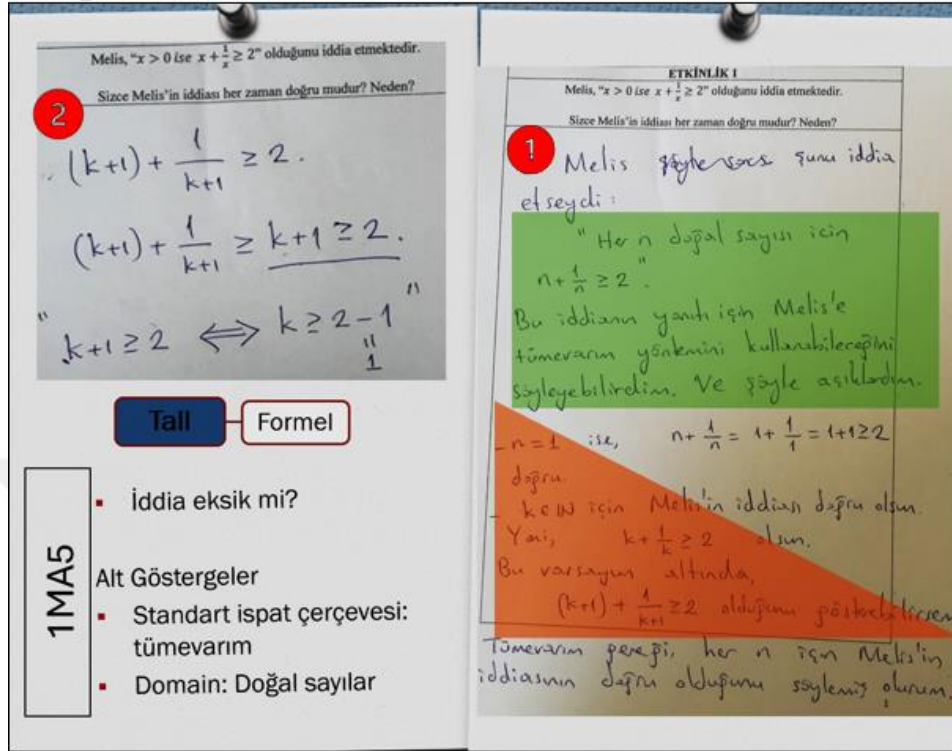
İlerleyen ifadelerinde bu ilk girişimli araştırmasını ispat olarak görmesine izin veren yapılardan bahsederken daha net bir şekilde şöyle bahsetmiştir:

1MA5: Şimdi kanıt evet eğer şöyle yapsaydım. Mesela x 'e 1 verdiğim zaman o doğru. x 'e 2 verdiğim zaman doğru. x 'e 0,5 verdiğim zaman doğru. Bunları tek tek el yordamıyla yaptığım zaman hep doğru çıkıyor. Fakat ben burada x 'in üzerine herhangi bir kısıtlama koymadığım için, sadece kısıtlama Melis'in kendi kısıtlaması. $x > 0$ kesin büyük [demesi]. O kısıtlamadan kaçmadan her x için $x + \frac{1}{x} \geq 2$ olduğunu gösteriyorum. Bu kanıt. Bir kuşkuyla düşürmeyecek şekilde bir kanıt.

Genel olarak birinci girişiminde doğal izler kendisini sayısal örnekle iddiayı anlama ve sezgisel (hissetme) bir yaklaşımla göstermektedir. Formel anlamdaki izler, denk ifadelerle dönüştürmeyi adım adım hep bir önceki söylemini diğerine denk görerek ve kenetli bir şekilde ilerleterek yapmaktadır. Her ne kadar etkinlik kağıdında çalışmasına yansımaya da konuşmalarında formel dili aktif bir şekilde kullanabilmektedir. Ayrıca bu etkinlikte düşüncelerini bitirmeden önce bir şey eklemek istediğini belirtmiştir. İlk girişiminde iddiayı araştırdığı kümeyi belirtmese de Şekil 4.3'teki ikinci girişimiyle kendisini gösterecek bir duruma değinmiştir. İlk girişimini pozitif reel sayılarda yaptığının da sinyalini vermiştir. İkinci girişiminden önce iddianın eksik olup olmadığını merak etmiştir. Pozitif reel sayılar yerine doğal sayılar üzerinden ikinci bir ispatlama girişimi tümevarım yöntemiyle şu şekildedir (Şekil 4.3, sırasıyla 1 ve 2 numaralı bölümler):

1MA5: Mesela Melis $x > 0$ olduğu zaman $x + \frac{1}{x} \geq 2$ yerine Melis şunu da sorabilirdi: Her doğal sayı için ona n diyelim. $n + \frac{1}{n} \geq 2$ olduğunu iddia ediyor. Eğer Melis soruyu o şekilde sormuş olsaydı ben Melis için farklı bir yöntem de söyleyebilirdim. Kendi bilgi birikimime bağlı olarak. Bir şey daha söylemek istiyorum. Acaba sorunun ifadesi eksik mi? Değil mi? Mesela $x > 0$ ise dendiği zaman ben buradaki x 'in otomatikman bir gerçel sayı olduğunu varsayıyorum. Ama bir gerçel sayı olmaya da bilir. Sadece onu varsayıyorum. Çünkü Melis'i tanyorum. Melis'in bildiği kavram çerçevesinin reel sayılar olduğunu biliyorum. Dolayısıyla Melis diyor soruyu böyle sormuş. Otomatikman x 'in bir reel sayı olduğunu da

varsayıyorum. İsterseniz Melis'in bu soruyu her n doğal sayısı için $n + \frac{1}{n} \geq 2$ olduğu iddiasının doğruluğunu farklı bir şekilde gösterebilirim.

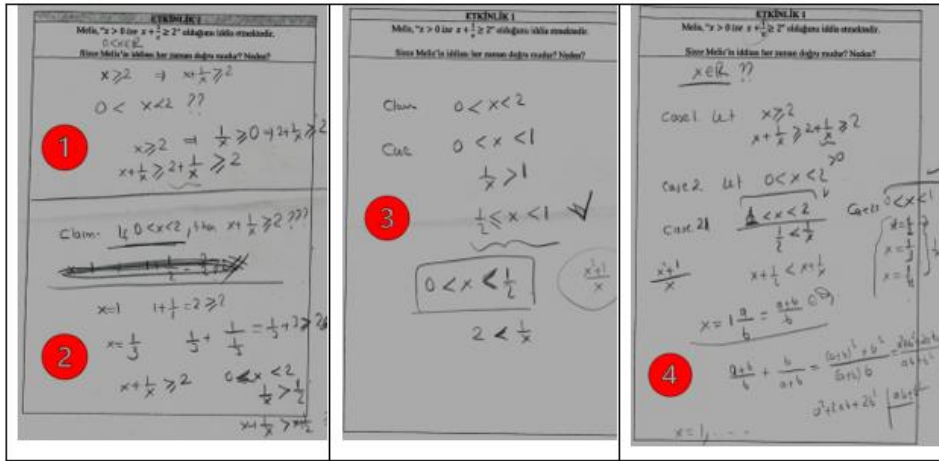


Şekil 4.3. 1MA5'in Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri (ikinci girişim)

1MA5 ikinci girişimiyle tamamen matematiksel bir ispat çerçevesi kullanarak formel yolla ispatlama girişiminde bulunmuştur. Burada tümevarım yönteminin iddiada nasıl uygulanabileceği ile ilgili açıklama (sözel dil aktif) da yapmıştır: “Her n doğal sayısı için $P(n)$ diye bir önerme var. Bu önerme $n=1$ için doğru. Yani $P(1)$ önermesi doğru ve bu önermeler zinciri, dizisi bir n için $P(n)$ önermesi doğru olduğunda, o varsayımda, bir sonraki önerme olan $P(n+1)$ için de doğru ise o zaman ben derim ki tümevarım iddiası şunu söylüyor: ‘Her n için $P(n)$ önermesi doğrudur.’”

İspatlama girişimlerinde doğal yoldan inşa edilmiş nihai olarak ise formele dönüştürülmüş bir çerçevede hareket eden matematikçilerden biri de 1MA9’dur. Bu matematikçi aynı zamanda kendisinin uzun zamandır analizle uğraşmadığını belirtse de Melis’in iddiasına yönelik ilk girişimleri onu sonuca götürmeyince yaklaşım çerçevesini değiştirerek, ikinci girişiminde “analizi yardımına çağıran cebirci” şeklinde bir bakış açısı benimseyecektir. 1MA9 iddiayı sesli bir şekilde

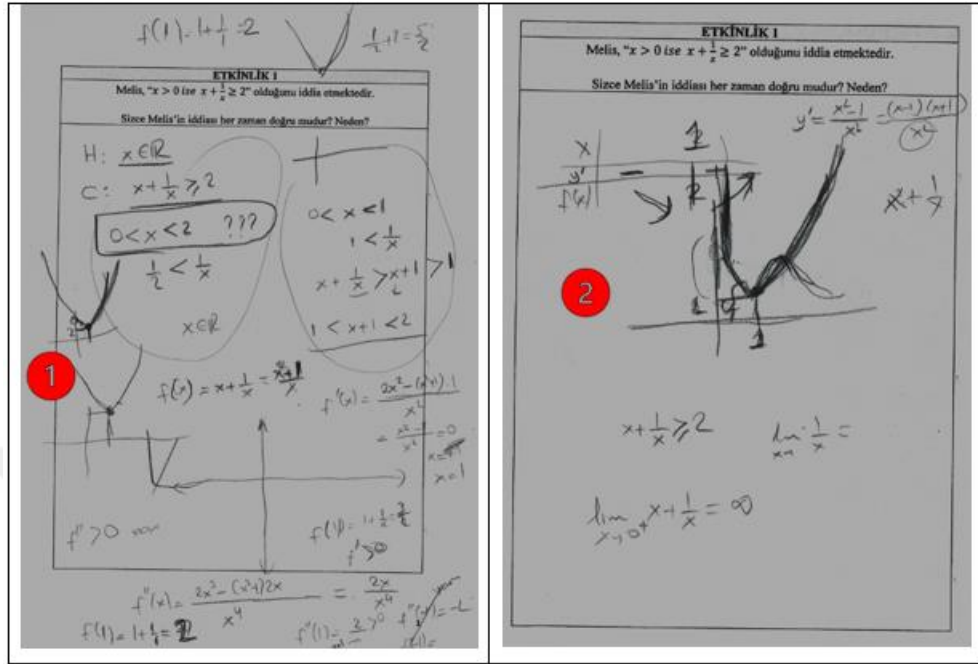
okurken “Şimdi $x > 0$ ise mesela x reel sayı mı? önce onu sorarım soru sorana. Soru eksik derim. Reel sayı mı x ?” diye ilk olarak iddianın eksikliğine değinmiştir. Daha sonra pozitif reel sayılar üzerinden olduğunu varsayarak ilk araştırmalarını yapmaya başlamıştır. Benzer şekilde 1MA5 gibi $x \geq 2$ olduğunda eşitsizliğin gerçekleştiğini belirtmiştir (Şekil 4.4, 1 numaralı bölüm). Ardından iddiayı çalışma aralığı $0 < x < 2$ olacak şekilde daraltmıştır. Bu aralık içerisinde bazı değerler alarak iddianın yine çalışıp çalışmadığını anlamak ister. Aldığı değerler özelinde iddianın çalıştığını görse de sayısal değerlerdense daha genelleştirilebilecek bir eşitsizlik yapısı aramaktadır (Şekil 4.4, 2 numaralı bölüm). Bu kısımda ifadeleri arasında sürekli olarak aradığım şey anlamına gelen eşitsizliğin yanına “???” olarak vurgu yaparak not düşmektedir. Buradaki çalışmalarının amacı $x + \frac{1}{x} \geq 2$ eşitsizliğini elde edebilecek alt eşitsizlikler geliştirmektir. Alt eşitsizliği oluşturabilme çabalarına, ilgilendiği aralıktan değerler vererek aklının bir köşesinde sürekli sağlar mı düşüncesi eşlik etmektedir. Çalışmalarına devam ederken bu kez aralığını parçalama girişiminde bulunarak “case analysis” şeklinde ilerlemeye başlamaktadır (Şekil 4.4, 3 numaralı bölüm). Burada her zaman 2’den büyük olabilecek şekilde garanti altına alamamasından rahatsızlık duymaktadır. Bu kez aralığı gittikçe küçültmeye çalışarak daha incelikli bir çalışma sürdürmektedir. Böyle olmakla birlikte yeniden farklı bir bakış açısıyla yaptıklarını sil baştan tekrar düşünmeye başlamıştır (Şekil 4.4, 4 numaralı bölüm). İlk sorusu x ’in reel mi olduğunu sorgulamaktır. Yine durumlar üzerinden bu kez farklı olarak rasyonel sayılarla daha genel biçimde yazılmış bir formatta ilerlemeye çalışırken örnekleri de göz önünde bulundurmaktadır. Örnekler üzerinde çalışırken bunları ispat olarak yaptığı şeyler değil, hem sıkıştığında örneklerle doğru ilerliyor muyum düşüncesini korumak için hem de bu taslağından sonra ispatını başka bir yere temize çekerek yapacağından bahsetmektedir. Örneklerinin bir kısmını genelleyci tarzda seçerek genel bir form yakalayabilme düşüncesi içerisinde.



Şekil 4.4. 1MA9'un Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri (ilk teşebbüsler, taslak fikirler)

Tüm buraya kadar olan çalışmaları kendisine sonuç vermeyince bu kez iddianın sol tarafındaki ifadeye bir fonksiyon gözüyle bakarak yeni bir yaklaşım içerisine girmektedir (Şekil 4.5, 1 numaralı bölüm). (Buradaki ilk hamlesinde bir detay H olarak hipotez (hypothesis), C olarak sonuç (conclusion) şeklinde elindeki veri ile ulaşılmak istenen sonuç arasında bir yol kurmasıdır. Yani bir başlangıç ve bir bitiş noktası olarak konumlandırmıştır). $f(x) = x + \frac{1}{x}$ her yerde tanımlı bir fonksiyon olduğundan bahsetmektedir. $\frac{x^2+1}{x}$ olarak bir düzenlemenin ardından $x > 0$ için tanımlı olup grafiğini oluşturmaya çalışarak bu işi grafikte çözmeye girişmektedir. Burada x 'in reel sayı olması üzerinden ekstremum noktalarını bulmaya çalışmıştır. Aralıklar üzerindeki önceki çalışmasının onu çözüme ulaştıramaması, bu sebeple Analiz'deki gibi bir yaklaşım içine girerek fonksiyon gözüyle bakmasının kendisine yol aldırabilmesinden bahsetmektedir. Burada Analiz'e girme sebebini x 'i reel sayı olarak aldığında daha geniş düşünebilmektir. Ekstemum noktaları üzerinden yorumlayarak, ikinci türevin sıfırdan büyük olduğu yerlerde yerel minimum, küçük olduğu yerlerde yerel maksimum olduğundan bahsetmiştir (ilk fikrini değiştirerek). Bu çalışması Şekil 4.5'in 1 numaralı bölümünün son satırlarına doğrudur. $x = -1$ 'deki değeri zaten hipotezi gereği alamayacağını, $x = 1$ 'de hem fonksiyon yerel minimuma sahiptir hem de fonksiyonun kendisinin bu noktada alacağı değer yani $f(1) = 2$ değerine eşit olduğunu yaptığı işlemler sonucu görmüştür. Aynı zamanda Şekil 4.5'in 2 numaralı bölümünde bunun ne anlama geldiğini hem tablo hem de fonksiyonun grafiğinin neye benzediği (artan ve azalanlıkla ilgili düşen bölgelere göre) ile ilişkilendirerek

açıklamıştır. Analiz'den kullandığı bu yapı gereği her zaman Melis'in iddiasının doğru olduğunu ifade ederek görüşlerini tamamlamıştır.



Şekil 4.5. 1MA9'un Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri (nihai girişim)

1MA9, ilk çalışmalarını taslak olarak gördüğünü ve böyle anlaşılmasını istemiş; daha çok ikinci girişiminin ana çalışması olarak değerlendirilmeye alınmasını belirtmiştir. Bu açıdan değerlendirildiğinde 1MA9'un tüm çalışmasına başından sonuna kadar bakıldığında formel bir yolla sonuçlandırılmış bir ispatlama girişiminde bulunmuştur. Çalışmasının formel yola girebilmesinde örnekler, şekil, tablo ve grafik kendisine doğal bir rehber olmuştur. Bunun yanı sıra Analiz dersinde türevin geometrik yorumuyla daha önceden ispatlanmış teoremlerin, yaptığı araştırmadaki yeri ve seçtiği fonksiyonun sürekli olması gibi detaylar tamamen formel sistem içerisinde kabul gören mekanizmaları sürece dahil ettiğini göstermiştir. Aşağıda 1MA9'un çalışmasını özetlediği bir kesit paylaşılmıştır:

R: Yani şimdi bu gördüğünüz şey ile iddiadaki şey arasındaki...

1MA9: Doğru.

R: Doğru mu? Yanlış mı? Nasıl karar verdiniz?

1MA9: Doğru diyorum.

R: Ha! Doğru.

1MA9: Çünkü niye? Şimdi ben bunu derim ki hani aralık ayıra ayıra yapamadığımı gördüm tamam mı? Ondan sonra dedim: “Ne yapabilirim? Fonksiyon mu kursam acaba?” dedim. Ondan sonra fonksiyon $\frac{x^2+1}{x}$ idi aslında. Türevini aldık. Doğru yaptık değil mi bunları? Ben hızlı hızlı ... Ondan sonra 1 bundan $y' = x \dots$ Ondan sonra $y' =$ böyle bulmuştum. Bu x^2 tabi şurası. x^2 her zaman pozitif bu aralıkta. $(x+1)$ de pozitif her zaman bu aralıkta. $(x-1)$ 1'den küçüklerde negatif olur. 1'den büyüklerde ha burada eksi burada artı. Yasemin bunları böyle dediğim zaman anladın mı? Tamam mı? Bu iş bitmiştir yani. Tamam mı?

R: Şey yani bu Melis'in iddiası ne üzerine idi? Sizin bulduğunuz neydi? Hani Melis'in iddiasını...

1MA9: Melis'in iddiası $x > 0$ iken bu adamın yani $x + \frac{1}{x} \geq 2$ olduğunu göstermemizi istiyor Melis.

R: Hıhı. Siz ≥ 2 olduğunu nasıl gösterdiniz? Hani bu yerel minimumla ilişkilendirdiğinizde?

1MA9: Grafik bu şekilde sence Yasemin büyük olmaz mı?

R: Grafiğin o şekilde devam edeceğini nasıl biliyorsunuz hocam, hani $x + \frac{1}{x}$ 'in?

1MA9: Bu Analiz ama Yasemin. Bu şekilde gider grafiğim yani. Bu yerel minimum noktadır. Bu senin yerel minimum bunların her biri ispat. Onları da mı ispatlamam yani? Temel yani ders.

R: Yok.

1MA9: Yani bundan sonra hani bu senin yerel minimumundur bak. Bak yerel minimumundur. Bak adam bu şekilde gelirim ben diyor. Hani yani bu adam şu şekilde de yapsa aşağı inmek zorunda kalır. Bana şu noktada da 0 gelmesi lazım tamam mı? Böyle aşağı inerse böyle bulmadım ki +1, -1 buldum ben bu adamı. Dolayısıyla 1'in ya zaten bu tarafa hiç bakmayım. Bu tarafta da bana öyle bir veri yok. Dolayısıyla bu adamın böyle aşağı inmesi için ve adam sürekli yani $x + \frac{1}{x}$ bu adama değer verdiğin zaman süreksizlik bir noktası yok. Çünkü $x > 0$ senin. Tamam mı? Sadece bunu süreksiz yapan yer 0'dır. Tamam mı? Mesela hatta şeyi de buluruz biz. Hani x 0'a giderken $x + \frac{1}{x}$ nedir mesela? 0 bu mesela x 0'a giderken $\frac{1}{x}$ nedir? Bu tarafta $(+\infty)$ 'dur. Bu tarafta $(-\infty)$ 'dur. Tamam mı? Hatta belki şurayı da yanlış diyorum yani. Şöyle olacak. Bu adam buraya şöyle teğet gelir. Böyle olmaz. Değer veremiyorsun ama bu adam çünkü x 0'a giderken ama biz tabi pozitif olarak yaklaşıyoruz. Bu adam $(+\infty)$ 'a gider...

İspatlama girişimlerinde doğal yoldan inşa edilerek formlerle dönüştürülmüş bir çerçevede hareket eden matematikçilerden bir diğeri 1MA8'dir. Araştırmasına başlamadan önce 1MA5 gibi düşünce deneylerinden bahsetmektedir. Bu kısımda etkinlik üzerinde herhangi bir yazılı çalışması bulunmamaktadır:

1MA8: Yani şimdi böyle bir iddia var ama bu doğru mu yanlış mı bunun hakkında bir fikrimiz yok. Değil mi?

R: Evet.

1MA8: Mesela öncelikle x 'in ne olduğunu bilmiyoruz. x reel sayı mı, tam sayı mı? Aslında böyle bir iddiada bunun belirtilmesi gerekiyor. Atıyorum x tam sayı iken ya da x reel sayı iken, sıfırdan büyükken bu ifade 2'den büyük eşittir şeklinde, bence orada eksik var, bu bir. İkincisi hani verildiğini varsayarsak, bütün x 'ler için böyle olduğu hani “her x ” ya da “en az bir tane x vardır” şeklinde (iddiadaki $x > 0$ 'ın olduğu yeri işaret ederek) burada belirtilmemiş ama genelde ifade yazılırken bunun da yazılması lazım. Bütün x ler için mi ya da en az bir tane x vardır mı? Çünkü ona göre aslında çözüm yöntemin değişebilir. Yani şey diyorsa en az bir tane x vardır ki bu ifade büyük eşittir 2 dir dediğin zaman birkaç x değeri için deneyebilirsin doğru mu, yanlış mı yani sağlıyor mu benim aldığım değer gibi. Ya da her x için diyelim ki her x için, her x büyük 0 için x artı $\frac{1}{x}$ büyük eşittir 2 ise eğer iddia, yanlış olduğunu göstereceksem sağlamayan değer var mı diye ararım mesela. Hani o yüzden burada “her” ya da “en az bir tane” (burada hayali olarak $\forall$ ve $\exists$ işaretlerini yazıyormuş gibi yapıyor) olması önemli aslında ifadede. Mesela deneyebilirim birkaç tane, çünkü doğru olup olmadığını bilmediğim için doğru ya da yanlış olduğunu göstermem gerekiyor. Eğer doğruysa ne yapmam lazım? Doğru olduğunu göstereceksem x hangi değer olursa olsun bu ifadenin (iddiadaki eşitsizliği gösteriyor) her zaman büyük eşit 2 olduğunu kanıtlamam gerekiyor. Eğer yanlış olduğunu düşünüyorsam o zaman sağlamayan bir değer bulmaya çalışacağım. Mesela öncelik olarak değer vererek gidebilirim, bilmiyorum (hani anlamında yapıyor), 2 versek mesela ne oluyor? Zaten o çok bariz.

1MA8 de önceki iki matematikçi gibi ilk refleks olarak x 'in hangi sayı kümesine aitse bunun açıkça verilmesi gerektiğini belirterek iddianın eksik olduğunu söylemiştir. Bunun yanı sıra “her x ” için mi yoksa “en az bir tane x vardır” mı diye belirterek iddianın ikinci bir eksikliğine (niceleyiceler açısından) işaret etmiştir. Bunun çözüm yöntemini bile etkileyebileceğinden bahsederek vurgulamıştır. Daha sonra iddianın şu anda doğru olup olmadığını bilmediği için bir kaç deneme yapılabileceğinden, eğer doğru olduğunu gösterecekse her zaman garanti altına alınabilecek bir yaklaşımdan, yanlış olduğunu göstermesi gerekiyorsa da sağlamayan bir değer bulmaya çalışacağından bahsetmiştir ve bir başlangıç olarak x 'e 2 değerini verip sağladığını söylemiştir. Bu örnekten itibaren etkinlik kağıdına düşüncelerini aktararak yazmaya başlamıştır (Şekil 4.6).

Bu örneğinden sonra iddiayı biraz daha düzenli hale getirip Şekil 4.6'nın sol bloğundaki ikinci satırını (1 numaralı bölüm) yazmıştır. Daha sonra böyle başlama düşüncesinden vazgeçerek yazdığı satırı silmiştir. O an daha iyi başlayabilecek bir nokta olarak, “tamam buldum” söylemi yeni hareket noktasını şekillendirmiştir. İddianın üzerinden verdiği 2 ve 3 değerlerinin doğru olmasından hareketle çok yüksek ihtimalle doğru olduğu gibi bir düşünce kafasında oluştuğunu ifade etmiştir:

1MA8: ...Sonra diyorum ki o zaman genel olarak göstermeye çalışayım. [İddianın] doğru olduğunu varsayıyorum. Şimdi bunun (iddiayı göstererek) büyük eşit 2 olması demek aslında şu ifadenin $(x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$ yazıyor 1. satırda) büyük eşit 0 olması demek. Yani eşitsizlik gösteriminde en çok kullandığımız yöntemlerden bir tanesi yani. Çünkü hani burada (iddiadaki eşitsizliği gösteriyor) herhangi bir şey olmadığı için topla ya da çıkar biraz zor oluyor. Ama şu ifadeden başlarsam önce bu ifadeyi yazarım $(x + \frac{1}{x} - 2$ yazıyor: 2. adım). Sonra bu ifadeden büyük eşit 0'a gidebileceğim bir şey bulmaya çalışırım. Düzenlersem ne oluyor? $x^2 + 1 - 2x$ mi bölü x . Burası ne yapıyor? $x-1$ 'in parantez karesi mi yapar, değil mi? Evet. Şimdi üst taraf her zaman pozitif, [çünkü] bir şeyin karesi var, ki x kesinlikle sıfırdan farklı (iddiadaki x 'in seçimini işaret ediyor). O zaman burada bir sıkıntı yok (paydayı kastediyor). Şimdi x burada $(x-1$ 'in parantezindeki x den bahsediyor) ne olabilir 1 ya da birden daha büyük bir değer olabilir. 1 olduğu zaman diyorum ki burası 0 olacak zaten (payı sıfırlıyor kastediyor) Eğer x 1 ise ifadem 0 (ifadenin karşılığı anlamında 0 yazıyor) ama x , 1'den büyük bir sayıysa otomatik olarak burası $(\frac{(x-1)^2}{x})$ ifadesi için $>$ yazıyor ve >0 gibi oluyor) zaten her zaman sıfırdan büyük bir şey verecek bana. O yüzden (≥ 0 yazıyor son durumda) ben bu ifadenin $(\frac{(x-1)^2}{x})$ 'i kastediyor) büyük eşit 0 olduğunu garantileyebiliyorum. O zaman derim ki, evet (doğru demek istiyor). Şimdi $x + \frac{1}{x} - 2$ büyük eşit sıfırsa o da otomatik olarak şu ifadenin (ise çekiyor $x + \frac{1}{x} \geq 2$, 3. adım) her zaman büyük eşit 2 olduğunu bana garantiler. O zaman bence doğrudur ama dediğim gibi burada mesela x tam sayı mı, reel sayı mı, yani ne olduğu belirtilmeli (3. adımda $x \in \mathbb{Z}, \mathbb{R}$? yazıyor). Evet.

İddiayı araştırma sürecinde eşitsizliğin farklı bir versiyonunu dikkate alarak daha kolay yol alabildiği yaklaşımı Şekil 4.6'nın sağ bloğundaki (2 numaralı bölüm) alanda görülmektedir. Burada 1MA8'in ince hareketi, dönüştürülmüş $x + \frac{1}{x} - 2$ yeni ifadesine dayanmaktadır. Orijinal ve yeni ifade arasındaki dikkat edilmesi gereken ayrım yaptığı hareketin eşitsizliği içeren bütün ifadeye olması değildir. $x + \frac{1}{x} - 2$ ifadesini daha düzenli hale getirip elde ettiği pay ve payda, kendisine verilen öncülle birlikte ele alınmış bir yoruma sahiptir. Daha sonra yeni ifadenin durumu hakkında edindiği bilgiyi ilk ifadesine tekrar yansıtmıştır. Buradaki kritik nokta 1MA8'in söylemlerindeki $x + \frac{1}{x} \geq 2$ demek, aslında $x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$ olması demektir. Dolayısıyla iki ifade arasında bir denklik kurmuştur. Bunun anlamı, ikinci ifadenin üzerindeki yorumun tamamen orijinal ifadede de geçerli olacağıdır. Her ne kadar bu şekilde araştırmasını tamamlasa da ifadelerinin sonunda böyle bir iddiada bulunulacaksa x 'in ait olduğu küme de belirtilmeli şeklinde

notunu düşmüştür. Ayrıca araştırmak istediği şeyi daha görünür kılabilmek için 1MA9 gibi “?” işaretini bu amacını temsil etmesi anlamında kullanmıştır.

The image shows handwritten mathematical work on a piece of paper. The work is divided into three parts, each marked with a red circle containing a number.

Part 1 (left):

Melis, " $x > 0$ ise $x + \frac{1}{x} \geq 2$ " olduğunu iddia etmektedir.
 Sizce Melis'in iddiası her zaman doğru mudur? Neden?
 $x = 2 \Rightarrow 2 + \frac{1}{2} \geq 2$
 $x + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x}$

Part 2 (top right):

$x = 2 \Rightarrow 2 + \frac{1}{2} \geq 2$ $x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$?
 $\Rightarrow x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$
 $\Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$ $x \in \mathbb{R}^+$
 $\forall, \exists$
 $x + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x}$

Part 3 (bottom right):

Let $x > 0$ be any number.
 aim: $x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$?
 $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x-1)^2}{x}$
 $(x-1)^2 \geq 0, x > 0 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$
 $\Rightarrow x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$
 $\Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$

Şekil 4.6. 1MA8'in Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri

Görüşmenin başında ifade ettiği “her” ve “en az” noktaları ile ilgili yaklaşımlarını etkileyebilecek durumlara şu şekilde değinmiştir:

R: Peki hocam biraz önce bu “her” ve “en az” gibi ifadelerden bahsettiniz. Bunu “her” ya da “en az” için en azından söylemiş bulundunuz. “Her” olması durumunda yine aynı yaklaşımı mı sergileyecektiniz?

1MA8: İşte eğer, şu aslında “her” olması durumunda kullandığım yaklaşım (2. adımın başına ise işareti çekiyor). Çünkü “her” demek (ifadenin içinde geçen her’i göstererek) burada x ’in değeri ne olursa olsun, ifadenin doğru olduğunu göstereceksem eğer, x ’in değeri ne olursa olsun benim net bir cevabı ulaşmam lazım. O da şunu verir yani. Burada (2. adımdan itibaren yaptıklarını göstererek) x yerine gelişigüzel rakam ya değer yazamazsın çünkü genel bir ispat vermen lazım. Burada (2. adımdan itibaren yaptıklarını göstererek) mesela bak hiç x yerine herhangi bir şey eklemedim. x şu olsun, bu olsun demedim çünkü o zaman sadece o verdiğim sayılar özelinde benim yaptığım ispat doğru olur ama ben genel bir ispat yani tüm x değerleri için (yine her’i göstererek) doğru olan bir ispat istiyorsam x ’in değeri ile oynamayacağım x ’e belirli bir değer vermeyeceğim. Ama “en az bir tane” derse (buraki sembolü göstererek) tabi o zaman şey deneyerek gitmek doğru ya da yanlış olduğunu göstermek için çok daha kolay. Yani zaten şu ifadenin (iddiayı işaret ediyor) doğru ya da yanlışlığını göstermek aslında şey, bunun ispatını yapmakla aynı şeye denk düşüyor.

Son olarak yapmış olduğu araştırmayı geçerli bir ispat olarak nitelendirmesine izin veren yapılardan şu şekilde bahsetmiştir:

1MA8: Geçerli derken işte mesela başlarken ne diyorum x herhangi bir sayı olsun diye başlıyorum mesela. İşte x büyük 0 ($x > 0$ yazıyor) ya da (bu yazdığını siliyor). Yazayım mı ispatını?

R: Olur hocam.

1MA8: İngilizce yazsam bir şey olur mu?

R: Hiç olmaz.

1MA8: Türkçeye yazmak biraz zor oluyor çünkü. (genel ispatını yapmaya başlıyor) Mesela diyoruz ki (6. satırda “Let $x > 0$ be any number” yazıyor) *be any number*. Yani diyorum ki, x sıfırdan büyük herhangi bir sayı olsun. Şimdi bunu dediğim anda ben artık x için işte 3 de verebilirim, 40 da verebilirim, eksi, eksi veremem işte 48 de verebilirim. Yani sıfırdan büyük herhangi bir şey olsun. Şimdi bunu verdiğim anda (6. satırda yazdıklarını göstererek) diyorum ki ben genel bir ispat yapacağım. Yani sen x yerine git 3 ver, yazdığım ispat yine doğru olacak. Beş ver yine doğru olacak. Sonra ne istiyorum, iddiam bu, acaba bu doğru mu değil mi? O yüzden diyorum ki $x + \frac{1}{x}$ ’den çalışmaktan yerine [bunun] -2’li halinin sıfırdan büyük eşit olduğunu göstermek istiyorum. Yani aslında amacım ne? $x + \frac{1}{x} - 2$ büyük eşit 0 (aim: $x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$? yazıyor, 7. Satır). Ben bunu göstermek istiyorum. Şimdi bir sayı var, bu sayının (aim yani amaç için yazdığını göstererek) 0’dan büyük eşit olduğunu göstermem lazım. O zaman diyorum ki bunun $[x + \frac{1}{x} - 2]$ da tam net olarak ne olduğunu bilmediğim için ben burayı düzenleyerek başlıyorum ($x + \frac{1}{x} - 2 =$ diye yazıyor: 8.satır). Hani acaba bu sayıyı $[x + \frac{1}{x} - 2]$ daha kapalı ya da daha basitleştirerek yazdığım zaman, bu ($x + \frac{1}{x} - 2 =$ diye yazdığını 8.satırı gösteriyor), sıfırdan büyük eşitliğini daha kolay karar verebileceğim bir ifadeye döner mi? Zaten toplayınca ne oldu işte parantezleri, paydaları eşitleyip böyle bir şey çıktı ($\frac{(x-1)^2}{x}$ yazıyor). Şimdi ifadem bu. Sonra diyorum ki $x-1$ in parantez karesi, bir sayının karesi her zaman büyük eşit 0 olduğu için bu kesinlikle büyük eşit 0 [$(x - 1)^2 \geq 0$, 9.adım], x de 0’dan büyük olduğu için (9. adımda eşitsizliğin yanına $x > 0$ yazıyor) bu da 0. Ve ne var burada? Sıfırdan büyük eşit iki tane sayı var elimde (pay ve paydasını yani $(x-1)^2$ ve x ’i işaret ediyor 8.adımda). Bunların birbirine bölümü yine pozitif olacak ha tek ihtimal ne var? Buranın $((x-1)^2$ kastediyor) 0 olma durumu o zaman zaten 0 olacak. Şu ikisi de (yine pay ve payda sayılarından bahsediyor) 0 ya da sıfırdan büyük oldukları için bunların birbirine bölümü her zaman büyük eşit 0 verir (9. adımda ise çekerek $\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$ yazıyor). Evet. O da ne veriyor aslında burası -2’li haliydi. Yani bu $x + \frac{1}{x} - 2$ büyük eşit 0 olduğu için (10. adımda ise çekerek $x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$) bu da bana der ki $x + \frac{1}{x} \geq 2$ (11. adımda ise çekerek $x + \frac{1}{x} \geq 2$). Şimdi x yerine hiç değer vermedim. Ekstra başka böyle özel bir şey kullanmadım. Tek kullandığım normal rasyonel sayılarda toplama ve işte hani reel sayı da olsa tamsayı da olsa bu doğru, pozitif iki sayının birbirine bölümü yine pozitif bir sayı yapar (8. adımı göstererek). Tamamen hani genel geçer her zaman bilinen gerçekleri gösterdiğim için diyorum ki bu (11.

adımında aradığı şeyle ilgili işaret ediyor) *her x değeri için sıfırdan büyük olmak üzere doğru bir ispattır.*

Şekil 4.6'da 3 numaralı bölümde artık tamamen formel sistemdeki yazılışlarla da ilgilenilen bir düzende, adım adım, genel geçer bilinen matematiksel gerçeklerin kullanılması, amacının ne olduğunun net ifade edilmesi, neyi göstermesi gerektiğinin bilinçli hareketleri, daha açık olmayan baştaki ifadeyi daha anlaşılabilir hale getirerek ve her zaman garanti altına alınabilecek bir çalışma sergilemesiyle 1MA8 formel bir yolla ispatlama girişiminde bulunmuştur. Doğal yolla kendisini destekleyen yapılar olarak, verdiği örneklerle iddianın doğru olabileceğine dair bir anlayış sağlaması olmuştur. Her ne kadar iddianın doğru olduğundan bahsetse de çalışılan kümenin kesinlikle belirtilmesi gereğini bir kez daha vurgulamış, bu yaptığı araştırmanın bu şartlar altında doğru olduğunu ayrıca belirtmiştir. Eğer ki iddianın tamsayılarda olduğu ile ilgili bir bilgi kesinlikle verilmiş olsaydı bu kez tümevarımı düşüneceğini, bu yöntemsel kararının tümevarımın doğası gereği yani doğal sayılarla indekslenen bir sonuç üretmesiyle ilişkilendirmiştir. Bu iddia özelinde tüm pozitif tam sayılar için Melis'in iddiasının doğru olduğunu göstermek gerektiği zaman, bu yöntemin uygulanabilir bir işleve dönüşeceğinden bahsetmiştir.

İspatlama girişimlerinde doğal yoldan inşa edilerek formele dönüştürülmüş bir çerçevede hareket eden matematikçilerden bir diğeri ise 1MA7'dir. Araştırmasını ilk elden harekete geçiren eşitsizlik olmuştur. Doğrudan eşitsizliğe odaklanarak $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ifadesini ispatlamaya çalışacağından bahsetmiştir. Kendisine verilen $x > 0$ hipotezini bir yerde, bir şekilde kullanacağından, kullanması gerektiğini ifade etmiştir. Eşitsizlikte önce payda eşitlemesine giderek eşitsizliğin kendisi için daha anlaşılabilir hale gelebilmesi adına bunu yaptığını söylemiştir. Son durumda $\frac{x^2+1}{x} \geq 2$ haline getirdiği, artık ispatlamaya çalıştığı ifadedir. Eşitsizliğin her iki tarafını x ile çarpmaya hakkının olduğunu (hipotezden) belirterek bir sonraki ifadesi olan $x^2 + 1 \geq 2x$ artık ispatlanması gereken ifadedir. Böyle bir yola geçmesinin sebebi, baştaki $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ifadesine gitmeyi kolaylaştırabilecek elinde doğrudan 2 ile ilişkilendirebilecek $x > 0$ ve $\frac{1}{x} > 0$ bilgisi dışında bir durum yoktur. Aksine bu iki yapıdan belli bir eşitsizlik elde edip kendini ana iddiaya ulaştırabilecek bir eşitsizlik oluşturabilmek güçtür (bu sıkıntıyı

1MA9 bizzat yaşamıştır, diğer yaşayan matematikçiler de vardır: 1MA2, 1MA3, 1MA8). Kaldığı yerden çalışmasına, $x^2 + 1 - 2x \geq 0$ ifadesiyle devam eder. Bunu daha da topladığında $(x - 1)^2 \geq 0$ sonucunu elde eder ki “bu her zaman doğrudur” diye belirtmiştir. Tüm bu aşamaya kadar yürüttüğü çalışmasında her bir satır geçişinde “ $\Rightarrow$ ” kullanmıştır. Tam da bu aşamada ince bir kıvraklıkla işlemlerinde geriye doğru dönerek “ $\Leftarrow$ ” yapar ve dolayısıyla ($\Leftrightarrow$) verilen ifadenin doğru olduğu sonucunu elde ettiğini belirtmiştir (Şekil 4.7, 1 numaralı bölüm). Burada özellikle belirttiği $x > 0$ olmuştur, çünkü kullandığı yerde eşitsizliğin doğasını bozabilecek bir durum teşkil edebildiğini belirtmiştir:

1MA7: ... Evet bu şekilde ispatlardım ben bunu. Nedeni de bu. Yani buradan direkt bir sonuç çıkarmak çok zor. İlk akla gelecek şey payda eşitlemek. Çünkü payda eşitlediğimde görüyorum ki bu en çok ikinci derece bir denkleme dönüşecek. Oradan da ispata geçirim.

R: İlk baktığınızda hocam. Melis adlı bir kişinin böyle bir iddiası ortaya atıldığında, bu iddiayı araştırmaya başlarken nasıl kararlar alıyorsunuz? Nasıl düşünüyorsunuz? O akıl yürütmeniz hakkında bilgi sahibi olmak istiyorum hocam. Onu sesli olarak ifade edebilir misiniz?

1MA7: Şimdi bana verilen şeye bakıyorum. $x > 0$ olması veriliyor ve istenen şey karşıda verilmiş. Ben bu istenilen şey... Tabi ilk olarak “doğru değil mi?” Diye şöyle bir basit bir örnekle mesela hemen işte 1 koysam, ha! 1 koydum $1 + \frac{1}{1}$ ’den 2 çıktı. Mesela 2 koysam yani 2 artı fazla geleceği için hep 2’den büyük olur gibi bir mantık yürütülebilir. Yani 1 tam [olarak] 2’yi sağladı. Peki 1’den küçük bir şey koysam sorun yaratır mı diye bakabilirsiniz. Mesela 0,5 koysam, $0,5 + \frac{1}{0,5}$ ‘den oradan 2 gelecek. Yani hep sayıların bir tanesi 1’den büyük oluyor. Yani x ’i ya 1’den büyük veya eşit alırsam. x ’i 0 ile 1 arasında alırsam bu 1’den büyük eşit oluyor. Toplayınca 2’den büyük olacağı gözüküyor aslında. Yani doğru olduğunu tahmin ediyorum buradan. Oradan da doğru olduğunu tahmin ettikten sonra işleme başlıyorum. İşleme başlayınca da ilk başta direkt... Ha! O dediğim, ya biraz önce şey yaptığım, şimdi öğrenci için belki ispat gibi hatta. Öğrenci 1 koydu. Ha! 2 koydu. Hocam doğru gidiyor. 0,5 de koydu. O da doğru geldi. “Hocam bu doğru” der bırakabilir ama bir ispat için bunun ispatlanması lazım. Bu dediğim sadece akıl yürütmede işe yaradı. Biz onun yerine ispata geçmek için ya bana bu $x + \frac{1}{x}$ direkt olarak işime yaramayacağını düşündüm. Yani ispat yapamam oradan. Oradan da payda eşitlemeye geçiyorum. Çünkü eşitlediğimde bir kuadratik denklem. Onun hakkında bilgilerim olduğu için. Bana onun sonuç vereceğini düşündüm.

...

1MA7: Ya şimdi biz de öğrencilere aslında ilk önerimiz o oluyor: “Bir deneyin bakalım doğru mu?” Ama işte öğrenci onu biraz ters algılıyor. Bir tane deneyince “haa tamam hocam

doğruymuş” deyip şey yapıyor. Ama mesela öğrenci gerçekten 1 ’i koydu. 1 ’i koyunca $1 + \frac{1}{1} = 2$ ’yi buldu diyelim. Ha! Şimdi 1 ’den bir şey koysam zaten 2 ’den büyük olacak hocam deyip buradan geçebilir ama öğrenci acaba 0 ile 1 arasında değer koymayı akıl eder mi? Onu da akıl ediyorsa aslında doğru yoldadır öğrenci. Fakat bu yine de bir ispat değildir. Bizim de öğrencilere önerimiz o. Önce bir bakın bakalım doğru mu? Çünkü bu bir teorem veya birinin bir ifadesi olduğu için doğru olmama ihtimali yüksek. O yüzden önce basit örneklerle bir deneyin diye öğrenciye biz de tavsiye ediyoruz zaten. Çünkü yanlış da olabilir ifade. Bir örnek bulduğunda zaten yanlış olduğunu göstermiş olur.

İlk baştaki araştırmasının içerisinde görünür olmayan iddianın doğru olup olmadığı yönündeki örnek kullanımı düşüncesinde örtükken, düşünme şeklini sesli olarak ifade ettiği kısımda bir örnek kullanarak “acaba doğru mu” anlayışına hizmet etmesi açısından aktifleşmiştir. Kendi öğrencilerine de örneklerle ilk elden “bir bakın doğru mu” diye tavsiyede bulunduklarını fakat öğrencinin bazen bunu yanlış kavramsallaştırdığından da küçük bir yerde bahsetmiştir. İlerleyen ifadelerinde araştırmasını geçerli bir ispat olarak görmesine izin veren durumlardan şu şekilde bahsetmiştir:

1MA7: ... Şurada da bir sayının karesini elde ettim. Bir sayının karesinin de her zaman sıfırdan büyük eşit olduğu çok bilinen bir matematiksel gerçek yani. Temel olarak odur yani. [kendi kendine düşünüyor] Yapılan bir işlemsel hata var mı? Ya da kullandığım veya kabul ettiğim matematiksel gerçekler doğru mu? Yani burada çok basit bir matematiksel gerçek olan bir sayının karesi her zaman sıfırdan büyük eşittir gerçeğini kullandım. Onun dışında da iki tane basit işlem yaptım. Yani şurada çarptım. Şunu da karşı tarafa aldım. Onlarda da bir hata olmadığına göre yaptığının doğru olduğunu düşünüyorum.

1MA7’nin asıl yaklaşımının inceliklerini açtığı yer ise şu şekilde olmuştur:

R: Peki hocam burada şey ancak ve ancak işareti kullandığınızı görüyorum. Burada önce ise olarak gidip sonra tersine çevirdiğinizdeki süreç, orayı biraz daha özetleyebilir misiniz? Kısaca ne yaptınız orada? Ne düşündünüz?

1MA7: Şimdi benim göstermek istediğim şey şu; $x + \frac{1}{x} \geq 2$ olması. Ama ben[im] sonuçta ulaştığım şey; $(x-1)^2 \geq 0$ gerçeği. Aslında bunu böyle ispat olarak yazmaya kalksaydık benim buradan başlayıp buraya ulaşmam gerekiyordu. Yani terse gitmem gerekiyordu. Yani ispatın son cümlesinin şu olması gerekiyordu: $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Ama bu tür sorularda genelde hepimizin yaptığı şey, sanki verilenden başlamış gibi oluyoruz. O yüzden ben şu gerçekten $(x-1)^2 \geq 0$ ’den yola çıkarak bunu $[x + \frac{1}{x} \geq 2]$ ispatladım aslında. Öyleyse aslında benim ispat yönüm şu yönde olması gerekiyordu. Fakat buradan $[x + \frac{1}{x} \geq 2]$ başlayıp bunu, $(x-1)^2 \geq 0$ elde ettim. Bu da doğru olduğuna göre ve burada yaptığım işlemler bir toplama işlemi, bir de bölme işlemi ve

x'in de sıfırdan büyük olduğu gerçeği altında geriye dönüştürülebileceği için o yüzden iki yönlü işaret koydum. Çünkü amacım aslında bunu yazmak. (Kendi kendine düşünüyor) Ha! Ben bunu ispat olarak mı diyorsun? Hocam yani bir matematikçi olarak bunu ispat olarak yazmaya kalksaydım nasıl yazardım [mı demek istiyorsun]?

Tam da burası 1MA8 gibi daha formel bir ispat kıvamında yazılacak düzene geçiş yaptığı kritik yerdir (İleriki katılımcı gruplarda bu farkındalık tam oluşmadığı için 1MA7 bu geri dönüşlerin kavşak noktası olarak nitelendirilecektir). Çünkü 1MA7'nin yaptığı, bilinen bir gerçeğe ulaşmaktansa (ancak ve ancak olmadığı durumlar hariç); bilinen gerçeklerden, ispatlanmış teoremlerden yararlanarak iddiada istenenle sonuçlanacak bir yöne ilerlemenin can alıcı noktasıdır (Şekil 4.7, 2 numaralı bölüm):

1MA7: *Şöyle başlardım. İşte biliyoruz ki; $(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2-2x+1 \geq 0 \Rightarrow x^2+1 \geq 2x$ 'dir. Ve buradan ben;*

$$\Rightarrow \frac{x^2+1}{x} \geq 2 \text{ olduğunu, buradan da;}$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2 \text{ olduğunu yazarım. İspat burada biter.}$$

Yani ispata başladığım yer, yalnız bir de şurada mutlaka şu adımı atarken buraya açıklama olarak biz genelde sona yazıyoruz bunu. "since" diye İngilizceden alıştığımız için.

$$\Rightarrow \frac{x^2+1}{x} \geq 2 \text{ Çünkü } (x > 0) \text{ 'dır derim yani.}$$

Şu işlemi yapabilmem için benim ona yani eşitliğin her iki tarafını x'e böldüm anlamında. Bu bölme yaparken eşitliğin yön değiştirmedğini belirtmek için şunu da mutlaka açıklama olarak yazmak lazım. Ha! Doğru ispat yazılış olarak, bunu da ispat olarak yazarsanız bu şekilde yazmamız gerekir.

1MA7'in Melis'in iddiasını araştırma süreçleri genel olarak değerlendirildiğinde, önce kendine bir çıkış yolu aramış, daha sonra formele rotalandırılmıştır. Doğal yolla inşa edilerek formele dönüştürülmüş yollarla ilerleyen diğer matematikçilerden farklı olarak 1MA7, çalışılan küme üzerinde herhangi bir açıklama yapmaması duruşuyla, bazen pür matematiksel sistem içerisinde her şey adım adım açık bir şekilde verilmeyip gizli olarak işler mantığıyla hareket edenleri temsil ediyor gibi görünmektedir.

$$\begin{aligned}
 & \left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 + 1}{x} \geq 2 \quad (x > 0, \text{olduğundan}) \\
 & \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x \quad 1 + \frac{1}{x} = 2 \\
 & \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0 \checkmark \\
 & \text{1} \\
 & \left(x + \frac{1}{2}\right) \geq 2 \\
 & \text{2} \\
 & (x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2x \\
 & \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} \geq 2 \text{ çünki } (x > 0) \\
 & \Rightarrow \boxed{x + \frac{1}{x} \geq 2}
 \end{aligned}$$

Şekil 4.7. 1MA7'nin Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri

Doğala gidip gelen formal düşünürler olarak bazı matematikçiler ikili olarak ispatlama girişimlerinde benzer içerikler üretebilmektedir. Örneğin 1MA2 ile 1MA8'in benzerliği, $x + \frac{1}{x}$ ifadesini çalışmaktansa bu ifadenin iddiadaki karşılığının -2'li halinin sıfırdan büyük eşit olduğunu gösterme noktasında içsel bir motivasyonla, iddiaya temas etmek için daha uygun çalışılabilir mantık arayışında ya da form yakalama gayretinde olmalarıdır. 1MA7 ile 1MA8'in benzerliği, matematiksel bir ispat yapılacaksa ya da bir matematikçi olarak sunması gereken ispat olacaksa özel bir düzende ya da daha hedefli bir şekilde nereden başlayıp nerede sonlanması gerektiği gibi bir formatta olmasıdır. Bu durum, kendilerinden istendiğinde formel bir şekilde sunulacağıdır. Diğer durumlarda aynı topluluk içerisinde bazı bilinen şeyleri açıkça söylemeye gerek yoktur, çünkü olması gerektiği yapı zaten bilinir/bilinmelidir.

Araştırmada, formal yoldan farklı olarak Melis'in iddiasını araştıran 2 matematikçi bulunmaktadır. Bu matematikçilerden biri tamamen doğal yoldan bir yaklaşımda bulunarak Melis'in iddiasını araştırmıştır. Araştırma sürecinde 1MA7'nin tarzında hareket etmiş fakat geriye dönme fikrini uygulamamıştır. Bir diğer matematikçi ise etkinlikte bağlamın doğasını pür matematiksel ispat anlamında uygun görmediği için kendisine ispatlanacak bir bağlam oluşturmadığını ifade etmiştir. Eğer kendisinden bu etkinlikteki durumu araştırması bir görev olarak isteniyorsa bu isteğe yönelik doğal bir yaklaşımla araştıracağını belirtmiştir. Bu nedenle yaptığı şeyleri ispat olarak saymadığını bir çözümleme yaptığını, ispatın

daha çok teorik bilgilerin bir araya gelerek sonuca ulaştırılmasıyla ilgili olduğunu, etkinliğin çözülmesi gereken, sonuca varılması gereken bir iddia olduğunu özellikle vurgulamıştır. Bu açıdan bağlam tarafından yönlendirilmiş (dış faktörün tetiklediği) bir doğal yaklaşımda bulunmuştur. Bağlamı tam olarak algılayamaması yapacağı işten kendisinden beklenene doğru değişmiş, dolayısıyla araştırmanın odağından sapmıştır.

4.2.2 Matematik Eğitimcilerinin Matematiksel İspat Pratikleri

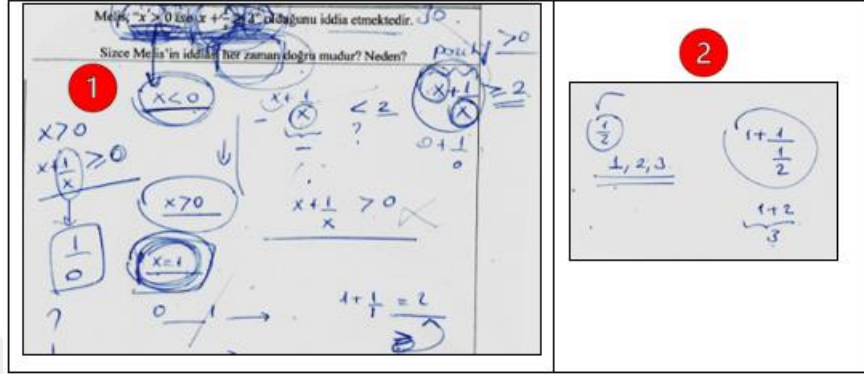
Araştırmadaki matematik eğitimcilerinin tamamı Melis'in iddiasını araştırma sürecinde doğal bir yoldan ilerlemiştir. Böyle olmakla birlikte, doğal yoldan ilerleyenler olarak matematik eğitimcileri iki gruba ayrılmaktadır: ya tamamen doğala sınırlı ya da doğal yoldan ispatlama girişiminde bulunsalar da matematiksel ispatın olması gerektiği bir çerçevede yapılmasının farkındalığı.

Araştırmadaki bazı matematik eğitimcileri de matematikçilerin bir kısmında olduğu gibi Melis'in iddiasını araştırabilmek için kendilerine hangi kümede düşünmesi gerektiğine göre bir başlangıç noktası oluşturma gayretinde olmuştur. Fakat buradaki amaçlar (2EA4 hariç), matematikçilerdeki ispat yöntemlerinin seçiminden daha çok örnek kullanımı için uygun kümeden seçilip seçilmemesiyle, iddiayı bozabilecek (bazen de belli aralıklarda) bir örneğin görünüp görünmemesiyle ilgili olmaktadır.

Matematik eğitimcilerinin 4'ü Melis'in iddiasını araştırırken tamamen doğala sınırlı bir yoldan düşünerek ilerlemiştir. Matematik eğitimcilerinden 2EA1, iddiayı araştırmaya başlayacağı bir hareket noktası belirlemiştir. Bu anlamda iddiayı çürütebilecek bir yaklaşım benimsemiştir. Bu düşüncesini, kendisini anlam olarak nereye taşıyacağını kestirmede bir başlangıç olarak kullanmıştır. Argümanlarını ağırlıklı olarak iddianın anlamını keşfetmek ve çözmek için ortaya koymuştur (Şekil 4.8, 1 numaralı bölüm):

2EA1: *Eğer x negatif olursa, oradan yola çıkıyorum ben yani $x < 0$ olursa... baktığım zaman $x + \frac{1}{x}$, burası ne olursa olsun (paydadaki x 'i yuvarlak içine alıyor) şimdi 0 'a eşitlik durumu yok, yani $\frac{1}{0}$ değil, negatiflik var. Burası negatif, burası da negatif olduğuna göre (toplamı oluşturan bileşenlerin negatif olmasından bahsediyor), bu (ifade demek istiyor) otomatik olarak 2 'den küçük bir sayı olacak (ifadenin yanına < 2 yazıyor). 2 'nin eşitliği şu anda mevzu bahis değil. Şimdi 2 'den küçük olduğuna göre dolaylı yoldan ben negatiflikten yola çıktığımda $x > 0$ olduğu noktasında $x + \frac{1}{x}$ 'in de > 0 olduğunu kurgulayabiliyorum. Şimdi eşitliğe zaten hiç girmiyoruz. Şimdi baktığım zaman buradaki 2 durumu (orijinal ifadedeki*

2'yi göstererek yuvarlak içine alıyor) bana neyi ifade ediyor aslında? x 'in 1 olma durumunu gösteriyor. Yani x 'in 1 de olabileceğini. 0'dan büyük (iddiadaki $x > 0$ yerini göstererek) ama sıfırdan büyük sayılar içerisinde 0 ile 1 arasındaki sayılar da var. 1'den sonraki sayılar da var. Şimdi $x=1$ olduğu zaman zaten $1 + \frac{1}{1}$ den 2'ye götürüyor beni. Doğal olarak ve otomatik olarak şuradaki yani " $\geq$ " deki "=" in geldiği nokta bu. Bunu bu şekilde anlatırım yani izah ederim ve ispatlarım.



Şekil 4.8. 2EA1'in Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri

Argümanını tamamlarken geriye ilgileneceği >2 kalmaktadır. Burada genel olarak $x > 0$ durumundaki sayı kümelerini düşünmektedir. Düşüncesini genelleyleyici bir söylemle her bir küme bakımından temsili örnekler şeklinde ifade etse de, spesifik örnekler kullandığı için yaptıkları sembolik dünyaya ait değildir. $x = \frac{1}{2}$ üzerinden (ve aynı zamanda işlem hatası içeren) "hepsi" için benzer şekilde genellenebileceği gibi bir düşünceyle iddiayı doğruladığını belirtmiştir. bu nedenle delil niteliğinde kalmıştır. Şekil 4.8'de 2 numaralı bölümde bu durum görülmektedir:

2EA1: Daha sonra 2'den büyük olduğu noktasına baktığım zaman, sayımız bizim sıfırdan büyük bir sayı. Buna köklü sayı da girebilir, $\frac{1}{2}$ şeklinde rasyonel bir sayı da girebilir. Zaten bu, bunun içine giriyor. Ya da pozitif tam sayılardan 1, 2, 3 de girebilir. Bunların hepsi, baktığım zaman beni $1 + \frac{1}{x}$, mesela $1 + \frac{1}{\frac{1}{2}}$ şeklinde yorumladığım zaman ne yapmış oluyorum, $1 + 2$, bu da 3 yapıyor. E, 3 de doğal olarak 2'den büyük (iddiadaki eşitsizliği parmağıyla gösteriyor). Yani her zaman genel geçer bilgilerimizden yola çıkarak hareket ediyorum. Bu da ne yapmış oluyor (elde ettiği 3'ü kalemiyle gösteriyor), bu iddiayı (kalemiyle iddiayı işaret ediyor) doğrulamış oluyor. Şimdi sadece bir de şu noktasına odaklanırım ben. Önce negatiften yola çıktım, bu tezi ($x + \frac{1}{x} > 0$ gösteriyor) ortaya koydum. Arkasından neden "eşittir 2" onu vurguladım ve sonrasında 2'den neden büyük olduğunu yorumladım. Peki bu her zaman doğru mudur? (iddiadaki her zaman ifadesini diktörtgen içine alıyor) "Her zaman doğru

mudur” noktasında, her şeyin bir kere, bir sorgulanması gereken yanı olduğunu düşünürüm. Yani her zamanlık benim kafamı bir karıştırır, beni bir durdurur. Çünkü genel geçer şeyler vardır, olası şeyler vardır ama her zamanlıkta bir düşünmemiz gerekir... Melis'in verdiği iddiadan yola çıktığımız zaman ($x > 0$ ise $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ifadesinin altını çiziyor), evet gördüğümüz şey sıfırdan büyük bir değer $[x]$. Sıfıra eşit deseydi o noktada evet sıkıntı vardı. Çünkü 2'den her zaman büyük olmaz. Sıfırı koyduğumuzda $0 + \frac{1}{0}$ devreye girecekti (bunu yazıyor) ve bu da buna [eşitsizlikte] uymayacaktı. Sıfırdan büyük tüm sayılarda bu iddianın her zaman doğru olduğunu görebiliyoruz. Ben bunu bu şekilde açıkladım.

Kullandığı dil ağırlıklı olarak sembolik dünyaya ait değildir, sözel açıklamaya dayalıdır ve nedenini sorgulayarak anlamlandırmaya odaklıdır. Benzer şekilde formel dünyaya da ait değildir. Çünkü doğal yolla işlettiği yaklaşımında somut dünyaya ait elementler daha çok ön plandadır.

R: $x < 0$, $x = 1$, $x > 0$ olma durumuna, köklü ya da kesir ya da hani tam sayılara (herhangi bir evet dedi) göre incelediniz. Burada baktığınızda bu argümanı ortaya koyarken sizin Melis'in iddiasını araştırırken temel düşünceniz neydi? Neden böyle bir argüman ortaya koymayı düşündünüz?

2EA1: Yani şey gibi düşün hipotezler, anti tezler, tezler. Yani benim için burada bir öncelikle, 'bundan ($x > 0$ gösteriyor) değil de bunun tersi olursa ($x < 0$ gösteriyor) ne olur?' oradan yola çıkmak; o beni destekledikten sonra ($x + \frac{1}{x} < 2$ gösteriyor), buna ($x > 0$ gösteriyor) bakmak. Buna baktıktan sonra 2, neden 2, onu sorgulamak. O da zaten 1'den geliyor. $x < 0$, $x > 0$ ve $x = 1$, bu şartları da sağladıktan sonra yaptıklarımın doğru olduğunu görmek.

R: Peki hocam. Burada yaptığınız ya da ortaya koyduğunuz, akıl yürüttüğünüz şey üzerinden konuşursak, geçerli bir ispat olup olmadığı noktasında argümanınızı nasıl değerlendirirsiniz?

2EA1: Yani bence uygun. Baktığım zaman (gülüyor) yani bunu destekliyor. En azından burada görülen, verilen durumları ($x > 0$ ise $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ifadesinin altını çiziyor) destekliyor.

İfadelerini değiştirmeye hiç niyeti yok gibi görünmektedir ve bu konuda kararlı bir duruş sergilemiştir:

R: Ya da bu argümanınızın hangi özellikleri ispat standardını karşılıyor, geçerli olmasına izin veriyor?

2EA1: Yani açıkladığımı düşünüyorum ama ben mi anlayamadım tam. Yani açıkçası dediğim gibi baktığım zaman iddialar var ve bu iddialar benim bildiğim genel geçer bilgilerle örtüşüyor. Benim hali hazırda öğrendiğim ya da gördüğüm ya da günlük hayatta kullandığım bu bilgilerle örtüştüğü için ve burada bir, herhangi bir bana bir mantık hatası sunmadığı için doğru olduğunu kabul ediyorum.

Genel olarak bakıldığında 2EA1, Melis'in iddiasını bu haliyle değil de tersi olmuş olsaydı ne olurdu şeklinde bir düşünce kurarak yola çıkmıştır. Bunu

yapmasındaki niyetini orijinal iddiayı kurgulayabilmede bir yol olarak gördüğünü ifade etmiştir. Melis'in bu iddiayı nereden getirdiğini, neye dayanarak ortaya attığına dair bir bakış açısıyla dikkate alındığında 2EA1'in doğal araştırma süreçlerinin devreye girdiği görülmektedir. Gerçekten de ifadelerini tamamlarken pratikte ve günlük hayatta kullandığı bilgileriyle araştırma sürecini doğal bir yaklaşımla eşleştirdiği görülmektedir.

İspatlama girişimlerinde tamamen doğala sınırlı bir çerçevede hareket eden matematik eğitimcilerinden bir diğeri 2EA2'dir. İddiayı araştırmaya başlayacağı bir hareket noktası belirlemiştir. Bu anlamda x 'in tanım kümesini reel sayılar varsayımı altında bir araştırma sürecine girmiştir. Ağırlıklı olarak sonuca ulaşmak için sembolik işlemleri kullanmıştır. Şekil 4.9'da bu durum numaralandırılmış yerlerle görülmektedir:

Şekil 4.9. 2EA2'nin Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri

Böyle olmakla birlikte $(x - 1)^2 \geq 0$ olduğunu bulmak için, önemli gördüğü örneklerle sayısal değerler vermiştir (Şekil 4.9, 10 numaralı bölüm). Burada önce 1 noktasında sağlandığını ancak bütün reel sayılar için doğru olmadığını ifade etmiştir. Bu noktada 0 değerini yerine yazdığında eşitsizliği sağladığını belirtmiş ve bütün reel sayılar için her zaman $(x - 1)^2$ pozitif olduğu için doğrudur şeklinde görüşünü ifade etmiştir. Araştırmasını yürütürken, $x + \frac{1}{x} \geq 2$ den başlayarak alt satırlara geçişlerde kullanmasına izin veren yapıları $x \neq 0$ ve $x > 0$ sözel bir şekilde belirtmiştir.

Yaptığı çalışmasını geçerli bir ispat olarak nitelendirmesine izin veren durumlardan ise şu şekilde bahsetmiştir:

R: ...Bunu yine bir argüman olarak gördüğünüzde Melis'in iddiasına yönelik ürettiğiniz, geçerli bir ispat olarak nitelendirebilir misiniz yaptığınız şeyleri?

2EA2: *İuu. Evet. Çünkü şunu biliyorum. Bütün tam kare (kalemiyle $(x - 1)^2$ ifadesini gösteriyor), bir tam karenin her zaman pozitif olduğunu biliyorum. Buna dayalı (kalemiyle $(x - 1)^2 \geq 0$ işaret ediyor) olarak buna $[x + \frac{1}{x} \geq 2]$ dönüştürebildiğim takdirde (bunu kalemle buradan buraya anlamında göstererek ifade ediyor) her zaman doğrudur diyebilirim.*

Argüman zincirinde formal anlamdaki bir söylemi çağrıştırmış gibi görünen küçük bir alan vardır. Fakat bu durum hipotezi yoksaydığı söylemiyle kırılmaktadır:

2EA2: ... (kalemiyle işaret ederek $(x - 1)^2$ üzerinden açıklıyor) *0 dışındaki bütün reel sayılar için tam kare olarak ifade edebildiğime göre doğru. Ama burada yani tam kare olduğuna göre burada, negatif sayılar için de doğru aslında bu. Çünkü 0 dışındaki bütün negatif sayılar için de yani bütün reel sayılar için doğru.*

R: *Oraya, bu son yazdığınız şey olan $(x - 1)^2 \geq 0$ ifadeye nasıl eriştiniz hocam? Yani Melis'in iddiasını nasıl çalıştırdınız?*

2EA2: *Buradan aslında verdiği eşitlikten (kalemle $x + \frac{1}{x} \geq 2$ gösteriyor) faydalananak bildiğim bir büyüklük şeyinden, yani 0'dan büyüklüğünden emin olduğum bir ifadeye (kalemle $(x - 1)^2 \geq 0$ gösteriyor) dönüştürmeye çalıştım. O da tam kare olması. Tam kare olup olmadığına baktım. Tam kare olduğuna göre, bir, herhangi bir reel sayının karesi her zaman 0'dan büyüktür. O zaman nedir? Bunu $((x - 1)^2 \geq 0$ 'ı örtük olarak ifade ediyor) elde etmeye çalışarak onun $(x + \frac{1}{x} \geq 2$ 'i örtük olarak ifade ediyor) doğru olup olmadığını test ettim.*

Diğer taraftan, eğer formel yaklaşım tüm argümanları için ağırlıklı odak noktası olsaydı, geri dönüş fikri önemli bir vurguya sahip olurdu (bkz. 1MA7) ki araştırmasının başlangıcından itibaren bu bilinçte ilerlemediği görülmektedir. Böyle olsa bile 1MA7'nin yaptığı gibi bilinen matematiksel gerçeklerden faydalananak gösterilmesi gerekenle bitecek bir iz sürme hedefinde olmadığı anlaşılmaktadır. Farkında olmadığı geri dönüş vurgusunun eksikliği bir yana Melis'in ifadesinin sınırlı olduğunu söylemiştir. Ayrıca odaklandığının $(x - 1)^2 \geq 0$ olması ve sıfırdan farklı bütün reel sayılar için doğrudur düşüncesi, iddiadaki $x > 0$ bilgisini yok saymaktadır/önemsizleştirmektedir (Şekil 4.9, dikdörtgen içine alınmış bölümler):

R: *Biraz önce x 'in negatif olduğu durumlarda da geçerli olduğunu söylediniz. Melis'in iddiasının bu noktada eksik olduğunu mu...?*

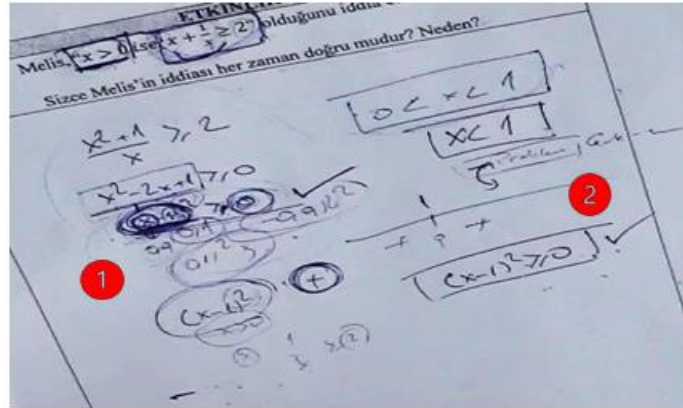
2EA2: *Sınırlı. Sınırlı olduğunu yani bütün reel sayıları kapsıyor aslında 0 dışındaki.*

R: Burada negatif olmasıyla Melis'in iddiasını yine nasıl test ederdiniz hocam? Yani araştırmaya başlamak isteseydiniz bütün reel sayılar için olduğunu...

2EA2: Aslında ben şüphe duymuyorum. Çünkü şunu (kalemiyle $(x - 1)^2$ gösteriyor) elde ettikten sonra x negatif ya da pozitif, her zaman sonuçta kare olduğu için pozitif olacak. O halde bütün 0 dışındaki, çünkü 0'ı dahil edemem $\frac{1}{x}$ ifadesi olduğu için. 0 dışındaki bütün reel sayılar için doğru diye düşünüyorum, doğru olduğunu.

2EA2 görüşlerini tamamlarken, spesifik örneklerden ziyade tüm sayılar için geçerli olup olmadığını görmeye çalıştığını, burada cebirsel yöntemlere başvurduğunu ifade etmiştir. Ayrıca bu cebirsel yöntemleri kullanarak iddianın doğru olup olmadığını gösterdiğini, dolayısıyla ispatının kendisini ikna ettiğini düşünmektedir. Bu doğrultuda, genel olarak bakıldığında 2EA2'nin Melis'in iddiasını araştırma sürecinde vurguları doğala sınırlı ve 2EA1'den farklı olarak daha çok sembolik bir tarzdadır.

İspatlama girişimlerinde tamamen doğala sınırlı bir çerçevede hareket eden matematik eğitimcilerinden 2EA7 de, 2EA2 gibi benzer bir araştırma sürecini işletmiştir. İddiayı araştırmaya cebirsel bir çözüm bulma şeklinde başlamıştır. Bunun için iddiadaki eşitsizliği çözme şeklinde bir araştırma sürecine girmiştir. Ağırlıklı olarak sonuca ulaşmak için sembolik işlemleri kullanmıştır. Şekil 4.10'da bu durum görülmektedir:



Şekil 4.10. 2EA7'nin Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri

İlerleyen satırlarda $(x - 1)^2 \geq 0$ şeklinde doğru olduğunu bildiği ifadeye ulaştığını belirtmiştir. Böyle olmakla birlikte bu ifadenin $x < 1$ için her zaman doğru olmayacağını ifade etmiştir. Bunun için $0 < x < 1$ aralığında ifadeyi bozabileceğini düşündüğü bir temsili değer vermiştir. Burada 0,9 gibi bir değeri

verip sağladığını görmüş, sıkıntı çıkaracak durumları elemesiyle iddianın doğru olduğunu belirtmiştir (Şekil 4.10, 1 numaralı bölüm). Diğer taraftan çözüm arayışının bir parçası olarak eşitsizliğin doğruluğunun tablodan da gösterilebileceğini ifade etmiştir (Şekil 4.10, 2 numaralı bölüm):

R: Burada hocam birinci kısımdan ikinci kısma nasıl geçtiniz? Yani onu anlamak istiyorum. Bu adımlar arası geçişlerde nasıl yaptığınızı, neye dayanarak yürüttüğünüzü...

2EA7: Ya şurada bir eşitsizlik var sonuçta (iddiadaki eşitsizliği gösteriyor). Yani aslında denklem çözüyorsun. Yaptığımız şey o: denklem çözme. Hani $x^2 + x$ işte içler dışlar çarpımı yapıp oradan bir şey geliyor, bu da bir özdeşlik. Yani... $x - 1$ 'in karesi şeklinde oluşturup ondan sonra çözüm yaptık. Tabi hani şey yapmadık, yani işte çift katlı köktür tarzında (tablo çiziyor). Zaten her zaman pozitif çıkacağını (1 'in sağına ve soluna $+$ işareti koyuyor) buradan da gösterebilirsin de. Zaten bu ifade de $((x - 1)^2 \geq 0)$ demek istiyor onu anlatıyor. Yani burası 0 'dan büyük olacağı aslında, pozitif noktasında (tablo ile yeri gösteriyor) şey var. Dolayısıyla şu ifadenin $[x + \frac{1}{x}]$ de her zaman 2 'den büyük olacağını gösterebiliyoruz şu şekilde (kalemiyle $(x - 1)^2 \geq 0$ şeklinde elde ettiği yeri gösteriyor).

Buradaki araştırma sürecinde otomatik içler dışlar yaparak kendisine verilen eşitsizliği düzenli hale getirmektedir. Ayrıca 2EA2 gibi eşitsizlik çözerek elde ettiği $(x - 1)^2 \geq 0$ olması, iddiadaki $x > 0$ bilgisini yok saymaktadır ya da önemsizleştirmektedir:

R: Yani aslında şunu merak ediyorum hocam. $x > 0$ olması ile ilgili verdiği Melis'in iddiasındaki bu bilgiyi bir yerde düşündünüz mü? Yoksa iddiada...

2EA7: Yok (gülüyor) direkt şuraya odaklanıyorsun (kalemlerle $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ifadesini dikdörtgen içine alıyor). Tabii hani ilk başta şeyi de hani bir özdeşlik geleceği de aklıma gelmemişti açıkçası. Şu işlemi $(\frac{x^2+1}{x} \geq 2)$ gösteriyor) yaptıktan sonra özdeşlik geldi. Yani şunu $((x - 1)^2)$ gösteriyor) elde ettikten sonra şuranın ($x > 0$ gösteriyor) bir anlamı kalmadı açıkçası. Yani ama genellikle şeyde de var yani o bende de var. Şu birinci öncül bilgi ($x > 0$ gösteriyor), daha sonra hani dikkate alınan bir bilgi gibi. Halbuki ilk başta dikkate alınması gereken bilgi olmasına rağmen. Yani eğer bu $[x > 0]$ ise bunun $[x + \frac{1}{x} \geq 2]$ 'in doğruluğunu kanıtlıyorsun. Ama dediğim gibi, yani alışkanlık direkt şuna $[x + \frac{1}{x} \geq 2]$ eşitleyip denklem çözümüne yönlendiriyor. Yani eşitsizlik çözümüne yönlendiriyor.... şurada $((x - 1)^2 \geq 0)$ gösteriyor), şu şeyi ($0 < x < 1$ aralığını gösteriyor) belki düşündürüyor, hani 0 ile 1 aralığı. Zaten 1 'den sonrası her türlü 0 'dan büyük olacağı için yani otomatikman şeyde de düşünmüyorsun. Ama burası $[x - 1]$ negatif çıkacağı için bile, yani 0 'dan küçük değerler, 0 ile 1 arasında değerler alırken karesini aldığımız için pozitif çıkacak. Problem olacağını zannetmiyorum yani.

2EA7'nin Melis'in iddiasına yönelik araştırma sürecine genel olarak bakıldığında, yaptığı çalışmanın içeriği doğal yollarla gelişmiştir. Görüşmeler boyunca ifadelerinin arasında daha çok gösterim niteliğinde değerlendirilebilecek “çözümünü yaptım”, “gösterdim” şeklindeki söylemleri ile iddiayı araştırmada başlangıç noktasındaki cebirsel çözüm bulma yönelimi Melis'in iddiasını eşitsizlik çözüme üzerinden araştırmayla ilgili bir girişimini ortaya çıkarmaktadır. Yaptığı araştırmasında 2EA1 ve 2EA2'den farklı olarak tablo ile desteklediği görülmektedir.

Matematik eğitimcilerinin 3'ü ise Melis'in iddiasını araştırırken doğal yoldan ispatlama girişiminde bulunsalar da matematiksel ispatın olması gerektiği bir çerçevede yapılması gerektiğinin farkındadır. Bu şekilde hareket eden matematik eğitimcilerinden biri 2EA3'tür. Araştırmadaki diğer matematik eğitimcilerinden daha yoğun ve iç içe geçmiş düşünme halkalarına sahip olarak, 2EA3 Melis'in iddiasını araştırma süreçlerinde düşünce deneyleri arasında aktif bir şekilde geçişler yapmaktadır. Çoklu araştırma havuzunun içerisinde; iddiaya bir önerme gözüyle bakmak, iddianın içerisindeki $\frac{1}{x}$ ifadesinin yapısı gereği ya da davranışının nasıl etkisi olacağı yönünde x 'in belli aralıklarında bir fikir oluşturmak, eşitsizliğin sol tarafına bir fonksiyon olarak bakma ve parçalanmış aralıklardan alınan bazı sayısal değerlerce fonksiyonun nasıl davranabileceğini tespit etmek ki burada yine dikkat ettiği şey genel bir yapı oluşturabilmede yeterli olmayan şüpheli sonuçlar ortaya çıkarma durumu vb. gibi bir çok şeyi göz önünde bulundurarak kapsamlı bir araştırma sürecinin içerisine girmiştir. İlk oluşan fikirler açısından 2EA3'ün etkinlik kağıdı üzerinde yaptığı çalışma ve araştırmacıyla arasından geçen ilgili bölümlere ait diyaloglardan bir kesit Şekil 4.11'de görülmektedir. Bu ilk girişimleri incelendiğinde, 2EA3 genel olarak doğal sınırlar içerisinde bir hareket alanına sahiptir.

1. Şimdi muhtemelen burada ilk düşünmem gereken şey bu iddiayı kendi içerisinde değerlendirmek. Dolayısıyla bunu bir önerme olarak ele alıyorum. Bu önermede $x > 0$ olması ve buna bağlı olarak da buna bağlı bir ifademiz var. Bu da: $x + \frac{1}{x} \geq 2$ olma durumu.

Burada ilk dikkatimi çeken nokta şu x 'in bulunmuş olduğu aralık 0'dan büyük ama biliyoruz ki $0 < x < 1$ olduğunda buradaki $\frac{1}{x}$ değeri kendi içerisinde bir değişiklik gösterecek. Dolayısıyla bunu birazcık göz önünde bulundurmam gerekiyor diye düşünüyorum. Başka düşünmem gereken şey. Bunu parçalı olarak ele almaktır. Acaba $0 < x < 1$ aralığında iken bu fonksiyon, buradaki ifade nasıl davranacak? Bir de $x \geq 1$ iken bu ifade nasıl davranacak? Ona bakmak. İki durum karşına çıkıyor. Şimdi birinci durum $0 < x < 1$ aralığında olma durumu. $0 < x < 1$ aralığında olduğu durumda bu sefer $\frac{1}{x}$ 'in davranışı ne olacak? D. Ever iki farklı durum.

Bir yandan şu da aktıma geliyor. Şimdi bu hani burada değerler verip belli bir durum oluşturulabilir. Yani x 'e belli değer aralıkları verip acaba fonksiyon nasıl davranacak?

$x > 1$ olma durumunda ki buna mesela yine bir değer verdiğimizde 2 değerini vererek diye düşünüyorum $2 + \frac{1}{2}$ olacak yine 2'den büyük bir değer alıyor. Şimdi bu sayısal değerler üzerinden gittiği için bana göre şüpheli bir genelleme olacak.

Bunun yerine ben şurada ki fonksiyonu bir kendi içerisinde değerlendireceğim...

$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ fonksiyonuna karşılık gelecek.

2EA3

- Symbolic
- Embody
- Ağırlıklı olarak 'embody'
- Natural with formal elements

Alt Göstergeler

- Counterexample
- Doğru olduğu bilinen ifadeler
- Grafik, tablo
- İnformel

Doğal

Tall

Formel

ETKİNLİK 1

Melis, " $x > 0$ ise $x + \frac{1}{x} \geq 2$ " olduğunu iddia etmektedir.

Şimdi Melis'in iddiası her zaman doğru mudur? Neden?

$x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$

$0 < x < 1$

$x \geq 1$

$x = 0,5 = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} + 2 \geq 2$

$x = 1$ $1 + 1 = 2$

$x > 1$ $2 + \frac{1}{2} > 2$

$f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f(1) = \frac{1^2 + 1}{1} = 2$

$x = 0,1$ $0,1 + \frac{1}{0,1} = 10,1$

$x = 1,1$ $1,1 + \frac{1}{1,1} = 1,1 + \frac{10}{11} = 2,09$

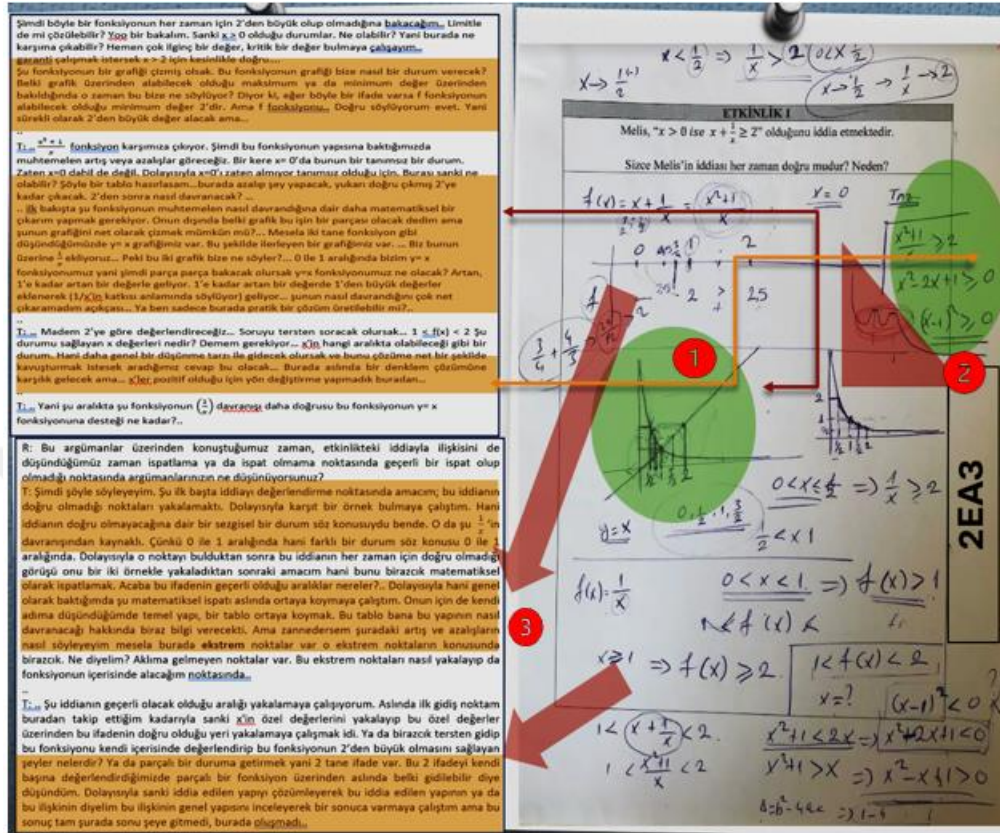
$x > 2$

$1 < x < 2$

Şekil 4.11. 2EA3'ün Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri (ilk girişimler)

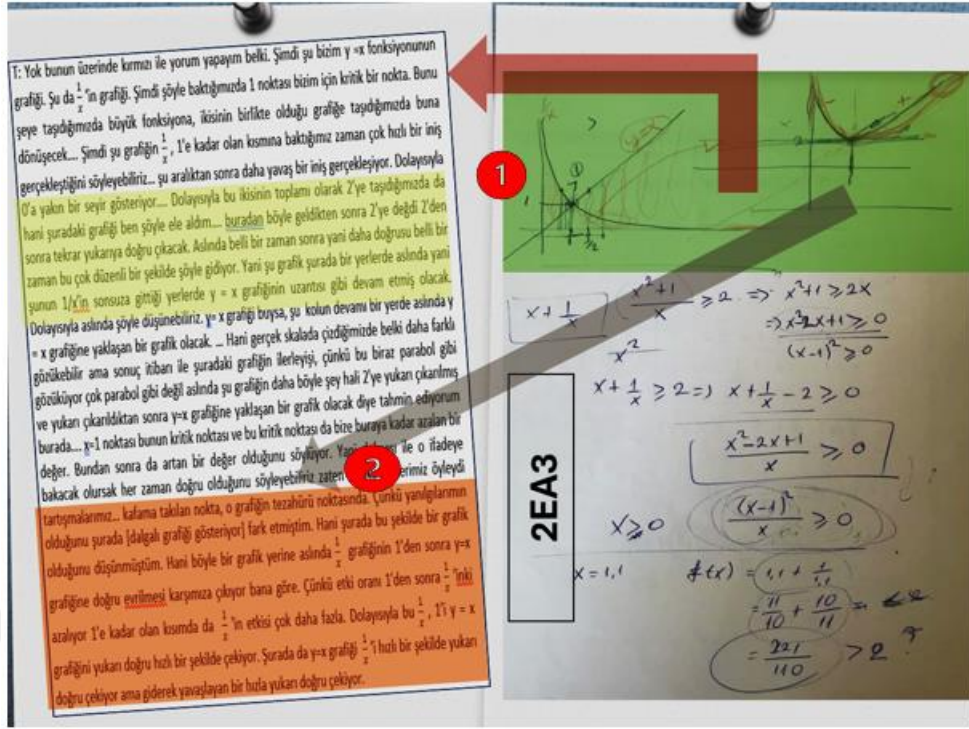
Şekil 4.12'de, 2EA3'ün daha çok ikincil girişimleri olarak görülmekte olan araştırma süreçlerinin içerisinde, artık fonksiyonun grafiği üzerinden daha açık gelebilecek fikirleri edinmek adına, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğini çizibildiği takdirde iddia ile eşleştirebileceği yapıyı yani fonksiyonun alabileceği minimum değerini gerçekten 2 olarak tespit edebilirse araştıracağı şeye daha yakınlaşmış olacağına doğru bir söylemde bulunacaktır. Burada ise fonksiyonun artan ve azalan olacağı durumları görebilmek için bir tablo yapma ihtiyacı duymuştur. Verdiği bazı değerlerle az çok grafiğin şeklini kestirebilme çabasına girmektedir. Bu süreçte fonksiyonun kendisinin grafiğini net bir şekilde çizibilmenin zorluğu altında (Şekil 4.12'de 3 numaralı bölüm), fonksiyonu kendi içerisinde iki farklı fonksiyonun toplamı olacak şekilde bir düzenlemeyle, $y = x$ ile $y = \frac{1}{x}$ şeklinde (Şekil 4.12'de 1 numaralı bölüm) parçalamanın kendisine nasıl bir çıkarım yapmasına izin vereceğini tartmaktadır. Bu iki fonksiyonda x 'e verdiği değerlerin etkisini ayrı ayrı göz önünde bulundurup daha sonra toplam birbirlerine olan katkısını saptamaya çalışmaktadır. Burada pratik bir çözüm tam

yakalayamadığı için tekrar orijinal ifadedeki eşitsizliğin biraz düzenlenmiş haline geri dönmüştür (Şekil 4.12’de 2 numaralı bölüm).



Şekil 4.12. 2EA3’ün Melis’in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri (ikincil girişimler)

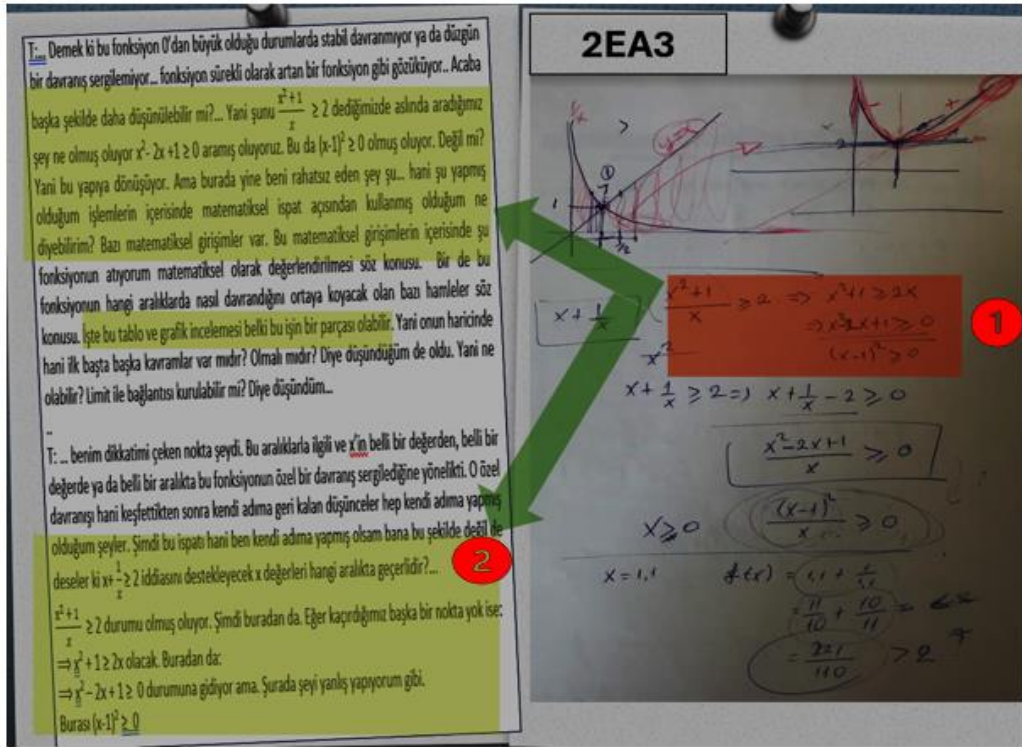
2EA3 matematik eğitimcisi Şekil 4.13’te, Şekil 4.12’den yeşeren iki ayrı fonksiyonun grafiklerini tekrar gündeme getirmektedir (1 numaralı bölüm). $y = x$ ile $y = \frac{1}{x}$ fonksiyonlarının ortak kesiştiği nokta $x = 1$ ’dir. Ana fonksiyonu bu fonksiyonların toplamı, yani $f(x) = x + \frac{1}{x}$ dir. $x = 1$ noktasında iki fonksiyon, ana fonksiyonun değerini 2’ye ulaştıracaktır. $y = \frac{1}{x}$ ’in 1 noktasına kadar olan değerleri fonksiyonda azalan değerlere karşılık geldiğini belirtir. x ’in belli bir değerinden sonra bir yerde bu iki fonksiyonda birbirinin uzantısı gibi görünecek yapıların olabileceğini ifade etmektedir (Şekil 4.13, 2 numaralı bölüm).



Şekil 4.13. 2EA3'ün Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri (ikincil girişimin iyileştirilmesi)

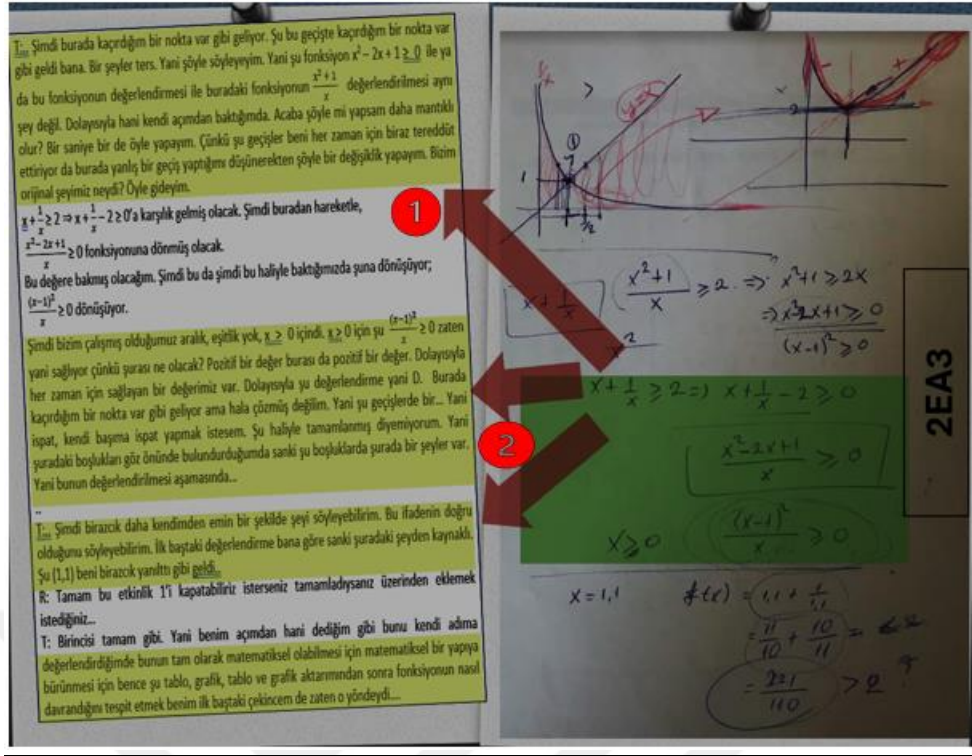
Şekil 4.14'te ise 2EA3'ün toplam fonksiyon üzerinden yaptığı yorumdan farklı bir düşünce sıçramasında bulunduğu araştırma sürecine ait etkinlik kağıdındaki çalışmaları ve ilgili görüşlerinden kesitler paylaşılmıştır. Burada Melis'in iddiasındaki eşitsizliğe tamamen odaklanmaktadır. Biraz düzenlemeyle ve hızlı olarak elde ettiği, “aradımız şey” olarak belirttiği $x^2 - 2x + 1 \geq 0$ ifadesi ve bundan elde ettiği $(x - 1)^2 \geq 0$ ifadesidir. Bu yeni dönüştürdüğü yapıda kendisini matematiksel ispat anlamında rahatsız eden bir noktaya değinmektedir (Şekil 4.14, 1 numaralı bölüm ve karşılık gelen görüşme kesiti). Hem burada hem de daha önceki girişimlerinde fonksiyonun nasıl davranacağı ile düşündüğü, tablo ve grafik incelemeleri (hatta aklına gelemeyen ekstremum), 2EA3'ün düşünme deneylerinde harekete geçirilememiş formel izler taşıdığına işaret etmektedir.

2EA3, bu bölümde eşitsizlik üzerinde ısrarcıdır. Melis'in iddiasını bu kez, verildiğinden farklı bir yapıda “ $x + \frac{1}{x} \geq 2$ iddiasını destekleyecek x değerleri hangi aralıkta geçerlidir?” bakış açısıyla (Şekil 4.14, 2 numaralı bölüme karşılık gelen görüşme kesiti) yeni yaklaşımını oluşturma gayretindedir. Burada benzer şekilde yine bir şeyleri kaçırmış/yanlış yapıyormuş hissine kapılmaktadır.



Şekil 4.14. 2EA3'ün Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri (ikincil girişimden sonra yeni fikirler)

Şekil 4.15'te tekrar yaptıklarını daha iyi analiz edebilmek için, tıpkı bu araştırmadaki matematikçilerden bazılarının (1MA2 ve 1MA8) yaptığına benzer bir düşünceye giriş yaparak $x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$ ifadesi üzerinden yaklaşmaktadır (1 numaralı bölüm). Burada daha önceki girişimlerinden elde ettiği $x^2 - 2x + 1 \geq 0$ ile $\frac{x^2+1}{x}$ fonksiyonunun değerlendirmesinin aynı olamayacağını farkındalığına sahiptir. Yaptığı geçişler, yanlış bir geçiş yapıp yapmadığı noktasında kendisini tereddütte bıraktığını ifade ederek Melis'in orijinal ifadesinde ufak bir değişikliğe gitmiştir. Her ne kadar buradaki yaklaşımları 1MA2, 1MA7 ve 1MA8 matematikçileri gibi belli yönlerde örtüşse de temel ayırım, fikirlerin geri dönüştürülememesidir (bkz. 1MA7). Buradaki bir diğer ayırım, 1MA8'in çalışmasında $x + \frac{1}{x} - 2$ ifadesinin neye eşit olduğunu açıklamayla hareketlendirilmişken, 2EA3'te $x + \frac{1}{x} - 2$ ifadesinin yanına hemen konulmuş " ≥ 0 " eşitsizliği durumu karmaşıklaştırmaktadır. Ya da burada 1MA1'in yaptığı gibi ince bir ayarla ya araştırmak istediği ya da "?" bir nitelik bu karışıklığı önleyebilirdi. Zaten kendisi de "şu haliyle tamamlanmış diyemiyorum" söylemiyle durumun farkında olduğunu paylaşmaktadır (Şekil 4.15'te 2 numaralı bölümle ilişkili kesit).

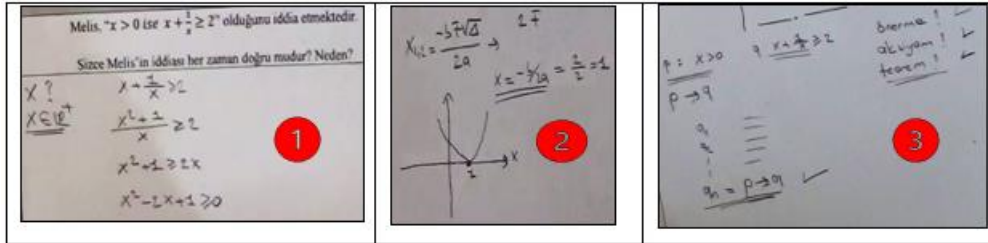


Şekil 4.15. 2EA3'ün Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri (eski ve yeni girişimlerinden elde ettiği çıkarımlar)

Melis'in iddiasını araştırırken doğal yoldan ispatlama girişiminde bulunsa da matematiksel ispatın olması gerektiği bir çerçevede yapılması gerektiğinin farkında olan bir diğer matematik eğitimcisi 2EA4'tür. Araştırma sürecinde yaptıklarını sezgisel olarak değerlendirdiğini fakat matematiksel ispattan bahsedildiği için çalışmasının formel izler taşıması gerektiğinin bilincinde olduğunu özellikle vurgulamaktadır. Bu nedenle formel olan o süreci iyi işletemediğinin farkında olduğunu ifade etmektedir. 2EA4'ün çalışmasıyla bütünleşen düşünceleri birlikte ele alındığında, formelin farkında ama işletilemeyen bir pratikle çerçevelenmektedir. 2EA4'ün araştırma süreci genel hatlarıyla aşağıdaki gibi ilerlemektedir.

İddiyayı araştırmaya başlayacağı bir hareket noktası belirlemiştir. Bu anlamda x 'in ne olduğunun belirtilmediğini ifade etikten sonra sıfırdan farklı pozitif bir reel sayı olduğu varsayımı altında bir araştırma sürecine girmektedir. İlk etapta, iddianın bağlamını doğal sayı olsaydı ne olurdu şeklinde bir düşünme sürecine girmiştir. Birkaç örnekle deneme yapıp eşitsizliğin olup olmadığını görme amacıyla bunu yapma niyetinden bahsetmiştir. Düşünce deneylerinin bu parçasında sözel bir dil aktiftir. Araştırma tabanı pozitif reel sayılar olduğu için ispat yöntemlerinden

tümevarımın, uygulayabileceği küme için uygun olmadığını belirtmiştir. Bunun yerine, kendisinden isteneni farklı bir hale sokmaya çalışacağını ifade ederek cebirsel bir denklik kurmayla iddiayı araştırmaya başlamıştır. Ağırlıklı olarak sembolik bir dil kullanmıştır (Şekil 4.16, 1 numaralı bölüm).



Şekil 4.16. 2EA4'ün Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri

2EA4: o zaman ben şimdi şuradaki (1. adımda $x + \frac{1}{x}$ ifadesinin yanına ≥ 2 yazıyor) bana verilen ilk matematiksel ifadenin $[x + \frac{1}{x} \geq 2]$ ikinci dereceden bir denkleme $[x^2 - 2x + 1 \geq 0]$ denk olduğunu gördüm. Şimdi bu $(x^2 - 2x + 1 \geq 0)$ gösteriyor) artık bir parabol denklemine dönüştü. Bu $x^2 - 2x + 1$ her zaman 0'dan büyük müdür? Dolayısıyla bu (soru demek istiyor) aslında, $x + \frac{1}{x}$ her zaman 2'den büyük müdür sorusuyla denk.

Parabolün grafiğini çizebilmesine yardımcı olan kök bulma (delta) formülünü uygulamıştır. Eşitsizlikteki eşitliğin geldiği, x eksenine grafiğin temas ettiği 1 noktasını elde etmiştir. Parabolün kollarının yukarı olmasını bulduğu noktayla birlikte yorumlayarak grafikten gördüğü durumlar üzerinden ifadelerine yer vermiştir (Şekil 4.16, 2 numaralı bölüm):

2EA4: ... Şurası 1 olsa (grafikte 1 noktasını yazıyor) x yerine 1 yazsam $[x^2 - 2x + 1]$ ifadesinde $1 - 2 + 1, 0$ yapar. Şöyle olacak (1'den geçen parabolün sağ kolunu çiziyor). Peki nerede keser? İşte en azından şeyi belli oldu (parabolün 1'in sol tarafına düşen parçasını çiziyor). İşte bunun (parabolü göstererek) hiçbir zaman negatif bir değer almadığı. Ha! Burada ama şeye dikkat edelim, ≥ 2 diyor (iddiadaki eşitsizliği referans ediyor), ≥ 0 ($x^2 - 2x + 1 \geq 0$ gösteriyor). 0 değerini alabiliyor (grafikteki $x=1$ noktası bunu sıfırlıyor anlamında belirginleştiriyor). Dolayısıyla o da sorun değil. O zaman matematiksel olarak onun [iddia] bir dengini (parabolü kastediyor) bulup dedik ki, Melis haklıymış. Evet. Yani bu aslında tabi sezgisel bir ispat yapmış olduk burada....

Böyle olmakla birlikte 2EA4, ilk argümanlarını formal dille kur(a)madığının farkındadır. Bunun yanı sıra aksiyomatik yapıdan haberdar olduğunu belirtmektedir. İddia için formal dili kullandığı argümanlarına küçük bir alan açmıştır (Şekil 4.16, 3 numaralı bölüm):

2EA4: Bu zor. Yani bu aslında Nasıl bir şey? Mesela şimdi şey olarak düşünelim, diyelim ki mesela formel matematiğe bunu dönüştürmeye çalışsak. x büyüktür 0'ı bir önerme olarak alsam mesela. Buna mesela p önermesi desem: x büyüktür 0... benden [iddiada] istenen ikinci kısma buna da q diyelim ki q ne diyor. $x + \frac{1}{x}$ büyük eşit 2 midir? ($q: x + \frac{1}{x} \geq 2$ yazıyor). p ise q 'yu mu şimdi göstermeye çalışacağım? Bu durumda mesela p 'yi ve q 'yu doğru kurdum mu? Bunlar önerme olur mu? Bunların önerme olduğundan eminsem, orada iş biraz şeye dönüyor. Onu nasıl diyelim, biçimsel matematikte her bir matematik[sel] ifadeyi (iddiayı işaret ediyor) bir önerme olarak ifade edebiliyorum. Ve ondan sonra matematik[sel] ispat dediği şey neticede bir önermeler yığını olacak. Burada diyelim ki q_1, q_2 şöyle en son q_n 'e geleceğim (alt alta $q_1 q_2 \dots q_n$ yazıyor) ve bu q_n şu olacak işte ($q_n = p \rightarrow q$ yazıyor). Şuradan başlayıp (q_1 den aşağıya doğru satır satır çizgi çekerek gösteriyor) böyle önermeler yığını bulabilirsem bu sonuca (son satırdaki $p \rightarrow q$ gösteriyor) ulaşan, o zaman bunun son satırı teknik olarak formel matematikte, bu ifadenin (Melis'in iddiasını işaret ediyor) ispatı olacak. Yani formel matematikte tanımlanan ispat, aksiyom filanın böyle bir yapısı var (bu son yaptıklarını gösteriyor) ama bu yapıyı bilmiyorum yani haberdarım ama işletecek kadar iyi değilim orada. O yüzden bizim burada yapmış olduğumuz (parabolle yaptığı ilk yaklaşımını gösteriyor) sezgisel matematiğin yaptığı iş. Eskiden yirminci yüzyıla kadar yapılan şekliyle bir gösterim (yine ilk yaptığı yaklaşımı üzerinden konuşuyor) ama asıl biçimsel matematikle gösterilen şekli böyle bir şey olacak (önermelerle ifade ettiği ikinci yaklaşımını gösteriyor). Burada şeyler falan inşa etmek lazım. Burada mesela ne devreye giriyor? Şimdi mesela şey düşün. p bir önerme midir? ($p: x > 0$ dakini işaret ediyor) Önermedir değil mi? Neticede buna doğru ya da yanlış, o bile problem. Çünkü şeyi bilmemiz lazım. Önerme nasıl tanımlanıyor, aksiyom nasıl tanımlanıyor? ve de teorem nasıl tanımlanıyor? şeyde, biçimsel matematikte. Şimdi bunu bilirse ben, mesela bu bir önerme midir (1.satırdaki p 'yi işaret ediyor) karar vereceğim (önerme? karşısına tik atıyor). Önerme ise o zaman burada q_1, q_2, q_3 aksiyomları oluşturmaya çalışacağım. Öyle ki o aksiyomun da son satırı ve benim istediğim $p \rightarrow q$ ifadesi oluyor mu? Eğer olursa o zaman ben diyeceğim ki ben bunu matematiksel olarak ispatladım. Bu zaten şeyin inşasında yirminci yüzyıl başladığında işte formelciler böyle bir yapı (2. yaklaşımını gene işaret ediyor) inşa etmeye çalışıyorlar. Diyorlar ki öyle bir mantıksal yapı kurmamız gerekiyor ki şu ana kadar sezgisel matematikte (ilk yaklaşımını işaret ederek belirtiyor) yapılan her şey, yani şurada (ilk yaklaşımı gösteriyor) yapılan her şeyi önerme-aksiyom-teoremler (2. yaklaşımı gösteriyor) ile yapısal olarak ispatlanabilsin. Yani bu [2. yaklaşım] aslında şunun [1.yaklaşım] biçimi. Ama bu aradaki bağlantıyı kurmak benim için zor. Yani mesela burada yazmış olduğum hangi ifade bir önermedir (1. yaklaşım 1. satırı gösteriyor), nasıl ilerliyoruz onu böyle p 'lerle q 'larla (2. yaklaşımdaki gibi) göster desen, o çok uğraştırır, işin içinden çıkılmaz.

Yaptığı ama olması gereken ispattan bahsederken sürekli sezgisel ve biçimsel matematiğin yapı ve doğasından bahsetmektedir. Ağırlıklı olarak burada kullandığı dil sözeldir. Yine de kendi sınırlarının farkındadır:

2EA4: Şöyle. Şimdi bu zaten alışkın olduğumuz için sırf (1. yaklaşımı gösteriyor), hep bunu görürüz. Bir de bunu somut düşünmek daha kolay. Burası (2. yaklaşımı gösteriyor) daha biçimsel yapı daha soyut. Burada sadece p 'ler q 'larla falan düşünüyorsunuz. Ya belki şöyle bir şey örnek vereyim... Mesela okur yazar olmayan bir kişi de oturup bizimle konuşur. Onunla anlaşırsınız ama biz mesela desek ki o kurduğün cümlede mesela hangisi sıfat, hangisi yüklem, hangisi özne; bunu bilmez. Bu da böyle. Burası (1.yaklaşımı gösteriyor) bizim günlük konuşma dilimiz aslında alışkınız buna. Birbirimizden göre göre böyle konuşmayı (1.yaklaşımındaki basamaklarını gösteriyor) öğrenmişiz. Ama şimdi bana sorsan ki bunun [1.yaklaşımında] hangisi önerme, hangisi aksiyom; bu yapıyla (2.yaklaşımındaki mantığı gösteriyor) nasıl örtüşüyor? Tıpkı okur yazar olmayan bir kişiye bunun hangisi sıfat, hangisi fiil filan diye sormaya benziyor iş. O yüzden burası (2.yaklaşımından bahsediyor) çok keyifli bir alan elbette ama biraz zor bir alan. Bir de bizim henüz müfredatımıza falan da girmiyor. Mesela kümeleri diyelim ki biz hala eski sistem anlatıyorduk nesnelerin topluluğu filan diye. Ama yeni (yine demek istiyor ve 2.yaklaşımı gösteriyor) bu şeyde, biçimsel matematikte kümeler dediğimiz şey işte önermelerle aksiyomlarla falan inşa edilen bir matematiksel yapı, çok soyut bir şey. Yani onu böyle günlük hayattaki gibi elemanların topluluğu falan diye düşünemiyoruz zaten. Gerçekle bağlantısını koparmış oluyorsun. Aslında şey olarak düşündüğünde daha soyut açıdan düşündüğünde burası daha soyut (2.yaklaşımı gösteriyor) bir alanken burası daha somut [1.yaklaşım]. Burada düşünüyorum mesela x derken x^2 derken aklımda sayılar var. Onların karelerini falan alıyorum. Burası daha somut bir alan olduğu için ilk akla o geliyor. Sezgisel bir alan olduğu için. Ama asıl ispat, matematiksel ispat bu (2.yaklaşımı gösteriyor). Hatta burada belki şeyi de söyleyeyim sana zaten bunun ortaya çıkmasının sebebi de bu mesela yirminci yüzyılda insanlar matematikte şeyi sormaya başlamışlar: ya ben mesela bunun [1.yaklaşım] ispat olduğunu nereden mi biliyorum? Bunun [1.yaklaşım] bana ispat olduğunu kim ispatlayacak? O zaman şey ortaya çıkıyor. Matematikçiler şeyi soruyorlar, ispat ne demektir, önerme ne demektir? Mesela biz diyelim ki şimdi önermeyi (önerme? işaret ediyor) nasıl tanımlıyoruz matematikte? Doğru ya da yanlış diye bir hüküm verebileceğimiz matematiksel ifadelerle bir önermedir diyoruz ama bu bile sezgisel bir tanım. Yani matematiğin, aksiyomatik matematikte önermeyi bu şekilde tanımlamıyoruz. Yani önerme dediğin p_1 p_2 p_3 diye ifadeler sadece. Aksiyomu biz nasıl tanımlıyoruz? Doğruluğunu tartışmasız kabul ettiğimiz ifadelerdir diyoruz ama aksiyomatik matematikte aksiyom öyle tanımlanmaz. Aksiyomun bir koşulu var. Şu koşulu sağlayan önermeler [hayali olarak kalemle yazıyor gibi yapıyor] aksiyomdur diye bir tanımlı var. Dolayısıyla burası artık [2.yaklaşım] şeye hiç boşluk bırakmıyor biçimsel matematik. Burada [2.yaklaşım], bu bir ispat mıdır, değil midir? Bunun ispat olup olmadığını nereden biliyoruz kısmına bir çerçeve getiriyor [2.yaklaşım]. Diyor ki, buradaki [1.yaklaşım] argümanlarını sen bu şekilde [2.yaklaşım] bir aksiyomatik bir silsile ile yazıp şeye ulaşırsan (q_n satırını gösteriyor), son ifade olarak da göstermen gereken argümana ulaşırsan bu bir ispattır diyor. Dolayısıyla onun ispat olduğunu da matematiksel olarak garanti altına almış oluyorsun. Bir başkası çıkıp diyemez ki, hayır, bu [2. yaklaşım] bence ispat değil. Ama mesela burada [1.yaklaşım]

yapmış olduğum, şeye, biraz daha tartışmaya açık olabilir. Bu üstünde işte bunu buldum vs gibi daha bir sezgisel dünya bu [1.yaklaşım] ama bu [2. yaklaşım] biçimsel dünya artık o tartışmalara son vermiş durumda. Ama bize uzak bir dünya [2. olan] şu an bunu kim biliyordur? Bunu matematikçiler biliyordur... Ama neticede böyle [2.yaklaşım] bir dünya var, haberdarım o dünyadan ama o dünyayı işletemiyorum. Çok biraz işimizin de uzağında olduğu için.

Sınırlarının farkında olmasıyla birlikte argümanlarını formel matematiğe geçirebilme isteği düşüncelerini sarmaktadır. İyi tanımlanmış, niceleyicilerle önermelerin ilişkisi halinde aksiyomatik yapıyla bağlantı kurabilme arzusunu her fırsatta dile getirmiştir:

2EA4: ... Bunun şey kısmı ilginç olur mesela şuradaki ifadeleri [1.yaklaşımın içindekileri] böyle önermeler [2.yaklaşımındaki gibi] olarak ifade edip, burada yazdığım her şeyi [1.yaklaşımın içindekileri] bile önermelerin biçimi olarak [2.yaklaşımındaki gibi] görmek isterdim. ...Şey de var orada, Hilbert'in, aklımdan geçen şey şu, diyor ki, "öyle bir matematiksel yapı kurmalıyız ki bu yapı bize doğru her ifadenin bir ispatının olduğunu göstermeli, o işin ispat olup olmadığını bana garantilemeli. İçinde çelişki barındırmamalı ve sen bana nasıl bir matematiksel ifade verirken ver ben onu bildiğim matematiksel ifadelerin bir sonucu olarak yazılabildiğini görebilmeliyim. Böyle bir matematiğe ihtiyacımız var" demiş ve o formel matematik inşa edilmiş. Şimdi dolayısıyla o formel matematiği biliyor olsam... O alanda yetkin olsam...

2EA4'ün görüşlerinde yer verdiği gösterim kavramı, dikkat edilirse 2EA7'nin çalışmasının içerisinde ve söylemlerinde de karşılık bulmaktadır. İspat ve gösterim arasındaki farklılık tam da 2EA4'ün söylemlerinde yapılan işin doğasını açıkladığı yerde kendini göstermektedir. Bu açıdan 2EA4 ile 2EA7 (en azından) Melis'in iddiasını araştırmada izlediği yollar açısından karşılaştırıldığında, tamamen doğala sınırlı olmaya karşılık doğal yapılan fakat olması gereken bu değilin ötesine taşınmış bir niteliktedir.

Melis'in iddiasını araştırırken doğal yoldan ispatlama girişiminde bulunsa da matematiksel ispatın olması gerektiği bir çerçevede yapılması gerektiğinin farkında olan matematik eğitimcilerinden biri de 2EA5'tir. Bu matematik eğitimcisi de 2EA3 ve 2EA4'e benzer şekilde bir araştırma sürecine girişmiştir. 2EA5 matematik eğitimcisi, 1MA9 matematikçisi gibi bazı özel aralıklarla ilgilenerek durum analizi yöntemini işletmeye çalışmıştır. Denediği örneklerle aklının hep bir köşesinde "hep oluyor gibi ama ispat değil" düşüncesiyle birlikte "ispatlamaya çalışacağım ama biraz daha yaklaşayım" şeklinde eşlik eden söylemleri

bulunmaktadır. Daha sonra sezgisel olarak “Melis’in iddiası doğru gibi görünüyor” diye ifade etmektedir. Bu aşamadan sonra ispatlamanın bir yolunu bulma arayışına girmektedir. İlk denemesini tümevarım yöntemiyle gerçekleştirmiştir. Yürüttüğü çalışmasında iddiadaki eşitsizliği oluşturabilmede kendisine kolaylık kazandıracak ve yol aldıracak bir bilgiyi ararken, ispatlama sürecinin içerisinde “şu an göremiyorum, biraz düşüneyim” şeklinde söylemleri hakimdir. Duyguları kesinlikle ≥ 2 olduğunu söylese de bunu matematiksel bir yolla göstermem lazım diye özellikle vurgulamıştır. Bu aşamada duygularını bastırmıştır. Tümevarım dışında alternatif başka bir yolla araştırma düşüncesi, “ ≥ 2 olmasın” şeklinde sözlü olarak ifade ederken kendisine çok elverişli gelmediğinden bu yoldan vazgeçmiştir. İspat yöntemleriyle herhangi bir sıkıntısının olmadığını, şu an biraz beceri gerektirdiğini çünkü “yeni bir şey yapmam/keşfetmem gerekiyor” şeklinde düşüncelerini açıklamıştır. İlk baştaki girişiminden, önce sezgisel olarak doğru olup olmadığını çeşitli durumlar altında incelediğini, bu sezgisel yaklaşımının ispat olmadığını, sadece kendisini ikna etmek için örneklerle kontrol etme ihtiyacı duyduğunu belirtmiştir. Durumlara ayırırken doğrudan bir ispatla ilerlemeye çalışmıştır. IMA9’nın ön çalışmasında yaptığı gibi, örnekler yerine daha rasyonel sayılarla ilerletme ihtiyacı hissederek genel bir yapı ortaya koyabilme ve bunun üzerinden hareketlendireceği matematiksel ispata dönüştürme isteği vardır. Yürüttüğü çalışma doğal sınırlar (somut ve sembolik) içerisinde kalsa da, şu an stratejik bir manevraya ihtiyacı vardır ve bunu göremediği için formel anlamda bir ispata dönüştüremediğinin farkındadır. Tümevarım yöntemiyle başlattığı araştırmasında ilk kendini gösteren formel anlamda zinciri tamamlayamama, çalışmasını ilerletememesine neden olmuştur.

4.2.3 Matematik Programı Öğrencilerinin Matematiksel İspat Pratikleri

Araştırmadaki matematik programı öğrencileri Melis’in iddiasını araştırırken genel olarak doğal sayılar ya da pozitif tamsayıları iddianın çalışılacağı küme şeklinde otomatik belirleyerek yol almaktadır. Görüşmelerinde daha sonra bu durumlar açığa çıkmaktadır. Bazı öğrencilerin $x > 0$ şartını sağlayan en küçük değeri $x=1$ atamalarının sebebi örtük bir şekilde tamsayılar ya da doğal sayılar üzerinde çalışmalarıyla anlaşılmaktadır. Bazı öğrenciler ise verilebilecek en küçük değer sağlanırsa hepsi sağlanır düşüncesine sahiptir. Öğrencilerde görülen diğer bazı

durumlar, eşitsizliğe odaklanılan durumlarda çözüm kümesi arayışı, çarpanlara ayırma, kök bulma, paydadaki x 'i yok etmeyle sonuçlanan otomatik içler-dışlar yapma (kural ihlalleri; öncülü görmezden gelme), cebirsel otomatikleştirme, adımlar arası geçişlerin anlamını bilmeden ilerleme, tam kareli ifadeye ulaştıktan sonra otomatik tablo çizme (hatta burada bir durup düşünmek yerine farklı yönelimler; örneklerle bir daha sağlatma, garantici davranma) gibi sıralanabilmektedir. Ayrıca bu programdaki öğrencilerin birkaçı etkinlikteki niyete erişim engeliyle karşı karşıyadır. Alışlagelen “olduğunu gösteriniz”, “ispatlayınız” denmedikçe ispat sunmak yerine sadece sağlayıcı değerlerin yeterli olmasıyla ilgilenen öğrencilerin aşinalık problemi vardır. Bu programdaki bazı öğrencilerin yer yer ispatlama girişimlerinin içerisinde sınavda olsa ya da sınav gibi bir ortamda olmasa tek başına ispat yapmış olsa ya da öğretmenine daha iyi bir ispat yapabilmek için yaptığı çalışmasına ekstra eklemelerde bulunma ya da makale olarak yayınlanabilmesi için ciddi bir ispat yapılması gerektiği ya da düşünceden çok yazılı çalışmada da her şeyin detaylandırılmasına yer verilmesi gibi noktalardan bahsettikleri görülmektedir.

Araştırmadaki matematik programı öğrencileri ağırlıklı olarak (6) Melis'in iddiasını araştırma sürecinde doğal bir yoldan ilerlemiştir. Bu öğrencilerden 3'ü Melis'in iddiasını araştırma sürecinde daha çok denklem çözme, çarpanlarına ayırma, çözüm kümesini bulma, eşitsizliği çözme şeklinde bir bakış açısıyla hareket etmektedir. Bu şekilde hareket edenlerden 3MÖ5'in ilk hamlesi, verilen eşitsizliği çözmeye çalışacağını, buradan x 'in geleceği değerleri bularak “her zaman doğru olur mu yoksa x başka bir değer alabilir mi” gibi bir düşünme şeklinde ilerleyerek bunu görmeye çalıştığından bahsetmiştir. Bunu yapmasındaki niyetinin ne olduğunu açıklarken aklına ilk bu çözüm yönteminin geldiğini ifade etmiştir. İfadelerinde sürekli vurguladığı denklemi çözme ve çarpanlarına ayırma işlemine giderek x yerine koyması gereken sayıları bulmayla ilgili bir yaklaşım içerisinde iddiayı bu şekilde kanıtlayabileceğini belirtmiştir. Eşitsizliği çözerken x 'in 0'dan büyük olma bilgisini ilk etapta çalışmasının herhangi bir yerinde kullanmamaktadır ya da dikkate almamaktadır. Şekil 4.17'de 1 numaralı bölümde çarpanlarına ayırmada hata yaptığını fark edip 2 numaralı bölümde daha dikkatli bir şekilde işlemlerini ilerletmiştir. Çarpanlarına ayırdıktan sonra bulduğu kökü 1 olmuştur.

Melis, " $x > 0$ ise $x + \frac{1}{x} \geq 2$ " olduğunu iddia etmektedir.

Sizce Melis'in iddiası her zaman doğru mudur? Neden?

$$\frac{x^2 + 1}{x} \geq 2$$

$$x^2 + 1 \geq 2x$$

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$\begin{array}{r} x \\ x \end{array} \begin{array}{r} -1 \\ +1 \end{array}$$

$$(x+1)(x-1) \geq 0$$

$$\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}$$

$$2$$

$$x^2 + 1 - 2x \geq 0$$

$$\begin{array}{r} x \\ x \end{array} \begin{array}{r} -1 \\ -1 \end{array}$$

$$(x-1)(x-1) \geq 0$$

$$\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 1 \end{array}$$

$$1 + \frac{1}{1} \geq 2$$

Şekil 4.17. 3MÖ5'in Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri

Her ne kadar iddiayı araştırma girişimlerinde kafa karışıklıkları olsa da (bulduğu tek değer olan 1 sadece eşitliğin geldiği yeri gösterdiğini, 2'den büyük olduğunu göstermediğini söyleyerek, yer yer de iddianın her zaman doğru olmayabileceğine değinerek) odaklandığı tek şey eşitsizliğin çözüm kümesini bulmaktır. Eğer çarpanlarına ayırdığında negatif ve pozitif x değerleri elde etseydi bu kez, $x > 0$ olduğu için negatif değeri eleyeceğini pozitif değeri tutacağını söylemiştir. Tekrar neden böyle bir arayış içine girdiği sorulduğunda x 'e tek tek değer vermektense daha matematiksel bir yöntemle böyle yapmak istediğinden bahsetmiştir.

R: Anladım. Peki Melis'in iddiası üzerinden yine düşünersek iddia ettiği şey hakkında senin ulaştığın, ulaşmak için amacın orada neydi? Yani bu iddiayı araştırırken amacını bana bahsedebilirsin, neler yaptıklarını.

3MÖ5: Amacım şuydu; az önce de söylediğim gibi ilk olarak x için sabit bir değer bulmaya çalıştım. Yani x 'in verilen denklemde x 'e öyle bir değer koymalıyım ki yani 2'ye büyük ve eşit olduğu ile ilgili bir fikir edinebilmek için. Bu noktada da aklıma gelen ilk yöntem zaten az önce de söyledim tek bir denklem haline getirmek ve oradan bir çözüm kümesi elde edebilmek. x 'e bir değer koyabilmektir.

R: Bunu fikir amaçlı yaptığını söyledin.

3MÖ5: Evet.

R: Asıl amacın da bu muydu bunu araştırırken? Hani böyle söylediğin için merak ettim.

3MÖ5: Asıl amacım burada Melis'in iddiası ile ilgili doğru ya da yanlış olabilecek bir şey ortaya atmaktı ve aklıma gelen ilk yöntem bu oldu. Denklem kurmak ve çözüm kümesi elde etmek.

R: Bu amacına ulaştığın şey Melis'in iddiasını destekliyor mu? Desteklemiyor mu? Yani doğru mu? Yanlış mı? Ne düşünüyorsun bu iddia ile ilgili?

3MÖ5: Melis'in iddiasını destekliyor. Melis zaten 2'den büyük ya da eşit olduğunu söylemişti. Evet çözüm kümesini bulduğumuzda ve x 'i Melis'in iddia ettiği kısımda yerine koyduğumuzda x 2'e eşit oluyor. Yani Melis'in iddiası aslında doğru.

Bu iddia üzerinden başka bir yolla düşünüp düşünmediğini anlayabilmek için iddiayı araştırabilmenin başka yollarının olup olmadığı sorulmuş fakat ısrarla karşısına böyle bir soru çıksa ilk aklına gelecek şeyin bu olduğunu, başka bir yöntem kullanmayacağından bahsetmesi, 3MÖ5'in tamamen sembolik dünyaya köklenmiş bir yaklaşım içerisinde (her ne kadar problemli bir doğal yoldan iddiayı araştırdığı görülse de) olduğunu göstermektedir. Son olarak yapmış olduklarını geçerli bir ispat olarak nitelendirip nitelendirmediği noktasındaki görüşleri şu şekilde olmuştur:

3MÖ5: Yani bu bir ispat olabilir. Çünkü bence bu çoğu kişide de akla gelebilecek ilk şey denklem çözmek olabilir. Yani x 'e bir değer vermek. Hani tek tek uğraşmak yerine böyle bir denklem kurup tek bir çözüm kümesi elde etmek. Bence çoğu kişinin aklına bu gelir. Bu bir ispat olabilir. İspat olur bence.

R: Peki bu yaptığın şeyleri ispat yapan şeyler nelerdir? Yani o özellikler nelerdir? Yani neresi mesela senin için ispat olarak anlamlı geliyor? Bana bunlardan da bahsedebilirsin.

3MÖ5: Kök bulduğumuz nokta ispat olarak. Ben öyle düşünüyorum şu kısmı. Şu kısımda; $(x-1).(x-1) \geq 0$ 'da iddiayı doğruladığımı düşünüyorum. Çünkü x 'in alabileceği başka bir değer yok koşulları da göz önüne aldığımızda.

Melis'in iddiasına eşitsizlik çözme şeklinde yaklaşan diğer 2 öğrenci de doğal yolla sembolik hareket alanı içerisinde ağırlıklı olarak yer almaktadır. Bu öğrenciler de 3MÖ5 gibi girişimlerinde problemli kompartımanlara sahip düşünme yapılarını barındırmaktadır. Genel olarak Melis'in iddiasını çözüm bulma şeklinde araştırmakla meşgul olan bu öğrenciler, " $x + \frac{1}{x} \geq 2$ eşitsizliğini sağlayan x 'in 0'dan büyük olan değerleri nelerdir?" gibi bir arayış içerisinde oldukları ya da bu sorunun ispatıyla (delili) ilgilendikleri izlenimi uyandırmaktadır.

Melis'in iddiasını araştırma sürecinde doğal bir yoldan ilerleyen matematik programı öğrencilerinden 2'si, iddianın içerisinde yer alan $x > 0$ bilgisinden hareket etmiş, x 'e 0'dan büyük en küçük değer olarak 1'i vererek eşitsizliğin sağlanıp sağlanmadığını incelemiştir. Bu iki öğrenci en küçük değer için eşitsizlik sağlanırsa diğerleri için de sağlanacağına/sağlanmış olacağına kesin gözüyle

bakmaktadır. 3MÖ8 soyut düşünmekten ziyade sayılarla mantığa oturtmaya çalıştığını, 0'dan büyük tam sayıları $x + \frac{1}{x}$ ifadesinde yerine yazdığını, bunu yaparken 1'i yeterli gördüğünü, sayı yukarı çıktıkça (x'e vereceği sayısal değeri büyüttükçe) $x + \frac{1}{x}$ ifadesinin 2'yi aşacağını dolayısıyla 2'den kesin olarak büyük olacağını net bir şekilde görebildiğini ifade etmiştir. Örnek olarak 9 değerini verince 2'den büyük bir sayı çıktığını gördüğünü söylemiştir. Diğer taraftan, ifadeleri incelendiğinde iddiayı doğal sayılarla araştırdığını fakat küme belirtilmediği için, $x > 0$ olduğunu anlayınca negatif tam sayı alamayacağını düşündüğünü, onun için de rasyonel sayılarda ya da pozitif tam sayılarda ya da doğal sayılarda çalışabileceğini düşündüğünü, buradan sonra farklı sayıları deneyerek de araştırmasını bir daha yapmak istediğini söylemiştir. Bu noktada ise ondalıklı sayılar üzerinden kendisine referans aldığı değer 0,1 olmuştur. Bu kez ondalıklı sayıları temsil edebilecek (genelleyici tarzda) 0,1 değerini (aynı zamanda 0'dan büyük en küçük değer olarak seçilmiş) ifadede yerine koyarak “yine en küçük sayıyı almama rağmen Melis’in iddiasının doğru olduğunu gösteriyor” diye belirtmiştir. Tüm çalışmalarını genel olarak değerlendirdiğinde hem pozitif tamsayı şeklinde aldığı hem de ondalıklı sayı şeklinde aldığı, denediğinde hepsinde iddianın doğru olduğunu gördüğünü söylemiştir.

R: *Ve bundan sonra da yaptığın işlemleri görmekteyim. Neden bu yolla yapmayı tercih ettin?*

3MÖ8: *Çünkü mantık olarak düşündüğüm zaman böyle sayı koyup olayları ispat etmek benim biraz daha anlayabildiğim veya kolayıma gelen bir şey. Çünkü böyle soruları hep bir mantığıma yatırmaya çalışıyorum veya bir gerçeğe uyarlamaya çalışıyorum. Onun için de hep böyle bir sayı deneyerek çözmek istiyorum soruları.*

...

R: *Peki burada yaptıklarını yine göz önünde bulundurduğumuzda bu yolla yaptığının nedenlerinden bahsettin. Bunu yapabilmenin başka yolları da var mıdır? Her zaman bu şekilde mi yaklaşırsın?*

3MÖ8: *Bunu yapabilmenin başka yollarının olabileceğini düşünüyorum. Ancak her zaman evet bu yolla yaklaşıyorum. Böyle sorulara baktığım zaman denklemin üstünden işlem yapmaktan ziyade sayısal olarak düşünüp, o yol ile ilerlemeye çalışıyorum.*

R: *Bu denklemin üzerinden işlem yapmaktan ziyade derken neden onun üzerinde işlem yapmayı tercih etmedin? Yani ona dair yapmayışının sebebini öğrenmek istiyorum.*

3MÖ8: *Çünkü öyle yaparsam yani denklem üzerinden işlem yaparsam gözümden bir şeyin kaçabileceğini düşünüyorum. Gerek x'i bir tarafa atmak olsun gerek hesaplamalar yaparken ama sayıları içe katarak bilinmezi ortadan kaldırıp sayıları içine katarak işlem yaparsam*

bana bunun daha net bir cevap vereceğini düşünüyorum. Onun için de sayısal olarak mantığıma oturacak şekilde sayılar seçerek denklemi çözmeye çalışıyorum.

R: Peki burada o zaman Melis'in iddiası üzerine senin ulaştığın şey ne? Yani kararın ne? Nasıl değerlendiriyorsun Melis'in iddiasını?

3MÖ8: Baktığın zaman Melis'in iddiasının her zaman doğru olabileceğini düşünüyorum. x 'ten büyük aldığım zaman, $x > 0$ aldığım zaman iddiasının her zaman doğru olabileceğini düşünüyorum. Bana bunu düşündüren de seçebileceğim en küçük sayıyı seçmeme rağmen bunun denklemin doğruluğunun çıkması. Yani 2'den büyük çıkması.

3MÖ8 gibi benzer araştırma sürecinde bulunan bir diğer öğrenci 3MÖ6'dır. Bu öğrenci açısından da ifadelerinde sıklıkla “en küçük sağlarsa otomatik olarak 2'den büyük çıkacak” söylemlerine rastlanılmıştır. Bu nedenle 3MÖ6, 1 değerini koyduğunda en küçük değerin sağladığını görmüş, ne koyarsa koysun 2'den büyük eşit olacağını ifade etmiştir. Çünkü 1 değeri itibariyle, 3 ve 4 koyduğunda hep bir artış gördüğünü, örüntü gibi ilerleyeceğini ve her seferinde 2'den büyük eşit olacağını, 1'den sonra giderek arttığını bunu verdiği pozitif tamsayılardan gördüğünü belirtmiştir (Şekil 4.18, 1 numaralı bölüm).

Handwritten mathematical work by student 3MÖ6 showing the investigation of the inequality $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Column 1 (Left):

- $x=1$: $1 + \frac{1}{1} \geq 2 \Rightarrow 2 \geq 2 \checkmark$
- $x=3$: $3 + \frac{1}{3} \geq 2$
 $\frac{10}{3} \geq 2 \checkmark$
- $x=4$: $4 + \frac{1}{4} \geq 2$
 $\frac{17}{4} \geq 2$
- General case: $x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$
 $x=1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{1} - 2 \geq 0$
 $2 - 2 \geq 0 \quad 0 \geq 0$

Column 2 (Right):

- $x = \frac{1}{2}$: $\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} \geq 2$
 $\frac{1}{2} + 2 \geq 2$
 $\frac{5}{2} \geq 2$
- $x = \frac{1}{3}$: $\frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{1}{3}} \geq 2$
 $\frac{10}{3} \geq 2$

Şekil 4.18. 3MÖ6'nın Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri

Yaptığı araştırmasının detaylarında bu şekilde yol almadaki kararlarının kaynağını öğrenmek için aşağıdaki görüşme kesiti paylaşılmıştır:

R: Yani sen Melis'in iddiasında neyi araştırıyorsun? Neyi bulmaya çalışıyorsun? Doğru olup olmadığına karar vermek için Melis'in iddiasında baktığın şeyleri bana tarif eder misin?

3MÖ6: Bu ifadenin 0'dan büyük bir değer verip 2'den büyük eşit olduğunu ispatlamak değil mi?

R: Peki ispatlamak ise eğer bu yaptığın şeyler seni ispatlamaya götüren şeyler mi? Değil mi? Bu noktada ne düşünüyorsun?

3MÖ6: Bence götüren şeyler. Yani büyük olduğunu kanıtlamış olduğumu düşünüyorum.

R: Peki her zaman bu ispatın geçerli olur mu? Olmaz mı?

3MÖ6: Yani bence olmayabilir ama şu an benim ilk gördüğüm bu yöntem oldu herhalde. Değer vermek oldu.

R: Değer vermekteki amacını da anlamak istiyorum. Neden Melis'in iddiasını araştırırken değer verme yoluna gittin?

3MÖ6: Bu ifadenin doğru olduğunu açıklayabilmek için. 0'dan büyük bir değer verip bu ifadeye 2'den büyük eşit olduğunu kanıtlayabilmek için.

R: Peki her zaman değer vererek bunun kanıtlanabileceğini görebildin mi? Yani bu konuda ne düşünüyorsun?

3MÖ6: (Düşünüyör). Yani bence aslında her zaman değer vererek olmaz ama ya benim gördüğüm şu anda bu değer vererek ya da şu anda burada olması gereken değer vererek diye düşünüyorum.

R: Peki burada Melis'in iddiasının doğru olduğunu belirttin. Ben, dediğim gibi bu etkinlikteki amacımız Melis'in iddiasının her zaman doğru olup olmadığı noktasındaki düşüncelerini anlamak. Yani bu Melis'in iddiası her zaman doğru mudur? Her zaman geçerli midir?

3MÖ6: Bence doğrudur.

Araştırma süreçlerinden bahsederken fark ettiği, iddiada verilen bilginin sadece 0'dan büyük dediğini, belli bir aralık verilmediğini ayrıca iddiada rasyonel sayı diye de belirtilmediğini kısacası hiçbir şey söylenmediğini açıklamıştır. Bunun üzerine yaptıklarının tam sayılar için doğruluğunu söyleyebileceğini ifade etmiş, hemen ardından rasyonel sayılar için de küçük bir araştırma yapmıştır (Şekil 4.18, 2 numaralı bölüm). Burada gördükleri çerçevesinde düşüncelerini şu şekilde ifade etmiştir:

R: Biraz önceki düşündüğün neydi? Şimdiki düşündüğün ne?

3MÖ6: Yani "sadece pozitif tamsayılar demek yerine hani acaba rasyonel sayılar falan da olabilir mi" diyorsun [kendine]. Çünkü bize öyle bir şart koymamış. Sadece $x > 0$ olduğunu biliyorum ama rasyonel sayılarda da değişmedi. Bence bu ifade doğru.

R: Yine benzer şekilde merak ettiğim şey şu. Her zaman doğru olduğunu nasıl, nereden bilebiliyorsun? Nasıl emin olabiliyorsun?

3MÖ6: Değer vererek.

R: Burada hangi değerleri verdin?

3MÖ6: Rasyonelde $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{3}$ değerinde 1, 3, 4.

R: Peki bu noktada eklemek istediğin başka bir düşüncen var mı?

3MÖ6: Yok hayır. Doğru olduğunu düşünüyorum.

Hem 3MÖ6 hem de 3MÖ8 öğrencilerinin Melis'in iddiasını bağlama göre araştırdıkları yani kendilerine iddianın içerisinde çalışılacak bir küme olmasa da kendilerince iddiayı araştırabildikleri kümeyi genel olarak pozitif tamsayıları seçtikleri görülmektedir. Bunun yanı sıra 3MÖ8 için durum biraz daha farklılık taşımaktadır. Çünkü iddiayı araştırma amacının yukarıda belirttiği “Bu ifadenin 0'dan büyük bir değer verip 2'den büyük eşit olduğunu ispatlamak değil mi?” şekilde ifade etmektedir. Bu doğrultuda 3MÖ6'nın etkinlikten anladığı bu düşünceyle sınırlıdır ve bu düşüncenin üzerine şekillenen değer verme amacının, kendisine verilen ifadenin doğru olduğunu açıklayabilmek ya da 0'dan büyük herhangi bir değer vererek ifadenin 2'den büyük ya da eşit olduğunu bir şekilde kanıtlayabilmekle ilgilenmesine izin vermektedir. Bu durum 1MA8'in bahsettiği, iddianın hangi küme etrafında araştırılacağı ile “her x için mi yoksa en az bir x vardır mı” şeklinde iddianın verilisiyle ilgili eksikliklerine değindiği yerde, öğrencilerinden 3MÖ6'nın bu şekilde algılayarak işlettiği duruma denk gelmektedir.

Melis'in iddiasını araştırma sürecinde 1 öğrenci formal yolla ilerletiyorken doğal yola geri dönmüştür. Fakat ilk etapta iddiayı araştırdığı ön denemeleri mevcuttur. 3MÖ9 öğrencisi iddiayı araştırmaya ilk olarak sorunun içerisinde yer alan “her zaman” ifadesine odaklanarak başlamıştır. Bir tane olmayan bir değer bulursa iddianın doğru olmadığını ispatlamış olacağını söylemiştir. İddianın içerisinde doğal sayı gibi bir küme belirtilmediği için ilk örneği 0'dan büyük $\frac{1}{2}$ olmuştur. Daha sonra $3, \frac{1}{8}$ gibi örneklerini farklılaştırarak, bazen çok büyük bazen çok küçük değerlerle, bazen genelleyici tarzda bilinçli seçimlerle, $\frac{1}{x}$ durumunu göz önünde bulundurarak, örnekleriyle sürekli olarak oynamaktadır. Her seferinde amacı aksine örnek yakalamaktır. Bu çabaları sonuç vermeyince zıt bir şey bulamadığı, ilk görüşünün yerini bu kez “her zaman doğrudur diyebiliriz” söylemine dönüştürüyor. Bu noktada iddiadaki eşitsizliğe odaklanarak, kesinliğinden emin olmak için ifadeyi açmaya çalışıyor. En son $(x - 1). (x - 1) \geq 0$ satırında duruyor. Bu aşamada da bazı sayısal denemeler yapıyor, doğru diyor.

Fakat matematiksel olarak ispatlayamadığını söylüyor. Burada bir detay olarak da şu ana kadar yaptıklarını düşündüğünde, sınavda olsa “kabul almazdı” diye belirtiyor. Burada yine matematiksel olarak ve ispat yöntemleriyle ispatlaması gerektiğini kendisine hatırlatmaktadır. Doğruluğunu anladığını (hatta ilerleyen ifadelerinde bu doğruluğuna kendisini ikna ettiğini) fakat kağıda matematiksel ispat anlamında dökmesi gerektiğini sürekli vurgulamaktadır.

3MÖ9: ...Bu ifadeyi tekrardan yazıyorum. (Düşünüyor). Bunun x 'den mesela küçük olma durumuna baksak. Çünkü yani küçük olmuyorsa hiçbir zaman, her zaman 2'den büyüktür diyebiliriz. (Kendi kendine soruyor): $x + \frac{1}{x} < 2$. Mesela 2'den küçük nasıl yapabiliriz? Mesela 3 verirse yine $\frac{1}{3}$ olmuyor... 3 küsur ve bu olmuyor. Mesela yani tabi bunu da böyle bulamam. Sadece şu an için ferahlatmaya çalışıyorum.

R: Neden orada küçük 2 yazdın? Yani burada farklı bir şey yaptığını görmekteyim.

3MÖ9: Evet.

R: 2'den büyük eşitten farklı olarak, 2'den küçük olduğu ile ilerledin.

3MÖ9: Evet.

R: Neden buna geçtin mesela?

3MÖ9: Çünkü mesela 2'den küçük olduğunu bulursam eğer bu ifadenin, $x + \frac{1}{x}$ ifadesinde 2'den küçük bir x değeri bulursam demek ki bu ifade $[x + \frac{1}{x} \geq 2]$ yanlış olur. Çünkü bunun $[x + \frac{1}{x} \geq 2]$ eğer tersi doğru ise bir tane x için bile olsa, bu ifade $[x + \frac{1}{x} \geq 2]$ yanlıştır diye şu an öyle düşündüm ama... Evet yani bence öyle. Çünkü 2'den küçük olduğunu bulursak bir tane x için bile de olursa olsun yani çünkü [iddia] her zaman doğru dediği için bizim bütün x 'ler için ispatlamamız gerekiyor. O zaman bir tane bile x [isyan ediyor] bulamadım. Bulsam o zaman ispatlamış olacaktım. O zaman demek ki bu her zaman 2'den büyük $[\geq 2]$ değildir [diyecektim]. Çünkü 1 tane x değeri bulduk ki [diyecektim], 2'den küçük [olacaktı]. Yani öyle düşündüm ama mesela öyle de 0 veremiyoruz. 0 versek şu an çok şey olacaktı ama ben bu ifadenin doğru olduğunu düşünüyorum ama ispatı tamamlayamadım. Yani doğru olduğunu biliyorum ama matematiğe dökemedim şu an.

R: Senin matematiğe dökememene neden olan şey ne? Engelleyen şey ne?

3MÖ9: Evet şu an neden olan şey, şu an ispat yöntemlerime çok şu an şey olamadım. Şu an aklıma gelmedi o ispat yöntemleri. Aslında illaki bunu ispatlayacak bir şey öğrendik yani. Çünkü temel ifadelerden biri. (Düşünüyor).

Niceleyiceleri doğru dönüştürmüştür, iddianın doğru olabileceğine dair düşünceleri vardır. Fakat bunu matematiksel ispatla noktalamak istediğini belirtmiştir. Bu noktada eşitsizlikle düzenleme yaptığı yere tekrar dönmüştür:

3MÖ9: ... $x^2+1 \geq 2x$ Bunu yapmıştım aslında. $x^2-2x+1 \geq 0$. Yani aynı şey geliyor. Buradan da sanırım bulacağım.... Sonra bunu çarpanlarına ayırdığımda $(x-1)^2$ geldi. Bu da 0'dan büyüktür. Bu ifade yani bizim bulduğumuz bu ifade aslında çarpanlarına ayrılmış şekli. Yani 0'dan her zaman büyüktür çıktı. Şurada en baştan başlayayım. Şurada; $x(x + \frac{1}{x}) \geq 2x$ ben iki tarafı da x ile çarpım. Çünkü $x > 0$ olduğunu bildiğimiz için yön değiştirmeyecek eşitsizlik... $(x-1)^2$ olarak geldi. $(x-1)^2 \geq 0$ 'dır. Çünkü kare olduğu için 0'dan büyük yani. Eksi bir ifadenin karesini alsan da pozitif olduğu için her zaman 0'dan büyük. Yani bizim aradığımız ifade yani her zaman yani aslında burada 2'den diyor ama ben onu her tarafı da x ile çarpıp $x > 0$ dediği için. Eğer $x > 0$ demeseydi yani 0'a da eşit değil. 0'a eşit olsa da olmaz. 0'dan büyük dediği için bu işlemi yapabildim. x ile çarpabildim. Çünkü eğer 0'dan büyük demeseydi, eğer öyle bir ifade kullanmasaydı çarpamazdım. Çünkü eşitsizliğin ne tarafta olacağını bilemezdim. Yani belki eksi, belki pozitif, belki yön değiştirecek. Onu bildiğim için x ile çarpıp bu eşitsizliğin doğru olduğunu ispatlamış oldum. Bence bu ifade oldu.

Bu noktada verdiği kararlar daha önce matematiksel ispatlama ile ifade ettiği şeyin bağlantısını kurup kurmadığını öğrenmek için aşağıdaki görüşme kesiti paylaşılmıştır:

R: Orada ne düşündün? Hani ispat yöntemleri başka da hani var derken. Onu anlamak için soruyorum bunu.

3MÖ9: Yani illaki var. Çünkü biz ispat yöntemlerini yine öğrendik ve bu da temel bir ifade. Yani illaki ispat yöntemleri var ama şu an hani şu an soruya odaklandığım için o yöntemleri şey yapamadım ama eğer o yöntemleri tabi ki kullansaydım çok daha rahat bir şekilde ve daha matematiksel, bu biraz daha yani şey oluyor. Daha böyle mesela şey olarak daha iyi ispatlardım. Şu an yani.

Bu aşamada daha çok soruya odaklandığı için matematiksel olarak ispat yöntemlerini uygulayamadığını belirtmiştir. 3MÖ9 yaptıklarını göz önünde bulundurduğunda geçerli bir ispat olarak görüp görmediği noktasından şu şekilde bahsetmiştir:

3MÖ9: Ben bunu geçerli ispat olarak görürüm. Çünkü yani burada kafamıza göre x ile çarpmadık. Yani eşitsizliği çarpabiliriz herhangi bir sayı ile ama 0'dan büyük olduğunu bildiğimiz bir şey ile çarpıyoruz yani eğer ya bunu bildiğimiz için bunu göz önüne alması olarak çözdüğüm için yani. Yoksa x 'e herhangi bir değer vermeseydi ben bunu x ile çarpamazdım. Yani bunu göz önünde bulundurarak $x > 0$ olduğunu bildiğim için öyle çarpıyorum ve orada ilerliyorum yani. Çünkü bir bilgi verilmiş ve onu kullanıyorum. Yani bence ben şu an benim içime sindi ve ben doğru olduğunu düşünüyorum ispatın.

İlk düşüncelerinde matematiksel bir yolla, ispat yöntemleriyle daha çok iddiaya yaklaşmayı amaçlarken, orada sonuçlandıramaması farklı bir yola

yönelmesine neden olmuş, eşitsizlik üzerinden elde ettiği tam kare ifadeli yapının kendisinin içine sinen ve geçerli bir ispat olarak görmesini sağlayan yeni bir bakış açısı olmuştur. 3MÖ9 bu görüşüyle, 1MA7 matematikçisinin belirttiği ve dikkat edilmesi gereken ince ayar noktasında bırakmıştır. Fikirlerini geri dönüş anlamında ilerletmemiştir. 2EA2 ve 2EA7 gibi elde ettiği tam kare ifade yorumuyla iddianın doğru olduğunu belirtmiştir, farklı olarak öncülün kendisini önemli bir yere taşımasını göz ardı etmemiştir.

Melis'in iddiasını araştırma sürecinde 2 öğrencinin formal yolla ispatlama girişimleri olsa da formal sistem içerisindeki içsel bağlantılarının zayıf olduğu daha çok prosedürel bir yapıyı işletiyor ya da takip ediyor gibi görünen bir araştırma sürecine girmektedir. Bu öğrencilerden biri 3MÖ2'dir. İddiaya yönelik ilk tepkisi x 'in tam sayı, doğal sayı, reel sayı ya da karmaşık sayı mı olduğunu bilmediği için iddianın doğruluğu ya da yanlışlığı kendisi için tartışmalı bir durum teşkil etmektedir. Eğer sınavda olsaydı x 'in ne olduğu belli olmadığı için sınav kağıdına bu soru "tartışılmaz" yazıp bırakacağını belirtir. Kendisi tek başına olsa (hatta evde olsam diyor) doğal sayı, tamsayı iyice bir araştıracağını ifade eder. Genel yaklaşımı matematiksel bir ispat yöntemiyle yani kontrapozitif ile formel başlayıp kök bulma ile bitirmektedir. Araştırmasının içeriği bu yönüyle 3MÖ9'u hatırlatsa da aradaki fark, 3MÖ2'nin kontrapozitifin doğasını bu iddiaya zorunlu olarak yedirmeye çalışmasıdır.

3MÖ2 kontrapozitif yöntemiyle bulması gereken ifadeyi elde edemediği için Melis'in iddiasını reddetmektedir. Burada bu yöntemin bu probleme uygun olmadığını tayin etmek bir yana kendi rahatına ya da kolayına gelen, " $<$ " ve " $>$ " işaretlerinden dolayı kontrapozitifi uygun gördüğünü, diğer yöntemlerde zorlanabileceğinden bahsetmiştir. Genel olarak araştırma tabanı hakkında konuşurken küme bazında baktığında; doğal sayılarda tümevarım yöntemi üzerinden, tamsayılarda teklik çiftlik bilgisi üzerinden, rasyonel sayılarda reel sayılardaki (bu iddiadaki seçtiği küme aynı zamanda) gibi yani kontrapozitifi büyük ihtimalle çalışmasında kullanarak ispatlamaya koyulacağından bahsetmiştir. 3MÖ2'nin Melis'in iddiasını araştırma sürecine ait bir kesit şu şekildedir:

3MÖ2: *Tamam. Farz edelim ki x is a reel number, for all $x \in \mathbb{R}$ contrapositive yöntemini kullanalım. Ay! Türkçesini de çok bilmiyorum.*

R: *Tamam olsun. Ben seni anlayabiliyorum.*

3MÖ2: Tamam şimdi buradan başlayacağım. $x + \frac{1}{x} \geq 2$ 'in değilini alacağım. Yani; $x + \frac{1}{x} < 2$ olacak. Buradan önce $x + \frac{1}{x}$ 'i halledeceğim. Buradan, $x + \frac{1}{x} < 2 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x} < 2$ olacak. Eşitsizlik yapacağım.

$$\Rightarrow x^2 + 1 < 2x$$

$$x^2 + 1 - 2x < 2x - 2x$$

$x^2 - 2x + 1 < 0$. Şimdi bunu inceleyeceğim. Bunun hani $x \leq 0$ oluyor mu? olmuyor mu? Ona bakacağım. Önce kökünü bulmam lazım... x buradan 1 çıkıyor. Bu çift katlı çıkıyor... Bir tane tek var. 1 var. Çift katlı. Burada kaldım. Bunu unutmuşum çünkü.

R: Tamam.

3MÖ2: İşte burada şey yapacağız. Hani x 'e bakacağız hani negatif mi çıkıyor? Pozitif mi çıkıyor. Ona göre zaten küçük olup olmadığı çıkıyor.

R: Burada nerde zorlandın?

3MÖ2: Şurada şunu hallettim. Bunun normalde köküne bakıyorduk. Hani küçük mü? Büyük mü? Hani ona göre belli oluyordu. O kaldı.

R: Tamam buradan bulduğun kök ne?

3MÖ2: A! Bir saniye x 'i ben 1 buldum. Buradan ama (Düşünüyor). Şuna göre $x \leq 0$ olması lazım contrapositive kullandığım zaman ama 1 çıkıyor. (Düşünüyor). O zaman bu yanlış oluyor.

R: Neden yanlış oldu?

3MÖ2: Çünkü buradan x 'i 1 buldum ama şimdi ben contrapositive yöntemini kullandığım için burada $x \leq 0$ olması lazım ama x , 1 çıkıyor. Hadi diyelim $x < 1$ olsa diyelim. Tablo da çok hatırlamadığım için ama gene her türlü $x \leq 0$ olmuyor. O yüzden bu sağlamıyor reel sayılar için ki zaten reel sayılar için sağlamıyorsa tam sayılar için de sağlamaz. Çünkü onun alt kümesi oluyor.

Yaptıklarından ve bu yolda aldığı karardan yukarıdaki gibi bahsetmiştir. Kontrapozitif yöntemiyle yapmaya niyetlendiği şeyin ilk krokişini, baştaki ifade ile ulaşması gereken ifade olarak ayıklayarak Şekil 4.19'da "ok ile" gösterilen yapıda öncelikle hazırlamıştır. Aradaki işlemler bu yöntemle araştıracağını ifade ettikten sonra eşitsizlik üzerinden yaptıklarıyla doldurulmuştur.

For all x is a real number. For all $x \in \mathbb{R}$, Contrapositive yöntemi kullandım.

1 $x + \frac{1}{x} < 2 \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} < 2 \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} \cdot x < 2 \cdot x$

$\Rightarrow x^2 + 1 < 2x$

$x^2 + 1 - 2x < 2x - 2x$

$x^2 - 2x + 1 < 0$

$(x - 1)^2 < 0$

$x = 1$

2 $x \leq 0$

Şekil 4.19. 3MÖ2'nin Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri

Melis'in iddiasına yönelik aldığı kararın son durumda ne olduğunun anlaşılmasına aşağıdaki kesit yardımcı olmuştur:

R: Tamamdır. Burada o zaman Melis'in iddiası doğru mu? Yanlış mı? Bunu nasıl ifade ediyorsun bu noktada bu yaptıklarını da göz önünde bulundurduğunda?

3MÖ2: Yani ben reel sayılar için doğru olmadığını düşünüyorum.

R: Neden olmadığını öğrenmek istiyorum.

3MÖ2: Çünkü x 'i 1 buldum yani kökü 1 buldum yani büyük eşit, 0'dan büyük, olmuyor yani. Yani burada yaptığım contrapositive'e göre yani x 'in normalde küçük eşit [sıfır] olması lazım ama öyle bir ifade çıkmıyor. $x > 0$ çıkıyor. Yani bu yöntemle göre bunun doğru olmadığını görüyoruz. O yüzden x , 0'dan büyük değildir derdim büyük ihtimalle.

R: O zaman Melis'in iddiasını yanlış olarak mı? O gözle mi bakıyorsun reel sayılarda yaptığın zaman?

3MÖ2: Evet o gözle bakıyorum.

R: Peki Melis'in iddiasına yanlış olarak bakmana iten şeyler temel olarak ne?

3MÖ2: Yani bu yaptığım ispat yani yaptığım işlemler bana bunu gösteriyor.

3MÖ2'nin genel sıkıntısı yöntemin ne olduğunu doğru biliyor olmasına karşılık yöntemin bu soruya uygun olduğunu tam kavrayamamış görünmesidir. Çünkü görüşlerini açıklarken kontrapozitif yönteminin mantığını doğru anladığını

gösteren yapılar mevcuttur (Şekil 4.19, 1 numaralı satırla başlayıp 2 numaralı satırla bitmesi gereken yapı).

Melis'in iddiasının araştırırken formal yol anlamında içsel bağlantıları zayıf ve prosedürel bir yapıyı takip eden bir diğer öğrenci 3MÖ7'dir. Bu öğrenci de 3MÖ2 gibi bir ispat yöntemi kullanarak verilen iddiayı araştırmaya başlamıştır. Tümevarım yöntemiyle doğal sayılar üzerinden iddiayı araştırma çabası içerisine girmektedir. 3MÖ7'nin Şekil 4.20'de sağ blokta etkinlik kağıdı üzerinde yaptığı çalışmalar, sol blokta ise bu çalışmaların ilgili bölümlerine ait görüşleri yer almaktadır.

Tümevarım gereği, x yerine önce 1 koyup doğru olduğunu görmüştür. Bir sonraki tümevarım yönteminde kullanması gereken " $x = k$ için doğru olsun" mantığının yerini $x = 2$ üzerinden doğruluğunun kabul edilmesinden bahsetmiştir. Daha sonra $x = n$ için ispatlamaya çalışacağını söylemiştir. Bu aşamada ne bir önceki basamakta kabul ettiği (her ne kadar tümevarım mantığını doğru işletemese de) üzerinden ne de araştırmak istediği (2'den büyük eşit olup olmadığı) üzerinden bu yöntemin doğasını araştırmasına doğru kanalize edememiştir. Aksine çoğu öğrencinin yaptığı gibi eşitsizliğe odaklanarak bir kök bulma gayretindedir. Bulduğu kök değeri yani $n = 1$ 'i Melis'in iddiasındaki $x > 0$ bilgisiyle örtüştüğü için iddiaya yönelik kararının doğru olduğunu söylemektedir. Üstelik eğer pozitif ve negatif değerler şeklinde çıkmış olsaydı, pozitif olanı alacağını negatif değeri reddedeceğini çünkü x 'in 0'dan büyük olmasını başta böyle kabul ettiğini (iddiada verilen) ifade etmektedir. Bu araştırmasının x yerine ne koyulursa koyulsun 2'den büyük olduğunu göstermesine hizmet ettiğini belirtmiştir. Bu durumun benzeri 3MÖ5'te de görülmektedir. Başka yolla yapıp yapmayacağını anlamak istendiğinde 3MÖ7 böyle bir soruda "kesinlikle bu yöntemi kullanırdım" şeklinde vurgulamaktadır. Bunun sebebini de kendisine x 'in pozitif olduğu bir ön bilginin verilmesine dayandırmaktadır. Böyle olduğu için başka bir yöntemin aklına gelmeyeceğini ifade etmektedir. Eğer ki bu bilgi kendisiyle paylaşılmamış olsaydı bu kez aksine örnek yani çelişki yöntemini (kendi söylemiyle) o zaman düşüneceğini belirtmektedir.

Şekil 4.20 aynı zamanda 3MÖ7'nin bu iddiayı pozitif tamsayılar üzerinden araştırdığı durumdaki yaptıklarını göstermektedir. Başta özellikle iddianın araştırılacağı küme hakkında bir söylemi olmasa da, ne yaptığını açıklarken pozitif tamsayılar üzerinde çalıştığını gösteren söylemleri mevcuttur. Bu durumdan

bahsettiği yer Şekil 4.21’de görüşlerini ifade ettiği ilk cümlelerde geçmektedir. Bunun üzerine, neden bu kümede araştırdığı sorulduğu üzerine bilinçli olarak bu kümenin seçilmesinden otomatik bir şekilde bu kümeyi seçtiği anlaşılmaktadır (Şekil 4.21).

ETKİNLİK 1
Melis, " $x > 0$ ise $x + \frac{1}{x} \geq 2$ " olduğunu iddia etmektedir.
Sizce Melis'in iddiası her zaman doğru mudur? Neden?

3MÖ7

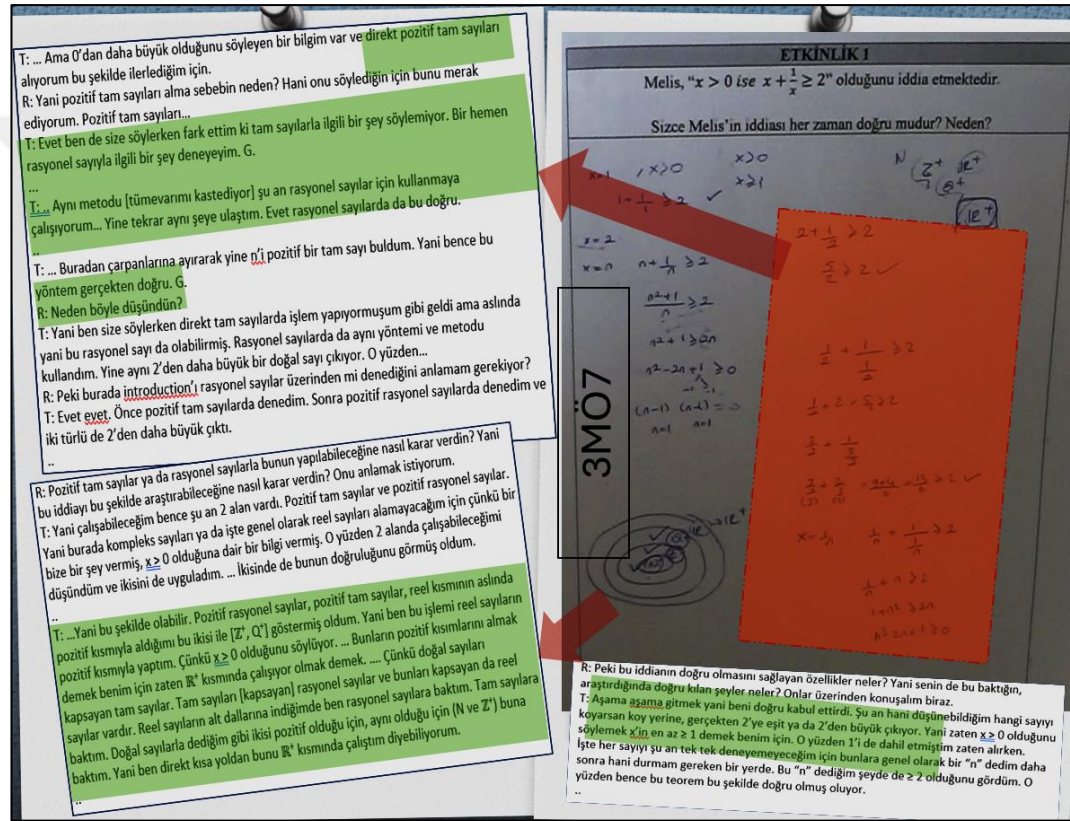
R: İlk olarak böyle bir etkinlikte verilen bir matematiksel iddia ile karşı karşıya kaldığında bu iddianın doğru olup olmadığı noktasında ne düşünüyorsunuz? Nasıl bir yol izlersin? Bu iddiayı araştırmaya nasıl başlarsın? O süreci bana tarif etmeni sesli olarak ve eğer ki yazmak istersen de yazılı olarak aktarmanı isteyeceğim.
T: İngilizce yazmam da falan bir sıkıntı var mı hocam?
R: Yok dilediğin şekilde yazabilirsin. Sadece bana hani ne düşünerek orada neyi ifade ederek...
T: Introduction dediğimiz metodu uyguladım. Yani önce yerine 1'i koyar denerdim. Daha sonra 2'nin doğruluğunu kabul edip ondan sonra "n" sayısını koyarak yapmaya çalışırdım. Bu şekilde ispatlamaya çalışırdım. Başlayayım mı?
R: Hhı. Nasıl yaparsın? Bana onu anlatır mısın?
T: Tabii ki. Öncelikle x yerine 1 diyerek başlıyorum. Çünkü doğal, 0'dan büyük bir sayıymış...
n=1
Yani burada "n" dediğimiz şey x dediğimiz sayı, her türlü pozitif bir rakam çıktı. Pozitif bir rakam çıktığına göre yani 0'dan büyük çıktı. Bu yüzden Melis'in iddia ettiği şey doğru bence.
...
T: x yerine "n" koydum. "n" koyduktan sonra bir denklem elde ettim. Denklemi çarpanlarına ayırdım ve "n" dediğim yani x dediğim şeyi 1 buldum. Zaten x dediğim şey 0'dan büyük bir sayı kabul ediyordum ve ben bunu 1 buldum. Bu şekilde ne koyarsan koy aslında 2'den daha büyük olduğunu göstermiş olurum böylelikle.
...
T: Eğer ki n'in biri pozitif biri negatif çıksaydı bunu [iddiayı] reddederdim. Çünkü pozitif değer olmak zorunda. Ama iki değerim de birbirine eşit ve 1 çıktı. Yani bu iki değerim de pozitif. O yüzden bu metodu doğru kabul ediyorum ben.
...
R: Anladım peki bu iddiayı araştırabilmenin başka yolları da var mıdır? Hep böyle mi düşünüyorsunuz? Bunu anlayabilmek adına bunu soruyorum.
T: Olmayan bir yöntem var mıdır acaba? Yani ne bileyim atıyorum 5 koyduğumuzda bu belki sağlamaz. Belki bunu düşünerek de yola çıkarsın ve bulamayabiliriz diye düşünüyorum. Ama ben böyle bir soruda kesinlikle bu yöntemi kullanırdım. Öyle bir şey aklıma gelmezdi yani.
R: Anladım hani kesinlikle dedin. Orada kesinlikle...
T: Yani x'in pozitif bir değer olduğunu söyledim için. Eğer ki bana x'in bu ifadeyi vermemiş olsaydı eğer $x \geq 0$ olmadığını, yani bir bilgi yok buna dair [gibi olsaydı]. Direkt $x + \frac{1}{x} \geq 2$ söylemiş olsaydı bu sefer gerçekten o ters, contradiction dediğim şeyi uygulardım. Olmayan bir şeyi bulmaya çalışırdım. Ama burada bizim $x \geq 0$ counterexample vererek yani. Olmayan bir şeyi bulmaya çalışırdım. ...Bu tarz bir durumla olduğunu kabul ettiği için bu metodu uyguladım buradan. ...Bu tarz bir durumla karşılaştığımda yani bana işte dediğim gibi bir kesinlik veriyorsa başlangıçta $x > 0$ olduğuna dair burada vermiş. Böyle bir şey ile karşılaşırsam eğer bu yöntemi hep kullanırım. Eğer ki önden bir bilgi yok, elimde sadece bir şey varsa, o zaman zaten bu yöntemi kullanmak bence yine yanlış olur. Çünkü çok geniş kapsamlı düşünmek gerekiyor ve o yüzden counterexample vermeye çalışırdım öyle bir durumla karşılaşıyordum ama bu tarz bir durumda bu yöntemi kullanırım böyle bir soru ile karşılaşırsam.

Şekil 4.20. 3MÖ7'nin Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri (pozitif tamsayılar üzerinden girişimi)

Pozitif tamsayılar yerine bu kez rasyonel sayılar üzerinden iddiayı araştırmaya başlamıştır. Benzer şekilde bu araştırmasında da tümevarım yöntemini kullanmıştır. İlk başlangıç değerini $\frac{1}{2}$ şeklinde alıp (neden bu seçimde bulunduğu açık değildir) doğru olduğunu görmüş, bir sonraki aşamada $\frac{3}{2}$ değerini alıp (bu kez doğru olsun demeden işlem yapıp) 2'den büyük olduğunu görmüş, son aşamada $x = \frac{1}{n}$ (neden böyle seçtiği de bilinmiyor) ilk yaklaşımındakine benzer şekilde eşitsizliği çözüp aynı değeri bulmuştur (Şekil 4.21). Rasyonel sayılarda da iddianın doğru olduğunu belirtmiştir. Hem pozitif tamsayılar hem de pozitif rasyonel sayılar üzerinden araştırdığında bu yöntemin gerçekten doğru olduğunu belirtmiştir. İfadelerinde daha da ilginçleşen durum Şekil 4.21'in sol bloğundaki son

paragraftaki cümleleridir. Bu araştırmayı pozitif tamsayılar ve pozitif rasyonel sayılarla yapmanın ve doğru olduğuna kanaat getirmenin pozitif reel sayılarda da böyle doğruluk getireceğine işaret eden görüşlerinin varlığıdır.

Araştırmasını doğru kılacak niteliklerden bahsederken aşama aşama gittiğini, hangi sayıyı koyarsa koysun 2'den büyük ya da eşit çıktığını, her sayıyı deneyemeyeceği için onlara “n” dediğini ve sonunda da 2'den büyük eşit olduğunu gördüğünü söylemiştir. Son olarak, her ne kadar Melis'in iddiası olsa da bu teoremin (kendi söylemi) doğru olduğunu ifade etmiştir.



Şekil 4.21. 3MÖ7'nin Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri (pozitif rasyonel sayılar üzerinden girişimi)

Araştırmasını geçerli bir ispat olarak görüp görmemesi noktasında yöntemsel olarak doğru olduğunu fakat yaptıklarının biraz önüne arkasına “süsleme” yaparsa tam ispat görünümüne ulaşırdı gibi bir düşüncesinden bahsetmektedir. Bu süslemeyi nasıl yaptığını anlamak için farklı renkte bir kalem verilmiş ve eklemelerini hangi noktalara yaptığını kırmızı kalemle göstererek ifade etmiştir (Şekil 4.22, etkinlik kağıdında şekillerle çerçevelenmiştir). Bu eklemeleri matematiksel bir ispata özgü özel ifadeleri içermektedir: “şundan dolayı”, “çünkü”,

“olsun”, “ $x \in \mathbb{Z}^+$ ”, “by i, ii, iii”. Görüşmenin en başında “introduciton” diye bahsettiğinin ne olduğunu anlamak için araştırmacı görüşme esnasında not almıştır. Görüşmenin sonunda, araştırmacının 3MÖ7’yi doğru anlayıp anlamadığından emin olmak için bu ifadesini açmasını istemiştir. bunun üzerine “induction” yani tümevarım yöntemini kastedtiği bir kez daha netleştirilmiştir. Ayrıca burada süslemenin başka detaylarından da bahsettiği küçük bir alan Şekil 4.22’de “let”, “assume that” gibi görülmektedir.

Notlar (Sol):

R: Peki bu noktada da şunu merak ediyorum. Şimdi bu Melis'in iddiasını araştırırken sen de bir argüman ortaya koydun diye kabul edersek yani bu senin argümanın olsun bu iddiaı araştırırken.
T: Hüh.
R: Bu argümanı nasıl değerlendirirsin? Geçerli bir ispat olup olmadığı noktasında ne söylersin?
T: Yani benim yaptığım ispat yöntemi en azından bence bu şekilde. Yani bu sorunun yöntemi en azından bu şekilde olmalı. Ama tabi ki önüne arkasına birkaç bir şey eklenerek biraz tabiri caizse süslenerek, sorunun cevabı bir şekilde ortaya çıkarılabilir ama yöntem olarak bu yani. Ben ortaya attığım argüman diyeyim o zaman. Doğru olduğunu düşünüyorum. Sadece yani biraz eksiktir tabi ki şu an. Dediğim gibi önüne arkasına bir şeyler ekleyerek, ufak bilgiler vererek hani. Bunu böyle aldım ama “şundan dolayı” demek yani ne bileyim.
X: 1 olarak kabul ettiğinde yanına “çünkü $x > 0$ ” olduğunu söylüyor gibi ufak tefek bilgiler vererek süsleyerek bu şekilde bence ispatlanırdı.
R: Peki o zaman bunu ispatlanırdı kısmı için hani ya da o süslemeyi yapmak istediğin noktalarda kırmızı kalem kullanabilirsin. Nasıl süslerdin? Eğer varsa onu yani görmek için.

El Yazması (Orta):

FTKİNLİK 1
Melis, “ $x > 0$ ise $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ” olduğunu iddia etmektedir.
Sizce Melis'in iddiası her zaman doğru mudur? Neden?
1) $x=1$ için $1 + \frac{1}{1} = 2 \geq 2$ doğru.
2) $x=2$ için $2 + \frac{1}{2} = 2.5 \geq 2$ doğru.
3) $x=3$ için $3 + \frac{1}{3} = 3.33 \geq 2$ doğru.
4) $x=4$ için $4 + \frac{1}{4} = 4.25 \geq 2$ doğru.
5) $x=5$ için $5 + \frac{1}{5} = 5.2 \geq 2$ doğru.
6) $x=6$ için $6 + \frac{1}{6} = 6.16 \geq 2$ doğru.
7) $x=7$ için $7 + \frac{1}{7} = 7.14 \geq 2$ doğru.
8) $x=8$ için $8 + \frac{1}{8} = 8.125 \geq 2$ doğru.
9) $x=9$ için $9 + \frac{1}{9} = 9.11 \geq 2$ doğru.
10) $x=10$ için $10 + \frac{1}{10} = 10.1 \geq 2$ doğru.
11) $x=11$ için $11 + \frac{1}{11} = 11.09 \geq 2$ doğru.
12) $x=12$ için $12 + \frac{1}{12} = 12.08 \geq 2$ doğru.
13) $x=13$ için $13 + \frac{1}{13} = 13.07 \geq 2$ doğru.
14) $x=14$ için $14 + \frac{1}{14} = 14.07 \geq 2$ doğru.
15) $x=15$ için $15 + \frac{1}{15} = 15.06 \geq 2$ doğru.
16) $x=16$ için $16 + \frac{1}{16} = 16.06 \geq 2$ doğru.
17) $x=17$ için $17 + \frac{1}{17} = 17.05 \geq 2$ doğru.
18) $x=18$ için $18 + \frac{1}{18} = 18.05 \geq 2$ doğru.
19) $x=19$ için $19 + \frac{1}{19} = 19.05 \geq 2$ doğru.
20) $x=20$ için $20 + \frac{1}{20} = 20.05 \geq 2$ doğru.
21) $x=21$ için $21 + \frac{1}{21} = 21.04 \geq 2$ doğru.
22) $x=22$ için $22 + \frac{1}{22} = 22.04 \geq 2$ doğru.
23) $x=23$ için $23 + \frac{1}{23} = 23.04 \geq 2$ doğru.
24) $x=24$ için $24 + \frac{1}{24} = 24.04 \geq 2$ doğru.
25) $x=25$ için $25 + \frac{1}{25} = 25.04 \geq 2$ doğru.
26) $x=26$ için $26 + \frac{1}{26} = 26.03 \geq 2$ doğru.
27) $x=27$ için $27 + \frac{1}{27} = 27.03 \geq 2$ doğru.
28) $x=28$ için $28 + \frac{1}{28} = 28.03 \geq 2$ doğru.
29) $x=29$ için $29 + \frac{1}{29} = 29.03 \geq 2$ doğru.
30) $x=30$ için $30 + \frac{1}{30} = 30.03 \geq 2$ doğru.
31) $x=31$ için $31 + \frac{1}{31} = 31.03 \geq 2$ doğru.
32) $x=32$ için $32 + \frac{1}{32} = 32.03 \geq 2$ doğru.
33) $x=33$ için $33 + \frac{1}{33} = 33.03 \geq 2$ doğru.
34) $x=34$ için $34 + \frac{1}{34} = 34.02 \geq 2$ doğru.
35) $x=35$ için $35 + \frac{1}{35} = 35.02 \geq 2$ doğru.
36) $x=36$ için $36 + \frac{1}{36} = 36.02 \geq 2$ doğru.
37) $x=37$ için $37 + \frac{1}{37} = 37.02 \geq 2$ doğru.
38) $x=38$ için $38 + \frac{1}{38} = 38.02 \geq 2$ doğru.
39) $x=39$ için $39 + \frac{1}{39} = 39.02 \geq 2$ doğru.
40) $x=40$ için $40 + \frac{1}{40} = 40.02 \geq 2$ doğru.
41) $x=41$ için $41 + \frac{1}{41} = 41.02 \geq 2$ doğru.
42) $x=42$ için $42 + \frac{1}{42} = 42.02 \geq 2$ doğru.
43) $x=43$ için $43 + \frac{1}{43} = 43.02 \geq 2$ doğru.
44) $x=44$ için $44 + \frac{1}{44} = 44.02 \geq 2$ doğru.
45) $x=45$ için $45 + \frac{1}{45} = 45.02 \geq 2$ doğru.
46) $x=46$ için $46 + \frac{1}{46} = 46.02 \geq 2$ doğru.
47) $x=47$ için $47 + \frac{1}{47} = 47.02 \geq 2$ doğru.
48) $x=48$ için $48 + \frac{1}{48} = 48.02 \geq 2$ doğru.
49) $x=49$ için $49 + \frac{1}{49} = 49.02 \geq 2$ doğru.
50) $x=50$ için $50 + \frac{1}{50} = 50.02 \geq 2$ doğru.
51) $x=51$ için $51 + \frac{1}{51} = 51.01 \geq 2$ doğru.
52) $x=52$ için $52 + \frac{1}{52} = 52.01 \geq 2$ doğru.
53) $x=53$ için $53 + \frac{1}{53} = 53.01 \geq 2$ doğru.
54) $x=54$ için $54 + \frac{1}{54} = 54.01 \geq 2$ doğru.
55) $x=55$ için $55 + \frac{1}{55} = 55.01 \geq 2$ doğru.
56) $x=56$ için $56 + \frac{1}{56} = 56.01 \geq 2$ doğru.
57) $x=57$ için $57 + \frac{1}{57} = 57.01 \geq 2$ doğru.
58) $x=58$ için $58 + \frac{1}{58} = 58.01 \geq 2$ doğru.
59) $x=59$ için $59 + \frac{1}{59} = 59.01 \geq 2$ doğru.
60) $x=60$ için $60 + \frac{1}{60} = 60.01 \geq 2$ doğru.
61) $x=61$ için $61 + \frac{1}{61} = 61.01 \geq 2$ doğru.
62) $x=62$ için $62 + \frac{1}{62} = 62.01 \geq 2$ doğru.
63) $x=63$ için $63 + \frac{1}{63} = 63.01 \geq 2$ doğru.
64) $x=64$ için $64 + \frac{1}{64} = 64.01 \geq 2$ doğru.
65) $x=65$ için $65 + \frac{1}{65} = 65.01 \geq 2$ doğru.
66) $x=66$ için $66 + \frac{1}{66} = 66.01 \geq 2$ doğru.
67) $x=67$ için $67 + \frac{1}{67} = 67.01 \geq 2$ doğru.
68) $x=68$ için $68 + \frac{1}{68} = 68.01 \geq 2$ doğru.
69) $x=69$ için $69 + \frac{1}{69} = 69.01 \geq 2$ doğru.
70) $x=70$ için $70 + \frac{1}{70} = 70.01 \geq 2$ doğru.
71) $x=71$ için $71 + \frac{1}{71} = 71.01 \geq 2$ doğru.
72) $x=72$ için $72 + \frac{1}{72} = 72.01 \geq 2$ doğru.
73) $x=73$ için $73 + \frac{1}{73} = 73.01 \geq 2$ doğru.
74) $x=74$ için $74 + \frac{1}{74} = 74.01 \geq 2$ doğru.
75) $x=75$ için $75 + \frac{1}{75} = 75.01 \geq 2$ doğru.
76) $x=76$ için $76 + \frac{1}{76} = 76.01 \geq 2$ doğru.
77) $x=77$ için $77 + \frac{1}{77} = 77.01 \geq 2$ doğru.
78) $x=78$ için $78 + \frac{1}{78} = 78.01 \geq 2$ doğru.
79) $x=79$ için $79 + \frac{1}{79} = 79.01 \geq 2$ doğru.
80) $x=80$ için $80 + \frac{1}{80} = 80.01 \geq 2$ doğru.
81) $x=81$ için $81 + \frac{1}{81} = 81.01 \geq 2$ doğru.
82) $x=82$ için $82 + \frac{1}{82} = 82.01 \geq 2$ doğru.
83) $x=83$ için $83 + \frac{1}{83} = 83.01 \geq 2$ doğru.
84) $x=84$ için $84 + \frac{1}{84} = 84.01 \geq 2$ doğru.
85) $x=85$ için $85 + \frac{1}{85} = 85.01 \geq 2$ doğru.
86) $x=86$ için $86 + \frac{1}{86} = 86.01 \geq 2$ doğru.
87) $x=87$ için $87 + \frac{1}{87} = 87.01 \geq 2$ doğru.
88) $x=88$ için $88 + \frac{1}{88} = 88.01 \geq 2$ doğru.
89) $x=89$ için $89 + \frac{1}{89} = 89.01 \geq 2$ doğru.
90) $x=90$ için $90 + \frac{1}{90} = 90.01 \geq 2$ doğru.
91) $x=91$ için $91 + \frac{1}{91} = 91.01 \geq 2$ doğru.
92) $x=92$ için $92 + \frac{1}{92} = 92.01 \geq 2$ doğru.
93) $x=93$ için $93 + \frac{1}{93} = 93.01 \geq 2$ doğru.
94) $x=94$ için $94 + \frac{1}{94} = 94.01 \geq 2$ doğru.
95) $x=95$ için $95 + \frac{1}{95} = 95.01 \geq 2$ doğru.
96) $x=96$ için $96 + \frac{1}{96} = 96.01 \geq 2$ doğru.
97) $x=97$ için $97 + \frac{1}{97} = 97.01 \geq 2$ doğru.
98) $x=98$ için $98 + \frac{1}{98} = 98.01 \geq 2$ doğru.
99) $x=99$ için $99 + \frac{1}{99} = 99.01 \geq 2$ doğru.
100) $x=100$ için $100 + \frac{1}{100} = 100.01 \geq 2$ doğru.

3MÖ7 (Sağ):

Formel sistem içindeki içsel bağlantıları zayıf
Alt Göstergeler
Önceden belli olan bir prosedürü uygulama
Domain: pozitif tamsayılar ve pozitif rasyonel sayılar

Tall **F - Prosedürel**

Şekil 4.22. 3MÖ7’nin Melis’in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri (ispat olarak görünmesi için süsleme girişi)

3MÖ7’nin Melis’in iddiasını araştırma sürecine genel olarak bakıldığında, formal sistem içinde tutulabilecek tümevarım yönteminin adını anması dışında çok bir şey bulunmamaktadır. Hem tümevarım adımlarında hem seçtiği örneklerinde hem de en önemlisi tümevarım yöntemini uyguladığı rasyonel sayılar kümesi bu metodun doğasına uygun düşmemektedir. Böyle olsa bile eşitsizliği göstermesi gereken yerde eşitsizliği çözmesiyle sonuçlanan hareketleri vardır. Ayrıca pozitif tamsayılarda tümevarımı işletmeye çalıştığı yerlerde bir şekilde tolere edilebilir

durumlar olsa da pozitif rasyonel sayılarda ilk başlangıç $\frac{1}{2}$ değeri, ardılı olarak gördüğü $\frac{3}{2}$ ve $x = \frac{1}{n}$ için göstermesindeki bu değer baştan sona kadar aykırı seçimleri barındırmaktadır.

Matematik programı öğrencilerinden sadece 3MÖ3 Melis'in iddiasını araştırma sürecinde formal bir yoldan ilerlemiştir ve şu şekilde başlamıştır:

3MÖ3: Şimdi genelde böyle bir iddia konusu olduğunda doğru mu? Yanlış mı? Hani daha önce bir ispat yöntemi belirlememiz lazım. Genelde ispatlarda da genel olarak 3 tane yöntem vardır. Doğrudan ispat, yani dolaylı yoldan sonra bir de yanlış çelişki yöntemi ile ispat vardır. Burada zaten iki tane şey var. $x > 0$ ise $x + \frac{1}{x} \geq 2$ demiş. Ya bunu tersine yani ya çelişki yöntemi ile sonuç kısmını başka şekilde çelişki olarak doğru kabul edip eğer yanlış çıkarsa doğru bulmuş oluruz. Eğer contradiction yani yanlış çıkarsa zaten bu iddianın tezini çürütmüş oluruz. Şimdi ilk başta şöyle ben sonuç kısmını tersine yapsam, $x + \frac{1}{x} < 2$ olur. Ondan sonra bunları düzenlerim. $\frac{x^2+1}{x} < 2$ Buradan da, $x^2 + 1 < 2x$ olur. Diğer tarafa atarsam, $x^2 - 2x + 1 < 0$ olur. Bundan sonra (-1) ile (-1) ile çarpsam $(+1)$ toplamları 2 olur. $(x - 1)^2 < 0$ olur. Eğer bu doğruysa... $x > 0$ olması lazım. Eğer $x > 0$ ise... bir kere şurada sonuca vardık. Sonuçta tersini yaptık. $[(x - 1)^2 < 0]$ Burada bir sayının karesi var. Bir sayının karesi her zaman 0'dan büyüktür. Negatif de olsa pozitif de olsa. O yüzden 0'dan hiçbir zaman x^2 , bir sayının karesi küçük olamaz. Bu yüzden doğru bulmuş oluyoruz aslında [iddiayı]. Yani biz bunun tersini kabul ettik. Tersini yanlış çıktı. Aslında bu şekilde $[x + \frac{1}{x} \geq 2]$ doğru. Hani büyük olmasını gerektiriyor. Bu yüzden $x > 0$ olması lazım. Yani doğrudur.

3MÖ3 hemen bir ispat yöntemini araştırmasına almakla işe başlamıştır. Burada çelişki yöntemiyle sonucun değil üzerinden hareket etmiş, ifadelerinde de sıkça bahsettiği “ $x > 0$ olması lazım” ya da “ $x > 0$ ise” diye vurguladığı yerlerde koşulunu da dikkate aldığını aklının bir köşesinde tutarak söylemlerine de yansıtmıştır. İşlemlerini adım adım ilerletirken (Şekil 4.23, 1-6 numaralı bölümlü satırlar) en son “bir sayının karesi hiçbir zaman 0'dan küçük olamaz” dediği anda Şekil 4.23'te 6 numaralı bölümü yazmıştır. Çelişki anlamına gelen diyez “#” işaretiyle araştırmasının son bulunduğunu gösteren bu hareketi yapmıştır. Melis'in iddiasını araştırmaya başlarken neden böyle yapmayı tercih ettiğini şu şekilde ifade etmiştir:

3MÖ3: Genelde şey tabii ki değişebilir farklı sorulara göre de. Genelde şey yaparım hani. Soru tamam bu şekilde hani. Eğer bir tane tezi çürütmek için bir tane yanlış olması yeterli zaten. Eğer bir tane yanlış bulursam tezi çürütmüş olurum. O yüzden ilk yöntem bana daha mantıklı

geliyor. Atıyorum “bir sayının karesi her zaman çifttir diyoruz” mesela. Mesela burada atıyorum denerim. 6 kere 6, 36. Hani vesaire vesaire. 9 kere 9 dediğimde 81. Direkt şey yapmış olurum hani tezi çürütmüş oluyorum ama belki başka şekilde doğrudan ya da dolaylı yöntemle buna da bakabiliriz...

Burada, çürütmek için bir tane yanlış olmasının yeterli olduğunu, bunun yöntemlerden biri olduğunu ayrıca doğrudan ya da dolaylı yöntemlerde de ispatın yapılabileceğini belirtmiştir. Bununla birlikte iddiayı çelişki yöntemiyle ispatlama mantığını biraz daha detaylandırarak ele almaktadır:

3MÖ3: ... Burada sadece tersini düşünerek hani sonuç kısmının tam tersi. Büyük eşitse, küçük olarak alıyoruz. Küçük eşitse büyük olarak alıyoruz.

Şekil 4.23. 3MÖ3’ün Melis’in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri

Burada sonuç kısmında verilen eşitsizliğin tipine göre uygun değilleme yaptığı Şekil 4.23’te 7 numaralı yerler, yukarıdaki söylemine sırasıyla karşılık gelmektedir. İddiada büyük eşit dendiği için bunun değili “küçük” işaretine; eğer ki küçük eşit denmiş olsaydı bunun değili olarak “büyük” işaretine dönüştürerek yapıldığını açıklamıştır. 3MÖ3’e çelişkiyi burada yaratanın ne olduğu, nerede bulunduğu sorulduğunda iddiada hangi kümeyle ilgilendiği de ortaya çıkmıştır:

3MÖ3: Çelişkiyi bu şekilde, tersini aldım ya ben. Sonucun tersini aldım. Yine işlemleri düzenlediğimizde bir sayının karesi 0’dan küçük çıktı. Yani hiçbir sayının karesi 0’dan küçük olamayacağı için... Hiçbir sayı değil de hani reel sayılar olarak düşünersek. Hiçbir sayının

karesi 0'dan küçük olmayacağı için çelişki bulmuş olduk burada. O yüzden ilk baştaki ifadeyi doğru kabul ediyoruz.

R: Peki yani contradiction uygulamanın sebebi neydi? Yani contradiction nasıl çalışır?

3MÖ3: Contradiction şey proposition yani bir şey yaptım. Şuysa şudur: " $x > 0$ ise $x + \frac{1}{x} \geq 2$ "dir.

R: Hıhı.

3MÖ3: Hani böyle bir ifade var. Sonuç kısmını ters... Atıyorum "p" asal sayıdır der. Ben de derim ki sonuç kısmını mesela "p" asal sayı değildir kabul ederim. Onu çözerim. "p" asal sayıdır gerçekten öyle çıkarsa zaten bu, tersini göstermiş yani yanlış olduğunu görmüş oluyoruz ve ben bir çelişki yöntemi ile ispatlamış oluyorum sadece. Yöntem farklı.

R: Hıhı.

3MÖ3: Contradiction yani ispatı, sonuç kısmının tersini kabul ediyorsun. "n" çifttir mesela sen "n" tektir diye alıp sonuca varmaya çalışıyorsun veya bir çelişki bulmuş oluyorsun.

3MÖ3'ün çelişki yönteminin daha iyi anlaşılabilmesi için önerme tarzında verilmiş bir yapıyla ifade etmeye çalışır. Çelişki mantığında yapılan, ifadenin tersinin yanlış olduğunu görmeyle elde ettiği düşünceden, ifadenin kendisinin doğru olduğu çıkarımının yapılmasıdır. Diğer taraftan Melis'in iddiasını bu yöntemle araştırırken adım adım yaptıklarını açıklarken baştaki söylemlerinde ya da etkinlik kağıdında görünür olmayan fakat geçişler için önemli olan bir duruma değinmiştir. İşlemlerini yaparken herhangi bir eksi ile çarpma durumu söz konusu olmadığı için eşitsizliğin yön değiştirmediğini diğer türlü başka bir sonuca vardıracağını belirtmesi kendisine verilen ön bilgiyi de araştırmasında düşünmüş olmasıdır. Böyle bir iddia ile karşılaştığında şu an direkt aklına bu geldiği için bu şekilde yapmak istediğini belirtmiştir:

R: Peki burada bunu yapabilmenin hani her zaman bu şekilde mi düşünürsün? Böyle bir iddia ile karşılaştığın zaman nasıl yol izlersin?

3MÖ3: Kısacası şu an bu direkt aklıma yani dolaylı, doğrudan, çelişki yöntemi ile ispat geldi. Hani belki bazen mantıkla da şey yapılabilir de genelde şey ama tamam üç, beş sayı denenebilir hani bulmak için. Atıyorum buraya 2 derim doğru çıkar. 3 derim doğru çıkar ama genel bir tanım olması lazım. Belki $x=150$ olduğunda tutmayacak ya da 200 olduğunda tutmayacak vesaire. O yüzden hani ilk başta böyle genelde birkaç kere denenir. Tutarsa o zaman genel bir ispat yapılmaya başlanır. Belli bir teknik şey yapılır. Zaten belli bir teknik olmadan da ispatı yapamayız yani. Mesela contradiction tanımıyla bu şekilde, bu tekniği kullanarak bu şekilde de yapılabilir...

Bu görüşme kesitinde ayrıca yer verdiği sayılarla deneme ifadesini ilk başta iddianın araştırılmasında çalışmasının herhangi bir yerinde düşünüp düşünmediği sorgulandığında 3MÖ3, Melis'in iddiası özelinde, bu soru biraz daha kolay olduğu için sayısal olarak denemediğini o yüzden hemen ispata geçmek istediğini fakat genelde yaptıklarının çerçevesi içerisinde birkaç sayı ile denemeye gittiğinden bahsetmiştir. Son olarak bu iddianın her zaman doğru olduğunu, en azından reel sayıları seçtiği takdirde Melis'in iddiasının doğru olduğunu ifade etmiştir:

3MÖ3: Her zaman kabul ettim ama her zaman yine şüphe de olmalı yani.

R: Şüphe hissettiğin yer neresi?

3MÖ3: Yani ispatı tamamladıktan sonra yine de yine “her zaman doğrudur” kısmı belki yanlış da olabilir yani. Hep bir şüphe olması lazım yani en azından benim için yani.

R: Peki o zaman buradaki her zaman doğrudur noktasında bir şüphen var mı?

3MÖ3: Şu şekilde düşünürsek reel sayılarda iddia her zaman doğrudur ama yani aksi belirtilmediği sürece şüpheyle bakmama rağmen yine de kullanabilirim bu ispatın sonucunu.

R: Bu her reel sayı için doğru mudur?

3MÖ3: Evet.

R: Yani reel sayılardan bahsederken...

3MÖ3: Aslında reel sayılardan dediğimizde negatifler vesaire vardır ama zaten burada iddiada $x > 0$ olduğu için o kısmı almıyoruz. Kalanlar için doğru ama.

Ayrıca iddiayı araştırırken ilk soruya baktığında reel sayılar olarak düşündüğünü, karmaşık sayılarda işlerin karışabileceğini söylemiştir. Bu nedenle tam sayılar ya da rasyonel sayılar yerine en kapsamlı küme olarak (karmaşık sayıları yine buradan ayrı tutarak) reel sayıların üzerinden iddiayı araştırdığını açıklamıştır. Diğer taraftan matematik bölümünde genelde bu tarz şeylerin soruda belirtildiğini, lise gibi bir seviyede reel sayılar üzerinde hep çalışıldığı için genelde soruların üzerine yazılmadığından ya da tam belirtilmediğini dile getirmiştir. 3MÖ3 bu ifadeyle Melis'in iddiasında olmayan ya da belirtilmeyen küme üzerinde bölümündeki bazı matemematikçilerin de düşündüğü gibi (örn. 1MA5, 1MA8) düşünmektedir.

3MÖ3 araştırmasını geçerli ispat görmesiyle ilgili düşüncelerini sonlandırırken, 3MÖ2 ve 3MÖ7'den farklı ve ne yaptığının bilincinde olarak “contradiction” yönteminin doğasını doğru anladığını gösteren görüşleri mevcuttur. Bunun yanı sıra sözlü olarak anlatmakla ispat yapılmış olmayacağını, bir yerde

makale olarak ciddi bir şekilde yayınlanabilmesinde kâğıda aktarılmış düşüncelerin aynasının olması gereğine değinmiştir:

3MÖ3: ...Çünkü genelde zaten ispat teknikleri olarak bu şekilde yöntemler genel olarak, yaygın olarak kullanılıyor. Başka yöntemler de kullanılabilir. Çözülebilir ama hani bu yöntemler daha yaygın, daha kabul edilebilir yöntemler.

R: Yani yöntemden dolayı mı ispat olduğunu düşünüyorsun yaptığın şeyler üzerinden?

3MÖ3: Mantıken de ispat edilebilir aslında yani ama konuşmak ile kahr atıyorum ben diyebilirim size şey burada 0'dan büyük bakın 1'i denedim. 2'den küçük 2'ye eşit oluyor. 2'yi denedim 3 oluyor. Artık ne denersem deneyeyim 2'den büyük olacağı için 10, 20, 30, 40 vesaire hep 2'den büyük olacak yani. Bunu söyleyerek de ispatlayabilirim ama bu tam bir ispat olmaz aslında. Hani sözlü size söylediğim için ama direkt kâğıda döksem genel olarak işte şu şekilde düşünüp düzenledim vesaire...

R: Bir de şunu merak ettim. Hani bahsettiğin için onu soracağım. Sözlü olarak söylemen olmuyor hani dedin. İşte 1, 2, 3, 10 hepsinde çıkıyor dedin. “Sözlü olarak değil de kâğıda dökerek yaptığım şey mi ispat” demek istiyorsun? Onu tam anlayamadım.

3MÖ3: Ya aslında öyle değil ama şey olarak söyledim ben bunu size şey olarak anlatabilirim ama yani bunu sadece siz bilmiş olursunuz. Siz başkasına söylemediğiniz sürece kimse bilmemiş olur ama atıyorum bunu yazıya döktükten sonra bir yerde ciddi bir ispattan bahsediyorum mesela atıyorum makale olarak ciddi bir ispat yaptım ben. Size gösterdim ya da direkt sözlü olarak anlattım size bu ispatı vesaire. Siz de “tamam uydu kafama” dediniz, kabul ettiniz ama bu bir yerde yayınlanmadığı sürece ya da kulaktan kulağa dolaşmadığı sürece hiçbir şekilde zaten varlığını sürdürmeyecek. Hani kulaktan kulağa da riskli olacak. Çünkü kulaktan kulağa değişebiliyor... O yüzden hani kâğıda dökmek daha mantıklı.

R: Anladım. Peki son olarak burada geçerli bir ispat olarak gördüğünü söyledin... Peki geçerli olmasını sağlayan nitelikler, özellikler neler? Yani o karakteristik şeyler neler? Geçerli olması adına yaptığın adımlar üzerinden de konuşabiliriz.

3MÖ3: Yaptığım şeylerden mi?

R: Yaptığın şeylerde bunu geçerli bir ispat olarak kılan şeyler neler?

3MÖ3: Bir kere şey atıyorum contradiction olarak düşünürsek yani belli bir disiplinin içerisinde yapılmış olması lazım. Atıyorum contradiction dediğimiz şey sonuç kısmının tersini kabul etmemiz lazım ve çözmemiz lazım ama kalkıp da ben bunun tersini şey yaparsam $x < 0$ dersem ve bunu çözmeye çalışırsam bir yanlışlık çıkacak ya da bir hata çıkacak işlemlerde.

4.2.4 Matematik Öğretmenliği Programı Öğrencilerinin Matematiksel İspat Pratikleri

Araştırmadaki matematik öğretmenliği programı öğrencileri, diğer matematik programı öğrencileriyle karşılaştırıldığında, Melis'in iddiasını araştırırken bazı yönleriyle benzer bazı yönleriyle farklı şekillerde hareket edebilmektedir. Örneğin;

- Matematik programı öğrencilerinin bazılarında görülen “en küçük değer olarak 1 verme eğilimi ve en küçüğü sağlarsa hepsi sağlar düşüncesi” yerine buradaki öğrencilerde kolaylık olsun diye en küçük değeri 1 verme isteklerinin varlığı
- Matematik programı öğrencileriyle karşılaştırıldığında, buradaki öğrencilerde değer vererek ispat olmayacağına daha açık bir göndermede bulunarak bu durumu nispeten daha fazla ön plana çıkarmaları; bir değerle doğru olduğunu hemen anlayamama birkaç değer daha vererek doğru gittiğine dair bir sinyal yakalamak ya da sezgi geliştirmek fakat burada matematikçilerde olduğu gibi formal yolla değil daha doğal bir yolla tek tek örnekler vermek yerine daha genelleştirilebilir, cebirsel yaklaşım ya da eşitsizlikle ilgili bir kanı oluşturabilme adınadır.
- 3MÖ9 gibi “her zaman” detayına takılan öğrencilerin varlığı fakat buradaki öğrencilerde “beni rahatsız ediyor” şeklinde daha içselleştirilmiş bir karşılık bulabilmektedir ya da “görünüş itibarıyla” böyle olup olmadığına doğru bir anlayış geliştirme şeklinde karşılık bulabilmektedir.
- Matematik programı öğrencileriyle karşılaştırıldığında, matematik öğretmenliği programındaki öğrencilerin Melis'in iddiasını nispeten daha kapsamlı ve ayrıntılı bir şekilde incelemelerde bulunması, iddianın hangi kümede ortaya atıldığını araştırmaya başlar başlamaz sorgunlaması ilk hamle niteliğindedir.
- Matematik programı öğrencilerine benzer şekilde, tam kareden bitirmek yerine farklı yönelimler (örnek verme, kök bulmanın ötesine gidip tablo çizme, grafik aktarım), buradaki öğrencilerin daha çok eşitsizliğin çözüm kümesini bularak elde ettikleri aralık ile iddiada verilen $x > 0$ ifadesinin uyumlu olup olmadığı, örtüşüp örtüşmediği ile ilgilenmesi

- Matematik öğretmenliği programındaki bazı öğrencilerde $\frac{1}{x}$ yapısında rasyonel sayıları ele alma ve birim kesirler üzerinden hareket ederek genelleşici örnekler verme
- Matematik programı öğrencilerinde de genel olarak görülen cebirsel otomatikleştirme, adımlar arası geçişlerin anlamını bilmeden ilerleme, içler-dışlar alışkanlığının buradaki öğrencilerde de görülmesi fakat matematik programı öğrencilerinden farklı olarak, eşitsizlik görüldü mü hemen çözmeye isteklerini açık olarak ifade etmeleri, ispatlama girişimlerinde (argümanları) kendi sınırları ile ilgili farkındalığa sahip olma (yetersiz hissetmeleri, oluşturabilmeliyim ama eksikim gibi) daha şeffaf olmaları

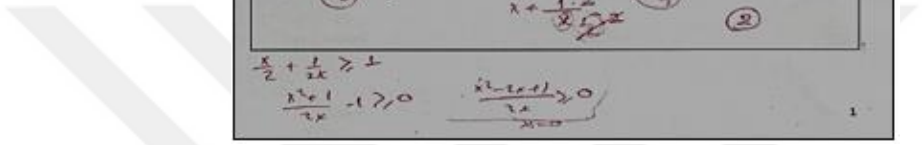
Araştırmadaki matematik öğretmenliği programı öğrencileri ağırlıklı olarak (8) Melis'in iddiasını araştırma sürecinde doğal bir yoldan ilerlemiştir. Bu öğrencilerden 6'sı iddiayı araştırırken eşitsizlik üzerinden düşünerek çözüm kümesini bulma, tablo üzerinden ilgili aralığı tespit ederek iddianın öncülü olan $x > 0$ ifadesine ulaşma ile ilgili bir yaklaşım izleyerek hareket etmektedir. Matematik programı öğrencilerinden farklı olarak çözüm kümesi bulmada tablo, grafik ya da sayı doğrusu üzerinde daha informal bir şekilde iddia üzerinde çalışmaya yoğunlaşmaktadır. Bu şekilde hareket edenlerden biri 4EÖ9'dur. Öncelikle $x > 0$ verilince tamsayılar aklına geldiğini, örnek olarak "1 değerini verince sağlayacak mı?" şeklinde iddiayı anlamaya çalışmakla işe koyulmuştur. Daha sonra tek bir değerle anlayamayacağını, sayılar vermeye devam ettiğini açıklamıştır. Denedikleri üzerinden tamsayılarda sağlar gibi bir sezgisinin oluştuğunu, bir de rasyonel sayılar için acaba sağlar mı diye bakma çabasına girmiştir. Bu noktada rasyonelle araştırmaya girdiğinde, kendisine soruda bilgi verilmediği için sadece 0'dan büyük bilgisi paylaşıldığı için bu şekilde düşüncesini açıklamıştır. Rasyonel sayılar için aldığı değer de sağladığını görmesi üzerine Melis'in iddiasının doğru olduğunu şu an için görebildiğini fakat biraz daha düşünmesi gerektiğini çünkü kendisini yanıltıcı bir şeyin olup olmadığına bakma ihtiyacı hissettiğini belirtmiştir. Düşüncelerini sesli ifade ederken ilk başta değer vererek yaptığını ve sağladığını gördüğünü, bir de "kendi bildiğim eşitsizlikten çözmeye çalışsam acaba buradan bir şey elde eder miyim diye bakacağım. Kendim bir aralık bulabilir miyim? Acaba ben bu bilgiden $[x > 0]$ daha farklı, x hakkında daha farklı bir bilgi elde edebilir miyim diye bakmam lazım" diyerek eşitsizliğe

odaklanmıştır. Adım adım işlemlerini yaparak, her iki tarafı x ile çarpıp en son $(x - 1)^2 \geq 0$ ifadesine ulaşmıştır. Daha sonra $x = 1$ çift katlı kökünü bulmuş (dahil olduğunu belirtir) ve tablo çizmiştir. İşaret incelemelerini de yaparak pozitif negatif bütün sayıların sağladığını görmüştür (Şekil 4.24, 1 numaralı bölüm). Melis'in ifadesi için ilk başta doğru gibi görüldüğünü sadece x 'in negatif durumunda eşitsizlikte yazdığında olmadığını görmüş, 0'ın anlamını tanımsızlık getirmesiyle yorumlamıştır. Bu noktada tablodan gördüğü tüm sayılar durumundaki negatiflik durumu kafasını karıştırdığı için bu kez eşitsizliği kökü kaybetmeden daha uygun bir formda düzenleyerek $\frac{x^2+1}{x} - 2 \geq 0$ şeklinde yazmış ve yine ilk başta yaptığı gibi tekrar tabloya bu kez yeniden düzenlediği haliyle yapılandırılmış tablosuna gitmiş, işaret incelemelerini yaparak $x > 0$ aralığını elde etmiştir (Şekil 4.24, 2 numaralı bölüm). Buraya gelmeden önceki ilk çözdüğü eşitizlik için şu şekilde düşünmüştür:

4EÖ9: *Şimdi burada aslında payda eşitledim. Payda eşitledikten sonra topladıktan sonra burada içler dışlar çarpımı değil de şu paydadaki x 'i göndermek için her iki tarafı x ile çarptım.*

R: *Paydadaki x 'i neden göndermek istedin?*

4EÖ9: *Aslında göndermesem de olurdu. 2'yi diğer tarafa atabilirdim ama aslında o biraz şey ile alakalı kendi geçmiş öğrenmelerimden kaynaklı direkt pratik olarak öyle bir şey yaptım... x buradan buradaki değeri yok etmişim aslında ben onu fark etmemiştim. Buradaki Melis'in verdiği değeri yok etmişim. $x = 0$. O da dahil değil. Buradan da bir çift katlı geliyor. Dahil pozitif olduğu için pozitif, negatif. Yani evet 0'dan büyük değerleri almamız gerektiğini buradan da görüyoruz aslında. Aslında ben orada her iki tarafı x ile çarparak evet değeri yok etmişim. Orada bir hata yapmışım. Şimdi fark ettim. Yani aslında normalde yok ettiğim zaman yok ettiğim kökü yazmam gerekiyordu ama onu yazmayı unutmuşum.*



Araştırmasını tamamladıktan sonra bulunduğu girişimler ile Melis'in iddiası arasındaki bağlantı anlaşılmak istendiğinde şu şekilde görüşlerini belirtmiştir:

4EÖ9: *Melis'in bulduğunda eksik olarak aslında nasıl diyeyim? Eksik olarak pek bir şey görmedim şu anda. Hani $x > 0$ demiş. Benim bulduğum eşitsizlikte de x 'ten 0'dan büyük değerleri yani tablo çizdiğimde 0'dan büyük değerlerin bu denklem için, bulduğum eşitsizlik için sağladığını görüyorum şu anda. (kendi kendine soruyor) Ekstra olarak ekleyebileceğim bir şey var mı diye bakıyorum. Ekstra olarak ekleyebileceğim bir şey de yok gibi.*

4EÖ9: *Melis'in iddiasında şunu araştırmak istedim. (kendi kendine soruyor) Ortaya attığı iddia doğru mu? Bildiğim bilgiler ile ilk başta değer vererek yaptım. Değer verdiğimde herhangi bir yanlışlık olmadığını gördüm. (kendi kendine soruyor) Dedim ki “bir de normal eşitsizlik çözerek yani bir aralık bulabilir miyim?” diye baktım. Gerçekten de Melis'in verdiği aralığı buldum. Şu anda ben de yani Melis'in evet yolundan gittim. Onun şu ortaya attığı $x > 0$ ibaresini aynı şekilde ben de buldum. Yani $x > 0$ için x 'in 0'dan büyük olduğu değerlerde $x + \frac{1}{x} \geq 2$ denklemi sağlanıyor. Şu andaki izlenimim o yönde. Herhangi bir aksini iddia eden bir şey bulamadım şu anda.*

4EÖ9'un Melis'in iddiasına yönelik ispatlama girişimleri genel olarak değerlendirildiğinde örneklerle, tablonun sürece dahil edilmesiyle, sembolik manipülasyonlarla doğal bir yoldan hareket ettiğini göstermektedir. Görüşlerinde yer yer çözüm kümesini bulma şeklinde iddiayı araştırdığını, “hep çözdüğümüz tarz” şeklinde iddiaya temas etmesi ve “ben de $x > 0$ buldum”, “Melis ile aynı şeye ulaştım” şeklinde bir araştırma süreci yönettiği görülmektedir. 4EÖ9'un araştırma sürecine benzer şekilde hareket eden bir diğer öğrenci ise 4EÖ5'tir.

4EÖ5 de ilk değerlerle deneme yapmış fakat sonsuz değer veremeyeceğini belirtmiş, değerleri eşitsizlikle ilgili bir kanı oluşturmak için kendisine rehber olmuştur. 4EÖ9'dan farklı olarak, verdiği değerler matematik programı öğrencilerinden 3MÖ9 gibi bazı kritik durumları inceleme şeklinde daha kapsamlı bir yelpazededir. 4EÖ5 denemeleriyle sıkıntı çıkarabilecek noktayı henüz göremese de eşitsizlik üzerinden tabloya dökülmüş durumda eğer sağlamayan bir değer varsa burada çıkacağını ifade etmiştir. 4EÖ5 öğrencisi de eşitsizlikte otomatik olarak içler dışlar yaparak en son tam kareli ifadeye ulaşmaktadır. Burada her zaman doğru olduğunu söylese de bir de içler dışlar çarpımı yapmadan 2'yi diğer tarafa atarak (kendi söylemiyle Melis'in iddiasında hepsini tek tarafta topladım) denediği yeni eşitsizliği üzerinden benzer şekilde tablo ve işaret incelemesi sonucunda Melis'in iddiasının her zaman doğru olduğunu ifade etmiştir:

4EÖ5: ... Aslında 1 verdiğimiz 0 sonucuna ulaştığımızı görüyoruz ve bunun üstündeki ve altındaki bütün değerlerde de bunun 0'dan büyük olduğunu görüyoruz. 0'dan büyük olması demek de aslında bu argümanın desteklediğini, bunu sağladığını her zaman da doğru olduğunu gösteriyor.

Yaptıklarını değerlendirdiğinde izlediği yolun kendisi için geçerli bir ispat oluşturduğundan şu şekilde bahsetmiştir:

R: Burada yaptıklarını yine göz önünde bulundurduğumuzda bu sunduğun argümanın ispat olup olmadığı noktasında, geçerli bir ispat olup olmadığı noktasında ne düşünüyorsun?

4EÖ5: Bence geçerli ama neden geçerli?

R: Neden öyle?

4EÖ5: Çünkü biz şu ana kadar eşitsizlikle hep böyle çözmeyi gördük. Aslında yani tek taraflı toplayıp.

R: Bu son yaptığın üzerinden mi konuşuyorsun? İki tane eşitsizlik üzerine yaptığın mı?

4EÖ5: Son yaptığım üzerinden konuşuyorum. (kendi kendine konuşuyor) Çünkü bütün eşitsizlikleri tek tarafta topladım. Nasıl diyeyim? Örneğin $(x-2)>0$ gibi bir şeyde aslında biz bunu veya $x>2$ dediğimizde aslında bizim x 'imiz 2'den büyük değerler olur. $x-2$ 'nin de 0'dan büyük değerler olduğunu görürüz. Hatta tek taraflı toplamak yanlış bir şey değil. Çünkü 2'den büyük ne verirsek verelim x 'den 1 çıkınca 0'dan büyük bir sonuç çıkacak. Çünkü 2 değerinden büyük bir sonuç. Aslında burada da aynısını yaptım yani. Tek tarafta topladığım için yanlış bir şey olmadığını düşünüyorum.

...

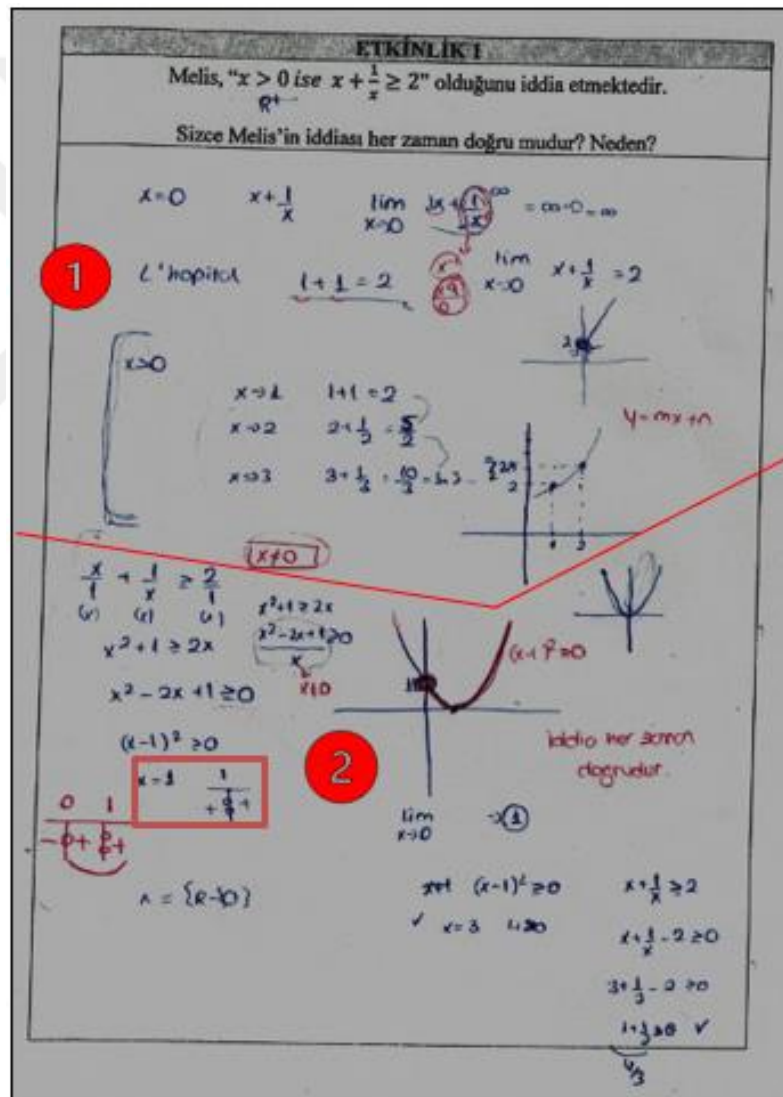
4EÖ5: Aslında Melis'in iddiası ile benim bu hâle getirdiğim yani 2'yi sol tarafa attığımdaki bulduğum denklem aslında aynı şey. Melis'in iddiasıyla o dediğim gibi buradaki denklemimiz bizim aslında tamamen aynı şey. O yüzden ben bu denklemin doğruluğu üzerinden gittim. Yani $\frac{x^2-2x+1}{x} \geq 0$ denklemi doğruysa zaten Melis'in iddia ettiği şey de bunun aynısı olduğu için o da doğru olmak zorunda gibi düşündüm. Bu denklem üzerinden gittikten sonra da yine öğrendiğimiz yöntemleri kullandım dediğim gibi. Aslında buradaki yani bu denkleme baktım ki Melis'in iddiasına göre buranın 0'dan büyük eşit olması lazım. (kendi kendine soruyor) $\frac{x^2-2x+1}{x} \geq 0$ Burayı 0'dan küçük yapan bir değer var mı? Onu bulmak için de bunu tabloya döktüm. Tabloya döktüğümde de gördüm ki bunu aslında 0'dan küçük yapan herhangi bir değer olmadığı için bütün değerler için sağladığını gördüm. Aslında yani bu sağlıyorsa Melis'in iddiası da sağlıyordur. Çünkü bununla Melis'in iddiası aslında aynı şey. Öyle düşündüm.

4EÖ5'in görüşlerinde iddiayı araştırırken “eşitsizliği hep böyle çözdük”, “öğrendiğimiz gibi içler dışlar yaptım” şeklindeki söylemleri formal yerine daha doğal problem çözme mekanizmalarıyla ilişkilidir.

Melis'in iddiasını araştırma sürecinde doğal bir yoldan ilerlerken eşitsizlik çözme, tablo incelemesi yapmanın yanı sıra grafiğe aktarılmış bir yorumla da bir girişim söz konusudur. Bu şekilde hareket eden 4EÖ2 öğrencisidir. Matematik öğretmenliği programındaki öğrencilerden farklı olarak 4EÖ2, Melis'in iddiasını araştırmada bir çok şeyi düşüncesinden geçirmektedir. Önce 0 noktasını tanımsızlıkla anlamlandırmış, daha sonra limit konusundan yardım almaya çalışmış, akabinde grafiksel bir katmış, nihayetinde $x + \frac{1}{x}$ 'in grafiği üzerinden düşünmeye yönelmiş, eğer $x + \frac{1}{x}$ 'in grafiğini çizebilirse $x > 0$ olduğu noktalardaki durumunu ispatlayabileceğinden bahsetmiştir. Daha sonra şu şekilde açıklamaya devam etmiştir:

4EÖ2: ... Yani grafikte daha net görürüm. Çünkü tanımsız olduğu noktayı ben zaten devre dışı bırakmışım. Diğer türlü bu ifade tanımsız olmayacaktır. Tanımsız olmaz ise de bu ifade

$4EÖ2$ 'nin $x + \frac{1}{x}$ 'in grafiğini çizme girişimleri Şekil 4.25'te 1 numaralı bölümünde görülmektedir.



292

Grafiğini oluştururken tam da bu noktada iddianın içerisindeki eşitsizliğe yönelmektedir. Bu aşamada yaptıkları Şekil 4.25'te 2 numaralı bölümde görülmektedir. Eşitsizlikte payda eşitleyip her iki tarafı x ile çarparak $x^2 - 2x + 1 \geq 0$ ifadesini elde eder. Buradaki düşünceleri şu şekildedir:

4EÖ2: *Evet böyle daha doğru oldu. Çünkü parabol olarak gidiyor. Şu an onu fark ettim. Artış miktarı düzenli değil. Artış miktarı düzenli olmadığı için bu bir doğrusal değildir. Burada hatalı yaptım. Buraya geldiğimizde ise bu $(x - 1)^2 \geq 0$ deriz. Artık çizebilirim. $x=1$ iken bu çifttir [çift katlı köktür]. Bunun bir tane değeri vardır. $x=1$ iken ve burası da çifttir. Burası da artı ile başlayacak. Artı olarak devam edecek. Yani bu hep artan bir fonksiyon. $x = 1$ noktasında ise 0 değerini alır. Evet $x = 1$ 'de 0 değerini alıyor ve aslında bu bir parabol. Aslında bu şudur; $x^2 = 0$ parabolünün bir birim sağa ötelenmiş halidir. Ben $x'e 0$ verdiğimde ise bu nokta 1 noktasından geçecektir $x=0$ iken $y=1$ 'dir. Fakat bize diyor ki: $x'i 0'dan büyük değerler için al. Ben buradaki $x'i 0'dan büyük değerler için aldığımda burayı almayacağım. (grafikte 1'in içini boş yuvarlak yapıyor kırmızı kalemle ve grafiğin sağ tarafını da kırmızı kalemle üzerinden belirginleştiriyor) Budur aslında bizden istediği tanım kümesi. Ve bize diyor ki bu her zaman büyük 2 midir?$$*

Bu kısımda Şekil 4.25'deki 2 numaralı bölümün içerisindeki dikdörtgen içine alınmış küçük bir tablo inceleme çalışmasını yürütmektedir. Buna eşlik eden çalışması biri x^2 , diğeri ötelenmiş olan $(x - 1)^2$ parabolüdür. Son cümlesinde kafası karışıyor fakat bunun ilk etapta bilincinde değildir. Buradaki görüşünde orijinal iddiadaki 2'yi kastetmiştir, halbuki bu dönüştürdüğü şeyde bakacağı ≥ 0 idi. Daha sonra hatırlayarak devam etmiştir:

R: *Grafiğini çizdiğinde böyle söyledin. Yani nereden başladın? Nereye getirdin? Ve bu grafiği nasıl yorumlarsın?*

4EÖ2: *Şimdi şöyle, şu işlemi (payda eşitleyerek yaptığı alanı gösteriyor) yorumladığımda öncelikle burada $x = 0$ tanımsızlığını göz ardı etmemek gerekiyor. Yani x kesinlikle 0'a eşit olmayacak. $x \neq 0$ (yazıyor). Daha sonra, çünkü biz paydaları eşitlediğimizde bu paydayı yok ettiğimizde bu kökü görmeyebiliyoruz çoğu zaman. Paydaları eşitlediğimde $x^2 + 1 \geq 2x$ oluyor. Buradan ben $(x-1)^2 \geq 0$ olmasını istiyorum. $(x-1)^2 \geq 0$ 'ın grafiği de bu şekilde. Burada bir dönüm noktası var (grafik $x'i$ kestiği noktayı işaret ediyor) bu şekilde. Aslında bu çift dereceli olduğu için negatif değeri olmayacak zaten. Çift kuvveti pardon. Burada bu ifadeyi $[(x-1)^2 \geq 0]$ 0'a eşitleyen değerin 1 olduğunu gördüm. (kendi kendine soruyor) Gerçi ben bu ifadenin $[(x-1)^2 \geq 0]$ 0'dan büyük olmasını istiyorum değil mi? Bu ifade zaten her yerde 0'dan büyük veya eşit (grafikte kırmızı ile y eksenin üstündeki grafiği gösteriyor). Bir saniye. Evet bu her yerde 0'dan büyük veya eşit zaten.*

R: *Nereden biliyorsun?*

4EÖ2: *Efendim?*

R: 0'dan her yerde büyük eşit olduğunu nereden biliyorsun? Bunu nasıl gördün? Neye dayanarak biliyorsun?

4EÖ2: Grafiğe bakarak yorumluyorum bunu. Yani y değeri hiçbir zaman negatif almıyor zaten. x hangi değeri alırsa alsın, zaten bu $(x-1)^2$ bir çift dereceli fonksiyon olduğu için mutlak olarak çıkacaktır içindeki ifade ve her zaman zaten pozitif değerler alacaktır. Burada yalnız sanki biraz bir karıştırdım. Burada $x > 0$ için diyor. Tamam bu ifadem hâlâ doğru oluyor. Ben $x > 0$ için aldığımda bu şekilde bir eğri oluşturmuş oluyorum ve bu her zaman 0'dan büyük oluyor evet. (içi boş yuvarlaktan sağdaki kırmızı ile belirlediği grafiği göstererek) Yani bu ifade, iddia her zaman doğru diyebilirim. Yazalım. "İddia her zaman doğrudur". Evet bu şekilde düşündüm. Ben burada ilk başta bunu doğrusal olarak düşünmüştüm ama daha sonradan fark ettim ki aslında bu bir eğri. Çünkü eğri olmasının sebebi de değerler verdiğimde bunun artış miktarı sabit değil. Biz $y = mx + n$ diye eğer bir doğru yazıyorsak buradaki artış miktarı her zaman eğim kadar olması gerekiyordu. Burada öyle bir şey söz konusu olamaz. O yüzden bu bir parabol. Parabolü de bu şekilde ispatlayabiliyorum. Yani ben diyorum ki ben x'e hangi değeri verirsem vereyim bu ifade 0'dan büyük olacaktır. Eğer ben bu ifadeyi $[x^2 + 1 \geq 2x]$, bundan $[x + \frac{1}{x} \geq 2]$ dönüştürerek yapabildiysem o zaman bu da $[x + \frac{1}{x} \geq 2]$ her zaman doğrudur. Bu şekilde.

4EÖ2 Melis'in iddiasını, $x^2 - 2x + 1 \geq 0$ şeklinde baktığı parabolün grafiğiyle ilişkilendirerek, bu grafikte gördüğü yorumu iddiadaki $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ifadesiyle örtüştürmektedir. İfadeleri incelendiğinde eşitsizlik üzerindeki çalışmasında $x > 0$ bilgisini kullanmadığı görülmektedir. Üstelik "ben burada her tarafı x ile çarptım paydadaki x'i yok etmek için. Eşitsizlikte her tarafı belli bir sayıyla çarptığımda şey bozulmuyor zaten" şeklinde belirtmiştir. Hem yukarıdaki görüşme kesitinden hem de bir önceki cümledeki ifadeleri göz önüne alındığında, herhangi bir problem çözmedeki bağlamda bir denk olma şeklinde bir çözüme odaklanıp formal yolla yapılan ispat adımlarını atlamaktadır, aynı zamanda ön bilgiyi de yoksaymaktadır. Ön bilginin bu şekilde önemsizleşmesi, kendisine Melis'in iddiasının sıfırdan farklı tüm reel sayılar için doğru olduğu çıkarımını yaptırmaktadır. Bu durumdan şöyle bahsetmiştir:

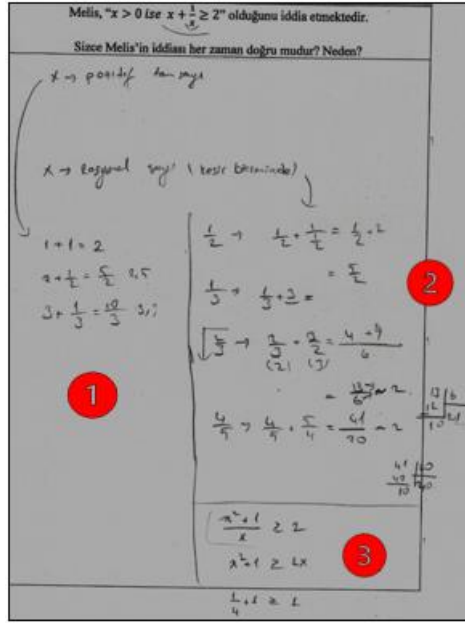
4EÖ2: $\mathbb{R}^+$ bir sayı olması (düşünüyör). Aslında yani x negatif de olsa benim buradaki eşitsizliğim bozulmaz. Çünkü ben her türlü ifadenin karesini alıyorum ya. Aslında Melis şöyle de deseydi farklı olmazdı. ($\mathbb{R} - 0$). Yani eğer x'i Melis bu şekilde tanımlasaydı yine de bir sıkıntı olmazdı. $x = \{\mathbb{R} - \{0\}\}$.

R: Nereden biliyorsun?

4EÖ2: Çünkü direkt ben bu ifadeyi göz önüne aldığımda yani onun ilk yönergesini görmediğimde, aslında 0'ı dahil etmemesinin sebebi tanımsızlıktan dolayı. Burada doğru yapmış ama negatifi de dahil etseydi bu yanlış olmazdı. Doğru olurdu yine de.

4EÖ2'nin $x > 0$ ön bilgisini eşitsizlikte göz ardı ederek, dönüşen son eşitsizliğe ait parabolün grafiğinin, x ne olursa olsun kollarının yukarı olmasından elde edilen yoruma benzer bir durumla matematik eğitimcilerinden 2EA2 ve 2EA7'de de karşılaşılmaktadır. Aradaki tek fark, bu matematik eğitimcilerinin grafik üzerinden yorumlamadıkları yaklaşımda tam kare ifadenin elde edildiği yerde geçmesidir.

Melis'in iddiasına doğal yolla yaklaşan fakat eşitsizlik çözme şeklinde tablo ya da grafik gibi herhangi bir informal desteğe ihtiyaç duymayarak yaklaşan 2 öğrenci bulunmaktadır. Bu şekilde hareket eden öğrencilerden biri 4EÖ6, diğeri 4EÖ7'dir. Bu öğrencilerden 4EÖ6, matematik eğitimcilerinden 2EA2 gibi eşitsizliğe yönelerek birtakım işlemler yaparak tam kare ifadeye ulaşmıştır. 2EA2'den farklı olarak, 4EÖ6 çalışmasının içerisinde $x > 0$ bilgisini kullandığı görülmektedir. Diğer 4EÖ7 öğrencisi, somut örneklerle fakat bilinçli ve genelleyci bir tarzda Melis'in iddiasını her ne kadar kendisine üzerinde çalışılacak küme bilgisi verilme de pozitif tamsayılar ve bu sayıları kapsamayan kesirli ifadeler üzerinden pozitif rasyonel sayılar şeklinde iki duruma göre araştırmaya çalışmaktadır. İlk olarak pozitif tamsayılar üzerinden iddiayı araştırmaya başlamıştır. Önce birkaç değer vererek hatta kolay olsun diye x yerine 1 alarak ilerlemiştir. Daha sonra 2 ve 3'te de sağladığını ve örüntü gibi ilerlediğini, sürekli artış göstereceğini sezdiğini belirtmiştir (Şekil 4.26, 1 numaralı bölüm). Bundan sonra ikinci durum olan pozitif rasyonel sayılar ve kesir biçiminde olanlar üzerinden ilerlemiştir. Burada $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{3}$ değerlerinde gördüğü $\frac{1}{x}$ yapısından dolayı toplamın daima 2'den büyük çıkacağını çünkü her zaman bir "tam" boyutunun geldiğini görmüştür (Şekil 4.26, 2 numaralı bölüm). Bu çalışması üzerine şu an için Melis'in iddiasının doğru olduğu kanısında olduğunu ifade etmiştir. Bu denemeleri ve iki duruma ayırarak incelediği kümelere göre kendisini buna yönlendirdiğini belirtmiştir.



Şekil 4.26. 4EÖ7'nin Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri

Bir yanda da eşitsizlik var ve bu durum 4EÖ7'nin "hemen çözmem gerekiyor" gibi bir yere sürüklemesinden bahsetmektedir. Buna ek olarak çözülmesi gereken bir problem varmış gibi hissetmesinin sebebi, "x 0'dan büyük sayıdır, denklem var, eşitsizlik var", bu bilinmeyi "çözmem" gerekiyor şeklinde olmasıdır. Dolayısıyla bilinmeyen durumun kendisini buna ittiğini ifade etmektedir. Diğer taraftan "her zaman" doğru olup olmadığı fikrinin kendisini rahatsız ettiğinden bahsetmektedir. Kesirli şekilde düşündüğü durum için daha genel bir yapı bulabilme adına eşitsizlik üzerinden Şekil 4.26'daki 3 numaralı bölümde yaptığı küçük bir çalışma vardır. Bu alanda kesirli seçeceği sayı için karesinin küçüleceği, $2x$ değerinin büyüyecek olmasını düşünerek ifadenin her zaman doğru olmayacağı yönünde bir düşüncesi belirlemektedir. Bunu tam tespit edebilmek için daha fazla gözlem ve deneyim yapması gerektiğini söylemektedir. "Hangi sayının karesinin 1 fazlası 2 katından daha büyüktür?" fikrini gözlemlmeye çalışıyor fakat pozitif tamsayılarda gözlemlediği örüntü gibi devam eden durum buradaki çalışmasında önünü açmamaktadır. Bu nedenle kendisini çok da ileri taşıyamamaktadır. Bu durum kendisinin bir yerde vazgeçmesine, vazgeçmezse de sürekli fikirlerinin değişmesine (iddia üzerine karara varılmış son noktayı koyamamasına) neden olacağını düşünmektedir. Genel olarak 4EÖ7 iddiayı araştırma sürecinde ortaya koymuş olduğu argümanlarını, şimdiye kadar yapmış

olduğu çalışmalarını yeterli bulmadığını ifade etmektedir. Burada “birkaç deneyimden ziyade genelleştirilmiş bir ifade şeklinde bunu ifade etmem gerektiği” şeklinde görüşleri hakimdir. Bu nedenle zorlandığını, genelleştirmek için ifadeler oluşturmada kendisinin eksik olduğunu, ortaya çok fazla bir şey çıkartamadığını gördüğünü söylemiştir. 4EÖ7 açısından durumun özeti, verdiği değerlerin her zaman sağlayıp sağlamayacağını bilememesidir. Sadece Melis’in dediklerini doğrular örnekler verdiğini, yani şu an için yaptıklarının Melis’i ispatlar nitelikte değil destekler nitelikte olduğunu belirtmiştir. İspatını veremediğini ve bu nedenle kendi öğrenmeleri üzerine tekrar düşünmesi gerektiğini söyleyerek, bu etkinlik aracılığıyla kendisine bu çalışmadan pay çıkarmaktadır.

Melis’in iddiasını araştırma sürecinde 4EÖ1’in her ne kadar doğal yolla ispatlama girişimi olsa da doğal yaklaşımının içerisindeki sembolik bağlantılarında zayıf ilişkilendirmeler yaparak daha çok prosedürel bir yapıyı işletiyor ya da takip ediyor gibi görünen bir araştırma sürecine girmektedir. Etkinlik kağıdında herhangi bir çalışma yapmadan önce nasıl hareket edeceğiyle ilgili fikirlerini paylaşmaya başlamıştır. İlk olarak aklına $x > 0$ durumunu göz önünde bulundurarak 1, 2 ve 3 şeklinde tamsayı değerlerini verme geldiğini fakat tamsayı olup olmadığıyla ilgili bilgi verilmediğini fark ettiği için tamsayı olamayabileceğini de düşündüğünü söylemiştir. Daha sonra sorunun içerisindeki “her zaman doğru mudur?” ifadesi üzerine “her zaman doğru olmaz” şeklinde cevap vermiştir. Bu aşamadan itibaren düşüncelerini etkinlik kağıdına yazılı olarak aktarmaya başlamıştır (Şekil 4.27). x ’e sırasıyla 1 ve 2 değerlerini vererek sağladığını görmüş, x ’i sürekli büyüttükçe bu iddianın hep doğru çıkacağını belirtmiştir. Bir de $0 < x < 1$ aralığını incelemek istemiş, bu aralıktan aldığı $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{5}$ değerlerini yerine koyduğunda da 2’den büyük eşit olduğunu görmüş ve “evet her zaman doğrudur x ’in değerleri için” diye iddia üzerindeki düşüncelerini paylaşmıştır. İlk düşüncelerini sözlü ifade ederken “her zaman doğru olmaz” görüşünün yerini yazılı çalışmalarından gördüğüyle “evet her zaman doğrudur” görüşüne bırakmıştır. Neden bu yolla bir araştırma sürecine girdiği sorulduğunda 0’dan büyük dediği için, aklına 0’dan büyük sayıları yerine koyma geldiğini ifade etmiştir. Melis’in iddiasında odaklandığı yerin “ $x > 0$ ” ifadesi olduğu ve denedikçe de, x büyüdükçe ifadenin hep doğru çıktığını söylemiştir. Burada tamsayılar olmasaydı $\frac{1}{x}$ olduğu için $0 < x < 1$ aralığındaki denemeleriyle de aynı şeye denk geldiğini, dolayısıyla her zaman doğru olduğunu

gördüğünü vurgulamıştır. Buraya kadar olan çalışmaları Şekil 4.27’de 1 numaralı bölümde görülmektedir.

Böyle bir iddiayla karşı karşıya kalsa hep bu şekilde mi hareket edip etmediği sorgulandığında, Melis’in iddiasının basit bir ifade olması ve kendisinin bazı denemeleri sonucunda görebileceği bir şey olduğunu belirterek bu iddianın araştırılmasında direkt aklına deneme yanılmanın geldiğini söylemiştir. Diğer taraftan cebirsel bir ispat yapmayla ilgili şu şekilde bahsetmiştir:

4EÖ1: ...Mesela hani şey de düşündüm. Burada cebirsel bir şekilde ispat yapsam diye de düşündüm ama hani o zaman zaten bu cebirsel bir ifade yani ben de aynı şekilde düşünecektim.

R: Nasıl aynı şekilde düşünecektin?

4EÖ1: Yani şey hani $x > 0$ zaten. Bu zaten cebirsel bir ifade. Bunu cebirsel olarak tekrar dönüştürmeyi şu an kafam karıştı. Yani orada onu şey yapamadım. Hani şöyle düşünebilirdim ama $x > 0$ ise $x + 1 > 0$ ’dır. O zaman Melis’in bu iddia ettiği de $x + 1 + \frac{1}{x+1} \geq 2$ olur. (kendi kendine soruyor) Bu da her zaman 2’den büyük olur mu? Buna bakabilirdim.

R: Neden $(x+1)$ ’i düşündün?

4EÖ1: (kendi kendine soruyor) Neden öyle düşündüm? Yani x ’i değiştireyim diye ona 1 ekledim. Hani x , x olarak kalmasın. x ’in farklı bir durumuna bakayım diye.

R: Hıhı. Bu farklı durumuna bakmak sana ne sağladı? Ne gördün?

4EÖ1: x ’i artırdığımda da eşitliği sağladığını gördüm aslında.

R: Nasıl gördüğünü daha çok açıklamayı istiyorum ben de.

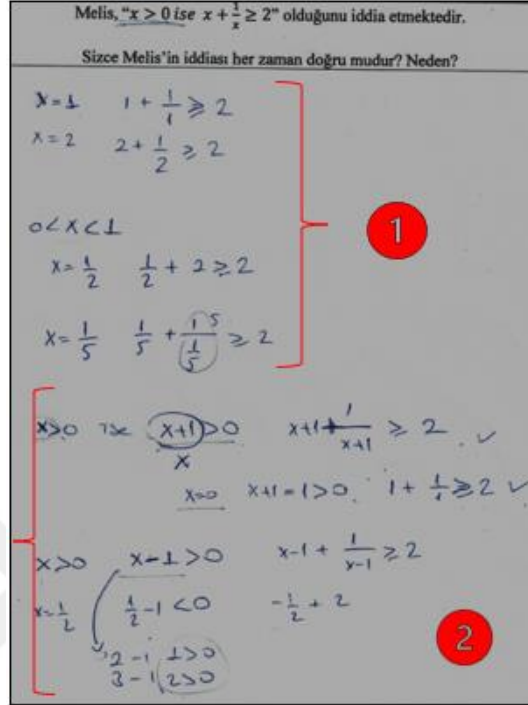
4EÖ1: Yani hani buradan sonra bunu devam ettirmek isteyeceğim ama tekrar şuraya dönüyorum mesela hani x ’i... Bu sefer x ’e mesela 0 da diyebilirim.

R: Hıhı.

4EÖ1: O zaman $x+1=1$ olacaktır ve yine bu sağlayacak o zaman yani. Hani $x=0$ desem $x+1=1>0$ olur. Yani şunu $[x+1>0]$ sağladım. O zaman şimdi burada da yine $1 + \frac{1}{1} \geq 2$ olmuş olacak. Yani yine bunu sağlamış oldum.

Şekil 4.27’nin 2 numaralı bölümünün ilk kısmında bu çalışması dikkate alındığında, 4EÖ1’in düşünme mantığı x yerine $x+1$ aldığı anda öncül ifadenin sıfırdan büyük olmaya devam etmesini bir şekilde vurgulamaya çalıştığıdır. Bir başka ifadeyle Melis’in koşulunu sağladığını düşünmektedir. Burada artık x ’i 1 birim öteleyerek elde ettiği yeni “ $x+1$ ” ifadesinde x ’i 0 olarak alabileceğini düşünmektedir. Bu durumda $x+1$ değeri 1’e eşit olup 0’dan büyük bir değere dönüşecektir. O halde eşitsizlikte de x gördüğü yere $x+1$ şeklinde baktığında

$x + 1 + \frac{1}{x+1} \geq 2$ yani yeni düzenlemesine göre $1 + \frac{1}{1} \geq 2$ olacaktır ve bu durumda sağlamış olacaktır.



Şekil 4.27. 4EÖ1'in Melis'in iddiasını araştırma sürecindeki ispatlama girişimleri

Benzer bir cebirsel dönüştürmeyi $x-1$ üzerinde Şekil 4.27'nin 2 numaralı bölümünün ikinci kısmında şu şekilde yapmıştır:

4EÖ1: ... Mesela bir de şunu deneyeyim; $x > 0$ olsun. $x-1$ yapsam bunu mesela. $x-1 > 0$ da olabilir. $x-1 < 0$ da olabilir. Çünkü hani x tamsayı değilse, $x = \frac{1}{2}$ ise $\frac{1}{2} - 1 < 0$ olacaktır. (kendi kendine soruyor) o halde benim şurada yazdığım yani $x - 1 + \frac{1}{x-1} \geq 2$ ifadesini sağlayacak mı? Bu da $(-\frac{1}{2})$ olacak. Burada da 2 geleceği için, $-\frac{1}{2} + 2$. Bu mesela sağlamadı şimdi. O zaman burada x 'in büyüdükçe bu ifadeyi sağladığını görebilirim. Hani $x+1$ demiştim. Burada $x-1$ dedim. x 'i artırdığımda bunu sağlıyor. Zaten burada da aynı sonucu bulmuştum. Ama x 'i küçülttüğümde 2'den büyük eşit olmadı.

Neden böyle bir çalışma içine girdiğini ya da ne yapmak istediği sorulunca düşüncelerini şu şekilde ifade etmiştir:

4EÖ1: Yine aynı şeyi yaptım aslında denedim yani. x yerine değer verdim ama mesela x , $x+1$ olduğunda ben burada x 'e 0 verebildim.

R: Hıhı.

4EÖ1: Ama buradayken $[x + \frac{1}{x} \geq 2]$ veremiyordum. Burada x 'e 0'dan büyük vermek zorundaydım onu gördüm.

R: Yani bu aldığın özel seçimlerin arkasındaki yatan şeyi öğrenmek istiyorum. Hani neden $x+1$ ve $x-1$ üzerinden gittin?

4EÖ1: Yani aslında aklıma biraz şey geldi. Tümevarım, tümdengelim. Orada da 1 fazlasını deneyerek ilerliyorduk. Biraz oradan çağrışım yaptı.

Tam da bu noktada 4EÖ1'in düşüncelerini ele geçiren odaklandığı şeyin tümevarımdaki mantığa uyarlamak olduğu açığa çıkmıştır. Daha önceden ispatla ilgili aklında kalan ya da hatırladığı tümevarım yönemi sonuca ulaştırmada işe yarayan bir yöntem olmuştur. Bu nedenle 4EÖ1 de bu etkinlikte araştırmak istediği şeyi bu yöntemle sonuçlandıracağına inanmaktadır:

R: Peki neden tümevarıma benzetmek istedin? Ya da oradan çağrışım yaptırmaya çalıştın?

4EÖ1: Sonuca gidebileyim diye. Yani hani tümevarımla ilerlediğimle aynı sonucu buluyorsam eğer bu önerme doğru kabul ediliyordu. Ben de aynı şeyi yapmaya çalıştım aslında.

R: Peki yapmak isteseydin nasıl bir yol izlerdin? Yani bu bahsettiklerinden tümevarım ile yapmak istedim dediğin şeyi biraz daha açıklamamı istiyorum.

4EÖ1: Yani (düşünüyör). Tümevarımda önce kendisini ($x > 0$ olan yeri gösteriyor) yapıyorduk. Daha sonra bunun 1 fazlasını yapıyorduk ($x+1 > 0$ olan yeri gösteriyor). Ama en son bunları topluyorduk diye de hatırlıyorum. Şu an ondan da emin değilim. Hani o yüzden çok da şey yapamadım. (Düşünüyör). Yani ben bunu bu şekilde sağlıyor der bırakırdım herhalde.

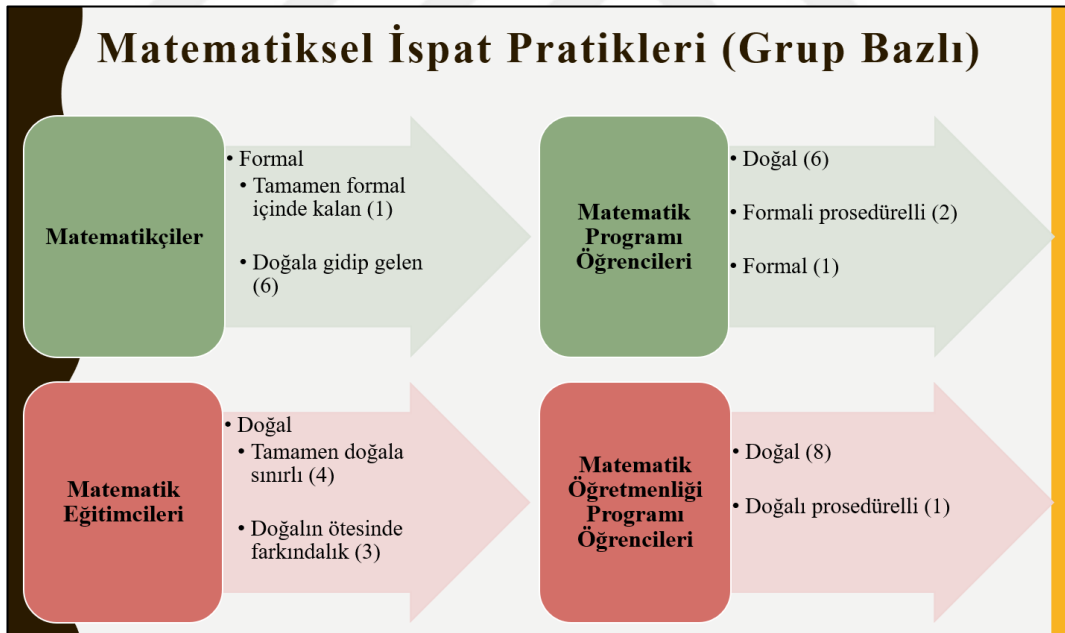
Araştırmasını geçerli bir ispat olarak görüp görmediği sorulduğunda, ispattan çok değer vererek sağlıyor mu diye baktığını ve kontrol ettiğini (burada ilk çalışmasını referans göstererek), ispatın daha çok genel ifadeleri içermesi gerektiğini düşündüğünü dolayısıyla kendi çalışmasını ispat olarak kabul etmeyebileceğinden bahsetmiştir. Böyle olmakla birlikte x yerine $x+1$ ve $x-1$ almakla biraz genel şekilde yapmaya çalıştığını (burada ikinci çalışmasını referans göstererek), değerlerdense x 'ler üzerinden yani bilinmeyenlerle yol almaya çalıştığını fakat burada sonuca gidemediğini açıklamıştır. Diğer taraftan Melis'in iddiası üzerindeki kararı incelendiğinde doğru olduğunu söylemiş ve şu şekilde bahsetmiştir:

4EÖ1: $x > 0$ olmasıyla x 'in 0'dan büyük olan değerleri düşündüğümde iddia ettiği şu denklem doğrulanmış oluyor yani. Bunu gördüm doğru olduğunu, sağladığını. Mesela burada ($x-1$ ile yaptığı alanı gösteriyor) x 'i 0'dan küçülttüm mesela hani 1 eksilterek 0'dan küçülttüğümde bunu sağlamadı ($-\frac{1}{2}$ örneğiyle gördüğü yeri işaret ediyor). Aynı şekilde iddia ettiği bu

denklemin eşitsizliğin ya da işte (neyse o anlamında diyor) $[x + \frac{1}{x} \geq 2]$ 'in] yanlış olduğunu da gördüm. Yani tam tersinin de sağlamadığını da gördüm. O yüzden bunu [iddiayı] doğru kabul ederim.

4EÖ1'in son ifadesinde yer alan “tam tersinin sağlamadığını gördüm” dediği yer x-1 ile yaptığı çalışmadır. Burada iddianın tersi durumunu x-1'in sağlamamasıyla ilişkilendirdiği düşündürücüdür. Çünkü eğer yapmak istediği “x’leri küçülttüğünde iddia sağlanmıyor” düşüncesiye bunu x-1 olarak kavramsallaştırması zayıf sembolik bağlantılarına işaret etmektedir. Genel olarak 4EÖ1'in sembolik anlamda yaptığı araştırması, bu araştırmadaki matematik programı öğrencilerinden 3MÖ7'nin benzer şekilde iddiayı tümevarımla araştırmaya gittiği fakat tümevarım adımlarını bir şekilde doğru hatırlayabilse de tamamen mekanikleşen bir tarzına benzemektedir.

Araştırmadaki matematikçilerin, matematik eğitimcilerinin, matematik programı öğrencilerinin ve matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin matematiksel ispata ilişkin pratikleri Şekil 4.28'deki gibi çerçevelenmektedir.



Şekil 4.28. Katılımcıların grup bazlı matematiksel ispat pratikleri

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Araştırmanın bu bölümünde bulgulardan elde edilen sonuçların alanyazındaki çalışmalarla birlikte tartışılmasına, bu çalışmalarla benzerlikleri ile farklılıklarına yer verilmiştir.

Sfard'ın (2014) ve Hannula'nın (2018) işaret ettikleri üniversite matematiğinin, öğrencinin daha önceki okul deneyimleri tabanındaki matematik olarak nitelendirilene benzememesi ya da aralarında bir kopukluk olması, bu çalışmadaki çoğu katılımcı tarafından matematiksel ispat bağlamında gerilim yaşama olarak ifade edilmiştir. Örneğin matematik programının bir öğrencisi olarak gerilimi bizzat yaşadığını ifade ederek görüşlerini ilk elden yansıtan 3MÖ4 bu durumdan, matematiksel ispat açısından uygulanan teknik açısından okul matematiği ile üniversite matematiğinin farklı olduğunu belirten bir farkındalıkla bahsetmiştir. 3MÖ4'ün bölümündeki 1MA1 matematikçisi tarafından ise bu durum üniversite seviyesinden daha önce gördükleri konuların genişleme ve açılmasının artık üniversite seviyesinde zamanı olduğunu belirtmiştir.

Matematiksel ispatın matematik eğitimindeki sınıfa uyarlanan ve öğretmen yetiştirme perspektifinde ele alınış biçimiyle matematikçiler tarafından ele alınış biçiminin farklılığı, bu çalışmadaki özellikle matematik eğitimcileri ve öğrencilerinin ortak bir görüşünü yansıtır niteliktedir. Staples ve diğerlerinin (2012) belirttiği gibi, bu farklı iki topluluğun amaçları, 2EA1 matematik eğitimcisinin ispatı mesleki hedeflerini gözeterek değerlendirmesi bu çalışmada da belgelenmiştir. Her ne kadar öğrencilerinin öğretmenliği meslek olarak benimseme durumu, onların da öğretim yapacakları kitleyi göz önünde bulundurması önemli bir faktör olsa da 2EA1'in kendisinin de ispata yaklaşımının bu şekilde olduğunu vurgulamasının altında yatan neden kendi öğrencilik deneyimleri olmuştur. Öğrencilik zamanında bazı derslerde ispatla ilgili yaşadığı zorluklar ve bölümünden mezun olduktan sonra ispata dair 'kavramın içi boş' söylemi ve pratiğine yansımamış bir ispat kullanılmamaya yüz tutmuştur. Bu nedenle bu deneyimi onun ispata hem kendi bakış açısını sınırladığı gibi hem de öğretimde ele alma şeklini de belirlemiştir. Bu durum 2EA1'in Knuth'un (1999) çalışmasındaki hala 'öğretmen şapkası'nı çıkarmayan bir düşünce biçimi sergilediğini göstermektedir.

Matematiksel ispatın işe yararlık kaygısı taşınamaması sözde önemli gibi görünse de bu araştırmadaki bazı matematik eğitimcileri için farklı bir odak söz

konusu olmuştur. Örneğin 2EA6'nın deyimiyle ekonomik olarak ilerlemede yürüyen matematiğin daha ön planda olması ve pratikte bu tarz ilerlemenin bilgisayar gibi araçlar sayesinde olduğu, ayrıca matematik eğitiminin ilk amacının ikna yöntemi olduğunu vurgulaması bir anlayış-kavrayış ölçütü meselesi olarak Stillman ve diğerlerinin (2020) eğitimsel perspektifiyle örtüşmektedir. Stillman ve diğerlerine göre (2020) matematik eğitiminin bir amacı, vatandaşları yetkin karar vericiler olarak yetiştirmektir. Bu çalışmada bu görüşe paralel bir bakış açısı 2EA6 tarafından araştırmadaki bazı matematik eğitimlerinin bir sesi olarak dile getirilmiştir. 2EA6 için en makul, mantıklı karar alınıp alınmadığı, öğrenciye günlük hayatında da bunun lazım olduğu, matematiksel ispata toplumsal ve ekonomik açıdan bakılmasının hatta çok fazla ispatların ön plana çıkarılmasına gerek olmadığını belirtmesi bu durumla karakterize edilebilir. Aynı zamanda 2EA6 ile burada temsil edilen bir bakış açısına yer verilmiş olsa da 2EA1 ve 2EA7 matematik etğimcileri de benzer görüşü paylaşmaktadır.

Araştırmadaki matematikçilerin bir kısmı sezgiyi yararına kullanabilme, bir kısmı ise sezgi yerine ispatın önemine hem algılarında hem de pratiklerinde değinmektedir. Bununla birlikte matematiksel ispatı nihai ürüne dönüştürmede bazı matematikçiler, örneğin 1MA9 her ne kadar matematikte sezgi diye bir şey olmadığını hatta herhangi bir ispatlama girişiminde bulunurken matematiksel ispatın belirli bir teknikle yapıldığını belirtse de etkinlik üzerinde düşüncesinde meseleyi anlayabileceği alanlara çekerken görsel araçlara başvurduğu dikkat çekmektedir. Bu durum Stylianou'nun (2002) çalışmasında vurguladığı *“formal sunumlarda ve matematiksel yayınlarda görsel araçların reddedilmesine rağmen matematikçilerin çalışmaları hakkındaki raporlar, matematikçilerin görsel akıl yürütmeyi kendi çalışmalarında kullanmaya devam ettiğini göstermesi ve bunlara düşünme biçimlerine rehberlik ediciler gözüyle bakması”* durumuyla açıklanabilir.

Stavrou'nun (2014) çalışmasında ele alındığı şekliyle, öğrencilerin sıklıkla düştüğü hatalardan biri “sonucu ispatlamak için sonucu varsaymak”tır. Bu araştırmada bazı katılımcıların niyetleri bu noktada çeşitlilik göstermektedir. Bazı katılımcılar görür görmez Melis'in iddiasında eşitsizliğe odak kurarlarken yani iddiayı ispatlamaktan çok verilen eşitsizliği çözme olarak farklı bir yapıya dönüştürmektedir. Matematikçilerin çoğu hem etkinlik öncesinde hem de etkinlik üzerinde görüşlerini açıklarken bazı bilinçli niyetlerini görünür kılmışlardır. 1MA7 bilinçli bir niyetle sonuçtan başlayarak problemin kendisine ne getireceğini

çözmeye çalışmıştır. Meseleyi çözdükten sonra yaptığı ince bir ayrımla süreci tersine çevirerek (denklik kurma) burada hataya mahal vermeyecek titizlikte ispatını tamamlamıştır. Ayrıca IMA7'nin, aynı topluluk içerisinde bazı bilinen şeyleri açıkça söylemeye gerek duyulmayan, bunun böyle olması gerektiği yapının zaten bilinmesi durumunu yansıtan örtük küme üzerinden işlettiği ispatlama girişimiyle Çelik ve Aydoğdu-İskenderoğlu'nun (2023) bahsettiği sıradan ispatla ilgili bir durumu yansıttığı düşünülenilir.

Öğrencilerin öğrenme güçlüklerinin devam etmesi ve aynı zamanda uygun düzeyde sağlam matematik seviyesini koruma zorluğu, matematikçiler ve matematik eğitimcilerini iş birliğine sürükleyebilmektedir. Bu iş birliği, birbirlerinin rolüne ve potansiyel katkısına karşılıklı saygı ve birbirinden öğrenecek çok şey olduğunun kabul edilmesinden kaynaklanmaktadır (Sabouri vd., 2013). Diğer taraftan Bass'ın (2005) matematik, matematikçiler ve matematik eğitimi arasındaki üretken etkileşimler hakkındaki düşüncesi şu şekildedir. Bu disiplinin uygulayıcıları olarak araştırma matematikçileri, matematik eğitimi çalışmalarına değerli matematiksel bilgiler, bakış açıları ve kaynaklar getirebildikleridir (s. 430). Alcock (2010) tarafından matematik eğitimi topluluğu matematikçileri öğretimleriyle ilgili tartışmalara dahil etmek istiyorsa, en acil kaygıları olarak algıladıkları şeyi anlamalı ve bunları ciddiye almalıdır diye belirtmektedir. Artigue (2016), öğretimin etkili olabilmesi için matematikçiler ve matematik eğitimcilerinin “tüm taraflar için anlamlı olan ve kendi ilgi ve ihtiyaçlarını karşılayan meseleler” geliştirmek üzere iş birliği yapması gerektiğine inanmıştır (s. 12). Etkinlik 1 üzerindeki çalışmasını tamamladıktan sonra özellikle bazı matematik eğitimcileri, matematikçilerle iş birliği halinde çalışmalarının gerektiğini belirtmesi bu durumu dikkate aldıklarını gösteren önemli bir yön olarak değerlendirilebilir.

İspat profesyonel matematikçiler arasında matematiksel sonuçları iletmenin mükemmel bir yolu olarak görülmektedir (Hemmi, 2006). Selden ve Selden (2003), matematikçilerin başkaları tarafından yapılmış ispatları inceleyerek etkileşim kurmasıyla iletişimin ispatlar aracılığıyla gerçekleştiğini açıklamıştır. Bu çalışmada da benzer bir durum söz konusudur. Matematiksel ispatın önemi noktasında matematikçilerin ispatla ilgili değindiği ve ön plana çıkardığı iletişim rolü olmuştur.

Üniversite düzeyinde matematik öğretiminin en yaygın şekli ders anlatımıdır ve üniversite matematiğinde dersler işlenirken, öğrenciler genellikle dinleme ve not alma konusunda önemli miktarda zaman harcamaktadır (Pinto ve Karsenty, 2018, s.129). Ayrıca Pinto ve Karsenty'e (2018) göre ileri matematik derslerinde en belirgin bağımsız öğrenme etkinliklerinden biri ispat okuma yani ispat inceleme çalışmalarıdır. Araştırmacılar, öğrencilerin derslerde ilk kez kendilerine ispat sunulurken öğretmenlerini dinlediklerini, ispatın tam olarak öğrenilebilmesi için sadece kendilerinin bu şekilde aktardığı içeriğin yeterli olmadığını, dersten sonra da öğrencilerin yalnız kaldıklarında ders notlarını gözden geçirerek veya ders kitaplarını inceleyerek ispatla ilgili anlayışlarının tam gelişebileceğinden bahsetmektedir. Weber (2012) çalışmasındaki matematikçilerin, lisans öğrencilerinden dersten sonra bir ispatı anlamak için, örneğin on satırın altındaki ispatlara iki saate kadar zaman ayırarak bir araştırma sürecinin içerisine girmelerini, kayda değer araştırmalara ulaşmalarını beklediklerini ifade etmiştir. Bu araştırmada da benzer bir durum, matematikçiler açısından önemli olarak işaretlenmiştir. Örneğin bu durum matematikçilerden IMA8 tarafından, aynı zamanda ispatla ilgili gerilim noktasında geçen ilgili bölümdeki görüşünün altında şu şekilde karşılık bulmaktadır. IMA8, öğrencilerinin kendilerinin derste ispatla ilgili verdiklerinin dışında da bir çalışma içerisine girme ve araştırma yapmalarının gerektiğini ifade etmiştir. Bunun sebebi olarak ispatın, kolay olmayan bir yapısı nedeniyle hemen oturtulabilecek ya da kavranabilecek bir doğasının olmadığını, bu nedenle öğrencilerin lisedeki gibi derse gelme-gitme şeklindeki alışkanlıklarının ispatta çok mümkün olmadığını, ekstra bir çalışma yapmaları gerektiğinin önemini vurgulamıştır. Bu durum aynı zamanda çalışmadaki matematikçilerin ispatla ilgili önemli gördüğü noktalar açısından “araştırma ve sorgulama” rollerini ilgilendiren bir değere sahip olarak, Weber'in (2012) ve Pinto ve Karsenty'in (2018) ifade ettikleri yönleri yakalamıştır.

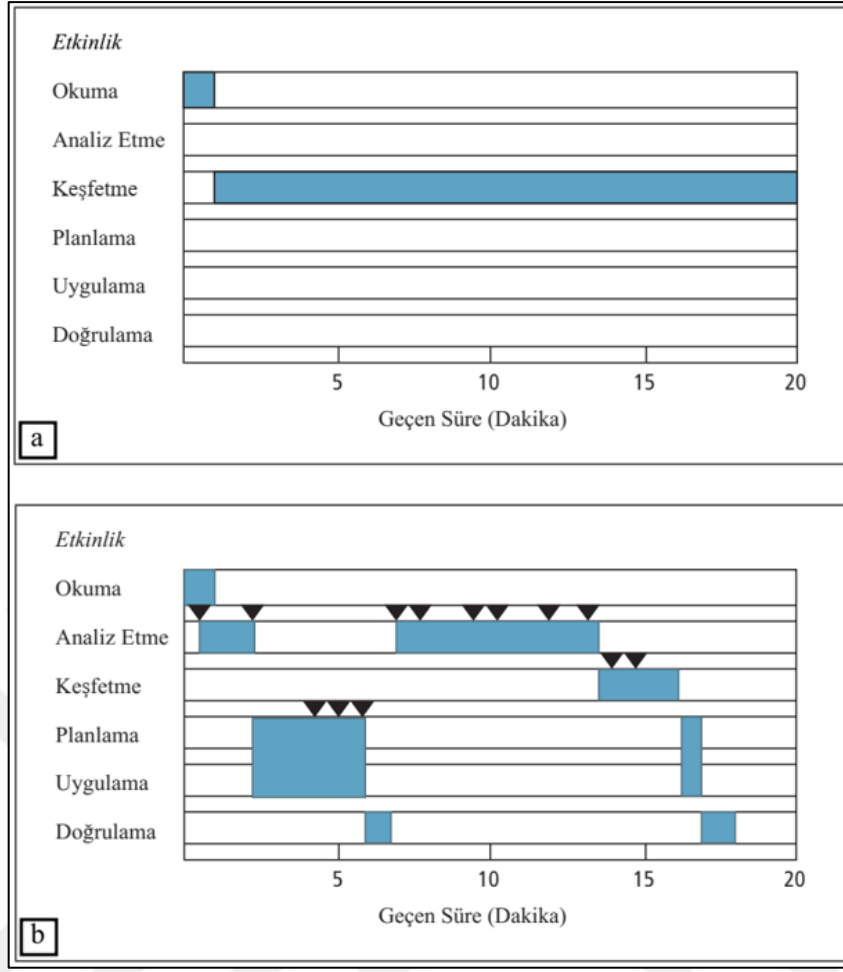
Formal ve tümdengelimli bir disiplin olarak matematik kavramından kaçınmaya çalışan Pólya, matematiğin tahmine, kavrayışa/içgörüyeye ve keşfe dayalı olması bakımından deneysel bilimlere benzediğini şu sözleriyle savunmaktadır:

Araştırmada aktif olan bir matematikçi için, matematik bazen bir tahmin oyunu olarak karşımıza çıkabilir; bir matematiksel teoremi ispatlamadan önce tahmin etmeniz gerekir, tüm detayları vermeden önce ispatı tahmin etmeniz gerekir.

... Günlük yaşamda olduğu gibi bilimde de yeni bir durumla karşılaştığımızda bazı tahminlerle yola çıkıyoruz. Başlangıç tahminimiz hedefin altında kalabilir, fakat deniyoruz ve başarıya ulaşma durumuna göre aşağı yukarı değiştiriyoruz. Sonunda, gözlemler ve analogi tarafından yönlendirilen birkaç deneme ve birkaç değişiklikten sonra, daha tatmin edici bir tahmine ulaşabiliriz. Sıradan bir insan, doğa bilimcinin bu şekilde çalışmasını şaşırtıcı bulmuyor... Ve sıradan bir insan, doğa bilimcinin kendisi gibi tahmin ettiğini duyduğuna da şaşırmaz. Matematikçinin de tahmin etmesi, sıradan insanlara biraz daha şaşırtıcı görünebilir. Matematikçinin yaratıcı çalışmasının sonucu, kanıta dayalı bir akıl yürütmedir, bir ispattır, ancak ispat, makul akıl yürütmeyle, tahmin yoluyla keşfedilir...

Matematiksel gerçekler önce tahmin edilir ve sonra ispatlanır ve bu kitaptaki hemen hemen her bölüm bunun normal bir işlem olduğunu göstermeye çalışır. Matematiğin öğrenilmesinin matematiğin keşfi ile bir ilgisi varsa, öğrenciye önce tahmin ettiği ve ardından bazı matematiksel gerçekleri uygun bir düzeyde ispatladığı problemler oluşturabilme fırsatı verilmelidir (Pólya, 1954; akt. Schoenfeld 2016, s.6).

Pólya'ya ait yukarıdaki görüşe benzer şekilde Klein (2016), verimli bir matematik çalışması yürüten bir araştırmacının, diğer tüm bilimlerde olduğu gibi matematikte de ilk etapta titiz tümdengelimli bir gelenekte çalışmadığını, aksine hayal gücünden önemli derecede yararlandığını ve buluşsal (heuristic) başvurularından amacına uygun olanlarının yardımıyla tümevarımsal olarak ilerlediğini ifade etmiştir. Bu bakımdan araştırmacıların dikkat çekmek istediği durumlar, bu araştırmadaki matematikçilerin genel çalışma prensibini besleyen ispatın temelleriyle, ispata gelene kadar ki keşifleriyle örtüşmektedir. Bunun yanı sıra Klein (2016) bir teoremin ispatlanmasıyla ilgili bir problem durumunda, araştırmacının tümevarımsal çalışmasını açıklayarak ortaya koymasının, teoremin tümdengelimsel olarak ispatlanması kadar değerli olduğunun önemsenmesi gerektiğinin altını çizmektedir. Bu iki yaklaşımın her ikisinin de eşit derece gerekli olduğunu, keşfin daha sonraki sonuca ulaşmanın (ispat) ön varsayımı olduğunu belirtmiştir. Klein'ın tümevarımsal olarak değindiği durum, bu çalışmadaki matematik eğitimcilerinin açıklama rolünü daha ön planda tutmalarını bir bakıma açıklayabilmektedir. Ayrıca matematik eğitimcilerinin ispatlama girişimlerinde daha parçadan bütüne dayalı ya da problem çözme mantığında, hatta doğal bir keşfe dayalı yaklaşımlarıyla (etkinliğe bağlı ya da etkinlikten bağımsız olarak) örtüşmektedir.



Bir öğrenci (a kısmı) ile bir matematikçinin (b kısmı) matematiksel bir problem üzerinde çalışma süreleri (Schoenfeld, 2016, s.24).

Schoenfeld'in (2016) yukarıda resmettiği gibi, bu çalışmadaki özellikle matematikçilerin Melis'in iddiasıyla ilgili problemi dikkatli okuma ve anlama, problemi analiz edilebilir yapılara ayırma, sürekli problemle etkileşim halinde olarak yeni ilişkiler keşfetme, bir plan yaparak planını ileri geri oynatarak uygulama ve gerektiğinde tekrar başa sarma ve en sonunda ispatlanacak ifadeyle biten sistemin içinde işletiyor olmasını açıklayabilmektedir. Dolayısıyla çalışmadaki matematikçilerin problem üzerinde yoğun uğraşlar sergileyerek titiz çalıştığı söylenebilmektedir. Bu çabalarının sonucunda, matematikçiler sadece formal yolla arayış içerisinde olmakla değil aynı zamanda doğal yollardan da gerektiği zaman ve ihtiyaç duyulan yerde faydalanabilmeleri, kendilerini formal yolla sonuçlanan bir rotanın içerisine başarılı bir şekilde taşıyabilmıştır. Buna karşılık, araştırmadaki öğrenci grupları için Melis'in iddiasıyla ilgili problem kendilerine 'sadece basit bir

eşitsizlik' gibi daha tekdüze bir mesele olarak görünebilir olduğunu düşündürmektedir. Bununla birlikte matematik eğitimcilerinin çoğunun düşüncesini temsil edebilen bir durumdan bahsetmek güçtür. Matematik eğitimcilerinin bazıları her ne kadar kendileri doğal bir yolla iddiayı araştırmış olsalar da asıl olması gerekenin bu olmadığının bilincinde bir yaklaşımla öğrencilerden ayrılmaktadır. Böyle olmakla birlikte matematik eğitimcileri, matematikçiler gibi işletebildikleri hali hazırda olan pratikleri olmadığı için ya da yapbozun uygun parçasını devreye sokamadıkları için ya da kendilerini matematiksel olarak rahatsız eden şeyden tam anlamda kurtulamadıkları için, araştırmadaki matematikçilerden de bir bakıma ayrılan bir yaklaşımda olduklarını göstermiştir. Diğer taraftan ise matematik eğitimcilerinin bu yaklaşımları doğal yolun ötesinde bir farkındalığını yansıtmaktadır.

Sönmez vd. (2023) çalışmalarındaki matematik öğretmen adaylarının ileri-geri tekniğini ispat yaparken bilinçli bir şekilde kullanmadıklarını, bununla birlikte bu tarz hareketleri yoğun olarak işlettiklerini belirtmiştir. Benzer bir durum bu araştırmadaki matematikçilerin hem etkinlik öncesi hem de etkinlik üzerinde ispatlama girişimlerinde karşılık bulmaktadır. Fakat Sönmez vd.'nin (2023) çalışmalarından farklı olarak, bu araştırmadaki matematikçilerin aldıkları bilinçli ve kritik kararlarla yol almaları dikkat çekmektedir. Solow'un (2014) da bahsettiği, biraz baştan biraz sondan duruma göre ileri-geri hareket etmenin doğası, bu araştırmadaki matematikçilerden 1MA8'in rutin yaklaşımından biri olan 'resimsel görme' ile ilgili bir planını yansıtmaktadır. Benzer bir durumla öğrencilerinden 3MÖ2'nin etkinlik üzerindeki yaklaşımında kontrapozitif kullanmasıyla karşılaşmaktadır. Fakat 3MÖ2 iddiayı araştırma planıyla, ileri-geri tarzını ilk elden düşünüyormuş gibi görünse de ulaşması gereken hedefe yönelik aralarda inşa edemediği hatta formal sistemle ilgili zayıf bağlantılar kurduğunu gösteren problemleri mevcuttur.

Raman (2002) matematiğin, titiz argümanlar ve formal ispatı içeren formal boyutuna karşılık daha az titizlikte ya da kesin olmayan argümanlar, önseziler ve sezgileri içeren informal boyut olmak üzere iki boyutunun (ya da yönünün) olduğunu ifade etmektedir. İki ayrı boyut olarak görmektense Raman, informal boyutun genellikle formal boyutun temeli olarak kabul edildiğini belirtmektedir. Böyle olmakla birlikte Raman (2002) çoğu öğrencinin matematikte formal ve informal yönleri koordine etmede zorlandıklarını, bu zorluklarının iki şekilde

olabileceğini açıklamıştır: formal bir argüman oluşturabilmek için informal anlayışlarından tam olarak faydalanamadıkları ya da öğrencilerin sembollerin ne anlama geldiğine yönelik daha derin bir anlayış geliştirmeden sanki formal bir yolla işletiyormuşçasına görünmeleri. Bu araştırmada da benzer bir sonuca ulaşılmıştır. Matematik programı öğrencilerinden özellikle formal yollarla işletmeye çalışıyormuş gibi görünen hatta araştırmasını kesinlikle bir ispat olarak görmesine izin veren fakat sembollerin ya da ispatlama yöntemlerinin ne anlama geldiğini bilmeden hareket eden öğrenciler, Raman'ın (2002) bahsetmiş olduğu durumla örtüşmektedir.

Holvikivi'ye (2007) göre tümdengelimli akıl yürütme doğal akışa uymayan ve zor bir süreç olduğu için bireyin düşünmesini göz ardı edebilmektedir. Bu düşünceye benzer bir görüş matematik eğitimcilerinden özellikle formal ispata eleştirilerini sunan katılımcılarda karşılaşılmaktadır. Örneğin 2EA6 matematik eğitimcisi hem etkinlik öncesi görüşleri hem de etkinlik üzerindeki çalışması incelendiğinde düşüncenin her zaman ön planda tutulmasını savunmaktadır. Doğal düşünen bir birey olarak hele ki ortada bir bilinmezlik varsa, ayrıca formal yollarla işletmeyi kişi bilmiyorsa ilk hamle otomatik olarak doğal bir düşünme yoluyla gelişecektir diye açıklamıştır. Bu açıdan da “benim aklıma ilk formal mi gelir” söylemiyle bu görüşü temsil ettiği düşünülebilir. Ayrıca 2EA6 ispatın önemi üzerine görüşlerini paylaşırken, çok fazla ispatla ilgilenmenin anlamsız olduğunu, formal ispatta ısrarın kişinin düşünmesini gölgelediğini, hatta düşünmenin ötesine geçtiğini ve amacını aştığını belirtmiştir. Böyle olmakla birlikte elbette belli bir kesimin bu tarzla ilgilenmesini uygun bulduğunu ama yine de herkesin “bir repertuar ezberlemesi” gibi bu tarz hareketleri sergilemeyi yanlış bulduğunu, özgün ve kreatif ispatların yapılmadığını ifade ederek formal ispatı eleştirmektedir. Gerçekten de matematiksel ispat algısını bu anlamda çerçevelediği görüşü hem pratiğinde hem de ispatla ilgili görüşlerini açtığı her bir algı kategorisi alanında yer almıştır.

Çalışmadaki her iki programdaki öğrenciler lisans seviyesinde matematiksel mantıkla (doğrudan bu ders adı altında ya da ilişkili bir dersle karşılaşarak) son sınıf seviyesine gelene kadar aldıkları derslerden de görüldüğü üzere, bir yerde kesişmişlerdir. Böyle olmasa dahi her iki bölümde de “Soyut Matematik” ortak okutulan bir ders niteliğindedir ve öyle ya da böyle formal ispatla karşılaşmışlardır ya da formal tarzı deneyimlemişlerdir. Her ne kadar formal ispata dair bir eğitim

alsalar da ne matematiksel ispata dair algılarında ne de matematiksel ispatlama girişimlerinde formal tarzı tam benimseyemedikleri ya da sergileyemedikleri görülmektedir. Bunun yerine daha çok informal akıl yürütmeyle eşitlenebilecek ya da pratikteki karşılık anlamında ispata pragmatik yaklaşıtları, ispatlamaktan çok bir bilinmezlik ortamında nasıl davranıyorsa etkinliğine de bunu aldığı, bir problem çözme süreci olarak meseleye baktıkları görülmüştür. Bu durum Holvikivi'nin (2007) çalışmasında öğrencilerin pragmatik akıl yürütmeyi daha fazla kullanma eğilimleriyle açıklanabilir.

Dede ve Karakuş'a (2014) göre okul matematiğinde ispat bir konudan çok düşünme biçimidir. Gerçekten de bu çalışmadaki matematik eğitimcilerinin tamamının matematiksel ispata yönelik tariflerini bu anlamda yaptıkları görülmüştür. Sadece burada önemli görülen bir nokta, matematik eğitimcilerinin öğretim yaptıkları hedef kitleden kopamayan ispat algıları, bu anlamdaki görüşlerine de bulaşmaktadır. Diğer taraftan Davis ve Hersh'in (2002) ifade ettiğı matematikçi için önemli olan matematiksel oyunun kendisi olması durumu ile Garnier ve Taylor'un (1996) belirttiğı ispatı bir matematikçinin yaptığı işin temsili olarak görmesi, bu araştırmadaki matematikçilerin tamamının çalışma prensibi olarak yaptıkları işle bağdaştırılan bir tarif sunmasıyla örtüşmektedir. Buna karşılık öğrencilerde durum bir bakıma matematik programı öğrencileri açısından farklılaşabilmektedir. Bu programdaki öğrenciler matematikçilerden farklı olarak ispata bir araç anlamı yüklemektedir. Bu öğrenciler araç olarak matematiksel ispat tarifini "doğruluğunu gösterme" şeklinde ele alırken aynı zamanda matematiksel ispatın kendileri için önemi noktasında da ispatın "doğrulama" rolüne işaret ederek değer vermektedir. Bu durum, alanyazında öğretmen adaylarıyla yapılmış çalışmalarda görülen ve öğretmen adaylarının ispatı daha çok doğrulama aracı olarak kavramsallaştırma sonucuyla (örn. Likando ve Ngoepe, 2014) sadece benzerlik taşımaktadır.

Dickerson ve Doerr (2014) çalışmasındaki öğretmenlerin matematiksel ispatın önemine matematiksel bir anlayış geliştirme, mantıksal düşünme ve üstbilişsel becerileri geliştirme ile soyut olan matematiksel bir bilgiyi somutlaştırma anlamında değindiğı görülmüştür. Knuth'un (2002a) çalışmasındaki öğretmenler ise ispatın rolüne mantıksal düşünme, düşünceyi açığa çıkarma, matematiğı iletişim yoluyla aktarma, nedenini matematiksel olarak açıklama ve matematiksel bilgiyi oluşturma anlamında değinmişlerdir. Knuth'un (2002b) diğer çalışmasındaki

öğretmenler ise ispatı doğrulama, açıklama, iletişim, bilgiyi oluşturma ve matematiksel sonuçları sistemleştirme aracı olarak önemli rollerinin olduğunu ifade etmişlerdir. Güler'in (2016) çalışmasındaki akademisyenler matematik eğitiminde ispatın önemine problem çözme, muhakeme, matematiksel düşünme, yaratıcılık becerisi geliştirme; matematiğin temeli olması, matematiksel iletişimi sağlaması, üst düzey düşünme becerilerini geliştirmesi, kavramların doğruluğu/yanlışığında tatmin edici argümanlar üretmesi ve ezbere dayalı öğrenmeyi engellemesi açısından değinmişlerdir.

Knuth (2002a, 2002b), Dickerson ve Doerr (2014) ve Güler'in (2016) çalışmalarına benzer sonuçlara bu araştırmada da genel olarak katılımcılardan bağımsız bir şekilde *matematikte temel pratik olarak ispat ile beceri olarak ispat* kategorileri ve alt kategorileri açısından ulaşılmıştır. Araştırmadaki tüm katılımcılar bakımından ispatın matematiğin temeli olması ve ilişkilendirme becerisini geliştirmesi ortak bir şekilde vurgulanmıştır. Özel olarak katılımcı bazlı bakıldığında bu gruplarda daha çok ön plana çıkan diğer roller dikkate alındığında, matematikçiler için ispatla ilgili önemli olan, keşfetme, iletişim, mantıksal ve soyut düşünme becerilerin geliştirmesidir. Matematik eğitimcileri için ispatla ilgili önemli olan, matematiğin gelişmesi ve ilerlemesine yaptığı katkı ve açıklama becerisini geliştirmesidir. Matematik programı öğrencileri için ispatla ilgili önemli olan doğrulama becerisini geliştirmesidir.

Bu araştırmada görüşme soruları içerisinde yer alan katılımcıların mesleki yaşantılarında ispatın yeri ile ilgili soru, Güler'in (2016) çalışmasından, bu araştırmaya katılımcıların içerisinde öğretim üyelerinin olması yönüyle uygun olduğu düşünülmüş ve dahil edilmiştir. Güler'in (2016) çalışması matematik eğitimindeki akademisyenlerin gözünden öğretmen adaylarının ispatın mesleki hayatındaki yerini anlamaya çalışmaktadır. Bu araştırmada ise akademisyenler olarak matematikçiler ve matematik eğitimcileri birlikte yer almıştır. Ayrıca bu akademisyenlerin de öğrencileri dikkate alınmıştır. Güler'in (2016) çalışması daha çok öğretmenlik mesleği üzerine görüşlerle çerçevelenirken, bu araştırma öğretmenlik mesleğinin yanı sıra akademik ilerleme olarak, farklı bir alanda çalışan biri olarak, şu an öğrenci olarak ve normal bir birey olarak ispatın kimlik kategorilerini de ortaya çıkarmıştır. Bununla birlikte Güler'in (2016) çalışmasıyla karşılaştırıldığında, bu araştırmada ispatın matematiğin dışındaki bağlamlara aktarılabilir ya da transfer edilebilir bir yapı olmasıyla ilgili kategoride bulunan

“farklı bakış açısı” alt kategorisi açısından benzer bir sonuca ulaştığı söylenebilir. Diğer taraftan Güler’in (2016) çalışması bu araştırmadaki matematik eğitimcileri ve matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin öğretmenlik mesleği açısından ortak kategori oluşturmaktadır. Bununla birlikte bu araştırmadaki matematik eğitimcileri ve öğrencileri matematiksel ispatın öğretmenlikte yerine aynı anlamda katkıda bulunup bulunmadığı noktasında ortak bir görüşü paylaşamamaktadır. Sadece matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin öğretmenlik açısından matematiksel ispatın olumlu katkısının olacağını ifade eden görüşlerinin ağırlıklı olduğu görülmüştür. Bu öğrenciler için matematiksel ispat, iyi bir öğretmen olmak, donanımlı bir öğretmen olmak, farkındalık sağlayan bir öğretmen olmak ve sıradan bir öğretmen olmamak açısından önemlidir.

Toker (2020) “öğrenciler açısından ispatı belli bir zaman diliminde tamamlanıp bitecek bir öğrenme olarak ele alınması yerine tüm öğretim sürecinde öğrencilerin bireysel ya da grup şeklinde matematik yapabilmelerini olanaklı kılacak bir araç ve süreç” olarak görülmesine değinmektedir (s.461). Buna benzer bir durum, çalışmada katılımcıların matematiksel ispatın önemine matematikte temel pratik olarak değinerek, özel olarak ise matematikçilerin vurguladığı öğretimsel olarak gerekliliğini öne çıkaran görüşlerinde karşılaşılmaktadır. Toker’in (2020) çalışması aynı zamanda bu araştırmadaki matematik eğitimcileri ve öğrencileri ile matematik programı öğrencilerinin matematiksel ispat tariflerinde de görülen ortak bir durumu yansıtmaktadır. Bu katılımcıların ispat tarifleri incelendiğinde ağırlıklı olarak araç ve süreç odaklı bir eksenle tarif getirdikleri görülmektedir.

Matematiksel bir ispatın yapısı incelendiğinde, her bir adım için gerekçe sunma (Weber, 2008) matematiksel sembol ve ifadeleri doğru bir şekilde ifade ederek kullanma (Mercer vd., 2004) tümdengelim adımlarının uygun şekilde takip edilerek belirli bir sistem içerisinde ve belli bir düzende yazılmasını (de Villiers, 1999) gerektirmektedir. Araştırmacıların değindiği durumlar, bu araştırmada elde edilen sonuçlar cinsinden ispatın bazı özelliklerini karşılamaktadır. Matematikçiler ve bölümlerindeki öğrencilerin matematiksel ispatın tüm adımlarının iyi bir şekilde gerekçelendirilmesi önemli bir ispat karakteristiğidir. Bununla birlikte matematik eğitimcileri için mantıksal açıdan ispatın belli bir düzeninin olması gerektiği daha ön plana çıkmaktadır. Ayrıca Mercer vd.’nin (2004) matematiksel sembol ve

ifadelerin doğru bir şekilde ifade edilmesine değindiği durum, bu araştırmadaki matematikçiler açısından dilsel anlamda bir özenle ilişkilendirilebilir.

Moore (2016) iyi yapılmış ya da yazılmış bir ispatın niteliklerinden bahsederken mantıksal doğruluk, açıklık, akıcılık (matematiksel notasyon, düzeni (layout), gramer, noktalama işaretleri, sentaks), anlayışı gösterir nitelikte olmasıyla açıklamıştır. Bu araştırmada ispatın özellikleriyle ilgili katılımcıların mantıksal boyut kategorisinde çoğunlukla benzer düşünceye sahip oldukları görülmektedir. Bununla birlikte ispatın özelliklerini mantıksal boyutta ifade ederken katılımcılar alt kategorilerde farklılaşabilmektedir. Matematikçilerin daha çok ispatın dilsel özelliklerine vurgu yaptıkları, anlaşılabilirlik elementinde görülebilmektedir. Matematikçiler ve öğrencileri bakımından ikili olarak düşünüldüğünde mantıksal boyutun iyi gerekçelendirme kategorisinde çoğunlukla yer aldıkları görülmektedir. Bu iki topluluğun ispat içerisinde kullanılan her şeyin eksiksiz bulunmasına, adımlar arası geçişlerin atlanmadan verilmesine dikkat ettikleri görülmüştür. Diğer taraftan matematik eğitimcilerinin ise mantıksal boyutla ilgili ispatın düzenine yer veren görüşleri hakimdir. Genel olarak bakıldığında matematiksel ispatın özellikleriyle ilgili sosyal boyut tüm katılımcılar için önemli olsa da matematik eğitimcileri için bu durum daha çok ön plana çıkmaktadır.

Selden ve Selden (2003) bir argümanın matematiksel bir ispat oluşturup oluşturmayacağının belirlenmesinin farklı matematiksel toplulukların önemli bir meselesi olduğunu vurgulamaktadır. Bu durumun matematikçiler, matematik bölümü öğrencileri, matematik öğretmenleri ve matematik öğretmen adaylarını ilgilendirdiğini ifade etmiştir. Bu araştırmanın çıkış noktası düşünüldüğünde matematikçiler ve öğrencileri, matematik eğitimcileri ve öğrencileri şeklindeki matematiksel topluluklar açısından Selden ve Selden'in (2003) çağrısına uyulduğu görülmektedir.

Hanna (2002) bir ispatın kabul edilebilmesini etkileyen faktörlerden bahsetmektedir. Bu durumdan araştırmacı, söz konusu matematiğin gelişimi olduğu için matematikçiler açısından yeni bir teoremin kabul edilebilmesinde, kabulü etkileyen faktörlerin bir kombinasyonu üzerinden değerlendirmenin daha uygun olduğunu açıklamıştır. Bu faktörleri şu şekilde sıralamıştır. Birinci faktör, teoremin içinde yer alan kavramların, mantıksal öncüllerin ve sonuçların anlaşılır olması, diğer türlü bunun doğru olmadığını düşündürecek herhangi bir durumun olmamasıdır. İkinci faktör, teoremin matematiğin bir ya da birden daha fazla

dalında çıkarımlarda bulunabilecek kadar önemli olmasıdır (ayrıca ayrıntılı çalışma ve analiz etmeyi garanti altına alacak kadar önemli ve faydalı olmasıdır). Üçüncü faktör, teoremin daha önce kabul edilmiş matematiksel sonuçlarla tutarlı olmasıdır. Dördüncü faktör, yazarın (teoriyi ortaya atanın), teoremin ilgili olduğu konu alanında uzman olarak tartışılmaz bir üne sahip olmasıdır. Beşinci faktör, teorem için daha önce karşılaştıkları türden ikna edici matematiksel bir argümanın mevcut olmasıdır. Hanna'nın (2002) bahsettiği matematiksel ispat kriterleri, bu araştırmada anlaşılabilirlik açısından dilsel boyutla ve matematikçilerle; tutarlılık açısından mantıksal boyutla ve matematik eğitimcileriyle; ikna edici nitelik açısından sosyal boyutla ve araştırmadaki tüm katılımcılarla ortak bir noktada kesişebilmektedir.

Stylianides (2007) sunulan bir argümanın ispat olarak nitelendirilebilmesi için gerekli 4 özellikten *dayanak*, *formüle etme*, *gösterim* ve *sosyal boyut* olarak bahsetmektedir. Bu özelliklerden dayanak ve sosyal boyut bu çalışmada da benzer şekilde katılımcılar tarafından ifade edilmiştir. Stylianides'in (2007) günlük dil ya da cebirsel dil olarak argümanın nasıl ifade edildiği şeklindeki gösterim özelliğinden bahsetmesi, bu araştırmada dilsel özellikler kategorisinde dilin biçimiyle ilgili benzerlik göstermektedir.

Pfeiffer'a (2011) göre matematiksel bir argümanın doğru bir ispat olarak nitelendirebilmesi ya da kabul görebilmesi onun geçerliliği üzerinden yorumlanmaktadır. Benzer bir duruma Yılmaz-Akkurt ve Yıldırım'ın (2021) çalışmasında ispatın kişisel olarak kabul etme ya da matematiksel kabul alma anlamında ayrılan karakteristikleri açısından değinilmektedir. Bununla birlikte Houston (2009), Anon'dan alıntı yaparak "kulağa doğru gelen nedenlerle, gerçekte doğru olan nedenleri karıştırmayın" diye bahsetmektedir. Bu anlamda yapılan ispatın ya da ispat olarak görülen yapıların, matematiksel bir gerçeklik ya da doğrulukla ilgili olan duruşu ayrılmaktadır. Balacheff (1988) açısından bu, pragmatik ispat ve kavramsal ispat olarak, ilkinden diğerine geçişte oluşan yapının değişime uğradığından *durumdan bağımsızlaştırma*, *kişiden bağımsızlaştırma* ve *zamandan bağımsızlaştırma* olarak ifade edilmektedir. Bu araştırmada ispatın özellikleriyle ilgili doğruluk değeri boyutunda araştırmacıların bahsettiği yapılar karşılık bulmaktadır. Özellikle bu araştırmadaki matematikçiler açısından ispatın evrensel ve matematiksel geçerliliğinin olması ön plandadır. Bir başka ifadeyle kişiyi inandırması, matematiksel anlamda evrensel bir niteliğe sahip bir kriter

oluşturmamasıdır. Bu durum matematiksel ispatın nesnel değil evrensel olmasıyla açıklanabilmektedir.

Tall'un (2013) çalışmasındaki öğrenciler (18 yaş), grup teorisindeki birkaç satırda kısaca cevaplanabilecek temel formal ispatlar yerine kalkülüsteki uzun ve teknik algoritmaları uygulamayı içeren tarzdaki neredeyse birbirleriyle anlaşmışçasına sanki seçtiğini gözlemlemiştir (s.285). Bu durumu şöyle ifade etmiştir: “Birinci sınıf seviyesinde okutulan matematiksel analiz dersinde öğrenciler ispat gerektiren problemler yerine hesaplamaları içeren yakınsaklık testlerini kullanmayı gerektiren soruları tercih ettiler. Lineer cebirde, öğrencilerin lineer denklemleri çözme ile ilgili soruları cevaplamaları daha yüksek ihtimale sahiptir. Grup teorisinde, permütasyonlarla işlem yapmak gibi sembolik manipülasyonları içeren problemleri çözmeyi tercih ettiler. Kompleks analizde, ilk tercih genellikle yol integrasyonunda (contour integration) görsel ve sembolik yöntemleri birleştirme eğilimindedir. Her bir durumda, öğrenciler aksiyomatik yapıdaki ispata geçişten ziyade sembolik hesaplama ve manipülasyon dünyasının bir uzantısı olarak uyguladıkları rutinleri kullanan kendilerine daha 'güvenli' soruları tercih ettiler. Buradan anlaşılıyor ki formal teoride minimum problem çözmeyi bile gerektiren soruların, ezbere öğrenilen bir teoremi basitçe yeniden üretmekten fazlasını içeriyorsa, öğrenciler tarafından denenmesi ya da çözülme girişimleri daha az olasıdır” (s. 285). Tall bu durumu, “*somutlaşma ve sembolizmin paralel dünyaları ile takip eden aksiyomatik formal dünya arasındaki muazzam uçurumu vurgular. Bu nedenle, daha az kategoriye indirgemek yerine, matematiğin üç dünyasının üç parçalı yapısını koruyorum. Bu [yapı], somutlaştırma ve sembolizmin daha temel doğal dünyalarını, araştırma matematikçileri tarafından araştırma sonuçlarının iletilmesi için kullanılan farklı aksiyomatik formal dünyadan ayıran, matematiksel düşüncedeki büyük değişikliği yansıtır*” şeklinde açıklamaktadır (s.285). Benzer bir durum Recio ve Godino'nun (2001) çalışmasında da görülmektedir. Araştırmacıların elde ettiği önemli bir sonuç, öğrencilerin temel önermeler için bile tümdengelimli matematiksel ispatlar oluşturabilme yeteneklerinin çok sınırlı olduğunu ortaya çıkarmıştır. Bu durum bu araştırmada matematiksel ispata yönelik algıların gerilim kısmında açıklanan kategorilerin çoğunu çerçeveleyerek örtüşmektedir. Örneğin IMA6 matematikçisi yapacağı sınavda, şimdiye kadar yaptığı sınavlarda olduğu gibi öğrencilerin ispatla ilgili soruyla ilgilenmeyip daha çok lisedeki gibi problemlere, çözüm gerektiren,

hesaplama ve işleme dayalı hareketlere daha çok eğilimli olduğunu belirttiği görüşü, genel olarak kendi bölümündeki öğrencilerin de etkinlik üzerindeki temaslarını açıklayabilmektedir.

Yine Tall (2013) *“uzun yıllar boyunca bir üniversite öğretmeni ve sınav yapan biri olarak, birçok durumda öğrencilerin formal ispatın inceliklerinden ziyade sıkça çözülmüş ya da sürekli tekrarlanmış algoritmalarla çözülebilen problemleri tercih ettiklerini gözlemlediğini”* ifade etmektedir (s.285). Bu çalışmadaki her iki gruptaki öğrenciler açısından da matematiksel ispatla ilgili algıları kısmında görülen gerilim kategorisinde ele alınan (alışkanlıklar, liseden getirdiklerini koruma) ve ispatlama girişimlerinde öne çıkan benzer bir durumu temsil etmektedir. Genel olarak bu araştırmadaki öğrencilerin, doğal düşünmenin sembolik ve somutlaştırma dünyasında aşırı kök salma, olması gereken değil alışkanlıklarına odak kurma, liseden getirdiklerini koruma şeklinde etkinlik üzerinde hareket etme sebeplerini açıklayabilir. Matematik eğitimcilerinin bazılarında ise bu durum konfor alanından çıkmama direnci ve pür matematiksel ispata tepkiyle yankılanmaktadır. Hatta bu çalışmada 2EA6 ve 2EA7’nin “yeni özgün ispat yapılmıyor, repertuvar ezberletiliyor” anlayışıyla tepkisel karşılık bulmaktadır.

Tall’a (1998) göre matematik uzmanları tutarlı bir ispat kavramını paylaştıklarını iddia etseler de ispatın bilişsel gelişimi, belirli bir zamanda öğrenen için mevcut olan bilişsel yapıya ve temsillere bağlıdır. Tall’a göre tanım ve mantıksal çıkarım açısından formal ispat kavramının önemli bir bilişsel zorluğu vardır: “sözlü olarak açıklanan kavramlardan” “kavramları işaret eden ya da öngören sözlü tanımlara” bir dönüşü ya da tersine çevirmeyi gerektirir. Tall bu durumun, uzman olmayanlara oldukça kafa karıştırıcı gelebileceğinden bahsetmektedir (s.17). Bu durum, fikirlerin tersine çevrilmesine (Houston, 2009) işaret etmektedir. Bir başka deyişle, bu araştırma özelinde durum şu şekilde açıklanabilir. Kişi önce iddiayı problem çözer gibi ele alıp, örneğin epsilonun değerini önce görüp daha sonra nihai değerini ispatının ilk satırlarında kurgulayıp, ardından “tamam şimdi bunu ispat formuna sokacağım” düşüncesiyle benzerdir. Bu araştırmada benzer bir yaklaşım sergileyen 1MA7 matematikçisidir. 1MA7, ispatlama girişiminde söylediklerinden çok yazdıklarına değer veren öğrencilerinin ispat yaparken ince bir ayar yaptığı yeri, kendisinin ne kadar dikkatli bir şekilde yaptığını ifade eden sözel açıklaması olsa da öğrencilerinin bunu çok dikkate

almadığını ifade etmektedir. Hatta tam tersine bu durumun öğrenciler tarafından yanlış anlaşıldığını, bu nedenle doğru olan bir şeyin inceliklerini açıklamaya çalışırken, öğrenciye geçmeyen şeylerden kaynaklı olarak ve sonuç olarak onların yanlış kavrayış geliştirebilmelerine de zemin hazırladığını ifade etmiştir. Burada görülmesi gereken 1MA7'nin ince manevrası, asıl meselenin incelikli özünü oluşturduğu yer olarak düşünülebilir. 1MA7'nin belirttiği bu kritik nokta, alanyazındaki bazı çalışmalarda da (örn. Stewart ve Schmidt, 2017; Stewart, Epstein ve Troup, 2019) “matematikçi-öğrenci” arasındaki fark ve zorlanmayı beraberinde getiren özel bir durumu yansıtmaktadır.

Diğer taraftan Stewart, Troup ve Plaxco (2019), bir matematik eğitimcisinin karar verme anlarını incelemiştir. Bu matematik eğitimcisi girdiği derste zaman zaman öğrencilerinin lineer cebirdeki kavramlarla ilgili zorlanabileceği noktaları ön görebilmesine rağmen, kendisinin farklı matematiksel düşünme dünyaları arasındaki geçişlerinin öğrencilerinden bazılarının kafasını karıştırdığını, bu durumun kendisine iyi bir başlangıç vermediğini göstermiştir. Araştırmacıların bu sonucuna benzer bir durum, yukarıda bahsedildiği yeri daha iyi açıklayabilmek adına 1MA7'nin bir uzantısı olarak şu şekilde değerlendirilebilir. 1MA7 öğrencilerine hep tavsiye ettiği şeyin, olması gerekenden farklı bir şekilde anlaşılacak, öğrencileri tarafından yapmak istediği geçişlerin (somuttan formale) yanlış kavramsallaştırıldığıyla ilgilidir. Bu durum, matematiksel bir ispat yaparken bazen sonuçtan başlamanın değerini anlattığı ilgili görüşme bölümünde görülmekte olup, kendi bölümündeki öğrencilerin etkinlik üzerinde daha çok sonuçtan başlayarak sonradan geriye döndürülme ihtiyacını hissetmedikleri durumuyla açıklanabilir. Stewart, Troup ve Plaxco'nun (2019) çalışmasında elde edilen sonuç, bu araştırmadaki 1MA7 ile ilgili benzer bir duruma işaret etse de temel farklılık bu kez, araştırmacıların çalışmasının “matematik eğitimcisi-öğrenci” arasındaki fark ve zorlanmayı göstermesidir. Dolayısıyla bu araştırmada, matematik eğitimcisi-öğrenci anlamında araştırmacıların çalışmasıyla ilişkilendirilebilecek özel bir durum henüz oluşmamıştır.

Tall'a (1998) göre ispatların öğrencilere anlamlı formlarda sunulabilmesi için onların bilişsel gelişimlerinin dikkate alınması gerekmektedir. Bunun için de eğitimcilerin ve matematikçilerinin, matematiksel ispatın doğasını yeniden düşünmesini, öğrencinin bilişsel gelişimine uygun olan farklı ispat türlerini kullanmaya özen göstermeleri gerekmektedir (Tall, 1998, s.18). Bu durumun, bu

araştırmadaki matematik eğitimcilerinden bazılarının önemseydiği formal ispattansa sınıf düzeyine göre ya da öğretimsel kitleye göre ispatın anlamlılığının ölçümüyle benzerlik taşıdığı söylenebilir.

Biçimci (formal) bakış açısının mimarı Hilbert'in de somutlaşmadan ilham aldığı söylenmektedir (Tall ve Mejia-Ramos, 2006). Bu anlamda matematik eğitimcilerinden 2EA6 ve 2EA7 için öngörü-gözlem-sezgi-deney-çıkarım-ispata hiyerarşisinde ispata gelene kadarki adımlar yani formal ispattansa formal öncesi matematiksel anlayışlar değerlidir. Diğer taraftan matematikçilerden 1MA5, “aslında benim görüşüm, sezgilerimiz, deneyimlerimiz çok da formal yola giderken bağımsız değil, onlar tarafından doğal bir şekilde yönlendiriliyor” şeklinde bir çerçevede düşünmektedir. Bu anlamda matematik eğitimcisi ve matematikçinin bir yere kadar süreci benzer yönettiğini ancak ispattan bahsediliyorsa bunun bir şekilde formal yolla taçlandırılmasının gereği noktasında, matematikçilerin ve bazı matematik eğitimcilerinin etkinlikteki yaklaşımlarının bu noktada ayrılıyor olmasını açıklayabilir.

Stylianides vd. (2022) ispatlama sürecini bir etkinlik anlamında ele almaktadırlar. Bu etkinliğin de matematiksel bir ifadeye yönelik bir ispat geliştirilmesine öncülük eden/yol gösteren örnekler, sezgi, analogi, tümevarımsal akıl yürütme, abdüktif (sonuçtan çıkarıma dayalı) akıl yürütme vb. kullanarak varsayımda bulunma ve genelleme yapma gibi çeşitli etkinlikleri içerebildiğini belirtmişlerdir. Bu araştırmada bu durum ister formal anlamda olsun ister doğal yolla olsun genel olarak fakat özel olarak matematikçilerin akıl yürütme yollarında bu şekilde düşünme yaklaşımları görülmektedir.

Schweiger (2006) açısından okul matematiği için asıl mesele, matematiğin teknoloji olarak ustalıkla kullanımını sağlamak ve toplum için işlevsel olabilecek matematiğin daha fazla gerekliliği anlayışını geliştirmektir. Ayrıca araştırmacı, okul matematiğinin diğer kültürlerle de (yani, günlük yaşamda matematik ile bir araç kutusu olarak matematik; belli bir dereceye kadar da bir bilim olarak matematik) ilgilenmesi gerektiğini vurgulamıştır. Bu çalışmada matematik eğitimcilerinin söz konusu ispat olduğunda, ispatın hem tarifleme hem de önem verme boyutlarında hatta algı boyutundaki ispatlama yaklaşımları dikkate alındığında, özellikle bu gruptaki 2EA1, 2EA6 ve 2EA7 matematik eğitimcilerinin, Schweiger (2006) gibi matematiğin ilişkilendirilmiş kültürlerini paylaştıkları görülmektedir.

Genel olarak bakıldığında eşitsizlik üzerinde görünen etkinlikte, matematikçiler ilk yaklaşımlarında iddianın kendisine ne getireceğini anlamlandırırken doğal yollarla bir problem çözme gibi sürecin içine girmektedirler fakat bunu daha sonra olması gereken disiplinin içerisinde formal bir yola sokarak ele almaktadır. Bu durum, daha çok meselenin ince taraflarını kavrayabilenler formal sisteme geçmenin farkındalığını yaşıyor şeklinde yorumlanabilir. Öğrenciler ve bazı matematik eğitimcileri ise sadece doğal ayakta kalarak tam kare ifade elde edip bırakıp ya da çözüm kümesi arayışına tablo grafik yorumundan da ikna olarak ispatlama girişimlerini tamamlamışlardır. Bu aşamaya kadar elde ettikleri katılımcılar için yeterli görünüp, formal rotadan vazgeçtikleri düşünülebilir ya da formal yola artık ihtiyaç duymamış olabilirler.

Bu araştırmadaki matematikçiler her ne kadar nihai ürün olarak formal yolla ispatlamayı tamamlasalar da akıl yürütmelerinin baştan sona doğrusal olmadığı görülmektedir. Hatta matematikçilerin ilk elden hemen formal sistem içerisinde süreci araştırdığını düşünmek hatalı olabilir: ‘analizi yardımına çağıran cebirci’ burada matematikçileri temsil eden bir örnek olarak düşünülebilir. Diğer taraftan matematik eğitimcilerinin öğretim odaklı yönelimlerinin iddiaya karıştığı düşünülebilir. Çünkü araştırmadaki bazı matematik eğitimcileri için öğretim yapacakları hedef kitle göz önünde bulundurularak oraya doğru aktarımların olduğu görülmüştür.

Ramussen vd. (2005) matematiksel öğrenmenin, farklı türde matematiksel uygulamalara katılmayla daha anlamlı olduğunu ifade ederek, matematiksel etkinliğin yapısının, sınıflarda ortaya çıkan farklı türdeki matematiksel uygulamaların gelişimini belgelemek isteyen araştırmacılar ile öğrencilerin matematiksel olarak büyümesini değerlendirerek kaydetmek isteyen öğretmenler ve müfredat geliştiricilere potansiyel yararını vurgulamaktadır. Bu araştırmada da alanyazında ya da sınıflarda alışlagelen şekliyle yer verilen “ispatlayınız” gibi bir formatın dışında etkinliğin sunulması öğrenciler açısından kendi eksikliklerini fark etme şeklinde bir yansıtıcı düşünmeyle karşılık bulmaktadır. Örneğin bu durum, 4EÖ7 öğrencisinde matematiksel ispatla ilgili kendi öğrenmelerinin ne düzeyde olduğunu izlemesiyle ya da ispatlama donanımının yeterli olmadığını ifade etmesiyle görülmektedir.

Tall (2002) ileri matematiği deneyimlemeye yeni başlayan öğrencilerin, daha önceden matematik kültürünün işleyişine aşina olmadıkları için ispat

konusunda zorluk çektiklerini söylemiştir (s.19). Benzer şekilde Taştepe'nin (2012) çalışmasındaki öğretmen adayları, ispatlamayla ilk defa üniversitede karşılaştıkları için zorlandıklarını ifade etmişlerdir. Bu açıdan hem Tall (2002) hem de Taştepe'nin (2012) sonuçları, bu araştırmada daha çok matematik programı öğrencilerinin gerilimle ilgili ortak sonucunu oluşturmaktadır. Gerçekten de bu araştırmadaki özellikle matematik programı öğrencileri tarafından matematiksel ispatla ilgili gerilim oluşturan, ispatın kendilerine daha önce tanıdık gelmeyen, aşına olamadıkları farklı bir doğasının olmasıdır. Alışılmayan tarzla gelen gerilim, aynı zamanda durumu, farklı matematiksel seviyelerde olabilen toplulukların birbiriyle matematiksel iletişimini engelleyebilecek bir noktaya gerilimi iyice tırmandırabilmektedir. Bu açıdan Grabiner (1983) tarafından öğretmen-öğrenci diyalogunda geçen farklılaşmanın (giriş bölümünde araştırmanın problem durumunda geçtiği haliyle), bu araştırmadaki özellikle matematikçiler ile kendi bölümlerindeki öğrencilerinin, öğrenci-öğretmen arasındaki anlaşmazlıkların nedenini açıklayabildiği söylenebilir.

Taştepe'nin (2012) çalışmasının bir diğer sonucu öğretmen adaylarının matematiksel ispatta zorlanmalarının arka planında yatan sebebin ispatla ilgili temel kavramların sadece üniversitede değil lisede de görülmesi gerektiği fakat lisede sınav sistemi faktörü altında bunun pek mümkün olmamasıdır. Bu sonuç, bu araştırmada yükün üniversiteye bırakılmasının yarattığı gerilimle ve bu gerilime daha fazla değinen matematikçiler ve matematik eğitimcileriyle bu çalışmada karşılık bulabilmektedir. Dolayısıyla Taştepe'nin (2012) çalışması ve bu araştırmanın ortak bir genel sonucu olarak söylemek gerekirse, öğrencilerin matematiksel ispatla tanışmalarını daha erkene çekebilme, ispatla ilgili yaşanabilecek zorlukların giderilebileceği ihtimalini kuvvetlendirmektedir.

Tall (2002) “öğrencilere matematiksel düşünmenin hem uygun bir şekilde hem de onun zorlu gelişimini içeren doğasına ilişkin daha geniş bir vizyon kazandırmak nasıl mümkün olabilir?” diyerek aslında çoğu matematikçinin dışarıdan bakıldığında, fikirlerinin olgunlaşmış halini temsil eden fakat arka planda matematiksel olarak büyümelerini engelleyen ya da yanlış yollara sapmasına yol açabilecek yönlerin gizlenmesini gerektiren manevralarının, öğrencilerde de olması mesajını vermektedir (s.17). Bu durum aynı zamanda matematikçinin pratiğine öğrencinin yaklaşabilmesi için kat edilmesi gereken mesafe hakkında da fikir vermektedir. Tall'un önem verdiği nokta, bu araştırmada özellikle matematik

programı öğrencilerinin gerilimle ilgili ortak sesini duyuran 3MÖ7 tarafından, bir öğrenci olarak bölümündeki matematikçiler tarafından anlaşılmak istenmesiyle karşılık bulmaktadır. Bu durum, öğrencinin “daha yolun başındayız” düşüncesiyle, öğretmenin “sizi anlayabiliyoruz” düşüncesi arasında sağlam bir bağ kurulabilmesine işaret ederek önemli bir anlaşma meselesine dönüşeceğinin sinyalini vermektedir.



6. ÖNERİLER

Bu bölümde, araştırma kapsamında elde edilen bulgular ve bu bulgular doğrultusunda ulaşılmış olan sonuçlara dayalı olarak uygulayıcılara, araştırmacılara ve müfredat geliştiricilere yönelik öneriler olmak üzere üç kısımda öneride bulunulmuştur.

6.1 Uygulayıcılara Yönelik Öneriler

1. Araştırmadaki katılımcıların tamamı matematiksel ispata, matematikte kazanılması gereken önemli bir beceri olarak değinmişlerdir. Bu becerinin gelişmesi, matematiğin doğasına ilişkin güçlü kavrayışlar ve ilişkilendirmeler sağlayacağı yönüyle katılımcılar açısından değerli görünmektedir. Böyle olmakla birlikte bu araştırmadaki matematik eğitimcilerinin bir kısmı, öğrencilerini bölümden mezun olduktan sonra öğretmenlik mesleğinde işe yarayabilecek ispat kavrayışlarını dikkate alarak (bir bakıma onlar adına daha önceden karar vererek) ispat öğretimini sınırlandırmaktadır. Donanımlı bir öğretmen yetiştirmek sadece mesleğin gerektirdiklerini değil aynı zamanda hayata dair, farklı şekilde düşünerek öğrenmeye dair çeşitlendirilmiş bakış açıları, öğretmenlik yolunda ilerlemek isteyen bir öğrencinin doğal ihtiyacı, hatta mesleki gelişiminin diğer tamamlayıcı uzantısı olabilmektedir. Bu nedenle matematiksel ispata karşı bu araştırmadaki bazı matematik eğitimcilerinin eleştirel duruşu, öğrencilerine de ister istemez bulaşabilmektedir. Bu açıdan matematik eğitimcilerinin öğretimsel hedeflerini uygulamaya geçirirken öğrencilerin gelecekteki ihtiyaçlarını da gözeterek dengelemesi adına önemli olabilir.
2. Matematikçilerin kimlik olarak ispat kategorisinde olumlu anlamda yoğunlaşan görüşlerine karşılık öğrencileri tarafından sadece dersi geçme (3MÖ9 hariç) olarak öğrenilmesi gereken ya da farklı bir alana çok etkisi olmayan, fazladan öğrenilmiş bir içerik olarak görünmektedir. Bu anlamda matematikçilerin öğrencilerine ispatla vermek istediği mesaj ya da öğrencilerinde gelişmesini beklediği farklı bakış açısı oluşturma tarzı ve dolayısıyla farklı mesleklere entegre etme durumları, öğrencileri tarafından tam tutulamamaktadır. Bu nedenle matematikçilerin öğrencilerinde olgunlaşmasını beklediği yapılar, onlara iletme noktasında kendilerini örtük

davranıyor gibi göstermektedir. Bu açıdan matematikçilere öğretimsel hedeflerini şeffaf bir şekilde öğrencilerine geçirebilmeleri fark ettirilebilir.

3. Matematikçilerin ve matematik eğitimcilerinin matematiksel ispata ilişkin algıları ile kendi öğrencilerinin ispata ilişkin algıları karşılaştırıldığında genel olarak tüm kategoriler boyunca olmasa bile özellikle matematiksel ispatın tariflerinde farklılaşma daha da belirginleşmektedir. Bu noktada öğretim üyelerine, öğretimlerinden sorumlu oldukları öğrencilerinin kendilerinden farklılaşan (özellikle matematikçiler ve öğrencileri açısından) matematiksel ispat fikirlerini iş birlikli bir ortamda paylaşabilmeleri önerilebilir. Arzu edilen farklılıklarla çelişkili görünen yapılar bu sayede dönüştürülebilir ya da ayrıştırılabilir.
4. Matematiksel ispatla ilgili yaşanan gerilimin özellikle araştırmadaki matematikçiler ile kendi bölümlerindeki öğrenciler arasındaki anlaşmazlık noktasında olduğu görülmüştür. Her iki topluluk, kendi açısından bu gerilimin farkında olsalar da karşılıklı olarak birbirilerine bu durumu iletebildikleri bir iletişim ekseni kuramadıklarını düşündürmektedir. Bu noktada matematikçilerin öğrencileriyle etkili iletişim kurabilecekleri bir öğretim planı (birlikte düşünme, fikirleri tartışarak birlikte geliştirebilme) izleyebilir, birbirlerinin farkına varabilirler. Böylelikle öğrencilerinin gözünden ispat meselesini kavrayarak, seviyelerinin de farkında olarak öğretimlerini şekillendirebilir, ders anlatımlarını değiştirerek çeşitlendirebilirler.
5. Bu araştırmada, matematik eğitimcileri ile öğrencileri arasındaki gerilim noktasındaki temel farklılık her ne kadar anlaşmazlıkla işaretlenmese de matematik eğitimcisi için ispatın yerinin üniversiteye bırakılması şeklindeki yükü ilgili, öğrencisi için bir boşluk hissetmesi ve öğrenilememiş içerikle ilgili olarak görülmüştür. Bir öğretmen adayı olarak tam da ispatla öğrenilmesi gereken içerik bu seviyede açılacakken, beklentinin karşılanamaması hüsrânını yaşamaktadır. Bu nedenle matematik eğitimcilerinin matematiksel ispatla ilgili algı noktasında ikiye ayrılma (sadece öğretim tabanlı aktarımlar ya da pür kişisel algı ve düzeye uyarlanabilen öğretimsel odaklar) durumları ve bu şekilde ispatı çerçevelemeleri, matematiksel ispat meselesinin özünü anlamak isteyen öğrencisinin dünyasında, bu seviyede de verilmeyen içeriğin öğrenilememiş

hissini ortaya çıkarmış olabilir. Bu anlamda matematik eğitimcilerinin pratiklerinde de bu şekilde ikililiklerin görünmesi, öğrencilerinde ispatlama seviyesine gelememiş bir yetersizlikle ilişkilendirilebilir. Bu nokta matematik eğitimcilerine matematiksel ispatla ilgili öğretmen adaylarına “verilmesi gereken tam içerik” açısından fark ettirilebilir.

6. Bu araştırmada tercih edilen etkinlikteki gibi bir esnek kullanımın, matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin matematiksel ispatla ilgili yeterliliklerini ölçebilmede (4EÖ7) değerli bilgiler taşıyabildiği görülmüştür. Benzer bir durum 1MA7’nin etkinlik sonrası görüşlerinde, matematik bölümünde girdiği derslerden birinde bu etkinliği kullanmak istediğini belirtmesi şeklinde önemli bir detay olmuştur. Bu açıdan etkinliğin, öğretim üyeleri ve öğrenciler için öğretimsel olarak kullanışlı bir yol olabileceğini ortaya çıkardığı söylenebilir.

6.2 Araştırmacılara Yönelik Öneriler

1. Bu araştırmada matematikçilerin, matematik eğitimcilerinin, matematik programı öğrencilerinin ve matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin ispatlama girişimleri üzerinden anlaşılma çalışılan pratikleri sadece Etkinlik 1 ile sınırlıdır. Bu durum, araştırmanın sadece bu etkinlikle matematiksel ispat pratiklerini anlama sınırlılığını oluşturmaktadır. Böyle olmakla birlikte 34 katılımcının sadece bir etkinlik üzerinden ispatlama yolları hakkında verdiği önemli fikirleri içermesi bakımından, bu çalışmanın ileride yapılacak ispatla ilgili araştırmalar için önemli bir girişim niteliğinde olduğu söylenebilir.
2. İleride yapılacak araştırmalar için daha küçük bir örneklem üzerinde Etkinlik 1’deki gibi bir formata benzer şekilde birden fazla matematiksel etkinlik geliştirilerek katılımcıların matematiksel ispatla ilgili pratiklerinin daha derin incelikleri ortaya çıkarılabilir.
3. Bu araştırmada katılımcılara uygun gelebilecek sayılar ve cebirle ilişkilendirilebilecek matematiksel bir öğrenme alanında etkinlik kullanılmıştır. Etkinlik için kullanılacak matematiksel içerik geometri, sayılar ve işlemler, olasılık gibi içeriklerle de anlaşılma çalışılabilir.
4. Araştırmadaki katılımcıların matematiksel ispatın önemiyle değindiği noktalardan biri, tüm sınıf seviyeleri boyunca sürekli bir şekilde öğretilmesi

gereken bir kavram olmasıdır. Bu nedenle ilköğrencisinden bir matematikçiye doğru bir gelişmişliği inceleyebilmek ya da matematiksel ispata dair algıların geniş resmini tamamlayabilmek, yapılacak ileriki çalışmalara farklı yaşlarda ya da sınıf düzeyinde katılımcıların dahil edilmesini önemli kılabilir.

5. Bu araştırmada matematikçilerin hem matematiksel ispata ilişkin algıları hem de verilen bir etkinlik üzerinden matematiksel ispat pratikleri zengin içerikler sunmuştur. Böyle olmakla birlikte özellikle matematikçilerin pratiklerini daha iyi anlayabilmek ya da matematikçilerden ispat yaparken daha fazla pratik toplayabilmek adına daha fazla araştırmaya ihtiyaç duyulmaktadır.

6.3 Müfredat Geliştiricilere Yönelik Öneriler

1. Matematik öğretmenliği programındaki öğrencilerden bazıları ispatla ilgili deneyimlerinden bahsederlerken “ispatın ne olduğuna dair elimizde kesin bir rehber ya da kılavuz yok” diye belirtmiştir. Bu nedenle özellikle matematiksel ispatla verilmesi gereken içeriğin aktarıldığı derslerde bu ihtiyaca yönelik, öğrencilerde matematiksel ispatla ilgili ilk fikirlerin oluşabilmesi için belli modüller hazırlanarak öğrencilere bu kavram tanıtılabilir.
2. Araştırmadaki özellikle matematik programı öğrencileri etkinlik üzerinde bir noktaya işaret etmişlerdir. Herhangi bir matematiksel ifadeyi ispatlama etkinliği altında kendilerinin bu şekilde bir araştırma sürecine girmesini “ispat konusu şimdiye kadar hiç böyle olmamıştı” şeklinde farklı ve olumlu bulduklarını dile getirmişlerdir. Bu durum lisansta okutulan ders kitaplarında, daha çok etkinlik adı altında olmayan matematiksel bir ifadenin ispatını yapmayı gerektiren tipik sunuluşuna göndermede bulunuyor olabilir. Bu nedenle öğrencilere okutulan ya da tavsiye edilen ders kitaplarına, yapılmış bir ispatı okuma ve anlama, öğrencilerin kendi başına ispat oluşturabilmelerine izin veren etkinlikler adı altında problemler eklenebilir. Gerçekten de bu araştırmadaki gibi bir düzenlemede sunulan matematiksel ispatla ilgili problem, özellikle matematik programı öğrencilerine hem keyifli gelmiş hem de kendilerine dayatılmamış bir özgür düşünme alanı açmıştır.

3. Öğrencilere matematiğin tümdengelimli doğasını ve kabul edilebilir bir titizlik ve netlik düzeyini karşılayan ispatların nasıl okunup yazılacağını öğretme sürecine başlamak için birçok  niversite ispata geçiş dersleri sunmaktadır (Moore, 2016). Bu durum ülkemizde henüz  ğretim programlarında görünmeyen bir katalog yapısı bağlamında düşündürücüdür. 1MA7 ve 2EA5’in kendi bölümlerindeki  ğrencilerinin yaşadığı gerilimle ilgili bahsettiği durum, aslında bununla ilgili olarak düşünülebilir. Her iki bölümün matematik  ğretim programları dikkate alındığında, henüz liseden  niversite birinci sınıfa geçen bir öğrencinin ilk kez karşılaştığı ve yoğun bir şekilde ele alınan matematiksel ispat yükünü hafifletmek için Soyut Matematik dersinin içeriği, öğrencileri ispata ısındırarak, daha temel kavramlardan başlayıp ardından ileri matematiksel düşünme şeklinde bir niteliğe doğru genişletilebilir. Ayrıca mevcut matematik  ğretim programlarında birinci sınıf dersleri göz önüne alındığında, öğrencilerin matematiksel ispatla ilk karşılacakları bağlamın “Matematiksel İspata Giriş” niteliğinde bir dersin katalog için önerilmesi fikrini düşündürmektedir. Böylece  ğrencilerin ispatla yaşadığı gerilim ya da zorlukları aşabilmelerinde bu fikir önemli olabilir.

7. KAYNAKLAR

(Bu tez çalışmasında APA 7th Edition atıf sistemi kullanılmıştır.)

- Adu, P. (2019). *A step-by-step guide to qualitative data coding*. Routledge.
- Akarsu-Yakar, E. (2019). *Ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerinin ve matematiksel dil becerilerinin matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından incelenmesi*. [Yayımlanmamış doktora tezi]. Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.
- Alcock, L. (2010). Mathematicians' perspectives on the teaching and learning of proof. In F. Hitt, D. Holton, & P. Thompson (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education VII* (pp. 63-92). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Alibert, D. & Thomas, M. (1991), Research on mathematical proof. *Advanced mathematical thinking*. Tall, D. (Ed.), pp.215-230. Dordrecht: Kluwer.
- Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: Some implications for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(6), 869–890. <https://doi.org/10.1080/00207390050203360>
- Arsac, G. (2007). Origin of mathematical proof: History and epistemology. In P. Boero (Ed.), *Theorems in school: from history, epistemology and cognition to classroom practice*, (pp. 27-42). Sense Publishers. Rotterdam, The Netherlands.
- Artigue, M. (2016). Mathematics education research at university level: Achievements and challenges. In E. Nardi, C. Winslow, & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of INDRUM 2016 first conference of the international network for the didactic research in university mathematics* (pp. 11–27). Montpellier: University of Montpellier and INDRUM.
- Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in collegiate mathematics education*, 2, 1-32.
- Auerbach, C. F., & Silverstein, L. B. (2003) *Qualitative data: An introduction to coding and analysis*. New York: New York University Press.
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation (Proving Processes and Situations for Validation). *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176. <https://www.jstor.org/stable/3482413>
- Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pim (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. 216–235). London, UK: Hodder & Soughton
- Ball, D., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp.83-104). Westport, CT: Ablex Publishing.
- Bass, H. (2005). Mathematics, mathematicians, and mathematics education. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 42(4), 417–430.
- Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7(1–2), 23–40. <https://doi.org/10.1007/BF00144356>
- Beswick, K. (2012). Teachers' beliefs about school mathematics and mathematicians' mathematics and their relationship to practice. *Educational Studies in Mathematics*, 79, 127–147. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9333-2>

- Bieda, K. N. (2010). Enacting proof-related tasks in middle school mathematics: Challenges and opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(4), 351-382. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.41.4.0351>
- Boyle, J. D., Bleiler, S. K., Yee, S. P., & Ko, Y. Y. W. (2015). Transforming perceptions of proof: A four-part instructional sequence. *Mathematics Teacher Educator*, 4(1), 32-70. <https://doi.org/10.5951/mathteaceduc.4.1.0032>
- Brousseau, G. (1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics. In *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, The Netherlands. <https://doi.org/10.1007/0-306-47211-2>
- Burton, L. (2002). Recognising commonalities and reconciling differences in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 50, 157-175.
- CadwalladerOlsker, T. (2011). What do we mean by mathematical proof?. *Journal of Humanistic Mathematics*, 1(1), 33-60. DOI: 10.5642/jhummath.201101.04
- Campbell, C., Miller, G., & Wimbish, G. J. (2000). Student development in the understanding of proof. *Proceedings of the Louisiana-Mississippi Section of the Mathematical Association of America [Online]*.
- Chamberlain Jr, D., & Vidakovic, D. (2021). Cognitive trajectory of proof by contradiction for transition-to-proof students. *Journal of Mathematical Behavior*, 62. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100849>
- Chin, K. E. (2013). *Making sense of mathematics: supportive and problematic conceptions with special reference to trigonometry* [Unpublished Doctoral Thesis]. Institute of Education, University of Warwick.
- Creswell, J. W. (2013). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Creswell, J. W. (2015). *Educational Research: Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research*. 5th edition. Pearson.
- Çelik, D. ve Aydoğdu-İskenderoğlu, T. (2023). Geometri öğretiminde ispat. R. Akkuş, Z. Toluk-Uçar, A. Duatepe-Paksu, B. Boz-Yaman ve S. Bulut (Eds.), *Geometri Öğretiminde Bilişsel Süreçler*, (s. 201-248). Ankara.
- Çetin, İ. (2016). *Nitel İçerik Analizi*. M. Y. Özden ve Levent Durdu (Ed.), Eğitimde Üretim Tabanlı Çalışmalar İçin Nitel Araştırma Yöntemleri (125-148). Ankara: Anı Yayıncılık.
- Davis, P. H. ve Hersh, R. (2002). *Matematiğin seyir defteri* (Çev. E. Abadoğlu). Doruk Yayınları.
- Dawson, J. W. (2006). Why do mathematicians re-prove theorems?. *Philosophia Mathematica*, 14(3), 269-286. <https://doi.org/10.1093/philmat/nkl009>
- de Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17-24.
- de Villiers, M. (1999). *Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad*. Key Curriculum.
- Dede, Y. & Karakuş, F. (2014). A pedagogical perspective concerning the concept of mathematical proof: A theoretical study. *Adıyaman University Journal of Educational Sciences*, 4(2), 47-71. <https://doi.org/10.17984/adyuebd.52880>
- Dickerson D. D., & Doerr, H. M. (2014). High school mathematics teachers' perspectives on the purposes of mathematical proof in school mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 26(4), 711-733. <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0091-6>
- Dreher, A., Lindmeier, A., & Heinze, A. (2016). Conceptualizing professional content knowledge of secondary teachers taking into account the gap between academic and school mathematics. In C. Csíkos, A. Rausch, & J. Szitanyi (Eds.), *Proceedings of the 40th conference of the*

- international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 219-226). Szeged, Hungary: PME.
- Ellis, A. B. (2007). Connects between generalizing and justifying: Students reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 194-229. <https://doi.org/10.2307/30034866>
- Emerson, R. M., Fretz, R. I., & Shaw, L. L. (2011) *Writing ethnographic fieldnotes* (2nd ed.). Chicago: University of Chicago Press.
- Epp, S. S. (2003). The role of logic in teaching proof. *The American Mathematical Monthly*, 110(10), 886-899. <https://doi.org/10.1080/00029890.2003.11920029>
- Erlandson, D. A., Harris, E. L., Skipper, B. L. & Allen, S. T. (1993). *Doing naturalistic inquiry: a guide to methods*. Sage: Beverly Hills, CA.
- Fagan, J. B., & Melhuish, K. (2018). Proof norms in introduction to proof textbooks. In *Proceedings of the 21st Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, San Diego, CA: SIGMAA on RUME.
- Fernández-León, A., Gavilán-Izquierdo, J. M., & Toscano, R. (2020). A case study of the practices of conjecturing and proving of research mathematicians. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(5), 767-781. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1717658>
- Fernández-León, A., Gavilán-Izquierdo, J. M., & Toscano, R. (2021). A case study on how primary-school in-service teachers conjecture and prove: An approach from the mathematical community. *Journal on Mathematics Education*, 12(1), 49-72. <http://doi.org/10.22342/jme.12.1.12800.49-72>
- French, A. (2014). Schools direct assignment 1 intervention for learning: literature and practice teaching reasoning and proof. http://www.eclecticon.info/index.htm/files/sd_teaching_reasoning_and_proof.pdf adresinden erişilmiştir.
- Garnier, R. & Taylor, J. (1996). *100% Mathematical proof*. John Wiley & Sons.
- Glesne, C. (2016). *Becoming qualitative researchers: An introduction*. 5th edition. Pearson.
- Grabiner, J. (1983). Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus. *The American Mathematical Monthly*, 90(3), 185–194. <https://doi.org/10.2307/2975545>
- Güler, G. (2016). The Difficulties Experienced in Teaching Proof to Prospective Mathematics Teachers: Academician Views. *Higher Education Studies*, 6(1), 145-158. <http://dx.doi.org/10.5539/hes.v6n1p145>
- Güler, G. ve Öçal, M. F. (2022). Akıl Yürütme ve İspat. E. Erdem. (Ed.), *Mantıksal Akıl Yürütme*, (s. 45-60). Ankara.
- Hanna, G. (1989). Proofs that prove and proofs that explain. In *Proceedings of the 13th Conference of the International Group For Psychology of Mathematics Education*. Paris: Editions GR Didactique et Aquisition des Connaissances Scientifiques. Vol 2, p 45-51.
- Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 21(1), 6-13. <https://doi.org/10.1007/BF01809605>
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1), 5–23. <https://doi.org/10.1023/A:1012737223465>
- Hanna, G. (2002). Mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 54–61). Kluwer Academic Publishers.

- Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1993). Proof and application. *Educational studies in Mathematics*, 24(4), 421-438. <https://doi.org/10.1007/BF01273374>
- Hannah, J., Stewart, S., & Thomas, M. O. J. (2016). Developing conceptual understanding and definitional clarity in linear algebra through the three worlds of mathematical thinking. *Teaching Mathematics and Its Applications: An International Journal of the IMA*, 35(4), 216-235. <https://doi.org/10.1093/teamat/hrw001>
- Hannula, J. (2018). The gap between school mathematics and university mathematics: prospective mathematics teachers' conceptions and mathematical thinking. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 23(1), 67-90.
- Harel, G., & Rabin, J. M. (2010). Brief report: Teaching practices associated with the authoritative proof scheme. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(1), 14-19. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.41.1.0014>
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, E. Dubinsky, & T. Dick (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society and Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Harel, G. & Sowder, L. (2007) Towards a comprehensive perspective on the learning and teaching of proof. In Lester, F. (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematical Teaching and Learning*, pp. 805-842. Washington, DC: NCTM.
- Hemmi, K. (2006). *Approaching proof in a community of mathematical practice*. [Unpublished doctoral thesis]. Stockholm University.
- Herbst, P., & Balacheff, N. (2009). Proving and knowing in public: The nature of proof in a classroom. In D. Stylianou, M. Blanton, & E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 40-63). New York: Routledge.
- Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational studies in Mathematics*, 24(4), 389-399. <https://doi.org/10.1007/BF01273372>
- Hodge, A. M., Gerberry, C. V., Moss, E. R., & Staples, M. E. (2010). Purposes and perceptions: What do university mathematics professors see as their role in the education of secondary mathematics teachers? *Primus*, 20(8), 646-663. <https://doi.org/10.1080/10511970902810733>
- Holvikivi, J. (2007). Logical reasoning ability in engineering students: A case study. *IEEE Transactions on Education*, 50(4), 367-372. 10.1109/TE.2007.906600
- Houston, K. (2009). *How to think like a mathematician: A companion to undergraduate mathematics*. Cambridge University Press.
- Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., Weber, K., & Alcock, L. (2013). On mathematicians' different standards when evaluating elementary proofs. *Topics in Cognitive Science*, 5(2), 270-282. <https://doi.org/10.1111/tops.12019>
- Jukić, L. & Brückler, F.M. (2014). What do Croatian pre-service teachers remember from their calculus course? *Issues in the undergraduate mathematics preparation of school teachers*, 1, 1-15. [www.k-12prep.math.ttu.edu] adresinden erişilmiştir.
- Kashefi, H., Ismail, Z., & Yusof, Y. M. (2010). Obstacles in the learning of two-variable functions through mathematical thinking approach. *Pocedia Social and Behavioral Sciences*, 8, 173-180. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.024>
- Klein, F. (2016). *Elementary mathematics from a higher standpoint: Arithmetic, Algebra, Analysis*. Vol. 1. Springer.
- Kleiner, I. (1991). Rigor and proof in mathematics: A historical perspective. *Mathematics Magazine*, 64(5), 291-314. <https://doi.org/10.1080/0025570X.1991.11977625>

- Knapp, J. (2005). *Learning to prove in order to prove to learn*. http://mathpost.asu.edu/~sjgm/issues/2005_spring/SJGM_knapp.pdf adresinden erişilmiştir.
- Knuth, E. J. (1999). *The nature of secondary school mathematics teachers' conceptions of proof*. [Unpublished doctoral dissertation]. University of Colorado, Colorado.
- Knuth, E. J. (2002a). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(1), 61-88. <https://doi.org/10.1023/A:1013838713648>
- Knuth, E. J. (2002b). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33 (5), 379-405. <https://doi.org/10.2307/4149959>
- Krantz, S. G. (2007). *The history and concept of mathematical proof*. <http://www.math.wustl.edu/~sk/eolss.pdf> adresinden erişilmiştir.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Larson, S. & Zandieh, M. (2005). Conjecturing and proving as part of the process of defining. In G. M. Lloyd, M. Wilson, J. L. M. Wilkins, and S. L. Behm (Eds.), *Proceedings of the 27th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Roanoke, VA.
- Leikin, R., Zazkis, R., & Meller, M. (2018). Research mathematicians as teacher educators: Focusing on mathematics for secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21(5), 451-473. <https://doi.org/10.1007/s10857-017-9388-9>
- Likando, K. M., & Ngoepe, M. G. (2014). Investigating mathematics trainee teachers' conceptions of proof writing in algebra: A case of one college of education in Zambia. *Mediterranean Journal of Social Sciences*, 5(14), 331-338. <https://doi.org/10.5901/mjss.2014.v5n14p331>
- Lincoln, Y. S. & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Sage. [https://doi.org/10.1016/0147-1767\(85\)90062-8](https://doi.org/10.1016/0147-1767(85)90062-8)
- Lockwood, E., Ellis, A. B., & Lynch, A. G. (2016). Mathematicians' example-related activity when exploring and proving conjectures. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2(2), 165–196. <https://doi.org/10.1007/s40753-016-0025-2>
- Lynch, A. G., & Lockwood, E. (2019). A comparison between mathematicians' and students' use of examples for conjecturing and proving. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53, 323-338. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.07.004>
- Maher, C. A., & Sigley, R. (2014). Task based interview in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (579-582). London: Springer.
- Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1), 41–51. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.20.1.0041>
- Mariotti, M. A. (2004). Reasoning, proof and proving in mathematics education. Paper presented at the *ICME 10*, Copenhagen.
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Addison-Wesley.
- Maxwell, J. A. (2013). *Qualitative research design: An interactive approach*. London: Sage Publications.
- May, C. (2022). *Expert Cognition During Proof Construction Using the Principle of Mathematical Induction*. [Unpublished Doctoral Dissertation]. Georgia State University.
- McMillan, J. H., & Schumacher, S. (2013). *Research in education: Evidence-based inquiry*. 7th edition. Pearson.

- Mejia-Ramos, J. P., & Weber, K. (2020). Using task-based interviews to generate hypotheses about mathematical practice: Mathematics education research on mathematicians' use of examples in proof-related activities. *ZDM*, 52, 1099-1112. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01170-w>
- Mercer, N., Dawes, L., Wegerif, R., & Sams, C. (2004). Reasoning as a scientist: Ways of helping children to use language to learn science. *British Educational Research Journal*, 30(3), 359–377. <https://doi.org/10.1080/01411920410001689689>
- Merriam, S. B. (2009). *A guide to design and implementation: Revised and expanded from qualitative research and case study applications in education*. San Fransisco, CA: Jossey-Bass.
- Miles, M. B. & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook*. Sage.
- Miller-Jones, D. (1991). Informal reasoning in inner-city children. In J. F. Voss, D. N. Perkins, & J. W. Segal (Eds.), *Informal Reasoning and Education*, (pp. 107-130). Lawrence Erlbaum, A.P., Hillsdale, N.Y.
- Moore, R. C. (2016). Mathematics professors' evaluation of students' proofs: a complex teaching practice. *Int. J. Res. Undergrad. Math. Ed.*, 2, 246–278. DOI 10.1007/s40753-016-0029-y
- Moreno-Armella, L. (2014). An essential tension in mathematics education. *ZDM*, 46(4), 621–633. doi:10.1007/s11858-014-0580-4
- Nardi, E. (1996). *The novice mathematician's encounter with mathematical abstraction: Tensions in concept-image construction and formalization*. [Unpublished doctoral thesis], University of Oxford, UK. Available at <http://www.uea.ac.uk/~m011>.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1991). Professional standards for teaching mathematics. Reston, VA.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA.
- Nordby, K. (2013). *Investigating viable arguments: pre-service mathematics teachers' construction and evaluation of arguments* [Unpublished doctoral thesis]. Montana State University, Bozeman, Montana.
- Öztürk, T. ve Demirel, D. (2022). Türkiye’de İspat Üzerine Yapılan Çalışmaların Analizi: Bir Sistemik Derleme. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 54, 32-68. doi: 10.9779/pauefd.782832
- Öztürk, T., & Güven, B. (2022). A study on pre-service mathematics teachers' criteria of proof evaluation. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, 10(1), 210-241. <https://doi.org/10.31129/10.1.1649>
- Paddack, M. (2009). *The process of making meaning: The interplay between teachers' knowledge of mathematical proofs and their classroom practices*. [Unpublished doctoral thesis]. University of New Hampshire.
- Pala, O., & Narlı, S. (2018). Matematik öğretmen adaylarının sayılabilirlik kavramına yönelik ispat şemalarının incelenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 12(2), 136–166. <https://doi.org/10.17522/balikesirnef.506425>
- Patton, M. Q. (2014). *Qualitative Research & Evaluation Methods: Integrating Theory and Practice*. 4th edition. Sage Publications.
- Pinto, M. & Tall, D. (1999). Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of PME*, Haifa, Israel, 4, 65–73.
- Pinto, M. & Tall, D. (2002). Building formal mathematics on visual imagery: a case study and a theory. *For the Learning of Mathematics*, 22 (1), 2–10.

- Pinto, A., & Karsenty, R. (2018). From course design to presentations of proofs: How mathematics professors attend to student independent proof reading. *The Journal of Mathematical Behavior*, 49, 129-144.
- Pfeiffer, K. (2011). *Features and purposes of mathematical proofs in the view of novice students: Observations from proof validation and evaluation performances*. [Unpublished doctoral dissertation]. National University of Ireland, Galway.
- Polit, D. F., & Beck, T. B (2010). Generalization in quantitative and qualitative research: Myths and strategies. *International Journal of Nursing Studies* 47, 1451–1458.
- Pólya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2nd ed.). Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving*. Wiley Combined Edition.
- Powell, A. B., Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *The journal of mathematical behavior*, 22(4), 405-435. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.09.002>
- Reid, D. A., & Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education: Research, learning and teaching*. Brill.
- Raman, M. (2002). Coordinating informal and formal aspects of mathematics: student behavior and textbook messages. *The Journal of Mathematical Behavior*, 21(2), 135-150. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(02\)00119-0](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00119-0)
- Raman, M (2003). Key ideas: what are they and how can they help us understand how people view proof? *Educational Studies in Mathematics*, 52, 319-325. <https://doi.org/10.1023/A:1024360204239>
- Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K., & Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A practice-oriented view of advanced mathematical thinking. *Mathematical thinking and learning*, 7(1), 51-73. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0701_4
- Recio, A. M., & Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 83–99. <https://doi.org/10.1023/A:1015553100103>
- Ross, K. A. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proof in school mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 105(3), 252-255.
- Sabouri, P., Thoms, M., & Zaslavsky, O. (2013). The merits of collaboration between mathematicians and mathematics educators on the design and implementation of an undergraduate course on mathematical proof and proving. In *Online proceedings of RUME-16–the 16th Annual Research Conference of the Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education*, Denver, Colorado.
- Sakallı-Doğru, E. C. (2022). *Türkiye’de İspat Kavramı Üzerine Matematik Eğitimi Alanında Hazırlanmış Lisansüstü Tezlerin Yönelimlerinin İncelenmesi: Bir Araştırma Sentezi Çalışması*. [Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi]. Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü.
- Saldaña, J. (2016). *The coding manual for qualitative researchers*. Sage.
- Samkof, A., Lai, Y., & Weber, K. (2012). On the different ways that mathematicians use diagrams in proof construction. *Research in Mathematics Education*, 14(1), 49–67. <https://doi.org/10.1080/14794802.2012.657438>
- Sarı, M. (2011). Üniversite öğrencilerinin matematiksel kanıt ile ilgili güçlükleri ve kanıt öğretimi. [Yayımlanmamış Doktora Tezi]. Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, sense making, and metacognition in mathematics, in Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, D. Grouws, ed., Macmillan, New York, (pp. 334–370).
- Schoenfeld, A. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior*, 13, 55–80. [https://doi.org/10.1016/0732-3123\(94\)90035-3](https://doi.org/10.1016/0732-3123(94)90035-3)
- Schoenfeld, A. H. (2009). Series editor's foreword. In Despina A. Stylianou, Maria L. Blanton, & Eric J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (p. xii-xvi). Routledge.
- Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of education*, 196(2), 1-38. <https://doi.org/10.1177/002205741619600202>
- Schreier, M. (2012). *Qualitative content analysis in practice*. London: Sage.
- Schweiger, F. (2006). Fundamental ideas: A bridge between mathematics and mathematical education. In J. Maass & W. Schlöglmann (Eds.), *New mathematics education research and practice* (pp. 63–73). Rotterdam: Sense.
- Sears, R. (2019). Proof schemes of pre-service middle and secondary mathematics teachers, *Investigations in Mathematics Learning*, 11(4), 258-274. <https://doi.org/10.1080/19477503.2018.1467106>
- Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem?. *Journal for research in mathematics education*, 34(1), 4-36. <https://doi.org/10.2307/30034698>
- Sfard, A. (2014) University mathematics as a discourse –why, how, and what for? *Research in Mathematics Education*, 16(2), 199-203. <https://doi.org/10.1080/14794802.2014.918339>
- Shinno, Y., & Fujita, T. (2021). Characterizing how and when a way of proving develops in a primary mathematics classroom: a commognitive approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-26. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1941365>
- Smith, J. C. (2006). A sense-making approach to proof: Strategies of students in traditional and problem-based number theory courses. *Journal of Mathematical Behavior*, 25(1), 73-90. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.11.005>
- Solow, D. (2014). *How to read and do proofs: An introduction to mathematical thought processes* 6th Edition. John Wiley ve Sons.
- Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *The Mathematics Teacher*, 91(8), 670–675. <https://doi.org/10.5951/MT.91.8.0670>
- Sowder, L., & Harel, G. (2003). Case studies of mathematics majors' proof understanding, production, and appreciation. *Canadian Journal of Science Mathematics and Technology Education*, 3(2), 251–267. <https://doi.org/10.1080/14926150309556563>
- Sönmez, N., Öztürk, T., & Güven, B. (2023). İspat Sürecinden Yansımalar: Öğretmen Adaylarının İleri-Geri Tekniğini Kullanma Durumlarının İncelenmesi. *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi*, 40(2), 227-260. <https://doi.org/10.52597/buje.1289328>
- Stake, R. E. (2005). *Multiple Case Study Analysis*. The Guilford Press.
- Staples, M. E., Bartlo, J., & Thanheiser, E. (2012). Justification as a teaching and learning practice: Its (potential) multifacted role in middle grades mathematics classrooms. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(4), 447-462. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.07.001>

- Stavrou, S. G. (2014). Common errors and misconceptions in mathematical proving by education undergraduates. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers*, Vol 1 (Content Knowledge). [www.k-12prep.math.ttu.edu]
- Stewart, S., Epstein, J., & Troup, J. (2019). Leading students towards the formal world of mathematical thinking: a mathematician's reflections on teaching eigentheory. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(7), 1011-1023. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1657598>
- Stewart, S. & Schmidt, R. (2017) Accommodation in the formal world of mathematical thinking. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(1), 40-49. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1360527>
- Stewart, S., Troup, J., & Plaxco, D. (2019). Reflection on teaching linear algebra: examining one instructor's movements between the three worlds of mathematical thinking. *ZDM Mathematics Education*, 51, 1253-1266. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01086-0>
- Stillman, G., Brown, J. & Czoher, J. (2020). Yes, mathematicians do X so students should do X, but it's not the X you think!. *ZDM-Mathematics Education* 52(6), 1211-1222. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01183-5>
- Stylianides, A. L. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321. <https://doi.org/10.2307/30034869>
- Stylianides, A. J., Komatsu, K., Weber, K., & Stylianides, G. J. (2022). Teaching and Learning Authentic Mathematics: The Case of Proving. In: Danesi, M. (eds), *Handbook of Cognitive Mathematics*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-44982-7_9-1
- Stylianides, G., & Silver, E. (2004). Reasoning and proving in school mathematics curricula: an analytic framework for investigating the opportunities offered to students. In D. E. McDougall & John A. Ross (Eds.), *Proceedings of the 26th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Volume 2 (pp. 611- 619). Toronto: OISE/UT.
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 237-266). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Stylianou, D. A. (2002). On the interaction of visualization and analysis: the negotiation of a visual representation in expert problem solving. *The Journal of Mathematical Behavior*, 21(3), 303-317. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(02\)00131-1](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00131-1)
- Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Knuth, E. J. (Eds.). (2009). *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective*. Routledge.
- Sullivan, P. (2011). *Qualitative data analysis using a dialogical approach*. London: Sage.
- Tall, D. (1989). The nature of mathematical proof. *Mathematics Teaching*, 127, 28-32.
- Tall, D. (Ed.). (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer.
- Tall, D. (1998). The cognitive development of proof: Is mathematical proof for all or for some? In Z. Usiskin (Ed.), *Developments in School Mathematics Education Around the World* (Vol, 4, pp. 117-136). Reston, Virginia: NCTM.
- Tall, D. (2002). *Advanced mathematical thinking*. Kluwer Academic Publishers.
- Tall, D. (2006). A life-time's journey from definition and deduction to ambiguity and insight. *Retirement as Process and Concept: A Festschrift for Eddie Gray and David Tall*, Prague. 275-288, ISBN 80-7290-255-5.

- Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics*. Cambridge University Press.
- Tall, D., & Mejia-Ramos, J. P. (2006). Thelong-term cognitive development of different types of reasoning and proof. Paper presented at *Conference on Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*, Universitat Duisburg-Essen.
- Taştepe, M. (2012). *İspat kavramının kitap, öğretmen ve öğrenci boyutunda incelenmesi* [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Toker, Z. (2020). *Etkinlikler yoluyla sınıf içinde ispat ve sorgulama*. Y. Dede, M.F. Doğan, F. Aslan-Tutak (Ed.), *Matematik Eğitiminde Etkinlikler ve Uygulamaları* (s.439-463). Ankara: Pegem Yayıncılık.
- Truelove, J. E. (2004). *Geometry teachers' conceptions of proof*. [Unpublished doctoral thesis]. University of Arkansas.
- Tuncay, H. A. (2015). *Matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi*. [Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi]. Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Sivas.
- Valenta, A., & Enge, O. (2022). Teaching practices promoting meta-level learning in work on exploration-requiring proving tasks. *The Journal of Mathematical Behavior*, 67, 100997. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100997>
- VanSpronsen, H. D. (2008). *Proof processes of novice mathematics proof writers*. [Unpublished doctoral thesis]. University of Montana.
- Van Dormolen, J. (1977). Learning to understand what giving a proof really means. *Educational Studies in Mathematics*, 8(1), 27–34. <https://doi.org/10.1007/BF00302502>
- Viteri, S., & DeDeo, S. (2022). Epistemic phase transitions in mathematical proofs. *Cognition*, 225, 105120. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2022.105120>
- Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: A case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *The Journal of Mathematical Behavior*, 23(2), 115-133. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2004.03.001>
- Weber, K. (2008). How mathematicians determine if an argument is a valid proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 431–459. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.39.4.0431>
- Weber, K. (2009). How syntactic reasoners can develop understanding, evaluate conjectures, and generate counterexamples in advanced mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28(2-3), 200–208. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2009.08.001>
- Weber, K. (2010a). Mathematics majors' perceptions of conviction, validity, and proof. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(4), 306-336. <https://doi.org/10.1080/10986065.2010.495468>
- Weber, K. (2010b). Proofs that develop insight. *For the Learning of Mathematics*, 30(1), 32–36. <http://www.jstor.org/stable/20749436>
- Weber, K. (2012). Mathematicians' perspectives on their pedagogical practice with respect to proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43(4), 463-482. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2011.622803>
- Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, 56, 209–234. <https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000040410.57253.a1>

- Weber, K., & Alcock, L. (2009). *Proof in advanced mathematics classes: Semantic and syntactic reasoning in the representation system of proof*. In D. Stylianou, M. Blanton, & E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 323-338). New York: Routledge.
- Weber, K., & Mejia-Ramos, J. P. (2015). On relative and absolute conviction in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 35(2), 15-21. <http://www.jstor.org/stable/44382751>
- Weiss, M. K., & Moore-Russo, D. (2012). Thinking like a mathematician. *The Mathematics Teacher*, 106(4), 269-273. <https://doi.org/10.5951/mathteacher.106.4.0269>
- Wimmer R. D. & Dominick, J. R. (1991). *Mass media research: an introduction*. (3rd edition) Belmont CA: Wadsworth.
- Wu. (2006). How mathematicians can contribute to K-12 mathematics education. In *Proceedings of international congress of mathematicians*, Vol. III Madrid, 2006, (pp. 1676–1688). Zuerich: European Mathematical Society.
- Wu, H. (2011). The mis-education of mathematics teachers. *Notices of the American Mathematical Society*, 58(3), 372-384.
- Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to NCTM's Principles and Standards* (pp. 227-236). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Yan, X., Marmur, O., & Zazkis, R. (2020). Calculus for teachers: Perspectives and considerations of mathematicians. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 20, 355-374. <https://doi.org/10.1007/s42330-020-00090-x>
- Yılmaz-Akkurt, Y., & Yıldırım, S. (2021). A phenomenographic investigation of middle school pre-service mathematics teachers' conceptions of proof. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 15(1), 118-143. <https://doi.org/10.17522/balikesirnef.939068>
- Yin, R. K. (2018). *Case study research and applications: Design and methods*. (6th Edition) Thousand Oaks, CA: Sage.
- Yopp, D. A. (2011). How some research mathematicians and statisticians use proof in undergraduate mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 115-130. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.01.002>
- Zacharie, M. (2009). Why college or university students hate proofs in mathematics? *Journal of Mathematics and Statistics*, 5(1), 32–41. <https://doi.org/10.3844/jms2.2009.32.41>
- Zeybek Şimşek, Z. (2020). İspat nedir sorusuna farklı pencerelerden bakış. In I. Uğurel (Ed.), *Matematiksel İspat ve Öğretimi. Okul Yıllarında İspat Öğretimini Destekleyen Çok Yönlü Bir Bakış*, (ss. 1-22). Ankara: Anı Yayıncılık.

8. EKLER

EK 1. Görüşme Protokolü (Öğrenci)

1-Arka plan	1) Bölümünde yıl olarak ne kadar süredir öğrencisin? 2) Bölümünde hangi dersleri alıyorsun/almaya devam etmekteisin? ▪ Bunlar arasında ispat odaklı bir dersiniz var mı? ▪ Bu derslerinizde matematiksel ispatla ilişkili bir bağlam oldu mu? (ispatı kullandığınız, başvurduğunuz, faydalandığınız) ▪ Hatırladığın bir ispat var mı? 3) İspatla ilgili deneyimlerin nelerdir? 4) İspatta kendini nasıl tanımlarsın? ▪ Matematiksel ispatta kendini nasıl hissediyorsun?
2-İspatı tanımlama	1) Senin için ispat ne anlama geliyor? ▪ Sende ne gibi şeyler ön plana çıkıyor?
3-İspatın özellikleri	1) Matematiksel ispatın ne gibi özellikleri vardır?
4-İspatın amacı, rolü	1) Matematiksel ispat neden yapılır? ▪ Ne gibi amacı vardır? ▪ Sence matematiksel ispatın ne gibi rolleri vardır?
5-İspatın önemi, yeri	1) Sana göre ispatın önemi nedir? 2) İspatlama sürecini bilmek/öğrenmek bir öğrenci olarak neden önemlidir? 3) İspatı öğrenmek ilerleyen mesleki yaşantınla nasıl bütünleşecek?/rehber olacak/nüfuz edecek?
6-İspat oluşturma yolları	1) İspat nasıl yapılır? 2) Verilen bir ifadeyi ispatlaman istendiğinde ne yapıyorsun? ▪ Nasıl ispatlıyorsun? Nasıl bir yol izlersin? 3) Her zaman böyle mi yaparsın? Neden?

EK 2. Görüşme Protokolü (Öğretim Üyesi)

1- Arka plan	1) Bölümünüzde ne kadar süredir öğretim yapıyorsunuz? / Ders veriyorsunuz? 2) Uzmanlığınız hangi alan üzerinedir? Çalışma alanlarınız/doktoranızı ne üzerine tamamladınız? 3) Verdiğiniz/vermekte olduğunuz dersler hakkında kısaca bahsedebilir misiniz? 4) Bu derslerinizde matematiksel ispatla ilişkili bir bağlam oldu mu? (ispatı kullandığınız, başvurduğunuz, faydalandığınız) ▪ (olduysa) İspattan nasıl faydalandınız? ▪ Matematiksel ispatla ilgili öğrencilerinizde gördüğünüz bazı şeyler nelerdir?
2-İspatı tanımlama	1) Sizin için ispat ne anlama geliyor? ▪ Sizdeki karşılığı nedir?
3-İspatın özellikleri	1) Matematiksel ispatın ne gibi özellikleri vardır?
4-İspatın amacı, rolü	1) Sizce matematiksel ispatın amacı nedir? ▪ Neden yapılır? 2) Sizce matematiksel ispatın ne gibi rolleri vardır?
5-İspatın önemi, yeri	1) Sizin için matematiksel ispatın önemi nedir? 2) İspatın öğrencilerinizin mesleki yaşantılarında ne tür işlevi/yerinin olacağına inanıyorsunuz? ▪ Sizin için öğrencilerin ispatlama sürecini/ispatı bilmeleri/öğrenmeleri neden önemlidir? ▪ Neden böyle düşünüyorsunuz?
6-İspat oluşturma yolları	1) İspat nasıl yapılır? 2) Sizden verilen bir teoremi/ifadeyi ispatlamanız istendiğinde ne yapıyorsunuz? ▪ Nasıl ispatlıyorsunuz? Nasıl bir yol izlersiniz? ▪ Her zaman böyle mi yaparsınız? Neden?

EK 3. Etkinlik Temelli Görüşme Protokolü (Öğrenci ve Öğretim Üyesi)

Size böyle bir etkinlik verildiğinde,

1) Melis’in iddiasını nasıl araştırmaya başlarsınız?

➤ *Nasıl başlarsınız, nasıl sürdürürsünüz, o süreci tarif ediniz.*

2) Etkinlik 1 için nasıl bir argüman sunarsınız?

➤ *Nasıl akıl yürütürsünüz?*

3) Neden bu yolla yapmayı düşündünüz?

4) Bunu yapabilmenin başka yolları da var mıdır? Neden?

5) Sunduğunuz argümanın geçerli bir ispat olup olmadığını nasıl anlarsınız?

➤ *Argümanınızın hangi özellikleri geçerli bir ispat olmasını sağlıyor?*

➤ *İspat olduğundan nasıl emin olursunuz?*

ETKİNLİK 1
Melis, “ $x > 0$ ise $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ” olduğunu iddia etmektedir. Sizce Melis’in iddiası her zaman doğru mudur? Neden?