



**FARKLI SINIR ŞARTLARI ALTINDAKİ EULER TİPİ İNCE
KESİTLİ BORULARDA MEYDANA GELEN KRİTİK
BURKULMA YÜKÜNÜN DOĞAL FREKANS DEĞERLERİ
ÜZERİNDEKİ ETKİSİNİN TEORİK VE SONLU
ELEMENLAR YAKLAŞIMI İLE İNCELENMESİ**

Fatih DÜLGEROĞLU

**Yüksek Lisans Tezi
Makine Mühendisliği Ana Bilim Dalı
Doç. Dr. Engin ERBAYRAK
2023**

(Her Hakkı Saklıdır)

T.C.
BAYBURT ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

**FARKLI SINIR ŞARTLARI ALTINDAKİ EULER TİPİ İNCE KESİTLİ BORULARDA
MEYDANA GELEN KRİTİK BURKULMA YÜKÜNÜN DOĞAL FREKANS
DEĞERLERİ ÜZERİNDEKİ ETKİSİNİN TEORİK VE SONLU ELEMANLAR
YAKLAŞIMI İLE İNCELENMESİ**

(Investigation of The Effect of Critical Buckling Load on Natural Frequency Values in Euler-Type Thin Section Pipes under Different Boundary Conditions By Theoretical and Finite Element Approach)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fatih DÜLGEROĞLU

Danışman: Doç. Dr. Engin ERBAYRAK

Bayburt
Eylül, 2023

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Doç. Dr. Engin ERBAYRAK danışmanlığında, 212201002 numaralı Fatih DÜLGEROĞLU tarafından hazırlanan “Farklı Sınır Şartları Altındaki Euler Tipi İnce Kesitli Borularda Meydana Gelen Kritik Burkulma Yükünün Doğal Frekans Değerleri Üzerindeki Etkisinin Teorik ve Sonlu Elemanlar Yaklaşımı ile İncelenmesi” adlı bu çalışma 25.09.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Makine Mühendisliği Anabilim Dalında, Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Engin ERBAYRAK

İmza:

Jüri Üyesi : Dr. Öğr. Üyesi Recep ÇATAR

İmza:

Jüri Üyesi : Dr. Öğr. Üyesi Sinan MARAŞ

İmza:

Bu tezin Bayburt Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

...../...../.....

Doç. Dr. Murat KUL

Enstitü Müdürü

ETİK VE BİLDİRİM SAYFASI

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Farklı Sınır Şartları Altındaki Euler Tipi İnce Kesitli Borularda Meydana Gelen Kritik Burkulma Yükünün Doğal Frekans Değerleri Üzerindeki Etkisinin Teorik ve Sonlu Elemanlar Yaklaşımı ile İncelenmesi” başlıklı çalışmanın tarafımdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını ve yararlandığım eserleri kaynakçada gösterdiğimi beyan ederim.

... / ... / 20..

Fatih DÜLGEROĞLU

TEŞEKKÜR

Tez kapsamında bilgi ve tecrübesiyle her zaman yanımda olan değerli danışman hocam Doç.Dr. Engin ERBAYRAK'a teşekkürlerimi sunarım. Eğitim hayatım boyunca her anımda yanımda olan aileme teşekkür ederim.



ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FARKLI SINIR ŞARTLARI ALTINDAKİ EULER TİPİ İNCE KESİTLİ BORULARDA MEYDANA GELEN KRİTİK BURKULMA YÜKÜNÜN DOĞAL FREKANS DEĞERLERİ ÜZERİNDEKİ ETKİSİNİN TEORİK VE SONLU ELEMANLAR YAKLAŞIMI İLE İNCELENMESİ

Fatih DÜLGEROĞLU

Eylül 2023, 54 sayfa

Bu çalışmada Euler tipi ince kesitli milin farklı sınır koşulları altındaki kritik burkulma yükü analitik ve sonlu elemanlar analizi ile belirlenmiştir. Ayrıca, ilgili kritik burkulma yüklerinin etkilediği doğal frekanslar, harmonik hareket denklemleri kullanılarak sonlu elemanlar analizi ile belirlenmiştir. Analitik ve sonlu elemanlar yaklaşımında, Mafsalsal-Mafsalsal, Ankastre-Mafsalsal ve Ankastre-Ankastre olmak üzere üç farklı sınır koşulu kullanılmıştır. Özellikle sonlu elemanlar yaklaşımında ankastre-ankastre sınır koşulunda kritik burkulma yükü değerini belirlemek için temas mekanizmaları kullanılmıştır. Bununla birlikte analitik yaklaşım içerisinde yer alan denklem sabitleri çalışma kapsamında hesaplanan kritik burkulma yükü, burkulma yüküne karşılık gelen doğal frekans değerleri kullanılarak alüminyum mil için hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Burkulma yükü, doğal frekans, sınır koşulu, sonlu elemanlar analizi.

ABSTRACT

MASTER THESIS

INVESTIGATION OF THE EFFECT OF CRITICAL BUCKLING LOAD ON NATURAL FREQUENCY VALUES IN EULER-TYPE THIN SECTION PIPES UNDER DIFFERENT BOUNDARY CONDITIONS BY THEORETICAL AND FINITE ELEMENT APPROACH

Fatih DÜLGEROĞLU

September 2023, 54 pages

In this study, the critical buckling load of the Euler type thin section shaft under different boundary conditions was determined by analytical and finite element analysis. In addition, natural frequencies affected by the relevant critical buckling loads were determined by finite element analysis using harmonic motion equations. In the analytical and finite element approach, three different boundary conditions were used: Simply-Simply support, Fixed-Simply support and Fixed-Fixed support. Especially in the finite element approach, contact mechanisms are used to determine the critical buckling load value in the fixed-fixed boundary condition. In addition, the critical buckling load, which is calculated within the scope of the study, the equation constants in the analytical approach are calculated for the aluminum shaft by using the natural frequency values corresponding to the buckling load.

Keywords: Bucking load, natural frequency, boundary condition, finite element analysis.

İÇİNDEKİLER

ETİK VE BİLDİRİM SAYFASI.....	i
TEŞEKKÜR.....	ii
ÖZ	iii
ABSTRACT	iv
İÇİNDEKİLER.....	v
TABLolar DİZİNİ.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ.....	x

BİRİNCİ BÖLÜM

Giriş	1
Literatür Özeti.....	2

İKİNCİ BÖLÜM

Teorik Yaklaşımlar	8
Burkulma	8
Euler (Lineer) Burkulma Teoremi	8
Mekanik Titreşim.....	12
Titreşimin Temel Kavramları.....	12
Titreşimin Sınıflandırılması	13
Serbest Titreşim.....	13
Zorlanmış Titreşim	14
Sönümlü-Sönümsüz Titreşim	14
Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Titreşim.....	14
Yay ve Sönüm Elemanları	14
Harmonik Hareket.....	16

Harmonik Hareket Denklemleri	17
Burkulma Yüğüne Maruz Parçaların Doğal Frekans Değerlerinin Analitik Yaklaşımı	18

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

Sonlu Elemanlar Yöntemine Giriş.....	22
Sonlu Elemanlar Yönteminin Teorik Yaklaşımı	22
Yapısal Analizin Sonlu Elemanlar Yaklaşımındaki Teorik İfadesi	24
Modal Analizin Sonlu Elemanlar Yaklaşımındaki Teorik İfadesi.....	26
Sonlu Elemanlar Yönteminin Uygulanması	26
Geometrinin Modellenmesi.....	27
Malzeme Özelliğinin Belirtilmesi	27
Ağ (Mesh) Oluşturma	29
Sınır, Başlangıç ve Yükleme Koşullarının Belirtilmesi.....	32
Çözüm	34

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

Araştırma Bulguları	36
Kritik Burkulma Yüğülerinin Belirlenerek Sonlu Elemanlar Modelinin Doğrulanması.....	36
Modal Analiz ile Doğal Frekans Değerlerinin Belirlenmesi	39
Harmonik Analiz ile Doğal Frekanslara Karşılık Gelen Genlik Belirlenmesi	43

BEŞİNCİ BÖLÜM

Sonuç.....	49
Kaynakça.....	52
Öz geçmiş.....	54

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1.	<i>Çalışma Kapsamında Kullanılan Malzeme Özelliklerinin Değerleri</i>	29
Tablo 2.	<i>Alüminyum Silindirik Milin Farklı Sınır Şartları Altında Euler Teoremine Uygunluğu</i>	36
Tablo 3.	<i>Alüminyum Silindirik Milin Farklı Sınır Şartları Altında Kritik Burkulma Yüklerinin Kıyaslanması.....</i>	37
Tablo 4.	<i>Alüminyum Silindirik Titreşim Analizinin Euler Yaklaşımına Uygunluğu</i>	40
Tablo 5.	<i>Mafsal-Mafsal Sınır Şartındaki Kritik Burkulma Yükünün Sebep Olduğu Doğal Frekans Değeri</i>	41
Tablo 6.	<i>Ankastre-Mafsal Sınır Şartındaki Kritik Burkulma Yükünün Sebep Olduğu Doğal Frekans Değeri</i>	41
Tablo 7.	<i>Ankastre-Ankastre Sınır Şartındaki Kritik Burkulma Yükünün Sebep Olduğu Doğal Frekans Değeri</i>	41
Tablo 8.	<i>Farklı Sınır Şartlarına Ait Burkulma Yüklerinin Oluşturduğu Doğal Frekans ve Genlik Değerleri</i>	46
Tablo 9.	<i>Tüm Sınır Şartları İçin Elde Edilen λ_1, λ_2 Sabit Değerler.....</i>	48

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.	Mafsalsal-mafsalsal sınır şartına sahip parçanın burkulma deformasyonu.	10
Şekil 2.	Ankastre-mafsalsal sınır şartına sahip parçanın burkulma deformasyonu.	11
Şekil 3.	Ankastre-ankastre sınır şartına sahip parçanın burkulma deformasyonu.	12
Şekil 4.	Bazı sistemlerin serbestlik dereceleri	13
Şekil 5.	Doğrusal olmayan ve doğrusal yaylar	15
Şekil 6.	Dönen bir vektörün sonunun izdüşümü olarak harmonik hareket gösterimi (Singiresu, 2004).	16
Şekil 7.	Sonlu elemanlar yönteminde eleman ve düğüm noktası gösterimi	22
Şekil 8.	Düğüm noktalarında yer alan lokal ve global koordinat sistemleri.....	24
Şekil 9.	SEY uygulama adımlarını gösteren akış şeması.	27
Şekil 10.	Sonlu elemanlar programında bulunan malzeme kütüphanesi.	28
Şekil 11.	Sonlu elemanlar yönteminde kullanılan ağ yapıları	30
Şekil 12.	Sonlu elemanlarına ayrılan silindirik parçanın ağ görüntüsü.	31
Şekil 13.	Mafsalsal-mafsalsal sınır şartlarının sonlu elemanlar programında uygulanması.	32
Şekil 14.	Ankastre-ankastre sınır şartlarının sonlu elemanlar programında uygulanması.....	33
Şekil 15.	Dört farklı analizin sonlu elemanlar programı çözüm adımı.....	35
Şekil 16.	Mafsalsal-mafsalsal bağlı silindirik milin SEY burkulma deformasyonu.	37
Şekil 17.	Ankastre-mafsalsal bağlı silindirik milin SEY burkulma deformasyonu.	38
Şekil 18.	Ankastre-ankastre bağlı silindirik milin SEY burkulma deformasyonu.	39
Şekil 19.	Mafsalsal-mafsalsal bağlı silindirik milin SEY mod deformasyonları.	42
Şekil 20.	Ankastre-mafsalsal bağlı silindirik milin SEY mod deformasyonları.	42
Şekil 21.	Ankastre-ankastre bağlı silindirik milin SEY mod deformasyonları.	42
Şekil 22.	Mafsalsal-mafsalsal bağlı silindirik milin frekans genlik diyagramı.	43

Şekil 23. Mafsal-mafsal bağı silindirik milin kümeleme analizi sonrası frekans genlik diyagramı.....	44
Şekil 24. Ankastre-mafsal bağı silindirik milin frekans-genlik diyagramı.	44
Şekil 25. Ankastre mafsal bağı silindirik mil kümeleme analiz sonrası frekans genlik diyagram.	45
Şekil 26. Ankastre-ankastre bağı silindirik milin frekans-genlik diyagramı.....	45
Şekil 27. Ankastre-ankastre bağı silindirik mil kümeleme analizi sonrası frekans genlik diyagram.	46



KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ

E	: Elastisite modülü
I	: Alan atalet momenti
M(x)	: Eğilme momenti
P	: Burkulma yükü
Le	: Eş değer burkulma uzunluğu
l	: Mil boyu
r_{min}	: Atalet yarıçapı
σ_y	: Akma mukavemeti
ω	: Doğal frekans
c	: Sönüm katsayısı
A_{max}	: Genlik
$\bar{d}x$	: Deforme olmamış parça boyunca mesafe değeri
ϕ_n	: n değerindeki mod deformasyonu
n_d	: Düğüm sayısı
d_i	: i mod değerindeki düğüm yer değiştirmesi
SD	: Serbestlik derecesi
N_{inf}	: Sonsuz düğüm noktasındaki şekil fonksiyonu
B	: Birim şekil değişim matrisi
T	: Transpoze ifadesini
Π	: Birim şekil değiştirme enerjisi
W_f	: Kuvvetin yaptığı iş
K:	: Rijitlik Matrisi
ϕ	: Düğüm yer değiştirmesinin genliği

SEY	: Sonlu elemanlar yöntemi
β	: Çubuğun uzunluğu ile alakalı bir sabit
ρ	: Yoğunluk
U_x	: Sonlu elemanlarda x yönündeki deplasman
U_y	: Sonlu elemanlarda y yönündeki deplasman
U_z	: Sonlu elemanlarda z yönündeki deplasman
Rot_x	: Sonlu elemanlarda x yönündeki rotasyon
Rot_y	: Sonlu elemanlarda y yönündeki rotasyon
Rot_z	: Sonlu elemanlarda z yönündeki rotasyon

BİRİNCİ BÖLÜM

Giriş

Günümüzde metal malzemeler, birçok sektörde kullanılmaktadır. Otomotiv, savunma sanayi ve inşaat bu sektörlerden bazılarıdır. Metal malzemelerin sağladığı yüksek dayanım, yüksek ısı iletimi ve yüksek korozyon direnci, sektörde tercih edilmesini sağlayan en önemli avantajlar olarak ortaya çıkmaktadır. Metal malzemeler içinde en yaygın kullanılan metaller ise çelik ve alüminyum malzemelerdir. Çelik, demir elementinin farklı oranlardaki karbon elementi ile birleşimden ortaya çıkan metalik bir alaşımdır. Çelik malzemeler, içerisinde yer alan karbon miktarına göre sınıflandırılmaktadırlar. Yüksek karbon içeren çeliklere dökme demir adı verilirken, farklı karbon oranları içeren çelikler, paslanmaz çelik, yapısal çelik, krom çelik, yay çelik vb. adlar ile adlandırılmaktadır (Wikipedia, 2023a). Çelik malzemelerin en önemli avantajı, çekme mukavemetleri yüksek olduğundan dolayı yüksek dayanım sağlamalarıdır. Bununla birlikte yoğunluğunun yüksek oluşu, çeliğin ağır olmasına sebep olmaktadır. Alüminyum, doğada boksit cevheri olarak bulunan ve işlenerek metal formuna dönüştürülen bir metal malzemedir. Alüminyum ısıl işleme yatkın ve bu sebeple kolay şekil verilebilen, hafif, dayanımlı ve yüksek korozyon direncine sahip bir metaldir (Wikipedia, 2023b). Alüminyum malzeme, hafifliğin önemli olduğu havacılık sektörü için sıklıkla tercih edilen bir metal malzemedir.

Çelik ve alüminyum malzemelerden üretilmiş konstrüksiyon yapılarında, farklı yüklemeler altında şekil değişimleri meydana gelmektedir. Bu şekil değişimleri arasında burkulma (flambaj) şekil değişimi, en sık görülen şekil değişimlerinden biridir. Konstrüksiyon yapılarının kesit alanına uygulanan dik yöndeki bası kuvvetleri, yapıyı oluşturan elemanlar üzerinde flambaj deformasyonu oluşturabilmektedir. Bu sebeple yükleme koşulları irdelenerek, kritik burkulma yükünün doğru hesaplanması, yapının güvenilir olarak çalışabilmesi için son derece önemlidir. Burkulma (flambaj) deformasyonuna ve kritik burkulma yüküne etki eden birçok parametre bulunmaktadır. Bu parametrelerden bazıları, farklı ortam sıcaklık değerleri, kullanılan farklı mesnet çeşitleri ve malzeme tipleri şeklinde sıralanabilmektedir.

Ayrıca, kritik burkulma yükleri cisimlerin doğal frekans değerlerine de etki etmektedir. Doğal frekans, cisimlerin kendi kütlesi ve direngenliği ile orantısal bir şekilde ortaya çıkan titreşim

değeridir. Parçalar hangi malzemeden yapılmış olursa olsun, doğal frekans değerlerinin belirlenmesi gerekmektedir. Malzemelerin fiziksel özelliklerinden olan yoğunluk değeri, doğal frekans değerlerini direk etkilemektedir. Benzer şekilde farklı mesnet tiplerini kullanmak da serbestlik derecesini değiştirdiği için doğal frekans değerlerini etkilemektedir. Bunlara ilaveten, parçalar üzerine uygulanan yük değerleri de, doğal frekans değerlerini etkileyen bir diğer faktördür. Aynı malzemeden yapılmış, aynı kesit alanına sahip, benzer mesnet ile dengelenmiş parçalara uygulanan burkulma yükleri değiştikçe, parçaların doğal frekans değerleri de değişmektedir.

Literatür Özeti

Literatürde çelik ve alüminyum malzemeden üretilmiş parçaların burkulma davranışının incelendiği birçok çalışma yer almaktadır. Çalışmalar ise genellikle, ön gerilmeli çelik kolonların aksenal bası yükü altındaki burkulma davranışlarını incelemektedir. Literatürden farklı olarak, lineer burkulma davranışını etkileşimli olarak irdelenmişlerdir. Bu durumun kritik burkulma yük değeri üzerindeki etkisini de araştırmışlardır. Sonuç olarak, etkileşimli burkulmanın, kritik burkulma tepkisini daha yüksek bir modun yönettiğini ve bunda burkulma deformasyonunu arttırdığını belirtmişlerdir (Saito ,& Wade, 2009).

Serna, L'opez, Puente ve Yong, (2006) çelik yapı tasarımlarının burkulma direncinin değerlendirilmesi üzerine bir çalışma yürütmüşlerdir. Burkulma direncini belirlemede eşdeğer düzgün moment faktörünü (EUMF) kullanmışlar ve çalışmalarını sonlu elemanlar tekniğini kullanarak gerçekleştirmişlerdir. Çalışma sonunda burkulma direncinin değerlendirilebileceği genel bir kapalı form ifadesi sunmuşlardır (Serna *vd.*, 2006).

Nguyen, Ly, Mai ve Tran, (2021a) Y-şekilli kesitli çelik kolonların burkulma yükünü, Levenberg-Marquardt algoritması kullanarak, Yapay Sinir Ağı (YSA) tarafından tahmin ettirmişlerdir. Çalışmalarında örnek 57 burkulma deney sonucunu kullanmışlardır. Giriş parametresi olarak, çelik sütunların uzunluğu, genişliği, aç kalınlığı kullanılmıştır. Böylelikle giriş parametrelerinin kritik burkulma yüküne etkisini araştırmışlardır. Parametrik çalışmayı değerlendirmek için korelasyon katsayısı (R), ortalama karesel hatanın kökü (RMSE) ve ortalama mutlak hata (MAE) doğruluk kriterlerini kullanmışlardır. Sonuçları incelediklerinde, kritik burkulma yükü için MAE ve RMSE almanın, R kriterini almaktan daha doğru ve mantıklı olduğunu belirtmişlerdir (Nguyen *vd.*, 2021a).

Wu ve Mei (2015) çelik çekirdek hücreli metal yapının burkulma davranışını incelemişlerdir. Farklı burkulma modlarının kritik burkulma yükünün artması ile gerçekleştiğini

belirtmişlerdir. Çalışma kapsamında analitik yaklaşımla benzer sınır şartları altında sonlu elemanlar analizi yürüterek, kritik burkulma yükünü hesaplamışlardır. Sonlu elemanlar ile analitik yaklaşım sonuçlarının birbiri ile uyumlu olduğunu gözlemlemişlerdir (Wu, & Mei, 2015).

Yapılan bir diğer çalışmada, beton dolgulu ince cidarlı çelik boru şeklindeki giriş kolonlardaki çelik levhaların kritik yerel ve yerel sonrası burkulma davranışı, sonlu elemanlar analizi yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Geometrik ve lineer olmayan malzeme analizleri, sıkıştırma ve düzlem içi eğilme altında çelik levhaların kritik yerel ve post-lokal burkulma dayanımlarını araştırmıştır. Lineer olmayan analizde, çelik levhalarda sunulan ilk geometrik kusurlar ve artık gerilmeler, malzeme akması ve gerinim sertleşmesinin dikkate alınacağını belirtmişlerdir. Doğrusal olmayan sonlu eleman analizlerinden elde edilen sonuçlara dayanarak, beton dolgulu çelik boru giriş kolonlarındaki çelik levhaların, kritik yerel burkulma ve nihai dayanımlarını belirlemek için bir dizi tasarım formülü önermişlerdir (Liang, Uy, & Liew, 2007).

Bu çalışmada ise web konik I-kesitli çelik (WTIS) kolonlarının kritik burkulma yükünü tahmin etmek için, etkili yapay sinir ağları (YSA) geliştirmek amaçlanmıştır. Araştırmacılar, YSA modelini geliştirmek için deneysel sonuçlarla birlikte sonlu eleman modelinden oluşan bir veri tabanı oluşturmuşlardır. Önerilen YSA modelinin sonuçları, mevcut formüllerin sonuçlarıyla karşılaştırılmış ve bu çalışmadaki YSA modelinin, WTIS kolonlarının kritik burkulma yükünü mevcut formüllerden daha doğru bir şekilde tahmin ettiğini vurgulamışlardır. Ayrıca, giriş parametrelerinin WTIS kolonlarının kritik burkulma yükü üzerindeki etkileri, kapsamlı bir şekilde incelenmiştir (Nguyen vd., 2021b).

Virella, Godoy ve Su'arez (2006) temele ankrajlı, konik çatılı yatay yüklere maruz kalan yer üstü çelik tankların, dinamik burkulmasını incelemişlerdir. Çalışmanın amacı olarak, tank-sıvı sisteminin itici hidrodinamik tepkisi için silindirik kabuğun tepesinde elastik burkulmaya neden olan kritik yatay tepe yer ivmesini (Kritik PGA) tahmin etmek olduğunu belirtmişlerdir. Çalışmalarında, yükseklik/çap oranları (H/D) 0.40, 0.63 ve 0.95 olan ve silindir yüksekliğinin %90'ı sıvı seviyesine sahip üç koni tavanlı tankın sonlu elemanlar modellerini kullanmışlardır. Tank modelleri, 1986 El Salvador ve 1966 Parkfield depremleri sırasında kaydedilen ivme kayıtlarına tabi tutulmuş ve sonlu eleman paketi ABAQUS kullanarak, dinamik burkulma hesaplamalarını (malzeme ve geometrik doğrusal olmama dahil) buna göre yapmışlardır. El Salvador ivmeogramı için, silindirik kabuğun tepesindeki burkulmadaki kritik PGA, tankın H/D oranıyla azalırken, Parkfield ivmeogramına tabi tutulan tanklar için H/D oranından bağımsız olarak benzer kritik PGA'lar elde edildiğini rapor etmişlerdir (Virella vd., 2006).

Yi, Gilb, Youmc ve Lee (2008), trapez oluklu elik levhalar, burkulma yükünü azaltmak ve yapısal verimliliği artırmak için ön gerilmeli beton kutu kirişlerini kullanmışlardır. Yaptıkları çalışmada, lokal ve global burkulmayı incelemişlerdir. Lokal burkulma, tek bir paneli içerirken, global burkulmanın, ağın tüm derinliği boyunca uzanan tokalarla birden fazla paneli içerdiğini belirtmişlerdir. Bu çalışmada, etkileşimli kayma burkulma modlarını ve dayanımını etkileyen geometrik parametreleri incelemek için bir dizi sonlu eleman analizi gerçekleştirmişlerdir. Analiz sonuçlarına dayalı olarak, etkileşimli kayma burkulma mukavemeti formülü önermişlerdir. Önerilen formülün, deneysel verilerle iyi uyum sağladığını belirtmektedirler (Yi *vd.*, 2008).

Liu, Zhang, Wang ve Chang (2015) yaptıkları çalışmada, ince cidarlı alüminyum alaşımlı kolonların, burkulma davranışını deneysel ve sayısal olarak incelemişlerdir. Plaka kalınlığının elastik burkulma gerilmesi üzerindeki etkilerini, sonlu elemanlar yaklaşımı içinde araştırmışlardır. İncelenen yaklaşım sonuçlarının birbirleri ile uyumlu olduğunu belirtmişlerdir (Liu *vd.*, 2015).

Jin, Ha ve Goo (2014), dairesel kesitli alüminyum plakaların termal burkulma davranışlarını deneysel ve sonlu elemanlar yaklaşımı uygulayarak incelemişlerdir. Deneysel yaklaşımda dijital görüntü korelasyonu yöntemini kullanmışlardır. Sonlu elemanlar yöntemini, ABAQUS programını kullanarak gerçekleştirmişlerdir. Sonlu elemanlar yönteminden (FEM) elde edilen değerlerin alüminyum numunenin başlangıçta meydana gelen kusurlarından dolayı deneysel sonuçlardan biraz daha yüksek olduğunu belirtmişlerdir (Jin *vd.*, 2014).

Wang, Li ve Wang (2021) iki yönlü alüminyum alaşımlı kablo ile sertleştirilmiş tek katmanlı kafesli kabuk şeklinde ki alüminyum alaşımın, burkulma davranışını incelemişlerdir. Ayrıca, optimize edilmiş yapıların ve klasik silindirik kafesli kabukların burkulma davranışları incelenmiş ve karşılaştırılmıştır (Wang *vd.*, 2021) .

Bu çalışmada, yükseltilmiş bir termal alanda işlevsel olarak derecelendirilmiş gözenekli (FGP) kemer yapısının analitik süreci incelenmiştir. FGP arkının, grafen trombositleri (GPL'ler) ile güçlendirildiğini belirtmişlerdir. Çapraz profildeki gözeneklerin ve GPL'lerin dağılımını göstermek için analitik ifadeler kullanmışlardır. Ta kısmına küçük bir noktasal yük uygulayarak küçük bir kron çentiği göz önünde bulundurulduğunu belirtmişlerdir. Doğrusal olmayan ince duvarlı kabuk teorisi, deforme olmuş yayın potansiyel enerji fonksiyonunu formüle etmek için kullanılmıştır (Li *vd.*, 2020).

Zaeem, Nami ve Kadivar (2007) ince cidarlı bir alüminyum T bağlantısının yerel ve genel kaynaklı burkulma distorsiyonunu incelemişlerdir. Boyuna artık gerilmeleri belirlemek için bir

termo-elastik-viskoplastik model kullanmışlar; termal model ve elastik-viskoplastik (Anand) modelin analizi birbirinden ayırarak gerçekleştirdiklerini belirtmişlerdir. Sıcaklık dağılımını elde etmek için üç boyutlu doğrusal olmayan geçici ısı akışı analizi kullanılmış ve ardından termal sonuçlar ve üç boyutlu Anand elastik-viskoplastik modeli kullanılarak, kaynak sırasında ve soğuma sonrasında gerilme ve deformasyon dağılımları elde ettiklerini belirtmişlerdir. Yerel burkulma, gerilim ve gerinim ilişkilerinin geçmişi analiz edilmiş ve kaynak işlemi sırasında gerilme büyüklüğündeki küçük bir değişiklik büyük deformasyona neden oluyorsa, bir noktada yerel burkulmanın meydana geldiği varsayıldığını belirtmişlerdir (Zaeem *vd.*, 2007).

Çelik ve alüminyumdan yapılan yapıların doğal frekans değerlerinin, frekans değerlerine etki eden parametrelerin belirlendiği çalışmalar literatürde yer almaktadır. Morassi (2001) doğal frekansında titreşen hasarlı çelik çubukta ki çatlağın tanımlanmasını araştırmıştır. Çatlağı, çatlak kollarını birbirine bağlayan eşdeğer bir doğrusal yay ile simüle etmiş ve hasarlı çubukta ki doğal frekans değişimini irdelenmiştir. Teorik sonuçlar, çatlaklı çelik çubuklar üzerindeki dinamik ölçümlerle karşılaştırılarak doğrulanmaya çalışılmıştır (Morassi, 2001).

Luo ve Yang (2019) yaptıkları çalışmada, çelik yapıların doğal frekans değerleri için ses sinyallerine dayalı yeni bir test yöntemi önermişlerdir. Önerilen yöntemin, herhangi bir sensör kurulmasına gerek duymayan ve bu nedenle ölçüm hatası oluşturmeyen temassız bir ölçüm yöntemi olduğunu belirtmişlerdir. İlk üç mod değeri için yapılan ölçümleri, sayısal simülasyonlar ile karşılaştırmışlardır. Sonuç olarak, önerilen yöntemin geleneksel modal test yöntemlerine göre çelik yapıların doğal frekanslarını elde etmek için daha ekonomik, hızlı ve hassas olduğunu belirtmişlerdir (Luo ,& Yang, 2019).

Diğer bir çalışmada, oluklu çelik ağ ile bir kompozit kirişin doğal frekansı belirlenmeye çalışılmıştır. Araştırmacılar, bir oluklu çelik ağ, akordeon etkisi olarak adlandırılan, oluklu çelik ağların benzersiz özelliğinden dolayı ihmal edilebilir düzeyde düzlem içi eksenel rijitliğe sahip olduğunu belirtmişlerdir. Ayrıca, ağın kesme burkulma direnci ve düzlem dışı sertliğinin, oluklu bir çelik ağ kullanılarak arttırılabileceğini açıklamışlardır. Bu avantajlardan yararlanmak için, oluklu çelik ağı, geleneksel öngermeli beton kirişe bir alternatif olarak kullanmışlardır. Bununla birlikte, bir CGCSW'nin doğal frekansı gibi dinamik özelliklerle ilgili çalışmaların yeterince rapor edilmediğini ve bir CGCSW'nin doğal frekansının, benzersiz özelliğinden dolayı düz gövdeli bir kompozit kirişinkinden farklı olması gerektiğini rapor etmişlerdir (Moon *vd.*, 2015).

Razak ve Choi (2001) genel korozyonun betonarme kirişlerin modal parametreleri üzerindeki etkisini incelemek için deneysel bir araştırma yapmışlardır. Tam ölçekli kirişlerde, kayda değer miktarda çelik korozyon hasarı ortaya çıkana kadar donatı korozyonuna maruz bırakmışlardır. Test kirişlerindeki hasar durumları, çatlak genişliği ve pullanma, ölçülerek değerlendirilmiştir. Korozyon hasarından sonra test kirişleri üzerinde modal testler yapmışlar ve elde edilen modal parametreleri bir kontrol kirişinden alınanlarla karşılaştırmışlardır. Elde edilen sonuçlar, modal parametrelerde, özellikle doğal frekanslarda ve sönümleme oranında değişiklikler gösterdiğini belirtmişlerdir (Razak ,& Choi, 2001).

Klimenda ve Soukup (2017) ise, ince alüminyum levhanın doğal frekans değerlerini, sonlu elemanlar yaklaşımı kullanarak modal analiz ile belirlemişlerdir. Çalışmalarında plakanın ilk on moduna karşılık gelen doğal frekans değerlerini hesaplamışlardır (Klimenda ,& Soukup, 2017).

Dattoma, Giannoccaro, Messina ve Nobile (2009). Alüminyum köpüklerin yorulma hasarını tahmin etmek için, doğal frekanslara ve sönüm değerlendirmesine dayalı tahribatsız bir tekniğin uygulanmasını yapmışlardır. Verileri analiz etmek için iki farklı sayısal yöntem kullanmışlar ve yorulma yüküne maruz kalan metalik köpük numunelerinin frekans ve sönüm gelişimi hakkında ayrıntılı bir analiz yapmışlardır (Dattoma *vd.*, 2009).

Literatürde burkulma yüküne maruz kalmış yapıların doğal frekans değerlerinin incelendiği sınırlı sayıda çalışma bulunmaktadır. Nayfeh ve Kreider, (1995), burkulma yüküne maruz bırakılan kirişin, lineer titreşim modlarını deneysel ve analitik olarak incelemiştir. Burkulma yük değerlerinin ve doğal frekans değerlerinin farklı sınır şartları altında ki değişimini de bu çalışma kapsamında değerlendirmişlerdir. Analitik olarak elde edilen doğal frekansların, deneysel olarak elde edilenlerle mükemmel bir uyum içinde olduğunu rapor etmişlerdir. Ayrıca bu durumun bükülü kirişlerin doğrusal olmayan titreşimlerini incelemek için de bir temel sağlayacağını ifade etmişlerdir (Nayfeh ,& Kreider, 1995).

Bu çalışmada ise, Euler tipi ince kesitli milin farklı sınır koşulları altındaki kritik burkulma yükü, analitik ve sonlu elemanlar analizi ile belirlenmiştir. Ayrıca, ilgili kritik burkulma yüklerinin etkilediği doğal frekanslar, harmonik hareket denklemleri kullanılarak sonlu elemanlar analizi ile belirlenmiştir. Analitik ve sonlu elemanlar yaklaşımında, mafsalsal-mafsalsal, ankastre-mafsalsal ve ankastre-ankastre olmak üzere üç farklı sınır koşulu kullanılmıştır. Özellikle sonlu elemanlar yaklaşımında ankastre-ankastre sınır koşulunda kritik burkulma yükü değerini belirlemek için temas mekanizmaları kullanılmıştır. Ayrıca bu çalışma ile, literatür de sıklıkla kullanılan çelik

malzemesi yerine, sınırlı sayıda yer alan alüminyum malzemesi ve farklı sınır şartları seçilerek, literatüre katkıda bulunulacağı düşünülmektedir.



İKİNCİ BÖLÜM

Teorik Yaklaşımlar

Burkulma

Kolon, kiriş çubuk, mil vb. parçalarında, kesit alanlarına dik yönde uygulanan bası yükü ile kararsız denge durumuna geçerek meydana gelen flambaj durumuna burkulma adı verilmektedir. Burkulmanın meydana gelmesi, malzemelerin dayanımına bağlı değildir. Malzemelerin rijitliğine, geometrik özelliklerine (kesit alanı ve boyu) bağlıdır. Burkulma literatürde iki farklı yaklaşım ile ifade edilmektedir. Bunlar: Euler (Lineer) burkulma teorisi ve Timoshenko (Non-lineer) burkulma teorisi olarak adlandırılmaktadır. Timoshenko, burkulma teoreminde düzlem kesit alanı uygulanan burkulma yükü ile beraber düzlem kalırken, burkulma deformasyonundan sonra tarafsız eksene dik olamaz. Bu sebeple, kayma gerilmesinin burkulma deformasyonu üzerinde etkisi, bu teoremden dikkate alınması gerekmektedir (Simsek, 2016). Euler yaklaşımı ise ince kesitli, boyca uzun geometrik parçaların burkulma yükü altında ki deformasyonunun incelendiği teorik yaklaşımdır. Euler yaklaşımında, burkulma yüküne maruz parçaların malzemeleri, izotropik malzeme olmalı, parça ağırlığı ihmal edilmeli ve parça uzunluğu kesit alanına kıyasla çok daha büyük olmalıdır. Euler yaklaşımında, burkulma yükü uygulanacak olan parçanın yeteri kadar uzun olması, parçanın burkulma boyuna, atalet yarıçapına, elastisite modülüne ve parçanın akma mukavemetine bağlıdır.

Euler (Lineer) Burkulma Teoremi

Euler teoreminde uzun, ince kesitli parçaların kritik burkulma yük değeri, mukavemet yaklaşımında yer alan elastik eğri denklemleri kullanılarak belirlenmektedir. Burkulma yüküne maruz parçanın üzerinde oluşacak olan eğilme deformasyon değeri;

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -M(x) \quad (1)$$

denklemleri ile belirlenebilmektedir. Burada E elastisite modülünü, I alan atalet momentini, M(x) eğilme moment fonksiyonunu göstermektedir. Parçanın farklı sınır şartları altında sabitlenmesi, parça üzerine uygulanacak kritik burkulma yük değerini etkilemektedir. Denklem 1’de yer alan ifade farklı sınır şartları için kullanılarak, kritik burkulma yük değerleri belirlenmektedir.

- *Mafsal-Mafsal sabitlenen parçanın kritik burkulma yük değerinin belirlenmesi*

Şekil 1’de görüldüğü üzere, mafsal-mafsal sabitlenmiş parçanın kritik burkulama yük değeri belirlenirken, parçanın burkulma deformasyonuna uğramış bölgesinden kesit alınarak, Denklem 1’de yer alan yaklaşım kullanılır.

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py \quad (2)$$

Burada, P kritik burkulma yük değerini göstermektedir. Eşitliğin sağ tarafında yer alan ifade, eşitliğin sol tarafına alınır ve ikinci derece diferansiyel denklemin çözülebilmesi için sabit ifadeler, $K^2 \left(\frac{P}{EI} \right)$ olarak ifade edilirse;

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + K^2 y = 0 \quad (3)$$

elde edilir. Denklem 3’te yer alan ifadenin ikinci derece diferansiyel denklem genel çözümü Denklem 4’te;

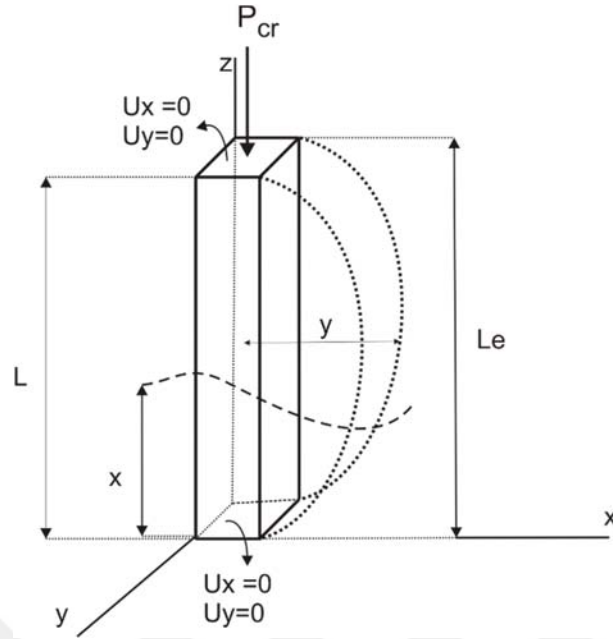
$$y(x) = c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx) \quad (4)$$

şeklinde gösterilmektedir. C_1 ve c_2 integral sabitleridir.

Denklem 4’te yer alan genel çözümün mafsal-mafsal sınır şartı değerleri kullanılarak (Beer, Johnston, Dewolf, & Mazurek, 2012);

$$\begin{aligned} x=0 \quad y=0 \quad c_2 &= 0 \\ x=L \quad y=0 &\rightarrow c_1 \sin(KL) = 0 \\ KL = n\pi &\rightarrow K^2 = n^2 \pi^2 \\ P_{cr} &= \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \end{aligned} \quad (5)$$

denklem 5’te yer alan sınır şartı ifadelerinde mesnetin olduğu noktada deformasyon değeri olmayacağı yaklaşımından kritik burkulma yük değeri belirlenmiştir.



Şekil 1. Mafsalsal-mafsalsal sınır şartına sahip parçanın burkulma deformasyonu.

Şekil 1’de görülen Le ifadesi burkulma yükü sonrası parça üzerinde oluşan eş değer burkulma uzunluğunu ifade etmektedir. Mafsalsal-mafsalsal burkulma deformasyonunda eş değer burkulma uzunluğu, çubuğun ilk boyuna eşittir.

- *Ankastre-mafsalsal sabitlenen parçanın kritik burkulma yük değerinin belirlenmesi*

Bir uç ankastre ile bir uç mafsal mesnetlenen parçanın kritik burkulma yük değerinin belirlenmesinde, Denklem 4’te yer alan genel çözüm kullanılacaktır. Genel çözüme sınır şartları uygulandığında;

$$x=0 \quad y=0$$

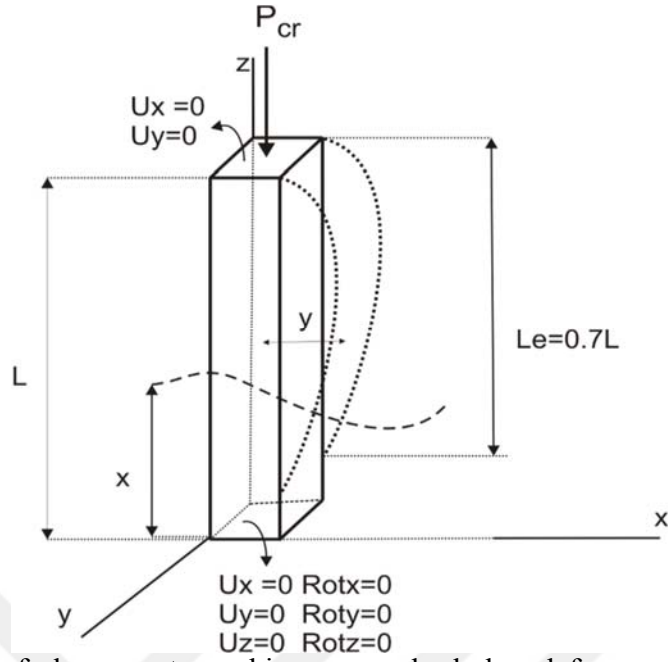
$$x=L \quad y=0$$

$$x=0 \quad \frac{dy}{dx}=0$$

(6)

$$P_{cr} = 2.04 \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$

kritik burkulma kuvveti, Denklem 6’da görüldüğü gibi hesaplanmaktadır (Beer vd., 2012). Mafsalsal-mafsalsal sınır şartından farklı olarak, ankastre mesnetin olduğu noktada, parçanın dönmesinin de sıfır olduğu belirtilmiştir. Şekil 2’de ankastre-mafsalsal uç için, kritik burkulma yüküne karşılık gelen burkulma deformasyonu gösterilmektedir.



Şekil 2. Ankastre-mafsalsınır şartına sahip parçanın burkulma deformasyonu.

- Ankastre-ankastre sabitlenen parçanın kritik burkulma yük değerinin belirlenmesi

Ankastre-ankastre mesnetlenen parçanın kritik burkulma yük değerinin belirlenmesi, genel çözüm üzerinden sınır şartlarının şu şekilde uygulanması ile;

$$x=0 \quad y=0$$

$$x=L \quad y=0$$

$$x=0 \quad dy/dx=0$$

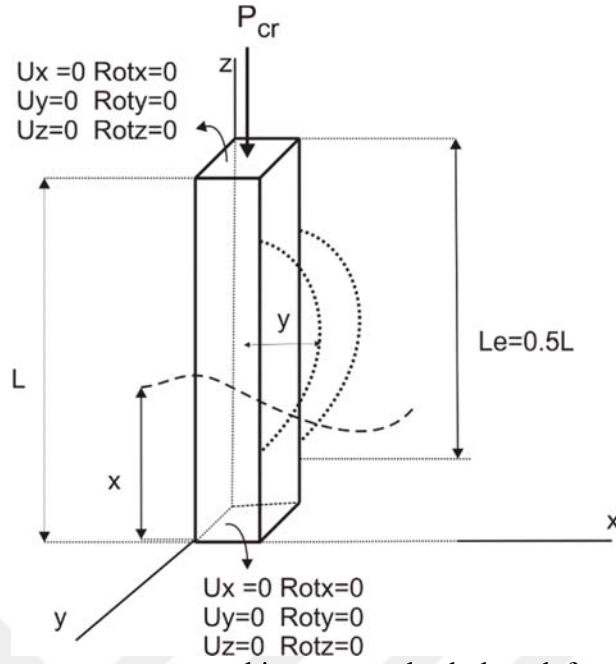
$$x=L/2 \quad dy/dx=0$$

$$x=0 \quad d^2y/dx^2=0$$

$$P_{cr} = 4 \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$

(7)

elde edilmiştir (Beer vd., 2012). Ankastre-ankastre bağlantıda parçanın burkulma deformasyonun maksimum olduğu nokta, parçanın tam orta noktası olmaktadır. Bu sebeple, parçanın tam orta noktasında, dönmenin sıfır olduğu kabulü yapılmaktadır. Şekil 3'te ankastre-ankastre uç için kritik burkulma yüküne karşılık gelen burkulma deformasyonu gösterilmektedir.



Şekil 3. Ankastre-ankastre sınır şartına sahip parçanın burkulma deformasyonu.

Euler burkulma teoreminin uygulanabilmesi için, burkulma yüküne maruz bırakılan parçanın yeteri kadar uzun olması ve burkulma yükü ile üzerinde meydana gelen kritik gerilmenin parçanın akma gerilmesinden az olması gerekmektedir. Parçanın uzunluğunun Euler teoremine uygunluğunu belirlemek amacıyla (Studocu, 2023),

$$\frac{Le}{r_{\min}} > \sqrt{\frac{\Pi^2 E}{\sigma_y}} \quad (8)$$

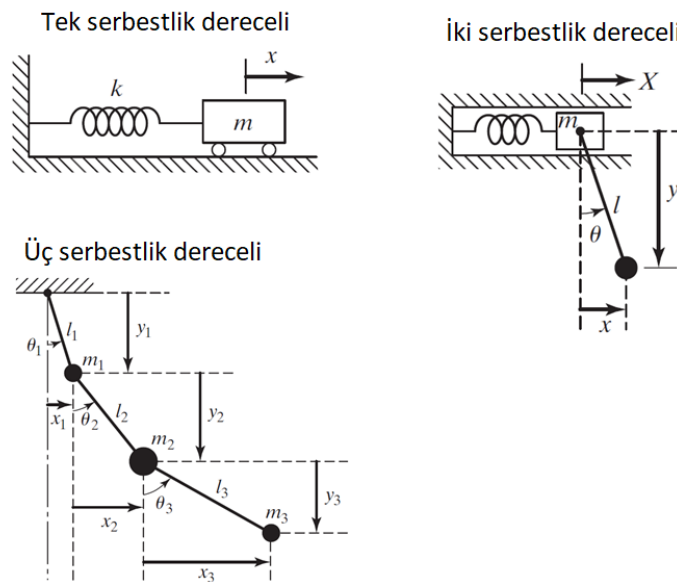
eşitliği kullanılmaktadır. Burada, $r_{\min}$ atalet yarıçapını (atalet momentinin kesit alanına oranı), σ_y ise parça malzemesinin akma mukavemetini ifade etmektedir. Eşitliğin sol tarafında yer alan eşdeğer burkulma uzunluğunun atalet yarıçapına oranının büyük olması, çubuğun uzun olduğunu ve Euler yaklaşımının uygulanabileceğini belirtmektedir. Bununla birlikte, eşdeğer burkulma uzunluğunun atalet yarıçapına oranına, narinlik oranı adı verilmektedir.

Mekanik Titreşim

Titreşimin Temel Kavramları

Belirli bir zaman aralığından sonra kendini tekrar eden herhangi bir harekete, titreşim veya salınım denir. Bir sarkacın sallanması ve çekilmiş bir ipin hareketi, titreşimin tipik örnekleridir. Titreşim teorisi, cisimlerin salınım hareketlerinin ve onlarla ilişkili kuvvetlerin incelenmesiyle ilgilenmektedir (Singiresu, 2004). Bir titreşim sistemi, genel olarak, potansiyel enerjiyi depolamak

için bir araç (yay veya esneklik), kinetik enerjiyi depolamak için bir araç (kütle veya atalet) ve enerjinin kademeli olarak kaybedildiği bir araç (sönümleyici) içermektedir. Bir sistemin titreşimi, dönüşümlü olarak sistemin potansiyel enerjisinin kinetik enerjiye ve kinetik enerjisinin potansiyel enerjiye transferini içermektedir. O halde, titreşimin temel elemanları kütle, yay, sönüm elemanı ve kuvvet olarak belirlenebilir. Titreşim sonucunda meydana gelen frekans değerlerini etkileyen bir diğer önemli kavram ise, serbestlik derecesidir. Herhangi bir anda bir sistemin tüm parçalarının konumlarını tam olarak belirlemek için gereken minimum bağımsız koordinat sayısı, serbestlik derecesini tanımlamaktadır (Singiresu, 2004). Serbestlik derecesinin doğru tanımlanması, parçaların frekans değerlerinin doğru belirlenmesi için son derece önemlidir. Bazı sistemlerin örnek serbestlik dereceleri Şekil 4’te gösterilmektedir.



Şekil 4. Bazı sistemlerin serbestlik dereceleri (Singiresu, 2004).

Titreşimin Sınıflandırılması

Titreşimin uygulanan yüke ve kullanılan sönüm elemanlarına göre farklı isimlerde sınıflandırılmaları yapılmaktadır.

Serbest Titreşim

Bir sistem, ilk kesintiden sonra kendi kendine titreşmeye bırakılırsa, ortaya çıkan titreşim, serbest titreşim olarak bilinir. Sisteme hiçbir dış kuvvet etki etmez. Basit bir sarkacın salınımı, serbest titreşime bir örnektir (Singiresu, 2004).

Zorlanmış Titreşim

Bir sistem harici bir kuvvete maruz kalırsa ortaya çıkan titreşim, zorlanmış titreşim olarak bilinir. Dış kuvvetin frekansı sistemin doğal frekanslarından biriyle çakışırsa, rezonans olarak bilinen bir durum meydana gelir ve sistem tehlikeli derecede büyük salınımlara maruz kalır. Binalar, köprüler, türbinler ve uçak kanatları gibi yapıların arızaları, rezonans oluşumuyla ilişkilendirilmiştir (Singiresu, 2004).

Sönümlü-Sönümsüz Titreşim

Salınım sırasında sürtünme veya diğer dirençte enerji kaybolmaz veya dağılmazsa titreşim, sönümlenmemiş titreşim olarak bilinir. Ancak bu şekilde herhangi bir enerji kaybedilirse, buna sönümlü titreşim denir. Birçok fiziksel sistemde, sönüm miktarı o kadar küçüktür ki, çoğu mühendislik amacı için göz ardı edilebilir. Bununla birlikte, rezonansa yakın titreşimli sistemlerin analizinde sönümlemenin dikkate alınması, son derece önemli hale gelmektedir (Singiresu, 2004).

Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Titreşim

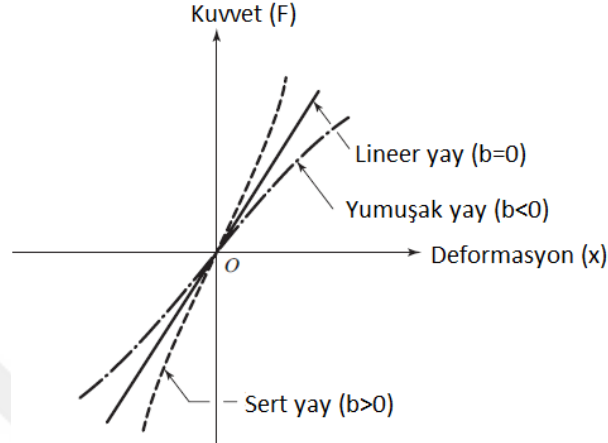
Bir titreşim sisteminin tüm temel bileşenleri olan, yay, kütle ve sönümleyici, doğrusal olarak hareket ediyorsa, ortaya çıkan titreşim doğrusal titreşim olarak bilinir. Bununla birlikte, temel bileşenlerden herhangi biri doğrusal olmayan şekilde davranıyorsa, titreşim doğrusal olmayan titreşim olarak adlandırılmaktadır. Titreşim lineer ise, süperpozisyon ilkesi geçerlidir ve matematiksel analiz teknikleri iyi gelişmiştir. Doğrusal olmayan titreşim için üst üste binme ilkesi geçerli değildir ve analiz teknikleri daha az bilinir. Tüm titreşimli sistemler, artan salınım genliği ile doğrusal olmayan şekilde davranma eğiliminde olduğundan, pratik titreşimli sistemlerle uğraşırken doğrusal olmayan titreşim bilgisi istenir (Singiresu, 2004).

Yay ve Sönüm Elemanları

Bir yay, çoğu uygulamada ihmal edilebilir bir kütleye ve sönümlemeye sahip olduğu varsayılan bir tür mekanik bağlantıdır. Mühendislik uygulamalarında birkaç başka yay türü tanımlanabilir. Kablo, çubuk, kiriş, şaft veya plaka gibi herhangi bir elastik veya deforme olabilen gövde veya eleman, bir yay olarak dikkate alınabilir. Pratik sistemlerde kullanılan çoğu yay, özellikle sapmalar büyük olduğunda, doğrusal olmayan bir kuvvet-sehim ilişkisi sergiler. Titreşim analizinde kuvvet-sehim ilişkileri, şu şekilde verilen doğrusal olmayan yaylar (Singiresu, 2004) için;

$$F=ax+bx^3 \quad a > 0 \quad (9)$$

burada, a , doğrusal kısım ile ilişkili sabiti ve b , (kübik) doğrusal olmama ile ilişkili sabiti göstermektedir. Ayrıca, $b>0$ ise yayın sert, $b=0$ ise lineer ve $b<0$ ise yayın yumuşak olacağı söylenmektedir (Bakınız Şekil 5).



Şekil 5. Doğrusal olmayan ve doğrusal yaylar (Singiresu, 2004).

Birçok pratik sistemde titreşim enerjisi, kademeli olarak ısıya veya sese dönüştürülmektedir. Enerjideki azalma nedeniyle, sistemin yer değiştirmesi gibi tepkiler giderek azalır. Titreşim enerjisinin kademeli olarak ısıya veya sese dönüştürüldüğü mekanizma, sönümleme olarak bilinir. Isıya veya sese dönüştürülen enerji miktarı nispeten küçük olsa da, bir sistemin titreşim yanıtının doğru bir şekilde tahmin edilmesi için sönümlemenin dikkate alınması önemli hale gelmektedir. Bir sönümleyicinin ne kütlesi ne de esnekliği olduğu varsayılır ve sönümleme kuvveti yalnızca sönümleyicinin iki ucu arasında bağıl hız varsa mevcuttur. Pratik sistemlerde sönümlemenin nedenlerini belirlemek zordur. Bu nedenle sönüm, aşağıdaki tiplerden biri veya birkaçı olarak modellenmektedir (Singiresu, 2004).

Viskoz sönümleme: Viskoz sönümleme, titreşim analizinde en sık kullanılan sönümleme mekanizmasıdır. Mekanik sistemler, hava, gaz, su veya yağ gibi akışkan bir ortamda titreştiğinde, akışkanın hareket eden cisme sunduğu direnç, enerjinin dağılmasına neden olur. Bu durumda dağılan enerji miktarı, titreşen cismin boyutu ve şekli, sıvının viskozitesi, titreşim frekansı ve titreşen cismin hızı gibi birçok faktöre bağlıdır. Viskoz sönümlemede, sönümleme kuvveti titreşen cismin hızıyla orantılıdır (Singiresu, 2004).

Coulomb veya Kuru Sürtünme Sönümlemesi: Burada sönümleme kuvveti büyüklük olarak sabittir, ancak titreşen cismin hareketinin yönüne zıttır. Kuru veya yetersiz yağlamaya sahip sürtünme yüzeyleri arasındaki sürtünmeden kaynaklanmaktadır (Singiresu, 2004).

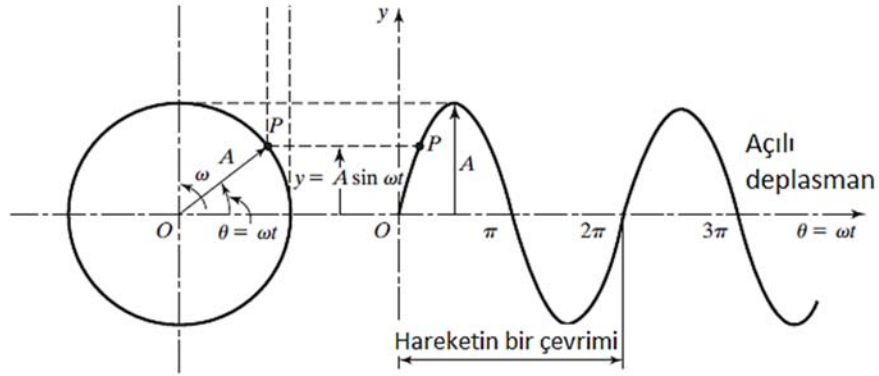
Malzeme veya Katı veya Histeretik Sönümleme: Bir malzeme deforme olduğunda, malzeme tarafından enerji emilir ve dağıtılır. Etki, deformasyonlar meydana geldikçe kayan veya kayan iç düzlemler arasındaki sürtünmeden kaynaklanmaktadır (Singiresu, 2004).

Harmonik Hareket

Salınım hareketi, basit bir sarkaçta olduğu gibi düzenli bir şekilde kendini tekrar edebilir veya bir deprem sırasındaki yer hareketinde olduğu gibi önemli ölçüde düzensizlik gösterebilir. Hareket eşit zaman aralıklarında tekrarlanıyorsa, buna periyodik hareket denir. En basit periyodik hareket türü harmonik harekettir. Harmonik hareket, $\vec{OP}$ büyüklüğünün bir vektörü aracılığıyla uygun bir şekilde temsil edilebilir. Sabit bir açısal hızla dönen ω , $\vec{X} = \vec{OP}$ vektörünün ucunun dikey eksen üzerindeki izdüşümü, şu şekilde verilmektedir (Singiresu, 2004);

$$y = A \sin(\omega t) \quad (10)$$

Dönen bir vektör sonunun izdüşümü olarak harmonik hareketin gösterimi Şekil 6'da verilmektedir.



Şekil 6. Dönen bir vektörün sonunun izdüşümü olarak harmonik hareket gösterimi (Singiresu, 2004).

Aşağıdaki tanımlar ve terminoloji, harmonik hareket ve diğer periyodik fonksiyonlar için bilinmesi gereken tanımlardır.

Döngü: Titreşen bir cismin, bozulmamış veya denge konumundan bir yönde aşırı konumuna, sonra denge konumuna, sonra diğer yönde aşırı konumuna ve tekrar denge konumuna hareketini sağlayan titreşim döngüsüne denir (Singiresu, 2004) .

Genlik: Titreşen bir cismin, denge konumundan maksimum yer değiştirmesine titreşim genliği denir (Singiresu, 2004).

Salınım dönemi: Bir hareket döngüsünün tamamlanması için geçen süre, salınım periyodu veya zaman periyodu olarak bilinir ve τ ile gösterilmektedir (Singiresu, 2004). Burada, birim zamanda ki devir sayısına salınım frekansı veya basitçe frekans denir. f ile gösterilir ve şu şekilde hesaplanmaktadır (Singiresu, 2004):

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (11)$$

Doğal frekans: Bir sistem, ilk bozuntudan sonra kendi kendine titreşmeye bırakılırsa, dış kuvvetler olmaksızın salındığı frekans, sistemin doğal frekansı olarak bilinir. Daha sonra görüleceği gibi, n serbestlik derecesine sahip bir titreşim sistemi, genel olarak, n farklı doğal titreşim frekansına sahip olacaktır (Singiresu, 2004).

Rezonans: Herhangi bir sistemin dışarıdan kendi doğal frekansı ile tahrik edilmesi sonucunda oluşan, sonsuz genlik değerlerine ve buna bağlı oluşan büyük deformasyonlara rezonans denir.

Harmonik Hareket Denklemleri

Harmonik harekette sönümlü ve sönümsüz eleman içeren hareket denklemleri yer almaktadır. İlk olarak, sönümsüz bir sistemin harmonik kuvvet altındaki tepkisi şu şekilde gösterilmektedir (Singiresu, 2004);

$$m \ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (12)$$

Denklem 13'ün homojen çözümü;

$$x_h(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (13)$$

şeklinde elde edilmektedir. Denklem 11'de yer alan genlik ifadesi denklem 13 içerisinde yazılır ve sadeleştirmeler yapılırsa maksimum genlik değeri (Singiresu, 2004);

$$A_{\max} = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (14)$$

şeklinde belirlenebilir. Burada, $\delta_{st} = F_0 / k$ statik F_0 kuvveti altındaki deformasyon değerini göstermektedir. Bununla birlikte, $\left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)$ ifadesi ise frekans oranını ifade etmektedir.

Sönüm elemanı içeren bir sistemin harmonik hareket denklemi (Singiresu, 2004);

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (15)$$

burada c , sönüm katsayısını ifade etmektedir. Sönümlü eleman içeren harmonik harekette deformasyon denklemi şu şekilde yazılabilmektedir (Singiresu, 2004);

$$x_p(t) = A \cos(\omega t - \phi) \quad (16)$$

burada, ϕ faz açısını ifade etmektedir.

Sönüm elemanı içeren bir sistemde maksimum genlik ve faz açısının eşitlik ifadeleri (Singiresu, 2004);

$$A_{\max} = \frac{F_0}{\left[(k - m\omega^2)^2 + c^2 \omega^2 \right]^{1/2}} \quad (17)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2} \right)$$

şeklinde ifade edilmektedir.

Burkulma Yüküne Maruz Parçaların Doğal Frekans Değerlerinin Analitik Yaklaşımı

Bu bölümde burkulma yüküne maruz parçaların doğal frekans değerlerinin, analitik olarak belirlenmesi açıklanacaktır. Doğal frekans değerlerinde deforme olan parçaların modal deformasyonları ile kritik burkulma yük değerleri, analitik yaklaşım içinde kullanılacaktır. Bir parçanın n değerinde ki burkulma modu, etrafındaki doğrusal titreşimleri, tam diferansiyel denklem tarafından şu şekilde ifade edilmektedir (Nayfeh, & Kreider, 1995):

$$El^2 \frac{\partial u}{\partial t^2} + \frac{El}{l^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + P^{(n)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{EAb^2}{l^2} \phi_n'' \int_0^1 \phi_n' \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (18)$$

Burada u , deformasyon yönü, E parça malzemesinin elastisite modülü, l parçanın uzunluğu, A parçanın kesit alanı, b ise boyutsal ölçeklendirme sabitidir ve burkulma mod değerleri şu şekilde ifade edilmektedir (Nayfeh & Kreider, 1995):

$$b^2 = 2l \left[P - P^{(n)} \right] / EA \int_0^l \left(\frac{d\phi_n}{dx} \right)^2 dx \quad (19)$$

Burada, dx deforme olmamış parça boyunca mesafe değerini, ϕ_n n değerindeki mod deformasyonunu göstermektedir.

Denklem 19’da yer alan eşitliği mod deformasyonu ve doğal frekans değerlerinin ifadesi şeklinde yazarsak (Nayfeh ve Kreider,1995);

$$\begin{aligned} \frac{-m\omega^2 l^4}{EI} \phi + \phi^{iv} + \frac{P^{(n)} l^2}{EI} \phi'' = \frac{BA b^2}{I} \phi_n'' \\ B = \int_0^1 \phi_n' \phi' dx \end{aligned} \quad (20)$$

ω, ϕ ifadeleri, doğal frekans ve mod deformasyon değerlerini göstermektedir. Denklem 20’de yer alan eşitlikteki mod ifadesinin genel çözümü, homojen ve özel çözümlerin doğrusal bir kombinasyonu olarak ifade edilirse (Nayfeh ve Kreider,1995);

$$\begin{aligned} \phi(x; \omega) &= \phi_h(x; \omega) + \phi_p(x; \omega) \\ \phi_h &= C_1 \sin(\lambda_1 x) + C_2 \cos(\lambda_1 x) + C_3 \sinh(\lambda_2 x) + C_4 \cosh(\lambda_2 x) \\ \phi_p &= C_5 \cos(2\pi x) \end{aligned} \quad (21)$$

şeklinde olacaktır. Burada, λ_1, λ_2 sabit değerlerdir ve şu şekilde ifade edilir (Nayfeh ve Kreider,1995);

$$\lambda_1, \lambda_2 = \left\{ \pm \frac{P^{(n)} l^2}{2EI} + \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{P^{(n)} l^2}{EI} \right]^2 + \frac{4m\omega^2 l^4}{EI}} \right\}^{1/2} \quad (22)$$

Denklem 20’de yer alan eşitliğin homojen ve özel çözüm değerlerini yeniden ifade edersek (Nayfeh ve Kreider,1995);

$$\frac{-m\omega^2 l^4}{EI} \phi_p + \phi_p^{iv} + \frac{P^{(n)} l^2}{EI} \phi_p'' - \frac{Ab^2}{I} \phi_n'' \int_0^1 \phi_n' \phi_p' dx = \frac{Ab^2}{I} \phi_n'' \int_0^1 \phi_n' \phi_h' dx \quad (23)$$

şeklinde elde edilecektir.

- *Ankastre-ankastre sabitlenen parçanın burkulma yükü ve doğal frekans ifadesini analitik çözümü*

Denklem 7’de ankastre-ankastre sabitlenen bir parçanın kritik burkulma yük değerinin formülü gösterilmektedir. Bu yaklaşım üzerine birinci mod frekansına karşılık gelen deformasyon ifadesini ($\phi_1 = 1 - \cos(2\pi x)$) ekler ve Denklem 23’te yer alan özel ve homojen ifadeleri ve bu ifadeler içinde yer alan integral sabitlerini kullanarak, birinci burkulma modu ve buna karşılık gelen doğal frekans değerleri, ankastre-ankastre sınır şartı için (Nayfeh ,& Kreider, 1995);

$$\left(\frac{8Ab^2\pi^4}{I} - \frac{m\omega^2 l^4}{EI} \right) C_5 = \frac{8Ab^2\pi^3}{I} \left\{ \begin{aligned} & \left\{ C_1 \lambda_1 \left[\frac{2\pi(\cos \lambda_1 - 1)}{\lambda_1^2 - 4\pi^2} \right] \right\} \\ & - C_2 \lambda_1 \left(\frac{2\pi \sin \lambda_1}{\lambda_1^2 - 4\pi^2} \right) + C_3 \lambda_2 \left[\frac{2\pi(1 - \cosh \lambda_2)}{\lambda_2^2 + 4\pi^2} \right] - C_4 \lambda_2 \left(\frac{2\pi \sinh \lambda_2}{\lambda_2^2 + 4\pi^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

şeklinde ifade edilmektedir.

- *Ankastre-mafsalsabitlelenen parçanın burkulma yükü ve doğal frekans ifadesini analitik çözümü*

Denklem 6’da, ankastre-mafsalsabitlelenen bir parçanın kritik burkulma yük değerinin formülü gösterilmektedir. Bu yaklaşım üzerine birinci mod frekansına karşılık gelen deformasyon ifadesini ($\phi_1 = 1 - x + K \sin(\Omega_1 x) - \cos(\Omega_1 x)$; $K \approx 0.2225$, $\Omega_1 = 4.4934$) ekleyip, integral sabitlerini kullanarak, birinci burkulma modu ve buna karşılık gelen doğal frekans değerleri, ankastre-mafsalsabitlelenen sınır şartı için şu şekilde (Nayfeh ,& Kreider, 1995);

$$\begin{aligned} & \frac{-m\omega^2 l^4}{EI} \phi_p + \phi_p^{iv} + \Omega^2 \phi_p^{ii} - \frac{\Omega_1^2 Ab^2}{I} [-K \sin(\Omega_1 x) + \cos(\Omega_1 x)] \\ & x \int_0^1 [-1 + K \Omega_1 \cos(\Omega_1 x) + \Omega_1 \sin(\Omega_1 x)] \phi_p' dx \\ & = \frac{\Omega_1^2 Ab^2}{I} [-K \sin(\Omega_1 x) + \cos(\Omega_1 x)] x \int_0^1 [-1 + K \Omega_1 \cos(\Omega_1 x) + \Omega_1 \sin(\Omega_1 x)] \phi_h' dx \end{aligned} \quad (25)$$

ifade edilmektedir.

- *Mafsalsabitlelenen parçanın burkulma yükü ve doğal frekans ifadesinin analitik çözümü*

Denklem 5’te yer alan mafsalsabitlelenen bir parçanın kritik burkulma yük değerinin formülü gösterilmektedir. Bu yaklaşım üzerine birinci mod frekansına karşılık gelen deformasyon ifadesini ($\phi_1 = \sin(\pi x)$) ekleyip, integral sabitlerini kullanarak, birinci burkulma modu ve buna karşılık gelen doğal frekans değerlerini mafsalsabitlelenen sınır şartı için (Nayfeh ,& Kreider, 1995);

$$\begin{aligned}
& \frac{-m\omega^2 l^4}{EI} \phi_p + \phi_p^{iv} + \pi^2 \phi_p^{II} + \frac{\pi^3 Ab^2}{I} \sin(\pi x) \int_0^1 [\cos(\pi x) \phi_p'] \\
& = -\frac{\pi^3 Ab^2}{I} \sin(\pi x) \int_0^1 [\cos(\pi x) \phi_h'] dx
\end{aligned} \tag{26}$$

integral sabitleriyle beraber, denklem 26'nın sadeleştirilmiş ifadesi;

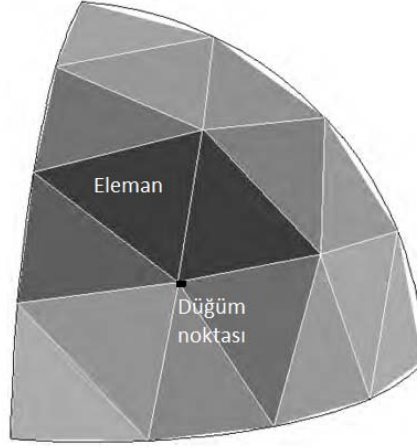
$$\begin{aligned}
& \frac{-m\omega^2 l^4}{EI} \phi_p + \phi_p^{iv} + \pi^2 \phi_p^{II} + \frac{\pi^3 Ab^2}{I} \sin(\pi x) \int_0^1 [\cos(\pi x) \phi_p'] \\
& = \left(\frac{\pi^4 Ab^2}{2I} - \frac{m\omega^2 l^4}{EI} \right) C_5 = -\frac{\pi^3 Ab^2}{I} \int_0^1 [\cos(\pi x) \phi_h'] dx
\end{aligned} \tag{27}$$

şeklinde elde edilecektir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

Sonlu Elemanlar Yöntemine Giriş

Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY), günümüzde ileri mühendislik sistemlerinin modellenmesi ve simülasyonunda önemli bir rol oynamaktadır. SEY bir, iki veya üç uzay değişkenindeki kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için genel bir sayısal yöntemdir. SEY, bir problemi çözmek için büyük bir sistemi, sonlu elemanlar olarak adlandırılan daha küçük, daha basit parçalara ayırmaktadır. Bu ayrılan parçalara eleman, bu parçaları oluşturan noktalara ise düğüm noktası adı verilmektedir. SEY gerilme ve birim şekil değişimleri bu düğüm noktalarının yer değiştirmesi ile belirlenmektedir.



Şekil 7. Sonlu elemanlar yönteminde eleman ve düğüm noktası gösterimi (Liu & Quek, 2003).

SEY ilk olarak, gerilme-şekil değiştirme problemlerini çözmek için kullanılmıştır. Daha sonra yöntem geliştirilerek, termal analiz, sıvı akış analizi, piezo-elektrik analiz, modal analiz ve diğerleri gibi birçok başka mühendislik sorununa uygulanmıştır. SEY, analitik olarak elde edilmesi zor olan problem değişkenlerinin dağılımının yaklaşık bir çözümünü arayan sayısal bir yöntemdir. Çözüm işlemi bilinen fiziksel yasaların basit bir geometriye sahip olan, sonlu elemanlarına ayrılmış her bir küçük elemana uygulanmasıyla elde edilmektedir.

Sonlu Elemanlar Yönteminin Teorik Yaklaşımı

SEY'in teorik yaklaşımı, bir koordinat sistemine dayalıdır. Elemanlar için SEY denklemlerini formüle ederken, Şekil 8'de gösterildiği gibi, genellikle tüm yapı için tanımlanan global koordinasyon sistemine referans olarak bir eleman için tanımlanmış bir yerel koordinat sistemi kullanmak gerekmektedir. Bir öge üzerinde tanımlanan yerel koordinat sistemine dayalı

olarak, öge içindeki yer değiştirmeleri kullanan polinom interpolasyonu ile basitçe şu şekilde açıklanabilmektedir (Liu ,& Quek, 2003);

$$U^h(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n_d} N_i(x, y, z) d_i = N(x, y, z) d_e \quad (28)$$

Burada h , yaklaşım katsayısını, n_d ögeyi oluşturan düğümlerin sayısını, d_i hesaplanmak istenilen i 'inci düğümdeki düğüm yer değiştirmesini göstermektedir ve genel bir biçimde şu şekilde ifade edilmektedir (Liu ,& Quek, 2003);

$$d_i = \left\{ \begin{array}{l} d1 \rightarrow \text{yerdeğiştirme bileşeni 1} \\ d2 \rightarrow \text{yerdeğiştirme bileşeni 2} \\ . \\ . \\ d_{n_f} \rightarrow \text{yerdeğiştirme bileşeni } n_f \end{array} \right\} \quad (29)$$

Burada n_f , bir düğümdeki serbestlik derecesi (SD) sayısıdır ve global koordinatlar için gösterimi (Liu ve Quek, 2003);

$$d_i = \left\{ \begin{array}{l} u_i \rightarrow x \text{ yönündeki yerdeğiştirme bileşeni} \\ v_i \rightarrow y \text{ yönündeki yerdeğiştirme bileşeni} \\ w_i \rightarrow z \text{ yönündeki yerdeğiştirme bileşeni} \end{array} \right\} \quad (30)$$

şeklinde. Düğüm noktalarının yer değiştirmesi ise d_e ile gösterilmektedir ve şu şekilde ifade edilmektedir (Liu ,& Quek, 2003):

$$d_e = \left\{ \begin{array}{l} d1 \rightarrow \text{yerdeğiştirme bileşeni düğüm noktası 1} \\ d2 \rightarrow \text{yerdeğiştirme bileşeni düğüm noktası 2} \\ . \\ . \\ d_{n_d} \rightarrow \text{yerdeğiştirme bileşeni düğüm noktası } n_d \end{array} \right\} \quad (31)$$

Denklemin 27'de yer alan ve sonlu elemanlar yönteminin teoreminde kullanılan N şekil fonksiyonlarının genel formu (Liu ,& Quek, 2003) aşağıda gösterildiği gibidir;

$$N(x, y, z) = \left[\begin{array}{ccccccc} N_1(x, y, z) & N_2(x, y, z) & \dots & N_{n_d}(x, y, z) \end{array} \right] \quad (32)$$

$\downarrow$
düğüm 1

$\downarrow$
düğüm 2

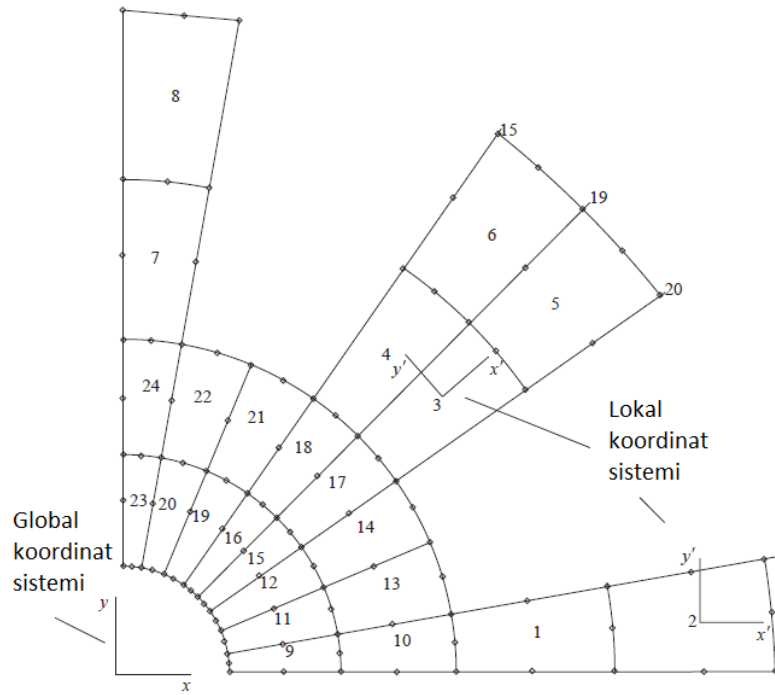
$\downarrow$
.....

$\downarrow$
düğüm n_d

Her bir düğün noktasında ki şekil fonksiyonunun matris olarak gösterimi (Liu ve Quek, 2003):

$$N_i = \begin{bmatrix} N_{i1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{i2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{inf} \end{bmatrix} \quad (33)$$

şeklindedir. Burada, N_{inf} sonsuz düğün noktasındaki şekil fonksiyonunu temsil etmektedir.



Şekil 8. Düğüm noktalarında yer alan lokal ve global koordinat sistemleri (Liu ve Quek, 2003).

Yapısal Analizin Sonlu Elemanlar Yaklaşımındaki Teorik İfadesi

Şekil fonksiyonları oluşturulduktan sonra, bir elemanın yapısal analiz için sonlu elemanlar denklemi, şekil değişimi enerjisi kullanılarak aşağıda gösterildiği gibi formüle edilebilir (Liu ve Quek, 2003):

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{V_e} \epsilon^T c \epsilon dV = \frac{1}{2} \int_{V_e} d_e^T B^T c B d_e dV = \frac{1}{2} d_e^T \left(\int_{V_e} B^T c B dV \right) d_e \quad (34)$$

Burada e ifadesi elemanı, B birim şekil değişim matrisini, c sabit değeri, T transpoze ifadesini, ε birim şekil değişimini göstermektedir.

Denklem 33'te birim şekil değişim enerjisi formülünde yer alan $\int_{V_e} B^T c B dV$ ifadesi rijidlik matrisi k_e 'ye eşit olduğuna göre, birim şekil değiştirme enerjisi, rijidlik matrisi cinsinden (Liu ve Quek, 2003):

$$\Pi = \frac{1}{2} d_e^T k_e d_e \quad (35)$$

şeklinde ifade edilir.

Birim şekil değişim enerjisi formülünde yer alan ifadeler, kuvvetin yaptığı iş formülü üzerinde kullanılırsa (Liu ve Quek, 2003);

$$W_f = \int_{V_e} d_e^T N^T f_b dV + \int_{S_e} d_e^T N^T f_s dS = d_e^T \left(\int_{V_e} N^T f_b dV \right) + d_e^T \left(\int_{S_e} N^T f_s dS \right) \quad (36)$$

Düğüm kuvvetleri;

$$F_b = \int_{V_e} N^T f_b dV \quad ; \quad F_s = \int_{S_e} N^T f_s dS$$

elde edilir. Denklem 36'da yer alan sınır kuvvetleri kullanılarak iş formülü yeniden yazılırsa (Liu ve Quek, 2003);

$$W_f = d_e^T F_b + d_e^T F_s = d_e^T f_e \quad (37)$$

elde edilir. F_b ve F_s , sanal bir yer değiştirme üzerinde yapılan iş açısından elemana uygulanan gövde kuvvetlerine ve yüzey kuvvetlerine eşdeğer olan ve elemanların düğüm noktalarına etki eden düğüm kuvvetleridir. Bu iki düğüm noktası kuvveti vektörü, daha sonra toplam düğüm noktası kuvveti vektörü f_e 'yi oluşturmak için toplanır.

Elde edilen düğüm kuvvetleri, sertlik matrisi ve düğüm yer değiştirme vektörü u 'yu lineer olarak ifade edebilecek ayrık eleman denklemi;

$$F = Kq \quad (38)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Yapısal analizler de eksenel şekil değişimleri, gerilmeler denklem 38'de yer alan eşitlik ile belirlenmektedir. Burada belirtilmelidir ki bir elemanın rijitlik matrisi (K),

onun mekanik özelliklerini temsil eder ve düğüm yer değiştirmelerini düğüm kuvvetleriyle ilişkilendirir. Rijitlik matrisi, bir yapı üzerindeki mekanik tepkinin belirlenmesinde merkezi bir rol oynamaktadır.

Modal Analizin Sonlu Elemanlar Yaklaşımındaki Teorik İfadesi

Sonlu elemanlar yönteminin modal analiz uygulamasında, homojen denklem çözümü gibi, $F=0$ durumunun ele alınabileceği gibi, dışarıdan herhangi bir kuvvetin etkisi de göz önünün de bulundurulabilmektedir. Sistem dış kuvvetlerden bağımsız ise serbest titreşim analizi, dış kuvvetlerin etkisi altında ise zorlanmış titreşim olarak ifade edilmektedir. Dışarıdan bir kuvvetin etkisi ile meydana getirilen titreşimin rijitlik ve kütle matrisi cinsinden ifadesi (Liu ,& Quek, 2003);

$$KD + M \ddot{D} = F$$
$$D = \phi \exp(i\omega t)$$
(39)

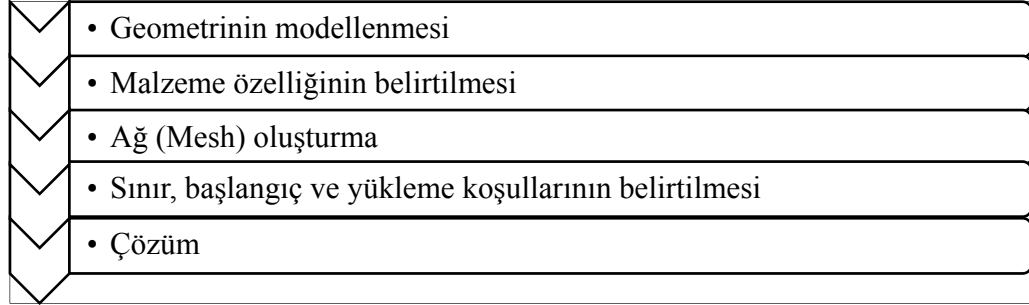
şeklinde ifade edilmektedir. Burada ϕ , düğüm yer değiştirmesinin genliği, ω titreşimin frekansı ve t zamandır. Zorlanmış titreşimin düğüm yer değiştirmesi genliği ve titreşim frekansı cinsinden ifadesi aşağıdaki gibidir (Liu ,& Quek, 2003):

$$[K - \omega^2 M] \phi = F$$
(40)

Sonlu Elemanlar Yönteminin Uygulanması

Sonlu elemanlar yönteminin uygulaması, sonlu elemanlar teoremini içeren Ansys paket programı kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Sonlu elemanlar analizinde, bir sistemdeki bir parçanın herhangi bir analizi sistemin geometrisine veya alanına, malzeme veya ortamın özelliğine ve sınır, başlangıç ve yükleme koşullarına bağlıdır. Bir mühendislik sistemi için geometri veya etki alanı çok karmaşık olabilir. Ayrıca, sınır ve başlangıç koşulları da karmaşık olabilir. Bu nedenle, genel olarak, diferansiyel denklemi analitik yollarla çözmek çok zordur. Uygulamada, problemlerin çoğu sayısal yöntemlerle çözülmektedir. Bunlar arasında, pratikliği ve çok yönlülüğü nedeniyle SEY tarafından kullanılan ayrıklaştırma yöntemleri en popüler olanlardır.

SEY kullanarak hesaplamalı modelleme prosedürü genel olarak 5 adımdan oluşmaktadır. Bu adımlar sırasıyla, geometrinin modellenmesi, malzeme özelliğinin belirtilmesi, ağ oluşturma, sınır, başlangıç ve yükleme koşullarının belirtilmesi ve çözümdür. İlgili adımların sonlu elemanlarda uygulama sırası Şekil 9’da verilen akış şemasında gösterilmiştir.



Şekil 9. SEY uygulama adımlarını gösteren akış şeması.

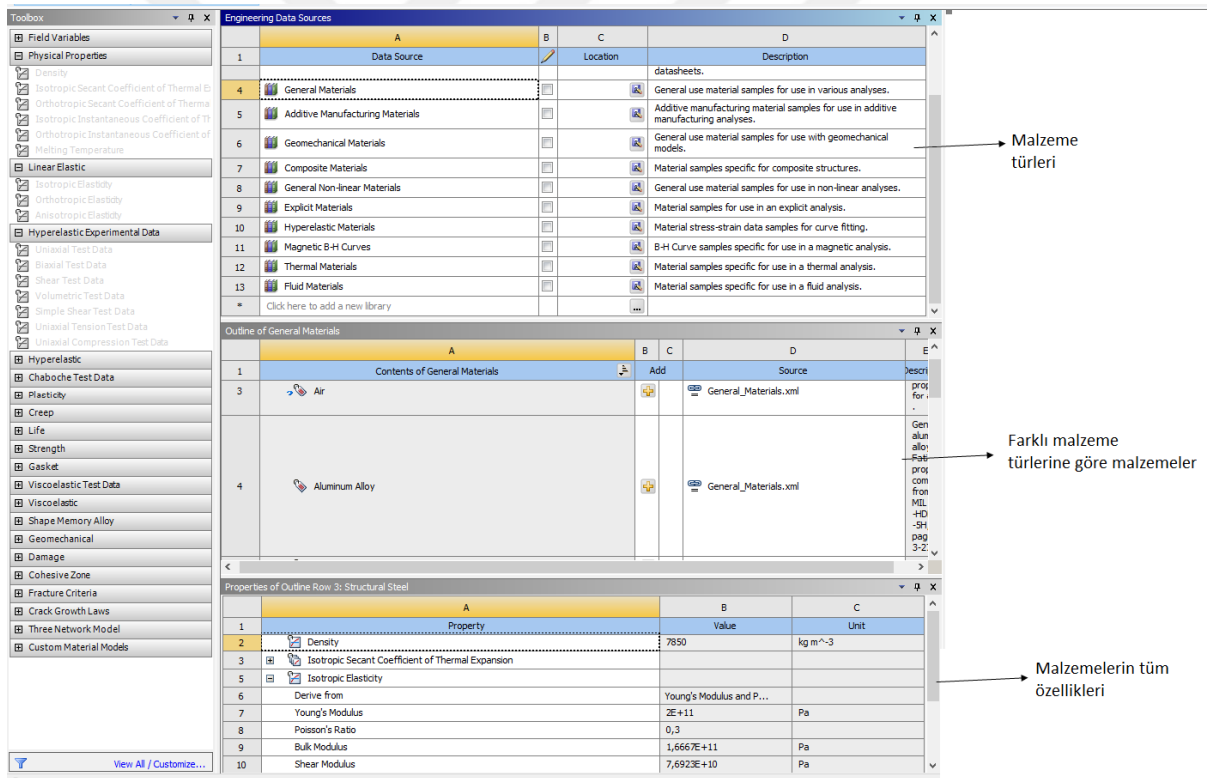
Geometrinin Modellenmesi

Sonlu elemanlar programında analiz için tasarlanacak geometriyi oluşturmanın birçok yolu vardır. Program içerisinde yer alan Bilgisayar Destekli Tasarım (CAD) modülü ile analiz yapılmak istenen geometrinin kenar, alan ve hacim bölgeleri oluşturularak, geometri oluşturulabilir. Bunun dışında, mühendislik tasarımı için kullanılan ve tasarlanan mühendislik sisteminin geometrisini içeren dosyalar üretebilen çok sayıda bilgisayar destekli tasarım yazılım paketi vardır. Bu dosyalar genellikle modellerin geometrisini oluştururken, zamandan önemli ölçüde tasarruf sağlayabilen modelleme yazılım paketleri tarafından okunabilir. Bir sistemin geometrisinin modellenmesinde bilgi, deneyim ve mühendislik yargısı çok önemlidir. Çoğu durumda, ince detaylı geometrik özellikler yalnızca estetik bir rol oynar ve mühendislik sisteminin performansı üzerinde ihmal edilebilir etkilere sahiptir. Bu özellikler silinebilir, göz ardı edilebilir veya basitleştirilebilir, ancak ince bir geometrik değişikliğin simülasyonu sonucunda önemli bir farka yol açabileceği bazı durumlarda doğru olmayabilir. Bu sebeple geometri tasarımı, analizin doğru yürütülebilmesi açısından son derece önemlidir. Tez kapsamında yürütülecek analizlerde kullanılacak silindirik mil geometrisi, programın alt modülünde yer alan *Spaceclaim* modülü kullanılarak oluşturulmuştur. Tez kapsamında çalışılacak silindirik mil 650 mm boyunda 5 mm yarıçapında içi dolu olarak oluşturulmuştur.

Malzeme Özelliğinin Belirtilmesi

Sonlu elemanlar analizinde doğru malzeme ile çalışmak son derece önemlidir. Malzemenin tüm özelliklerinin doğru olarak tanımlanması, analizin doğruluğunu sağlamaktadır. Ansys sonlu

elamanlar programında malzeme tanımlanması iki şekilde gerçekleştirilmektedir. Birincisi, programın içerisinde yer alan malzeme kütüphanesi kullanılarak yapılmaktadır. Malzeme kütüphanesi içerisinde metal, polimer, silikon ve kompozit malzemelerden bazılarının yer aldığı genel malzeme sekmesi, sadece kompozit malzemelerin yer aldığı kompozit malzeme sekmesi, eklemeli imalat yönteminde kullanılan malzemeler için ayrı bir modül, termal malzemeler için ayrı modül yer almaktadır. Çok sayıda malzemenin, fiziksel özellikleri, lineer elastik malzeme özellikleri, mekanik ve termal özellikleri, sonlu elemanlar programının içerisinde yer almaktadır. Çalışma kapsamında kullanılan alüminyum alaşım sonlu elemanlar programının malzeme sekmesinde yer alan genel malzeme modülü kullanılarak belirlenmiştir. Bunun dışında sonlu elemanlar programının kütüphanesinde yer almayan malzemeler için ise, fiziksel, lineer elastik ve mekanik özellikleri ayrı, yarı programa tanıtılarak, kullanılabilir. Sonlu elemanlar programının malzeme kütüphanesi Şekil 10'da gösterilmiştir.



Şekil 10. Sonlu elemanlar programında bulunan malzeme kütüphanesi.

Bu çalışmada, sektörde sıklıkla kullanılan malzeme olan alüminyum alaşım kullanılmıştır. Alüminyum malzeme, uygulanan farklı yüklemeler altında eksenler boyunca mekanik özelliklerini koruyan lineer izotropik malzeme davranışına sahiptir. Dolayısıyla malzemenin lineer elastik davranışının modellenenbilmesi için, her iki malzemenin de elastisite modülünün ve poisson oranının

bilinmesi yeterlidir. Bununla birlikte malzemelerin kalıcı deformasyona uğramadığı elastik bölge için gerekli olan mukavemet değerleri Tablo 1’de gösterilmektedir.

Tablo 1. *Çalışma Kapsamında Kullanılan Malzeme Özelliklerinin Değerleri*

Özellikler	Alüminyum alaşım
Elastisite Modülü (GPa)	70
Poisson oranı	0,33
Akma mukavemeti (MPa)	280
Kayma modülü (GPa)	26,69
Yoğunluk (kg/m ³)	2770

Ağ (Mesh) Oluşturma

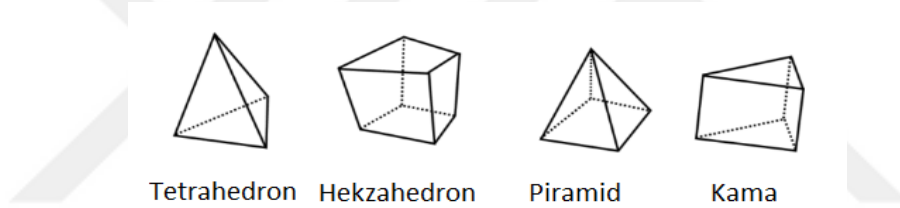
Ağ üretimi, analiz kısımlarının en önemli kısmıdır. Geometrinin sonlu elemanlarına ayrılma işlemi bu kısımda gerçekleştirilir. Ağ geometrisi farklı geometrik şekillerde üretilebilmektedir. Aynı zamanda ağ geometrisi farklı boyutlarda da üretilebilmektedir. Boyut yapısının değişikliği, geometrinin ayrıldığı eleman ve düğüm noktası sayısını da değiştirmektedir. Dolayısıyla, düzgün ağ yapısının oluşturulabilmesi için, doğru ağ geometri çeşidine ve uygun boyuta ihtiyaç duyulmaktadır. Bu sebeple, en uygun ağ yapısı için sonlu elemanlar programında yer alan ağ kriterleri kullanılmıştır. Kriterlerden biri, sonlu elemanlarına ayrılan geometrinin eleman kalitesi değeridir. Bir diğer kriter ise, ağ geometrisini oluşturan geometrik şeklin en boy oranıdır. Uygun kriter değerleri, sonlu elemanlar programının kullanıcılara sağladığı veri bilgisi değerlerinden alınmıştır. Kriter yorumlarına geçmeden önce, sonlu elemanlar programında kullanılabilen farklı ağ geometrileri ve boyutlar hakkında bilgi verilecektir.

Sonlu elemanlar programında farklı ağ geometrilerine sahip modeller, ağ üretimi için kullanılabilmektedir. Bunlardan biri, dört yüzlü ağ (*tetrahedrons mesh*) yapısıdır. Bu yapı dört yüzlü üçgen ağ yapısıdır. İki farklı algoritma ile ağ kurulumu yapılmaktadır. Birinci algoritma, *patch conforming* algoritmasıdır. Bu algoritmada ağ ayırma işlemi, kenar, yüzey ve hacim elemanları şeklinde sırayla yapılmaktadır. Bu sebeple, parça üzerinde ki tüm detaylar sonlu elemanlarına ayrılır. İkinci algoritma yöntemi ise, *patch independent* algoritmasıdır. Bu algoritmada ağ ayırma işlemi, sadece hacim elemanına uygun eleman boyutu ile uygulanmaktadır. Bu sebeple ilgili algoritma da parça üzerinde bulunan ayrıntılar sonlu elemanlarına ayrılmaz.

Sonlu elemanlar programında kullanılan bir diğer algoritma ise dörtgen elemandır (*quad mesh*). Bu ağ geometrisi hem *hexa-dominant* ağ metodunda hem de *sweep* ağ metodunda yer almaktadır. Özellikle düzlem yüzeyler ve silindirik hacimli parçaların sonlu elemanlarına

ayrılmasında sıklıkla tercih edilen bir ağ geometrisidir. Uygulama algoritmasında sadece dörtgen ağ yapısının uygulanacağı gibi, hem üçgen hem de dörtgen ağ yapısının uygulanabileceği algoritma da mevcuttur. Özellikle eğrisel bölgeleri bulunan karmaşık geometriye sahip parçalarda dörtgensel ağ yapısının kalitesini arttırmak için üçgensel ağ yapıları kullanılabilir.

Multizone ve *body cartesian method*, sonlu elemanlar programında kullanılan bir diğer ağ ayırma yöntemleridir. *Multizone* yöntemi, birden fazla geometriye sahip montajlı parçaların ağ yapılarına ayrılmasında kullanılan bir yöntemdir. Dörtgen, üçgen ve prizmatik ağ geometrilerini kullanarak ilgili yöntemde sonlu elemanlarına ayırma işlemi gerçekleştirilebilir. Ancak ilgili yöntemin özellikle yekpare parçalarda uygulanması, ağ yapısının kalitesini düşürebilmektedir. *Body cartesian method* yöntemi, dik köşeli (küp, kare vb.) parçaların kartezyen koordinatlar kullanılarak sonlu elemanlarına ayrıldığı yöntemdir. Bu yöntemde parça üzerinde yer alan eğrisel bölgeler düzgün ağ yapısına bölünmez. Bu durum ağ kalitesine çok ciddi zarar verir. Sonlu elemanlar yönteminde kullanılan ağ yapıları, Şekil 11’de gösterilmektedir.

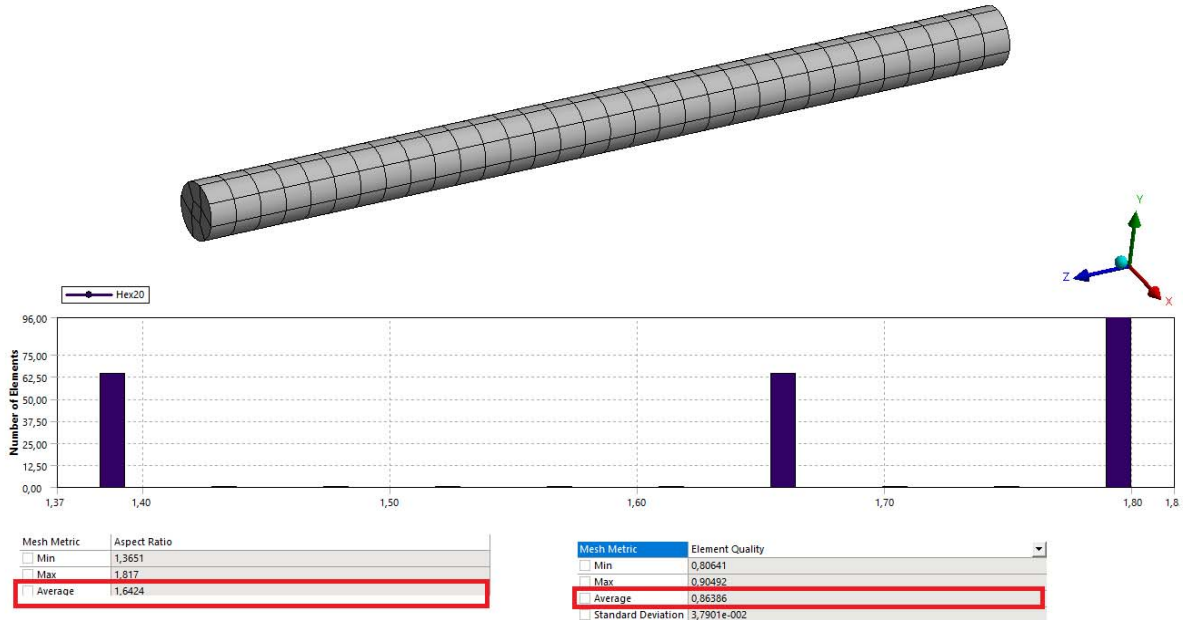


Şekil 11. Sonlu elemanlar yönteminde kullanılan ağ yapıları (Simscale, 2023).

Sonlu elemanlar yönteminde ağ geometrisinin belirlenmesi kadar önemli bir diğer hususta, doğru eleman boyutu ile çalışmaktır. Sonlu elemanlarda parçanın ağ boyutu, iki türlü belirlenmektedir. Birincisi, kullanıcının belirlediği *sizing* komutunu kullanarak, istediği boyutta parçayı elemanlarına ayırabilmektedir. Bu noktada en önemli husus, verilen eleman boyutunun sonuçlara olan etkisinin mutlaka incelenmesi gerekmektedir. Rastgele verilecek bir ağ boyutu, sonlu elemanlar analizinde elde edilecek sonuçları etkileyebilmektedir. Bu sebeple, ağ boyutu belirlenirken, mutlaka ağ duyarlılık analizi yürütülmelidir. Ağ duyarlılık analizinde, farklı ağ boyutlarının yapılan analizin sonuç parametrelerine etkisi grafiksel olarak irdelenir. Ağ boyutu değiştikçe, sonuç parametrelerinin değişmediği ağ boyut aralığı belirlenir. Bu boyut aralığından en yüksek kalite ve en boy oranını veren en küçük ağ boyutu seçilerek, parçanın sonlu elemanlar analizi yürütülür. En küçük ağ boyutunun seçilmesinin nedeni, analizin yüksek eleman ve düğüm noktası ile yürütülmek istenmesindendir. Bir diğer yöntem, otomatik ağ yapısının kurulumudur. Bu ağ yapısının boyutlandırılması program tarafından otomatik olarak yapılmaktadır. Program

içerisinde birden yediye kadar derecelendirilmiş bir ağ boyut düzeni vardır. Birinci derece, eleman boyutlarının büyük, düğüm noktalarının az olduğu kaba ağ yapısını (*coarse mesh*), ikinci derece ise eleman boyutlarının birinci dereceye göre daha küçük ve düğüm noktası sayısının daha da arttığı orta ağ yapısını (*medium mesh*), yedinci derece ise eleman boyutlarının en küçük olduğu ve düğüm noktası sayısının en yüksek olduğu ince ağ yapısını (*fine mesh*) göstermektedir. Bir başka deyişle, birinci dereceden yedinci dereceye doğru gidildikçe eleman boyutu küçülmekte ve düğüm noktası artmaktadır. Ancak, tam tersi bir uygulamada ise eleman boyutu artarken düğüm sayısı azalmaktadır.

Ağ geometrisi ve ağ boyutunun belirlenmesinde en önemli kriter eleman kalitesi ve elemanı oluşturan geometrik yapının en boy oranıdır. Bu iki kriterin programın veri bilgisinden alınan değerlerde olması gerekmektedir. Ansys sonlu elemanlar programının veri bilgisine göre, sonlu elemanlarına ayrılmış parçanın eleman kalitesi en az yüzde seksen olmalı, geometrik yapının en boy oranı ise bir ile üç arasında yer almalıdır (Ansys, 2022). Tez kapsamında oluşturulan silindirik milin, otomatik ağ boyutu ve dörtgensel eleman kullanılarak oluşturulan ağ yapısının eleman kalitesi ve en boy oranı Şekil 12’de gösterilmektedir.

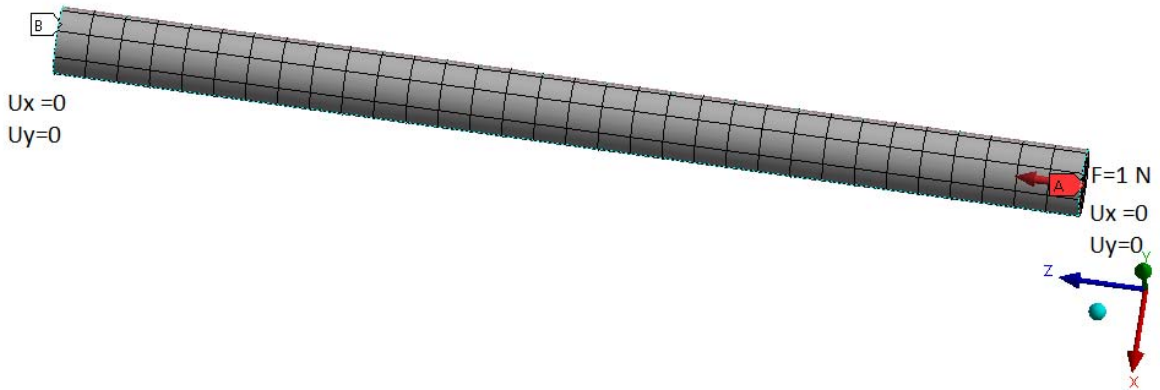


Şekil 12. Sonlu elemanlarına ayrılan silindir parçanın ağ görüntüsü.

Çalışma kapsamında kullanılacak olan silindirik parça toplamda 224 elemana, 1374 düğüm noktasına ayrılmıştır. Şekil 12’de görüleceği üzere, yüzde 86 eleman kalitesi ve 1.64 en boy oranı elde edilmiştir. Bu değerler parçanın sonlu elemanlar ağ yapısı için uygun değerlerdir.

Sınır, Başlangıç ve Yükleme Koşullarının Belirtilmesi

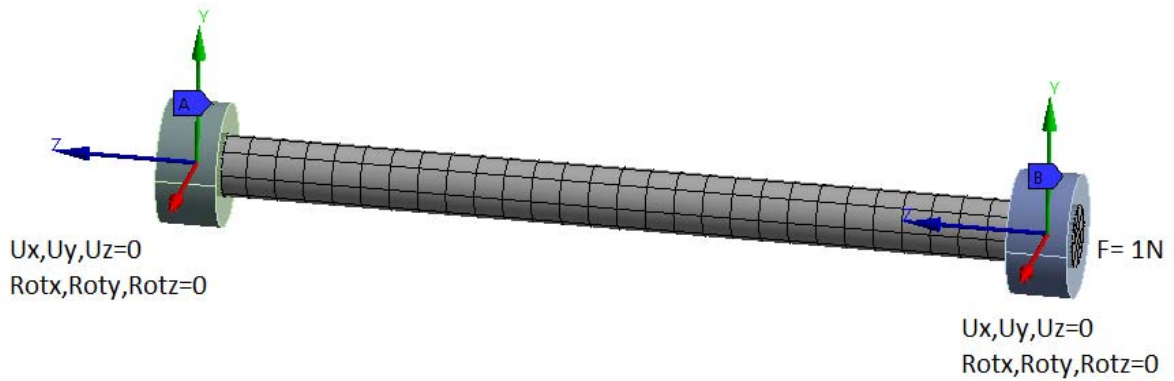
Analizde kullanılacak olan mesnetler, kritik burkulma yükü ve burkulma mod sayısı, bu kısım altında anlatılacaktır. Tez kapsamında farklı malzemelerin kritik burkulma yük değerine etkisini incelemenin yanı sıra, farklı mesnet kullanımının kritik burkulma yük değerlerine etkisi de araştırılacaktır. Bu kapsamda ilk olarak mafsalsal-mafsalsal mesnetleme durumu için sınır şartı değerleri ve kritik burkulma yük değeri sonlu elemanlar yazılımına tanıtılacaktır. Silindirik milin her iki ucuna da X ve Y global koordinatlarda deplasman alamayacak ($U_x, U_y = 0$) şekilde sınırlama konulmuştur. Z yönü, burkulma kuvvetinin uygulanacağı yön olduğu için serbest bırakılmıştır. Ayrıca mafsalsal mesnet kullanıldığı için tüm global koordinatlardaki rotasyonlar serbest bırakılmıştır. Kritik burkulma yükü, silindirik milin tam eş merkezine dik olacak şekilde bası yönünde uygulanmıştır. Yük değeri olarak, birim kuvvet değeri sisteme girilmiştir. Birim kuvvet kullanılmasının sebebi, kritik burkulma yük değerinin, yük çarpanı kullanarak sonlu elemanlar programının hesaplamasıdır. Bir başka deyişle herhangi bir yük değeri sisteme girilirse, program o yük değeri kadar kritik burkulma yükünü azaltmaktadır. Bu sebeple kritik burkulma yük değerini direk alabilmek için, birim kuvvet kullanılmıştır. Yükün ve mesnetlerin milin parçasında uygulandığı nokta Şekil 13'te gösterilmektedir.



Şekil 13. Mafsalsal-mafsalsal sınır şartlarının sonlu elemanlar programında uygulanması.

Bir diğer sınır şartı problemi ise ankastre-mafsalsal mesnettir. Ankastre mesnetin mafsalsal mesnete göre farklılığı, tüm rotasyonlarda deplasmanı kapatmasıdır. Ankastre mesnet sisteme, Şekil 13'te gösterilen görselde yükün uygulandığı nokta değil, diğer tarafta üç global koordinatta deplasman değerlerini kapatıp, ayrıca rotasyon değerleri de sınırlandırılarak verilmiştir ($U_x, U_y, U_z = 0, Rot_x, Rot_y, Rot_z = 0$). En son sınır şartı, ankastre-ankastre sınır şartıdır. Bu sınır şartında ortaya çıkan en büyük sorun, burkulma yükünün uygulandığı yönde ankastre mesnedin sınırlaması olmasıdır. Burkulma yükü z global koordinatında bası yönünde uygulanmaktadır.

Ancak, aynı noktaya verilen ankastre mesnetin z yönünde deplasmanı kapatan sınır şartı bulunmaktadır. Bu sebeple program, burkulma yük hesabını yapamamaktadır. Literatürde ilgili sınır şartının çözümü ile ilgili olarak yeterli bilgi bulunmamaktadır. Tezin temel amaçlarından bir tanesi de bu noktada literatüre katkı sağlamaktır. Ankastre-ankastre sınır şartı için sonlu elemanlarda mesnet uygulayarak çözüm alınamamıştır. Bu sebeple ankastre mesnet ile aynı görevi uygulayacak bir bağlantı elemanı olan silindirik milin her iki ucuna da uygulanmıştır. Bağlantı elemanları, mil parçasına silindirik bir eleman ile bağlanmıştır. Silindirik eleman ile mil parçası arasında tanımlanan bağlantı elemanının sınır şartları, ankastre mesnet ile aynıdır. Silindirik parçaların merkezleri, burkulma yükünün uygulanması için boş bırakılmıştır. Analiz sırasında kullanılan silindirik parçalar ve bağlantı elemanlarının sınır şartları Şekil 14'te gösterilmektedir.



Şekil 14. Ankastre-ankastre sınır şartlarının sonlu elemanlar programında uygulanması.

Analiz kısmının bu noktasında sadece sınır şartı ve burkulma yük değerlerinden bahsetmek yeterli değildir. Yapılan analizin lineer veya lineer olmaması, analizin bu kısmı ile ilgilidir. Analiz ayarları kısmında yer alan deformasyon sekmesi, yapılmak istenen analiz türüne göre belirlenmelidir. Sonlu elemanlar programında küçük deformasyonların modellendiği, kalıcı deformasyonların görülmediği lineer bölge için küçük deformasyon tanımlanması gerekmektedir. Bunun dışında hasarların modellendiği ve kalıcı deformasyonların model üzerinde görüldüğü lineer olmayan bölge için ise, büyük deformasyon tanımlanması gerekmektedir. Bu çalışma kapsamında lineer burkulma analizi yapıldığı için, kalıcı deformasyonların yer almadığı küçük deformasyon modeli sonlu elemanlar programına tanıtılmıştır.

Tez çalışması kapsamında yapısal analizin yanı sıra modal analiz ve harmonik analiz de sonlu elemanlar yaklaşımında yürütülecektir. Modal analiz ile kritik burkulma yüküne karşılık gelen doğal frekans değerleri, ilk altı mod yaklaşımı için hesaplanacaktır. Mod ifadesi her bir doğal frekans değerine karşılık, parça üzerinde meydana gelen deformasyonu tanımlamaktadır. Modal

analizin yürütülmesinde, yapısal analizde uygulanan sınır şartlarının aynısı kullanılmıştır. Yük olarak yapısal analizde hesaplanan burkulma yükü kullanılmıştır. Modal analiz sadece belirlenen sınır şartları ve yükleme koşulunda parça üzerinde meydana gelen doğal frekans değerlerini belirlediği için, yapısal analizde kullandığımız sınır şartı ve hesaplanan burkulma yükü, modal analiz için yeterlidir. Bu noktada belirtmek gerekir ki, yapısal analizde farklı mesnetler kullanarak belirlediğimiz sınır şartları, modal analizde serbestlik derecesini belirlemektedir.

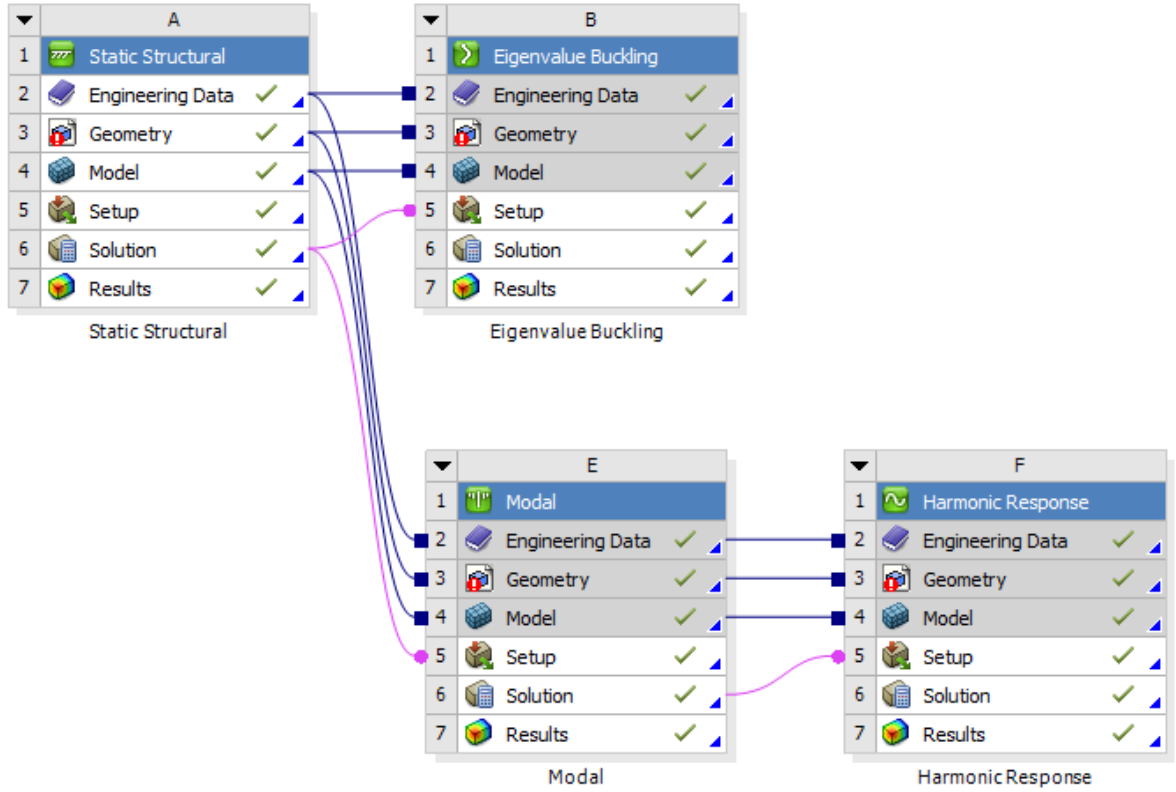
Harmonik analiz, modal analiz ile belirlenen ilk altı moda karşılık gelen doğal frekans değerlerinin oluşturduğu en yüksek genlik değerini belirlemektedir. En yüksek genlik değerine sahip olan doğal frekans değeri, burkulma yükü ve belirlenen sınır şartları altında silindirik milin eşik doğal frekans değerini oluşturacaktır. Bu değer, rezonans yaklaşımında kullanılacak bir değer olduğu için, eşik doğal frekans değeri olarak tanımlanmaktadır. Harmonik analizin sonlu elemanlar uygulamasında ilk olarak bir frekans bant aralığı tanımlanması gerekmektedir. Bu kapsamda ilgili frekans bant aralığı modal analizde hesaplanan altı modun oluşturduğu doğal frekans bant aralığı seçilmektedir. Ayrıca, harmonik analizin iki farklı çözüm yöntemi bulunmaktadır. Bunlar, mod süperpozisyon yöntemi ile tam metot yöntemidir. Tez kapsamında yürütülen harmonik analizlerde, mod süperpozisyon yöntemi kullanılacaktır. Bunun temel sebebi, yöntem içerisinde yer alan kümeleme analizi (*cluster*) ile çok fazla sayıda veri ile genlik değerinin belirlenebilmesidir. Son olarak, gerek modal analizde gerekse de harmonik analizde herhangi bir sönüm elemanı kullanılmayacaktır. Bu çalışma kapsamında çalışan titreşim çeşidi, sönümü zorlanmış titreşim olarak değerlendirilebilir.

Çözüm

Analiz sırasında sırasıyla geometrinin oluşturulması, malzeme atamasının yapılması, uygun ağ modelinin oluşturulması, sınır şartları ve yükleme koşullarının verilmesinin ardından, çözüm kısmına geçilmiştir. Çözüm kısmı, sonlu elemanlar yönteminin teorik kısmında anlatılan matris yöntemi uygulanarak gerçekleştirilmiştir. Sonlu elemanların çözüm kısmında, iki farklı çözüm yöntemi uygulanmaktadır. Lineer problemler için matris yöntemleri esas olmak koşuluyla direk çözüm yöntemi kullanılmaktadır. Lineer olmayan yöntemler için ise, farklı iterasyon yöntemleri kullanılmaktadır. Çözüm kısmında, aynı zamanda problemin en uygun çözümü için gerekli olan toplam zaman değeri de belirlenmektedir.

Çözüm kısmında ilk olarak uygulan, sınır şartları ve malzeme türüne göre belirlenecek olan kritik burkulma yük değerinin belirlenmesidir. Çözüm, iki analiz birlikte yürütülerek

gerçekleştirilmiştir. Sınır şartları yapısal analiz kısmından programa tanıtılmıştır. Bununla birlikte, benzer sınır şartlarının burkulma analizi için de geçerli olabilmesi adına her iki analizde çözüm adından birbirine bağlanmıştır. Ayrıca bu iki analize, sırasıyla modal ve harmonik analizler de bağlanmıştır. Böylelikle kritik burkulma yük değerine karşılık gelen doğal frekans değerleri ve bu frekans değerlerine karşılık gelen genlik değerleri belirlenecektir. Sonlu elemanlar programı üzerinden bağlanan dört analizin program görüntüsü, Şekil 15'te gösterilmektedir.



Şekil 15. Dört farklı analizin sonlu elemanlar programı çözüm adımı.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

Araştırma Bulguları

Tez çalışmasının bu bölümünde, teorik ve sonlu elemanlar yaklaşımı sonunda elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak, tartışılması yapılacaktır. İlk olarak farklı malzeme ve sınır şartları altındaki silindirik milin, kritik burkulma yük değeri teorik olarak hesaplanacaktır. Hesaplanan değerler aynı sınır ve yük koşulları altında yürütülen sonlu elemanlar analizi sonuçları ile kıyaslanarak, sonlu elemanlar programında yürütülen modelin doğrulanması yapılacaktır. Doğrulan model üzerinden sırasıyla önce modal analiz, arkasından harmonik analiz yürütülecektir. Modal analiz ile kritik burkulma yüküne karşılık gelecek doğal frekanslar belirlenecek, harmonik analiz ile de bu doğal frekansların oluşturduğu en yüksek genlik değerleri belirlenecektir.

Kritik Burkulma Yüklerinin Belirlenerek Sonlu Elemanlar Modelinin Doğrulanması

Çalışmanın ilk kısmında alüminyum malzemeden yapılmış silindirik milin mafsalsal-mafsalsal, mafsalsal-ankastre ve ankastre-ankastre sınır şartları altındaki kritik burkulma yük değerleri sırasıyla, Denklem 5-7 kullanılarak belirlenmiştir. Ancak, önce yapılan burkulma analizinin Euler lineer burkulma teoremine uygunluğu, alüminyum malzeme ve tüm sınır şartları için Denklem 8 kullanılarak kontrol edilmiştir. Tablo 2’de alüminyum malzemeden yapılmış milin, üç farklı sınır şartı içinde Euler lineer burkulma teoremini sağladığı gözlemlenmiştir. Burada belirtilmelidir ki eş değer burkulma uzunluğu, mafsalsal-mafsalsal bağlantı için çubuk boyuna, ankastre-mafsalsal bağlantı için çubuk boyunun 0,7 katına ve son olarak ankastre-ankastre bağlantı için ise çubuk boyunun 0,5 katına eşittir. Tablo 2’de yer alan değerler, buna göre belirlenmiştir. Alüminyum malzemenin mekanik özellikleri ise Tablo 1’den alınmıştır.

Tablo 2. Alüminyum Silindirik Milin Farklı Sınır Şartları Altında Euler Teoremine Uygunluğu

Sınır şartı	$Le/r_{\min}$	$\sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_y}}$	Euler lineer burkulma şartı
Mafsalsal-Mafsalsal	104	49,65	Sağlıyor
Ankastre-Mafsalsal	72,8	49,65	Sağlıyor
Ankastre Ankastre	52	49,65	Sağlıyor

Euler lineer burkulma şartı sağlandıktan sonra, alüminyum milin üç farklı sınır şartı için kritik burkulma yük değerleri hesaplanmıştır. Denklem 5 ve 7 kullanılarak burkulma yük değeri önce teorik olarak hesaplanmış, ardından sonlu elemanlar programı kullanılarak aynı sınır şartları

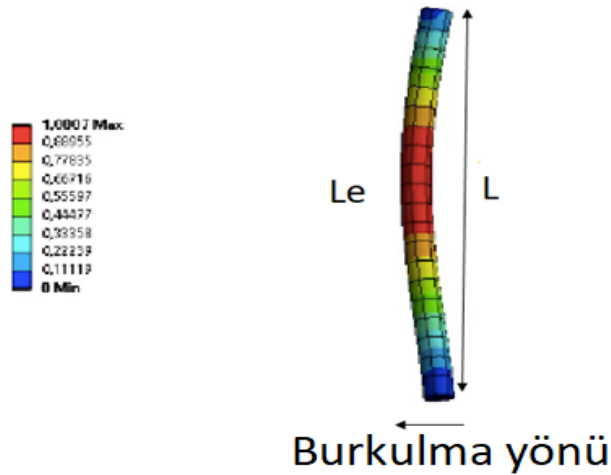
için kritik burkulma yük değerleri hesaplanmıştır. Tablo 3'te teorik olarak hesaplanan kritik burkulma yük değeri ile sonlu elemanlar programından hesaplanan yük değeri karşılaştırılması yer almaktadır. Aynı zamanda iki değer arasındaki hata payı da tabloda yer almaktadır.

Tablo 3. *Alüminyum Silindirik Milin Farklı Sınır Şartları Altında Kritik Burkulma Yüklerinin Kıyaslanması*

Sınır şartı	Teorik (N)	SEY (N)	% Hata
Mafsalsal-Mafsalsal	801,5	791	1,31
Ankastre-Mafsalsal	1635	1589	2,83
Ankastre Ankastre	3206	3155	1,59

Tablo 3'te açıkça görüldüğü gibi teorik sonuçlar ile sonlu elemanlar analizi sonuçları oldukça yakındır. Bu durum, sonlu elemanlar programı kullanılarak oluşturulan modelin doğrulanması anlamına gelmektedir.

Sonlu elemanlar yaklaşımı ile belirlenen kritik burkulma yüklerinin teorik sonucu doğrulamasının yanında, yüke karşılık gelen burkulma deformasyonun da teorik yaklaşımda belirtilen deformasyonu doğrulaması beklenmektedir. Bu sebeple sonlu elemanlar programında hesaplanan kritik burkulma yük değerlerine karşılık gelen burkulma deformasyonları, her bir sınır şartı için ayrı ayrı incelenmiştir. İlk olarak mafsalsal-mafsalsal sınır şartı için elde edilen burkulma deformasyon görüntüsü Şekil 16'da gösterilmiştir.

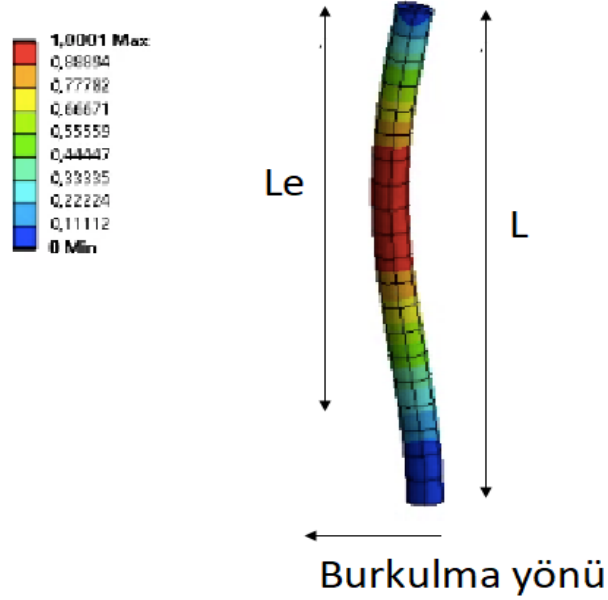


Şekil 16. Mafsalsal-mafsalsal bağlı silindirik milin SEY burkulma deformasyonu.

Sonlu elemanlar yöntemi sonunda elde edilen burkulma şekil değişiminde de görüldüğü üzere maksimum deformasyon, milin orta noktasında meydana gelirken, mesnetlerin olduğu noktada ise deformasyon bulunmamaktadır. Bununla birlikte mafsalsal-mafsalsal bağlantıda mesnete yakın noktalarda deformasyon olması, mafsalsal mesnetlerin dönmeye izin vermesinden

kaynaklanmaktadır. Ayrıca burada, milin boyu uzun olduğu için deformasyonların net görülebilmesi adına programda ölçeklendirildiği belirtilmelidir.

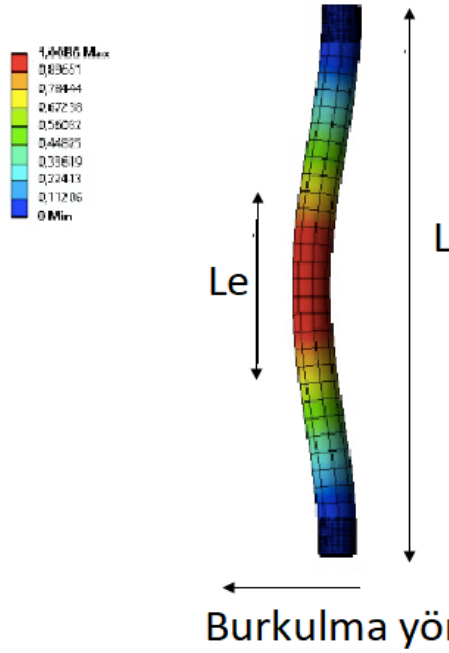
Bir diğer sınır şartı, ankastre-mafsal sınır şartıdır. İlgili sınır şartının sonlu elemanlar programından elde edilen burkulma deformasyonu Şekil 17’de gösterilmektedir.



Şekil 17. Ankastre-mafsal bağlı silindirik milin SEY burkulma deformasyonu.

Ankastre-mafsal sınır şartına sahip silindirik milde, teorik yaklaşımda da olduğu gibi maksimum deformasyon, mafsal mesnetin olduğu noktaya yakın yerde meydana gelmiştir. Ayrıca bu sınır şartında da mesnetin olduğu noktalarda deformasyon olmamıştır. Bu sınır şartında eş değer burkulma deformasyonu toplam uzunluğun 0,7 katına eşittir. Bu durum Şekil 17’de açıkça görülmektedir.

Son sınır şartı ankastre-ankastre mesnetin uygulandığı sınır şartıdır. İlgili sınır şartının sonlu elemanlar programında uygulanması ile elde edilen burkulma deformasyonu Şekil 18’de gösterilmektedir.



Şekil 18. Ankastre-ankastre bağlı silindirik milin SEY burkulma deformasyonu.

Ankastre-ankastre mesnet ile sabitlenen milde meydana gelen deformasyon, teorik yaklaşımda yer alan deformasyona çok benzer olarak elde edilmiştir. Maksimum burkulma deformasyonu milin tam orta noktasında meydana gelirken, diğer sınır şartlarında olduğu gibi mesnetin uygulandığı noktalarda deformasyon meydana gelmemiştir. Bu sınır şartında burkulma boyu, toplam milin boyunun 0,5 katına eşittir.

Teorik ve sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen kritik burkulma yük değerlerinin birbirini yakınsaması ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen tüm sınır şartlarında ki burkulma deformasyonlarının teorik yaklaşıma benzer olması, sonlu elemanlar programında kurulan modelin doğruluğunu göstermektedir. Doğrulan model üzerinden önce modal analiz ve arkasından harmonik analiz uygulanarak, önce kritik burkulma yük değerine karşılık gelen doğal frekans değerleri, ardından ilgili doğal frekanslara karşılık gelen genlik değerleri belirlenmiştir.

Modal Analiz ile Doğal Frekans Değerlerinin Belirlenmesi

Sonlu elemanlar yöntemi ile kritik burkulma yük değerinin belirlenmesinde ilk olarak modal analiz uygulanmıştır. Modal analiz, Ansys sonlu elemanlar programında Euler tipi geometrilere uygulanan bir titreşim analizidir. Burkulma analizinin Euler tipi silindirik mil üzerinde uygulanmış olmasından dolayı, modal analizinde Euler teoreminin uygulanması analiz bütünlüğü açısından son derece önemlidir. Bu sebeple, kritik burkulma yük değerine karşılık gelen doğal frekans değerlerinin belirlenmesinden önce, sonlu elemanlar yönteminde titreşim hesabının

teori ile uygunluğu test edilmiştir. Modal analizin Euler teoremi kullanılarak ankastre-serbest uç sınır şartı için titreşim değeri:

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + C^2 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = 0, c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (41)$$

şeklinde hesaplanmaktadır (Dwivedi ,& Mahajan, 2018). Ayrılabilir diferansiyel denklem, ilgili sınır şartı yaklaşımları ile çözülürse doğal frekans değeri:

$$\omega_n = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad f_n = \frac{1}{2\pi} \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (42)$$

şeklinde elde edilir (Dwivedi ,& Mahajan, 2018). Burada, β çubuğun uzunluğu ile alakalı bir sabit değerdir. İlgili sabit değeri, Denklem 42’de yerine yazılırsa titreşim analizi için birinci modda meydana gelen doğal frekans değeri

$$f_{n1} = \frac{1}{2\pi} \left(1.875^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} \right) \quad (43)$$

şeklinde elde edilir (Dwivedi ,& Mahajan, 2018).

Alüminyum silindirik milin denklem 43’te yer alan mekanik ve fiziksel özellik değerleri, Tablo 1’den alınmıştır. Milin uzunluk ve çap değerlerinden kesit alanı ve alan atalet momenti de hesaplanmıştır. Sonlu elemanlar analizinde aynı sınır şartları ile modal analiz yürütülerek birinci moda karşılık gelen doğal frekans değeri belirlenmiştir. Tablo 4’te teorik ve sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen doğal frekans değerlerinin kıyaslanması yer almaktadır.

Tablo 4. *Alüminyum Silindirik Titreşim Analizinin Euler Yaklaşımına Uygunluğu*

Sınır şartı	Teorik (Hz)	SEY (Hz)	% Hata
Ankastre- Serbest	18,01	18,088	0,066

Tablo 4’te görüldüğü gibi sonlu elemanlar programında yapılan titreşim analizinin, Euler teoremine uygunluğu bulunmaktadır. Doğrulamanın ardından kritik burkulma yük değerine karşılık gelen doğal frekans değerleri ilk 6 mod için sonlu elemanlar programında farklı sınır şartları için ayrı ayrı hesaplanmıştır. Tablo 5 ve Tablo 7’de hesaplanan doğal frekans değerleri görülmektedir.

Tablo 5. *Mafsal-Mafsal Sınır Şartındaki Kritik Burkulma Yükünün Sebep Olduğu Doğal Frekans Değeri*

Titreşim mod değeri	Burkulma yükü (N)	Doğal frekans (Hz)
1	801,5	12,66
2	801,5	12,72
3	801,5	114,11
4	801,5	114,64
5	801,5	316,67
6	801,5	318,11

Tablo 6. *Ankastre-Mafsal Sınır Şartındaki Kritik Burkulma Yükünün Sebep Olduğu Doğal Frekans Değeri*

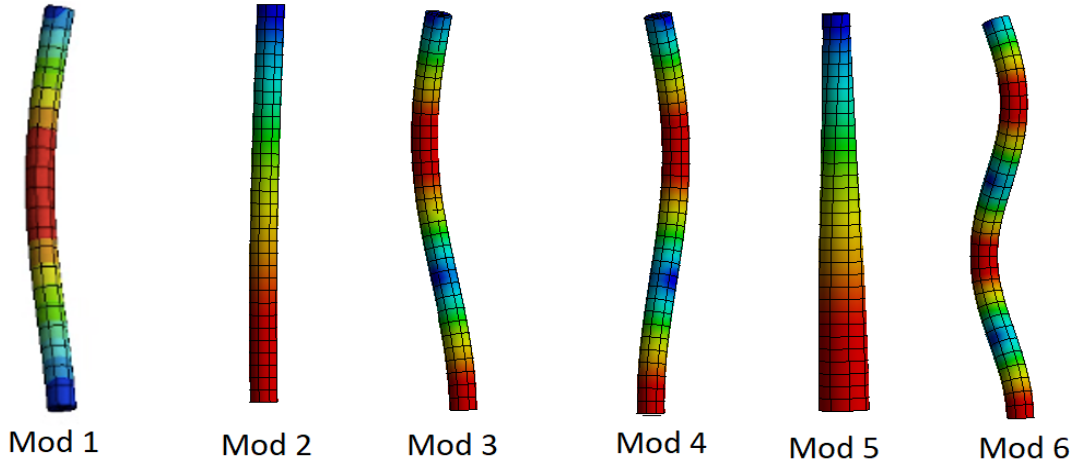
Titreşim mod değeri	Burkulma yükü (N)	Doğal frekans (Hz)
1	1635	79,42
2	1635	79,85
3	1635	257,11
4	1635	258,51
5	1635	553,54
6	1635	538,45

Tablo 7. *Ankastre-Ankastre Sınır Şartındaki Kritik Burkulma Yükünün Sebep Olduğu Doğal Frekans Değeri*

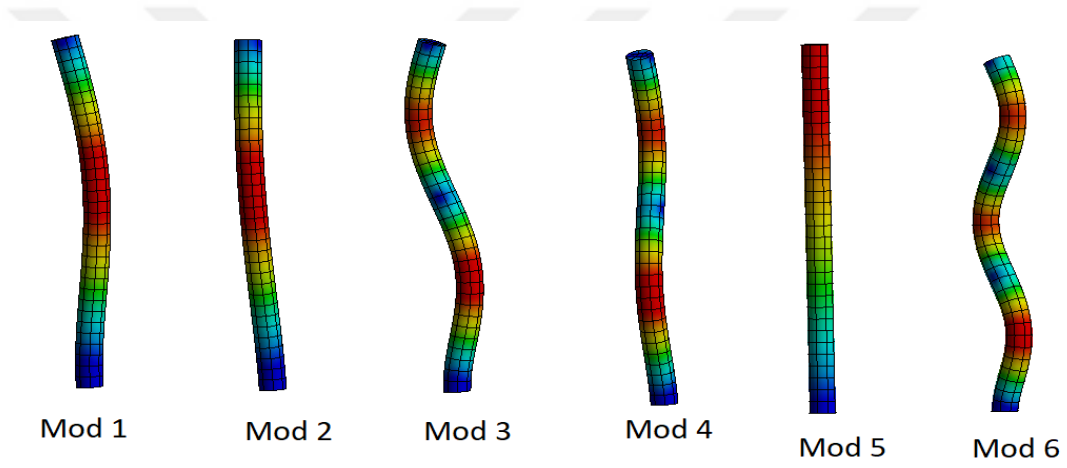
Titreşim mod değeri	Burkulma yükü (N)	Doğal frekans (Hz)
1	3206	121,85
2	3206	123,14
3	3206	344,21
4	3206	347,60
5	3206	692,10
6	3206	699,66

Tablo 5 ve Tablo 7’de görüldüğü gibi, kritik burkulma yük değeri arttıkça, doğal frekans değeri de artmaktadır. Doğal frekans değişimi, sadece kritik burkulma yük değişiminden kaynaklanmamaktadır. Aynı zamanda farklı sınır şartları, serbestlik derecelerini değiştirdiği için doğal frekans değerlerini değiştirmektedir. Yapılan analizde en yüksek doğal frekans değerleri tüm mod değerleri için ankastre-ankastre sınır şartından elde edilmiştir. Bunun yanı sıra en düşük doğal frekans değeri, mafsal-mafsal sınır şartı için elde edilmiştir. Tüm sınır şartlarının üç ve dördüncü mod değerlerine karşılık gelen doğal frekans değerleri, birbirine oldukça yakın hesaplanmıştır.

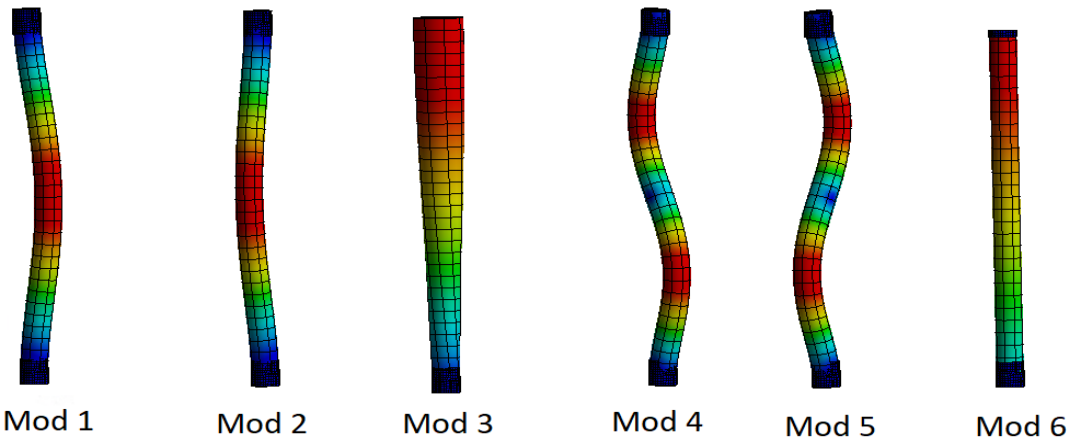
Modal analiz sonunda farklı sınır şartları altındaki silindir milin doğal frekans değerleri hesaplanmıştır. Sonlu elemanlar programında ilgili doğal frekansların sebep olduğu deformasyonlar da belirlenebilmektedir. Farklı sınır şartları için, altı modda meydana gelen deformasyonlar Şekil 19, Şekil 20 ve Şekil 21’de gösterilmektedir.



Şekil 19. Mafsal-mafsal bağlı silindirik milin SEY mod deformasyonları.



Şekil 20. Ankastre-mafsal bağlı silindirik milin SEY mod deformasyonları.



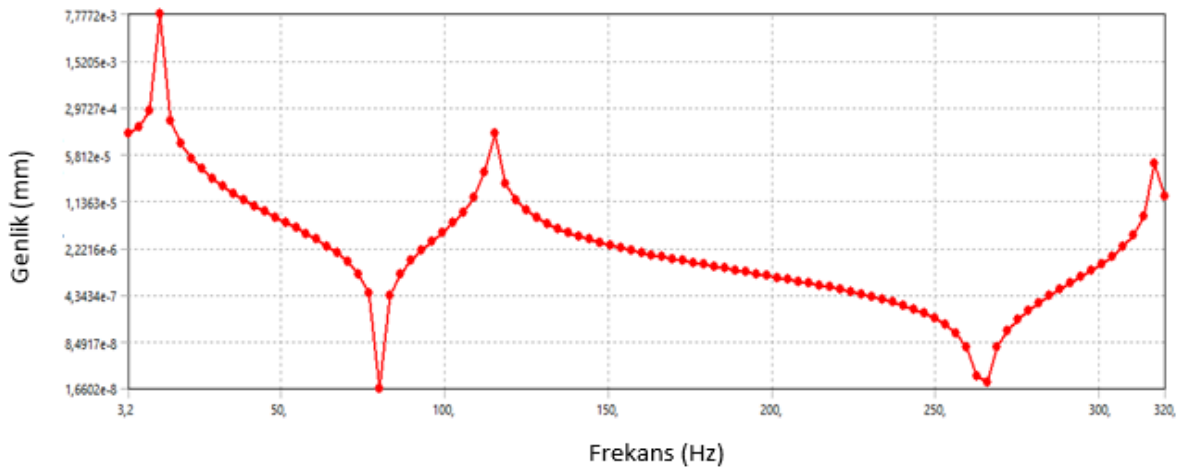
Şekil 21. Ankastre-ankastre bağlı silindirik milin SEY mod deformasyonları.

Şekil 19, Şekil 20 ve Şekil 21 incelendiğinde, doğal frekans değişiminin silindirik milin mod deformasyonlarını da değiştirdiği gözlemlenmiştir. Ayrıca tüm sınır şartlarında silindirik

milin ilk mod deformasyonları, burkulma deformasyonları olarak ortaya çıkmaktadır. Bu durum, titreşime sebep olan kuvvetin kritik burkulma yük değeri olmasından kaynaklanmaktadır.

Harmonik Analiz ile Doğal Frekanslara Karşılık Gelen Genlik Belirlenmesi

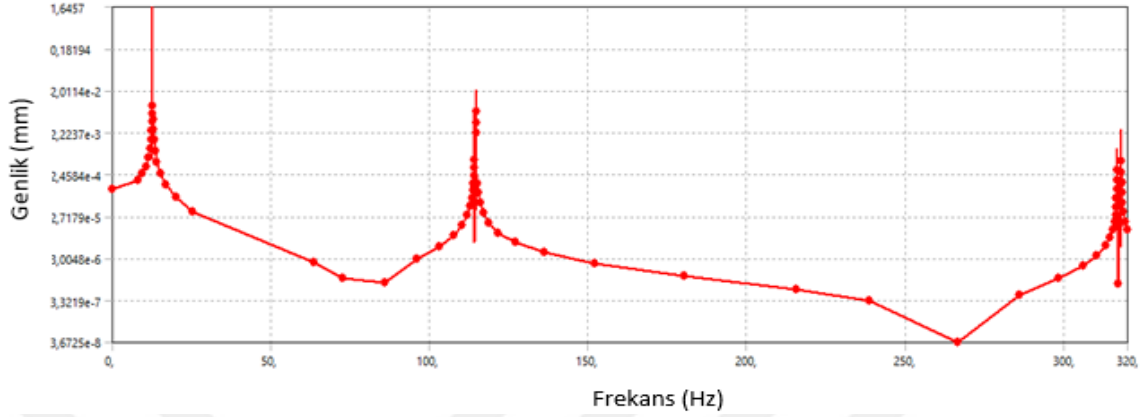
Modal analiz sonrası elde edilen doğal frekans değerlerine karşılık gelen genlik değerleri, harmonik analiz ile belirlenmiştir. Harmonik analiz, sonlu elemanlar programında belirli bir frekans bant aralığında çalışmaktadır. Frekans bant aralığı, modal analiz sonunda belirlenen frekans değerleri göz önünde bulundurularak belirlenmektedir. Bant aralığında maksimum değer, modal analiz ile belirlenen maksimum frekans değerinin en fazla 1,5 katı seçilebilmektedir. Bununla birlikte harmonik analiz, sonlu elemanlar programında modal analiz ile çözüm üzerinden birleştirilerek çalıştırılmıştır. Bunun sebebi, modal analiz de kullanılan sınır şartlarının harmonik analiz içinde geçerli olmasından kaynaklanmaktadır. Böylelikle her iki analizin de serbestlik dereceleri aynı olmuştur. İlk olarak, mafsalsal-mafsalsal sınır şartına ait doğal frekans değerlerine karşılık gelen genlik değerleri belirlenmiştir.



Şekil 22. Mafsalsal-mafsalsal bağlı silindirik milin frekans genlik diyagramı.

Harmonik analiz sonunda mafsalsal-mafsalsal sınır şartı için elde edilen frekans genlik grafiği Şekil 22'de gösterilmektedir. Şekil 22'de görüleceği üzere en yüksek genlik değeri, ilk moda karşılık gelen frekans değeri olan 13,25 Hz olarak hesaplanmıştır. Ancak modal analiz sonunda bu değer 12,66 Hz olarak belirlenmiştir. İki analiz arasında meydana gelen bu fark, maksimum genliğin belirlendiği frekans değerlerinin veri sayısının az oluşundan kaynaklanmaktadır. Şekilde de görüleceği üzere maksimum frekans pik üçgeni üç tane veri ile oluşturulmuştur. Dolayısıyla buradaki verilerin artırılması gerekmektedir. Harmonik analizin çözüm yöntemlerinden mod süperpozisyon yöntemi içerisinde yer alan kümeleme analizi ile pik değerlerini oluşturan veri

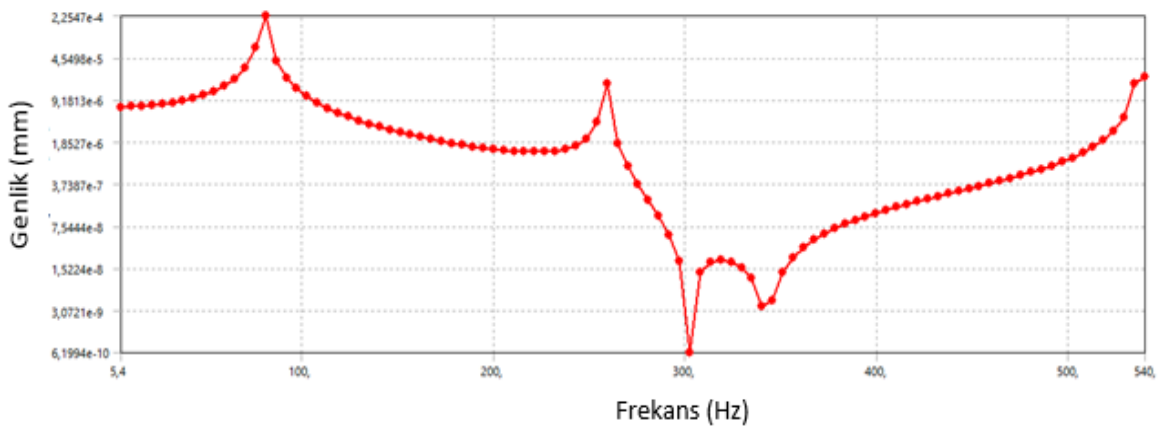
sayısı, maksimum sayıda arttırılmıştır. Kümeleme analizi sonrası elde edilen frekans genlik grafiği Şekil 23’te gösterilmiştir.



Şekil 23. Mafsal-mafsal bağlı silindirik milin kümeleme analizi sonrası frekans genlik diyagramı.

Kümeleme analizi sonrasında elde edilen genlik frekans grafiği incelendiğinde, en yüksek genlik değerinin ilk modda ortaya çıkan doğal frekans değerine ait olduğu belirlenmiştir. Mafsal-mafsal sınır şartı altındaki alüminyum silindir milin burkulma yükünün sebep olduğu doğal frekans değeri 12,66 Hz olarak belirlenmiştir.

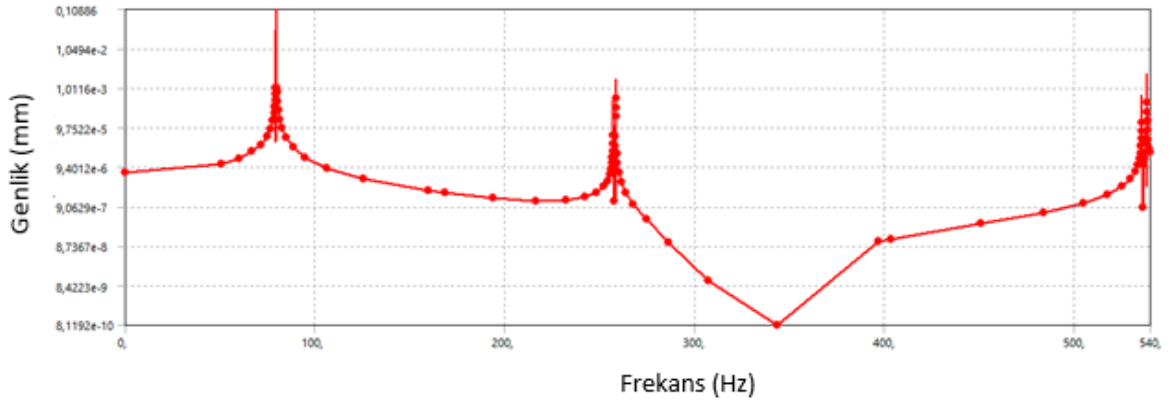
Mafsal-mafsal sınır şartı için uygulanan sonlu eleman adımları, ankastre-mafsal içinde uygulanmıştır. İlk olarak kümeleme analizi olmadan harmonik analiz, modal analiz sonunda elde edilen maksimum doğal frekans referans alınarak çalıştırılmıştır. Analiz sonunda frekans genlik diyagramı, Şekil 24’te gösterildiği gibi elde edilmiştir.



Şekil 24. Ankastre-mafsal bağlı silindirik milin frekans-genlik diyagramı.

Şekil 24’te görüleceği gibi maksimum genlik 0-100 Hz arasında meydana gelmiştir. Maksimum genliğe yakın doğal frekans değeri 80,86 Hz olduğu belirlenmiştir. Bu değer, ankastre-mafsal sınır şartı için belirlenen ikinci mod da ki doğal frekans değerine yakındır. Ancak daha kesin

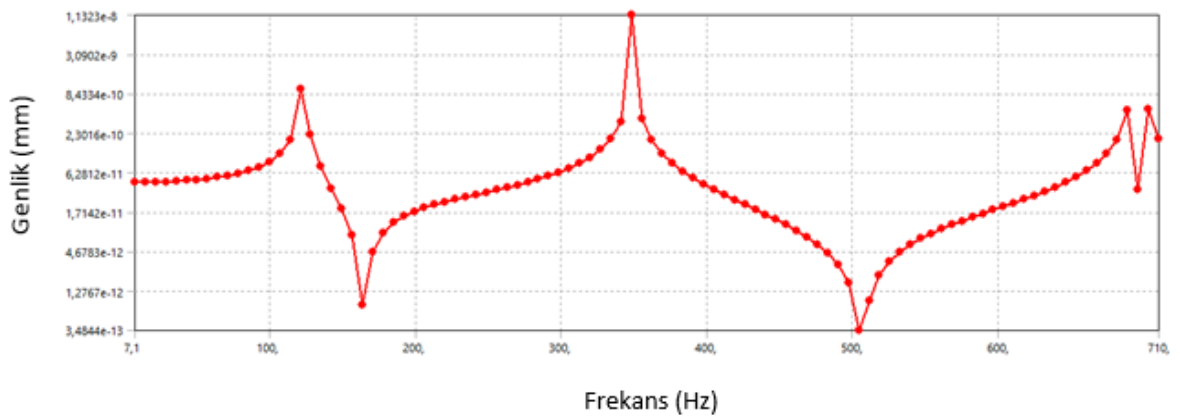
sonuç alabilmek adına, ilgili sınır şartı için de kümeleme analizi yürütülmüştür. Kümeleme analizinde maksimum veri 20 olarak belirlenmiş ve çözüm yöntemi olarak mod süperpozisyon seçilmiştir. Kümeleme sonrası elde edilen frekans genlik diyagramı, Şekil 25'te gösterilmiştir.



Şekil 25. Ankastre mafsallı silindirik mil kümeleme analiz sonrası frekans genlik diyagramı.

Kümeleme analizi sonrasında en yüksek genlik değerine karşılık gelen frekans değeri, 79,85 Hz olmuştur. Bu değer, modal analiz ile belirlenen ikinci moda karşılık gelen doğal frekans değeridir.

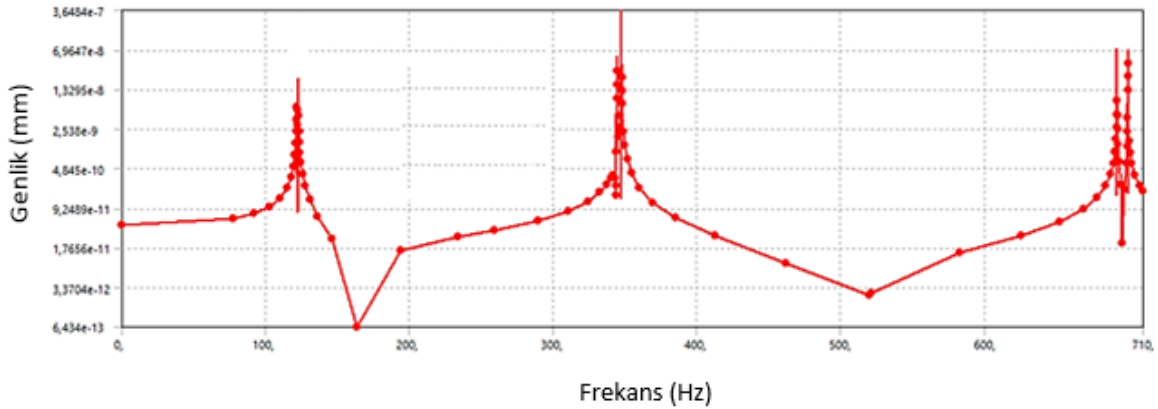
Son olarak, ankastre-ankastre bağlı silindirik milin frekans genlik değerleri belirlenmiştir. Yöntem olarak diğer iki sınır şartı içinde izlenen yöntem, burada da aynı şekilde uygulanmıştır. Harmonik analizde maksimum frekans bant değeri, modal analiz ile elde edilen maksimum doğal frekans değeri göz önüne alınarak belirlenmiştir. Harmonik analiz sonrası ankastre-ankastre sınır şartı için elde edilen doğal frekans genlik diyagramı Şekil 26'da gösterilmektedir.



Şekil 26. Ankastre-ankastre bağlı silindirik milin frekans-genlik diyagramı.

Şekil 26'da görüldüğü gibi, maksimum genliğe karşılık gelen doğal frekans değeri 350 Hz olarak belirlenmiştir. Bu değer modal analiz ile hesaplanan doğal frekans değerlerine yakın olmakla beraber tam karşılığını sağlamamaktadır. Bu sebeple daha önceki sınır şartları için

uygulanen kümeleme analizi, ankastre-ankastre sınır şartı içinde uygulanmıştır. Kümeleme analizinin uygulama adımları, diğer sınır şartlarındakine benzer olarak uygulanmıştır. Kümeleme analizi sonrası elde edilen frekans genlik diyagramları Şekil 27’de gösterilmektedir.



Şekil 27. Ankastre-ankastre bağlı silindirik mil kümeleme analizi sonrası frekans genlik diyagramı.

Kümeleme analizi sonrasında sonlu elemanlar programından elde edilen frekans-genlik diyagramı incelendiğinde, maksimum genliğe karşılık gelen doğal frekans değerinin 347,60 Hz olduğu gözlemlenmiştir. Bu değer modal analiz sonrası elde edilen 4. moda karşılık gelen doğal frekans değeridir. Bu sebeple ankastre-ankastre bağlı silindirik milin kritik burkulma yükünün sebep olduğu doğal frekans değeri, 347,60 Hz’dir.

Harmonik analiz ve ardından yürütülen kümeleme analizleri sonrasında, üç farklı sınır şartına ait burkulma yüklerinin sebep oldukları doğal frekans-genlik grafikleri belirlenmiştir. İlgili grafiklerden belirlenen frekans ve genlik değerleri Tablo 8’de gösterilmektedir.

Tablo 8. Farklı Sınır Şartlarına Ait Burkulma Yüklerinin Oluşturduğu Doğal Frekans ve Genlik Değerleri

Sınır şartı	Burkulma yükü (N)	Doğal frekans (Hz)	Genlik (mm)
Mafsal-Mafsals	801.5	12,66	1,6457
Ankastre-Mafsals	1635	79,85	0,1088
Ankastre-Ankastre	3206	347,60	3,64x10 ⁻⁷

Tablo 8’de, sınır şartı değişikçe burkulma yüklerinin yanı sıra doğal frekans ve genlik değerlerinin de değiştiği gözlemlenmiştir. En yüksek doğal frekans değeri ankastre-ankastre sınır şartından elde edilirken, en düşük doğal frekans değeri mafsals-mafsals sınır şartından elde edilmiştir. Bununla birlikte, en yüksek genlik değeri mafsals-mafsals sınır şartından, en küçük genlik değeri ise ankastre-ankastre sınır şartından elde edilmiştir. Frekans ve genlik değişimlerinin tek

sebebi, uygulanan serbestlik derecelerinden kaynaklanmaktadır. Mafsal-mafsal sınır şartında serbestlik derecesi diğer iki sınır şartına göre daha yüksek olduğu için frekans değeri düşük, genlik değeri yüksek elde edilmiştir. Genlik değerinin yüksek olması, harmonik harekette meydana getireceği deplasman değerinin de yüksek olacağını göstermektedir. Bununla birlikte ankastre-ankastre sınır şartının serbestlik derecesi, diğer iki sınır şartına göre daha az olduğu için frekans değeri yüksek genlik değeri ise az olarak belirlenmiştir.

Burkulma yüklerinin sebep oldukları doğal frekans değerlerinin belirlenmesi, bu çalışmanın temel amaçlarından bir tanesidir. Bir parçanın kendi doğal frekansı ile tahrik edilmesi sonucunda, parçanın rezonansa gireceği teorik olarak bilinmektedir. Rezonans parça üzerinde sonsuz genlik oluşturduğu için, parçanın çok kısa zamanda kalıcı hasara uğramasına sebep olmaktadır. Bu sebeple yükleme koşulları altında parçaların doğal frekans değerlerinin belirlenmesi, son derece önemlidir. Bu çalışma ile sektörde sıklıkla kullanılan alüminyum milin farklı sınır şartları altında meydana gelen burkulma yüklerinin sebep oldukları doğal frekans değerleri belirlenmiştir. Belirlenen bu doğal frekans değerleri, parçanın rezonansa girebileceği eşik doğal frekans değerleridir.

Burkulma yükünün farklı sınır şartları altında doğal frekans değerlerinde meydana getirdiği değişikliklerin analitik yaklaşım ile irdelenmesi, önceki bölümlerde açıklanmıştır. Analitik yaklaşım içerisinde yer alan λ_1, λ_2 sabit değerleri, çalışma kapsamında hesaplanan kritik burkulma yükü ve burkulma yüküne karşılık gelen doğal frekans değerleri kullanılarak alüminyum mil için hesaplanmıştır. Böylelikle analitik yaklaşımda, kritik burkulma yükü ile doğal frekans arasında ilişki kuran ilgili sabitler, tüm sınır koşulları için ayrı ayrı hesaplanmıştır. Analitik yaklaşımda, burkulma yükünün sebep olduğu doğal frekans değerlerinin hesaplanmasında ilgili sabitler son derece önemlidir. Bu çalışmada doğrulanmış model üzerinden sonlu elemanlar yaklaşımı ile doğal frekans değerleri belirlenmiş ve teorik yaklaşım kullanılarak denklem sabitleri hesaplanmıştır. İlgili değerlerin belirlenmesinin literatüre katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Parçanın kütlesi, parçanın alan atalet momenti, elastisite modülü, boyu, kritik burkulma yükü ve bu yüke karşılık gelen doğal frekans değerleri hesaplanarak Denklem 22 içerisinde uygulanmıştır. Farklı sınır şartlarında kritik burkulma yükleri ve doğal frekans değerleri değiştiği için, sabit değerlerde her bir sınır şartı için farklılık göstermektedir. Tablo 9’da tüm sınır şartları için elde edilen λ_1, λ_2 sabit değerleri gösterilmektedir.

Tablo 9. *Tüm Sınır Şartları İçin Elde Edilen λ_1, λ_2 Sabit Değerler*

Sınır şartı	λ_1	λ_2
Mafsal-Mafsal	14,12	13,99
Ankastre-Mafsal	35,35	35,25
Ankastre-Ankastre	73,70	73,60

Tablo 9’da görülen λ_1, λ_2 sabitleri için en düşük değer, mafsal-mafsal bağlantısında elde edilirken, en yüksek değer ise Ankastre–Ankastre sınır şartından elde edilmiştir. Sabit değerlerde tüm sınır şartları için, elastisite modülü, atalet momenti, kütle ve uzunluk değerleri sabittir. Ancak, farklı sınır şartlarında kritik burkulma yükü ve bu yüke bağlı doğal frekans değerleri değişiklik gösterdiği için, değerler de farklı olarak hesaplanmıştır. En yüksek burkulma yükü ve doğal frekans değeri ankastre-ankastre sınır şartına ait olduğu için, en yüksek sabit değerlerde ilgili sınır şartından elde edilmiştir. Benzer durum mafsal-mafsal sınır şartı için de geçerlidir. En düşük burkulma yükü ve doğal frekans değeri mafsal-mafsal sınır şartına ait olduğu için, en düşük sabit değerler de ilgili sınır şartından elde edilmiştir.

BEŞİNCİ BÖLÜM

Sonuç

Bu çalışmada Euler tipi ince kesitli milin farklı sınır koşulları altındaki kritik burkulma yükü, analitik ve sonlu elemanlar analizi ile belirlenmiştir. Ayrıca, ilgili kritik burkulma yüklerinin etkilediği doğal frekanslar, harmonik hareket denklemleri kullanılarak sonlu elemanlar analizi ile belirlenmiştir. Analitik ve sonlu elemanlar yaklaşımında, Mafsal-mafsal, ankastre-mafsal ve ankastre-ankastre olmak üzere, üç farklı sınır koşulu kullanılmıştır. Özellikle sonlu elemanlar yaklaşımında ankastre-ankastre sınır koşulunda kritik burkulma yükü değerini belirlemek için, temas mekanizmaları kullanılmıştır. Bununla birlikte analitik yaklaşım içerisinde yer alan denklem sabitleri, çalışma kapsamında hesaplanan kritik burkulma yükü, burkulma yüküne karşılık gelen doğal frekans değerleri kullanılarak, alüminyum mil için hesaplanmıştır. Çalışma sonunda elde edilen sonuçlar şu şekilde ifade edilebilir:

- Alüminyum milin teoride yer alan formüller kullanılarak üç farklı sınır şartı içinde kritik burkulma yük değerleri hesaplanmıştır. Bu değerler sonlu elemanlar programında oluşturulan modelin aynı sınır şartları altındaki analizi sonucunda elde edilen kritik burkulma yük değerleri ile kıyaslanmıştır. Kıyaslama sonunda sonuçların birbirini doğruladığı görülmüştür. Doğrulan modelde en yüksek kritik burkulma yükü, ankastre-ankastre sınır şartından elde edilirken, en düşük kritik burkulma yükü de mafsal-mafsal sınır şartından elde edilmiştir. Sonlu elemanlar analiz sonuçları ile yapılan hata analizinde ise en düşük hata payı, mafsal-mafsal sınır şartından elde edilirken, en yüksek hata payı ankastre-mafsal sınır şartından elde edilmiştir.
- Hesaplanan kritik burkulma yüklerinin sebep olduğu doğal frekans değerleri, sonlu elemanlar programında yer alan modal ve harmonik analiz kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Kritik burkulma yükleri, Euler teoremine uygun olarak hesaplanmıştır. Bu sebeple doğal frekans değerlerinin belirlenmesinde de Euler yaklaşımı kullanılarak, model doğrulanmıştır. En düşük doğal frekans değeri, mafsal-mafsal sınır şartından en yüksek doğal frekans değeri ise ankastre-ankastre sınır şartından elde edilmiştir. Bunun temel sebebi, doğal frekans değerlerinin hem kritik burkulma yük değerlerinden etkilenmesi, hem de sınır şartlarının serbestlik derecesini değiştirmesidir. En düşük serbestlik derecesi ankastre-ankastre sınır şartında olmasına rağmen, en yüksek burkulma yükü ilgili sınır şartında olmasından dolayı en yüksek doğal frekans değeri, ilgili sınır şartından elde

edilmiştir. Aksine mafsal-mafsal sınır şartı, en yüksek serbestlik derecesine sahipken, kritik burkulma yükü diğer mesnetlere göre daha düşük olduğu için, doğal frekans değeri en düşük değer olarak hesaplanmıştır. Bu durumun, çalışma kapsamında çalışılan titreşimin zorlanmış titreşim olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir.

- Literatürde, burkulma yüklerinin sebep oldukları titreşim değerlerinin belirlenmesi ile ilgili sınırlı sayıda çalışma mevcuttur. Özellikle birçok sektörde sıklıkla kullanılan alüminyum millerin farklı sınır koşulları altında kritik burkulma yük değerlerinin sebep oldukları doğal frekans değerlerinin belirlenmesi ile ilgili herhangi bir çalışmaya rastlanılmamıştır. Bu durum, çalışmanın ana motivasyonunu oluşturmaktadır. Literatürde yer alan burkulma yükü ile doğal frekans değerlerinin belirlenmesinde kullanılan analitik yaklaşım, tez kapsamında alüminyum miline uygulanarak, analitik çözümde yer alan denklem sabitleri hesaplanmıştır. Denklem sabitlerinde (λ_1, λ_2) en düşük değer mafsal-mafsal bağlantısı için elde edilirken, en yüksek değer ise ankastre-ankastre sınır şartından elde edilmiştir. Sabit değerlerde tüm sınır şartları için elastisite modülü, atalet momenti, kütle ve uzunluk değerleri sabittir. Ancak farklı sınır şartlarında, kritik burkulma yükü ve bu yüke bağlı doğal frekans değerleri değişiklik gösterdiği için, değerler de farklı olarak hesaplanmıştır. En yüksek burkulma yükü ve doğal frekans değeri, ankastre-ankastre sınır şartına ait olduğu için en yüksek sabit değerlerde ilgili sınır şartından elde edilmiştir. Benzer durum mafsal-mafsal sınır şartı için de geçerlidir. En düşük burkulma yükü ve doğal frekans değeri mafsal-mafsal sınır şartına ait olduğu için en düşük sabit değerler de, ilgili sınır şartından elde edilmiştir. Hesaplanan bu sabit değerler ile tez kapsamında çalışılan alüminyum milin herhangi bir burkulma yüküne karşılık gelen doğal frekans değeri, analitik yaklaşım içinde yer alan formül ile hesaplanabilmektedir. Gerekli olan denklem sabitleri, çalışma kapsamında hesaplanmıştır.
- Bu çalışmaya, sektörde sıklıkla kullanılan alüminyum milin farklı sınır şartları altındaki kritik burkulma yük değerlerinin, teorik ve sonlu elemanlar yöntemi ile belirlenmesi amacıyla başlanmıştır. Belirlenen kritik burkulma yüklerinin, milin doğal frekans değerlerine etkisi de bu çalışma kapsamında irdelenmiştir. Ayrıca burkulma yükünün doğal frekans değerlerine etkisini içeren analitik yaklaşım da irdelenerek, ilgili mil için denklem sabitleri hesaplanmıştır. Çalışmanın ilerisinde teorik ve sonlu elemanlar alt yapısı oluşturulan alüminyum milin deneysel yaklaşım uygulanarak, hem kritik burkulma yük değerlerinin hem de doğal frekans değerlerinin belirlenmesi düşünülmektedir. Ayrıca

Çevresel faktörler, farklı malzemeler gibi parametrelerin etkileri de gelecekte yapılabilecek çalışma olarak belirlenmiştir.



KAYNAKÇA

- Ansys. (2022). Finite element software. Retrieved from <https://www.ansys.com/>
- Beer, F. P., Johnston, E. R., Dewolf, & J. T., Mazurek, D. F. (2012). *Mechanics of materials* (6. edition). NY: McGraw-Hill.
- Dattoma, V., Giannoccaro, N., Messina, A., & Nobile, R. (2009). Prediction of residual fatigue life of aluminium foam through natural frequencies and damping shift. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 32, 601-616. doi: 10.1111/j.1460-2695.2009.01367.x.
- Jin, T.L., Ha, N.S., & Goo, N.S.A. (2014). A study of the thermal buckling behavior of a circular aluminum plate using the digital image correlation technique and finite element analysis. *Thin Walled Structures*, 77, 187-197. doi: /dx.doi.org/10.1016/j.tws.2013.10.012
- Klimenda, F., & Soukup, J. (2017). Modal analysis of thin aluminium plate. *Procedia Engineering*, 177, 11-16. doi: 10.1016/j.proeng.2017.02.176
- Li, Z., Chen, Y., Zheng, J., & Sun, Q. (2020). Thermal-elastic buckling of the arch-shaped structures with FGP aluminum reinforced by composite graphene platelets. *Thin Walled Structures*, 157, 107142. doi.org/10.1016/j.tws.2020.107142
- Liang, Q. Q., Uy, B., & Liew, J.Y.R. (2007). Local buckling of steel plates in concrete-filled thin-walled steel tubular beam-columns. *Journal of Constructional Steel Research*, 63(3), 396-405. doi: 10.1016/j.jcsr.2006.05.004
- Liu, G. R., & Quek, S. S. (2003). *The finite element method: A practical course*. Oxford, England: Butterworth-Heinemann.
- Liu, M., Zhang, L., Wang, P., & Chang, Y. (2015). Buckling behaviors of section aluminum alloy columns under axial compression. *Engineering Structures*, 95, 127-137. dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.03.064
- Luo, S., & Yang, Q. (2021). Natural frequency measurement of steel components by the sound signal. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 40(2), 993-1004. doi: 10.1177/1461348419860712.
- Moon, J., Ko, H. J, Sung, I. H., & Lee, H. E. (2015). Natural frequency of a composite girder with corrugated steel web. *Steel and Composite Structures*, 18(1), 255-271.
- Morassi, A. (2001). Identification of a crack in a rod based on changes in a pair of natural frequencies. *Journal of Sound and vibration*, 242(4), 577-596. doi:10.1006/jsvi.2000.3380.
- Nayfeh, A. H., & Kreider, W. (1995). Investigation of natural frequencies and mode shapes of buckled beams. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 33(6), 1121-1126.
- Nguyen, T.A., Ly, H.B., Mai, H.V.T., & Tran, V.Q. (2021a). Using ANN to estimate the critical buckling load of Y shaped cross-section steel columns. *Scientific Programming*, 2021, 1-8. /doi.org/10.1155/2021/5530702.
- Nguyen, T.A., Tran, N.L., & Nguyen D.D. (2021b). Prediction of critical buckling load of web tapered I-section steel columns using artificial neural networks. *International Journal of Steel Structures*, 21(4), 1159-1181. /doi.org/10.1007/s13296-021-00498-7

- Praisach, Z., Gillich, G.R., & Birdeanu, D.E. (2010). Consideration on natural frequency changes in damaged cantilever beams using FEM. *Latest Trend on Engineering Mechanics*, 1, 214-219.
- Razak, H.A., & Choi, F.C. (2001). The effect of corrosion on the natural frequency and modal damping of reinforced concrete beams. *Engineering Structures*, 23, 1126-1133. doi.org/10.1016/S0141-0296(01)00005-0.
- Saito, D., & Wadee, M.A. (2009). Numerical studies of interactive buckling in prestressed steel stayed columns. *Engineering Structures*, 31, 432-443. doi:10.1016/j.engstruct.2008.09.008
- Serna, M.A., L'opez, A., Puente, I., & Yong, D.J. (2006). Equivalent uniform moment factors for lateral-torsional buckling of steel members. *Journal of Constructional Steel Research*, 62, 556-580. doi:10.1016/j.jcsr.2005.09.001
- Simscale. (2023). What is a mesh?. Retrieved from <https://www.simscale.com/docs/simwiki/preprocessing/what-is-a-mesh/>
- Singiresu, S.R. (2004). *Mechanical Vibrations*. New Jersey, USA: Prentice Hall.
- Studocu, (2023). Long (Selender) columns. Structural Analysis A (CON4336). Technological and Higher Education Institute of Hong Kong, Retrieved from <https://www.studocu.com/hk/document/technological-and-higher-education-institute-of-hong-kong/structural-analysis-a/ch6-long-column/12513279>
- Şimşek, M. (2016). Buckling of Timoshenko beams composed of two-dimensional functionally graded material (2D-FGM) having different boundary conditions. *Composite Structures*, 149, 304-314. dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.04.034.
- Virella, J.C., Godoy, L.A., & Suárez, L.E. (2006). Dynamic buckling of anchored steel tanks subjected to horizontal earthquake excitation. *Journal of Constructional Steel Research*, 62, 521-531. doi:10.1016/j.jcsr.2005.10.001.
- Wang, H., Li, P., & Wang, J. (2021). Shape optimization and buckling analysis of novel two-way aluminum alloy latticed shells. *Journal of Building Engineering*, 36, 102100. <https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2020.102100>.
- Wikipedi Özgür Ansiklopedi (Vikipedi). (2023a). Çelik, Retrieved from <https://tr.wikipedia.org/wiki/%C3%87elik#:~:text=%C3%87elik%2C%20demir%20elementi%20ile%20genellikle,%C3%A7eli%C4%9Fin%20s%C4%B1n%C4%B1fland%C4%B1r%C4%B1lmas%C4%B1nda%20etkin%20rol%20oynar>.
- Wikipedi Özgür Ansiklopedi (Vikipedi). (2023b). Alüminyum. Retrieved from <https://tr.wikipedia.org/wiki/Al%C3%BCminyum>
- Wu, B., & Mei, Y. (2015). Buckling mechanism of steel core of buckling-restrained braces. *Journal of Constructional Steel Research*, 107, 61-69. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcsr.2015.01.012>.
- Yi, J., Gilb, H., Youmc, K., & Lee. H. (2008). Interactive shear buckling behavior of trapezoidally corrugated steel webs. *Engineering Structures*, 30, 1659-1666. doi:10.1016/j.engstruct.2007.11.009.
- Zaeem, M.A., Nami, M.R., & Kadivar, M.H. (2007). Prediction of welding buckling distortion in a thin wall aluminum T joint. *Computational Materials Science*, 38, 588-594. doi:10.1016/j.commatsci.2006.03.016.

ÖZ GEÇMİŞ

İlköğrenimini Cumhuriyet İlköğretim Okulu'nda, Lise Eğitimi Beşiktaş Bingöl Erdem Lisesi'nde tamamladı. Bayburt Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümünü 2020 yılında başarı ile tamamladı. 2021 yılında Bayburt Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Mühendisliği tezli yüksek lisans eğitimine başladı. Fatih Dülgeroğlu'nun akademik çalışmaları arasında tezinden üretilmiş uluslararası bildiri çalışması yer almaktadır.

- Dülgeroğlu, F., & Erbayrak, E. (2023). Investigation of the effects of different boundary conditions and material used on the critical buckling load and natural frequency values of the euler-type pipe. 7th International Conference of Mathematical Sciences (ICMS 2023).