



**FARKLI TÜRDE KÖNVEKS FONKSİYONLAR
İÇİN ZAMAN SKALASINDA İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLER**

Gamze SALMAN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Dr. Öğr. Üyesi Alper EKİNCİ

AĞRI-2018

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Gamze SALMAN

FARKLI TÜRDE KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN ZAMAN
SKALASINDA İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ
Dr. Öğr. Üyesi Alper EKİNCİ

AĞRI-2018

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FARKLI TÜRDE KONEKS FONKSİYONLAR İÇİN ZAMAN SKALASINDA İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Gamze SALMAN

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Alper EKİNCİ

Bu tezde, öncelikle eşitsizlik teorisiyle yakından ilişkili konveks fonksiyon kavramı ve konvekslik türleri tanıtılmıştır. Konveks fonksiyon tanımı ile ortalamalar arasındaki ilişkiden yola çıkılarak bazı özelliklere yer verilmiştir. Daha sonra zaman skalası ve integrallerden bahsedilmiş olup ardından zaman skalasında diferansiyellenebilme ve integrallenebilme tanımları verilmiştir. Zaman skalasında yer alan integraller için temel kavramlar yeniden hatırlatılmıştır. Skalada integraller yardımıyla ispat edilmiş ve literatürde mevcut olan bazı eşitsizlikler sunulmuştur. Araştırma bulgularında ise zaman skalasında *quasi*-konvekslik tanımı yapılmıştır. Daha sonra zaman skalasında Simpson tipi integral eşitsizliğine konvekslik, *quasi*-konvekslik tanımları, Ostrowski tipi integral eşitsizliğe ise *m*-konvekslik ve *quasi*-konvekslik tanımları uygulanarak bazı özel durumları ihtiva eden yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Ayrıca elde edilen eşitsizliklerin doğruluğunu destekleyen örneklerle yer verilmiş ve bu eşitsizlikler için özel sonuçlar elde edilmiştir.

2018, 68 sayfa

Anahtar Kelimeler: Eşitsizlikler, Hölder eşitsizliği, Konveks fonksiyonlar, Ostrowski eşitsizliği, Simpson eşitsizliği, Üçgen eşitsizliği, Zaman Skalası.

ABSTRACT

Master

INTEGRAL INEQUALITIES ON TIME SCALES FOR DIFFERENT KINDS OF CONVEX FUNCTIONS

Gamze SALMAN

Ağrı İbrahim Çeçen University

Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Alper EKİNCİ

In this thesis, firstly convective function concept and types of convexity closely related to the theory of inequality are introduced. Convex function definition and averages have some features by way of relation. Then the time scale and the integrals are mentioned and then the definitions of differentiation and integration in the time scale are given. The basic concepts for the integrals in the time scale are reminded again. Some inequalities are presented in the literature, proved with the help of scalar integrals. In the research findings, m -convexity, convexity and *quasi* convexity are defined in time scale. New integral inequalities are obtained by applying m -convexity, convexity and *quasi* convexity definitions to Simpson-type integral inequality and m -convexity and *quasi* convexity definitions to Ostrowski-type integral inequality in time scales according to these definitions. In addition, results were obtained that included some special cases for the inequalities obtained and examples supporting these results were included.

2018, 68 pages

Keywords: Inequality, Hölder inequality, Convex functions, Ostrowski inequality, Simpson inequality, Triangle inequality, Time Scale.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimim boyunca, benden bilgi ve deneyimlerini esirgemeyen, çalışmalarımın tamamlanabilmesi için her türlü şartı sağlayan ve bana her zaman her türlü desteği sunan çok değerli danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Alper Ekinci'ye teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında değerli yardımları ile bana yardımcı olan Sayın Doç. Dr. Ahmet Ocak Akdemir'e teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Eğitimim tüm süreçlerinde her türlü destekleriyle beni hiç yalnız bırakmayan aileme teşekkür ederim.

31/08/2018

Gamze Salman

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	4
2.1. Zaman Skalası ve Özellikleri	4
2.2. Diferensiyellenebilme	7
2.3. İntegrasyon.....	13
2.4. Zaman Skalasında Polinomlar	22
2.5. Konveks Fonksiyonlar ve Eşitsizlikler	25
2.5.1. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları	29
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	33
3.1. Konveks Fonksiyonlar için Temel Eşitsizlikler	33
3.2. Zaman Skalasında İntegral Eşitsizlikleri.....	34
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	38
4.1. Konveks Fonksiyonlar için Simpson Tipli Eşitsizlikler	40
4.2. <i>Quasi</i> -Konveks Fonksiyonlar için Simpson Tipli Eşitsizlikler.....	48
4.3. <i>m</i> -Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski Tipli Eşitsizlikler.....	55
4.4. <i>Quasi</i> -Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski Tipli Eşitsizlikler	61
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	65
KAYNAKÇA.....	66
ÖZGEÇMİŞ.	68

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{T}, \tilde{\mathbb{T}}$	Zaman Skalası Kümesi
$f^\Delta, f^{\tilde{\Delta}}$	Zaman Skalasında Delta Türevi
$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
$\leq$	Küçük veya Eşittir
$\geq$	Büyük veya Eşittir
$\subset$	Alt Küme
$\subseteq$	Alt Kümesi veya Eşit
$\supseteq$	Kapsar veya Eşit
$\cup$	Birleşim
$\cap$	Kesişim
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı Değildir
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^n$	n – boyutlu Euclidean Uzay
I	$\mathbb{R}$ 'de Bir Aralık
I°	I 'nın İçi
$L_1([a, b])$	$[a, b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
f'	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
f''	f Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi
LHS	Eşitsizliğin sol tarafı
RHS	Eşitsizliğin sağ tarafı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.5.1. Konveks Küme.....	25
Şekil 2.5.2. Konveks Olmayan Küme.....	25
Şekil 2.5.3. Konveks Fonksiyon.....	26
Şekil 2.5.4. Aralık üzerinde konveks fonksiyon ($f(x) = x $).....	28



1. GİRİŞ

Konveksliğin tanımı eşitsizlikle ifade edildiğinden ve geometrik olarak bir karşılaştırma içerdiğinden, konveks Fonksiyonlar Teorisinde eşitsizliklerin önemli bir yeri vardır. Hardy, Littlewood, Pólya, Beckenbach, Bellman, Mitrinović, Pachpatte, Pečarić ve Fink gibi matematikçiler Konveks Fonksiyonlar ile Eşitsizlik Teorisi'ni bir arada inceleyerek çeşitli kitaplar ve çok sayıda makaleler yayınlamışlardır. Bu tür eşitsizlikleri konu alan ilk temel çalışma 1934'te Hardy, Littlewood ve Pólya tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitaptır. (Hardy *et al.* 1952). İkinci çalışma ise E.F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından 1961'de yazılan 1934-1960 yılları arasında elde edilen yeni eşitsizliklerin sonuçlarını içeren ve yine "Inequalities" adı verilen kitaptır. (Beckenbach and Bellman 1961). Daha sonra Mitrinović'in 1970 yılında yayınladığı ve farklı konulara da değindiği "Analytic Inequalities" adlı kitabı ikinci kitap olarak yerini almıştır. (Mitrinović 1970).

Eşitsizliğin konveks fonksiyonlar merkezli çalışılması C.F. Gauss, A.L. Cauchy ve P.L. Čebyšev ile gelişmeye başlamıştır. 19.-20. yy'da bulunan eşitsizliklerin bir kısmı konveks fonksiyonlarla ilişkilendirilerek temel eşitsizlikler haline gelmiştir. Bunların en önemlileri 1881 yılında Hermite tarafından elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizliği ve 1938 yılında Ostrowski tarafından elde edilen Ostrowski eşitsizliğidir. Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili çalışmaların büyük bir kısmı S.S. Dragomir ve C.E.M. Pearce tarafından 2000 yılında yazılmış olan "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications" isimli kaynakta bir araya getirilmiştir (Dragomir and Pearce 2000). Eşitsizlik ve konveks fonksiyonları ilişkilendirip bu alanda yoğun çalışmalar yapan birçok matematikçi vardır. Bu isimler şu şekildedir: J. Pečarić, P. Cerone, G. Anastassiou, G.V. Milovanović, A.M. Fink, A.W. Roberts, D.E. Varberg, R. Agarwal, N.S. Barnett, N. Ujević, S. Varošanec, P.S. Bullen, G. Toader, M. Alomari, F. Qi, C.E.M. Pearce, M. Darus, M.K. Bakula, M.E. Özdemir, A.O. Akdemir, E. Set, U.S. Kırmacı, A. Ekinçi, H. Yıldırım, M. Avcı Ardiç, M.Z. Sarıkaya, H. Kavurmacı Önalın, M. Gürbüz, Ç. Yıldız.

“Several Inequalities of Hermite-Hadamard, Ostrowski and Simpson Type for s -Convex, *quasi* – Convex and r – Convex Mappings and Applications” isimli doktora tezinde s -konveks, *quasi*-konveks ve r –konveks fonksiyonun özellikleri kullanılarak Ostrowski, Simpson, Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir ve bu eşitsizlikler için uygulamalar verilmiştir. (Alomari 2011).

Alper Ekinci’nin ‘Klasik Eşitsizlikler Yoluyla Konveks Fonksiyonlar için İntegral Eşitsizlikler’ isimli doktora tezinde konveks fonksiyonlar sınıfının daha genel bir hali olan yeni bir sınıf tanımı yapılmış, bu sınıfın temel özellikleri ve bazı fonksiyonlarla olan ilişkisi açıklanmıştır. Ayrıca *quasi*-konveks fonksiyonlarla ilgili eşitsizliklere de yer verilmiştir. (Ekinci 2014).

Merve Avcı Ardıç’ın ‘Konveks Fonksiyonların Çeşitli Sınıfları için İntegral Eşitsizlikler’ isimli doktora tezinde yeni konveks fonksiyon türü elde edilmiş, bu fonksiyon türü için yeni eşitsizlikler yazılmıştır. Farklı konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. (Avcı Ardıç 2013).

Son zamanların en önemli çalışmalarından biri de zaman skalası teorisidir. Zaman skalası, 1988 yılında Stefan Hilger tarafından ortaya atıldı. Stefan Hilger diskret analiz ile sürekli analizi birleştirmek amacıyla bu teoriyi ifade etti. Bunun için diskret analiz ile sürekli analizi kapsayan bir küme aldı ve bu kümeye zaman skalası ismini verdi. Sonra ki örneklerde de göreceğimiz üzere zaman skalasını reel sayılar olarak aldığımızda sürekli analiz ile tam sayılar olarak aldığımızda da diskret analiz ile kesişecektir.. Reel sayıların boştan farklı kapalı ve keyfi alt kümelerine zaman skalası denir ve $\mathbb{T}$ ile gösterilir. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, Cantor kümesi gibi $\mathbb{R}$ nin kapalı alt kümeleri birer zaman skalasıdır. Fakat $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} / \mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $(0,1)$ alt kümeleri birer zaman skalası değildir. Akıllara neden “kapalı alt kümeler ” diye bir soru gelebilir. Bunun sebebi reel sayıların açık alt kümelerinin yığılma noktalarının hepsini ihtiva etmemesidir. Sürekli analizdeki ve diskret analizdeki hemen hemen her şey (süreklilik, türev, integral, sınır değer problemi) gibi kavramlar zaman skalasında

yeniden tanımlanmıştır. Buradan da anlaşılacağı gibi zaman skalası bildiklerimizi daha genele taşır. Yani zaman skalasında $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ birer özel haldir.

Zaman skalası aynı zamanda diferansiyel ve fark denklemlerini birlikte ifade etmemizi sağlar. $\mathbb{Z}$ de tanımlı fark denklemleri veya $\mathbb{R}$ de tanımlı diferensiyel denklemler için bir sonuç vermek yerine, reel sayılar kümesinin kapalı bir alt kümesi olan $\mathbb{T}$ zaman skalasında tanımlanan genel bir dinamik denklem ele alınabilir. Bundan dolayı zaman skalası sadece $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{R}$ için değil aynı zamanda $q^{\mathbb{N}_0}$ gibi farklı tanım kümeleri için de sonuç bulmamızı sağlar.

Günümüzde zaman skalası literatürünün gelişimine katkıda bulunan; M. Bohner, A. Peterson, G. Anastassiou, B. Karpuz, R. Agarwal vb. birçok araştırmacı bulunmaktadır. Bu tez çalışmasında zaman skalası için temel olarak; *Advances in Dynamic Equations on Time Scales* (Bohner and Peterson 2003), *Dynamic Equations on Time Scales* (Bohner and Peterson 2001) adlı kaynaklar kullanılmıştır. Ayrıca Zaman skalasındaki bazı eşitsizlikler için “Frontiers In Time Scales and Inequalities” (Anastassiou 2015) adlı kaynaktan yararlanılmıştır.

Umut Mutlu Özkan da zaman skalasında integral eşitsizlikleri alanında çalışma yapmış isimlerdendir. (Özkan 2007). Günümüzde zaman skalasında daha çok dinamik denklemler konusu çalışılmakla birlikte bu tezde sadece eşitsizlikler ve konvekslikle bağlantılı bir yöntem izlenmiştir.

Bu çalışmada önce zaman skalası ile ilgili bilinmesi gereken en temel kavramlar hatırlatılmıştır. Daha sonra ispatlayacağımız eşitsizliklere temel oluşturan teorem ve lemmalar verilmiştir. Sonrasında ise konvekslik kavramı verilmiş ve bu konu ile ilgili temel tanım ve teoremler anlatılmıştır. Son olarak bulduğumuz Ostrowski ve Simpson tipi eşitsizlikler ispatları ile verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Zaman Skalası ve Özellikleri

Zaman skalası (Time scale) reel sayıların boş olmayan kapalı keyfi bir alt kümesidir.

$$\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\},$$

Kümeleri sırasıyla, reel sayılar, tam sayılar, doğal sayılar ve negatif olmayan tam sayılar olarak adlandırılır. Zaman skalasına örnek olarak,

$[0, 1] \cup [2, 3]$, $[0, 1] \cup \mathbb{N}$ ve Cantor kümesi gibi kapalı alt kümeler verilebilir.

$\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{C}, (0,1)$ kümeleri zaman skalası değildir. Bir $\mathbb{T}$ zaman skalası, reel sayıların standart topolojisine sahiptir. Zaman skalasının ilk ele alınışı Stefan Hilger tarafından yapılmıştır. $\mathbb{T}$ üzerinde f^Δ delta türevi

- i. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $f^\Delta = f'$
- ii. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise $f^\Delta = f^\Delta$ şeklinde tanımlanır.
- i. deki türev bilinen reel sayılardaki adi türevdir. (ii) deki türev ise, tam sayılar üzerindeki fark operatörüdür.

Tanım 2.1.1. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere, $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ileri sıçrama operatörü

$$\sigma(t) := \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\}$$

ile, $\rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ geri sıçrama operatörü ise,

$$\rho(t) := \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\}$$

ile tanımlanır. Bu tanımda,

$$\inf \theta = \sup (\text{ yani } \sigma(t) = t \text{ eğer } \mathbb{T} , \text{ bir } t \text{ minimuma sahipse})$$

$$\sup \theta = \inf (\text{ yani } \rho(t) = t, \text{ eğer } \mathbb{T} , \text{ bir } t \text{ maksimuma sahipse})$$

şeklindedir. Burada θ boş küme olarak tanımlanır. Noktaların sınıflandırılması ise

$$\sigma(t) > t \text{ ise } t \text{ sağ yayılmış}$$

$$\rho(t) < t \text{ ise } t \text{ sol yayılmış}$$

$$\sigma(t) = t \text{ ise } t \text{ sağ yoğun}$$

$$\rho(t) = t \text{ ise } t \text{ sol yoğun}$$

$$\rho(t) < t < \sigma(t) \text{ ise } t \text{ izole}$$

$$\rho(t) = t = \sigma(t) \text{ ise } t \text{ yoğun}$$

olarak tanımlanır.

$$t < \sup \mathbb{T} \text{ ve}$$

$$\sigma(t) = t \text{ ise } t \text{ sağ yoğun,}$$

$$t > \inf \mathbb{T} \text{ ve } \rho(t) = t$$

İse t sol yoğundur. Eğer bir nokta aynı zamanda hem sol yoğun hem de sağ yoğun ise bu noktaya yoğun nokta denir.

Graininess fonksiyonu,

$$\mu : \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty]$$

$$t \rightarrow \mu(t) := \sigma(t) - t$$

ile tanımlanır.

Şimdi $\mathbb{T}$ kümesinden türetilen $\mathbb{T}^k$ kümesi,

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T} - \{m\} & , \text{ eğer } \mathbb{T}, \text{ sol yayılmış } \max m \text{ noktasına sahipse } (\sup \mathbb{T} < \infty) \\ \mathbb{T} & , \text{ diğer durumlarda } (\sup \mathbb{T} = \infty) \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. (Bazı fonksiyonların zaman skalası üzerindeki türevi, tüm zaman skalaları üzerindeki her noktada özellikle zaman skalasının sonlu en küçük üst sınır noktasında tanımlı olmayabilir. Bununla birlikte, $\mathbb{T}^k$ nın tüm noktalarında zaman skalası türevi tanımlıdır. İleride vereceğimiz zaman skalasında türev için $\mathbb{T}^k$ kümesine ihtiyacımız olacaktır). Son olarak eğer $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu her $t \in \mathbb{T}$ için,

$$f^\sigma(t) = f(\sigma(t))$$

şeklinde tanımlayacağız. Burada $f^\sigma = f \circ \sigma$ şeklinde ifade edilen bileşke fonksiyonudur. (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.1.1. Şimdi en iyi bilinen zaman skalaları olan reel ve tam sayılarda ileri sıçrama, geri sıçrama ve Graininess fonksiyonuna bakalım.

i. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise tanımdan $\forall t \in \mathbb{R}$ için

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \inf (t, \infty) = t \text{ (sağ yoğun)}$$

ve benzer şekilde

$$\rho(t) = \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\} = \sup (-\infty, t) = t \text{ (sol yoğun)}$$

olarak bulunur. Her $t \in \mathbb{R}$ t sol yoğun ve sağ yoğun nokta olduğundan yoğundur.

Graininess μ fonksiyonu

$$\mu(t) = \sigma(t) - t \equiv 0$$

şeklinde olup, bu eşitlik $\forall t \in \mathbb{R}$ için sağladığından $\mu(t) = 0$ dır.

ii. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise $\forall t \in \mathbb{Z}$ için

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \inf \{t+1, t+2, t+3, \dots\} = t+1$$

ve benzer şekilde

$$\rho(t) = \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\} = \sup \{\dots, t-3, t-2, t-1\} = t-1$$

$\forall t \in \mathbb{Z}$ için

$$\rho(t) < t < \sigma(t)$$

sağladığından t izole noktadır. Graininess μ fonksiyonu, $\forall t \in \mathbb{Z}$ için

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t+1 - t = 1$$

eşitliği sağlandığından $\mu(t) \equiv 1$.

Yukarıdaki iki durumda da (i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve (ii) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için μ fonksiyonu sabit fonksiyondur. Bu μ fonksiyonu zaman skalasında çok önemli rol oynar. Birçok formülde μ çarpanı içeren terimler vardır.

Tanım 2.1.2. $f: \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\alpha_1 \in \mathbb{T}_1$ için $f(\alpha_1, t_1)$ fonksiyonu $\mathbb{T}_2$ de sağ-yoğun sürekli ise, f fonksiyonu t_2 noktasında sağ-yoğun süreklidir.

Eğer her $\alpha_2 \in \mathbb{T}_2$ için $f(t_1, \alpha_2)$ fonksiyonu $\mathbb{T}_1$ de sağ-yoğun sürekli ise, f fonksiyonu t_1 noktasında sağ-yoğun süreklidir. (Bohner and Peterson 2001).

Tanım 2.1.3. $\mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ üzerinde tanımlı $f(t_1, t_2)$ fonksiyonlarının sınıfı C_{rd} ile gösterilir ve $f(t_1, t_2)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

- i. f fonksiyonu t_1 noktasında sağ-yoğun süreklidir.
- ii. f fonksiyonu t_2 noktasında sağ-yoğun süreklidir.
- iii. x_1 ve x_2 sağ-yoğun veya maksimum noktalar olmak üzere, eğer $(x_1, x_2) \in \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ ise f fonksiyonu (x_1, x_2) noktasında süreklidir.
- iv. Eğer (x_1, x_2) ve noktalarının her ikisinde sol-yoğun noktalar ise (x_1, x_2) noktası (t_1, t_2) noktasına yaklaşırken $f(t_1, t_2)$ fonksiyonunun limiti

$$\mathbb{R}_{LL(x_1, x_2)} = \{(t_1, t_2): t_1 \in [\alpha, x_1] \cap \mathbb{T}_1, t_2 \in [c, x_2] \cap \mathbb{T}_2\}$$

bölgesinin herhangi bir kısmında mevcuttur. (Bohner and Peterson 2001).

2.2. Diferensiyellenebilme

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu göz önüne alalım ve bir $t \in \mathbb{T}^k$ noktasında f fonksiyonun delta türevini (Hilger türevini) tanımlayalım.

Tanım 2.2.1. Kabul edelim ki

$$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$$

bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. O zaman $\forall \varepsilon > 0$ ve t nin bir $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ nin $\delta > 0$ komşuluğundaki her s elemanı için

$$|[f(\sigma(t) - f(s)) - f^\Delta(t) \cdot (\sigma(t) - s)]| \leq \varepsilon \cdot |\sigma(t) - s|$$

olacak şekilde bir $f^\Delta(t)$ sayısı mevcut ise, bu sayıya f fonksiyonun t noktasındaki delta türevi veya Hilger türevi denir. Bununla birlikte $t \in \mathbb{T}^k$ için $f^\Delta(t)$ mevcut ise f ye $\mathbb{T}^k$ da delta diferensiyellenebilirdir denir.

$$f^\Delta: \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{R}$$

Fonksiyonu f in $\mathbb{T}^k$ daki türevi (delta türevi) olarak adlandırılır. (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.2.1. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(t) = t^2$$

olarak tanımlanan fonksiyonun $\forall t \in \mathbb{T}$ için delta türevini bulalım.

Çözüm. $\forall \varepsilon > 0, \forall s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon), \sigma(t) \neq s$ için

$$\begin{aligned} |f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t) \cdot [\sigma(t) - s]| &= |(\sigma^2(t) - s^2) - f^\Delta(t) \cdot (\sigma(t) - s)| \\ &\leq \varepsilon |\sigma(t) - s| \end{aligned}$$

$$= |\sigma(t) - s| \cdot |(\sigma(t) + s) - f^\Delta(t)| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

$$= |(\sigma(t) + s) - f^\Delta(t)| \leq \varepsilon$$

dir. ε keyfi pozitif bir sayı olduğundan mutlak değer özelliğinden $f^\Delta(t) = \sigma(t) + t$ olarak bulunur.

Teorem 2.2.1. Kabul edelim ki

$$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$$

bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. O zaman aşağıdakiler geçerlidir.

- i. f, t de diferensiyellenebilir ise f, t de sürekli.
- ii. f, t de sürekli ve t sağ yayılmış ise o zaman f, t de

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

şeklinde diferensiyellenebilirdir.

- iii. Eğer, t sağ yoğun ise f, t de diferensiyellenebilir olması ancak ve ancak,

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limitinin sonlu olmasıyla mümkündür. Bu durumda

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

dir.

iv. f, t de diferensiyellenebilir ise

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t).f^\Delta(t)$$

dir. (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.2.2. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ durumlarına bakalım

i. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise Teorem 2.2.1. (iii) den $t \in \mathbb{R}$ için

$$f'(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f^\Delta(t)$$

limitinin var olmasından delta diferensiyellenebilir olduğunu ifade eder. O halde f nin delta türevi

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

olarak bulunur.

ii. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $t \in \mathbb{Z}$ de delta diferensiyellenebilir ve

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

Örnek 2.2.3. Teorem 2.2.1. yardımıyla, $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdaki tanımını kullanarak $f^\Delta(t)$ yi bulalım.

$$f(t) = \sigma(t), \quad \mathbb{T} = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}, t \in \mathbb{T}$$

Çözüm. $f(t) = \sigma(t)$, $\mathbb{T} = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$, $t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$ için her nokta izole olduğundan sağ yayılmıştır.

$$\sigma(t) = \frac{1}{\frac{1}{t} - 1} = \frac{t}{1-t}$$

$$\mu(t) = \sigma(t) - t$$

$$\sigma(\sigma(t)) = \frac{\frac{t}{1-t}}{1-\frac{t}{1-t}} = \frac{t}{1-2t}$$

olur. Teorem 2.2.1. in (ii) kısmından,

$$\sigma^\Delta(t) = \frac{\sigma(\sigma(t)) - \sigma(t)}{\mu(t)}$$

$$= \frac{\frac{t}{1-2t} - \frac{t}{1-t}}{\frac{t^2}{1-t}}$$

$$= \frac{t}{1-2t}$$

bulunur. Özel olarak $t = 0$ için

$$\sigma^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(0) - f(s)}{0 - s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sigma(s)}{s}$$

$$= \frac{\frac{s}{1-s}}{s}$$

$$= 1$$

Teorem 2.2.2. Kabul edelim ki $f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^k$ de diferensiyellenebilir olsunlar. Bu durumda

i. $f + g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, t de diferensiyellenebilir ve

$$(f + g)^\Delta(t) = f^\Delta + g^\Delta$$

dir.

ii. $\forall \alpha$ sabiti için $\alpha f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu t de diferensiyellenebilir ve

$$(\alpha f)^\Delta(t) = \alpha \cdot f^\Delta(t)$$

dir.

iii. $f.g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, t de diferensiyellenebilir ise

$$\begin{aligned}(f.g)^{\Delta}(t) &= f^{\Delta}(t).g(t) + f(\sigma(t)).g^{\Delta}(t) \\ &= f(t).g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t).g(\sigma(t))\end{aligned}$$

dir.

iv. Eğer $f(t).f(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{1}{f}$, t de diferensiyellenebilir ise

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t).f(\sigma(t))}.$$

v. Eğer $f(t).f(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$, t de diferensiyellenebilir ise

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t).g(t) - f(t).g^{\Delta}(t)}{g(t).g(\sigma(t))}$$

dir. (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.2.4. x, y, z fonksiyonları t de diferensiyellenebilir ise t noktasında

$$\begin{aligned}(xyz)^{\Delta} &= (xy)^{\Delta}z + (xy)^{\sigma}z^{\Delta} \\ &= (x^{\Delta}y + x^{\sigma}y^{\Delta})z + x^{\sigma}y^{\sigma}z^{\Delta} \\ &= x^{\Delta}yz + x^{\sigma}y^{\Delta}z + x^{\sigma}y^{\sigma}z^{\Delta}\end{aligned}$$

dir.

Şimdi bu formülü n tane fonksiyonun çarpımı için genelleştirelim.

$$(x_1x_2x_3 \dots x_n)^{\Delta} = x_1^{\Delta}x_2 \dots x_n + x_1^{\sigma}x_2^{\Delta} \dots x_n + \dots + x_1^{\sigma}x_2^{\sigma} \dots x_{n-1}^{\sigma}x_n^{\Delta}$$

olur. Bunu daha kısa olarak,

$$\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^\Delta = \sum_{k=1}^n \left(\prod_{i=1}^{k-1} x_i^\sigma\right) x_k^\Delta \left(\prod_{i=k+1}^n x_i\right)$$

şeklinde gösterebiliriz.

Teorem 2.2.3. α keyfi bir sabit ve $m \in \mathbb{N}$ için

i. $f(t) = (t - \alpha)^m$ ise

$$f^\Delta(t) = \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t) - \alpha)^v \cdot (t - \alpha)^{m-v-1}$$

dir.

ii. $g(t) = \frac{1}{(t-\alpha)^m}$ ise

$$g^\Delta(t) = - \sum_{v=0}^{m-1} \frac{1}{(\sigma(t) - \alpha)^{m-v} \cdot (t - \alpha)^{v+1}}$$

dir. (Bohner and Peterson 2001).

Tanım 2.2.2. Bir $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun ikinci delta türevinden bahsetmek için, f^Δ nın $(\mathbb{T}^k)^k = \mathbb{T}^{k^2}$ deki delta türevinden bahsedeceğiz. f^Δ nın $(\mathbb{T}^k)^k = \mathbb{T}^{k^2}$ deki delta türevi $f^{\Delta\Delta} = (f^\Delta)^\Delta: \mathbb{T}^{k^2} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde daha yüksek mertebeden türevler, $f^{\Delta^n}: \mathbb{T}^{k^n} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca $t \in \mathbb{T}$ için,

$$\sigma(\sigma(t)) = \sigma^2(t)$$

ve

$$\rho(\rho(t)) = \rho^2(t)$$

veya genel olarak $n \in \mathbb{N}$ için $p^n(t)$ ve $\sigma^n(t)$ yukarıda ifade edildiği gibi tanımlanabilir. Ayrıca yukarıdaki tanımlamalar için,

$$\rho^0(t) = \sigma^0(t) = t$$

$$f^{\Delta^0} = f$$

$$\mathbb{T}^{k^0} = \mathbb{T}$$

eşitlikleri vardır. (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.2.5. $f(t) = t^2, \mathbb{T} = N_0 : = \left\{ \frac{n}{2} : n \in N_0 \right\}, t \in \mathbb{T}$ fonksiyonun ikinci türevini bulalım.

Çözüm. $f(t) = t^2, \mathbb{T} = N_0^{\frac{1}{2}}, f^{\Delta}(t) = 2t + \frac{1}{2}, \sigma(t) = t + \frac{1}{2}$

$$f^{\Delta^2}(t) = [f^{\Delta}(t)]^{\Delta}$$

$$= \left[2t + \frac{1}{2} \right]^{\Delta}$$

$$= 2 + 0$$

$$= 2$$

Teorem 2.2.4. (Leibniz Formülü) . $S_k^{(n)}$ ile k tane $\sigma, n - k$ tane Δ içeren tüm kombinasyonların kümesini gösterelim. Eğer, $\forall \Lambda \in S_k^{(n)}$ için f^{Δ} mevcut ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$(f \cdot g)^{\Delta^n} = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^{\Lambda} \right) g^{\Delta^k}$$

sağlanır. (Bohner and Peterson 2001).

2.3. İntegrasyon

Bu başlık altında integrallenebilen fonksiyonları tanımlamak için, iki temel tanım vereceğiz.

Tanım 2.3.1. Eğer $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun $\mathbb{T}$ deki tüm sağ yoğun noktalarda sağ taraflı limitleri var(sonlu) ve $\mathbb{T}$ deki tüm sol yoğun noktalarda sol taraflı limitleri var(sonlu) ise bu f fonksiyonuna regulated fonksiyon denir. (Bohner and Peterson 2001).

Tanım 2.3.2. Eğer $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{T}$ deki sağ yoğun noktalarda sürekli ve sol yoğun noktalarda sonlu limite sahip ise f ye rd-continuous fonksiyon denir.
 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ rd-continuous fonksiyonların kümesi

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

ile gösterilir. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının kümesi, türevlenebilir ve türevi rd-continuous fonksiyonlardır. Bu küme ise,

$$C_{rd}^1 = C_{rd}^1(\mathbb{T}) = C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

şeklinde ifade edilir. (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.3.1. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

- i. f sürekli ise, f rd-sürekli dir.
- ii. f rd-sürekli ise, f regulated tir.
- iii. σ operatörü rd-sürekli dir.
- iv. Eğer f regulated veya rd-sürekli ise o zaman f^σ aynı özelliklere sahiptir.
- v. Kabul edelim ki f sürekli olsun. Eğer $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu regulated veya sürekli ise, $f \circ g$ bileşke fonksiyonu aynı özelliğe sahiptir. (Bohner and Peterson 2001).

Tanım 2.3.3. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, D (diferensiyellenebilme bölgesi) bölgesinde sürekli bir fonksiyon olmak üzere, $\mathbb{T}^k \setminus D$ kümesi sayılabilir ve sağ yayılmış nokta içermiyorsa f ye $t \in D$ de pre-diferensiyellenebilir denir. ($D \subset \mathbb{T}^k$). (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.3.2. Kompakt bir aralık üzerinde tanımlı her regulated fonksiyon sınırlıdır. (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.3.3. (Ortalama Değer Teoremi). Kabul edelim ki f ve g fonksiyonları $\mathbb{T}$ de tanımlı ve ikisi de D de pre-diferensiyellenebilir reel değerli fonksiyonlar olsunlar.

Bu durumda $\forall t \in D$ için

$$|f^\Delta(t)| \leq g^\Delta(t)$$

den her $r, s \in \mathbb{T}$, $r \leq s$ için,

$$|f(s) - f(r)| \leq g(s) - g(r)$$

eşitsizliği sağlanır. (Bohner and Peterson 2001).

Sonuç 2.3.1. Farzedelim ki f ve g , D bölgesinde pre-diferensiyellenebilir olsun.

- i. Eğer U uç noktaları $r, s \in \mathbb{T}$ olan kompakt bir aralık ise , o zaman

$$|f(t) - f(s)| \leq \left\{ \sup_{r \in U^k \cap D} |f^\Delta(t)| \right\} |s - r|$$

dir.

- ii. $\forall t \in D$ için $f^\Delta(t) = 0$ ise, f sabit bir fonksiyondur.
iii. $\forall t \in D$ için $f^\Delta(t) = g^\Delta(t)$ ise, o zaman tüm $t \in \mathbb{T}$ için

$$g(t) = f(t) + C$$

dir. Burada C sabittir.

Teorem 2.3.4. (Pre-Anti Türevin Varlığı). Kabul edelim ki f regulated olsun.

O zaman $\forall t \in D$ için

$$F^\Delta(t) = f(t)$$

Olacak şekilde D diferensiyellenebilme bölgesine sahip pre-diferensiyellenebilen bir F fonksiyonu vardır. (Bohner and Peterson 2001).

Tanım 2.3.4. Kabul edelim ki $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu regulated olsun. O zaman Teorem 2.3.4. de ifade edildiği gibi, F fonksiyonuna f nin pre-anti türevi denir. Bu durumda bir regulated belirsiz integrali,

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + C$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki C keyfi bir sabit, F de f nin pre-anti türevidir.

Cauchy integralini tüm $r, s \in \mathbb{T}$ için

$$\int_r^s f(t)\Delta t = F(s) - F(r)$$

olarak tanımlayacağız. Bir

$$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu, $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için

$$F^\Delta(t) = f(t)$$

sağlıyorsa F fonksiyonuna $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun anti türevi denir. (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.3.1. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve $\alpha \neq 1$ olmak üzere

$$\int a^t \Delta t$$

belirsiz integralini hesaplayalım.

Çözüm. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olduğundan

$$F^\Delta(t) = \Delta f(t)$$

yazılır. Buna göre $\alpha \neq 1$ sabiti için

$$\left(\frac{a^t}{a-1}\right)^\Delta = \Delta \left(\frac{a^t}{a-1}\right) = \frac{a^{t-1} - a^t}{a-1} = a^t$$

eşitliği yardımıyla,

$$\int a^t \Delta t = \frac{a^t}{a-1} + C$$

olur. Burada C keyfi bir sabittir.

Teorem 2.3.5. (Anti Türevin Varlığı). Her rd-sürekli fonksiyon anti türeve sahiptir. Özel olarak $t_0 \in \mathbb{T}$ ise, $t \in \mathbb{T}$ için f fonksiyonunun anti türevi olan F fonksiyonu,

$$F^\Delta(t) := \int_{t_0}^t f(\tau) \Delta\tau$$

şeklinde tanımlanır. (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.3.6. Eğer $f \in C_{rd}$ ve $t \in \mathbb{T}^k$ ise o zaman

$$\int_{t_0}^{\sigma(t)} f(\tau) \Delta\tau = \mu(t)f(t)$$

dir. (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.3.7. Eğer $f^\Delta(t) \geq 0$ ise f azalmayıdır. (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.3.8. Eğer $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C_{rd}$ ise o zaman

i.

$$\int_a^b [f(t) + g(t)] \Delta t = \int_a^b f(t) \Delta t + \int_a^b g(t) \Delta t$$

ii.

$$\int_a^b (\alpha f)(t) \Delta t = \alpha \int_a^b f(t) \Delta t$$

iii.

$$\int_a^b f(t) \Delta t = - \int_b^a f(t) \Delta t$$

iv.

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^c f(t) \Delta t + \int_c^b f(t) \Delta t$$

v.

$$\int_a^b f(\sigma(t))g^\Delta(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t)g(t)\Delta t$$

vi.

$$\int_a^b f(t)g^\Delta(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t)g(\sigma(t))\Delta t$$

vii.

$$\int_a^a f(t)\Delta t = 0$$

viii. Eğer, $[a, b)$ üzerinde

$$|f(t)| \leq g(t)$$

ise

$$\left| \int_a^b f(t)\Delta t \right| \leq \int_a^b g(t)\Delta t$$

eşitsizliği doğrudur.

ix. Eğer, tüm $a \leq t < b$ için $f(t) \geq 0$ ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0$$

dir. (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.3.9. $a, b \in \mathbb{T}$ ve $f \in C_{rd}$ olsun.

i. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt$$

dir. Burada sağ taraftaki integral bilinen Riemann integralidir.

ii. Eğer $[a, b]$ yalnızca izole noktalar içeriyorsa,

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{t \in [a, b)} \mu(t) f(t) & a < b \text{ ise} \\ 0 & a = b \text{ ise} \\ - \sum_{t \in [a, b)} \mu(t) f(t) & a > b \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

iii. Eğer $h > 0$ için $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$ ise,

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)h & a < b \text{ ise} \\ 0 & a = b \text{ ise} \\ - \sum_{k=\frac{b}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(kh)h & a > b \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

iv. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t) & a < b \text{ ise} \\ 0 & a = b \text{ ise} \\ - \sum_{t=b}^{a-1} f(t) & a > b \text{ ise} \end{cases}$$

dir. (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.3.2. $\alpha \in \mathbb{T}$ alalım. Burada, $\mathbb{T}$ keyfi bir zaman skalası olmak üzere, $\int_a^t 1 \Delta s$ integralinin değeri,

$$\int_a^t 1 \Delta s = t - a \quad ((t - a)^\Delta = t^\Delta - a^\Delta = 1 - 0 = 1)$$

dir. Ayrıca $t \in \mathbb{T}$, olmak üzere $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, için

$\int_a^t s \Delta s$ integralinin değeri,

$$\int_0^t s \Delta s = \frac{t^2}{2}$$

dir. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ iken

$$\begin{aligned} \int_0^t s \Delta s &= \sum_{s=0}^{t-1} s \\ &= 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (t-2) + (t-1) \\ &= \frac{(t-1) \cdot (t-1+1)}{2} = \frac{t \cdot (t-1)}{2} \end{aligned}$$

dir. $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ iken

$$\begin{aligned} \int_0^t s \Delta s &= \sum_{s=0}^{\frac{t}{h}-1} f(sh)h \\ &= \sum_{s=0}^{\frac{t}{h}-1} s h^2 \\ &= h^2 \sum_{k=0}^{\frac{t}{h}-1} s \\ &= h^2 \left[0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + \left(\frac{t}{h} - 1 \right) \right] \\ &= h^2 \left(\frac{t}{h} - 1 \right) \frac{\frac{t}{h} + 1}{2} \\ &= \frac{1}{2} (t - h)t. \end{aligned}$$

Tanım 2.3.5. $\alpha \in \mathbb{T}$, $\sup \mathbb{T} = \infty$ ve f , $[a, \infty)$ da rd-süreklı ise $[a, \infty)$ aralığında has olmayan integral

$$\int_a^\infty f(t)\Delta t = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t)\Delta t$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki limit sonlu ise integrale yakınsak, sonsuz ise integrale ıraksaktır denir. (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.3.6. (Zincir Kuralı). Farzedelim ki $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli, $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathbb{T}^k$ üzerinde delta diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$(f \circ g)^\Delta(t) = f'(g(c)) g^\Delta(t)$$

olacak şekilde $[t, \sigma(t)]$ aralığında bir c sayısı vardır. (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.3.7. (Zincir Kuralı). $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli diferansiyellenebilir olsun ve $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$

fonksiyonunun delta türevlenebilir olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f \circ g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ delta diferansiyellenebilir ve

$$(f \circ g)^\Delta(t) = \left\{ \int_0^1 f' \left(g(t) + h\mu(t)g^\Delta(t) \right) dh \right\} g^\Delta(t)$$

formülü sağlanır. (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.3.8. (Zincir Kuralı). Farzedelim ki $v: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ kesin olarak artan bir fonksiyon, $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$ bir zaman skalası ve $\omega: \tilde{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Eğer $t \in \mathbb{T}^k$ için $v^\Delta(t)$ ve $\omega^\Delta(v(t))$ mevcut ise

$$(\omega \circ v)^\Delta = (\omega^\Delta \circ v) v^\Delta$$

dir. (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.3.9. (Ters Fonksiyonun Türevi). Kabul edelim ki $v: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ kesin olarak artan bir fonksiyon ve $\tilde{\mathbb{T}} : v(\mathbb{T})$ bir zaman skalası olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{v^\Delta} = (v^{-1})^\Delta \circ v$$

dir. Burada $v^\Delta \neq 0$ dır. (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.3.10. (Değişken Değiştirme). Farzedelim ki $v: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ kesin olarak artan bir fonksiyon ve $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$ bir zaman skalası olsun. Eğer $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ rd-sürekli bir fonksiyon ve v de rd-sürekli diferansiyellenebilir ise $a, b \in \mathbb{T}$ için

$$\int_a^b f(t) v^\Delta(t) \Delta t = \int_{v(a)}^{v(b)} (f \circ v^{-1})(s) \tilde{\Delta} s$$

dir. (Bohner and Peterson 2001).

2.4. Zaman Skalasında Polinomlar

0'ın bir anti türevi 1, 1'in bir anti türevi t , fakat keyfî bir zaman skalası için t 'nin anti türevini bulmak neredeyse imkansızdır. t 'nin anti türevinin $\frac{t^2}{2}$ olduğu kesin değildir. $\frac{t^2}{2}$ 'nin türevi

$$\left(\frac{t^2}{2}\right)^\Delta = \frac{t + \sigma(t)}{2} = t + \frac{\mu(t)}{2}$$

dir. Burada $\mu(t), \sigma(t)$ ye bağlı $\sigma(t)$ de zaman skalasının tanımına bağlı olarak değişir. $\frac{t^2}{2}$ fonksiyonu

$$\int_0^t \sigma(\tau) \Delta \tau$$

şeklinde mi ya da

$$\int_0^t \sigma \Delta \tau$$

şeklinde mi olacak. Şimdi aşağıdaki tanımlara bakalım.

g_2 ve h_2 fonksiyonları sırasıyla

$$g_2(t, s) = \int_0^t (\sigma(\tau) - s) \Delta \tau$$

ve

$$h_2(t, s) = \int_0^t (\tau - s) \Delta \tau$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda g_2 ve h_2 fonksiyonları arasında,

$$\begin{aligned} g_2(t, s) &= \int_0^t (\sigma(\tau) - s) \Delta \tau \\ &= \int_0^t [(\sigma(\tau) + \tau) - \tau - s] \Delta \tau \\ &= \int_0^t (\sigma(\tau) + \tau) \Delta \tau - \int_0^t \tau \Delta \tau - \int_s^t s \Delta \tau \\ &= \int_s^t (\tau^{2^\Delta}) \Delta \tau + \int_s^t \tau \Delta \tau - s(t - s) \\ &= \int_s^t \tau \Delta \tau + t^2 - s^2 - s(t - s) \\ &= \int_s^t (\tau - t) \Delta \tau \\ &= h_2(s, t) \end{aligned}$$

şeklinde bir ilişki buluruz. Genelleştirilmiş polinomlar , Taylor formülünden ortaya çıkmıştır. Bu fonksiyonlar $k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$g_k, h_k: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklindedir. g_0 ve h_0 her $s, t \in \mathbb{T}$ için

$$g_0(t, s) = h_0(t, s) = 1$$

olup, $k \in \mathbb{N}_0$ için g_k ve h_k verilsin. Bu durumda g_{k+1} ve h_{k+1} fonksiyonları her $s, t \in \mathbb{T}$ için

$$g_{k+1}(s, t) = \int_s^t g_k(\sigma(\tau), s) \Delta \tau$$

ve

$$h_{k+1}(s, t) = \int_s^t h_k(\tau, s) \Delta \tau$$

eşitlikleriyle tanımlanır.

s yi sabit düşünüp $h_k(t, s)$ nin t ye göre türevi $h_k^\Delta(t, s)$ ve $k \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{T}^k$ için

$$h_k^\Delta(t, s) = h_{k-1}(t, s)$$

dir. Benzer şekilde $k \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{T}^k$ için

$$g_k^\Delta(t, s) = g_{k-1}(\sigma(t), s). \quad (\text{Bohner and Peterson 2001}).$$

Örnek 2.4.1. Yukarıdaki tanımlara göre aşikar olarak her $t, s \in \mathbb{T}$ için

$$g_1(t, s) = h_1(t, s) = t - s.$$

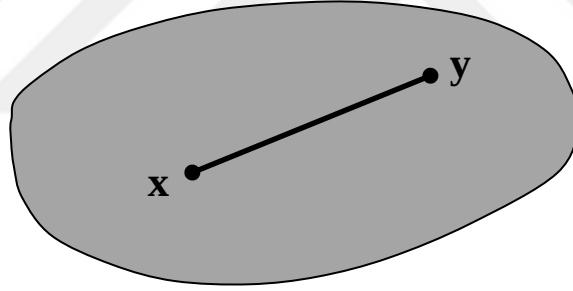
2.5. Konveks Fonksiyonlar ve Eşitsizlikler

Bu çalışmada kullanılacak bazı temel tanımlar aşağıda verilmiştir.

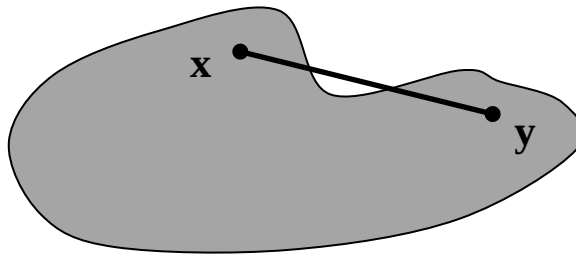
Tanım 2.5.1. (Konveks Küme): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L: z = tx + (1 - t)y, \quad 0 \leq t \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = tx + (1 - t)y$ eşitliğindeki x ve y 'nin katsayıları için $t + (1 - t) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $t, 1 - t$ yerine $t + k = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan t, k reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir. (Bayraktar 2000).



Şekil 2.5.1. Konveks Küme



Şekil 2.5.2. Konveks Olmayan Küme

Tanım 2.5.2. (Konveks Fonksiyon). $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

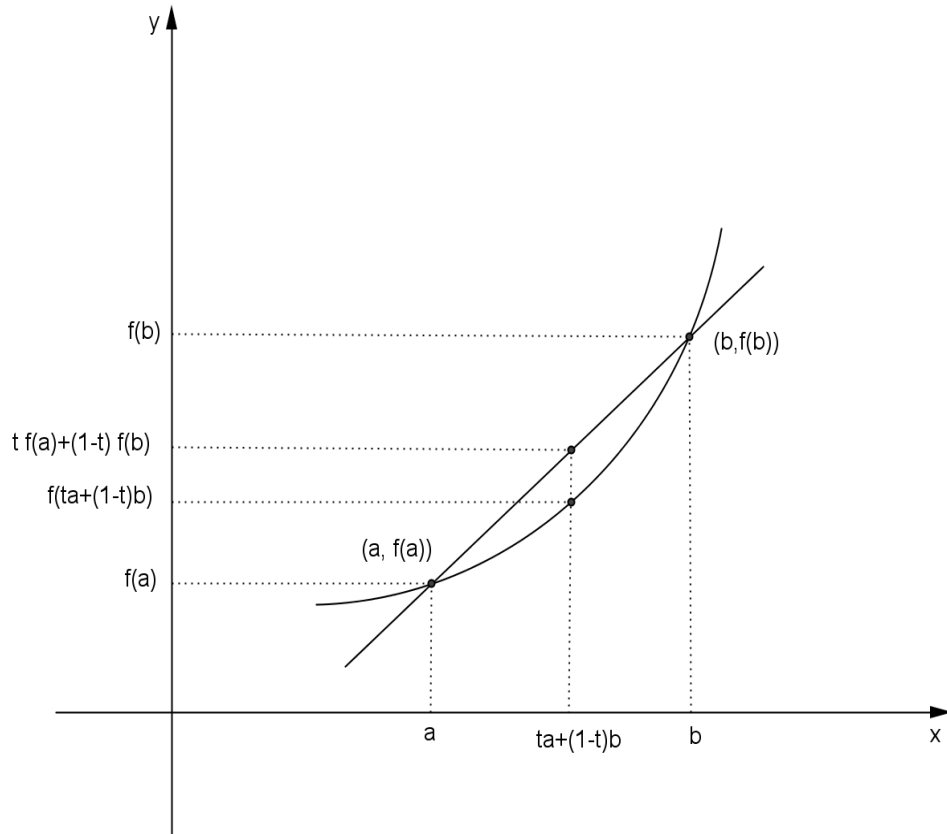
$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.” (Pečarić *et al.* 1992).

Eğer $\alpha \in (0,1)$ aralığında alınırsa bu durumda

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

olur. Bu f fonksiyonuna da strictly konveks fonksiyon denir. “ $-f$ ” konveks (strictly konveks) ise o zaman f ’ye konkav (strictly konkav) denir. (Pečarić *et al.* 1992).



Şekil 2.5.3. Konveks fonksiyon

Geometrik olarak $ta + (1 - t)b$ noktasında; f 'nin eğri üzerinde aldığı değer $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerinde aldığı değerden her zaman daha küçüktür, yani bu iki noktayı birleştiren kiriş (doğru parçası) her zaman eğrinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya üstündedir.

Şekil 2.5.3. den de görüldüğü gibi $t \in [0, 1]$ olduğundan $tf(a) \leq f(a)$ dir. Benzer şekilde $(1 - t)f(b) \leq f(b)$ dir. Yani $tf(a)$, $f(a)$ 'nın $(1 - t)f(b)$ de $f(b)$ 'nin altındadır.

Dolayısıyla $tf(a) + (1 - t)f(b)$, $f(a)$ ile $f(b)$ arasında olur. Konkav fonksiyon için kiriş f 'nin grafiğinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya altındadır.

Teorem 2.5.1. (Üçgen Eşitsizliği): Herhangi bir x, y reel sayıları için

$$\begin{aligned} |x + y| &\leq |x| + |y|, \\ ||x| - |y|| &\leq |x - y|, \\ ||x| - |y|| &\leq |x + y|, \end{aligned}$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir. (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.5.2. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu). f , $[a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir. (Mitrinović *et al.* 1993).

Örnek 2.5.1. $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde konveks fonksiyondur.

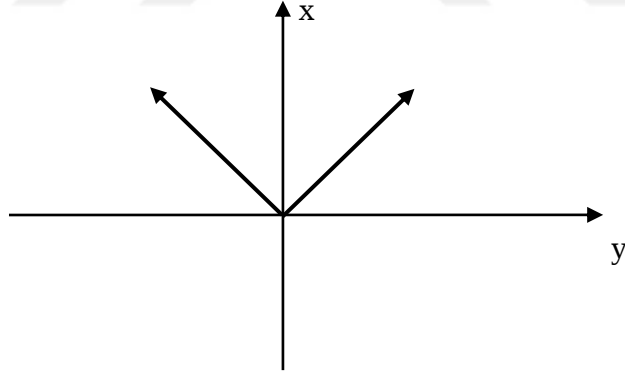
Çözüm: f 'nin konveks olduğunu göstermek için $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

olduğunu göstermeliyiz. Buna göre

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1 - \alpha)y) &= |\alpha x + (1 - \alpha)y| \\ &\leq |\alpha x| + |(1 - \alpha)y| \quad (\text{üçgen eşitsizliğinden}) \\ &= \alpha|x| + (1 - \alpha)|y| \\ &= \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \end{aligned}$$

elde edilir. İlk ve son ifadeden f fonksiyonunun konveksliği ispatlanmış olur. $f(x) = |x|$ fonksiyonu $x = 0$ da türeğe sahip olmamasına rağmen konveks fonksiyondur.



Şekil 2.5.4. Aralık üzerinde konveks fonksiyon

Sonuç 2.5.1. $x, y \in \mathbb{R}$ ve $p + q > 0$ olmak üzere

$$f\left(\frac{px + qy}{p + q}\right) \leq \frac{pf(x) + qf(y)}{p + q}$$

dir. (Mitrinović 1993).

Teorem 2.5.3. (Hölder Eşitsizliği). $a = (a_1, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, \dots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n –lisi olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

(a) $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

(b) $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. (Mitrinović 1970).

Teorem 2.5.4. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. (Mitrinović et al. 1993).

2.5.1. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları

Çeşitli konveks fonksiyon türleri vardır. Bunlardan en çok bilinen ve literatürde bu konuda çalışanlar tarafından sık kullanılan konveks fonksiyon türleri şunlardır:

Tanım 2.5.1.1. (Quasi-Konveks Fonksiyon). $S \subset \mathbb{R}^n$ boştan farklı bir küme ve $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in S$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye *quasi* –konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Eğer

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye strictly *quasi* –konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında

$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \max\{f(x), f(y)\}$ ise f 'ye *quasi* –konkav fonksiyon ve

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) > \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye strictly *quasi* –konkav fonksiyon denir. (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.5.1.2. f hem *quasi* –konveks hem de *quasi* –konkav ise f 'ye *quasi* –monotonik denir. (Greenberg and Pierskalla 1970).

Sonuç 2.5.1.1. Herhangi bir konveks fonksiyon *quasi* –konveks fonksiyondur. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Yani *quasi* –konveks olup konveks olmayan fonksiyonlar vardır.

Örneğin $g: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t \in [-2, -1] \\ t^2 & , \quad t \in (-1, 2] \end{cases}$$

fonksiyonu $[-2, 2]$ aralığında konveks değildir. Fakat g fonksiyonu $[-2, 2]$ aralığında *quasi* –konveks fonksiyondur. (Ion 2007).

Tanım 2.5.1.3. (Log-Konveks Fonksiyon). $I, \mathbb{R}'$ 'de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(tx + (1 - t)y) \leq f^t(x)f^{1-t}(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna Log-konvektir denir. (Pečarić *et al.* 1992).

Tanım 2.5.1.4. (m –Konveks Fonksiyon). $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0, b]$, $\alpha \in [0, 1]$ ve $m \in [0, 1]$ için

$$f(\alpha x + m(1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + m(1 - \alpha)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna m –konvektir denir. (Toader 1984).

$-f$ fonksiyonu m –konveks ise bu takdirde f fonksiyonu m –konkavdır. Ayrıca $f(0) \leq 0$ için $[0, b]$ aralığında tanımlı tüm m –konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir. Eğer $m = 1$ alınırsa $[0, b]$ üzerinde m –konveks fonksiyon bilinen konveks fonksiyona dönüşür.

Tanım 2.5.1.5. (Starshaped Fonksiyon): $b > 0$ olmak üzere $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, her

$x \in [0, b]$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için

$$f(\alpha x) \leq \alpha f(x)$$

şartını sağlıyorsa bu fonksiyona starshaped fonksiyon denir. (Toader 1984).

Tanım 2.5.1.6. (Geometrik Konveks Fonksiyon). $f: I \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{1-t}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna geometrik konveks fonksiyon denir. (Zhang *et al.* 2012).

Tanım 2.5.1.7. (Harmonik Konveks Fonksiyon). $I \subset \mathbb{R}/\{0\}$ bir açık aralık olsun. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere eğer $\forall x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{\alpha x + (1-\alpha)y}\right) \leq \alpha f(y) + (1-\alpha)f(x)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.5.1.8. (Ortalama Fonksiyonu). M fonksiyonu $M: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ şeklinde verilsin. Eğer

- (1) $M(x, y) = M(y, x)$
- (2) $M(x, x) = x$
- (3) $x < M(x, y) < y, x < y$
- (4) $M(ax, ay) = aM(x, y), a > 0$

şartları sağlanıyorsa M fonksiyonuna ortalama fonksiyonu denir. (Anderson *et al.* 2007).

Örnek 2.5.1.1.

(1) $M(x, y) = A(x, y) = \frac{x+y}{2}$ Aritmetik ortalama

(2) $M(x, y) = G(x, y) = \sqrt{xy}$ Geometrik ortalama

(3) $M(x, y) = H(x, y) = 1/A(1/x, 1/y)$ Harmonik ortalama

(4) $M(x, y) = L(x, y) = \frac{x-y}{\log x - \log y}, x \neq y$ için ve $L(x, x) = x$ Logaritmik ortalama

(5) $M(x, y) = I(x, y) = \left(\frac{1}{e}\right) \left(\frac{x^x}{y^y}\right)^{\frac{1}{x-y}}, x \neq y$ ve $I(x, x) = x$ Identrik ortalama
(Anderson *et al.* 2007).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Konveks Fonksiyonlar için Temel Eşitsizlikler

Teorem 3.1.1. (Hermite-Hadamard eşitsizliği). $I, \mathbb{R}'$ de bir aralık $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği literatürde konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir. (Pečarić *et al.* 1992).

Teorem 3.1.2. (Ostrowski Eşitsizliği). $f: I \subset [0,1) \rightarrow \mathbb{R}, I^0(I'nin içi)$ üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $f' \in L[a, b]$ ve $a, b \in I$ için $a < b$ olsun. Eğer $|f'(x)| \leq M$ ise

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right| \leq \frac{M}{b-a} \left[\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{2} \right]$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu eşitsizliğe Ostrowski Eşitsizliği denir. (Alomari *et al.* 2010).

Teorem 3.1.3. (Simpson Eşitsizliği). $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, (a, b)$ üzerinde dördüncü mertebeden türevi sürekli olan bir fonksiyon ve $\|f^{(4)}\|_{\infty} = \sup_{x \in (a,b)} \|f^{(4)}\|_{\infty} < \infty$ olsun. Bu durumda

$$\left| \frac{1}{3} \left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{1}{2880} \|f^{(4)}\|_{\infty} (b-a)^4$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik literatürde Simpson Eşitsizliği olarak bilinmektedir. (Dragomir *et al.* 2000).

3.2. Zaman Skalasında İntegral Eşitsizlikleri

Tanım 3.2.1. (Konveks Fonksiyon). $S = \mathbb{T}$ boştan farklı bir küme ve $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in \mathbb{T}$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f 'ye konveks fonksiyon denir. (Dinu 2008).

Teorem 3.2.1. (Hölder Eşitsizliği). $h, f, g \in C_{rd}([a, b], [0, \infty))$ ve

$$\int_a^b h(x)g^q(x)\Delta x > 0$$

olsun. Eğer

$$p > 1 \text{ ve } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ise

$$\int_a^b h(x)f(x)g(x)\Delta x \leq \left(\int_a^b h(x)f^p(x)\Delta x \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b h(x)g^q(x)\Delta x \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. (Wong *et al.* 2006).

Lemma 3.2.1. $a, b, s, t \in \mathbb{T}, a < b$ ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilen bir fonksiyon ise

$$k(t, s) = \begin{cases} s, & 0 \leq s < \frac{t-a}{b-a} \\ s-1, & \frac{t-a}{b-a} < s < 1 \end{cases}$$

olmak üzere

$$f(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(t) \Delta t + \frac{1}{b-a} \int_0^1 k(t,s) f^\Delta(s) \Delta s$$

eşitliği sağlanır. (Ekinci 2018).

Teorem 3.2.2. $\mathbb{T}$ ve $\tilde{\mathbb{T}}$ birer zaman skalası, $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$, $v = \frac{s-a}{b-a}$ olmak üzere, $f: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde delta diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $a < b$ ve $a, b, s \in I_{\mathbb{T}}$ için $|f^\Delta|$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde konveks ise her $c \in \tilde{\mathbb{T}}$ için

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \int_0^c s \tilde{\Delta} s & \mu_1 &= \int_c^1 (1-s) \tilde{\Delta} s \\ \lambda_2 &= \int_0^c s^2 \tilde{\Delta} s & \mu_2 &= \int_c^1 (1-s)^2 \tilde{\Delta} s \end{aligned}$$

olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$\begin{aligned} & \left| f(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(u) \Delta u \right| \\ & \leq (b-a) \{ (\lambda_2 + \mu_1 - \mu_2) |f^\Delta(b)| + (\mu_2 + \lambda_1 - \lambda_2) |f^\Delta(a)| \} \end{aligned}$$

(Ekinci 2018).

Teorem 3.2.3. $\mathbb{T}$ ve $\tilde{\mathbb{T}}$ birer zaman skalası, $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$, $v = \frac{t-a}{b-a}$ olmak üzere, $f: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde delta diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun.

Eğer $a < b$, $a, b, t \in I_{\mathbb{T}}$ için $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şartı ile $|f^\Delta|^q$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde konveks ise her $c \in \mathbb{T}$ için

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \int_0^c s \tilde{\Delta} s & \mu_1 &= \int_c^1 (1-s) \tilde{\Delta} s \\ \lambda_2 &= \int_0^c s^2 \tilde{\Delta} s & \mu_2 &= \int_c^1 (1-s)^2 \tilde{\Delta} s\end{aligned}$$

olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned}& \left| f(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(u) \Delta u \right| \\ & \leq (b-a)(\lambda_1 + \mu_1)^{\frac{1}{p}} + \{(\lambda_2 + \mu_1 - \mu_2)|f^\Delta(b)|^q + (\mu_2 + \lambda_1 - \lambda_2)|f^\Delta(a)|^q\}^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

(Ekinci 2018).

Lemma 3.2.2. (Montgomery Özdeşliği). $a, b, s, t \in \mathbb{T}$, $a < b$ ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilen bir fonksiyon ise

$$p(t, s) = \begin{cases} s - a, & a \leq s < t \\ s - b, & t < s < b \end{cases}$$

olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$f(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(s) \Delta s + \frac{1}{b-a} \int_a^b p(t, s) f^\Delta(s) \Delta s.$$

(Bohner and Matthews 2008).

Teorem 3.2.4. (Ostrowski Eşitsizliği). $a, b, s, t \in \mathbb{T}, a < b$ ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $M = \sup_{a < t < b} |f^\Delta(t)|$ olmak üzere

$$\left| f(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(s) \Delta s \right| \leq \frac{M}{b-a} (h_2(t, a) + h_2(t, b))$$

eşitsizliği elde edilir. (Bohner and Matthews 2008).



4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Tanım 4.1. (Quasi - Konveks Fonksiyon). $S = \mathbb{T}$ boştan farklı bir küme ve $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ kümesi üzerinde konveks bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in \mathbb{T}$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye *quasi* –konveks fonksiyon denir.

Bazı sonuçların ispatı için aşağıdaki lemma kullanılacaktır.

Lemma 4.1. $a, b, x \in \mathbb{T}$, $a < b$, $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$ ve $t \in \tilde{\mathbb{T}}$ olmak üzere $v(t) = \frac{t-a}{b-a}$ dönüşümü için eğer $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu diferansiyellenebilen bir fonksiyon ise,

$$k(t) = \begin{cases} t - \frac{1}{6}, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ t - \frac{5}{6}, & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\begin{aligned} & (b-a) \int_0^1 k(t) f^{\Delta}(tb + (1-t)a) \tilde{\Delta} t \\ &= \frac{2}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} (f(a) + f(b)) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^{\sigma}(x) \Delta x. \end{aligned}$$

İspat. Öncelikle $x \in \mathbb{T}$ için $\int_a^b p(x) f^{\Delta}(x) \Delta x$ integralinde

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} - \frac{1}{6}, & a \leq x < \frac{a+b}{2} \\ \frac{x-a}{b-a} - \frac{5}{6}, & \frac{a+b}{2} \leq x \leq b \end{cases}$$

olarak alınır, aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$\begin{aligned} & \int_a^b p(x) f^\Delta(x) \Delta x \\ &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{x-a}{b-a} - \frac{1}{6} \right) f^\Delta(x) \Delta x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(\frac{x-a}{b-a} - \frac{5}{6} \right) f^\Delta(x) \Delta x. \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitlikte Δ integralleri hesaplanırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned} & \int_a^b p(x) f^\Delta(x) \Delta x \\ &= \left(\frac{x-a}{b-a} - \frac{1}{6} \right) f(x) \Big|_a^{\frac{a+b}{2}} + \left(\frac{x-a}{b-a} - \frac{5}{6} \right) f(x) \Big|_{\frac{a+b}{2}}^b - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(x) \Delta x \\ &= \frac{2}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} (f(a) + f(b)) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(x) \Delta x \end{aligned}$$

$a < b$, $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$ ve $v = \frac{t-a}{b-a}$ olmak üzere, v fonksiyonunun tersi, v^{-1} elde edilir ve $x = v^{-1}$ olur. v fonksiyonunun tersi yukarıdaki eşitliğin sol tarafına uygulanırsa Teorem 2.3.10. (değişken değiştirme) den

$$(b-a) \int_0^1 k(t) f^\Delta(u^{-1}(x)) \tilde{\Delta} t$$

$$= \frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6}(f(a) + f(b)) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(x) \Delta x$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

4.1. Konveks Fonksiyonlar için Simpson Tipli Eşitsizlikler

Teorem 4.1.1. $\mathbb{T}$ ve $\tilde{\mathbb{T}}$ birer zaman skalası, $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$, $v = \frac{t-a}{b-a}$ olmak üzere,

$f: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde delta diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun.

Eğer $a < b$ ve $a, \frac{5a+b}{6}, \frac{a+b}{2}, \frac{5b+a}{6}, b \in I_{\mathbb{T}}$ için $|f^\Delta|$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde konveks ise, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left| \frac{1}{6} \left[x_0 + 4x_{\frac{n}{2}} + x_n \right] - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right| \leq \frac{n}{72} \{ (x_{n+1} - x_n)(5n - 6) + (x_1 - x_0)(5n + 6) \}$$

ve burada $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ $a = 0, b = n, t = i$ ve $f(k) = x_k$ dir.

İspat. Lemma 4.1. ve $k(t)$ fonksiyonunun tanımından (4.3.) den, aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(x) \Delta x \right| \\ &= (b-a) \left| \int_0^1 k(t) f^\Delta(tb + (1-t)a) \tilde{\Delta} t \right| \\ &\leq (b-a) \int_0^1 |k(t) f^\Delta(tb + (1-t)a)| \tilde{\Delta} t \end{aligned}$$

$|f^\Delta|$ fonksiyonu konveks fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned}
& (b-a) \int_0^1 |k(t) f^\Delta(tb + (1-t)a)| \tilde{\Delta} t \\
& \leq \int_0^1 |k(t)| (t|f^\Delta(b)| + (1-t)|f^\Delta(a)|) \tilde{\Delta} t \\
& = \int_0^{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6} - t\right) (t|f^\Delta(b)| + (1-t)|f^\Delta(a)|) \tilde{\Delta} t \\
& \quad + \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} \left(t - \frac{1}{6}\right) (t|f^\Delta(b)| + (1-t)|f^\Delta(a)|) \tilde{\Delta} t \\
& \quad + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}} \left(\frac{5}{6} - t\right) (t|f^\Delta(b)| + (1-t)|f^\Delta(a)|) \tilde{\Delta} t \\
& \quad + \int_{\frac{5}{6}}^1 \left(t - \frac{5}{6}\right) (t|f^\Delta(b)| + (1-t)|f^\Delta(a)|) \tilde{\Delta} t \\
& = \left(\int_0^{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6} - t\right) t \tilde{\Delta} t + \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} \left(t - \frac{1}{6}\right) t \tilde{\Delta} t + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}} \left(\frac{5}{6} - t\right) t \tilde{\Delta} t + \int_{\frac{5}{6}}^1 \left(t - \frac{5}{6}\right) t \tilde{\Delta} t \right) |f^\Delta(a)|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_0^{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6} - t \right) (1 - t) \tilde{\Delta} t \right. \\
& \quad + \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} \left(t - \frac{1}{6} \right) (1 - t) \tilde{\Delta} t \\
& \quad \left. + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}} \left(\frac{5}{6} - t \right) (1 - t) \tilde{\Delta} t + \int_{\frac{5}{6}}^1 \left(t - \frac{5}{6} \right) (1 - t) \tilde{\Delta} t \right) |f^\Delta(b)|.
\end{aligned}$$

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için $a = 0, b = n, t = i$ ve $f(k) = x_k$ olarak alınırsa 1. integral için aşağıdaki sonuç bulunur:

$$\int_0^{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6} - t \right) t \tilde{\Delta} t = \sum_{j=0}^{\frac{n}{6}-1} \left(\frac{1}{6} - \frac{j}{n} \right) \frac{j}{n} = \frac{n^2 - 36}{1296n}.$$

Bu işlemler sırasıyla elde edilen tüm integrallere uygulanır. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için $|f^\Delta(b)| = x_{n+1} - x_n$ ve $|f^\Delta(a)| = x_1 - x_0$ olduğundan eşitsizliğin sağ tarafı aşağıdaki gibidir:

$$RHS = \frac{1}{72} \{ (x_{n+1} - x_n)(5n - 6) + (x_1 - x_0)(5n + 6) \}.$$

Sol taraf için ise

$$\left| \frac{2}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6}(f(a) + f(b)) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(x) \Delta x \right|$$

$$= \left| \frac{1}{6} \left[x_0 + 4x_{\frac{n}{2}} + x_n \right] - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right|$$

sonucu elde edilir ve ispat tamamlanır.

Örnek 4.1.1. Teorem 4.1.1. de $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = x^2$ olmak üzere $a = 0$ ve $b = 12$ değerleri için eşitsizliğin sağlanıp sağlanmadığına bakalım.

Çözüm. $f(x) = x^2$ olduğundan, $x_0 = 0$, $x_6 = 36$ ve $x_{12} = 144$

$$\frac{1}{12} \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{1}{12} \left(\frac{12 \cdot 13 \cdot 25}{6} \right) = 54,16$$

$$|x_{13} - x_{12}| = 169 - 144 = 25 \text{ ve } |x_1 - x_0| = 1$$

ve $n = 12$ için

$$\frac{n}{72} \{(x_{n+1} - x_n)(5n - 6) + (x_1 - x_0)(5n + 6)\} = 236$$

hesaplanan tüm değerleri teoremden yerine yazarsak $|-6,16| \leq 236$ sonucu elde edilir ve eşitsizliğin doğruluğu örnek üzerinde de sağlanmış olur.

Sonuç 4.1.1. Teorem 4.1.1. de $M = \sup_{a < t < b} |f^\Delta(t)|$ olarak kabul edilirse, aşağıdaki sonuç ortaya çıkar.

$$\left| \frac{1}{6} \left[x_0 + 4x_{\frac{n}{2}} + x_n \right] - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right| \leq \frac{5n^2}{36} M.$$

Sonuç 4.1.2. Teorem 4.1.1. de $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ ise $a = 0$, $b = hn$ ve $t = i$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left| \frac{2}{3}f\left(\frac{nh}{2}\right) + \frac{1}{6}(f(0) + f(nh)) - \frac{1}{nh} \sum_{j=1}^n f(jh) \right| \leq \frac{nh^2}{72} \{ (f(nh+h) - f(nh))(5hn-6) + (f(h) - f(0))(5hn+6) \}.$$

İspat. $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ ise $a = 0$, $b = hn$ ve $t = i$ için

$$\int_0^{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6} - t\right) t \tilde{\Delta} t = \sum_{j=0}^{\frac{hn}{6}-1} \left(\frac{1}{6} - \frac{j}{hn}\right) \frac{j}{hn} h.$$

$$\begin{aligned} |f^\Delta(b)| &= (f(nh+h) - f(nh))h, \\ |f^\Delta(a)| &= (f(h) - f(0))h. \end{aligned}$$

Elde edilen tüm değerler eşitsizliğin sağ tarafına yazılırsa,

$$RHS = \frac{h^2}{72} \{ (f(nh+h) - f(nh))(5hn-6) + (f(h) - f(0))(5hn+6) \}.$$

Aynı durum sol taraf için de uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6}(f(a) + f(b)) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(x) \Delta x \right| \\ &= \left| \frac{2}{3}f\left(\frac{nh}{2}\right) + \frac{1}{6}(f(0) + f(nh)) - \frac{1}{nh} \sum_{j=1}^n f(jh) \right| \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.3. Teorem 4.1.1. de $f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b)$ olarak alınırsa şu sonucu elde ederiz.

$$\left| x_{\frac{n}{2}} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right| \leq \frac{n}{72} \{(x_{n+1} - x_n)(5n - 6) + (x_1 - x_0)(5n + 6)\}.$$

Teorem 4.1.2. $\mathbb{T}$ ve $\tilde{\mathbb{T}}$ birer zaman skalası, $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$, $v = \frac{t-a}{b-a}$ olmak üzere, $f: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde delta diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $a < b$ ve $a, \frac{5a+b}{6}, \frac{a+b}{2}, \frac{5b+a}{6}, b \in I_{\mathbb{T}}$ için $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şartı ile $|f^\Delta|^p$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde konveks ise

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ $a = 0, b = n, t = i$ ve $f(k) = x_k$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left| \frac{1}{6} \left[x_0 + 4x_{\frac{n}{2}} + x_n \right] - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right| \leq \frac{n^2}{72} 10^{\frac{1}{q}} \{(x_{n+1}^q - x_n^q)(5n - 6) + (x_1^q - x_0^q)(5n + 6)\}^{\frac{1}{p}}.$$

İspat. Lemma 4.1. ve Hölder Eşitsizliğinden,

$$\left| \frac{1}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(t) \Delta t \right| \leq (b-a) \int_0^1 |k(t)f^\Delta(tb + (1-t)a)| \tilde{\Delta} t$$

$$\leq (b-a) \left(\int_0^1 |k(t)| \tilde{\Delta} t \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |k(t)| |f^\Delta(tb + (1-t)a)|^p \tilde{\Delta} t \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$|f^\Delta|^p$ fonksiyonu konveks fonksiyon olduğundan ikinci integralde

$$\int_0^1 |k(t)| |f^\Delta(tb + (1-t)a)|^p \tilde{\Delta} t \leq \int_0^1 |k(t)| (t|f^\Delta(b)|^p + (1-t)|f^\Delta(a)|^p)$$

elde edilir. Teorem 4.1.1. ispatına benzer yöntem uygulanarak aşağıdaki eşitsizliği elde etmek mümkündür:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |k(t)| (t|f^\Delta(b)|^p + (1-t)|f^\Delta(a)|^p) \\ & \leq \frac{n}{72} \{(x_{n+1}^q - x_n^q)(5n-6) + (x_1^q - x_0^q)(5n+6)\}. \end{aligned}$$

1. integralde ise Lemma 4.1. den,

$$\int_0^1 |k(t)| \tilde{\Delta} t = \int_0^{\frac{1}{2}} \left| t - \frac{1}{6} \right| \tilde{\Delta} t + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left| t - \frac{5}{6} \right| \tilde{\Delta} t = \frac{5n}{36}$$

elde edilir ve teorem 4.1.2. de yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Örnek 4.1.2. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = x^2$ olmak üzere Teorem 4.2.1 te $a = 0$ ve $b = 12, p = q = 2$ değerleri için eşitsizliğin sağlanıp sağlanmadığına bakalım.

Çözüm. $f(x) = x^2$ olduğundan, $x_0 = 0, x_6 = 36$ ve $x_{12} = 144$

$$\frac{1}{12} \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{1}{12} \left(\frac{12 \cdot 13 \cdot 25}{6} \right) = 54,16$$

$n = 12$ için

$$|x_{13} - x_{12}| = 169 - 144 = 25 \text{ ve } |x_1 - x_0| = 1 \text{ ve}$$

$$\frac{n^2}{72} 10^{\frac{1}{q}} \{(x_{n+1}^q - x_n^q)(5n - 6) + (x_1^q - x_0^q)(5n + 6)\}^{\frac{1}{p}} = 75,24\sqrt{10}.$$

$$\left| \frac{1}{6} [0 + 144 + 144] - 54,16 \right| = 6,16.$$

Buradan $6,16 \leq 75,24\sqrt{10}$ sonucu elde edilir ve eşitsizliğin doğruluğu örnek üzerinde de sağlanır.

Sonuç 4.1.4. Teorem 4.1.2. de $M = \sup_{a < t < b} |f^\Delta(t)|$ olarak kabul edilirse, aşağıdaki sonuç sağlanır:

$$\left| \frac{1}{6} \left[x_0 + 4x_{\frac{n}{2}} + x_n \right] - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right| \leq \frac{5n^{\frac{1}{p}+2}}{36} M.$$

Sonuç 4.1.5. Teorem 4.1.2. de $f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b)$ olarak alınırsa şu sonucu elde ederiz.

$$\begin{aligned} & \left| x_{\frac{n}{2}} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right| \\ & \leq \frac{n^2}{72} 10^{\frac{1}{q}} \{(x_{n+1}^q - x_n^q)(5n - 6) + (x_1^q - x_0^q)(5n + 6)\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

4.2. Quasi-Konveks Fonksiyonlar için Simpson Tipli Eşitsizlikler

Teorem 4.2.1. $\mathbb{T}$ ve $\tilde{\mathbb{T}}$ birer zaman skalası, $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$, $v = \frac{t-a}{b-a}$ olmak üzere,

$f: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde delta diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun.

Eğer $a < b$ ve $a, \frac{5a+b}{6}, \frac{a+b}{2}, \frac{5b+a}{6}, b \in I_{\mathbb{T}}$ için $|f^{\Delta}|$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde *quasi-konveks* ise

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ $a = 0, b = n, t = i$ ve $f(k) = x_k$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left| \frac{1}{6} \left[x_0 + 4x_{\frac{n}{2}} + x_n \right] - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right| \leq \frac{5n}{36} \max\{|x_{n+1}| - |x_n|, |x_1 - x_0|\}.$$

İspat. Lemma 4.1. ve $k(t)$ fonksiyonunun tanımından aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^{\sigma}(x) \Delta x \right| \\ &= (b-a) \left| \int_0^1 k(t) f^{\Delta}(tb + (1-t)a) \tilde{\Delta} t \right| \\ &\leq (b-a) \int_0^1 |k(t) f^{\Delta}(tb + (1-t)a)| \tilde{\Delta} t. \end{aligned}$$

$|f^{\Delta}|$ fonksiyonu *quasi-konveks* fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned} & (b-a) \int_0^1 |k(t) f^{\Delta}(tb + (1-t)a)| \tilde{\Delta} t \\ &\leq \int_0^1 |k(t)| \max\{|f^{\Delta}(b)|, |f^{\Delta}(a)|\} \tilde{\Delta} t \end{aligned}$$

$$= \max\{|f^\Delta(b)|, |f^\Delta(a)|\} \int_0^1 |k(t)| \tilde{\Delta}t.$$

Yukarıdaki eşitlikte $\int_0^1 |k(t)| \tilde{\Delta}t$ integralinin değeri,

$$\int_0^1 |k(t)| \tilde{\Delta}t = \int_0^{\frac{1}{2}} \left|t - \frac{1}{6}\right| \tilde{\Delta}t + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left|t - \frac{5}{6}\right| \tilde{\Delta}t = \frac{5n}{36}.$$

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için $a = 0, b = n, t = i$ ve $f(k) = x_k$ olarak alınırsa eşitsizliğin sol tarafı aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(x) \Delta x \right| \\ &= \left| \frac{1}{6} \left[x_0 + 4x_{\frac{n}{2}} + x_n \right] - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right|. \end{aligned}$$

$|f^\Delta(b)| = x_{n+1} - x_n$ ve $|f^\Delta(a)| = x_1 - x_0$ olacağından sağ taraf ise,

$$RHS = \frac{5n}{36} \max\{|x_{n+1}| - |x_n|, |x_1 - x_0|\}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Örnek 4.2.1. Teorem 4.2.1. de $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = x^2$ olmak üzere $a = 0$ ve $b = 12$ değerleri için eşitsizliğin sağlanıp sağlanmadığına bakalım.

Çözüm. $f(x) = x^2$ olduğundan, $x_0 = 0$, $x_6 = 36$ ve $x_{12} = 144$

$$\frac{1}{12} \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{1}{12} \left(\frac{12 \cdot 13 \cdot 25}{6} \right) = 54,16$$

$$|x_{13} - x_{12}| = 169 - 144 = 25 \text{ ve } |x_1 - x_0| = 1$$

ve $n = 12$ için

$$\left| \frac{1}{6} \left[x_0 + 4x_{\frac{n}{2}} + x_n \right] - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right| = |-6,16|$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{5n}{36} \max\{|x_{n+1}| - |x_n|, |x_1 - x_0|\} &= \frac{5 \times 12}{36} \max\{25, 1\} \\ &= 41,6. \end{aligned}$$

Sonuç olarak, $|-6,16| \leq 41,6$ elde edilir ve eşitsizliğin doğruluğu örnek üzerinde de sağlanmış olur.

Sonuç 4.2.1. Teorem 4.2.1. de $M = \sup_{a < t < b} |f^\Delta(t)|$ olarak kabul edilirse, aşağıdaki sonuç ortaya çıkar.

$$\left| \frac{1}{6} \left[x_0 + 4x_{\frac{n}{2}} + x_n \right] - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right| \leq \frac{5n}{36} M$$

Sonuç 4.2.2. Teorem 4.2.1. de $f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b)$ olarak alınırsa şu sonucu elde ederiz.

$$\left| x_{\frac{n}{2}} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right| \leq \frac{5n}{36} \max\{|x_{n+1}| - |x_n|, |x_1 - x_0|\}.$$

Teorem 4.2.2. $\mathbb{T}$ ve $\tilde{\mathbb{T}}$ birer zaman skalası, $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$, $v = \frac{t-a}{b-a}$ olmak üzere,

$f: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde delta diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun.

Eğer $a < b$ ve $a, \frac{5a+b}{6}, \frac{a+b}{2}, \frac{5b+a}{6}, b \in I_{\mathbb{T}}$ için $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şartı ile $|f^\Delta|^p$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde *quasi*-konveks ise,

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ $a = 0, b = n, t = i$ ve $f(k) = x_k$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left| \frac{1}{6} \left[x_0 + 4x_{\frac{n}{2}} + x_n \right] - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right| \leq \frac{5n^2}{36} [\max\{|x_{n+1} - x_n|^p, |x_1 - x_0|^p\}]^{\frac{1}{p}}.$$

İspat. Lemma 4.1. ve Hölder Eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(t) \Delta t \right| \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left| t - \frac{1}{6} \right| |f^\Delta(tb + (1-t)a)| \tilde{\Delta} t + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left| t - \frac{5}{6} \right| |f^\Delta(tb + (1-t)a)| \tilde{\Delta} t \\ &\leq \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left| t - \frac{1}{6} \right| |f^\Delta(tb + (1-t)a)|^p \tilde{\Delta} t \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left| t - \frac{1}{6} \right| \tilde{\Delta} t \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$+ \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left| t - \frac{5}{6} \right| |f^\Delta(tb + (1-t)a|^p \tilde{\Delta}t \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left| t - \frac{5}{6} \right| \tilde{\Delta}t \right)^{\frac{1}{q}}.$$

$|f^\Delta|^p$ fonksiyonu *quasi-konveks* fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left| t - \frac{1}{6} \right| |f^\Delta(tb + (1-t)a|^p \tilde{\Delta}t \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left| t - \frac{1}{6} \right| \tilde{\Delta}t \right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left| t - \frac{5}{6} \right| |f^\Delta(tb + (1-t)a|^p \tilde{\Delta}t \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left| t - \frac{5}{6} \right| \tilde{\Delta}t \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left| t - \frac{1}{6} \right| \max\{|f^\Delta(b)|^p, |f^\Delta(a)|^p\} \tilde{\Delta}t \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left| t - \frac{1}{6} \right| \tilde{\Delta}t \right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left| t - \frac{5}{6} \right| \max\{|f^\Delta(b)|^p, |f^\Delta(a)|^p\} \tilde{\Delta}t \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left| t - \frac{5}{6} \right| \tilde{\Delta}t \right)^{\frac{1}{q}} \\ & = \max\{|f^\Delta(b)|^p, |f^\Delta(a)|^p\}^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left| t - \frac{1}{6} \right| \tilde{\Delta}t \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left| t - \frac{1}{6} \right| \tilde{\Delta}t \right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \max\{|f^\Delta(b)|^p, |f^\Delta(a)|^p\}^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left| t - \frac{5}{6} \right| \tilde{\Delta}t \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left| t - \frac{5}{6} \right| \tilde{\Delta}t \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olduğundan yukarıdaki integralleri kritik noktalarına göre hesaplayalım.

$$\int_0^{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6} - t\right) \tilde{\Delta} t = \sum_{j=0}^{\frac{n}{6}-1} \left(\frac{1}{6} - \frac{j}{n}\right) = \frac{n+6}{72},$$

$$\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{6} - t\right) \tilde{\Delta} t = \sum_{j=\frac{n}{6}}^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{j}{n} - \frac{1}{6}\right) = \frac{n-3}{18},$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}} \left(\frac{5}{6} - t\right) \tilde{\Delta} t = \sum_{j=\frac{n}{2}}^{\frac{5n}{6}-1} \left(\frac{5}{6} - \frac{j}{n}\right) = \frac{n+3}{18} \text{ ve}$$

$$\int_{\frac{5}{6}}^1 \left(t - \frac{5}{6}\right) \tilde{\Delta} t = \sum_{j=\frac{5n}{6}}^{n-1} \left(\frac{j}{n} - \frac{5}{6}\right) = \frac{n-6}{72}.$$

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ $a = 0, b = n, t = i$ ve $f(k) = x_k$ olmak üzere eşitsizliğin sol tarafı,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(t) \Delta t \right| \\ &= \left| \frac{1}{6} \left[x_0 + 4x_{\frac{n}{2}} + x_n \right] - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right|. \end{aligned}$$

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için $|f^\Delta(b)| = x_{n+1} - x_n$ ve $|f^\Delta(a)| = x_1 - x_0$ olacağından sağ taraf ise,

$$\begin{aligned} RHS &= n \left(\frac{5n+6}{72} + \frac{5n-6}{72} \right) [\max\{|x_{n+1} - x_n|^p, |x_1 - x_0|^p\}]^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{5n^2}{36} [\max\{|x_{n+1} - x_n|^p, |x_1 - x_0|^p\}]^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

sonucu elde edilir ve ispat tamamlanır.

Örnek 4.2.2. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = x^2$ olmak üzere Teorem 4.2.2 de $a = 0$ ve $b = 12, p = q = 2$ değerleri için eşitsizliğin sağlanıp sağlanmadığına bakalım.

Çözüm. $f(x) = x^2$ olduğundan, $x_0 = 0, x_6 = 36$ ve $x_{12} = 144$

$$\frac{1}{12} \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{1}{12} \left(\frac{12 \cdot 13 \cdot 25}{6} \right) = 54,16$$

$n = 12$ için

$$|x_{13} - x_{12}| = 169 - 144 = 25 \text{ ve } |x_1 - x_0| = 1 \text{ ve}$$

$$\frac{5n^2}{36} [\max\{|x_{n+1} - x_n|^p, |x_1 - x_0|^p\}]^{\frac{1}{p}} = 500$$

$$\left| \frac{1}{6} [0 + 144 + 144] - 54,16 \right| = 6,16$$

$6,16 \leq 500$ ifadesi elde edilir ve eşitsizliğin doğruluğu örnek üzerinde de sağlanır.

Sonuç 4.2.4. Teorem 4.1.1. de $M = \sup_{a < t < b} |f^\Delta(t)|$ olarak kabul edilirse, aşağıdaki sonuç ortaya çıkar.

$$\left| \frac{1}{6} \left[x_0 + 4x_{\frac{n}{2}} + x_n \right] - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right| \leq \frac{5n^2}{36} M.$$

Sonuç 4.2.5. Teorem 4.2.2. de $f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b)$ olarak alınırsa şu sonucu elde ederiz.

$$\left| x_{\frac{n}{2}} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right| \leq \frac{5n^2}{36} [\max\{|x_{n+1} - x_n|^p, |x_1 - x_0|^p\}]^{\frac{1}{p}}.$$

4.3. m -Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski Tipli Eşitsizlikler

Teorem 4.3.1. $\mathbb{T}$ ve $\tilde{\mathbb{T}}$ birer zaman skalası ve $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$, $v = \frac{s-a}{b-a}$ olmak üzere,

$f: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde delta diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun.

Eğer $a < b$ ve $a, b, s \in I_{\mathbb{T}}$ için $|f^{\Delta}|$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde m -konveks ise $c \in \tilde{\mathbb{T}}$ için

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \int_0^c s \tilde{\Delta} s & \mu_1 &= \int_c^1 (1-s) \tilde{\Delta} s \\ \lambda_2 &= \int_0^c s^2 \tilde{\Delta} s & \mu_2 &= \int_c^1 (1-s)^2 \tilde{\Delta} s. \end{aligned} \quad (4.1)$$

olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned} & \left| f(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^{\sigma}(u) \Delta u \right| \\ & \leq (b-a) \left\{ (\lambda_2 + \mu_1 - \mu_2) |f^{\Delta}(b)| + m(\mu_2 + \lambda_1 - \lambda_2) \left| f^{\Delta} \left(\frac{a}{m} \right) \right| \right\}. \end{aligned}$$

İspat. Modülün özelliği ve lemma 3.2.2. den,

$$\left| f(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^{\sigma}(t) \Delta t \right|$$

$$\leq (b-a) \left(\int_0^c |s f^\Delta[sb + (1-s)a]| \tilde{\Delta}s + \int_c^1 |(s-1) f^\Delta[sb + (1-s)a]| \tilde{\Delta}s \right)$$

$|f^\Delta|$ fonksiyonu m -konveks fonksiyon olduğundan,

$$(b-a) \left(\int_0^c |s f^\Delta[sb + (1-s)a]| \tilde{\Delta}s + \int_c^1 |(s-1) f^\Delta[sb + (1-s)a]| \tilde{\Delta}s \right)$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\int_0^c s \left[|f^\Delta(b)| + m(1-s) \left| f^\Delta\left(\frac{a}{m}\right) \right| \right] \tilde{\Delta}s \right) \\ &\quad + \left(\int_c^1 |s-1| \left[|f^\Delta(b)| + m(1-s) \left| f^\Delta\left(\frac{a}{m}\right) \right| \right] \tilde{\Delta}s \right) \\ &= \left(\int_0^c s^2 \tilde{\Delta}s + \int_c^1 (1-s)s \tilde{\Delta}s \right) |f^\Delta(b)| \\ &\quad + m \left(\int_0^c (1-s)s \tilde{\Delta}s + \int_c^1 (1-s)^2 \tilde{\Delta}s \right) \left| f^\Delta\left(\frac{a}{m}\right) \right| \\ &= \left(\int_0^c s^2 \tilde{\Delta}s + \int_c^1 [(1-s) - (1-s)^2] \tilde{\Delta}s \right) |f^\Delta(b)| \\ &\quad + m \left(\int_0^c [s - s^2] \tilde{\Delta}s + \int_c^1 (1-s)^2 \tilde{\Delta}s \right) \left| f^\Delta\left(\frac{a}{m}\right) \right| \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.1. (Discrete Form). Teorem 4.3.1 de $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ $a = 0, b = n, s = j, t = i$ ve $f(k) = x_k$ alınırsa,

$$\begin{aligned} g(v) &= v(v-1)(2v-1) \\ h(v) &= v(v-1)(3n-2v-1) \end{aligned}$$

olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned} \left| x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right| &\leq \frac{1}{6n} \{ [g(i) + h(n-i)] |x_{n+1} - x_n| \\ &\quad + m[g(n-i) + h(i)] |x_1 - x_0| \}. \end{aligned}$$

İspat. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olduğundan, $f(t) = f(i) = x_i$ ve

$$\begin{aligned} |f^\Delta(b)| &= |x_{n+1} - x_n|, \\ |f^\Delta(a)| &= |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Eğer (4.1.) deki 4 integral $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için hesaplanırsa ispat tamamlanır.

Örnek 4.3.1. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = x^2$ olmak üzere Sonuç 4.3.1 de $a = 0$ ve $b = 12$ ve $m = 1$ değerleri için eşitsizliğin sağlanıp sağlanmadığına bakalım.

Çözüm. $f(x) = x^2$ olduğundan,

$$\left| x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right| = \left| i^2 - \frac{1}{12} \frac{(12)(13)(25)}{2} \right| = |i^2 - 162,5| = 162,5 - i^2$$

ve

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6n} \{ [g(i) + h(n-i)] |x_{n+1} - x_n| + m[g(n-i) + h(i)] |x_1 - x_0| \} \\
&= \frac{1}{72} \{ [g(i) + h(n-i)](25) + [g(n-i) + h(i)](1) \} \\
&= \frac{1}{72} (39336 - 528i - 844i^2 + 96i^3)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Böylelikle eşitsizliğin sol tarafta aldığı değerin sağ tarafta aldığı değerden küçük olduğu görülür, sonucun doğruluğu örnek üzerinde de sağlanmış olur.

Teorem 4.3.2. $\mathbb{T}$ ve $\tilde{\mathbb{T}}$ birer zaman skalası, $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$, $v = \frac{t-a}{b-a}$ olmak üzere, $f: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde delta diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $a < b$, $a, b, t \in I_{\mathbb{T}}$ için $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şartı ile $|f^\Delta|^q$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde m -konveks ise her $c \in \tilde{\mathbb{T}}$ için

$$\lambda_1 = \int_0^c s \tilde{\Delta} s \quad \mu_1 = \int_c^1 (1-s) \tilde{\Delta} s$$

$$\lambda_1 = \int_0^c s^2 \tilde{\Delta} s \quad \mu_2 = \int_c^1 (1-s)^2 \tilde{\Delta} s$$

olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left| f(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(u) \Delta u \right|$$

$$\leq (b-a)(\lambda_1 + \mu_1)^{\frac{1}{p}} + \left\{ (\lambda_2 + \mu_1 - \mu_2) |f^\Delta(b)|^q + m(\mu_2 + \lambda_1 - \lambda_2) \left| f^\Delta\left(\frac{a}{m}\right) \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

İspat. Modülün özelliği ve Lemma 3.2.1. den,

$$\left| f(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(u) \Delta u \right| \leq (b-a) \int_0^1 |k(t,s)| |f^\Delta[sb + (1-s)a]| \tilde{\Delta} s.$$

Hölder Eşitsizliğini kullanacak olursak,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |k(t,s)| |f^\Delta[sb + (1-s)a]| \tilde{\Delta} s \\ & \leq \left(\int_0^1 |k(t,s)| \tilde{\Delta} s \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |k(t,s)| |f^\Delta[sb + (1-s)a]|^q \tilde{\Delta} s \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |k(t,s)| \tilde{\Delta} s &= \int_0^c s \tilde{\Delta} s + \int_c^1 (1-s) \tilde{\Delta} s \\ &= \lambda_1 + v_1. \end{aligned}$$

$|f^\Delta|^q$ fonksiyonu m -konveks fonksiyon olduğu için aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |k(t,s)| |f^\Delta[sb + (1-s)a]|^q \tilde{\Delta} s \\ & \leq \int_0^1 |k(t,s)| \left[s |f^\Delta(b)|^q + (1-s)m \left| f^\Delta\left(\frac{a}{m}\right) \right|^q \right] \tilde{\Delta} s. \end{aligned}$$

Teorem 4.3.1. ispatında kullanılan metodlar burada da kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |k(t, s)| \left[s |f^\Delta(b)|^q + (1-s)m \left| f^\Delta\left(\frac{a}{m}\right) \right|^q \right] \tilde{\Delta} s \\ &= (\lambda_2 + \mu_1 - \mu_2) |f^\Delta(b)|^q + m(\mu_2 + \lambda_1 - \lambda_2) \left| f^\Delta\left(\frac{a}{m}\right) \right|^q. \end{aligned}$$

Son olarak $\lambda_1, v_1, \lambda_2, \mu_2$ integralleri de hesaplanırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.2. Teoremde $M = \sup_{a < t < b} |f^\Delta(t)|^q$ ve $m = 1$ alınırsa ,

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(t) \Delta t \right| \leq (b-a) \{\lambda_1 + v_1\} M.$$

Sonuç 4.3.3. (Discrete Form). Teorem 4.3.2. de $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ $a = 0, b = n, s = j, t = i$ ve $f(k) = x_k$ alınırsa,

$$\begin{aligned} g(v) &= v(v-1)(2v-1) \\ h(v) &= v(v-1)(3n-2v-1) \\ r(v) &= v(v-1). \end{aligned}$$

olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\left| x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right|$$

$$\leq \frac{n^{-\frac{1}{q}}}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{q}} \{[g(i) + h(n-i)]|x_{n+1} - x_n|^q \\ + m[g(n-i) + h(i)]|x_1 - x_0|^q\}^{\frac{1}{q}} [r(i) + r(n-i)]^{\frac{1}{p}}.$$

Sonuç 4.3.4. (Sürekli Durum). $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ için aşağıdaki sonuç yazılır.

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u) du \right| \\ \leq (b-a)^{1-\frac{2}{p}} \left\{ \frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{2} \right\}^{\frac{1}{p}} \\ \times \left\{ \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^3 \right] |f'(b)| + m \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^3 \right] \left| f' \left(\frac{a}{m} \right) \right| \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

4.4. Quasi-Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski Tipli Eşitsizlikler

Teorem 4.4.1. $\mathbb{T}$ ve $\tilde{\mathbb{T}}$ birer zaman skalası ve $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$, $v = \frac{s-a}{b-a}$ olmak üzere, $f: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde delta diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $a < b$ ve $a, b, s \in I_{\mathbb{T}}$ için $|f^{\Delta}|$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde *quasi-konveks* ise her $c \in \tilde{\mathbb{T}}$ için

$$\lambda_1 = \int_0^c s \tilde{\Delta} s \quad \mu_1 = \int_c^1 (1-s) \tilde{\Delta} s$$

olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left| f(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(u) \Delta u \right| \leq (b-a) \{\lambda_1 + \mu_1\} \max\{|f^\Delta(b)|, |f^\Delta(a)|\}.$$

İspat. Modülün özelliği ve lemma 3.2.1 den,

$$\left| f(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(t) \Delta t \right| \leq (b-a) \left(\int_0^c |s f^\Delta[sb + (1-s)a]| \tilde{\Delta} s + \int_c^1 |(s-1) f^\Delta[sb + (1-s)a]| \tilde{\Delta} s \right).$$

$|f^\Delta|$ fonksiyonu *quasi*-konveks fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned} & (b-a) \left(\int_0^c |s f^\Delta[sb + (1-s)a]| \tilde{\Delta} s + \int_c^1 |(s-1) f^\Delta[sb + (1-s)a]| \tilde{\Delta} s \right) \\ & \leq (b-a) \left(\int_0^c s \max\{|f^\Delta(b)|, |f^\Delta(a)|\} \tilde{\Delta} s + \int_c^1 |s-1| \max\{|f^\Delta(b)|, |f^\Delta(a)|\} \tilde{\Delta} s \right) \\ & = \max\{|f^\Delta(b)|, |f^\Delta(a)|\} \left(\int_0^c s \tilde{\Delta} s \right) + \max\{|f^\Delta(b)|, |f^\Delta(a)|\} \left(\int_c^1 |s-1| \tilde{\Delta} s \right) \\ & = \max\{|f^\Delta(b)|, |f^\Delta(a)|\} \left(\int_0^c s \tilde{\Delta} s + \int_c^1 |s-1| \tilde{\Delta} s \right) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.4.1. Teorem 4.4.1. de $M = \sup_{a < t < b} |f^\Delta(t)|$ alınırsa,

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(t) \Delta t \right| \leq (b-a)\{\lambda_1 + \mu_1\}M.$$

Sonuç 4.4.2. (Discrete Form). Teorem 4.4.1. de $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ $a = 0, b = n, s = j, t = i$ ve $f(k) = x_k$

$$g(i) = \frac{(i-1)i}{2}, \quad h(i, n) = -\frac{1}{2}(i-3n+3)(i-n)$$

olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik elde sağlanır.

$$\left| x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right| \leq n\{[g(i) + h(i, n)] \max\{|x_{n+1} - x_n| + |x_1 - x_0|\}\}$$

İspat. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olacağından eşitsizliğin sağ tarafı için,

$$\begin{aligned} \int_0^c s \tilde{\Delta} s &= \sum_{s=0}^{i-1} s = \frac{(i-1)i}{2} \\ \int_c^1 (1-s) &= \sum_{j=0}^{n-1-i} 1 - (s+i) = -\frac{1}{2}(i-3n+3)(i-n) \end{aligned}$$

yazılır. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ de $f(t) = f(i) = x_i$ ve

$$\begin{aligned} |f^\Delta(b)| &= |x_{n+1} - x_n|, \\ |f^\Delta(a)| &= |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Eşitsizliğin sol tarafında ise

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^{\sigma}(t) \Delta t \right| = \left| x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right|$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanır.



5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada farklı türden konveks fonksiyonlar için delta integraller içeren eşitsizlikler elde edilmiştir. Ayrıca bu eşitsizliklerin özel durumları için farklı sonuçlar elde edilmiştir. İlgili araştırmacılar tez çalışmasında kullanılan yöntemleri kullanabilir veya geliştirebilir. Tezin kendisi bu konu hakkında bir ön çalışma niteliğine de sahiptir.



KAYNAKÇA

- Agarwal, R. P., Bohner, M. and Peterson, A. 2004. Inequalities on Time scales: A Survey. *Math. Inequal. Appl.* 4, 535-557.
- Agarwal, R., O'Regan, D. and Saker, S. 2014. *Dynamic Inequalities On Time Scales*. Springer International Publishing, Cham, Switzerland.
- Alhbrandt, C. D. and Morian, C. 2002. Partial differential equations on time scales. *Journal of computational and Applied Mathematics*, 141, no.1-2, 35-55.
- Alomari, M. 2011. Several Inequalities Of Hermite–Hadamard, Ostrowski and Simpson Type for s-Convex, Quasi-Convex and r-Convex Mappings With Some Applications. Ph.D. Thesis, Universiti Kebangsaan Malaysia Bangi, Malezya.
- Alomari, M., Darus, M., Dragomir, S. and Cerone, P. 2010. Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are s-convex in the second sense. *Appl. Math. Lett.*, 23, 1071-1076.
- Anastassiou, G. 2015. *Frontiers In Time Scales And Inequalities*. World Scientific Publishing Company Inc.
- Anderson, G., Vamanamurthy, M. and Vuorinen, K. 2007. Generalized convexity and Inequalities. *J. Math. Anal. Appl.*, 335, 1294-1308.
- Avcı Ardiç, M. 2013. Konveks Fonksiyonların Çeşitli Sınıfları için İntegral Eşitsizlikler. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Azpeitia, A. 1994. Convex Functions and the Hadamard inequality. *Colombiana: Rev. Colombiana Mat.*, 28, 7-12.
- Bayraktar, M. 2000. *Fonksiyonel Analiz*. ISBN 975-442-035-1.
- Beckenbach, E. 1948. *Convex Functions*. Bull. Amer. Math. Soc.
- Beckenbach, E. and Bellman, R. 1961. *Inequalities*. Springer-Verlag, 198 pp., Berlin.
- Beckenbach, E. and Bellman, R. 1975. *An Introduction to Inequalities*. ISBN 0-394-01559-2 b. Random House Inc.
- Bohner, M. and Guseinov, G. S. 2005. Multiple integration on time scales. *Dynamic Systems and Applications* 14, no. 3-4, 579-606.
- Bohner, M. and Matthews, T. 2008. Ostrowski Inequalities on Time Scales. *Journal of Inequalities in pure and applied math.*, 1(9), 6-8.
- Bohner, M. and Peterson, A. 2001. *Dynamic Equations on Time Scales*. Boston, MA: Birkhäuser Boston Inc.
- Bohner, M. and Peterson, A. 2003. *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*. Birkhäuser Basel.
- Breckner, W. 1978. Stetigkeitssagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen Räumen. *Publ. Inst. Math.*(23), 13-20.
- Bullen, P. 2003. *Handbook of Means and Their Inequalities*. Dordrecht: Kluwer Academic, 537 pp, The Netherlands.
- Dinu, C. 2008. Convex Functions on Time Scales. *Annals of the University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.*, (35), 87-96.
- Dragomir, S. and Pearce, C. 1998. Quasi-convex functions and Hadamard's inequality. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 57, 377-385.

- Dragomir, S. and Pearce, C. 2000. Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications. RGMIA, Monographs, <http://rgmia.vu.edu.au/monographs.html> (10.10.2010).
- Dragomir, S., Agarwal, R. and Barnett, N. 2000. Inequalities for Beta and Gamma Functions via Some Classical and New Integral Inequalities. *J. of Inequal. and Appl.*(5), 103-165.
- Ekinci, A. 2014. Klasik Eşitsizlikler Yoluyla Konveks Fonksiyonlar için İntegral Eşitsizlikler. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Ekinci, A. 2018. Inequalities for Convex Functions on Time Scales.(submitted)
- Greenberg, H. and Pierskalla, W. 1970. Review of quasi convex functions. Reprinted from *Operations Research*, 19(7).
- Hardy, G., Littlewood, J. and Polya, G. (1952). *Inequalities*. 2 nd Ed, University Press, 324, United Kingdom.
- Hudzik, H. and Maligranda, L. 1994. Some remarks on s-convex functions. *A equations Math.*, 48, 100-111.
- Ion, D. 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions. *Annals of University of Cariova: Math.Comp.Sci. Ser.*, 34, 82-87.
- Mitrinović, D. S. 1970. *Analytic Inequalities*. Springer-Verlag, Berlin.
- Mitrinović, D. S., Pecaric, J. E. and Fink, A. M. 1991. *Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivates*. Kluwer Academic Publishers, 587 pp, Dordrecht/Boston/London.
- Mitrinović, D. S., Pečarić, J. E. and Fink, A. M. 1993. *Classical and New Inequalities in Analysis*. Kluwer Academic Publishers, 740, UK.
- Orlicz, W. 1961. A note on modular spaces. I .*Bull. Acad. Polon Sci. Ser. Math. Astronom. Phsy.*, 9, 157-162.
- Özkan, U. M. 2007. Zaman Skalasında İntegral Eşitsizlikleri ve Uygulamaları. Doktora Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi .
- Pachpatte, B. G. 2005. *Mathematical Inequalities*. Elsevier B.V., 591 pp, Amsterdam, The Netherlands.
- Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, Y. L. 1992. *Convex Functions, Partial Orderings and Stastical Applications*. Academic Press, Inc.
- Rehák, P. 2005. Hardy Inequality on Time Scales and its Application to Half-Linear Dynamic Equations. *J. Inequal. Appl.* 5, 495-507.
- Toader, G. 1984. Some Generalisations of the Convexity. *Proc. Colloq. Approx. Optim, Cluj-Napoca*, 329-338, Romanya.
- Toader, G. 1988. On a generalization of the convexity. *Mathematica*, 30(53), 83-87.
- Toader, G. 1991. Means and Convexity. *Studia Univ.* , 4(36), 45-52.
- Wong, F., Yeh, C. and W.C., L. 2006. An Extension of Jensens Inequality on Time Scales. *Advances in Dynamical Systems and Applications*, 113-120.
- Yang, B. 2000. On a generalization of Hardy–Hilbert's integral inequality with a best value. *Ann. Math. Ser. A., Chinese*.
- Zhang, T., Ji, A. and Qi, F. 2012. On İntegral İnequalities of Hermite-Hadamard Type for s-Geometrically Convex Functions, *Abstract and Applied Analysis*. doi:10.1155/2012/560856

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Gamze Salman
Doğum Yeri ve Tarihi	04/03/1993 - Ağrı
Eğitim Durumu	
Lisans Öğrenimi	Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fak. İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü.
Yüksek Lisans Öğrenimi	Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fak.
Bildiği Yabancı Diller	İngilizce
Bilimsel Faaliyetler	
İş Deneyimi	
Stajlar	MEB
Projeler	TUBİTAK
Çalıştığı Kurumlar	MEB
İletişim	
E-posta Adresi	gamzesalman1993@gmail.com
Mezuniyet Tarihi	
31/08/2018	