

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**FARKLI YAPILARDAKİ EN KISA YOL ŞEBEKE ENGELLEME PROBLEMLERİ
İÇİN MATEMATİKSEL MODEL ÖNERİLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Endüstri Mühendisi Ertuğrul AYYILDIZ

**HAZİRAN 2017
TRABZON**



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ENDÜSTR

FARKLI YAPILARDAK

Endüstri Mühendisi Ertu

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce

Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 23 / 05 / 2017

Tezin Savunma Tarihi : 13 / 06 / 2017

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Emrullah DEM

Trabzon 2017

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalında
Ertuğrul AYYILDIZ Tarafından Hazırlanan**

**FARKLI YAPILARDAKİ EN KISA YOL ŞEBEKE ENGELLEME PROBLEMLERİ
İÇİN MATEMATİKSEL MODEL ÖNERİLERİ**

**başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 16/ 05/ 2017 gün ve 1702 sayılı
kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak kabul edilmiştir.**

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Cevriye GENCER

Üye : Doç. Dr. Emrullah DEMİRCİ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Gökhan ÖZÇELİK



Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın amacı, başlangıç ve bitiş sayıları farklılık gösteren şebekelerdeki en kısa yolu kullanmak isteyen kullanıcı açısından en önemli bağlantıların tespit edilmesine yönelik matematiksel modeller geliştirmektir. Bu amaç doğrultusunda kapsamlı bir yayın taraması yapılmış, farklı yapılarda şebekeler oluşturulmuş ve bu şebekeler için matematiksel modeller geliştirilerek örnek uygulamalardaki önemli bağlantılar tespiti edilmiştir.

Bu çalışmanın her aşamasında bilgisini ve zamanını benimle paylaşan, çalışma boyunca yardım ve desteğini esirgemeyen, danışman hocam Sayın Doç. Dr. Emrullah DEMİRCİ'ye; tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösteren ve destek olan değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Gökhan ÖZÇELİK'e, hayatım boyunca maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme, tez çalışmam boyunca yardımını hiç esirgemeyen bölüm hocalarım ve araştırma görevlisi çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ertuğrul AYYILDIZ
Trabzon 2017

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Farklı Yapılardaki En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemleri için Matematiksel Model Önerileri” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Doç. Dr. Emrullah Demirci’nin sorumluluğunda tamamladığımı, verileri kendim topladığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim13/06/2017

Ertuğrul AYYILDIZ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZIII

TEZ ETİK BEYANNAMESİ..... IV

İÇİNDEKİLER..... V

ÖZET VII

SUMMARY VIII

ŞEKİLLER DİZİNİ..... IX

TABLolar DİZİNİ..... X

SEMBOLLER DİZİNİ XI

1. GENEL BİLGİLER 1

1.1. Giriş..... 1

1.2. Şebeke Engelleme Problemi 1

1.3. En Kısa Yol Problemi 3

1.4. En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi..... 5

1.5. Yayın Taraması 5

1.5.1. Şebeke Engelleme Problemleri ile İlgili Literatür Araştırması 6

1.5.2. En Kısa Yol Şebeke Engelleme ile İlgili Literatür Araştırması 7

1.6. Literatüre Katkı 12

2. ELE ALINAN PROBLEMLER..... 14

2.1. Tek Başlangıç Tek Bitişli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi..... 14

2.2. Çok Başlangıç Tek Bitişli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi 14

2.3. Tek Başlangıç Çok Bitişli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi 15

2.4. Çok Başlangıç Çok Bitişli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi..... 15

2.5. Çok Başlangıç Çok Bitişli Kapasiteli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi 15

3. MATEMATİKSEL MODELLER 17

3.1. Tek Başlangıç Tek Bitişli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi Matematiksel Modeli 17

3.2. Çok Başlangıç Tek Bitişli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi Matematiksel Modeli 21

3.3. Tek Başlangıç Çok Bitişli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi Matematiksel Modeli 26

3.4. Çok Başlangıç Çok Bitişli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi Matematiksel Modeli	29
3.5. Çok Başlangıç Çok Bitişli Kapasiteli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi Matematiksel Modeli	34
4. UYGULAMALAR	40
4.1. Tek Başlangıç Tek Bitişli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi Matematiksel Modelinin Uygulanması.....	40
4.2. Çok Başlangıç Tek Bitişli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi Matematiksel Modelinin Uygulanması.....	45
4.3. Tek Başlangıç Çok Bitişli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi Matematiksel Modelinin Uygulanması.....	50
4.4. Çok Başlangıç Çok Bitişli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi Matematiksel Modelinin Uygulanması.....	54
4.5. Çok Başlangıç Çok Bitişli Kapasiteli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi Matematiksel Modelinin Uygulanması	60
5. BULGULAR VE İRDELEME	67
5.1. Dinamiklik	67
5.2. Kapasite.....	71
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	72
7. KAYNAKLAR	74
ÖZGEÇMİŞ	

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

FARKLI YAPILARDAKİ EN KISA YOL ŞEBEKE ENGELLEME PROBLEMLERİ İÇİN MATEMATİKSEL MODEL ÖNERİLERİ

Ertuğrul AYYILDIZ

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Emrullah DEMİRCİ
2017, 80 sayfa

Firmalar rekabet ortamında hayatlarını devam ettirebilmek için her türlü temel süreçlerinde en hızlı çözümlere ulaşmak durumundadırlar. Aynı şekilde acil durumlarda yardımın en hızlı şekilde en kısa yoldan ulaşması hayati öneme sahiptir. Bu bağlamda günümüz dünyasında ekonomi, işletme, mühendislik, askeri, acil durum lojistiği gibi pek çok alanda en kısa yol problemlerinin uygulamalarıyla karşılaşmaktadır. Kimi taraflar ise rakiplerinin süreçlerini uzatmak amacındadırlar. Bu süreçler ticari etkinlikler olabileceği gibi yardımın olabildiğince hızlı olması gereken acil durum içeren terörist aksiyonları da olabilmektedir. Bu bağlamda şebeke üzerindeki önemli bağlantıların tespit edilmesi oldukça önemlidir. Bu tez kapsamında, en kısa yolu kullanmak amacıyla şebekeyi işleten taraf ve bu tarafın en kısa yolunu engellemeler yaparak uzatmayı deneyen engelleyici taraf olmak üzere iki tarafın bulunduğu farklı başlangıç ve bitiş düğümü sayısı içeren en kısa yol şebeke engelleme problemleri ele alınmıştır. Problemler, lider ve takipçi olarak adlandırılan rakip iki tarafın bulunduğu iki kişilik oyun şeklinde düşünülerek, hızlı bir şekilde optimum çözüm veren matematiksel modeller hazırlanmıştır. Çalışmada, hazırlanan matematiksel modeller örnek şebekelerde uygulanarak nümerik sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Şebeke Engelleme Problemi, En Kısa Yol, Doğrusal Programlama, Karışık Tam Sayılı Programlama, En Önemli Bağlantı

Master Thesis

SUMMARY

MATHEMATICAL MODEL RECOMMENDATIONS FOR THE SHORTEST PATH NETWORK INTERDICTION PROBLEMS IN DIFFERENT STRUCTURES

Ertuğrul AYYILDIZ

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Industrial Engineering Graduate Program
Supervisor: Assoc. Prof. Emrullah DEMİRCİ
2017, 80 Pages

Companies have to reach the fastest solutions in their every basic process in order to be able to continue their lives in a competitive environment. Likewise, in the event of an emergency, the fastest way to get help from the shortest path has a vital importance. In this concept, there are many applications of shortest path problems in the field such as economy, business, engineering, military, emergency logistics in today's world. Some sides aim to prolong the their opponents processes' times. These processes can be commercial activities or terrorist acts that involve emergency situations that need to be helped as quickly as possible. In this context, it is very important to identify the important links on the network. In this study, the shortest path network interdiction problems are dealt with which include the number of different start and end nodes in which the two sides, namely the network operator who is trying to use the shortest path and the interdictor side who tries to maximize by making interdiction to the shortest path of operator. The problems are thought of as a two-player game with two opponents, called leaders and followers, and then mathematical models have been prepared to provide the optimum solution quickly. In this study, numerical results were obtained by applying the mathematical models to the sample networks.

Keywords: Network Interdiction Problem, Shortest Path, Linear Programming, Mixed Integer Programming, Most Vital Link

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1.	Örnek yönsüz grafik	3
Şekil 2.	10 düğüm 25 bağlantıdan oluşan örnek şebeke (Şebeke 1).....	41
Şekil 3.	Engelleme olmadığı durumda takipçinin rotası (Şebeke 1).....	43
Şekil 4.	Engelleme sayısı 1 olduğunda engellenen bağlantı ve takipçinin rotası (Şebeke 1).....	44
Şekil 5.	11 düğüm 30 bağlantıdan oluşan örnek şebeke (Şebeke 2).....	46
Şekil 6.	Engelleme olmadığı durumda takipçinin rotası (Şebeke 2).....	48
Şekil 7.	Engelleme sayısı 1 olduğunda engellenen bağlantı ve takipçinin rotası (Şebeke 2).....	49
Şekil 8.	11 düğüm 35 bağlantıdan oluşan örnek şebeke (Şebeke 3).....	50
Şekil 9.	Engelleme olmadığı durumda takipçinin rotası (Şebeke 3).....	52
Şekil 10.	Engelleme sayısı 4 olduğunda engellenen bağlantı ve takipçinin rotası (Şebeke 3).....	53
Şekil 11.	12 düğüm 41 bağlantıdan oluşan örnek şebeke	55
Şekil 12.	Engelleme olmadığı durumda takipçinin rotası (Şebeke 4).....	57
Şekil 13.	Engelleme sayısı 2 olduğunda engellenen bağlantı ve takipçinin rotası (Şebeke 4).....	58
Şekil 14.	43 düğüm 234 bağlantıdan oluşan örnek şebeke (Şebeke 5).....	61
Şekil 15.	Engelleme olmadığı durumda takipçinin rotası (Şebeke 5).....	63
Şekil 16.	Engelleme sayısı 5 olduğunda engellenen bağlantı ve takipçinin rotası (Şebeke 5).....	65
Şekil 17.	Engelleme olmadığı durumda takipçinin kullanma kararı verdiği en kısa yol ve takipçinin konumu	68
Şekil 18.	Liderin 1 engelleme yapmasından sonra takipçinin güncellediği en kısa yol ve takipçinin konumu	69
Şekil 19.	Liderin 1+1 engelleme yapmasından sonra takipçinin güncellediği en kısa yol ve takipçinin konumu	70
Şekil 20.	Liderin 1+1+1 engelleme yapmasından sonra takipçinin güncellediği en kısa yol ve takipçinin konumu	71

TABLÖLAR DİZİNİ

Sayfa No

Tablo 1.	Şebeke engelleme ile ilgili çalışmalar	7
Tablo 2.	En kısa yol şebeke engelleme ile ilgili çalışmalar	8
Tablo 3.	Bağlantı uzunlukları (Şebeke 1)	42
Tablo 4.	Farklı bütçe seviyeleri için senaryo sonuçları (Şebeke 1)	45
Tablo 5.	Bağlantı uzunlukları (Şebeke 2)	47
Tablo 6.	Farklı bütçe seviyeleri için senaryo sonuçları (Şebeke 2)	49
Tablo 7.	Bağlantı uzunlukları (Şebeke 3)	51
Tablo 8.	Farklı bütçe seviyeleri için senaryo sonuçları (Şebeke 3)	54
Tablo 9.	Bağlantı uzunlukları (Şebeke 4)	56
Tablo 10.	Farklı bütçe seviyeleri için senaryo sonuçları (Şebeke 4)	59
Tablo 11.	Farklı bütçe seviyeleri için senaryo sonuçları (Şebeke 5)	66

SEMBOLLER DİZİNİ

Semboller	Açıklamalar
A	: Bağlantılar kümesi
A_{s_i}	: Düğüm s_i 'den başlayabilecek sefer sayısı (kapasitesi)
C	: Engellenen yolu kullanmanın cezası
D	: Ara düğümler kümesi
d_{ij}	: Düğüm i ile düğüm j arasındaki uzaklık
F	: Hedef düğümleri kümesi
f_i	: i . hedef düğümü
G	: Graf
I_{f_i}	: Düğüm f_i 'nin ihtiyacı (sonlanması gereken sefer sayısı)
k_{ij}	: Düğüm i ile düğüm j arasındaki bağlantıyı engelleme kararı
N	: Düğümler kümesi
S	: Başlangıç düğümleri kümesi
s_i	: i . başlangıç düğümü
T	: Terörist sayısı
X_{ij}	: Düğüm i 'den düğüm j 'ye sefer sayısı
Y_i	: i . dual değişken
Z^*	: Amaç fonksiyonu

Kısaltmalar	Açıklamalar
CPU	: Central Processing Unit (Merkezi işlem birimi)
GB	: Gigabyte
GHz	: Gigahertz
max	: En büyük
min	: En küçük
RAM	: Random-access memory

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Genel olarak birbirine bağlantılar (yollar, arklar) ile bağlı, düğümlerden oluşan yapılara şebeke denir. Günlük hayatımızın önemli bir kısmında şebeke yapıları yer almaktadır. Yaşamın her alanında kullanılan elektrik, su, doğalgaz gibi altyapı şebekeleri, insanlarla iletişim için kullanılan telekomünikasyon şebekeleri, iki nokta arasında transfer için kullanılan ulaşım ve lojistik şebekeleri, teknoloji çağıyla birlikte hızla gelişen proje şebekeleri, bilgi şebekeleri gibi farklı şebeke yapılarını sıkça görmemiz mümkündür. Şebeke yapılarında fiziksel bir akış söz konusudur. Bu akış kimi zaman istenmeyebilir, örneğin kaçak madde taşınan bir şebeke yapısında, taşınan maddenin engellenmesi istenebilir. Diğer taraftan teröristler insanlara kritik altyapı hizmeti sağlayan şebekelere (su, elektrik, doğalgaz vb.) zarar vererek toplumda huzursuzluk yaratmak isteyebilirler. Böylece karşımıza şebeke engelleme problemleri çıkmaktadır.

Çalışmada ilk olarak şebeke engelleme probleminden ve en kısa yol probleminden bahsedilmiştir. Daha sonra şebeke engelleme modelleri ve çalışmanın ana konusu olan en kısa yol şebeke engelleme problemiyle ilgili literatür çalışmasına yer verilmiştir. Ardından, çalışma kapsamında ele alınan problemleri çözebilmek için hazırlanan modeller uygulamalarıyla birlikte anlatılmıştır.

1.2. Şebeke Engelleme Problemi

Şebeke yapılarının artmasıyla birlikte şebekeler hakkında yapılan çalışmalar hız kazanmıştır. Çalışma yapılan alanlardan biri de şebekenin akışını (işleyişini) bozmaya yönelik engellenmesi (sekteye uğratılması / kesilmesi / bozulması) üzerine kurulu olan şebeke engelleme problemleridir. Şebeke engelleme problemleri, engelleyici ve şebekeyi işleten iki tarafın bulunduğu ve bu iki tarafın birbirine zıt amaçlarının olduğu durumlarda geçerlidir. Şebekeyi işleten taraf, şebekenin optimal bir şekilde işlenmesini sağlamaya çalışırken, engelleyen taraf bunu elindeki kısıtlı kaynaklarla bağlantılar veya

düğümmler üzerinde olumsuz etki yaratarak engellemeye çalışabilir. Şebeke engelleme problemleri her iki tarafın da diğer taraf hakkında bilgi sahibi olduğu varsayımı altında kurgulanmıştır. Yates ve Sanjeevi (2013)'ye göre şebeke engelleme, engelleyeninin sahip olduğu kaynaklar dahilinde şebeke içerisindeki maksimum akışı en küçükmek ya da şebeke içerisindeki en kısa yolu en büyükmek için, şebeke bileşenlerinin bir kısmını engellediği, şebekeyi işleten tarafın ise bu saldırılardan daha az etkilenmek için şebeke bileşenlerini güçlendirdiği, genellikle iki kişilik oyun şeklinde modellenen problemlerdir. Bu tip lider takipçi ilişkisi bulunan model, Stackelberg (1952) oyununa benzemektedir. Bu tip lider takipçi modelleri şebekeyi işleten tarafından bakıldığı zaman, şebekenin sağlıklı bir biçimde işlemlerine devam edebilmesi için, bu iki tarafı da düşünerek şebekenin hassas noktalarının (düğüm ya da bağlantı) belirlenerek, saldırı ve benzeri durumlarda nasıl sonuçlar ortaya çıkacağının ve ne gibi tedbirler alınması gerektiğinin bilinmesi oldukça önemlidir. Engelleyici tarafından bakıldığı takdirde ise karşı tarafın işlettiği şebekeye en büyük zararı vermek amacıyla şebekenin hangi bileşenlerinin engellenmesi gerektiğinin bilinmesi büyük bir öneme sahiptir.

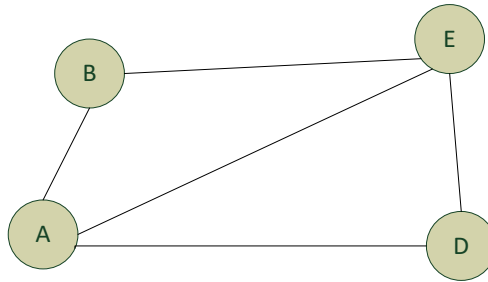
Ball vd. (1989)'e göre zıt amaçlara sahip iki taraf arasındaki karar verme süreci olarak modellenen şebeke engelleme probleminde, takipçi sürekli olarak güncellenen şebeke durumuna göre (engelleme durumlarına göre) en uygun çözümü bulmayı amaçlamaktadır. Buradaki engelleme işlemi, engelleyicinin bütçesi dâhilinde şebekedeki bir bileşenin yok edilmesi ya da etkisinin azaltılması şeklinde gerçekleştirilebilir. Kasımoğlu (2015) şebekelerin rakip bir oyuncunun müdahalesine maruz kalmasının, özellikle rekabetçi ortamlarda ve de bu rekabetin fiziksel müdahaleye dönüştüğü askeri ortamlarda karşılaşılabilecek bir durum olduğunu söylemiştir. Bununla birlikte beklenmeyen bir arıza, kaza veya doğal bir afette, şebekelerin normal işleyişlerine tesir edebilecek bir dış etken olarak değerlendirilebilir. Genelde iki katmanlı olarak kurulan şebeke engelleme modellerinde, içteki model şebekeyi işleten tarafa dıştaki model ise engelleyici tarafa aittir.

Hayatın her alanında elektrik, haberleşme, ulaşım, suç şebekeleri gibi farklı şebeke yapıları ile karşılaşmak mümkündür. Bu bağlamda yapılan çalışmalara bakıldığı takdirde Şebeke Engelleme Problemi'nin çok farklı alanlarda çalışıldığı görülmektedir. Bu alanlardan en sık rastlananları aşağıda sıralanmıştır;

- ✓ Bir şebeke üzerinde en büyük akışın en küçüklenmesi,
- ✓ Bir şebeke üzerindeki en kısa yolun en büyüklenmesi,
- ✓ Kaçakçılık durumlarında, kaçakçılık yapan kimsenin kaçış ihtimalinin en küçüklenmesi amacıyla sensör yerleştirme,
- ✓ Şebekelerin hassasiyet analizi yani saldırı durumunda şebekelerin en az zarar görmesi için güçlendirilmesi gereken şebeke elemanlarının tespiti,
- ✓ Elektrik, doğal gaz, su gibi kritik altyapı şebekelerinin savunulması,
- ✓ Kritik faaliyetlerin engellenerek proje süresinin uzatılması,
- ✓ Askeri birliklerin hareket planlarının oluşturulması,
- ✓ Mal satın alan rakip iki firmanın birbirlerinin tedarik sürecini sekteye uğratması.

1.3. En Kısa Yol Problemi

En kısa yol probleminin temeli; çizge teorisine (graf teorisine) dayanır. Çizge teorisi; düğümler ve bu düğümleri birbirlerine bağlayan bağlantılardan oluşan şebeke yapısını inceleyen bir matematik dalıdır. Bir G grafi N düğümler kümesi, A bağlantılar kümesi olmak üzere iki kümeyle ifade edilir ve $G=(N,A)$ şeklinde gösterilir. Burada bağlantılar yönlü ya da yönsüz olabilir. Ayrıca her bir bağlantının bir değeri vardır. Özetlemek gerekirse bir graf, düğüm olarak adlandırılan noktalar ve bu noktaları birleştiren bağlantı olarak adlandırılan çizgiler topluluğudur.



Şekil 1. Örnek yönsüz graf

Yukarıda gösterilen yönsüz graf için küme gösterimi aşağıda verilmiştir.

$$N = \{A, B, E, D\}$$

$$A = \{(A, B), (A, D), (A, E), (B, E), (B, D), (E, D)\}$$

Şekil 1’de gösterilen örnek graf, yol yapısı olarak düşünülebilir. Burada N kümesi şehirleri, A kümesi aradaki yolları göstermektedir. N kümesindeki şehirler üzerinde yalnızca A kümesi üzerindeki yollar kullanılarak seyahat edilebilir.

Graf teorisi içerisindeki en önemli problemlerden biri en kısa yol problemidir. En kısa yol problemi yönlü, yönsüz veya karışık grafların tümü için geçerli bir problemidir. Bir graf içerisinde yer alan belirli düğümler arasındaki en kısa yolu bulmayı amaçlayan problemin temel olarak üç çeşidi mevcuttur.

- Tek başlangıç düğümlü en kısa yol problemi: Belirtilen bir düğümden diğer tüm düğümlere olan en kısa yolun bulunması
- Tek yol bulunan en kısa yol problemi: Belirtilen iki nokta arasındaki en kısa yolun bulunması
- Tüm ikililer en kısa yol problemi: Graf içerisinde yer alan tüm düğümlerin birbirleri arasındaki en kısa yolların bulunması

Literatüre bakıldığında, farklı amaçlar dâhilinde insanlar iki nokta arasında en hızlı ve en kolay yolu nasıl gideceklerini belirlemeye çalışmışlardır. Bu nedenle en kısa yol problemi üzerinde çokça çalışma mevcuttur. Günümüzde çeşitli çalışma alanlarında görülen en kısa yol probleminin kullanıldığı bazı alanlar aşağıda verilmiştir.

- ✓ Navigasyon cihazlarında güzergâh ayarlanmasında,
- ✓ Limancılık, havacılık, postacılık işlemlerinde,
- ✓ Robot hareket planlamasında,
- ✓ İnternet trafiğinin düzenlenmesinde,
- ✓ Oyun programlamada,
- ✓ Her türlü taşıma gerektiren işlemlerde

Doğrusal programlama modeli şeklinde ifade edilebilen en kısa yol probleminin çözümünde ise kullanılan birçok algoritma mevcuttur. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Dijkstra Algoritması: Dijkstra (1959) tarafından geliştirilen algoritma tek başlangıç düğümlü en kısa yol problemlerinin çözülmesinde kullanılır.

Bellman-Ford Algoritması: Negatif bağlantıların da bulunabildiği tek başlangıç düğümlü en kısa yol problemlerinde kullanılan algoritma ilk olarak Shimbel (1954) tarafından ortaya atılsa da daha sonraki yıllarda çalışma yapan Bellman (1958) ve Ford Jr (1956) un isimleriyle anılmaktadır.

A Yıldız Arama Algoritması: Tek yol bulmada kullanılmak üzere Dijkstra algoritmasının bir versiyonu olarak Hart vd. (1968) tarafından geliştirilmiştir.

Geliştirilen algoritma hızlı ve yüksek doğrulukla çözüm vermesi sebebiyle bilgisayar biliminde sıkça kullanılmaktadır.

Floyd-Warshall Algoritması: Graf içerisinde yer alan tüm düğümlerin birbirine olan en kısa uzaklıklarını bulmada kullanılan algoritmada uzaklıklar negatif ya da pozitif olabilir. Dinamik programlama örneği olan algoritma ilk olarak Floyd (1962) tarafından ortaya çıkarılmıştır.

Johnson Algoritması: Graf içerisinde yer alan tüm düğümlerin birbirine olan en kısa uzaklıklarını bulmada kullanılan algoritma Floyd-Warshall algoritmasından daha hızlı sonuç vermektedir. Ayrıca aralıklı şebekelerde de kullanılabilen algoritma Johnson (1977) tarafından geliştirilmiştir.

Viterbi Algoritması: Graf içerisinde yer alan tüm düğümlerin birbirine olan en kısa uzaklıklarını rassal ağırlıklar altında bulmak için kullanılır. Viterbi (1967) tarafından geliştirilen algoritma Markov modellerinden yararlanmaktadır.

1.4. En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi

En kısa yol problemleri, düğümler ve bağlantılardan oluşan bir şebekede, herhangi bir düğümden herhangi bir düğüme en kısa yoldan (en kısa sürede) ulaşmayı hedefleyen problemlerdir. En kısa yol problemleri şeklinde ele alınan problemlerde, şebekeyi işleten bir tarafın olduğu düşünülebilir. Ancak gerçek hayatta bu kişinin amacını engellemek isteyen tarafların da söz konusu olabileceği unutulmamalıdır. Yani şebeke içerisinde en kısa yolu kullanmak isteyen tarafın kullanabileceği en kısa yolu en büyükmek isteyen bir taraf olduğunda karşımıza en kısa yol şebeke engelleme problemleri çıkmaktadır. Bir sonraki bölümde literatürde yer alan en kısa yol problemleri ayrıntılı şekilde anlatılmıştır.

1.5. Yayın Taraması

Bu bölümde, yarım yüzyıldan daha uzun süreli bir geçmişe sahip olan şebeke engelleme problemi ile ilgili yayın taraması yapılmıştır. Bir sonraki bölümde şebeke engelleme problemlerinin gelişimine ve başlıca çalışmalarına yer verilirken, çalışmanın ana konusu olan en kısa yol şebeke engelleme problemi ile ilgili olan çalışmalar detaylandırılmıştır.

1.5.1. Şebeke Engelleme Problemleri ile İlgili Literatür Araştırması

Şebeke engelleme modellerinin temeli Ford ve Fulkerson (1962)'ın yaptığı çalışmaya dayanmaktadır. Yapılan çalışmada geliştirilen teoriye göre şebeke üzerindeki en büyük akış ile en küçük kesi kümelerinin kapasiteleri birbirine eşittir. Burada bahsedilen kesi kümesi, şebekeden kaldırıldığında şebeke içerisinde yer alan düğümler arasındaki bağlantıların kesilmelerinin oluşturduğu kümedir ve bu kesi kümesinin kapasitesi kesilen bağlantıların toplam kapasitesine eşittir.

Daha sonraki yıllarda yapılan ilk şebeke engelleme çalışmaları ise genellikle şebeke içerisinde yer alan en önemli bileşen ya da bileşenleri belirlemeye yöneliktir. Bu bileşenler ise düğümler ve arklardır. Wollmer (1963) ve Lubore ve Scilia (1971) şebeke üzerindeki en önemli bağlantıyı tespit etmeye yönelik çalışmalar yapmışlardır. Wollmer (1964), Ratliff vd. (1975), Malik vd. (1989), Ball vd. (1989), Lin ve Chern (1993) ve Jiang ve Hu (2011) ise yaptıkları çalışmalarda şebeke üzerindeki en önemli arkları bulmayı amaçlamışlardır. Bu çalışmalar, şebekeden çıkarıldığında şebekeye en çok zarar verecek ark ya da arkları bulmak üzerine yapılmıştır. Ayrıca en önemli arkları tespit etmek için minimum yayılan ağaç (minimum spanning tree) problemi üzerinde de çalışmalar yapılmıştır. Lin ve Chern (1993b), Tsen vd. (1994) ve Shen (1999) minimum yayılan ağacın üzerindeki en önemli arkların tespit edilmesi üzerine çalışmalar gerçekleştirmişlerdir. Corley Jr ve Chang (1974), Nardelli vd. (2003), Jun ve Yue-jin (2005), Zhao vd. (2009), Veremyev vd. (2015) yaptıkları çalışmalarını şebeke üzerindeki en önemli düğüm(node) ya da düğümleri bulmak üzerine yapmışlardır. Corley ve David (1982) yaptıkları çalışmada hem en önemli arkların hem de en önemli düğümlerin bulunmasına yer vermişlerdir.

Literatür incelendiğinde, şebeke engelleme probleminin en sık kullanıldığı problemler, en büyük akışın engellenmesi, en kısa yolun en büyüklenmesidir. Ayrıca sensör yerleştirme alanında çokça çalışma mevcuttur. En büyük akışın engellenmesi ve sensör yerleştirme başlığı altında yer alan çalışmalar Tablo 1'de verilmiştir. Çalışma kapsamında ele alınan en kısa yolun en büyüklenmesine yönelik çalışmalara, sonraki bölümde ayrıntılı bir şekilde yer verilmiştir.

Tablo 1. Şebeke engelleme ile ilgili çalışmalar

Maksimum Akış Şebeke Engelleme ile İlgili Çalışmalar	Sensör Yerleştirme Şebeke Engelleme ile İlgili Çalışmalar
Wollmer (1964)	Pan vd. (2003)
McMasters ve Mustin (1970)	Morton ve Pan (2005)
Wood (1993)	Iranli vd. (2005)
Chern ve Lin (1995)	Morton vd. (2007)
Washburn ve Wood (1995)	Bayrak ve Bailey (2008)
Cormican vd. (1998)	Pan ve Morton (2008)
Bingol (2001)	Santhi ve Pan (2011)
Burch vd. (2003)	Dimitrov vd. (2011)
Royset ve Wood (2007)	Johnson ve Gutfraind 2011)
Smith ve Lim (2008)	Salmerón (2012)
Ramirez-Marquez (2009a)	Zhao vd. (2013)
Ramirez-Marquez (2009b)	Johnson vd. (2014)
Altner vd. (2010)	Yates ve Sanjeevi (2013)
Zenklusen (2010)	Sullivan, Smith, vd. (2014)
Akgün vd. (2011)	Sullivan, Morton, vd. (2014)
Lunday ve Sherali (2012)	Romich vd. (2015)
Rad ve Kakhki (2013)	Karabulut vd. (2016)
Shirdel (2013)	Laan vd. (2017)
Sullivan ve Cole Smith (2014)	
Branch (2015)	
Janjarassuk ve Nakrachata-Amon (2015)	
Afshari Rad ve Kakhki (2017)	
Naoum-Sawaya ve Ghaddar (2017)	

1.5.2. En Kısa Yol Şebeke Engelleme İle İlgili Literatür Araştırması

Literatürde şebeke engelleme problemleriyle ilgili çalışmalara son yıllarda sıkça rastlanmaktadır. Bu çalışmaların odaklandığı ana konulardan biri olan en kısa yol şebeke engelleme problemi ile ilgili literatürde yer alan bazı önemli çalışmalar Tablo 2’de gösterilmiştir.

Tablo 2. En kısa yol şebeke engelleme ile ilgili çalışmalar

En Kısa Yol Şebeke Engelleme ile İlgili Dikkat Çeken Çalışmalar	
Fulkerson ve Harding (1977)	Yates ve Lakshmanan (2011)
Golden (1978)	Yates ve Sanjeevi (2013)
Corley ve David (1982)	Yates vd. (2014)
Ball vd. (1989)	Yates ve Chen (2014)
Malik vd. (1989)	Xiao vd. (2014)
Wevley (1999)	Borrero vd. (2015)
Israeli ve Wood (2002)	Song ve Shen (2016)
Khachiyan vd. (2006)	Casas vd. (2016)
Khachiyan vd. (2008)	Borndörfer vd. (2016)
Bayrak ve Bailey (2008)	Sefair ve Smith (2016)
Ramirez-Marquez ve Rocco (2010)	Lozano ve Smith (2016)
Cappanera ve Scaparra (2011)	Sadeghi vd. (2017)

Fulkerson ve Harding (1977) yaptıkları çalışmada doğrusal bir maliyet fonksiyonuyla, verilen bütçe kısıtı altında geleneksel en kısa yol (kaynak için bir düğüm, bitiş için bir düğüm olan şebeke) problemi üzerinde çalışmışlardır. Arz düğümü başlangıç, talep düğümü bitiş olarak modellenen çalışmada, rakibin en kısa yolunu maksimize eden iki seviyeli matematiksel modeli formüle etmişlerdir.

Golden (1978) çalışmasında, Fulkerson ve Harding (1977)'nin yaptıkları çalışmayı temel almıştır. Buna ek olarak, en az yatırım maliyetini kullanarak rakibin en kısa yolunun uzunluğunu daha önce belirlenen bir miktardan az olmayacak şekilde arttıran bir matematiksel model geliştirmiştir. İki seviyeli maxmin şeklinde kurduğu matematiksel modelde içteki minimizasyon probleminin dual problemini alarak çözüme ulaşmıştır.

Corley ve David (1982) biri engelleyici, biri ise sistemi işleten operatör olmak üzere iki tarafın olduğu bir problem şeklinde klasik en kısa yol problemini modellemişlerdir. Geliştirdikleri algoritmayla da yol üzerindeki en önemli ark ve düğümü bulmaya çalışmışlardır. Kullandıkları algoritmada, önce en kısa yol üzerindeki kritik düğüm ve arklar sırasıyla bulunup, ardından bulunan ark ya da düğümlerin engellenmesiyle yeniden en kısa yol oluşturularak devam edilmiştir. Bunun ardından da oluşturulan yeni en kısa yoldaki en önemli düğüm ya da arklar bulunarak devam

edilmiştir. Bu algoritmanın çok sayıda düğüm ya da arklardan oluşan şebekelerde çalışması oldukça vakit almaktadır.

Ball vd. (1989) ilk olarak en önemli bağlantı problemini, bütçeli en kısa yol probleminin kesikli versiyonu olarak dikkate almışlardır. Yaptıkları çalışmada geleneksel en kısa yol problemindeki en önemli arkların bulunmasını amaçlamışlardır ve bu problemin NP-hard olduğunu göstermişlerdir.

Malik vd. (1989) yaptıkları çalışmada geleneksel en kısa yol problemi üzerinde durmuşlardır. Önemli arkları tespit etmek için daha önceki çalışmalarda olduğu gibi sezgisel bir algoritma kurmuşlardır. Kurdukları algoritma sadece en önemli arkın tespiti için daha önceki çalışmalardan daha hızlı sonuç verebilmiştir. Birden fazla önemli yolun tespit edilmesinde ise Dijkstra algoritmasıyla aynı karmaşıklığa sahiptir. Algoritmaları, yönsüz ve pozitif bağlantılar için çalışabilmektedir.

Israeli ve Wood (2002) en kısa yol şebeke engelleme problemi için iki seviyeli bir matematiksel model hazırlamışlardır. Bu modeli direkt çözebilen tek seviyeli karışık tam sayılı programlama şeklinde formüle ederek sonuçlar almışlardır. Ayrıca iki farklı ayrıştırma yöntemi kullanarak daha etkili sonuçlar alabilmişlerdir. Bunlardan biri Benders (Geoffrion 1972) ayrıştırma metodu iken, diğer metod ise küme örtüleme problemidir.

Khachiyan vd. (2006) yaptıkları çalışmada en kısa yol problemlerinin çözülmesinde kullanılabilen Dijkstra (1959) algoritmasını geliştirerek en kısa yol şebeke engelleme problemi için kullanılabilen özel bir versiyonunu hazırlamışlardır. Hazırladıkları bu yeni algoritma engelleyenin engelleme bütçesi kısıtlı ve engelleyebileceği düğüm sayısı belli olduğu durumlarda polinomiyal zamanda çözüm verebilmektedir.

Khachiyan vd. (2008) en kısa yol şebeke engelleme problemini iki farklı bütçe tipi için ele almışlardır. Birincisi toplam engelleme bütçesi (engellenebilecek ark sayısı) belliyken, ikinci bütçe tipi ise düğüm engelleme bütçesi belliyken yani belirlenen herhangi bir düğüme bağlı arklardan o düğümün bütçesini aşmayacak şekilde engelleme yapılabileceği şeklindedir. Ayrıca kendi algoritmalarını geliştirerek negatif arklarla da çalışabilen bir algoritma hazırlamışlardır.

Bayrak ve Bailey (2008) ise klasik en kısa yol probleminin yeni bir versiyonunu ele almışlardır. Bu yeni versiyonda, problemde yer alan iki tarafın şebeke hakkında farklı bilgi seviyelerine sahip olduğu varsayılmıştır. Örneğin engelleyici, şebeke

üzerinde yer alan arkların uzunluklarını doğru olarak bilmemektedir. Ele aldıkları problemi karışık tam sayılı matematiksel model şeklinde formüle etmişlerdir. Dal sınır (branch and bound) algoritmasını kullanarak matematiksel modeli doğrusal hale getirmişlerdir.

Ramirez-Marquez ve Rocco (2010) en kısa yol şebeke engelleme problemini ilk kez iki amaçlı şekilde formüle etmişlerdir. Bu amaçlar en kısa yolun en büyüklmesi ve engelleme bütçesinin en küçüklenmesi şeklindedir. Ayrıca ilk amacı en kısa yolun güvenliğinin en küçüklenmesi şekline çevirerek ikisi de en küçükleme olan iki amaçlı matematiksel model haline getirmişlerdir. Bu modeli çözmek için Monte Carlo benzetim modeli temelli bir algoritma kullanmışlardır.

Cappanera ve Scaparra (2011) yaptıkları çalışmada en kısa yol problemindeki korunması gereken önemli bileşenleri tespit etmeyi amaçlamışlardır. Bu amaçla üç seviyeli (minmaxmin) bir matematiksel model geliştirmişlerdir. Burada içteki iki seviyeli modelde engelleyici en kısa yolu en büyükleme hedeflerken, temel modelde şebekeyi işleten engelleyici tarafından göreceği zararı en küçükleme hedeflemektedir. Açgözlü algoritma (Greedy algorithm) temelli bir algoritmayla kurdukları modeli çözmüşlerdir. Hazırladıkları model ve algoritmanın büyük boyuttaki problemler için verimli bir algoritma olduğu söylenemez.

Yates ve Lakshmanan (2011) yaptıkları çalışmada sensör yerleştirilmiş bir bölgede en kısa yolu kullanmaya çalışan kullanıcıların olduğu probleme odaklanmışlardır. İki seviyeli olarak kurdukları modelde sensörlerin tespit edebilme yeteneği birbirinden farklıdır. Modeli çözerken çok kriterli sırt çantası problemi (multi criteria knapsack problem) yönteminden yararlanmışlardır. Büyük boyuttaki problemler içinde denemeler yaparak optimal sonuca %95 yaklaşabilmişlerdir.

Yates ve Sanjeevi (2013) çalışmalarında geleneksel en kısa yol probleminden farklı olarak yalnızca bir başlangıç düğümü yerine daha önceden belirlenmiş birden fazla düğümün başlangıç düğümü olabileceğini ve teröristlerin bu başlangıç noktalarından hedefe en kısa yoldan gitmeyi amaçladığını varsaymışlardır. Yollar üzerine sensörler yerleştirilerek, teröristlerin etkinliği azaltmaya çalışmışlardır. Benders ayrıştırma metodunu kullanarak modeli çözmüşlerdir.

Yates vd. (2014) k-en kısa yol problemi (k shortest path) için şebeke engelleme problemine odaklanmışlardır. Benders ayrıştırma metodu kullanarak çözdükleri modeli bir uygulama alanı üzerinde test etmişlerdir.

Yates ve Chen (2014) kesikli en kısa yol şebeke engelleme problemi üzerinde matematiksel model geliştirmişlerdir. Kesikli en kısa yol şebeke engelleme probleminin klasik en kısa yol şebeke engelleme probleminden farkı, kaynakların birden fazla noktada olabilmesidir. Benders ayrıştırma metoduyla doğrusallaştırdıkları modeli CPLEX 12.0 ile çözmüşlerdir. Ayrıca 3 farklı gerçek hayat haritasıyla da modelin performansını incelemişlerdir.

Xiao vd. (2014), Stackelberg oyunu şeklinde düşündükleri problemlerinde yollar yerine düğümlere odaklanmışlardır. Kurdukları iki seviyeli matematiksel modeli Benders ayrıştırma temelli bir algoritmayla çözüme ulaştırmışlardır.

Borrero vd. (2015) engelleyicinin eksik bilgiyle başladığı, şebekeyi işleten tarafın ise şebeke hakkındaki her bilgiye sahip olduğu ardışık olarak oynanan bir oyun olarak problemi ele almışlardır. Ele aldıkları problemde engelleyici her seferinde belirlenen sayıda arkı engelledikten sonra, şebekeyi işleten başlangıç ve bitiş noktası belli olan en kısa yol problemine göre hareket etmektedir. Engelleyici ise devamında şebekeyi işleteni gözlemleyerek şebeke hakkında daha çok bilgiye sahip olup, daha doğru engelleme kararları verebilmektedir.

Song ve Shen (2016) ise çalışmalarında rassallığa yer vermişlerdir. Engelleyicinin, engelleme maliyetini en küçükmeye, takipçinin de belirli iki nokta arasında kesin olmayan yol uzunluklarıyla en kısa yolu gitmeye çalıştığı iki kişilik Stackelberg oyunu şeklinde problemi ele almışlardır. Ayrıca, riski sevmeyen bir engelleyici olduğunu düşünerek, bu engelleyicinin en kısa yolun belirlenen bir eşik değerinden yüksek olması ihtimalini en büyükmeye amaçladığını varsaymışlardır. Hazırladıkları karışık tam sayılı modeli, dal sınır algoritması yardımıyla çözmüşlerdir.

Casas vd. (2016) çalışmalarında, geleneksel en kısa yol şebeke engelleme problemini farklı coğrafya tipleri için ele alarak değerlendirmelere yer vermişlerdir. Klasik Benders ayrıştırma metoduyla iki seviyeli modeli çözmüşlerdir.

Borndörfer vd. (2016) Almanya motor yollarını kullanarak yaptıkları çalışmada, araç kontrol noktalarının ideal yerlerini belirlemeye odaklanmışlardır. Şoförlerin kaçmak için kullanabilecekleri diğer en kısa alternatifi de göz önüne almışlardır. Modelin NP hard olduğunu gösterdikten sonra Benders ayrıştırma metodu yardımıyla çalışmayı gerçekleştirmişlerdir.

Sefair ve Smith (2016) ilk seviyesinin en kısa yol, ikinci seviyesinin engelleme yapılacak arklar, üçüncü seviyesinin de savunma planı olduğu üç seviyeli bir model

geliştirmişlerdir. Dual problemi kullanarak problemi iki seviyeye indirgemişlerdir. 3 farklı algoritma yardımı ile elde ettikleri iki seviyeli modeli çözmüşlerdir. Farklı senaryolar için çözümleri analiz etmişlerdir.

Lozano ve Smith (2016) ilk olarak şebekeyi işletenin korunacak bileşenleri seçtiği, ikinci olarak engelleyicinin korunmamış bileşenlere saldırdığı, son olarak da şebekeyi işletenin korunmamış bileşenlerin hangisini koruyacağına karar verdiği üç seviyeli bir model (recourse problem) geliştirmişlerdir. Bu geliştirdikleri modelde ilk iki seviyedeki tüm değişkenler ikili değişken tipindedir.

Sadeghi vd. (2017) çalışmalarında üç seviyeli (defender-attacker-defender) bir en kısa yol şebeke engelleme modelini dualite yardımıyla makul sürede çözen bir algoritma geliştirmişlerdir.

1.6. Literatüre Katkı

Bir önceki bölümde anlatılan çalışmaların tamamı en kısa yol şebeke engelleme problemine üzerine kurgulanmıştır. Bunların büyük bir bölümü geleneksel en kısa yol problemine üzerinde şebeke engelleme mantığıyla yaklaşılırken, şebekelerin zayıf bileşenlerinin tespiti, engelleme durumlarının rassallığı gibi farklı yapılarla problem çözmeye çalışılmıştır. Çözüm aşamasında ise çeşitli algoritmalar tercih edilmiştir. Bu çalışmada aşağıdaki yenilikler dikkate alındığında literatüre katkı sağladığını söylemek mümkündür:

i) Geleneksel en kısa yol probleminden farklı olarak başlangıç ve hedef düğüm sayılarının farklılaşabildiği çok başlangıç çok hedefli en kısa yol problemi için toplam en kısa yolu en küçükleyen ve oldukça hızlı sonuç verebilen bir matematiksel model önerilmiştir. Bu açıdan bakıldığında önerilen bu çok başlangıç çok hedefli en kısa yol problemi için iki tarafın olduğu şebeke engelleme modeli kurularak, daha önce çalışılmamış bir şebeke engelleme problemi çözülmüştür.

ii) Geleneksel en kısa yol problemine farklı yaklaşımlar getirilerek oluşturulan 5 farklı en kısa yol problemi ele alınmıştır. Bu problemler için 5 farklı şebeke engelleme modeli oluşturulmuştur. Bu önerilen modellerin tamamı dinamik olarak çözüm verebilmektedir. Yani 5 farklı en kısa yol şebeke engelleme problemi için 5 farklı dinamik matematiksel model oluşturulmuştur.

iii) Hazırlanan çok başlangıç çok hedefli en kısa yol şebeke engelleme problemine, başlangıç düğümlerinin kapasiteleri, hedef düğümlerinin ihtiyaçları eklenerek yeni bir yaklaşım getirilmiştir.



2. ELE ALINAN PROBLEMLER

Çalışma kapsamında 5 farklı yapıdaki en kısa yol şebeke engelleme problemi ele alınmıştır. Ele alınan problemler aşağıdaki gibidir:

2.1. Tek Başlangıç Tek Bitişli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi

Geleneksel en kısa yol problemidir. Bir noktadan bir noktaya graf üzerindeki bağlantıları kullanarak en kısa yoldan gitmeyi amaçlayan bir taraf ile engellemeler yaparak bu yolu en büyükmeye çalışan engelleyici bir taraf vardır. Örnek olarak devletin kaçakçılık yapan teröristlerin yollarını, onları engelleyici önlemler alarak uzatması ve böylece yakalama olasılığını arttırması gösterilebilir.

2.2. Çok Başlangıç Tek Bitişli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi

Geleneksel en kısa yol şebeke engelleme probleminden farklı olarak, başlangıç noktası yalnızca bir düğüm değil birden fazla düğümdür. En kısa yolu kullanmak isteyen kullanıcı tarafından bakılacak olursa bir hedef düğüme, başlangıç düğümlerinden herhangi birinden başlamak koşuluyla en kısa yola sahip başlangıç düğümünün seçilmesi ve hedef düğüme bu düğümden başlayarak ulaşılması gerekmektedir. Engelleyici taraf ise bağlantılar üzerinde engellemeler yaparak en kısa yolu uzatmak istemektedir. Herhangi bir kaza durumunda ambulansların bulunduğu acil durum istasyonlarından en kısa yola sahip olan acil durum istasyonundan bir ambulansın yola çıkması bu duruma örnek olarak gösterilebilir. Şebeke engelleme mantığıyla düşünmek gerekirse, teröristler bir noktada olay çıkarıp oraya farklı noktalardan gelebilecek ambulansın yollarını engellemeler yaparak uzatmak isteyebilir. Birden fazla başlangıç noktası olduğu için de ambulansın yola çıkacağı acil durum istasyonu her engelleme durumunda farklılık gösterebilir.

2.3. Tek Başlangıç Çok Bitişli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi

Hedef düğümü sayısı birden fazla, başlangıç düğüm sayısı yalnızca bir olan en kısa yol şebeke engelleme problemidir. En kısa yolu kullanmak isteyen kullanıcı, bir noktadan başlamak koşuluyla birden fazla noktaya toplam en kısa yoldan ulaşma amacıyla, engelleyici taraf ise yine engellemeler yaparak toplam en kısa yolu en büyükmek amacındadır. Örnek olarak, teröristlerin birkaç noktada aynı anda olay çıkardıktan sonra polis araçlarının tek karakoldan bu olay yerlerine gitmek istemesi ve teröristlerin bu yollar üzerinde engellemeler yaparak polisin toplam en kısa yolunu uzatmaya çalışması gösterilebilir.

2.4. Çok Başlangıç Çok Bitişli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi

Hem başlangıç hem düğüm sayısının birden fazla olduğu en kısa yol şebeke engelleme problemidir. Başlangıç düğümlerinden başlayarak her bir hedef düğümüne gidilmesi gerekmektedir. Hangi düğümlerden hangi düğümlere gidileceği konusunda bir kural yoktur. Örneğin düğüm x'e gidecek sefer başlangıç düğümlerinin herhangi birinden başlayabilir. İnternet protokolleri bu tür problemlere örnek olarak gösterilebilir. Birden fazla kullanıcı birden fazla internet sunucusuna en kısa yolu kullanarak en hızlı sürede bağlanmak isterken bilgisayar korsanı bu bağlantılar üzerinde engellemeler yaparak internet hizmetine zarar verme amacındadır. Bu tür yapılar bu problem başlığı altında incelenebilir.

2.5. Çok Başlangıç Çok Bitişli Kapasiteli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi

Bir önceki problemden farklı olarak başlangıç düğümlerinin kapasiteleri, hedef düğümlerinin ise ihtiyaçları vardır. Yani en kısa yolu kullanmak isteyen kullanıcı başlangıç düğümlerinden her bir düğümün kapasitesini aşmayacak kadar sefer başlatarak, hedef düğümlerinin ihtiyacı kadar seferi toplam en kısa yoldan karşılamak durumundadır. Aynı şekilde hangi düğümlerden hangi düğümlere gidileceği konusunda bir kural yoktur. Örneğin teröristler birden fazla noktada yangına mahal veren bir eylem gerçekleştirdikten sonra, bu noktalara farklı istasyonlardan gelebilecek itfaiye araçlarının toplam en kısa yolunu engellemeler yaparak uzatmak isteyebilirler. Bu problemde her bir olay yerine gelmesi gereken itfaiye sayısı (hedef düğümlerinin ihtiyacı) ve her bir istasyonda bulunan

itfaiye sayısı (başlangıç düğümlerinin kapasitesi) olduğundan; bu problem çok başlangıç çok bitişli kapasiteli en kısa yol şebeke engelleme problemi olarak düşünülebilir.

Bir sonraki bölümde ele alınan problemler sırasıyla anlatılarak, problemlerin çözümünde kullanılan matematiksel modeller verilirken, daha sonraki bölümde her bir problem yapısı örnek şebekeler üzerinde incelenmiştir.



3. MATEMATİKSEL MODELLER

Tez kapsamında ele alınan problemlerin matematiksel modelleri bu bölümde ayrıntısıyla verilmiştir.

3.1. Tek Başlangıç Tek Bitişli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi Matematiksel Modeli

En kısa yolu en büyükleme amacıyla olan bu modelde klasik en kısa yol problemi N' in düğümler kümesini, A 'nın ise düğümler arasında yer alan bağlantılar kümesini temsil ettiği $G=(N,A)$ şeklinde ifade edilen bir graf üzerinde tanımlanmıştır. Bu problemde bağlantıların uzunlukları $(i,j \in N)$ d_{ij} pozitifdir. Problemde biri lider (engelleyici), diğeri takipçi (şebekeyi işleten/en kısa yolu kullanan) olmak üzere iki taraf vardır. Eğer bağlantı d_{ij} lider tarafından engellenirse, bir ceza uzunluğu eklenerek engellenen bağlantının uzunluğu $d_{ij} + C$ şeklinde gösterilmiştir. Burada C engellenen bağlantıya eklenen ceza uzunluğu göstermektedir ve en uzun yolun büyüklüğünden daha büyük bir değere sahiptir. Problemde engellemenin bağlantıyı tamamen etkisiz (kullanılamaz) hale getirdiği düşünülmüştür. İki tarafın olduğu problemde ilk olarak şebekeyi işleten taraf (takipçi) daha önce belirlenen iki nokta arasında en kısa yolu kullanarak hareket eder. Daha sonra engelleyici taraf(lider), elindeki engelleme bütçesi dâhilinde engellemeler yaparak bu yolu daha uzun hale getirmeyi hedefler. Aşağıda 4 farklı model verilmiştir. Bu modeller sırasıyla şebekeyi işletenin en kısa yolu bulduğu model (Takipçi Model), bu modelin dual modeli (Takipçi Dual Model), engelleyicinin iki seviyeli modeli (Lider İki Seviyeli Model) ve engelleyicinin tek seviyeli modeli (Lider Engelleme Modeli) verilmiştir. Burada takipçinin düğüm 1'den düğüm n 'e en kısa yoldan gitmeyi amaçladığı, liderin ise bu yolu en büyüklemeyi hedeflediği problem modellenmiştir.

- ❖ Takipçi Model: Tek başlangıç tek bitişli en kısa yol probleminin çözümünde kullanılmak üzere hazırlanan takipçi modeli aşağıda verilmiştir.

İndisler :

$$N = 1, 2, \dots, n$$

Parametreler :

$$d_{ij} = i \text{ ve } j \text{ düğümleri arasındaki uzaklık}; i, j \in N$$

Karar Değişkenleri :

$$X_{ij} = \text{düğüm } i \text{ 'den düğüm } j \text{ 'ye sefer sayısı}; i, j \in N$$

Amaç Fonksiyonu :

$$Z^* = \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij} d_{ij} \quad (1)$$

Kısıtlar :

$$\sum_{i=1}^n X_{1i} = 1 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{in} \geq 1 \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ik} - \sum_{j=1}^n X_{kj} = 0 \quad (\forall k \in N \setminus \{1, n\}) \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ii} = 0 \quad (5)$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad (i, j \in N) \quad (6)$$

Eşitlik 1’de Z^* her bir i ve j değeri için sefer sayıları uzaklıklarla çarpılarak toplam gidilen yol bulunmuştur. Eşitlik 2’de düğüm 1’ den yapılacak sefer sayısının toplamının 1 olması gerektiği böylece mutlaka düğüm 1’ den yalnızca 1 seferin başlama kısıtı modele eklenmiştir. Eşitlik 3’te düğüm n ’ de sonlanacak sefer sayısı 1 yapılarak mutlaka düğüm n ’in ziyaret edilmesi sağlanmıştır. Eşitlik 4’te ise her bir ara düğüme yapılan sefer sayısından o düğümden yapılan sefer sayısı çıkarılarak 0’a eşitlenmiştir ve bu şekilde yapılan yolculuğun ara düğümlerde sonlanmaması sağlanmıştır. Eşitlik 5’te ise herhangi bir düğümden başlayıp yine o düğümden sonlanan seferlerin toplamı 0 yapılarak döngülerin önüne geçilmiştir. Son olarak Eşitlik 6 ise karar değişkeninin pozitif olduğu ifade edilmiştir.

Çalışma kapsamında engelleme modelinde kullanılmak üzere takipçi modelinin dual modeli bulunmuştur ve aşağıda verilmiştir.

- ❖ Takipçi Dual Model: Tek başlangıç tek bitişli en kısa yol probleminin çözümünde kullanılmak üzere hazırlanan takipçi dual modeli aşağıda verilmiştir.

Karar Değişkenleri :

$$Y_i = \text{dual değişken}; i \in N$$

Amaç Fonksiyonu :

$$Z^* = \max Y_1 + Y_n \quad (7)$$

Kısıtlar :

$$Y_1 + Y_j \leq d_{1j} \quad (\forall j \in N \setminus \{1, n\}) \quad (8)$$

$$-Y_i + Y_j \leq d_{ij} \quad (\forall i, j \in N \setminus \{1, n\}) \quad (9)$$

$$-Y_i \leq d_{i1} \quad (\forall i \in N \setminus \{1, n\}) \quad (10)$$

$$Y_i \leq d_{in} \quad (\forall i \in N \setminus \{1, n\}) \quad (11)$$

$$Y_n \geq 0 \quad (12)$$

Bir önceki bölümde verilen takipçi modelinin dual modeli kurulmuştur. Takipçi modelinde toplam n adet kısıt bulunduğu için $Y_i (i \in N)$ şeklinde bir dual değişken tanımlanarak model oluşturulmuştur. Burada Eşitlik 7 amaç fonksiyonu iken, primal modeldeki değişkenlere karşılık oluşturulan kısıtlar Eşitlik 8-12 ile gösterilmiştir.

- ❖ Lider İki Seviyeli Model: Tek başlangıç tek bitişli en kısa yol probleminin çözümünde kullanılmak üzere hazırlanan lider iki seviyeli modeli aşağıda verilmiştir.

Parametreler :

C = Engellenen yolu kullanmanın cezası (engellenen yola eklenen ceza uzunluğu)

T = Engelleme bütçesi

Karar Değişkenleri :

$$k_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{düğümü'den düğüm j'ye olan yol engellenirse} \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

Amaç Fonksiyonu :

$$Z^* = \max \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij} (d_{ij} + Ck_{ij}) \quad (13)$$

Kısıtlar :

$$\sum_{i=1}^n X_{1i} = 1 \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{in} = 1 \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ik} - \sum_{j=1}^n X_{kj} = 0 \quad (\forall k \in N \setminus \{1, n\}) \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ii} = 0 \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} = T \quad (18)$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad (\forall i, j \in N) \quad (19)$$

$$k_{ij} \in \{0, 1\} \quad (\forall i, j \in N) \quad (20)$$

Şebekeye zarar verme amacıyla olan bir terörist olarak nitelendirilebilecek liderin (engelleyicinin) en kısa yolu engelleme(ler) yaparak en büyüklemeyi hedeflediği bu iki seviyeli matematiksel modelde Eşitlik 13 ile gösterilen amaç fonksiyonunda yer alan iç minimizasyon probleminde takipçi (şebekeyi işleten) modeline ek olarak lider tarafından engellenen yolların kullanılmaması için; engellenen yolların uzunlukları C birim kadar uzatılmıştır. Kurulan bu modelde k_{ij} karar değişkeni 1 değerini aldığı anda o yolun engellendiği ve böylece yeni uzunluğunun $d_{ij} + C$ olduğu ifade edilmiştir. Bu durumda takipçi bu yolu kullanmaktan vazgeçecektir. İki seviyeli modelin kısıtlarında ise takipçi modelinde yer alan Eşitlik 14-17 ve 19 ile gösterilen kısıtlara ek olarak Eşitlik 18 ile gösterilen ve toplam engelleme sayısının terörist sayısı kadar olduğunu gösteren kısıt eklenmiştir. Problemden her bir yolun engelleme maliyetinin 1 birim olduğu varsayılmıştır. Eşitlik 20 ile gösterilen kısıtta ise herhangi bir i, j yolunun engellenme karar değişkeninin 0 ya da 1 olması sağlanmıştır.

- ❖ Lider Tek Seviyeli Engelleme Modeli: Tek başlangıç tek bitişli en kısa yol probleminin çözümünde kullanılmak üzere hazırlanan lider tek seviyeli engelleme modeli aşağıda verilmiştir.

Amaç Fonksiyonu :

$$Z^* = \max Y_1 + Y_n \quad (21)$$

Kısıtlar :

$$Y_1 + Y_j \leq d_{1j} + Ck_{1j} \quad (\forall j \in N \setminus \{1, n\}) \quad (22)$$

$$-Y_i + Y_j \leq d_{ij} + Ck_{ij} \quad (\forall i, j \in N \setminus \{1, n\}) \quad (23)$$

$$-Y_i \leq d_{i1} + Ck_{i1} \quad (\forall i \in N \setminus \{1, n\}) \quad (24)$$

$$Y_i \leq d_{in} + Ck_{in} \quad (\forall i \in N \setminus \{1, n\}) \quad (25)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} = T \quad (26)$$

$$Y_n \geq 0 \quad (27)$$

$$k_{ij} \in \{0,1\} \quad (\forall i, j \in N) \quad (28)$$

İki seviyeli matematiksel modellerin çözüm yollarından biri de içteki minimizasyon probleminin dual problemi oluşturarak modeli tek seviyeye indirgemektir. Yapılan bu çalışmada da iç tarafta yer alan modelin dual problemi yukarıda alınarak engelleme modeline entegre edilmiştir. Eşitlik 21 ile gösterilen amaç fonksiyonu takipçi dual modeli ile aynıyken, Eşitlik 8, 9, 10 ve 11 ile gösterilen kısıtlara engelleme durumunda oluşacak cezalar eklenerek Eşitlik 22, 23, 24 ve 25 ile gösterilen engelleme kısıtları oluşturulmuştur. Aynı şekilde Eşitlik 26 ile gösterilen kısıtla toplam terörist sayısını ifade eden kaynak kısıt eklenmiştir. Ayrıca Eşitlik 27 ile ifade edilen kısıtla Y_n değişkenin negatif değer alamaması ve Eşitlik 28 ile gösterilen kısıtla da engelleme kararının 0 ya da 1 olması sağlanmıştır.

3.2. Çok Başlangıç Tek Bitişli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi Matematiksel Modeli

N' in düğümler kümesini, A' nın ise düğümler arasında yer alan bağlantılar kümesini temsil ettiği $G=(N,A)$ şeklinde ifade edilen bir graf üzerinde tanımlanan problemin, tek başlangıç tek bitişli en kısa yol probleminden farkı başlangıç düğümü daha önceden belirtilmemiştir. Yani hedef düğümü olan düğüm n 'e gidilirken başlangıç düğümünün belirli bir düğüm olmamasıdır. S ile gösterilen ve m tane elemanı bulunan başlangıç düğümleri kümesinin elemanı olan herhangi bir düğümden başlayarak düğüm n 'e en kısa yolu kullanarak gitmek üzerine kurulu bir problemidir. Burada m değeri 1'den

daha büyük bir değere sahiptir. S başlangıç düğümleri kümesi N düğümler kümesinin alt kümesidir. Ayrıca N kümesinde bulunup S kümesinde bulunmayan düğümlerin oluşturduğu bir D kümesi tanımlanmıştır ve bu D kümesi N düğümler kümesinin alt kümesidir. Düğüm n , D kümesinin bir elemanıdır. Toplam oluşturulması gereken rota sayısı yalnızca 1'dir. Aşağıda bu problemin çözümünde kullanılmak üzere hazırlanmış 4 matematiksel model verilmiştir. Bu modeller sırasıyla; şebekeyi işletenin en kısa yolu bulduğu model (Takipçi Modeli), bu modelin dual modeli (Takipçi Dual Modeli), engelleyicinin iki seviyeli modeli (Lider İki Seviyeli Modeli) ve engelleyicinin tek seviyeli modelidir(Lider Engelleme Modeli).

- ❖ Takipçi Modeli: Çok başlangıç tek bitişli en kısa yol probleminin çözümünde kullanılmak üzere hazırlanan takipçi modeli aşağıda verilmiştir.

İndisler :

$$N = 1, 2, \dots, n \quad \text{düğümler kümesi}$$

$$S = s_1, s_2, \dots, s_m \quad \text{başlangıç düğümleri kümesi (} S \subset N \text{ ve } m < n \text{)}$$

$$D = N / S \quad \text{diğer düğümler kümesi}$$

Parametreler :

$$d_{ij} = i \text{ ve } j \text{ düğümleri arasındaki uzaklık; } i, j \in N$$

Karar Değişkenleri :

$$X_{ij} = \text{düğüm } i \text{ 'den düğüm } j \text{ 'ye sefer sayısı; } i, j \in N$$

Amaç Fonksiyonu :

$$Z^* = \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij} d_{ij} \quad (29)$$

Kısıtlar :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{s_i j} - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m X_{k s_j} = 1 \quad (30)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{in} = 1 \quad (31)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ik} - \sum_{j=1}^n X_{kj} = 0 \quad (\forall k \in D) \quad (32)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ii} = 0 \quad (33)$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad (\forall i, j \in N) \quad (34)$$

Eşitlik 29 ile verilen amaç fonksiyonunda, her bir i ve j değeri için sefer sayıları uzaklıklarla çarpılarak bulunan toplam gidilen yolun küçüklenmesi amaçlanmıştır. Eşitlik 30'da başlangıç düğümleri kümesi S 'nin tüm elemanlarından çıkan seferlerden, tüm elemanlarına giren seferler çıkarılarak S kümesinden başlayacak sefer sayısının toplamının 1 olması gerektiği böylece yalnızca 1 yol oluşması gerektiği modele eklenmiştir. Eşitlik 31'de düğüm n 'de sonlanacak sefer sayısı 1 yapılarak mutlaka düğüm n 'in ziyaret edilmesi sağlanmıştır. Eşitlik 32'de ise her bir ara düğüme yapılan sefer sayısından o düğümden yapılan sefer sayısı çıkarılarak 0'a eşitlenmiştir ve bu şekilde yapılan yolculuğun ara düğümlerde sonlanmaması sağlanmıştır. Eşitlik 33'te ise herhangi bir düğümden başlayıp yine o düğümden sonlanan seferlerin toplamı 0 yapılarak döngülerin önüne geçilmiştir. Son olarak Eşitlik 34 ile de karar değişkeninin negatif olmaması gerektiği ifade edilmiştir.

❖ Takipçi Dual Modeli: Çok başlangıç tek bitişli en kısa yol probleminin çözümünde kullanılmak üzere hazırlanan takipçi dual modeli aşağıda verilmiştir.

Karar Değişkenleri :

Y_1 = başlangıç düğümleri kümesi dual değişkeni

Y_i = dual değişken; $i \in D$

Amaç Fonksiyonu :

$$Z^* = \max Y_1 + Y_n \quad (35)$$

Kısıtlar :

$$Y_1 + Y_j \leq d_{s,j} \quad (\forall j \in D \text{ ve } \forall s_i \in S) \quad (36)$$

$$-Y_1 - Y_i \leq d_{ij} \quad (\forall i \in \{D/n\} \text{ ve } \forall j \in N \wedge \forall j \notin S) \quad (37)$$

$$-Y_i + Y_j \leq d_{ij} \quad (\forall i \in \{D/n\} \text{ ve } \forall j \in D) \quad (38)$$

$$-Y_i \leq d_{ni} \quad (\forall i \notin S) \quad (39)$$

$$Y_i \leq d_{ni} \quad (\forall i \in \{D/n\}) \quad (40)$$

$$Y_n \geq 0 \quad (41)$$

Bir önceki bölümde verilen takipçi modelinin dual modeli kurulmuştur. Takipçi modelinde toplam $n - m + 1$ kısıt bulunmaktadır. Bunun nedeni m adet elemanı bulunan

başlangıç düğümleri kümesi için yalnızca 1 kısıt, başlangıç düğümleri kümesinin elemanı olmayan $n - m$ düğüm için is $n - m$ adet kısıt bulunmasıdır. Bu kısıt sayısına eşit sayıda dual değişken tanımlanarak model kurulmuştur. Modelde, Eşitlik 35 amaç fonksiyonu iken, primal modeldeki değişkenlere karşılık oluşturulan kısıtlar Eşitlik 36-41 ile gösterilmiştir.

- ❖ Lider İki Seviyeli Modeli: Çok başlangıç tek bitişli en kısa yol probleminin çözümünde kullanılmak üzere hazırlanan lider iki seviyeli modeli aşağıda verilmiştir.

Parametreler :

C = Engellenen yolu kullanmanın cezası (engellenen yola eklenen ceza uzunluğu)

T = Engelleme bütçesi

Karar Değişkenleri :

$$k_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{düğümü 'den düğüm 'j'ye olan yol engellenirse} \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

Amaç Fonksiyonu :

$$Z^* = \max \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij} (d_{ij} + Ck_{ij}) \quad (42)$$

Kısıtlar :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{s_i j} - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n X_{ks_j} = 1 \quad (43)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{in} = 1 \quad (44)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ik} - \sum_{j=1}^n X_{kj} = 0 \quad (\forall k \in D) \quad (45)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ii} = 0 \quad (46)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} = T \quad (47)$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad (\forall i, j \in N) \quad (48)$$

$$k_{ij} \in \{0, 1\} \quad (\forall i, j \in N) \quad (49)$$

Liderin (engelleyicinin) en kısa yolu engelleme(ler) yaparak en büyükmeyi hedeflediği bu iki seviyeli matematiksel modelde Eşitlik 42 ile gösterilen amaç

fonksiyonunda yer alan iç minimizasyon probleminde takipçi (şebekeyi işleten) modeline ek olarak lider tarafından engellenen yolların kullanılmaması için; engellenen yolların uzunlukları C birim kadar uzatılmıştır. Burada k_{ij} karar değişkeni 1 değerini aldığı anda o yolun engellendiği ve böylece yeni uzunluğunun $d_{ij} + C$ olduğu ifade edilmiştir. İki seviyeli modelin kısıtlarında ise takipçi modelinde yer alan Eşitlik 43-46 ve 48 ile gösterilen kısıtlara ek olarak Eşitlik 47 ile gösterilen ve toplam engelleme sayısının engelleme bütçesi kadar olduğunu gösteren kısıt eklenmiştir. Problemden her bir yolun engelleme maliyetinin 1 birim olduğu varsayılmıştır. Eşitlik 49 ile gösterilen kısıtta ise herhangi bir i, j yolunun engellenme karar değişkeninin 0 ya da 1 olması sağlanmıştır.

❖ Lider Tek Seviyeli Engelleme Modeli: Çok başlangıç tek bitişli en kısa yol probleminin çözümünde kullanılmak üzere hazırlanan lider tek seviyeli modeli aşağıda verilmiştir.

Amaç Fonksiyonu :

$$Z^* = \max Y_1 + Y_n \quad (50)$$

Kısıtlar :

$$Y_1 + Y_j \leq d_{s_i j} + Ck_{s_i j} \quad (\forall j \in D \text{ ve } \forall s_i \in S) \quad (51)$$

$$-Y_1 - Y_i \leq d_{ij} + Ck_{ij} \quad (\forall i \in \{D/n\} \text{ ve } \forall j \in N \wedge \forall j \notin S) \quad (52)$$

$$-Y_i + Y_j \leq d_{ij} + Ck_{ij} \quad (\forall i \in \{D/n\} \text{ ve } \forall j \in D) \quad (53)$$

$$-Y_i \leq d_{ni} + Ck_{ni} \quad (\forall i \notin S) \quad (54)$$

$$Y_i \leq d_{ni} + Ck_{ni} \quad (\forall i \in \{D/n\}) \quad (55)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} = T \quad (56)$$

$$Y_n \geq 0 \quad (57)$$

$$k_{ij} \in \{0,1\} \quad (\forall i, j \in N) \quad (58)$$

Liderin engelleme modeli iç tarafta yer alan minimizasyon probleminin dual problemi alınarak tek seviyeli modele indirgenmiştir. Burada Eşitlik 50 ile gösterilen amaç fonksiyonu, Eşitlik 51-56 ile gösterilen kısıtlar altında Eşitlik 57 ve 58 ile gösterilen karar değişkenleriyle ilgili kurallara uyarak en büyüklenmeye çalışılmıştır. Eşitlik 51-55 ile gösterilen kısıtlar dual modelde yer alan kısıtların engelleme kısıtlarıdır. Eşitlik 56 toplam engelleme kapasitesini gösteren kaynak kısıtıdır.

3.3. Tek Başlangıç Çok Bitişli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi Matematiksel Modeli

Klasik en kısa yol probleminden farklı olarak bu problemde takipçi, belirlenen bir başlangıç noktasından birden fazla hedef noktasına en kısa yolu kullanarak hareket etme amacındadır. Burada en kısa yolla ifade edilen hedeflere ulaşabilmek için toplam kat edilen mesafedir. N 'in düğümler kümesini, A 'nın ise düğümler arasında yer alan bağlantılar kümesini temsil ettiği $G=(N,A)$ şeklinde ifade edilen bir graf üzerinde tanımlanmıştır. Ayrıca problemde F ile gösterilen bir hedef düğümleri kümesi vardır ve bu F kümesi düğümler kümesi N 'in alt kümesidir. Burada F kümesinin eleman sayısı p 'dir ve $p \leq n$ 'dir. Yukarıda verilen Tek Giriş Tek Çıkış En Kısa Yol Problemi'nden farklı olarak burada lider engellemeler yaptıktan sonra, takipçi düğüm 1'den F kümesi ile tanımlanan hedef düğümleri kümesi içerisinde yer alan tüm düğümlere (p adet düğüme) gitmeyi amaçlamaktadır. Ayrıca N kümesinin elemanı olup hedef düğümlerin kümesi F ve başlangıç düğümü 1'in dışında kalan düğümlerin oluşturduğu D ara düğümler kümesi tanımlanmıştır. Yani takipçi düğüm 1 den başlayarak hedef düğümler kümesi F 'nin tüm elemanlarına ara düğümler kümesi D 'nin elemanlarını kullanarak gitmek istemektedir. Aşağıda 4 farklı model verilmiştir. Bu modeller sırasıyla şebekeyi işletenin en kısa yolu bulduğu model (Takipçi Modeli), bu modelin dual modeli (Takipçi Dual Modeli), engelleyicinin iki seviyeli modeli (Lider İki Seviyeli Modeli) ve engelleyicinin tek seviyeli modeli (Lider Engelleme Modeli) verilmiştir. Burada takipçinin düğüm 1'den düğümler kümesi F 'nin tüm elemanlarına en kısa yoldan gitmeyi amaçladığı, liderin ise bu yolu en büyükmeyi hedeflediği problem modellenmiştir.

❖ Takipçi Modeli: Tek başlangıç çok bitişli en kısa yol probleminin çözümünde kullanılmak üzere hazırlanan takipçi modeli aşağıda verilmiştir.

Amaç Fonksiyonu :

$$Z^* = \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij} d_{ij} \quad (59)$$

Kısıtlar :

$$\sum_{i=1}^n X_{1i} = p \quad (60)$$

$$\sum_{k=1}^n X_{kf_i} - \sum_{j=1}^n X_{f_i j} = 1 \quad (\forall f_i \in F) \quad (61)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ik} - \sum_{j=1}^n X_{kj} = 0 \quad (\forall k \in D) \quad (62)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ii} = 0 \quad (63)$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad (\forall i, j \in N) \quad (64)$$

Eşitlik 59 ile gösterilen, gidilen toplam yolun en küçüklenmesi takipçi modelinin amaç fonksiyonudur. Eşitlik 60 ile başlangıç düğümü 1'den hedefler kümesinin eleman sayısı olan p kadar çıkış yapılarak her bir hedefe gidilmesi ifade edilmiştir ve bu durum Eşitlik 61 ile hedef düğümleri kümesi F 'de yer alan düğümlerin her bir elemanı için toplam giriş sayılarının toplam çıkış sayılarından 1 fazla olması gerektiği ifade edilerek tamamlanmıştır. Eşitlik 62 ise D kümesinin elemanları olan ara düğümlerde seferlerin sonlanmaması için modele eklenmiştir. Eşitlik 63 ile her bir düğümün içinde döngülerin önüne geçilirken Eşitlik 64 ile de karar değişkeninin negatif olmama durumu sağlanmıştır.

Çalışma kapsamında engelleme modelinde kullanılmak üzere takipçi modelinin dual modeli bulunmuştur ve aşağıda verilmiştir.

❖ Takipçi Dual Modeli : Tek başlangıç çok bitişli en kısa yol probleminin çözümünde kullanılmak üzere hazırlanan takipçi dual modeli aşağıda verilmiştir.

Karar Değişkenleri :

$$Y_i = \text{dual değişken}$$

Amaç Fonksiyonu :

$$Z^* = \max pY_1 + \sum_{i=1}^p Y_{f_i} \quad (65)$$

Kısıtlar :

$$Y_1 + Y_j \leq d_{1j} \quad (\forall j \in N / \{1\}) \quad (66)$$

$$-Y_i + Y_j \leq d_{ij} \quad (\forall i \in N / \{1\} \text{ ve } j \in N / \{1\}) \quad (67)$$

$$-Y_i \leq d_{i1} \quad (\forall i \in N / \{1\}) \quad (68)$$

Engelleme modelini tek seviyeye indirgemek için takipçi modelinin dual modeli oluşturulmuştur. Primal modelde amaç fonksiyonu minimizasyon olduğu için Eşitlik 65 ile

gösterilen amaç fonksiyonu maksimizasyondur. Eşitlik 66-68 ile de dual problemin kısıtları gösterilmiştir. Primal modelde tüm kısıtlar eşitlik olduğu için dual karar değişkenleriyle ilgili bir kısıtlama yoktur.

- ❖ Lider İki Seviyeli Modeli: Tek başlangıç çok bitişli en kısa yol probleminin çözümünde kullanılmak üzere hazırlanan lider iki seviyeli modeli aşağıda verilmiştir

Parametreler :

C = Engellenen yolu kullanmanın cezası (engellenen yola eklenen ceza uzunluğu)

T = Engelleme bütçesi

Karar Değişkenleri :

$$k_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{1 düğümü'den düğüm j'ye olan yol engellenirse} \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

Amaç Fonksiyonu :

$$Z^* = \max \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij} (d_{ij} + Ck_{ij}) \quad (69)$$

Kısıtlar :

$$\sum_{i=1}^n X_{li} = p \quad (70)$$

$$\sum_{k=1}^n X_{kf_i} - \sum_{j=1}^n X_{f_i j} = 1 \quad (\forall f_i \in F) \quad (71)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ik} - \sum_{j=1}^n X_{kj} = 0 \quad (\forall k \in D) \quad (72)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ii} = 0 \quad (73)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} = T \quad (74)$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad (75)$$

$$k_{ij} \in \{0,1\} \quad (\forall i, j \in N) \quad (76)$$

Daha önceki bölümlerde olduğu gibi Eşitlik 69 ile gösterilen amaç fonksiyonunda yer alan iç minimizasyon probleminde takipçi (şebekeyi işleten) modeline ek olarak lider tarafından engellenen yolların kullanılmaması için; engellenen yolların uzunlukları C birim kadar uzatılmıştır ve yine aynı şekilde takipçi modelinin kısıtlarına (Eşitlik 70-73 ve 75'e) ek olarak Eşitlik 74 ile gösterilen ve toplam engelleme sayısının engelleme bütçesi kadar

olduğunu gösteren kısıt eklenmiştir. Problemde her bir yolun engelleme maliyetinin 1 birim olduğu varsayılmıştır. Eşitlik 76 ile gösterilen kısıtta ise herhangi bir i, j yolunun engellenme karar değişkenin 0 ya da 1 olması sağlanmıştır.

❖ Lider Tek Seviyeli Engelleme Modeli: Tek başlangıç çok bitişli en kısa yol probleminin çözümünde kullanılmak üzere hazırlanan lider iki seviyeli modeli aşağıda verilmiştir.

Amaç Fonksiyonu :

$$Z^* = \max pY_1 + \sum_{i=1}^s Y_{f_i} \quad (77)$$

Kısıtlar :

$$Y_1 + Y_j \leq d_{1j} + Ck_{1j} \quad (\forall j \in N / \{1\}) \quad (78)$$

$$-Y_i + Y_j \leq d_{ij} + Ck_{ij} \quad (\forall i \in N / \{1\} \text{ ve } \forall j \in N / \{1\}) \quad (79)$$

$$-Y_i \leq d_{i1} + Ck_{i1} \quad (\forall i \in N / \{1\}) \quad (80)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} = T \quad (81)$$

$$k_{ij} \in \{0,1\} \quad (\forall i, j \in N) \quad (82)$$

Liderin engelleme modeli, iç tarafta yer alan minimizasyon probleminin dual problemi alınarak tek seviyeli modele indirgenmiştir. Burada Eşitlik 77 ile gösterilen amaç fonksiyonu, Eşitlik 78-81 ile gösterilen kısıtlar altında Eşitlik 82 ile gösterilen karar değişkenleriyle ilgili kurallara uyarak en büyüklenmeye çalışılmıştır. Eşitlik 78-80 numaralı kısıtlar dual modelde yer alan kısıtların engelleme kısıtlarıdır. Eşitlik 81, toplam engelleme kapasitesini gösteren kaynak kısıtıdır.

3.4. Çok Başlangıç Çok Bitişli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi Matematiksel Modeli

Çok başlangıç çok bitişli en kısa yol problemi, iki farklı nedenle geleneksel en kısa yol probleminden farklılık göstermektedir. Bu nedenlerden birincisi; başlangıç noktasının, N' in n adet elemanı bulunan düğümler kümesini, A' nın ise düğümler arasında yer alan bağlantılar kümesini temsil ettiği $G = (N, A)$ şeklinde ifade edilen bir graf üzerinde tanımlı düğümlerden sadece biri olmamasıdır. Problemde N düğümler kümesinin alt kümesi olan ve S ile gösterilen, m tane elemanı bulunan kümede yer alan tüm düğümler

başlangıç noktasıdır. Diğer neden ise hedef noktasının da aynı şekilde yalnızca bir düğüm olmamasıdır. N düğümler kümesinin alt kümesi olan ve p tane elemanı bulunan bir F kümesinin tüm elemanları da hedef düğümlerini oluşturmaktadır. Burada m ve p değerleri n 'den daha küçük olmak zorundadırlar. Problem yapısında en kısa yolu kullanmak isteyen kullanıcı; S başlangıç düğümler kümesinin herhangi p (hedef düğümü sayısı) tanesinden başlayarak F hedef düğümlerinin tüm elemanlarına toplam en kısa yoldan ulaşmayı amaçlamaktadır. Başlangıç ve bitiş noktalarının özel olarak (örneğin düğüm x 'ten başlayan düğüm y 'ye gitmek zorunda değildir.) tanımlanmadığı problemde toplam oluşacak en kısa yol rotası sayısı p' 'dir. Ayrıca başlangıç noktalarının kapasitesi sınırsızdır. Yani bir başlangıç noktasından başlayabilecek sefer sayısının bir üst sınırı yoktur.

İlk olarak takipçinin en kısa yolları kullanarak başlangıç düğümlerinden hedef düğümlerine gittiği, ardından liderin engellemeler yaparak takipçinin toplam yolunu en büyükmek istediği problemin çözümünde kullanılmak üzere hazırlanmış 4 matematiksel model aşağıda verilmiştir. Bu modeller sırasıyla; şebekeyi işletenin en kısa yolu bulduğu model (Takipçi Modeli), bu modelin dual modeli (Takipçi Dual Modeli), engelleyicinin iki seviyeli modeli (Lider İki Seviyeli Modeli) ve engelleyicinin tek seviyeli modelidir (Lider Engelleme Modeli).

❖ Takipçi Modeli: Çok başlangıç çok bitişli en kısa yol probleminin çözümünde kullanılmak üzere hazırlanan takipçi modeli aşağıda verilmiştir.

İndisler :

$N = 1, 2, \dots, n$	düğüm kümesi
$S = s_1, s_2, \dots, s_m$	başlangıç düğümleri kümesi ($S \subset N$ ve $m < n$)
$F = f_1, f_2, \dots, f_p$	hedef düğümleri kümesi ($F \subset N$ ve $p < n$)
$D = N / (S \cup F)$	ara düğümler kümesi

Parametreler :

$$d_{ij} : i \text{ ve } j \text{ düğümleri arasındaki uzaklık}; i, j \in N$$

Karar Değişkenleri :

$$X_{ij} : \text{düğüm } i \text{ 'den düğüm } j \text{ 'ye sefer sayısı}; i, j \in N$$

Amaç Fonksiyonu :

$$Z^* = \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij} d_{ij} \quad (83)$$

Kısıtlar :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{s_i j} - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m X_{j s_k} = p \quad (84)$$

$$\sum_{k=1}^n X_{k f_i} - \sum_{j=1}^n X_{f_i j} = 1 \quad (f_i \in F) \quad (85)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ik} - \sum_{j=1}^n X_{kj} = 0 \quad (\forall k \in D) \quad (86)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ii} = 0 \quad (87)$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad (\forall i, j \in N) \quad (88)$$

Eşitlik 83'te amaç fonksiyonu Z^* , her bir i ve j değeri için sefer sayıları uzaklıklarla çarpılarak bulunan toplam gidilen yolun en küçüklenmesi amaçlanmıştır. Eşitlik 84'te başlangıç düğümleri kümesinden çıkan sefer sayısından, başlangıç düğümlerine giren sefer sayısı çıkarılmış ve bu değer toplam gidilmesi gereken düğüm sayısı olan p 'ye eşit olması sağlanmıştır. Hedef düğümleri kümesinde yer alan her bir düğümde bir seferin sonlanması kısıtı da Eşitlik 85 ile modele aktarılmıştır. Eşitlik 86'da ara düğümlerde seferlerin sonlanmasının önüne geçilirken, Eşitlik 87 ile de seferlerin başladığı yerde bitmemesi sağlanmıştır. Eşitlik 88 de ise yapılabilecek tüm seferlerin negatif olmaması gerektiği ifade edilmiştir. Modelde her bir başlangıç düğümü için o düğümden başlayacak sefer sayısı ile ilgili bir kısıtlama yoktur.

❖ Takipçi Dual Modeli: Çok başlangıç çok bitişli en kısa yol probleminin çözümünde kullanılmak üzere hazırlanan takipçi dual modeli aşağıda verilmiştir.

Karar Değişkenleri :

Y_1 = başlangıç düğümleri kümesi dual değişkeni

Y_i = dual değişken ; $i \in (D \cup F)$

Amaç Fonksiyonu :

$$Z^* = \max pY_1 + \sum_{i=1}^p Y_{f_i} \quad (89)$$

Kısıtlar :

$$Y_1 + Y_j \leq d_{s_i j} \quad (\forall s_i \in S \text{ ve } \forall j \in (D \cup F)) \quad (90)$$

$$-Y_j - Y_1 \leq d_{js_i} \quad (\forall j \in (D \cup F) \text{ ve } s_i \in S) \quad (91)$$

$$-Y_i + Y_j \leq d_{ij} \quad (\forall i, j \in (D \cup F) \text{ ve } i \neq j) \quad (92)$$

Engelleme modelinde kullanılmak üzere takipçi modelinin dual modeli kurulmuştur. Takipçi modelinde hedef minimizasyon olduğu için dual modelde Eşitlik 89'da sağ taraf değerleriyle değişkenler çarpılarak oluşturulan amaç fonksiyonu maksimizasyondur. Dual model kurulurken primal modelde toplam $n - m + 1$ kısıt bulunduğu için bu kadar sayıda dual değişken tanımlanmıştır. Bu değişkenlerin $n - m$ tanesi diğer düğümler ve hedef düğümleri kümesinin elemanlarıyla ilgili kısıtlara denk gelirken 1 tanesi de başlangıç düğümleri kümesinin kısıtının değişkenidir. Dual değişkenlerle oluşturulan dual problem kısıtları ise Eşitlik 90-92 ile gösterilmiştir.

❖ Lider İki Seviyeli Modeli: Çok başlangıç çok bitişli en kısa yol probleminin çözümünde kullanılmak üzere hazırlanan lider iki seviyeli modeli aşağıda verilmiştir

Parametreler :

C = Engellenen yolu kullanmanın cezası (engellenen yola eklenen ceza uzunluğu)

T = Engelleme bütçesi

Karar Değişkenleri :

$$k_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{1 düğümü'den düğüm j'ye olan yol engellenirse} \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

Amaç Fonksiyonu :

$$Z^* = \max \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij} (d_{ij} + Ck_{ij}) \quad (93)$$

Kısıtlar :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{s_i j} - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m X_{js_k} = p \quad (94)$$

$$\sum_{k=1}^n X_{kf_i} - \sum_{j=1}^n X_{f_i j} = 1 \quad (\forall f_i \in F) \quad (95)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ik} - \sum_{j=1}^n X_{kj} = 0 \quad (\forall k \in D) \quad (96)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ii} = 0 \quad (97)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} = T \quad (98)$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad (\forall i, j \in N) \quad (99)$$

$$k_{ij} \in \{0,1\} \quad (\forall i, j \in N) \quad (100)$$

Liderin (engelleyicinin) en kısa yolu engelleme(ler) yaparak en büyüklemeyi hedeflediği bu iki seviyeli matematiksel modelde Eşitlik 93 ile gösterilen amaç fonksiyonunda yer alan iç minimizasyon problemindeki takipçi (şebekeyi işleten) modeline ek olarak lider tarafından engellenen yolların kullanılmaması için; engellenen yolların uzunlukları C birim kadar uzatılmıştır. Kurulan bu modelde, k_{ij} karar değişkeni 1 değerini aldığı anda o yolun engellendiği ve böylece yeni uzunluğunun $d_{ij} + C$ olduğu ifade edilmiştir. İki seviyeli modelin kısıtlarında ise takipçi modelinde yer alan Eşitlik 94-97 ve 99 ile gösterilen kısıtlara ek olarak Eşitlik 98 ile gösterilen ve toplam engelleme sayısının engelleme bütçesi kadar olduğunu gösteren kısıt eklenmiştir. Problemden her bir yolun engelleme maliyetinin 1 birim olduğu varsayılmıştır. Eşitlik 100 ile gösterilen kısıtta ise herhangi bir i, j yolunun engellenme karar değişkeninin 0 ya da 1 olması sağlanmıştır.

❖ Lider Tek Seviyeli Engelleme Modeli: Çok başlangıç çok bitişli en kısa yol probleminin çözümünde kullanılmak üzere hazırlanan lider tek seviyeli modeli aşağıda verilmiştir

Amaç Fonksiyonu :

$$Z^* = \max pY_1 + \sum_{i=1}^p Y_{f_i} \quad (101)$$

Kısıtlar :

$$Y_1 + Y_j \leq d_{s_i j} + Ck_{s_i j} \quad (\forall s_i \in S \text{ ve } \forall j \in (D \cup F)) \quad (102)$$

$$-Y_j - Y_1 \leq d_{js_i} + Cd_{js_i} \quad (\forall j \in (D \cup F) \text{ ve } \forall s_i \in S) \quad (103)$$

$$-Y_i + Y_j \leq d_{ij} + Ck_{ij} \quad (\forall i, j \in (D \cup F) \text{ ve } i \neq j) \quad (104)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} = T \quad (105)$$

$$k_{ij} \in \{0,1\} \quad (\forall i, j \in N) \quad (106)$$

Liderin engelleme modeli iç tarafta yer alan minimizasyon probleminin dual problemi alınarak tek seviyeli modele indirgenmiştir. Eşitlik 101 ile gösterilen amaç fonksiyonu, Eşitlik 102-104 ile gösterilen ve dual kısıtlara engelleme cezalarının eklenmesiyle oluşturulan engelleme kısıtları altında Eşitlik 106'da yer alan engelleme kararının 0-1 karar değişkeni olması gerektiği kuralına uyarak en büyüklenmeye çalışılmıştır. Ayrıca kaynak kısıtını ifade eden Eşitlik 105 ile de liderin kullanabileceği kaynak (terörist sayısı) bütçesi sınırlandırılmıştır.

3.5. Çok Başlangıç Çok Bitişli Kapasiteli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi Matematiksel Modeli

Çok başlangıç çok bitişli en kısa yol probleminden farklı olarak, bu problemde daha önceki bölümlerde bahsedilen S başlangıç düğümleri kümesi ve F hedef düğümleri kümesinin elemanlarının belirli kapasiteleri ve ihtiyaçları vardır. Yani hedef düğümleri kümesinde yer alan her bir düğümden yalnızca bir tane değil, o düğümün ihtiyacı kadar sefer sonlanmalıdır. Ayrıca başlangıç düğümleri kümesinin elemanlarının da belirli kapasiteleri vardır ve her bir düğüm için o düğümden başlayacak sefer sayısı, düğümün kapasitesini aşamaz. Problemde her bir hedef düğümünün ihtiyacını karşılayabilmek için hedef düğümlerinin ihtiyaçları toplamının, başlangıç düğümlerinin kapasiteleri toplamından küçük ya da eşit olması gerekmektedir. Toparlamak gerekirse takipçi tarafından, S başlangıç düğümlerinden her bir düğümün kapasitesini aşmadan başlamak koşuluyla F hedef düğümleri kümesinde yer alan düğümlerin ihtiyacı kadar sefer en kısa yoldan gerçekleştirilmek istenmektedir. Lider ise bağlantılar üzerinde engellemeler yaparak takipçinin toplam en kısa yolunu en büyükleme amaçlamaktadır.

Problemin çözümünde 4 ayrı modelden yararlanılmıştır. Bu modeller sırasıyla; şebekeyi işletenin en kısa yolu bulduğu model (Takipçi Modeli), bu modelin dual modeli (Takipçi Dual Modeli), engelleyicinin iki seviyeli modeli (Lider İki Seviyeli Modeli) ve engelleyicinin tek seviyeli modelidir (Lider Engelleme Modeli).

❖ Takipçi Modeli: Çok başlangıç çok bitişli kapasiteli en kısa yol probleminin çözümünde kullanılmak üzere hazırlanan takipçi modeli aşağıda verilmiştir.

İndisler :

$N = 1, 2, \dots, n$ düğümler kümesi

$S = s_1, s_2, \dots, s_m$ başlangıç düğümleri kümesi ($S \subset N$ ve $m < n$)

$F = f_1, f_2 \dots f_p$ hedef düğümleri kümesi ($F \subset N$ ve $p < n$)

$D = N / (S \cup F)$ ara düğümler kümesi

Parametreler :

d_{ij} : i ve j düğümleri arasındaki uzaklık; $i, j \in N$

A_{s_i} : düğüm s_i 'den başlayabilecek sefer sayısı(kapasitesi); $s_i \in S$

I_{f_i} : düğüm f_i 'nin ihtiyacı(sonlanması gereken sefer sayısı): $f_i \in F$

Karar Değişkenleri :

X_{ij} : düğüm i 'den düğüm j 'ye sefer sayısı; $i, j \in N$

Amaç Fonksiyonu :

$$Z^* = \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij} d_{ij} \quad (107)$$

Kısıtlar :

$$\sum_{j=1}^n X_{s_i j} - \sum_{k=1}^n X_{k s_i} \leq A_{s_i} \quad (\forall s_i \in S) \quad (108)$$

$$\sum_{k=1}^n X_{k f_i} - \sum_{j=1}^n X_{f_i j} \geq I_{f_i} \quad (\forall f_i \in F) \quad (109)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ik} - \sum_{i=1}^n X_{kj} = 0 \quad (\forall k \in D) \quad (110)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ii} = 0 \quad (\forall i \in N) \quad (111)$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad (\forall i, j \in N) \quad (112)$$

Eşitlik 107'de amaç fonksiyonu Z^* , her bir i ve j değeri için sefer sayıları uzaklıklarla çarpılarak toplam gidilen yol bulunarak, en küçüklenmesi amaçlanmıştır. Eşitlik 108'de başlangıç düğümleri kümesinin her bir elemanından başlayan sefer sayısının düğümün kapasitesini aşmaması sağlanmıştır. Eşitlik 109'da ise hedef düğümleri kümesinde yer alan her bir düğümün, en az o düğümün ihtiyacı kadar ziyaret edilmesi gerektiği ifade edilmiştir. Eşitlik 110'da seferlerin ara düğümlerde sonlanmasının önüne geçilmiştir. Eşitlik 111 ile de seferlerin başladığı yerde bitmemesi sağlanmıştır. Eşitlik 112'de ise yapılabilecek tüm seferlerin negatif olmaması gerektiği ifade edilmiştir.

❖ Takipçi Dual Modeli: Çok başlangıç çok bitişli kapasiteli en kısa yol probleminin çözümünde kullanılmak üzere hazırlanan takipçi dual modeli aşağıda verilmiştir.

Karar Değişkenleri :

$$Y_i = \text{dual değişken}; i \in N$$

Amaç Fonksiyonu :

$$Z^* = \max \sum_{i=1}^m A_{s_i} Y_{s_i} + \sum_{i=1}^p I_{f_i} Y_{f_i} \quad (113)$$

Kısıtlar :

$$Y_{s_i} - Y_{s_j} \leq d_{s_i s_j} \quad (\forall s_i, s_j \in S) \quad (114)$$

$$Y_{s_i} - Y_j \leq d_{s_i j} \quad (\forall s_i \in S \text{ ve } \forall j \in D) \quad (115)$$

$$Y_i - Y_{s_j} \leq d_{is_j} \quad (\forall i \in D \text{ ve } \forall s_j \in S) \quad (116)$$

$$Y_i - Y_j \leq d_{ij} \quad (\forall i, j \in D) \quad (117)$$

$$Y_{s_i} + Y_{f_j} \leq d_{s_i f_j} \quad (\forall s_i \in S \text{ ve } \forall f_j \in F) \quad (118)$$

$$Y_i + Y_{f_j} \leq d_{if_j} \quad (\forall i \in D \text{ ve } \forall f_j \in F) \quad (119)$$

$$-Y_{f_i} - Y_{s_j} \leq d_{f_i s_j} \quad (\forall f_i \in F \text{ ve } \forall s_j \in S) \quad (120)$$

$$-Y_{f_i} - Y_j \leq d_{f_i j} \quad (\forall f_i \in F \text{ ve } \forall j \in D) \quad (121)$$

$$-Y_{f_i} + Y_{f_j} \leq d_{f_i f_j} \quad (\forall f_i, f_j \in F \text{ ve } i \neq j) \quad (122)$$

$$Y_{s_i} \leq 0 \quad (\forall s_i \in S) \quad (123)$$

$$Y_{f_i} \geq 0 \quad (\forall f_i \in F) \quad (124)$$

Engelleme modelinde kullanılmak üzere takipçi modelinin dual modeli kurulmuştur. Takipçi modelinde hedef minimizasyon olduğu için dual modelde Eşitlik 113'te sağ taraf değerleriyle değişkenler çarpılarak oluşturulan amaç fonksiyonu, maksimizasyondur. Dual model kurulurken primal modelde toplam n kısıt bulunduğu için n adet dual değişken tanımlanmıştır. Ayrıca takipçi modelinde (primal modelde) yer alan ve Eşitlik 108 ile gösterilen kısıt büyük eşit tipinde olduğu için bu kısıta ait dual değişkenlerin negatif olmaması gerektiği Eşitlik 123 ile ifade edilmiştir. Ek olarak takipçi modelindeki Eşitlik 109 ile gösterilen kısıt küçük eşit tipinde olduğu için bu kısıta ait dual değişkenlerin sıfırdan eşit ya da küçük olması gerektiği Eşitlik 124 ile gösterilmiştir.

❖ Lider İki Seviyeli Modeli: Çok başlangıç çok bitişli kapasiteli en kısa yol probleminin çözümünde kullanılmak üzere hazırlanan lider iki seviyeli model aşağıda verilmiştir.

Parametreler :

C = Engellenen yolu kullanmanın cezası (engellenen yola eklenen ceza uzunluğu)

T = Engelleme bütçesi

Karar Değişkenleri :

$$k_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{düğümü i'den düğüm j'ye olan yol engellenirse} \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

Amaç Fonksiyonu :

$$Z^* = \max \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij} (d_{ij} + Ck_{ij}) \quad (125)$$

Kısıtlar :

$$\sum_{j=1}^n X_{s_i j} - \sum_{k=1}^n X_{ks_i} \leq A_{s_i} \quad (\forall s_i \in S) \quad (126)$$

$$\sum_{k=1}^n X_{kf_i} - \sum_{j=1}^n X_{f_i j} \geq I_{f_i} \quad (\forall f_i \in F) \quad (127)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ik} - \sum_{i=1}^n X_{kj} = 0 \quad (\forall k \in D) \quad (128)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ii} = 0 \quad (\forall i \in N) \quad (129)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} = T \quad (130)$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad (\forall i, j \in N) \quad (131)$$

$$k_{ij} \in \{0,1\} \quad (\forall i, j \in N) \quad (132)$$

Liderin (engelleyicinin) en kısa yolu engelleme(ler) yaparak en büyükmeyi hedeflediği bu iki seviyeli matematiksel modelde Eşitlik 125 ile gösterilen amaç fonksiyonunda yer alan iç minimizasyon problemde takipçi (şebekeyi işleten) modeline ek olarak lider tarafından engellenen yolların kullanılmaması için; engellenen yolların uzunlukları C birim kadar uzatılmıştır. Modelde, k_{ij} karar değişkeni 1 değerini aldığı anda o yolun engellendiği ve böylece yeni uzunluğunun $d_{ij} + C$ olduğu ifade edilmiştir. İki seviyeli modelin kısıtlarında ise takipçi modelinde yer alan Eşitlik 126-129 ve 131 ile gösterilen kısıtlara ek olarak Eşitlik 130 ile gösterilen ve toplam engelleme sayısının

engelleme bütçesi kadar olduğunu gösteren kısıt eklenmiştir. Problemden her bir yolun engelleme maliyetinin 1 birim olduğu varsayılmıştır. Eşitlik 132 ile gösterilen kısıtta ise herhangi bir i, j yolunun engellenme karar değişkeninin 0 ya da 1 olması sağlanmıştır.

❖ Lider Tek Seviyeli Engelleme Modeli: Çok başlangıç çok bitişli kapasiteli en kısa yol probleminin çözümünde kullanılmak üzere hazırlanan lider tek seviyeli engelleme modeli aşağıda verilmiştir.

Amaç Fonksiyonu :

$$Z^* = \max \sum_{i=1}^m A_{s_i} Y_{s_i} + \sum_{i=1}^p I_{f_i} Y_{f_i} \quad (133)$$

Kısıtlar :

$$Y_{s_i} - Y_{s_j} \leq d_{s_i s_j} + Ck_{s_i s_j} \quad (\forall s_i \in S \text{ ve } \forall s_j \in S) \quad (134)$$

$$Y_{s_i} - Y_j \leq d_{s_i j} + Ck_{s_i j} \quad (\forall s_i \in S \text{ ve } \forall j \in D) \quad (135)$$

$$Y_i - Y_{s_j} \leq d_{is_j} + Ck_{is_j} \quad (\forall i \in D \text{ ve } \forall s_j \in S) \quad (136)$$

$$Y_i - Y_j \leq d_{ij} + Ck_{ij} \quad (\forall i \in D \text{ ve } \forall j \in D) \quad (137)$$

$$Y_{s_i} + Y_{f_j} \leq d_{s_i f_j} + Ck_{s_i f_j} \quad (\forall s_i \in S \text{ ve } \forall f_j \in F) \quad (138)$$

$$Y_i + Y_{f_j} \leq d_{if_j} + Ck_{if_j} \quad (\forall i \in D \text{ ve } \forall f_j \in F) \quad (139)$$

$$-Y_{f_i} - Y_{s_j} \leq d_{f_i s_j} + Ck_{f_i s_j} \quad (\forall f_i \in F \text{ ve } \forall s_j \in S) \quad (140)$$

$$-Y_{f_i} - Y_j \leq d_{f_i j} + Ck_{f_i j} \quad (\forall f_i \in F \text{ ve } \forall j \in D) \quad (141)$$

$$-Y_{f_i} + Y_{f_j} \leq d_{f_i f_j} + Ck_{f_i f_j} \quad (\forall f_i, f_j \in F \text{ ve } i \neq j) \quad (142)$$

$$Y_{s_i} \leq 0 \quad (\forall s_i \in S) \quad (143)$$

$$Y_{f_i} \geq 0 \quad (\forall f_i \in F) \quad (144)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} = T \quad (145)$$

$$k_{ij} \in \{0,1\} \quad (146)$$

Liderin engelleme modeli iç tarafta yer alan minimizasyon probleminin dual problemi alınarak tek seviyeli modele indirgenmiştir. Eşitlik 133 ile gösterilen amaç fonksiyonu, Eşitlik 134-142 ile gösterilen ve dual kısıtlara engelleme cezalarının eklenmesiyle oluşturulan engelleme kısıtları altında Eşitlik 143 ve 144 ile gösterilen dual

değişkenlerin alabileceği değer kısıtları ve Eşitlik 146'da yer alan engelleme kararının 0-1 karar değişkeni olması gerektiği kurallarına uyarak en büyüklenmeye çalışılmıştır. Ayrıca kaynak kısıtını ifade eden Eşitlik 145 ile de liderin kullanabileceği kaynak (terörist sayısı) bütçesi sınırlandırılmıştır.

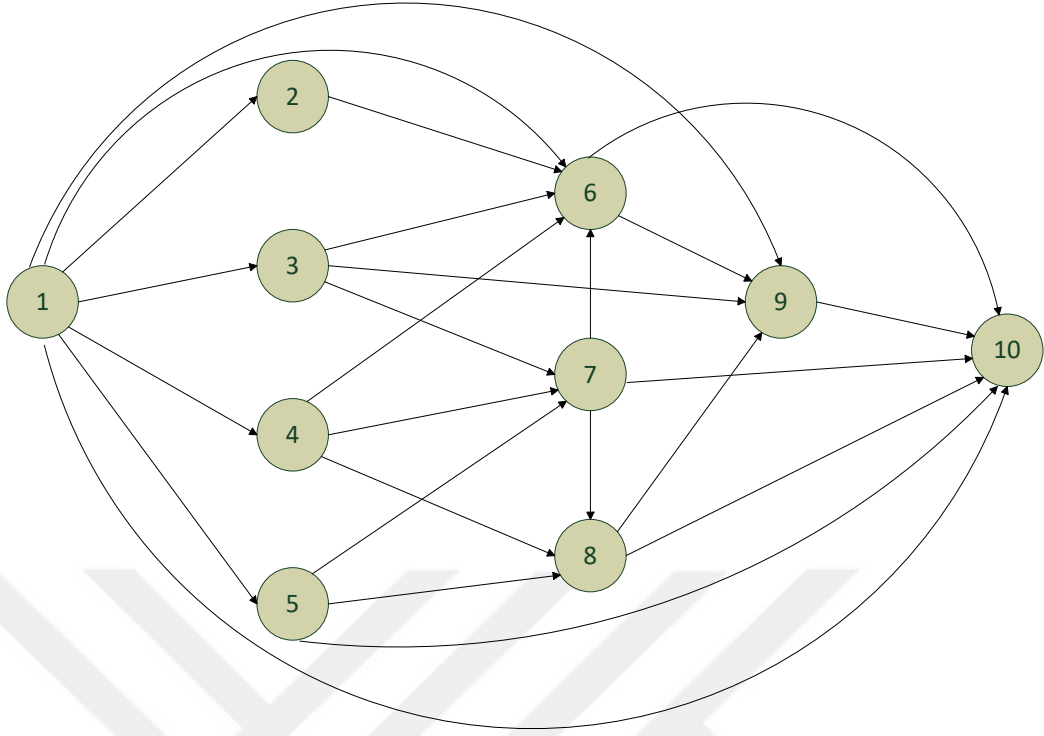


4. UYGULAMALAR

Çalışma kapsamında hazırlanan 5 farklı matematiksel model için 5 farklı uygulama yapılmıştır ve ayrıntılı bir şekilde aşağıda açıklanmıştır. Çalışmadaki tüm modeller Intel(R) Core(TM) i7-4720HQ CPU @ 2.60 Ghz işlemcili, 8.00 GB RAM'e sahip bir bilgisayar üzerinde, IBM ILOG CPLEX Optimization Studio 12.7 paket programı kullanılarak çözülmüştür.

4.1. Tek Başlangıç Tek Bitişli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi Matematiksel Modelinin Uygulanması

Tek başlangıç tek bitiş içeren en kısa yol problemleri için geliştirilen şebeke engelleme problemi modeli, Şekil 2 ile gösterilen Şebeke 1 üzerinde uygulanmıştır. 10 düğüm, 25 bağlantıdan oluşan şebekede, takipçinin (şebekeyi işletenin) düğüm 1'den düğüm 10'a en kısa yoldan ulaşmaya çalıştığı, liderin (engelleyicinin) ise şebekede yer alan 25 bağlantı üzerinde engellemeler yaparak takipçinin en kısa yolunu en büyükmeyi amaçladığı varsayılmıştır.



Şekil 2. 10 düğüm 25 bağlantıdan oluşan örnek şebeke (Şebeke 1)

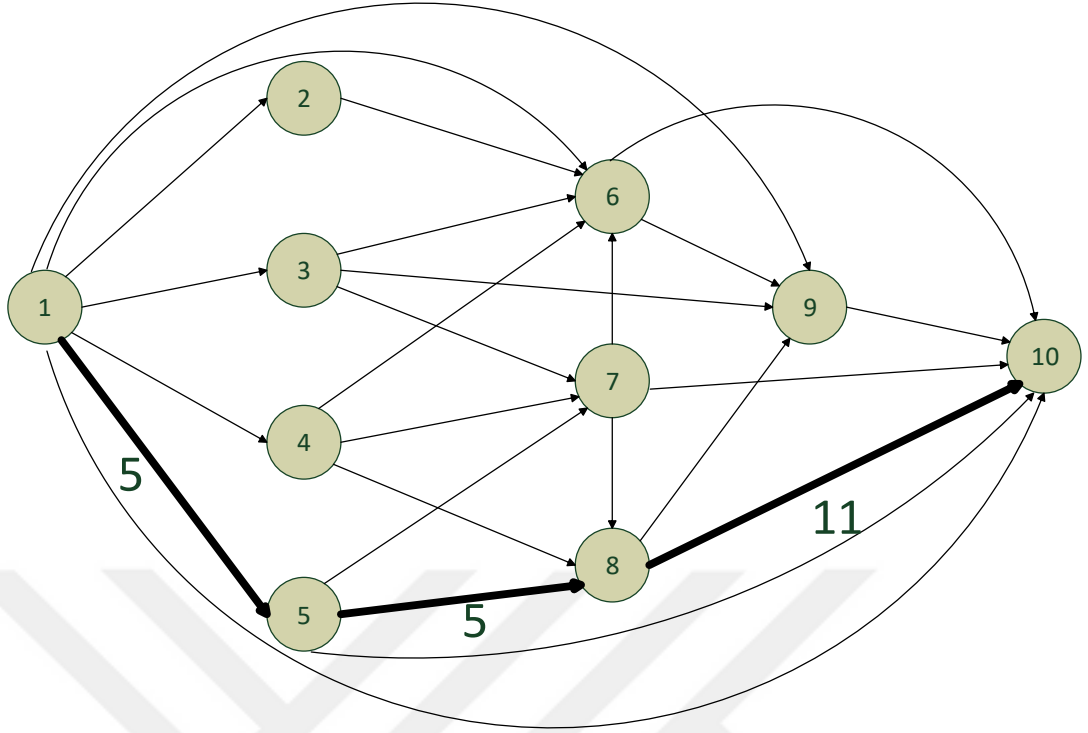
Takipçi, daha önce verilen takipçi matematiksel modeli kullanarak şebeke üzerindeki en kısa yol vasıtasıyla düğüm 1'den düğüm 10'a gitmektedir. Şebekede yer alan bağlantı uzunlukları Tablo 3'te verilmiştir. Yalnızca bağlantılar üzerinde hareket edilebilir, bağlantılar tek yönlüdür, aralarında bağlantı bulunmayan düğümler arası hareket mümkün değildir.

Tablo 3.Bağlantı uzunlukları (Şebeke 1)

Bağlantı (Başlangıç-Bitiş)	Uzunluk (ub)	Bağlantı (Başlangıç-Bitiş)	Uzunluk (ub)
1-2	8	4-8	3
1-3	9	5-7	6
1-4	8	5-8	5
1-5	5	5-10	21
1-6	5	6-9	12
1-9	34	6-10	28
1-10	37	7-6	1
2-6	2	7-8	3
3-6	1	7-10	13
3-7	3	8-9	7
3-9	9	8-10	11
4-6	5	9-10	10
4-7	2		

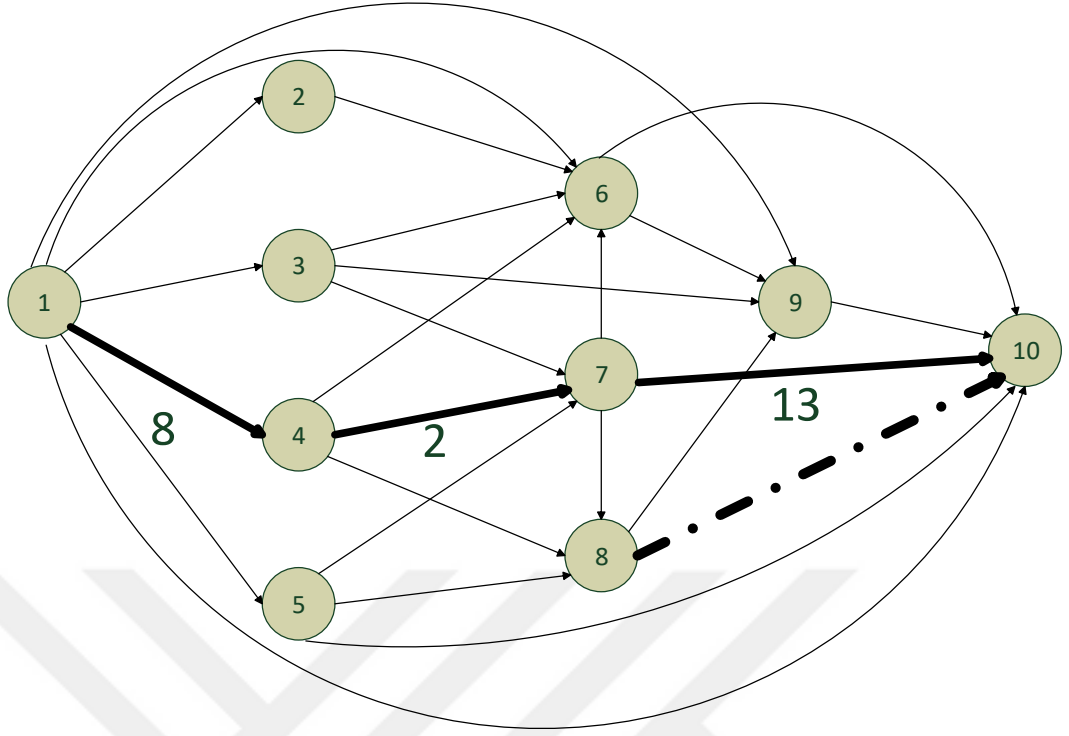
*ub = uzunluk birimi

Takipçi matematiksel model, hiçbir engelleme olmadığı durumda takipçinin Şekil 3'te gösterilen $1 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 10$ yolunu takip edip, toplam 21 birim yol giderek düğüm 10'a ulaştığı görülmüştür. Şekil 3'te takipçinin en kısa yol rotası kalın çizgilerle belirtilmiş ve kullandığı bağlantıların uzunlukları gösterilmiştir.



Şekil 3. Engelleme olmadığı durumda takipçinin rotası (Şebeke 1)

Daha sonra bu yolu en büyükleme amacıyla liderin (engelleyicinin) lider tek seviyeli engelleme modeli kullanarak engellemeler yaptığı ve en kısa yolu uzattığı görülmüştür. Örneğin, liderin engelleme bütçesinin 1 birim olduğu durumda düğüm 8 ile düğüm 10 arasında bulunan bağlantıyı engellediği ve takipçinin en kısa yolunu 3 birim arttırdığı görülmüştür. Bu durumda engellenen bağlantı ve oluşan yeni en kısa yol rotası Şekil 4'te verilmiştir. Şekil 4'te liderin engelleme yaptığı bağlantı kesikli çizgiyle gösterilirken, bu bilgiyle hareket eden takipçinin en kısa yol rotası kalın çizgilerle gösterilmiştir.



Şekil 4. Engelleme sayısı 1 olduğunda engellenen bağlantı ve takipçinin rotası (Şebeke 1)

Hazırlanan modeller farklı engelleme bütçeleri için farklı senaryolar oluşturularak çalıştırılmıştır ve böylece liderin hangi yolları engellediği, takipçinin ise engellenmemiş yolları kullanmak koşuluyla en kısa yolu kullanarak hedef düğümüne nasıl ulaştığı Tablo 4'te özetlenmiştir.

Tablo 4. Farklı bütçe seviyeleri için senaryo sonuçları (Şebeke 1)

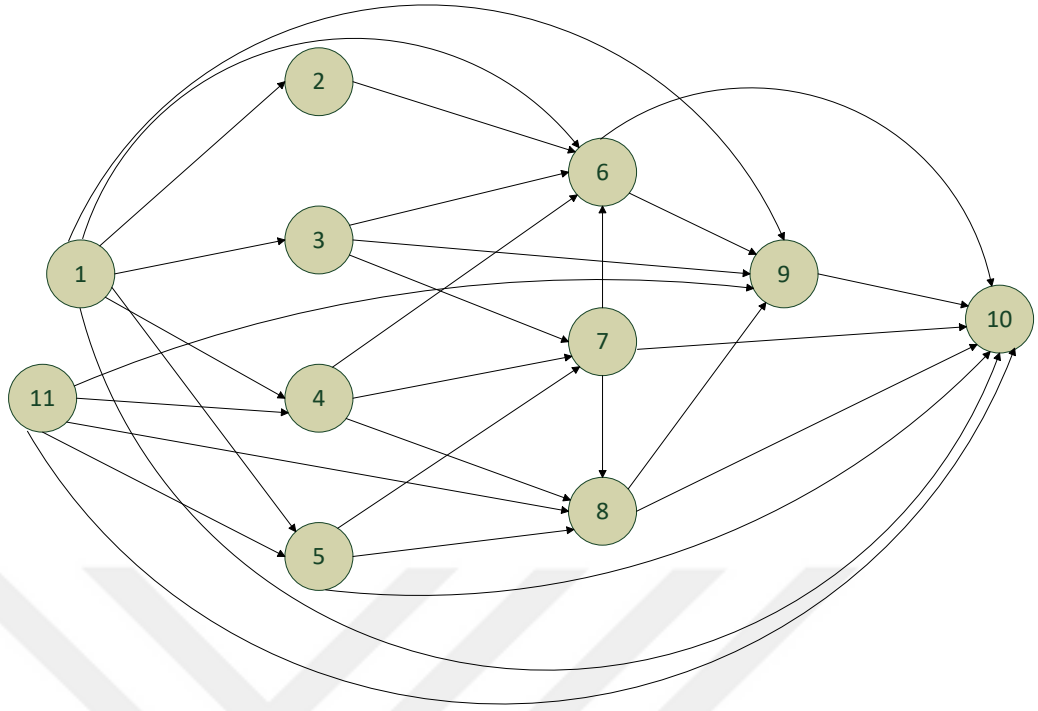
Engelleme Bütçesi(T)	Engellenen Bağlantılar	Seçilen Yol	En Kısa Yol Uzunluğu
1*	8-10	1→4→7→10	23
2	7-10,8-10	1→5→10	26
3	1-3,1-4,1-5	1→6→9→10	27
4	1-5,7-10,8-10,9-10	1→6→10	33
5	1-5,6-10,7-10,8-10,9-10	1→10	37
6	1-5,6-10,7-10,8-10,9-10,1-10	-	∞

*Engelleme bütçesi (terörist sayısı) 1 olduğu durumda liderin düğüm 8 ile düğüm 10 arasında olan yolu engellediği, takipçinin ise 1→4→7→10 rotasını kullanarak 23 birim hareket ederek hedef düğüme ulaştığı ve böylece takipçinin yolunu 3 birim uzattığı görülmüştür.

Sonuçlar incelendiğinde liderin yapabileceği engelleme sayısı/bütçe (T) arttıkça, takipçinin en kısa yol uzunluğunun da buna bağlı olarak arttığı görülmektedir. Eğer liderin engelleme sayısı 6 veya daha fazla olursa düğüm 1'den düğüm 10'a gidilebilen tüm yolları engelleyebileceği anlaşılmıştır.

4.2. Çok Başlangıç Tek Bitişli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi Matematiksel Modelinin Uygulanması

Çok başlangıç tek bitiş içeren en kısa yol problemleri için geliştirilen şebeke engelleme problemi modeli, aşağıda Şekil 5 ile gösterilen Şebeke 2 üzerinde uygulanmıştır. 11 düğüm, 30 bağlantıdan oluşan şebekede, takipçinin (şebekeyi işletenin) düğüm 1 ya da düğüm 11'den başlayarak düğüm 10'a en kısa yoldan ulaşmaya çalıştığı, liderin (engelleyicinin) ise şebekede yer alan 30 düğüm üzerinde engellemeler yaparak takipçinin en kısa yolunu en büyükmeyi amaçladığı varsayılmıştır.



Şekil 5. 11 düğüm 30 bağlantıdan oluşan örnek şebeke (Şebeke 2)

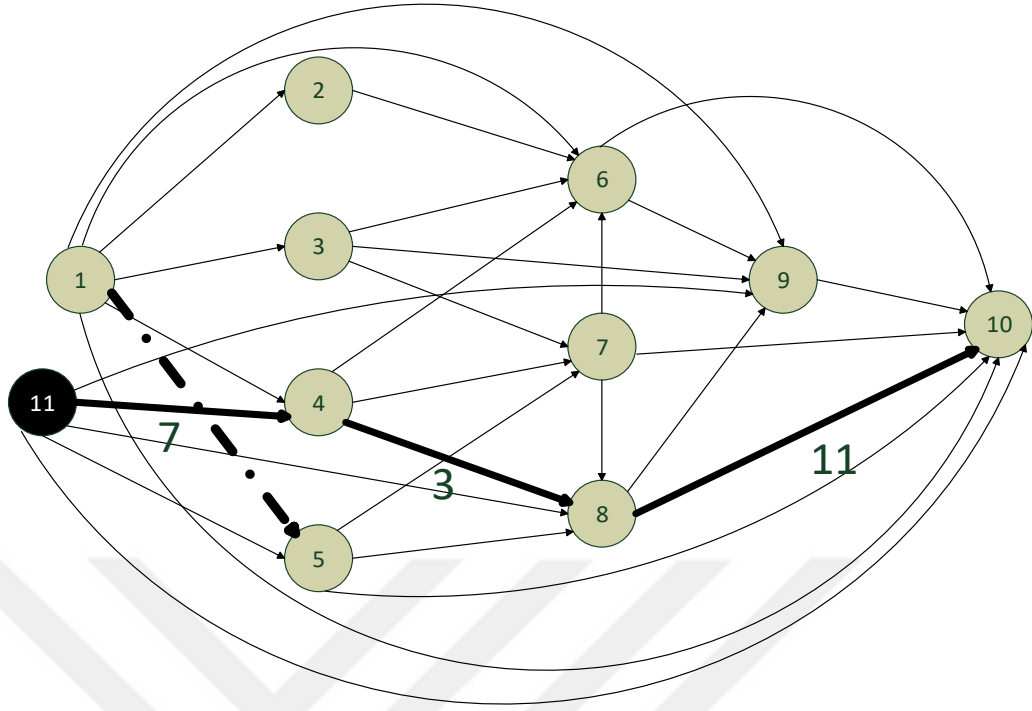
Takipçi daha önce verilen takipçi matematiksel modeli kullanarak şebeke üzerindeki en kısa yol vasıtasıyla düğüm 1 ya da düğüm 11'den düğüm 10'a gitmektedir. Şebekede yer alan bağlantı uzunlukları Tablo 5'te verilmiştir. Yalnızca bağlantılar üzerinde hareket edilebilir, aralarında bağlantı bulunmayan düğümler arası hareket mümkün değildir.

Tablo 5. Bağlantı uzunlukları (Şebeke 2)

Bağlantı (Başlangıç-Bitiş)	Uzunluk (ub)	Bağlantı (Başlangıç-Bitiş)	Uzunluk (ub)
1-2	8	5-8	5
1-3	9	5-10	17
1-4	8	6-9	7
1-5	2	6-10	28
1-6	5	7-6	1
1-9	34	7-8	3
1-10	37	7-10	13
2-6	2	8-9	7
3-6	1	8-10	11
3-7	3	9-10	10
3-9	9	11-3	6
4-6	5	11-4	7
4-7	2	11-7	14
4-8	3	11-8	16
5-7	6	11-10	40

*ub = uzunluk birimi

Takipçi matematiksel modeli, çözülerek hiçbir engelleme olmadığı durumda takipçinin düğüm 1'den başlayarak $1 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 10$ yolunu takip edip, toplam 18 birim yol giderek düğüm 10'a ulaştığı görülmüştür. Hedef düğümü olan düğüm 10'a giderken kullandığı rota Şekil 6'da kalın çizgilerle gösterilmiştir.



Şekil 7. Engelleme sayısı 1 olduğunda engellenen bağlantı ve takipçinin rotası (Şebeke 2)

Hazırlanan modeller farklı engelleme bütçeleri için farklı senaryolar oluşturularak çalıştırılmıştır ve böylece liderin hangi yolları engellediği, takipçinin ise engellenmemiş yolları kullanmak koşuluyla en kısa yolu kullanarak hedef düğümüne nasıl ulaştığı Tablo 6'da özetlenmiştir.

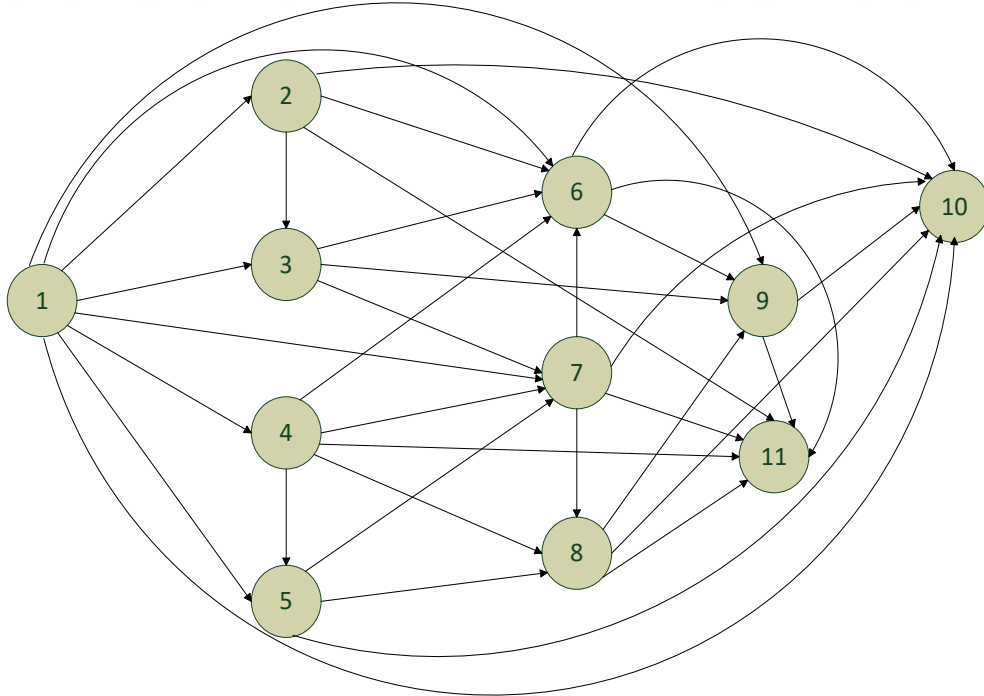
Tablo 6. Farklı bütçe seviyeleri için senaryo sonuçları (Şebeke 2)

Engelleme Bütçesi (T)	Engellenen Bağlantılar	Seçilen Yol	En Kısa Yol Uzunluğu
0	-	1→5→8→10	18
1	1-5	11→4→8→10	21
2	1-5,8-10	11→3→7→10	22
3	5-10,7-10,8-10	1→6→9→10	22
4	7-10,8-10,9-10,1-5	1→6→10	33
5	6-10,7-10,8-10,9-10,1-5	1→10	37
6	6-10,7-10,8-10,9-10,1-5,1-10	11→10	40
7	6-10,7-10,8-10,9-10,1-5,1-10,1-11	-	∞

Liderin engelleme kararları ve bu bilgiler ışığında hareket eden takipçinin kararları incelendiğinde liderin yapabileceği engelleme sayısı/bütçe (T) arttıkça, takipçinin en kısa yol uzunluğunun da buna bağlı olarak arttığı görülmektedir. Liderin yapabileceği engelleme sayısı 0, 3, 4 ve 5 iken takipçinin hedef düğüme ulaşmak için düğüm 1'den başlamayı seçtiği; engelleme sayısı, 1, 2 ve 6 iken ise düğüm 11'den başladığı görülmüştür. Eğer liderin yapabileceği engelleme sayısı 7 veya daha fazla olursa düğüm 1'den düğüm 10'a gidilebilen tüm yolları engelleyebildiği anlaşılmıştır.

4.3. Tek Başlangıç Çok Bitişli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi Matematiksel Modelinin Uygulanması

Tek başlangıç çok bitiş içeren en kısa yol problemleri için geliştirilen şebeke engelleme problemi modeli, aşağıda Şekil 8 ile gösterilen Şebeke 3 üzerinde uygulanmıştır. 11 düğüm, 35 bağlantıdan oluşan şebekede, takipçinin (şebekeyi işletenin) düğüm 1 ya da düğüm 11'den başlayarak düğüm 10'a en kısa yoldan ulaşmaya çalıştığı, liderin (engelleyicinin) ise şebekede yer alan 30 düğüm üzerinde engellemeler yaparak takipçinin en kısa yolunu en büyüklemeyi amaçladığı varsayılmıştır.



Şekil 8. 11 düğüm 35 bağlantıdan oluşan örnek şebeke (Şebeke 3)

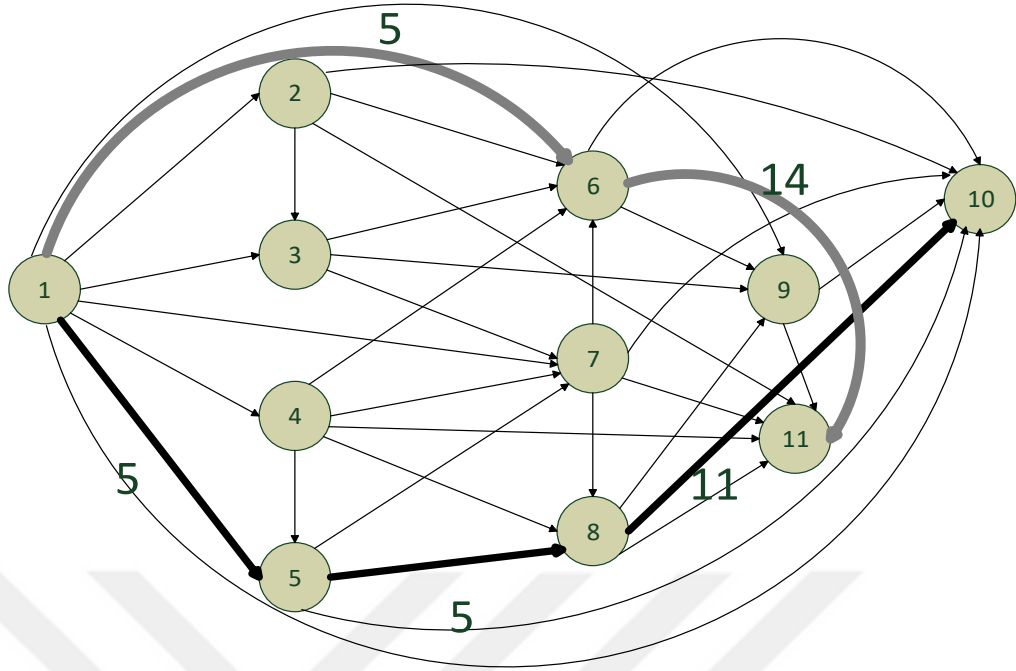
Takipçi daha önce verilen takipçi matematiksel modeli kullanarak şebeke üzerindeki en kısa yol vasıtasıyla düğüm 1'den başlayarak en kısa yolu kullanmak şartıyla hedefler kümesinde yer alan düğüm 10 ve düğüm 11'e gitmeyi amaçlamaktadır.. Şebekede yer alan bağlantı uzunlukları Tablo 7'de verilmiştir. Yalnızca bağlantılar üzerinde hareket edilebilir, aralarında bağlantı bulunmayan düğümler arası hareket mümkün değildir.

Tablo 7. Bağlantı uzunlukları (Şebeke 3)

Bağlantı (Başlangıç-Bitiş)	Uzunluk (ub)	Bağlantı (Başlangıç-Bitiş)	Uzunluk (ub)
1-2	8	4-8	3
1-3	9	4-11	16
1-4	13	5-7	6
1-5	5	5-8	5
1-6	5	5-10	17
1-7	13	6-9	7
1-9	34	6-10	28
1-10	37	6-11	12
2-3	3	7-6	1
2-6	2	7-8	3
2-10	32	7-10	13
2-11	20	7-11	12
3-6	1	8-9	7
3-7	3	8-10	11
3-9	9	8-11	15
4-5	2	9-10	10
4-6	5	9-11	8
4-7	2		

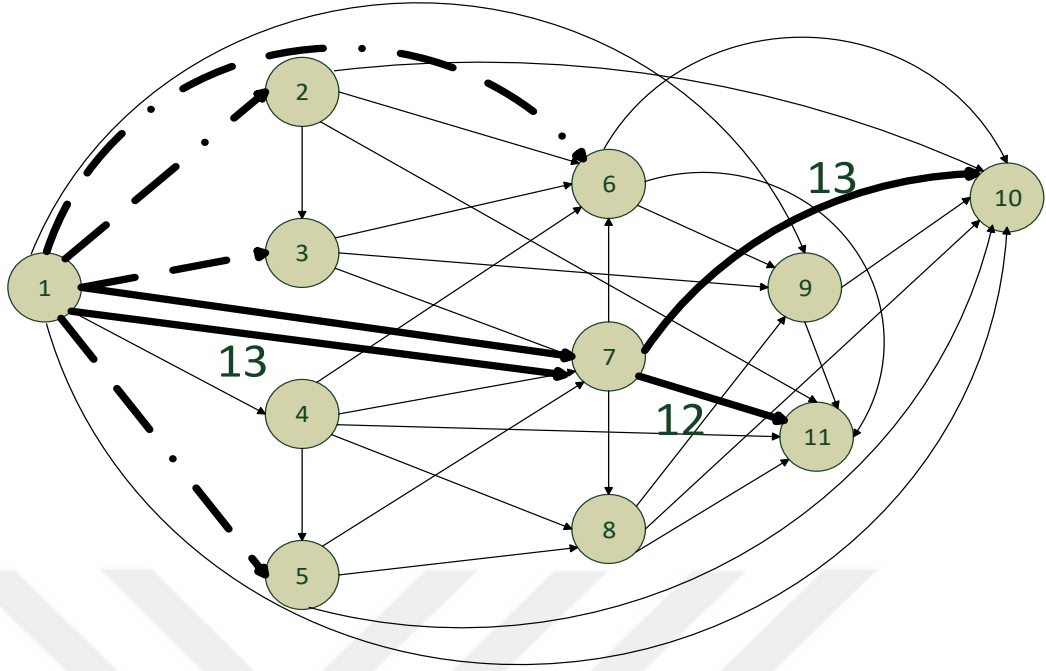
*ub = uzunluk birimi

Takipçi matematiksel modeli çözülerek, hiçbir engelleme olmadığı durumda takipçinin düğüm 10'a ulaşmak için 21 birim yol giderek 1→5→8→10 yolunu izlediği, düğüm 11'e ulaşmak için ise 19 birim yol giderek 1→6→11 yolunu izlediği ve toplam 40 birim mesafe kat ederek her iki hedef düğüme de ulaştığı görülmüştür. Şekil 9'da takipçinin hedeflere ulaşmakta kullandığı rota kalın çizgilerle belirtilmiştir.



Şekil 9. Engelleme olmadığı durumda takipçinin rotası (Şebeke 3)

En kısa yolu en büyükleme amacıyla liderin (engelleyicinin) yukarıda verilen tek seviyeli matematiksel modeli kullanarak engellemeler yaptığı ve yolu uzattığı görülmüştür. Örneğin liderin engelleme bütçesinin 4 birim olduğu durumda düğüm 1 ile düğüm 2 arasında bulunan, düğüm 1 ile düğüm 3 arasında bulunan, düğüm 1 ile düğüm 5 arasında bulunan ve düğüm 1 ile düğüm 6 arasında bulunan bağlantıları engellediği ve takipçinin en kısa yolunu toplamda 14 (51-37) birim arttırdığı görülmüştür. Yeni durumda, takipçi düğüm 10'a ulaşmak için $1 \rightarrow 7 \rightarrow 10$ rotasını kullanmaktayken, düğüm 11'e ulaşmak için ise $1 \rightarrow 7 \rightarrow 11$ rotasını kullanmaktadır. Burada takipçinin düğüm 1 den düğüm 7'ye 2 sefer gittiği görülmektedir. Bu da kurulan matematiksel modelde kullanılan X_{ij} değişkeninin 0-1 değişken tipi yerine pozitif değişken olarak tanımlanmasıyla mümkün kılınmıştır. Bu durumda engellenen bağlantılar ve oluşan yeni en kısa yol rotaları Şekil 10'da verilmiştir. Liderin engelleme yaptığı bağlantı kesikli çizgiyle gösterilirken, bu bilgiyle hareket eden takipçinin en kısa yol rotası kalın çizgilerle gösterilmiştir.



Şekil 10. Engelleme sayısı 4 olduğunda engellenen bağlantı ve takipçinin rotası (Şebeke 3)

Hazırlanan modeller farklı engelleme bütçeleri için farklı senaryolar oluşturularak çalıştırılmıştır ve böylece liderin hangi yolları engellediği, takipçinin ise engellenmemiş yolları kullanmak koşuluyla en kısa yolu kullanarak hedef düğümüne nasıl ulaştığı Tablo 8’de özetlenmiştir.

Tablo 8. Farklı bütçe seviyeleri için senaryo sonuçları (Şebeke 3)

Engelleme Bütçesi (T)	Engellenen Bağlantılar	Seçilen Yol	En Kısa Yol Uzunluğu
0	-	1→5→8→10 1→6→11	37
1	1-5	1→6→9→10 1→6→11	39
2	1-5,1-6	1→3→7→10 1→2→6→11	47
3	1-5,6-9,6-11	1→3→7→10 1→3→7→11	49
4	1-2,1-3,1-5,1-6	1→7→10 1→7→11	51
5	1-6,5-10,7-10,8-10,9-10	1→10 1→2→6→11	59
6	1-2,1-4,6-11,7-11,8-11,9-11	düğüm 11 engellendi*	-
8	1-2,1-3,1-4,1-5,1-6,1-7,1-9,1-11	düğüm 10 ve düğüm 11 engellendi**	-

*takipçinin düğüm 11'e gidebileceği tüm yollar engellenmiştir.

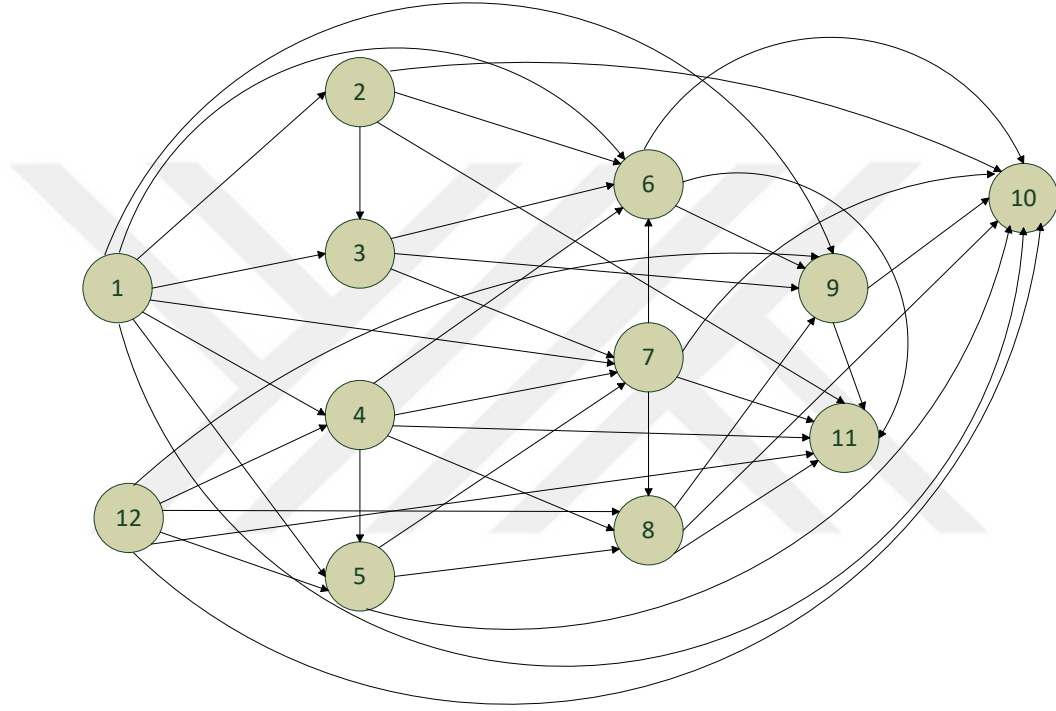
**takipçinin her iki hedefe (düğüm 10 ve düğüm 11e) gidebileceği tüm yollar engellenmiştir.

Liderin engelleme kararları ve bu bilgiler ışığında hareket eden takipçinin kararları incelendiğinde liderin yapabileceği engelleme sayısı/bütçe (T) arttıkça, takipçinin en kısa yol uzunluğunun da buna bağlı olarak arttığı görülmektedir. Liderin yapabileceği engelleme sayısı 0 ile 5 arasında artarken takipçinin toplam en kısa yolunu sürekli arttırabildiği görülmüştür. Ayrıca liderin engelleme sayısı 6 olduğu takdirde takipçinin düğüm 11'e gidebileceği tüm alternatif yolları engelleyebildiği, 8 olduğu takdirde düğüm 10 ve düğüm 11'e takipçinin ulaşmasını imkânsız hale getirdiği görülmüştür.

4.4. Çok Başlangıç Çok Bitişli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi Matematiksel Modelinin Uygulanması

Çok başlangıç çok bitiş içeren en kısa yol problemleri için geliştirilen şebeke engelleme problemi modeli, Şekil 11 ile gösterilen Şebeke 4 üzerinde uygulanmıştır. Problemin yapısı gereği başlangıç düğümleri kümesinden başlayarak ve şebeke üzerinde yer alan bağlantıları kullanarak hedef düğümleri kümesinin her bir elemanında bir sefer sonlandırılmalıdır. Aşağıda verilen toplam 12 düğümden oluşan örnek şebeke yapısında

başlangıç düğümleri kümesi $S = \{\text{düğüm 1, düğüm 12}\}$ ve hedef düğümleri kümesi $F = \{\text{düğüm 10, düğüm 11}\}$ şeklinde tanılanmıştır. 12 düğüm, 41 bağlantıdan oluşan şebekede, takipçinin (şebekeyi işletenin) düğüm 1 ya da düğüm 12'den başlayarak düğüm 10 ve düğüm 11'e en kısa yoldan ulaşmaya çalıştığı, liderin (engelleyicinin) ise şebekede yer alan 41 bağlantı üzerinde engellemeler yaparak takipçinin en kısa yolunu en büyükleme amaçladığı varsayılmıştır.



Şekil 11. 12 düğüm 41 bağlantıdan oluşan örnek şebeke

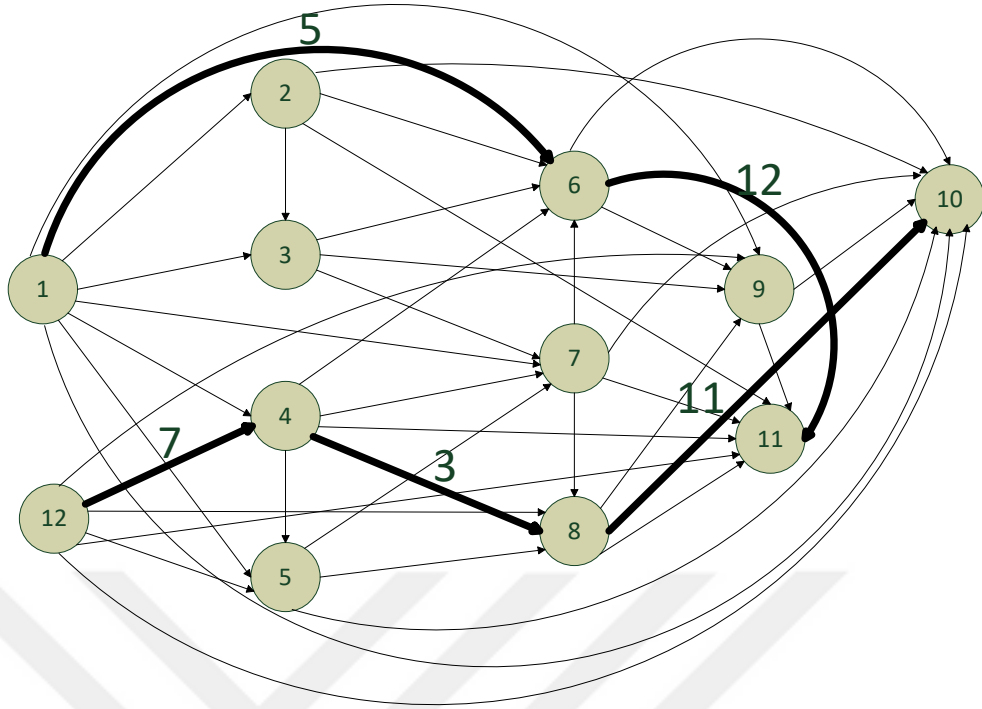
Takipçi daha önce verilen takipçi matematiksel modeli kullanarak şebeke üzerindeki bağlantılar vasıtasıyla başlangıç düğümlerinden hedef düğümlerine gitmektedir. Şebekede yer alan bağlantı uzunlukları Tablo 9'da verilmiştir. Yalnızca bağlantılar üzerinde hareket edilebilir, aralarında bağlantı bulunmayan düğümler arası hareket etmek mümkün değildir.

Tablo 9. Bağlantı uzunlukları (Şebeke 4)

Bağlantı (Başlangıç-Bitiş)	Uzunluk (ub)	Bağlantı (Başlangıç-Bitiş)	Uzunluk (ub)
1-2	8	5-8	5
1-3	9	5-10	17
1-4	13	6-9	7
1-5	5	6-10	28
1-6	5	6-11	12
1-7	13	7-6	1
1-9	34	7-8	3
1-10	37	7-10	13
2-3	3	7-11	12
2-6	2	8-9	7
2-10	32	8-10	11
2-11	20	8-11	15
3-6	1	9-10	10
3-7	3	9-11	8
3-9	9	12-4	7
4-5	2	12-5	6
4-6	5	12-8	22
4-7	2	12-9	31
4-8	3	12-10	38
4-11	16	12-11	33
5-7	6		

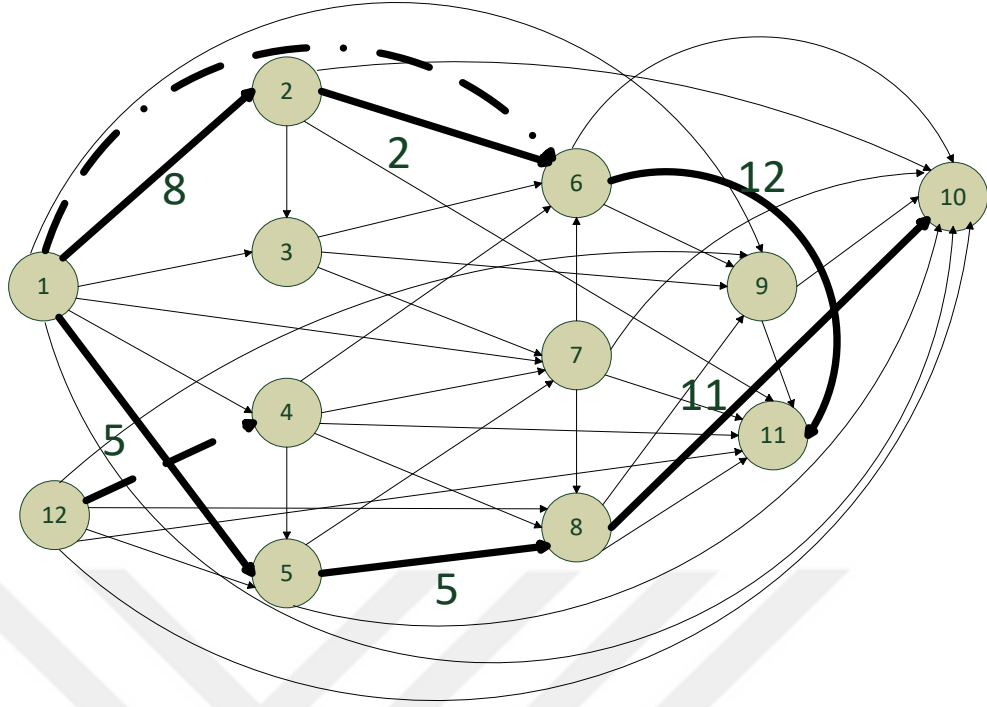
*ub = uzunluk birimi

Takipçi matematiksel modeli, çözülerek hiçbir engelleme olmadığı durumda takipçinin düğüm 10'a ulaşmak için düğüm 12'den başlayıp, 21 birim yol giderek 12→4→8→10 rotasını izlediği, düğüm 11'e ulaşmak için ise düğüm 1'den başlayıp 17 birim yol giderek 1→6→11 rotasını izlediği ve toplam 38 birim mesafe kat ederek her iki hedef düğüme de ulaştığı görülmüştür. Şekil 12'de takipçinin hedeflere ulaşmakta kullandığı rota kalın çizgilerle belirtilmiştir.



Şekil 12. Engelleme olmadığı durumda takipçinin rotası (Şebeke 4)

Daha sonra bu yolu en büyükleme amacıyla liderin (engelleyicinin) yukarıda verilen tek seviyeli matematiksel modeli kullanarak engellemeler yaptığı ve yolu uzattığı görülmüştür. Örneğin liderin engelleme bütçesinin 2 birim olduğu durumda düğüm 1 ile düğüm 6 arasında bulunan ve düğüm 12 ile düğüm 4 arasında bulunan bağlantıları engellediği ve takipçinin en kısa yolunu toplamda 43 birime ulaştırarak 5 birim arttırdığı görülmüştür. Takipçi, düğüm 10'a ulaşmak için $1 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 10$ rotasını kullanmaktayken, düğüm 11'e ulaşmak için ise $1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 11$ rotasını kullanmaktadır. Bu durumda engellenen bağlantılar ve oluşan yeni en kısa yol rotaları Şekil 13'te verilmiştir. Şekil 13'te liderin engelleme yaptığı bağlantı kesikli çizgiyle gösterilirken, bu bilgiyle hareket eden takipçinin en kısa yol rotası kalın çizgilerle gösterilmiştir.



Şekil 13. Engelleme sayısı 2 olduğunda engellenen bağlantı ve takipçinin rotası (Şebeke 4)

Hazırlanan modeller farklı engelleme bütçeleri için farklı senaryolar oluşturularak çalıştırılmıştır ve böylece liderin hangi yolları engellediği, takipçinin ise engellenmemiş yolları kullanmak koşuluyla en kısa yolu kullanarak hedef düğümüne nasıl ulaştığı Tablo 4’de özetlenmiştir.

Tablo 10. Farklı bütçe seviyeleri için senaryo sonuçları (Şebeke 4)

Engelleme Bütçesi (T)	Engellenen Bağlantılar	Seçilen Yol	En Kısa Yol Uzunluğu
0	-	12→4→8→10 1→6→11	38
1	1-6	1→5→8→10 12→4→7→11	42
2	1-6,12-4	1→5→8→10 1→2→6→11	43
3	1-5,12-4,1-5	12→5→8→10 1→2→6→11	44
4	5-10,7-10,8-10,9-10	1→6→10 1→6→11	50
5	1-6,5-10,7-10,8-10,9-10	1→10 12→4→7→11	58
6	1-6,1-10,5-10,7-10,8-10,9-10	12→10 12→4→7→11	59
7	12-11,2-11,4-11,6-11,7-11,8-11,9-11	düğüm 11 engellendi*	-
14	1-2,1-3,1-4,1-5,1-6,1-7,1-9,1-10,12-4,12-5,12-8,12-9,12-10,12-11	düğüm 10 ve düğüm 11 engellendi	

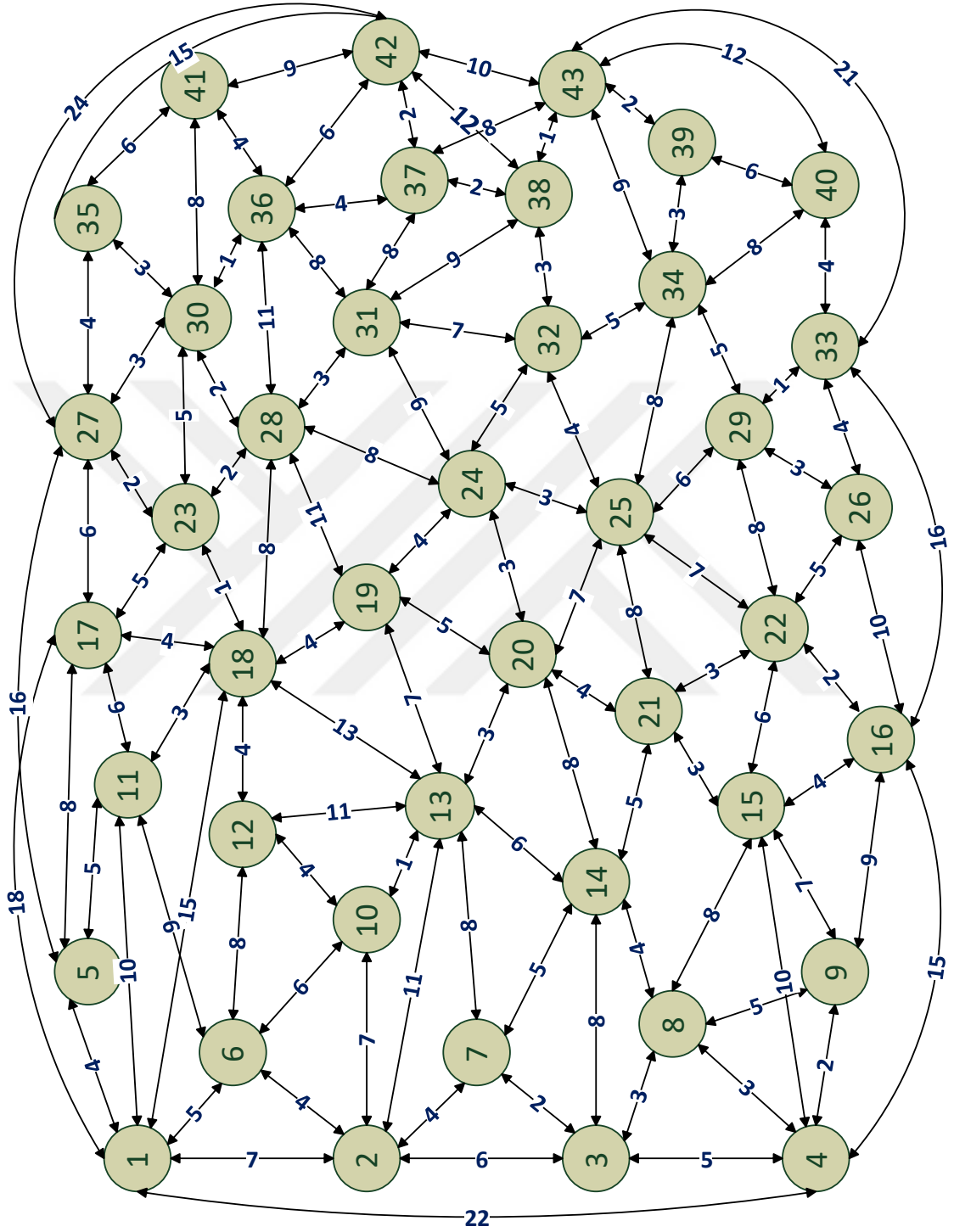
*takipçinin düğüm 11'e gidebileceği tüm yollar engellenmiştir.

**takipçinin her iki hedefe (düğüm 10 ve düğüm 11'e) gidebileceği tüm yollar engellenmiştir.

Liderin engelleme kararları ve bu bilgiler ışığında hareket eden takipçinin kararları incelendiğinde liderin yapabileceği engelleme sayısı/bütçe (T) arttıkça, takipçinin en kısa yol uzunluğunun da buna bağlı olarak arttığı görülmektedir. Liderin yapabileceği engelleme sayısı 0 ile 6 arasında artarken takipçinin toplam en kısa yolunu sürekli arttırabildiği görülmüştür. Ayrıca liderin engelleme sayısı 7 olduğu takdirde takipçinin düğüm 11'e gidebileceği tüm alternatif yolları engelleyebildiği, 14 veya daha fazla olduğu takdirde düğüm 10 ve düğüm 11'e takipçinin ulaşmasını imkansız hale getirdiği görülmüştür. Liderrin her iki hedef düğümünü de engellediği durumda, liderin engelleme kararlarını başlangıç düğümlerinden çıkış yapılmasını engelleme üzerine verdiği görülmüştür.

4.5. Çok Başlangıç Çok Bitişli Kapasiteli En Kısa Yol Şebeke Engelleme Problemi Matematiksel Modelinin Uygulanması

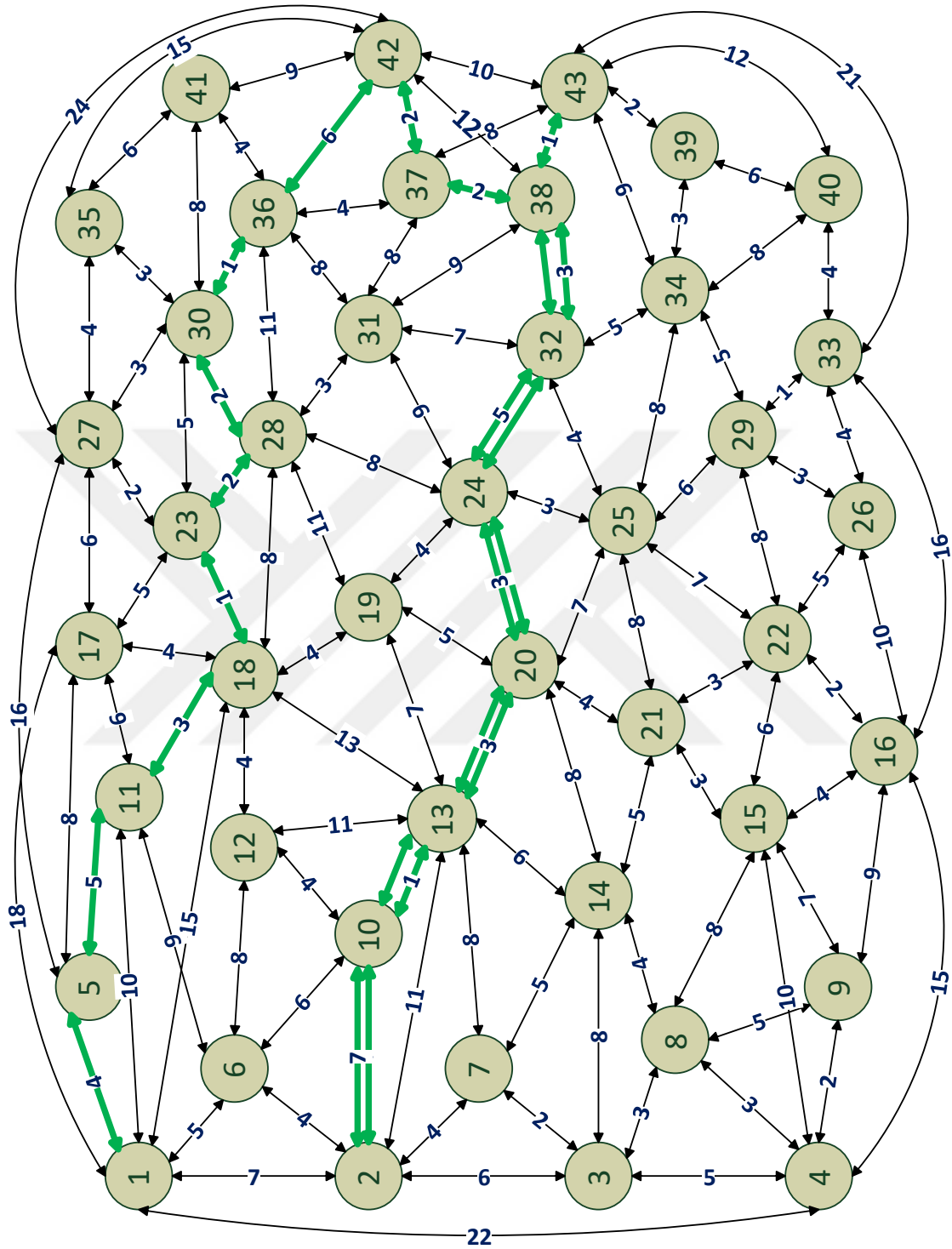
Çok başlangıç çok bitiş (hedef) içeren; her bir başlangıç düğümünün kapasitesi ve her bir hedef düğümünün farklı sayıda ihtiyacı bulunan en kısa yol şebeke engelleme problemi için hazırlanan matematiksel modeller daha önce ayrıntısıyla anlatılmıştır. Bu modellerin çalışma şekli ve performansını test edebilmek için aşağıda 43 düğümü ve 234 bağlantısı bulunan Şekil 14 ile gösterilen Şebeke 5 hazırlanmıştır. Şekilde düğümler arası mesafeler bağlantıların üstünde gösterilmiştir. Aralarında bağlantı bulunmayan düğümler arası transfer imkansızdır ve tüm bağlantılar iki yönlüdür. Şebekede 43 düğüm vardır ve bunlardan 4 tanesi başlangıç düğümü iken; 2 tanesi ise hedef düğümdür. Başlangıç düğümleri kümesi olan S kümesinin elemanları düğüm 1, düğüm 2, düğüm 3 ve düğüm 4'tür ve bu düğümlerin kapasiteleri sırasıyla 1, 3, 2, 1'dir. Hedef düğümleri kümesi olan F kümesinin elemanları ise düğüm 42 ve düğüm 43'tür. Bu düğümlerin ihtiyaçları sırasıyla 2 ve 1'dir. Bu problem aşağıda verilen şebekede olay yerleri olan düğüm 42 ve 43'te terörist saldırılarının olduğu, düğüm 42'deki yaralılar için 2, düğüm 43'deki yaralılar için ise 1 ambulansa ihtiyaç duyulduğu ve düğüm 1-4'te yer alan ambulansların (takipçinin) olay yerlerine en kısa yoldan ulaşmayı denediği, teröristlerin (liderin) ise şebekede yer alan bağlantılar (yollar) üzerinde engellemeler yaparak ambulansların toplam en kısa yolunu en büyükmeye çalıştığı problem olarak düşünülebilir.



Şekil 14. 43 düğüm 234 bağlantıdan oluşan örnek şebeke (Şebeke 5)

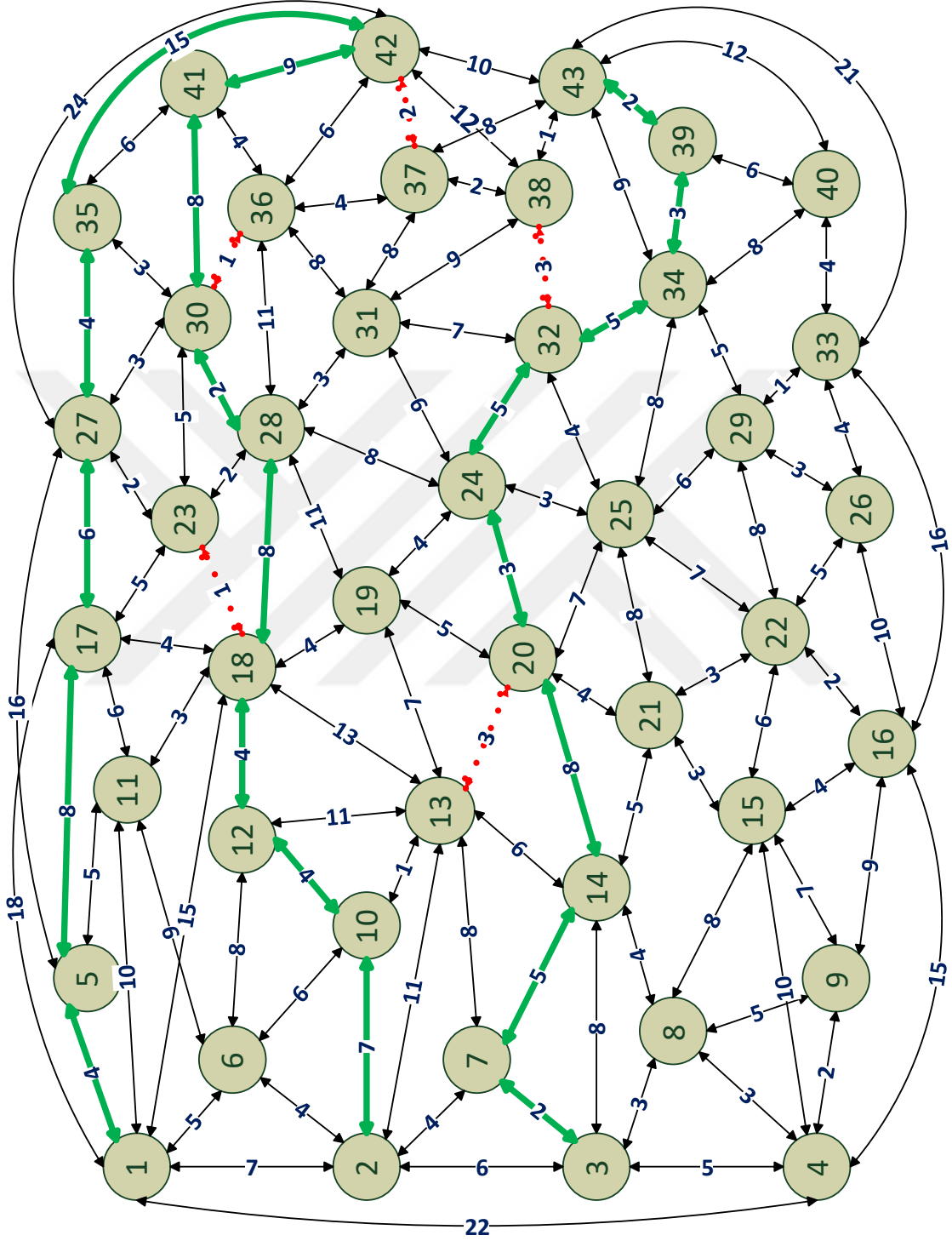
Takipçi daha önce verilen takipçi matematiksel modeli kullanarak şebeke üzerindeki bağlantılar vasıtasıyla başlangıç düğümlerinden hedef düğümlerine gitmektedir.

Takipçi matematiksel modeli, çözülerek hiçbir engelleme olmadığı durumda takipçinin düğüm 42'nin ihtiyacı olan 2 ambulansın birini karşılamak için düğüm 1'den başlayarak $1 \rightarrow 5 \rightarrow 11 \rightarrow 18 \rightarrow 23 \rightarrow 28 \rightarrow 30 \rightarrow 36 \rightarrow 42$ rotasını izlediği, diğer ihtiyacı karşılamak için ise düğüm 2'den başlayarak $2 \rightarrow 10 \rightarrow 13 \rightarrow 20 \rightarrow 24 \rightarrow 32 \rightarrow 38 \rightarrow 37 \rightarrow 42$ rotasını izlediği görülmüştür. Düğüm 43'ün ambulans ihtiyacı olan 1 ambulansı ise düğüm 2'den başlayarak $2 \rightarrow 10 \rightarrow 13 \rightarrow 20 \rightarrow 24 \rightarrow 32 \rightarrow 38 \rightarrow 43$ rotasını izleyerek her iki hedef düğümünün ihtiyaçlarını toplam 73 birim yol kat ederek karşıladığı anlaşılmıştır. Şekil 15'te engelleme olmadığı durumda takipçinin hedeflere (ambulansların olay yerlerine) ulaşmakta kullandığı rota kalın yeşil çizgilerle belirtilmiştir. Bazı düğümlerin arasında iki kalın çizgi bulunmaktadır, bu da o bağlantının iki kez kullanıldığını ifade etmektedir.



Şekil 15. Engelleme olmadığı durumda takipçinin rotası (Şebeke 5)

En kıs yolu en büyükleme amacıyla liderin (engelleyicinin) yukarıda verilen tek seviyeli matematiksel modeli kullanarak engellemeler yaptığı ve yolu uzattığı görülmüştür. Örneğin liderin engelleme bütçesinin 5 birim olduğu durumda düğüm 13 ile düğüm 20 arasında, düğüm 18 ile düğüm 23 arasında, düğüm 30 ile düğüm 36 arasında, düğüm 32 ile düğüm 38 arasında ve düğüm 37 ile düğüm 42 arasında bulunan bağlantıları engellediği ve takipçinin en kısa yolunu toplamda 112 birime ulaştırarak 39 birim arttırdığı görülmüştür. Takipçi ise liderin bu engellemeleri sonrasında düğüm 42'nin ihtiyacını karşılamak için düğüm 1'den başlayarak $1 \rightarrow 5 \rightarrow 17 \rightarrow 27 \rightarrow 35 \rightarrow 42$ ve düğüm 2'den başlayarak $2 \rightarrow 10 \rightarrow 12 \rightarrow 18 \rightarrow 28 \rightarrow 30 \rightarrow 41 \rightarrow 42$ rotalarını kullanarak 2 ambulansı düğüm 42'ye ulaştırmaktadır. Takipçi aynı şekilde düğüm 43'e ulaşmak için ise düğüm 3'ten başlayarak $3 \rightarrow 7 \rightarrow 14 \rightarrow 20 \rightarrow 24 \rightarrow 32 \rightarrow 34 \rightarrow 39 \rightarrow 43$ rotasını izlemiştir. Bu durumda engellenen bağlantılar ve oluşan yeni en kısa yol rotaları Şekil 16'da verilmiştir. Şekil 16'da liderin engelleme yaptığı bağlantı kesikli çizgiyle gösterilirken, bu bilgiyle hareket eden takipçinin en kısa yol rotası kalın çizgilerle gösterilmiştir.



Şekil 16. Engelleme sayısı 5 olduğunda engellenen bağlantı ve takipçinin rotası (Şebeke 5)

Hazırlanan modeller farklı engelleme bütçeleri için farklı senaryolar oluşturularak çalıştırılmıştır ve böylece liderin hangi yolları engellediği, takipçinin ise engellenmemiş yolları kullanmak koşuluyla en kısa yolu kullanarak hedef düğümüne nasıl ulaştığı Tablo 11’de özetlenmiştir.

Tablo 11. Farklı bütçe seviyeleri için senaryo sonuçları (Şebeke 5)

T*	Engellenen Bağlantılar	Seçilen Yollar	En Kısa Yol Uzunluğu
0	-	1→5→11→18→23→28→30→36→37→42 2→10→13→20→24→32→38→37→42 2→10→13→20→24→32→38→43	73
1	37-42	1→5→11→18→23→28→30→36→42 2→10→12→18→23→28→30→36→42 2→10→13→20→24→32→38→43	80
2	37-42, 30-36	2→10→13→20→24→32→38→43→42 2→10→13→20→24→32→38→43→42 2→10→13→20→24→32→38→43	89
3	37-42, 30-36, 32-38	2→10→12→18→23→27→35→42 2→10→12→18→23→27→35→42 1→5→11→18→23→28→31→38→43	99
4	37-42, 30-36, 32-38, 18-23	1→5→17→27→35→42 2→10→13→20→24→32→34→39→43→42 2→10→13→20→24→32→34→39→43	105
5	37-42, 30-36, 32-38, 18-23, 13-20	1→5→17→27→35→42 2→10→12→18→28→30→41→42 3→7→14→20→24→32→34→39→43	112
6	37-42, 30-36, 32-38, 18-23, 13-20, 1-5	1→11→18→28→30→41→42 2→10→12→18→28→30→41→42 3→7→14→20→24→32→34→39→43	115

*Engelleme bütçesi

Liderin engelleme kararları ve bu bilgiler ışığında hareket eden takipçinin kararları incelendiğinde liderin yapabileceği engelleme sayısı/bütçe (T) arttıkça, takipçinin en kısa yol uzunluğunun da buna bağlı olarak arttığı görülmektedir. Liderin yapabileceği engelleme sayısı 0 ile 6 arasında artarken takipçinin toplam en kısa yolunu sürekli arttırabildiği görülmüştür. Ayrıca liderin engelleme sayısı 7 olduğu takdirde takipçinin düğüm 42’ye giden tüm yollarını engelleyebildiği, 12 olduğu takdirde ise her iki hedef düğümüne ulaşmasını imkansız kıldığı görülmüştür.

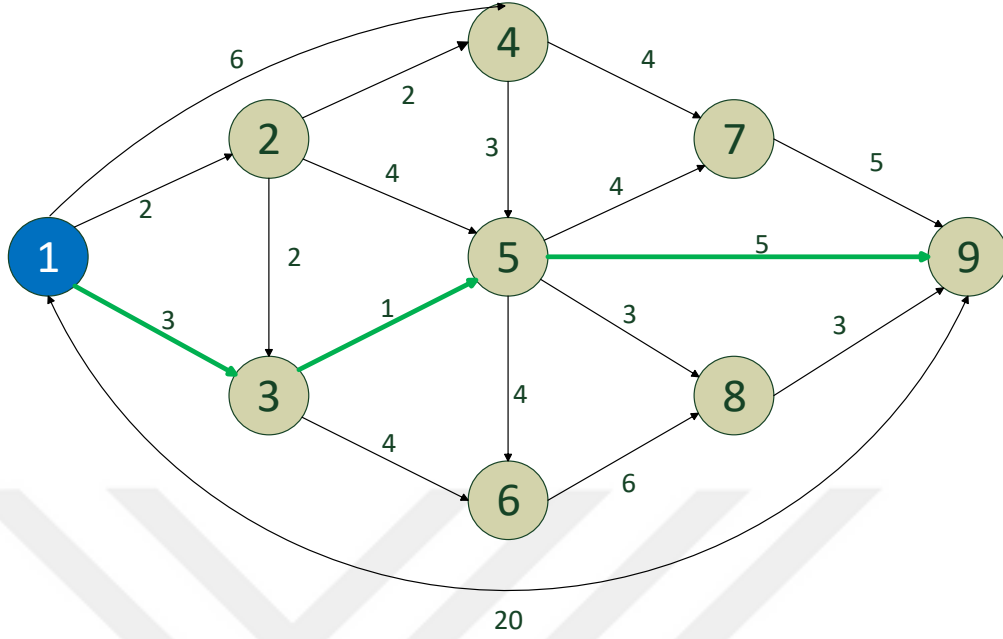
5. BULGULAR VE İRDELEME

Çalışmada ilk olarak, özgün yapıda en kısa yol problemleri oluşturulmuştur ve bu problemlere en kısa yolu kullanmak isteyen taraf düşünülerek matematiksel modeller hazırlanmıştır. Ardından, rakip bir tarafın en kısa yolu büyükleme amacıyla engellemeler yaptığı varsayılmıştır. Kurulan 5 farklı probleme karışık tam sayılı matematiksel modeller kullanılarak çözümler getirilmiştir ve aşağıda yer alan nedenlerden dolayı bu çalışma literatürde yer alan çalışmalardan farklılık göstermektedir.

5.1. Dinamiklik

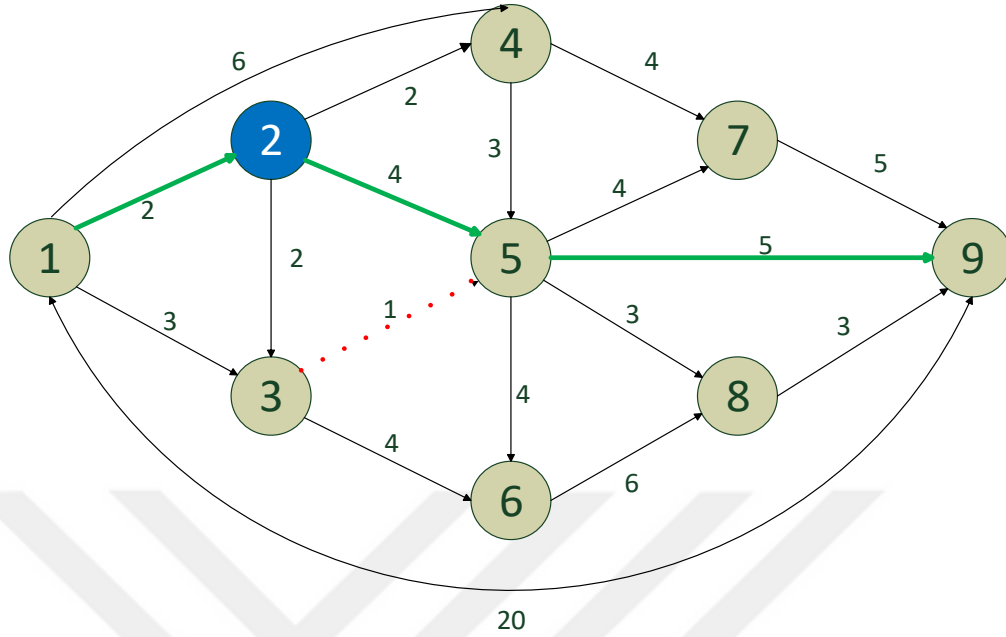
Kurulan matematiksel modellerin tamamı dinamik yapıya sahiptir. Yani takipçi (en kısa yolu kullanmak isteyen taraf) hangi düğüm(ler)e gelmiş olursa olsun o düğüm(ler)den hedef düğüm(ler)e olan en kısa yolu bularak takipçinin karar vermesini sağlayabilmektedir. Diğer taraftan takipçinin yer aldığı düğüm(ler) bilgisini kullanarak lider, bu aşamadan sonra engelleme kararlarını güncelleyebilmektedir.

Aşağıda takipçi ve liderin sırayla karar verdiği bir uygulama üzerinde kurulan modellerin dinamik yapısı açıklanmaya çalışılmıştır. Şekil 17’de tek başlangıç tek bitişli bir en kısa yol şebeke engelleme problemi üzerinde uygulama yapılmak üzere hazırlanan Şebeke 6 gösterilmektedir. Şekil üzerinde yer alan bağlantıların uzunlukları, bağlantıların üzerinde gösterilmiştir. Takipçinin bulunduğu düğüm ise mavi renkle gösterilmiştir. Ayrıca ilk olarak kararı takipçinin verdiği varsayılp en kısa yol yeşil renkle belirtilmiştir. Takipçinin $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 9$ yolunu kullanarak toplam 9 birimde düğüm 9’a ulaşacağını varsaymaktadır.



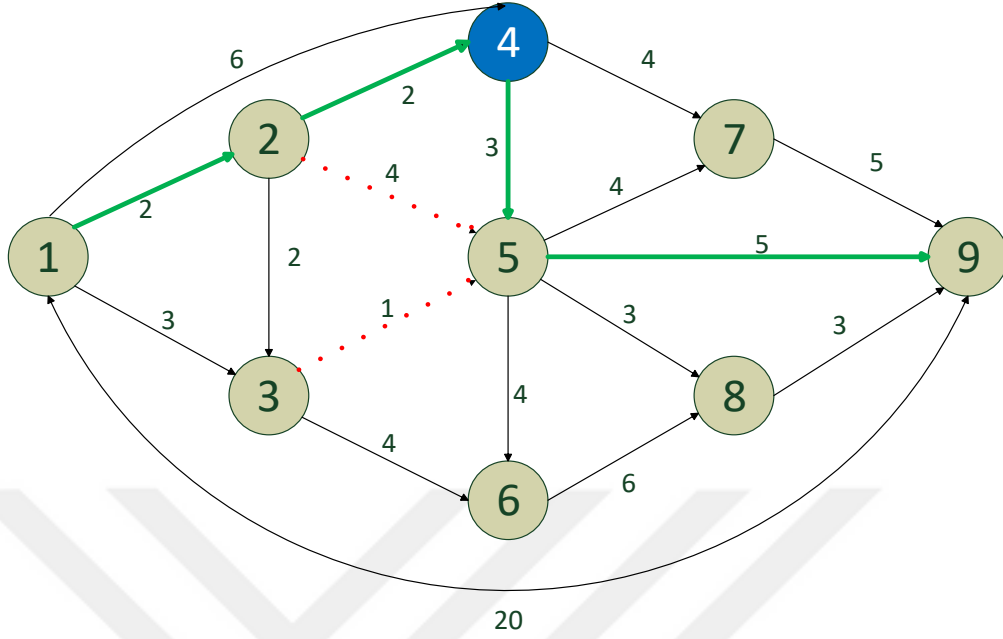
Şekil 17. Engelleme olmadığı durumda takipçinin kullanma kararı verdiği en kısa yol ve takipçinin konumu

Takipçinin en kısa yolu kullanacağını bilen lider, takipçinin yolunu en büyükmek amacıyla engelleme bütçesinin 1 olduğu varsayımıyla birlikte düğüm 3 ile düğüm 5 arasında yer alan bağlantıyı engelleme kararı verir. Bu engellenen bağlantı nedeniyle takipçinin en kısa yolu bozulmuştur ve bu nedenle yeni rotasını belirler. Takipçinin yeni rotası toplam 11 birim mesafe ve $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 9$ şeklindedir. Takipçi bu kararla birlikte düğüm 1'den düğüm 2'ye hareket eder. Takipçinin konumu, kullanmakta olduğu rotası ve engellenen bağlantı Şekil 18'de gösterilmiştir.



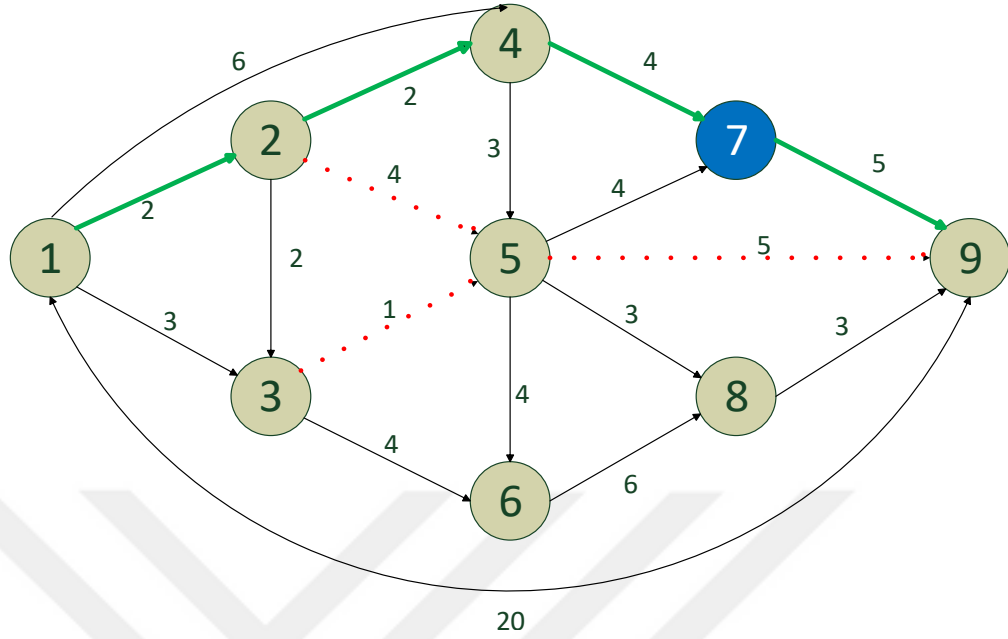
Şekil 18. Liderin 1 engelleme yapmasından sonra takipçinin güncellediği en kısa yol ve takipçinin konumu

Verdiği engelleme kararı sonrası takipçinin düğüm 2'ye ulaştığını gören lider, takipçinin başlangıç düğümünü 2 olarak güncelleyerek düğüm 9'a ulaşabileceği en kısa yolu en büyükmek amacıyla 1 engelleme yapmak istemektedir. Bu amaç dahilinde lider, düğüm 2 ile düğüm 5 arasında yer alan bağlantıyı engelleme kararı verir. Engellenen yeni bağlantı neticesinde takipçi ise düğüm 2'den düğüm 9'a en kısa yoldan ulaşmak için rotasını güncellemek durumunda kalır. Takipçinin yeni rotası düğüm 2'den başlayarak 2→4→5→9 şeklindedir ve bu yeni rotanın uzunluğu 10 birimdir. Takipçi zaten düğüm 1'den düğüm 2'ye giderken 2 birim hareket ettiğinden toplam gideceği yol 12 birime ulaşmıştır. Takipçi verdiği yeni karar yardımıyla birlikte düğüm 2'den düğüm 4'e gider. Takipçinin konumu, kullanmakta olduğu rotası ve engellenen bağlantı aşağıda Şekil 19'da gösterilmiştir.



Şekil 19. Liderin 1+1 engelleme yapmasından sonra takipçinin güncellediği en kısa yol ve takipçinin konumu

Takipçinin düğüm 4'te olduğunu bilgisine sahip lider yeni bir engelleme kararı vererek takipçinin düğüm 4'ten düğüm 9'a olan en kısa yolunu uzatmaya çalışır. Bu amaç dahilinde engelleme modeli vasıtasıyla düğüm 5 ile düğüm 9 arasında bulunan bağlantıyı engeller. Engellenen yeni bağlantı neticesinde takipçi ise düğüm 4'ten düğüm 9'a en kısa yoldan ulaşmak için rotasını güncellemek durumunda kalır. Takipçinin yeni rotası düğüm 4'den başlayarak 4→7→9 şeklindedir ve bu yeni rotanın uzunluğu 9 birimdir. Takipçi zaten düğüm 1'den düğüm 4'e giderken 4 birim hareket ettiğinden toplam gideceği yol 13 birime ulaşmıştır. Takipçi verdiği yeni karar yardımıyla birlikte düğüm 4'ten düğüm 7'ye gider. Takipçinin konumu, kullanmakta olduğu rotası ve engellenen bağlantı Şekil 20'de gösterilmiştir.



Şekil 20. Liderin 1+1+1 engelleme yapmasından sonra takipçinin güncellediği en kısa yol ve takipçinin konumu

Liderin 1 engelleme bütçesi daha olduğu durumda takipçiyi engelleyebildiği, olmadığı durumda ise takipçinin toplam 13 birim yol kat ederek düğüm 9'a ulaştığı görülmüştür.

Çözülen örnekte her karar aşamasında model güncellenerek dinamik bir çözüm vermektedir ve bu da diğer 4 farklı yapıdaki en kısa yol problemi için de geçerlidir.

5.2. Kapasite

Bu tez kapsamında çok başlangıçlı çok bitişli kapasiteli en kısa yol şebeke engelleme problemini çözmek üzere matematiksel modeller geliştirilmiştir. Bu modellerde literatürde yer alan klasik en kısa yol problemlerinden farklı olarak başlangıç ve bitiş düğüm sayılarının farklı olmasının yanında bu düğümlerin kapasite ve ihtiyaçlarının farklı olabileceği varsayılmış ve bu özgün problem hem en kısa yol problemi hem de en kısa yol şebeke engelleme problemi olarak modellenmiş ve çözülmüştür.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Günümüz dünyasında ekonomi, işletme, istatistik, kimya, bilgisayar bilimleri, mühendislik, biyoloji gibi pek çok bilim alanında en kısa yol problemlerinin uygulamalarıyla karşılaşmaktadır. Kimi taraflar ise rakiplerinin süreçlerini uzatmak amacındadır. Bu tez kapsamında, en kısa yolu kullanmak amacıyla olan şebekeyi işleten taraf ve bu tarafın en kısa yolunu engellemeler yaparak uzatmayı deneyen engelleyici taraf olmak üzere iki tarafın bulunduğu farklı yapıdaki en kısa yol şebeke engelleme problemleri ele alınmıştır.

Problemler modellenirken lider ve takipçi olarak adlandırılan rakip iki tarafın kararları için tarafların matematiksel modelleri (lider engelleme modeli ve takipçi model) ayrı ayrı modellenmiş ve tasarlanan şebekelerde nümerik örnekler uygulanmıştır.

Bu kapsamda, klasik (tek başlangıç tek bitişli), tek başlangıç çok bitişli, çok başlangıç tek bitişli, çok başlangıç çok bitişli ve kapasiteli çok başlangıç çok bitişli en kısa yol problemleri ele alınmıştır. Bu problemler için matematiksel modeller geliştirilmiştir.

Literatürde bugüne kadar yapılan çalışmalar incelendiğinde, genellikle klasik en kısa yol şebeke engelleme problemi üzerinde çalışıldığı görülmektedir. Çalışmada ise farklı başlangıç ya da bitiş sayıları bulunan modeller ele alınarak şebeke engelleme planları için matematiksel modeller oluşturulmuştur.

Literatürdeki çalışmalara benzer şekilde her problem için farklı şebekeler oluşturularak tam sayılı engelleme planları analiz edilmiştir. Analiz sonuçlarına göre, her plan için her engelleme bütçesinde liderin takipçinin yolunu ne kadar uzatabildiği ve hangi bütçelerde tamamıyla takipçiyi engelleyebileceği görülmüştür. Kurulan modeller Cplex Opl Optimization Studio 12.7 paket programında çalıştırılmıştır ve oldukça kısa süreler içerisinde çözüm verdiği görülmüştür.

Sonuç olarak, literatürde yer alan şebeke engelleme probleminin farklı yapıdaki en kısa yol problemleri için uygulanabilir olduğu gösterilmiştir. Çalışmada, liderin amaçları doğrultusunda farklı problem yapıları için, stratejileri üretebilmesini sağlayacak engellemelerin matematiksel modelleri oluşturulmuş ve analiz edilmiştir. Ayrıca, ele alınan bu yapıların gerçek hayat problemleri ile örtüştüğü ve farklı alanlara uygulanabilme esnekliği taşıdığı söylenebilir.

Daha sonraki yapılacak çalışmalarda, en kısa yol problemlerinde yol uzunlukları stokastik olabilir ya da her bir yol için farklı engelleme maliyeti olan bütçe bazlı modeller çalışılabilir. Ayrıca, en kısa yol temelli farklı problemler (gezgin satıcı problemi, minimum kapsayan ağaç problemi vb.) için şebeke engelleme modeli kurulabilir. Bununla birlikte problemleri çözmede kullanılan algoritmalara (Dijkstra Algoritması, Bellman-Ford Algoritması vb.) yönelik şebeke engelleme modelleri kurularak kritik arklar tespit edilebilir.



7. KAYNAKLAR

- Afshari Rad, M. ve Kakhki, H.T., 2017. Two Extended Formulations for Cardinality Maximum Flow Network Interdiction Problem. Networks 69,4,367-77
- Agudelo, L., López-Lezama, J.M. ve Muñoz-Galeano, N., 2015. Vulnerability Assessment of Power Systems to Intentional Attacks Using a Specialized Genetic Algorithm. Dyna, 82,192,78–84.
- Ahuja, R.K., Magnanti, T.L. ve Orlin, J.B., Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications, First Edition, Prentice-Hall Inc, New Jersey, 1993.
- Akgün, İ., Tansel, B.Ç. ve Wood, R.K., 2011. The Multi-Terminal Maximum-Flow Network-Interdiction Problem. European Journal of Operational Research, 211,2,241–251.
- Altner, D.S., Ergun, Ö. ve Uhan, N.A., 2010. The Maximum Flow Network Interdiction Problem: Valid Inequalities, Integrality Gaps, And Approximability. Operations Research Letters, 38,1,33–38.
- Ball, M.O., Golden, B.L. ve Vohra, R. V, 1989. Finding the Most Vital Arcs in a Network. Operations Research Letters, 8,2,73–76.
- Bayrak, H. ve Bailey, M.D., 2008. Shortest Path Network Interdiction with Asymmetric Information. Networks, 52,3,133–140.
- Bell, M.G.H. vd., 2008. Attacker–Defender Models and Road Network Vulnerability. Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 366,1872,1893–1906.
- Bellman, R., 1958. On a Routing Problem. Quarterly of applied mathematics, 16,1,87–90.
- Bingol, L., A Lagrangian Heuristic for Solving a Network interdiction Problem, Master Thesis, Naval Postgraduate School, California, 2001.
- Borndörfer, R., Sagnol, G. ve Schwartz, S., 2016. An Extended Network Interdiction Problem for Optimal Toll Control. Electronic Notes in Discrete Mathematics, 52,1,301–308.
- Borrero, J.S., Prokopyev, O.A. ve Sauré, D., 2015. Sequential Shortest Path Interdiction with Incomplete Information. Decision Analysis, 13,1,68–98.
- Branch, K., 2015. Multi-Commodity Multi-Source-Sinks Network Flow. Journal of Engineering and Applied Sciences, 10,6,118–122.
- Burch, C. vd., 2003. A Decomposition-Based Pseudoapproximation Algorithm for network Flow Inhibition. Network Interdiction and Stochastic Integer Programming, 22,3,51–68.

- Cappanera, P. ve Scaparra, M.P., 2011. Optimal Allocation of Protective Resources in Shortest-Path Networks. Transportation Science, 45,1,64–80.
- Casas, I., Delmelle, E. ve Yates, J., 2016. Geographic Characteristics of a Network Interdiction Problem. GeoJournal, 81,1,37–53.
- Chern, M.-S. ve Lin, K.-C., 1995. Interdicting the Activities of a Linear Program—A Parametric Analysis. European Journal of Operational Research, 86,3,580–591.
- Corley, H.W. ve David, Y.S., 1982. Most Vital Links and Nodes in Weighted Networks. Operations Research Letters, 1,4,157–160.
- Corley Jr, H.W. ve Chang, H., 1974. Finding the n Most Vital Nodes in a Flow Network. Management Science, 21,3, 362–364.
- Cormican, K.J., Morton, D.P. ve Wood, R.K., 1998. Stochastic Network Interdiction. Operations Research, 46,2,184–197.
- Dijkstra, E.W., 1959. A Note on Two Problems in Connexion with Graphs. Numerische mathematik, 1,1,269–271.
- Dimitrov, N.B. vd., 2011. Network Deployment of Radiation Detectors with Physics-Based Detection Probability Calculations. Annals of Operations Research, 187,1,207–228.
- Floyd, R.W., 1962. Algorithm 97: Shortest Path. Communications of the ACM, 5,6,345.
- Ford, L.R. ve Fulkerson, D.R., 1962. Flows in Networks. Journal of the Franklin Institute, 275, 152.
- Ford L.R., Network Flow Theory, First Edition, Rand Corp., Santa Monica, 1956.
- Fulkerson, D.R. ve Harding, G.C., 1977. Maximizing the Minimum Source-Sink Path Subject to a Budget Constraint. Mathematical Programming 13,1,116–118.
- Geoffrion, A.M., 1972. Generalized Benders Decomposition. Journal of optimization theory and applications, 10,4,237–260.
- Golden, B., 1978. A Problem in Network Interdiction. Naval Research Logistics Quarterly, 25,4, 711–713.
- Grubescic, T.H. vd., 2008. Comparative Approaches for Assessing Network Vulnerability. International Regional Science Review, 31,1,88–112.
- Gutin, E., Kuhn, D. ve Wiesemann, W., 2014. Interdiction Games on Markovian PERT Networks. Management Science, 61,5, 999–1017.
- Hart, P.E., Nilsson, N.J. ve Raphael, B., 1968. A Formal Basis for the heuristic Determination of Minimum Cost Paths. IEEE transactions on Systems Science and Cybernetics, 4,2,100–107.

- Iranli, A., Fatemi, H. ve Pedram, M., Lifetime-Aware Intrusion Detection under Safeguarding Constraints, 4th International Symposium on Information Processing in Sensor Networks. April 2005, California.
- Israeli, E. ve Wood, R.K., 2002. Shortest-Path Network Interdiction. Networks, 40,2, 97–111.
- Janjarassuk, U. ve Nakrachata-Amon, T., A Simulated Annealing Algorithm to the Stochastic Network Interdiction Problem, International Conference Industrial Engineering and Engineering Management, January 2015, IEEE International Conference on, 230–233.
- Jiang, Y. ve Hu, A., 2011. Finding the Most Vital Link with Respect to the Characteristic of Network Communication. Journal of Networks, 6,3,22-30.
- Johnson, D.B., 1977. Efficient Algorithms for Shortest Paths in Sparse Networks. Journal of the ACM (JACM), 24,1,1–13.
- Johnson, M.P. ve Gutfraind, A., 2011. Evader Interdiction and Collateral Damage. In International Symposium on Algorithms and Experiments for Sensor Systems, Wireless Networks and Distributed Robotics. 86–100.
- Johnson, M.P., Gutfraind, A. ve Ahmadizadeh, K., 2014. Evader Interdiction: Algorithms, Complexity and Collateral Damage. Annals of operations research, 222,1,341–359.
- Jun, W. ve Yue-jin, T., 2005. Finding the Most Vital Node by Node Contraction in Communication Networks. In Communications, Circuits and Systems, 2005. Proceedings. 2005 International Conference on. IEEE.
- Karabulut, E., Aras, N. ve Altinel, İ.K., 2016. Optimal Sensor Deployment to Increase the Security of the Maximal Breach Path in Border Surveillance. European Journal of Operational Research, 259,1,19-36.
- Kasımoğlu, F., Rekabetçi Ortamda CPM Tabanlı Projelerde Engelleme Modelleri, Doktora Tezi, K.H.O., Savunma Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2015.
- Khachiyan, L. vd., 2008. On Short Paths Interdiction Problems: Total and Node-Wise Limited Interdiction. Theory of Computing Systems, 43,2, 204–233.
- Khachiyan, L., Gurvich, V. ve Zhao, J., 2006. Extending Dijkstra's Algorithm to Maximize the Shortest Path by Node-Wise Limited Arc Interdiction. In International Computer Science Symposium in Russia. 221–234.
- Laan, C.M. vd., 2017. An Interdiction Game on a Queueing Network with Multiple Intruders. European Journal of Operational Research, 260,3, 1069-80.
- Lin, K.-C. ve Chern, M.-S., 1993a. The Fuzzy Shortest Path Problem and its cs. Fuzzy Sets and Systems, 58,3, 343–353.
- Lin, K.-C. ve Chern, M.-S., 1993b. The Most Vital Edges in the Minimum Spanning Tree Problem. Information Processing Letters, 45,1, 25–31.

- Lodree Jr, E.J. ve Taskin, S., 2008. An Insurance Risk Management Framework for Disaster Relief and Supply Chain Disruption Inventory Planning. Journal of the Operational Research Society, 59,5,674–684.
- Lozano, L. ve Smith, J.C., 2016. A Backward Sampling Framework for Interdiction Problems with Fortification. INFORMS Journal on Computing, 29,1,123–139.
- Lubore, S.H. ve Scilia, G.T., Determining the most vital link in a flow network. <http://oai.dtic.mil/oai/oai?verb=getRecord&metadataPrefix=html&identifier=AD0717574> 16 Haziran 2017.
- Lunday, B.J. ve Sherali, H.D., 2012. Minimizing the Maximum Network Flow: Models and Algorithms with Resource Synergy Considerations. Journal of the Operational Research Society, 63,12,1693–1707.
- Malik, K., Mittal, A.K. ve Gupta, S.K., 1989. The k Most Vital Arcs in the Shortest Path Problem. Operations Research Letters, 8,4,223–227.
- Matisziw, T.C. ve Murray, A.T., 2009. Modeling s–t Path Availability to Support Disaster Vulnerability Assessment of Network Infrastructure. Computers ve Operations Research, 36,1,16–26.
- Matisziw, T.C., Murray, A.T. ve Grubescic, T.H., 2007. Bounding Network Interdiction Vulnerability Through Cutset Identification. Critical Infrastructure, 1,1,243–256.
- McMasters, A.W. ve Mustin, T.M., 1970. Optimal Interdiction of a Supply Network. Naval Research Logistics Quarterly, 17,3,261–268.
- Medal, H. vd., 2011. Models for Reducing the Risk of Critical Networked Infrastructures. International Journal of Risk Assessment and Management, 15,2–3,99–127.
- Morton, D.P. ve Pan, F., Using Sensors to Interdict Nuclear Material Smuggling, IIE Annual Conference, May 2005, Proceedings Book, 8-15.
- Morton, D.P., Pan, F. ve Saeger, K.J., 2007. Models for Nuclear Smuggling Interdiction. IIE Transactions, 39,1,3–14.
- Murray, A.T., 2013. An Overview of Network Vulnerability Modeling Approaches. GeoJournal, 78,2,209–221.
- Naoum-Sawaya, J. ve Ghaddar, B., 2017. Cutting Plane Approach for the Maximum Flow Interdiction Problem. Journal of the Operational Research Society, 68,1,1–17.
- Nardelli, E., Proietti, G. ve Widmayer, P., 2003. Finding the Most Vital Node of a Shortest Path. Theoretical computer science, 296,1,167–177.
- Özçelik, G., Rekabet Ortamındaki Firmaların Tedarik Süreçleri İçin Şebeke Engelleme Yaklaşımına Dayalı Model Önerileri, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2016.

- Pan, F., Charlton, W.S. ve Morton, D.P., 2003. A Stochastic Program for Interdicting Smuggled Nuclear Material. Network interdiction and stochastic integer programming, 22,2,1–19.
- Pan, F. ve Morton, D.P., 2008. Minimizing a Stochastic Maximum-Reliability Path. Networks, 52,3,111–119.
- Prince, M., Algorithms and Reformulation Techniques for Three-Stage Interdiction and Fortification Problems, University of Florida, Florida, 2013.
- Rad, M.A. ve Kakhki, H.T., 2013. Maximum Dynamic Network Flow Interdiction Problem: New Formulation and Solution Procedures. Computers ve Industrial Engineering, 65,4, 531–536.
- Ramirez-Marquez, J.E., 2009a. Deterministic Network Interdiction Optimization via an Evolutionary Approach. Reliability Engineering ve System Safety, 94,2,568–576.
- Ramirez-Marquez, J.E., 2009b. Stochastic network Interdiction Optimization via Capacitated Network Reliability Modeling and Probabilistic Solution Discovery. Reliability Engineering ve System Safety, 94,5,913–921.
- Ramirez-Marquez, J.E. ve Rocco, C.M., 2010. A Bi-Objective Approach for Shortest-Path Network Interdiction. Computers ve Industrial Engineering, 59,2,232–240.
- Ratliff, H.D., Sicilia, G.T. ve Lubore, S.H., 1975. Finding the n Most Vital Links in Flow Networks. Management Science, 21,5,531–539.
- Romich, A., Lan, G. ve Smith, J.C., 2015. Algorithms for Optimizing the Placement of Stationary Monitors. IIIE Transactions, 47,6,556–576.
- Royset, J.O. ve Wood, R.K., 2007. Solving the Bi-Objective Maximum-Flow Network-Interdiction Problem. INFORMS Journal on Computing, 19,2,175–184.
- Sadeghi, S., Seifi, A. ve Azizi, E., 2017. Trilevel Shortest Path Network Interdiction with Partial Fortification. Computers ve Industrial Engineering, 106,2,400–411.
- Salmerón, J., 2012. Deception Tactics for Network Interdiction: A Multiobjective Approach. Networks, 60,1,45–58.
- Santhi, N. ve Pan, F., 2011. Detecting and Mitigating Abnormal Events in Large Scale Networks: Budget Constrained Placement on Smart Grids, 44th Hawaii International Conference on System Sciences, January 2011, IEEE, 1–6.
- Sefair, J.A. ve Smith, J.C., 2016. Dynamic Shortest-Path Interdiction. Networks, 68,4,315–330.
- Shen, H., 1999. Finding the k Most Vital Edges with Respect to Minimum Spanning Tree. Acta Informatica, 36,5,405–424.
- Shimbel, A., Structure in communication nets, Symposium on Information Networks, February 1954, New York, 199–203.

- Shirdel, G.H., 2013. A Note on the Integrality Gap in the Nodal Interdiction Problem. Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran, 24,3, 269–273.
- Smith, J.C. ve Lim, C., Pareto Optimality, Game Theory and Equilibria, Springer Science+Business Media LLC, New York, 2008.
- Song, Y. ve Shen, S., 2016. Risk-Averse Shortest Path Interdiction. INFORMS Journal on Computing, 28,3,527–539.
- Von Stackelberg, H., The Theory of the Market Economy, Oxford University Press, Oxford, 1952.
- Sullivan, K.M., Morton, D.P., vd., 2014. Securing a Border under Asymmetric Information. Naval Research Logistics (NRL), 61,2,91–100.
- Sullivan, K.M. ve Cole Smith, J., 2014. Exact Algorithms for Solving a Euclidean Maximum Flow Network Interdiction Problem. Networks, 64,2, 109–124.
- Sullivan, K.M., Smith, J.C. ve Morton, D.P., 2014. Convex Hull Representation of the Deterministic Bipartite Network Interdiction Problem. Mathematical Programming, 145,1–2, 349–376.
- Tsen, F.S.P. vd., 1994. Finding The Most Vital Edges With Respect To The Number Of Spanning-Trees. IEEE Transactions On Reliability, 43,4,600–603.
- Veremyev, A., Prokopyev, O.A. ve Pasiliao, E.L., 2015. Critical Nodes for Distance-Based Connectivity and Related Problems in Graphs. Networks, 66,3,170–195.
- Viterbi, A., 1967. Error Bounds for Convolutional Codes and an Asymptotically Optimum Decoding Algorithm. IEEE transactions on Information Theory, 13,2,260–269.
- Washburn, A. ve Wood, K., 1995. Two-person Zero-Sum Games for Network Interdiction. Operations research, 43,2, 243–251.
- Wevley, C., The Quickest Path Network Interdiction Problem. Master's Thesis, Naval Postgraduate School, California, 1999.
- Whiteman, P.S.B., 1999. Improving Single Strike Effectiveness for Network Interdiction. Military Operations Research, 4,4,15–30.
- Wollmer, R., 1964. Removing Arcs from a Network. Operations Research, 12,6,934–940.
- Wollmer, R.D., Some Methods for Determining the Most Vital Link in a Railway Network, RAND Corp., California, 1963.
- Wood, R.K., 1993. Deterministic Network Interdiction. Mathematical and Computer Modelling, 17,2,1–18.
- Xiao, K. vd., Stackelberg Network Interdiction Game: Nodal Model and Algorithm, Game Theory for Networks (GAMENETS) 2014 5th International Conference on, November 2014, Beijing, 1–5.

- Yates, J. ve Casas, I., 2012. Role of Spatial Data in the Protection of Critical Infrastructure and Homeland Defense. Applied Spatial Analysis and Policy, 5,1,1–23.
- Yates, J. ve Chen, N., 2014. A Spatial Segmentation Algorithm for Resource Allocation in an Integrated Spatial and Networked Environment. Applied Spatial Analysis and Policy, 7,4,317–336.
- Yates, J. ve Lakshmanan, K., 2011. A constrained Binary Knapsack Approximation for Shortest Path Network Interdiction. Computers ve Industrial Engineering, 61,4,981–992.
- Yates, J. ve Sanjeevi, S., 2013. A Length-Based, Multiple-Resource Formulation for Shortest Path Network Interdiction Problems in the Transportation Sector. International Journal of Critical Infrastructure Protection, 6,2,107–119.
- Yates, J., Wang, X. ve Chen, N., 2014. Assessing the Effectiveness of k-shortest Path Sets in Problems of Network Interdiction. Optimization and Engineering, 15,3,721–749.
- Yue-ni, Z.H.U., Zheng, Z. ve Yaoyi, Z., 2014. Leader-Follower Hierarchical Decision Model for Critical Infrastructure Protection and its Solving Algorithm. Systems Engineering—Theory ve Practice, 34,6, 1557–1565.
- Zenklusen, R., 2010. Network Flow Interdiction on Planar Graphs. Discrete Applied Mathematics, 158,13, 1441–1455.
- Zhao, J., Wang, J. ve Yu, H., 2013. A Minimum Cost K-Reliable Network Interdiction Model, Operations Research and its Applications in Engineering, Technology and Management (ISORA 2013), August 2013, Yellow Mountain (China), 1–5.
- Zhao, Y.H. vd., 2009. Finding Most Vital Node by Node Importance Contribution Matrix in Communication Networks. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 35,9,1076–1079.

ÖZGEÇMİŞ

Ertuğrul AYYILDIZ 1990 yılında Bayburt’da doğdu. 2009 yılında Behiye Dr. Nevhiz Işıl Anadolu Lisesi’nden mezun olduktan sonra aynı yıl TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Endüstri Mühendisliği Bölümü’nde lisans öğrenimine başladı ve 2014 yılında mezun oldu. 2014 yılında Özyeğin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalında yüksek lisans eğitime başlayıp 2015 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalına yatay geçiş yaptı. 2015 yılı Aralık ayından beri Karadeniz Teknik Üniversitesi Endüstri Mühendisliği Bölümünde araştırma görevlisi olarak görevine devam eden Ertuğrul AYYILDIZ orta düzeyde Almanca ve iyi derecede İngilizce bilmektedir.