

T.C.
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

FARKLI YAŞ GRUPLARINDAKİ ÖĞRENCİLERDE YAPILANMIŞ
SONSUZLUK KAVRAMLARININ ARAŞTIRILMASI

DOKTORA TEZİ

Hazırlayan
Serdar AZTEKİN

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Ahmet ARIKAN

2008
Ankara

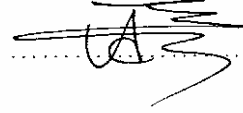
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAY SAYFASI

Serdar AZTEKİN'in **FARKLI YAŞ GRUPLARINDAKİ ÖĞRENCİLERDE YAPILANMIŞ SONSUZLUK KAVRAMLARININ ARAŞTIRILMASI** başlıklı tezi 08.07.2008 tarihinde, jürimiz tarafından Matematik Eğitimi Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

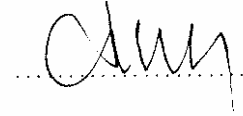
Adı Soyadı

İmza

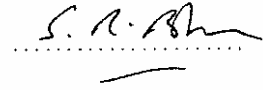
Üye (Tez Danışmanı):Doç. Dr. Ahmet ARIKAN



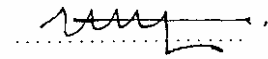
Üye : Prof. Dr. Ziya ARGÜN



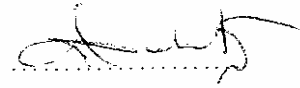
Üye : Prof. Dr. Bharath SRIRAMAN



Üye : Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU



Üye : Doç. Dr. Safure BULUT



ÖZET

Bu çalışmada repertuar çizelge tekniği ve gömülü teori (grounded theory) kullanılarak doktora ve ilköğretim öğrencilerinin sonsuzluk kavramı ile ilgili bilişsel seviyelerinin ve yapılarının (constructs) ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Ayrıca bir ilk olarak, ilköğretim öğrencilerini sonsuzluk kavramı ile ilgili konulara yönlendirmek için görüşmelerde çizgi filmlerden ve animasyonlardan yararlanılmıştır. Buna göre görüşme ve gözlem yapılarak, animasyon izletilerek ve bir takım etkinlikler uygulanarak sistematik bir şekilde veri toplanmış, kodlama ve analiz süreçleri ile bu veriler değerlendirilerek yapılar ve kategoriler arasındaki ilişkileri gösteren şemalar elde edilmeye çalışılmıştır. Bu çalışmada birden fazla yöntemle veri elde edilerek çeşitleme (triangulation) yapılmıştır.

İlk uygulanan teknik, bir metropol üniversitesinin matematik eğitimi anabilim dalı doktora öğrencilerinden 2006-2007 öğretim yılı güz döneminde küme teorisi dersini alan 4 öğrenci ile yapılan çalışmada yararlanılan Repertuar Çizelge Tekniğidir. Öğrencilerin sonsuzluk kavramı ile ilgili bütün yapılarının ortaya çıkarılması ve yapı ilişkilerinin elde edilmesi için Repertuar Çizelge Tekniği (RÇT) kullanılmıştır. Bu öğrenciler ile biri ders döneminin başında ve diğeri dersin final sınavından sonra olmak üzere iki görüşme yapılmış ve yapılan dersler süresince öğrenciler izlenerek öğrencilerin derslerdeki ifadeleri ve konuşmaları kayıt altına alınmıştır. Repertuar çizelgelerinin oluşturulması için gerekli verilerin elde edilmesinde “yarı-yapılandırılmış görüşme” ve “yazma” yöntemi kullanılmıştır. Çizelgelerin analizinde ise nicel ve nitel yöntemler takip edilmiştir.

Küçük yaş grubundaki (10-13 yaş) öğrenciler ile yapılan çalışmada ise gömülü teori (Grounded Theory) yaklaşımı takip edilmiştir. Görüşmelerde kullanılan sorular, literatür ve filmler dikkate alınarak hazırlanmış ve üç farklı yaş grubundaki öğrenci ile pilot çalışma yapılmıştır. Ayrıca araştırmanın güvenilirliğini arttırmak için öğrencilere bir takım etkinlikler verilmiş ve öğrencilerden bu etkinliklerdeki sorulara cevap vermeleri istenmiştir. Bu etkinlikler de diğeri sorular gibi hazırlanmış ve pilot çalışmalar ile geliştirilmiştir.

Çalışmanın sonunda repertuar çizelge metodolojisinin, doktora öğrencilerinin sonsuzluk ile ilgili kavram imajlarını, bilişsel seviyelerini, yapılarını ve çelişen düşüncelerini ortaya çıkarmada başarılı olduğu, ayrıca konunun kritik yönlerinin belirlenmesinde faydalı olduğu görülmüştür. Araştırmanın sonucunda; öğrencilerin başlangıçta genel anlayışlarının daha çok potansiyel sonsuzluk anlayışına uygun olduğu, aldıkları eğitime göre standart olmayan analizin etkilerinden bahsedilebileceği, yapılan küme teorisi derslerinin öğrencilerin anlayışlarını aktüel sonsuzluğa doğru yönlendirdiği gözlemlenmiştir. Fakat yine de öğrencilerin, potansiyel sonsuzluk anlayışlarını kısmen de olsa korudukları belirlenmiştir. İlköğretim öğrencileriyle yapılan çalışma sonucunda ise bu yaş grubunun potansiyel sonsuzluk gibi literatürde geçen bazı sonsuzluk anlayışlarını taşıdıkları görülmüş; fakat anlayışlarının tamamıyla ileri yaşlarda görülen potansiyel sonsuzluk anlayışı gibi olmadığı, standart olmayan analize uygun olan anlayışlar gibi farklı anlayışların ipuçlarının bu yaş grubunda olabileceği belirlenmiştir. Hatta bunun yanında ilköğretim öğrencileri ile doktora öğrencileri arasında sonsuzluk ile ilgili benzer anlayışlar olduğu görülmüştür. Öğrencilerin okuldaki matematik derslerinde gördüğü konularda, örneğin bir doğrunun her iki tarafa doğru sonsuza kadar gitmesi gibi, net bir düşünceye sahip olamadığı; bu tip konuları sonsuzluk sembolü ile anlatma gibi öğretmen davranışlarının, öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili belirli kalıplara bağlı kalmasına neden olduğu gözlemlenmiştir. Son olarak her ne kadar repertuar çizelge tekniği ile gömülü teori yaklaşımı çok farklı iki teorik yapıya sahip olsa da oldukça uyumlu oldukları görülmüş, iki tekniğin uygulanması ile ortaya çıkan bilişsel yapıların oldukça benzer olduğu belirlenmiştir.

ABSTRACT

The present research is composed of two main studies conducted with PhD students and young children. In these studies, repertory grid methodology and grounded theory were used to bring up the informal models and cognitive levels of students about infinity concepts. Researcher made a triangulation by using different data gathering and analysing techniques. By the following, data was collected systematically by interviewing, watching, coding etc.

In the first study, 4 mathematicians were experienced in their understanding of the infinity notion. These mathematicians were PhD students in a university who were enrolled in a set theory course in the first semester of academic year 2006/2007. Constructs about infinity were elicited held by PhD students and the effects of the set theory course were investigated. Repertory grids were elicited two times by interviewing, at the beginning and at the end of the set theory course. Also the students were observed during the lectures. All these interviews and lectures were recorded and analysed by the researcher with repertory grids.

In the second study, 6 young children's (aged from 10 to 13 years old) infinity concepts were investigated by using grounded theory techniques. Several interviews were made with young children. Cartoon films and flash animations were used in the interviews and children were asked some questions about infinity. The questions were about cartoon films and animations which involve the word "infinity" and some understandings about infinity. They were developed by a pilot study. After the first interview, a task based interviews were conducted which involved a variety of non-routine mathematical questions related with infinity concepts and participant interviews were conducted until the point of theoretical saturation.

At the end of the studies, schemes and tables were obtained which display the constructs, categories and the relationships between them. It was observed that PhD students generally had an understanding of potential infinity at the beginning of the set theory course and they also had shown some clues of the non-standart infinity. After the lectures the researcher observed some evidences of actual infinity hence the set theory course directed the students to the understanding of actual infinity. However, students preserved their understanding of potential infinity partially.

The researcher observed that young children have different understandings of infinity but mainly potential. It can also be mentioned about the clues of non-standard infinity. The young children's and PhD students' understandings about potential infinity are not exactly the same. The phenomenon of "indefiniteness of infinity" is very important for young children. Again the researcher encountered finitist responses like in past studies, "the whole is bigger than its parts" etc. So it was difficult for the children to understand one-to-one correspondence between natural and even numbers.

The researcher found similarities between understandings of PhD students and young children. It is claimed that in spite of a long period of math education it can be mentioned about clear intuitive similarities between PhD students and young children.

The results of the study revealed that even if the repertory grid methodology and grounded theory are successful on bringing up the informal models and cognitive levels of students, they are also consistent with each other. They have many common points and their structures are not very different.

ÖNSÖZ

Araştırmanın gerçekleşmesinde yardım ve desteklerini esirgemeyen Gazi Üniversitesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü öğretim üyelerine, personeline ve Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü yöneticileri ve personeline teşekkürlerim sonsuzdur. Öncelikle çalışmanın her aşamasında yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen, akademik bir çalışmaya devam etmemde büyük katkıları olan danışmanım Doç. Dr. Ahmet Arıkan'a, fikirleri ve desteğiyle güç veren Prof. Dr. Ziya Argün'e ve Prof. Dr. Bharat Sriraman'a sonsuz teşekkürler. Ayrıca gönderdiğim e-maillere cevap veren bütün akademisyenlere, görüşme nezaketinde bulunan Leeds Üniversitesi'nden Prof. Dr. John Monaghan'a teşekkür ederim. Değerli vaktini bu çalışma için ayırma nezaketinde bulunan ODTÜ öğretim elemanı Prof. Dr. Süleyman ÖNAL'a ve Gazi Üniversitesi öğretim elemanı Yard. Doç. Dr. Çetin Vural'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Bunların yanında araştırmamın ve yüksek lisans öğrenimimin her aşamasında benden desteklerini esirgemeyen eşim Cemile ve oğlum Bülent'e, annem Mehdiye Aztekin, babam Osman Aztekin, kardeşim Nurdan Aztekin'e de sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Son olarak bir bilim adamı hassasiyetiyle çalışmamı kolaylaştıran Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı doktora öğrencilerinden 2006-2007 öğretim yılı güz döneminde küme teorisi dersini alanlara ve isimlerini burada veremeyeceğim her biri çok değerli ilköğretim öğrencilerine teşekkür eder, onlara hayat boyu başarılar dilerim.

Serdar AZTEKİN

Ankara 2008

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	iii
ÖNSÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
ŞEKİLLER VE TABLOLAR.....	viii
KISALTMALAR LİSTESİ.....	xi

BÖLÜM I

GİRİŞ

1.1. Problem Durumu.....	1
1.1.a. Sonsuzlukla İlgili Farklı Anlayışlar	1
1.1.b. Sonsuzluğu Anlama İle İlgili Literatürdeki Çalışmalar.....	3
1.2. Problem Cümlesi.....	11
1.3. Alt Problemler.....	11
1.4. Araştırmanın Önemi.....	11
1.5. Varsayımlar.....	13
1.6. Sınırlamalar	14
1.7. Tanımlamalar	14

BÖLÜM 2

YÖNTEM

2.1. Araştırmanın Modeli.....	17
2.2. Çalışma Evreni ve Örneklem.....	19
2.3. Araştırmada Kullanılan Teknikler.....	20
2.3.a. Repertuar Çizelge Tekniği.....	20
2.3.b. Gömülü(Grounded) Teori.....	22

BÖLÜM 3

DOKTORA ÖĞRENCİLERİ İLE YAPILAN ÇALIŞMA

3.1. Veri Toplama Araçları.....	27
3.2. Derslerin İşlenişi.....	28
3.3. Maddelerin Elde Edilmesi.....	28
3.4. Yapıların Elde Edilmesi.....	35
3.5. Çizelgelerin Elde Edilmesi.....	36
3.6. Çizelgelerin Analizi:	36
3.7. Bulgular.....	37
3.8. Sonuçlar ve Yorumlar	57

BÖLÜM 4

İLKÖĞRETİM ÖĞRENCİLERİ İLE YAPILAN ÇALIŞMA

4.1. Hazırlanan kısa filmler	60
4.2. Görüşmelerin Yapılması	61
4.3. Görüşmelerde Kullanılan Sorular.....	62
4.4. İlköğretim Öğrencileri İle Yapılan Görüşmelerin Analiz.....	63
4.5. İlköğretim Öğrencileri İle Yapılan Görüşmeler.....	64
4.5.a. BEŞİNCİ SINIFLAR	64
4.5.b. YEDİNCİ SINIFLAR	104
4.4.Yapılan etkinlikler.....	151

BÖLÜM 5

5.1.SONUÇLAR VE ÖNERİLER	158
--------------------------------	-----

KAYNAKÇA	163
----------------	-----

EKLER.....	170
------------	-----

ŞEKİLLER VE TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER

Şekil 1. Kardinal Sonsuzluk ve Sonsuzluğu Ölçme.....	2
Şekil 2. Araştırmanın Deseni.....	18
Şekil 3. 1. Öğrencinin İlk Yapı İlişkilerini Gösteren Şekil	41
Şekil 4. 1. Öğrencinin SonYapı İlişkilerini Gösteren Şekil.....	44
Şekil 5. 4. Öğrencinin İlk Yapı İlişkilerini Gösteren Şekil.....	47
Şekil 6. 2. Öğrencinin Son Yapı İlişkilerini Gösteren Şekil	49
Şekil 7. 3. Öğrencinin İlk Yapı İlişkilerini Gösteren Şekil.....	51
Şekil 8. 3. Öğrencinin Son Yapı İlişkilerini Gösteren Şekil	53
Şekil 9. 4. Öğrencinin İlk Yapı İlişkileri Şekli.....	55
Şekil 10. 4. Öğrencinin Son Yapı İlişkileri Şekli.....	56
Şekil 11. Notların Adlandırılmasını Gösteren Şekil	65
Şekil 12. 5-M-1 Notlarına Ait Şema.....	92
Şekil 13. 5-M-2 Notlarına Ait Şema.....	93
Şekil 14. 5-M-3 Notlarına Ait Şema.....	93
Şekil 15. 5-M-4 Notlarına Ait Şema	93
Şekil 16. 5-M-5 Notlarına Ait Şema	94
Şekil 17. 5-M-6 Notlarına Ait Şema	94
Şekil 18. 5-M-7 Notlarına Ait Şema	94
Şekil 19. 5-E-1 Notlarına Ait Şema.....	95
Şekil 20. 5-E-2 Notlarına Ait Şema.....	95
Şekil 21. 5-E-3 Notlarına Ait Şema.....	96
Şekil 22. 5-E-4 Notlarına Ait Şema	96
Şekil 23. 5-E-5 Notlarına Ait Şema	96
Şekil 24. 5-E-6 Notlarına Ait Şema	97
Şekil 25. 5-Ş-1 Notlarına Ait Şema.....	97
Şekil 26. 5-Ş-2 Notlarına Ait Şema.....	98
Şekil 27. 5-Ş-3 Notlarına Ait Şema.....	98
Şekil 28. 5-Ş-4 Notlarına Ait Şema	99
Şekil 29. 5-Ş-5 Notlarına Ait Şema	99

Şekil 30. 5-Ş-6 Notlarına Ait Şema	99
Şekil 31. 5-Ş-7 Notlarına Ait Şema	100
Şekil 32. 7-A-1 Notlarına Ait Şema.....	138
Şekil 33. 7-A-2 Notlarına Ait Şema.....	138
Şekil 34. 7-A-3 Notlarına Ait Şema.....	139
Şekil 35. 7-A-4 Notlarına Ait Şema	139
Şekil 36. 7-A-5 Notlarına Ait Şema	139
Şekil 37. 7-A-6 Notlarına Ait Şema	140
Şekil 38. 7-A-7 Notlarına Ait Şema	140
Şekil 39. 7-F -1 Notlarına Ait Şema.....	141
Şekil 40. 7-F-2 Notlarına Ait Şema.....	141
Şekil 41. 7-F-3 Notlarına Ait Şema.....	141
Şekil 42. 7-F-4 Notlarına Ait Şema	142
Şekil 43. 7-F-5 Notlarına Ait Şema	142
Şekil 44. 7-F-6 Notlarına Ait Şema	142
Şekil 45. 7-F-7 Notlarına Ait Şema	143
Şekil 46. 7-T-1 Notlarına Ait Şema.....	143
Şekil 47. 7-T-2 Notlarına Ait Şema.....	144
Şekil 48. 7-T-3 Notlarına Ait Şema.....	144
Şekil 49. 7-T-4 Notlarına Ait Şema	145
Şekil 50. 7-T-5 Notlarına Ait Şema	145
Şekil 51. 7-T-6 Notlarına Ait Şema	146
Şekil 52. 7-T-7 Notlarına Ait Şema	146
Şekil 53. 7-T-8 Notlarına Ait Şema	146

TABLolar

Tablo 1. Çalışılan Öğrencilerin Sınıflarına Göre Dağılımı.....	19
Tablo 2. Herhangi İki Yapının Derecelerinin Farkını Gösteren Tablo.....	37
Tablo 3. 1. Öğrencinin İlk Repertuar Çizelgesi	39
Tablo 4. 1. Öğrenciye Ait Bir Yapı İlişkileri Matrisi.....	40
Tablo 5. 1. Öğrencinin Son Repertuar Çizelgesi	43
Tablo 6. 4. Öğrencinin İlk Repertuar Çizelgesi.....	46
Tablo 7. 2. Öğrencinin Son Repertuar Çizelgesi	49

Tablo 8. 3. Öğrencinin İlk Repertuar Çizelgesi.....	51
Tablo 9. 3. Öğrencinin Son Repertuar Çizelgesi.....	52
Tablo 10. 4. Öğrencinin İlk Repertuar Çizelgesi.....	54
Tablo 11. 4. Öğrencinin Son Repertuar Çizelgesi.....	56
Tablo 12. M Öğrencisine Ait Merkezi Kategorileri Gösteren Tablo.....	101
Tablo 13. E Öğrencisine Ait Merkezi Kategorileri Gösteren Tablo.....	102
Tablo 14. Ş Öğrencisine Ait Merkezi Kategorileri Gösteren Tablo.....	103
Tablo 15. 5. Sınıf Öğrencilerine Ait Merkezi Kategorileri Gösteren Tablo	104
Tablo 16. A Öğrencisine Ait Merkezi Kategorileri Gösteren Tablo.....	147
Tablo 17. F Öğrencisine Ait Merkezi Kategorileri Gösteren Tablo.....	148
Tablo 18. T Öğrencisine Ait Merkezi Kategorileri Gösteren Tablo.....	148
Tablo 19. 7. Sınıf Öğrencilerine Ait Merkezi Kategorileri Gösteren Tablo	149
Tablo 20. CEVAPLAR TABLOSU-1.....	152
Tablo 21. CEVAPLAR TABLOSU-2.....	152
Tablo 22. CEVAPLAR TABLOSU-3.....	152
Tablo 23. CEVAPLAR TABLOSU-4.....	153
Tablo 24. CEVAPLAR TABLOSU-5.....	153
Tablo 25. CEVAPLAR TABLOSU-6.....	154
Tablo 26. CEVAPLAR TABLOSU-7.....	155
Tablo 27. CEVAPLAR TABLOSU-8.....	156
Tablo 28. CEVAPLAR TABLOSU-9.....	156

KISALTMALAR LİSTESİ

- RÇ** : Repertuar Çizelgesi
RÇT : Repertuar Çizelge Tekniği
GT : Gömülü Teori

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu bölümde “Problem Durumu”, “Problem Cümlesi”, “Alt Problemler”, “Araştırmanın Önemi”, “Varsayımlar”, “Sınırlamalar” ve “Tanımlar” alt başlıkları ele alınmıştır.

1.1. Problem Durumu:

1.1.a. Sonsuzlukla İlgili Farklı Anlayışlar

Aristo’dan beri bir çok matematikçinin itiraz ve engellemesine rağmen, günümüz matematik dünyasında kabul edilen, sonsuzluk ile ilgili bir çok anlayış vardır. Cantor’un sezgilerimize ters düşen kardinal ve ordinal sayıları inşası bugün matematik topluluğu tarafından genel olarak kabul edilmiş olsa da, sadece standart olmayan analizdeki sonsuz küçüklerin varlığını kabul edenler veya bu teorilerin hepsini reddedenler de vardır. Bu konuyla ilgili bir çok tartışma olsa da sonsuza gitme ve sonsuz küçük gibi kavramlar 19. yüzyılın başından itibaren matematikte kullanılmıştır.

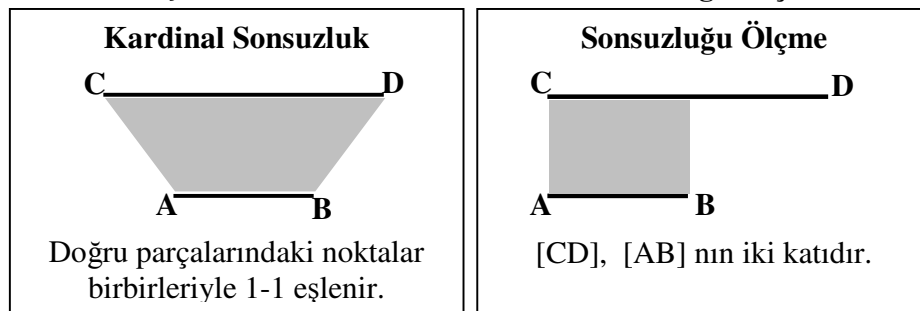
Matematiğin tarihinden gelen sonsuzlukla ilgili iki temel kavram aktüel (actual) ve potansiyel (potential) sonsuzluktur. Fischbein (2001) aktüel sonsuzluğu insan zekasının zor bulduğu, kavranması imkansız bir şey olarak ifade ediyor. Fischbein’e göre, potansiyel sonsuzluk kavramından bahsettiğimizde, sonsuzluğun dinamik şekli ile ilgileniriz. Örneğin doğal sayılar kümesinin tamamını düşünemeyiz fakat her bir doğal sayıdan sonra başka bir doğal sayı geldiği düşüncesini kavrayabiliriz.

Dubinsky ve diğerleri (2005) tarafından ortaya atılan APOS teorisine göre, sonsuzluğu bir sürece içselleştirme (interiorization) potansiyel sonsuzluğa karşılık gelirken, bir nesneye sıkıştırma (encapsulation) aktüel sonsuzluğa karşılık gelir. Örneğin potansiyel sonsuzluk, sonsuz olduğu dikkate alınarak bir doğru parçasında istenildiği kadar nokta oluşturma sürecini açıklarken, aktüel sonsuzluk doğru parçasındaki noktaların tamamını ifade eden sonsuz sayısını açıklar.

Tall (2001), sonsuzlukla ilgili kavramları doğal (natural) ve formal (formal) sonsuzluk olarak sınıflandırmaktadır. “Sonsuzlukla ilgili kavramlar genellikle sonlu olaylar üzerinde düşünülerek ve bu olayların sonsuza kadar olması hayal edilerek ortaya çıkar.” Tall bu tip kişisel kavramlaştırmaları (conceptions) doğal sonsuzluk olarak ele almıştır. Sonsuzlukla ilgili bu kavramlar sonlu dünyamızdaki yaşantıların etkisiyle gelişir. Tall, 20. yüzyılda tutarsızlıkları rasyonalize etmek için tümünden gelim ile sonsuzlukla ilgili farklı formal kavramların inşa edildiğini ileri sürmüştür. “Sayma ve sıralama, kardinal ve ordinal sayı teorisini; aritmetiğin özellikleri, sonsuz ve sonsuz küçük büyüklükleri içeren standart olmayan analizini sonuç vermiştir. Buna göre, sonsuzluğun doğal kavramlarının kendi içinde oluşmuş bazı çelişkilerine karşın formal sonsuzluğun, her biri kendi içinde tutarlı olan birkaç farklı çeşidi vardır.”

Kardinal sayı teorisini ortaya koyan Cantor’un sayma paradigmasına karşın, Tall (1980) sonsuzlukla ilgili sezgileri açıklamak için sayının ölçme özelliğini kullanarak alternatif bir çatı ileri sürdü. Kardinal sonsuzluk, iki doğru parçasında, uzunluklarına bakılmaksızın aynı kardinalitede nokta olduğunu iddia ederken, sonsuzlukla ilgili **ölçme sezgisi** iki doğru parçasından uzun olanının diğerine göre daha fazla noktası olacağını ifade etmektedir. Örneğin, CD doğru parçasının uzunluğu, AB doğru parçasının uzunluğunun iki katı ise CD doğru parçasında, AB doğru parçasının iki katı kadar nokta vardır.

Şekil 1. Kardinal Sonsuzluk ve Sonsuzluğu Ölçme



Tall (1980) bu nosyona “sonsuzluğu ölçme (measuring infinity)” adını verdi ve öğrenciler için bunun, sonsuz miktarların doğal bir açıklaması olduğunu ileri sürdü. Ona göre, sonsuzu ölçen sayılar, gerçek sayıların genişletilmesi ile elde edilen, hem sonsuz büyük ve hem de sonsuz küçük miktarları ölçen tutarlı bir sayı sisteminin parçasıdır. Bu durum standart olmayan analiz ile tutarlıdır. Tall’un iddialarına göre, çocukların

karşılaştığı sonsuzluk ile ilgili yaşantılar daha çok “sonsuzu ölçen sayı” kavramı ile ilişkilidir ve kardinal sayı teorisine ile karşılaştırıldığında standart olmayan analizin modern teorisine daha yakındır. Bununla beraber Monaghan (2001) sonsuzu ölçme anlayışının, sadece ileri yaşlardaki çocukların düşüncelerinde yer alabilen bir eğilim olarak açıklanabileceğini ileri sürmektedir.

Sonsuzluğu ölçme standart olmayan bakış içinde düşünülebileceğinden dolayı, sonsuzlukla ilgili farklı kavramların Tirosh’un (1991) çalışmasındaki gibi sınıflandırılması daha uygun olabilir. Tirosh (1991) Cantor’un küme teorisinin öğretimi ile ilgili araştırmasında, farklı içeriklerdeki sonsuzluk terimlerini potansiyel sonsuzluk (sonlu ve istendiği kadar devam ettirilebilen bir süreci gösteriyor), aktüel sonsuzluk (Cantor’un kardinal sonsuzluğu yada sıralı kümelerin denklik sınıfları ile gösterilen Cantor’un ordinal sonsuzluğu anlamında) ve standart olmayan sonsuzluk (standart olmayan analiz çalışmasında ortaya çıkar ve diğerlerinden farklı olarak sonsuz küçük kavramının ortaya çıkaran bölme dahil bütün aritmetik işlemleri kabul eder) olarak sınıflandırmıştır.

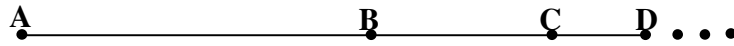
1.1.b. Sonsuzluğu Anlama İle İlgili Literatürdeki Çalışmalar

Fischbein (1979), Piaget ve Inhelder’in (1956) çalışmasının, çocukların sonsuzluğu anlamaları ile ilgili çalışmaların başlangıcı olarak ele alınabileceğini ileri sürmektedir. Bu çalışmada öğrencilere verilen görev; bir geometrik şekli örneğin bir dikdörtgeni devamlı ikiye bölmektir. Böylece dikdörtgen en basit şekil olan doğrular oluşuncaya kadar sayısız kere bölünür. Piaget’in gelişim teorisine göre, işlem öncesi dönemdeki çocuk bölmeyi fazla sürdürememiştir. Somut işlemler dönemindeki çocuk uzun süre ama az sayıda bölme gerçekleştirmiştir. Soyut işlemler dönemindeki çocuk ise çok sayıda bölmeye devam edebilmiştir. Piaget ve Inhelder bu safhadaki bir çocuğun, şeklin limitinin bir nokta olduğunu düşünebildiğini ileri sürmüşlerdir. Piaget bu çalışmada daha çok çocukların uzayı anlamaları üzerinde durmuştur. Topolojik başlangıç tezi (topological primacy thesis) ile ilgili bu çalışmada çocukların sayıları kavramsallaştırırken karşılaştıkları sonsuzluk düşünülmemiştir (Monaghan, 2001).

Fischbein (1978) sonsuzluk ile ilgili öğrencilere ait farklı sezgilerin çelişen doğasını ortaya koymaya çalışmıştır. Yaptığı deneysel çalışma limit alma sürecindeki potansiyel sonsuzluk ve kardinal sayı teorisindeki aktüel matematiksel sonsuzluk ile ilgilidir. Fischbein, öğrencilerin limit alma süreci ile ilgili sezgisel kavramlarının, limitin sonlu

değerinden çok, sürecin sonsuzluğuna odaklanmaya meyilli olduğunu bulmuştur. Fischbein, 8. ve 9. sınıf öğrencilerine aşağıdaki soruları sormuştur;

- i) $|AB| = 1$ metre olmak üzere, AB doğru parçasına $\frac{1}{2}$ metre uzunluğundaki BC doğru parçasını ekleyelim ve aynı şekilde $\frac{1}{4}$ m, $\frac{1}{8}$ m vb. uzunluklarındaki doğru parçalarını eklemeye devam edelim. Bu doğru parçalarını ekleme süreci sona erer mi?



- ii) $|AB| + |BC| + |CD| + \dots$ doğru parçalarının uzunluklarının toplamı ne olur?

Fischbein, öğrencilerin % 84'ünün sürecin hiç bitmeyeceğini, % 14'ünün biteceğini düşündüğünü, ikinci soruda ise öğrencilerin % 6'sının toplamı 2, % 17'sinin 2'den az, % 51'inin sonsuz olarak bulduğunu belirlemiştir. Sürecin potansiyel sonsuzluğu ile ilgili hiç sona ermeyen süreç düşüncesi (the never-ending struggle), öğrencilerin limit kavramını anlamada oldukça önemli bir bilişsel engel olarak görülmüştür.

Fischbein, kardinal sonsuzluğa ait sezgilerde de benzer paradoksal çelişkiler gözlemlemiştir. Fischbein sonsuz çoklukların karşılaştırılması ile ilgili soruların cevaplarını iki kategoride sınıflandırmıştır:

- 1) “Sonsuz” cevaplar (ör. “bütün sonsuz kümeler denktir”)
- 2) “Sonlu” cevaplar (ör. “bir küme özalt kümesine denk olamaz”)

Bu hipotezler bir seri çalışmada tekrarlanmıştır (Fischbein, Tirosh ve Hess, 1979; Fischbein, Tirosh ve Melamed, 1981). Fischbein bireylerin sonsuzluk ile ilgili kavramları “kararsız ve kendisiyle çelişen” bir biçimde ifade edebildiklerinden söz etmiştir.

Monaghan (2001), öğrencilerin (16-18 yaş) limit ve sonsuzluk ile ilgili kavramlarını incelemiştir. Ona göre, öğrencilerin sonsuzlukla ilgili temel düşüncesi sonsuzluğun bir süreç veya sürekli devam eden bir şey olduğudur. Monaghan'a göre; “Bir çok matematik kavramında olduğu gibi sonsuzluk, tümevarım prensibinde yada bilgisayar dillerinde kullanılan sonsuz döngülerde olduğu şekliyle bir **süreç** olarak anlaşılabilir gibi, bir kümenin kardinalitesi yada bildiğimiz sayılardan daha büyük bir sayı olarak bir **nesne** olarak anlaşılabilir”. Monaghan, “1, 2, 3, ... ü bir tek küme olarak düşünebilir

miyiz?” (190 öğrenciden 147 si evet diyor) gibi kardinalite ile ilgili sorulara ve sonsuz elemanı olan kümelerin karşılaştırılmasının istendiği sorulara (öğrencilerin çok azı “daha fazla...”, “her ikisi aynı” gibi karşılaştırmalar yapmamıştır) verilen cevaplarda sonsuzluğun nesne olarak anlaşılmasının dolaylı delillerinin görülebileceğini iddia etmiştir. Ayrıca “ ∞ kocaman bir sayı mıdır?” sorusuna 190 öğrencinin % 31’i “Evet” demiştir. Çocuklar ∞ ’u “bazı şeyleri kolaylaştıran bir sayı olarak düşünüyoruz” yada “gerçekte belirli bir şey değil ama...” gibi cümlelerle ifade etmişlerdir. Monaghan (2001), küçük yaş grubundaki öğrencilerin sonsuzluk kavramına bakışları ile ilgili çalışmada, araştırmaları olumsuz yönde etkileyebilecek iki güçlüğe dikkat çekiyor. Birincisi, gerçek dünya sonludur ve sonsuzluk üzerine yapılan görüşmelerde kullanılacak uygun bir kaynak yoktur. Bundan dolayı araştırmacı içeriği sağlamak zorundadır ve bu öğrencilere anlamlı gelmeyecek kavramların kullanılmasını içerebilir. İkincisi ise çocukların sonsuzluk hakkında konuşurken kullandıkları dil ile ilgilidir. Öğrencilerin kullandıkları kelimeler ve cümleler ne kadar bizim anladığımız şeyleri ifade ediyor? Bu da üzerinde durulması gereken bir konudur.

Buna paralel olarak yaptıkları bir çalışmada Jirotkova ve Littler (2003), öğrencilerin “sonsuzluk” kelimesini kullanırken, potansiyel mi yoksa aktüel sonsuzluktan mı bahsettiklerini belirlemenin çok zor olduğunu ifade etmişlerdir. Bu çalışmalarında Jirotkova ve Littler (2003) öğrenci ve öğretmenlerden oluşan 72 kişilik bir grubun bir doğruyu nasıl tanımladıklarını analiz etmişlerdir. Daha sonra Jirotkova ve Littler (2004), bir pilot çalışmadan sonra 7 görevden oluşan bir çalışma geliştirmişler ve bunu çek ve ingiliz öğrencilere uygulamışlardır. Sonsuzlukla ilgili görevler genellikle bir geometrik içerik ile sunulmuştur. Örneğin bunlardan biri aşağıdaki gibidir:

Aşağıda verilen konuşma metnine göre kim haklıdır? Sebebini açıklayınız.

Cecilie: İki paralel ışın iki farklı sonsuz noktada sona erer.

Dana: Sana katılmıyorum. Işımlar aynı sonsuz noktada sona erer.

Eva: İkinizde yanılıyorsunuz. Bir ışın sürekli devam eder ve hiçbir zaman sona ermez.

Daha önceden Fischbein ve arkadaşları (1979) sonsuzlukla ilgili sezgilerin 12 yaşlarından itibaren göreceli olarak sabit kaldığını bulmuşlardı. Onların aksine, Jirotkova ve Littler(2004), içerik değiştiğinde test ettikleri öğrencilerin sonsuzlukla ilgili

sezgilerinin sabit kalmadığını gözlemlemişlerdir. Öğrencilerin cevaplarına göre, “öğrenciler için sonlu dünyadan sonsuza geçerken, fenomenin özelliklerinin değişimi hakkında düşünebilmenin çok zor olduğu görülmüştür”.

Piaget’i takip eden bilişsel yapılandırmacı teorik çatının rehberliğinde limit ve sonsuzlukla ilgili farklı anlayışları belirlemek için bazı modeller geliştirilmiştir.

Petty (1996), sonsuzluğun ve sonsuz süreçlerin kavramsallaştırılmasında soyutsal çıkarım’ın (reflective abstraction) rolünü açıklamaya çalıştığı araştırmasında Robert (1982) ve Sierpinska(1985) tarafından geliştirilen bir modeli kullanmıştır. Bu çalışmada yararlanılan model 3 ayrı seviye yada kavramsal etkinlik safhalarından oluşmaktadır.

1. Limitin statik kavramı (Static Concept of Limit)

- limiti sonlu terimlerle ifade eder.
- birey için her şey sonlu ve kesindir. Sonsuz yoktur
- sonsuzluk yoksa her sınırlı, sonlu ve kesin olmalıdır.

2. Limitin dinamik kavramı (Dynamic Concept of Limit)

- limit devamlı bitmeyen bir süreç ve ulaşılamaz bir değerdir.
- Sonsuzluk vardır ve potansiyel sonsuzluk kabul edilir. Birey aktüel hâle getirilen (actualized) sonsuzluğa karşıdır. Bu safhada bireyin anlayışının içerik ile ilgili bir yönü vardır, geçiş safhası içerebilir.

3. Aktüel hâle getirilen sonsuzluk (Actualized Infinity)

- Bireyin bir matematiksel nesne olarak kavramsallaşmış sonsuzluğu vardır.
- Sonsuzluğa bir bütün ve kesin nesne olarak bakar.
- Birey sonsuz bir sürecin çıktısını tahmin etmenin mümkün olduğuna inanır.

Petty, “Bireyler kendi sonsuzluk ve sonsuz süreç kavramları ile ilgili nasıl düşünüyorlar?” sorusuna cevap aradı. Bu çalışmada ilköğretim öğretmenliği bölümünde öğrenim gören 4 üniversite öğrencisi ile 8 hafta boyunca farklı görüşmeler yapılmış ve bu öğrencilere genellikle temel matematik ve geometri konularıyla ilgili tekrarlanan süreçler içeren görevler verilmiştir. Bu görevlere; 0,999... ve 1 in karşılaştırılması, dikdörtgen şeklindeki bir kağıt parçasının sürekli katlanması ve bir dairenin içine kenar sayısı artacak şekilde arka arkaya çokgenler çizilmesi örnek olarak verilebilir. Öğrenciler sonsuzluk ve sonsuz süreçleri içeren durumları çözmeye teşebbüs ettikçe

çalışmaya devam edilmiştir. Öğrenciler çelişkilerini çözmeye çalıştıkça görüşme şekli, öğrencilerin kavramsal yapılarını nasıl kullandıklarını ve sonradan neyi değiştirdiklerini gözlemlene imkanı sunmuştur Çalışmada yazılı ve sözlü cevaplara dayanılarak 4 detaylı öğrenci durum incelemesi yapılmıştır. Bu durum incelemelerinde çözüm etkinlikleri; öğrencilerin, Piaget'in ifade ettiği soyutsal çıkarımın soyut seviyelerinde ilerlemesini ve bu öğrencilerin, potansiyel çözüm etkinliklerini tahmin edebilmelerini sağlamıştır. Öğrenciler kendi kavramsal yapılarını çıkarım nesnesi (objects of reflection) gibi kullanmaya başladıkça öğrencilerin kavramsal yapılarının karmaşıklığı değişmiştir. Petty, sonuçta soyut çıkarımlar sağlayan düşünmenin (abstract reflective thinking) artan bir şekilde daha yüksek seviyeleri üretmesinin, öğrencilerin limitleri ve sonsuz süreçleri anlamasını geliştireceği görüşünü dile getirmiştir. Gözlemlerinden sonra Petty kullandığı üç safhalı modeli, üçüncü safhayı ikiye ayırarak dört safhalı bir şekle sokmuştur. Ona göre; $0,999...$ ile 1 in aynı olduğunu ifade eden bir öğrenci, sonsuz bir sürecin tahmin edilebilir bir sonucu olduğunu kabul etmiş olur. Bununla beraber böyle bir şeyden, aynı öğrencinin sonsuzu bir matematiksel nesne olarak kavramsallaştırdığı sonucu çıkarılamaz. Bu kişi aktualize olan sonsuzluk seviyesine erişmiş olsa da bu kişinin sonsuzlukla ilgili işlemleri yapabildiği yada belirli bir sonsuzluk kavramına sahip olduğunu ileri sürebilmek için bu ifade yeterli bir kanıt değildir. Petty'nin önerdiği modeldeki seviyeler; 1. Statik seviye, 2. Dinamik seviye, 3. Aktüel hâle gelen sonsuzluk seviyesi, 4. Sonsuzluğu bir matematiksel nesne olarak algılama seviyesi (infinity as a mathematical object level) 'dir.

Petty araştırmasında görüştüğü hiçbir öğrencinin bu kavramsal gelişimin üçüncü ve dördüncü seviyesine ulaşamamış olduğunu gözlemlemiştir. Petty'nin çalışması daha çok sonsuzluğun limit sürecini anlaşılmasındaki rolüne odaklanmıştır ve geçmiş çalışmalarda kullanılan limitle ilgili görevlerin soyutsal çıkarım(reflective abstraction) bakışı ile değerlendirilmesinden ibarettir. Sierpinski'nin (1985) limit kavramı ile ilgili epistemolojik engelleri sınıflandırdığı çalışmasındaki öğrencilerin sonsuz süreçleri kavramsallaştırmasıyla ilgili düşünce, Petty'nin çalışmasına temel olmuştur. Bu düşünce sonsuzluk kavramları ile bireyin limit süreci nosyonunu tanımlamaya yaramıştır.

Dubinsky ve arkadaşları (2005), insanların sonsuzluk kavramını nasıl düşünebileceği ile ilgili yeni bir açıklama ileri sürmek için kendi geliştirdikleri APOS teorisini kullanmışlardır. Yine Piaget'nin, çocukların mantıksal gelişimini açıklamak için sunduğu soyutsal çıkarımı takip eden bu teoriyi uygulayarak sonsuzluk kavramını içeren

çeşitli matematik problemleri, paradokslar ve çelişkiler ile ilgili bilişsel açıklamalar ve bazı çözümlemeler sunmuşlardır. Bu açıklamalar içselleştirme (interiorization) ve sıkıştırma (encapsulation) zihinsel mekanizmaları ile ifade edilmektedir. Daha önceden ifade edildiği gibi, potansiyel sonsuzluk ve aktüel sonsuzluk anlayışlarını, sonsuzluğun **süreç** (process) ve **nesne** (object) olarak kavramsallaştırılması ile karakterize etmişlerdir.

Hans Niels Jahnke (2001) ise “Kardinal sonsuzluğun tarihsel gelişimi” başlıklı makalesinde Cantor’un kardinal ve ordinal sonsuzluğu ile ilgili epistemolojik ve didaktik bakışları ele almıştır. Jahnke’ye göre;

- 1) Cantor’un sonsuzluğa yeni yaklaşımı ile oluşan sonsuzluk nosyonu, temel olarak süreklilik fikrinden tamamen kopmuştur.
- 2) Cantor’un teorisi sonlu ifadelerin genelleştirilmesi olsa da fikirlerinin çoğu yaygın anlayışa terstir ve sonsuzluk algısı suni ve doğal olmayan bir algı olarak ele alınabilir.
- 3) Cantor’un matematiksel genellemelerinin doğasını ve saf (pure) matematiğin özgürlüğünün önemini tartışmasının matematik öğretimine etkileri olmuştur.

Jahnke, sonsuz kümelerin büyüklüklerini anlamlı ve sistematik bir şekilde ayırmak için 1-1 eşleme kavramını ilk defa Cantor’un kullandığını vurgulamaktadır. Onun bu kullanımına bağlı olarak Cantor’un kardinal ve ordinal sonsuzluğunu içeren, sonsuz büyüklüklerin karşılaştırılması ile ilgili bir çok araştırma yapılmıştır (Fischbein, Tirosh & Hess 1979; Duval, 1983; Tirosh, 1985; Martin & Wheeler, 1987; Sierpinski, 1989; Tirosh and Tsamir, 1996; Tsamir, 2001).

Tirosh’un (1985) çalışmasında 11-17 yaşlarındaki 1381 öğrenciye sonsuz büyüklüklerin karşılaştırılması ile ilgili 32 matematik problemi verilmiştir. Öğrencilerden verilen iki kümenin denk olup olmadığını belirlemeleri ve cevaplarını açıklamaları istenmiştir. Öğrencilerin cevaplarının göreceli olarak pek değişmediği görülmüştür.

Öğrencilerin iki kümenin eşit sayıda elemanı olduğu cevabını açıklamak için kullandıkları temel argüman “Bütün sonsuz kümelerin aynı sayıda elemanı vardır.” düşüncesidir. Örneğin öğrencilerin % 80’i sonsuz doğal sayı olduğunu ve aynı zamanda

bir doğrudaki sonsuz sayıda nokta olduğunu iddia etmiştir. Buna göre bu iki kümenin denk olduğuna karar vermişlerdir. İki sonsuz kümenin denk olmadığı ile ilgili iddia aşağıdaki argümanlardan biri ile açıklanmıştır;

1. “Verilen kümenin bir özalt kümesi kendisinden daha az eleman içerir.”
Örneğin, bu argümanı kullanan öğrencilerin % 51’i doğal sayılardan daha az sayıda pozitif çift sayı olduğunu iddia etmiştir.
2. “Sınırlı bir küme sınırsız bir kümeden daha az eleman içerir.” Örneğin, bu argümanı kullanan öğrencilerin % 12’si bir karedeki noktaların sayısının bir doğru parçasındaki noktalardan daha fazla olduğunu iddia etmiştir.
3. “Lineer bir küme, iki boyutlu bir kümeden daha fazla eleman içerir.” Örneğin, bu argümanı kullanan öğrencilerin % 38’i bir doğru parçasına göre, bir karede daha fazla nokta olduğunu iddia etmiştir.

Öğrencilerin küçük bir yüzdesi (% 1’den az) sezgisel olarak 1-1 eşleme nosyonu kullanmıştır. Sonsuz büyüklükleri karşılaştırmak için kullandıkları sezgisel kriterler ile küme teorisinin teoremleri çelişmektedir. Sonlu ve sonsuz kümelerle ilgili bir öğrenme ünitesinin lise öğrencilerinin aktüel sonsuzluğu anlamalarına etkisini incelemek için Tirosh ve arkadaşları, üniteyi giden 15 ve 16 yaşlarındaki öğrencilerden oluşan 10. sınıf seviyesindeki 4 sınıfta işlemişlerdir. Derslerden sonraki anketler, öğrencilerin % 86’sının öğrenme ünitesinin temel kavramlarını anladığını göstermiştir. Tirosh, çalışmanın yapıldığı yerde sonsuz kümelerle ilgili öğrenme ünitesinin belirgin bir zorlukla karşılaşmadan 10. sınıftan itibaren işlenebileceğini ileri sürmüştür.

Sonsuz kümelerin karşılaştırılması ile ilgili görevler içeren bazı çalışmalardan yola çıkarak Tsamir (2001), sonsuz kümelerin karşılaştırılması ile ilgili bir soru sorulduğunda verilen sonsuz küme çiftinin denk olup olmadığını belirlemek için genellikle şu dört kriterin kullanıldığını ifade etmiştir(Bkz. Fischbein, Tirosh & Hess 1979; Fischbein, Tirosh & Melamed, 1981; Duval, 1983; Borasi, 1985; Martin & Wheeler, 1987; Moreno & Waldegg, 1991; Nunez, 1991; Sierpinska, 1987; Tall, 1990; Tirosh & Tsamir, 1996; Tsamir & Tirosh, 1992; 1994; Tsamir, 1999):

- Parça-bütün kriteri (Örneğin, “Bir kümenin özalt kümesi kendisinden daha az eleman içerir.”),

- Tek sonsuz kriteri(Örneğin, “Sadece bir sonsuzluk olduğundan, bütün sonsuz kümelerin aynı sayıda elemanı vardır.),
- Sonsuz çokluklar karşılaştırılmaz kriteri,
- 1-1 eşleme kriteri.

Sınırlı sayıda olsa da doğrudan sonsuzluk kavramı ile ilgili, küçük çocuklarla yapılan araştırmalara Tall’un (2001) ve Falk’un (1986, 1992) çalışmaları örnek olarak verilebilir. Tall, 5 yaşındaki oğlu Nic’e Cantor’un kardinal sonsuzluğunu anlatmaya çalışmış, istediği cevapları alsa da değişken ve çelişkili cevaplarla karşılaşmıştır. Nic, kardinal sonsuzlukla ilgili düşüncelerden çabuk vazgeçmiştir. Falk ve arkadaşları ise 5 ve 12 yaşları arasındaki 95 öğrenci ile sayı oyunları oynamıştır. Falk ve arkadaşları çalışmasında üç farklı oyun kullandı:

1. Doğal sayılarla “En büyük sayıyı söyleyen kazanır” oyunu,
2. Tam sayılarla “En küçük sayıyı söyleyen kazanır” oyunu,
3. Pozitif rasyonel sayılarla “En küçük sayıyı söyleyen kazanır” oyunu.

Bu oyunlarda öğrencilere ilk sayıyı söyleyen olmayı isteyip istemedikleri de sorulmuş ve öğrenciler buna göre değerlendirilmiştir. Falk ve arkadaşları, küçük çocukların genellikle en büyük sayıyı söyleme oyununu çok fazla devam ettiremediklerini gözlemlemişlerdir. 6 ve 7 yaşlarındaki öğrencilerin çoğu tamsayıların sınırsızlığını anlayamamıştır. Falk’a göre, negatif tamsayılar konusu ile ilgili eksikliklerden ve sıkıntılardan dolayı çocuklar yukarı doğru saymada daha iyiydi. Sonsuz küçüğü anlamak sonsuz büyüğü anlamaktan daha zordu. Sadece 1, 2 öğrenci artarak giden sayıların sınırsızlığını anladı fakat azalan sayıların sınırsızlığını kimse anlayamadı.

Sonsuzluk ile ilgili geçmiş çalışmaların çoğu orta öğretimin sonunda bulunan veya üniversitede okuyan öğrenciler ile yapılmıştır (Tirosh & Tsamir, 1994; Monaghan, 1986; Tsamir, 2002). Araştırmaların çoğu aktüel sonsuzluğun anlaşılması ile ilgili zorlukları ve buna bağlı olarak sonsuz küçük cebiri, limit, seriler, süreklilik gibi konuların anlaşılmasındaki zorlukları incelemişlerdir.

Cantor’un küme teorisinin konuları, aktüel sonsuzlukla ilgili kavramların anlaşılmasını gerektirmektedir ve bundan dolayı zor olarak düşünülmektedir. Buna göre, pedagojik çalışmaların genellikle ileri yaşlardaki öğrencilerle yapılması doğaldır.

Bunun yanında, bir öğrencinin sonsuzlukla ilgili bütün farklı anlayışlarının (aktüel, potansiyel, standart olmayan analiz vb.) araştırılması bir araştırmacı için de zordur.

1.2. Problem Cümlesi

Farklı seviyelerdeki öğrenciler sonsuzluk kavramını nasıl anlamaktadırlar?

1.3. Alt Problemler

- 1-Akademik çalışma yapan öğrenciler sonsuzluk kavramını nasıl algılamaktadırlar?
- 2- İlköğretim öğrencileri sonsuzluk kavramını nasıl anlamaktadırlar?
- 3- Sonsuzluk ile ilgili kavram imajları matematik içerik bilgisi ve yaşa bağlı olarak nasıl değişmektedir?
- 4- Akademik çalışma yapan öğrencilerin sonsuzluk anlayışları ile ilköğretim öğrencilerinin sonsuzluk anlayışları arasında nasıl bir ilişki vardır?
- 5- İlköğretim öğrenciler ile ilgili çalışmalarda çizgi film kullanmak ne kadar faydalıdır?

1.4. Araştırmanın Önemi

Matematik öğretiminde öğrenciler küçük yaşlardan itibaren sonsuzluk kavramı ile karşılaşmaktadırlar. Öğrenciler, daha küçük yaşlarda sonu olmayan derinlikleri olan uzayda ilerleyen uyduları duymakta, sonsuzluk kavramı ile ifadelerin kullanıldığı bir çok çizgi film izlemektedirler. Bu yetişme tarzı düşünme şeklini de etkilemektedir. Deneyimleri ile elde ettikleri kontrol edilemeyen ve yönlendirilemeyen sonsuzluk ile ilgili kapalı modeller daha sonra yanlış yorumlara neden olabilmektedir.

Sierpinska (1985), limit konusu ile ilgili yaptığı bir çalışmada öğrencilerin sonsuzluk anlayışlarını önemli bir bilişsel engel olarak ele almıştır. Öğrenciler bir çok matematik konusunda, özellikle sıradışı düşünmeyi gerektiren noktalarda zorlanmaktadırlar. Tirosh (1991), anlamsız gibi gözüken sonsuzluk kavramı ile ilgili konuların öğretiminin, öğrencileri, şu hedeflere ulaştırdığını ileri sürmektedir;

1. Başta paradoks gibi gözüken sonuçları kabul etme.

2. Sezgisel düşünmenin zorlayıcı doğasının farkında olma.
3. Temel sezgilerini kontrol etmeye ihtiyacı olduğunu anlama.
4. Sezgisel bir şekilde cevap vermekten sakınma.
5. Problem çözümü için açık teoremler kullanma.

Sonsuzluk gibi tartışmalı bir konuda farklı matematiksel anlayışların ve farklı kavram imajlarının oluşması normaldir. Sadece öğrencilerin değil matematikçilerin de sonsuzluk kavramını nasıl anladığı ile ilgili düşüncelere ışık tutmaya ihtiyaç vardır. Literatüre bakıldığında ise bu konu ile ilgili matematikçilerin kavram imajlarının ve anlayışlarının belirlendiği bir çalışmaya rastlanamamıştır. Buna benzer olarak küçük çocuklarla yapılan araştırmaların da çok az olduğu görülmüştür. Bu çalışmada belirtilen yaş seviyelerindeki bireylerin sonsuzluk ile ilgili anlayışlarının araştırılmasıyla bu eksikliğin giderilmesine katkıda bulunulacağı düşünülmektedir. Ayrıca matematikteki limit, seriler, örüntüler vb. bir çok konunun temeli olan sonsuzluk kavramının ele alınması bu konuların öğretiminde karşılaşılan zorlukların aşılmasında yararlı olacaktır.

Yapılan araştırmalarda genelde analizler, araştırmacıların öğrencilerin yazdıkları ile ilgili veya konuşmaları ile ilgili yorumlarına dayanmaktadır. Öğrenciler ise çoğu zaman kendi düşüncelerini ifade edebilme becerileri açısından zayıf kalabilmektedirler (Jirotkova, 2004). “Sonlu ve sonsuz kümeler” ile ilgili öğrenme ünitelerinde kullanılan farklı stratejiler, öğrencilerin öğrendikleri teori ile tutarlı sezgiler edinerek bu sezgilerini devam ettirmelerini sağlamaktadır. Bununla beraber, bu etkileri sistematik olarak değerlendiren anlamlar açısından eksik olduğumuz gözlemlenmektedir. Tirosh’a (1991) göre; öğrencilerin sezgisel tabanını dikkate alan öğretim stratejilerini oluşturmada başarılı olabilmek için, “sezgiselliğin derecelerini” ölçecek anlamlar geliştirmeye ihtiyacımız vardır.

Psikolojik Analiz Tekniklerinin eğitimde ve özellikle matematikteki sonsuzluk konusunda kullanılması ile öğrencilerin yapıları ile ilgili daha sistematik bir bilgi elde edileceği ve bu bilgiler ile öğrencilerin sezgileri hakkında yorum yapılabileceği düşünülmüştür. Repertuar çizelge tekniği gibi öğrencilerin yapılarını ortaya çıkarmak için kullanılan bir tekniğin çalışmada kullanılmasının, özellikle sonsuzluk kavramı ile ilgili konularda farklı bir bakış açısı oluşturacağı ve öğrencilerin bilişsel defansını aşmada diğer yurt dışındaki çalışmalardan daha fazla başarılı olduğu görülmüştür.

Matematikteki sonsuzluk konusu ile ilgili araştırmalarda genelde öğrencilerin bu konu ile ilgili düşünceleri ayrıntılı ve sistematik bir şekilde ortaya koyulamamaktadır ve genelde araştırma konusu olarak içinde sonsuzluk kavramını barındıran limit gibi konular tercih edilmektedir. Araştırmacıya göre, lise ve üniversitelerde uygulanan öğretim programlarından dolayı araştırmaların çoğu sonsuzluk kavramından çok limit konusuna odaklanmıştır. Ülkemizde küme teorisinin öğretimi ile ilgili pedagojik bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu çalışmanın doğrudan sonsuzluk kavramı ile ilgili ilk çalışmalardan biri olduğu düşünülmektedir. Ayrıca küçük yaş grubundaki öğrencilerin sonsuzluk kavramını anlayışları ile ilgili de herhangi bir çalışmaya rastlanmamıştır. Küçük yaş gruplarındaki öğrencilerle pek fazla kaydadeğer bir çalışma olmaması, bu öğrencilere öğretilen sonsuzlukla ilgili matematik konularının belirlenmesini ve düzenlenmesini zorlaştırmaktadır. Araştırma sonucunda elde edilen verilerin ülkemizdeki eğitim ve program çalışmalarına önemli bir katkısı olacağı düşünülmektedir.

Bu araştırmadaki doktora öğrencileri ile yapılan çalışma ile yaş grubu olarak oldukça büyük olan matematikçilerin sonsuzluk anlayışları incelenmiş, ilköğretim öğrencileri ile yapılan çalışma ile de küçük yaş gruplarındaki öğrencilerin zihinlerinde yapılandığı sonsuzluk kavramı üzerinde durulmuştur. Bir nitel araştırma metodolojisi olan gömülü teori ile de repertuar çizelge tekniğinin bu konuda ilk defa uygulandığı düşünülmektedir.

1.5. Varsayımlar

1. Görüşmeye katılan öğrenciler sorulara içtenlikle ve yansız bir şekilde cevap vermişlerdir.
2. Metodolojideki ve uygulanmasındaki aksaklıklar pilot çalışmalar ile düzeltilmiştir.
3. Çalışmayı baştan sona takip edip bitiren 22 öğrencinin 4'ü ile çıkarılan repertuar çizelgeleri güvenilir olarak kabul edilmiştir.

1.6. Sınırlamalar

1. Doktora öğrencileri ile yapılan araştırma, bir metropol üniversitesinin matematik eğitimi anabilim dalı doktora öğrencilerinin görüşleri ile sınırlıdır. Bu araştırmadaki tedavi süreci (treatment) ise, bir dönem boyunca yapılan küme teorisi dersleri ve bu derslerdeki etkinlikler ile sınırlanmıştır.
2. İlköğretim öğrencileri ile yapılan araştırma, bir metropoldaki ilköğretim okulu öğrencilerinin görüşleri ile sınırlıdır. İlköğretim öğrencilerinin çizgi filmler ile ilgili sorulara verdikleri cevaplar, öğrencilerin çizgi filmlere olan ilgileri ile sınırlanmıştır.
3. Bu araştırma, kullanılan araştırma teknikleri (grounded teori ve repertuar çizelge tekniği) ile sınırlanmıştır. Bu çalışma, nitel araştırmada önemli bir unsur olan araştırmacının teorik duyarlılığına bağlı olduğu gibi, katılımcıların görüşme yapıldığı zamandaki durumları ve düşünceleri ile de sınırlıdır. Örneğin, katılımcılar ileri yaşlarda olsa bile RÇT ile yapılan bir çalışmanın güvenilirliğinin sağlanması için katılımcıların maddelere ve çizelge prosedürlerine konsantre olmalarının oldukça önemli olduğu görülmüştür. Çünkü görüşmelerdeki aksaklıklar, katılımcının çizelge prosedürlerini rahat bir ortamda takip edememesi, çizelgeden elde edilen sonuçları az da olsa etkilemektedir.
4. Çalışmaya katılan öğrencilerin görüşmelerde verdikleri cevaplar, sonsuzluk konusu ile ilgili günlük hayatta kullanılan Türkçe dili ile sınırlanmıştır. Monaghan (2001), sonsuzluk konusunda kullanılan dilden dolayı olabilecek yanlış anlamaları potansiyel güçlük (potential pitfall) olarak nitelendirmiştir.

1.7.Tanımlamalar

Kavram İmajı: Zihinsel resimleri ve ilgili özellikleri ve süreçleri içeren konu ile ilgili bütün bilişsel yapı (Tall & Vinner, 1981).

Kavram Tanımı: Matematik topluluğunda kabul edildiği ve anlaşıldığı gibi formal tanım (Tall & Vinner, 1981).

Repertuar çizelgesi (repertory grid): Kısaca, kişinin kişisel “yapıları” ile özel “maddeler” (elements) arasındaki ilişkileri tasvir eden bir tablodur. Tablo, enine ve

boyuna yerleştirilen yapı ve madde isimlerinden ve kişinin, maddeleri yapılara göre değerlendirmesi sonucunda tabloya yerleştirdiği işaretler veya sayılardan oluşur.

Repertuar Çizelge Tekniği: Repertuar çizelgesi kullanılarak kişinin kavram imajını ortaya çıkarmak için kullanılan, ilk defa Kelly (1955) tarafından temeli atılan tekniktir.

Madde (element): Bireyin çevresini oluşturan kişileri (kendisi dahil), bireye ait şeyleri ve bireyle ilgili olayları ifade eder. Buna göre; bireyin akrabalarını bir madde olarak kabul edebileceğimiz gibi, bir konudaki anlamları da bir madde olarak kabul edebiliriz. Örneğin “limit; bir sayıya yaklaşırken, fonksiyonun değerlerinin o sayının değerine yaklaşmasıdır” düşüncesi limit konusu ile ilgili bir maddeyi oluşturur.

Yapı (construct): Birey tarafından maddeleri ayırmak için kullanılan “boyutları veya ilgili eksenleri (reference axes)” ifade eder. Yapı, anlamı bir öğrencinin dünyasına sunmak için kullanılan önceden yapılan bir tahmin veya hükümlendirici bir kategori olarak düşünülebilir.

Metodolojik olarak, Kelly (1955) bir yapıyı, “2 maddenin hangi şekilde benzer ve bir üçüncüsüyle hangi şekilde zıt olduğunu gösteren bir yoldur (durumdur).” şeklinde tanımlamıştır (S. 61). Örneğin iki madde, bir üçüncüsünden farklı olarak güzel maddeler olabilir. Böyle bir durumda yapımız “güzellik” olur ve maddelerin değerlendirmesinde “güzellik” yapısını kullanırız.

Gömülü Teori (grounded theory): Glaser ve Strauss'un (1967) sağlık bilimleri alanında yaptığı çalışmalardan ortaya çıkan, bir yığın veriden tümevarım yöntemi ile bir teori geliştirmeyi ifade eden nitel araştırma tekniğidir.

Kavramlar (Concept): Teoriyi inşa eden bloklar (yapı taşları).

Kategoriler (Category): Fenomenleri temsil eden veriden türetilen kavramlardır. “Burada ne oluyor” sorusuna cevap verirler.

Alt kategoriler (Sub-category): Kategori ile ilgili daha ileri açıklamalar ve özelleştirmeler veren kavramlar.

Fenomen (Phenomenon): Fenomen, verilerimizden ortaya çıkan önemli analitik fikirlerdir. Veride kavramlar olarak temsil edilen merkezdeki fikri ifade eder.

Özellikler (Properties): Bir kategorinin karakteristikleri, kategoriyi tanımlayan ve ona bir anlam veren tasvirler.

Boyutlar (Dimensions): Bir kategorinin genel özelliklerinin değiştiği, kategoriye bir özelleştirme ve teoriye doğru değişme [variation] verilen aralık, alan veya saha [range].

Kodlama (Coding): Verilerin işlenerek kavramsallaştırıldığı ve bir teori oluşturacak şekilde birleştirildiği analitik sũreç.

Açık kodlama (Open Coding): Verideki kavramların belirlendiği ve onların özellik ve boyutlarının keşfedildiği analitik sũreçtir (process).

Eksensel Kodlama (Axial Coding): Eksensel kodlama, tümevarımlı ve tümdengelimli bir düşünme ile kodları (kategoileri ve özellikleri) birbiri ile ilişkilendirme sürecidir.

Seçici Kodlama (Selective Coding): Seçici kodlama bir kategorinin merkez kategori olarak seçilmesi ve bütün kategorileri bu kategori ile ilişkilendirme sürecidir.

Mikro analiz: Bir çalışmanın başlangıcında ilk kategorileri (bu kategorilerin özellikleri ve boyutlarıyla birlikte) üreten ve kategoriler arasında ilişkiler öneren detaylı, tek tek (line-by-line) analiz; açık ve eksensel kodlamanın bir kombinasyonu

Notlar (Memos): Tür ve biçim bakımından farklılıklar gösteren yazılı analiz kayıtları

Kod Notları (Code Notes): Açık, eksensel ve seçici olmak üzere üç çeşit kodlamanın gerçek ürünlerini içeren notlar (memos).

Şemalar (Diagrams): Kavramlar arasındaki ilişkiyi anlatan görsel araçlar

BÖLÜM 2

YÖNTEM

Bu bölümde; araştırma modeli, evren, örneklem ve kullanılan araştırma teknikleri açıklanmıştır.

2.1. Araştırmanın Modeli

Yapılan araştırmada nitel araştırma yöntemlerinden gömülü (grounded) teori ve repertuar çizelge tekniği kullanılmıştır. Buna göre; görüşme, gözlem, animasyonların izletilmesi ve bir takım etkinliklerin uygulanması yoluyla sistematik bir şekilde bilgiler toplanmış, uygulanan tekniklerin kendilerine ait analiz süreçleri ile yapılar ve kategoriler elde edilmiş, yapıların ve kategorilerin kendi aralarındaki ilişkilerini gösteren şemalar elde edilmeye çalışılmıştır. Öğrencilerin seviyeleri uygun olduğu müddetçe farklı araştırma ve veri toplama yöntemlerinden yararlanılarak çeşitleme (triangulation) yapılmıştır.

İlk uygulanan teknik doktora öğrencileri ile yapılan çalışmada yararlanılan Repertuar Çizelge Tekniğidir (RÇT). RÇT'nin özellikleri kullanılarak öğrencilerin sonsuzluk kavramı ile ilgili yapıları ortaya çıkarılmış ve bu yapılar arasındaki ilişkileri gösteren şemalar elde edilmiştir. Repertuar çizelgelerinin oluşturulması için gerekli verilerin elde edilmesinde “görüşme” ve “yazma” yöntemi kullanılmıştır. Çizelgelerin analizinde ise nicel ve nitel yöntemler takip edilmiştir.

İlköğretim öğrencileri (10-13 yaş) ile yapılan çalışmada ise gömülü teori yaklaşımı takip edilmiştir. Farklı bir araştırma tekniğinin kullanılmasının en büyük sebebi yapılan pilot çalışmalarla, RÇT nin uygulanması için küçük yaş grubundaki öğrencilerin pek uygun olmadığı görülmüştür. Üç farklı yaş grubundaki ilköğretim öğrencileri ile yapılan pilot çalışmada, öğrencilerin madde olarak verilen sonsuzluk ile ilgili önermelere konsantre olamadıkları, daha önemlisi maddeleri kendi yapılarına göre derecelendiremedikleri görülmüştür. Araştırmacı, bu yaş grubundaki öğrencilerin, sonsuzluk konusu ile ilgili repertuar çizelgelerini dolduramayacağı sonucuna varmıştır. Araştırmacıya göre, bunda en büyük etken araştırılan konunun, öğrenciler için soyut ve anlaşılması zor bir konu olmasıdır.

2.2. Çalışma Evreni ve Örneklem:

Araştırmanın çalışma evreni, Türkiye'nin bir büyükşehirinde öğrenim gören ilköğretim öğrencileri ve aynı şehirdeki bir üniversitenin matematik eğitimi anabilim dalı doktora öğrencileri olarak belirlenmiştir. Bu öğrencilerden 15 tanesi seçilmiş ve bu 15 öğrenciden 5'i ile sadece pilot çalışma yapılmıştır. Araştırmanın doktora öğrencileri ile yapılan kısmı için 2 üniversite mezunu öğrenci ile görüşülerek pilot çalışma yapılmıştır. Bu öğrencilerden biri yüksek lisans yapmış bir matematik öğretmeni, diğeri ise bir fizik öğretmeni idi. Araştırmanın ilköğretim öğrencileri ile yapılan kısmı için yapılan pilot çalışmada ise farklı ilköğretim okullarının 3., 4. ve 6. sınıflarında öğrenim gören 3 öğrenci ile görüşülmüştür.

Bu çalışmada yer alan 10 öğrenciden 6 sı farklı ilköğretim okullarının 5. ve 7. sınıflarında öğrenim gören 10-13 yaş grubundaki öğrencilerdir. Bu öğrenciler, aile ortamlarının uygunluğu, araştırmacıya olan yakınlıkları ve okul başarı durumları dikkate alınarak seçilmiştir. Öğrencilerin hepsinin geçmiş dönemde matematik dersinden aldıkları karne notu 3 veya üzerindedir. Diğer seçilen 4 öğrenci, 2006-2007 öğretim yılı güz döneminde bir üniversitenin matematik eğitimi bölümünde küme teorisi dersini alan doktora öğrencileridir. Bu çalışmaya katılan öğrenciler dışında dersi alan başka öğrenci yoktur ve seçilen 4 öğrencinin hepsi çalışmayı tamamlamıştır. Başarı seviyelerine ve aldıkları notlara göre, küme teorisi dersini alan doktora öğrencilerinin aşağı yukarı homojen bir grup oluşturduğu düşünülmektedir. Çalışılan öğrencilerin sınıflara göre dağılımı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo: Çalışılan Öğrencilerin Sınıflarına Göre Dağılımı

ÇALIŞMA	PILOT	İLKÖĞRETİM ÖĞRENCİLERİ İLE YAPILAN		DOKTORA ÖĞRENCİLERİ İLE YAPILAN
SINIF	3.,4.,6.,mezun	5.	7.	Küme Teorisi Dersini Alan Sınıf
SAYI	5	3	3	4

2.3. Araştırmada Kullanılan Teknikler:

2.3.a. Repertuar Çizelge Tekniği:

Kişisel Yapı Psikolojisi (Personal Construct Psychology) yoğun bir şekilde insanların bilişsel süreçlerini modellemek için yapılan, bilgi elde etme araştırmalarında kullanılan, bireysel ve grupsal bir psikolojik sosyal süreçler teorisidir. Psikoloji, insanın bilgi süreçlerini modellemeye uygun olarak yapısalcı görüşe uygun bir pozisyon takınır. Fakat bunu, doğrudan değerlendirilebilen (hesaplanabilir) şekillere çevrilen aksiyomatik terimler halinde insanın kavramsal yapılarının karakterize edilmesi doğrultusunda geliştirir (Fransella ve Bannister, 1977).

Kişisel yapılar, 1905-1967 arasında yaşamış bir klinik psikoloğu olan George Kelly 'nin The Psychology of Personal Constructs (1955) kitabında bir bütün halinde ve formal olarak ortaya koyduğu kişilik teorisindeki analizin temel birimleridir. Bu kitap KYP (Kişisel Yapı Psikolojisi) 'yi tanımlayan iki ciltlik bir çalışmadır. Daha sonraları Kelly, teoriyi genişleten bir çok makale yayınlamaya devam etmiş ve kişiliğin görüntüsünü sergilemek için bilgisayar simülasyonu ile de ilgilenmiştir (Kelly,1963).

Kelly, kariyerine öğretmenler tarafından gönderilen problemli öğrencilerle ilgilenen bir okul psikoloğu olarak başladı. Tecrübeleri arttıkça, sadece öğretmenin öğrenci hakkındaki şikayetini doğrulamak yerine, Kelly öğretmenin yorumladığı şekilde şikayeti anlamaya çalıştı. Bu bakış açısının değişimi problemin anlamlı bir şekilde yeniden şekillenmesini sağladı. Başka bir ifadeyle, bu yaklaşım problem görülen çocuğun analizi gibi, şikayeti yapan öğretmenin de analizini sağladı. Problemi geniş bir bakış açısı ile ele alarak Kelly, daha geniş bir çözüm sahası oluşturdu.

George Kelly'nin işinden kazandığı, insanın karakterini çabuk kavrama kabiliyetleri onu şöyle bir bakış açısına yöneltti; objektif, mutlak doğru yoktur ve olaylar yalnızca bireyler tarafından yorumlanan şekillerle bağlantılı olarak anlam kazanır. Kelly'nin temel bakış açısı bireylerin çevrelerini anlama şekline, varolan zihinsel yapılarının (mental structures) terimlerine göre ne algıladıklarını açıklama şekline, bunlar karşısında nasıl davranacaklarına dayanır. Kişisel yapılar, bizim günlük hayatımızın değişik yönlerini kavramsallaştırmak için kullandığımız boyutlardır. Oluşturduğumuz yapılar olayları tahmin etmek ve olaylar meydana gelmeden önce durumları açıklamak için kullanılır. Kelly'e göre, biz içine düştüğümüz olayların akışını kontrol etmeye ve tahmin etmeye çalışan bir bilim adamının rolünü üstleniriz. Kelly'e göre, insan

davranışının asıl açıklaması, “insanın girişimlerini gözden geçirmesinde, sorduğu sorularda, önyak olduğu incelemenin çizgilerinde ve yürüttüğü stratejilerde yatar” (Kelly, 1969). Kelly’nin anlayışına göre, ister istemez eğitim deneyseldir. Asıl amaç bireyin ikna edilmesi ve bireyin potansiyelini en iyi şekilde kullanmasıdır. Kelly, her bireyin soru sormaya ve keşfetmeye ihtiyacı olduğunu vurgulamaktadır. Yapısalcılık teorisinde anlık öğrenme aktivitelerine girişmek için çocuğun doğal motivasyonundan faydalanan bir eğitime ait bakış açısı vardır. Kelly’e göre; öğretmenin görevi, yetişkinlerin bakış açılarını onlara empoze etmekten çok öğrencilerin dünyayı sürekli keşfine kolaylık sağlamaktır. Kelly’nin düşünceleri Rousseau’nun Emile adlı kitabındakilere oldukça benzerdir.

Kelly gemicilik hakkında tecrübesi olan usta bir geometrici idi ve çok boyutlu geometriye bir ilgisi vardı. Kelly, teorisini psikolojik uzayın bir geometrisi olarak sundu (Kelly, 1969). Teorisini şekillendireceği zaman modelini Euclid’in elementleri gibi ele aldı ve maddeleri (elements) ve yapıları (constructs) içeren teorisinin temellerini terimlendirerek KYP’yi 11 sonuç (corollary) ve temel bir postulat ile aksiyomatik hale getirdi. Bireysellik, seçim vb. bir çok sonuçların yanında Kelly’nin temel postulatı şudur: “Bir kişinin fiilleri, psikolojik olarak kişinin olayları tahmin ettiği (umduğu) şekilde kanallize olur” (Bannister ve Mair, 1968).

Metodun Karakteristiği

Kelly, herkesin dünyasını oluşturan olayların değerlendirilmesi yoluyla belirli bir sayıda “yapıya” ulaşılabilirliğini ileri sürmektedir. Olaylara (insanlar, nesneler, düşünceler, hadiseler, kurumlar v.b.) “maddeler” (elements) denir. Bundan başka Kelly; her birimizin yapılarının çift kutuplu olarak düşünülebileceğini ileri sürmüştür. Bunu kutupsal sıfatlar (iyi-kötü) veya kutupsal deyimler (beni mutlu yapar-beni üzgün yapar) şeklinde tanımlayabiliriz. RÇT’nde bu yapılara göre belirli maddeler değerlendirilerek bir repertuar çizelgesi elde edilir. Bu repertuar çizelgesi, Kelly tarafından bilişsel savunma mekanizmaları ile karşılaşmamak ve kişiden ilgili örnekleri (bu örnekler Kelly’nin orijinal uygulamasında kişinin hayatındaki belirli insanlardır) karşılaştırmasını isteyerek kişinin temelindeki yapılanma sistemine girmek için hazırlanan bir araçtır.

Kelly’nin ilk şekillendirmesinden bu yana repertuar çizelge tekniğinin çok sayıda farklı şekilleri geliştirilmiştir. Bu şekiller incelendiğinde hepsinin ortak olarak iki temel

özelliği taşıdığı görülür. Bunlar, yapılar (kişi tarafından kendi dünyasının değişik yönlerini kavramlaştırmada kullanılan boyutlar); ve maddelerdir (kişide oluşan yapıların terimleri şeklinde değerlendirdiği, uyarıcı nesneler (objects)). Kelly'nin "The Role Construct Repertory Grid" olarak adlandırdığı ilk uygulamadan bu yana RÇT, bir çok farklı araştırma alanlarında kullanılmıştır. RÇT'nin "esnekliği ve kolay adapte edilebilmesi onu, araştırmacılar için psikiyatri, danışma ve özellikle son zamanlarda eğitim konularında kullanılan bir araç haline getirmiştir (Aztekin, 2003).

Eğitimde RÇT, derslerin ve öğretmenlik uygulamalarının değerlendirilmesi, konuların ne kadar öğrenildiğinin, kavramsal değişikliklerin belirlenmesi gibi bir çok alanda kullanılmaktadır. (Mazhindu, 1992; Hoogveld, Paas, Jochems, & Van Merrienboer, 2002; Karppinen, 2000; Hopper, 2000; Johannessen et. al., 2002). Aynı zamanda matematik eğitiminde de bu tekniğin kullanımı yaygınlaşmaktadır. Matematik eğitiminde RÇT öğretimle ilgili inanışlar, öğrenme ve motivasyonla ilgili duygusal bilgi yapılarını (McQualter, 1986; Owens, 1987; Haskonen, 1999; Middleton, 1995, 1999; Lee & Yang, 2006) ve matematik konularındaki kavramsal bilgi yapılarını belirlemek için (Lehrer & Koedinger, 1989; Lehrer & Franke, 1992; Williams, 2001) kullanılmaktadır.

2.3.b. Gömülü (Grounded) Teori:

Gömülü teoride, araştırmacı veri toplarken veya yorumlarken verilerin içine gömülü olan teoriyi ortaya çıkartır ve araştırma boyunca yeni kavram ve teorilere ulaşabilir. Bunun için araştırmacı sistematik bir şekilde deneklerden elde ettiği kategorileri kullanarak deneklerin düşüncelerini ve inanışlarını net bir şekilde açıklar (Glaser ve Strauss, 1967).

Glaser ve Strauss, sağlık alanında çalışan uzmanların, yaşamlarının son günlerini yaşayan hastalarla olan etkileşimleri konusunda çeşitli araştırmalar yapmışlar ve elde ettikleri verilerden yola çıkarak bu etkileşimin çeşitli boyutlarını ve sonuçlarını ortaya koymuşlardır. Bu çalışmalarda yeni kavramlara ve çalışanlarla hastalar arasındaki etkileşime ilişkin yeni açıklamalara ulaşılmıştır. Yani veri temelinde açıklayıcı bir teori ortaya konmuştur. Örneğin bu çalışmalarda yaşamlarının son evresinde olan hastaların geçirdiği duygusal evreler sırasıyla "reddetme," "kızgınlık," "kabul" ve "kendisiyle barışma" olarak açıklanmıştır. Bu evreler hastaların çoğunda gözlenmiş ve bu nedenle bu sürece ilişkin bir teori olma niteliği kazanmıştır (Hancock, 2004). Glaser ve Strauss'un (1967) ortaya

attıkları bu kavram, araştırma sorusunun yanıtı olabilecek kavramların ve süreçlerin tekrar etmeye başladığı aşamaya (doyum noktası) kadar veri toplamaya devam edilmesini gerektiren bir örnekleme yaklaşımına işaret eder. Buna göre, görüşülen öğrenci sayısı artabilir veya azalabilir.

Gömülü teori yaklaşımı, anlamlara ve yaşantılara odaklanması açısından olgubilim (fenomoloji) geleneğine yakındır. Ancak olgulara ilişkin teoriler ortaya koyma olgubilim araştırmalarında söz konusu değildir. Gömülü teori yaklaşımında ise var olan kavramlara ve anlayışa özgün bir katkı söz konusudur. Gömülü teoriler yalnızca fenomenler ve sonuçları ile değil aynı zamanda süreçle de ilgilenirler.

Gömülü teori yaklaşımında görüşmeler ve gözlemler en çok kullanılan veri toplama yöntemleridir. Bunların yanında doküman analizi de gerekli görülebilir. Bu yaklaşımın en önemli özelliklerinden biri veri toplama ile analizin birlikte yürütülmesidir. Glaser ve Strauss bu sürece "sürekli karşılaştırmalı analiz" adını vermişlerdir. Bu süreçte, veriler toplandıktan hemen sonra analiz edilir ve ortaya çıkan kavramlar, olgular ve süreçler daha sonraki veri toplama aşamalarına dahil edilir. Böyle bir süreçte veri toplama aracı olarak görüşme ya da gözlem formu veri toplamanın ilk aşamasında yarı yapılandırılmış bir durumdadır ve veri toplama sürecinin sonuna kadar da son halini almaz. Hatta bazı araştırmalarda başta öngörülen görüşme soruları ile veri toplamanın sonuna doğru oluşturulan sorular arasında önemli farklar olabilir (Hancock, 2004). Elde edilen verilerin analizi ve ortaya çıkan kavramların ve olguların doğası veri toplama aracının esnek bir yapıya sahip olmasını ve sürekli bir değişime açık olmasını gerektirir.

Gömülü teori yaklaşımı ile yapılan araştırmalarda, toplanan görüşme ve gözlem verilerinden elde edilen kavramlar ve temalar ile teorinin ilk işaretleri ortaya çıkar. Araştırmacı bu kavramlara ve temalara ilişkin gözlemlerini ve düşüncelerini topladığı ek verilerle sürekli olarak test eder (Hancock, 2004). Bu süreçte araştırmacı kavramlar, temalar ve bunların ilişkilerine yönelik denenceler (olay ve olgulara ilişkin geçici açıklamalar) geliştirir ve bu denencelerin açıklanmasına (teyit etme ya da reddetme) yardımcı olacak verilere ulaşmaya çalışır. Bu süreç yukarıda sözü edilen "sürekli karşılaştırmalı analiz" kavramına bir örnek oluşturur. Sonuçta ulaşılan kavramlar ve temalar araştırmanın odağına ilişkin anlamlı bir açıklama ortaya koyar. Bu açıklama veriler temelinde ortaya çıkan teoridir. (Yıldırım, 2004)

Metodun Karakteristiği:

Teori oluşturmadaki ilk adım kavramsallaştırmadır. Bir kavram, etiketlenmiş bir fenomendir. Bu, bir araştırmacının veride önemli olarak belirlediği, bir olayın, nesnenin veya etkileşimin soyut bir temsilidir (representation). Fenomeni adlandırmanın altında yatan amaç; araştırmacılara benzer durumları, olayları ve nesneleri, ortak bir başlık veya sınıflandırma altında gruplama imkanı vermektir. Olaylar ve meydana gelenler ayrı elemanlar olsa da; onların ortak özellikler paylaştığı veya anlamca ilişkili oldukları gerçeği, onların gruplandırılmasına imkan sağlar.

Bir araştırma projesinin başlangıcında kategorileri (bunların özellikleri ve boyutlarını) keşfetmek ve kavramlar arasındaki ilişkileri ortaya çıkarmak için mikro analiz yapılabilir. Mikro analize bazen “tek tek” analiz olarak başvurulsa da, aynı süreç bir kelimeye, bir cümleye ya da bir paragrafa da uygulanabilir. Kavramlar belirli bir merkez etrafında kategoriler oluşturur. Daha sonra iki zıt kavram bir kategorinin boyutunu ifade eder ve özellikler bu iki zıt kavramı birbirinden ayırt eder (Strauss ve Corbin, 1990). Buna göre önce kavramlar ve fenomenlerin dayandığı daha genel merkezi kavramlar olan kategoriler belirlenir, daha sonra ise kategorilerin boyutları ve özellikleri üzerinde durulur. Boyutlar ve kategoriler arasındaki ilişkiler teorinin açıklayıcı özelliğini artırır.

Gömülü teori yaklaşımının ana düşüncesi, dökümü elde edilen verileri tekrar tekrar okuyarak değişkenleri (kategoriler, kavramlar ve özellikler) ve aralarındaki ilişkileri keşfetmek yada etiketlemektir. Bu verilerin yazılı olması şart değildir. Değişkenler ve aralarındaki ilişkileri algılama kabiliyeti teorik hassaslık (theoretical sensitivity) ile ifade edilir. Bu metodolojide, veri toplama ve analiz işlemleri değişen diziler halinde arka arkaya devam eder.

Araştırmacı mikro analiz veya benzer yöntemlerle elde ettiği verileri işleyerek kodlamalar yapar. Bu kavramsallaştırma ve kavramlar arasındaki ilişkilerin belirlenmesi süreci yoğun bir bilgi akışı sağlayacaktır. Araştırmacı, bu yoğun bilgi akışını kontrol etmek ve araştırmasını sistematik bir şekilde yürütebilmek için analizlerini, düşüncelerini, yorumlarını, sorularını ve ilerideki veri toplamalarına yönelik talimatlarını bir takım notlarda (memos) tutar. Bu notlar daha çok analistin teorik örnekleme ve meselelerdeki düşüncelerini ve fikirlerini içeren, bilgilendirici ve özetleyici olan teorik notlar olabileceği gibi, prosedürel yönergeler ve hatırlatıcılardan oluşan işlemsel notlar olabilir (Strauss ve Corbin, 1998).

Notlar genel olarak üç farklı kodlamanın sonucunda ortaya çıkar ve kodlama çeşidine göre adlandırılır.

Açık Kodlama: Açık kodlama, bir yapboz üzerinde çalışmak gibidir. Analist, organize olmak ve parçaları renklerine göre düzenlemek (bu genellikle gölgelemelerdeki küçük farklılıkları belirtme şeklinde olur) ve ayrı ayrı parçaları tekrar bir araya getirerek bir resim oluşturmak zorundadır. Alan notlarının (field notes) ilk sayfaları genellikle biraz anlaşılmazdır. Nereden başlanacağını, neyin aranacağını ve gördüğünde nasıl fark edeceğini bilmek zordur. Birbirinden farksız bir bilgi yığını olarak görülebilir. Analizin değişken yapısı, önceden yazılmış notlarla ortaya çıkar. Analist, diğerlerinin ne düşündüğüne veya analizin doğru olup olmadığına bakmaksızın ilk düşünce ve fikirlerini yazar. İlk yazılmış notlar, izlenimler, düşünceler ve yönergelerden oluşur. Açık kodlamada, araştırmacı kategoriler ve onların özelliklerini oluşturmakla uğraşır. Boyutlarına göre kategorilerin nasıl değiştiğini belirlemeye çalışır (Strauss ve Corbin, 1998).

Eksensel Kodlama: Eksensel kodlamada, kategoriler sistematik olarak geliştirilir ve alt kategorilere bağlanır. Bunun için genellikle nedensel ilişkilere, içeriğe başka bir deyişle olayı ya da olayın şeklini etkileyen durumlar kümesine, boyutlara, özelliklere, sonuçlara bakılır. Eksensel kodlama sırasında analist, veri yapbozunun parçalarını bir araya getirmeye başlar. Her bir parçanın (örneğin, kategori, alt kategorinin) bütünü açıklayıcı bir planda bir yeri vardır. Bir yapbozu oluştururken analist, bir parçayı alıp, “Oraya mı yerleşmeli, buraya mı?” diye sorabilir. Analistin ilk teşebbüsleri deneme yanılmadır. Daha sonra analist teorik olarak daha duyarlı hale geldikçe, kavramsal belirleyicileri ve kategoriyi birbirine uydurmak kolaylaşır. Eksensel kodlamanın amacı, kategoriler arasında bağlantı kurmak ve kategorileri özellikleri ve boyutları açısından geliştirmeye devam etmek olduğu için, eksensel kodlama sırasında yazılan kısa notlar, bu amacı yansıtmalıdır. Bunlar, ne, ne zaman, nerede, kiminle, nasıl, ne sonuçlarla sorularının cevaplarını sunarlar (Strauss ve Corbin, 1998).

Seçici Kodlama: Yapılan araştırmada esas amaç bütün kategorilerin belirli merkez kategoriler etrafında örgülendiği bir açıklama yazmak veya bir diyagram oluşturmaktır. Bunun gibi merkez kavramların olacağı kabul edilir. Seçici kodlamada kategoriler

bütünleştirilerek daha büyük ve genel bir şema oluşturulur. Buna göre, seçici kodlama analizdeki son aşamayı temsil eder. Kavramlar temel bir kategori çevresinde bütünleşir ve daha fazla gelişim ve düzeltme ihtiyacı içinde olan kategoriler doldurulur. Bu aşamadaki, kısa notlar [memos] ve şemalar [diagrams] geliştirilen teori düşüncesinin derinliğini ve karmaşıklığını yansıtır.

Strauss and Corbin (1990), kodlama prosedürlerinin amaçlarını şöyle özetlemiştir;

1. Bir teoriyi test etmekten çok, bir teori inşa etmek.
2. Araştırmacılara ham veri kütlelerini ele alacak analitik araçlar sunmak.
3. Analistlere fenomenin alternatif anlamlarını düşündürmeye yardımcı olmak.
4. Sistematiik ve her safhayı değerlendirebilecek bir şekilde üretken olmak.
5. Teorinin inşa blokları olan kavramları tanımlamak, geliştirmek ve ilişkilendirebilmek.

Teori geliştirmek karmaşık bir olaydır. “Teorileştirme” terimi bu etkinliğin ifade edilmesi için kullanılmaktadır. Gömülü teori yaklaşımı ile elde edilen ilişkiler bütününe her zaman için kesinlikle bir teoridir demek elbette zordur. Çünkü bir teorinin oluşumu uzun bir süreç ister. Fakat bu şekilde yapılan çalışmalar sonucunda elde edilenleri sadece ikna edici sezgiler ve düşüncelerden öte mantıksal, sistematiik ve açıklayıcı bir şema oluşturduğunu göz ardı etmemek gerekir. Böyle bir çalışmada yapılan teori inceltme (refinement) işlemi ne kadar eksiksiz yerine getirilirse bir teorinin formüle edilmesi o kadar iyi olur.

BÖLÜM 3

DOKTORA ÖĞRENCİLERİ İLE YAPILAN ÇALIŞMA

Bu çalışmada öğrencilerin konu ile ilgili bilişsel seviyelerini, yapılarını (constructs) ve çelişen düşüncelerini ortaya çıkarmak için kullanılan repertuar çizelge tekniği matematikteki sonsuzluk konusunda uygulanmıştır. Uygulama için ise bir metropol üniversitesinin matematik eğitimi anabilim dalı doktora öğrencilerinden 4'ü ile biri ders döneminin başında ve diğeri dersin final sınavından sonra olmak üzere iki görüşme yapılmış ve yapılan dersler süresince öğrenciler izlenerek öğrencilerin derslerdeki ifadeleri ve konuşmaları kayıt altına alınmıştır.

İlk ve son görüşmelerde öğrencilerin repertuar çizelgeleri çıkarılmıştır. Derslerde ise Cantor'un küme teorisi ile yeni tanışan öğrencilerin sonsuzluk konusu ile ilgili düşünceleri ve bu düşüncelerin değişimi izlenmeye çalışılmıştır. Repertuar çizelge tekniği kullanılarak öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili yapıları ve kavram imajları elde edilmeye çalışılmış ve Cantor'un küme teorisini içeren bir kursun öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili kavram imajlarını nasıl etkilediğine, öğrencilerin kavram imajlarındaki değişimin gerçekleşip gerçekleşmediğine bakılmıştır.

3.1. Veri Toplama Araçları

1.Repertuar Çizelgeleri: Repertuar çizelge tekniğinin prosedürlerine göre ilk önce sonsuzluk ile ilgili önermelerden oluşan bir maddeler listesi hazırlanmış ve bu maddelerin görüşme sonunda elde edilen yapılara göre derecelendirilmesi ile oluşan repertuar çizelgeleri çıkarılmıştır. Bu çizelgeler, öğrencilere ait yapıların ilişkilerini gösteren şemaların oluşturulmasında kullanılmıştır.

2.Yarı Yapılandırılmış Mülakatlar: Repertuar çizelge tekniğinde katılımcıya ait yapılar, daha önceden hazırlanan maddelerin değerlendirildiği bir görüşme yapılarak elde edilmektedir. Katılımcıların konu ile ilgili algılarını derinlemesine belirlemek amacıyla yapılan bu görüşmeler teyp ile kaydedilerek yazıya dökülmüştür. Buradaki amaç nitel araştırmalarda kullanılan fenomoloji yöntemi ile öğrencilere ait fenomenleri belirleyerek repertuar çizelgelerinin analizi sonucunda elde edilen bulguları destekleyici sonuçlara ulaşmaktır.

3. Konu Alan Bilgisi Testi : Öğrencilerin Alan yeterliliklerini belirlemek amacıyla; klasik sınavlar ve quizler yapılmıştır.

4. Dersteki gözlemler: Bir dönem boyunca yapılan bütün küme teorisi dersleri kayıt altına alınarak, önemli tartışmalar not edilmiştir. Öğrencilerin bu derslerdeki tartışmaları ve söylemleri ayrı bir veri grubunu oluşturmaktadır.

3.2. Derslerin İşlenişi:

Küme teorisi dersi 15 haftaya yayılmış 30 dersten oluşmaktadır ve bu derslerde sonlu ve sonsuz kümeler, sayılabilir ve sayılamaz kümeler, kardinalite, ordinalite, Zorn Lemma vb. kümeler teorisi ile ilgili konular işlenmiştir. Dersler boyunca öğrencilerin sezgileri ve kavram imajları ile etkileşime geçmek ve başlangıç düşüncelerini değiştirmek için özel bir gayret sarf edilmiştir. Ayrıca her hafta öğrencilerin sonsuzluk kavramı ile ilgili düşünceleri tartışılmaya çalışılmış ve bu şekilde öğrencilerin anlayışlarındaki değişimler devamlı takip edilmeye çalışılmıştır. Dersler boyunca konular işlenirken öğrencilerle bir takım çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalar; öğrencilerin konularla ilgili yeterliliklerini ölçen quizlerden, öğretim elemanı ve öğrenciler tarafından seslendirilen sonsuzlukla ilgili farklı görüşlerin tartışılmasından, 1-1 eşleme veya kardinalite gibi farklı kavramların resimlerinin çizilmesi gibi etkinliklerden oluşmaktaydı. Buradaki amaç öğrencileri farklı sonsuzluk anlayışları ile karşılaştırmak ve zihinlerinde bir çelişki durumu oluşturmaktır. Repertuar çizelgelerini oluşturmak için yapılan görüşmelerin yanında bütün dersler de kayıt altına alınmıştır.

3.3. Maddelerin Elde Edilmesi:

Küme teorisi dersinin verildiği dönemin başında ve sonunda yapılan görüşmelerde elde edilen repertuar çizelgelerinin oluşturulmasında yazılı önermelerden oluşan bir maddeler listesi kullanılmıştır. Bu maddeler matematikteki sonsuzluk konusu ile ilgili 12 önermeden oluşmaktadır. Bu maddeler, matematikteki sonsuzluk konusu ile ilgili yapılan çalışmalardan, öğrencilerle yapılan derslerden ve pilot çalışmalardan elde edilen önermelerin araştırmacı tarafından değerlendirilmesi ile oluşmuştur. Bu önermelerin aşağıdaki anlayışları içermesine özen gösterilmiştir.

- i) Potansiyel Sonsuzluk
- ii) Aktüel Sonsuzluk

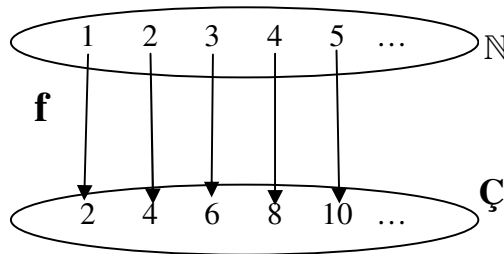
- iii) Standart olmayan analizdeki sonsuzluk
- iv) Sonsuzu ölçme (Measuring infinity)

Uzman görüşleri alınarak maddelerde bazı çıkartma ya da eklemeler yapıldı. Bunun için araştırmacı danışmanı dışında, değişik üniversitelerde küme teorisi dersini veren iki öğretim elemanı ile görüşerek maddeler ile ilgili onların da görüşlerini almıştır. Daha sonra mezun olan ve yüksek lisans yapan öğrenciler ile yapılan pilot çalışmalar ile maddeler bir daha gözden geçirilmiştir. Buradaki amaç öğrencilerin, matematikteki sonsuzluk konusu ile ilgili literatürde var olan bütün anlayışlarla karşılaştırıldığından emin olmaktır. Önergeler, öğrencilerin konu ile ilgili yapılarının çıkarılmasını sağlamak için mümkün olduğu kadar yakın ve düşünce açısından birbirine zıt olarak yapılmaya çalışılmıştır.

Uzmanlar maddeleri, maddelerde anlam olarak aktüel bir sonsuzluk anlayışı olduğuna (A) veya olmadığına (-A), potansiyel sonsuzluk anlayışı olduğuna (P) veya olmadığına (-P) , Tall'un sonsuzluğu ölçme anlayışı olduğuna (M) veya olmadığına (-M), non-standart analize uygun bir anlayış olduğuna (N) veya olmadığına (-N) göre değerlendirmişlerdir. Değerlendirme sonunda üç uzmanın görüşünün benzer olduğu görülmüştür. Maddelerin son hali aşağıdaki gibidir.

MADDELER LİSTESİ

Madde 1 (-A, P) : Bir kümenin eleman sayısı (kardinalitesi) , her hangi bir öz alt kümesinin eleman sayısından (kardinalitesinden) daha büyük olduğundan dolayı, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin eleman sayısı (kardinalitesi), $\mathbb{C}$ çift doğal sayılar kümesinin eleman sayısından (kardinalitesinden) daha büyüktür.



Fakat, doğal sayılar kümesi, çift sayılar kümesi ile yukarıdaki gibi $f(x) = 2x$ fonksiyonu ile birebir eşlenebildiğinden dolayı, $\mathbb{N}$ kümesinin eleman sayısının, öz alt kümesi olan $\mathbb{C}$ kümesinin eleman sayısına eşit olduğu düşünülebilir. Buna göre, $S(\mathbb{C}) = S(\mathbb{N})$ dir ve kümelerin eleman sayıları sonsuzdur.

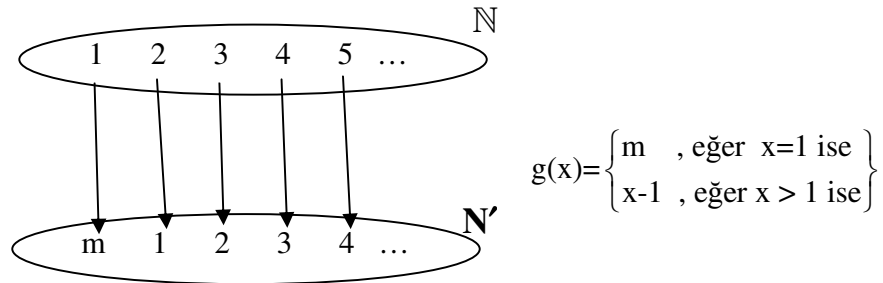
Buradaki çelişki, sonsuzun bir sayı olarak düşünülmesinden kaynaklanmaktadır. Halbuki sonsuz ifadesi, bir sayı değil kümelerin elemanlarının hiç bitmediğini gösteren bir kavramdır. ∞ sembolünü limit gibi konularda ifade edemeyeceğimiz sayısal büyüklükler yerine kullanırız, gerçekte sonsuz diye bir sayı yoktur.

Madde 2 (P, M): $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n^2 + 1} \right) = 1$ dir. Çünkü n sonsuza giderken $\left(\frac{n^2}{n^2 + 1} \right) \rightarrow \frac{\infty}{\infty} = 1$ dir. Aynı

şekilde $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^5}{(1,1)^n} \right)$ için de benzer bir sonuç bulunabilir. Buradaki tek fark paydanın daha

hızlı büyüyüp daha çabuk sonsuza doğru gitmesidir. $n \rightarrow \infty$ ifadesi n nin sürekli büyüdüğünü, $n \rightarrow -\infty$ ifadesi ise n nin sürekli küçüldüğünü belirtir. Sonsuz, hiç bitmeyen bir büyüklüğün boyutlarını ifade etmek için kullanılır, fakat herhangi bir sonsuz sayıdan veya farklı sonsuzlardan bahsedilemez.

Madde 3 (A): Doğal sayılar kümesine, bu kümede olmayan bir m elemanının katılmasıyla oluşan $\mathbf{N}' = \{m, 1, 2, 3, \dots\}$ kümesinin elemanları, yine doğal sayılar ile aşağıdaki gibi tanımlanan g fonksiyonu ile 1-1 eşlenebilir. Bundan dolayı, oluşan $\mathbf{N}'$ kümesinin eleman sayısı, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin eleman sayısı ile aynıdır.



Bu kümelerin eleman sayıları toplanırsa $S(\mathbb{N}) = S(\mathbf{N}') = S(\mathbb{N}) + 1 = 1 + S(\mathbb{N})$ sonucu elde edilir. Sonsuz sayıda elemana sahip doğal sayılar kümesinin eleman sayısı α ile gösterilirse $\alpha = \alpha + 1 = 1 + \alpha$ olur. Sonsuz sayıları, ilk ve orta öğretimde kullanılan sonlu sayılar gibi düşünmemek gerekir. Bu eşitliğin bize garip gelmesi sonlu sayılara ait yargılarımızdan kaynaklanmaktadır.

Madde 4 (P): Bir doğrudaki noktaların sayısı sonsuzdur. Aynı şekilde doğal sayılar kümesinin de sonsuz sayıda elemanı vardır. Farklı sonsuz sayılardan bahsedilemeyeceğine göre, bir doğrudaki noktaların sayısı ile doğal sayılar kümesinin eleman sayısı aynıdır. Bunu bir doğrudaki bütün noktaları, doğal sayılar ile 1-1 eşleyerek de gösterebiliriz.

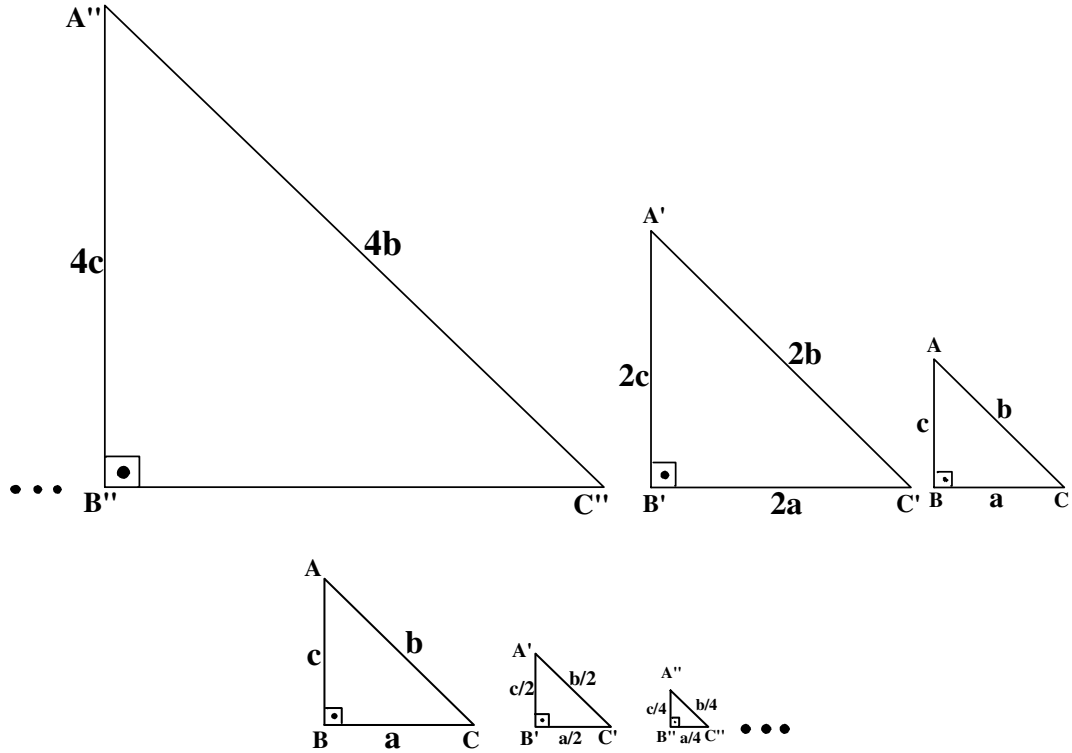
Madde 5 (A): $(0, 1)$ aralığında sonsuz sayıda reel sayı ve sonsuz sayıda rasyonel sayı vardır.

$A = \{x \mid x \in (0, 1) \text{ ve } x \in \mathbb{Q}\}$ ve $B = (0, 1)$ olmak üzere $A \subset B$ dir. Buna göre, $(0, 1)$ aralığındaki reel sayıların sayısını gösteren sonsuz sayı, $(0, 1)$ aralığındaki rasyonel sayıların sayısını gösteren sonsuz sayıdan daha büyüktür. Farklı sonlu sayılar olduğu gibi, farklı sonsuz sayılar da vardır. Fakat sonsuz sayıları, sonlu sayılar gibi düşünmemek gerekir. Sonlu sayılar için geçerli olan işlemler, aynı şekilde sonsuz sayılar için geçerli değildir.

Madde 6 (P): $[0, 1] \subset [0, 2]$ olduğundan dolayı, $A = [0, 2]$ ve $B = [0, 1]$ olmak üzere,

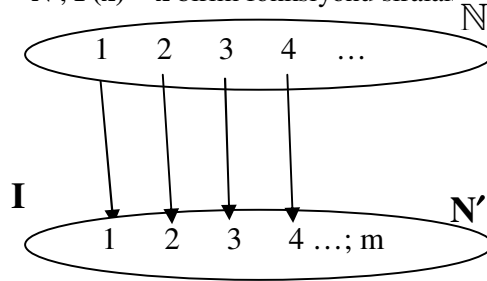
$S(A) > S(B)$ dir. Aynı şey farklı uzunluktaki doğru parçalarında bulunan noktaların sayıları için de geçerlidir. Uzunluğu 4 cm olan bir doğru parçasındaki nokta sayısı, uzunluğu 3 cm olan bir doğru parçasındaki nokta sayısından daha büyüktür.

Madde 7 (N, M):



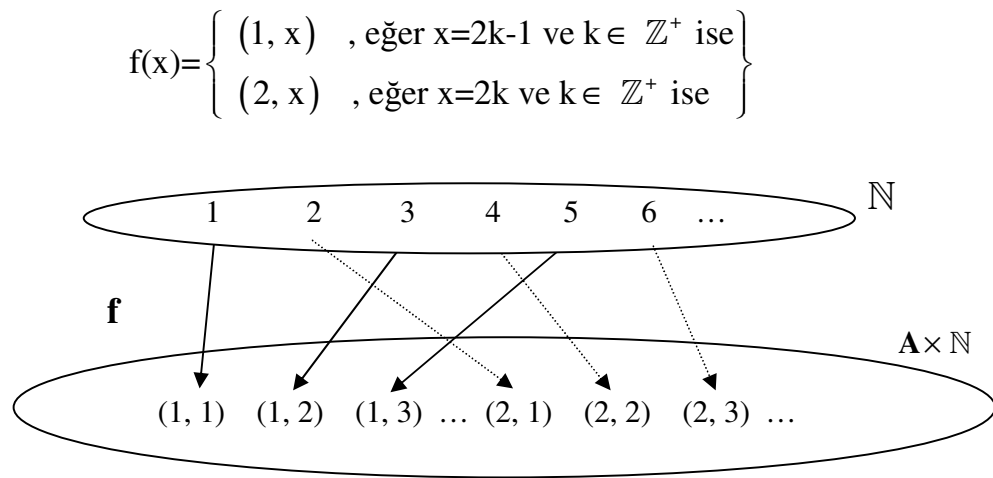
Bir $\triangle ABC$ dik üçgeninin dik kenar uzunluklarının, yukarıdaki gibi sürekli yarıları alınarak ya da sürekli iki katı alınarak yeni dik üçgenlerin oluşturulduğunu düşünelim. Bu süreç her iki şekilde de sonsuza kadar devam ederse sonuçta alanı sonsuz ve alanı sonsuz küçük olan iki üçgen elde ederiz. Bu iki üçgenin alanı hiçbir zaman sıfır veya çok büyük bir sayı olamaz. Bu tip büyüklükler, reel sayıların bir genişlemesi ile elde edilen sonsuz ve sonsuz küçük sayılar ile ifade edilir.

Madde 8 (Ord. A): Doğal sayılar kümesine, bu kümede olmayan bir m elemanının katılmasıyla oluşan, farklı bir sıralamaya sahip $N' = \{1, 2, 3, \dots; m\}$ kümesini düşünelim. Aşağıda gösterilen $I: N \rightarrow N', I(x) = x$ birim fonksiyonu sıralamayı koruyan 1-1 ve içine bir eşlemedir.



Bu kümeler denk sonsuz kümeler olmasına rağmen, birbirinden farklıdır. Bu iki küme arasında sırayı koruyan, $x < y \rightarrow f(x) < f(y)$ şeklindeki herhangi bir f fonksiyonu hem 1-1 hem de örten olamaz. Sonsuz kümeye bir eleman eklendiğinde (katıldığında), eleman sayısı (kardinalite) aynı kalmasına rağmen; sıra koruyan fonksiyonlar, kümelere farklı bir anlam vermektedir. Böylece farklı sıralamalara göre oluşan aynı eleman sayısına (kardinaliteye) sahip farklı sonsuz kümelerden ve bu kümeleri temsil eden farklı sonsuz sayılardan bahsetmek mümkündür.

Madde 9 (Card. A): $A = \{1, 2\}$ ve $B = \{a, b, c\}$ olmak üzere, $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$ ve $S(A \times B) = S(A) \cdot S(B)$ dir. Aynı şekilde $A = \{1, 2\}$ ve $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ olmak üzere, $A \times N = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots; (2, 1), (2, 2), (2, 3), \dots\}$ dir. Aşağıdaki şekilde tanımlanan f fonksiyonu ile yapılan 1-1 eşleme dikkate alınır, $(A \times N)$ nin eleman sayısının, N nin eleman sayısı ile aynı olduğu görülebilir.



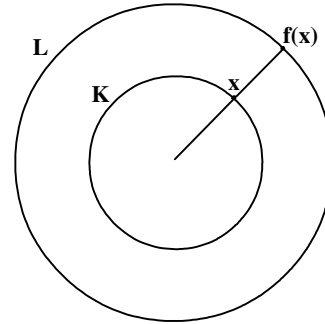
Böylece $S(A \times N) = S(A) \cdot S(N)$ olduğundan dolayı, $\aleph = 2 \cdot \aleph$ dır.

Madde 10 (-N, P): Bütün pozitif reel sayılarından küçük bir α sayısına, sonsuz küçük denir. Fakat sayı doğrusunda böyle sonsuz küçük bir sayıdan bahsetmek mümkün değildir. Bir $\alpha > 0$ sayısı sonsuz küçük olduğunda, $(\alpha/2) > 0$ sayısı, α 'dan daha küçük bir sayı olacaktır ve α 'ya sonsuz küçük denemeyecektir. Sonuç olarak sonsuz küçük veya sonsuz, sadece çok küçük ve çok büyük sayıları ifade eden kavramlardır. Bu tip sayılardan bahsedemeyiz.

Madde 11 (A): $K = \{ (x,y) \mid x^2 + y^2 = 1 \}$, $L = \{ (x,y) \mid x^2 + y^2 = 4 \}$ çemberlerinden birinin yarıçapı diğerinkine göre daha küçük olsa da, bu çemberleri oluşturan noktaların sayıları eşittir. Aşağıdaki gibi, küçük çemberdeki her bir nokta için büyük çemberde bir nokta bulabilirsiniz. Çemberler üzerindeki noktalar kutupsal koordinatlarda yazıldığında, K çemberi üzerindeki her bir $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ noktasına, L çemberi üzerinde bulunan farklı bir $(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$ noktasının karşılık geldiği görülebilir.

$f: K \rightarrow L$,

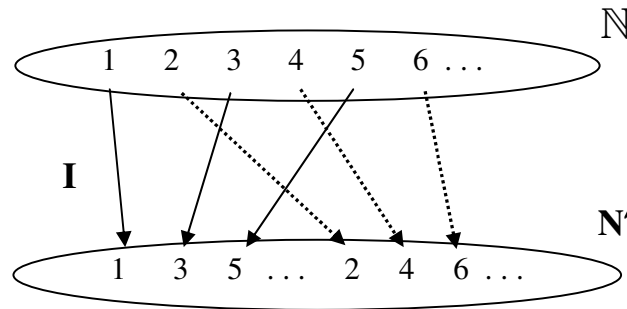
$$f(x, y) = \{(2\cos\alpha, 2\sin\alpha) \mid x = \cos\alpha, y = \sin\alpha, 0 < \alpha < 2\pi\}$$



Bu şekilde noktaları birebir eşlediğinizde her iki çemberde bulunan nokta sayılarının eşit olduğunu görebilirsiniz. Başka bir ifadeyle K çemberi üzerindeki noktaları içeren A kümesinin kardinalitesi (eleman sayısı) ile L çemberi üzerindeki noktaları içeren B kümesinin kardinalitesi (eleman sayısı) ile aynıdır.

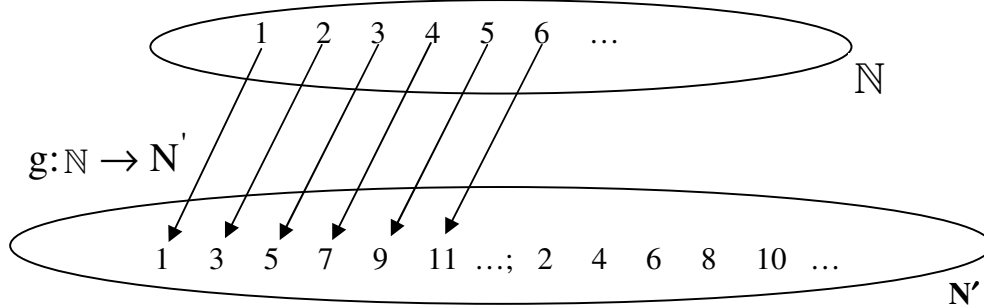
Madde 12(Card. A, Ord. A): $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ sonsuz kümesi ile farklı bir sıralaması olan

$\mathbb{N}' = \{1, 3, 5, \dots; 2, 4, 6, \dots\}$ kümesi, $I(x) = x$ birim fonksiyonu ile aşağıdaki gibi birebir eşlenebilir.



Buna göre, her iki kümenin de eleman sayısı sonsuzdur ve birbirine eşittir. Fakat

$g(x) = 2x - 1$ şeklinde tanımlanan 1-1 ve içine fonksiyon ile aşağıdaki gibi sıralamayı koruyan bir eşleme de yapılabilir.



Böyle bir durumda $\mathbb{N}$ sonsuz bir küme olmasına rağmen $S(\mathbb{N}') > S(\mathbb{N})$ olur. Çünkü 2'ye kadar olan elemanlar $\mathbb{N}$ ile birebir eşleme için yeterlidir. Verilen örneklerde f fonksiyonu sıralamayı korumaz iken, g fonksiyonu $x < y \Leftrightarrow g(x) < g(y)$ şeklinde sıralamayı korumaktadır. Sonuç olarak, sıralamanın korunup korunmamasına göre, sonsuz kümelerle ilgili çok farklı sonuçlar ile karşılaşabiliriz.

Farkedileceği üzere; Madde 1, sonsuzluk ile ilgili Galileo paradoksunun (Rucker, 2004) araştırmacı tarafından RÇT'ne uyarlanması ile oluşmuştur. Madde 2, Tall'un sonsuzluğu ölçme anlayışını ortaya atarken karşılaştığı bulgulara dayanmaktadır. Madde 3, 5, 8, 9, 11, 12 küme teorisi derslerinde geçen teorem ve ispatlara dayanmaktadır. Madde 10, Riemann hipotezinin araştırmacı tarafından metoda uyarlanması ile oluşmuştur (Tirosh, 2001). Kalan 3 madde ise öğrencilerin derslerdeki söylemlerinden, internette görülen öğrencilere ait iddialardan ve araştırmacının kendi çalışmalarından elde edilmiştir.

Alban-Metcalf (1997:317) RÇT'de maddelerin seçimini belirleyen iki prensip olduğunu öne sürüyor. İlkinde; maddeler, araştırılan yapı sisteminin sadece araştırılan kısmı ile ilgili olmalıdır, ikincisinde ise seçilen maddeler, bir konuyu temsil etmelidir, yani daha geneldir. Maddelerin sayısı (genelde 10 ile 25 arasında) veya elde edilen yapıların sayısı ne kadar büyük olursa, maddelerin üzerinde durulan konuyu temsil şansı o kadar büyük olmaktadır. Bu çalışmada öğrencilerin doktora öğrencisi olduğu göz önüne alınarak genelde kullanılanlara göre uzun olan 12 madde seçilmiştir.

3.4.Yapıların Elde Edilmesi:

Bir yapıyı belirlemenin yaygın bir metodu, denekleri ilgi listesinden seçilen 3 madde ile karşı karşıya getirmek ve maddelerden ikisinin nasıl benzer olduğunu ve buna göre üçüncüden nasıl farklı olduğunu göstermelerini istemektir. Başka bir şekilde, deneklerden sadece 2 maddeyi kıyaslaması ve karşılaştırması da istenebilir. Her iki durumda da sonuç karşılaştırılan maddelerden biri ile gösterilen 2 kutuplu bir yapıdır. Mümkün mertebe bu yapı denek tarafından isimlendirilir ve tarif edilir. Maddelerden çıkan diğer yapılar da bu şekilde belirlenir.

Çalışmada yapıları belirlemek için yukarıda elde edilen maddeler kullanılmıştır. Yapılar, “mülâkat” yöntemi ile maddeler ikili (dyad) şekilde karşılaştırılarak ortaya çıkarılmıştır. Yapı sayısı öğrenciye göre değişmiştir. Yapıların elde edilmesinde aşağıda açıklanan prosedür takip edilmiştir:

Bir öğrenciye 2 madde verilmiş ve öğrenciden, 2 maddenin benzer veya farklı olup olmadığını, neden veya nasıl böyle olduğunu açıklaması istenmiştir. Öğrenci sözlü açıklamalarla bu soruları yanıtlamıştır ve bu açıklamalar kaydedilmiştir. İhtiyaç hissedildiği sürece, örneğin özellikle 2 yapının sözlü açıklamaları aynı gibi gözüktüğü zaman açıklama istenmiştir. Araştırmacı öğrencinin kelimelerinden bir kaçını ortaya çıkan yapı için etiket olarak kullanmak üzere seçmiştir. Öğrenciye göre bir kelime de zıt olan yapıya etiket olarak kullanılmıştır. Bu prosedür ikinci bir çift madde için de tekrarlanarak, araştırmacı ve öğrencinin her ikisi de farklı bir yapı çıkartamayacaklarında hem fikir olasıya kadar görüşmeye devam edilmiştir.

Madde çiftleri bütün öğrencilere aynı sırada sunulmuştur. Sıra (1-7), (2-5), (3- 8), (6-11), (7-10), (4-11), (9-12), (4-5) şeklinde seçildi, çünkü görülebileceği gibi sonsuzluk ile ilgili farklı anlayışları karşı karşıya getirmektedirler. Araştırmacı aynı çiftler listesini her bir katılımcı için kullanmıştır, fakat kullandığı çift sayısı çıkan yapı sayısına göre değişmiştir. Maddelerdeki yanlış anlaşılabilir noktaların deneklere açıklanması haricinde, öğrenciyi yönlendirmemek için ve yapıların onunla beraber ortaya çıkarıldığından emin olmak için her yola başvurulmuştur. Öğrenciler daha önce küme teorisi gibi bir ders almadığından dolayı; öğrencilere, kümelerin kartezyen çarpımının çarpma işlemi olarak kullanılması ve denklik bağıntısı gibi noktalar bir yanlış anlamaya meydan vermemek için kısaca açıklanmıştır. Öğrencilerin bu madde çiftlerini değerlendirmesi ve yapıların elde edilmesi ilk görüşmede 40 dakika kadar, son görüşmede 30 dakika kadar sürmüştür.

3.5. Çizelgelerin Elde Edilmesi:

Repertuar Çizelgesi, kısaca kişinin kişisel “yapıları” ile özel “maddeler” arasındaki ilişkileri tasvir eden bir tablodur. Tablo, enine ve boyuna yerleştirilen yapı ve madde isimlerinden ve kişinin, maddeleri yapılara göre değerlendirmesi sonucunda tabloya yerleştirdiği işaretler veya sayılardan oluşur. Günümüzde derecelendirme çizelgesine (A Rating Grid) gittikçe artan bir ilgi vardır. Burada, yapıların sınırları içinde yapılara göre maddeleri sıralamak yerine, her bir madde sınırları iki yapı kutbunca tanımlanan bir ölçek ile derecelendirilir. Buna göre bu metot kişiye, sıralama çizelgesinin sağladığından daha geniş bir cevap verme esnekliği sağlamaktadır. Bundan dolayı daha kullanışlıdır. Araştırmacı da çalışmasının uygulama bölümünde derecelendirme çizelgelerini kullanmayı tercih etmiştir.

Bütün yapılar ortaya çıktıktan sonra, araştırmacı tarafından belirlenen 2-3 yapı daha çizelgeye eklenmiş (Örneğin maddenin doğru olup olmadığı ve öğrencinin maddeyi tercih edip etmediği, beğenip beğenmediği vb.) ve öğrencilerden maddelerin hepsini yapılara göre derecelendirilmesi istenmiştir. Bütün maddeler öğrenci tarafından 5 puanlı bir ölçü ile derecelendirilmiştir. Örneğin; oluşan bir yapının kutbu için 5, öğrenciye göre madde yapının bu kutbunu tam yansıtıyor; 4, öğrenciye göre madde yapıyı iyi derecede yansıtıyor; 3, öğrenci maddenin bu yapıyı yansıtıp yansıtmadığı konusunda kararsız; 2, öğrenciye göre madde yapıyı çok az yansıtıyor veya yapının karşıt kutbunu iyi derecede yansıtıyor; 1, öğrenciye göre madde yapıyı hiç yansıtmıyor veya yapının karşıt kutbunu tam yansıtıyor anlamındadır. Bu şekilde, her bir maddenin oluşan yapıların terimleri şeklinde derecelendirilmesine devam edilmiştir. Bu işlem genelde her öğrenci için 20-25 dakika kadar sürmüştür. Bu prosedürün sonucunda her bir satırda bir yapının gösterildiği ve 12 sütunluk bölümü (her bir madde için 1 tane) 5 puanlık bir ölçüye göre derecelendirilmiş bir matris oluştu. Bir madde için 5 ölçüsü yapının oluşan kutbunun (sol tarafta) o maddeye kuvvetli bir şekilde uygulandığını gösteriyor. 1 ölçüsü ise karşı kutbun kuvvetli bir şekilde uygulandığını gösteriyor.

3.6. Çizelgelerin Analizi:

Her bir yapı çifti arasındaki ilişkinin kuvvetini belirlemek için yapılar arasındaki derecelendirme farklarından yararlanılmıştır. Bu metotta iki yapıyı ifade eden iki sıra karşılaştırılırken her bir madde için sıraların derecelerinin farkları bulunur ve bu farklar toplanır. Bu şekilde iki sıra arasındaki toplam farkı belirten bir ilişki sayısı bulunur. Bu

sayı, düşük olduğunda yakın ilişkiyi, çok büyük olduğunda negatif ilişkiyi gösterir. Bu toplam fark sayısının ölçüsü ve değerlendirilmesi çizelgedeki maddelerin ve yapıların sayısına göre değişir (Bannister ve Mair, 1968).

Aşağıdaki tabloda, bu çalışmadaki gibi 12 önermeden oluşan bir maddeler listesine göre elde edilen herhangi iki yapı arasındaki ilişkiyi gösteren fark değerinin bulunuşu verilmiştir. En üstteki 1’den 12’ye kadar olan sayılardan oluşan satır çalışmada kullanılan maddeleri göstermektedir, alttaki satırlar ise bu maddelerin her bir yapıya göre 1’den 5’e kadar derecelendirilmesi ile oluşmuştur. Görüldüğü gibi bir çizelgede toplam fark değerleri 0 ile 48 arasında değişir.

Herhangi İki Yapının Derecelerinin Farkını Gösteren Tablo

MADELER													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
YAPI 1	1	2	4	3	5	3	4	4	4	2	3	5	KARŞIT YAPI 1
YAPI 2	1	2	4	3	5	3	4	4	4	2	3	5	KARŞIT YAPI 2
FARKLAR	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	TOPLAM=0
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
YAPI 3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	KARŞIT YAPI 3
YAPI 4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	KARŞIT YAPI 4
FARKLAR	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	TOPLAM=48

Bu işi yapan birçok bilgisayar programı ve çok farklı analiz teknikleri vardır (Aztekin, 2003). Fakat bu yöntem veri kaybına neden olmaması ve pratik olması nedeniyle araştırmacı tarafından daha uygun bulunmuştur. Yapıların derecelendirmeleri arasındaki farkların toplamı aynı zamanda yapılar arasındaki ilişkinin derecesini gösteren bağıl bir değer işlevi görmüştür.

3.7. Bulgular:

1. ÖĞRENCİ:

1. öğrenci daha önceden, sonsuzlukla ilgili düşüncelerinde etkili olabilecek, fakültesinde verilen “Reel Sayıların İnşası” dersini almıştır ve diğer öğrenciler gibi

matematik eğitimi alanında başarılı bir öğrencidir. Bu öğrenci çalışmanın bütün aşamalarına ve 15 haftalık küme teorisi ile ilgili dersin tamamına katılmıştır.

RÇT için yapılan ilk mülakatta 1. öğrenciye ait aşağıdaki yapılar elde edilmiştir. Bu yapıların nasıl belirlendiğinin anlaşılması için 1.öğrenciye ait bazı yorumlar verilmiştir. Baştaki altı çizili olanlar 12 maddenin derecelendirilmesi için kullanılan yapılardır.

Sonsuz bir sayıdır - Sonsuz bir kavramdır (M7 – M10): “Aslında ben var olduğunu düşünüyorum. Ama ben ona sayı gözüyle bakmalı mıyım? ...Bence sonsuz küçük sayılar var. Sonsuz diyemiyorsam sonsuz küçük de diyemem.”

Sonsuz kümeler sayılabilir ve sayılamaz olarak ikiye ayrılır (M2-M5) : “Eleman sayıları sonsuz. sonsuz demek bir şekilde sayamıyorum demek. Aradaki farkı şöyle ayırıyorum. Rasyonel sayıları sayabiliyorum ya, reel sayıları sayamıyorum.”

Sonsuz kümelerin eleman sayıları aynıdır(M4-M11): “Yani aslında eleman sayısı ile kümelerin kardinallerini sonsuz olmasını aynı şey olarak düşünüyorum. Eleman sayılarını eşit olarak düşünüyorum.”

Sonsuz kümelerin yoğunlukları farklıdır (M1-M7): “Yoğunlukları farklı. Aynı şekilde iki sonsuz var, $\infty / \infty = 1$. Farklı sonsuz sayılar var mı? Şey yoğunluk olabilir. Sayabilir olmak yada olmamak. B daha yoğun.”

Sonsuz kümeler arasında 1-1 eşleme yapılabilir (M3-M8): “Neden 1-1 eşleme yapamıyorum diye düşündüm madde3’e inanıyorum. Madde 8 de de aynı şeyin olması lazım. Burada eleman sayıları farklı olduğu halde... Doğal sayı biter mi? Bitmez...1-1 eşleme yapılabilir miyim? Bilmiyorum.”

Madde 3’ü tartışırken 1. öğrenci’ye “**a**” yerine ne yazılabileceği sorulduğunda

“ ∞ ” cevabını vermiştir. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^5}{(1,1)^n} \right)$ değerini 1 bulmuştur. Araştırmacıya göre, belki

de bu limit ifadesinin çözümünü, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n^2 + 1} \right) = 1$ ifadesine benzetti. Görüşme süresince

sık sık tereddütlerini ifade etmiştir. Örneğin ilk başta Madde 6’ya doğru demiş, fakat bu maddeyi Madde 11 ile kıyaslayınca “Madde 6 doğru değildir” demiştir.

Bütün öğrenciler kardinal ve ordinal sonsuzluk ile ilk defa karşılaştıklarından dolayı küme teorisinde elemanların sırasını ve limit ordinalin durumunu ifade eden “;”

işaretinin anlamı bütün öğrencilere açıklanmıştır. Görüşmenin sonunda yapılarını adlandırması için kendisine ait bazı sözler hatırlatıldı ve kendisinin gereksiz bulunduğu yapılar çıkarılarak çizelgeyi derecelendirmesi sağlanmıştır. 1.öğrencinin 1’den 12’ye kadar numaralanmış maddeleri kendi yapılarına göre 1’den 5’e kadar derecelendirmesi ile oluşan repertuar çizelgesi aşağıdadır.

1. Öğrencinin İlk Repertuar Çizelgesi

OLUŞAN YAPI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	KARŞIT YAPI
Sonsuz bir sayıdır	1	5	1	3	4	5	2	5	1	1	2	1	„ bir sayı değildir.
Sonsuz bir çelişkidir.	2	1	2	4	4	1	5	1	5	5	1	5	„ bir çelişki değildir.
Sonsuz kümelerin yoğunlukları farklıdır.	1	3	1	5	2	1	3	2	1	4	1	1	„ kümelerin yoğunlukları farklı değildir.
Sonsuz kümeler arasında 1-1 eşleme yapılabilir.	5	3	5	1	2	4	3	1	5	2	5	2	„ „ 1-1 eşleme yapılamaz.
Sonsuz kümeler sayılabilir ve sayılamaz olarak ikiye ayrılır.	3	3	3	5	3	3	3	3	3	3	3	3	„ „ ikiye ayrılmaz
Sonsuz elle tutulur (hakim olunabilir)	1	1	1	1	3	3	1	1	1	1	3	1	„ elle tutulur değil.
Sonsuz kümelerin eleman sayıları aynıdır.	5	3	5	5	5	3	2	3	3	5	5	2	„ „ eleman sayıları aynı değil.
Sonsuz bir kavramdır.	5	2	5	1	4	1	5	1	2	3	5	4	„ bir kavram değildir.
Mantıklı	5	4	5	1	1	1	5	2	3	1	5	2	Mantıksız
Doğru	5	3	5	1	1	1	5	2	2	2	5	3	Yanlış

Her ne kadar yapı ilişkilerini gösteren şekil daha iyi ifade etse de çizelgeye bakarak ilk bakışta göze çarpan bir iki ilişkiyi vurgulamakta fayda vardır. 1. öğrenci, maddeler 1, 3, 7, 11’i doğru, mantıklı, iyi ve sonsuzluğun bir kavram olduğunu belirten maddeler olarak işaretlemiştir. Buna ek olarak “Sonsuz kümeler arasında 1-1 eşleme yapılabilir.” yapısına göre değerlendirilirken bu maddelere genelde yüksek dereceler verilmiştir.

Derecelendirmelerine göre birbirine yakın olan yapılar küme analizi (cluster analysis) ile gruplanmıştır, yani yapılar arasındaki ilişkileri gösteren toplam fark değerleri dikkate alınarak yapılar kümelendirilmiştir. Örneğin herhangi iki yapı arasındaki toplam fark

değeri 7 ise bu yapılar bir birine çok yakın demektir ve bu yapılar aynı anlam kümesinde yer alırlar (Cohen, 2000). Yapılar arasında bulunan toplam fark değerlerini gösteren matris aşağıdadır. En üst satırdaki 1'den 10'a kadar olan sayılar en soldaki sütunda yer alan yapıları göstermektedir.

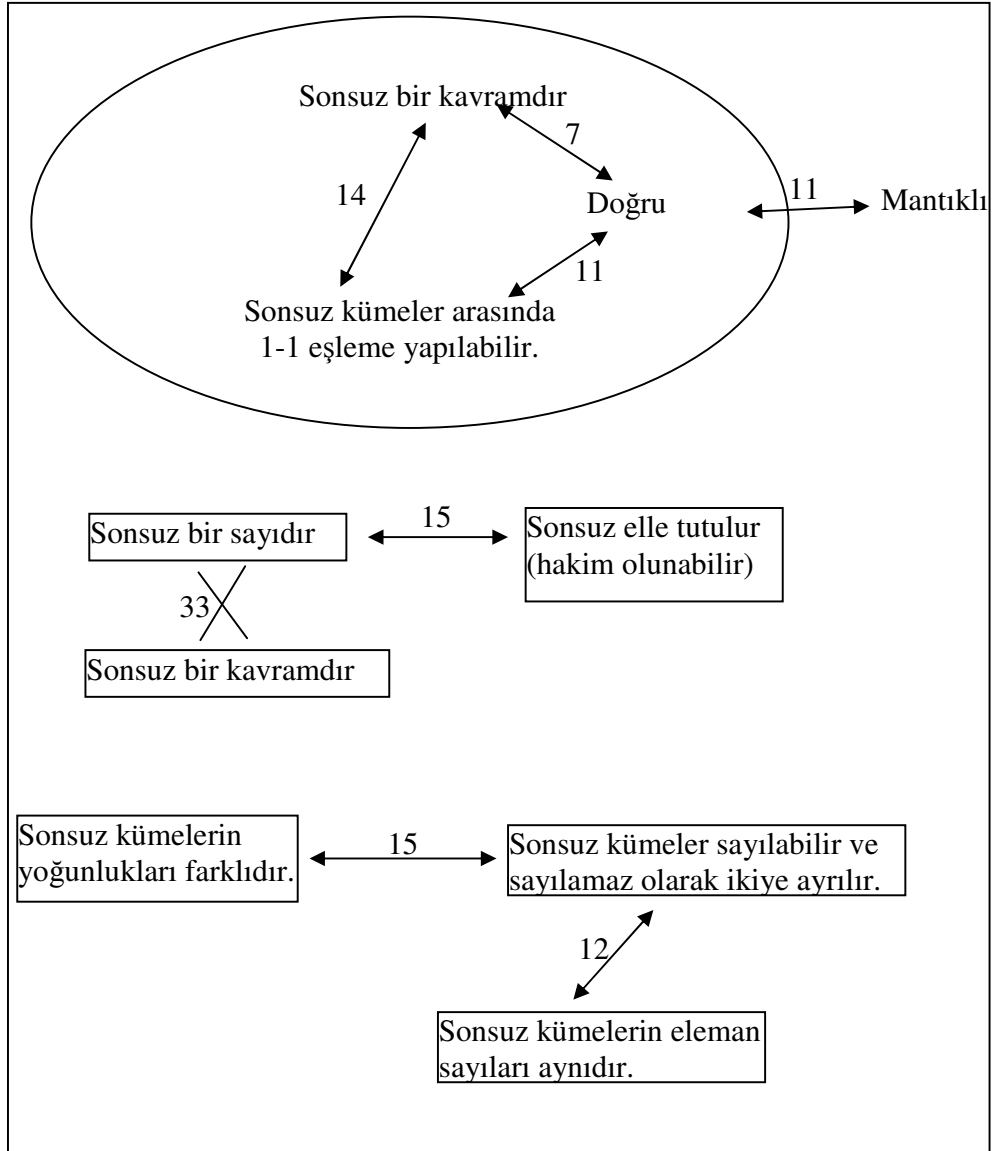
1. Öğrenciye Ait Bir Yapı İlişkileri Matrisi

1. Öğrenci-OLUŞAN YAPI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1. Sonsuz bir sayıdır		31	18	29	21	15	27	33	30	32
2. Sonsuz bir çelişkidir.			19	28	20	26	26	20	29	27
3. Sonsuz kümelerin yoğunlukları farklıdır.				27	15	17	23	27	26	24
4. Sonsuz kümeler arasında 1-1 eşleme yapılabilir.					18	22	16	14	11	11
5. Sonsuz kümeler sayılabilir ve sayılamaz olarak ikiye ayrılır.						20	12	20	21	19
6. Sonsuz elle tutulur (hakim olunabilir)							28	24	25	25
7. Sonsuz kümelerin eleman sayıları aynıdır.								18	19	19
8. Sonsuz bir kavramdır.									11	7
9. Mantıklı										4
10. Doğru										

Matristeki fark değerlerine göre yakın ve uzak değerlere sahip olan yapılar, ilişkilerin daha iyi görülebilmesi için kümeler halinde (clusters) yazılmış (Cohen, 2000) ve yapı ilişkilerini gösteren şekiller oluşturulmuştur. Bu yapı ilişkilerini ifade eden şekiller Williams'ın (2001) kullandığı hükümlendirmesal şekillere benzemektedir. Yapılar arasındaki okların üzerinde verilen sayılar yapılar arasındaki toplam fark değerleridir. Herhangi iki yapı arasındaki çarpı işareti, o iki yapının birbirine uzaklığını ve karşıtlığını gösterir. Daha önce belirtildiği gibi buna benzer şekillerin elde edildiği birçok bilgisayar programı vardır, fakat araştırmacı yöntemin pratiklik ve kolay

anlaşılabilirlik açısından bu yöntemi tercih etmiştir. 1.öğrencinin, dönemin başında elde edilen ilk yapı ilişkilerini gösteren şekil aşağıdadır.

1. Öğrencinin İlk Yapı İlişkilerini Gösteren Şekil



Çizelgedeki yapılar öğrencinin temel anlamlandırmaları hakkında bir fikir verirken, çizelgedeki derecelendirmeler dikkate alınarak yapılan bu şekil yapıların birbirleri arasındaki ilişkilerini ifade etmektedir.

İlk kümeden de anlaşılacağı üzere 1. öğrencinin “sonsuz kavramdır” ve “sonsuz kümeler arasında 1-1 eşleme yapılabilir” yapıları iyi ve doğru yapıları ile beraber olan

yapılardır. Ona göre, sonsuzun bir sayı olması ile bir kavram olması birbirlerine zıttır. Sonsuzun bir sayı olması ile sonsuza hakim olabilme beraber ele alınmaktadır. Bu yapıların yakın olması diğer öğrencilerin hepsinde görülmektedir. Araştırmacıya göre, belki de insanın sonsuzu kontrol edebilme düşüncesi matematikteki sonsuz sayıları ortaya çıkarmıştır.

Araştırmacıya göre, geçmişte aldıkları matematik dersine bağlı olarak, diğer öğrenciler gibi sonsuz kümelerin sayılabilir ve sayılamaz olması ile sonsuz kümelerin farklı yoğunluklarının olması yapıları beraberdır. Araştırmacının derslerdeki gözlemlerinden de belirlediği kadarıyla öğrenciler sonsuz kümelerin çelişkili doğası ile ilgili ifadeleri “sayılabilirlik” ve “sayılamazlık” kavramları ile çözümlemeye çalışmaktadır. Jahnke (2001), Cantor’un kardinal ve ordinal sonsuzlukları ile ilgili makalesinde “sayılabilir ve sayılamaz kümelerin keşfinin Cantor’u, kardinal küme kavramını tanımlaması için motive ettiğini” vurgulamaktadır. Karşılaştığımız kadarıyla da sayılabilir ve sayılamaz kümeler farklı sonsuzlukları açıklamada kilit rol oynamaktadır.

Elde edilen yapılar ve kümeler doğrultusunda ortaya çıkan tablo Cantor’un teorisine ve sonsuzluğa bir bütün olarak bakan matematikteki aktüel sonsuzluktan oldukça uzaktır ve küme teorisindeki konular ile hiç karşılaşmamış olan bir doktora öğrencisinin sonsuzluğa ve sonsuz kümelere bakışını ortaya koymaktadır. Sonsuzu bir kavram olarak ele alan, sonsuzu bir bütün olarak ele almayan, farklı sonsuzları kabul etmeyen potansiyel sonsuzluk anlayışı hakimdir.

1.öğrencinin küme teorisindeki konularla karşılaştıkça derslerdeki bazı ifadeleri aşağıdadır. Bu ifadelerde; $\mathbf{c}$ kontinum’u, $\mathbf{Card} \mathbb{R}$ gerçekte sayılar kümesinin kardinalitesini, $\mathbf{Card} \mathbb{N}$ ve $\aleph_0$ doğal sayılar kümesinin kardinalitesini göstermektedir:

- “Kaç tane kardinal var?” sorusu sorulduğunda “ $\mathbf{c}$ ” cevabını veriyor.
 - “ $\mathbf{Card} \mathbb{N} = \mathbf{Card} \mathbb{R}$ eşitliği mantıklı geliyor.”
 - “Pozitif tamsayılar kümesinin içinde çarpma işlemi oluyor, dışarı çıkmıyoruz.
- $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ makul geliyor. $\mathbf{c}$ ye sıçramadığı için...”

Dönem sonunda, küme teorisi dersinin final sınavından sonra 1.öğrenci ile tekrar görüşülmüş ve ikinci defa repertuar çizelgesi çıkartılarak analiz edilmiştir. Görüşmede, Madde 3’te doğal sayılar kümesinin kardinalitesini gösteren “a” yerine ne

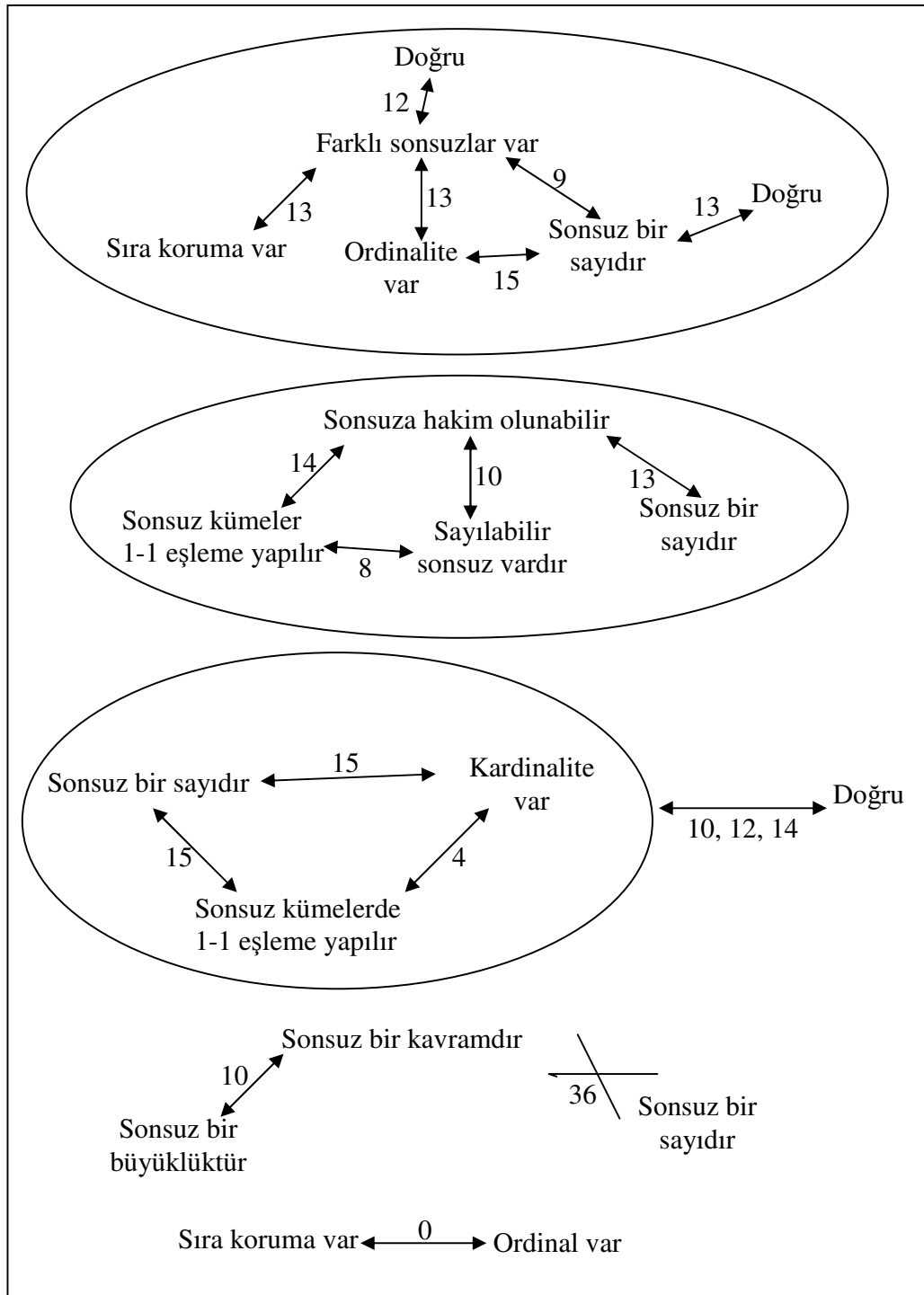
yazılabileceğini sorduğumuzda “ $\aleph$ ”nın doğal sayılar kümesinin kardinalitesini gösterdiğini bilmiştir ve “Daha önce belki “ ∞ ” yazardım fakat şu an bence $\aleph_0$ ” şeklinde cevap vermiştir. Çizelgedeki derecelendirmelerden de anlaşılacağı üzere yapılar arasındaki kutuplaşmalar artmıştır ve genelde maddelerin değerlendirmesinde verilen dereceler 1, 3 ve 5 tir.

1. Öğrencinin Son Repertuar Çizelgesi

OLUŞAN YAPI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	KARŞIT YAPI
Farklı sonsuzlar var	1	1	5	1	5	3	4	5	2	1	2	5	Farklı sonsuzlar yok
Sonsuz bir kavramdır	5	5	1	1	1	3	3	2	1	5	3	2	„, , , değildir
Sonsuza hakim olunabilir	2	3	4	4	5	3	3	3	3	2	3	4	Hakim olunamaz
Sonsuz bir sayıdır	1	1	5	5	5	3	5	5	5	1	3	5	„, , , değildir
Sonsuz bir büyüklüktür	5	4	2	3	2	3	4	2	2	4	2	3	„ bir büyüklük değildir
Sıra koruma vardır	1	1	1	1	1	1	3	5	1	1	1	5	Sıra koruma yoktur
Sonsuz kümelerde 1-1 eşleme yapılır	5	3	5	4	3	3	3	5	5	3	5	5	„, , , 1-1 eşleme yapılamaz
Kardinalite var	5	3	5	5	4	5	3	5	5	3	5	5	Kardinalite yok
Ordinalite var	1	1	1	1	1	1	3	5	1	1	1	5	Ordinalite yok
Sayılabılır sonsuz vardır	4	3	5	4	3	3	3	3	4	3	1	5	Sayılabılır sonsuz yoktur
Doğru	1	2	5	1	5	1	3	5	5	3	5	5	YANLIŞ

1. öğrenci, derslerde farklı çelişkili durumlarla karşılaştıkça bildiklerini sorgulama ve yenileme imkanı bulmuştur. Aşağıdaki yapı ilişkilerini gösteren şekil oluşan kavram imajını yansıtmaktadır.

1. Öğrencinin Son Yapı İlişkilerini Gösteren Şekil



Yapı ilişkiler şemasında en önemli değişme “Farklı sonsuzlar var”, “Doğru”, “Sıra koruma var” vb. yapılardan oluşan ilk yapı kümesidir. “Sonsuz kümelerde 1-1 eşleme yapılır” ve “Kardinalite var” yapılarının çok yakın olması küme teorisi dersinin bir sonucu gibidir. Diğer öğrencilerin son şemalarında da olduğu gibi “Sıra koruma var” ve

“Ordinal var” yapıları ordinallerin tanımına bağlı olarak aynı gibi ele alınmıştır. Diğer önemli bir nokta da “Ordinal var” ve “Doğru” yapıları arasında bir ilişki görülmemesidir. Derslerde gözlemlendiği kadarıyla öğrenciler için ordinalleri anlamak kardinalleri anlamaktan daha zordur. Ne de olsa Cantor’un yayınladığı makaleler için de denebileceği gibi, ders kitaplarında ordinalite konusu kardinaliteden sonra gelmektedir. Derslerin sonunda elde edilen yukarıdaki şemada “Sonsuza hakim olunabilir” yapısının da “Sonsuz kümelerle 1-1 eşleme yapılı”

gibi farklı yapılarla ilişkilmesi anlamlıdır. Tekrar, “Sonsuz bir kavramdır” ve “Sonsuz bir sayıdır” kavramlarının birbirinden uzak olduğu görülüyor. Bu durum diğer öğrenciler için de geçerlidir.

Şemalardan da anlaşılacağı üzere bazı yapı ilişkileri çok fazla değişmemiş fakat gelişmiştir. Araştırmacı, bir dönemlik çalışmanın sonunda tamamıyla aktüel sonsuzluğa doğru bir değişim olduğunun söylenemeyeceğini ve aynı zamanda bunun beklenemeyeceğini düşünmektedir. Sonsuz kümelerin ordinalitesini ifade eden aşağıdaki görüşmede sarfettiği cümleler yeterince anlamlıdır.

“Sıralı sonsuz kümeleri düşünmek zor. Küçükten başlar büyüğe doğru gider, insanın kafasında o var. İnsanın kafasında doğal sıralama var.”

2. ÖĞRENCİ :

Geçmişte aldığı dersler dikkate alınacak olursa ikinci öğrencinin sonsuzluk kavramı ile ilgili konulara daha az eğilimi vardı. Bu açıdan bakıldığında maddelerdeki konularla fazla ilgili değildi. Madde 3’teki doğal sayılar kümesinin eleman sayısını ifade eden “ $\aleph$ ” yerine ne yazılabileceğini sordüğümüzda 1. öğrenci gibi “ ∞ ” sembolünün

yazılabileceğini söylemiştir. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^5}{(1,1)^n} \right)$ ifadesinin sonucu ile ilgili kesin bir fikri

yoktu ve ilk görüşmedeki ifadeleri genelde verilen maddelerin tekrarı niteliğindeydi. Araştırmacı bunu, konunun öğrenci için zorluğuna ve yabancılığına bağlamaktadır. Fakat görüşmelerde kendi düşüncelerini fazla açığa vurmamasına rağmen elde edilen çizelgeler ve şemalar oldukça açıklayıcı olmuştur

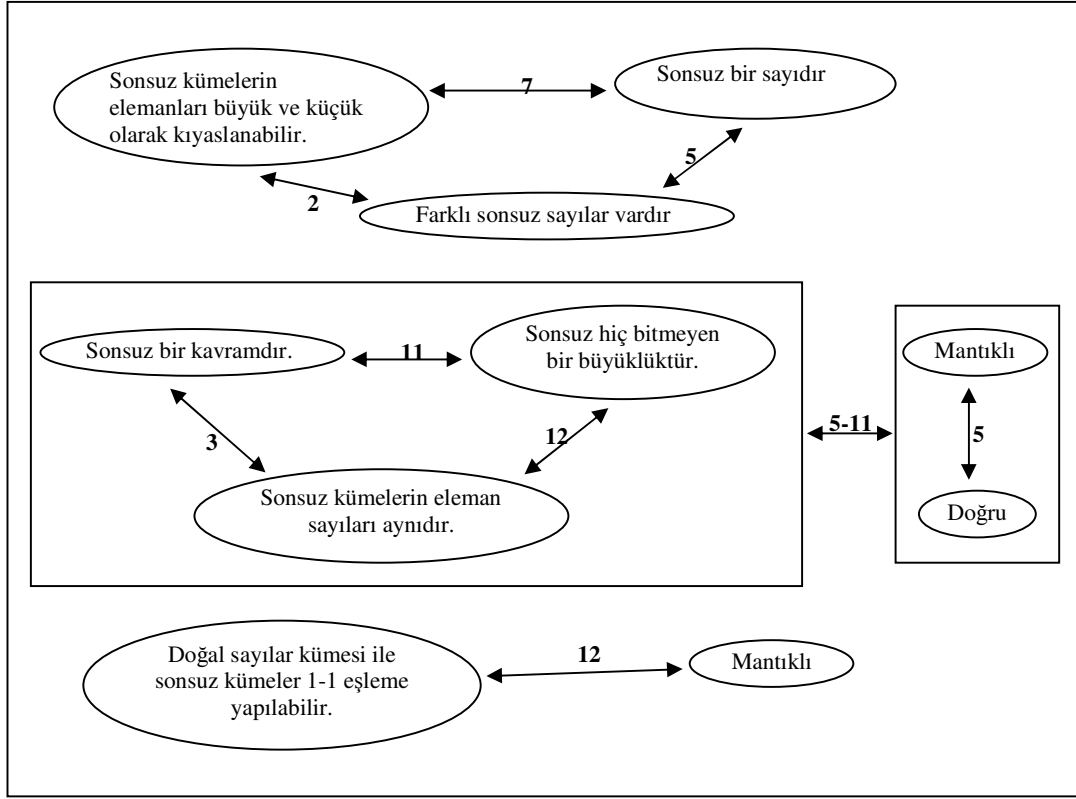
ve elde edilen yapılar görüşmelerde ve derslerde ifade ettiği kendine ait düşüncelerine ve anlayışlarına uygundur. Bu öğrenciye ait repertuar çizelgesi aşağıdadır.

2. Öğrencinin İlk Repertuar Çizelgesi

OLUŞAN YAPI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	KARŞIT YAPI
Sonsuz kümelerin elemanları büyük ve küçük olarak kıyaslanabilir.	1	1	2	1	4	4	4	4	2	3	2	4	„ büyük ve küçük olarak kıyaslanamaz.
Sonsuz bir sayıdır	1	2	1	3	4	4	2	4	2	4	2	4	„ bir sayı değildir.
Sonsuz bir kavramdır.	5	5	4	4	2	2	2	2	4	3	4	2	Sonsuz bir kavram değildir.
Sonsuz hiç bitmeyen bir büyüklüktür.	4	4	4	3	2	2	5	4	4	4	4	4	„ hiç bitmeyen bir büyüklük değildir.
Sonsuz kümelerin eleman sayıları aynıdır.	5	4	4	5	2	1	2	2	4	3	4	2	„ „ eleman sayıları aynı değildir.
(N) Doğal sayılar kümesi ile 1-1 eşleme yapılabilir.	5	3	5	4	1	3	3	5	5	3	3	5	(N) „ ile 1-1 eşleme yapılamaz.
Farklı sonsuz sayılar vardır.	1	1	1	1	4	4	4	4	2	4	2	4	Farklı sonsuz sayılar yoktur.
Mantıklı	5	4	4	5	2	2	4	4	4	3	5	3	Mantıksız
Doğru	4	4	4	4	3	2	4	3	4	2	5	3	Yanlış

Çizelgede de görülebileceği gibi 2. öğrencinin potansiyel sonsuzluk anlayışını ifade eden “sonsuz bir kavramdır” ve “Sonsuz hiç bitmeyen bir büyüklüktür” gibi yapıları vardır. Bu yapılar arasındaki belli başlı ilişkiler aşağıdaki şekil ile verilmiştir.

2. Öğrencinin İlk Yapı İlişkilerini Gösteren Şekil



Ortada yer alan temel yapı kümesi (“Sonsuz hiç bitmeyen bir büyüklüktür”, “Sonsuz bir kavramdır”, “Sonsuz kümelerin eleman sayıları aynıdır”) potansiyel sonsuzluk anlayışının bütün işaretlerini taşımaktadır. Aynı zamanda bu yapı kümesi, “mantıklı” ve “doğru” yapıları ile ilişkilendirilmiştir. Bu küme aynı zamanda Fischbein’in (2001) tartıştığı “sonsuzluğun hiç tükenmeyen kapasitesini (inexhaustible capacity of infinity)” iyi tanımlamaktadır.

“Sonsuzluğun sezgisel açıklaması ile ilgili denilebilecek ikinci bir yön “sonsuzluğun hiç tükenmeyen kapasitesi” dir. Sonsuzluk hiç tükenmemek gibi görülüyor..Bana göre, sonsuzluğun bu açıklaması, sezgisel olarak sonsuzluğun bir seviyesinin (yani tek bir sonsuz) olmasının temel nedenidir. (Fischbein, 2001)”

Ayrıca “Mantıklı” ve “Doğru” yapılarının tamamen aynı gibi görülmemesi, bu öğrenci ile ilgili dikkat çekici bir noktadır. Yani onun için doğru olan bir şey tamamen mantıklı olmayabilir. “Sonsuz bir kavramdır” ve “Sonsuz kümelerin eleman sayıları aynıdır” yapılarının diğerlerine göre daha yakın olması da dikkat çekici bir ilişkidir. Bu ilişki hemen hemen bütün öğrencilerde görülmüştür. Araştırmacıya göre, sonsuzu bir

sayı gibi ele almak öğrencileri karşılaştırmaya ittiğinden sonsuzun bir kavram olması, sonsuz kümeler büyükten küçüğe doğru sıralanamaz anlamındaki “Sonsuz kümelerin eleman sayıları aynıdır” yapısına daha yakındır. Sonsuzu kavram olarak düşünmek bir tek sonsuz büyüklük vardır düşüncesini gerektiriyor. Şemanın en yukarısındaki yapı kümesi de bu düşünceyi pekiştirmektedir. Derslerdeki etkinliklerden ve öğrencilere çizdirilen resimlerden anlaşıldığı kadarıyla sonsuzu bir sayı olarak yada belirli bir büyüklüğü bütün olarak ifade eden bir şey olarak düşünmek farklı sonsuzların olduğu düşüncesi ile doğrudan ilişkilidir. Öğrencinin sayılabilirlik konusuna bakışı, “Doğal sayılar kümesi ile sonsuz kümeler 1-1 eşleme yapılabilir” yapısının “mantıklı” ve “iyi” yapıları ile ilişkisinden anlaşılabilir. Özet olarak ikinci öğrenciye ait oluşan şema, potansiyel sonsuzluk anlayışına daha yakın bir görüntü çizmektedir.

İkinci öğrenci de çalışmanın ve derslerin tamamına katılmıştır. Derslerde çok fazla konuşmamıştır, fakat aşağıdaki diyalog ikinci öğrenciye aittir. Bu ifadelerde; $\mathbf{c}$ kontinum’u, $\mathbf{P}(\mathbb{R})$ gerçek sayılar kümesinin kuvvet kümesini, $\mathbf{Card P}(\mathbb{R})$ gerçek sayılar kümesinin kuvvet kümesinin kardinalitesini, $\aleph_0$ doğal sayılar kümesinin kardinalitesini göstermektedir:

Öğretim Elemanı: Kaç tane sayılabilir sonsuz küme var?

2. öğrenci: sonsuz tane.

Öğretim Elemanı: Kaç tane sayılabilir sonsuz kardinalite var?

2. öğrenci: 1 tane

Öğretim Elemanı: Kaç tane sayılamaz sonsuz kardinalite var?

2. öğrenci: Sonsuz tane, bilmiyorum

Öğretim Elemanı: $\aleph_0 < \mathbf{c} < \mathbf{Card P}(\mathbb{R}) < \mathbf{Card P(P}(\mathbb{R})) < \dots$ Bu şekilde daha kaç tane olabilir?

2. öğrenci: sayılabilir tane

Öğretim Elemanı: Hepsinin birleşimi ne olur?

$$X = \mathbf{P} \cup \mathbb{R} \cup \mathbf{P}(\mathbb{R}) \cup \mathbf{P}(\mathbf{P}(\mathbb{R})) \cup \dots$$

2. öğrenci: ...

Öğretim Elemanı: Kardinalite bitti mi? En büyük mü?

2. öğrenci: Bunun da kuvvet kümesini alırım.

Öğretim Elemanı: Kaç tane kardinal var?

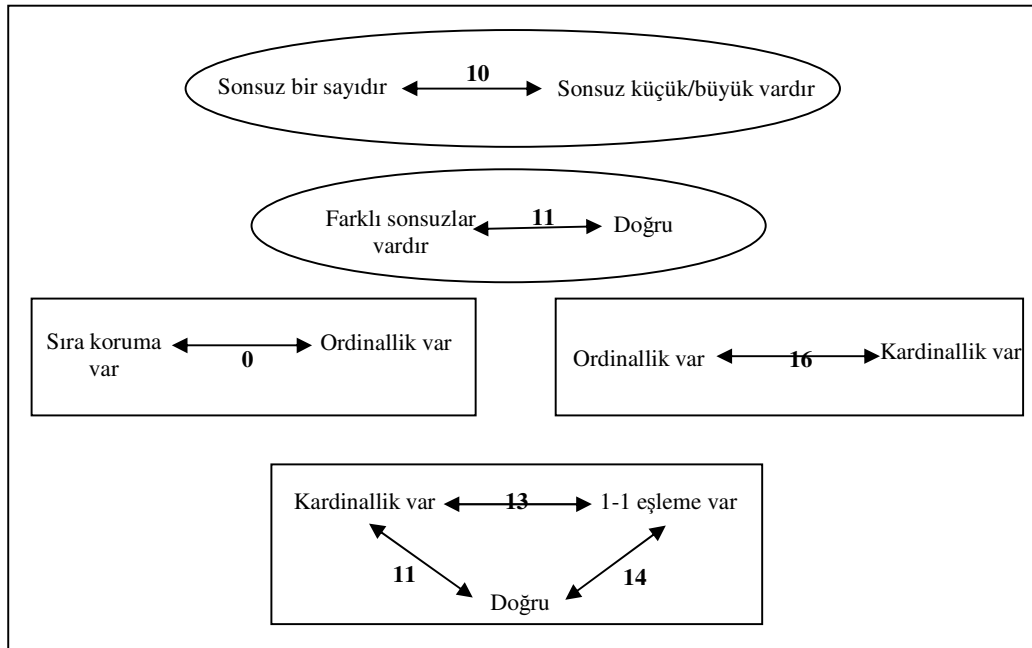
2. öğrenci: sonsuz tane, sayılamaz sonsuz tane.

Son görüşmede 2. öğrenci Madde 3'teki doğal sayılar kümesinin eleman sayısını ifade eden “a”nın **80** olduğunu ifade etmiştir. Fakat $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^5}{(1,1)^n} \right)$ değerinin sonucu hakkında hâlâ bir fikri yoktu. Bu öğrencinin son repertuar çizelgesi ve yapı ilişkilerini gösteren şema aşağıdadır.

2. Öğrencinin Son Repertuar Çizelgesi

OLUŞAN YAPI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	KARŞIT YAPI
Sonsuz bir kavramdır	5	4	3	2	1	3	3	1	3	5	3	3	„ bir kavram değildir
Sonsuz bir sayıdır	1	1	3	4	5	3	3	4	3	1	3	3	„ bir sayı değildir
Farklı sonsuzlar vardır	3	1	4	1	5	4	5	5	4	5	3	5	„ „ yoktur
Sıra koruma var	5	3	4	2	2	3	1	5	1	3	3	5	Sıra koruma yok
Ordinallik var	5	3	4	2	2	3	1	5	1	3	3	5	Ordinallik yok
Kardinallik var	5	3	5	5	5	5	2	5	5	3	5	5	Kardinallik yok
Sonsuz küçük/büyük var	3	3	3	3	3	3	5	3	3	1	3	3	„ „ yok
1-1 eşleme var	5	3	5	1	1	4	2	1	5	3	5	5	1-1 eşleme yoktur
DOĞRU	4	2	5	1	5	2	4	5	5	3	5	5	YANLIŞ

2. Öğrencinin Son Yapı İlişkilerini Gösteren Şekil



Yapılar birbirine çok yakın olmasa da 2. öğrencinin son yapı ilişkilerini gösteren şekil, standart olmayan ve aktüel sonsuzluğa doğru bir değişimi göstermektedir. İlk yapı kümesindeki “Sonsuz bir sayıdır” ve “Sonsuz küçük/büyük vardır” yapılarının anlamlı bir şekilde yakınlığı standart olmayan analizin önermelerini net bir şekilde göstermektedir. Bir dönemlik çalışma sonunda, “Farklı sonsuzlar vardır” yapısının “doğru” yapısı ile ilişkisinin ifade edildiği yapı kümeleri ile karşılaşmak araştırmacının görmeyi beklediği yapı kümeleridir. Öğrencilerin çoğunda olduğu gibi ordinalite ve kardinalite tanımlarını vurgulayan en alttaki yapı kümeleri küme teorisi dersini yeni almış bir öğrencinin kavram imajını yansıtmaktadır ve kendi ifadeleriyle etiketlenen “Ordinallik var” ve “Kardinallik var “ yapıları arasında az da olsa bir yakınlık görmek dikkat çekicidir.

3. ÖĞRENCİ:

Önceki öğrenciler için ifade edilen bir çok konu, üçüncü ve dördüncü öğrenci için de geçerlidir. 3.öğrenci diğerlerine göre önceden daha fazla matematik dersi almış bir öğrencidir ve bu durum ilk çizelgelerine yansımıştır. 3 .öğrenci madde 2’deki

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^5}{(1,1)^n} \right)$ için ilk önce 1 dedi, fakat biraz daha düşününce araştırmacıya “0” olup

olmadığını sordu. Madde 3’ü tartışırken “ α ” yerine ne yazılabileceğini sordüğümüzda

“ α ”nın “ ∞ ” sembolünden farklı olduğunu ileri sürdü. Araştırmacı, genel olarak diğer

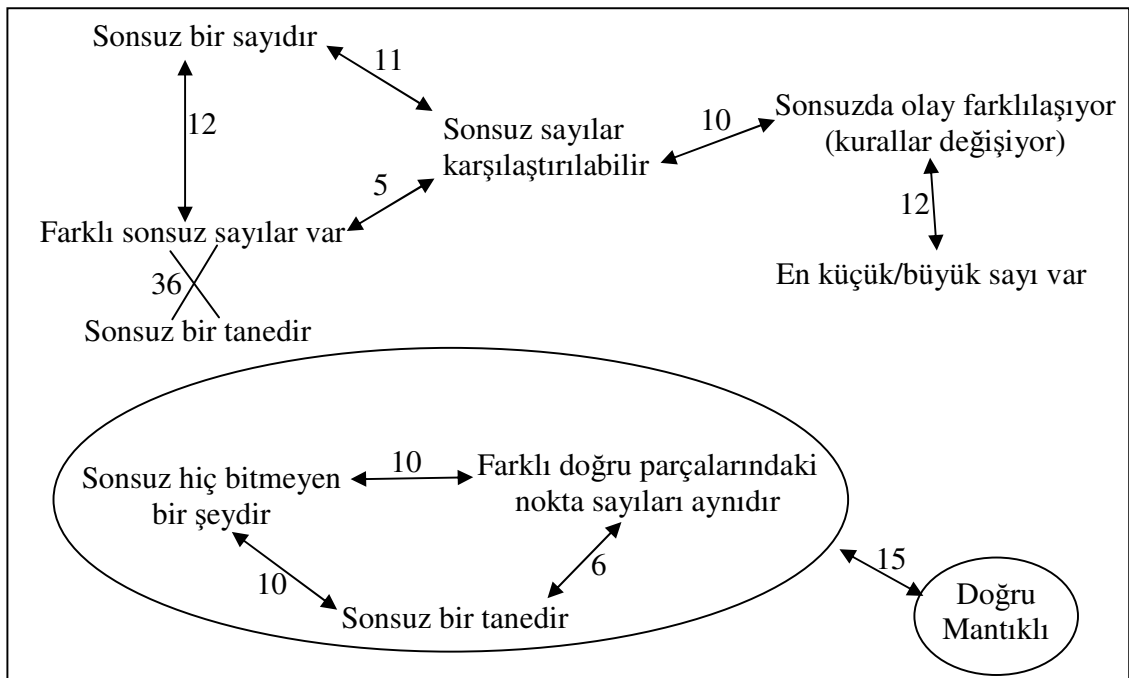
öğrenciler gibi, görüşme devam ettikçe 3. öğrencinin konu ile ilgili tereddütlerinin oldukça arttığını gözlemlemiştir. Bu öğrencinin ilk repertuar çizelgesindeki derecelendirmeler diğer öğrencilerinkilere göre daha keskindir, yani 2 gibi tereddütü ifade eden dereceler daha azdır. 3. öğrencinin ilk repertuar çizelgesi aşağıdadır.

3. Öğrencinin İlk Repertuar Çizelgesi

OLUŞAN YAPI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	KARŞIT YAPI
Sonsuz bir sayıdır	1	2	5	1	4	5	5	5	4	3	5	3	„ bir sayı değildir.
Sonsuz sayılar karşılaştırılabilir	1	1	5	1	5	4	4	4	3	2	1	3	„ „ karşılaştırılmaz.
Farklı sonsuz sayılar var	1	2	5	1	5	4	4	5	1	1	1	3	„ „ „ Yok
Sonsuz hiç bitmeyen bir şeydir.	5	5	4	4	3	3	5	1	4	5	4	2	„ „ „ „ değildir
Sonsuz kümelerin (doğru parçalarının) eleman sayısı (nokta sayısı) aynı	5	4	5	5	2	2	1	1	4	5	4	1	„ Nokta sayısı aynı değil
En küçük/büyük sayı vardır.	3	3	3	3	4	4	5	4	3	1	3	4	En küçük/büyük sayı yoktur
Sonsuz bir tanedir.	5	5	4	5	1	1	1	1	4	5	4	3	„ bir tane değildir
Mantıklı	5	4	5	5	3	1	4	3	4	2	5	5	Mantıksız
Doğru	5	4	5	5	3	1	4	3	4	2	5	5	Yanlış
Sonsuzda olay farklılaşıyor. (kurallar değişiyor)	1	2	5	3	5	4	2	4	3	3	3	5	„ „ farklılaşmaz

Yukarıdaki çizelgeden elde edilen yapı ilişkilerini gösteren şekil aşağıdadır.

3. Öğrencinin İlk Yapı İlişkilerini Gösteren Şekil



3. öğrencinin diğer öğrencilere göre, sonsuzun bir sayı olarak kullanıldığı temel matematik derslerine yakınlığının yapı ilişkileri şemasında görülmesi dikkat çekicidir. Araştırmacıya göre, “sonsuz bir sayıdır” ve “Farklı sonsuz sayılar var” yapıları arasındaki ilişki ve bu yapıların “Sonsuz bir tanedir” yapısına olan uzaklığı, bireylerin farklı sonsuzları kabullenmesinde sonsuzun bir sayı olmasının rolünü ifade ediyor. Bunun dışında “Doğru” ve “Mantıklı” yapıları ile ilişkilendirdiği küme, sonsuzu bir süreç olarak ele alan ve tek sonsuzluk anlayışının hakim olduğu potansiyel sonsuzluk anlayışı ile ilgili temel yapı kümesidir

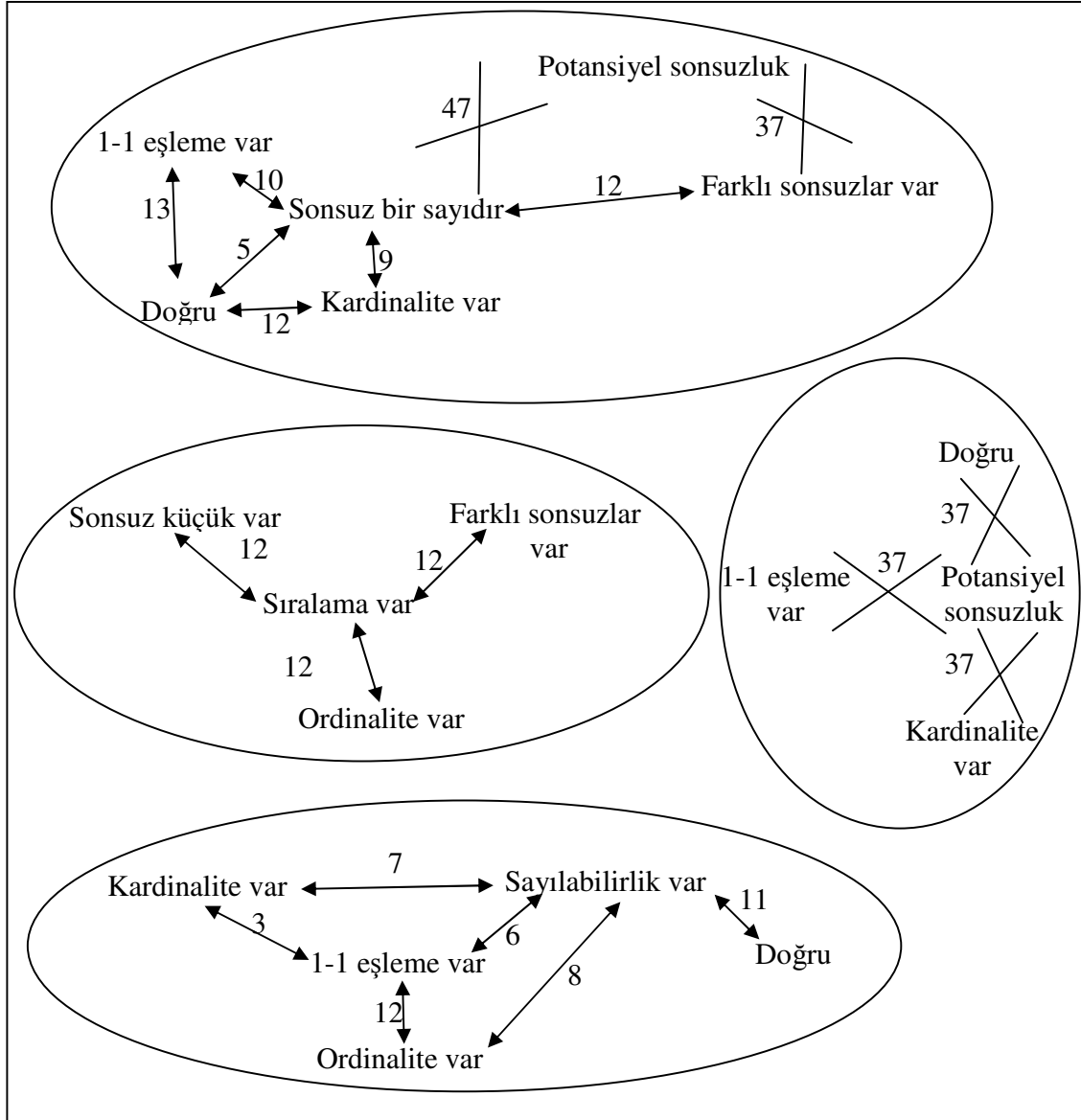
3. öğrencinin son repertuar çizelgesi aşağıdadır.

3. Öğrencinin Son Repertuar Çizelgesi

OLUŞAN YAPI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	KARŞIT YAPI
Sonsuz bir sayıdır	1	1	5	2	5	5	5	5	5	1	5	5	Sonsuz bir sayı değildir
Farklı sonsuzlar var	1	1	1	1	5	5	2	5	4	1	3	4	,, ,, yok
Sıralama var (önemlidir)	1	1	1	1	2	1	1	5	5	1	1	5	sıralama yok ,,
Sonsuz küçük var	1	2	1	1	3	1	5	3	3	1	1	3	,, ,, yok
1-1 eşleme var	5	1	5	4	5	5	1	5	5	1	5	5	1-1 eşleme yok
Sayılabilirlik var	5	1	5	5	4	1	1	5	5	1	5	5	sayılabilirlik yok
Ordinalite var	5	1	5	4	1	1	1	5	5	1	1	5	,, yok
Kardinalite var	5	1	5	5	5	5	3	5	5	1	5	5	,, yok
Potansiyel sonsuzluk var	5	5	1	5	1	1	1	1	1	5	1	1	Potansiyel sonsuzluk yok
Doğru	1	1	5	2	5	1	4	5	5	1	5	5	Yanlış

Görüldüğü gibi diğer öğrencilerdeki gibi çizelgedeki derecelendirmeler daha da keskinleşmiştir ve genelde dereceler 5 ve 1 dir, yani yapıların karşıt kutuplarını göstermektedir. Bu çizelgeye göre elde edilen yapı ilişkileri şeması aşağıdadır.

3. Öğrencinin Son Yapı İlişkilerini Gösteren Şekil



Son yapı ilişkileri şemasında, bir iki derste geçen potansiyel sonsuzluk anlayışının bir yapı olarak karşımıza çıkması dikkat çekicidir. Bu anlayış, derslerde farklı sonsuzluk anlayışları üzerinde durulmasının da etkisiyle “doğru” yapısından uzaklaşmıştır. Bu noktada küme teorisinin etkisi dikkat çekicidir.

4. ÖĞRENCİ :

Son öğrenci bir eğitim fakültesinden mezun olmuştur. Bir veya iki ders dışında diğerleri gibi çalışmanın tamamına katılmıştır. Fakat görüşmelerin bazı kişisel nedenlerden dolayı yeterince sağlıklı yapılamaması doğal olarak repertuar çizelgelerine de yansımıştır.

Madde 3'te öğrencilere “α” yerine ne yazılabileceği sorulduğunda, öğrencilerin çoğu

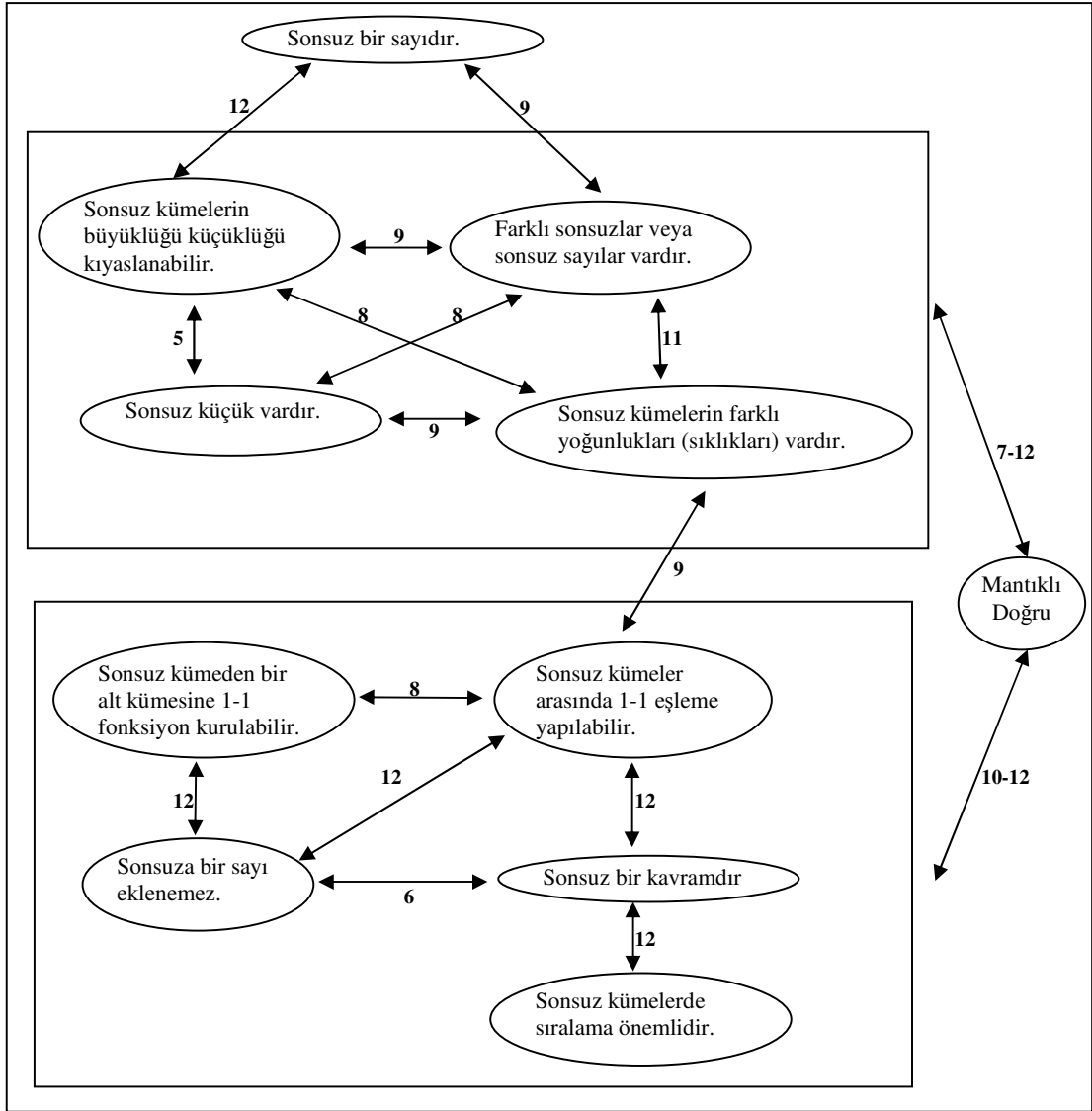
gibi bu soruya “∞” cevabını vermiştir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^5}{(1,1)^n} \right)$ değerini 1 bulmuştur. 4.

öğrencinin repertuar çizelgeleri ve yapı ilişkileri aşağıdadır.

4. Öğrencinin İlk Repertuar Çizelgesi

OLUŞAN YAPI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	KARŞIT YAPI
Sonsuz bir sayıdır	1	1	1	1	3	4	2	3	4	1	3	3	„ bir sayı değildir.
Sonsuz kümeden bir alt kümesine 1-1 fonk kurulabilir.	5	4	3	3	2	2	3	2	4	3	4	1	„ „ 1-1 fonk. kurulamaz.
Sonsuz küçük vardır.	2	4	3	3	4	4	5	4	3	2	3	3	Sonsuz küçük yoktur.
Farklı sonsuzlar veya farklı sonsuz sayılar vardır.	1	4	2	3	4	4	3	3	4	1	2	3	„ „ „ „ yoktur.(sonsuz tektir)
Sonsuz kümelerin farklı yoğunlukları (sıklıkları) vardır.	3	3	4	4	4	5	3	3	3	2	3	2	„ „ farklı yoğunlukları (sıklıkları) yoktur.
Sonsuza bir sayı eklenemez.	4	4	5	3	3	2	3	3	5	5	3	4	„ bir sayı eklenebilir.
Sonsuz kümelerde sıralama önemlidir.	4	3	4	2	2	4	2	4	2	4	3	4	„ „ sıralama önemli değildir.
Sonsuz kümelerin büyüklüğü küçüklüğü kıyaslanabilir.	2	2	3	3	4	4	3	4	2	2	3	3	„ „ „ kıyaslanamaz.
Sonsuz bir kavramdır.	4	5	4	4	3	3	3	4	5	5	3	3	„ „ kavram değildir.
Sonsuz kümeler arasında 1-1 eşleme yapılabilir.	4	3	2	4	3	2	3	3	3	3	4	2	„ „ 1-1 eşleme yapılamaz.
Mantıklı	2	4	4	3	3	4	4	3	2	4	4	3	Mantıksız
Doğru	2	4	3	3	3	3	3	3	2	4	3	3	Yanlış

4. Öğrencinin İlk Yapı İlişkileri Şekli



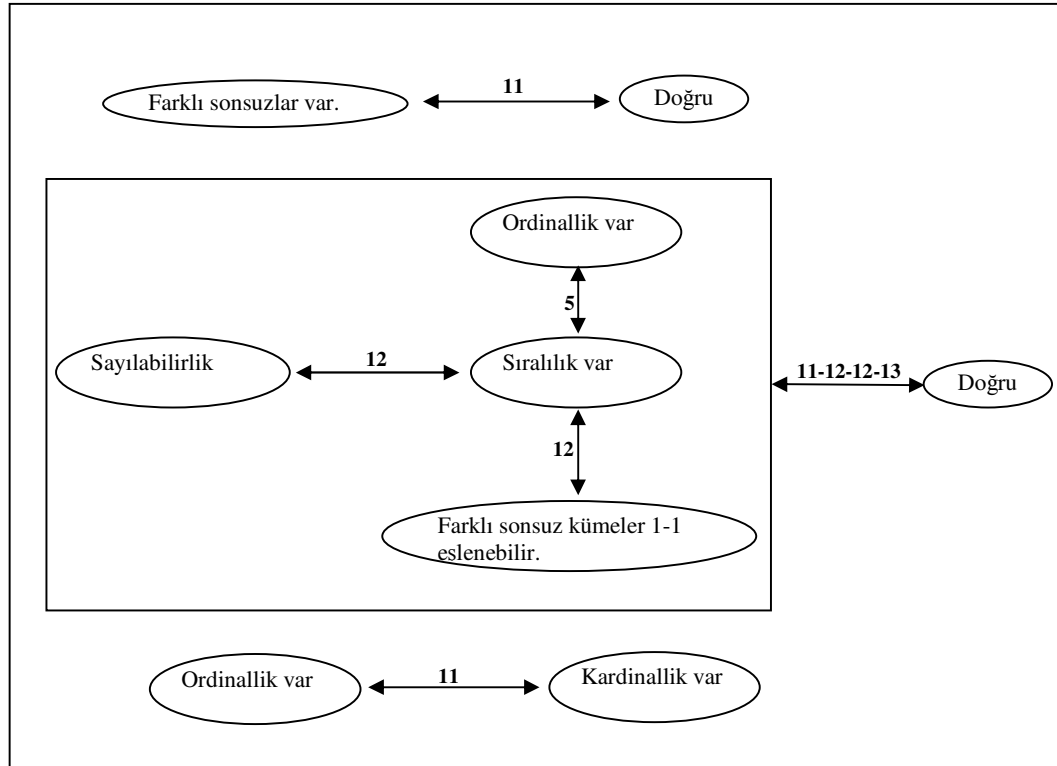
4. Öğrencinin görüşmelerdeki kararsız yapısı şemalara da yansımıştır. “mantıklı” ve “doğru” yapılarının belirli bir yapı kümesi ile ilişkilendirilememesi dikkat çekicidir. Bunun dışında araştırmacıya göre, konunun öğrenci için karmaşıklığı da göz ardı edilmemelidir. Bunun dışında “Sonsuz kümelerin büyüklüğü küçüklüğü kıyaslanabilir.”, “Farklı sonsuzlar veya sonsuz sayılar vardır.”, “Sonsuz küçük vardır.”, “Sonsuz kümelerin farklı yoğunlukları (sıklıkları) vardır.” Yapıları arasındaki yakınlığı gösteren yapı kümeleri diğer öğrenciler için de geçerli olabilecek mantıksal ilişkileri ifade etmektedir. Ayrıca araştırmacıya göre, “Sonsuza bir sayı eklenemez” ve “Sonsuz bir kavramdır” yapıları arasındaki yakınlık dikkat çekicidir. Genellikle sonsuz bir

kavram olarak düşünüldüğünde, doğal olarak sonuzla ilgili bir aritmetik işlem düşünülmemektedir. Küme teorisi derslerinden sonra 4. öğrencinin repertuar çizelgesi ve yapı ilişkilerini gösteren şekil aşağıdaki gibi olmuştur.

4. Öğrencinin Son Repertuar Çizelgesi

OLUŞAN YAPI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	KARŞIT YAPI
Farklı sonsuzlar var	5	2	3	1	5	3	3	2	4	4	2	3	„ „ yok
Sıralılık var	3	2	5	2	2	2	2	5	5	2	2	4	„ yok
Sayılabılır	5	3	5	2	2	1	3	4	3	1	2	1	sayılamaz
1-1 eşleme yapılabilir	4	1	4	1	1	2	3	4	3	1	4	4	„ „ yapılamaz
Ordinallık var	4	1	5	3	3	2	2	5	4	2	2	4	„ yok
Kardinallik var	4	2	5	4	4	5	2	5	2	3	3	3	„ yok
Sonsuz küçük var	2	4	2	2	2	2	4	2	2	5	2	3	„ „ yok
Doğru	4	3	4	1	2	2	3	4	4	4	4	3	Yanlış

4. Öğrencinin Son Yapı İlişkileri Şekli



4. öğrencinin son yapı ilişkileri şemasında küme teorisi derslerinin etkisi açık bir şekilde görülmektedir. Özellikle ordinalite'nin tanımını vurgulayan yapı kümeleri dikkat çekicidir. “Farklı sonsuzlar vardır” yapısının “doğru” yapısı ile ilişkilendirilmesi de sonsuzluk ile ilgili farklı anlayışlarla karşılaşmanın bir sonucu gibidir. Son olarak araştırmacıya göre, “ordinallik var” ve “kardinallik var” yapılarının, aktüel sonsuzluk anlayışının bir parçası olarak birbirlerine yakın olmaları anlamlıdır.

3.8. SONUÇLAR VE YORUMLAR

1. Çalışma sonucunda matematikteki sonsuzluk gibi çok farklı yaklaşım ve anlayışların olduğu bir konuda RÇT metodolojisi bize öğrencilerin yapılarına sistematik bir şekilde ulaşma fırsatı sunmuştur. Bu çalışma RÇT metodolojinin, öğrencilerin üzerinde düşünmekte bile zorlandığı bir konuda uygulanabileceğini göstermiştir. Araştırmacı, bu tip çalışmaların Tirosh'un (1991) bahsettiği “sezgiselliğin derecelerini” ölçecek anlamlar geliştirme ihtiyacımızı karşılayabileceği düşüncesindedir.
2. Şimdiye kadar yapılan çalışmaların doğrudan matematikteki sonsuzluk konularını ele almaktan kaçındığı, sonsuzluk kavramının genellikle limit konusu ile beraber ele alındığı görülmüştür. Lise seviyesindeki öğrenciler ile çalışılarak Cantor'un teorisinin ele alındığı az sayıda çalışmaya rastlanmıştır. Bu çalışmanın, konu ile ilgili uzun ve temel matematik eğitimlerinin sonuna gelmiş olan doktora öğrencileri ile yapılan ilk çalışma olduğu düşünülmektedir. Aynı zamanda bu çalışma, olabildiğince Cantor'un teorisi ile beraber, standart olmayan analiz vb. sonsuzluk ile ilgili teorilerin kavram imajı olarak bir arada nasıl durduğunu göstermektedir. Araştırmacıya göre bu anlayışları bıçak gibi birbirinden kesin bir şekilde ayırmak mümkün değildir. Esas olarak, öğrencilerin düşüncelerine bu anlayışların hangi derecede hakim olduğu üzerinde durulmalıdır.

3. Öğrencilerin genelde potansiyel sonsuzluk anlayışına sahip olduğu, Sierpinska (1985) ve Petty'nin (1996) çalışmalarında kullandığı modele göre öğrencilerin genelde statik ve dinamik seviyede olduğu gözlenmiştir. Bir dönem alınan küme teorisi dersi öğrencilerin düşüncelerini aktüel sonsuzluk yönünde harekete geçirmiştir. Çalışma sonunda araştırmacı öğrencilerin genelde dinamik, kısmen aktüel seviyede olduğunu, fakat öğrencilerin çelişkilerinin devam ettiğini, diğer çalışmalarda olduğu gibi geçmişten gelen ve çevrelerinin etkisi ile oluşan anlayışların bilişsel engeller olarak devam ettiğini gözlemlemiştir.
4. Yapılan çalışmalardan da anlaşılacağı üzere insanların çevrelerindeki sonsuzluk ile ilgili örnekler, genelde bitmeyen bir süreç şeklinde olduğu için genelde öğrenciler potansiyel sonsuzluk anlayışına sahiptirler. Araştırmacıya göre, öğrenciler bu konuların işlendiği matematik dersleri sayesinde Cantor gibi farklı düşünebilir ve olaylara farklı bakabilirler. Araştırmacıya göre, buradaki önemli sorular şunlardır: “Orta öğretimde sonsuzluk ile ilgili verilen limit ve seriler konusunun veriliş biçimi ve özellikle ∞ simgesinin kullanımı ne kadar doğrudur?”, “Sonsuzluk kavramı ile ilgili konuların öğretimi; başta paradoks gibi gözüken sonuçları kabul etme, sezgisel düşünmenin zorlayıcı doğasının farkında olma, temel sezgilerini kontrol etmeye ihtiyacı olduğunu anlama, problem çözümü için açık teoremler kullanma gibi faydalarının olabileceği düşünülerek ne kadar dikkatli yapılmaktadır?” vb. Buna göre, orta öğretimde bu konuların öğretimi sadece sonsuzluktaki potansiyel anlayışta veya standart olmayan analize uygun bir bakışta olmamalıdır. Tirosh'un (1991) lisedeki öğrencilere karşılaştırmalar vererek yaptığı küme teorisi ile ilgili çalışmasında öğrencilerin aktüel sonsuzluk anlayışı doğrultusunda davranışlar gösterdiği belirlenmiştir. Okullarda, Cantor'a ait bakışa da yer verilerek sonsuzun, ∞ simgesi ile eşdeğer tutulması engellenebilir. Bu çalışmanın başında öğrencilerin tamamı, maddelerdeki $\alpha = \alpha + 1 = 1 + \alpha$ eşitliğinde sonsuz sayıyı ifade eden α yerine ∞ simgesini yerleştirmiştir. Bu şekilde öğrencilerin bu tip sayıları veya sonsuzla ilgili algoritmaları farklı değerlendirmeleri imkanı ellerinden alınmaktadır. Ayrıca lise müfredatımızda bu konuların halihazırdaki gibi verilmesi gerektiğine dair kesin bir ölçü yoktur.

5. Ayrıca araştırmanın gözlemlediğine göre öğrenciler ordinaliteyi kardinaliteye göre daha zor kavramaktadırlar. Araştırmanın görüşüne göre, ülkemizdeki matematik eğitimi programlarında ordinal sayılar konusu üzerinde pek fazla durulmaması, doğal sıralama dışında farklı sıralamalar ile karşılaşmamaları bunda etkili olabilir.
6. Öğrenciler genelde sonsuzluğa hakim olmayı sonsuzun bir sayı olmasına bağlamışlardır. Bu durum, kavramların sayısallaştırılarak kontrol edilebileceği sezgisini düşündürmektedir. Ayrıca öğrenciler farklı sonsuz kümelerin olduğu düşüncesini önceki bilgilerinden gelen sayılabilirlik ve sayılamazlık konusu ile açıklamaya çalışmışlardır. Doğal sayılar ve reel sayıların eleman sayıları düşünüldüğünde bu anlayış öğrenciler tarafından sezgisel olarak ele alınmaktadır.
7. Fischbein'in (2001) "sonsuzluğun hiç tükenmeyen kapasitesi" olarak tanımladığı "sonsuz hiç bitmeyen bir şeydir" anlayışının, farklı sonsuzluk anlayışları ile karşılaşmayan matematikçilerin temel anlayışlarından biri olduğu düşünülmektedir. Araştırmacı potansiyel sonsuzluk anlayışının delillerinden biri olan bu düşüncenin sezgisel olarak matematikçilerde de hakim olduğunu ileri sürmektedir.
8. Çalışmanın sonunda eğitiminde zorlanılan konularda dahi repertuar çizelge metodolojisinin; öğrencilerin konu imajlarını, bilişsel seviyelerini, yapılarını ve çelişen düşüncelerini ortaya çıkarmada başarılı olduğu, ayrıca konunun kritik yönlerinin belirlenmesinde oldukça faydalı olduğu görülmüştür. Öğrencilerin repertuar çizelgeleri çıkarılarak yapılarının ve yapıları arasındaki ilişkilerin belirlenmesi, öğrencilerin konuyu nasıl anladığını, daha önceden kritik olduğu belirlenen noktaları nasıl algıladıklarını açığa vurmaktadır.

BÖLÜM 4

İLKÖĞRETİM ÖĞRENCİLERİ İLE YAPILAN ÇALIŞMA

Doktora öğrencileri ile yapılan çalışma ile ileri yaş grubundaki matematik öğrencilerine ait farklı sonsuzluk kavramları araştırılmış ve repertuar çizelge tekniği sonsuzluk konusunda uygulanmıştır. Yapılacak bu çalışma ile de ilköğretim öğrencilerinin zihinlerinde yapılandığı farklı sonsuzluk kavramları üzerinde durulmuş ve iki yaş grubundaki öğrencilerin anlayışları arasında ilişki olup olmadığı araştırılmıştır.

4.1. Hazırlanan kısa filmler:

Filmler sosyal bilimlerde yapılan araştırmalarda sık sık kullanılmaktadır (Roberts, 2007). Matematik eğitiminde ise ilk defa uygulandığı düşünülmektedir. Araştırmacı bunun için uzun süre ilköğretim çağındaki öğrencilerin izlediği çizgi filmleri taramış ve içlerinde “sonsuzluk” kavramının kullanıldığı sahneleri belirleyerek kısa filmler hazırlamıştır. Ayrıca Flash 8 bilgisayar programı kullanılarak ilköğretim çağındaki çocukların anlayabileceği şekilde, sonsuzlukla ilgili bazı matematik konularının yer aldığı bir animasyon hazırlanmıştır. Filmlerin kullanılmasındaki amaç küçük yaş grubundaki öğrencilerin doğal davranabilmesini ve sorulara doğal ve kendi anladıkları şekliyle cevap verebilmelerini sağlamaktır. İlköğretim öğrencileri ile yapılan pilot çalışmalarda, öğrenciler için uzun süre sonsuzluk konusuyla ilgili konuşmanın zor ve sıkıcı olduğu görülmüş, sonsuzluk kavramı ile ilgili çizgi filmler ve animasyonlar ile öğrencinin konuya ilgisinin uzun süre canlı tutulabileceği düşünülmüştür. Yapılan görüşmeler boyunca öğrencilerin konuya ilgi ve motivasyonlarının korunabilmesi bu düşünceyi doğrulamaktadır. Araştırmada kullanılan filmler görüşmelerdeki seyretme sırasına göre aşağıda verilmiştir. Sonsuzluk konusu ile ilgili daha zor soruların sorulabileceği filmler ve kümeler gibi matematik konularını içeren animasyonlar araştırmacı tarafından görüşmenin son kısımlarına bırakılmıştır.

1. film: “Çikolata Fabrikası” filminde “sonsuzluk” ve “sonsuz” kelimelerinin geçtiği sahneler.



2. film: “Shrek 1-2” filmlerinde “sonsuzluk” ve “sonsuz” kelimelerinin geçtiği sahneler.



3. film: “Oyuncak Hikayesi” filminde “sonsuzluk ve ötesi” kelimesinin geçtiği sahneler.



4. film: İnternet sitelerinden indirilerek hazırlanan domino taşları ile ilgili kısa film.



5. film: Konu ile ilgili flash animasyonlarının birleştirilmesi ile elde edilen kısa film. Bu filmin konusu Tall'un bir makalesinden alınmış ve geliştirilmiştir. Araştırmacı, Tall'un makalede 5 yaşında olan kendi çocuğuna yönelttiği soruların seviye olarak ilköğretim çağındaki öğrencilere daha uygun olduğunu düşünmektedir.

4.2. Görüşmelerin Yapılması:

Bu çalışmada yarı-yapılandırılmış görüşme yöntemi ile bireysel görüşmeler yapılmıştır. Her bir görüşme iki bölümden oluşmuştur. İlk bölümde öğrencilere kısa filmler izlettirilirken önceden araştırmacının hazırladığı sorular yöneltmiştir. Genellikle her bir sorunun ardından film durdurulmuş ve sorunun tartışılması bitmeden filme devam edilmemiştir. Bu bölüm ortalama 40 dakika kadar sürmüştür. İkinci bölümde ise öğrencilerden hazırlanan bazı etkinlikleri yapmaları istenmiştir. Bu ikinci bölüm genellikle 25 dakika kadar sürmüş olsa da öğrencilerin seviyelerine göre süre

kısa veya uzun tutulmuş, bazı öğrencilere görmedikleri matematik konularından dolayı etkinliklerin tamamı verilmemiştir. Sonuç olarak görüşmeler 1 saat kadar sürmüştür. Öğrencilerin her birinin ailesinden izin alınmış ve görüşmeler genellikle öğrencinin kendi ev ortamında yapılmıştır. Araştırmacı bu durumun, öğrencilerin daha doğal olmasını sağladığını düşünmektedir. Yapılan bütün görüşmeler video ve teyp ile kaydedilmiş ve daha sonra araştırmacı tarafından yazıya dökülmüştür

4.3. Görüşmelerde Kullanılan Sorular:

Öğrencilere hazırlanan filmler seyrettirilirken elden geldiğince irdeleyici sorular sorulmaya çalışılmıştır. Bu sorulardaki amaç öğrencilerin sonsuzluk kavramı ile ilgili düşüncelerini ortaya çıkartmak ve Ne?, Neden?, Niçin?, Nasıl? gibi sorulara cevap aramaktır. Bu çalışmada öğrencilere sorulan sorular ve filmin kaçınıcı dakikasında sorulduğu aşağıda verilmiştir.

Çikolata fabrikası filminde sorulan sorular:

1. Çikolatadan yapılan bir saray en fazla ne kadar dayanır?
2. Bu saray ne kadar çikolatadan yapılmıştır? Sonsuz çikolatadan yapılsa saray ne kadar yer kaplar? Yiyerek bitirilebilir mi?
3. Çikolata fabrikası sonsuza dek kapandığına göre bir daha çalışabilir mi? (07.14)
4. Sonsuz ne kadar uzun bir süre (büyüklerin kastettiği) ? 1 yıl, 10 yıl, 100 yıl, ... (07.39)
5. Sonsuz diye bir şey var mı? Neden?
6. “Sonsuzluk” kelimesini ilk nerede duydun?
7. Sonsuz nasıl bir şey? Ne anlama geliyor?
8. Sonsuzluk deyince ne hissediyorsun?

Shrek filminde sorulan sorular:

1. “Devler sonsuza kadar mutlu yaşamıyor” demekle peri anne ne demek istiyor? Devler ne kadar yaşar? (01.36)
2. “sonsuz mutluluk” veya “sonsuz güzellik” iksiri ne işe yarar? (03.06) “Sonsuz mutluluk” ve “sonsuz güzellik” ile neyi kastediyor?
3. İksiri içerlerse ne kadar (gördüğünüz gibi) güzel kalacaklar? (05.39)
4. Sonsuz mutluluk iksiri içtikten sonra başka bir sonsuzluk iksiri daha içerse daha mı fazla mutlu olur?

- 5.Şimdi senin sonsuz kalemin olsun. Ben sana o kadar kalemin varken sonsuz kalem daha versem ne kadar kalemin olur?
6. Sonsuz kalem sayılabilir mi?
7. Senin sonsuz kalemin varken kalemlerinin yarısını alsam senin ne kadar kalemin kalır?
8. Bir kağıt şeridi veya uzun bir şeyi iki eş parçaya bölsem parçalar ne kadar uzun olur? Üç eş parçaya bölsem? 4 eş parça? Sonsuz parçaya bölsem parçalar ne kadar uzun olur?
9. Sende sonsuz parça varken, bir kâğıdı bölüp yine sonsuz parça elde etsek ve öncekilere eklessek ne kadar parçamız olur?
10. Prenses ne istiyor? Ne kadar mutlu yaşamak istiyor? Kaç yıl? (05.53) Sonsuzluğa ulaşılabilir mi?
- 11, Filmin sonunda “ Sonsuza kadar çirkin kaldılar” denildiğine göre, shrek ve ailesi kaç yıl çirkin kalmış? Yeniden güzel olmuş olabilirler mi? (07.28)

Oyuncak hikayesi filminde sorulan sorular:

- 1.Sonsuzluğun ötesinde ne var?
- 2.Sonsuzdan daha büyük bir şey olabilir mi?
- 3.Sende sonsuz kalem varken sana bir tane daha versem ne kadar kalemin olur?

Domino ile ilgili filmlerde sorulan sorular:

- 1.Sonsuz tane dominoyu yan yana dizip böyle bir şey yapsak ne olur?
- 2.Sana bir şeker versem, sonra bir daha, böyle sonsuza kadar hiç durmadan şeker vermeye devam etsem kaç şekerin olur?
3. Sana verdiğim ilk şeker kaçınıcı şekerdir? Sonraki şeker...? Sana sonsuz şeker versem verdiğim son şeker kaçınıcı olur? Peki bunların üzerine bir tane daha versem o kaçınıcı olur?

Animasyonlarda sorulan sorular:

- 1.Doğal sayılar, çift sayılar, tek sayılar torbalarında kaç tane sayı var?
- 2.Bu torbalardaki sayıların adetleri eşit mi? Sayılar birebir eşlenebilirler mi?
- 3.Sonsuz sayının olduğu bir torbadaki sayılar, sonsuz sayının olduğu başka bir torbaya atılınca bu torbada sonsuz sayı mı var? Yoksa daha fazla mı?
- 4.Sonsuz eleman ile sonsuz elemanı toplarsak ne kadar eleman elde edilir?

4.4. İlköğretim Öğrencileri ile Yapılan Görüşmelerin Analizi:

Analiz yapılırken olaylar, hareketler ve elde edilen veriler kavramlaştırılarak sınıflandırılmıştır. Sonsuzluk kavramını bireyin nasıl ele aldığı, nasıl düşündüğü, hangi anlayışların ne kadar sıklıkla ortaya çıktığı, nasıl değiştiği önemlidir. Strauss ve Corbin'in (1998) ifade ettiği gibi soyutlama, indirgeme ve ilişkilendirme teorik ve tarif edici (descriptive) kodlama arasındaki farktır.

Görüşmelerden sonra video ve teyp kayıtlarının dökümü çıkarılmış ve elde edilen bu veriler kodlanarak bir teori oluşturulmaya çalışılmıştır. Görüşmelerin yazılı metni parçalara ayrılarak her bir parça kodlanmış ve analiz edilmiştir. Bunun için sırasıyla açık, eksensel ve seçici kodlamaya başvurulmuş ve elde edilen sonuçlar özelliklerine göre şemalar ve tablolar ile gösterilmiştir. Bu çalışmada öğrenciler ile yapılan görüşmelerin yazılı dökümü, araştırmacının görüşmeleri analiz etmesi sonucunda elde ettiği belli başlı notlar ve seçici kodlama sonucunda elde edilen şema ve tablolar yer almaktadır.

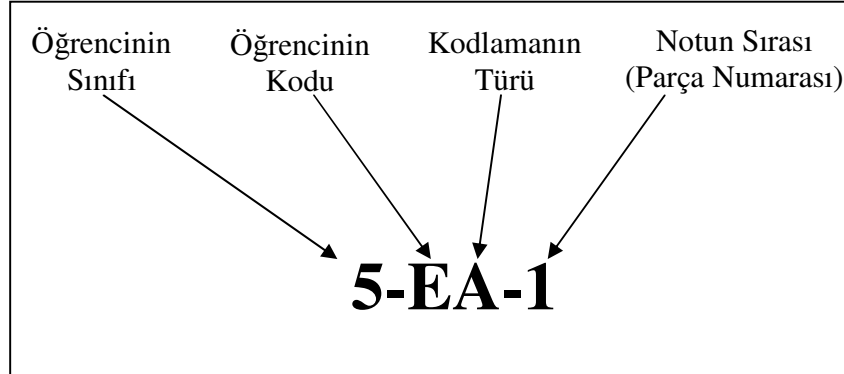
4.5. İlköğretim Öğrencileri ile Yapılan Görüşmeler:

4.5.a. BEŞİNCİ SINIFLAR

Görüşülen öğrencilerin hepsi aynı okula gidiyorlardı ve hepsinin matematik ders notu 5 ti. Fakat müfredatlarında kümeler konusunun olmamasından ve bazı sayı kümeleri yeterince işlenmediğinden dolayı etkinliklerin bazıları bu öğrenciler ile yapılamamıştır. Örneğin 5. sınıftaki bu öğrenciler tam sayıları ve rasyonel sayıları daha tanınamışlardı ve kümelerle yapılan işlemlere yabancıydılar.

Öğrenciler ile soracak ve tartışılacak birşey kalmayınca kadar görüşülmüş ve her bir görüşme ortalama 1 saat sürmüştür. Gerekli görüldüğünde öğrencilerle tekrar görüşüldüğü de olmuştur. Öğrencilere ait görüşmelerin içeriği ve alınan notlar aşağıdadır. Notlar için özel bir kodlama sistemi kullanılmıştır. Bu kodlama sistemi araştırmacının aldığı notları kullanmasını kolaylaştırmıştır. Aşağıdaki şekil bu kodlama sistemini göstermektedir. Kodlama türü O (Open-Açık), A (Axial-Eksensel) ve S (Selective-Seçici) olabilmektedir.

Şekil 11. Notların Adlandırılmasını Gösteren Şekil



Araştırmacı yaptığı görüşmeleri yazıya dökmüş ve bu yazılı dokümanları bölümlere ayırarak her birinin mikroanalizini yapmıştır. Öğrencilerle yapılan görüşmelerin dökümleri, bölümler halinde aşağıda verilmiştir. Öğrencilerle yapılan görüşmelere ait bu bölümlerin her birinden sonra o bölümle ilgili örnek kodlama notları yer almaktadır. Bu notlarda belirlenen kategoriler parantez içinde büyük harfle yazılmıştır.

E Öğrencisi ile Yapılan Görüşmenin Dökümleri ve Alınan Notlar:

E, matematik dersinde başarılı olan öğrencilerden biriydi. Görüşmenin başından sonuna kadar filmleri ve soruları dikkatle takip etti ve cevaplandırmaya çalıştı.

Çikolata fabrikası filmi:

- Çikolatadan yapılan bir saray en fazla ne kadar dayanır?

C: O havaya göre 1 gün bile dayanmaz. Kutuplarda olsa baya dayanır, bin yıl falan dayanır.

- Bu saray ne kadar çikolatadan yapılmıştır? (2,5 ton.) Sonsuz çikolatadan yapılsa saray ne kadar yer kaplar?

C: Herhalde bir 500 vardır. Metre alan

Yiyerek bitirilebilir mi?

C:Hayır.

- Çikolata fabrikası sonsuza dek kapandığına göre bir daha çalışabilir mi? (07.14)

C: O zaman çalışmaz. Çünkü sonsuza dek kapatmış.

- Sonsuz ne kadar uzun bir süre (büyüklerin kastettiği) ?

C:1 yıl (10 yıl olamaz mı?) olabilir. (100 yıl? ... (07.39)) ...

- Sonsuz diye bir şey var mı? Neden?

“Sonsuzluk” kelimesini ilk nerede duydun?

C: Teyzemden duydum. Bu lunapark sonsuza kadar açık.Yine geliriz dedi. (Teyzen bundan ne kadar bir süreyi kastetti?) O zaman 1,5 yıl daha açıktı.

- Sonsuz nasıl bir şey? Ne anlama geliyor?

C: Sonsuz demek uzun bir süre gidebilen demek. (Biter mi o süre?) Bitmez çünkü sonsuza kadar gidiyor.

- Sonsuzluk deyince ne hissediyorsun?

C: Sonsuzluk deyince bir yer var o sonsuza kadar açık kalıyor yani sonsuza kadar gidiyor.

Shrek filmi:

- “Devler sonsuza kadar mutlu yaşamıyor” demekle peri anne ne demek istiyor?

Devler ne kadar yaşar? (01.36)

C:Burada devler sonsuza kadar yaşamıyor, hiçbir yerde dev yok, kızın hayatından çık gibi bir şey diyor. Kısa yaşar. Örneğin 1 yıl

-Sonsuza kadar yaşarsa kaç yıl?

C: 20 yıl.

-30 olmaz mı? (Olur) 40 yıl?

C: 40, 50 de olur. Böyle sonsuza kadar gider.

Gömülü teorinin sistematik çalışma biçimine uygun olarak görüşmeler analiz edilmiş, teorik ve işlemsel bir çok not yazılmıştır. Görüşmelerin her bir bölümünün nasıl kodlandığı hakkında bir fikir vermesi için açık, eksensel ve seçici kodlamaların sonucunda elde edilen bazı kod notlarına aşağıda yer verilmiştir. Daha önce anlatıldığı gibi her bir kod notu özelliğine göre adlandırılmış ve elde edilen merkezi kategorilere, fenomenlere kaynak olmuştur. Kategoriler ile ilgili verilen tablolarda, kategorilerin görüşmenin hangi bölümüne ve hangi kod notuna dayandığı bu adlandırma sayesinde anlaşılabilir. Örneğin aşağıdaki kod notları, kodu E olan bir beşinci sınıf öğrencisi ile yapılan görüşmenin birinci bölümüne aittir. Görüşmenin dökümleri veri yoğunluğuna göre bölümelere ayrıldıktan sonra yukarıda verilen birinci bölüm; araştırmacıya göre açık, eksensel ve seçici kodlama ile analiz edilmiş ve aşağıdaki notlar yazılmıştır. Bu notlar mikroanaliz ile başlayan uzun bir sürecin nasıl gerçekleştiğini ifade eden örneklerdir.

5-E0-1

Eksik de olsa bir alan ölçüsü ile sonsuz çikolatadan sarayı ifade ediyor “bir 500 vardır” fakat yiyerek bitiremem bir çelişki gibi. Bu sonsuz çikolatadan yapılan sarayı düşünemediği için ve “hayır” cevabını vermesinin nedeninin sarayı yemeye gücü yetmediği için olabilir. Çünkü sonsuz çok büyük bir şey. (SONSUZ ÇOK BÜYÜK BİR MİKTAR İÇİN KULLANILIR) Sonsuz süreyi belirli bir sayı ile ifade edemedi. Büyük olan her türlü miktar sonsuz büyüklüğü karşılıyor gibi. (SONSUZ BELİRLİ BİR SAYI DEĞİL--- Belirli bir sayı olmasının tersi) “Sonsuz demek uzun bir süre gidebilen demek.” ifadesi de öncekilere uyumlu. (SONSUZ UZUN SÜRE GİDEBİLEN DEMEK— Uzun süre gidemeyenin tersi) “Bitmez çünkü sonsuza kadar gidiyor.”(SONSUZA KADAR OLAN BİTMEZ- Bitmesinin tersi) Sonsuzluğu bir deyim olarak açıklıyor. Pek sayısal veya ölçme aracı gibi düşündüğü söylenemez. “Sonsuzluk deyince bir yer var o sonsuza kadar açık kalıyor yani sonsuza kadar gidiyor.” Kısaca sonsuz çok büyük devam eden bir şey. Sonlu bir süreyi 1 yıl ile ifade ederken sonsuz bir süreyi 20 yıl ile ifade etmesi ilginç. 20 yıl insan hayatı için uzun bir süre. Sonsuza kadar ile sadece bitmeyen çok uzun bir süreyi kastediyor gibi.

5-EA-1

Sonsuz bir büyüklüğü zihninde canlandıramıyor (Zihninde canlandırabilmesinin tersi), sonsuzu genelde belirsiz çok büyük şeyler için kullanıyor. (Belirsizlik derecesi) Sonsuz belirli bir sayı ile ifade edilebilir veya edemez. Sonsuz uzun süre gidebilen demek. (Uzun süre devam edemeyenin tersi). Sonsuza kadar giden bitmez (Biter’in tersi.) Sonsuza kadar’ı bitmeyen çok uzun süre anlamında bir deyim gibi kullanıyor.

5-ES-1

Sonsuz çok büyük miktar için kullanılır, belirli bir sayı değil, sonsuz uzun süre gidebilen bitmeyen bir şey, bir deyim gibi kullanılıyor (ÇOK BÜYÜK BİTMEYEN)

Aşağıdaki bölüm E öğrencisi ile yapılan görüşmenin devamıdır. Bu ikinci bölümün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

- “sonsuz mutluluk” veya “sonsuz güzellik” iksiri ne işe yarar? (03.06) - “Sonsuz mutluluk” ve “sonsuz güzellik” ile neyi kastediyor?

C: Şimdi o iksiri içen sonsuz mutlu olur.

- İksiri içerlerse ne kadar (gördüğünüz gibi) güzel kalacaklar? (05.39)**Ölene kadar.**
(Hiç ölme?) **Benim tahminim iki yıl falan.**

- 3 yıl, 5 yıl, 10 yıl olmaz mı?

C: Onlar da olabilir.

-Tam bilmek zor herhalde?

C:Evet.

- Sonsuz mutluluk iksiri içtikten sonra başka bir sonsuzluk iksiri daha içerse daha mı fazla mutlu olur?

C: Birazcık daha böyle güzelleşir falan.

-Ne kadar güzelleşir?

C: Toplayınca mı? (Evet) 20 yıl falan.

- Diğer türlü içmeseydi.

C: 10 yıl. (İki katıydı)

- Şimdi senin sonsuz kalemin olsun. Ben sana o kadar kalemin varken sonsuz kalem daha versem ne kadar kalemin olur?

C:Sonsuz kalem olur yine öyle.

-Neden aynı olur. Sonsuz kalemin zaten vardı?

C: Bilmiyorum ki?

-Sonsuz kalem sayılabilir mi?

C: Sayılamaz. Sonsuz çünkü. (1, 2,3 kalem diye sayamaz mıyım?) Sayamazsın. Çünkü çok zaman alır.

- Senin sonsuz kalemin varken kalemlerinin yarısını alsam senin ne kadar kalemin kalır?

C: Sonsuz kalemim varken Onun yarısı kalır. (Ama onun yarısı kaç tane?) 500 falan...

-1000 olmaz mı? Sonsuz kalem kaç tane ki zaten?

C: Sonsuzun sayısı belli değil.

-Yarısını alınca belli olur mu?

C: (Tereddütle) Belli olur. (Ne kadar olur?) Hmm 50 000...

5-E0-2

Gerçek hayatta sonsuz bir süreyi görmediği için sonsuzu belirli bir şey ile modelleyemiyor. Sonsuz mutlu olmayı “ölene kadar” ile ifade etmesi bunu pekiştiriyor.

(SONSUZA GERÇEK HAYATTA BELİRLİ BİR ÖRNEK YOK) “iki yıl falan” diye sonsuz süreyi tahmin etmeye çalışıyor. Diğer sayısal ifadeleri de kabul etmesinden anlaşılacağı üzere (SONSUZ BELİRSİZ BİR ŞEY).(Belirsizlik derecesi) Okeylediği gibi tam bilmek zor. Sonsuz mutluluk bir iksir daha içince iki katına çıkarken sonsuz kaleme sonsuz kalem ekleyince yine sonsuz kalem oluyor. İnsan ömrü ile ilişkilendirdiği için Sonsuz mutluluk süresini sınırlı bir büyüklük gibi ele almış olabilir. Buna göre sonlu sayılar gibi iki katı diyor fakat sonsuz kalemin iki katına yine sonsuz demesi ilginç. (SONSUZ EN BÜYÜK MİKTAR) Demek ki burada sonsuzu en büyük miktar gibi algıladı. Sonsuz kalem çok zaman aldığı için sayılamaz. Saymaya gücü yetmez.(SONSUZU SAYMAYA GÜÇ YETMEZ) Sonsuzun yarısını sonlu sayılar gibi daha az olarak değerlendirdi fakat tereddütle belli olur dese de belirli bir sayı ile ifade edemedi. Yine çok büyük bir şey gibi düşünüyor. “Sonsuzun sayısı belli değil” olduğuna göre sonsuzun yarısının da tam belli olmaması normal. (Sonsuzun yarısı sonsuzdan daha az- yine sonsuz olmasının tersi) Kendine göre büyük bir sayı attığına göre (Sonsuzun yarısı da çok büyük bir şey)

5-EA-2

Sonsuzun gerçek hayatta belirli bir örneği yok (Belirli bir örneğinin olmasının tersi) Sonsuz belirsiz bir şey (Belirsizlik derecesi) Sonsuz en büyük miktar (Sonsuzun en büyük miktar olmamasının tersi). Sonsuzu saymaya güç yetmez veya yeter. Sonsuzun yarısı sonsuz kadar değil, ona göre sonsuzdan daha az. Sonsuzun yarısı belirsiz çok büyük bir şey veya belirli, sınırlı bir büyüklük.

5-ES-2

Sonsuzun gerçek hayatta belirli bir örneği yok, Sonsuz belirsiz bir şey, Sonsuz en büyük miktar, Sonsuzu saymaya güç yetmez (SONSUZ TOPLANDIĞINDA BELİRSİZ YUTAN ELEMAN) Sonsuzun yarısı da sonsuzdan daha az belirsiz bir şey. Burada sonlu sayılar gibi düşünüyor.

Üçüncü bölümün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

- Bir kağıt şeridi veya uzun bir şeyi iki eş parçaya bölsem parçalar ne kadar uzun olur?(C: 5) 4 eş parça? (2,5) Sonsuz parçaya bölsem parçalar ne kadar uzun olur?

C: Buçuk veya 1 santim.(Onu da bölsem?) 1 santimi bölersek buçuk olur. (Durmadan bölüyorum, bin 2 bin defa değil?) O zaman karışır ama.

-Ne karışır? Ne olur?

C:... (İşin sonu gelmiyor mu?) Başını salladı.

- Sende sonsuz parça varken, bir kâğıdı bölüp yine sonsuz parça elde etmek ve öncekilere eklemek ne kadar parçamız olur?

5-EO-3

Sonsuz parçayı düşünemediği gibi sonsuza kadar bölmeyi durmadan bölmeye devam etme gibi algılıyor. (SONSUZA KADAR BÖLMEK DEVAMLILIK BÖLMEK ANLAMINDA) Karışmasının sebebi uzunluğu hesaplayamaması vb. olabilir. Sonsuz parçaya bölmenin sonucunda ne olacağını bilemiyor. (SONSUZ PARÇAYA BÖLME SONU GELMEYEN BİR İŞLEM)

5-EA-3

Sonuz parçaya bölmek anlaşıyor veya anlaşılmıyor. Sonsuza kadar bölmenin sonu yok, devamlı bölmek anlamında. (Sonsuza kadar bölmenin bir sonunun olmasının tersi)

5-ES-3

Sonuz parçaya bölmek anlaşılmıyor, sonsuz parçaya bölmek sonu gelmeyen devamlı yapılan bir şey. Bu durumda (SONSUZA BÖLMENİN SONU GELMEZ)

Dördüncü bölümün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

- Prenses ne istiyor? Ne kadar mutlu yaşamak istiyor? Kaç yıl? (05.53)

C: Prenses. sonsuza dek.

-Kaç yılı kastediyor burada?

C: Sonsuz sayı.

-Sonsuz sayı dediğin ne?

C: 60 yıl (70 olmaz mı?) Olur 80 de olur.

-Peki sonu var mı?

C: Sonu yok.

- Sonsuzluğa ulaşılabilir mi?

C: Ulaşılır.(Nasıl?)Çok mutlu olurlar.

-Fakat sonu olmaz dedik nasıl ulaşacaklar?

C: O zaman birazcık zor.

- Filmin sonunda “ Sonsuza kadar çirkin kaldılar” denildiğine göre, shrek ve ailesi kaç yıl çirkin kalmış?

C: Sonsuza dek.

-Yeniden güzel olmuş olabilirler mi? (07.28)

C: I Ih. (Hayır anlamında)

5-EO-4

Prencesin sonsuz mutlu olmasına sonsuz sayı diyor fakat sonuz sayı dediği belirli bir sayı değil, (SONSUZ SAYI BELİRLİ BİR SAYI DEĞİL) sonu olmayan çok büyük bir şey gibi. (SONSUZ BÜYÜKLÜĞÜN SONU YOK- Sonu olmasının tersi). Sonsuzluğa ulaşılır dedikten sonra çok mutlu olurlar demesi, sonsuzluğa ulaşmayı prensesin çok mutlu olması ile özdeşleştirdiğini gösteriyor. Sonsuz büyüklük ile ilgili argümanları hatırlatıldığında “O zaman birazcık zor” diyor. (SONSUZLUĞA ULAŞILMASI BİRAZ ZOR) Çünkü sonsuz büyüklüğün sonu yok idi.

5-EA-4

Sonsuz sayı belirli bir sayı veya değil. Sonsuz büyüklüğün sonu olup olmaması. Sonsuzluğa ulaşılması biraz zor veya ulaşılması biraz zor değil, sonsuzluğa ulaşılabilir.

5-ES-4

Sonsuz sayı belirli bir sayı değil. Sonsuz büyüklüğün sonu olmadığından sonsuzluğa ulaşılması biraz zor. (SONU OLMAYAN ULAŞILMASI ZOR BİR ŞEY)

Beşinci bölümün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

Oyuncak hikayesi filmi:

- Sonsuzluğun ötesinde ne var?

C: Sonsuzluğun ötesinde daha başka hayatlar var. Yani daha başka şeyler bekliyor onları?

- Ne bekliyor?

C: Yani mesela, sonsuza kadar iyi yaşadı ise sonsuzun ötesinde kötü yaşayabilir mesela.

-Sonsuzluğun ötesi ne demek?

C: Yani sonsuzluktan birazcık daha fazla yaşamak.

-Peki sonsuzdan daha büyük bir şey olabilir mi?

C: Olabilir. Sonsuzun ötesi diyor çünkü.

- Sende sonsuz kalem varken sana bir tane daha versem ne kadar kalemin olur?

C: Sonsuzluğun ötesi.

-Peki.1 tane daha versem?

C: Aynı.

-Değişmez mi hiç?

C. Hayır anlamında başını salladı:

-Verdiğim kaleme sonsuzluğun ötesi mi diyeceğiz?

C: Hayır bir rakam... Zaten sonsuz kalemim varmış, bunu ekleyince yine sonsuz kalemim olur, sonsuz kalem devam eder.

-Sonsuzluğun ötesinin de çok bir geçerliliği yok o zaman?

C: Çı.

5-E0-5

Sonsuzluğun ötesini öldükten sonra gibi anlamış görüliyor. “sonsuza kadar iyi yaşadı ise sonsuzun ötesinde kötü yaşayabilir” fakat sonsuzda 1 fazla olan kalemlere kalem ekledikçe sonsuzun ötesinin değişmemesi sonsuzluğun ötesini yine sonsuz gibi çok büyük bir miktar olarak algıladığını gösteriyor.(SONSUZLUĞUN ÖTESİ SONSUZ GİBİ EN BÜYÜK BİR ŞEY) Sonsuz yerine sonsuzluğun ötesini koymuş gibi. Sonsuz kaleme bir ekleyince yine sonsuz kalem olması bunu doğruluyor. (SONSUZ+1=SONSUZ) Daha sonra sonsuzluğun ötesinin pek bir geçerliliğinin olmadığını onaylaması, sonsuzluğun ötesini sonsuzdan daha büyük bir büyüklük veya sayı değil de sonsuz gibi çok büyük belirsiz miktarlar için kullandığını gösteriyor. Aslında sonsuz ile aynı kavram gibi.

5-EA-5

Sonsuzluğun ötesi sonsuz gibidir veya değildir. Sonsuzluğun ötesi sonsuz gibi en büyük miktardır. En büyük miktar olmamasının tersi. Sonsuzun bir fazlası yine sonsuzdur. (Sonsuzdan farklı olmasının tersi). Sonsuzluğun ötesi belirsiz çok büyük bir şey veya değil.

5-ES-5

Sonsuzluğun ötesi sonsuz gibidir, en büyük miktardır, Sonsuzun bir fazlası yine sonsuzdur, Sonsuzluğun ötesi belirsiz çok büyük bir şey (SONSUZLUĞUN ÖTESİ SONSUZ GİBİDİR)

Altıncı bölümün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

Domino:

- Sonsuz tane dominoyu yan yana dizip böyle bir şey yapsak ne olur?

C: Hepsi devrilmez çünkü sonsuz

-Ama hepsi sırayla devriliyor?

C: Tabi arkada kalanlar devrilir. Ama taş devam eder. Çünkü sonsuza kadar sona ulaşamaz.

- Sana bir şeker versem, sonra bir daha, böyle sonsuza kadar hiç durmadan şeker vermeye devam etsem kaç şekerin olur?

C: Sonsuz şekerim olur.

- Sana verdiğim ilk şeker kaçınıcı şekerdir? (Birinci...) Sonraki şeker...? Sana sonsuz şeker versem verdiğim son şeker kaçınıcı olur?

C: Sonuncu

-Rakam olarak?

C: Hiçbir şey olmaz. Sonsuza kadar gidiyor çünkü.

-Ama bitmez mi hiç.

C: Verdin bitti. (Bilmiyorum) Bitmez. Sonsuz bitmez.

-Peki sonsuz şekerin olduğunu düşün, bunların üzerine bir tane daha versem o kaçınıcı olur?

C: Aynen sonsuz devam eder.

5-E0-6

Sonsuz dominonun hepsi devrilmediğinden sonsuza kadar devrilmeye devam ederse sona ulaşamaz. (Sona ulaşabilir'in tersi) Sonsuz şekerin sonuncusu olur. Herhalde ya araştırmacı sonuncu dediği için ya da sonsuzu belirsiz de olsa çok büyük bir büyüklük olarak değerlendirdiği için olabilir. Fakat rakam olarak "hiçbir şey olmaz. Sonsuza kadar gidiyor çünkü." Burada rakam dediği bir sayı. (SONSUZ SAYI DEĞİL) Sonsuza kadar gitmesi durmadan devam ettiğini gösteriyor. (DURMADAN DEVAM EDİYOR), bir süreç gibi. (SONSUZ BİTMEZ) sonsuz + 1 de bitmeyen belirsiz çok büyük bir şey olduğuna göre ona da sonsuz denilebilir.

5-EA-6

Sonsuz bir büyüklükte sona ulaşılabilir veya ulaşamaz. Sonsuz belirli bir sayı değil. (Sayı olmasının tersi) Sonsuz durmadan devam ettiğine göre bitmez. (Biten sınırlı bir büyüklük olmasının tersi) Sonsuz+1, sonsuzdur.(Sonsuzdan farklı olmasının tersi)

5-ES-6

Sonsuz bir büyüklükte sona ulaşamaz, Sonsuz belirli bir sayı değil, Sonsuz durmadan devam ettiğine göre bitmez, Sonsuz+1, sonsuzdur.(SONSUZ BİTMEYEN VE ULAŞILAMAYAN)

Öğrenci altıncı bölümdeki sorular hakkında fazla bir şey söylemediği için bu bölümle ilgili sadece araştırmacının gözlemleri yazılmıştır. Araştırmacıya göre, bu bölümle ilgili kodlam yapacak kadar yeterli veri toplanamamıştır.

Animasyon:

- Doğal sayılar, çift sayılar, tek sayılar torbalarında kaçar tane sayı var?

(Sayı kümeleri zayıf, üç noktanın ne anlama geldiği bilinmiyor)

- Bu torbalardaki sayıların adetleri eşit mi? Sayılar birebir eşlenebilirler mi?

(1-1 eşlemede 8 in karşısına 10 koydu.1-1 eşlemeyi anlaması zor gibi)

- Sonsuz sayının olduğu bir torbadaki sayılar, sonsuz sayının olduğu başka bir torbaya atılınca bu torbada sonsuz sayı mı var? Yoksa daha fazla mı?

(Doğal sayıların genel olarak nasıl gösterileceği bilinmiyor)

- Sonsuz eleman ile sonsuz elemanı toplarsak ne kadar eleman elde edilir?

Ş Öğrencisi ile Yapılan Görüşmenin Dökümleri ve Alınan Notlar:

Ş de matematik dersinde başarılı olan öğrencilerden biriydi. Görüşmenin başından sonuna kadar filmleri ve soruları dikkatle takip etti ve cevaplandırmaya çalıştı. Ayrıca yanında amcası olmasına rağmen rahat davranması araştırmacının ilgisini çekti.

Birinci bölümün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

Çikolata fabrikası filmi:

- *Çikolatadan yapılan bir saray en fazla ne kadar dayanır?*

C: Bence, az.

- *Bu saray ne kadar çikolatadan yapılmıştır? (Tonlarca, milyarlarca) Sonsuz çikolatadan yapılsa saray ne kadar yer kaplar?*

C: Her yeri kaplar. Dünyayı kaplar, uzayı da kaplar.

-*Yiyerek bitirilebilir mi?*

C:...

- *Çikolata fabrikası sonsuza dek kapandığına göre bir daha çalışabilir mi? (07.14)*

C:Açılamaz.

- *Sonsuz ne kadar uzun bir süre (büyüklerin kastettiği) ? 1 yıl, 10 yıl, 100 yıl, ... (07.39)*

C: Sonu olmayandır. Dünya ne zaman yok olursa... Sonsuzun sınırı yoktur.

Anlatamam yani

-*Sonsuzu ne olarak kullanıyoruz?*

C: Sonsuzu bir deyim olarak kullanıyoruz.

- *Sonsuz diye bir şey var mı? Neden?*

C:Yok bence.

- *“Sonsuzluk” kelimesini ilk nerede duydun?*

C:Evde duymuşumdur herhalde.

- *Sonsuz nasıl bir şey? Ne anlama geliyor?*

C: Sonu olmayan anlamına geliyor. Başka bir anlamda kullanılmıyor.

- *Sonsuzluk deyince ne hissediyorsun?*

C: Başka bir kelime bulamayınca da sonsuz diye şey yaparlar. Deyim olarak da kullanırlar, şaka olarak da kullanırlar. (Sonsuza kadar kapalı kalma mı) Zor çıkarsın anlamında.

Shrek filmi:

- “Devler sonsuza kadar mutlu yaşamıyor” demekle peri anne ne demek istiyor?
Devler ne kadar yaşar? (01.36)

**C: Hep mutlu yaşar. Kaç yıl bilmem. Sonsuza kadar yaşar. İştten çok memnundur.
Mutluluğun zor bozulacağına inanıyorsa sonsuza kadar mutlu yaşar der.**

- “sonsuz mutluluk” veya “sonsuz güzellik” iksiri ne işe yarar? (03.06) “Sonsuz mutluluk” ve “sonsuz güzellik” ile neyi kastediyor?

**C:Sonsuza kadar demek... Öyle bir şey varsa olunur ama (Bu masal ama)
Sonsuzu zamanla ölçemiyoruz (Tesirini bilemem öyle mi) Evet**

5-ŞO-1

Sonsuz çikolatadan yapılan saray için, “Her yeri kaplar. Dünyayı kaplar, uzayı da kaplar.” demesi sonsuz bir büyüklüğün sınırlı olmadığını belirtiyor. Uzayı kaplayan bir saray bir çocuğa göre mantıklı olmayabilir fakat daha çok sonsuz büyüklüğü vurguluyor gibi.Sonsuz sarayı zihninde canlandıramadığı için yiyerek bitirilebileceğine karar verememesi normal. Sonraki cümlelerinde netleşiyor “Sonu olmayandır. Dünya ne zaman yok olursa... Sonsuzun sınırı yoktur. Anlatamam yani” (SONSUZUN SINIRI YOKTUR). Ona göre sonsuz sonu olmayan anlamında bir deyim veya kavram. (SONSUZ BİR DEYİM) “Dünya ne zaman yok olursa,...,Öyle bir şey varsa olunur ama...” gibi ifadelerine göre sonsuzun dünyada bir örneği yok gibi. (SONSUZUN DÜNYADA ÖRNEĞİ YOK) “Mutluluğun zor bozulacağına inanıyorsa sonsuza kadar mutlu yaşar der.” ifadesine göre uzun süre devam eden işler için sonsuza kadar kullanılıyor. Belirli bir süresi yok. (SONSUZA KADAR UZUN SÜRE DEVAM EDEN BİR ŞEY) Çünkü ölçülebilen bir şey değil. (SONSUZ ÖLÇÜLEMEZ)

5-ŞA-1

Sonsuzun sınırı yoktur. (Sınırı olmasının tersi) Sonsuz daha çok bir deyim veya kavram olarak kullanıyor. Sonsuz bir deyim veya değil. Sonsuzun dünyada örneği yok veya var. Sonsuza kadar ölçülemeyen ve uzun süre devam eden bir süre. Ölçülebilen belirli bir süre de olabilirdi.

5-ŞS-1

Sonsuz büyüklüğün dünyada örneği yok. Buna göre, ölçülemeyen, sınırı olmayan çok uzun veya çok büyük bir şeyi ifade eden bir deyim. (SINIRI OLMAYAN ANLAMINDA BİR DEYİM)

İkinci bölümün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

- Sonsuz mutluluk iksiri içtikten sonra başka bir sonsuzluk iksiri daha içerse daha mı fazla mutlu olur?

C: Yoo. aynı güzellikte olur bence bir şey değişmez. Zaten sonsuz olduğu için sonsuz daha sonsuz onu anlatamazsın zaten.

- Şimdi senin sonsuz kalemin olsun. Ben sana o kadar kalemin varken sonsuz kalem daha versem ne kadar kalemin olur?

C: Değişmez. Bilmem olmaz gibi geliyor bana. İki sonsuz. (Artış olur mu olmaz mı?) Olur.

-Neden olmaz?

C: Zaten sonsuz kalemim var.

-Sonsuz kalem sayılabilir mi?

C: Hayır. Sonsuz çünkü.

-1,2,3 diye saysam?

C: Zaten sayılar sonsuz.

- Senin sonsuz kalemin varken kalemlerinin yarısını alsam senin ne kadar kalemin kalır?

C: Sonsuz kalem alırsam yarı sonsuz kalır.

-O kaç tanedir?

C: Zaten sayılar sonsuz ya. Bilemiyorum. Uzay sonsuz ikiye bölsem. Yarı sonsuz kalem...

-Öyle şey mi olur?

C: Evet.

5-ŞO-2

Sonsuzu anlatamadığımıza göre, “sonsuz daha sonsuzu” da anlatamayız. Anlatamadığımız bu büyüklüklere genel olarak yine sonsuz diyebiliriz. Burada sonsuz belirsiz çok büyük bir şey gibi. (SONSUZ DAHA SONSUZ YİNE ANLATILAMAYAN ÇOK BÜYÜK BİR ŞEY OLAN SONSUZ) Okul matematiğinin etkisi ile (SONSUZ+SONSUZ=İKİ SONSUZ) oluyor. Artış olması mantıklı geliyor. Fakat sezgilerine göre değişme olmaz gibi. (SONSUZA SONSUZ EKLENSE BİR ŞEY

DEĞİŞTİRMEZ)Sonsuz kalemi sonsuz olduğu için sayılamaz olarak düşünüyor. Onu saymaya yarayacak sayılar da sonsuz. Burada sayma saymaya güç yetme anlamında gibi. Sayıların yetmemesi veya onlarında sonsuz olması durumu söz konusu. (SONSUZ SAYILAMAZ) Yarı sonsuz kalemde sonsuz gibi bilinmeyen belirsiz bir şey.(SONSUZUN YARISI DA SONSUZ GİBİ)

5-ŞA-2

Sonsuza sonsuz eklenmesi anlatılamayan bir şeydir (Anlatılabilen veya açıklanabilen bir şeyin tersi) Sonsuz + sonsuz anlatılamayan çok büyük bir şey veya değil. Sonsuza sonsuz eklense bir şey değişir veya değişmez. Sonsuz + sonsuz = iki sonsuz veya değil. Sayılarda zaten sonsuz olduğundan sonsuz sayılamaz. (Sayılabilir 'in tersi) Sonsuzun yarısı da sonsuz gibi belirsiz çok büyük bir şey. (Sonsuzdan farklı belirli bir büyüklüğün tersi)

5-ŞS-2

Sonsuz sayılamaz, belirsiz bir şey, “sonsuz daha sonsuz” anlatılabilecek veya açıklanabilecek bir şey değil. Sonsuzun yarısı da sonsuz gibi belirsiz çok büyük bir şey, Sonsuza sonsuz eklenmesi bir şey değiştirmez. (SONSUZ BİR BÜYÜKLÜĞÜN İKİ KATININ VEYA YARISININ ALINMASI SONSUZ BÜYÜKLÜĞÜ DEĞİŞTİRMEZ)

Üçüncü bölümün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

- Bir kağıt şeridi veya uzun bir şeyi iki eş parçaya bölsem parçalar ne kadar uzun olur? (5 cm) Üç eş parçaya bölsem? 4 eş parça? (2,5 cm...1,25..0 tam onda ..) Sonsuz parçaya bölsem parçalar ne kadar uzun olur?

C: Sonsuz parçaya ayıramazsın ki. Kağıt zaten 10 cm. naometre olur herhalde.Yine bölünürse toz olur.

-0 olur mu?

C: Olur.

-O zaman yok olur.

C: Biraz büyük olabilir. Çok az büyük.

-Onu da bölsem ikiye?

C: Ufak parçalar olur.

- Sende sonsuz parça varken, bir kâğıdı bölüp yine sonsuz parça elde etsek ve öncekilere eklessek ne kadar parçamız olur?

C: Sonsuz parçam olur. Bir sonsuz daha versen artmaz. Sonsuzun sayısını ölçemiyoruz zaten.

5-ŞO-3

Önceki söylemlerine göre sonsuz belirli bir sayı olmadığı için, açıklanamadığı için (BİR BÜTÜN SONSUZ PAÇAYA AYRILAMAZ--Ayrılabilirin tersi) Sonsuza kadar bölme işlemi bir türlü bitmez. Yok olması başta mantıklı gelse de sonuçta sıfırdan biraz büyük bir şey olur. (SONSUZA KADAR BÖLME BİTMEYEN BİR ŞEY) Sonuçta belirli küçük bir şey olabileceğini düşünüyor. Bu seviyede her şeyden küçük bir sonsuz küçüğün delilini aramak mantıksız gibi. Fakat dikkat edilmesi gereken bir sıfır olur anlayışı var. (BİR BÜTÜN SONSUZA KADAR BÖLÜNÜRSE YOK OLUR) Sonsuz parçaya sonsuz parça eklenirse artmaz. Çünkü (SONSUZUN SAYISI ÖLÇÜLEMEZ)

5-ŞA-3

Bir bütün sonsuz parçaya ayrılamaz(Ayrılabilirin tersi) Çünkü sonsuzun sayısı ölçülemez(Ölçülebilirin tersi) ve sonsuz açıklanamayan bir şey, sayı değil. Bir bütün sonsuza kadar bölünürse yok olur veya olmaz. İlk başta mantıklı gelse de biraz düşününce yok olması doğal olarak pek mantıklı gelmedi. Sonsuza kadar bölme bitmeyen bir şey.(Bitenin tersi) Sonsuzun sayısı ölçülemediği için sonsuz parçaya sonsuz parça eklenirse artmaz (artarın tersi) Sonsuz sayı yerine sonsuzun sayısı demesi sonsuzu doğrudan bir sayı değil de bir büyüklüğü ifade etmek için kullandığı kavram veya deyim olarak kullandığını doğruluyor.

5-ŞS-3

Açıklanamadığından ve ölçülemediğinden bir bütün sonsuz parçaya ayrılamaz, Sonsuza kadar bölme bitmeyen bir şey, sonsuzun sayısı ölçülemediği için sonsuz parçaya sonsuz parça eklense artma olmaz, (SONSUZA KADAR BÖLME ÖLÇÜLEMEZ VE BİTMEZ).

Dördüncü bölümün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

- Prenses ne istiyor? Ne kadar mutlu yaşamak istiyor? Kaç yıl? (05.53)

C: Sonsuza kadar.

- Sonsuzluğa ulaşılabilir mi?

C: Masal kahramanı ise ulaşabilir. Çünkü sonsuza kadar devam edecekmiş biz yok olsak bile.

-Sonuçta sonsuzun sonuna mı ulaşıyorlar?

C: Sonsuzun sonu olmaz ki.

-Ne demek sonsuza ulaşmak?

C: Sürekli öyle kalmak demektir.

- Filmin sonunda “ Sonsuza kadar çirkin kaldılar” denildiğine göre, shrek ve ailesi kaç yıl çirkin kalmış?

C: Sonsuza kadar.

Yeniden güzel olmuş olabilirler mi? (07.28)

C: Sonsuza kadar çirkin kalmışlar ise bir daha güzel olmuş olamazlar.

5-ŞO-4

Sonsuzun sonu olmaz. O yüzden sonsuz bir büyüklüğün bitimine veya sonuna ulaşamaz. Fakat sonsuza ulaşmayı sürekli öyle kalmak olarak açıklıyor. Sonsuza ulaşmak sonsuz gibi çok uzun süre devam eden bir şeyi ifade eden bir kavram veya deyim gibi. Bir şey sonsuz ise bir daha değişemez. “ Sonsuza kadar çirkin kalmışlar ise bir daha güzel olmuş olamazlar.” Sonsuz zaman belirli bir sayı ile ifade edilemiyor. Yine “sonsuz kadar” diyor.

5-ŞA-4

Sonsuzun sonu olmaz(Olurun tersi) Sonu olmadığına göre sonsuz bir büyüklüğün sonuna ulaşamaz. (Ulaşılabilir’in tersi) Sonsuz sürekli devam eden bir şeyi ifade eden bir deyim veya değil. Sonsuz büyüklük bir sayı ile ifade edilebilir veya edilmez.

5-ŞS-4

Sonu olmadığına göre ve bir sayı ile ifade edilemediğine göre sonsuz bir büyüklüğün sonuna ulaşamaz. (SONSUZ BİR BÜYÜKLÜĞÜN SONUNA ULAŞILAMAZ)

Beşinci bölümün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

Oyuncak hikayesi filmi:

- Sonsuzluğun ötesinde ne var?

C: Sonsuzluğun ötesini orada deyim olarak kullanmışlar yani, sonsuzun ötesi nasıl olur.

- Sonsuzdan daha büyük bir şey olabilir mi?

C: Olamaz.

- Sende sonsuz kalem varken sana bir tane daha versem ne kadar kalemin olur?

C: Yine sonsuz kalemim olur.sonsuz zaten.

-Sonsuz bir sayı değil mi?

C: Hayır. Genelde deyim olarak kullanıyoruz ama

-Sayı değil o zaman?

C: Evet.

5-ŞO-5

Sonsuzluğun ötesi bir deyimdir. Sonsuzluğun ötesi diye bir şey olamaz.(SONSUZDAN BÜYÜK BİR ŞEY OLAMAZ) Sonsuz kaleme bir kalem daha eklenirse yine sonsuz kalem olur. O büyüklüğü yine sonsuz ile ifade ederiz. (SONSUZ BİR SAYI DEĞİL) Sonsuzu genelde bir deyim olarak kullanıyoruz. (SONSUZ BİR DEYİMDİR)

5-ŞA-5

Sonsuzluğun ötesi bir deyim olarak kullanılır veya kullanılmaz. Sonsuzdan büyük bir şey yoktur (Vardır'ın tersi) Sonsuz kaleme bir kalem daha eklenirse yine sonsuz olur veya sonsuzdan farklı olur. Sonsuz bir sayıdır (Sonsuz bir deyimdir'in tersi)

5-ŞS-5

Sonsuzluğun ötesi yoktur ve sonsuzdan büyük bir şey olamaz. Sonsuz bir sayı değildir. Sonsuz bir deyimdir.(DAHA FAZLA OLAMAYAN BÜYÜKLÜKLER İÇİN KULLANILAN DEYİM)

Altıncı bölümün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

Domino:

- Sonsuz tane dominoyu yan yana dizip böyle bir şey yapsak ne olur?

C: Sonsuza kadar devrilmeye devam eder. Bitiremezsin işte.

- Sana bir şeker versem, sonra bir daha, böyle sonsuza kadar hiç durmadan şeker vermeye devam etsem kaç şekerin olur?

C: Benim sonsuz şekerim olur mu.

- Sana verdiğim ilk şeker kaçınıcı şekerdir? Sonraki şeker...? (1., 2., ...) Sana sonsuz şeker versem verdiğim son şeker kaçınıcı olur?

C: Sonsuzuncu.

-Peki bunların üzerine bir tane daha versem o kaçınıcı olur?

C: Yine sonsuzuncu.

-Nasıl ayırt edeceğiz?

C: Adam bildiği sayıya kadar sayar...sonra sonsuzuncu, sonsuzuncu, sonsuzuncu diye devam eder.

-Ama verdiğim şekerler farklı?

C: Ama o şeker zaten sonsuz oldu. Bir tane daha verince yine sonsuz olur. Farklı olmasını bilmem. Bir şey diyemezsin galiba.

5-ŞO-6

Sonsuz domino devrilmeye devam ederse hiç bitmeden devam eder. “Sonsuz şekerim olur mu” diye tereddüt etti. Çünkü büyük olasılıkla hiç bitmeyen bir büyüklüğe nasıl sahip olabileceğini düşünüyordu. (SONSUZ HİÇ BİTMEYEN BİR ŞEY) Bütün son şekerlere sonsuzuncu demesi ilginç. Çok büyük bitmeyen bir miktar tek sadece sonsuz ile ifade ediliyor. Bir kavram olarak.

5-ŞA-6

Sonsuz domino hiç bitmeden devam eder veya eninde sonunda biter. Sonsuz bir büyüklüğe istediğiniz kadar bir şey ekleyin yine sonsuz olur veya sonsuzdan farklı olur.

5-ŞS-6

Sonsuz hiç bitmez ve sonsuz bir büyüklüğe ne eklense eklensin yine o büyüklük sonsuz ile ifade edilir. (HER BİTMEYEN VE ÇOK BÜYÜK OLAN ŞEY SONSUZ)

Yedinci bölümün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

Animasyon:

- Doğal sayılar, çift sayılar, tek sayılar torbalarında kaç tane sayı var?

C: Sonsuz tane, çift sayılarda sonsuz.

- Bu torbalardaki sayıların adetleri eşit mi? Sayılar birebir eşlenebilirler mi?

C: Eşit, eşlenir..

- Sonsuz sayının olduğu bir torbadaki sayılar, sonsuz sayının olduğu başka bir torbaya atılınca bu torbada sonsuz sayı mı var? Yoksa daha fazla mı?

C: Sonsuz oldu.

- Sonsuz eleman ile sonsuz elemanı toplarsak ne kadar eleman elde edilir?

C: Bence öyledir.

-Çift doğal sayıların içinde değil mi?

C: Ama sonsuz ikisi de.Sonsuz yani.Sayamazsın, bilemezsin

5-ŞO-7

Sonsuz iki kümenin eşlenmesi mantıklı geldi. Sonsuzu sayamadığımız için sonsuza sonsuz eklenirse bilinmeyen o büyüklüğe yine sonsuz deriz. Burada daha çok belirsizliğin etkisi var gibi. (SONSUZA SONSUZ EKLENİRSE YİNE SONSUZ OLUR)

5-ŞA-7

Sonsuz kümeler birebir eşlenebilir veya eşlenemez. Sonsuzu sayamazsın ve sonsuzu bilemezsin. Buna göre sonsuza sonsuz eklenirse yine sonsuz olur.

5-ŞS-7

Sonsuz kümeler 1-1 eşlenebilir, Sonsuza sonsuz eklenirse yine sonsuz olur. (BELİRSİZ SONSUZLUK)

M Öğrenci ile Yapılan Görüşmenin Dökümleri ve Alınan Notlar:

M matematik dersinde başarılı olduğu gibi diğer derslerde de oldukça başarılı ve araştırmaya meraklı bir öğrenciydi. Görüşmenin başından sonuna kadar filmleri ve soruları dikkatle takip etti ve cevaplandırmaya çalıştı.

Birinci bölümün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

Çikolata fabrikası filmi:

- Çikolatadan yapılan bir saray en fazla ne kadar dayanır?

C: Çok dayanmaz herhalde. Hiç dayanmaz.

- Bu saray ne kadar çikolatadan yapılmıştır? (En az 10 ton falan) Sonsuz çikolatadan yapılırsa saray ne kadar yer kaplar?

C: Dünya kadar. Ama sonsuz...

-Yiyerek bitirilebilir mi?

C: I 1. Yani bin metre kare ise..

- Çikolata fabrikası sonsuza dek kapandığına göre bir daha çalışabilir mi? (07.14)

C: I 1 (Hayır anlamında başını salladı)

- Sonsuz ne kadar uzun bir süre (büyüklerin kastettiği) ? 1 yıl, 10 yıl, 100 yıl, ... (07.39)

C: Sonsuza kadar o fabrikanın sahibi ölene kadar bence.

-Yine devam etsin? Sonsuza kadar?

C: 10 yıl, 100 yıl gibi bir şey

- Sonsuz diye bir şey var mı? Neden?

C: Hayır. her şeyin bir sonu vardır.

- “Sonsuzluk” kelimesini ilk nerede duydun?

C: Arkadaşlarla “Sonsuz sayı” falan diyorduk.

-En büyük sayı ne? Sonsuz falan mı?

C: Sonsuz demem artık. Sayıları biliyorum. En büyük bildiğim 747 milyar 747 trilyon 641 milyon 864 bin

-O sayıya 1 eklese? Daha büyük olur mu?

C: Hı hı...?

- Sonsuz nasıl bir şey? Ne anlama geliyor? - Sonsuzluk deyince ne hissediyorsun?

C: Çok.

Shrek filmi:

- “Devler sonsuza kadar mutlu yaşamıyor” demekle peri anne ne demek istiyor?

Devler ne kadar yaşar? (01.36)

C: Bir ömrü vardır yani. Dünya bitince.

-Bunlar masal kahramanı?

C:...

- “sonsuz mutluluk” veya “sonsuz güzellik” iksiri ne işe yarar? (03.06) “Sonsuz mutluluk” ve “sonsuz güzellik” ile neyi kastediyor?

C: Birkaç yüz yıl falan güzelleşmek için.

-Ne kadar güzel kalacaklar?

C: Ölene kadar.

-Hiç ölmeyeceklerini düşün?

C: ...

5-MO-1

Sonsuz çikolatadan sarayı dünya kadar ve sonsuz demesi dikkat çekici. Çünkü düşünebildiği en büyük saray belki ancak dünyayı kaplayacaktı. “Sonsuz” derken de bilmediği bir büyüklük bile olsa sarayın çok büyük olduğunu vurguluyor. Yiyerek bitmeyecek bir saray. Sonsuz bir büyüklük denilince aklına “çok” geliyor (SONSUZ ÇOK OLAN BİR ŞEY) Sonsuza kadar için dünyada bildiği en uzun süreleri ifade ediyor. “Ölene kadar” gibi.(SONSUZ GERÇEK HAYATTA YOK) “Hayır. her şeyin bir sonu vardır.” ifadesinde de belirttiği gibi sonsuz diye bir şey yok çünkü her şeyin sonu var (SONSUZ SONU OLMAYAN BİR ŞEY) Sayıları bilmek ve kullanmak hakimiyet duygusu veriyor bu açıdan sonsuz oldukça belirsiz bir şey. Sonsuzu bir sayı ile ifade edemedi genelde sorular cevapsız kaldı

5-MA-1

Sonsuz çok olan bir şey (Az ve belirli bir miktarın tersi). Gerçek hayatta sonsuz bir büyüklük var veya yok. Sonsuz sonu olmayan bir şey veya sonu olan belirli bir büyüklük. Sonsuz bir sayı ile ifade edilemiyor.

5-MS-1

Sonsuz çok olan bir şey, gerçek hayatta bir örneği yok, sonu olmayan bir şey anlamında. Sayı ile ifade edilmiyor.

İkinci bölümün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

- Sonsuz mutluluk iksiri içtikten sonra başka bir sonsuzluk iksiri daha içerse daha mı fazla mutlu olur?

C:Hayır.Bir iksir yetebilir.

-Ama ikinci iksir içtin. Onun faydası olmaz mı?

C: Ya.biraz daha fazla mutlu olabiliriz.

-Ama sonsuz mutlu olduktan sonra diyorsun. Sonsuzun ötesi var mı o zaman?

C:İ(Hayır anlamında)

- Şimdi senin sonsuz kalemin olsun. Ben sana o kadar kalemin varken sonsuz kalem daha versem ne kadar kalemin olur?

C:Daha çok.

-Ne kadar ama?

C: ...*(Bir şey diyemeyiz demi)*

-Sonsuz kalem sayılabilir mi?

C:Hayır

-Neden?

C:Sayısı belli değil.*(Sonuna gelemeyiz? demi)*

- Senin sonsuz kalemin varken kalemlerinin yarısını alsam senin ne kadar kalemin kalır?

C:İki sonsuz olur.

- Soru tekrar edildi?

C:Yine sonsuzun yarısı olur. Sonsuzdan az. Onun yarısı kadar. O Yarım sonsuzu sayamayız.

-Bastırınca, Sayamaz mıyız?

C: Belki sayabiliriz. Saymak daha kolay olur.

5-MO-2

Sonuna gelemediğimiz için sonsuz kalem sayılmaz. (SONSUZ SAYILAMAZ) Saymaya güç yetmeyeceği anlamında. Buna göre sonsuz bir büyüklüğün sayısı belli değil. (SONSUZ BÜYÜKLÜK SAYI İLE İFADE EDİLMEZ) Sonsuza bir şey eklenmesi ile artma olacağı veya yarısının alınması ile bir azalma olacağı kabul ediliyor, mantıklı geliyor fakat ona göre (SONSUZUN ÖTESİ YOK) Çünkü zaten ona göre sonsuz çok büyük ve bilinmeyen bir miktar. Bu miktarı aşmak onun için mümkün değil.

5-MA-2

Saymaya güç yetmediğinden sonsuz kalem sayılamaz (sayılabilir'in tersi). Sonsuz büyüklük sayı ile ifade edilemez veya edilebilir. Sonsuzun ötesi yok veya sonsuzdan daha büyük bir miktar var. Sonsuzun yarısı sonsuz gibi.

5-MS-2

Sonsuz sayılamaz, sayı ile ifade edilemez, sonsuzun ötesi yok (SONSUZ SAYILAMAZ VE AŞILAMAZ)

Üçüncü bölümün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

- Bir kağıt şeridi veya uzun bir şeyi iki eş parçaya bölsem parçalar ne kadar uzun olur?(5 cm) Üç eş parçaya bölsem? 4 eş parça? (2,5...1nokta..) Sonsuz parçaya bölsem parçalar ne kadar uzun olur?

C: Sonsuz parça olur. İncelir. Bitebilir.

-Bir şey kalmaz mı?

C:En az 1 milim falan.

-Bitmekten kastın ne? 1 milimden daha az mı olur yoksa kayıp mı olur?

C:1 milimden daha az olur.

-Kaybolma ihtimali var mı?

C: (Teredditle) Hayır.

- Sende sonsuz parça varken, bir kâğıdı bölüp yine sonsuz parça elde etsek ve öncekilere ekleysek ne kadar parçamız olur?

5-MO-3

“İncelir. Bitebilir” ifadesi ile sonsuz parçaya bölünmüş bir bütünün parçasının sıfıra çok yakın olacağını vurguluyor.(SONSUZ PARÇALAR MİLİMDN AZ OLUR) Fakat tereddüt etse de kaybolma olasılığı yok diyor. (BİR BÜTÜNÜN PARÇASI BELİRLİ BİR BÜYÜKLÜKTE, KAYBOLMUYOR) (Belirsiz ve kaybolan’ın tersi)

5-MA-3

Bir bütün sonsuz parçaya bölündüğünde parçaların uzunluğu milimden az olur veya olmaz. Başta bitebilir dese de sonsuz parçalar kaybolmaz. (Kaybolurun tersi)

5-MS-3

(BİR BÜTÜNÜN SONSUZDA BİRİ ÇOK KÜÇÜK BELİRLİ BİR MİKTAR)

Dördüncü bölümün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

- Prenses ne istiyor? Ne kadar mutlu yaşamak istiyor? (05.53)

C:Sonsuza kadar mutlu yaşamak.

- Kaç yıl?

C: Ölene kadar.

-Ölmeseler?

C: Sayı ifade etmiyor ki. Çok olarak. Bilemediğimiz sayılar için.

-Neden büyük sayıları kullanmıyoruz onlar için?

C: Daha çok olsun diye

- Sonsuzluğa ulaşılabilir mi?

C:Hayır. Belirli bir şey yok. (Ha bire gidiyor.)

- Filmin sonunda “ Sonsuza kadar çirkin kaldılar” denildiğine göre, shrek ve ailesi kaç yıl çirkin kalmış?

C:(Bin yıl milyon yıl olabilir mi?) Olabilir.

-Yeniden güzel olmuş olabilirler mi? (07.28)

C: Olamaz.

5-MO-4

“Sayı ifade etmiyor ki. Çok olarak. Bilemediğimiz sayılar için.” ifadesindeki gibi (SONSUZ SAYI İFADE ETMİYOR), bilemediğimiz çok büyük sayılar yerine kullanıyoruz. Kullanabileceğimiz sayıların hepsi sonsuz ifadesinden daha az şey ifade ediyor “Daha çok olsun diye”. (SONSUZ BİLEMEDİĞİMİZ ÇOK BÜYÜK ŞEYLERİ İFADE EDER). Çok büyük sayılar yerini tutmadığına göre (BÜTÜN SAYILARDAN BÜYÜK MİKTARLARI İFADE EDER). Sonsuz belirli bir şey olmadığından (SONSUZ BELİRSİZ BİR ŞEY) ve ha bire gittiğinden (SONSUZ MİKTAR HA BİRE GİDER) veya devam ettiğinden (SONSUZLUĞA ULAŞILAMAZ). Sonsuz süreye söyleyebileceği en büyük sayılardan birini söyledi. Sonra da bu sayıdan emin olmadığı için “olabilir” dedi. Buna göre, belirli bir sayı ile ifade etmeye çalışsa da sonsuz belirli bir sayı değil. Muhtemelen “kaç yıl?” sorusunu bir sayı ile ifade etmeye çalıştı.

5-MA-4

Sonsuz belirli bir sayı ifade etmiyor (Belirli bir sayı ifade ediyor ’un tersi). Sonsuz bilemediğimiz çok büyük şeyleri ifade eder veya etmez. Sonsuz büyüklük bütün sayıların ifade ettiği büyüklüklerden büyük veya değil. Sonsuz belirsiz bir şey (Belirsizlik derecesi). Sonsuz miktar ha bire gider, sürekli devam eder. (Sonsuz miktar belirli devam etmeyen bir şeydir’ in tersi) Sonsuzluğa ulaşamaz (Ulaşılabilir’in tersi)

5-MS-4

Sonsuz belirli bir sayı ifade etmiyor, Sonsuz bilemediğimiz çok büyük şeyleri ifade eder, Sonsuz büyüklük bütün sayıların ifade ettiği büyüklüklerden büyük, Sonsuz belirsiz bir şey, Sonsuz miktar ha bire gider, Sonsuzluğa ulaşamaz (SONSUZ ULAŞILAMAYAN SÜREÇ).

Beşinci bölümün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

Oyuncak hikayesi filmi:

- Sonsuzluğun ötesinde ne var?

C: Sonsuz bir şey an az bin yıl olsa onun ötesi bin yıl daha olabilir.

- Sonsuzluk 500 yıl olmaz mı?

C: Olabilir...?

- Sonsuzdan daha büyük bir şey olabilir mi?

C: Hı hı. Sonsuz büyük bir şey olmaz ama sayı olarak... sonsuz belirli bir şey değil.

(Bir sayı değil yani?)

- Sende sonsuz kalem varken sana bir tane daha versem ne kadar kalemin olur?

C: Sonsuzdan bir fazla olur.

- Peki sonsuzun ötesi ne olur?

C: Sonsuz olur. (Oda mı sonsuz olur, teyit alındı)

5-MO-5

“Sonsuz bir şey an az bin yıl olsa onun ötesi bin yıl daha olabilir” ifadesindeki en az bin yıl olsa sonsuzun belirli bir süresi olmadığını (SONSUZ BELİRLİ BİR ŞEY DEĞİL- belirli olmasının tersi), sayı ile kesin olarak ifade edilemediğini vurguluyor. Sonsuz çok büyük belirsiz büyüklükler için kullanılıyor gibi. Daha çok bir kavram yada deyim. “sonsuz büyük bir şey olmaz ama sayı olarak...” (SONSUZ SAYI DEĞİL). Sonsuz rastgele çok büyük bir şey olduğu için sonsuzdan büyük bir şey olabilir. (SONSUZDAN BÜYÜK BİR ŞEY OLABİLİR) Çünkü (SONSUZDAN BİR FAZLA OLUR) Fakat ona da sonsuz diyor. Sonsuz çok büyük bir şeyi belirten bir zarf gibi. (SONSUZ BİR KAVRAM VEYA DEYİM) Bunun sebebi belirli bir sonsuz büyüklüğün tek olması veya limit ordinal değil.

5-MA-5

Sonsuz belirli bir şey değil veya belirli bir şey. Sonsuz bir kavram-deyim veya sayıdır. Sonsuzdan büyük bir şey olur veya olmaz. Sonsuzdan büyük olana da sonsuz denir veya denmez.

5-MS-5

Sonsuz belirli bir şey olmadığından ve sonsuz bir sayı olmadığından ve sonsuzdan büyük bir şey olsa da ona da sonsuz dediğimizden (SONSUZ BİR KAVRAMDIR)

Altıncı bölümün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

Domino:

- *Sonsuz tane dominoyu yan yana dizip böyle bir şey yapsak ne olur?*

C: Sonsuza kadar devam eder.

- *Biter mi, bitmez mi?Başında beklesem?*

C: Biter ama baya bir sürer.

- *Sana bir şeker versem, sonra bir daha, böyle sonsuza kadar hiç durmadan şeker vermeye devam etsem kaç şekerin olur?*

C: Sonsuz kadar.

- *Sana verdiğim ilk şeker kaçınıcı şekerdir? Sonraki şeker...(1., 2., ..)? Sana sonsuz şeker versem verdiğim son şeker kaçınıcı olur?*

C: Sonsuzuncu.

- *Peki bunların üzerine bir tane daha versem o kaçınıcı olur?*

C: İkinci sonsuz..

5-MO-6

“Biter” dediğine göre sonsuz hiç bitmeden devam eden bir şey değil.(SONSUZ BİTER). Sadece “baya bir sürer” yani bize göre çok uzun. (SONSUZ BİZE GÖRE ÇOK BÜYÜK BİR MİKTAR) Sonsuzuncudan sonra “ikinci sonsuz” diyerek daha büyük başka bir belirsiz çok büyük miktar tanımlamış oluyor.(SONSUZUNCUDAN SONRA İKİNCİ SONSUZ GELİR)

5-MA-6

Sonsuz biter-Hiç bitmeyen, durmadan devam eden bir şey olmasının tersi. Sonsuz sadece bize göre çok büyük bir miktar veya değil. Sonsuzuncudan sonra ikinci sonsuz gelir veya sonsuzuncudan sonra bir şey yoktur.

5-MS-6

Sonsuzdan büyük bir şey vardır, sonsuz biter, sonsuzuncudan sonra ikinci sonsuz gelir, sonsuz sadece bize göre çok büyük olan bir miktar. (SONSUZ EN BÜYÜK OLAN BİR SINIR DEĞİL)

Yedinci bölümün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

Animasyon:

- Doğal sayılar, çift sayılar, tek sayılar torbalarında kaçar tane sayı var?

C: İlk başta 8 dedi. Gördüğü kadar. Sonra sonsuz. Üç nokta bir şey ifade etmiyor.

- Bu torbalardaki sayıların adetleri eşit mi? Sayılar birebir eşlenebilirler mi?

C:Eşlenebilir. Çift sayıların bazıları doğal sayılar arasında var. Alt küme konusu daha yok.

- Sonsuz sayının olduğu bir torbadaki sayılar, sonsuz sayının olduğu başka bir torbaya atılınca bu torbada sonsuz sayı mı var? Yoksa daha fazla mı?

C: İki sonsuz diyelim.

- Sonsuz eleman ile sonsuz elemanı toplarsak ne kadar eleman elde edilir?

5-MO-7

Üç noktanın anlamsız gelmesi doğal. Hiç bitmeden sonsuza kadar devam eder gibi bir düşünce olmayabilir. Zaten okulda görmedi. Sayı kümelerinde gördüğü kadarını sayıyor. Alt küme anlayışı pek olmadığı için eşlenebilirlik pek kontrol edilmedi ama 1-1 eşleme mantıklı.

(1-1 EŞLEME MANTIKLI) Torbadaki sayılara iki sonsuz dedi. (SONSUZ SONSUZ DAHA İKİ SONSUZ)

5-MA-7

1-1 eşleme mantıklı veya değil. Sonsuz sonsuz daha iki sonsuz olur veya olmaz.

5-MS-7

(SONSUZ SINIRLI BİR BÜYÜKLÜK)

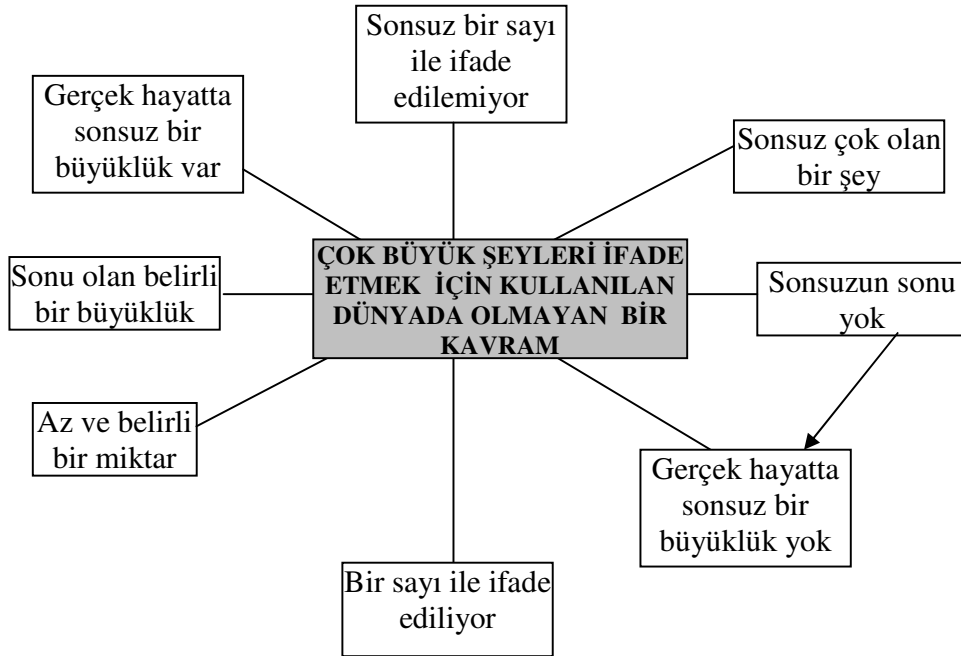
Alınan notlar sonucunda elde edilen kategorilerin eksensel kodlama ile boyutları ve özellikleri üzerinde durulmuş ve kategoriler seçici kodlama ile birleştirilerek şemalar ve tablolar oluşturulmuştur. Kategoriler arasındaki ilişkileri ve kategorilerin boyutlarını

gösteren aşağıdaki her bir şema belirli bir not grubuna aittir. Her bir eksen doğru parçasıyla gösterilmiş ve seçici kodlama ile elde edilen merkez kategorilerin bulunduğu metin kutuları koyu renkle gösterilmiştir. Merkez kategoriler ve fenomenler araştırmacı tarafından gömülü teori yaklaşımı çerçevesinde belirlenmiştir. Merkez kategorilerin boyutları ve özellikleri doğru parçaları ve bu doğru parçalarının uçlarına iliştilirilmiş kategori adları ile ifade edilmiştir. Ayrıca araştırmacı tarafından belirlenen kategoriler arasındaki ilişkileri ifade etmek için oklar kullanılmıştır.

M Öğrencisine Ait Şemalar:

M öğrencisine göre, sonsuzun sonunun olmaması gerçek hayatta sonsuz bir büyüklükle karşılaşmamamıza sebeptir. Ona göre, Sonsuzdan büyük olana da sonsuz denmektedir ve bu yüzden sonsuz bir kavramdır. Şemalarda, sonsuzun ulaşılamayan bir süreç olması veya bir kavram olması gibi fenomenlerin ağırlıkta olduğu görülmektedir.

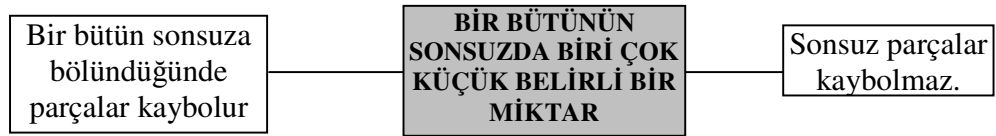
5-M-1 Notlarına Ait Şema:



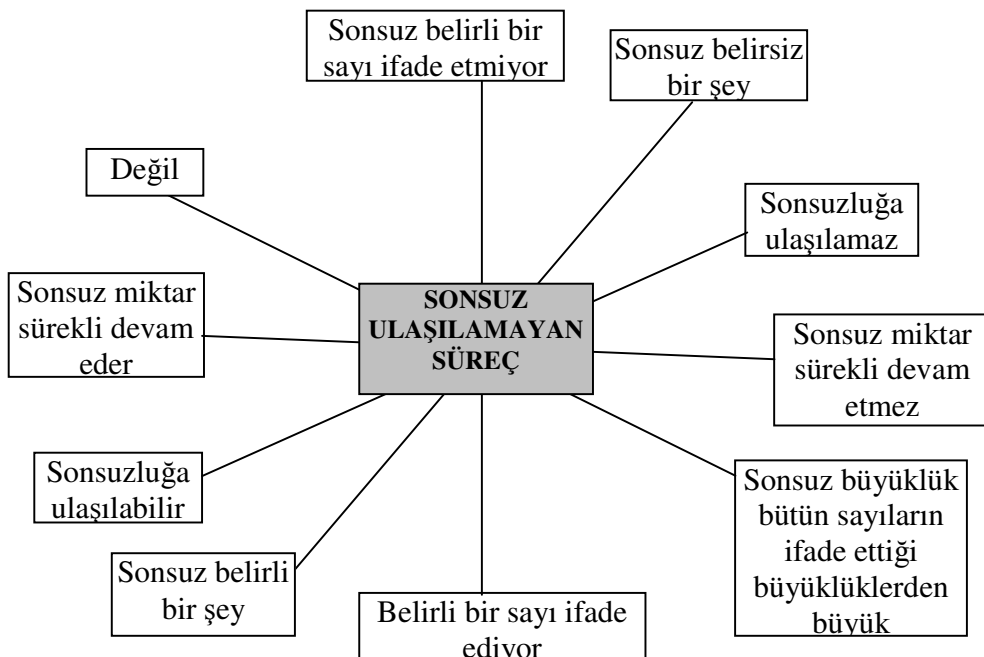
5-M-2 Notlarına Ait Şema:



5-M-3 Notlarına Ait Şema:



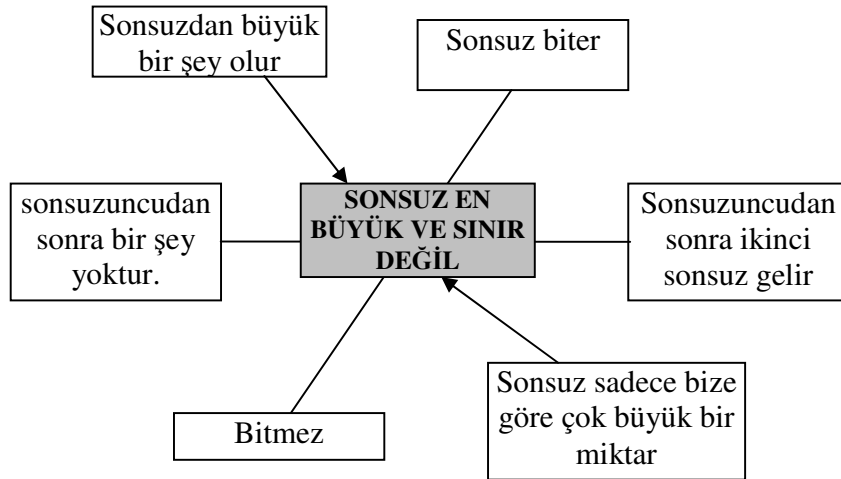
5-M-4 Notlarına Ait Şema:



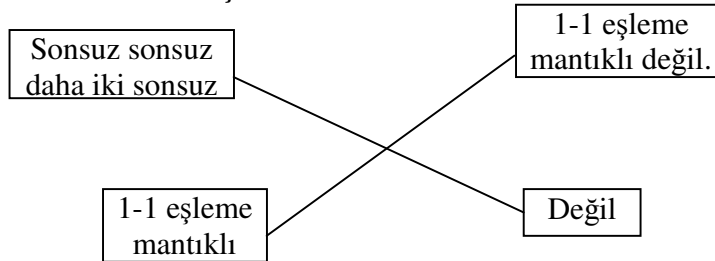
5-M-5 Notlarına Ait Şema:



5-M-6 Notlarına Ait Şema:



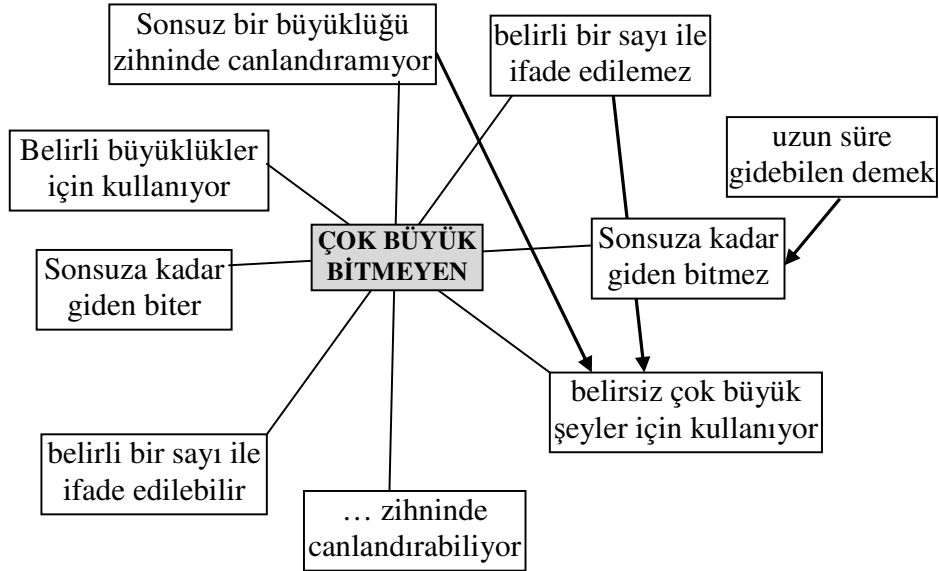
5-M-7 Notlarına Ait Şema:



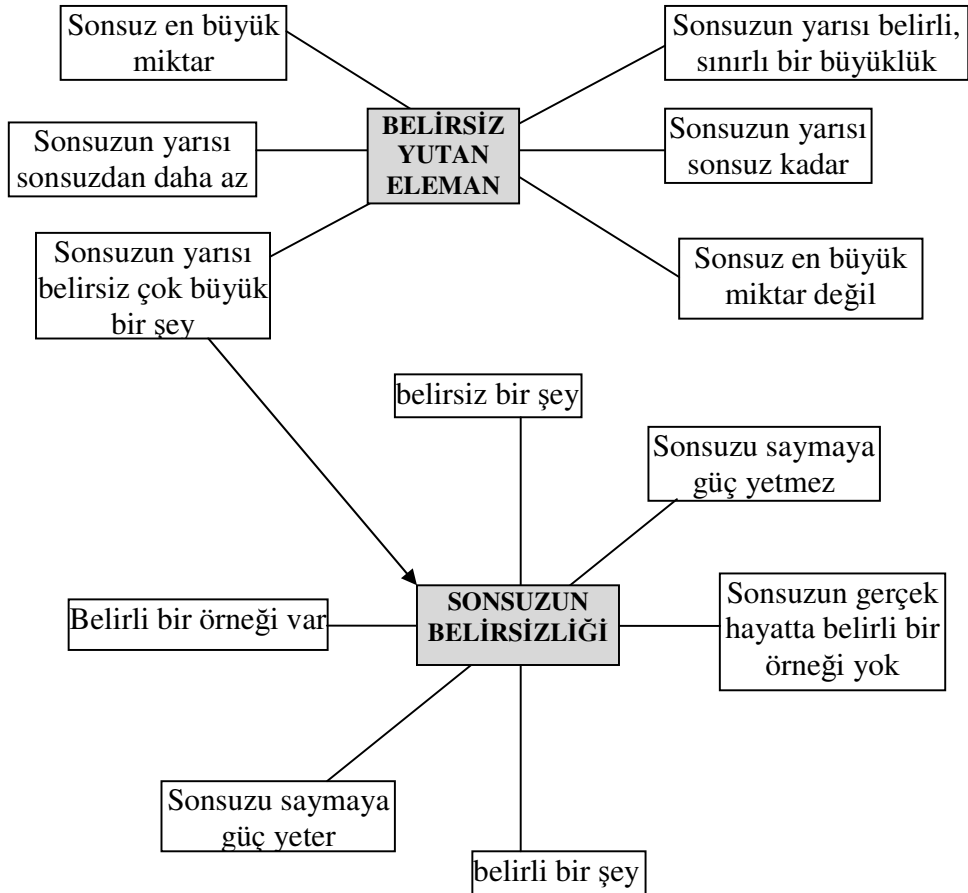
E Öğrencisine Ait Şemalar:

E Sonsuzun sayı ile ifade edilememesini, sonsuzun belirsizliğinin bir sebebi olarak ifade etmiştir. “Bitmeyen süreç”, “dinamik bir kavram” gibi fenomenler E’nin şemalarında da görülmektedir.

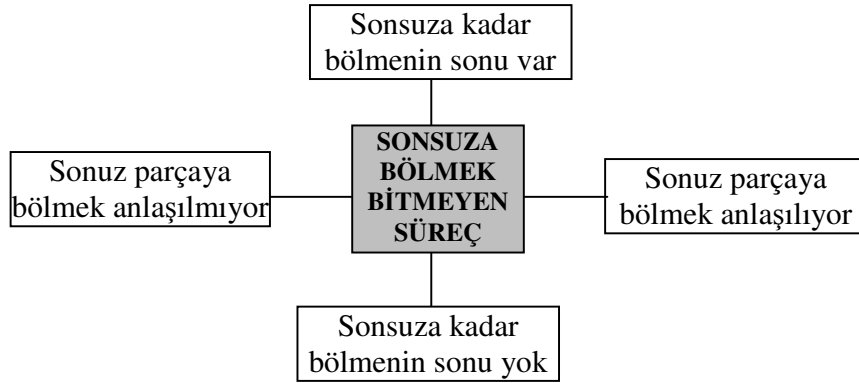
5-E-1 Notlarına Ait Şema:



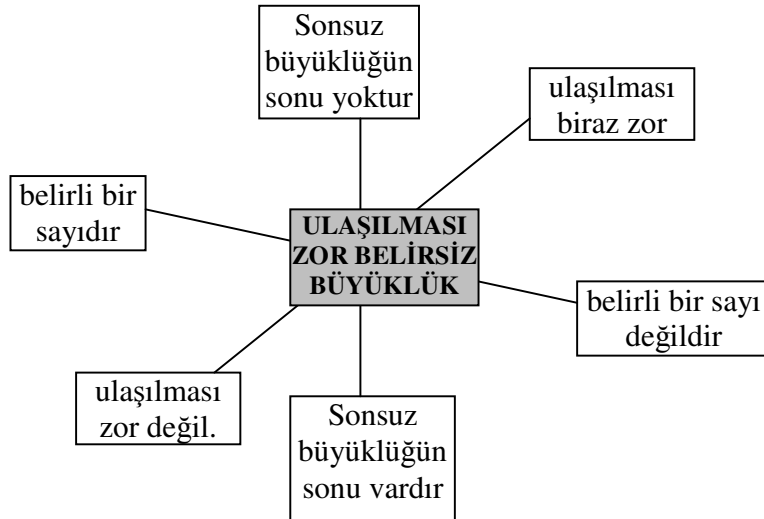
5-E-2 Notlarına Ait Şema:



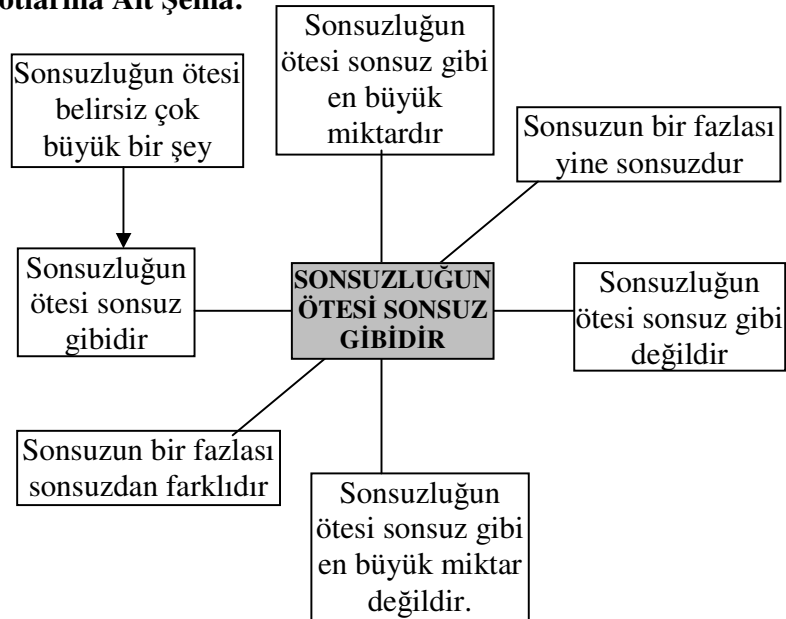
5-E-3 Notlarına Ait Şema:



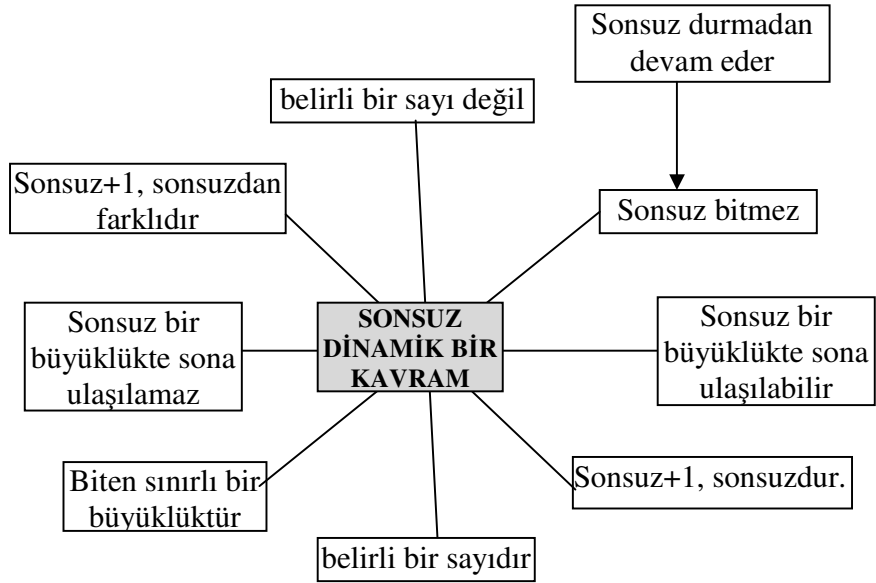
5-E-4 Notlarına Ait Şema:



5-E-5 Notlarına Ait Şema:



5-E-6 Notlarına Ait Şema:



Ş Öğrencisine Ait Şemalar:

Ş diğer beşinci sınıf öğrencilerinden farklı olarak sonsuzu bir deyim olarak ifade etmiştir. Diğerlerinde olduğu gibi sayılamazlık, ulaşılamazlık ve belirsizlik gibi fenomenler belirgindir.

5-Ş-1 Notlarına Ait Şema:



5-Ş-2 Notlarına Ait Şema:



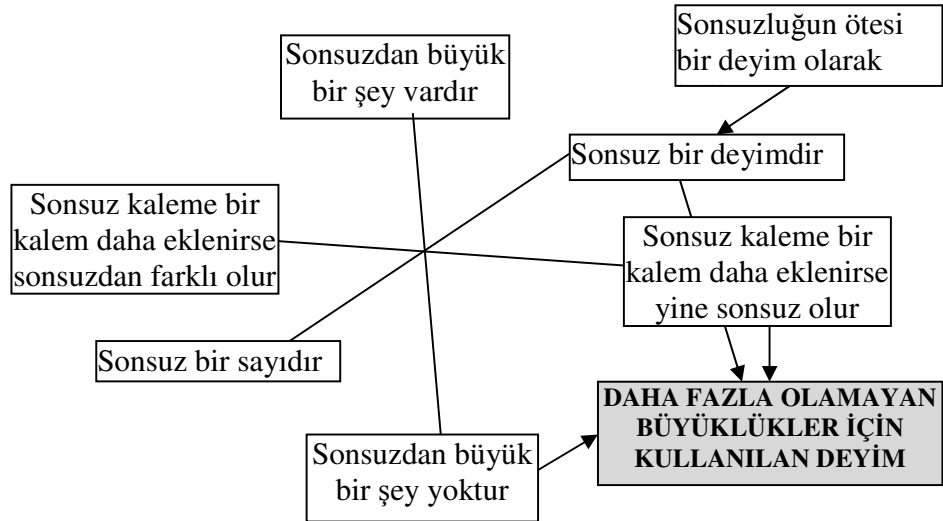
5-Ş-3 Notlarına Ait Şema:



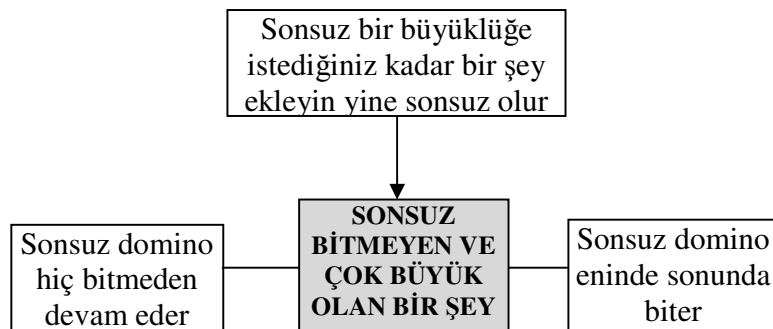
5-Ş-4 Notlarına Ait Şema:



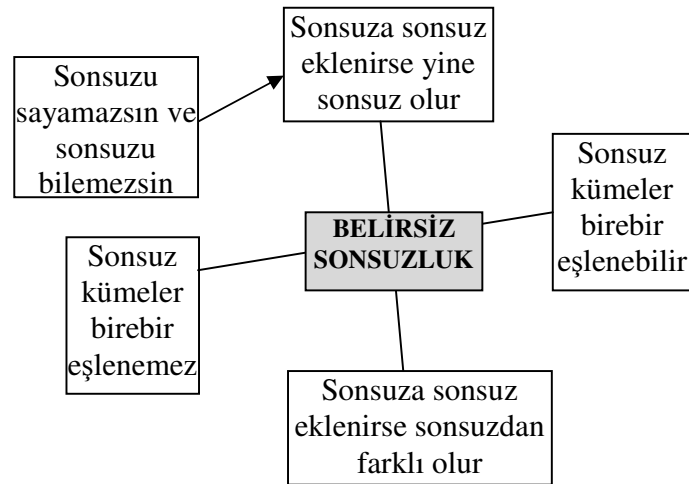
5-Ş-5 Notlarına Ait Şema:



5-Ş-6 Notlarına Ait Şema:



5-Ş-7 Notlarına Ait Şema:



Görüşmelerin kodlanması ile elde edilen kategoriler seçici kodlama ile merkezi kategorilere bağlanmış ve görüşmelerin her bir bölümü için ayrı bir şema hazırlanmıştır. Bu şemalar kategorilerin aralarındaki ilişkilerin, boyutların ve özelliklerin gösterimini sağlamıştır. Fakat araştırmacı, çok karışık olacağını düşündüğü için bütün kategorilerin yer aldığı bir şema oluşturmamıştır. Bunun yerine öğrencilerin konu ile ilgili anlayışlarının genel olarak değerlendirilmesini sağlayan tablolar oluşturmuştur.

Bu tablolar yardımıyla her bir öğrenciye ve sınıfa ait bütün kategoriler görülerek değerlendirilebilir ve kategorilerin dayandığı fenomenler elde edilebilir (Strauss ve Corbin, 1998). Tablolarda belirtilen kategoriler ve bunların alt kategorileri, araştırmacı, kodlama sonucunda belirtilen kaynak notlardan elde etmiştir. Herbir öğrencinin kategorilerinden oluşan tablolar aşağıda verilmiştir.

M Öğrencisine Ait Merkezi Kategorileri Gösteren Tablo

KATEGORİLER	5-M ALT KATEGORİLER	KAYNAK NOTLAR
ÇOK BÜYÜK ŞEYLERİ İFADE ETMEK İÇİN KULLANILAN DÜNYADA OLMAYAN BİR KAVRAM	Gerçek hayatta sonsuz bir büyüklük yok.	5-M-1
	Sonsuz sonu olmayan bir şey	5-M-1
SONSUZ SAYILAMAZ VE AŞILAMAZ	Sonsuzu saymaya güç yetmez.	5-M-2
	Sonsuzun ötesi yok	5-M-2
BİR BÜTÜNÜN SONSUZDA BİRİ ÇOK KÜÇÜK BELİRLİ BİR MİKTAR	Bir bütün sonsuz parçaya bölündüğünde parçaların uzunluğu milimden az olur	5-M-3
SONSUZ ULAŞILAMAYAN SÜREÇ	Sonsuz belirli bir sayı ifade etmiyor	5-M-4
	Sonsuz büyüklük bütün sayıların ifade ettiği büyüklüklerden büyük	5-M-4
	Sonsuz belirsiz bir şey	5-M-4
	Sonsuz miktar ha bire gider, sürekli devam eder	5-M-4
	Sonsuzluğa ulaşamaz	5-M-4
SONSUZ BİR KAVRAMDIR	Sonsuz bir kavram-deyim	5-M-5
	Sonsuzdan büyük bir şey olabilir	5-M-5
	Sonsuzdan büyük olana da sonsuz denir	5-M-5
SONSUZ EN BÜYÜK OLAN BİR SINIR DEĞİL	Sonsuz biter	5-M-6
	Sonsuz sadece bize göre çok büyük bir miktar	5-M-6
	Sonsuzuncudan sonra ikinci sonsuz gelir	5-M-6
	1-1 eşleme mantıklı	5-M-7
	Sonsuz sonsuz daha iki sonsuz olur	5-M-7

E Öğrencisine Merkezi Kategorileri Gösteren Tablo

KATEGORİLER	5-E ALT KATEGORİLER	KAYNAK NOTLAR
ÇOK BÜYÜK BİTMEYEN	Sonsuz bir büyüklüğü zihninde canlandıramıyor	5-E-1
	Sonsuz belirli bir sayı ile ifade edilemez	5-E-1,4,6
	Sonsuz uzun süre gidebilen demek	5-E-1
	Sonsuza kadar giden bitmez	5-E-1,4
SONSUZUN BELİRSİZLİĞİ - BELİRSİZ YUTAN ELEMEN	Sonsuzun gerçek hayatta belirli bir örneği yok	5-E-2
	Sonsuzu genelde belirsiz çok büyük şeyler için kullanıyor	5-E-1,2
	Sonsuz en büyük miktar	5-E-2,5
	Sonsuzun yarısı belirsiz çok büyük bir şey	5-E-2
	Sonsuzu saymaya güç yetmez	5-E-2
	Sonsuzun yarısı sonsuzdan daha az	5-E-2
SONSUZA BÖLMEK BİTMEYEN SÜREÇ	Sonuz parçaya bölmek anlaşılmıyor	5-E-3
	Sonsuza kadar bölmenin sonu yok	5-E-3
ULAŞILMASI ZOR BELİRSİZ BÜYÜKLÜK	Sonsuz büyüklüğün sonu yok	5-E-4,1
	Sonsuzluğa ulaşılması biraz zor	5-E-4,1
	Sonsuz belirli bir sayı değil	5-E-4
SONSUZLUĞUN ÖTESİ SONSUZ GİBİDİR	Sonsuzluğun ötesi sonsuz gibi en büyük miktardır	5-E-5
	Sonsuzun bir fazlası yine sonsuzdur	5-E-5,2
	Sonsuzluğun ötesi belirsiz çok büyük bir şey	5-E-5
SONSUZ DİNAMİK BİR KAVRAM	Sonsuz bitmez.	5-E-6
	Sonsuz+1, sonsuzdur.	5-E-6
	Sonsuz bir büyüklükte sona ulaşamaz	5-E-6
	Sonsuz durmadan devam eder.	5-E-6

Ş Öğrencisine Merkezi Kategorileri Gösteren Tablo

KATEGORİLER	5-Ş ALT KATEGORİLER	KAYNAK NOTLAR
SINIRI OLMAYAN ANLAMINDA BİR DEYİM	Sonsuzun sınırı yoktur	5-Ş-1,4
	Sonsuz sürekli devam eden bir şeyi ifade eden bir deyim	5-Ş-1,4,5
	Sonsuzun dünyada örneği yoktur	5-Ş-1
	Sonsuza kadar ölçülemez ve uzun süre devam eder	5-Ş-1
SONSUZ BİR BÜYÜKLÜĞÜN İKİ KATININ VEYA YARISININ ALINMASI SONSUZ BÜYÜKLÜĞÜ DEĞİŞTİRMEZ	Sonsuz + sonsuz anlatılamayan çok büyük bir şey	5-Ş-2
	Sonsuza sonsuz eklense bir şey değişmez.	5-Ş-2,3,5,7
	Sayılar da zaten sonsuzdur	5-Ş-2
	Sonsuz sayılamaz	5-Ş-2,3,7
	Sonsuzun yarısı da sonsuz gibi belirsiz çok büyük bir şey	5-Ş-2
SONSUZA KADAR BÖLME ÖLÇÜLEMEZ VE BİTMEZ	Bir bütün sonsuz parçaya ayıramaz	5-Ş-3
	Bir bütün sonsuza kadar bölünürse sıfır olur	5-Ş-3
	Sonsuza kadar bölme bitmeyen bir şey	5-Ş-3
	Sonsuz parçaya sonsuz parça eklenirse artmaz	5-Ş-2,3,5,7
SONSUZ BİR BÜYÜKLÜĞÜN SONUNA ULAŞILAMAZ	Sonsuzun sonu olmaz	5-Ş-1,4
	Sonsuz sürekli devam eden bir şeyi ifade eden bir deyim	5-Ş-1,4,5
	Sonsuz büyüklük bir sayı ile ifade edilemez	5-Ş-4
DAHA FAZLA OLAMAYAN BÜYÜKLÜKLER İÇİN KULLANILAN DEYİM	Sonsuzluğun ötesi bir deyim olarak kullanılır	5-Ş-5
	Sonsuz kaleme bir kalem daha eklenirse yine sonsuz olur	5-Ş-5,6
	Sonsuzdan büyük bir şey yoktur	5-Ş-2,3,5,7
	Sonsuz genelde bir deyim olarak kullanılır	5-Ş-1,4,5
SONSUZ BİTMEYEN VE ÇOK BÜYÜK OLAN BİR ŞEY	Sonsuz domino hiç bitmeden devam eder	5-Ş-6
	Sonsuz bir büyüklüğe istediğiniz kadar bir şey ekleyin yine sonsuz olur	5-Ş-6
BELİRSİZ SONSUZLUK	Sonsuz kümeler birbir eşlenebilir	5-Ş-7
	Sonsuza sonsuz eklenirse yine sonsuz olur	5-Ş-2,3,5,7
	Sonsuz sayılmaz	5-Ş-2,3,7

Beşinci sınıf öğrencileri ile yapılan görüşmeler sonucunda elde edilen ortak kategoriler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

5. Sınıf Öğrencilerine Ait Merkezi Kategorileri Gösteren Tablo

5-MERKEZİ KATEGORİLER	NOTLAR
BİTMEYEN VE ULAŞILMASI ZOR BELİRSİZ BÜYÜKLÜK	5-E-1,4,6; 5-Ş-6; 5-E-1,4; 5-M-4; 5-Ş-1,4,5
SONSUZ DİNAMİK BİR KAVRAM VEYA DEYİM	5-E-6; 5-M-1,5; 5-Ş-1,4,5; 5-Ş-1,2,3,4,5,6, 7
BELİRSİZ YUTAN ELEMEN	5-E-1,2,5; 5-Ş-2,3,5,7
SONSUZA BÖLMEK BİTMEYEN SÜREÇ	5-E-3; 5-Ş-2,3,5,7
SONSUZ SAYILAMAZ VE AŞILAMAZ; SINIR GİBİ	5-M-2; 5-M-7; 5-E-2,5
SONSUZ EN BÜYÜK OLAN BİR SINIR DEĞİL	5-M-6
BİR BÜTÜNÜN SONSUZDA BİRİ ÇOK KÜÇÜK BELİRLİ BİR MİKTAR	5-M-3

İlköğretim 5. Sınıf öğrencileri sayı kümelerine hakim değillerdi. Buna bağlı olarak birebir eşleme ve kümeler ile ilgili konularda oldukça zorlandılar. Bu yaş seviyesinde sayı kümelerinin bir bütün olarak algılanmasının zor olduğu düşünülmektedir.

Okulda öğrendikleri matematik, öğrencileri sonsuzluk ile ilgili kavramlarda sonlu düşünmeye itiyordu. Sonsuzu ölçme anlayışı olarak düşünülen sonsuzun iki katına iki sonsuz denilmesi sık karşılaşılan bir söylem olmakla beraber böyle bir düşüncenin oluşmasında daha çok okulda görülen matematiğin etkisi olduğu düşünülmektedir. Araştırmacıya göre, çocuklar okulda öğrendikleri “1 elma, 1 elma daha 2 elma eder” düşüncesi ile hareket ediyorlar. Tall’un iddia ettiği gibi sonsuzu ölçme anlayışının kayda değer bir şekilde yer aldığını söylemek zordur. Araştırmacı, bu yaş seviyesinde sonsuzun belirsizliği ile ilgili bir çok kavram varken öğrencilerin ölçme anlayışı ile hareket ettiklerini ileri sürmenin doğru olmadığını düşünmektedir. Tablolarda da görüldüğü gibi, görüşülen ilköğretim 5. sınıf öğrencilerinin sonsuzlukla ilgili temel anlayışı aşağıdaki fenomenler çerçevesinde ele alınabilir.

- i) SONSUZ BİTMEYEN BİR ŞEY
- ii) SONSUZ BİR KAVRAM VEYA DEYİM
- iii) SONSUZ KÜÇÜK YOK

- iv) SONSUZUN BELİRSİZLİĞİ
- v) SONSUZ SAYILAMAZ
- vi) SONSUZ BELİRSİZ YUTAN ELEMAN GİBİDİR.

Bu yaşlarda genel düşünce sonsuzun çok büyük bir şeyi ifade eden kavram olduğu doğrultusundadır. Bir bütünden sonsuz parça elde etmek, bitmeyen bir süreç olarak düşünülmektedir. Sonuç olarak genel olarak bu yaşta potansiyel sonsuzluk anlayışı hakimdir ve sezgilerin bu yönde olduğu kabul edilebilir. Bunun dışında sonsuzla ilgili işlemlerde sonsuzun yutan eleman gibi bir işlevinin olduğu gözden kaçırılmamalıdır. Sonsuzu aritmetikte ve karşılıklarına çıkan problemlerde nasıl kullandıklarına bakılırsa araştırmacıya göre, öğrencilerde standart olmayan sonsuzluk anlayışı ile de ilgili bazı ipuçları bulunabilir. Öğrenciler sonsuz küçük kavramına uzak olsalar da, sonsuz büyüklükler ile yapılan işlemleri genellikle standart olmayan analizdeki gibi sonuçlandırmaktadırlar.

4.5.b. YEDİNCİ SINIFLAR

Görüşülen yedinci sınıf öğrencileri de aynı okula gidiyorlardı ve matematik ders notları sırası ile 3,3 ve 5 ti. Beşinci sınıf öğrencileri ile yapılan çalışmanın aynısı bu öğrenciler ile de yapılmıştır. Yedinci sınıflar rasyonel sayılar ve kümeler gibi konuları matematik derslerinde daha önceden gördüğünden dolayı görüşmelerde araştırmacı tarafından hazırlanan animasyonlara ve etkinliklere daha fazla zaman ayrılmıştır. Bu öğrenciler ile yapılan her bir görüşme ortalama 1 saat 15 dakika kadar sürmüştür.

Yedinci sınıf öğrencileri ile yapılan görüşmelerin dökümleri, bölümler halinde aşağıda verilmiştir. Daha önce olduğu gibi bu bölümlerle de ilgili örnek kodlama notları verilmiştir. Bu notlarda belirlenen kategoriler de parantez içinde büyük harfle yazılmıştır.

A Öğrenci ile Yapılan Görüşmenin Dökümleri ve Alınan Notlar:

A, matematik dersinde orta başarılı olan öğrencilerden biriydi. Araştırmacıya göre, animasyonlar ve etkinlikler iyi derecede matematik bilgisi gerektirmediğinden dolayı öğrencilerin farklı seviyelerde olması çalışmanın akışını engellememiştir. A da görüşmenin başından sonuna kadar filmleri ve soruları dikkatle takip etti ve cevaplandırmaya çalıştı. Bu öğrenci ile yapılan görüşmenin birinci bölümünün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

Çikolata fabrikası filmi

-Çikolatadan yapılan bir saray en fazla ne kadar dayanır? Tahminen..

C: Birkaç saat ancak.

-Bu saray ne kadar çikolatadan yapılmıştır?

C: Baya bir kullanmışlardır.

-Sonsuz çikolatadan yapılsa saray ne kadar yer kaplar?

C: Bilmem yani.

- Yiyerek bitirilebilir mi?

C: Hayır

- Çikolata fabrikası sonsuza dek kapandığına göre bir daha çalışabilir mi? (07.14)

C: Hayır, şeyler mahvolur.

- Neyler?

C: Oradaki kullanılan şeyler, malzemeler.

- “Sonsuzluk” kelimesini ilk nerede duydun?

C: 1. veya 2. sınıfa giderken.(-Kimden duydun? C: Hatırlamıyorum.)

-Nerede kullanıldı?

C: Bilmem. Sonsuz hiç bitmeyecek manasında. “Keşke sonsuz kadar şekerim olsa, elmam olsa” derlerdi.

- Sonsuz nasıl bir şey? Sence, ne anlama geliyor?

C: Yani hiç bitmeyecek Devam edecek. Mesela bizden sonraki nesiller gelecek.

Mesela öldükten sonra yaşam var ne de olsa, sonsuz ...

- Sonsuzluk deyince ne hissediyorsun?

C: Bir şey hiç bitmeyecek gibi geliyor bana sonsuz deyince, hiç görünmeyecek gibi bitişi.

7AO-1

Sonsuz çikolatadan yapılan bir sarayı zihninde canlandıramadığı için “Bilmem yani” demiş olabilir. Gerçek hayatta sonsuz çikolatadan yapılmış bir sarayla eşleşen bir kavram yok. Fakat “hayır” diyerek sonsuz çikolatanın bitirilemeyeceğini ifade ediyor.(SONSUZ ÇİKOLATA BİTMEZ) “..Hiç görünmeyecek gibi bitişi..” ifadesine göre sonsuz bitmeyen bir şey. (Biten’in tersi) Sonsuza dek kapanan bir fabrikanın bir daha açılmamasının sebebini “malzemeler mahvolur” diye ifade etmesi ilginç. Sonsuza

dek kapalı kalma süresini bir sayı ile ifade etmek yerine malzemelerin dayanamayacağını belirtiyor. (SONSUZ SAYI İLE İFADE EDİLEMEZ (ifade edebilmenin tersi)) “sonsuz hiç bitmeyen manasında...” derken sonsuzu bitmeyen bir süreç gibi algılıyor. (SONSUZ HİÇ BİTMEYEN) Sonsuz şekerim yerine “sonsuz kadar şekerim” diyor. Bir süreci ifade ederken 2’ye kadar, 3’e kadar gibi ifadeleri kullanırız. (SONSUZ HİÇ BİTMEYEN BİR SÜREÇ- süreç değil’in tersi)

7AA-1

(SONSUZ HİÇ BİTMEYEN BİR SÜREÇTİR) Yani sürekli devam eder. İfadelerinde bile sonsuzu bir sayı gibi kullanmıyor (“sonsuz şeker” yerine “sonsuz kadar şekerim” olsun diyor) Sonsuz bitmeyen bir süreç olunca sayı ile ifade edilemez. Yani sonsuz belirli bir sayı değil. Sonsuz, sayı ile ifade edilebilen çok büyük bir şey de olabilirdi. Sonsuz bitişi görünmeyen veya bilinmeyen bir şey. Yani Sonsuz bitmeyen veya bitişi bilinmeyen bir şey. Sonsuz biten bir şey de olabilirdi. Yani bir büyüklüğün miktarının bilinip bilinmemesi onu sonsuz yapabilir.

7AS-1

Sonsuz hiç bitmeyen, sayı ile ifade edilemeyen bir süreç olarak değerlendirilebilir. (BİTMEYEN SÜREÇ)

İfadelerinden de anlaşılacağı gibi görüşme potansiye sonsuzluk analizini işaret eden düşünceler ile başlamıştır. Bu öğrenci ile yapılan görüşmenin ikinci bölümünün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

Shrek filmi

- “Devler sonsuz kadar mutlu yaşamıyor” demekle peri anne ne demek istiyor? Devler ne kadar yaşar? (01.36)

C:Ölene kadar.

- Onu mu kastediyordur? (C:yok)Masal bu ya eninde sonunda gdiyor.

C:....

- “sonsuz mutluluk” veya “sonsuz güzellik” iksiri ne işe yarar? (03.06) - “Sonsuz mutluluk” ve “sonsuz güzellik” ile neyi kastediyor?

C: Hep mutlu olacağımız, hep güzel olacağımız anlamında.

- İksiri içerlerse ne kadar (gördüğünüz gibi) güzel kalacaklar? (05.39)

Ne kadar süre? Orda neyi kastediyorlar?

C: Ya öldükten sonra, ya ölene kadar olabilir. Aklıma gelmiyor.

-Sonsuz ne kadar bir süre sana göre?

C: Bayağı bir uzun süre

-Kaç yıl? 1, 10, 100 ...

C: Daha fazla...Kıyamet koptuktan sonra olabilir. Ama, ondan sonrada var ama, hiç düşünemiyorum bilmiyorum.

- Sonsuz mutluluk iksiri içtikten sonra başka bir sonsuzluk iksiri daha içerse daha mı fazla mutlu olur?

C: Ya değişmez.

-Değişmez mi?

C: Yan etkisi olabilir.

-Ama yan etkisi olmadığını düşünüsen.

C: Çok mutlu olabilir, her şeye gülebilir.

-Peki öncekinde nasıldı...Bir defa içtin çok mutlu mu olur (Evet) bir daha içse?

C: Çok çok mutlu olur.

- Şimdi senin sonsuz kalemin olsun. Ben sana o kadar kalemin varken sonsuz kalem daha versem ne kadar kalemin olur?

C: Bilmiyorum. İki sonsuz kalemim olur herhalde.

-Öyle hayal etmek zor herhalde?

C: Öyle, çünkü sayılamayacak kadar sonsuz.

-Sonsuz kalem sayılabilir mi?

C: Hayır.

- Senin sonsuz kalemin varken kalemlerinin yarısını alsam senin ne kadar kalemin kalır?

C: Sonsuz tane ne kadarsa onun yarısı kadardır.

-Ne kadar? Ama Önemli olan o zaten.

C: Düşünebileceğimiz dışında ama sonsuz. Yani düşünebileceğimiz bir şey değil.

-Yarısını alırsam bir sayı olur mu?

C:Hayır.

- O da mı olmaz. Yani sonsuz devam mı eder. (Hıhı, başını salladı) Ona sonsuz falan denebilir mi?

C: Denebilir. Ya sonsuzu bilmediğimiz için, yarısını da bilmediğimiz için ona da sonsuz denebilir.

7AO-2

Devlerin yaşama süresine “ölene kadar” demesi gerçek hayatta sonsuz zaman veya miktar ile ilgili bir model olmamasından kaynaklanıyor olabilir.(Sonraki ifadelerinde bu hipotezi doğruluyor) Masal kahramanları için ölüm söz konusu olmadığı hatırlatılınca cevap veremedi.(SONSUZ DÜŞÜNÜLEMEYECEK BR ŞEY – düşünülebilirin tersi) Sonsuz zamanın kaç yıl olduğu sorulduğunda “Baya bir uzun süre, kıyametten sonra da var ama, hiç düşünemiyorum bilmiyorum” demesi sonsuz zamanı düşünemediği savını pekiştiriyor.(BİLİNEMEYEN ÇOK UZUN BİR SÜRE – TAM KESTİRİLEMEYEN ÇOK BÜYÜK BİR ŞEY) Sonsuzluk iksirinden sonra bir sonsuzluk iksiri daha içilse ona göre bir şey değişmez. (SONSUZA SONSUZ EKLENSE BİR ŞEY DEĞİŞMEZ) Bu konuda kararsız. İki sonsuzun toplamını sonlu sayılarla yaptığı işlemlerden hareket ederek de değerlendirdi. “Çok çok mutlu olur”, “İki sonsuz kalemim olur herhalde” (SONSUZ SONSUZ DAHA İKİ SONSUZ OLUR-PEKİŞTİRME). Bu kararsızlığın sebebi “sonsuzun sayılamayacak kadar olması” (SONSUZ SAYILAMAZ – sayılabilir olmasının tersi) Sonsuzun yarısını zihninde canlandıramıyor. (SONSUZUN YARISI DÜŞÜNÜLEBİLECEK BİR ŞEY DEĞİL) Sonsuzun yarısını bir sayı olarak düşünmüyor. (SONSUZUN YARISI SAYI DEĞİL- sayı olmanın tersi) Sonsuzun yarısını da sonsuz diye tanımlaması onun da bilinmeyen bir şey olmasından kaynaklanıyor gibi. her şeyden önce ikisi de bilinmeyen, sayı ile ifade edilemeyen, belirsiz bir büyüklük. (SONSUZ VE SONSUZUN YARISI BİLİNMEYEN BİR ŞEY)

7AA-2

(SONSUZ BELİRSİZ BİR ŞEY) Çünkü düşünülemiyor ve tam kestirilemiyor. (BİLİNEMEYEN ÇOK UZUN BİR SÜRE) Bunun tersi olacak şekilde, sonsuz belirli bir sayı veya belirli bir büyüklük olarak da algılanabilir. Sonsuza sonsuz eklendiğinde bir şey değişecek veya değişmeyecek.Ona göre (SONSUZA SONSUZ EKLENSE BİR ŞEY DEĞİŞMEZ) Öğrencinin okulda yapılandığı matematik bu konuda etkili gibi. Öğrenci sonsuzla yapılan bu işlemi sonlu büyüklüklerle yapılan işlemler gibi düşünebiliyor. (SONSUZ+SONSUZ= 2 SONSUZ) demesi bu kararsızlığını ifade ediyor. “çok çok mutlu olur” ifadesine göre, bunda pekiştirme kavramı da etkili olabilir.

(SONSUZUN YARISI DA SONSUZ) Çünkü sonsuzun yarısı da düşünülemeyecek bir şey. Bir sayı olabilirdi fakat belirli bir sayı değil. (Belirsizlik derecesi)

7AS-2

Sonsuz ile ilgili işlemleri sonlu gibi algılayabiliyor. Sonsuz+sonsuz = 2 sonsuz demesi, pekiştirme düşüncesi vb. (SONLU DÜŞÜNME) Okuldaki eğitimin etkisi düşünülmese temelde sonsuz farklı düşünüyor gibi. Sonsuza sonsuz eklense bir şey değişmemesi, sonsuzun yarısının da sonsuz olması vb. (SONSUZDA İŞLEM FARKLI) Sonsuz sayı değil, sonsuz da yarısı da bilinmeyen, düşünülemeyecek bir şey. (BELİRSİZLİK) Belirsizliğin sebebi sonsuzun SAYILAMAZ oluşu.

Bu öğrenci ile yapılan görüşmenin üçüncü bölümünün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

- Bir kağıt şeridi veya uzun bir şeyi iki eş parçaya bölsem parçalar ne kadar uzun olur?

(5 cm) Üç eş parçaya bölsem? (2,5 cm) 4 eş parça? (11, 0,1 (hesaplayamadı))

Sonsuz parçaya bölsem parçalar ne kadar uzun olur?

C: Nasıl bölecez. Sonsuzun sayısı yok ki.(hum) Yani sonsuzun sayısı yok ki, 1 milyon olur. 2 milyon olur da. Onlar sonsuz değil. Yani sonsuzun sayısını bilsek... Mesela 1 milyon sonsuzdur desek o zaman belki şey olabilir ama...

- Demek ki 1 milyondan daha fazla olacak. Sonsuz parçaya bölmek ne demek olur o zaman.

C: Hiç fikrim yok. Yani sonsuz parçaya bölmek?

-Sonsuz parçaya bölmüş olsam, parçaların (şunların) uzunlukları ne olur?

C: milim falan olur...

-milimden küçük mü olur?

C: Olabilir.

-Onu da bölsem.

C: Çok çok küçük olur.

- Yani hesap etme imkanı pek kalmayacak diyorsun?

C: Yani.

-Sende sonsuz parça varken, bir kâğıdı bölüp yine sonsuz parça elde etsek ve öncekilere eklessek ne kadar parçamız olur? Yine mi aynı olur?

C: Bilmiyorum sayısını (bir şey diyemedi, şaşırdı.)

7AO-3

Sonsuz parçaya bölmeyi, sonsuz belirli bir sayı olmadığı için (SONSUZ BELİRLİ BİR SAYI DEĞİL) mantıksız buldu. (BİR BÜTÜN SONSUZ PARÇAYA BÖLÜNEMEZ). Sonsuz parçaya bölmek anlaşılmıyor. Sonsuz kadar bölünmüş bir parça “çok çok küçük olur”. (BELİRSİZ BİR KÜÇÜKLÜK) Sonsuz parça ile sonsuz parça toplandığında parça sayısının ne olacağı sorusuna cevap veremedi. (SONSUZ +SONSUZ BELİRSİZ)

7AA-3

Sonsuz bir sayı veya değil. Sonsuz belirli bir sayı olmadığı için sonsuz parçaya bölme olmaz. Çünkü her şeyden önce sonsuz büyüklüğü kavramıyor.(Anlaşılabilirlik derecesi) Bir bütünüün sonsuz parçaların dan birini düşünmek zor. (Belirsiz bir küçüklük- belirli olmanın tersi) Sonsuz parçaya bölmek mantıksız olduğundan (mantıklılık derecesi) sonsuz +sonsuz belirsiz.(Belirli olmanın tersi)

7AS-3

Bir bütün sonsuz parçaya bölünemez, sonsuz belirli bir sayı değil, sonsuz parça + sonsuz parça belirsiz, sonsuz parçaya bölmek mantıklı değil vb. olduğundan (SONSUZ KÜÇÜK BELİRSİZ BİR ŞEY)

Bu öğrenci ile yapılan görüşmenin dördüncü bölümünün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

- Prenses ne istiyor? Ne kadar mutlu yaşamak istiyor? Kaç yıl? (05.53)

C: Sonsuza kadar mutlu yaşamak.

- Orada bahsedilen süre, düşündüğümüz kaç yıl.

C: Sonsuz mu?.

-Çok konuşuyoruz ya sonsuza kadar diye?

C: Ya süresini bilmiyorum.

- Sonsuzluğa ulaşılabilir mi?

C: Hayır.

-Neden?

C: Bitmez. Çünkü. Yani git git nereye kadar.

- Filmin sonunda “ Sonsuza kadar çirkin kaldılar” denildiğine göre, shrek ve ailesi kaç yıl çirkin kalmış? (**Güldü**) Yeniden güzel olmuş olabilirler mi? (07.28)

C: Çı (hayır anlamında)

7AO-4

“Ya süresini bilmiyorum” (SONSUZ SÜRE BİLİNMEZ) Sonsuzluğu bitmeyen bir şey olarak gördüğünden ulaşılamaz olarak düşünmüş olabilir. (SONSUZLUĞA ULAŞILAMAZ) “Bitmez...Yani git git nereye kadar” (SONSUZ BİTMEYEN BİR ŞEY)

7AA-4

Sonsuz süre bilinmez (Bilinilirlik derecesi). Sonsuz belirli bitebilecek bir büyüklük olabilirdi ve buna göre sayarak veya bir şekilde sonsuzluğa ulaşılabilirdi. Fakat buna tepki veriyor. “yani git git nereye kadar.” (Sonsuz bitmeyen bir şey- Bitenin tersi) (Sonsuzluğa ulaşılamaz- Ulaşılabilir’in tersi)

7AS-4

Sonsuz bilinmediğinden ve hiç bitmediğinden, sonsuza ulaşılamaz.

Bu öğrenci ile yapılan görüşmenin beşinci bölümünün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

Oyuncak hikayesi filmi

-“Sonsuzluğun ötesi” ne kastediliyor? Ötesinde ne var?

C: Yok gibi.

- Sonsuzdan daha büyük bir şey olabilir mi?

C: Çı, hayır.

- Ama kullanılıyor. Neyse sende sonsuz kalem varken sana bir tane daha versem ne kadar kalemin olur?

C: Bilmiyorum, çok fazla olur.

-Ama sonsuzu geçer mi?

C: Sonsuzluğu geçer miyiz? Hayır. Aaa geçer miyiz? Geçeriz herhalde.

-Peki o zaman sonsuzdan daha büyük bir şey elde eder miyiz?

C: Hayır (Gülerek)

-Etmiyor mu?Neden

7AO-5

Sonsuzun ötesine yok gibi dedikten sonra sebebini net söylüyor. (SONSUZDAN ÖTE BİR ŞEY YOK) veya (SONSUZDAN BÜYÜK BİR ŞEY OLMAZ). “Bilmiyorum, çok fazla olur” (SONSUZ + 1 BELİRSİZ, ÇOK FAZLA OLUR). Bu düşüncelerden sonra sonlu sayılardaki doğal sıralama onu yönlendirdi. “Geçeriz herhalde” (SONSUZ + 1, SONSUZU GEÇER BELKİ). Fakat sonsuzdan daha büyük bir şey olduğunu sezgileri kabul etmiyor. “Hayır(Gülerek)” (SONSUZ EN BÜYÜK)

7AA-5

Onun için sonsuzluğun ötesi diye bir kavram yok gibi bir şey. (Sonsuzdan öte veya sonsuzdan büyük bir şeyin olup olmaması). Sonsuz+1 çok fazla büyük bir şey. Net değil. (Belirsizlik derecesi) Somut örnekler mantığa uygun geldiğinden belki sonsuzun geçilebileceğini düşündü. (sonsuz + 1 sonsuzu geçer veya geçmez, sonsuzdan büyük olur veya olmaz)

7AS-5

(EN BÜYÜK ŞEY SONSUZDUR) kategorisi hakim. Her ne kadar verilen somut örnekler mantıklı gelse de Sonsuzdan öte bir şey yok, sonsuzdan büyük bir şey olmaz ve sonsuz+1 in belirsizliği koruması nedeniyle bu kategori onda yerleşmiş bir düşünce gibi. “sonsuz+1 sonsuzu geçer” düşüncesi başta mantıklı ve yakın geldi fakat sezgilerini yenmeye veya yapılarını değiştirmeye yeterli olmadı.

Bu öğrenci ile yapılan görüşmenin altıncı bölümünün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

Domino ile ilgili filmler

-Sonsuz tane dominoyu yan yana dizip böyle bir şey yapsak ne olur?

C: Sığmaz ki.

-Neden sığmasın, her yeri kullansak?

C: Olmaz, en azından 1,2 milyar, trilyon olur belki, ama...

- Sonsuz domino sığsa birini itsek?

C: Hepsi,teker teker yıkılır.

-Ne zaman biter?

C: Bitmez. Bir yerde biter ama. O sonsuz olmaz biterse de.

-Sana bir şeker versem, sonra bir daha, böyle sonsuza kadar hiç durmadan şeker vermeye devam etsem kaç şekerin olur?

C: Her gün 1 tane versen...

-Ama sonsuza kadar, öldükten sonra da devam ediyorum vermeye.

C:Fazla olur. Ya sayısını bilmiyorum.

-Sana verdiğim ilk şeker kaçınıcı şekerdir? (**C: Birinci**) Sonraki şeker...? (**C: 2., 3.**)

Sana sonsuz şeker versem verdiğim son şeker kaçınıcı olur?

C: Sayısı yok onun.(-Önce kaçınıcı olduğunu söyleme lazım diyorsun)

- Sonsuz şekerin olduğunu kabul edelim. Bunun üzerine bir tane daha versem o kaçınıcı olur?

C: Sonsuzun sayısı olmadığı için onu bilmiyoruz.

-(Onu da mı bilmeyiz) ama kabul ettik. Sonsuza sonsuzuncu diyelim.

C: Sonsuzdan sonrakilere, 1 sonsuz, 2 sonsuz da denilebilir.

7AO-6

Sonsuz domino “sığmaz ki” derken gerçek hayatta böyle bir şey olamayacağını ifade ediyor. (SONSUZ DÜNYADA OLMAZ) “1,2 milyar, trilyon olur ama ...” (SONSUZ BÜTÜN SAYILARDAN BÜYÜK). Sonsuz domino olsa “bitmez”. “Bir yerde biter ama” derken sonsuza kadar devam eden bir işlemi hayal edememiş, düşünememiş olabilir. “O sonsuz olmaz biterse de” (SONSUZ BİTMEZ). Sonsuz şekerin sayısını düşünemiyor. (SONSUZ MİKTARIN SAYISI BELLİ DEĞİL) “sayısı yok onun ...” (SONSUZUN SAYISI YOK) “Sonsuzdan sonrakilere 1 sonsuz, 2 sonsuz da denilebilir” (SONSUZDAN SONRA DA BİR ŞEY OLABİLİR)

7AA-6

Sonsuz gerçek hayatta vardır veya yoktur. (Gerçeklik derecesi) Sonsuz, bütün sayılardan büyüktür veya değildir. Sonsuz biter veya bitmez. “O sonsuz olmaz biterse” derken sonsuzun bitmeyen, sayı ile ifade edilemeyecek kadar büyük bir şey olduğunu vurguluyor. Sonsuz bütün sayılardan büyük ama net bir sayı değil. Sonsuz miktarın sayısı belli değil (Belirginlik derecesi) Sonsuzdan sonrakilere 1 sonsuz, 2 sonsuz demesi ilginç, önceki $1 \text{ sonsuz} + 1 \text{ sonsuz} = 2 \text{ sonsuz}$ şeklindeki düşüncesi gibi sonlu okul matematiğinin etkisi ile böyle değerlendirmiş olabilir. Sonsuz +1 değil de 1 sonsuz diyor.

7AS-6

(Sonsuz bitmeyen ve sayısı olmayan bir şey) Çünkü gerçek hayatta örneği yok ve “bütün sayılardan büyük”, bir sayı değil. Sonsuzun bitmemesi belirgin bir özelliği çünkü biterse sonsuz olmaz. Sonsuz miktarın sayısı yok veya belli değil.

Bu öğrenci ile yapılan görüşmenin yedinci bölümünün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

Animasyonlar

-1-1 eşleme, sihirli torbalar... Hangi küme?

C: Doğal sayılar ...Çift sayılar

- 3 nokta ne anlamında.

C: Sonsuza kadar gidiyor, hiç bitmez...(-Her şey var o zaman) Evet

- Doğal sayılar, çift sayılar, tek sayılar torbalarında kaç tane sayı var?

C: sonsuz tane. Sonsuz kaç tane (kendine sordu) Sonsuz kaç tane olabiliyor, bilmiyorum.

-Bu torbalardaki sayıların adetleri eşit mi? Sayılar birebir eşlenebilirler mi? Her elemana karşılık Ç de bir eleman bulabilir miyim?

C: Hayır.

- Yukarı da aşağıdaki de sonsuz değil mi?

C: Yukarıda tek ve çift sayılar var. İkisi beraber katılıyor. Ama burada sadece çift sayılar var. (- N ve Ç nin birebir eşlemesi anlatıldığında) Evet. (tereddütle kabul etti)

-8'in karşısında ne var?

C:16

-T ile Ç torbaları karıştı. Hangi sayılar oldu?

C: Doğal sayılar.

-Tek sayılar kaç taneydi?

C: Sonsuz.

-Çift sayılar?

C: Sonsuz.

-Sonsuz sayının olduğu bir torbadaki sayılar, sonsuz sayının olduğu başka bir torbaya atılınca bu torbada sonsuz sayı mı var? Yoksa daha fazla mı?

C: İkisi de sonsuz oldu.karıştırdınca ne oldu? İki sonsuz oldu.

-Ama üstteki doğal sayılar oldu?

C: Evet, ama bilmem (gülerek ve hayretle şaşırarak)

-Sonsuz eleman ile sonsuz elemanı toplarsak ne kadar eleman elde edilir?

C: İki sonsuz oldu.

7AO-7

7. sınıfta üç noktanın “sonsuz kadar gider” anlamında olduğunu farkındalar. Üç noktayı da “sonsuz kadar gidiyor, hiç bitmez” şeklinde ifade ediyor.(SONSUZ HİÇ BİTMEZ) Doğal sayılar, çift sayılar kümesi sonsuz elemanlı ama bildiği bir sayı değil.(SONSUZ BİLİNEN BİR SAYI DEĞİL) Parça bütünden küçüktür anlayışı veya alt küme kavramı sonsuz elemanlı çift sayılar kümesi ile sonsuz elemanlı doğal sayılar kümesinin birebir eşlenmesini düşünmeyi güçleştiriyor gibi. $x \rightarrow 2x$ eşlemesi anlatıldığında teredditle de olsa eşlemeyi kabul etti.(SONSUZ DOĞAL SAYILAR KÜMESİ İLE SONSUZ ÇİFT SAYILAR KÜMESİ AYNI DEĞİL) T ile Ç kümelerinin birleşimini “ikisi de sonsuz oldu. (karıştıınca ne oldu?) İki sonsuz oldu.” Sonlu sayıların toplamı gibi iki sonsuz diye ifade ediyor.(SONSUZ+SONSUZ=2 SONSUZ) Matematik diline geçildiğinde okulda okutulan sayı kümeleri ve işlemleri ile ilgili uygulamaların etkisi fazla oluyor. Sonsuz +sonsuz = sonsuz işleminin pek sezgisel olmadığı açık. Sonsuz + sonsuz = 2 sonsuz işleminin, sonsuzu ölçme düşüncesinden geldiği tartışılır.

7AA-7

Sonsuz, üç nokta ile gösterilen hiç bitmeyen anlamında sonsuz bilinen bir sayı değil.(Bilinirlik derecesi) $s(N)$ ile $s(\mathbb{C})$ aynı değil (aynı olmasının tersi). Eleman sayıları toplamını $s(T) + s(\mathbb{C})$, iki sonsuz demesi, sonsuz sayılar toplamının sonlu sayılar gibi olduğunu düşündürüyor. (sonsuz ile olan işlemler, sonlu sayılarla olan işlemlerden farklıdır’ın tersi) Birebir eşleme mantıklı (Mantıklı değil’in tersi)

7AS-7

Sonsuz bilinen bir sayı olmasa da, sonsuzla yapılan işlemler matematiksel olarak sonlu sayılarla yapılan işlemler gibi düşünülüyor. (Sonsuzla yapılan işlemler sonlu sayılardaki gibi) Parça bütün ilişkisi, toplama işleminin sonlu sayılardaki gibi düşünülmesi bunu belirliyor. Bunların yanında 1-1 eşleme mantıklı bulunuyor.

F Öğrencisi ile Yapılan Görüşmenin Dökümleri ve Alınan Notlar:

F, matematik dersinde orta başarılı olan öğrencilerden biriydi ve diğer öğrencilere göre daha çekingendi. Araştırmacı görüşmenin film izlenerek öğrencinin kendi evinde yapılmasının bu çekingenliği azalttığını düşünmektedir. F de görüşmenin başından sonuna kadar filmleri ve soruları dikkatle takip etti ve cevaplandırmaya çalıştı. Bu öğrenci ile yapılan görüşmenin birinci bölümünün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

Çikolata fabrikası filmi

-Çikolatadan yapılan bir saray en fazla ne kadar dayanır?

C: 1,2 ay falan

-Bu saray ne kadar çikolatadan yapılmıştır? Sonsuz çikolatadan yapılsa saray ne kadar yer kaplar?

C: Yani çok.

-Yiyerek bitirilebilir mi?

C: Bitiririm herhalde.

- Çikolata fabrikası sonsuza dek kapandığına göre bir daha çalışabilir mi? (07.14)

C: Çalışır...da fazla şey yapmaz herhalde. Satmaz.

7FO-1

“Yani çok” bir ölçü ile ifade edilemeyen büyük miktarlar için kullanılır. Sonsuzu sayısal olarak ifade edemiyor. (İfade edebilirin tersi). Demek ki ifade edemeyeceği kadar büyük bir şey (İFADE EDİLEMEYECEK KADAR BÜYÜK) Sonsuz çikolatadan sarayı “bitiririm” demesi belki de sonsuz çikolatadan yapılan bir saray düşünememesinden kaynaklanıyor olabilir. Sonsuz çikolatadan saray onun için sınırlı bir şey. Onun için sonsuz bir model değil. (SONSUZ ÇİKOLATADAN YAPILAN SARAY SINIRLI)

7FA-1

Sonsuz büyüklük ifade edilebilen veya ifade edilemeyen bir miktar. Sonsuzu sayısal olarak ifade edebilirdi fakat ifade edemedi. Sonsuz çikolatadan saray bitirilebilir veya bitirilemez. Sonsuz büyüklükte bir şey dünyada olmadığından sonsuz çikolatayı veya sonsuz çikolatadan sarayı düşünülebilmesi pek mümkün değil gibi.

7FS-1

Sonsuz sayı ile ifade edilemiyor, sonsuz çikolatadan sarayı düşünemiyor (Sonsuz ifade edilemeyecek kadar büyük).

Bu öğrenci ile yapılan görüşmenin ikinci bölümünün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

- *Sonsuz ne kadar uzun bir süre (büyüklerin kastettiği) sana göre ? 1 yıl, 10 yıl, 100 yıl, ... (07.39)*

C: 5 yıl falan, 10 yıl falan.

- *“Sonsuzluk” kelimesini ilk nerede duydun? Hatırlıyor musun?*

C: Hatırlamıyorum.

- *Sonsuz nasıl bir şey?*

C: Hiç bitmeyen bir şey, herhalde.

- *Senin için o anlama mı geliyor?*

C: Evet.

- *Sana göre, sonsuz diye bir şey var mı? Neden?*

C: Var, vardır herhalde.

- *Sonsuz zaman, mekan diyorlar ya?*

C Dünyada olacağını zannetmiyorum ama.

- *Sonsuzluk deyince ne hissediyorsun?*

C: Sonsuzluk... benim aklıma öbür dünya geliyor, sonsuzluk deyince.

Shrek filmi

- *“Devler sonsuza kadar mutlu yaşamıyor” demekle peri anne ne demek istiyor? Devler ne kadar yaşar? (01.36)*

C: Kısa ömürlü ya da bütün devler hayatlarında mutsuzlarmış.

- *“sonsuz mutluluk” veya “sonsuz güzellik” iksiri ne işe yarar? (03.06)*

“Sonsuz mutluluk” ve “sonsuz güzellik” ile neyi kastediyor?

C: Sonsuza kadar mutluluk ve güzellik yani.

- *İksiri içerlerse ne kadar (gördüğünüz gibi) güzel kalacaklar? (05.39)*

C: Ölene kadar.

7FO-2

Sonsuza kadar uzun bir süreyi 5 yıl, 10 yıl ile nitelendiriyor. Fakat sonsuzu tanımlarken (SONSUZ HIÇ BİTMİYEN BİR ŞEY) diyor. Günlük hayattaki kullanımın etkisi ile veya filmin etkisi ile ilk başta sonsuz zamanı sınırlı uzun bir süre olarak düşünmüş olabilir. Bu çelişkinin sebebi “sonsuzun dünyada olacağını” düşünmemesi de olabilir. Sonsuzu kullanırken çok uzun bir süre(kendisine göre) kastettiği için 5, 10 yıl ile sınırlı bir süreyi cevap olarak vermiş olabilir. Sonuçta sonsuz dünyada olsa ona göre hiç bitmeyen bir şey. (SONSUZ DÜNYADA OLAN BİR ŞEY DEĞİL) Sonsuzluk iksirini içenin ne kadar güzel kalacağı sorusuna “ölene kadar” demesi de sonsuzluğu dünyada bir örneği olmadığından dolayı sınırlı bir süre için kullandığını ifade ediyor.

7FA-2

Sonsuz biter, sınırlı bir büyüklük olabilir veya hiç bitmeyen bir şeydir. Sonsuz büyüklük var veya sonsuz büyüklük yok. Zaman ve büyüklükler dünyada ölene kadar (sonsuz çikolatadan saray bitirilebilir ve sınırlı olduğu gibi). Buna göre sonsuz dünyada olan bir şey değil. (Sonsuz dünyada olabilir, gerçek hayatta örneği vardır ’ın tersi)

7FS-2

Sonsuz hiç bitmeyen ve dünyada örneği olmayan bir şey. Sonu gelmeyen bir süreç gibi (GERÇEK HAYATTA OLMAYAN SÜREÇ)

Yukarıdaki ifadelerden de anlaşılacağı üzere, “bir süreç olmak” ve “hiç bitmemek” fenomenleri görüşmenin bu kısmında belirgin bir şekilde ortaya çıkmaktadır. Bu öğrenci ile yapılan görüşmenin üçüncü bölümünün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

-Sonsuz mutluluk iksiri içtikten sonra başka bir sonsuzluk iksiri daha içerse daha mı fazla mutlu olur?

C: Değişmez. Ya bence aynı olur.

-Şimdi senin sonsuz kalemin olsun. Ben sana o kadar kalemin varken sonsuz kalem daha versem ne kadar kalemin olur?

C: Sonsuz.

-Ama sonsuz vardı zaten...?

C: Sonsuzun iki katı olur. yani aynı olur.

-Sonsuz kalem sayılabilir mi? 1, 2, 3, 4, 5 ... diye?

C: Hayır sayamam.

-Neden sayamazsın?

C: Adı üstünde sonsuz yani.

-Vakit mi yetmez. Neden?

C: Vakit yetmez. Cümlelerde yetmez.

- Senin sonsuz kalemin varken kalemlerinin yarısını alsam senin ne kadar kalemin kalır?

C: Yine sonsuz tane, sonsuzun yarısı olur. Sonsuz olur yani.

-Bir şeyler eksilmesi lazım değil mi?

C: Evet eksilir.

-Eksilince yine mi aynı olur?

C: Evet.

7FO-3

“Değişmez” kelimesi ile ikinci bir sonsuzluk iksirinin bir etkisi olmayacağını ifade ediyor. Bu, sonsuz ulaşılabilecek son nokta olduğu için veya ifade edilebilecek en büyük miktar sonsuz olduğu için olabilir. Sonsuzun iki katını yine aynı sonsuz olarak ifade etmesi yine sonsuz en büyük miktar olarak gördüğü için olabilir. Sonsuz hiç bitmeyen bir şey ise iki katının da hiç bitmeyen olması araştırmacıya göre de mantıklı. Bu arada sonsuzun bilinen bir sayı olması buna göre mümkün değil. (SONSUZUN İKİ KATI YİNE SONSUZ) “Sayamam” dediğine göre (SONSUZ SAYILAMAZ) bir şey (Sayılabilirin tersi). Sebebi “vaktin ve cümlelerin yetmemesi” (HİÇ BİTMEYEN BİR ŞEY ’e benzer) Sonsuz kalemin yarısına da sonsuz demesi sonsuzun bütün katlarının sonsuz olduğunu ifade ediyor. Yutan eleman gibi. (SONSUZUN YARISI DA SONSUZ)

7FA-3

Sonsuzun iki katı da yarısı da sonsuz ile aynı veya değil. Sonsuz büyüklüklerin toplanması veya yarılarının alınması bir şey değiştiriyor veya değiştirmiyor. Sonsuz sayılamaz (Sayılabilirlik derecesi) Sonsuz hiç bitmeyen bir şey. Biten, sınırlı bir büyüklüğün tersi.

7FS-3

Sonsuz büyüklük ile ilgili işlemler bir şey değiştirmiyor. Sonsuzun iki katı da yarısı da sonsuz olduğundan (Sonsuz yutan eleman gibi). Sonsuz sayılamayan ve hiç bitmeyen bir şey olduğu için sonsuz büyüklükleri sonlu büyüklükler gibi düşünmek pek mümkün değil.

Bu öğrenci ile yapılan görüşmenin dördüncü bölümünün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

-Bir kağıt şeridi veya uzun bir şeyi iki eş parçaya bölsem parçalar ne kadar uzun olur?

(C: Yarısı olur.) Üç eş parçaya bölsem? 4 eş parça? (C: Çeyrek oldu.)

Sonsuz parçaya bölsem parçalar ne kadar uzun olur?

(C: 1 mm'nin yarısının yarısının yarısı kadar.)

-Ama yine bölüyorum. Onu da böldüm.

C: Kalmıyor ki yani.

- Onu da böldüm sonra.

C: (Gülerek) Sonsuz kalır.

-Sende sonsuz parça varken, bir kâğıdı bölüp yine sonsuz parça elde etsek ve öncekilere ekleysek ne kadar parçanın olur?

C: Sonsuz.

-Ama sonsuz vardı zaten. Sana şu parçaları da verdim.

C: ...

- Diyorsun yine sonsuz olur.

7FO-4

“1 mm'nin yarısının yarısının yarısı kadar” ile söyleyebileceği en küçük aralığı söyledi. Bir şerit sonsuza kadar bölündüğünde (ÇOK KÜÇÜK BELİRLİ BİR ŞEY) akla geliyor. (Hiç bitmeyen şeyin tersi). Daha ilerisini düşünemediği açık. “kalmıyor” ifadesinden anlaşılacağı üzere bölmeye devam edildiği söylendiğinde o küçüklüğü belirleyemedi. “Sonsuz kalır” ifadesi ile belirsiz bir şeyi ifade ediyor. Çok küçük te olsa çok büyük de olsa sonsuz bu yaşta belirsiz bir şeyi ifade ediyor gibi.(SONSUZ BELİRSİZ) Araştırmacı “Sonsuz küçük” matematikte kabul edilen tartışmalı bir kavram olmasının yanında bu yaşta böyle bir kavramın oluşmadığı, sezgisel olmadığı düşüncesindedir (SONSUZ KÜÇÜK YOK). Sonsuz parçaya sonsuz parça eklendiğinde yine “sonsuz” cevabının alınması (SONSUZUN İKİ KATI SONSUZ olması gibi) sonsuzun yutan eleman gibi olduğu düşüncesini doğuruyor. Bu durum sonsuzun en büyük olarak algılanmasından kaynaklanabilir (SONSUZ PARÇA SONSUZ PARÇA DAHA SONSUZ). Sonsuza bir şey eklendiğinde yine sonsuz olması onun için bir çelişki. Fakat

ona göre belirsiz olan büyüklüğü yine sonsuz ile ifade ediyor. (SONSUZ BELİRSİZ ÇOK BÜYÜK BİR ŞEY)

7FA-4

Sonsuz küçük belirli çok küçük bir şey veya hiç bitmeyen belirsiz bir şey. Sonsuz belirli bir şey veya belirsiz bir şeyi ifade ediyor.(Belirsizlik derecesi) Sonsuz küçük yok. (Sonsuz küçük var'ın tersi). Sonsuz parçaya sonsuz parça eklendiğinde yine sonsuz parça olur. (Sonsuz parçadan farklı olmasının tersi). Sonsuz belirsiz çok büyük bir şey veya değil.

7FS-4

Bir bütünüün sonsuz parçaya bölünmesini düşünmek zor, sonsuz küçük parça belirsiz bir şey. Sonsuz küçük yok (SONSUZA BÖLMEK BELİRSİZ VE SONSUZ KÜÇÜK YOK). Sonsuza sonsuz eklenirse yine sonsuz olur.

Bu öğrenci ile yapılan görüşmenin beşinci bölümünün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

-Prenses ne istiyor? (C:Sonsuza kadar mutlu yaşamak)Ne kadar mutlu yaşamak istiyor? Kaç yıl? (05.53)

C: 60 yıl belki 80.

-Sonsuzluğa ulaşılabilir mi?

C:Hayır

-Filmin sonunda “ Sonsuza kadar çirkin kaldılar” denildiğine göre, shrek ve ailesi kaç yıl çirkin kalmış?

C: 80 civarı.

-90 olmaz mı?

C: Ömürlerine bağlı.

-Ömürleri yetse.

C: O zaman sonsuz yani.

-Yeniden güzel olmuş olabilirler mi? (07.28)

C:Zannetmiyorum.

7FO-5

“60 yıl belki 80” gibi sayısal ifadeler kullanması “ömürlerine bağlı” ifadesinde belirttiği gibi dünyada her şey sonlu olduğundan dolayı sonsuza kadar mutluluğa veya çirkinliğe sınırlı bir süre veriyor. Hayat hiç bitmezse bu süreler “sonsuz” (SONSUZ BİTMEYEN BİR SÜRE) (Hiç bitmeyen bir şey gibi) “Hayır” (SONSUZLUĞA ULAŞILAMAZ) demesi de bunu destekliyor. Dünyadaki örnekler bizim sonlu kavramlara bağlı kalmamıza neden oluyor gibi. Bu sınırlamalar yok sayıldığında ve sonsuza kadar çirkin kaldıklarında yeniden güzel olurlar mı? sorusuna “zannetmiyorum” demesi anlamlı.

7FA-5

Sonsuza kadar bitmeyen bir süre (sınırlı bir sürenin tersi) düşünülebilecek en büyük sürelerin sonlu olması gerçek hayatın kısıtlamalarından kaynaklanıyor. Sonsuzluğa ulaşılabilir veya ulaşılamaz. Sonsuza kadar olan bir şeyin değişmesi zor, örneğin sonsuza kadar çirkin kaldılar ise bir daha güzel olamazlar. (Sonsuza kadar olan bir şeyin sınırlı değişebilen bir şey olmasının tersi)

7FS-5

Sonsuza kadar hiç bitmeyen bir süre, sonsuz sınırsız ve sonsuza ulaşılamaz (SONSUZ ULAŞILAMAYAN SINIRSIZ BİR ŞEY)

Bu öğrenci ile yapılan görüşmenin altıncı bölümünün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

Oyuncak hikayesi filmi

-Sonsuzluğun ötesinde ne var?

C: Sonsuzluğun ötesi olmaz ki. Sonsuz zaten çok...

-Sonsuzdan daha büyük bir şey olabilir mi?

C: Yok.

-Sende sonsuz kalem varken sana bir tane daha versem ne kadar kalemin olur?

C: Sonsuz. gene sonsuz.

C: Zaten sayılamıyor. 1 tane daha geliyor yine aynı şey olur.

7FO-6

“Sonsuzluğun ötesi olmaz ki. Sonsuz zaten çok...” ifadesi sonsuzun ifade edilebilecek en büyük miktar olarak anlaşıldığını gösteriyor (SONSUZLUĞUN ÖTESİ YOK).

Muhtemelen cümlelerin devamı sonsuz zaten çok “büyük” şeklinde...Sonsuzu net olarak açıklayamasa da sonsuzdan daha büyük bir şey olmadığını “yok” diyerek belirtiyor. Sonsuz bir sınır gibi, fakat bildiğimiz sayısal bir ifade değil. Sonsuz kaleme bir kalem eklendiğinde yine sonsuz kalem olması bunu destekliyor. Sonsuzun en büyük bir sınır gibi algılanması “sayılamıyor. 1 tane daha geliyor yine aynı şey olur” ifadesinde belirgin gibi. Çünkü (SONSUZ SAYILAMAYAN) çok büyük bir şey (BELİRSİZ BÜYÜKLÜK öncekiler gibi). Sayılamayan, düşünilemeyen veya düşünülse de belirsiz çok büyük şeyler için sonsuzu kullanıyor.

7FA-6

Sonsuzdan büyük bir şey yok yani sonsuzun ötesi yok (sonsuzdan daha büyük şeylerden bahsedilebilir, sonsuzun ötesine geçilebilir 'in tersi). Bunun sebebi sonsuzun zaten çok büyük olması, demek ki sonsuz düşünülebilecek en büyük miktar için kullanılıyor. (Büyüklik derecesi). Sonsuzdan bir fazlası yine sonsuz veya sonsuzdan farklı. Bunun sebebi sonsuzun sayılamayan olması. Sonsuz sayılabilen bir şey de olabilir.

7FS-6

Sonsuzdan büyük bir şey yok, sonsuzun ötesi yok, sonsuz düşünülebilecek en büyük miktar, sonsuz sayılamayan, sayı ile ifade edilemeyen bir şey olduğundan sonsuzdan bir fazlası yine sonsuz (EN BÜYÜK SONSUZ)

Bu öğrenci ile yapılan görüşmenin yedinci bölümünün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı kod notları aşağıdadır.

Domino ile ilgili filmler

-Sonsuz tane dominoyu yan yana dizip böyle bir şey yapsak ne olur?

C:Sonsuz tane yok ki yani. (-Olsa mesela) Sonsuz yok ki nasıl koysunlar.

-Koymuş olsalar?

C:Çok uzun olur.

-Biter mi?

C: Biter...bitmez...

-Sana bir şeker versem, sonra bir daha, böyle sonsuza kadar hiç durmadan şeker vermeye devam etsem kaç şekerin olur?

C: Sonsuz.

-Sana verdiğim ilk şeker kaçınıcı şekerdir? (C: Birinci) Sonraki şeker...? (C: İkinci) Sana sonsuz şeker versem verdiğim son şeker kaçınıcı olur?

C: Sonsuz mu olur.

-4 değil 4. diyoruz. ona ne diyeceğiz.

C: Sonsuzuncu.

-Peki bunların üzerine bir tane daha versem o kaçınıcı olur?

C: Sonsuz...

-Sonsuzuncuyu geçtik mi o zaman?

C: O da sonsuz.

7FO-7

“Sonsuz tane yok ki...” ifadesi sonsuzun dünyada veya çevremizdeki örneklerle algılanamayacağını vurguluyor. (SONSUZ DÜNYADA YOK- Dünyada örneğinin olmasının tersi) Sonsuz bir büyüklüğün olduğu var sayılsa sonsuz dominoyu “çok uzun” olur ifadesindeki gibi çok büyük bir şey gibi tanımlıyor. Sonsuz bir büyüklüğün bitip bitmemesi konusunda çelişki var.”biter..bitmez..” Bu yaşta bitmeyen matematiksel bir büyüklükle karşılaşmadıkları ve böyle bir şeyi somutlaştıramadıkları açık. Sonsuzuncu şekerden sonrası için de “O da sonsuz” ifadesi sonsuzun geçilemeyecek bir şey olduğunu vurguluyor. (SONSUZ GEÇİLEMEYECEK BİR ŞEY) Diğer bir noktada “sonsuzuncu” ifadesini araştırmacıdan duymadan kendi tahmin ederek söylüyor. Ordinal düşünce sonsuz büyüklüklerde de işliyor. Fakat sonsuzdan sonrası için “-uncu” gibi bir ekle değil de doğrudan sonsuz dedi. Belirsiz bir şey veya büyüklük olduğu için “sonsuz” kelimesini kullanıyor gibi.

7FA-7

Bir şeyden sonsuz tane olamaz veya olabilir. Sonsuzun gerçek hayatta örneği yok (Örneği var’ın tersi). Sonsuz bir büyüklük biter veya bitmez. Sonsuzuncu şekerden sonrası yok veya düşünülemiyor. Buna göre sonsuz geçilemeyecek bir şey (Geçilebilen bir şey’in tersi) Sonsuzdan sonrası düşünülemiyor veya belirsiz. (Belirsizlik derecesi)

7FS-7

Sonsuz geçilemeyecek bir şey, sonsuz biter ve dünyada yok. Bu kategorilerin birbirleri arasında çelişki oluşturmaması mümkün değil. Zaten biter veya bitmez diyememesi bu durumun göstergesi gibi. Geçilemeyen bir şey ise bitmesi lazım, fakat sonsuzu daha

önceden hiç bitmeyen bir büyüklük olarak ele almıştı. Sonsuzdan sonrasını düşünmek çelişkiyi arttırdı.(SONSUZ GEÇİLEMEZ)

Bu öğrenci ile yapılan görüşmenin sekizinci bölümünün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

Animasyonlar

-Doğal sayılar, çift sayılar, tek sayılar torbalarında kaçar tane sayı var?

C: Sonsuz.

-Ç, N nin içinde var mı?

C: Var. Ama ikisi de sonsuz.

-Bu torbalardaki sayıların adetleri eşit mi? Sayılar birebir eşlenebilirler mi?

C: Eşleyemeyiz.

-8 in karşısında ne var?

C: 16

-1 milyon olsaydı? Katrşısında...?

C: 1 milyon 2 mi olacaktı.

-2 milyon, 2 katı.

C:...

-N ile Ç sayıları birbirine eşit olur mu?

C: Olur. O da sonsuz. O da sonsuz.

-Ç, N nin alt kümesi değil mi?

C: Evet. (Şaşırdı)...

-Sonsuz sayının olduğu bir torbadaki sayılar, sonsuz sayının olduğu başka bir torbaya atılınca bu torbada sonsuz sayı mı var? Yoksa daha fazla mı? Ç+T ne oldu?

C: Doğal sayılar oldu.

-Sonsuz eleman ile sonsuz elemanı topladık mı?

C: Sonsuz elde ettik.

-Mantıklı mı?

C: Değil. Çünkü sonsuzu sonsuza koyunca garip oluyor. 2 katı sonsuz veya değişik bir şey olsa...

7FO-8

$\mathcal{C}$ kümesinin N kümesinin alt kümesi olması ve parça bütün ilişkisi onda bir çelişki oluştursa da kısa sürede bu kümelerin eleman sayılarını sonsuz olarak değerlendirdiği için N ile $\mathcal{C}$ kümelerinin eleman sayıları eşit olacağı kanaatine vardı. “Olur. O da sonsuz. O da sonsuz.” Bütün sonsuz miktarları aynı gibi ele alıyor. (BÜTÜN SONSUZ MİKTARLAR AYNI – Sonsuz miktarların birbirlerinden farklı olmalarının tersi) Yine de $\mathcal{C}$ kümesinin N kümesinin alt kümesi olması büyük bir çelişki oluşturdu. Sonsuz eleman ile sonsuz elemanın toplamının yine sonsuz olmasını, $S(\mathcal{C}) + S(T) = S(N)$ olmasını mantıklı bulmadı. Sonsuzun iki katının yine belirsiz bir büyüklük olan sonsuz olması düşüncesine göre, “sonsuzu sonsuza koyma” matematiksel olarak sayılarla ve işlemlerle ifade edildiğinde yapılan işlemi daha iyi görmüş olabilir. Bu haliyle sonsuzluk kavramı mantık ve sezgilerle çelişiyor. Bunda okulda öğrenilen matematiğin etkisi de göz ardı edilmemeli. Sonsuzu sonsuza koyunca ilk aklına gelen 2 katı sonsuz oldu.

7FA-8

Farklı büyüklükte sonsuz kümeler yok. Bütün sonsuz miktarlar aynı (Sonsuz miktarlar birbirinden farklıdır’ın tersi). $\mathcal{C}$ nin N kümesinin alt kümesi olması birebir eşlemede çelişki oluşturuyor (Çelişki derecesi) Sonsuza sonsuz eklendiğinde yine sonsuz elde edilmesi ve matematiksel olarak gösterilmesi mantıklı değil. Mantıklı da olabilir.

7FS-8

Farklı büyüklükteki sonsuz kümelerin eleman sayılarının aynı olması (SONSUZ MİKTARLAR AYNI). Bunda kümelerin eleman sayılarının belirsizliğini sonsuz ile ifade etmesinin etkisi olabilir. (Sonsuzun belirsizliği) Çelişkili durumlar parça bütün ilişkisi ile ilgili gibi. 1-1 eşlemeyi mantıklı bulmuyor. (PARÇA BÜTÜNDEN KÜÇÜK). Filmler ile ilgili verdiği sorulara ters olarak okul matematiğindeki sonsuz+sonsuz=2sonsuz gibi bir sonuç daha mantıklı geldi. Öğrencinin sonsuzla ilgili sezgisel özelliklerine ters olan bir durum.

T Öğrencisi ile Yapılan Görüşmenin Dökümleri ve Alınan Notlar:

T, kendi döneminin en başarılı ikinci öğrencisiydi. Matematik dersinde de oldukça başarılıydı. Araştırmacıya göre, T diğer öğrencilere göre sonsuzluk konusunda daha az kararsızdır. Görüşmenin başından sonuna kadar filmleri ve soruları dikkatle takip etmiş ve cevaplandırmaya çalışmıştır. Fakat tekrar eden sorular karşısında bazen sıkıldığı

görülmüştür. Bu öğrenci ile yapılan görüşmenin birinci bölümünün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

Çikolata fabrikası filmi

- Bu saray ne kadar çikolatadan yapılmıştır? Sonsuz çikolatadan yapılırsa saray ne kadar yer kaplar?

C: Baya bir kaplar, baya bölüm yani, ova

- Yiyerek bitirilebilir mi?

C: Zor.

- Zor da olsa biter mi?

C: Biter.

- Çikolata fabrikası sonsuza dek kapandığına göre bir daha çalışabilir mi? (07.14)

C: Açar...

- Yani, sonsuza dek kapatmış bir daha açılır?

C:Yok, öyleyse...

7TO-1

Bayağı yerine kısaca “baya” diyor. Baya ’nın gerçeklik, âdilik, epey gibi bir çok anlamı var. Burada (zarf) oldukça, epey anlamında. Sonsuz çikolatadan yapılan sarayın çok büyük bir yer kapladığını ifade ediyor. Ayrıca “bayâ” belirsiz, kesin ifade edemediğimiz büyük bir miktar için kullanılır. Sonsuz çikolata miktarı çok fazla ve tam kestiremediği için “baya” kelimesini kullanmış olabilir. Sonsuzlukta bir belirsizlik var. Dünya, uzay değil de ova kelimesini kullanmış olması sarayın dünyayı kaplayamayacağından ve bir sarayın yerleşebileceği en geniş alan olarak bir ovayı hayal ettiği için olabilir. **(TAM KESTİRİLEMİYEN ÇOK BÜYÜK BİR ŞEY)** Sonsuz çikolatadan yapılan sarayın yiyerek zor biteceğini, zorda olsa biteceğini ifade ediyor. Buna göre sonsuz çikolata çok büyük tam belirleyemediği bir miktar fakat eninde sonunda sınırlı ulaşılacak bir miktar. Bunun yanında büyük olasılıkla sonsuz çikolatadan yapılan bir sarayı hayal edememiş olabilir. Eninde sonunda bir saray yapıldı ise elbette kullanılan malzeme belirlenebilir.

“sonsuz dek” kelimesini sonu gelmeyen bitmeyen bir süre olarak anlıyor gibi.

7TA-1

Sonsuz büyüklük tam kestirilemeyen çok büyük bir şey veya belirlenebilen bir miktar (Belirsizlik derecesi). Sonsuz bir büyüklüğü zihinde canlandıramıyor. (Zihinde canlandırabilmenin tersi) Çünkü gerçek hayatta her şey sınırlı. “Sonsuz dek” bitmeyen bir süre veya sınırlı bir zaman.(Sonraki görüşmeler bunu doğruluyor)

7TS-1

Sonsuz büyüklük tam kestirilemeyen çok büyük bir şey, zihinde canlandırılmıyor, “sonsuz dek” bitmeyen bir süre (KESTİRİLEMEYEN ÇOK BÜYÜK BİR ŞEY)

Bu öğrenci ile yapılan görüşmenin ikinci bölümünün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

- *Sonsuz ne kadar uzun bir süre (büyüklerin kastettiği değil, bize göre) ? 1 yıl, 10 yıl, 100 yıl, ... (07.39)*

C: *Baya, binlerce yani, sonsuz dediğine göre, bitmeyen...*

- *Sonsuz diye bir şey var mı? O zaman bahsettiğimize göre...?*

C: *Var.*

- *Neden?*

C: *Güldü.*

- *“Sonsuzluk” kelimesini ilk nerede duydun?*

C: *hatırlamıyorum, baya olmuştur.*

- *Nerededir?*

C: *Okuldadır.*

- *Sonsuz nasıl bir şey? Ne anlama geliyor?*

C: *Hiç bitmeyen.*

- *Sonsuzluk deyince bunu mu hissediyorsun?*

C: *Evet.*

Shrek filmi

- *“Devler sonsuza kadar mutlu yaşamıyor” demekle peri anne ne demek istiyor? Devler ne kadar yaşar? Masal kahramanları sonsuza kadar yaşıyor herhalde.(01.36)*

C: *Yani.*

- *Ama devler yaşamıyorlarmış onlar ne kadar yaşar?*

C: *Normal insan kadar.*

- *Sonsuza kadar yaşamış olsalardı?*

C:

- *“sonsuz mutluluk” veya “sonsuz güzellik” iksiri ne işe yarar? Bunu içen ne olur? (03.06)*

C: *Güzel oluyor.*

- *“Sonsuz mutluluk” ve “sonsuz güzellik” ile neyi kastediyor?*

C: *Her zaman mutlu oluyor.*

- *İksiri içerlerse ne kadar (gördüğünüz gibi) güzel kalacaklar? (05.39)*

C: *Sonsuz.*

7TO-2

Sonsuz zamanı yine tam kestiremediği için “pek çok, çok sayıda” anlamında “binlerce yani” ifadesini kullanıyor. Sonsuz süre tam ifade edilemeyen çok uzun bir zaman gibi. Sonsuzu bir sayı gibi ele almıyor. (BİR SAYI İLE İFADE EDİLEMEYEN ÇOK UZUN BİR SÜRE). “Bitmeyen” sona ermeyen, tükenmeyen anlamında. Öğrencide sonsuzu bu anlamlarda kullanmış olabilir. (SONSUZ HİÇ BİTMEYEN BİR ŞEY) Sonsuza kadar olmayan sonlu yaşam süresini doğal olarak bir insanın yaşam süresi ile ifade etti. Fakat sonsuza kadar yaşam ile ilgili soru cevapsız kaldı. Bunu modelleyebileceği hayatından bir şey olmayacağı için böyle cevap vermesi normal. Zihninde sonsuz belirsiz bir kavram gibidir. “her zaman” ifadesi ile sonsuz olan bir şeyi kısıtlamamış oluyor. Şimdi mutlu olduğu gibi gelecekte de mutlu olacak. (SONSUZ SINIRLI BİR ŞEY DEĞİL)

7TA-2

Sonsuz süre tam ifade edilemeyen ve kestirilemeyen bir şey olduğuna göre bir sayı ile ifade edilemeyen çok uzun bir süre. (Sayı ile ifade edilebilen belirli bir sürenin tersi) Sonsuz hiç bitmeyen bir şey (Biten sınırlı bir büyüklüğün tersi) “Sonsuza kadar” modellenemeyen veya örnek verilemeyen bir süre, belirsiz. (Belirsizlik derecesi). Sonsuz sınırlı bir şey değil veya sınırlı bir şey.

7TS-2

Bir sayı ile ifade edilemeyen çok uzun bir süre, Hiç bitmeyen gerçek hayattan örnek verilemeyen bir şey, Sınırlı bir şey değildir. (BİTMEYEN BİR ŞEY)

Bu öğrenci ile yapılan görüşmenin üçüncü bölümünün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

- Sonsuz mutluluk iksiri içtikten sonra başka bir sonsuzluk iksiri daha içerse daha mı fazla mutlu olur?

C: Zaten sonsuzluğa kadar mutlu olacağından hiçbir şey ifade etmez.

- Bir fazlalık olmuyor. Değil mi?

C: Evet

- Şimdi senin sonsuz kalemin olsun. Ben sana o kadar kalemin varken sonsuz kalem daha versem ne kadar kalemin olur?

C: Sayısal olarak mı... Baya milyonlar, trilyonlar, katrilyonlar ...

- Bir sayı ile ifade edebilir miyiz ?

C: Yok. Zaten sonsuz dediğinizden... (- İşler bitiyor mu diyorsun? C: Evet)

- Sonsuz kalem ile yeni verdiklerimle beraber olan arasında bir fark var mı? Artış oldu herhalde.

C: Evet. Valla... durum pek şey değil ama...

- Senin sonsuz kalemin varken kalemlerinin yarısını alsam senin ne kadar kalemin kalır?

C: Sonsuzun yarısı kadar.

- Onu nasıl ifade ederiz? Sayısal olarak? Sonsuzdan az mı olur, çok mu olur?

C: Az. (Ama daha az olur? Okey)

-Ama yine sonsuz kadar olmaz?

C: Olmaz.

- Sayı olarak bir şey diyebilir misin?

C: Ne diyeyim. 100 milyon.

- Söyleyebildiğin en büyük sayı ne?

C: Katrilyon.

- Sonsuz ondan büyük mü?

C. Büyük tabi.

-Bir sayı mıdır sonsuz?

C: Değil bence.

7TO-3

(SONSUZDAN FAZLA BİR ŞEY OLMAZ) Sonsuzu bitmeyen bir şey olarak algıladığından sonsuzdan daha büyük bir şeyi kabul etmiyor olabilir. Öğrenci önceki ifadelerine göre sonsuza bir bütün olarak veya bir sayı olarak bakmıyor. Sonsuz kalemin yine tam kestiremediği için “pek çok, çok sayıda” anlamında “baya milyonlar, trilyonlar, katrilyonlar” ifadesini kullanıyor olabilir. (TAM KESTİRİLEMEYEN ÇOK BÜYÜK BİR ŞEY) Sonsuza bir şey eklenebileceği noktasında veya belki sonsuzdan büyük bir şey olamayacağı için kalem sayısındaki artış pek mantıklı gelmemiş olabilir. “durum pek şey değil” ifadesi kafasına yatmadığını gösteriyor. Kalem sayısında bir artış olduğunu düşünüyor olabilir fakat sonsuzdan daha büyük bir şey olabileceğini kabullenemiyor gibi. “Valla” şaşkınlık ve tereddüt ifadesi. Sonsuzun yarısının olabileceğine karşı gelmedi. Buna göre aslında sonsuzu çok büyük bir miktar olarak düşünüyor olabilir. Bitmeyen bir şeyin yarısı alınamaz diyebilirdi. Ya da bir fikri olmadığı için karşı da çıkmadı. Sonsuzun yarısının sonsuzdan daha az olacağını kabul ediyor. Ama sonsuzun yarısının yine çok büyük bilinmeyen bir miktar olduğunu ima ederek öylesine çok büyük bir sayı söyledi. “sonsuzun yarısı” ifadesi sayısal bir ifadenin örneğin sekizin yarısı gibi bir ifade. Sonsuz ona göre bilinmeyen bir büyüklük olduğu için bu şekilde açıklamayı tercih etmiş olabilir. Araştırmacıya göre kafasında sonsuz ve sonsuzun yarısı arasında pek fark yok. Söyleyebildiği en büyük sayı “katrilyon” ise de sonsuz ona göre bunlardan da daha büyük bir şey.(SONSUZ

BÜTÜN SAYILARDAN BÜYÜK) Ayrıca sonsuzun bir sayı olmadığını düşünüyor. (SONSUZ BİR SAYI DEĞİL) Hiç bitmeyen bir şey olarak düşündüğüne göre belki büyük olasılıkla ona göre sonsuz bir kavram.

7TA-3

Sonsuz miktardan daha büyük bir şey olmaz. (Daha büyük bir şey olabilir'in tersi) Buna göre sonsuza sonsuz eklenirse sonsuzdan büyük olması mümkün değil. (Sonsuza sonsuz eklenirse sonsuzdan büyük olur'un tersi) Sonsuz kalem tam kestirilemeyen, belirli bir sayı ile ifade edilemeyen bir büyüklük. Buna göre sonsuz belirsiz bir büyüklük (Belirsizlik derecesi) Sonsuz bir büyüklüğe bir şey eklendiğinde artış olduğunu düşünmesi doğal fakat sonsuzdan daha büyük bir şeyi kabullenememesi onu çelişkiye götürüyor (Çelişki derecesi). Sonsuzun yarısı da belirsiz çok büyük bir şey veya değil. Sonsuz büyüklük bütün sayısal büyüklüklerden daha fazla olan bir şey. (Belirli sayısal bir büyüklük olmasının tersi) Sonsuz bir sayı değil (Sayı olmasının tersi) Daha çok bir kavram gibi.

7TS-3

Sonsuz miktardan daha büyük bir şey olmaz, sonsuza sonsuz eklenirse sonsuzdan büyük değil, belirli bir sayı ile ifade edilemeyen bir büyüklük, Sayı değil (BELİRSİZ BÜYÜKLÜK)

Bu öğrenci ile yapılan görüşmenin dördüncü bölümünün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

- Bir kağıt şeridi veya uzun bir şeyi (10 cm) iki eş parçaya bölsem parçalar ne kadar uzun olur?

C: 5 cm Yeniden bölsem? C: 2,5 cm. 4 eş parça? 1,25 cm Yeniden böldüm? C:1,25 ne olur?

0,5- 12,5 öyle bir şey ... (burada zorlandı)

- Sonsuz parçaya bölsem parçalar ne kadar uzun olur?

C: Küçülür iyice,göremeyiz ki, minnacık bir şey olur (eliyle gösterdi)

- Ne kadar küçük olur?

C: Böyle, göremeyiz ki.

- Göremediğin parça ne kadar?

C: Minnacık (eliyle yine gösterdi)

- Onu da bölsek?

C: Minnacığın daha minnacığı olur.

- Ama yine bölmeye devam ediyorum. Bitmiyor ki?

C: Of ya (güldü) sıkıldım. Biter mi) ne.

-Ortadan yok mu olur?

C: Ee..ha bire bölüyoruz,yani. Yok olur (anlamsızca).

7TO-4

Ondalık kesirlerin bölünmesinde zorlandı. Ayrıca üzerinde durulabilir ama öğrenciler için çok küçük şeyler hakkında düşünmek çok büyük şeyler hakkında düşünmekten daha zor gibi. “minnacık” kelimesi çok küçük şeyler için kullanılır. Çok küçük, minimini anlamında. Fakat tam olarak ne kadar küçük bir şey olduğunu ifade etmiyor.(SONSUZA KADAR KÜÇÜLEN BİR ŞEY „,MİNNACIK OLUR) Bu kelimeyi belki de en küçük şey anlamında kullanmış olabilir. Başta göremeyiz dediğine göre parça duyu organları ile parçalanamayacak kadar küçük. Eliyle gösterdiğine göre parça büyüklüğünü yine belirli bir büyüklük olarak algılıyor. Sonsuz küçük kavramının algılanmasının zorluğu öğrencilerde görülüyor. Piaget’nin çalışmasında olduğu gibi nasıl somut işlem dönemindeki çocuklar sıkılıyorlar benzer şekilde bir parçayı devamlı ikiye bölmekten sıkıldı. Bütün sayılardan küçük bir sonsuz küçüğün varlığının kabulü sezgilere zıt...

7TA-4

Sonsuza kadar küçülen bir şey görülmez (Görülebilir’in tersi). Bir bütünüün sonsuz parçasından biri minnacık, çok küçük bir şey. (Küçüklük derecesi) Sonsuz parçaya bölünen bütün yok olur veya olmaz.. Devamlı sonsuza kadar bölmek sıkıcı bir şey veya değil.

7TS-4

Sonsuza kadar küçülen bir şey görülmez, Bir bütünüün sonsuz parçasından biri minnacık, çok küçük bir şey, Her ne kadar sonlara doğru pes etse de başta belirgin küçük bir şeyi tarif etme çabası sonsuz parçaya bölünen bir bütünüün yok olmadığını düşündüğünü gösteriyor (NET İFADE EDİLEMEYEN ÇOK KÜÇÜK BİR ŞEY)

Bu öğrenci ile yapılan görüşmenin beşinci bölümünün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

- Kağıdı sonsuza kadar böldüm, Kaç parça oldu?

C: Baya bir olur. Yani yine sayı diyeceksiniz de.

- Sayı demeyeceğim. Sende sonsuz parça varken, bir kâğıdı bölüp yine sonsuz parça elde etsek ve öncekilere eklemek ne kadar parçamız olur?

C: Ya. baya oldu.

- Sonsuzdan az mı, fazla mı oldu? Önemli?

C: Sonsuzdan fazla olması bir şey değiştirmez gibi geliyor. Yani sonsuz bir şey daha ekleyeceksiniz yine sonsuz olur. (18:15)

- Peki sonsuz nedir ki böyle? Enteresan bir şey?

C: Bitmeyen bir şey.

- Sayı değil o zaman herhalde sayı olsa 1 eklerdik.

C: Evet.

- Prensesin isteği neydi?

C: Sonsuza kadar mutlu yaşamak.

- Burada kaç yıl?

C: Ölene kadar.

- Masal kahramanı ölümsüz? Masal ortadan kalkmaz...?

C: Hiç bitmez, hep sürer.

- Sonsuzluğa ulaşılabilir mi?

C: Zaten, her vakit geçtiğinde sonsuzluğa gelemiyoruz ki (25:40). Mesela bir gün sonrasını sonsuz desek, o gün gelir bir gün daha geliyor.

- Filmin sonunda “ Sonsuza kadar çirkin kaldılar” denildiğine göre, shrek ve ailesi kaç yıl çirkin kalmış?

C: Daha önce dediğim gibi, bitmiyor.

- Yeniden güzel olmuş olabilirler mi? (07.28)

C: Hayır

7TO-5

“bayâ” kelimesini yine belirsiz, kesin ifade edilemeyen büyük bir miktar için kullanıyor. Sonsuz parça ile sonsuz parçanın toplamına da “baya” ifadesini kullanıyor. “sonsuzdan fazla olması bir şey değiştirmez” derken sonsuzu bir kavram olarak algıladığından oluşan yeni miktarın da çok büyük bir miktar olacağından onun da sonsuz ile ifade edileceğini düşünmüş olabilir. Sonsuza bir şey eklendiğinde yine sonsuz olduğunu düşünmesi oldukça enteresan.(SONSUZA BİR ŞEY EKLENDİĞİNDE YİNE SONSUZ OLUR) Potansiyel sonsuzluk anlayışı var. Non-standart analiz açısından ele alındığında sonsuz + bir sayının = sonsuz olması oldukça sezgilere uygun gibi. Ayrıca sonsuzu bir daha “bitmeyen bir şey” olarak tanımladı. (SONSUZ BİTMEYEN BİR ŞEY)

Prensesin sonsuza kadar mutlu yaşadığı süreyi “hiç bitmez, hep sürer” diye ifade ediyor. (SONSUZA KADAR OLAN BİR ŞEY HEP SÜRER). İlginç ifadelerinden biri “her vakit geçtiğinde sonsuzluğa gelemiyoruz ki” ifadesi. Sonsuzluğa ulaşamayacağını ifade ediyor. (SONSUZLUĞA ULAŞILAMAZ) Verdiği örnek bunu açıklıyor. “bir gün sonrasını sonsuz desek, o gün gelir bir gün daha geliyor.” Sonsuzluğun sabit bir büyüklük veya nokta gibi düşünülmeyeceğini, düşünülecek her büyüklükten daha büyük bir şey olacağını vurguluyor gibi. Sonsuzluğa gitmek durmadan devam eden bir süreç gibi. Öğrencinin bu sezgilerle sonsuza bir bütün olarak bakabilmesi pek mümkün değil. Sonuç olarak sonsuzu bir bütün olarak ele alıp

cardinal veyua ordinal sonsuzluk anlayışı ile değerlendirmek bu yaş grubu için çok ekstra bir şey. Fischbein (2001) in ifade ettiği gibi potansiyel anlayışa göre olan sonsuzluğun dinamik şekli var. Sonlu bir işlem (o günün gelmesi gibi) ama hiç bitmeden devam ediyor. Fischbein'e göre doğal sayılar kümesini bir bütün olarak kavramayız fakat her doğal sayıdan sonar bir doğal sayı vardır düşüncesi olabilir. Bu öğrenci de sayı kümelerindeki eleman sayılarını ifade ederken sonsuz diye ifade ediyor fakat daha çok hiç bitmeyen bir büyüklük olduğundan sonsuz diyor gibi. (**SONSUZA KADAR, BİTMEYEN DEVAM EDEN BİR SÜRECİ İFADE EDER**)

7TA-5

Sonsuza bir şey eklendiğinde yine sonsuz olur veya olmaz. Sonsuz hiç bitmeyen bir şeydir (Biten bir şey'in tersi) "her vakit geçtiğinde sonsuzluğa gelemiyoruz ki. Bir gün sonrasına sonsuz dense ondan sonraki gün de var " olduğundan Sonsuzluğa ulaşılamaz (Ulaşılabilir'in tersi) Sonsuz bir sayı değil (Sayı olmasının tersi).

7TS-5

Sonsuza bir şey eklendiğinde yine sonsuz olur, Sonsuz hiç bitmeyen bir şeydir, Sonsuzluğa ulaşılamaz, Sonsuz bir sayı değil, sonsuz hiç bitmeyen süreçleri ifade etmek için kullanılıyor. Sonsuza kadar çirkin olan bir şeyin bir daha güzel olamaması gibi. (**HİÇ BİTMEYEN SÜREÇ**)

Bu öğrenci ile yapılan görüşmenin altıncı bölümünün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

Oyuncak hikayesi filmi

- "Sonsuzluk ve ötesi" bir şey çağrıştırıyor mu? Ne anlama geliyor? Sonsuzluğun ötesinde ne var?

C: Bir şey yok yine, sonsuzun aynısı (36:31)

- Sonsuzdan daha büyük bir şey olabilir mi?

C: Yok.

- Sende sonsuz kalem varken sana bir tane daha versem ne kadar kalemin olur?

C: Sonsuzdan 1 fazlası daha olur. Sonsuz kalemlerin 1 tanesi daha eklenmiş olur. Bir şey değişmiyor. Değişmiyor.

7TO-6

(FARKLI SONSUZLAR YOK) (SONSUZDAN DAHA BÜYÜK BİR ŞEY YOK) Sonsuzdan farklı bir sonsuzun ötesi olduğunu kabul etmiyor. Sonlu sayılarda yapılan işlemler gibi sonsuza bir eklendiğinden sonsuzdan bir fazlası olur argümanını kullansa da sonsuzu bir sayı olarak düşünmediğinden olsa gerek bir şeyin değişmediğini ifade ediyor. Sonsuz geçilebilen bir büyüklük değil. Sonsuz çok büyük bir şey ise ona ne eklenirse eklensin yine çok büyük bir şey

olur düşüncesi var gibi. Sonsuz çok büyük hiç bitmeyen şeyleri ifade etmek için kullandığı sadece bir kavram gibi. (SONSUZA NE EKLENİRSE EKLENSİN BİR ŞEY DEĞİŞMEZ)

7TA-6

Sonsuzluğun ötesi yine sonsuz (Sonsuzdan farklı olmasının tersi). Sonsuzdan daha büyük bir şey yok veya var. Sonsuza 1 eklenirse bir şey değişmez (Değişir'in tersi).

7TS-6

Sonsuzluğun ötesi yine sonsuz, Sonsuzdan daha büyük bir şey yok, Sonsuza 1 eklenirse bir şey değişmez, yine sonsuz olur. Buna göre sonsuz belirli bir sayı veya geçilebilecek bir büyüklük değil. hiç bitmeyen belirsiz büyüklükleri ifade etmek için kullanılan bir kavram olduğundan (SONSUZDAN BÜYÜK OLAMAZ)

Bu öğrenci ile yapılan görüşmenin yedinci bölümünün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

Domino ile ilgili filmler

- Sonsuz tane dominoyu yan yana dizip böyle bir şey yapsak ne olur?

C: Zaten sonsuz tane olduğundan bitmez.

- Sana verdiğim ilk şeker kaçınıcı şekerdir?

C: Birinci.

- Sonraki şeker...? Sana sonsuz şeker versem verdiğim son şeker kaçınıcı olur?

C: Olmaz ki.(41:45).

Peki bunların üzerine bir tane daha versem o kaçınıcı olur?

7TO-7

(SONSUZ ÇOKLUK HİÇ BİTMEZ) Sonsuz çokluğun hiç bitmediğini ifade ettikten sonra burada ilginç olan sonsuz bir çoklukta sonuncu diye bir şeyin olduğunu kabul etmemesi. Önceki düşüncelerine paralel olarak sonsuz çokluk dinamik bir şey gibi. Ona göre sonunu getirmesi mümkün değil. Belki bu anlayışta limit ordinalin ne kadar sezgilere ters olduğu tartışılabilir. Bir öğrenciye bir dahaki sefere limit ordinal ile ilgili düşünceleri veya kabul edip etmeyeceği sorulabilir. (SONSUZ BİR ÇOKLUKTA SONUNCU DİYE BİR ŞEY OLMAZ)

7TA-7

Sonsuz hiç bitmez (Biter'in tersi). Sonsuz hiç bitmeyen dinamik bir büyüklük olduğuna göre sonunu getirmesi mümkün değil. Sonsuz bir çoklukta sonuncu diye bir şey olmaz. (sonu veya sonuncu olur'un tersi)

7TS-7

Sonsuz hiç bitmez ve bundan dolayı sonsuz bir çoklukta sonuncu diye bir şey olmaz.

(SONSUZ BÜYÜKLÜKTE SONUNCU OLMAZ)

Bu öğrenci ile yapılan görüşmenin sekizinci bölümünün dökümü ve bu bölüm hakkında araştırmacının aldığı bazı kod notları aşağıdadır.

Animasyonlar

- Sayı kümesi hangisi?

C: Doğal sayılar.

- Üç nokta ne anlamda?

C: Devam ediyor anlamında.

-Doğal sayılar, çift sayılar, tek sayılar torbalarında kaçar tane sayı var?

C: Üsttekinde(doğal sayılar torbası) sonsuz oluyor, alttakinde de çift sayılar o da sonsuz. Tek sayılar da sonsuz.

- Çift sayılar doğal sayıların alt kümesi midir?

-Bu torbalardaki sayıların adetleri eşit mi? Sayılar birebir eşlenebilirler mi?

C: Bulabiliriz herhalde (Sorunun cevabını 16 buldu.)

3.Sonsuz sayının olduğu bir torbadaki sayılar, sonsuz sayının olduğu başka bir torbaya atılınca bu torbada sonsuz sayı mı var? Yoksa daha fazla mı?

C: Evet

4.Sonsuz eleman ile sonsuz elemanı toplarsak ne kadar eleman elde edilir?

7TO-8

Doğal sayılar kümesinin sonsuza kadar devam ettiğini ve üç noktanın o anlamda olduğunu farkındaydı. Buna göre 8. sınıfta sonsuz kümelerin gösterimleri anlaşılabilir. Çift sayılar ile doğal sayıların birebir eşlenmesinde sorun yaşamadı. Ne de olsa her iki kümede bitmeyen elemana sahip olduğuna göre çift sayılar doğal sayıların alt kümesi olsa da birebir eşlemeyi sorun olarak görmüyor olsa gerek. Sonsuz + sonsuz = sonsuz mantıklı geliyor. Zaten one göre, sonsuza ne eklenirse eklensin sonsuz olurdu. Sonsuzu adeta her şeyi yutan bir kavram gibi düşünüyor. Bu anlayış non-standart analizde tanımlanan işlemlere sezgisel olarak yakın gibi. (SONSUZ+SONSUZ=SONSUZ)

7TA-8

Üç nokta sonsuza kadar devam ediyor anlamında olduğunu farkında. Her iki sonsuz kümede bitmeyen elemana sahip olduğundan Çift sayılar kümesi ile doğal sayılar kümesi birebir eşlenebilir. 1-1 eşleme mantıklı (Mantıklı olmamasının tersi). Sonsuza sonsuz eklenirse yine sonsuz olur. Sonsuz yutan eleman gibi veya değil.

7TS-8

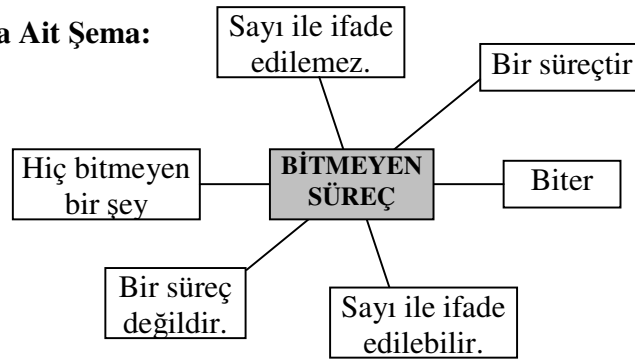
1-1 eşleme mantıklı, buna göre sonsuz kümeler aynı büyüklükte gibi. Çünkü hepsi bitmiyor.

Sonsuza sonsuz eklenirse yine sonsuz olur. Sonsuz yutan eleman gibi. (SONSUZ KÜMELER AYNI BÜYÜKLÜKTE OLDUĞUNDAN SONSUZ YUTAN ELEMAN)

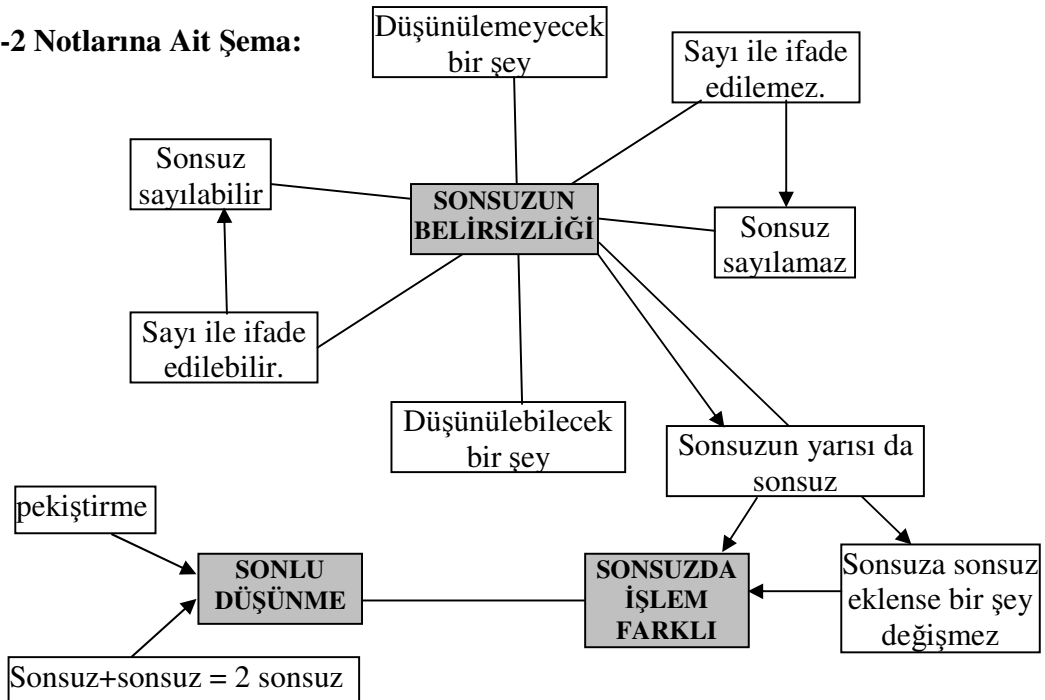
A Öğrencisine Ait Şemalar:

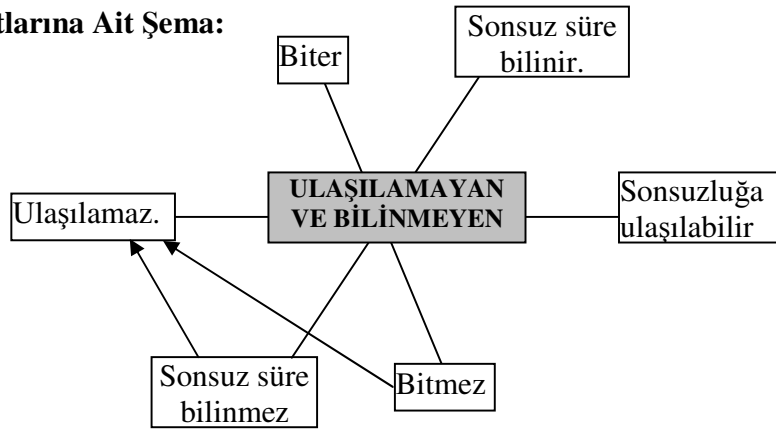
Aşağıdaki şemalarda da görüleceği üzere, “bitmeyen süreç”, “ulaşılamama” ve “belirsizlik” fenomenleri ön plandadır. Sonsuzun yarısının da sonsuz olması düşüncesinin sonsuzun belirsizliğine bağlanması dikkat çekicidir. Sonlu düşünme - sonsuzda işlemin farklı olması ve sonsuz sayılabilir – sonsuz sayılamaz gibi boyutlar kategorilerin hangi boyut ve özellikler ile iç içe olduğunu göstermektedir.

7A-1 Notlarına Ait Şema:

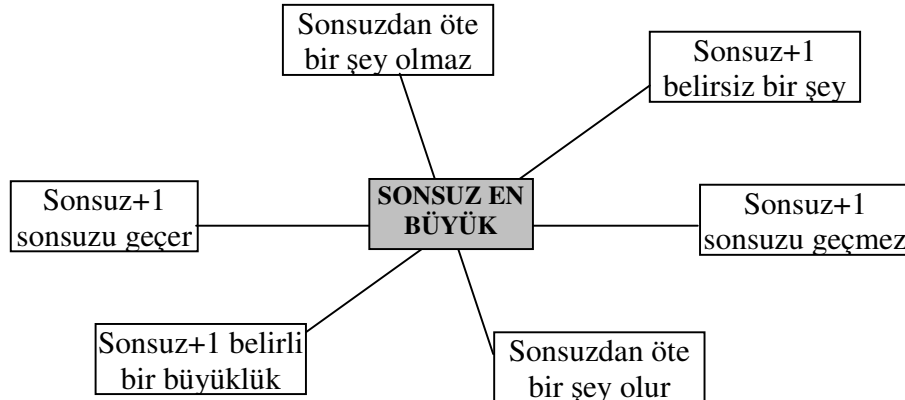


7A-2 Notlarına Ait Şema:

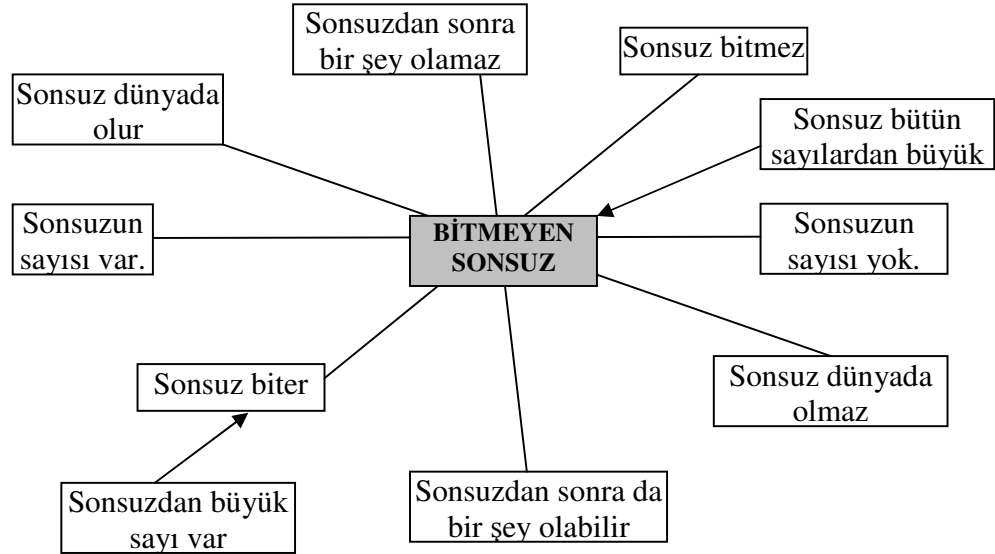


7A-3 Notlarına Ait Şema:**7A-4 Notlarına Ait Şema:****7A-5 Notlarına Ait Şema:**

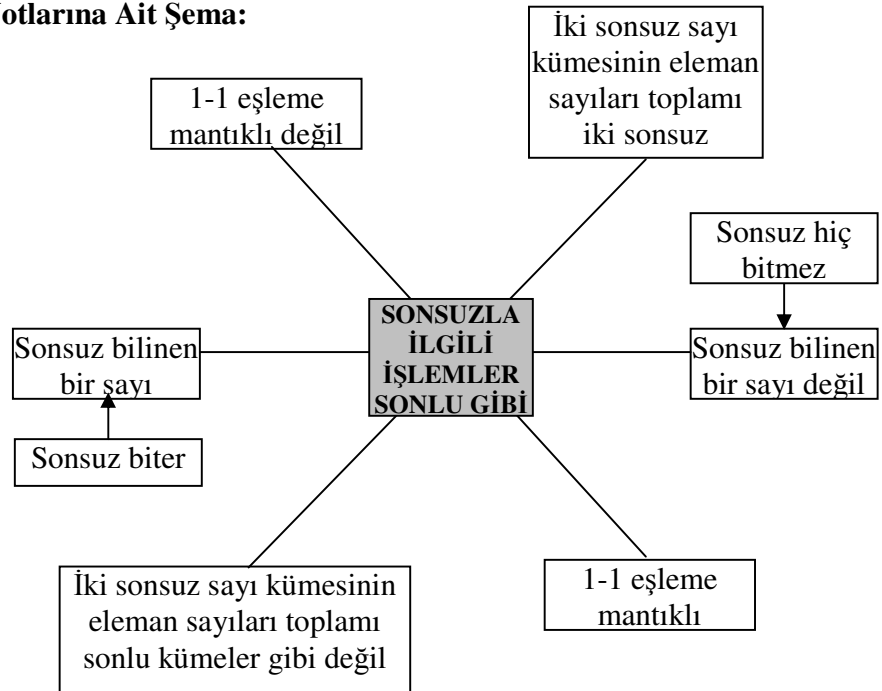
Araştırmacıya göre, sonsuzun bir sınır gibi ele alındığı “sonsuz en büyük” kategorisi bu öğrencinin sonsuza yaklaşımını açıklayan önemli bir kategoridir. Bu tür kategori ve fenomenler diğer öğrencilerde de görülmüştür. Bu düşünce, standart olmayan analizde olduğu gibi sonsuz+1 işleminin sonucunun sonsuz olduğu ve sonsuzdan öte bir şey olamayacağı düşüncelerini ifade etmektedir. Aşağıdaki şema “sonsuz en büyük” kategorisinin hangi boyutlar çerçevesinde değerlendirildiği göstermektedir.



7A-6 Notlarına Ait Şema:



7A-7 Notlarına Ait Şema:

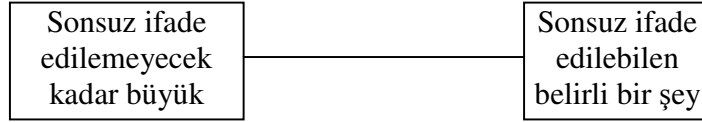


F Öğrencisine Ait Şemalar:

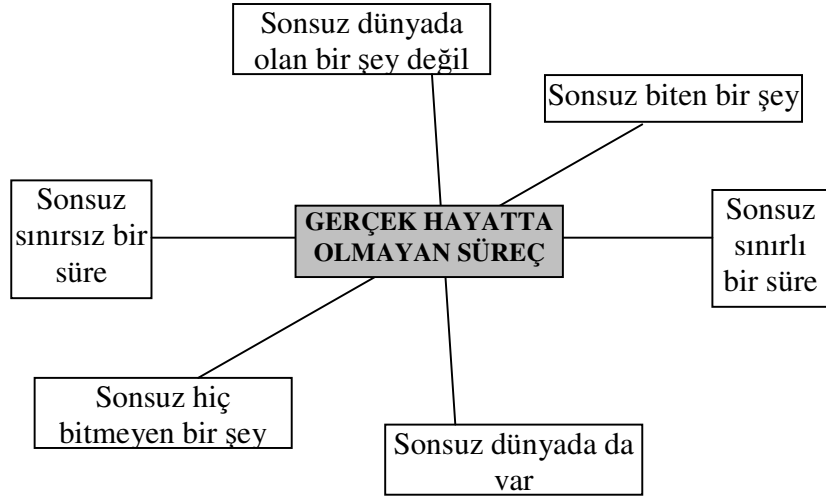
“Süreç”, “Belirsizlik”, “Geçilememe”, “Ulaşılamama” ve “En büyük olma” F öğrencisine ait şemalarda görülen belli başlı fenomenlerdir. Araştırmacıya göre, sonsuzun sayılamaz oluşunun sonsuzun hiç bitmeyen bir şey olmasına bağlanması, sonsuzun geçilemeyecek bir şey olmasının sonsuzun belirsizliğine bağlanması

öğrencinin sonsuzlukla ilgili kategorileri arasındaki dikkat çekici ilişkileri ifade etmektedir. Diğer öğrencilerde olduğu gibi “sonsuzla bölmek” veya “sonsuz küçük” kavramı belirsizliğini korumuştur.

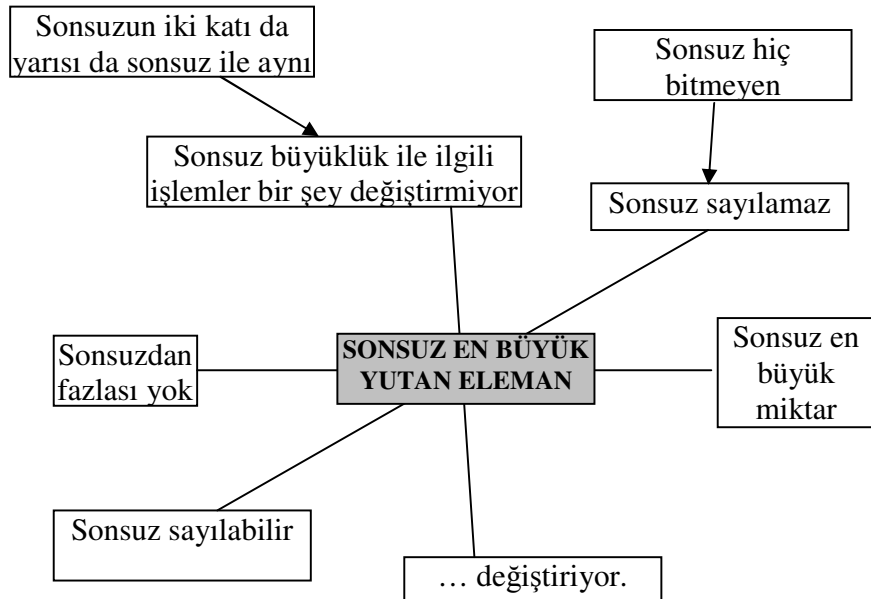
7F-1 Notlarına Ait Şema:

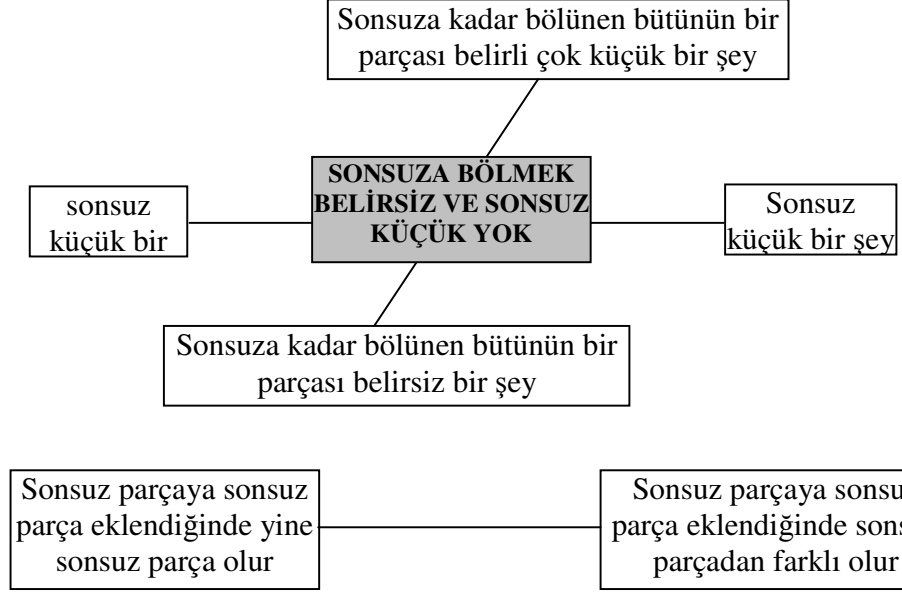
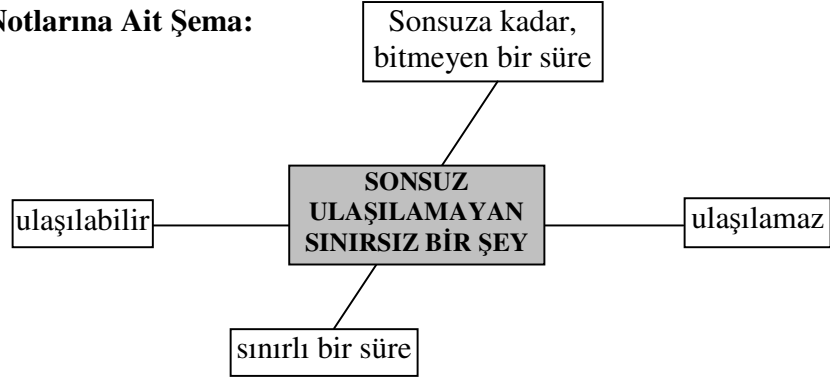
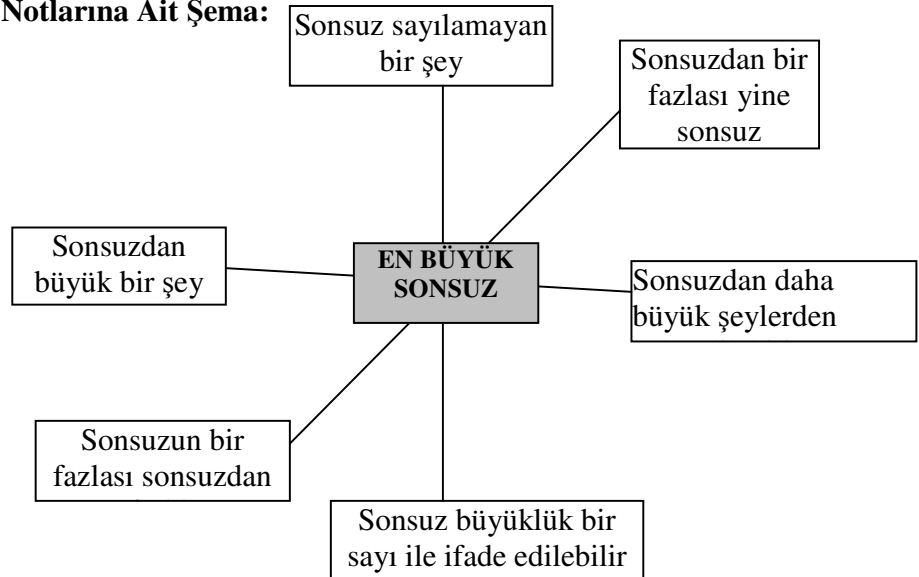


7F-2 Notlarına Ait Şema:

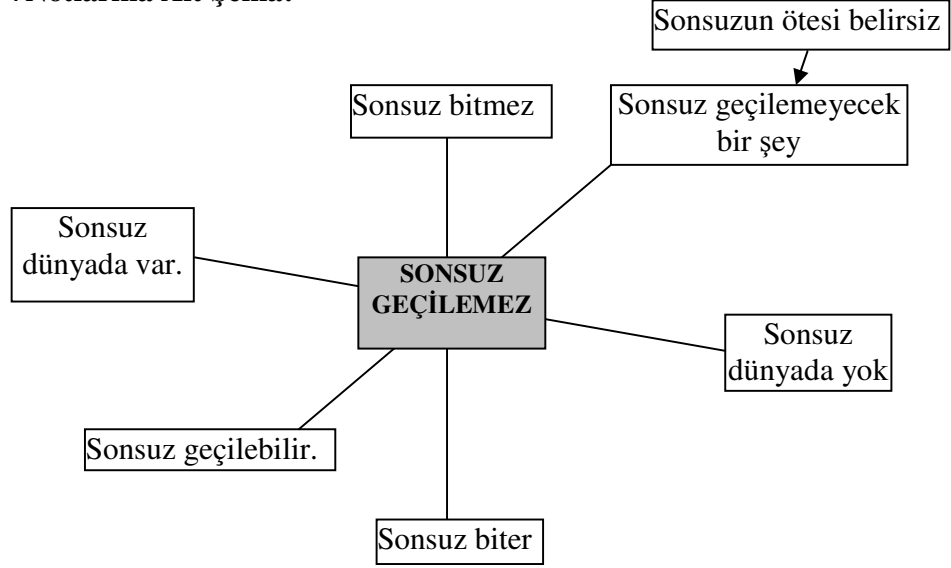


7F-3 Notlarına Ait Şema:



7F-4 Notlarına Ait Şema:**7F-5 Notlarına Ait Şema:****7F-6 Notlarına Ait Şema:**

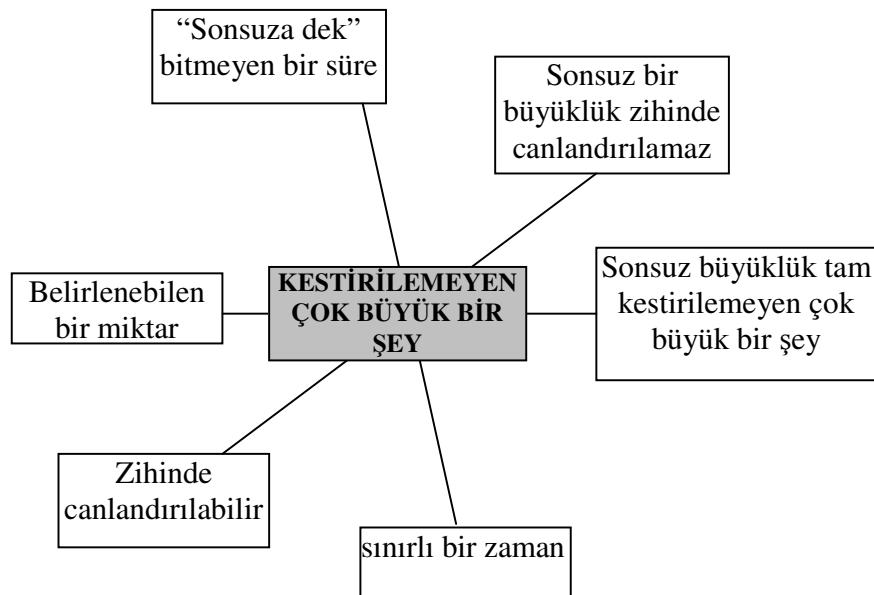
7F-7Notlarına Ait Şema:



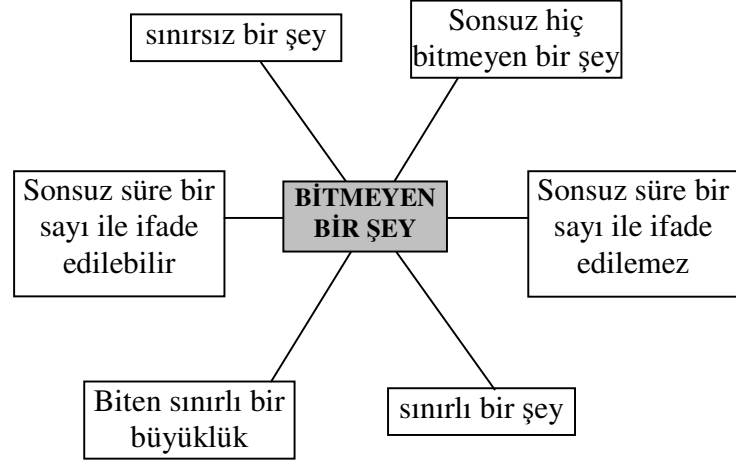
T Öğrencisine Ait Şemalar:

“Belirsizlik”, “bitmeme”, “Süreç”, “Geçilememe”, “En büyük olma” gibi fenomenler T öğrencisine ait şemalar için de geçerlidir. Araştırmacıya göre, yine benzer şekilde standart olmayan analizde olduğu gibi sonsuzun iki katının veya yarısının sonsuz olması gibi işlemlerin nasıl anlaşıldığını açıklayan ilişkiler bulunmaktadır. T sonsuz kümelerin hepsinin büyüklüğünün aynı olduğunu iddia etmiş ve bu anlayış sonsuzla yapılan işlemlerde sonsuzun yutan eleman gibi düşünülmesini netice vermiştir.

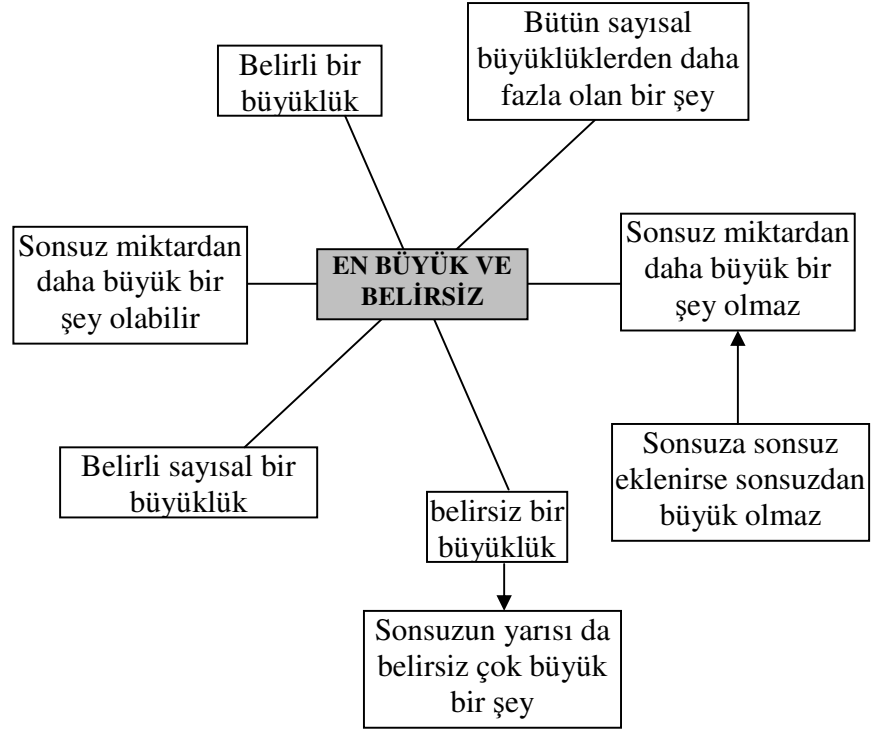
7T-1 Notlarına Ait Şema:



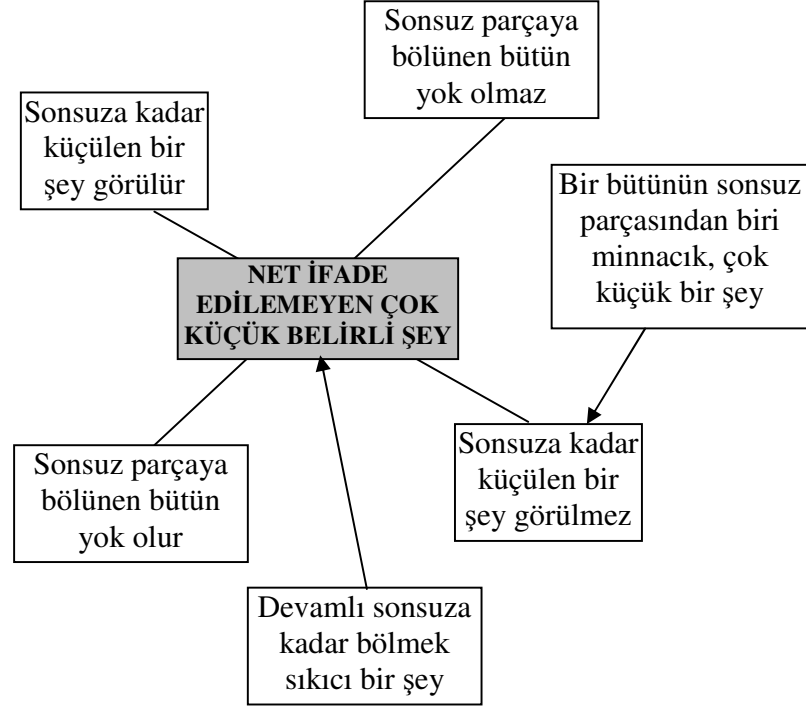
7T-2 Notlarına Ait Şema:



7T-3 Notlarına Ait Şema:



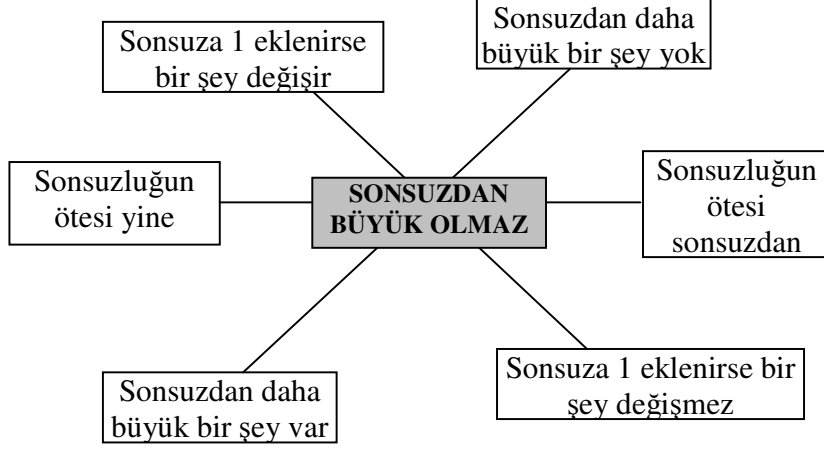
7T-4 Notlarına Ait Şema:



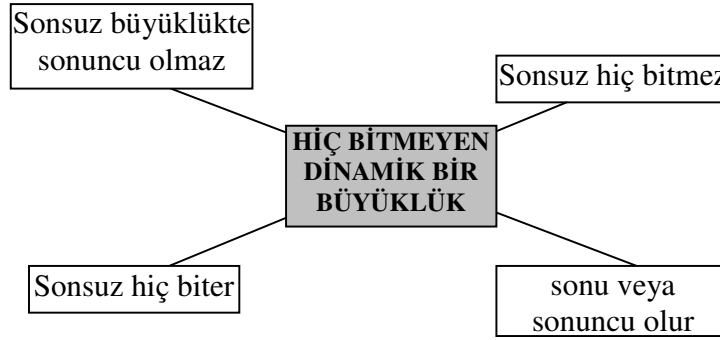
7T-5 Notlarına Ait Şema:



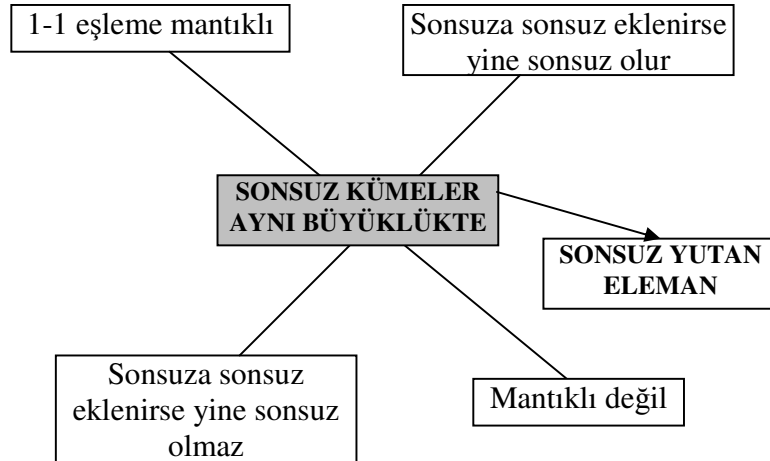
7T-6 Notlarına Ait Şema:



7T-7Notlarına Ait Şema:



7T-8 Notlarına Ait Şema:



Yedinci sınıflar için de gömülü teori yaklaşımına göre, görüşmelerin her bir bölümüne ait ayrı ayrı şemalar elde edilmiştir. Bu şemalar ile fenomenler, kategoriler arasındaki ilişkiler, kategorilerin özellikleri ve boyutları gösterilmeye çalışılmıştır. Bunun yanında öğrencilere ait bütün kategorileri genel olarak değerlendirebilmek için aşağıdaki tablolardan yararlanılmıştır.

Bu tablolar araştırmacıya kategorilerin karşılaştırılmasında ve birleştirilmesinde yardımcı olmuştur. Gömülü teoriye göre yapılan bir çalışmada, benzer kavramlara ait kategorileri karşılaştırmak yararlıdır, farklılık yoksa tek bir başlık altında değerlendirilebilir (Strauss ve Corbin, 1998).

A Öğrencisine Ait Merkezi Kategorileri Gösteren Tablo

KATEGORİLER	7-A ALT KATEGORİLER	KAYNAK NOTLAR
BİTMEYEN SÜREÇ	Bir sayı ile ifade edilemez	7-A-1,2,3,6,7
	Sonsuz bir süreçtir	7-A-1
	Hiç bitmeyen bir şey	7-A-1,4,6,7
	Sonsuz dünyada olmaz	7-A-6
	Sonsuz bütün sayılardan büyük	7-A-6
	Sonsuzluğa ulaşamaz	7-A-4
	Sonsuzdan sonrada bir şey olabilir	7-A-6
SONSUZUN BELİRSİZLİĞİ	Tam kestirilemeyen çok büyük bir şey	7-A-2,4
	Sonsuza sonsuz eklense bir şey değişmez	7-A-2
	Sonsuzun yarısı bilinmeyen bir şey olduğundan yine sonsuz olur.	7-A-2
	Sonsuz sayılamaz	7-A-2
	Belirli bir sayı değildir.	7-A-1,2,3,6,7
	Bir bütün sonsuz parçaya bölünemez	7-A-3
	Sonsuza kadar bölünmüş bir şey belirsiz bir küçüklük	7-A-3
	Sonsuz+sonsuz belirsiz bir şey	7-A-3
SONSUZ EN BÜYÜK	Sonsuzdan öte bir şey yok	7-A-5
	Sonsuzdan büyük bir şey olmaz	7-A-5
	Sonsuz+1 belirsiz, çok fazla	7-A-5
	Sonsuz+1 sonsuzu geçer belki	7-A-5
SONSUZLA İLGİLİ İŞLEMLER SONLU GİBİ	N ile Ç nin eleman sayıları aynı değil	7-A-7
	1-1 eşleme mantıklı	7-A-7
	İki sonsuz sayı kümesinin eleman sayıları toplamı iki sonsuz	7-A-2,7

F Öğrencisine Ait Merkezi Kategorileri Gösteren Tablo

KATEGORİLER	7-F ALT KATEGORİLER	KAYNAK NOTLAR
GERÇEK HAYATTA OLMAYAN SÜREÇ	Sonsuz ifade edilemeyecek kadar büyük	7-F-1
	Sonsuzun gerçek hayatta örneği yok	7-F-2,7
SONSUZ EN BÜYÜK YUTAN ELEMAN	Sonsuzun iki katı da yarısı da sonsuz ile aynı	7-F-3,4
	Sonsuzdan bir fazlası yine sonsuz	7-F-6
SONSUZUN BELİRSİZ VE SONSUZ KÜÇÜK YOK	Sonsuza kadar bölünen bütünün bir parçası belirli çok küçük bir şey	7-F-4
	Sonsuz küçük bir şey yok	7-F-4
	Bir şeyden sonsuz tane olamaz	7-F-7
	Sonsuzu sonsuza koyunca yine sonsuz bulmak mantıklı değil	7-F-8
	Sonsuz belirsiz çok büyük bir şey	7-F-4
SONSUZ ULAŞILAMAYAN SINIRSIZ BİR ŞEY	Sonsuz sınırsız	7-F-2,3,5
	Sonsuz sayılamaz	7-F-3,6
	Sonsuz hiç bitmeyen	7-F-2,3,5
	Sonsuza ulaşılabilir	7-F-5
EN BÜYÜK SONSUZ	Sonsuz düşünülebilecek en büyük miktar	7-F-6
	Sonsuz sayılamayan, sayı ile ifade edilemeyen bir şey	7-F-3,6
	Sonsuz geçilemeyecek bir şey	7-F-7
	Sonsuz elemanlı kümelerin eleman sayıları aynı	7-F-8

T Öğrencisine Ait Merkezi Kategorileri Gösteren Tablo

KATEGORİLER	ALT KATEGORİLER	NOTLAR
KESTİRİLEMEYEN ÇOK BÜYÜK BİR ŞEY	Sonsuz büyüklük tam kestirilemeyen çok büyük bir şey	7-T-1
	"Sonsuza dek" bitmeyen bir süre	7-T-1,2,5,7
BİR BÜTÜNÜN SONSUZ PARÇALARINDAN BİRİ NET İFADE EDİLEMEYEN ÇOK KÜÇÜK BELİRLİ BİR ŞEY	Sonsuza kadar küçülen bir şey görülmez	7-T-4
	Bir bütünün sonsuz parçasından biri minnacık, çok küçük bir şey	7-T-4
	Sonsuz parçaya bölünen bütün yok olmaz	7-T-4
	Devamlı sonsuza kadar bölmek sıkıcı bir şey	7-T-4
HİÇ BİTMEYEN DİNAMİK BİR BÜYÜKLÜK	Sonsuz miktardan daha büyük bir şey olmaz	7-T-3,5,6,8
	Sonsuz hiç bitmeyen bir şeydir	7-T-1,2,5,7
	Sonsuzluğa ulaşılabilir	7-T-5
	Sonsuz sınırsız bir şey	7-T-2
	Sonsuz bir sayı değil	7-T-2,3,5
BELİRSİZ BÜYÜKLÜK	Sonsuz belirsiz bir büyüklük	7-T-3
	Sonsuzun yarısı da belirsiz çok büyük bir şey	7-T-3
SONSUZ KÜMELER AYNI BÜYÜKLÜKTE	1-1 eşleme mantıklı	7-T-8
	Sonsuza sonsuz eklenirse yine sonsuz olur	7-T-3,5,6,8

7. Sınıf Öğrencilerine Ait Merkezi Kategorileri Gösteren Tablo

7-MERKEZİ KATEGORİLER	KAYNAK NOTLAR
HİÇ BİTMEYEN VE ULAŞILAMAYAN	7-A-1,2,4,3,6,7; 7-T-1,2,3,5,6,7,8; 7-F-2,3,5,6
SONSUZ, BELİRSİZ ÇOK BÜYÜK BİR ŞEY VE SONSUZ KÜÇÜK YOK	7-A-1,2,3,4,6,7; 7-F-4,7,8; 7-T-3,4
SONSUZ EN BÜYÜK	7-A-5; 7-F-3,6,7,8
SONSUZLA İLGİLİ İŞLEMLER SONLU GİBİ	7-A-2,7
GERÇEK HAYATTA OLMAYAN SÜREÇ	7-F-1,2,7
SONSUZ EN BÜYÜK YUTAN ELEMAN; SONSUZ KÜMELER AYNI BÜYÜKLÜKTE	7-F-3,4,6; 7-T-3,5,6,8

Yukarıdaki tablo her bir öğrenciye ait kategorilerin birleştirilmesi ile elde edilmiştir. Aynı kavramı vurgulayan kategoriler aynı çatı altında toplanmış ve kaynakları verilmiştir. Tabloda da görüleceği üzere yedinci sınıflara ait fenomenler ve kategoriler beşinci sınıflara ait elde edilen fenomenler ile hemen hemen aynıdır. Araştırmacıya göre, iki yaş grubu arasındaki en önemli fark sonsuzun belirsizliğidir. Beşinci sınıflara ait kategoriler arasında sonsuzluğun belirsizliğine daha fazla vurgu vardır. Araştırmacıya göre yaş azaldıkça, öğrencilerin sonsuzluğu anlamalarında “belirsizlik” fenomeninin etkisi artmaktadır.

Şema ve tablolara göre, yedinci sınıflar arasında genel olarak sonsuzun bir sayıdan çok, hiç bitmeyen belirsiz büyüklükleri ifade etmek için kullanılan bir kavram olarak algılandığı söylenebilir. Buna göre potansiyel sonsuzluk anlayışının daha fazla hakim olduğundan bahsedilebilir. Aşağıdaki T öğrencisine ait cümle bu yaş seviyesinde sonsuz büyüklükleri bir bütün olarak ele almanın neden zor olduğunu açıklamaktadır;

“...her vakit geçtiğinde sonsuzluğa gelemiyoruz ki. Bir gün sonrasına sonsuz dense ondan sonraki gün de var.”

Yedinci sınıfta öğrenim gören öğrenciler üç noktanın sonsuza kadar devam ediyor anlamında olduğunu fark edebilmişlerdir. Buna göre, bu seviyede üç noktanın kullanımı sorun oluşturmamıştır.

Araştırmacıya göre, sonsuzlukla ilgili konularda bir çok defa öğrencilerin “Ama sayılamaz ki” diye cevap vermesi doktora öğrencilerine benzer olarak “sayılamaz olma”nın, öğrencilerin kararsızlıklarına ve tereddütlerine neden olan en büyük sebeplerden biri olduğunu gösteriyor. Buna paralel olarak, uzun yıllar matematik

öğrenimi görmüş doktora öğrencilerinin “sayılabilirlik” kavramını farklı sonsuz kümeleri anlamak için kullanmaları oldukça dikkat çekicidir. Sayılabilirlik kavramı Cantor’un da kullandığı kilit kavramlardan biridir. Buna göre, her ne kadar bu yaş seviyesinde “sayabilme” saymaya güç yetirebilme anlamında kullanılsa da, bu kavram matematik eğitiminde titizlikle üzerinde durulması gereken bir konudur.

Araştırmacıya göre, öğrencilerin “sonsuz + sonsuz = iki sonsuz” gibi bir işleme yönelmelerinin sebebi yine sonsuzluğu ölçme anlayışından çok sonlu düşünme ve pekiştirme (İki defa sonsuzluk iksirinin içilmesi ile ilgili) düşüncesidir. A öğrencisinin, sonsuzdan sonrakilere 1 sonsuz, 2 sonsuz demesi araştırmacıya göre ilginçtir. Araştırmacıya göre, bu öğrenci önceki 1 sonsuz +1 sonsuz = 2 sonsuz şeklindeki ifadelerinde olduğu gibi sonlu okul matematiğinin etkisi ile böyle bir söylemde bulunmuş olabilir. Sonsuz +1 değil de 1 sonsuz demiştir.

Önceki araştırmalarda (Tirosh, 1991; Tsamir, 2001) görüldüğü gibi parça bütünden küçüktür anlayışı veya alt küme kavramı, sonsuz elemanlı çift sayılar kümesi ile sonsuz elemanlı doğal sayılar kümesinin birebir eşlenmesini düşünmeyi güçleştirmektedir. Fakat ilköğretimin ikinci kademesindeki öğrenciler genel olarak $f(x)=2x$ fonksiyonu kullanılarak yapılan bir birebir eşleme anlatıldığında tereddütle de olsa birebir eşlemeyi kabul etmişlerdir.

Matematik diline geçildiğinde okulda okutulan sayı kümeleri ve işlemleri ile ilgili uygulamaların etkisi daha fazla olmuştur. Araştırmacıya göre, “sonsuz + sonsuz = sonsuz” işleminin pek sezgisel olmadığı açıktır. Fakat bunun yanında öğrenciler sonsuzu geçilemez ve belirsiz en büyük miktar olarak algıladıkları için standart olmayan analize uygun davranmaktadırlar. Özellikle bir bütün sonsuz parçaya bölündüğünde öğrencilerin bazen “yok olur” diye düşünmeleri, büyüklüğü ihmal edilen matematikteki diferansiyel (dx) kavramını hatırlatmaktadır. Standart olmayan analize göre, bir bütün sonsuza kadar bölündüğünde parçaların bir uzunluğu kalmamaktadır. Her ne kadar matematikteki “sonsuz küçük” kavramını ima eden bazı cevaplar vermiş olsalar da, bu yaş seviyesinde genel olarak öğrenciler sonsuz küçük yerine belirli çok küçük bir şey düşünmüşlerdir. Bunun yanında öğrencilerin değerlendirdiği sonsuzla ilgili işlemlerde sonsuzun yutan eleman gibi bir işlevinin olması dikkat çekicidir.

4.6. Yapılan etkinlikler:

Çalışmada, filmler ile yapılan görüşme dışında öğrencilere bazı etkinlikler verilmiş ve öğrencilerin verdikleri cevaplar analiz edilerek değerlendirilmiştir. İlköğretim öğrencilerinin matematik bilgisi ve başarısı aynı olmadığından dolayı araştırmacı öğrencilerin fenomenlerinin belirlenmesinde filmler ile yapılan görüşmeleri dikkate almıştır. Verilen etkinlikler nitel araştırmanın güvenilirliğini artırması açısından veri toplamada çeşitliliğin sağlanması ve ilk görüşmelerde elde edilen bulguların desteklenmesi için kullanılmıştır. Bunların dışında, öğrencilerin okul başarısı ve sonsuzlukla ilgili matematik konularındaki başarıları dikkate alınan başka bir veri grubudur.

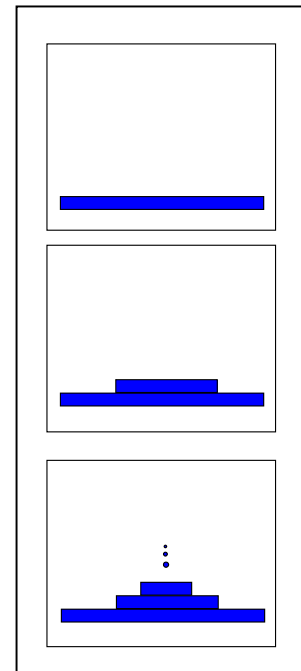
Bu çalışmada kullanılan etkinliklerin bir kısmı literatür taraması yapılarak, bir kısmı da araştırmacı tarafından uzman görüşü alınarak hazırlanmıştır. Kümeler konusuna yabancı oldukları için 5. sınıftaki öğrencilere, sayı kümeleri ile ilgili etkinlikler verilmemiştir. Etkinliklerde geçen sorulara verilen cevaplar her bir etkinlikten sonra yer alan tablolarda özetlenmiştir.

Kullanılan Etkinlikler ve Etkinliklere Verilen Cevaplar

ETKİNLİK 1

Eş kalınlıkta iki eş şerit, karton, yapıştırıcı

- Şeritlerden birini şekildeki gibi kartona yapıştırınız.
- Diğer şeridi kısa kenarları üst üste gelecek şekilde ortadan ikiye katlayınız ve katlama çizgisinden kesiniz.
- Elde ettiğiniz yarım şeridi şekildeki gibi önceki şeridin üzerine yapıştırınız.
- Kalan diğer yarım şeridi de aynı şekilde ortadan ikiye katlayarak kesiniz ve elde ettiğiniz parçalardan birini şekildeki gibi diğer şeritlerin üzerine yapıştırınız.
- Yapıştırdığınız üçüncü şeridin uzunluğu, yapıştırdığınız ilk şeridin uzunluğunun kaçta kaçıdır? Aynı işlemlerin sürekli tekrarlandığını ve kartonun hiç bitmediğini düşününüz. Bu şekilde yapıştırmaya devam edilirse üstteki şeridin uzunluğu ne olur? Şerit hiç biter mi? Neden? Sebebinin açıklayınız.



SINIF	CEVAPLAR TABLOSU-1
5.	(Kağıt bir süre sonra yok olur.) (....) (Çok küçük olur.En küçük)
7.	(1/3 kadar.Milimetrenin daha küçüğü) (Görülemez kadar milimetreden daha küçük olur) (Çok çok küçük olur. Biter.Herşeyin bir sonu var.) (Nokta gibi olur)

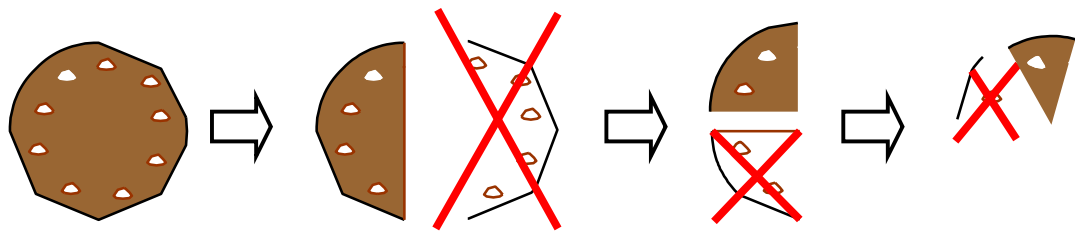
Öğrenciler etkinliklerde de bir bütünün sonsuzda birinin belirli çok küçük bir şey olduğu düşüncesini devam ettirmişlerdir. Bunun yanında daha önce olduğu gibi bir bütünün sonsuzda birini “sonsuz küçük” gibi büyüklüğü olmayan bir şey olarak düşünenler de olmuştur.

- Aynı şekilde yapıştırmaya devam edilirse şeritlerle yapıştırılarak oluşturulan şeklin yüksekliği ne kadar olur? Neden? Sebebini açıklayınız.

SINIF	CEVAPLAR TABLOSU-2
5.	(En az bir 30 cm olur.) (Sonsuz.) (Çok uzun olur. Böyle sonsuza kadar devam eder)
7.	(Gökyüzüne kadar çıkar, çok uzun olur) (Uzayı da geçer, bir şey diyemeyiz.sonsuz) (Sonsuz)

Etkinliklerde verilen cevaplarda da sonsuz belirsizliğini korumaktadır.

- Her seferinde bir pastanın yarısını yiyerek pastayı bitirebilir misiniz? Neden? Sebebini açıklayınız.



SINIF	CEVAPLAR TABLOSU-3
5.	(Hı hı. Bitiririm) (Bitirirsin...dediğin gibi ise sonsuza kadar devam eder) (Böyle bir şey yapılamaz)
7.	(Bitiririm. En sonunda biter yani.) (Biter) (Kararsız kaldım. Bence sonsuza kadar devam etmez)

Verdikleri cevaplara göre, öğrenciler genel olarak sonsuza kadar bölünmeye devam eden bir pasta düşünememişlerdir.

ETKİNLİK 2

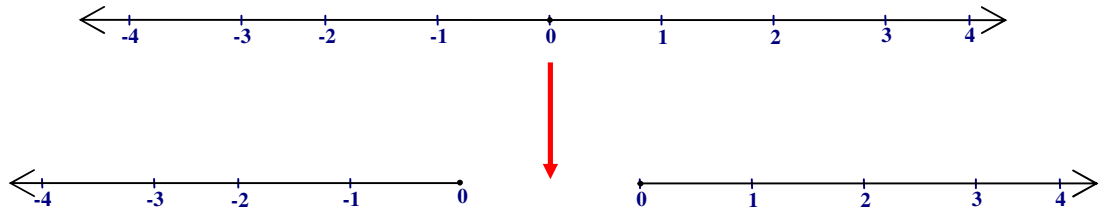
Cetvel

- 3 cm uzunluğunda bir doğru parçası çiziniz.
- 10 cm uzunluğunda bir doğru parçası çiziniz.
- En fazla kaç cm uzunluğunda bir doğru parçası çizilebilir? Neden? Sebebini açıklayınız.

SINIF	CEVAPLAR TABLOSU-4
5.	(Sonsuz) (Sonsuz diye bir işaret var. Onu koyarız.)
7.	(Çok. Ne kadar çizebilirsin ki en fazla? Çizdiği sayı doğrusunun oklarının sonsuza kadar gidiyor anlamında olduğunu ifade etti) (Sonsuz)

Öğrencilerden bazılarının sonsuz sembolünü kullanmayı önermeleri bu sembol ile daha önce karşılaştıklarını gösteriyor.

- En az kaç cm uzunluğunda bir doğru parçası çizilebilir? Neden? Sebebini açıklayınız.
- Bir sayı doğrusunun uzunluğu kaç birimdir? Çizerek gösteriniz.
- Bir sayı doğrusu şekildeki gibi tam ortadan ikiye bölünürse oluşan parçaların uzunluğu ne olur? Neden? Sebebini açıklayınız.



- Sayı doğrusundaki en büyük ve en küçük sayıları yazınız.
- Sayı doğrusundaki en küçük pozitif rasyonel sayıyı yazınız.

SINIF	CEVAPLAR TABLOSU-5
5.	(Sayı doğrusu ikiye bölünürse, oluşan parçaların uzunluğu, sonsuzun yarısı olur. Sonsuzun yarısı sonsuzun ikiye bölümü...Bildiğim en küçük sayı yarım, çeyrek...daha küçük de olabilir.En son çok küçük parçalar olur...)
7.	(Sayı doğrusunun yarısı da sonsuza gider. (Biraz tereddütle) evet sonsuz olur... En küçük pozitif rasyonel 1/20)

Sonsuzla yapılan işlemlerde sonsuzun bir yutan eleman gibi kullanılması bu cevaplarda da devam etmiştir. Ayrıca sonsuz küçük bir şeyi düşünebilmenin zorluğu burada da göze çarpmaktadır.

ETKİNLİK 3

- Aşağıda verilen sayı kümelerinin en büyük ve en küçük elemanlarını bularak, neden en büyük veya en küçük olduğunu açıklayınız.

N (Doğal sayılar kümesi) = { 0, 1, 2, 3, 4, ... } $\mathbb{C}$ (Çift sayılar kümesi) = { 0, 2, 4, 6, ... }

T (Tek sayılar kümesi) = { 1, 3, 5, 7, ... } $\mathbb{Z}^+$ (Pozitif tamsayılar kümesi) = { 1, 2, 3, 4, ... }

$\mathbb{Z}^-$ (Negatif tamsayılar kümesi) = { ..., -6, -5, -4, -3, -2, -1 }

$\mathbb{Z}$ (Tam sayılar kümesi) = { ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ... }

- Verilen sayı kümelerinin eleman sayılarını karşılaştırarak aşağıdaki boşlukları “<”, “>”, “=” işaretlerinden uygun olanları ile doldurunuz ve sebebini açıklayınız.

a. $S(N) \dots S(Z)$

b. $S(N) \dots S(\mathbb{C})$

c. $S(N) \dots S(T)$

d. $S(\mathbb{Z}^-) \dots S(\mathbb{Z})$

e. $S(\mathbb{Z}^-) \dots S(\mathbb{Z}^+)$

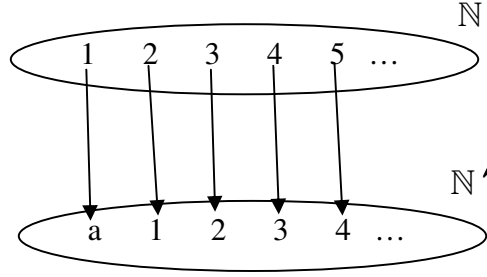
f. $S(N) \dots S(\mathbb{Z}^+)$

SINIF	CEVAPLAR TABLOSU-6
7.	(N nin en küçük elmanı, 0; en büyük elemanı baya olur..Bilmiyorum. Rasyonel sayılarda bildiğim en küçük pozitif sayı, 0. (Rasyonel sayı nedir?)kesir. en küçüğü, pozitif, 0. 0 dan büyük? Bölünen sonsuz kadar rasyonel sayı yazdığınızda en küçüğünü tahmin etmek zor oluyor. (En küçük var mıdır?)Yoktur bence. (Tam sayılar mı büyük, doğal sayılar mı?) Tam sayılar.) (Verilen bütün kümelerin hepsi eşit olur. Sonsuz olduğundan. Sonsuzla hiç bitmemesini kastediyoruz) (Sonsuz olduğu için, N nin ve $\mathbb{C}$ nin en büyük elemanı bulunmaz. $S(N) < S(Z)$, $S(\mathbb{Z}^-) < S(Z)$, $S(N)=S(\mathbb{C})$, $S(\mathbb{Z}^-)=S(\mathbb{Z}^+)$, $S(N)=S(T)$, $S(N)=S(\mathbb{Z}^+)$)

Bu etkinliği sadece yedinci sınıflar yapabilmıştır ve cevaplarında daha önce bahsedilen “bütün sonsuz kümelerin aynı büyüklükte olması” ve “bir bütün parçasından büyüktür” gibi anlayışların etkisi görülmektedir.

ETKİNLİK 5

- 100'den küçük çift sayılar kümesinin mi, yoksa 100'den küçük doğal sayılar kümesinin mi daha fazla elemanı vardır? Neden? Sebebinin açıklayınız.
- $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ kümesi ile $\{a\}$ kümesini birleştirerek $\{a, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ kümesini elde edelim. $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ kümesi ile $\{a, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ kümesi birebir eşlenebilir mi? Aşağıdaki birebir eşlemede artan (eşlemeyi bozan) eleman var mı? Bu kümelerin eleman sayılarını karşılaştırınız.

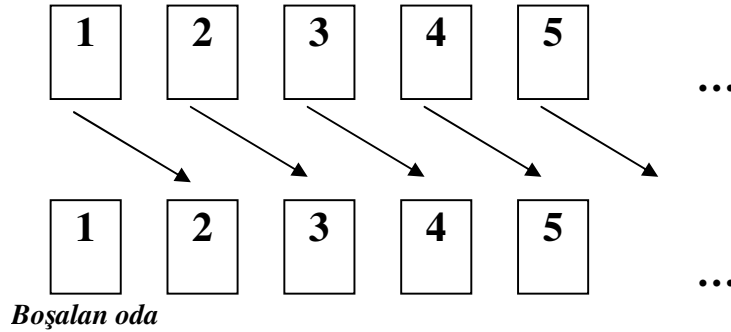


SINIF	CEVAPLAR TABLOSU-7
7.	(100'de küçük doğal sayılar, 100 den küçük çift sayılardan daha büyüktür) (Eşlenmez. Yukarıdaki sayılar arasında a olmadığı için...) (Aslında eşitlenir bence, sayılar sonsuz olduğu için bir şekilde eşitlenir)

Bu etkinliği de sadece yedinci sınıflar yapmıştır. Araştırmacıya göre, birebir eşlemeyi kabul eden öğrencilerin olması dikkat çekicidir.

ETKİNLİK 6

- Sonsuz odası olan bir otele yeni bir müşteri geliyor ve otelde yer olup olmadığını soruyor. Oteldeki görevli hiç boş yer kalmadığını söylüyor. Fakat her bir odadaki müşteriyi aşağıdaki gibi numarası bir fazla olan odaya kaydırarak bu duruma çözüm buluyorlar.

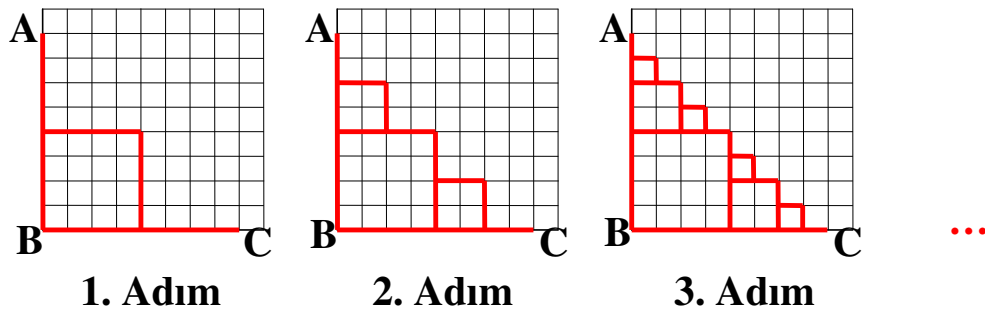


- *Bütün odaları dolu olan bu otele iki yeni müşteri gelse, onları da yerleştirebilir misiniz? 5 müşteri gelse? 100 müşteri gelse? Nasıl?*
- *Bu otele sonsuz müşteri gelse, hepsi yerleştirilebilir mi? Nasıl? ($\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$)*

SINIF	CEVAPLAR TABLOSU-8
7.	(Sonsuz kadar odanın hepsi dolu olamaz...Bu otele sonsuz müşteri gelse yerleştirilir. Çünkü odalar da sonsuz tane)

Bu etkinliği öğrenciler genelde anlamamışlardır ve çok az öğrenciden cevap gelmiştir. Literatürde geçen sonsuz oda problemi ile ilgili bu etkinliğin ilköğretim öğrencilerinin seviyesine pek uygun olmadığı görülmüştür.

ETKİNLİK 7



- *İlk üç adımı verilen yukarıdaki örüntü devam ettirilirse 4. adımdaki şekil nasıl olur?*
- *Bu örüntü kaç adım daha devam ettirilebilir?*
- *Sonuçta nasıl bir şekil oluşur? ABC dik üçgeni oluşur mu? Neden? Sebebinin açıklayınız.*

SINIF	CEVAPLAR TABLOSU-9
5.	(...) (...) (Düz çizgi olur. Belki de pörtlü kalabilir.)
7.	(Üçgenin hipotenüsü pörtlü olur.) (Örüntü sonsuza kadar, istediğimiz kadar devam ettirilebilir. [AC] düz bir çizgi olmaz, herhalde. Çünkü kareler bir türlü düz çizgi olmuyor) (Eminim galiba, bir dik üçgen olmaz) (Düz bir çizgiye benzer)

Yukarıdaki araştırmacı tarafından geliştirilen etkinlik, Fischbein'den (1978) itibaren bir çok araştırmacının kullandığı, sonsuzluk konusundaki nesne-süreç (object-

process) tartışması ile ilgili etkinliklerden biridir (Monaghan, 2001). Öğrencinin sonsuz bir olayı aktüel sonsuzluk anlayışına uygun bir şekilde bir bütün olarak algılaması veya potansiyel sonsuzluk anlayışına uygun bir şekilde bir süreç olarak algılaması beklenmektedir. Araştırmacıya göre, öğrencilerin tamamına yakınının dik üçgenin hipotenüsü olacak şekilde düz bir çizginin oluşamayacağını ifade etmeleri, sonsuz bir olayı zihinlerinde bitmeyen bir süreç olarak canlandırdıklarını göstermektedir. Öğrenciler; sonsuza kadar devam eden bir örüntüye bütün olarak bakmak, limitini düşünmek, sayı kümelerini karşılaştırmak gibi davranışlardan oldukça uzak görünmüşlerdir.

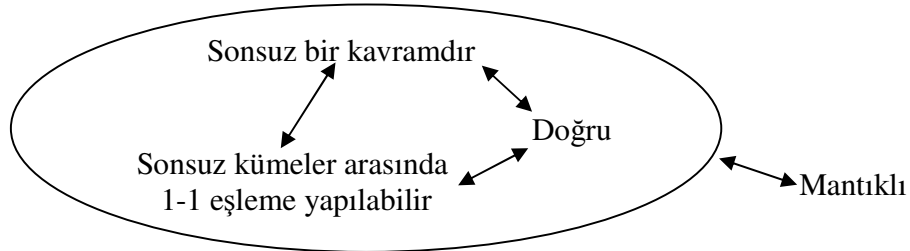
Öğrencilerin etkinliklerdeki sorulara verdikleri cevaplar da genellikle potansiyel sonsuzluk anlayışına uygun ifadeler içermektedir. Görüldüğü gibi bütün sonsuz sayı kümelerinin eleman sayılarının genellikle eşit olarak düşünülmesi, hiç durmadan örüntüye devam edilse de dik üçgen oluşmaması gibi cevaplar potansiyel sonsuzluk anlayışının ağırlığını göstermektedir. Bunun dışında birebir eşleme ile ilgili ve standart olmayan analizdeki sonsuzluk anlayışına yakın olan ifadeler, öğrencilerin matematik literatüründe var olan belli başlı sonsuzluk kavramı ile ilgili anlayışlardan çok uzak olmadığını düşündürmektedir. Araştırmacıya göre, ilk etkinlikte öğrencilerin genellikle pastanın biteceğini iddia etmeleri, onlar için “sonsuz küçük” kavramının daha zor bir kavram olmasının yanında gerçek hayatta böyle bir şeye oldukça yabancı olmalarından kaynaklanmaktadır.

BÖLÜM 5

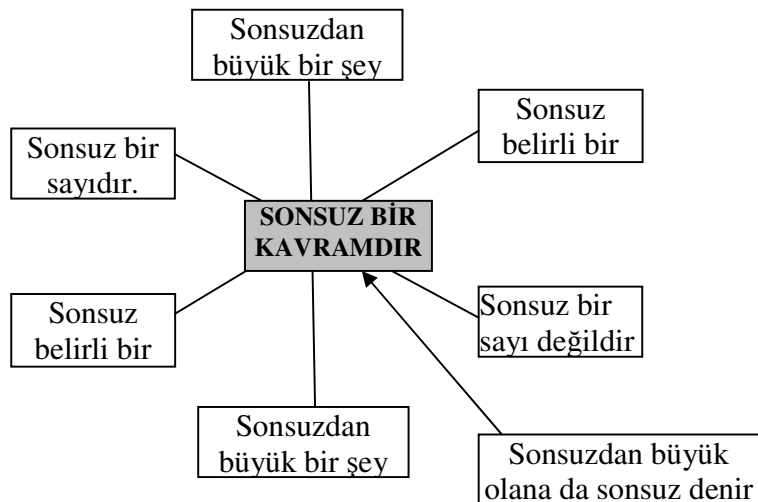
SONUÇLAR VE ÖNERİLER

1. Bu çalışmada kullanılan repertuar çizelge tekniğinde yapı ilişkileri elde edilirken, gömülü teoride boyutları ve eksenleri gösteren şemalar elde edilmiştir. Bu sefer üzerinde durulan, yapılar arasındaki ilişkiler yerine kategoriler arasındaki ilişkilerdir. Çıkan sonuçlara göre, kişisel yapı psikolojisinin temel taşları olan yapıların görevini gömülü teoride kategorilerin ve fenomenlerin yerine getirdiği düşünülmektedir. Araştırmacıya göre, her iki metodolojinin de bireylerin kavram imajlarını belirlemeye çalışan nitel bir yol takip ettiği göz önüne alınırsa bu iki teknik arasında bir denklik olduğu kabul edilebilir.
2. Doktora öğrencilerinin yapı ilişkilerini gösteren şekiller ile ilköğretim öğrencilerinin şemaları karşılaştırıldığında aşağıdaki gibi benzerlikler görülmüştür.

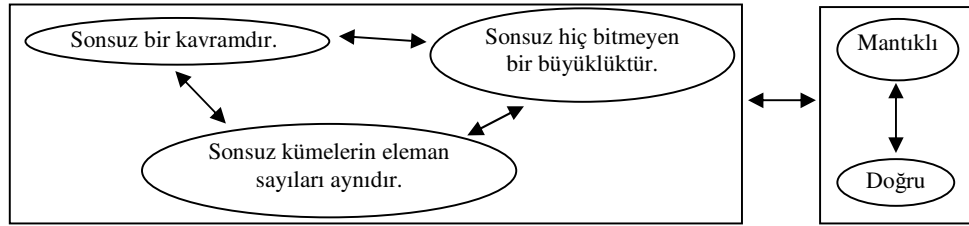
1. Doktora Öğrencisine Ait Şekil



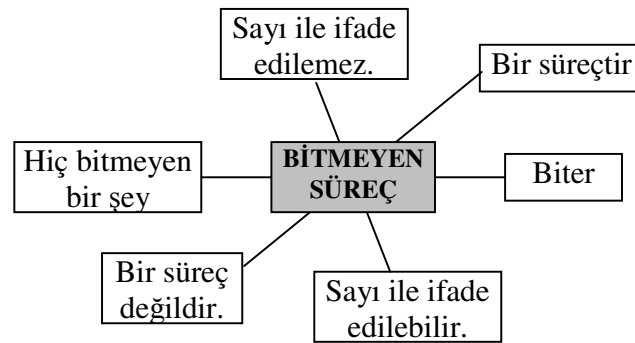
5-M Öğrencisine Ait Şekil



2. Doktora Öğrencisine Ait Şekil



7-A Öğrencisine Ait Şekil



Görüldüğü gibi doktora öğrencilerinin özellikle küme teorisi derslerinden önceki yapıları ile ilköğretim öğrencilerine ait kategoriler; “bitmeyen büyüklük”, “bitmeyen süreç”, “sonsuz bir kavramdır” gibi benzer anlayışlar taşımaktadırlar. Doktora öğrencilerinden, küme teorisi derslerinden sonra da benzer yapıların elde edildiği dikkate alınırsa öğrenciler için matematikteki sonsuzluk kavramının en dirençli kavramlardan biri olduğu düşünülebilir. Araştırmacıya göre, sonsuzluk ile ilgili kavramlar açısından yaş seviyeleri arasında çok büyük farklar yoktur ve ülkemizde öğrenciler bu konuda kavram imajlarını geliştirecek çok fazla matematik öğretimi almamaktadırlar.

- Özellikle küçük yaş grubundaki öğrencilerin düşünebilecekleri en büyük sürenin sonlu olması gerçek hayatın kısıtlamalarının açık bir göstergesi olarak düşünülebilir. Buna bağlı olarak da öğrencilerin sonsuz uzunluktaki bir sayı doğrusunu kavramalarının kolay olmadığı görülmüştür.
- Araştırmacıya göre, etkinlikler yapılırken kullanılmış olan “Sonsuz diye bir işaret var. Onu koyarız.” ifadesindeki gibi sayı doğrusunun uç noktalarına sonsuz sembolünün yerleştirilmesi, bu sembolün “en büyük” anlamında bir kavram olarak algılanmasına veya sonsuz sayı diye belirli en büyük bir sayının var olduğuna

inanılmasına yol açmaktadır. Her şeyden daha önemlisi bu sembol öğrenciler için kesin bir anlamı olmayan belirsizliklerle dolu bir semboldür. Bu yaşta sürekli devam eden bir süreci bu sembol ile vermek, öğrencileri gelecekte görecekleri sonsuzluk kavramı ile ilgili limit, diziler, sonsuz döngüler gibi matematik konularının iyi anlaşılmasına ve kavram yanlışlarına neden olabilir.

5. Araştırmacıya göre, öğrencilerin “sonsuz + sonsuz = iki sonsuz” gibi bir işleme yönelmelerinin sebebi Tall’un (1981) iddia ettiği gibi sonsuzu ölçme anlayışı değildir. Böyle bir davranışa sonlu okul matematiğinin neden olduğu, çocukların okulda öğrendikleri “1 elma, 1 elma daha 2 elma eder” düşüncesi ile hareket ettikleri düşünülmektedir. Araştırmacı, sonsuzluk ile ilgili “belirsizlik” fenomeninin bu kadar etki olduğu bir yaşta öğrencilerin ölçme anlayışı ile hareket ettiklerini ileri sürmenin doğru olmadığı sonucuna varmıştır. Monaghan’ın (2001) dediği gibi, sonsuzluğu ölçme anlayışı sadece ileri yaşlardaki çocuklarda görülen yaygın bir eğilim olarak değerlendirilebilir.
6. Standart olmayan analizdeki “sonsuz küçük” kavramının öğrencilerin sezgilerine tamamıyla zıt olmadığı düşünülmektedir. Öğrencilerde sık sık karşılaşılan “bir bütün sonsuza kadar bölünürse yok olur” kategorisi, sonsuza kadar küçülen bir şeyin büyüklüğünün olmayabileceğini veya bu şeyin büyüklüğünün ihmal edilebileceğini akla getirmektedir. Öğrenciler kimi zaman “sıfır olur” diyerek bu büyüklüğü açıklamaya çalışmışlardır. Falk ve diğerlerine (1986) göre, öğrenciler açısından çok küçük bir şeyi anlamak çok büyük bir şeyi anlamaktan daha zor olsa da, çok küçük bir şeyi ifade eden “sonsuz küçük” kavramının öğrencilerin sezgisel kavramları ile fazla çelişmediği görülmektedir.
7. Fischbein’in (2001) ifade ettiği gibi, özellikle ilköğretim öğrencilerinde potansiyel anlayışa göre olan sonsuzluğun dinamik şekli vardır. Öğrencilerin doğal sayılar kümesini bir bütün olarak kavramaları zordur, fakat her doğal sayıdan sonra bir doğal sayı vardır düşüncesini kavrayabilirler. Öğrencilere ait önemli bir fenomen “hiç bitmeyen süreç” fenomenidir. Öğrenciler için sonsuz bir olayın anlamının, sonlu olan bir işlemin hiç bitmeden devam etmesi olduğu görülmektedir.

8. Fischbein (1978), öğrencilerin limit ile ilgili sezgisel kavramlarının, limitin sonlu değerinden çok sürecin sonsuzluğuna odaklanmaya meyilli olduğunu ifade etmiştir. Araştırmacıya göre, görüşülen öğrencilerde potansiyel sonsuzluk anlayışının ağırlığı göz alınırsa, böyle bir sonuç şaşırtıcı değildir. Yalnızca küme teorisi derslerinde farklı sonsuzluk anlayışları ile karşılaşılması sonucunda doktora öğrencilerinin anlayışlarında aktüel sonsuzluğa doğru bir kayma olduğu görülmüştür. Buna göre, matematikteki limit konusunun eğitiminde öğrencilerin dinamik limit kavramı ile ilgili kavram yanılgılarını, daha çok sürece odaklanan anlayışlarını azaltmak için Cantor'un küme teorisindeki gibi farklı sonsuzluk anlayışlarından faydalanılabilir. Araştırmacıya göre, orta öğretimdeki öğrencilere düzeylerine uygun bir şekilde kardinaliteden ve ordinaliteden bahsedilebilir. Öğrencilerin farklı sonsuzluk anlayışları ile tanışmaları sonsuzluk ile ilgili matematik konularını daha iyi anlamalarını sağlayabilir. Tirosh'un (1991) lise öğrencilerinin küme teorisi ile ilgili konuları anlayabildiklerini ifade etmesi dikkat çekicidir.
9. Fischbein ve arkadaşları (1979) sonsuzlukla ilgili sezgilerin 12 yaşlarından itibaren göreceli olarak sabit kaldığını bulmuşlardı. Onların aksine, Jirotkova ve Littler(2004), içerik değiştiğinde test ettikleri öğrencilerin sonsuzlukla ilgili sezgilerinin sabit kalmadığını gözlemlemişlerdir. Araştırmacıya göre de, öğrencilerin anlayışlarında "belirsizlik" kavramının fazlasıyla yer ettiği bir konuda öğrencilerin sonsuzlukla ilgili sezgilerinin sabit kalması beklenemez. Fakat doktora öğrencilerinin sonsuzluk kavramını anlayışları ile ilköğretim öğrencilerinin sonsuzluk kavramını anlayışları arasındaki benzerliğe dikkat edilecek olursa, öğrenciler konu ile ilgili kayda değer bir matematik öğretimi görmediği sürece ileri yaşlarda da bu konu ile ilgili kavram imajlarının pek fazla değişmeyeceği söylenebilir. Sonuç olarak sabit sezgilerden bahsedilemez fakat öğrencilerin sezgilerinin ve anlayışlarının göreceli olarak da olsa aynı yapıyı koruduğundan bahsedilebilir. Burada dikkat edilecek en önemli nokta, öğrencilerin sonsuzlukla ilgili anlayışlarını tek bir anlayışa dayandırmamaktır. Kavram imajı (Tall & Vinner, 1981) dediğimiz, zihinlerdeki bilişsel yapı (cognitive structure) bu konu ile ilgili çok farklı bakış açılarına sahip olabilir ve bize düşen bu anlayışların hangi seviyede hangi ağırlıkta olduğunu araştırmaktır.

10. Jhanke'ye göre (2001), "Cantor'un sonsuzluğa yeni yaklaşımı ile oluşan sonsuzluk nosyonu, temel olarak süreklilik fikrinden tamamen kopmuştur." Buna göre, Cantor'un küme teorisinin ve limit ordinalerin anlaşılmasındaki en büyük engelin öğrencilerin küçük yaşlardan itibaren taşıdığı, "süreklilik" içeren sonsuzluk anlayışı olduğu düşünülmektedir.
11. Küçük çocuklarla yapılan çalışmalarda animasyonların ve çizgi filmlerin kullanılması, öğrencilerin motivasyonlarının arttırılmasının yanında bilişsel defanslarını geçmekte oldukça faydalı olmuştur. Sonsuzluk gibi öğrenciler için üzerinde konuşulması zor olan bir konu ile ilgili, sıkılmadan uzun görüşmeler yapılmasını sağlamıştır. Araştırmacıya göre, öğrencilerin film seyretmeye yatkınlığının iyi belirlenmesi ve izlettirilen filmlerin mümkün olduğu kadar kısa ve araştırılan konuya yakın olması; yapılan araştırmalarda daha iyi sonuçlar alınmasını sağlayacaktır. Bundan sonrada animasyonlar kullanılarak matematik eğitiminde bir çok çalışma yapılabilir. Öğrencilerin dünyasında çalışmanın bir araştırmacı için daima avantajlı olacağı düşünülmektedir.
12. Bazı öğrencilerin farklı sonsuz kümeleri açıklamak için kullandığı ve kararsızlıklarının sebeplerinden biri olarak görülen "sayılabilirlik" kavramının hem doktora hem de ilköğretim öğrencileri için kilit kavramlardan biri olduğu düşünülmektedir. Bu doğrultuda "sayılabilirlik" ile ilgili araştırmalara ülkemizde fazlasıyla ihtiyaç vardır.
13. İlköğretim ve orta öğretim programında yer alan sonsuzlukla ilgili örüntü, limit, diziler vb. konuların hangi ölçüde ve nasıl öğretileceğinin iyi bir şekilde belirlenebilmesi, sonsuzluk kavramı ile ilgili araştırmaların çoğalmasına bağlıdır. Özellikle ilköğretimden üniversiteye kadar öğrencilerin sonsuzlukla ilgili anlayışlarının ve gelişiminin araştırılacağı çalışmalara oldukça ihtiyaç vardır. Bunun için bu tezde kullanılan ve tanıtımı yapılan Repertuar Çizelge Tekniği ve Gömülü Teori gibi metodolojilerin oldukça faydalı olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKÇA

AZTEKİN, S. (2003). **Repertuar Çizelge Tekniği ve Limit Konusunda Uygulanması** (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). YÖK Dokümantasyon Başkanlığı.

BANNISTER, D. ve J.M.MAIR. (1968). **The Evaluation of Personal Constructs**. London: Academic Press.

BORASI, R. (1985). '*Errors in the enumeration of infinite sets*'. **Focus on Learning Problems in Mathematics** 7, 77–89.

CHARMAZ, K.(2006). **Constructing Grounded Theory. A Practical Guide Through Qualitative Analysis**. SAGE Publications: London.

COHEN, Louis, Lawrence MANION ve Keith MORRISON. (2000). **Research Methods in Educations (5th Edition)**. London and New York: Routledge, Falmer. Taylor & Francis Group.

DUVAL, R. (1983). '*L'Obstacle du dédoublement des objets mathématiques*', **Educational Studies in Mathematics** 14, 385–414.

DUBINSKY, E., K. WELLER, M. A. McDONALD and A. BROWN. 2005. *Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS-based analysis: Part 1*. **Educational Studies in Mathematics**, 58, 335–359.

FALK, R., GASSNER, D., BEN ZOOR, F. and BEN SIMON, K. (1986). *'How do children cope with the infinity of numbers?'*, **Proceedings of the 10th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, London, pp. 13–18.

FISCHBEIN, E., D. TIROSH and P. HESS. 1979. *The intuition of infinity*. **Educational Studies in Mathematics**, 10, 3–40.

FISCHBEIN, E. 2001. *Tacit models of infinity*. **Educational Studies in Mathematics**, 48, 309–329.

FRANSELLA, F. ve D. BANNISTER. (1977). **A Manual for Repertory Grid Technique**. New York: Academic Press.

GLASER ve STRAUSS. 1967. *The Discovery of Grounded Theory*.

HANCOCK, B. (2004). **An introduction to qualitative research**. (<http://www.trentfocus.org.uk>)

HOOGVELD, PAAS, JOCHEMS, & VAN MERRIENBOER. (2002). *Exploring teachers' instructional design practices from a systems design perspective*, **Instructional Science**, Springer Netherlands. Volume 30, Number 4 / July, 2002 P.291-305

HOPPER, T. F. (2000). *Student Teachers' Transcending the Limits of Their Past: Repertory Grid Framing Narratives for Learning To Teach*. **Annual Meeting of the American Educational Research Association** (New Orleans, LA, April 24-28, 2000).

HOSKONEN, K. (1999). *A good pupil's beliefs about mathematics learning assessed by repertory grid methodology*. **Proceedings of the 23. Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, O.Zaslavsky(Ed.), (Vol 3, pp.97-104). Haifa, Israel: Israel Institute of Technology.

JIROTKOVA, D. & LITTLER, G. (2003). *Student's concept of infinity in the context of a simple geometrical construct*. **Pateman, N.A., Dougherty, B.J., Zilliox, J. (Eds), Proceedings of PME27**, Univ. of Hawaii, Honolulu, pp 3-123-132

JIROTKOVA, D. & LITTLER, G. 2004. *Insight into pupils' understanding of infinity in a geometrical context*. **Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Vol 3 pp 97–104.

JAHNKE, H.N. (2001). *Cantor's Cardinal and Ordinal Infinities: An Epistemological and Didactic View*. **Educational Studies in Mathematics** 48, 179–197.

JOHANNESSEN, T.A. et. al.(2002). *Constructs Used by 17-19 Year Old Students in Northern Europe When Informally Evaluating their Teachers*. **European Educational Research Journal**, Volume 1, Number 3, 2002 P.538

KARPPINEN. (2000). *Repertory Grid Technique in Early Childhood as a Tool for Reflective Conversations in Arts Education*. **European Conference on Quality in Early Childhood Education** (10th, London, England, August 29-September 1, 2000).

KELLY, G.A. (1955). **The psychology of personal constructs (Vol. 1)**. New York: W.W. Norton.

LEE, C. and YANG, W. (2006). *Using Repertory Grid to Study Taiwanese Senior High School Students' Discourses on Forces*. **International Conference in Mathematics. Sciences and Science Education**. June 11-14, 2006 University of Aveiro-Portugal. ICMSE 2006.

LEHRER, R. ve K. KOEDINGER. (1989). *Inferring conceptual structure with personal construct psychology and fuzzy logic*. **Revision of a paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association**, (New Orleans, April 1988).

MAZHINDU, G.N. *Using repertory grid research methodology in nurse education and practice: a critique*. **Journal of Advanced Nursing** Volume 17 Issue 5 Page 604-608, May 1992

McQUALTER, J.W. (1986). *Becoming a Mathematics Teacher: The Use of Personal Construct Theory*. **Educational Studies in Mathematics**, Springer Netherlands, Volume 17, Number 1 / February, 1986

MIDDLETON, J.A. (1995). *A study of intrinsic motivation in the mathematics classroom: A personal construct approach*. **Journal for Research in Mathematics Education**, **26**, 254-279.

MONAGHAN, J. (1986). Adolescents' understanding of limits and infinity. Unpublished PhD thesis. Mathematical Education Research Centre, Warwick University.

MONAGHAN, J. 2001, *Young Peoples' Ideas of Infinity*. **Educational Studies in Mathematics**, **48**, 239–257.

MORENO, L.E., WALDEGG, G.(1991) *The conceptual evolution of actual infinity*. **Educational Studies in Mathematics**. Vol.22 pp 211 – 231.

PETTY, J. A. (1996). **The Role of Reflective Abstraction in the Conceptualization of Infinity and Infinite Processes**. A thesis Submitted to the Faculty of Purdue University

POPE, M.L. ve T.R. KEEN. (1981). **Personal constructs psychology and education**. London: Academic Press.

ROBERT, A. (1982). *'L'acquisition de la notion de convergence des suites numeriques dans l'enseignement superieur.'*, **Recherches en Didactique des Mathematiques**, **3(3)**, 307-341

ROBERTS L.C., E. DEAN ve T. NIENHUIS. 2007. **Lights, Camera, Action: Teaching with Feature Film in the Social Sciences**. Mountainrise Electronic Journal.

RUCKER, R. (2004). [Infinity and the Mind: The Science and Philosophy of the Infinite](#). Princeton Science Library

SIERPINSKA, A. (1987). *Humanities students and epistemological obstacles related to limits*. **Educational Studies in Mathematics**, 18, 371-397.

STRAUSS A. ve J. CORBIN. (1998). **Basics of Qualitative Research, Techniques and Procedures' of Developing Grounded Theory**. Second Edition. London: Sage Publications.

TALL, D. O. (1980). Mathematical Intuition, with special reference to limiting processes. Proceedings of PME 4, Berkeley, 170-176.

TALL, D. O. (2001). *Natural and formal infinities*. **Educational Studies in Mathematics** 48, 199–238.

TALL, D.O. & S. VINNER. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics, with specialreference to limits and continuity*, **Educational Studies in Mathematics**, 12, 151-169.

TİROSH, D., TSAMIR, P. (1994). Comparing infinite sets: intuitions and representations. In proceedings of PME18, Lisbon, Portugal, Vol 4, pp 345-352.

TIROSH, D. and P, TSAMIR. (1996). *The role of representations in students' intuitive thinking about infinity*. **Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, 27, 33–40.

TIROSH, D. (1991). *Intuitions of infinity and the cantor theory*. **Advanced Mathematical Thinking** by David TALL. Kluwer Academic Publishers.

TIROSH, D. (2001). *Infinity – The never-ending struggle* **Educational Studies in Mathematics**. Volume 48, Numbers 2-3 / November.

TSAMIR, P. (2001). *When “the same” is not perceived as such: the case of infinite sets*. **Educational Studies in Mathematics**, 48, 289-307.

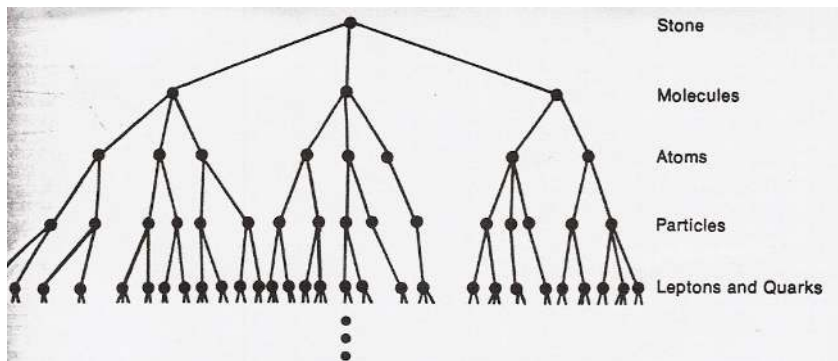
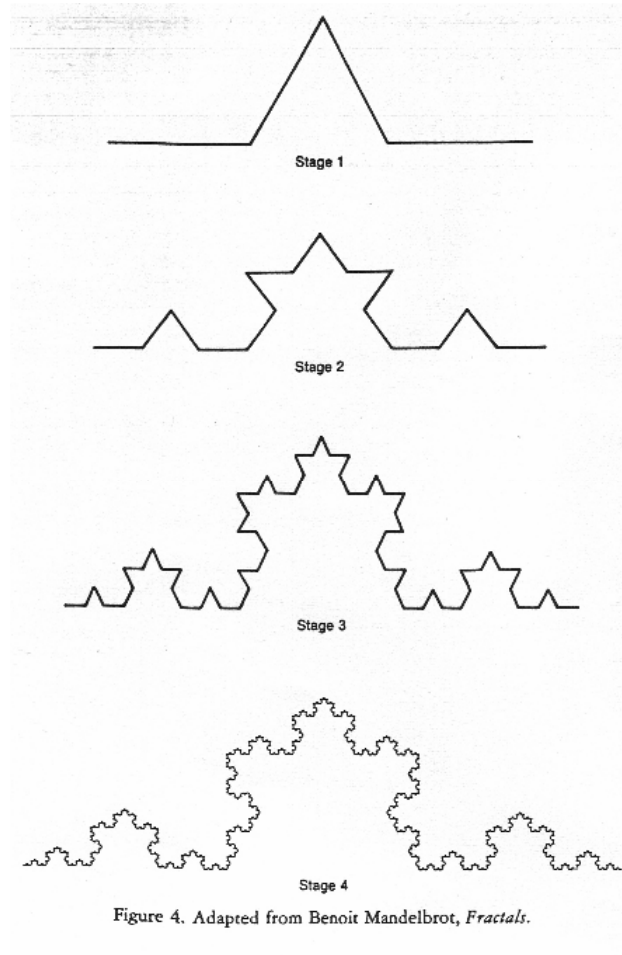
WILLIAMS, S.R. (2001). *Predications of the Limit Concept: An Application of Repertory Grids*. **Journal for Research in Mathematics Education**, 32, 341

YILDIRIM, A. Ve H. ŞİMŞEK. 2005. **Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri**. Ankara: Seçkin Yayınlar

http://mathforum.org/library/drmath/results.html?textsearch=infinity&textsearch_bool_type=and&textsearch_whole_words=no

EKLER

1.Küme Teorisi Kursunda Öğrencilere Gösterilen Resimler:



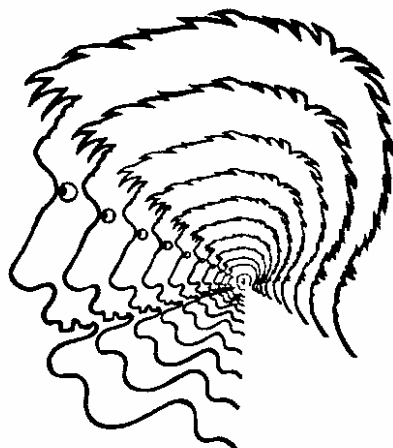
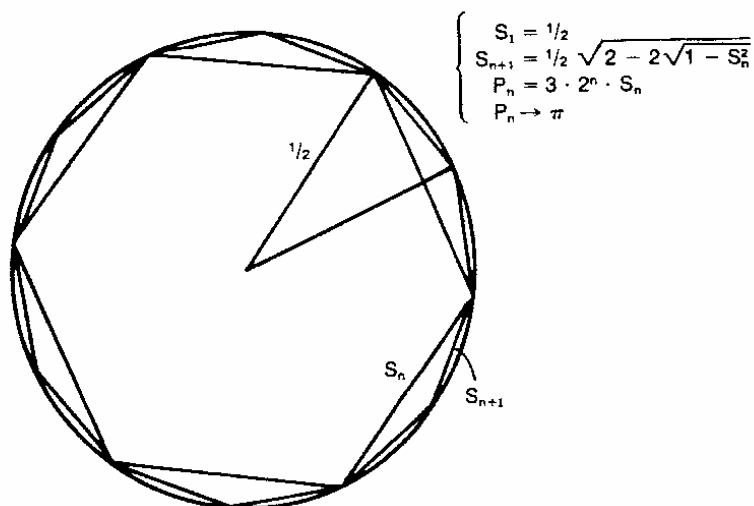
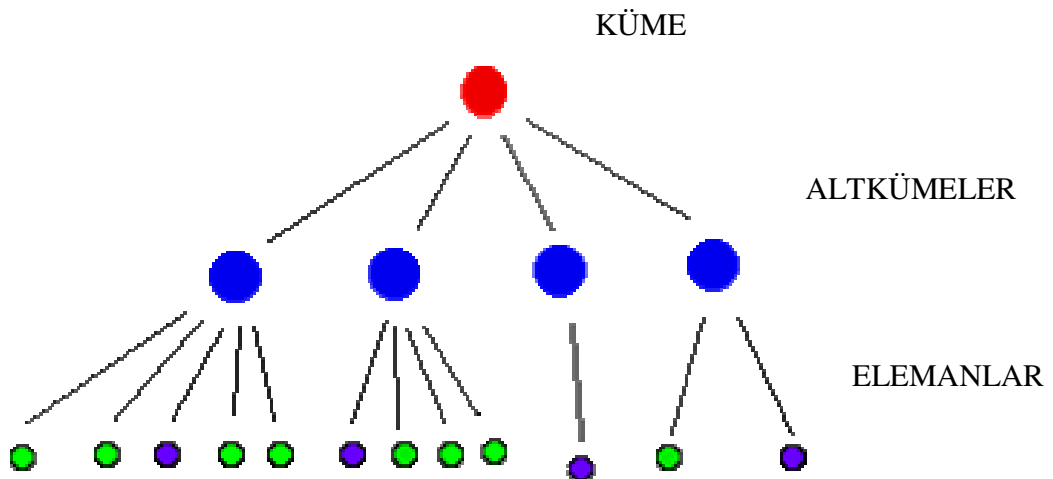
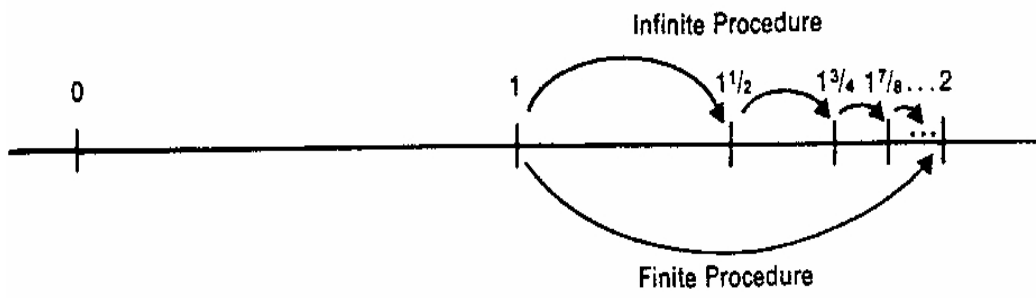
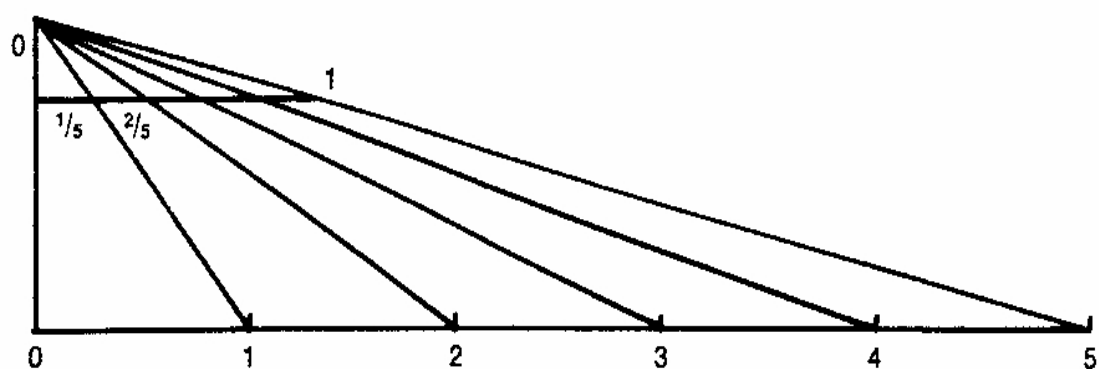


Figure 30. Based on a drawing from Robert Crumb, *Your Hytone Comix* (San Francisco: The Print Mint, 1976).

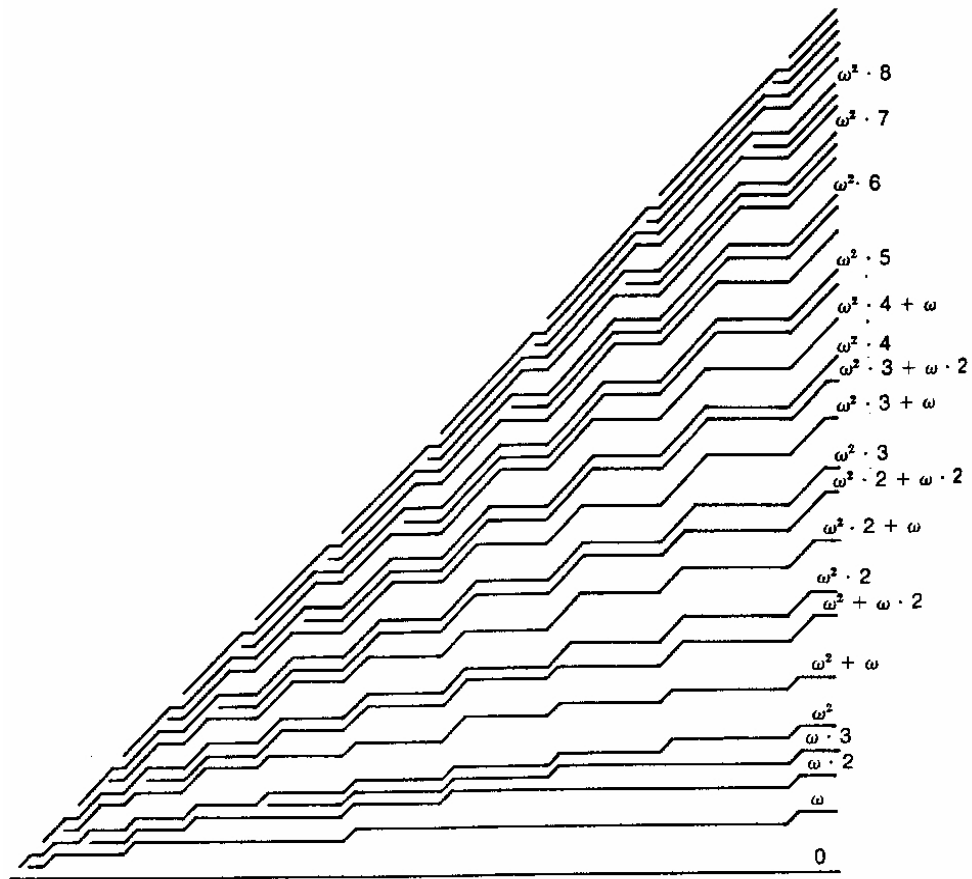




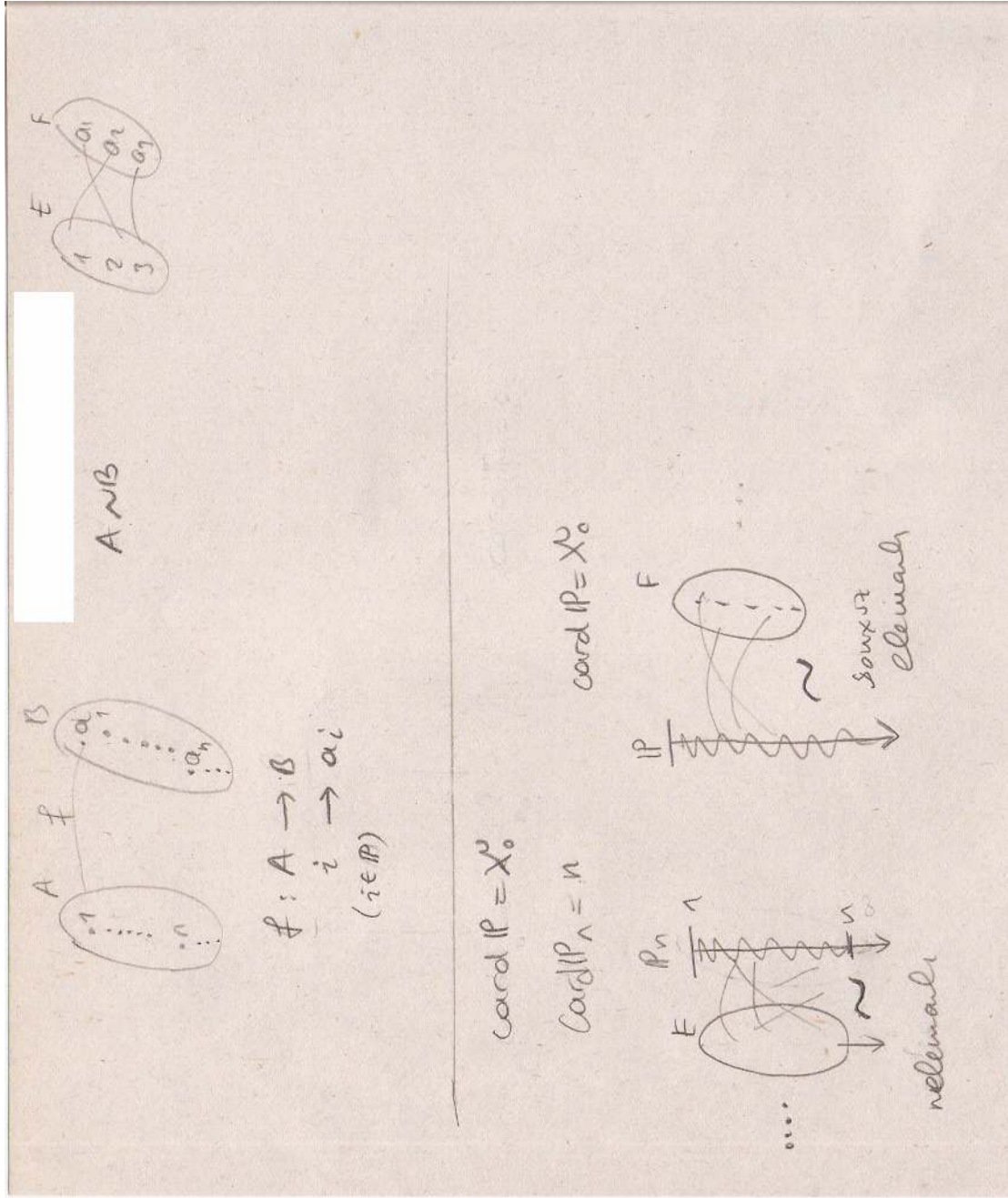


$$\begin{array}{c}
 \underbrace{\triangle}_{1} \\
 \underbrace{\text{XXXX} \dots}_{\omega}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \underbrace{\triangle \triangle \triangle \triangle \dots}_{\omega} \\
 \underbrace{\text{X}}_{1}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \underbrace{\triangle \triangle \triangle \triangle \dots}_{\omega} \\
 \underbrace{\text{XXXX} \dots \text{X}}_{\omega + 1}
 \end{array}$$

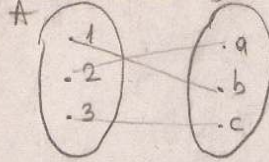
$$\begin{array}{l}
 2 \cdot \omega = \underbrace{\star \star}_2 + \underbrace{\star \star}_2 + \underbrace{\star \star}_2 + \dots = \underbrace{\star \star \star \star \dots}_{\omega} \\
 \omega \cdot 2 = \underbrace{\square \square \square \square \dots}_{\omega} + \underbrace{\square \square \square \square \dots}_{\omega} = \underbrace{\square \square \square \square \dots \square \square \square \square \dots}_{\omega + \omega}
 \end{array}$$

Figure 44. Ziggurat to ω^3 .

2. Öğrencilere Ait Bazı Çizimler:



Denk kümeler: B



A ile B kümesi denktir.

A, B ile 1-1 eşlenebilir.

$f(1)=a, f(2)=b, f(3)=c$

oş 1-1 ve örten f

fonk. vardır,

23.11.2026

$\mathbb{Z} \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

$2\mathbb{Z} \dots -2, 0, 2, 4, \dots$

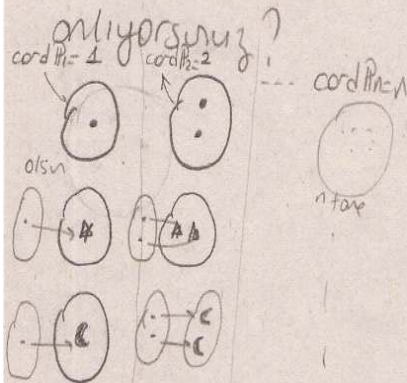
$g: \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}, g(z)=2z$
 $z \rightarrow 2z$

g fonk, 1-1 eşlenebilir.

$\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}$ ile 1-1 eşlenebilir.

$\mathbb{Z}$ ve $2\mathbb{Z}$ denktir.

Sonlu ve Sonsuz Kümelerin Kardinalitelerine ne



$\mathbb{P}$ sonlu küme

$\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{E}$ 1-1 eşleme olsun.

Kardinalitesi farklı herhangisi iki kümeyi resmedin.



kardinaliteleri farklı

$\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$ kardinalite farklı
 $\{0, 1, 2\}$ $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

$\mathbb{Z}$
 $\updownarrow$ kardinaliteleri aynı!