



FERMİ-WALKER TÜREVİ VE PARALEL EĞRİLER

Mert HASÇELİK

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Doç. Dr. Ali ÇAKMAK

AĞRI-2024

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.

AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FERMİ-WALKER TÜREVİ VE PARALEL EĞRİLER

MERT HASÇELİK

TEZ YÖNETİCİSİ

Doç. Dr. ALİ ÇAKMAK

AĞRI-2024

(Her hakkı saklıdır)

13/06/2024

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "**FERMİ-WALKER TÜREVİ VE PARALEL EĞRİLER**" adlı yüksek lisans tezinin bilimsel ve etik kurallara riayet edilerek tarafımdan hazırlandığını taahhüt eder, tezimin basılı ve elektronik nüshalarının Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivlerinde saklanmasına ve tamamının erişime açılmasına izin verdiğimi beyan ederim.

Lisansüstü Eğitim-Öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

☒ Tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

☐ Tezim sadece Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi yerleşkelerinden erişime açılabilir.

☐ Teziminyıl süreyle erişime açılmasını istemiyorum. Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

13/06/2024

Mert HASÇELİK

TEZ KABUL VE ONAY TUTANAĞI

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Doç. Dr. Ali ÇAKMAK danışmanlığında, Mert HASÇELİK tarafından hazırlanan bu çalışma, .../.../... tarihinde aşağıda isimleri belirtilen jüri tarafından değerlendirilmiş olup Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalında yüksek lisans tezi olarak **oybirliği / oy çokluğu (.../...)** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Çağrı KARAMAN

İmza :

Üye : Doç. Dr. Abdulgani ŞAHİN

İmza :

Üye : Doç. Dr. Ali ÇAKMAK

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu .../.../... tarih ve / numaralı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim HAN

Enstitü Müdürü

ÖZET
YÜKSEK LİSANS TEZİ

FERMİ-WALKER TÜREVİ VE PARALEL EĞRİLER

Mert HASÇELİK

AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Doç. Dr. Ali ÇAKMAK

2024, 52 sayfa

Jüri: Doç. Dr. Abdulgani ŞAHİN

Doç. Dr. Ali ÇAKMAK

Doç. Dr. Çağrı KARAMAN

Bu tez çalışmasında, 3 –boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin paralel eğrisi tanımlanıp paralel eğrinin Serret-Frenet vektör alanları boyunca Fermi-Walker türevi hesaplanmıştır. Daha sonra aynı vektör alanlarının Fermi-Walker anlamında paralel olma durumları incelenmiştir.

Tez beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, temel tanım, teorem ve özelliklere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, tezin hazırlanmasında kullanılan materyal ve yöntemlerden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde, paralel eğrilerde Fermi-Walker türevi ile ilgili bulgulara yer verilmiştir. Beşinci bölümde ise çalışma sonucunda elde edilen veriler ile ilgili değerlendirmelerde bulunulmuştur.

2024, 52 sayfa

Anahtar kelimeler: Eğri, Fermi-Walker paralellik, Fermi-Walker türevi, Paralel eğri.

ABSTRACT

Master Thesis

FERMİ-WALKER TÜREVİ VE PARALEL EĞRİLER

Mert HASÇELİK

AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN UNIVERSITY

POSTGRADUATE EDUCATION INSTITUTE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ali ÇAKMAK

2024, 52 pages

Jury: Assoc. Prof. Dr. Abdulgani ŞAHİN

Assoc. Prof. Dr. Ali ÇAKMAK

Assoc. Prof. Dr. Çağrı KARAMAN

In this thesis, the parallel curve of a curve in Euclidean 3 –space is defined and the Fermi-Walker derivative of the parallel curve is calculated through the Serret-Frenet vector fields. Then, the parallelism of the same vector fields according to the Fermi-Walker derivative was examined.

The thesis consists of five main parts. First part is separated for introduction. In the second part, basic definitions, theorems and features are included. In the third part, the materials and methods used in the preparation of the thesis are mentioned. In the fourth part, findings related to Fermi-Walker derivative in parallel curves are presented. In the fifth part, evaluations are made about the data obtained as a result of the study.

2024, 52 pages

Keywords: Curve, Fermi-Walker parallelism, Fermi-Walker derivative, Parallel curve.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimim sürecince ilgi ve deneyimleri ile bana ışık tutan, beraber çalışmış olmaktan onur duyduğum, ihtiyacım olduğu her anda göstermiş olduğu sabır ve anlayış ile yardımlarını esirgemeyen, bu tez çalışmasının konusu, yürütülme süreci ve yazım aşamasında göstermiş olduğu desteklerden dolayı minnet ve saygıyla hatırlayacağım çok değerli danışman hocam, Doç. Dr. Ali ÇAKMAK'a teşekkür eder, saygı ve şükranlarımı sunarım.

Diğer yandan, öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı annem Mercan HASÇELİK, babam Ali Rıza HASÇELİK, ablalarım; Nilay HASÇELİK AKYAZI ve Aycan HASÇELİK GÜL'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca her zaman en büyük destekçim olan sevgili eşim Hatice ÖZGEN HASÇELİK'e en içten sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

13/06/2024

Mert HASÇELİK

İÇİNDEKİLER

ÖZET	v
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
TABLOLAR DİZİNİ	xii
EKLER DİZİNİ	xiii
1.GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	4
2.1 Afin Uzayı	4
2.2. n –Boyutlu Öklid Uzayı	7
2.3. Öklid Uzayında Eğriler ve Frenet Formülleri	9
3. MATERYAL YÖNTEM	17
3.1. Öklid Uzayında Bazı Özel Eğriler	17
3.2. Öklid Uzayında Paralel Eğriler	20
3.3. Fermi-Walker Türevi	24
4.ARAŞTIRMA BULGULARI	27
4.1. Paralel Eğrinin Teğet Vektör Alanının Fermi-Walker Türevi	27
4.2. Paralel Eğrinin Normal Vektör Alanının Fermi-Walker Türevi	31
4.3. Paralel Eğrinin Binormal Vektör Alanının Fermi-Walker Türevi	35
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	39
KAYNAKLAR	42
EKLER	45
ÖZGEÇMİŞ	52

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{E}^n$	: n –Boyutlu Öklid Uzayı
I	: $\mathbb{R}$ de Bir Aralık
$\ \cdot \ $	: Norm Operatörü
$\langle \cdot \rangle$	: İç Çarpım Operatörü
$\mathcal{M}$	: Diferensiyellenebilir Manifold
g	: Riemann Metriği
$(\mathcal{M}, g)$	: n –Boyutlu Riemann Manifoldu
ζ	: $\mathbb{E}^n$ Uzay Eğrisi
$\zeta_r(s_r)$	: $\zeta(s)$ Birim Hızlı Eğrisinin Paralel Eğrisi
κ	: Eğrinin Eğriliği
τ	: Eğrinin Burulması (Torsiyonu)
$\mathcal{T}$	: ζ Eğrisinin Teğet Vektör Alanı
$\mathcal{N}$	: ζ Eğrisinin Normal Vektör Alanı
$\mathcal{B}$	: ζ Eğrisinin Binormal Vektör Alanı
$\mathcal{T}_r$	: ζ_r Eğrisinin Teğet Vektör Alanı
$\mathcal{N}_r$	: ζ_r Eğrisinin Normal Vektör Alanı
$\mathcal{B}_r$	: ζ_r Eğrisinin Binormal Vektör Alanı
$\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$	: ζ Eğrisinin Serret-Frenet Üçlüsü
$\{\mathcal{T}_r, \mathcal{N}_r, \mathcal{B}_r\}$	: ζ_r Eğrisinin Serret-Frenet Üçlüsü

w	: Darboux Vektörü
w^*	: Fermi-Walker Anlamında Darboux Vektörü
$\dot{\mathcal{X}}$	: $\mathcal{X}$ Vektör Alanının Öklid Türevi
∇	: Levi-Civita Koneksiyonu
$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}}\mathcal{X}$	: $\mathcal{X}$ Vektör Alanının Fermi-Walker Türevi



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Eğri.....	10
Şekil 2.2. Parametre Dönüşümü.....	10
Şekil 2.3. Vektör Alanı	12
Şekil 2.4. Serret-Frenet Vektör Alanları.....	13
Şekil 2.5. Oskülatör, Rektifiyan ve Normal Düzlem	15
Şekil 2.6. Düzlemsel Eğri	16
Şekil 3.1. Helis Eğrisi	17
Şekil 3.2. $m = \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$ İçin Salkowski Eğrileri (Salkowski 1909).....	19
Şekil 3.3. $m = \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ İçin Anti-Salkowski Eğrileri (Monterde 2008).	20
Şekil 3.4. Paralel Eğri.....	21

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. $\mathcal{T}_r$ Vektör Alanının Fermi-Walker Türevi İçin Geometrik	
Yorumlar	39
Tablo 2. $\mathcal{N}_r$ Vektör Alanının Fermi-Walker Türevi İçin Geometrik	
Yorumlar	40
Tablo 3. $\mathcal{B}_r$ Vektör Alanının Fermi-Walker Türevi İçin Geometrik	
Yorumlar	41

EKLER DİZİNİ

Ek 1. $\mathcal{T}_r$ Vektör Alanının Fermi-Walker Anlamında Paralel Olması Durumundaki Diferensiyel Denklemin Maple® Programı Yardımıyla Çözümü	45
Ek 2. $\mathcal{N}_r$ Vektör Alanının Fermi-Walker Anlamında Paralel Olması Durumundaki Diferensiyel Denklemin Maple® Programı Yardımıyla Çözümü	46
Ek 3. $\mathcal{B}_r$ Vektör Alanının Fermi-Walker Anlamında Paralel Olması Durumundaki Diferensiyel Denklemin Maple® Programı Yardımıyla Çözümü	49

1.GİRİŞ

Geometri (eski adı ile Hendese), Yunanca Γεωμετρία “Geo”(yer) ve “metro”(ölçüm) kelimelerinin birleşiminden türetilerek kelime anlamı olarak “yerin ölçülmesi” anlamına gelen; uzay ve uzayda tasarlanabilen (nokta, doğru, düzlem vs) biçimleri ve bunların birbirleri ile olan ilişkilerini inceleyen bilim dalıdır (Anonim 2024).

Geometrinin başlangıcı çok eski zamanlara dayandığından çalışma alanları çok geniştir. İlk zamanlar sadece fiziksel ihtiyaçların karşılanması için çalışmalara yer verilirken, eski Yunanlılar zamanında matematiksel gerçekler üzerinde çalışmalar başlar ve buna yönelik tartışmalar ile geometri, matematiksel bir sistem olarak ele alınır. Daha sonrasında bu sistemi geliştirmeye yönelik süreç başlamış olur.

Öklid, günümüzden yaklaşık 2000 yıl önce aslında bugün yakından bilinen geometriyi aksiyomatik bir sistem olarak ele almıştır. Öklid geometrisi, düzlemlerde ve eğikliğin dikkate alınmadığı küçük olan ölçeklerde ne kadar doğru işlemiş olsa da günlük hayatta karşılaştığımız problemlerde eksik kalmıştır. Böylelikle Öklid dışı geometriler varlığını ortaya koymuştur (Can 2018). Gerek Öklid geometrisi gerekse Öklid dışı geometri kalkülüs araçları kullanılarak çalışmaktadır. Oluşan bu sisteme diferansiyel geometri adı verilir.

Gauss, diferansiyel geometrinin kurucusu olarak kabul edilir. Eğrilerin ve yüzeylerin diferansiyel geometrisine dair çalışmalarda bulunup önemli katkılar sunmuştur. Ayrıca yaptığı çalışmalar modern diferansiyel geometrinin temelini oluşturmuştur (Ünal 2022).

Diferansiyel geometri fizik çalışmalarında da önemli bir yere sahiptir. Son yüzyılda birçok araştırmalarda buna rastlamak mümkündür. Bu fiziksel kavramlardan birisi de Fermi-Walker türevidir. Fermi, günümüzden yaklaşık 100 yıl önce Fermi türevini tanımlamış daha sonra ise bu türev üzerinde çalışmalarına ağırlık veren Walker, Fermi türevini genişleterek Fermi-Walker türevini tanımlamıştır. Bu türevin ortaya çıkış

süreci fiziksel açıdan açıklanabilir. Fiziksel deneylerde, bir cismin konumunu ve hareketini inceleyebilmek için cisim ile aynı hareketi yapan bir gözlemciden yararlanılır. Cismin t zamanındaki hareketinin geometrik açıdan yorumlanabilmesi için gözlemcinin hareket ettiği eğri boyunca merkezi ve sabit yönlerle sahip uygun bir çatı seçimine ihtiyaç duyulur. Cisim serbest düşme hareketi yapıyorsa gözlemci uzayda Levi-Civita paralellik vasıtasıyla hareket ettirilir. Hızlanan cisimler için ise gözlemcinin hareket ettiği uzayda Levi-Civita paralellik kullanılamaz. Bu sebeple araştırmacılar hızlanan cisimler için Fermi-Walker türevini geliştirmişlerdir (Uçar 2019). Benn and Tucker (1989), Fermi-Walker türevi ve Fermi-Walker anlamında paralel olma kavramlarını kapsamlı bir şekilde çalışmalarına eklemişlerdir. Hehl *et al.* (1991), Fermi-Walker türevinin uzaysal bir öteleme olduğundan bahsetmişlerdir.

Yapılmış olunan araştırmalar incelendiğinde Fermi-Walker türevine dair geometrik uygulamalara çok fazla rastlanmamıştır. Karakuş ve Yaylı (2012), Fermi-Walker türevini diferensiyel geometri açısından uygulamalarını çalışmalarında konu edinmiş ve diferensiyel geometride kullanılan birçok kavramın yeniden bu türeve göre tanımlanacağını göstermiştir. Uçar (2019), “Genelleştirilmiş Fermi-Walker Türevi ve Geometrik Uygulamaları” adlı doktora çalışmasında n –boyutlu Öklid uzayında genelleştirilmiş Fermi-Walker türevi üzerine çalışmalarda bulunmuştur. Ardından genelleştirilmiş Fermi-Walker türevini referans alarak hiperyüzeyler üzerinde bulunan eğriler boyunca genelleştirilmiş Fermi-Walker türevini tanımlamış ve literatüre önemli katkıda bulunmuştur. Kılıç (2019), “3 –Boyutlu Minkowski Uzayında Fermi-Walker Türevi” adlı yüksek lisans çalışmasında Fermi-Walker türevini 3 –boyutlu Minkowski uzayında incelemiştir. Bunun yanı sıra Bishop çatısı altında Fermi-Walker türevini tanımlayıp hangi durumlarda verilen bir vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olduğunu inceleyerek literatüre katkıda bulunmuştur. Karataş (2019), “Bazı İlişkili Eğriler İçin Fermi-Walker Türevi” adlı yüksek lisans çalışmasında 3 –boyutlu Öklid uzayında $\mathcal{W}$ –yön eğrisinin Serret-Frenet vektör alanlarının Fermi-Walker türevini hesaplamıştır. Hangi durumlarda bu vektör alanlarının Fermi-Walker anlamında paralel olduğu ile ilgili çalışmalara incelemelerinde yer vermiştir. Ayrıca Bishop çatısına göre tanımlanmış olan eğrilerde Fermi-Walker türevini literatüre kazandırmıştır. Kaya (2022), “Minkowski Uzayında Manyetik Eğrilerin Fermi-Walker Türevi” adlı yüksek lisans

çalışmasında Minkowski uzayında Bishop çatısını tanımlamıştır. Ardından da Spacelike ve Timelike manyetik eğrilerin Lorentz kuvvetlerinin Fermi-Walker türevini hesaplayarak önemli bulgular elde etmiştir. Altuntaş (2023), “Öklid Uzayında Bazı Eğrilerin Fermi-Walker Türevi” adlı yüksek lisans çalışmasında 3 –boyutlu Öklid uzayında Serret-Frenet çatısına göre $\mathcal{T}$ –manyetik, $\mathcal{N}$ –manyetik ve $\mathcal{B}$ –manyetik eğrilerinin Fermi-Walker türevlerini hesaplamıştır. Bunun yanı sıra bu eğrilerin normal Fermi-Walker türevleri ve modifiye Fermi-Walker türevlerini hesaplayarak Serret-Frenet çatısı altındaki bazı vektör alanlarının enerji denklemlerini literatüre kazandırmıştır.

Araştırmacıların diferensiyel geometri alanında ağırlık verdiği çalışmalardan bir diğeri de eğriler teorisidir. Eğriler teorisinde, özel eğrilerin incelenmesi büyük bir önem arz eder. Bu özel eğrilerden paralel eğri, noktaları belirli olan bir eğriden normal boyunca sabit uzaklıkta olan bir eğri olarak ifade edilir.

Aldossary and Gazwani (2020), yapmış oldukları çalışmalarında paralel eğriler üzerinde durmuşlar ve paralel eğrilerde tanımlı Serret-Frenet çatısını çalışmalarına eklemiştir. Kurt (2022), “Bir Eğrinin Paralel Eğrisinin Oluşturduğu Regle Yüzeyler” adlı yüksek lisans çalışmasında bir eğrinin binormal vektörüyle oluşan paralel eğrileri incelemiştir. Daha sonra paralel eğrinin Serret-Frenet vektör alanlarının regle yüzeylerini araştırmalarına eklemiştir. Epik (2023), “3 –Boyutlu Kompakt Lie Gruplarında Paralel Eğriler Üzerine” adlı yüksek lisans çalışmasında 3 –boyutlu Lie grubunda bazı özel eğrileri incelemiştir. Ardından da literatürde ilk kez Lie grubunda yer alan bir eğrinin $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{B}$ vektörlerinin lineer birleşimi olan vektör yönünde, $\mathcal{N}$ yönünde ve $\mathcal{B}$ yönündeki paralel eğrisinden bahsetmiştir.

Bu tez çalışmasında 3 –boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin paralel eğrisi tanımlanıp paralel eğrinin Serret-Frenet vektör alanları boyunca Fermi-Walker türevi hesaplanmıştır. Daha sonra aynı vektör alanlarının Fermi-Walker anlamında paralel olma durumları incelenmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanım, teorem ve özellikler aşağıda belirtilmiştir.

2.1 Afin Uzayı

Tanım 2.1.1. (Afin Uzay): $\mathcal{A}$ boştan farklı bir küme, $\mathcal{V}$ ise $\mathcal{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olarak ele alınsın. $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ kümesinden $\mathcal{V}$ uzayına,

$$f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{V} \quad (\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \rightarrow f(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$$

biçiminde bir fonksiyon var ve aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise $\mathcal{A}$ kümesine $\mathcal{V}$ vektör uzayı ile birleştirilmiş bir **Afin Uzay** denir.

$$(i) \forall \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R} \in \mathcal{A} \text{ için, } f(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) + f(\mathcal{Q}, \mathcal{R}) = f(\mathcal{P}, \mathcal{R}),$$

(ii) $\forall \mathcal{P} \in \mathcal{A}$ ve $\vec{\zeta} \in \mathcal{V}$ için $f(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \vec{\zeta}$ olacak biçimde bir tek $\mathcal{Q} \in \mathcal{A}$ noktası mevcuttur (Ekici 2021).

Tanım 2.1.2. (Afin Koordinat Sistemi): $\mathcal{V}$, $\mathcal{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı, $\mathcal{A}$ kümesi de $\mathcal{V}$ vektör uzayı ile birleştirilmiş bir afin uzay olarak ele alınsın. $\wp = \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n\}$ kümesi, $\mathcal{A}$ afin uzayının bir afin çatısı olmak üzere herhangi bir $\mathcal{Q} \in \mathcal{A}$ noktası için;

$$\overrightarrow{\mathcal{P}_0 \mathcal{Q}} = \sum_{k=1}^n q_k \overrightarrow{\mathcal{P}_0 \mathcal{P}_k}$$

olmak üzere $q_k \in \mathcal{K}$ vardır. Burada $(q_1, \dots, q_n)$ ye $\wp$ çatısına göre **afin koordinatları** denir.

$$x_i: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{K}, \quad Q \rightarrow x_i(Q) = q_i$$

Şeklinde tanımlı x_i fonksiyonlarına da, $\mathcal{A}$ nın $\wp$ çatısına göre, **koordinat fonksiyonları** denir. x_i koordinat fonksiyonlarının oluşturduğu $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sistemine **Afin koordinat sistemi** denir (Özdemir 2020).

Tanım 2.1.3. (İç Çarpım Uzayı): $\mathcal{V}$ vektör uzayı $\mathcal{A}$ kümesi ile birleşen bir afin uzay olsun.

$$\begin{aligned} \langle, \rangle: \mathcal{V} \times \mathcal{V} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow \langle, \rangle(x, y) = \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

ile ifade edilen fonksiyon $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için;

(i) Simetrik:

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

(ii) Pozitif tanımlılık:

$$\langle x, x \rangle \geq 0 ; \langle x, x \rangle = 0 \leftrightarrow x = 0$$

(iii) Bilineerlik:

$$\langle ax + y, z \rangle = a\langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$\langle x, y + bz \rangle = \langle x, y \rangle + b\langle x, z \rangle$$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona **iç çarpım** veya **skaler çarpım** denir. Böylelikle $\mathcal{V}$ ye de **iç çarpım uzayı** denir (Ekici 2021).

Tanım 2.1.4. (Dış Çarpım): 3 –boyutlu uzayda tanımlı $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere herhangi iki vektör ele alalım. x ile y nin **vektörel çarpımı** veya **dış çarpımı** ;

$$x \times y = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

ile ifade edilir. Benzer şekilde herhangi iki vektörün dış çarpımı determinant kullanarak bulunabilir. Bu durum;

$$x \times y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

eşitliği ile mümkündür (Ekici 2021).

Tanım 2.1.5. (Karma Çarpım): 3 –boyutlu uzayda tanımlı herhangi x, y, z vektörleriyle ifade edilen;

$$(x, y, z) = \langle x, y \times z \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

değere bu üç vektörün **karma çarpımı** denir (Ekici 2021).

Tanım 2.1.6. (Diferensiyellenebilir Manifold): $\mathcal{M}$, topolojik n –manifold olsun. $\mathcal{M}$ üzerinde $\mathcal{C}^k$ sınıfından bir diferensiyellenebilir bir yapı tanımlanabilir ise $\mathcal{M}$ ye $\mathcal{C}^k$ sınıfından bir diferensiyellenebilir manifold denir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.1.7. (Riemann manifoldu): $\mathcal{M}$ bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere $\mathcal{M}$ üzerindeki $\mathcal{C}^\infty$ vektör alanlarının uzayı $\chi(\mathcal{M})$ olsun.

$$g: \chi(\mathcal{M}) \times \chi(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$$

olmak üzere şeklinde tanımlı olan simetrik, pozitif ve 2 –lineer g Riemann metriği ile birlikte $\mathcal{M}$ ye **Riemann manifoldu** denir. $(\mathcal{M}, g)$ ile gösterilir (Kobayashi *et al.* 1996).

Tanım 2.1.8. (Afin Koneksiyon): $\mathcal{M}$, n –boyutlu diferensiyellenebilir manifold olmak üzere $\mathcal{M}$ üzerindeki $\mathcal{C}^\infty$ vektör alanlarının uzayı $\chi(\mathcal{M})$ olsun.

$$\begin{aligned} \nabla: \chi(\mathcal{M}) \times \chi(\mathcal{M}) &\xrightarrow{2\text{-lineer}} \chi(\mathcal{M}) \\ (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) &\rightarrow \nabla(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = \nabla_{\mathfrak{X}}\mathfrak{Y} \end{aligned}$$

ifadesi $\forall \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z} \in \chi(\mathcal{M})$ ve $\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ olmak üzere;

$$(i) \nabla_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{Y} + \mathfrak{Z}) = \nabla_{\mathfrak{X}}\mathfrak{Y} + \nabla_{\mathfrak{X}}\mathfrak{Z}$$

$$(ii) \nabla_{f\mathfrak{X}+g\mathfrak{Y}}\mathfrak{Z} = f(\nabla_{\mathfrak{X}}\mathfrak{Z}) + g(\nabla_{\mathfrak{Y}}\mathfrak{Z})$$

$$(iii) \nabla_{\mathfrak{X}}(f\mathfrak{Y}) = f\nabla_{\mathfrak{X}}\mathfrak{Y} + \mathfrak{X}(f)\mathfrak{Y}$$

özellikleri sağlanıyor ise ∇ ya $\mathcal{M}$ de bir **Afin Koneksiyon** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.9. (Levi-Civita Koneksiyonu): $(\mathcal{M}, g)$ n –boyutlu Riemann manifoldu, ∇ da $\mathcal{M}$ de bir afin koneksiyon olsun. $\forall \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z} \in \chi(\mathcal{M})$ olmak üzere;

$$(i) \nabla_{\mathfrak{X}}\mathfrak{Y} - \nabla_{\mathfrak{Y}}\mathfrak{X} = [\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}]$$

$$(ii) \mathfrak{X}g(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) = g(\nabla_{\mathfrak{X}}\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) + g(\mathfrak{Y}, \nabla_{\mathfrak{X}}\mathfrak{Z})$$

özellikleri sağlanıyor ise ∇ ya $\mathcal{M}$ de sıfır torsiyonlu Riemann Koneksiyonu veya $\mathcal{M}$ nin **Levi-Civita Koneksiyonu** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

2.2. n –Boyutlu Öklid Uzayı

Tanım 2.2.1. (Öklid Uzayı): $\mathcal{A}$ bir reel afin uzay, $\mathcal{V}$ ise bu afin uzayla birleşen bir vektör uzayı olsun. $\mathcal{V}$ de, $\mathfrak{p} = (p_1, \dots, p_n)$ ve $\mathfrak{q} = (q_1, \dots, q_n)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \langle, \rangle: \mathcal{V} \times \mathcal{V} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) &\rightarrow \langle \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \rangle = \sum_{i=1}^n p_i q_i \end{aligned}$$

Öklid iç çarpımı ile tanımlanırsa $\mathcal{A}$ da açı ve uzaklık gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece burada bulunan $\mathcal{A}$ ya **Öklid Uzayı** denir ve $\mathbb{E}^n$ ile ifade edilir (Sabuncuoğlu 2010).

Tanım 2.2.2. (Metrik): $\mathcal{X}$ kümesi boştan farklı olmak üzere;

$$\begin{aligned} d: \mathcal{X} \times \mathcal{X} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow d(x, y) \end{aligned}$$

ile verilen fonksiyonda $\forall x, y, z \in \mathcal{X}$ için;

- (i) $d(x, y) \geq 0$
- (ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$
- (iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

şeklinde ifade edilen özellikler sağlanıyorsa d fonksiyonu $\mathcal{X}$ kümesi üzerinde bir **metrik** olarak ifade edilir. Burada oluşan $(\mathcal{X}, d)$ ye de **metrik uzay** denir (Ekici 2021).

Tanım 2.2.3. (Öklid Metriği): n –boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ olacak şekilde;

$$\begin{aligned} d: \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı olan d fonksiyonuna n –boyutlu Öklid uzayında **Öklid metriği** denir (Ekici 2021).

Tanım 2.2.4. (Öklid Çatısı): n –boyutlu Öklid uzayında sıralı olan $\{\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n\}$ nokta $n + 1$ –lisine $\mathbb{R}^n$ de karşılığı olan $\{\overrightarrow{\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_1}, \overrightarrow{\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_2}, \dots, \overrightarrow{\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_n}\}$ vektör $(n + 1)$ –lisi $\mathbb{R}^n$ için ortonormal baz ise $\{\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n\}$ ile ifade edilen sistem $\mathbb{E}^n$ in bir **Öklid çatısı** veya **dik çatısı** olarak tanımlanır (Ekici 2021).

Tanım 2.2.5. (Standart Öklid Çatısı): n –boyutlu Öklid uzayında $\{\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_n\}$ sistemine Standart Öklid çatısı denir (Ekici 2021).

Tanım 2.2.6. (Öklid Koordinat Fonksiyonları): n –boyutlu Öklid uzayında $\mathfrak{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ için $(1 \leq i \leq n)$ olmak üzere;

$$x_i: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}, \quad x_i(\mathfrak{P}) = p_i$$

şeklinde tanımlı olan x_i fonksiyonlarına **Öklid koordinat fonksiyonları** denir (Özdemir 2020).

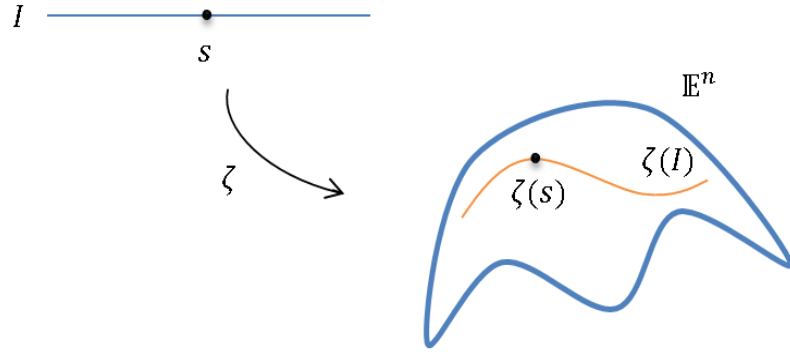
Tanım 2.2.7. (Norm): n –boyutlu Öklid uzayında $\mathfrak{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ vektör değerli fonksiyonun normu;

$$\|\mathfrak{f}(t)\| = \sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t) + \dots + f_n^2(t)}$$

eşitliği ile tanımlanır (Özdemir 2020).

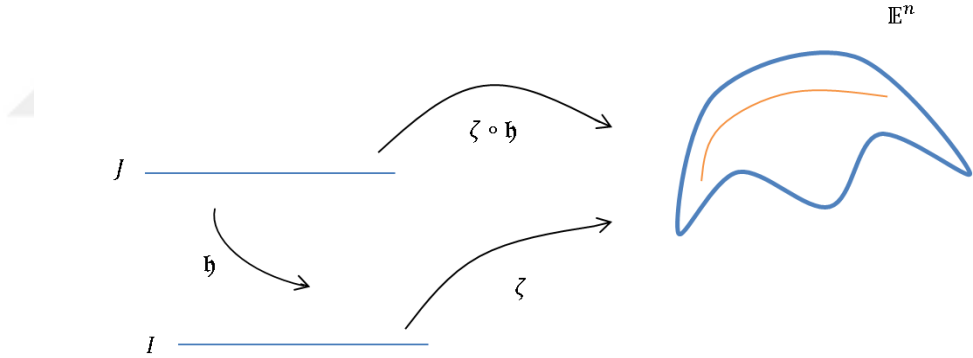
2.3. Öklid Uzayında Eğriler ve Frenet Formülleri

Tanım 2.3.1. (Eğri): $\zeta: I \rightarrow \mathfrak{Z} \subset \mathbb{E}^n$ ile verilen fonksiyon eğer sürekli ise $\zeta(I)$ ya yani I aralığının ζ altındaki görüntüsüne **eğri** adı verilir (Sabuncuoğlu 2010).



Şekil 2.1 Eğri

Tanım 2.3.2. (Parametre Dönüşümü): $\zeta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi verilsin. J açık bir aralık olmak üzere $\mathfrak{h}: J \rightarrow I$ ya , ζ eğrisi için bir **parametre dönüşümü** denir (Sabuncuoğlu 2010).



Şekil 2.2. Parametre Dönüşümü

Tanım 2.3.3. (Skaler Hız Fonksiyonu ve Skaler Hız): $\zeta: I \rightarrow \mathfrak{Z} \subset \mathbb{E}^n$ olacak şekilde bir eğri kabul edilsin.

$$\|\zeta'\|: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow \|\zeta'\|(s) = \|\zeta'(s)\|$$

ifadesinde tanımlı olan fonksiyon eğrinin **skaler hız fonksiyonudur**. $\mathfrak{Z}$ eğrisinin $\zeta(s)$ noktasındaki **skaler hızı** $\|\zeta'(s)\|$ reel sayısı ile ifade edilir (Sabuncuoğlu 2010).

Tanım 2.3.4. (Birim Hızlı Eğri): $\zeta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi verilsin. Burada $\forall s \in I$ da $\zeta'(s)$ hız vektörünü birim vektör olarak kabul edilirse yani $\|\zeta'(s)\| = 1$ olursa bu durumda ζ ya **birim hızlı eğri** adı verilir. Burada ζ nın $s \in I$ parametresine de **yay parametresi** denir (Özdemir 2020).

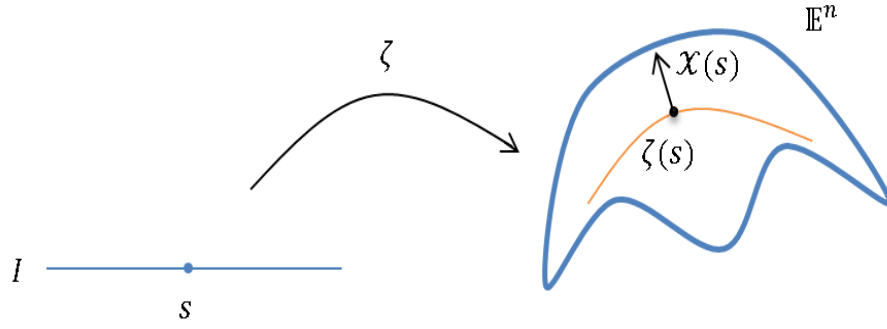
Tanım 2.3.5. (Regüler Eğri): $\mathbb{R}$ uzayında bir I açık aralığı kabul edilsin. $\zeta: I \rightarrow \mathbb{E}^n$ de $\forall t \in I$ olmak üzere $\zeta'(t) \neq 0$ sağlanıyorsa ζ ya regüler eğridir denir (Özdemir 2020).

Tanım 2.3.6. (Yay Uzunluğu): $\zeta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ olacak şekilde bir eğri kabul edilsin. Burada $a, b \in I$ olmak üzere ζ nın $\zeta(a)$ ile $\zeta(b)$ arasındaki uzunluğu

$$\int_a^b \|\zeta'(t)\| dt, t \in I$$

şeklinde ifade edilen reel sayıdır (O'Neill 1966).

Tanım 2.3.7. (Vektör Alanı): $\zeta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ olacak şekilde bir eğri kabul edilsin. I aralığının her bir s noktasına, $\mathfrak{S}_{\zeta(s)}\mathbb{E}^n$ uzayının bir $\mathcal{X}(s)$ e karşılık gelen $\mathcal{X}$ fonksiyonu, ζ eğrisi üstünde bir **vektör alanıdır** denir (Sabuncuoğlu 2010).



Şekil 2.3. Vektör Alanı

Tanım 2.3.8. (Birim Teğet Vektör): $\zeta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ olacak şekilde ζ , birim hızlı kabul edilsin.

$$\mathfrak{S}(s) = \zeta'(s)$$

şeklinde verilen $\mathfrak{S}(s)$ e, ζ eğrisinin $\zeta(s)$ noktasındaki **birim teğet vektörü** denir (Sabuncuoğlu 2010).

Teorem 2.3.1. $\zeta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ olacak şekilde ζ , birim hızlı kabul edilsin. Burada $s \in I$, $\zeta(s)$ te $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ Serret-Frenet vektör alanları;

$$\mathcal{T}(s) = \zeta'(s)$$

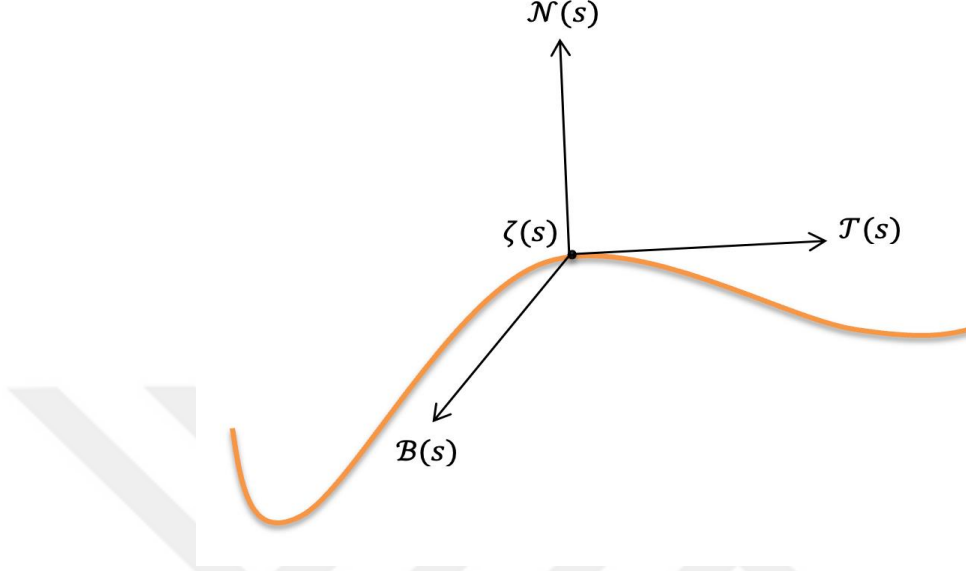
vektörü birim teğet

$$\mathcal{N}(s) = \frac{\zeta''(s)}{\|\zeta''(s)\|} \quad (2.1)$$

vektörü asal normal

$$\mathcal{B}(s) = \mathcal{T}(s) \times \mathcal{N}(s)$$

vektörü ise binormal olarak ifade edilir (Ekici 2021).



Şekil 2.4. Serret-Frenet Vektör Alanları

Tanım 2.3.9. (Eğrilik ve Burulma): $\zeta: I \rightarrow \mathcal{M} \subset \mathbb{E}^n$ ile verilsin. Burada $s \in I$ olmak üzere $\zeta(s)$ için Serret-Frenet r –ayaklısı $\{\mathfrak{T}_1(s), \dots, \mathfrak{T}_r(s)\}$ olarak ifade edilsin. Buna göre,

$$\begin{aligned} \kappa_i : I &\rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i < r \\ s &\rightarrow \kappa_i(s) = \langle \mathfrak{T}'_i(s), \mathfrak{T}_{i+1}(s) \rangle \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan κ_i ye $\mathcal{M}$ nin i –yinci eğrilik fonksiyonu ve burada $s \in I$ olmak üzere κ_i ye de $\zeta(s)$ te $\mathcal{M}$ eğrisinin i –**yinci eğriliği** denir. $\mathbb{E}^3$ te 1 –inci eğrilik olarak ifade edilen $\kappa_1(s) = \kappa = \langle \mathfrak{T}'_1(s), \mathfrak{T}_2(s) \rangle$ değerine sadece **eğrilik**, 2 –inci eğrilik olarak ifade edilen $\kappa_2(s) = \tau = \langle \mathfrak{T}'_2(s), \mathfrak{T}_3(s) \rangle$ değerine ise **burulma (torsiyon)** denir (Ekici 2021).

Teorem 2.3.2. $\zeta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ olacak şekilde ζ yı regüler bir eğri olarak ele alınsın. Burada ζ eğrisinin Serret-Frenet vektör alanları $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ olarak kabul edilsin.

$$\kappa = \frac{\|\zeta' \times \zeta''\|}{\|\zeta'\|^3}$$

değeri eğrinin eğriliği

$$\tau = \frac{(\zeta', \zeta'', \zeta''')}{\|\zeta' \times \zeta''\|^2}$$

değeri ise eğrinin torsiyonu ya da burulması olarak ifade edilir (Sabuncuoğlu 2010).

Tanım 2.3.10. (Serret-Frenet formülleri): $\zeta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ olacak şekilde ζ , s yay parametrelili ve birim hızlı bir eğri olarak kabul edilsin. ζ eğrisinin Serret-Frenet üçlüsü $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ olsun.

$$\begin{aligned}\mathcal{T}'(s) &= \kappa(s)\mathcal{N}(s) \\ \mathcal{N}'(s) &= -\kappa(s)\mathcal{T}(s) + \tau(s)\mathcal{B}(s) \\ \mathcal{B}'(s) &= -\tau(s)\mathcal{N}(s)\end{aligned}\tag{2.2}$$

şeklinde ifade edilen denklemlere **Serret-Frenet formülleri** denir (O'Neill 1966).

Tanım 2.3.11. $\zeta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ olacak şekilde ζ , birim hızlı bir eğri olarak kabul edilsin. ζ eğrisinin Serret-Frenet üçlüsü $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ olsun. Burada;

$$\begin{bmatrix} \mathcal{T}' \\ \mathcal{N}' \\ \mathcal{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{T} \\ \mathcal{N} \\ \mathcal{B} \end{bmatrix}\tag{2.3}$$

olarak ifade edilir (Aldossary and Gazwani 2020).

Tanım 2.3.12. $\zeta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ olacak şekilde ζ , s yay parametrelili ve birim hızlı bir eğri olarak kabul edilsin. ζ eğrisinin Serret-Frenet üçlüsü $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ olsun.

$$Sp\{\mathcal{T}(s), \mathcal{N}(s)\}$$

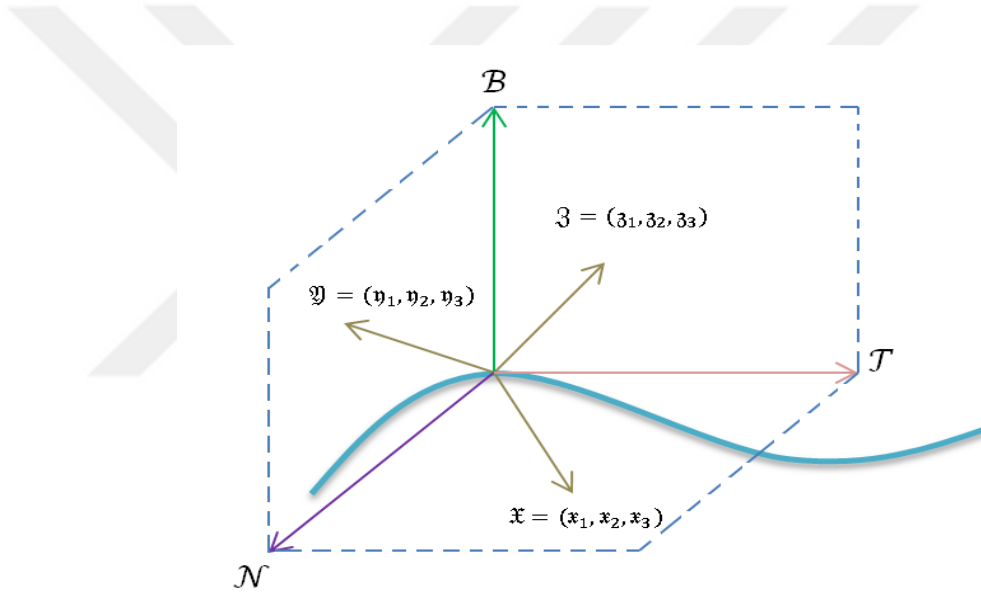
düzlemine $\zeta(s)$ noktasındaki **oskületör düzlem** veya dokunum düzlemi;

$$Sp\{\mathcal{T}(s), \mathcal{B}(s)\}$$

düzlemine $\zeta(s)$ noktasındaki **rektifiyan düzlem** veya doğrultma düzlemi;

$$Sp\{\mathcal{N}(s), \mathcal{B}(s)\}$$

düzlemine ise $\zeta(s)$ noktasındaki **normal düzlemi** veya dik düzlem denir (Sabuncuoğlu 2010).

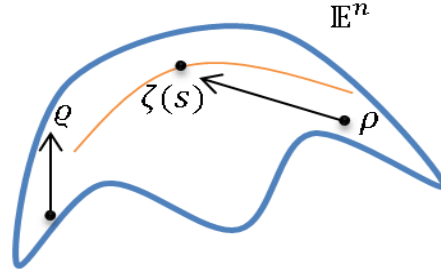


Şekil 2.5. Oskületör, Rektifiyan ve Normal Düzlem

Teorem 2.3.3. $\zeta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ olacak şekilde ζ , birim hızlı bir eğri olarak kabul edilsin. ζ eğrisinin eğriliği yani κ değeri sıfır ise $\zeta(I)$ kümesi $\mathbb{E}^3$ te bir doğrunun alt kümesidir. Karşıt olarak $\zeta(I)$ kümesi $\mathbb{E}^3$ te bir doğrunun alt kümesi ise ζ eğrisinin eğriliği yani κ değeri sıfırdır (Sabuncuoğlu 2010).

Teorem 2.3.4. $\zeta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ olacak şekilde ζ eğrisi düzlemsel ise ζ eğrisinin torsiyonu yani τ değeri sıfırdır ve eğrinin her bir noktasındaki oskületör düzlemi,

eğrinin içinde bulunduğu düzlemdir. Karşıt olarak $\tau = 0$ ise $\zeta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi düzlemseldir (Sabuncuoğlu 2010).



Şekil 2.6. Düzlemsel Eğri

Tanım 2.3.13. (Darboux vektörü): $\zeta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ olacak şekilde ζ , birim hızlı bir eğri olarak ele alınsın. Eğrinin $\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}$ üçlüsünün her s anında bir eksen çevresinde bir ani helis hareketi yaptığı kabul edildiğinde bu eksene $\zeta(s)$ noktasında Darboux eksenini denir. Eksenin yön ve doğrultusunu veren vektörü ω ile ifade edilsin.

$$\omega = \tau \mathcal{T} + \kappa \mathcal{B}$$

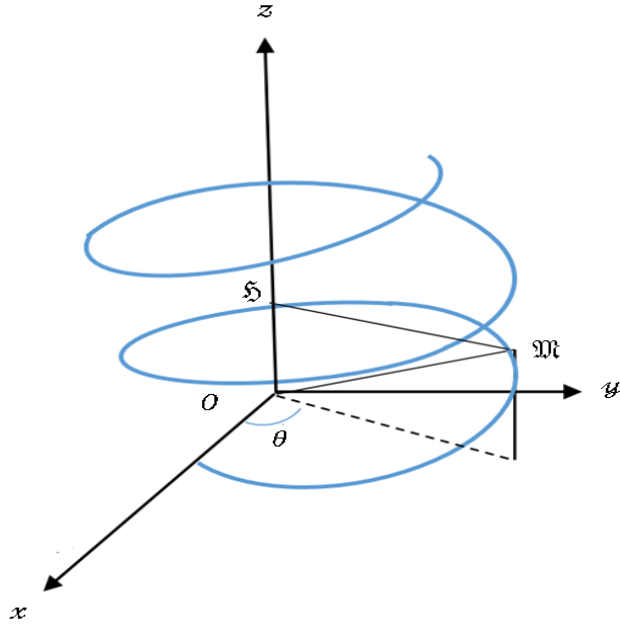
eşitliği ζ eğrisinin $\zeta(s)$ noktasındaki Darboux vektörü olarak tanımlanır (Hacısalıhoğlu 2000).

3. MATERYAL YÖNTEM

3.1. Öklid Uzayında Bazı Özel Eğriler

Bu bölümde, tez çalışma alanına referans olan Öklid uzayında bazı özel eğriler ile ilgili temel tanım ve teoremler ele alınacaktır.

Tanım 3.1.1. (Helis Eğrisi): Sabit bir uzunlukta olan $\mathfrak{S}\mathfrak{M}$ doğru parçası herhangi bir doğruya dik olsun ve bu doğru parçasının bir ucu dik doğru boyunca hareket etsin. Bu durumda $O\mathfrak{S} = c\theta$ ($c \in \mathbb{R}$) olacak şekilde $O\mathfrak{S}$ uzaklığı, doğru parçasının OX eksenine ile sabit bir θ açısı ile orantılı ise $\mathfrak{M}$ ucunun çizdiği eğriye helis eğrisi denir (Salimov ve Mağden 2008).



Şekil 3.1. Helis Eğrisi

Tanım 3.1.2. (Genel Helis): $\zeta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ olacak şekilde ζ , s yay parametrelili ve birim hızlı bir eğri olarak kabul edilsin. $\forall s \in I$ olmak üzere $\zeta'(s)$, belirli olan bir $\vec{v}$ vektörü ile sabit bir θ açısı yapıyor ise ζ eğrisine **genel helis** denir. Buradan;

$$\langle \mathcal{T}(s), \vec{v} \rangle = \cos \theta, \|\zeta'(s)\| = \|\mathcal{T}(s)\| = \|\vec{v}\| = 1$$

olarak ifade edilir (Lancret 1806).

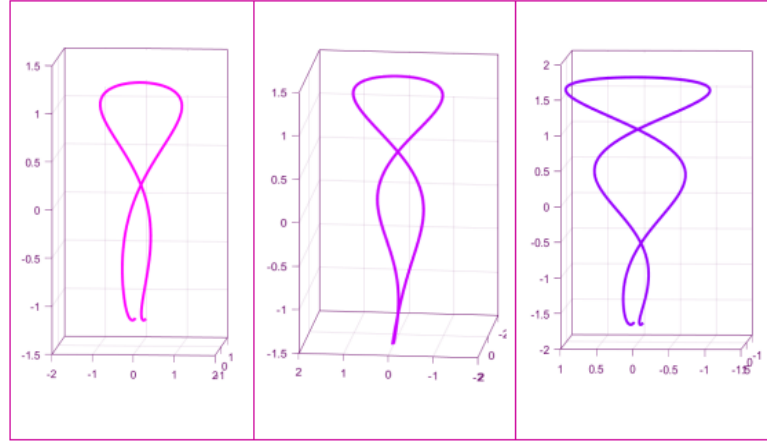
Teorem 3.1.1. $\zeta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ şeklinde ζ regüler eğrisi ele alınsın. ζ eğrisinin eğriliği yani κ değeri sıfırdan farklı olacak şekilde eğrinin genel helis eğrisi olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\tau}{\kappa}$ oranının sabit olması ile mümkündür. Eğer τ ve κ değerlerinin her ikisi de sabit ise **dairesel helis** (silindirik helis) olarak adlandırılır (Lancret 1806).

Tanım 3.1.3. (Salkowski Eğrisi): $\zeta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ olmak üzere ζ , s yay parametrelili kabul edilsin. $\zeta(s)$ in burulması yani τ değeri sıfırdan farklı ve $\zeta(s)$ in eğriliği yani κ değeri sabit ise $\zeta(s)$ eğrisine **Salkowski eğrisi** denir (Salkowski 1909).

Tanım 3.1.4. $\forall m \in \mathbb{R}, m \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, 0$ ve $n = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ olarak verilsin. 3 –boyutlu Öklid uzayında $s \in \left[-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right]$ olmak üzere Salkowski eğrisinin parametrik denklemi;

$$\begin{aligned} \zeta_m(s) = & \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left(-\frac{1-n}{4(1+2n)} \sin((1+2n)s) - \frac{1+n}{4(1-2n)} \sin((1-2n)s) \right. \\ & - \frac{1}{2} \sin(s), \frac{1-n}{4(1+2n)} \cos((1+2n)s) + \frac{1+n}{4(1-2n)} \cos((1-2n)s) \\ & \left. + \frac{1}{2} \cos(s), \frac{1}{4m} \cos(2ns) \right) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir (Monterde 2008).



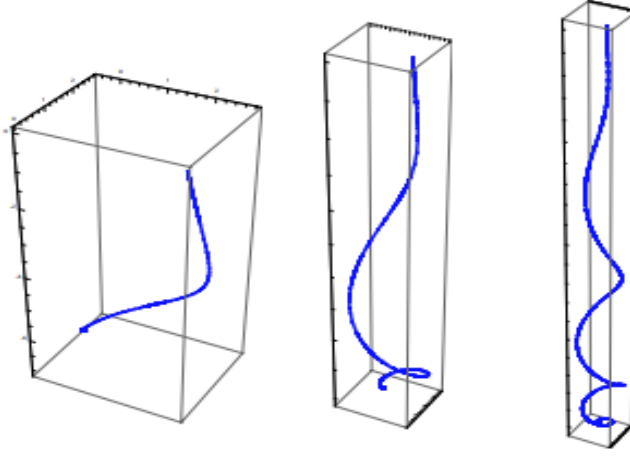
Şekil 3.2. $m = \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$ İçin Salkowski Eğrileri (Salkowski 1909).

Tanım 3.1.5. (Anti-Salkowski Eğrisi): $\zeta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ olmak üzere ζ, s yay parametrelili kabul edilsin. $\zeta(s)$ in eğriliği yani κ değeri sıfırdan farklı ve $\zeta(s)$ in burulması yani τ değeri sabit ise $\zeta(s)$ eğrisine **Anti-Salkowski eğrisi** denir (Salkowski 1909).

Tanım 3.1.6. $\forall m \in \mathbb{R}, m \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, 0$ ve $n = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ olarak verilsin. 3 –boyutlu Öklid uzayında $s \in \left[0, \frac{\pi}{2n}\right]$ olmak üzere Anti-Salkowski eğrisinin parametrik denklemi;

$$\begin{aligned} \zeta_m(s) = & \frac{1}{2(4n^2 - 1)m} (n(1 - 4n^2 + 3 \cos(2ns)) \cos(s) \\ & + (2n^2 + 1) \sin(s) \sin(2ns), \frac{1}{2(4n^2 - 1)m} (n(1 - 4n^2 \\ & + 3 \cos(2ns)) \sin(s) \\ & - (2n^2 + 1) \cos(s) \sin(2ns), \frac{n^2 - 1}{4n^2} (2ns + \sin(2ns))) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir (Monterde 2008).



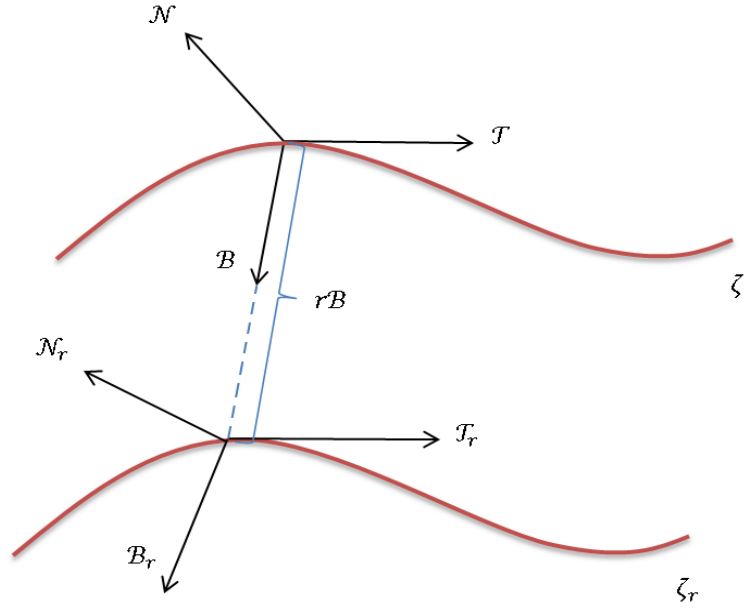
Şekil 3.3. $m = \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ İçin Anti-Salkowski Eğrileri (Monterde 2008).

3.2. Öklid Uzayında Paralel Eğriler

Tanım 3.2.1. (Paralel Eğri): $\zeta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ olacak şekilde ζ , s yay parametrelili ve birim hızlı olarak kabul edilsin. Bu eğrinin paralel eğrisi;

$$\zeta_r = \zeta(s) + r\mathcal{B}(s), r \neq 0 \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $s = s(s_r)$; $\zeta(s)$ in yay uzunluğu ve s_r , ζ_r paralel eğrisinin yay uzunluğudur. $\mathcal{B}$ ise $\zeta(s)$ in binormal vektör alanını ifade eder (Aldossary and Gazwani 2020).



Şekil 3.4. Paralel Eğri

Lemma 3.2.1. $\zeta_r(s_r)$ birim hızlı eğrisi $\zeta(s)$ eğrisinin paralel eğrisi olsun. $\zeta(s)$ eğrisinin Serret-Frenet üçlüsü $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ ve $\zeta_r(s_r)$ eğrisinin Serret-Frenet üçlüsü $\{\mathcal{T}_r, \mathcal{N}_r, \mathcal{B}_r\}$ olarak verilsin.

$$\mathcal{T}_r = h\mathcal{T} - rh\tau\mathcal{N}$$

$$\mathcal{N}_r = \frac{1}{m} [\mathcal{T}(hh' + rh^2\kappa\tau) + \mathcal{N}(h^2\kappa - h(rh\tau)') - \mathcal{B}(rh^2\tau^2)] \quad (3.2)$$

$$\mathcal{B}_r = \frac{1}{m} [\mathcal{T}(r^2h^3\tau^3) + \mathcal{N}(rh^3\tau^2) + \mathcal{B}(h^3\kappa - (rh\tau)'h^2 + rh^2h'\tau + r^2h^3\kappa\tau^2)]$$

Burada;

$$\frac{ds}{ds_r} = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2\tau^2}} = h, \quad m = \sqrt{(hh' + rh^2\kappa\tau)^2 + (h^2\kappa - h(rh\tau)')^2 + (rh^2\tau^2)^2} \quad (3.3)$$

olarak ifade edilir (Aldossary and Gazwani 2020).

İspat : (3.2) eşitliğinde ifade edilen $\mathcal{T}_r$ nin yay uzunluğuna göre türevi alınsın.

$$\mathcal{T}_r = \frac{d\zeta_r}{ds_r} = \left(\frac{d\zeta}{ds} + r \frac{dB}{ds} \right) \frac{ds}{ds_r} \quad (3.4)$$

(2.3) eşitliği (3.4) te kullanılırsa;

$$\mathcal{T}_r = (\mathcal{T} - r\tau\mathcal{N}) \frac{ds}{ds_r}$$

eşitliği bulunur. Burada eşitliğin her iki tarafının da normu alındığında;

$$\|\mathcal{T}_r\| = \|\mathcal{T} - r\tau\mathcal{N}\| \frac{ds}{ds_r}$$

elde edilir.

$$\frac{ds}{ds_r} = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2\tau^2}} = h$$

olmak üzere (3.3) eşitliği;

$$\mathcal{T}_r = h\mathcal{T} - rh\tau\mathcal{N} \quad (3.5)$$

şeklinde yazılır.

$$\mathcal{N}_r = \frac{d\mathcal{T}_r/ds_r}{\|d\mathcal{T}_r/ds_r\|}$$

olacak şekilde;

$$\frac{d\mathcal{T}_r}{ds_r} = \frac{d\mathcal{T}_r}{ds} \frac{ds}{ds_r} = \mathcal{T}(hh' + rh^2\kappa\tau) + \mathcal{N}(h^2\kappa - h(rh\tau)') - \mathcal{B}(rh^2\tau^2) \quad (3.6)$$

elde edilir ve daha sonra (3.6) eşitliğinin normu alınır;

$$\left\| \frac{d\mathcal{T}_r}{ds_r} \right\| = \sqrt{(hh' + rh^2\kappa\tau)^2 + (h^2\kappa - h(rh\tau)')^2 + (rh^2\tau^2)^2}$$

şeklinde ifade edilir.

$$\mathcal{N}_r = \frac{1}{m} [\mathcal{T}(hh' + rh^2\kappa\tau) + \mathcal{N}(h^2\kappa - h(rh\tau)') - \mathcal{B}(rh^2\tau^2)] \quad (3.7)$$

olmak üzere (3.7) eşitliğinde

$$m = \sqrt{(hh' + rh^2\kappa\tau)^2 + (h^2\kappa - h(rh\tau)')^2 + (rh^2\tau^2)^2}$$

elde edilir.

$$\mathcal{B}_r = \mathcal{T}_r \times \mathcal{N}_r$$

olacak şekilde;

$$\mathcal{B}_r = \frac{1}{m} [\mathcal{T}(r^2 h^3 \tau^3) + \mathcal{N}(r h^3 \tau^2) + \mathcal{B}(h^3 \kappa - (r h \tau)' h^2 + r h^2 h' \tau + r^2 h^3 \kappa \tau^2)] \quad (3.8)$$

ifadesi bulunur.

3.3. Fermi-Walker Türevi

Bu bölümde, Öklid anlamında paralel olma kavramı açıklanmış ve çalışmanın esas konusu olan Fermi-Walker türevi ile ilgili tanımlara yer verilmiştir.

Tanım 3.3.1. (Öklid Anlamında Paralel Olma): $\zeta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ olmak üzere, ζ parametre eğrisi boyunca $\mathcal{X}$ herhangi bir vektör alanı olarak verilsin.

$$\dot{\mathcal{X}} = \frac{d\mathcal{X}}{dt} = 0$$

eşitliğinde $\frac{d\mathcal{X}}{dt}$ Öklid türevi olmak üzere $\mathcal{X}$ vektör alanına ζ eğrisi boyunca **Öklid anlamında paraleldir** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 3.3.2. (Fermi-Walker Türevi): $\zeta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ olmak üzere, s yay parametrelili ζ eğrisi verilsin. ζ eğrisi boyunca $\mathcal{X}$ herhangi bir vektör alanı olacak şekilde

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}} \mathcal{X} = \nabla_{\mathcal{T}} \mathcal{X} - \langle \mathcal{T}, \mathcal{X} \rangle \mathcal{A} + \langle \mathcal{A}, \mathcal{X} \rangle \mathcal{T} \quad (3.9)$$

ile tanımlı olan $\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}}\mathcal{X}$ ifadesine $\zeta(s)$ eğrisi boyunca $\mathcal{X}$ vektör alanının **Fermi-Walker türevi** denir. (3.9) eşitliğinde $\mathcal{T} = \frac{d\zeta}{ds}$, $\mathcal{A} = \frac{d\mathcal{T}}{ds}$ olarak ifade edilir (Benn and Tucker 1989).

Tanım 3.3.3. (Fermi-Walker Anlamında Paralel Olma): $\zeta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ olmak üzere, s yay parametrelili ζ eğrisi verilsin. ζ eğrisi boyunca $\mathcal{X}$ herhangi bir vektör alanı olacak şekilde $\mathcal{X}$ in Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}}\mathcal{X} = 0 \quad (3.10)$$

ise $\mathcal{X}$ vektör alanına $\zeta(s)$ eğrisi boyunca **Fermi-Walker anlamında paraleldir** denir (Benn and Tucker 1989).

Tanım 3.3.4. (Dönmeyen Çatı): $\zeta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ olmak üzere, ζ s yay parametre eğrisi boyunca $\mathfrak{P}, \mathfrak{R}$ ve $\mathfrak{S}$ ortonormal vektörler olarak verilsin.

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}}\mathfrak{P} &= 0 \\ \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}}\mathfrak{R} &= 0 \\ \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}}\mathfrak{S} &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

ile ifade edilen $\{\mathfrak{P}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}\}$ çatısına non-rotating (dönmeyen) çatı denir (Balakrishnan 2005).

Tanım 3.3.5. (Fermi-Walker Anlamında Darboux Vektörü): $\zeta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ olmak üzere, ζ s yay parametre eğrisi boyunca

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}}\mathcal{T} = \omega^* \times \mathcal{T}$$

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}}\mathcal{N} = \omega^* \times \mathcal{N}$$

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}}\mathcal{B} = \omega^* \times \mathcal{B}$$

ile ifade edileceğinden

$$\omega^* = \tau \mathcal{T}$$

vektörüne $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ Serret-Frenet üçlüsüne göre **Fermi-Walker anlamında Darboux vektörü** denir (Karakuş ve Yaylı 2012).

4.ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde temel tanım ve teoremlerden yararlanılarak elde edilen ve tez çalışmasının ana konusunu teşkil eden paralel eğrilerde Fermi-Walker türevi ile ilgili bulgulara yer verilmiştir.

4.1. Paralel Eğrinin Teğet Vektör Alanının Fermi-Walker Türevi

Bu bölümde, 3 –boyutlu Öklid uzayında s yay parametrelili ve birim hızlı olarak tanımlı ζ eğrisi ele alınmıştır. ζ eğrisine paralel olan ζ_r eğrisinin $\mathcal{T}_r$ teğet vektör alanının Fermi-Walker türevi hesaplanıp önemli sonuçlar elde edilmiştir.

ζ eğrisi 3 –boyutlu Öklid uzayında s yay parametrelili ve birim hızlı bir eğri olarak tanımlansın. ζ eğrisine paralel olan ζ_r eğrisi ele alınsın. ζ eğrisinin teğet vektör alanı $\mathcal{T}$, ζ_r eğrisinin teğet vektör alanı ise $\mathcal{T}_r$ olarak verilsin. (3.2) ve (3.9) denklemleri kullanılarak $\zeta(s)$ birim hızlı eğrisine paralel olan $\zeta_r(s_r)$ eğrisinin teğet vektör alanının Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r = \nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r - \langle \mathcal{T}_r, \mathcal{T}_r \rangle \nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r + \langle \nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r, \mathcal{T}_r \rangle \mathcal{T}_r$$

şeklinde ifade edilir. Tanım 2.1.3. de bulunan ifade göz önüne alınarak $\langle \mathcal{T}_r, \mathcal{T}_r \rangle = 1$ eşitliği bulunur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r = \langle \nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r, \mathcal{T}_r \rangle \mathcal{T}_r \quad (4.1)$$

eşitliği elde edilir. (3.6) eşitliği kullanıldığında;

$$\nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r = \frac{d\mathcal{T}_r}{ds_r} = \frac{d\mathcal{T}_r}{ds} \frac{ds}{ds_r} = \mathcal{T}(hh' + rh^2\kappa\tau) + \mathcal{N}(h^2\kappa - h(rh\tau)') - \mathcal{B}(rh^2\tau^2) \quad (4.2)$$

bulunur. (3.5) ile (4.2) eşitlikleri kullanılırsa;

$$\langle \nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r, \mathcal{T}_r \rangle = h^2(h' + r^2 h' \tau^2 + r^2 h \tau \tau') \quad (4.3)$$

elde edilir. (4.3) eşitliği (4.1) eşitliğinde kullanılırsa ;

$$\langle \nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r, \mathcal{T}_r \rangle \mathcal{T}_r = h^2(h' + r^2 h' \tau^2 + r^2 h \tau \tau') \mathcal{T}_r \quad (4.4)$$

bulunur.(4.4) eşitliğinde;

$$\mathfrak{s} = (h' + r^2 h' \tau^2 + r^2 h \tau \tau') \quad (4.5)$$

olarak yazılsın. Gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r = h^2 \mathfrak{s} \mathcal{T}_r \quad (4.6)$$

ifadesi ile $\zeta_r(s_r)$ eğrisinin teğet vektör alanının Fermi-Walker türevi hesaplanmış olur.

Teorem 4.1.1. (ζ, ζ_r) birim hızlı paralel eğri çifti olsun. Bu eğrilere ait olan Serret-Frenet çatıları sırasıyla $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$, $\{\mathcal{T}_r, \mathcal{N}_r, \mathcal{B}_r\}$ olmak üzere $\mathcal{T}_r$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olması için gerek ve yeter şart $c \in \mathbb{R}$ için;

$$\tau = \pm \frac{\sqrt{cr^2 - h^2}}{hr} \quad (4.7)$$

olmasıdır.

İspat. $\mathcal{T}_r$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paralel olsun. O halde Tanım 3.3.3. gereği (4.4) eşitliğinin sıfır olması gerekir. Buradan;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r = \langle \nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r, \mathcal{T}_r \rangle \mathcal{T}_r = 0$$

olur. (4.3), (4.4) ve (4.6) eşitlikleri göz önüne alınarak (4.6) eşitliğinde $h \neq 0$ olduğundan Serret-Frenet katsayıları sıfır olmalıdır. Bu durumda;

$$s = (h' + r^2 h' \tau^2 + r^2 h \tau \tau') = 0$$

elde edilir. $h'(1 + r^2 \tau^2) + r^2 h \tau \tau' = 0$ diferensiyel denklemi Maple® programı yardımıyla τ ya göre çözülürse (4.7) eşitliği elde edilir (Bk. Ek1).

Tersine (4.7) eşitliği sağlansın. (4.5) ve (4.7) eşitlikleri göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapılırsa $s = 0$ bulunur. Bu durumda (4.6) eşitliğinin Serret-Frenet katsayıları sıfırdır. Tanım 3.3.3. gereği $\mathcal{T}_r$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paraleldir.

Sonuç 4.1.1. ζ_r eğrisinin teğet vektör alanı $\mathcal{T}_r$ nin Fermi-Walker türevi, $\mathcal{T}_r$ yönlü bir vektördür.

İspat. (4.6) denklemi ile ispat açıktır.

Sonuç 4.1.2. (ζ, ζ_r) birim hızlı paralel eğri çifti olsun. ζ eğrisinin burulma değeri τ olmak üzere $\tau = \text{sabit}$ için ζ_r paralel eğrisinin teğet vektör alanı $\mathcal{T}_r$, Fermi-Walker anlamında paralel olup aynı zamanda $\kappa \neq 0$ olduğunda ζ eğrisi anti-Salkowski eğrisi olur.

İspat. (4.4) eşitliğinde τ değeri sabit kabul edilsin. (3.3) eşitliğinde bulunan h ifadesinde τ ve r değerleri sabit olduğundan h değeri de sabit olur. Bu durumda $h' = 0$, $\tau' = 0$ olur. (4.4) eşitliğinde $h' = 0$ ve $\tau' = 0$ değerleri yerine yazılırsa;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r = \langle \nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r, \mathcal{T}_r \rangle \mathcal{T}_r = 0$$

elde edilmiş olur. Tanım 3.3.3. gereği $\mathcal{T}_r$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olduğu anlamına gelir. Öte yandan ζ eğrisinin τ değeri sabit iken κ değeri sıfırdan farklı olduğunda ζ eğrisi Tanım 3.1.5. de ifade edildiği üzere anti-Salkowski eğrisi olur.

Özel olarak $\tau = 0$ alınırsa $\mathcal{T}_r$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paralel olup ζ eğrisi Teorem 2.3.4. te ifade edildiği üzere düzlem eğrisi olur.

Sonuç 4.1.3. ζ_r eğrisinde $h = \frac{1}{\tau}$, $\tau \notin [-1,1]$ olmak üzere eğrinin teğet vektör alanı olan $\mathcal{T}_r$, Fermi-Walker anlamında paraleldir.

İspat. ζ_r eğrisinde $h = \frac{1}{\tau}$, $\tau \notin [-1,1]$ kabul edilsin. $h = \frac{1}{\tau}$ eşitliği (3.3) de yerine yazılırsa;

$$\frac{1}{\sqrt{1+r^2\tau^2}} = \frac{1}{\tau} \quad (4.8)$$

elde edilip (4.8) eşitliğinin her iki tarafının da karesi alınırsa,

$$\frac{1}{1+r^2\tau^2} = \frac{1}{\tau^2}$$

bulunur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \quad (4.9)$$

elde edilir. (4.9) eşitliğinde r değeri sabit olduğundan τ değeri de sabit olur. $h = \frac{1}{\tau}$ kabul edildiği için h değeri de sabit olarak bulunur. Dolayısıyla $\tau' = 0$ ve $h' = 0$ olur. τ' ve h' değerleri (4.4) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r = \langle \nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r, \mathcal{T}_r \rangle \mathcal{T}_r = 0$$

elde edilir. Tanım 3.3.3. gereği $\mathcal{T}_r$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olduğu anlamına gelir.

Sonuç 4.1.4. ζ eğrisi dairesel helis olması durumunda $\zeta_r(s_r)$ eğrisinin teğet vektör alanı $\mathcal{T}_r$, Fermi-Walker anlamında paralel olur.

İspat. ζ eğrisi dairesel helis olsun. Teorem 3.1.1. de bulunan tanım gereği τ ve κ değerleri sabit olur. τ değeri sabit ve r değeri de sabit olduğundan h değerinin de sabit olduğu görülür. Böylece $h' = 0$, $\tau' = 0$ ve $\kappa' = 0$ elde edilir. h' , τ' ve κ' değerleri (4.4) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r = \langle \nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r, \mathcal{T}_r \rangle \mathcal{T}_r = 0$$

elde edilir. Tanım 3.3.3. gereği $\mathcal{T}_r$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olduğu anlamına gelir.

4.2. Paralel Eğrinin Normal Vektör Alanının Fermi-Walker Türevi

Bu bölümde, 3 –boyutlu Öklid uzayında s yay parametrelili ve birim hızlı olarak tanımlı ζ eğrisi ele alınmıştır. ζ eğrisine paralel olan ζ_r eğrisinin $\mathcal{N}_r$ normal vektör alanının Fermi-Walker türevi hesaplanıp önemli sonuçlar elde edilmiştir.

ζ eğrisi 3 –boyutlu Öklid uzayında s yay parametrelili ve birim hızlı bir eğri olarak tanımlansın. ζ eğrisine paralel olan ζ_r eğrisi ele alınsın. ζ eğrisinin normal vektör alanı $\mathcal{N}$, ζ_r eğrisinin normal vektör alanı ise $\mathcal{N}_r$ olarak verilsin. (3.2) ve (3.9) denklemleri kullanılarak $\zeta(s)$ birim hızlı eğrisine paralel olan $\zeta_r(s_r)$ eğrisinin teğet vektör alanının Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}_r} \mathcal{N}_r = \nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{N}_r - \langle \mathcal{T}_r, \mathcal{N}_r \rangle \nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r + \langle \nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r, \mathcal{N}_r \rangle \mathcal{T}_r$$

eşitliği ile elde edilir. Tanım 2.1.3. de bulunan ifade göz önüne alınarak $\langle \mathcal{T}_r, \mathcal{N}_r \rangle = 0$ eşitliği bulunur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}_r} \mathcal{N}_r = \nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{N}_r + \langle \nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r, \mathcal{N}_r \rangle \mathcal{T}_r \quad (4.10)$$

elde edilir. (3.2) eşitliğinde, (3.6) eşitliği göz önünde bulundurulursa;

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{N}_r &= \frac{d\mathcal{N}_r}{ds_r} = \frac{d\mathcal{N}_r}{ds} \frac{ds}{ds_r} \\
&= \frac{h}{m} [\mathcal{T}'(hh' + rh^2\kappa\tau) + \mathcal{T}((h')^2 + hh'' + 2rhh'\kappa\tau + rh^2\kappa'\tau + rh^2\kappa\tau') \\
&\quad + \mathcal{N}'(h^2\kappa - rhh'\tau - rh^2\tau') \\
&\quad + \mathcal{N}(2hh'\kappa + h^2\kappa' - r(h')^2\tau - rhh''\tau - rhh'\tau' - 2rhh'\tau' - rh^2\tau'') \\
&\quad + \mathcal{B}'(-rh^2\tau^2) \\
&\quad + \mathcal{B}(-2rhh'\tau^2 \\
&\quad - 2rh^2\tau\tau')] \tag{4.11}
\end{aligned}$$

ifadesi bulunur. (4.11) eşitliğinde (2.3) eşitliğinde bulunan Serret-Frenet elemanları kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{N}_r &= \frac{h}{m} [\mathcal{T}((h')^2 + hh'' + 3rhh'\kappa\tau + rh^2\kappa'\tau + 2rh^2\kappa\tau' - h^2\kappa^2) \\
&\quad + \mathcal{N}(2hh'\kappa + h^2\kappa' - r(h')^2\tau - rhh''\tau - 3rhh'\tau' - rh^2\tau'' + rh^2\tau^3) \\
&\quad + \mathcal{B}(-3rhh'\tau^2 - 3rh^2\tau\tau' \\
&\quad + h^2\kappa\tau)] \tag{4.12}
\end{aligned}$$

bulunur. (3.6) ile (3.7) eşitlikleri Tanım 2.1.3. de ifade edilen tanım gereği hesaplanırsa;

$$\langle \nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r, \mathcal{N}_r \rangle = \frac{1}{m} [(hh' + rh^2\kappa\tau)^2 + (h^2\kappa - h(rh\tau)')^2 + (rh^2\tau^2)^2] \tag{4.13}$$

elde edilir. (3.3) de bulunan m değeri (4.13) de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\langle \nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r, \mathcal{N}_r \rangle = m \tag{4.14}$$

şeklinde ifade edilir. (3.5) ile (4.14) eşitlikleri göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\langle \nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r, \mathcal{N}_r \rangle \mathcal{T}_r = \mathcal{T}(hm) + \mathcal{N}(-rhm\tau) \quad (4.15)$$

elde edilir. Burada (4.12) ile (4.15) eşitlikleri kullanılarak;

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}_r} \mathcal{N}_r = & \frac{h}{m} [\mathcal{T}(m^2 + (h')^2 + hh'' + 3rhh'\kappa\tau + rh^2\kappa'\tau + 2rh^2\kappa\tau' - h^2\kappa^2) \\ & + \mathcal{N}(-r\tau m^2 + 2hh'\kappa + h^2\kappa' - r(h')^2\tau - rhh''\tau - 3rhh'\tau' \\ & - rh^2\tau'' + rh^2\tau^3) \\ & + \mathcal{B}(-3rhh'\tau^2 - 3rh^2\tau\tau' \\ & + h^2\kappa\tau)] \end{aligned} \quad (4.16)$$

ifadesi ile $\zeta_r(s_r)$ eğrisinin normal vektör alanının Fermi-Walker türevi hesaplanmış olunur.

Teorem 4.2.1. (ζ, ζ_r) birim hızlı paralel eğri çifti olsun. Bu eğrilere ait olan Serret-Frenet çatıları sırasıyla $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$, $\{\mathcal{T}_r, \mathcal{N}_r, \mathcal{B}_r\}$ olmak üzere $\mathcal{N}_r$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olması için gerek ve yeter şart κ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere;

$$\tau = 0 \quad (4.17)$$

olmasıdır.

İspat. $\mathcal{N}_r$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paralel olsun. O halde Tanım 3.3.3. gereği (4.10) eşitliğinin sıfır olması gerekir. Buradan;

$$\nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{N}_r + \langle \nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r, \mathcal{N}_r \rangle \mathcal{T}_r = 0$$

elde edilir. (4.12), (4.15) ve (4.16) eşitlikleri göz önüne alınarak (4.16) eşitliğinde $h \neq 0$ olduğundan Serret-Frenet katsayıları sıfır olmalıdır. Bu durumda;

$$\begin{cases} m^2 + (h')^2 + hh'' + 3rhh'\kappa\tau + rh^2\kappa'\tau + 2rh^2\kappa\tau' - h^2\kappa^2 = 0, \\ -r\tau m^2 + 2hh'\kappa + h^2\kappa' - r(h')^2\tau - rhh''\tau - 3rhh'\tau' - rh^2\tau'' + rh^2\tau^3 = 0, \\ -3rhh'\tau^2 - 3rh^2\tau\tau' + h^2\kappa\tau = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

olur. (4.18) eşitliğinde h ve m değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{cases} \frac{1}{(1+r^2\tau^2)^3} \left(r\tau \left(\begin{matrix} (-r^3\tau^2 - r)\tau'' + (1+r^2\tau^2)^2\kappa' - \\ -3(\tau')^2r^2 + r\kappa(1+r^2\tau^2)\tau' \\ -r^2\tau^4 - \\ \tau^2 \end{matrix} \right) \right), \\ \frac{1}{(1+r^2\tau^2)^3} \left(\begin{matrix} (-r^3\tau^2 - r)\tau'' + (1+r^2\tau^2)^2\kappa' - \\ -3(\tau')^2r^2 + ((r^2\kappa^2 - 1)\tau^2 + \kappa^2)(1+r^2\tau^2) \\ r\tau \end{matrix} \right), \\ \frac{\tau(\tau^2\kappa r^2 - 3r\tau' + \kappa)}{(1+r^2\tau^2)^2} \end{cases} \quad (4.19)$$

elde edilir. Maple® programı yardımıyla diferensiyel denklem çözülürse (4.19) diferensiyel denkleminin bir çözümü κ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere $\tau = 0$ olarak bulunur (Bk. Ek2).

Tersine (4.17) eşitliği kabul edilsin. (4.17), (4.18) ve (4.19) eşitlikleri göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapılırsa (4.16) eşitliğinin Serret-Frenet katsayıları sıfır olarak bulunur. Tanım 3.3.3. gereği $\mathcal{N}_r$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paraleldir.

Sonuç 4.2.1. (ζ, ζ_r) birim hızlı paralel eğri çifti olsun. ζ_r paralel eğrisinin normal vektör alanı $\mathcal{N}_r$, Fermi-Walker anlamında paralel ise ζ eğrisi düzlem eğrisi olur.

İspat. $\mathcal{N}_r$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paralel olsun. Teorem 4.2.1 de ifade edildiği üzere κ sıfırdan farklı bir sabit ve $\tau = 0$ olur. Bu durumda ζ eğrisi Teorem 2.3.4. te ifade edildiği üzere düzlem eğrisi olur.

4.3. Paralel Eğrinin Binormal Vektör Alanının Fermi-Walker Türevi

Bu bölümde, 3 –boyutlu Öklid uzayında s yay parametrelili ve birim hızlı olarak tanımlı ζ eğrisi ele alınmıştır. ζ eğrisine paralel olan ζ_r eğrisinin $\mathcal{B}_r$ binormal vektör alanının Fermi-Walker türevi hesaplanıp önemli sonuçlar elde edilmiştir.

ζ eğrisi 3 –boyutlu Öklid uzayında s yay parametrelili ve birim hızlı bir eğri olarak tanımlansın. ζ eğrisine paralel olan ζ_r eğrisi ele alınsın. ζ eğrisinin binormal vektör alanı $\mathcal{B}$, ζ_r eğrisinin binormal vektör alanı ise $\mathcal{B}_r$ olarak verilsin. (3.2) ve (3.9) denklemleri kullanılarak $\zeta(s)$ birim hızlı eğrisine paralel olan $\zeta_r(s_r)$ eğrisinin teğet vektör alanının Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}_r} \mathcal{B}_r = \nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{B}_r - \langle \mathcal{T}_r, \mathcal{B}_r \rangle \nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r + \langle \nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r, \mathcal{B}_r \rangle \mathcal{T}_r \quad (4.20)$$

eşitliği ile elde edilir. Tanım 2.1.3. de bulunan ifade göz önüne alınarak $\langle \mathcal{T}_r, \mathcal{B}_r \rangle = 0$ eşitliği bulunur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}_r} \mathcal{B}_r = \nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{B}_r + \langle \nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r, \mathcal{B}_r \rangle \mathcal{T}_r \quad (4.21)$$

eşitliği bulunur. (3.6) ile (3.8) eşitlikleri Tanım 2.1.3. de ifade edilen tanım gereği hesaplanırsa;

$$\langle \nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r, \mathcal{B}_r \rangle = 0 \quad (4.22)$$

elde edilir ve (4.22) eşitliği göz önüne alınarak (4.21) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}_r} \mathcal{B}_r = \nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{B}_r \quad (4.23)$$

eşitliği bulunur. (3.2) eşitliğinde, (3.6) eşitliği göz önünde bulundurulursa;

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{B}_r &= \frac{d\mathcal{B}_r}{ds_r} = \frac{d\mathcal{B}_r}{ds} \frac{ds}{ds_r} \\
&= \frac{h}{m} [\mathcal{T}'(r^2 h^3 \tau^3) + \mathcal{T}(3r^2 h^2 h' \tau^3 + 3r^2 h^3 \tau^2 \tau') + \mathcal{N}'(r h^3 \tau^2) \\
&\quad + \mathcal{N}(3r h^2 h' \tau^2 + 2r h^3 \tau \tau') \\
&\quad + \mathcal{B}'(h^3 \kappa - r h^3 \tau' - r h^2 h' \tau + r \tau h^2 h' + r^2 \kappa \tau^2 h^3) \\
&\quad + \mathcal{B}(3h^2 h' \kappa + h^3 \kappa' - 3r h^2 h' \tau' - r h^3 \tau'' - 2r h (h')^2 \tau - r h^2 h'' \tau \\
&\quad - r h^2 h' \tau' + 2r h (h')^2 \tau + r h^2 h'' \tau + r h^2 h' \tau' + 3r^2 h^2 h' \kappa \tau^2 \\
&\quad + 2r^2 h^3 \kappa \tau \tau' + r^2 h^3 \tau^2 \kappa')] \quad (4.24)
\end{aligned}$$

bulunur. (4.24) eşitliğinde (2.3) eşitliğinde bulunan Serret-Frenet elemanları kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}_r} \mathcal{B}_r &= \frac{h}{m} [\mathcal{T}(3r^2 h^2 h' \tau^3 + 3r^2 h^3 \tau^2 \tau' - r h^3 \kappa \tau^2) \\
&\quad + \mathcal{N}(3r h^2 h' \tau^2 + 3r h^3 \tau \tau' - h^3 \kappa \tau) \\
&\quad + \mathcal{B}(r h^3 \tau^3 + 3h^2 h' \kappa + h^3 \kappa' - 3r h^2 h' \tau' - r h^3 \tau'' + 3r^2 h^2 h' \kappa \tau^2 \\
&\quad + 2r^2 h^3 \kappa \tau \tau' + r^2 h^3 \tau^2 \kappa')] \quad (4.25)
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece $\zeta_r(s_r)$ eğrisinin binormal vektör alanının Fermi-Walker türevi hesaplanmış olunur.

Teorem 4.3.1. (ζ, ζ_r) birim hızlı paralel eğri çifti olsun. Bu eğrilere ait olan Serret-Frenet çatıları sırasıyla $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}, \{\mathcal{T}_r, \mathcal{N}_r, \mathcal{B}_r\}$ olmak üzere $\mathcal{B}_r$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olması için gerek ve yeter şart κ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere;

$$\tau = 0 \quad (4.26)$$

olmasıdır.

İspat. $\mathcal{B}_r$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paralel olsun. O halde Tanım 3.3.3. gereği (4.21) eşitliğinin sıfır olması gerekir. Buradan;

$$\nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{B}_r + \langle \nabla_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r, \mathcal{B}_r \rangle \mathcal{T}_r = 0$$

elde edilir. (4.22), (4.24) ve (4.25) eşitlikleri göz önüne alınarak (4.25) eşitliğinde $h \neq 0$ olduğundan Serret-Frenet katsayıları sıfır olmalıdır. Bu durumda;

$$\begin{cases} 3r^2h^2h'\tau^3 + 3r^2h^3\tau^2\tau' - rh^3\kappa\tau^2 = 0, \\ 3rh^2h'\tau^2 + 3rh^3\tau\tau' - h^3\kappa\tau = 0, \\ rh^3\tau^3 + 3h^2h'\kappa + h^3\kappa' - 3rh^2h'\tau' - rh^3\tau'' + 3r^2h^2h'\kappa\tau^2 + 2r^2h^3\kappa\tau\tau' \\ + r^2h^3\tau^2\kappa' = 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

olur. (4.27) eşitliğinde h yerine yazılırsa;

$$\begin{cases} -\frac{\tau^2r(r^2\tau^2\kappa - 3\tau'r + \kappa)}{(r^2\tau^2 + 1)^{5/2}}, \\ \frac{\tau(r^2\tau^2\kappa - 3\tau'r + \kappa)}{(r^2\tau^2 + 1)^{5/2}} \\ \frac{1}{(r^2\tau^2 + 1)^{5/2}} \left(r(-3r^2(\tau')^2 + r\kappa(r^2\tau^2 + 1)\tau' - r^2\tau^4 - \tau^2)\tau \right) \end{cases} \quad (4.28)$$

elde edilir. Maple® programı yardımıyla diferensiyel denklem çözülürse (4.28) diferensiyel denkleminin bir çözümü κ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere $\tau = 0$ olarak bulunur (Bk. Ek3).

Tersine (4.26) eşitliği kabul edilsin. (4.26), (4.27) ve (4.28) eşitlikleri göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapılırsa (4.25) eşitliğinin Serret-Frenet katsayıları sıfır olarak bulunur. Tanım 3.3.3. gereği $\mathcal{B}_r$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paraleldir.

Sonuç 4.3.1. (ζ, ζ_r) birim hızlı paralel eğri çifti olsun. ζ_r paralel eğrisinin binormal vektör alanı $\mathcal{B}_r$, Fermi-Walker anlamında paralel ise ζ eğrisi düzlem eğrisi olur.

İspat. $\mathcal{B}_r$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paralel olsun. Teorem 4.3.1 de ifade edildiği üzere κ sıfırdan farklı bir sabit ve $\tau = 0$ olur. Bu durumda ζ eğrisi Teorem 2.3.4. te ifade edildiği üzere düzlem eğrisi olur.

$\mathcal{T}_r, \mathcal{N}_r, \mathcal{B}_r$ vektör alanlarının Fermi-Walker anlamında paralel olduğuna dair teorem ve sonuçlar dikkate alındığında aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.3.2. (ζ, ζ_r) birim hızlı ve s yay parametrelili paralel eğri çifti olsun. ζ_r eğrisi boyunca $\mathcal{T}_r, \mathcal{N}_r$ ve $\mathcal{B}_r$ ortonormal vektörler olmak üzere κ sıfırdan farklı bir sabit ve $\tau = 0$ değerleri için $\{\mathcal{T}_r, \mathcal{N}_r, \mathcal{B}_r\}$ üçlüsü bir non-rotating (dönmeyen) çatı oluşturur.

İspat. ζ_r eğrisi boyunca $\mathcal{T}_r, \mathcal{N}_r$ ve $\mathcal{B}_r$ ortonormal vektörler olmak üzere κ sıfırdan farklı bir sabit ve $\tau = 0$ olsun. Bu durumda $\tau = 0$ değeri (3.3) eşitliğinde bulunan h değerinde yerine yazılırsa $h = 1$ olup buradan da $h' = 0$ bulunur. (4.3), (4.4) ve (4.6) eşitlikleri göz önüne alınarak $\tau = 0, h' = 0$ değerleri (4.4) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r = 0 \quad (4.29)$$

elde edilir. Teorem 4.2.1 de ifade edildiği üzere κ sıfırdan farklı bir sabit ve $\tau = 0$ olduğunda $\mathcal{N}_r$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olduğu açıktır. Tanım 3.3.3. te bulunan ifade göz önüne alınırsa;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}_r} \mathcal{N}_r = 0 \quad (4.30)$$

elde edilir. Teorem 4.3.1 de ifade edildiği üzere κ sıfırdan farklı bir sabit ve $\tau = 0$ olduğunda $\mathcal{B}_r$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olduğu açıktır. Tanım 3.3.3. te bulunan ifade göz önüne alınırsa;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}_r} \mathcal{B}_r = 0 \quad (4.31)$$

elde edilir. (4.29), (4.30) ve (4.31) eşitlikleri göz önüne alınarak Tanım 3.3.4. gereği $\{\mathcal{T}_r, \mathcal{N}_r, \mathcal{B}_r\}$ üçlüsü bir non-rotating (dönmeyen) çatı oluşturur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

4.1. bölümünde (ζ, ζ_r) birim hızlı paralel eğri çiftine ait Serret-Frenet çatısı altındaki $\mathcal{T}_r$ vektör alanının Fermi-Walker türevi hesaplanmış ve bu vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olması incelenmiştir. Bu konu ile alakalı Tablo 1 deki geometrik yorumlara ulaşılmıştır.

Tablo 1. $\mathcal{T}_r$ Vektör Alanının Fermi-Walker Türevi İçin Geometrik Yorumlar

$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}_r} \mathcal{T}_r = h^2(h' + r^2 h' \tau^2 + r^2 h \tau \tau') \mathcal{T}_r$	
Sonuç: $\mathcal{T}_r$ vektör alanının Fermi-Walker türevi, $\mathcal{T}_r$ yönlü bir vektördür.	
$\tau = \pm \frac{\sqrt{cr^2 - h^2}}{hr} \quad (c \in \mathbb{R})$	
Sonuç: $\mathcal{T}_r$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paraleldir.	
ζ eğrisinin burulma değeri	$\tau = \text{sabit}$
Sonuç: $\mathcal{T}_r$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paralel olup $\kappa \neq 0$ olduğunda ζ eğrisi anti-Salkowski eğrisi olur.	
Özel olarak $\tau = 0$ olursa $\mathcal{T}_r$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paralel olup ζ eğrisi düzlem eğrisi olur.	
ζ_r eğrisinin h değeri	$h = \frac{1}{\tau}, \tau \notin [-1,1]$

Sonuç: $\mathcal{T}_r$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paraleldir.

4.2. bölümünde (ζ, ζ_r) birim hızlı paralel eğri çiftine ait Serret-Frenet çatısı altındaki $\mathcal{N}_r$ vektör alanının Fermi-Walker türevi hesaplanmış ve bu vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olması incelenmiştir. Bu konu ile alakalı Tablo 2 deki geometrik yorumlara ulaşılmıştır.

Tablo 2. $\mathcal{N}_r$ Vektör Alanının Fermi-Walker Türevi İçin Geometrik Yorumlar

$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}_r} \mathcal{N}_r = \frac{h}{m} [\mathcal{T}(m^2 + (h')^2 + hh'' + 3rhh'\kappa\tau + rh^2\kappa'\tau + 2rh^2\kappa\tau' - h^2\kappa^2) + \mathcal{N}(-r\tau m^2 + 2hh'\kappa + h^2\kappa' - r(h')^2\tau - rhh''\tau - 3rhh'\tau' - rh^2\tau'' + rh^2\tau^3) + \mathcal{B}(-3rhh'\tau^2 - 3rh^2\tau\tau' + h^2\kappa\tau)]$
$\tau = 0$
Sonuç: Yukarıdaki eşitlikler κ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere sağlanırsa $\mathcal{N}_r$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paraleldir. Ayrıca $\tau = 0$ değeri için ζ eğrisi düzlem eğrisi olur.

4.3. bölümünde (ζ, ζ_r) birim hızlı paralel eğri çiftine ait Serret-Frenet çatısı altındaki $\mathcal{B}_r$ vektör alanının Fermi-Walker türevi hesaplanmış ve bu vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olması incelenmiştir. Bu konu ile alakalı Tablo 3 deki geometrik yorumlara ulaşılmıştır.

Tablo 3. $\mathcal{B}_r$ Vektör Alanının Fermi-Walker Türevi İçin Geometrik Yorumlar

$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}_r}\mathcal{B}_r = \frac{h}{m} [& \mathcal{T}(3r^2h^2h'\tau^3 + 3r^2h^3\tau^2\tau' - rh^3\kappa\tau^2) \\ & + \mathcal{N}(3rh^2h'\tau^2 + 3rh^3\tau\tau' - h^3\kappa\tau) \\ & + \mathcal{B}(rh^3\tau^3 + 3h^2h'\kappa + h^3\kappa' - 3rh^2h'\tau' - rh^3\tau'' \\ & + 3r^2h^2h'\kappa\tau^2 + 2r^2h^3\kappa\tau\tau' + r^2h^3\tau^2\kappa')]\end{aligned}$
$\tau = 0$
Sonuç: Yukarıdaki eşitlikler κ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere sağlanırsa $\mathcal{B}_r$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paraleldir. Ayrıca $\tau = 0$ değeri için ζ eğrisi düzlem eğrisi olur.

Tablo 1, Tablo 2 ve Tablo 3 te elde edilen sonuçlar göz önüne alınırsa κ sıfırdan farklı bir sabit ve $\tau = 0$ değerleri için $\{\mathcal{T}_r, \mathcal{N}_r, \mathcal{B}_r\}$ üçlüsü bir non-rotating (dönmeyen) çatı oluşturur.

Bu tez çalışmasında araştırmacıların Fermi-Walker türevi üzerindeki çalışmalarından yola çıkılmıştır. 3 –boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin paralel eğrisi tanımlanıp paralel eğrinin Serret-Frenet vektör alanları boyunca Fermi-Walker türevi hesaplanmıştır. Ardından da aynı vektör alanlarının Fermi-Walker anlamında paralel olma durumları incelenmiştir.

Dileyen araştırmacılar, bu çalışmada tercih edilen paralel eğrilere ilaveten başka tip özel eğriler için yeni incelemelerde bulunup farklı bulgular elde edebilir. Öte yandan burada elde edilen sonuçlar Galile uzayı gibi başka uzay tiplerinde yeniden incelenip farklı teorem ve sonuçlara ulaşılabilir.

KAYNAKLAR

Aldossary, M. T. and Gazwani, M. A., 2020. Motion of Parallel Curves and Surfaces in Euclidean 3-Space R^3 . <https://geometry-math-journal.ro/pdf/Volume9-Issue1/7.pdf> (12.12.2023).

Altuntaş, B., 2023. Öklid Uzayında Bazı Eğrilerin Fermi-Walker Türevi. Yüksek Lisans Tezi, Muş Alpaslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Muş.

Balakrishnan, R. 2005. Space curves, anholonomy and nonlinearity. *Pramana Journal of Physics*, 64(4), 607-615.

Benn, I. M. and Tucker, R. W. 1989. Wave mechanics and inertial guidance. *The American Physical Society*, 39(6), 1594-1601.

Berry, M.V. 1984. *Proc. Roy. Soc. London A*, 392.

Can, S., 2018, Euclid Dışı Geometrilere, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, http://www.turkmath.org/beta/seminer.php?id_seminer=1854 (25.12.2023)

Carmo, M., 1976. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.

Dandoloff, R. 1989. Berry's phase and Fermi-Walker parallel transport. *Elsevier Science Publishers*, 139(1-2), 19-20.

Ekici, C., 2021. Eğrilerin ve Yüzeylerin Diferensiyel Geometrisi. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, s.350, Eskişehir.

Epik, P. E., 2023. 3 – Boyutlu Kompakt Lie Gruplarında Paralel Eğriler Üzerine. Yüksek Lisans Tezi, Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Bitlis.

Fermi, E. 1922. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fiz. Mat. Nat.*, 31, 184-306.

Hacısalıhoğlu, H. H., 2000. Diferensiyel Geometri, Cilt I. A.Ü. Fen Fakültesi, s.154-175, Ankara.

Hacısalıhoğlu, H. H., 2000. Diferensiyel Geometri, Cilt II. A.Ü. Fen Fakültesi, s. 54-68, Ankara.

Hehl, F., Lemke, J., Mielke E. W., 1991. Two Lectures on Fermions and Gravity. Geometry and Theoretical Physics, J. Debrus and A.C. Hirshfeld (eds.), Springer Verlag. New York, 56-140.

Karakuş, F., 2012. Fermi-Walker Türevi ve Geometrik Uygulamaları. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Karakuş, F. and Yaylı, Y. 2012. On the Fermi-Walker Derivative and Non-rotating Frame. Int. Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 9(8), 1250066-1-11.

Karataş, S., 2019. Bazı İlişkili Eğriler İçin Fermi-Walker Türevi. Yüksek Lisans Tezi, Muş Alpaslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Muş.

Kaya, U. B., 2022. Minkowski Uzayında Manyetik Eğrilerin Fermi-Walker Türevi, Muş Alpaslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Muş.

Keskin, Ö. and Yaylı, Y., 2017. Normal Fermi- Walker Derivative. Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 5(1), 1-8. <https://doi.org/10.36753/mathenot.421468> (02.01.2024).

Kılıç, R., 2019. 3 –Boyutlu Minkowski Uzayında Fermi-Walker Türevi. Yüksek Lisans Tezi, Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sinop.

Kobayashi, S. and Nomizu, K. 1996. Foundations of differential geometry, John Wiley and Sons, Inc., New York.

Kurt, E., 2022. Bir Eğrinin Paralel Eğrisinin Oluşturduğu Regle Yüzeyler. Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Samsun.

Lancret, M. A., 1806. Mémoire sur les courbes à double courbure, Mémoires présentés à l'Institut 1, 416-454.

Manoff, S. 1998. Fermi derivative and Fermi-Walker transports over $(Ln;g)$ spaces. Internat. J. Modern Phys. A, 13(25), 4289-4308.

Monterde, J. 2008. Salkowski curves revisited: A family of curves with constant curvature and non-constant torsion. Computer Aided Geometric Desing, 26(3),271-278.

O'Neill, B., 1966. Elementary Differential Geometry. Academic Press, New York.

Özdemir, M., 2020. Diferensiyel Geometri. Altın Nokta Yayınevi, s.448, İzmir.

Sabuncuoğlu, A., 2010. Diferensiyel Geometri. Nobel Yayınevi, Ankara.

Salimov A. and Mağden A., 2008. Diferensiyel Geometri. Aktif Yayınevi, Erzurum.

Salkowski, E. 1909. Zur Transformation von Raumkurven. Mathematische Annalen, 66-4, pp. 517-557.

Uçar, A., 2019. Genelleştirilmiş Fermi-Walker Türevi ve Geometrik Uygulamaları. Doktora Tezi, Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sinop.

Ünal, İ., 2022, Matematiğin Modern Uygulayıcısı: Diferensiyel Geometri, <https://inanunal.com/2022/01/09/diferansiyel-geometri-nedir/> (14.12.2023).

Wikipedia katılımcıları., 2024, Geometri. Vikipedi, Özgür Ansiklopedi, <https://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Geometri&oldid=32067213> (14.04.24).

EKLER

Ek 1. $\mathcal{T}_r$ Vektör Alanının Fermi-Walker Anlamında Paralel olması Durumundaki Diferensiyel Denklemin Maple® Programı Yardımıyla Çözümü

```

> restart

> denklem:=diff(h(s),s)+(r^2)*diff(h(s),s)*(tau(s)^2)+
(r^2)*h(s)*tau(s)*diff(tau(s),s)=0

denklem :=  $\frac{d}{ds}h(s) + r^2 \left( \frac{d}{ds}h(s) \right) \tau(s)^2 + r^2 h(s) \tau(s) \left( \frac{d}{ds}\tau(s) \right) = 0$ 

> dsolve(denklem,tau(s))


$$\tau(s) = \frac{\sqrt{-C1r^2 - h(s)^2}}{h(s)r}, \tau(s) = -\frac{\sqrt{-C1r^2 - h(s)^2}}{h(s)r}$$


> h(s):=1/sqrt(1+(r^2)*(tau(s))^2)


$$h(s) := \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 \tau(s)^2}}$$


> denklem:=diff(h(s),s)+(r^2)*diff(h(s),s)*(tau(s)^2)+
(r^2)*h(s)*tau(s)*diff(tau(s),s)=0

denklem :=  $-\frac{r^2 \tau(s) \left( \frac{d}{ds}\tau(s) \right)}{(1 + r^2 \tau(s)^2)^{3/2}} - \frac{r^4 \tau(s)^3 \left( \frac{d}{ds}\tau(s) \right)}{(1 + r^2 \tau(s)^2)^{3/2}} + \frac{r^2 \tau(s) \left( \frac{d}{ds}\tau(s) \right)}{\sqrt{1 + r^2 \tau(s)^2}} = 0$ 

```

**Ek 2. $\mathcal{N}_r$ Vektör Alanının Fermi-Walker Anlamında Paralel Olması
Durumundaki Diferensiyel Denklemin Maple® Programı Yardımıyla Çözümü**

```

> restart

> h(s):=1/sqrt(1+(r^2)*(tau(s))^2)


$$h(s) := \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 \tau(s)^2}}$$


>
m(s):=simplify(sqrt((h(s)*diff(h(s),s)+r*h(s)^2*kappa(s)*
tau(s))^2+h(s)^2*kappa(s)-h(s)*diff((r*h(s)*tau(s)),s))
^2+(r*h(s)^2*tau(s)^2)^2))


$$m(s) := \left( \frac{1}{(1 + r^2 \tau(s)^2)^3} \left( \kappa(s)^2 \tau(s)^4 r^4 + \tau(s)^6 r^4 - 2 \left( \frac{d}{ds} \tau(s) \right) \kappa(s) \tau(s)^2 r^3 \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \kappa(s)^2 \tau(s)^2 r^2 + r^2 \tau(s)^4 + \left( \frac{d}{ds} \tau(s) \right)^2 r^2 - 2 \left( \frac{d}{ds} \tau(s) \right) \kappa(s) r \right. \right. \\ \left. \left. + \kappa(s)^2 \right) \right)^{1/2}$$


>
denk1:=simplify(m(s)^2+diff(h(s),s)^2+h(s)*diff(h(s),s)+3
*r*h(s)*diff(h(s),s)*kappa(s)*tau(s)+r*h(s)^2*diff(kappa(
s),s)*tau(s)+2*r*h(s)^2*kappa(s)*diff(tau(s),s)-
h(s)^2*kappa(s)^2)

```

$$\begin{aligned}
denk1 := & \frac{1}{(1+r^2\tau(s)^2)^3} \left(r\tau(s) \left((-r^3\tau(s)^2 - r) \left(\frac{d^2}{ds^2} \tau(s) \right) \right. \right. \\
& + (1+r^2\tau(s)^2)^2 \left(\frac{d}{ds} \kappa(s) \right) \\
& - r\tau(s) \left(-3 \left(\frac{d}{ds} \tau(s) \right)^2 r^2 + r\kappa(s)(1+r^2\tau(s)^2) \left(\frac{d}{ds} \tau(s) \right) \right. \\
& \left. \left. \left. - r^2\tau(s)^4 - \tau(s)^2 \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

```

>denk2:=simplify(-
r*tau(s)*m(s)^2+2*h(s)*diff(h(s),s)*kappa(s)+h(s)^2*diff(
kappa(s),s)-r*diff(h(s),s)^2*tau(s)-
r*h(s)*diff(h(s),s,s)*tau(s)-
3*r*h(s)*diff(h(s),s)*diff(tau(s),s)-
r*h(s)^2*diff(tau(s),s)-
r*h(s)^2*diff(tau(s),s,s)+r*h(s)^2*tau(s)^3)

```

$$\begin{aligned}
denk2 := & \frac{1}{(1+r^2\tau(s)^2)^3} \left((-r^3\tau(s)^2 - r) \left(\frac{d^2}{ds^2} \tau(s) \right) \right. \\
& + (1+r^2\tau(s)^2)^2 \left(\frac{d}{ds} \kappa(s) \right) \\
& - \left(-3 \left(\frac{d}{ds} \tau(s) \right)^2 r^2 \right. \\
& \left. \left. \left. + ((r^2\kappa(s)^2 - 1)\tau(s)^2 + \kappa(s)^2)(1+r^2\tau(s)^2) r\tau(s) \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

```

>denk3:=simplify(-3*r*h(s)*diff(h(s),s)*tau(s)^2-
3*r*h(s)^2*tau(s)*diff(tau(s),s)+h(s)^2*kappa(s)*tau(s))

```

$$\text{denk3} := \frac{\tau(s) \left(\tau(s)^2 \kappa(s) r^2 - 3r \left(\frac{d}{ds} \tau(s) \right) + \kappa(s) \right)}{(1 + r^2 \tau(s)^2)^2}$$

> kume := convert ({denk1, denk2, denk3}, set)

kume

$$\begin{aligned} &:= \left\{ \frac{1}{(1 + r^2 \tau(s)^2)^3} \left((-r^3 \tau(s)^2 - r) \left(\frac{d^2}{ds^2} \tau(s) \right) + (1 + r^2 \tau(s)^2)^2 \left(\frac{d}{ds} \kappa(s) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(-3 \left(\frac{d}{ds} \tau(s) \right)^2 r^2 + ((r^2 \kappa(s)^2 - 1) \tau(s)^2 + \kappa(s)^2) (1 + r^2 \tau(s)^2) r \tau(s) \right) \right) \right\}, \\ &\quad \frac{\tau(s) \left(\tau(s)^2 \kappa(s) r^2 - 3r \left(\frac{d}{ds} \tau(s) \right) + \kappa(s) \right)}{(1 + r^2 \tau(s)^2)^2}, \frac{1}{(1 + r^2 \tau(s)^2)^3} \left(r \tau(s) \left((-r^3 \tau(s)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - r) \left(\frac{d^2}{ds^2} \tau(s) \right) + (1 + r^2 \tau(s)^2)^2 \left(\frac{d}{ds} \kappa(s) \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - r \tau(s) \left(-3 \left(\frac{d}{ds} \tau(s) \right)^2 r^2 + r \kappa(s) (1 + r^2 \tau(s)^2) \left(\frac{d}{ds} \tau(s) \right) - r^2 \tau(s)^4 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \tau(s)^2 \right) \right) \right\} \end{aligned}$$

> dsolve(kume) ;

$$[\{\tau(s) = 0\}, \{\kappa(s) = _C1\}]$$

**Ek 3. $\mathcal{B}_r$ Vektör Alanının Fermi-Walker Anlamında Paralel Olması
Durumundaki Diferensiyel Denklemin Maple® Programı Yardımıyla Çözümü**

```
[ > restart

> h(s):=1/sqrt(1+(r^2)*(tau(s))^2)


$$h(s) := \frac{1}{\sqrt{1+r^2\tau(s)^2}}$$


>
denk1:=simplify(3*r^2*h(s)^2*diff(h(s),s)*tau(s)^3+3*r^2*
h(s)^3*tau(s)^2*diff(tau(s),s)-
r*h(s)^3*kappa(s)*tau(s)^2)


$$denk1 := -\frac{\tau(s)^2 r \left( r^2 \tau(s)^2 \kappa(s) - 3 \left( \frac{d}{ds} \tau(s) \right) r + \kappa(s) \right)}{(r^2 \tau(s)^2 + 1)^{5/2}}$$


>
denk2:=simplify(3*r*h(s)^2*diff(h(s),s)*tau(s)^2+3*r*h(s)
^3*tau(s)*diff(tau(s),s)-h(s)^3*kappa(s)*tau(s))


$$denk2 := \frac{\tau(s) \left( r^2 \tau(s)^2 \kappa(s) - 3 \left( \frac{d}{ds} \tau(s) \right) r + \kappa(s) \right)}{(r^2 \tau(s)^2 + 1)^{5/2}}$$


>
denk3:=simplify(r*h(s)^3*tau(s)^3+3*h(s)^2*diff(h(s),s)*k
appa(s)+h(s)^3*diff(kappa(s),s)-
3*r*h(s)^2*diff(h(s),s)*diff(tau(s),s)-
r*h(s)^3*diff(tau(s),s,s)+3*r^2*h(s)^2*diff(h(s),s)*kappa
```

```
(s)*tau(s)^2+2*r^2*h(s)^3*kappa(s)*tau(s)*diff(tau(s),s)+
r^2*h(s)^3*tau(s)^2*diff(kappa(s),s))
```

$$\begin{aligned}
 denk3 := & \frac{1}{(r^2\tau(s)^2 + 1)^{5/2}} \left((-r^3\tau(s)^2 - r) \left(\frac{d^2}{ds^2} \tau(s) \right) \right. \\
 & + (r^2\tau(s)^2 + 1)^2 \left(\frac{d}{ds} \kappa(s) \right) \\
 & - r \left(-3r^2 \left(\frac{d}{ds} \tau(s) \right)^2 + r\kappa(s)(r^2\tau(s)^2 + 1) \left(\frac{d}{ds} \tau(s) \right) - r^2\tau(s)^4 \right. \\
 & \left. \left. - \tau(s)^2 \right) \tau(s) \right)
 \end{aligned}$$

```
> küme:=convert({denk1,denk2,denk3},set)
```

$$\begin{aligned}
kume := & \left\{ \frac{1}{(r^2 \tau(s)^2 + 1)^{5/2}} \left((-r^3 \tau(s)^2 - r) \left(\frac{d^2}{ds^2} \tau(s) \right) \right. \right. \\
& + (r^2 \tau(s)^2 + 1)^2 \left(\frac{d}{ds} \kappa(s) \right) \\
& - r \left(-3r^2 \left(\frac{d}{ds} \tau(s) \right)^2 + r \kappa(s) (r^2 \tau(s)^2 + 1) \left(\frac{d}{ds} \tau(s) \right) \right. \\
& \left. \left. - r^2 \tau(s)^4 \right. \right. \\
& \left. \left. - \tau(s)^2 \right) \tau(s) \right), \frac{\tau(s) \left(r^2 \tau(s)^2 \kappa(s) - 3 \left(\frac{d}{ds} \tau(s) \right) r + \kappa(s) \right)}{(r^2 \tau(s)^2 + 1)^{5/2}}, \\
& \left. - \frac{\tau(s)^2 r \left(r^2 \tau(s)^2 \kappa(s) - 3 \left(\frac{d}{ds} \tau(s) \right) r + \kappa(s) \right)}{(r^2 \tau(s)^2 + 1)^{5/2}} \right\}
\end{aligned}$$

> dsolve(kume) ;

$[\{\tau(s) = 0\}, \{\kappa(s) = _C1\}]$

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı ve Soyadı	
Doğum Yeri ve Tarihi	
Eğitim Durumu	
Lisans Öğrenimi	
Yüksek Lisans Öğrenimi	
Bildiği Yabancı Diller	
İş Deneyimi	
Çalıştığı Kurum	
İletişim	
E-Posta Adresi	
Mezuniyet Tarihi	