

FİBONACCİ VE LUCAS p -SAYILARI ÜZERİNE

Emrah POLATLI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KASIM 2011

ANKARA

Emrah POLATLI tarafından hazırlanan “FİBONACCİ VE LUCAS p -SAYILARI ÜZERİNE” adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Dursun TAŞCI
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ali Bülent EKİN
Matematik Anabilim Dalı, A.Ü.

Prof. Dr. Dursun TAŞCI
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Doç. Dr. Naim TUĞLU
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Tarih: 24/11/2011

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Emrah POLATLI

FİBONACCİ VE LUCAS p -SAYILARI ÜZERİNE**(Yüksek Lisans Tezi)****Emrah POLATLI****GAZİ ÜNİVERSİTESİ****FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Kasım 2011****ÖZET**

Bu çalışmada Fibonacci ve Lucas p -sayıları göz önüne alınarak Binet formülleri ve bazı özellikler verildi. Ayrıca Fibonacci ve Lucas p -sayılarına ilişkin sürekli fonksiyonlar ile bu sayıların m -genişlemesi için Binet formülleri incelendi.

Bilim Kodu	: 204.1.025
Anahtar Kelimeler	: Fibonacci ve Lucas p-sayıları, m-genişlemesi, sürekli fonksiyon
Sayfa Adedi	: 57
Tez Yönetici	: Prof. Dr. Dursun TAŞCI

ON THE FIBONACCI AND LUCAS p -NUMBERS**(M.Sc. Thesis)****Emrah POLATLI****GAZİ UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****November 2011****ABSTRACT**

In this study, considering the Fibonacci and Lucas p -numbers, Binet formulas and some properties were given. Also continuous functions for Fibonacci and Lucas p -numbers with Binet formulas for these numbers' m -extension were analyzed.

Science Code	: 204.1.025
Key Words	: Fibonacci and Lucas p-numbers, m-extension, continuous function
Page Number	: 57
Adviser	: Prof. Dr. Dursun TAŞCI

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Hocam Prof. Dr. Dursun TAŞCI 'ya yine tecrübelerinden faydalandığım hocam Doç. Dr. Naim Tuğlu 'ya ve manevi destekleriyle beni hiç yalnız bırakmayan aileme, Yasemin AYVALIK 'a ve Can KIZILATEŞ 'e teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1. GİRİŞ	1
2. FİBONACCİ VE LUCAS p -SAYILARI	6
3. FİBONACCİ VE LUCAS p -SAYILARININ SÜREKLİ FONKSİYONLARI ...	38
4. FİBONACCİ VE LUCAS p -SAYILARININ m -GENİŞLEMESİ	47
5. SONUÇ	54
KAYNAKLAR	55
ÖZGEÇMİŞ	57

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. $F(x) = x^3 - x^2 - 1$ fonksiyonunun grafiği	26
Şekil 2.2. $F(x) = x^4 - x^3 - 1$ fonksiyonunun grafiği	28
Şekil 2.3. $F(x) = x^5 - x^4 - 1$ fonksiyonunun grafiği	30

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
F_n	n .ci Fibonacci sayısı
L_n	n .ci Lucas sayısı
τ	Altın oran
$F_m[n]$	n .ci Fibonacci m -sayısı
$L_m[n]$	n .ci Lucas m -sayısı
$F_p(n)$	n .ci Fibonacci p -sayısı
$L_p(n)$	n .ci Lucas p -sayısı
τ_p	Altın p -oranı
$F_{p,m}(n)$	n .ci Fibonacci (p,m) -sayısı
$L_{p,m}(n)$	n .ci Lucas (p,m) -sayısı
$\Phi_{p,m}$	Altın (p,m) -oranı

1. GİRİŞ

Fibonacci sayıları, Lucas sayıları ve altın oran bilimin ve sanatın birçok alanında kullanılmaktadır. Günümüze kadar birçok araştırmacı bu sayıları ve bu sayıların özelliklerini incelemiştir [2-5].

Fibonacci sayıları, her $n \geq 1$ için $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

bağıntısı ile tanımlanır. Burada F_n 'e n .ci Fibonacci sayısı denir. Fibonacci ve buna benzer diziler aşağıdaki gibi genelleştirilebilir:

$\{x_n\}$ dizisi; $x_0 = a$ ve $x_1 = b$ başlangıç koşulları olmak üzere, her $n \geq 1$ için

$$x_{n+1} = kx_n + x_{n-1}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır [2-5]. Burada $k, a, b \in \mathbb{Z}$ ve $k \neq 0$ dır. Bu $\{x_n\}$ dizisinin bazı özel durumlarını inceleyelim.

Eğer $k = 1, x_0 = 0$ ve $x_1 = 1$ ise $\{x_n\}$ dizisi $\{F_n\}$ Fibonacci dizisidir.

Eğer $k = 1, x_0 = 2$ ve $x_1 = 1$ ise $\{x_n\}$ dizisi $\{L_n\}$ Lucas dizisidir.

Eğer $k = 2, x_0 = 0$ ve $x_1 = 1$ ise $\{x_n\}$ dizisi $\{P_n\}$ Pell dizisidir.

Eğer $k = 2, x_0 = 2$ ve $x_1 = 2$ ise $\{x_n\}$ dizisi $\{R_n\}$ Pell–Lucas dizisidir.

Burada k, x_0 ve x_1 sayılarını her defasında farklı alarak sonsuz tane dizi üretmek mümkündür.

Şimdi Fransız matematikçi Binet'in bulduğu, Fibonacci ve Lucas sayılarının Binet formüllerlerini verelim.

F_n ; n .ci Fibonacci sayısı olmak üzere

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

olup burada $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ ve $\beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ 'dir [2-4]. Bu formül, Fibonacci sayıları için bulunan Binet formülüdür. Lucas sayıları için bulunan Binet formülü, L_n ; n .ci Lucas sayısı olmak üzere

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

olup burada $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ ve $\beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ 'dir [2-4].

İki ardışık Fibonacci sayısının oranı, limit durumunda $n \rightarrow \infty$ iken

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}}{\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n (1 - (\frac{\beta}{\alpha})^n)}{\alpha^{n-1} (1 - (\frac{\beta}{\alpha})^{n-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \cdot \frac{1 - (\frac{\beta}{\alpha})^n}{1 - (\frac{\beta}{\alpha})^{n-1}}$$

dir. $\frac{\beta}{\alpha} < 1$ olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = 0$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1} = 0$$

olur. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

olup buradaki $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sayısına altın oran denir [4].

Fibonacci sayılarının indirgeme bağıntısı yardımıyla, negatif indisli Fibonacci sayılarının ilk birkaç terimi

$$F_{-1} = F_1 - F_0, F_{-2} = F_0 - F_{-1}, \dots$$

şeklinde elde edilir. Böyle devam ettiğimizde

$$\begin{array}{cccccccc} n & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ F_{-n} & 0 & 1 & -1 & 2 & -3 & 5 & \dots \end{array}$$

elde ederiz. Böylelikle her n tamsayısı için

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$$

olduğu görülür.

Benzer şekilde Lucas sayılarının indirgeme bağıntısı yardımıyla, ilk bir kaç Lucas sayısı

$$\begin{array}{cccccc} n & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ L_n & 2 & 1 & 3 & 4 & 7 & \dots \end{array}$$

olur. Lucas sayılarının indirgeme bağıntısını kullanarak negatif indisli terimlerini hesaplırsak

$$\begin{array}{cccccc} n & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ L_{-n} & 2 & -1 & 3 & -4 & 7 & \dots \end{array}$$

elde edilir. Böylece Lucas sayıları için genel hâlin

$$L_{-n} = (-1)^n L_n$$

olduğu görülür.

Şimdi Fibonacci sayıları ile matrisler arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi 1960 'da Charles H. King tarafından master tezinde çalışılmıştır [5].

Dikkat edilirse

$$\det(Q) = -1$$

dir. Ayrıca

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

olduğu tümevarım ile gösterilebilir [5].

Fibonacci ve Lucas m -sayıları tanımlanarak bu sayıların değişik özellikleri de elde edilmiştir [7,8]. Şimdi Fibonacci ve Lucas m -sayılarının tanımlarını kısaca hatırlatalım.

Fibonacci m -sayıları, her $m > 0$ reel sayısı ve $n \in \mathbb{Z}$ için

$$F_m[n] = mF_m[n-1] + F_m[n-2]$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Burada başlangıç koşulları $F_m[0] = 0$ ve $F_m[1] = 1$ dir. Benzer şekilde Lucas m -sayıları, her $m > 0$ reel sayısı ve $n \in \mathbb{Z}$ için

$$L_m[n] = mL_m[n-1] + L_m[n-2]$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Burada başlangıç koşulları $L_m[0] = 2$ ve $L_m[1] = m$ 'dir [7,8].

2. FİBONACCİ VE LUCAS p -SAYILARI

Bu bölümde Fibonacci ve Lucas p -sayılarının tanımlarını ve bu sayıların bazı özelliklerini inceleyeceğiz. Ayrıca Q_p matrislerini, Altın p -oranlarını ve Binet formüllerini vereceğiz.

Tanımlara geçmeden önce lineer indirgeme bağıntılarının karakteristik denklemi hakkında kısa bir bilgi verelim. $c_1, c_2, \dots, c_k$ sabit katsayılar ve $c_k \neq 0$ olmak üzere, k . basamaktan

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_{k-1} a_{n-k+1} + c_k a_{n-k}$$

lineer indirgeme bağıntısının karakteristik denklemi

$$x^k = c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \dots + c_{k-1} x + c_k$$

dir. Burada $c_1, c_2, \dots, c_k$ sabit katsayılarının bulunabilmesi için k tane başlangıç koşuluna ihtiyaç vardır. Aşağıda tanımlayacağımız indirgeme bağıntıları $(p+1)$. mertebededir. $F_p(n-2), F_p(n-3), \dots, F_p(n-p)$ ve $L_p(n-2), L_p(n-3), \dots, L_p(n-p)$ terimlerinin katsayıları sıfırdır.

2.1. Tanım

Herhangi bir $p > 0$ tamsayısı ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n > p$ için, Fibonacci p -sayıları

$$F_p(n) = F_p(n-1) + F_p(n-p-1) \quad (2.1)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Burada başlangıç koşulları

$$F_p(0) = 0, F_p(1) = F_p(2) = \dots = F_p(p) = 1$$

dir [9,10].

2.2. Tanım

Herhangi bir $p > 0$ tamsayısı ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n > p$ için, Lucas p -sayıları

$$L_p(n) = L_p(n-1) + L_p(n-p-1) \quad (2.2)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Burada başlangıç koşulları

$$L_p(0) = p+1, L_p(1) = L_p(2) = \dots = L_p(p) = 1$$

dir [9,10].

Eğer özel olarak $p = 1$ alınırsa, $F_1(n)$; n .ci Fibonacci sayısı ve $L_1(n)$; n .ci Lucas sayısı olur. Tanım 2.2 'de $L_p(0) = p+1$ alınma sebebi, $p = 1$ için daha önceden Lucas sayılarının indirgeme bağıntısının başlangıç şartlarında verilen $L(0) = 2$ ile uyumluluk sağlamasıdır.

Şimdi Fibonacci p -sayılarının, $n < 0$ tamsayıları için değerlerini bulalım.

Eş. 2.1'de $n = p + 1$ alınırsa

$$F_p(p+1) = F_p(p) + F_p(0)$$

elde edilir. Tanımdaki başlangıç şartlarında $F_p(0) = 0$ ve $F_p(p) = 1$ olduğundan

$$F_p(p+1) = 1$$

olur. $n = p$ için, Eş. 2.1'den

$$F_p(p) = F_p(p-1) + F_p(-1)$$

olup başlangıç şartlarında $F_p(p) = F_p(p-1) = 1$ verildiğinden

$$F_p(-1) = 0$$

olur. Benzer şekilde devam edilirse

$$F_p(0) = F_p(-1) = \dots = F_p(-p+1) = 0 \quad (2.3)$$

olduğu açıktır. Şimdi $F_p(1)$ sayısını,

$$F_p(1) = F_p(0) + F_p(-p)$$

şeklinde yazalım. Burada $F_p(1) = 1$ ve $F_p(0) = 0$ olduğundan

$$F_p(-p) = 1 \quad (2.4)$$

elde edilir. Benzer şekilde $F_p(0), F_p(-1), \dots, F_p(-p+1)$ sayıları, Eş. 2.1'deki gibi yazılırsa

$$F_p(-p-1) = F_p(-p-2) = F_p(-p-3) = \dots = F_p(-2p+1) = 0 \quad (2.5)$$

olur. Bu metotla, her $n < 0$ tamsayısı için Fibonacci p -sayıları bulunabilir. Lucas p -sayılarının her $n < 0$ tamsayısı için değerleri de benzer şekilde bulunur.

Şimdi Fibonacci Q_p matrisini inceleyelim.

Fibonacci p -sayıları

$$\underbrace{\begin{pmatrix} F_p(n) \\ F_p(n-1) \\ F_p(n-2) \\ \vdots \\ F_p(n-p+1) \\ F_p(n-p) \end{pmatrix}}_{\vec{f}_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{Q_p^T} \underbrace{\begin{pmatrix} F_p(n-1) \\ F_p(n-2) \\ F_p(n-3) \\ \vdots \\ F_p(n-p) \\ F_p(n-p-1) \end{pmatrix}}_{\vec{f}_{n-1}}$$

matris formunda gösterilir [11]. Burada f_n ve f_{n-1} , mertebesi $(p+1) \times 1$ olan matrislerdir. Q_p^T ise, mertebesi $(p+1) \times (p+1)$ olan

$$Q_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisinin transpozudur. Burada $p = 0, p = 1, p = 2$ ve $p = 3$ için Q_p matrisi sırasıyla

$$Q_0 = (1) , \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Eğer Q_1 matrisinin kuvvetlerini incelersek

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(2) & F_1(1) \\ F_1(1) & F_1(0) \end{pmatrix} , \quad Q_1^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(3) & F_1(2) \\ F_1(2) & F_1(1) \end{pmatrix}$$

$$Q_1^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(4) & F_1(3) \\ F_1(3) & F_1(2) \end{pmatrix} , \quad Q_1^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(5) & F_1(4) \\ F_1(4) & F_1(3) \end{pmatrix}$$

elde ederiz. Aynı şekilde Q_2 matrisinin kuvvetlerini incelersek

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2(2) & F_2(1) & F_2(0) \\ F_2(0) & F_2(-1) & F_2(-2) \\ F_2(1) & F_2(0) & F_2(-1) \end{pmatrix}$$

$$Q_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2(3) & F_2(2) & F_2(1) \\ F_2(1) & F_2(0) & F_2(-1) \\ F_2(2) & F_2(1) & F_2(0) \end{pmatrix}$$

$$Q_2^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2(4) & F_2(3) & F_2(2) \\ F_2(2) & F_2(1) & F_2(0) \\ F_2(3) & F_2(2) & F_2(1) \end{pmatrix}$$

$$Q_2^4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2(5) & F_2(4) & F_2(3) \\ F_2(3) & F_2(2) & F_2(1) \\ F_2(4) & F_2(3) & F_2(2) \end{pmatrix}$$

elde ederiz. Böyle devam edilirse Q_p matrisi için genel hâl tahmin edilebilir.

Şimdi Q_p matrisinin genel hâli için bir formül verelim.

2.1. Teorem

$F_p(n)$, n .ci Fibonacci p -sayısı olmak üzere, herhangi bir $p \geq 1$ tamsayısı ve $n \in \mathbb{Z}$ için Fibonacci Q_p matrisinin n .ci kuvveti

$$Q_p^n = \begin{pmatrix} F_p(n+1) & F_p(n) & \cdots & F_p(n-p+2) & F_p(n-p+1) \\ F_p(n-p+1) & F_p(n-p) & \cdots & F_p(n-2p+2) & F_p(n-2p+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_p(n-1) & F_p(n-2) & \cdots & F_p(n-p) & F_p(n-p-1) \\ F_p(n) & F_p(n-1) & \cdots & F_p(n-p+1) & F_p(n-p) \end{pmatrix}$$

dir [6].

İspat

İspatımızı tümevarımla yapalım. Eş. 2.1, Eş. 2.3, Eş. 2.4 ve Eş. 2.5 'deki ifadeleri kullanırsak, $n = 1$ için

$$Q_p^1 = \begin{pmatrix} F_p(2) & F_p(1) & \cdots & F_p(3-p) & F_p(2-p) \\ F_p(2-p) & F_p(1-p) & \cdots & F_p(3-2p) & F_p(2-2p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_p(0) & F_p(-1) & \cdots & F_p(1-p) & F_p(-p) \\ F_p(1) & F_p(0) & \cdots & F_p(2-p) & F_p(1-p) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla iddiamız $n = 1$ için doğrudur. Kabul edelim ki, $n = k - 1$ için

$$Q_p^{k-1} = \begin{pmatrix} F_p(k) & F_p(k-1) & \cdots & F_p(k-p+1) & F_p(k-p) \\ F_p(k-p) & F_p(k-p-1) & \cdots & F_p(k-2p+1) & F_p(k-2p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_p(k-2) & F_p(k-3) & \cdots & F_p(k-p-1) & F_p(k-p-2) \\ F_p(k-1) & F_p(k-2) & \cdots & F_p(k-p) & F_p(k-p-1) \end{pmatrix}$$

olsun. $Q_p^k = Q_p^{k-1} Q_p$ eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}
Q_p^{k-1} Q_p &= \begin{pmatrix} F_p(k) & F_p(k-1) & \cdots & F_p(k-p+1) & F_p(k-p) \\ F_p(k-p) & F_p(k-p-1) & \cdots & F_p(k-2p+1) & F_p(k-2p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_p(k-2) & F_p(k-3) & \cdots & F_p(k-p-1) & F_p(k-p-2) \\ F_p(k-1) & F_p(k-2) & \cdots & F_p(k-p) & F_p(k-p-1) \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F_p(k) + F_p(k-p) & F_p(k) & \cdots & F_p(k-p+2) & F_p(k-p+1) \\ F_p(k-p) + F_p(k-2p) & F_p(k-p) & \cdots & F_p(k-2p+2) & F_p(k-2p+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_p(k-2) + F_p(k-p-2) & F_p(k-2) & \cdots & F_p(k-p) & F_p(k-p-1) \\ F_p(k) + F_p(k-1) & F_p(k-1) & \cdots & F_p(k-p+1) & F_p(k-p) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F_p(k+1) & F_p(k) & \cdots & F_p(k-p+2) & F_p(k-p+1) \\ F_p(k-p+1) & F_p(k-p) & \cdots & F_p(k-2p+2) & F_p(k-2p+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_p(k-1) & F_p(k-2) & \cdots & F_p(k-p) & F_p(k-p-1) \\ F_p(k) & F_p(k-1) & \cdots & F_p(k-p+1) & F_p(k-p) \end{pmatrix} \\
&= Q_p^k
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Fibonacci p -sayılarının indirgeme bağıntısının karakteristik denklemi

$$x^{p+1} - x^p - 1 = 0 \tag{2.6}$$

dır. Bu denklem, $(p+1)$. ci derecedendir ve Cebirin Esas Teoremi gereği $p+1$ tane köke sahiptir. Bu denklemin $p > 0$ için daima bir pozitif reel kökü vardır [10]. Çünkü Cebirdeki Descartes'in İşaretler Kuralından, Eş. 2.6 'nın katsayılar dizisi 1, -1, -1 olup yalnızca bir defa işaret (pozitiften negatife) değiştirmiştir. Eş. 2.6 'nın pozitif reel kökünü x_1 olarak alalım. Şimdi iki ardışık Fibonacci p -sayısının oranını Binet formülü yardımıyla limit durumunda $n \rightarrow \infty$ iken incelersek

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_p(n)}{F_p(n-1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_1(x_1)^n + k_2(x_2)^n + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^n}{k_1(x_1)^{n-1} + k_2(x_2)^{n-1} + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^{n-1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_1(x_1)^n \cdot \left(1 + \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n + \dots + \frac{k_{p+1}}{k_1} \left(\frac{x_{p+1}}{x_1}\right)^n\right)}{k_1(x_1)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{n-1} + \dots + \frac{k_{p+1}}{k_1} \left(\frac{x_{p+1}}{x_1}\right)^{n-1}\right)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_1 \cdot \frac{1 + \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n + \dots + \frac{k_{p+1}}{k_1} \left(\frac{x_{p+1}}{x_1}\right)^n}{1 + \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{n-1} + \dots + \frac{k_{p+1}}{k_1} \left(\frac{x_{p+1}}{x_1}\right)^{n-1}} \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada $x_1, x_2, \dots, x_{p+1}$, Eş. 2.6 'nın kökleri ve $k_1, k_2, \dots, k_{p+1}$ 'ler sabit katsayılardır. Gershgorin Disk Teoremi gereğince [19], Eş. 2.6 'nın pozitif olan reel kökü

$$1 \leq x_1 < 2$$

aralığındadır. Diğer tüm kökleri, $i = 2, 3, \dots, p+1$ için

$$0 \leq x_i < 1$$

aralığındadır. Dolayısıyla $i = 2, 3, \dots, p+1$ için, $\left|\frac{x_i}{x_1}\right| < 1$ olup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_i}{x_1}\right)^n = 0$$

dır. Böylece Eş. 2.7 'den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_p(n)}{F_p(n-1)} = x_1$$

elde ederiz. Eş. 2.6 'nın pozitif reel kökü olan x_1 , altın p -oranı olarak kabul edilir ve τ_p ile gösterilir [12]. Eğer Eş. 2.6 'nın her iki tarafını x^{n-p-1} ile çarpar, elde edilen ifadeyi düzenlersek

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-p-1} = x x^{n-1}$$

olur. Burada $n \in \mathbb{Z}$ ve $k = 1, 2, 3, \dots, p+1$ olmak üzere

$$x_k^n = x_k^{n-1} + x_k^{n-p-1} = x_k x_k^{n-1} \quad (2.8)$$

denklemini, Eş. 2.6 'nın her $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{p+1}$ kökü tarafından sağlanır. Eğer özel olarak $x_k = \tau_p$ alırsak

$$\tau_p^n = \tau_p^{n-1} + \tau_p^{n-p-1} = \tau_p \cdot \tau_p^{n-1} \quad (2.9)$$

elde edilir.

Şimdi Eş. 2.6 'nın köklerinin özellikleriyle ilgili teoremleri verelim.

2.2. Teorem

Verilen $p > 0$ tamsayısı için, $x^{p+1} - x^p - 1 = 0$ denkleminin kökleri arasında aşağıdaki ilişkiler geçerlidir [10]:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_p + x_{p+1} = 1 \quad (2.10)$$

$$(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_{p+1}) + (x_2 x_3 + \dots + x_2 x_{p+1}) + \dots + x_p x_{p+1} = 0$$

$$(x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + \dots + x_1x_px_{p+1}) + (x_2x_3x_4 + \dots + x_2x_px_{p+1}) + \dots + x_{p-1}x_px_{p+1} = 0$$

...

$$x_1x_2\dots x_{p-2}x_{p-1}x_p + x_1x_3x_4\dots x_{p-1}x_px_{p+1} + \dots + x_2x_3x_4\dots x_{p-1}x_px_{p+1} = 0$$

$$x_1x_2x_3\dots x_{p-1}x_px_{p+1} = (-1)^p. \quad (2.11)$$

İspat

Eş. 2.6 'yı cebirsel olarak

$$x^{p+1} - x^p - 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_p)(x - x_{p+1}) = 0 \quad (2.12)$$

formunda yazabiliriz. Şimdi Eş. 2.12 'yi göz önüne alırsak, p 'nin çift değerleri için

$$\begin{aligned} x^{p+1} - x^p - 1 &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_p)(x - x_{p+1}) \\ &= x^{p+1} - (x_1 + x_2 + \dots + x_p + x_{p+1})x^p \\ &\quad + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \dots + x_1x_{p+1} + x_2x_3 \\ &\quad + x_2x_4 + \dots + x_2x_p + x_2x_{p+1} + \dots + x_{p-1}x_p + x_{p-1}x_{p+1} + x_px_{p+1})x^{p-1} \\ &\quad - (x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + \dots + x_1x_px_{p+1} + x_2x_3x_4 + x_2x_3x_5 + \dots + x_2x_px_{p+1} \\ &\quad + \dots + x_{p-1}x_px_{p+1})x^{p-2} + (x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + \dots + x_{p-2}x_{p-1}x_px_{p+1})x^{p-3} \\ &\quad + \dots + (x_1x_2x_3x_4\dots x_{p-2}x_{p-1}x_p + x_1x_3x_4\dots x_{p-1}x_px_{p+1} + \dots + x_2x_3x_4\dots x_{p-1}x_px_{p+1})x \\ &\quad - x_1x_2x_3\dots x_{p-1}x_px_{p+1} = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

elde edilir. Eş. 2.6 ve Eş. 2.13 'den

$$x_1 + x_2 + \dots + x_p + x_{p+1} = 1$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \dots + x_1x_{p+1} + x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_2x_p + x_2x_{p+1} + \dots + x_{p-1}x_p$$

$$+ x_{p-1}x_{p+1} + x_px_{p+1} = 0;$$

$$(x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + \dots + x_1x_px_{p+1}) + (x_2x_3x_4 + \dots + x_2x_px_{p+1}) + \dots + x_{p-1}x_px_{p+1} = 0$$

...;

$$x_1x_2x_3x_4\dots x_{p-2}x_{p-1}x_p + x_1x_3x_4\dots x_{p-1}x_px_{p+1} + \dots + x_2x_3x_4\dots x_{p-1}x_px_{p+1} = 0$$

$$x_1x_2x_3x_4\dots x_{p-1}x_px_{p+1} = 1$$

elde ederiz.

p 'nin tek değeri için

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_p)(x - x_{p+1})$$

$$= x^{p+1} - (x_1 + x_2 + \dots + x_p + x_{p+1}).x^p + (x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_{p+1} + x_2x_3$$

$$+ x_2x_4 + \dots + x_2x_p + x_2x_{p+1} + \dots + x_{p-1}x_p + x_{p-1}x_{p+1} + x_px_{p+1})x^{p-1} - (x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4$$

$$+ \dots + x_1x_px_{p+1} + x_2x_3x_4 + x_2x_3x_5 + \dots + x_2x_px_{p+1} + \dots + x_{p-1}x_px_{p+1})x^{p-2} + (x_1x_2x_3x_4$$

$$+ x_1x_2x_3x_5 + \dots + x_{p-2}x_{p-1}x_px_{p+1})x^{p-3} + \dots + (x_1x_2x_3x_4\dots x_{p-2}x_{p-1}x_p$$

$$+ x_1x_3x_4\dots x_{p-1}x_px_{p+1} + \dots + x_2x_3x_4\dots x_{p-1}x_px_{p+1})x + x_1x_2x_3\dots x_{p-1}x_px_{p+1} = 0 \quad (2.14)$$

elde edilir. Eş. 2.6 ve Eş. 2.14 'den

$$x_1 + x_2 + \dots + x_p + x_{p+1} = 1$$

$$(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_{p+1}) + (x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_2x_{p+1}) + \dots + x_px_{p+1} = 0$$

$$(x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + \dots + x_1x_px_{p+1}) + (x_2x_3x_4 + \dots + x_2x_px_{p+1}) + \dots + x_{p-1}x_px_{p+1} = 0$$

...;

$$x_1x_2x_3x_4\dots x_{p-2}x_{p-1}x_p + x_1x_3x_4\dots x_{p-1}x_px_{p+1} + \dots + x_2x_3x_4\dots x_{p-1}x_px_{p+1} = 0$$

$$x_1x_2x_3x_4\dots x_{p-1}x_px_{p+1} = -1$$

olup ispat tamamlanır.

Şimdi

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_p + x_{p+1})^k \quad (2.15)$$

ifadesini ele alalım. $1 \leq k \leq p$ için, Eş. 2.10 'daki özellikten

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{p+1})^k = 1 \quad (2.16)$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_p + x_{p+1})^k$$

ifadesi için Eş. 2.16 'da, binomiyal ($p = 1$ için), trinomiyal ($p = 2$ için) ve polinomiyal (keyfi p için) formüllerini kullanırsak çarpanlarına ayırabiliriz. Herhangi k değeri için, Eş. 2.16 'nın polinom formülünün

$$x_1^k + x_2^k + x_3^k + \dots + x_{p+1}^k$$

ifadesini içerdiği bilinmektedir.

2.3. Teorem

Verilen $p = 1, 2, 3, \dots$ ve $k = 1, 2, 3, \dots, p$ tamsayıları için

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_p + x_{p+1})^k = x_1^k + x_2^k + x_3^k + \dots + x_{p+1}^k = 1 \quad (2.17)$$

ifadesi sağlanır. Burada $x_1, x_2, \dots, x_{p+1}$, Eş. 2.6 'nın kökleridir [10].

İspat

Öncelikle Eş. 2.10 'u kullanırsak

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_p + x_{p+1})^k = 1^k = 1 \quad (2.18)$$

olur. Burada $p = 1$ için, $k = 1$ olmak zorundadır. Dolayısıyla Eş. 2.18 'den

$$(x_1 + x_2)^k = x_1 + x_2 = 1$$

elde ederiz. Böylelikle Eş. 2.18, $p = 1$ için sağlanır.

$p = 2$ için, $k = 1$ veya $k = 2$ olmak zorundadır. Burada karşımıza

$$(x_1 + x_2 + x_3)^k = x_1 + x_2 + x_3$$

ve

$$(x_1 + x_2 + x_3)^k = (x_1 + x_2 + x_3)^2$$

gibi iki durum gelir. Eş. 2.18 'i kullanırsak, ilk durum için

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

olur. Diğer durumda, $(x_1 + x_2 + x_3)^2$ ifadesini

$$((x_1 + x_2) + x_3)^2$$

şeklinde yazarsak

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = ((x_1 + x_2) + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

olur. Eş. 2.10 'u ve Eş. 2.18 'i kullanırsak

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

elde edilir. Böylelikle Eş. 2.18 , $p = 2$ için sağlanmış olur. Şimdi teoremden iddia edilen genel durumu ispatlamak için multinom açılımını kullanalım. Multinom açılımı, binom açılımının bir genelleştirmesidir. Herhangi bir m pozitif tamsayısı ve negatif olmayan bir n tamsayısı için multinom açılımı

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_m} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$$

dir [18]. Burada

$$\sum_{i=1}^m k_i = n$$

dir. Multinom açılımındaki

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$$

sayıları, multinom katsayıları olarak adlandırılır [18]. Şimdi multinom formülünü kullanarak Eş. 2.18 'in açılımını inceleyelim. Negatif olmayan bir k tamsayısı için, Eş. 2.18 'in multinom açılımı

$$x_1^k + x_2^k + x_3^k + \dots + x_{p+1}^k$$

ifadesini içerir. Bu açılımın diğer terimleri, Eş. 2.6 'nın iki ($k = 2$), üç ($k = 3$), ... , k köklerinin mümkün olan tüm kombinasyonlarının çarpımlarının toplamından oluşur [18]. Teorem 2.2 'den bu toplamların sıfıra eşit olduğunu biliyoruz. Sonuç olarak

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_p + x_{p+1})^k = 1 = x_1^k + x_2^k + x_3^k + \dots + x_{p+1}^k$$

elde edilir.

Şimdi Fibonacci ve Lucas p -sayılarının ilk n terimlerinin toplamlarını veren formülleri inceleyelim.

2.1. Önerme

Fibonacci p -sayılarının ilk n teriminin toplamı

$$F_p(1) + F_p(2) + \dots + F_p(n-1) + F_p(n) = F_p(n+p+1) - 1 \quad (2.19)$$

dir [10].

İspat

Eş. 2.1 'deki

$$F_p(n) = F_p(n-1) + F_p(n-p-1)$$

indirgeme bağıntısında, n yerine $n+p+1$ yazarsak

$$F_p(n) = F_p(n+p+1) - F_p(n+p) \quad (2.20)$$

elde edilir. Eş. 2.20 'yi kullanırsak

$$F_p(1) = F_p(2+p) - F_p(1+p)$$

$$F_p(2) = F_p(3 + p) - F_p(2 + p)$$

$$F_p(3) = F_p(4 + p) - F_p(3 + p)$$

...;

$$F_p(n - 1) = F_p(n + p) - F_p(n + p - 1)$$

$$F_p(n) = F_p(n + p + 1) - F_p(n + p)$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak

$$F_p(1) + F_p(2) + \dots + F_p(n) = F_p(n + p + 1) - F_p(1 + p) = F_p(n + p + 1) - 1$$

olur.

2.2. Önerme

Lucas p -sayılarının ilk n teriminin toplamı

$$L_p(1) + L_p(2) + \dots + L_p(n) = L_p(n+p+1) - (p+2) \quad (2.21)$$

dir [10].

İspat

Önerme 2.1 'e benzer şekilde Eş. 2.2 'yi göz önüne alırsak

$$L_p(1) = L_p(2 + p) - L_p(1 + p)$$

$$L_p(2) = L_p(3 + p) - L_p(2 + p)$$

$$L_p(3) = L_p(4 + p) - L_p(3 + p)$$

...

$$L_p(n-1) = L_p(n+p) - L_p(n+p-1)$$

$$L_p(n) = L_p(n+p+1) - L_p(n+p)$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak

$$L_p(1) + L_p(2) + \dots + L_p(n) = L_p(n+p+1) - L_p(1+p)$$

olur. Burada Lucas p -sayılarının başlangıç koşullarını göz önüne alırsak

$$L_p(1+p) = 2+p$$

dir. Böylelikle ispat tamamlanır.

Burada Eş. 2.19, $p = 0$ ve $F_0(1) = 1$ için matematikte iyi bilinen

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

formülüne indirgenir. $p = 1$ için, Fibonacci sayılarının ilk n teriminin toplamını veren

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

formülüne indirgenir.

2.4. Teorem

$F_p(n)$, n .ci Fibonacci p -sayısı olmak üzere $n > 1$ için

$$x^n = [F_p(n-p+1)]x^p + \sum_{j=1}^p [F_p(n-p+1-j)]x^{j-1} \quad (2.22)$$

dir [13].

İspat

$n = p + 1$ alalım. Eş. 2.6 'dan

$$x^{p+1} = F_p(2)x^p + F_p(1) = x^p + 1$$

olur. Şimdi varsayalım ki, denklem $n > p + 1$ olan n tamsayıları için sağlansın. Şimdi iddianın $n+1$ için sağladığını gösterelim. Kabulümüzden ve Fibonacci p -sayılarının karakteristik denkleminden

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n x = (F_p(n-p+1)x^p + \sum_{j=1}^p F_p(n-p+1-j)x^{j-1})x \\ &= F_p(n-p+1)(x^p + 1) + \sum_{j=1}^p F_p(n-p+1-j)x^j \\ &= F_p(n-p+1)x^p + F_p(n-p+1) + F_p(n-2p+1)x^p \\ &\quad + F_p(n-2p+2)x^{p-1} + \dots + F_p(n-2p+1)x^2 + F_p(n-p)x \\ &= [F_p(n-p+1) + F_p(n-2p+1)]x^p + F_p(n-2p+2)x^{p-1} + F_p(n-2p+3)x^{p-2} \\ &\quad + \dots + F_p(n-p)x + F_p(n-p+1) \end{aligned} \tag{2.23}$$

elde edilir. Fibonacci p -sayılarının tanımını kullanırsak

$$F_p(n-p+1) + F_p(n-2p+1) = F_p(n-p+2)$$

olur. Eş. 2.23 'den

$$\begin{aligned}
x^{n+1} &= F_p(n-p+2)x^p + F_p(n-2p+2)x^{p-1} \\
&+ F_p(n-2p+3)x^{p-2} + \dots + F_p(n-p)x + F_p(n-p+1) \\
&= F_p(n-p+2)x^p + \sum_{j=1}^p F_p(n-p+2-j)x^{j-1}
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır [13].

Şimdi Fibonacci ve Lucas p -sayılarının Binet formüllerini vereceğiz. Daha sonra $p = 2$, $p = 3$, $p = 4$ için Binet formüllerini gösterip son olarak genelleştirilmiş hâllerini teoremler hâlinde vereceğiz.

Verilen $p > 0$ tamsayısı ve $n \in \mathbb{Z}$ için Fibonacci p -sayılarının Binet formülünün

$$F_p(n) = k_1(x_1)^n + k_2(x_2)^n + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^n \quad (2.24)$$

biçiminde yazıldığını göreceğiz. Burada $x_1, x_2, \dots, x_{p+1}$, Eş. 2.6 'nın kökleridir. $k_1, k_2, \dots, k_{p+1}$ ise Fibonacci p -sayılarının başlangıç koşullarına bağlı olan sabit katsayılardır. Başlangıç koşullarını

$$F_p(0) = 0, F_p(1) = F_p(2) = \dots = F_p(p) = 1$$

olarak alacağız. Başlangıç koşullarını ve Eş. 2.24 'i göz önüne alırsak

$$\left\{ \begin{array}{l} F_p(0) = k_1 + k_2 + \dots + k_{p+1} = 0; \\ F_p(1) = k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_{p+1}x_{p+1} = 1; \\ F_p(2) = k_1(x_1)^2 + k_2(x_2)^2 + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^2 = 1; \\ \dots; \\ F_p(p) = k_1(x_1)^p + k_2(x_2)^p + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^p = 1 \end{array} \right. \quad (2.25)$$

sistemini elde ederiz. Daha sonra Eş. 2.6 'dan elde edilen $x_1, x_2, \dots, x_n$ köklerini Eş. 2.25 'de yerlerine koyup $k_1, k_2, \dots, k_{p+1}$ katsayılarını bulacağız.

Lucas p -sayılarının Binet formülünü ise, verilen $p > 0$ tamsayısı için $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{p+1}$ Eş. 2.6 'nın kökleri ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$L_p(n) = (x_1)^n + (x_2)^n + \dots + (x_{p+1})^n \quad (2.26)$$

şeklinde yazıldığını göreceğiz. Burada başlangıç koşullarını

$$L_p(0) = p + 1, L_p(1) = L_p(2) = \dots = L_p(p) = 1$$

alacağız.

Şimdi Fibonacci 2-sayılarının Binet formülünü inceleyelim. $p = 2$ için, Eş. 2.1 'den

$$F_2(n) = F_2(n-1) + F_2(n-3)$$

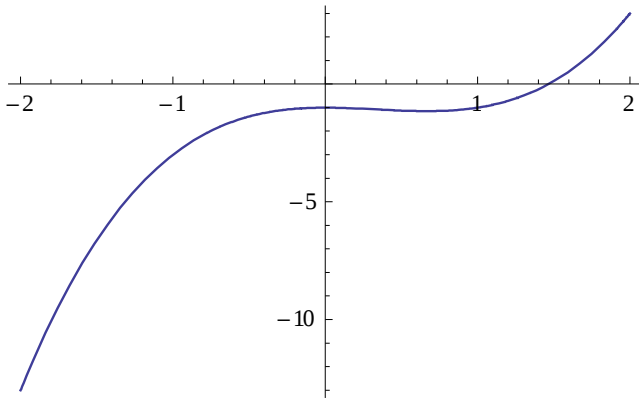
$$F_2(0) = 0, F_2(1) = F_2(2) = 1 \quad (2.27)$$

$$x^3 = x^2 + 1 \quad (\text{Fibonacci 2-sayılarının karakteristik denklemi}) \quad (2.28)$$

eşitlikleri elde edilir. İlk olarak Eş. 2.28 'deki karakteristik denklemin köklerini analiz edelim. $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ fonksiyonunu ele alırsak, $f(x)$ 'in birinci mertebeden türevi

$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$

dir. Kritik noktalar ise $x_1 = 0$ ve $x_2 = \frac{2}{3}$ dür. Dolayısıyla $f(x)$ fonksiyonu, $(-\infty, 0)$ ve $(\frac{2}{3}, \infty)$ aralıklarında artan, $(0, \frac{2}{3})$ aralığında azalandır.



Şekil 2.1. $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ fonksiyonunun grafiği

Şekil 2.1 'den görüldüğü gibi, $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ fonksiyonu x -ksenini yalnızca bir noktada keser. Bu nokta $x_1 = 1,4656$ 'dır. Sonuç olarak Eş. 2.28 , pozitif bir reel köke ve iki kompleks köke sahiptir. Şimdi $p = 2$ için, Eş. 2.24 ve Eş. 2.25 'i kullanırsak

$$F_2(n) = k_1(x_1)^n + k_2(x_2)^n + k_3(x_3)^n \quad (2.29)$$

formülünü ve

$$\left. \begin{aligned} F_2(0) &= k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ F_2(1) &= k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 = 1 \\ F_2(2) &= k_1(x_1)^2 + k_2(x_2)^2 + k_3(x_3)^2 = 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

sistemini elde ederiz. Burada Eş. 2.28 'in kökleri, $h = \sqrt[3]{116 + 12\sqrt{93}}$ olmak üzere

$$x_1 = \frac{h}{6} + \frac{2}{3h} + \frac{1}{3} = 1,4655712319\dots$$

$$x_2 = \frac{-h}{12} - \frac{1}{3h} + \frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{h}{6} - \frac{2}{3h}\right) = -0,233\dots - (0,793\dots)i$$

$$x_3 = \frac{-h}{12} - \frac{1}{3h} + \frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{h}{6} - \frac{2}{3h}\right) = -0,233\dots + (0,793\dots)i$$

dir [10]. Yukarıdaki sistemde x_1, x_2, x_3 köklerini yerlerine koyarsak, k_1, k_2, k_3 katsayıları, $h = \sqrt[3]{116 + 12\sqrt{93}}$ olmak üzere

$$k_1 = \frac{2h(h+2)}{(h^3+8)}$$

$$k_2 = \frac{[-(h+2) + i\sqrt{3}(h-2)]h}{(h^3+8)}$$

$$k_3 = \frac{h[-(h+2) - i\sqrt{3}(h-2)]}{(h^3+8)}$$

olarak bulunur [10]. Şimdi bu değerleri Eş. 2.29 'da yerlerine yazarsak, Fibonacci 2-sayılarının Binet formülü

$$F_2(n) = \frac{2h(h+2)}{(h^3+8)}\left(\frac{h}{6} + \frac{2}{3h} + \frac{1}{3}\right)^n + \frac{[-(h+2) + i\sqrt{3}(h-2)]h}{(h^3+8)}\left[\frac{-h}{12} - \frac{1}{3h} + \frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{h}{6} - \frac{2}{3h}\right)\right]^n$$

$$+ \frac{h[-(h+2) - i\sqrt{3}(h-2)]}{(h^3+8)} \left[\frac{-h}{12} - \frac{1}{3h} + \frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{h}{6} - \frac{2}{3h} \right) \right]^n \quad (2.31)$$

elde edilir.

Şimdi Fibonacci 3-sayılarının Binet formülünü verelim. $p = 3$ için, Eş. 2.1 'den

$$F_3(n) = F_3(n-1) + F_3(n-4) \quad (2.32)$$

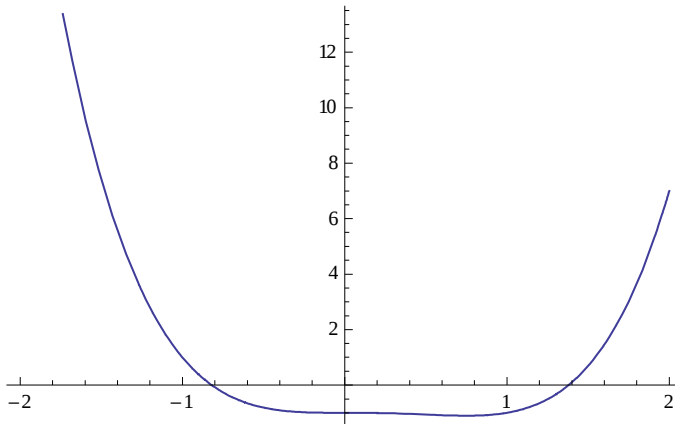
$$F_3(0) = 0, F_3(1) = F_3(2) = F_3(3) = 1$$

$$x^4 = x^3 + 1 \quad (\text{Fibonacci 3-sayılarının karakteristik denklemi}) \quad (2.33)$$

eşitliklerini elde ederiz. İlk olarak Eş. 2.33 'deki karakteristik denklemin köklerini analiz edelim. $h(x) = x^4 - x^3 - 1$ fonksiyonunu ele alırsak, $h(x)$ 'in birinci mertebeden türevi

$$h'(x) = 4x^3 - 3x^2$$

dir. Kritik noktalar ise $x_1 = 0$ ve $x_2 = \frac{3}{4}$ dür. Dolayısıyla $h(x)$ fonksiyonu, $(-\infty, 0)$ ve $(0, \frac{3}{4})$ aralıklarında azalan, $(\frac{3}{4}, \infty)$ aralığında artandır.



Şekil 2.2. $h(x)$ fonksiyonunun grafiği

Şekil 2.2 'den görüldüğü gibi, $h(x) = x^4 - x^3 - 1$ fonksiyonu x -eksenini iki noktada keser. Bu noktalar $x_1 = 1,3803$ ve $x_2 = -0,81917$ 'dir. Dolayısıyla Eş. 2.33, iki reel ve iki kompleks köke sahiptir. Eş. 2.33 'ün kökleri

$$x_1 = 1,3803 ; x_2 = -0,819... ; x_3 = 0,219... + (0,914...)i ; x_4 = 0,219... - (0,914...)i$$

dir [10]. Eş. 2.24 'ü ve Eş. 2.25 'i kullanırsak

$$F_3(n) = k_1(x_1)^n + k_2(x_2)^n + k_3(x_3)^n + k_4(x_4)^n \quad (2.34)$$

formülünü ve

$$\left. \begin{aligned} F_3(0) &= k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0 \\ F_3(1) &= k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4 = 1 \\ F_3(2) &= k_1(x_1)^2 + k_2(x_2)^2 + k_3(x_3)^2 + k_4(x_4)^2 = 1 \\ F_3(3) &= k_1(x_1)^3 + k_2(x_2)^3 + k_3(x_3)^3 + k_4(x_4)^3 = 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

sistemini elde ederiz. Yukarıdaki sistemde x_1, x_2, x_3, x_4 köklerini yerlerine yazarsak, k_1, k_2, k_3, k_4 katsayılarını

$$k_1 = 0,396... ; k_2 = -0,159... ;$$

$$k_3 = -0,118... - (0,204...)i ; k_4 = -0,118... + (0,204...)i$$

olarak buluruz. Şimdi bu değerleri Eş. 2.34 'de yerlerine yazarsak, Fibonacci 3-sayılarının Binet formülü

$$\begin{aligned} F_3(n) &= 0,396 (1,38)^n - 0,159 (-0,819)^n + (-0,118 - 0,204i) 0,219 + 0,914i)^n \\ &\quad + (-0,118 + 0,204i)(0,219 - 0,914i)^n \end{aligned}$$

olur.

Şimdi Fibonacci 4-sayılarının Binet formülünü verelim. $p = 4$ için, Eş. 2.1 'den

$$F_4(n) = F_4(n-1) + F_4(n-5) \quad (2.36)$$

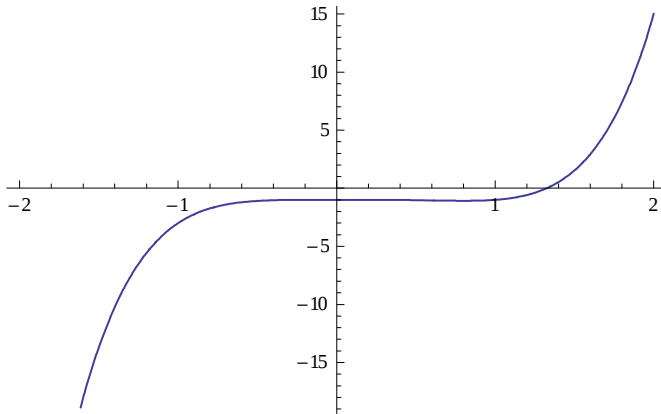
$$F_4(0) = 0, F_4(1) = F_4(2) = F_4(3) = F_4(4) = 1$$

$$x^5 = x^4 + 1 \quad (\text{Fibonacci 4-sayılarının karakteristik denklemi}) \quad (2.37)$$

eşitlikleri elde edilir. İlk olarak Eş. 2.37 'deki karakteristik denklemin köklerini analiz edelim. $g(x) = x^5 - x^4 - 1$ fonksiyonunu ele alırsak, $g(x)$ 'in birinci mertebeden türevi

$$g'(x) = 5x^4 - 4x^3$$

dür. Kritik noktalar ise $x_1 = 0$ ve $x_2 = \frac{4}{5}$ 'dir. Dolayısıyla $g(x)$ fonksiyonu, $(-\infty, 0)$ ve $(\frac{4}{5}, \infty)$ aralıklarında artan, $(0, \frac{4}{5})$ aralığında azalır.



Şekil 2.3. $g(x) = x^5 - x^4 - 1$ fonksiyonunun grafiği

Şekil 2.3 'den görüldüğü gibi, $g(x) = x^5 - x^4 - 1$ fonksiyonu x -eksenini yalnızca bir noktada keser. Bu nokta $x_1 = 1,3247$ 'dir. Dolayısıyla Eş. 2.37, bir reel köke ve dört kompleks köke sahiptir. Eş. 2.38 'in kökleri, $h = \sqrt[3]{108+12\sqrt{69}}$ için

$$x_1 = \frac{h}{6} + \frac{2}{h} = 1,3247;$$

$$x_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,5 - 0,866i;$$

$$x_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,5 + 0,866i;$$

$$x_4 = -\left(\frac{h}{12} + \frac{1}{h}\right) - i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{h}{6} - \frac{2}{h}\right) = -0,662 - 0,562i;$$

$$x_5 = -\left(\frac{h}{12} + \frac{1}{h}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{h}{6} - \frac{2}{h}\right) = -0,662 + 0,562i$$

dir [10]. Eş. 2.24 'den ve Eş. 2.25 'den

$$F_4(n) = k_1(x_1)^n + k_2(x_2)^n + k_3(x_3)^n + k_4(x_4)^n + k_5(x_5)^n \quad (2.38)$$

formülünü ve

$$\left. \begin{aligned} F_4(0) &= k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = 0 \\ F_4(1) &= k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4 + k_5x_5 = 1 \\ F_4(2) &= k_1(x_1)^2 + k_2(x_2)^2 + k_3(x_3)^2 + k_4(x_4)^2 + k_5(x_5)^2 = 1 \\ F_4(3) &= k_1(x_1)^3 + k_2(x_2)^3 + k_3(x_3)^3 + k_4(x_4)^3 + k_5(x_5)^3 = 1 \\ F_4(4) &= k_1(x_1)^4 + k_2(x_2)^4 + k_3(x_3)^4 + k_4(x_4)^4 + k_5(x_5)^4 = 1 \end{aligned} \right\}$$

sistemini elde ederiz. Yukarıdaki sistemde x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 köklerini yerlerine yazarsak, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 katsayıları

$$k_1 = 0,380 ; k_2 = -0,171 + 0,206i ; k_3 = -0,071 - 0,206i ; k_4 = -0,119 + 0,046i ;$$

$$k_5 = -0,119 - 0,046i$$

olarak bulunur. Bu değerleri Eş. 2.38 'de yerlerine yazarsak, Fibonacci 4-sayılarının Binet formülü

$$\begin{aligned} F_4(n) = & 0,380 (1,324)^n + (-0,171 + 0,206i)(0,5-0,866i)^n \\ & + (-0,171 - 0,206i)(0,5 + 0,866i)^n \\ & + (-0,119 + 0,046i)(-0,662 - 0,562i)^n \\ & + (-0,119 - 0,046i)(-0,662 + 0,562i)^n \end{aligned}$$

olur.

Şimdi Fibonacci p -sayıları için Eş. 2.24 'de iddia ettiğimiz genelleştirilmiş Binet formülü için bir teorem verelim.

2.5. Teorem

Her $p > 0$ tamsayısı için, herhangi bir $F_p(n)$ ($n \in \mathbb{Z}$) Fibonacci p -sayısı

$$F_p(n) = k_1(x_1)^n + k_2(x_2)^n + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^n$$

formunda yazılır. Burada $x_1, x_2, \dots, x_{p+1}$, Eş. 2.6 'nın kökleridir. $k_1, k_2, \dots, k_{p+1}$ sabitleri, Eş. 2.25 'deki sisteminin çözümünden elde edilen katsayılardır [10].

İspat

Fibonacci p -sayılarının $n = 0, 1, 2, \dots, p$ için Binet formülü karşılıklarını Eş. 2.25 'de belirtmiştik. Şimdi $F_p(p+1)$ sayısını

$$F_p(p+1) = k_1(x_1)^{p+1} + k_2(x_2)^{p+1} + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^{p+1} \quad (2.39)$$

formunda yazalım. Eş. 2.9 ve Eş. 2.39 'dan

$$F_p(p+1) = [k_1(x_1)^p + k_2(x_2)^p + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^p] + [k_1(x_1)^0 + k_2(x_2)^0 + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^0]$$

yazabiliriz. Eş. 2.25 'den dolayı

$$F_p(p+1) = F_p(p) + F_p(0)$$

dir. Dolayısıyla Eş. 2.1, $F_p(p+1)$ Fibonacci p -sayısı için sağlanır. Benzer metotla Eş. 2.9 ve Eş. 2.24 'den, her n pozitif değeri ($F_p(p+2)$, $F_p(p+3)$, ..., $F_p(n)$, ...) için Eş. 2.24 'ün sağlandığını görmek kolaydır.

Şimdi $n = -1, -2, -3, \dots$ için ispatı yapalım. $n = -1$ için, Eş. 2.24 'den

$$F_p(-1) = k_1(x_1)^{-1} + k_2(x_2)^{-1} + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^{-1} \quad (2.40)$$

elde edilir. Eş. 2.8 'den

$$x_k^{n-p-1} = x_k^n - x_k^{n-1} \quad (2.41)$$

olduğunu biliyoruz. Burada $n = p$ için Eş. 2.41

$$x_k^{-1} = x_k^p - x_k^{p-1} \quad (2.42)$$

hâline dönüşür. Şimdi Eş. 2.42 'yi kullanarak Eş. 2.40 'ı yeniden düzenlersek

$$F_p(-1) = [k_1(x_1)^p + k_2(x_2)^p + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^p] - [k_1(x_1)^{p-1} + k_2(x_2)^{p-1} + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^{p-1}]$$

elde edilir. Eş. 2.25 'den dolayı

$$\begin{aligned}
F_p(-1) &= [k_1(x_1)^p + k_2(x_2)^p + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^p] - [k_1(x_1)^{p-1} + k_2(x_2)^{p-1} + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^{p-1}] \\
&= F_p(p) - F_p(p-1) = 0
\end{aligned}$$

olur. Benzer metotla Eş. 2.24 'ün, $n = -2, -3, -4, \dots$ için sağlandığını görmek kolaydır.

Şimdi Lucas p -sayılarının Binet formülünü $p = 2$, $p = 3$ ve $p = 4$ için inceleyeceğiz. Daha sonra Lucas p -sayılarının genelleştirilmiş Binet formülünün ispatını vereceğiz.

Özel olarak $p = 2$ için Eş. 2.26 'dan Lucas 2-sayılarının Binet formülü

$$L_2(n) = (x_1)^n + (x_2)^n + (x_3)^n$$

formunda gösterilir. Burada x_1, x_2, x_3 , Eş. 2.28 'in kökleridir. Başlangıç koşulları ise

$$L_2(0) = 3, L_1(1) = L_2(2) = 1$$

dir. Böylelikle Lucas 2-sayılarının Binet formülü

$$\begin{aligned}
L_2(n) &= \left(\frac{h}{6} + \frac{2}{3h} + \frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{-h}{12} - \frac{1}{3h} + \frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{h}{6} - \frac{2}{3h}\right)\right)^n \\
&\quad + \left(\frac{-h}{12} - \frac{1}{3h} + \frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{h}{6} - \frac{2}{3h}\right)\right)^n
\end{aligned}$$

olur.

Şimdi $p = 3$ için, Eş. 2.26 'dan Lucas 3-sayılarının Binet formülünü yazarsak

$$L_3(n) = (x_1)^n + (x_2)^n + (x_3)^n + (x_4)^n$$

elde ederiz. Burada x_1, x_2, x_3, x_4 , Eş. 2.33 'ün kökleridir. Başlangıç koşulları ise

$$L_3(0) = 4, L_3(1) = L_3(2) = L_3(3) = 1$$

dir. Dolayısıyla Lucas 3-sayılarının Binet formülü

$$L_3(n) = (1,38)^n + (-0,819)^n + (0,219 + 0,914i)^n + (0,219 - 0,914i)^n$$

olur.

Şimdi $p = 4$ için, Eş. 2.26 'dan Lucas 4-sayılarının Binet formülünü

$$L_4(n) = (x_1)^n + (x_2)^n + (x_3)^n + (x_4)^n + (x_5)^n$$

elde ederiz. Burada x_1, x_2, x_3, x_4 ve x_5 Eş. 2.37 'nin kökleridir. Başlangıç koşulları ise

$$L_4(0) = 5, L_4(1) = L_4(2) = L_4(3) = L_4(4) = 1$$

dir. Buradan Lucas 4-sayılarının Binet formülü

$$L_4(n) = \left(\frac{h}{6} + \frac{2}{h}\right)^n + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-h}{12} - \frac{1}{h} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{h}{6} - \frac{2}{h}\right)\right)^n \\ + \left(\frac{-h}{12} - \frac{1}{h} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{h}{6} - \frac{2}{h}\right)\right)^n$$

olur.

Şimdi Lucas p -sayıları için genelleştirilmiş Binet formülünü verelim.

2.6. Teorem

Verilen $p > 0$ tamsayısı için Lucas p -sayılarının Binet formülü, $n \in \mathbb{Z}$ için

$$L_p(n) = (x_1)^n + (x_2)^n + \dots + (x_{p+1})^n \quad (2.43)$$

dir. Burada $x_1, x_2, \dots, x_{p+1}$ Eş. 2.6 'nın kökleridir [10].

İspat

Eş. 2.43 'ü, $n = 0, 1, 2, \dots, p$ için ispatlayalım. $n = 0$ için ifade

$$L_p(0) = (x_1)^0 + (x_2)^0 + \dots + (x_{p+1})^0 = 1 + 1 + \dots + 1 = p+1$$

olur ki Eş. 2.43, $n = 0$ değeri için sağlanır. $n = 1, 2, \dots, p$ için Eş. 2.17 'den

$$L_p(1) = x_1 + x_2 + \dots + x_{p+1} = 1$$

$$L_p(2) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_{p+1})^2 = 1$$

$$L_p(3) = (x_1)^3 + (x_2)^3 + \dots + (x_{p+1})^3 = 1$$

...

$$L_p(p) = (x_1)^p + (x_2)^p + \dots + (x_{p+1})^p = 1$$

olduğu açık bir biçimde görülür. $n = p + 1$ için Eş. 2.26 'dan

$$L_p(p+1) = (x_1)^{p+1} + (x_2)^{p+1} + \dots + (x_{p+1})^{p+1} \quad (2.44)$$

elde edilir. Eş. 2.9 ve Eş. 2.44 'den

$$L_p(p+1) = [(x_1)^p + (x_2)^p + \dots + (x_{p+1})^p] + [(x_1)^0 + (x_2)^0 + \dots + (x_{p+1})^0]$$

yazabiliriz. Eş. 2.26 'nın başlangıç koşullarından

$$L_p(p+1) = L_p(p) + L_p(0)$$

olur. Dolayısıyla $n = p + 1$ için Eş. 2.2 sağlanır. Eş. 2.17 'yi ve Teorem 2.5 'i göz önüne alırsak, benzer metotla her n değeri için, Eş. 2.2 'nin sağlandığı görülür.

3. FİBONACCİ VE LUCAS p -SAYILARININ SÜREKLİ FONKSİYONLARI

Bu bölümde Fibonacci ve Lucas p -sayılarının sürekli fonksiyonlarını ve bunların bazı özelliklerini inceleyeceğiz. Esas hedefimiz, Fibonacci ve Lucas sayıları için tanımlanan sinusoidal Fibonacci ve Lucas sürekli fonksiyonlarını, Fibonacci ve Lucas p -sayıları için genelleştirmektir.

Sinusoidal Fibonacci ve Lucas sürekli fonksiyonları sırasıyla

$$F(x) = \frac{\tau^x - \cos(\pi x) \tau^{-x}}{\sqrt{5}} \quad (3.1)$$

$$L(x) = \tau^x + \cos(\pi x) \tau^{-x} \quad (3.2)$$

biçiminde tanımlanır [14]. Burada $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dir.

Şimdi Eş. 2.28 'in köklerini göz önüne alalım. Bu kökler, $h = \sqrt[3]{116+12\sqrt{93}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(\frac{h^2 + 2h + 4}{6h} \right) \\ x_2 &= \left(\frac{-h}{12} - \frac{1}{3h} + \frac{1}{3} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{h}{6} - \frac{2}{3h} \right) \right) \\ x_3 &= \left(\frac{-h}{12} - \frac{1}{3h} + \frac{1}{3} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{h}{6} - \frac{2}{3h} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

dir. Yukarıdaki kökleri simgesel olarak kısaltmak için

$$c = \frac{-h}{12} - \frac{1}{3h} + \frac{1}{3}, \quad d = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{h}{6} - \frac{2}{3h} \right) \quad (3.4)$$

gösterimlerini kullanalım. Ayrıca Moivre formülünü, $\theta = \arccos \frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}$ olmak üzere

$$(c \pm id)^n = (c^2 + d^2)^{n/2} [\cos(n\theta) \pm i \sin(n\theta)] \quad (3.5)$$

formunda ele alalım.

Öncelikle Eş. 3.5 'i Eş. 3.3 'de, daha sonra Eş. 3.3 'ü Lucas 2-sayılarının Binet formülünde yerine koyarsak $n \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned} L_2(n) &= \left(\frac{h^2 + 2h + 4}{6h} \right)^n + (c^2 + d^2)^{n/2} [\cos(n\theta) - i \sin(n\theta)] \\ &\quad + (c^2 + d^2)^{n/2} [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)] \\ &= \left(\frac{h^2 + 2h + 4}{6h} \right)^n + 2(c^2 + d^2)^{n/2} \cos(n\theta) \\ &= \left(\frac{h^2 + 2h + 4}{6h} \right)^n + \left(\frac{(h-2)\sqrt{h^2 + 2h + 4}}{6h} \right)^n \cos \left[n \arccos \left(-\frac{h-2}{2\sqrt{h^2 + 2h + 4}} \right) \right] \quad (3.6) \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer Eş. 3.6 'da tamsayılar kümesine ait olan n değişkeni ile reel sayılar kümesine ait olan x değişkenini yer değiştirirsek

$$L_2(x) = \left(\frac{h^2 + 2h + 4}{6h} \right)^x + \left(\frac{(h-2)\sqrt{h^2 + 2h + 4}}{6h} \right)^x \cos \left[x \arccos \left(-\frac{h-2}{2\sqrt{h^2 + 2h + 4}} \right) \right] \quad (3.7)$$

elde edilir. Eş. 3.7 , Lucas 2-sayılarının sürekli fonksiyonudur [16].

Şimdi Eş. 2.31 'i göz önüne alalım. Eş. 3.4 'e ilave olarak

$$a = \frac{-(h+2)h}{(h^3+8)}, \quad b = \frac{\sqrt{3}(h-2)h}{(h^3+8)} \quad (3.8)$$

simgesel kısaltmalarını kullanırsak, Eş. 2.31

$$F_2(n) = \frac{2h(h+2)}{(h^3+8)} \left(\frac{h^2+2h+4}{6h} \right)^n + (a+ib)(c-id)^n + (a-ib)(c+id)^n \quad (3.9)$$

hâline dönüşür. Eğer Eş. 3.5 'i ve Eş. 3.9 'u kullanarak gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$\begin{aligned} F_2(n) &= \frac{2h(h+2)}{(h^3+8)} \left(\frac{h^2+2h+4}{6h} \right)^n + (a+ib)(c^2+d^2)^{n/2} [\cos(n\theta) - i \sin(n\theta)] \\ &\quad + (a-ib)(c^2+d^2)^{n/2} [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)] \\ &= \frac{2h(h+2)}{(h^3+8)} \left(\frac{h^2+2h+4}{6h} \right)^n + 2(c^2+d^2)^{n/2} [a \cos(n\theta) - b(-i)^2 \sin(n\theta)] \\ &= \frac{2h(h+2)}{(h^3+8)} \left(\frac{h^2+2h+4}{6h} \right)^n + 2\sqrt{a^2+b^2} (c^2+d^2)^{n/2} \cos(n\theta - \eta) \end{aligned}$$

olur. Burada $\eta = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} F_2(n) &= \frac{2h(h+2)}{(h^3+8)} \left(\frac{h^2+2h+4}{6h} \right)^n + \frac{4h\sqrt{h^2-2h+4}}{h^3+8} \left(\frac{(h-2)\sqrt{h^2+2h+4}}{6h} \right)^n \\ &\quad \times \cos \left[n \arccos \left(\frac{2-h}{2\sqrt{h^2+2h+4}} \right) - \arccos \left(-\frac{2+h}{2\sqrt{h^2-2h+4}} \right) \right] \quad (3.10) \end{aligned}$$

dir. Eğer Eş. 3.10 'da tamsayılar kümesine ait olan n değişkeni ile reel sayılar kümesine ait olan x değişkenini yer değiştirirsek

$$F_2(x) = \frac{2h(h+2)}{(h^3+8)} \left(\frac{h^2+2h+4}{6h} \right)^x + \frac{4h\sqrt{h^2-2h+4}}{h^3+8} \left(\frac{(h-2)\sqrt{h^2+2h+4}}{6h} \right)^x \\ \times \cos \left[x \cdot \arccos \left(\frac{2-h}{2\sqrt{h^2+2h+4}} \right) - \arccos \left(-\frac{2+h}{2\sqrt{h^2-2h+4}} \right) \right]$$

elde edilir. Burada $F_2(x)$, Fibonacci 2-sayılarının sürekli fonksiyonudur [16].

Şimdi Fibonacci ve Lucas 2-sayılarının indirgeme özellikleri ile Fibonacci ve Lucas 2-sayılarının sürekli fonksiyonlarının rekürans özelliklerini karşılaştırsak

$$F_2(n) = F_2(n-1) + F_2(n-3) \longrightarrow F_2(x) = F_2(x-1) + F_2(x-3)$$

$$L_2(n) = L_2(n-1) + L_2(n-3) \longrightarrow L_2(x) = L_2(x-1) + L_2(x-3)$$

olduğu görülür.

Şimdi Fibonacci ve Lucas p -sayılarının sürekli fonksiyonlarının genel hâlini inceleyelim.

Eğer p çiftse, Eş. 2.6 'nın tek reel kökü vardır. Diğer p tane kök ise komplekstir. Eşlenik kompleks kökleri $(c_t + i.d_t)$ ve $(c_t - i.d_t)$ olarak gösterelim. Burada $t = 1, 2, \dots, p/2$ dir. Böylelikle Lucas p -sayılarının Binet formülü

$$L_p(n) = (x_1)^n + (c_1 + i.d_1)^n + (c_1 - i.d_1)^n + \dots + (c_{p/2} + i.d_{p/2})^n + (c_{p/2} - i.d_{p/2})^n \quad (3.11)$$

biçiminde yazılabilir. Eş. 3.5 'i kullanır ve Eş. 3.10 'daki gibi basitleştirirsek,

$$\begin{aligned}
L_p(n) = & (x_1)^n + 2(c_1^2 + d_1^2)^{n/2} \cos \left(n \cdot \arccos \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + d_1^2}} \right) \\
& + 2(c_2^2 + d_2^2)^{n/2} \cos \left(n \cdot \arccos \frac{c_2}{\sqrt{c_2^2 + d_2^2}} \right) + \dots \\
& + 2(c_{p/2}^2 + d_{p/2}^2)^{n/2} \cos \left(n \cdot \arccos \frac{c_{p/2}}{\sqrt{c_{p/2}^2 + d_{p/2}^2}} \right)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

elde ederiz.

Eğer p tekse Eş. 2.6 'nın birbiriyle ters işaretli iki reel kökü vardır. Diğer $p - 1$ kök ise komplekstir. Eşlenik kompleks kökleri $(c_t + i.d_t)$ ve $(c_t - i.d_t)$ ile gösterelim.

Burada $t = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$ 'dir. Böylelikle Lucas p -sayılarının Binet formülü

$$L_p(n) = (x_1)^n + (x_2)^n + (c_1 + i.d_1)^n + (c_1 - i.d_1)^n + \dots + (c_{(p-1)/2} + i.d_{(p-1)/2})^n + (c_{(p-1)/2} - i.d_{(p-1)/2})^n$$

biçiminde yazılabilir. Eş. 3.5 'i kullanır ve Eş. 3.10 'daki gibi basitleştirirsek

$$\begin{aligned}
L_p(n) = & (x_1)^n + (x_2)^n \cos(n\pi) + 2(c_1^2 + d_1^2)^{n/2} \cos\left(n \arccos \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + d_1^2}}\right) \\
& + 2(c_2^2 + d_2^2)^{n/2} \cos\left(n \arccos \frac{c_2}{\sqrt{c_2^2 + d_2^2}}\right) \\
& + \dots + 2(c_{(p-1)/2}^2 + d_{(p-1)/2}^2)^{n/2} \cos\left(n \arccos \frac{c_{(p-1)/2}}{\sqrt{c_{(p-1)/2}^2 + d_{(p-1)/2}^2}}\right) \quad (3.13)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Eğer Eş. 3.12 ve Eş. 3.13 'de, tamsayılar kümesine ait olan n değişkeni ile reel sayılar kümesine ait olan x değişkenini yer değiştirirsek, Lucas p -sayılarının sürekli fonksiyonları, p 'nin çift değerleri için

$$\begin{aligned}
L_p(x) = & (x_1)^x + 2(c_1^2 + d_1^2)^{x/2} \cos\left(x \arccos \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + d_1^2}}\right) \\
& + 2(c_2^2 + d_2^2)^{x/2} \cos\left(x \arccos \frac{c_2}{\sqrt{c_2^2 + d_2^2}}\right) + \dots \\
& + 2(c_{p/2}^2 + d_{p/2}^2)^{x/2} \cos\left(x \arccos \frac{c_{p/2}}{\sqrt{c_{p/2}^2 + d_{p/2}^2}}\right)
\end{aligned}$$

p 'nin tek değerleri için

$$\begin{aligned}
L_p(x) = & (x_1)^x + (x_2)^x \cos(\pi x) + 2(c_1^2 + d_1^2)^{x/2} \cos\left(x \cdot \arccos \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + d_1^2}}\right) \\
& + 2(c_2^2 + d_2^2)^{x/2} \cos\left(x \cdot \arccos \frac{c_2}{\sqrt{c_2^2 + d_2^2}}\right) \\
& + \dots + 2(c_{(p-1)/2}^2 + d_{(p-1)/2}^2)^{x/2} \cos\left(x \cdot \arccos \frac{c_{(p-1)/2}}{\sqrt{c_{(p-1)/2}^2 + d_{(p-1)/2}^2}}\right)
\end{aligned}$$

olur [16].

Şimdi Eş. 2.24 ve Eş. 2.25 'i ele alalım. Eğer p çiftse, k_1 reel sayıdır ve diğer sabit katsayılar p tane kompleks sayıdan oluşur. Bu sayıları, $t = 1, 2, \dots, p/2$ olmak üzere $(a_t + i.b_t)$ ve $(a_t - i.b_t)$ olarak gösterelim. Buradan Eş. 2.24

$$\begin{aligned}
F_p(n) = & k_1(x_1)^n + (a_1 - i.b_1)(c_1 + i.d_1)^n + (a_1 + i.b_1)(c_1 - i.d_1)^n + \dots \\
& + (a_{p/2} - i.b_{p/2})(c_{p/2} + i.d_{p/2})^n + (a_{p/2} + i.b_{p/2})(c_{p/2} - i.d_{p/2})^n
\end{aligned} \tag{3.14}$$

hâline dönüşür. Şimdi

$$\begin{aligned}
(a + i.b)(c - i.d)^n + (a - i.b)(c + i.d)^n = & a[(c - i.d)^n + (c + i.d)^n] \\
& + i.b[(c - i.d)^n - (c + i.d)^n]
\end{aligned} \tag{3.15}$$

eşitliğinden faydalanacağız. Eş. 3.15 ve Eş. 3.5 'den

$$\begin{aligned}
& 2a(c^2 + d^2)^{n/2} \cos(n\theta) + 2i.b(c^2 + d^2)^{n/2}(-i)\sin(n\theta) = 2(c^2 + d^2)^{n/2}[a.\cos(n\theta) \\
& + b.\sin(n\theta)] = 2(c^2 + d^2)^{n/2} \sqrt{a^2 + b^2} \cos(n\theta - \gamma)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

olur. Burada

$$\theta = \arccos \frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}} \quad \text{ve} \quad \gamma = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

dir. Eş. 3.14, Eş. 3.15 ve Eş. 3.16 'yı göz önüne alırsak

$$\begin{aligned}
F_p(n) &= k_1(x_1)^n + 2(c_1^2 + d_1^2)^{n/2} \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cos(n\theta_1 - \gamma_1) \\
&+ 2(c_2^2 + d_2^2)^{n/2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \cos(n\theta_2 - \gamma_2) + \dots \\
&+ 2(c_{p/2}^2 + d_{p/2}^2)^{n/2} \sqrt{a_{p/2}^2 + b_{p/2}^2} \cos(n\theta_{p/2} - \gamma_{p/2})
\end{aligned} \tag{3.17}$$

olur.

Eğer p tekse, k_1 ve k_2 sabit katsayıları reel sayılardır. Diğer $p-1$ tane katsayı ise kompleksdir. Bu kompleks katsayıları, $t = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$ için $(a_t + i.b_t)$ ve $(a_t - i.b_t)$ ile gösterelim. Eş. 2.24 'den

$$\begin{aligned}
F_p(n) &= k_1(x_1)^n + k_2(x_2)^n + (a_1 - i.b_1)(c_1 + i.d_1)^n + (a_1 + i.b_1)(c_1 - i.d_1)^n + \dots \\
&+ (a_{(p-1)/2} - i.b_{(p-1)/2})(c_{(p-1)/2} + i.d_{(p-1)/2})^n + (a_{(p-1)/2} \\
&+ i.b_{(p-1)/2})(c_{(p-1)/2} - i.d_{(p-1)/2})^n
\end{aligned} \tag{3.18}$$

dir. Eş. 3.16 ve Eş. 3.17 'yi kullanır ve gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$\begin{aligned}
F_p(n) &= k_1(x_1)^n + (x_2)^n \cos(\pi n) + 2(c_1^2 + d_1^2)^{n/2} \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cos(n\theta_1 - \gamma_1) \\
&+ 2(c_2^2 + d_2^2)^{n/2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \cos(n\theta_2 - \gamma_2) + \dots \\
&+ 2(c_{(p-1)/2}^2 + d_{(p-1)/2}^2)^{n/2} \sqrt{a_{(p-1)/2}^2 + b_{(p-1)/2}^2} \cos(n\theta_{(p-1)/2} - \gamma_{(p-1)/2}) \quad (3.19)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer tamsayılar kümesine ait olan n değişkeni ile reel sayılar kümesine ait olan x değişkenini yer değiştirirsek, p 'nin çift değerleri için

$$\begin{aligned}
F_p(x) &= k_1(x_1)^x \\
&+ 2. \sum_{i=1}^{p/2} (c_i^2 + d_i^2)^{x/2} \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \cos \left(x \cdot \arccos \frac{c_i}{\sqrt{c_i^2 + d_i^2}} - \arccos \frac{a_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}} \right)
\end{aligned}$$

ve p 'nin tek değeri için

$$\begin{aligned}
F_p(x) &= k_1(x_1)^x + k_2(x_2)^x \cos(\pi x) \\
&+ 2. \sum_{i=1}^{(p-1)/2} (c_i^2 + d_i^2)^{x/2} \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \cos \left(x \cdot \arccos \frac{c_i}{\sqrt{c_i^2 + d_i^2}} - \arccos \frac{a_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}} \right)
\end{aligned}$$

sürekli fonksiyonları elde edilir [16].

4. FİBONACCİ VE LUCAS p -SAYILARININ m -GENİŞLEMESİ

Bu bölümde Fibonacci ve Lucas p -sayılarının m -genişlemeleri tanımlarını vereceğiz. Daha sonra bu sayıların bazı özelliklerini ve Binet formüllerini vereceğiz.

4.1. Tanım

Verilen $p \geq 0$ tamsayısı ve $m > 0$ reel sayısı için Fibonacci p -sayılarının m -genişlemesi, $n \geq p + 2$ için

$$F_{p,m}(n) = mF_{p,m}(n-1) + F_{p,m}(n-p-1) \quad (4.1)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Burada $n = 1, 2, \dots, p + 1$ için verilen başlangıç koşulları $F_{p,m}(n) = m^{n-1}$ dir [17].

Eğer $p = 1$, $F_{1,m}(1) = 1$ ve $F_{1,m}(2) = m$ alırsak

$$F_{1,m}(n) = mF_{1,m}(n-1) + F_{1,m}(n-2)$$

indirgeme bağıntısı elde edilir. Bu indirgeme bağıntısı Fibonacci m -sayılarını üretir.

Daha önce Fibonacci p -sayılarının $n \leq 0$ için değerlerini Eş. 2.1 'deki Fibonacci p -sayılarının indirgeme bağıntısı yardımıyla göstermiştik. Benzer metodu Fibonacci (p,m) -sayıları için uygularsak

$$F_{p,m}(0) = F_{p,m}(-1) = \dots = F_{p,m}(-p + 1) = 0;$$

$$F_{p,m}(-p) = 1;$$

$$F_{p,m}(-p-1) = F_{p,m}(-p-2) = \dots = F_{p,m}(-2p+1) = 0; \quad (4.2)$$

$$F_{p,m}(-2p) = -m$$

$$F_{p,m}(-2p-1) = 1$$

$$F_{p,m}(-2p-2) = 0$$

elde edilir. Bu şekilde her $n \leq 0$ değeri için dizi devam ettirilebilir.

4.2. Tanım

Verilen $p > 0$ tamsayısı ve $m > 0$ reel sayısı için Lucas p -sayılarının m -genişlemesi

$$L_{p,m}(n) = mL_{p,m}(n-1) + L_{p,m}(n-p-1) \quad (4.3)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Burada $L_{p,m}(0) = p+1$ ve $n = 1, 2, \dots, p$ için başlangıç koşulları $L_{p,m}(n) = m^n$ 'dir [17].

Eş. 4.1 'i göz önüne alırsak, Fibonacci p -sayılarının m -genişlemesinin karakteristik denklemi

$$x^{p+1} - mx^p - 1 = 0 \quad (4.4)$$

dır. Cebirin Esas Teoreminden dolayı, bu denklemin $p+1$ kökü olup bu kökleri $x_1, x_2, \dots, x_{p+1}$ olarak gösterelim. Eş. 4.4 'ün, $p > 0$ için daima bir pozitif reel kökü vardır[17]. Çünkü Cebirdeki Descartes'in İşaretler Kuralından, Eş. 4.4 'ün katsayılar dizisi $1, -m, -1$ olup, $m > 0$ olduğundan yalnızca bir defa işaret (pozitiften negatife) değiştirmiştir. Eş. 4.4 'ün pozitif reel kökü, altın (p,m) -oranı olarak kabul edilir ve $\Phi_{p,m}$ ile gösterilir [17]. Özel olarak $m = 1$ alınırsa $\Phi_{p,1}$ ifadesi, daha önceden gösterilen altın p -oranı olan τ_p 'ye eşit olur.

Daha önceki bölümlerde, Fibonacci p -sayıları için verdiğimiz bazı özellikler benzer biçimde Fibonacci (p,m) -sayıları için de geçerlidir. Örneğin, $n \in \mathbb{Z}$ ve $k = 1, 2, \dots, p+1$ için

$$x_k^n = mx_k^{n-1} + x_k^{n-p-1} = x_k x_k^{n-1} \quad (4.5)$$

dir. Özel olarak $x_k = \Phi_{p,m}$ alırsak

$$\Phi_{p,m}^{p+1} = m \cdot \Phi_{p,m}^p + 1$$

ve

$$\Phi_{p,m}^n = m \cdot \Phi_{p,m}^{n-1} + \Phi_{p,m}^{n-p-1} = \Phi_{p,m} \Phi_{p,m}^{n-1}$$

elde edilir.

Şimdi Eş. 4.4 'ün kökleri ile ilgili ispatsız iki teorem vereceğiz.

4.1. Teorem

Verilen $p > 0$ tamsayısı $m > 0$ reel sayısı için $x_1, x_2, \dots, x_{p+1}$ Eş. 4.4 'ün kökleri olmak üzere

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{p+1} = m$$

$$(x_1 x_2 + \dots + x_1 x_{p+1}) + (x_2 x_3 + \dots + x_2 x_{p+1}) + \dots + (x_{p-1} x_p + x_{p-1} x_{p+1}) + x_p x_{p+1} = 0$$

$$(x_1 x_2 x_3 + \dots + x_1 x_p x_{p+1}) + (x_2 x_3 x_4 + \dots + x_2 x_p x_{p+1}) + \dots + x_{p-1} x_p x_{p+1} = 0$$

...

$$x_1 x_2 \dots x_{p-2} x_{p-1} x_p + x_1 x_3 x_4 \dots x_{p-1} x_p x_{p+1} + \dots + x_2 x_3 x_4 \dots x_{p-1} x_p x_{p+1} = 0$$

$$x_1 x_2 \dots x_{p-1} x_p x_{p+1} = (-1)^p$$

dir [17].

Teorem 4.1 'in ispatı, Teorem 2.2 'nin ispatına benzer şekilde yapılır.

4.2. Teorem

$x_1, x_2, \dots, x_{p+1}$ Eş. 4.4 'ün kökleri ve $p = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere $k = 1, 2, \dots, p$ için

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_{p+1})^k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_p^k + x_{p+1}^k = m^k$$

dir [17].

Teorem 4.2 'nin ispatı, Teorem 2.3 'ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Şimdi Fibonacci ve Lucas p -sayılarının m -genişlemesinin Binet formüllerini verelim.

4.3. Teorem

Verilen $p \geq 1$ ve $m \geq 1$ tamsayıları için herhangi Fibonacci p -sayısının m -genişlemesi $F_{p,m}(n)$,

$$F_{p,m}(n) = k_1(x_1)^n + k_2(x_2)^n + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^n \quad (4.6)$$

biçiminde ifade edilir. Burada $x_1, x_2, \dots, x_{p+1}$, Eş. 4.4 'deki karakteristik denklemin kökleri ve $k_1, k_2, \dots, k_{p+1}$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{p,m}(0) = k_1 + k_2 + \dots + k_{p+1} = 0; \\ F_{p,m}(1) = k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_{p+1}x_{p+1} = 1; \\ F_{p,m}(2) = k_1(x_1)^2 + k_2(x_2)^2 + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^2 = m; \\ \dots; \\ F_{p,m}(p) = k_1(x_1)^p + k_2(x_2)^p + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^p = m^{p-1} \\ F_{p,m}(p+1) = k_1(x_1)^{p+1} + k_2(x_2)^{p+1} + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^{p+1} = m^p \end{array} \right. \quad (4.7)$$

sisteminden elde edilen katsayılarıdır [17].

İspat

Fibonacci (p,m) -sayılarının başlangıç koşulları, $1 \leq n \leq p+1$ için $F_{p,m}(n) = m^{n-1}$ 'dir. Ayrıca $F_{p,m}(0) = 0$ olduğu bilinmektedir. Başlangıç koşullarını göz önüne alır ve $n = 0, 1, 2, \dots, p+1$ değerlerini Eş. 4.6 'da yerlerine yazarsak, Eş. 4.7 elde edilir. Şimdi Eş. 4.6 'yı tümevarımla ispatlayalım. Kabul edelim ki, $n_0 \geq p+2$ ($n_0 \in \mathbb{Z}$) olmak üzere iddia $n < n_0$ için doğru olsun. $n = n_0$ alıp Eş. 4.5 'i kullanırsak

$$\begin{aligned} k_1(x_1)^{n_0} + k_2(x_2)^{n_0} + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^{n_0} &= k_1(m(x_1)^{n_0-1} + (x_1)^{n_0-p-1}) \\ &+ k_2(m(x_2)^{n_0-1} + (x_2)^{n_0-p-1}) + \dots + k_{p+1}(m(x_{p+1})^{n_0-1} + (x_{p+1})^{n_0-p-1}) \\ &= m(k_1(x_1)^{n_0-1} + k_2(x_2)^{n_0-1} + \dots + k_{p+1}x_{p+1})^{n_0-1} \\ &+ (k_1(x_1)^{n_0-p-1} + k_2(x_2)^{n_0-p-1} + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^{n_0-p-1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Tümevarım hipotezinden

$$k_1(x_1)^{n_0-1} + k_2(x_2)^{n_0-1} + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^{n_0-1} = F_{p,m}(n_0 - 1)$$

ve

$$k_1(x_1)^{n_0-p-1} + k_2(x_2)^{n_0-p-1} + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^{n_0-p-1} = F_{p,m}(n_0 - p - 1)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} k_1(x_1)^{n_0} + k_2(x_2)^{n_0} + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^{n_0} &= m.F_{p,m}(n_0 - 1) + F_{p,m}(n_0 - p - 1) \\ &= F_{p,m}(n_0) \end{aligned}$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

4.4. Teorem

Lucas p -sayılarının m -genişlemesinin Binet formülü

$$L_{p,m}(n) = (x_1)^n + (x_2)^n + \dots + (x_{p+1})^n \quad (4.8)$$

dir. Burada $n \in \mathbb{Z}$ ve $x_1, x_2, \dots, x_{p+1}$ Eş. 4.4 'ün kökleridir[17].

İspat

$n = 0$ için Eş. 4.8 'i yeniden yazarsak

$$L_{p,m}(0) = (x_1)^0 + (x_2)^0 + \dots + (x_{p+1})^0 = 1 + 1 + \dots + 1 = p + 1$$

elde edilir. Şimdi $n = 1, 2, \dots, p$ değerlerini Eş. 4.8 'de yerine yazarsak

$$L_{p,m}(1) = x_1 + x_2 + \dots + x_{p+1}$$

$$L_{p,m}(2) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_{p+1})^2$$

$$L_{p,m}(3) = (x_1)^3 + (x_2)^3 + \cdots + (x_{p+1})^3$$

...

$$L_{p,m}(p) = (x_1)^p + (x_2)^p + \cdots + (x_{p+1})^p$$

elde edilir. Teorem 4.2 'den dolayı bu ifadeler sırasıyla $m, m^2, \dots, m^p$ 'ye eşittir. Dolayısıyla $n = 1, 2, \dots, p$ için Eş. 4.8 ispatlanmış olur. İspatın bundan sonraki kısmı Teorem 4.3 'e benzer şekilde tümevarımla yapılır.

5. SONUÇ

İlk bölümde Fibonacci ve Lucas sayılarının önemi ifade edilmiş, Fibonacci ve Lucas sayıları hakkında çeşitli bilgiler verilmiştir. Ayrıca Binet formülleri, Fibonacci Q -matrisi, Fibonacci m -sayıları ve Lucas m -sayıları hakkında kısa bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde Fibonacci ve Lucas p -sayılarının tanımları, bazı özellikleri ve teoremleri incelenmiştir. Ayrıca Fibonacci ve Lucas p -sayılarının Binet formülleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde Fibonacci ve Lucas p -sayılarının sürekli fonksiyonları verilmiş, bu sayılar ile sürekli fonksiyonlarının arasındaki indirgeme özellikleri karşılaştırılmıştır.

Dördüncü bölümde Fibonacci ve Lucas p -sayılarının m -genişlemesi tanımları verilmiştir. Bu tanımların yardımıyla Fibonacci ve Lucas p -sayılarının m -genişlemesinin Binet formülleri gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Adams, R. A., "Calculus : A Complete Course 5th ed.", **Addison Wesley**, 68-70, (2002).
2. Vajda, S., "Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section", **Halsted Press**, Newyork, 10-100 (1989).
3. Hogatt Jr., V. E., "The Fibonacci and Lucas Numbers", **Houghton Mifflin**, Boston, 1-70 (1969).
4. Dunlap, R. A., "The Golden Ratio and Fibonacci Numbers", **World Scientific Press**, 5-45 (1997).
5. Koshy, T., "Fibonacci and Lucas Numbers with Applications", **A Wiley-Interscience Publication**, Canada, 363-369 (2001).
6. Stakhov, A. P., "Fibonacci Matrices, A Generalization of the Cassini Formula, and A New Coding Theory", **Chaos, Solitons & Fractals**, 30 (1): 56-66 (2006).
7. Falcon, S., Plaza, A., "On the Fibonacci k -numbers", **Chaos, Solitons & Fractals**, 32 (5): 1615-1624 (2007).
8. Falcon, S., Plaza, A., "The k -Fibonacci Hyperbolic Functions", **Chaos, Solitons & Fractals**, 38 (2): 409-420 (2008).
9. Stakhov, A. P., "Introduction into Algorithmic Measurement Theory", **Publishing House Soviet Radio**, (1977).
10. Stakhov, A. P., Rozin, B., "Theory of Binet Formulas for Fibonacci and Lucas p -numbers", **Chaos, Solitons & Fractals**, 27 (5): 1162-1177 (2006).
11. Stakhov, A. P., "A Generalization of the Fibonacci Q -matrix", **Reports of the National Academy of Science of Ukraine**, 9: 46-49 (1999).
12. Stakhov, A. P., "The Mathematics of Harmony : From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science", **World Scientific Publishing**, Singapore, 186-253 (2009).
13. Stakhov, A. P., Rozin, B., "The Golden Algebraic Equations", **Chaos, Solitons & Fractals**, 27 (5): 1415-1421 (2006).
14. Stakhov, A. P., Rozin, B., "On a New Class of Hyperbolic Functions", **Chaos, Solitons & Fractals**, 23 (2): 379-389 (2005).

15. Stakhov, A. P., Tkachenko, I. S., “Hyperbolic Fibonacci Trigonometry”, **Rep. Ukrainian Acad. Science**, 208 (7): 9-14 (1993).
16. Stakhov, A. P., Rozin, B., “The Continuous Functions for the Fibonacci and Lucas p -numbers”, **Chaos, Solitons & Fractals**, 28 (4): 1014-1025 (2006).
17. Kocer, E. G., Stakhov, A. P., Tuglu, N., “On the m -extension of the Fibonacci and Lucas p -numbers”, **Chaos, Solitons & Fractals**, 40 (4): 1890-1906 (2009).
18. Bondarenko, B.A., “Generalized Pascal Triangles and Pyramids: Their Fractals, Graphs, and Applications” **Fibonacci Association**, (1993).
19. Zhang, F., “Matrix Theory: Basic Results and Techniques”, **Springer**, Newyork, (2011).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : POLATLI, Emrah
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 24.07.1986 Kırıkkale
Medeni hali : Bekâr
Telefon : 0 (537) 924 87 53
E-mail : emrahpolatli@gmail.com

Eğitim

Derece

Eğitim Birimi

Mezuniyet tarihi

Lisans

Selçuk Üniversitesi/ Matematik Bölümü

2008

Lise

Kırıkkale Anadolu Lisesi

2004

Yabancı Dil

İngilizce